ホモロジー代数（河田敬義）

使用しているのは第 6 刷.

目次

第 1 章

加群

1.1　加群

■直極限

$\varinjlim M_\lambda = M$ の元 $\tilde{x}$ に対して，或る十分大きな $\lambda \in \Lambda$ と $x_\lambda \in M_\lambda$ が存在して $\tilde{x} = \tilde{p} \circ i_\lambda(x_\lambda)$ と表される（p.25）．

証明 $\tilde{p}\colon \tilde{M} \to M$ は全射なので，$\tilde{x} = \tilde{p}(y)$ となる $y \in \tilde{M} = \bigoplus M_\lambda$ が存在する．直和の定義から，y の第 λ 成分が非零のものは有限個である．Λ は有向順序を持つので，このような任意の λ に対して $\lambda < \lambda'$ となるような $\lambda' \in \Lambda$ が存在し，

$$y = \sum_{\lambda \leq \lambda'} i_\lambda(y_\lambda) \quad (y_\lambda \in M_\lambda)$$

と表すことが出来る．ここで，R 準同型 $g_{\lambda'\lambda}\colon M_\lambda \to M_{\lambda'}$ を

$$g_{\lambda'\lambda} = \begin{cases} f_{\lambda'\lambda} & \lambda \leq \lambda' \\ (\bullet \mapsto 0) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定める．直和の普遍性（例 1.12, p.23）から $g\colon \tilde{M} \to M_{\lambda'}$ で任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $g_{\lambda'\lambda} = g \circ i_\lambda$ となるものが一意に存在する．$x_{\lambda'} = g(y)$ とすれば，$\tilde{x} = \tilde{p} \circ i_{\lambda'}(x_{\lambda'})$ となる．実際，

$$\begin{aligned}\tilde{p} \circ i_{\lambda'}(x_{\lambda'}) = \tilde{p} \circ i_{\lambda'} \circ g(y) = \tilde{p} \circ i_{\lambda'} \circ g\left(\sum_{\lambda \leq \lambda'} i_\lambda(y_\lambda)\right) = \tilde{p} \circ i_{\lambda'}\left(\sum_{\lambda \leq \lambda'} g \circ i_\lambda(y_\lambda)\right) \\ = \tilde{p} \circ i_{\lambda'}\left(\sum_{\lambda \leq \lambda'} g_{\lambda'\lambda}(y_\lambda)\right) = \tilde{p} \circ i_{\lambda'}\left(\sum_{\lambda \leq \lambda'} f_{\lambda'\lambda}(y_\lambda)\right) = \sum_{\lambda \leq \lambda'} \tilde{p}(i_{\lambda'} \circ f_{\lambda'\lambda}(y_\lambda)).\end{aligned}$$

ここで，$i_{\lambda'} \circ f_{\lambda'\lambda}(y_\lambda) - i_\lambda(y_\lambda) \in \tilde{N} = \ker \tilde{p}$ なので，

$$= \sum_{\lambda \leq \lambda'} \tilde{p}(i_\lambda(y_\lambda)) = \tilde{p}\left(\sum_{\lambda \leq \lambda'} i_\lambda(y_\lambda)\right) = \tilde{p}(y) = \tilde{x}.$$

□

上の状況で $\tilde{x} = 0$ となることと，十分大きな $\mu\ (> \lambda)$ が存在して $f_{\mu\lambda}(x_\lambda) = 0$ となることは同値である (p.25).

証明 $\tilde{x} = 0$ とする．$\lambda \in \Lambda$ が存在し，$\tilde{p} \circ i_\lambda(x_\lambda) = 0$ となる．$i_\lambda(x_\lambda) \in \ker \tilde{p} = \tilde{N}$ なので,

$$i_\lambda(x_\lambda) = \sum_{i \leq n} r_i \left(i_{\mu_i} \circ f_{\mu_i\lambda_i}(x_{\lambda_i}) - i_{\lambda_i}(x_{\lambda_i})\right) \quad (r_i \in R, \quad \mu_i > \lambda_i, \quad x_{\lambda_i} \in M_{\lambda_i})$$

と表すことが出来る．明らかに $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n\} = \Lambda'$ である．Λ' は有限集合で Λ は有向順序を持つので，十分大きい $\mu \in \Lambda$ が存在して，任意の $\mu_i, \lambda_i \in \Lambda'$ に対し $\mu_i, \lambda_i \leq \mu$ となる．ここで，R 準同型 $g_{\mu\lambda} \colon M_\lambda \to M_\mu$ を

$$g_{\mu\lambda} = \begin{cases} f_{\mu\lambda} & \lambda \in \Lambda' \\ (\bullet \mapsto 0) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定める．直和の普遍性（例 1.12, p.23）から $g \colon \tilde{M} \to M_\mu$ で任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $g_{\mu\lambda} = g \circ i_\lambda$ となるものが一意に存在する．$\lambda \in \Lambda'$ に注意すれば，$f_{\mu\lambda}(x_\lambda) = 0$ となる，実際,

$$\begin{aligned} f_{\mu\lambda}(x_\lambda) = g_{\mu\lambda}(x_\lambda) = g \circ i_\lambda(x_\lambda) &= g\left(\sum_{i \leq n} r_i \left(i_{\mu_i} \circ f_{\mu_i\lambda_i}(x_{\lambda_i}) - i_{\lambda_i}(x_{\lambda_i})\right)\right) \\ &= \sum_{i \leq n} r_i \left(g \circ i_{\mu_i} \circ f_{\mu_i\lambda_i}(x_{\lambda_i}) - g \circ i_{\lambda_i}(x_{\lambda_i})\right) = \sum_{i \leq n} r_i \left(g_{\mu\mu_i} \circ f_{\mu_i\lambda_i}(x_{\lambda_i}) - g_{\mu\lambda_i}(x_{\lambda_i})\right) \\ &= \sum_{i \leq n} r_i \left(f_{\mu\mu_i} \circ f_{\mu_i\lambda_i}(x_{\lambda_i}) - f_{\mu\lambda_i}(x_{\lambda_i})\right) = \sum_{i \leq n} r_i \left(f_{\mu\lambda_i}(x_{\lambda_i}) - f_{\mu\lambda_i}(x_{\lambda_i})\right) = 0. \end{aligned}$$

逆に，$f_{\mu\lambda}(x_\lambda) = 0$ となる $\mu > \lambda$ が存在すれば，$-i_\mu \circ f_{\mu\lambda}(x_\lambda) + i_\lambda(x_\lambda) = i_\lambda(x_\lambda) \in \tilde{N} = \ker \tilde{p}$ なので，$\tilde{x} = \tilde{p} \circ i_\lambda(x_\lambda) = 0$. □

■例 1.13

(i) 有限生成加群の直極限

証明 $\varphi_\lambda \colon M_\lambda \hookrightarrow M$ を使って，次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd} \bigoplus M_\lambda \arrow[d, "\tilde{p}"] & M_\lambda \arrow[l, "i_\lambda"'] \arrow[d, "\varphi_\lambda"] \\ \varinjlim M_\lambda \arrow[r, dotted, "\tilde{\varphi}"] & \bigcup M_\lambda \end{tikzcd}$$

$\tilde{x} \in \varinjlim M_\lambda$ に対し，$\tilde{p} \circ i_\lambda(x_\lambda)$ となる $\lambda \in \Lambda$ と $x_\lambda \in M_\lambda$ が存在する．これによって，$\tilde{\varphi} \colon \varinjlim M_\lambda \to \bigcup M_\lambda$ を $\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \varphi_\lambda(x_\lambda)$ と定める．$\tilde{\varphi}$ は λ の取り方に依らない．実際，$\lambda < \mu$ に対し $\tilde{p} \circ i_\lambda(x_\lambda) = \tilde{p} \circ i_\mu(x_\mu)$ であるとする．$i_\lambda(x_\lambda) - i_\mu(x_\mu) \in \ker \tilde{p} = \tilde{N}$ となるので，$i_\mu(x_\mu) = i_\mu \circ i_{\mu\lambda}(x_\lambda)$ となる．i_μ は単射なので $x_\mu = i_{\mu\lambda}(x_\lambda)$ である．$\varphi_\mu(x_\mu) = \varphi_\mu \circ i_{\mu\lambda}(x_\lambda) = \varphi_\lambda(x_\lambda)$ となる．以上から，$\varphi_\lambda = \tilde{\varphi} \circ \tilde{p} \circ i_\lambda$ である．$\tilde{\varphi}$ が全単射であることは容易に分かる．従って，$\varinjlim M_\lambda \simeq \bigcup M_\lambda$. □

(iii) 直極限の準同型

証明 まず，次の図式を可換にするような $\varphi\colon \varinjlim L_\lambda \to \varinjlim M_\lambda$ が唯一存在することを証明する．

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus L_\lambda \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "\varphi_\lambda^{\oplus}"] & \varinjlim L_\lambda \arrow[d, dotted, "\varphi"] \\
\bigoplus M_\lambda \arrow[r, "\tilde{p}'"] & \varinjlim M_\lambda
\end{tikzcd}$$

ここで，R 準同型

$$\varphi_\lambda^{\oplus}\colon \bigoplus L_\lambda \ni (x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \mapsto (\varphi_\lambda(x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda) \in \bigoplus M_\lambda$$

を定義した．また，$\ker \tilde{p} = \tilde{N}$，$\ker \tilde{p}' = \tilde{N}'$ とする：

$$\varinjlim L_\lambda = \left(\bigoplus L_\lambda\right)/\tilde{N}, \quad \varinjlim M_\lambda = \left(\bigoplus M_\lambda\right)/\tilde{N}'.$$

φ は well-defined である．実際，$x, y \in \bigoplus L_\lambda$，$\tilde{p}(x) = \tilde{p}(y)$ とすれば，$x - y \in \ker \tilde{p} = \tilde{N}$ なので

$$\begin{aligned}
\tilde{p}' \circ \varphi_\lambda^{\oplus}(x-y) &= \tilde{p}' \circ \varphi_\lambda^{\oplus}\left[\sum_i r_i \left(i_{\mu_i} \circ f_{\mu_i\lambda_i}(x_{\lambda_i}) - i_{\lambda_i}(x_{\lambda_i})\right)\right] \\
&= \tilde{p}'\left(\sum_i r_i \left(\varphi_{\mu_i} \circ f_{\mu_i\lambda_i}(x_{\lambda_i}) - \varphi_{\lambda_i}(x_{\lambda_i})\right)\right) \\
&= \sum_i r_i \tilde{p}' \left(\varphi_{\mu_i} \circ f_{\mu_i\lambda_i}(x_{\lambda_i}) - \varphi_{\lambda_i}(x_{\lambda_i})\right) \\
&= \sum_i r_i \tilde{p}' \left(f'_{\mu_i\lambda_i} \circ \varphi_{\lambda_i}(x_{\lambda_i}) - \varphi_{\lambda_i}(x_{\lambda_i})\right)
\end{aligned}$$

となる．$f'_{\mu_i\lambda_i} \circ \varphi_{\lambda_i}(x_{\lambda_i}) - \varphi_{\lambda_i}(x_{\lambda_i}) \in \tilde{N}' = \ker \tilde{p}'$ なので，これは 0 であり，φ は代表元の取り方に依らない．また，上の図式が可換となることから，φ の一意性も従う．

次に，以下の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
L_\lambda \arrow[r, "i_\lambda"] \arrow[d, "\varphi_\lambda"'] & \bigoplus L_\lambda \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "\varphi_\lambda^{\oplus}"'] & \varinjlim L_\lambda \arrow[d, "\varphi"] \\
L_\lambda \arrow[r, "i'_\lambda"] & \bigoplus M_\lambda \arrow[r, "\tilde{p}'"] & \varinjlim M_\lambda
\end{tikzcd}$$

左の図式の可換性は明らかなので，$\varphi \circ \tilde{p} \circ i_\lambda = \tilde{p}' \circ i'_\lambda \circ \varphi_\lambda$ である．

最後に，次の図式を可換にするような φ は初めの図式を可換にする，すなわち $\varphi \circ \tilde{p} = \tilde{p}' \circ \varphi_\lambda^{\oplus}$ となることを示す．

$$\begin{tikzcd}
L_\lambda \arrow[r, "\tilde{p} \circ i_\lambda"] \arrow[d, "\varphi_\lambda"'] & \varinjlim L_\lambda \arrow[d, "\varphi"] \\
L_\lambda \arrow[r, "\tilde{p}' \circ i'_\lambda"] & \varinjlim M_\lambda
\end{tikzcd}$$

このような φ が存在すれば，

$$\begin{aligned}\varphi\circ\tilde{p}\left(\sum i_\lambda(x_\lambda)\right)&=\sum\varphi\circ\tilde{p}\circ i_\lambda(x_\lambda)=\sum\tilde{p}'\circ i'_\lambda\circ\varphi_\lambda(x_\lambda)=\tilde{p}'\left(\sum i'_\lambda\circ\varphi_\lambda(x_\lambda)\right)\\&=\tilde{p}'\left(\sum\varphi_\lambda^{\oplus}\circ i'_\lambda(x_\lambda)\right)=\tilde{p}'\circ\varphi_\lambda^{\oplus}\left(\sum i'_\lambda(x_\lambda)\right)\end{aligned}$$

なので，$\varphi\circ\tilde{p}=\tilde{p}'\circ\varphi_\lambda^{\oplus}$ となる．先程の結果と合わせて，φ が初めの図式を可換にすることと上の図式を可換にすることは同値．初めの図式を可換にする φ は唯一なので，上の図式を可換にする図式も唯一である． □

(iv) 直極限の準同型

証明 記号は (iii) と同じものを使う．$\{\ker\varphi_\lambda\}$ は $f_{\mu\lambda}$ の制限によって直族となることが容易に分かる．自然な単射 R 準同型

$$\imath\colon\ \varinjlim(\ker\varphi_\lambda)\ni x+\ker\tilde{\pi}\mapsto x+\ker\tilde{p}\in\varinjlim L_\lambda$$

によって $\varinjlim(\ker\varphi_\lambda)\subset\varinjlim L_\lambda$ とみなす．

$$\begin{array}{ccccccc}\ker\varphi_\lambda & \xrightarrow{f_{\mu\lambda}} & \ker\varphi_\mu & \xrightarrow{i_\mu} & \bigoplus\ker\varphi_\lambda & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \varinjlim(\ker\varphi_\lambda)\\ {\scriptstyle\hookrightarrow}\downarrow & & {\scriptstyle\hookrightarrow}\downarrow & & {\scriptstyle\hookrightarrow}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\imath}\\ L_\lambda & \xrightarrow{f_{\mu\lambda}} & L_\mu & \xrightarrow{i_\mu} & \bigoplus L_\lambda & \xrightarrow{\tilde{p}} & \varinjlim L_\lambda\\ {\scriptstyle\varphi_\lambda}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi_\mu}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi_\lambda^{\oplus}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varinjlim\varphi}\\ M_\lambda & \xrightarrow{f'_{\mu\lambda}} & M_\mu & \xrightarrow{i'_\mu} & \bigoplus M_\lambda & \xrightarrow{\tilde{p}'} & \varinjlim M_\lambda\end{array}$$

$x\in\ker(\varinjlim\varphi)\subset\varinjlim L_\lambda$ とする．十分大きな $\lambda\in\Lambda$ と $x_\lambda=L_\lambda$ によって $x=\tilde{p}\circ i_\lambda(x_\lambda)$ と表せる．ここで $y_\lambda=\varphi_\lambda(x_\lambda)\in M_\lambda$ とおけば，

$$0=(\varinjlim\varphi)(x)=\varinjlim\varphi\circ\tilde{p}\circ i_\lambda(x_\lambda)=\tilde{p}'\circ i'_\lambda\circ\varphi_\lambda(x_\lambda)=\tilde{p}'\circ i'_\lambda(y_\lambda)$$

なので，$\mu>\lambda$ によって $0=f'_{\mu\lambda}(y_\lambda)=f'_{\mu\lambda}\circ\varphi_\lambda(x_\lambda)=\varphi_\mu\circ f_{\mu\lambda}(x_\lambda)$ となる．$x_\mu=f_{\mu\lambda}(x_\lambda)\in L_\mu$ とおけば，$\varphi_\mu(x_\mu)=0$ すなわち $x_\mu\in\ker\varphi_\mu$ である．$x=\tilde{p}\circ i_\lambda(x_\lambda)=\tilde{p}\circ i_\mu\circ f_{\mu\lambda}(x_\lambda)=\tilde{p}\circ i_\mu(x_\mu)=\imath\circ\tilde{\pi}\circ i_\mu(x_\mu)\in\imath\left(\varinjlim(\ker\varphi_\lambda)\right)$ であり，$\ker(\varinjlim\varphi)\subset\varinjlim(\ker\varphi_\lambda)$.

$$\begin{array}{ccccc}\ker\varphi_\lambda & \xrightarrow{i_\lambda} & \bigoplus\ker\varphi_\lambda & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \varinjlim(\ker\varphi_\lambda)\\ {\scriptstyle\hookrightarrow}\downarrow & & {\scriptstyle\hookrightarrow}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\imath}\\ L_\lambda & \xrightarrow{i_\lambda} & \bigoplus L_\lambda & \xrightarrow{\tilde{p}} & \varinjlim L_\lambda\\ {\scriptstyle\varphi_\lambda}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi_\lambda^{\oplus}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varinjlim\varphi}\\ M_\lambda & \xrightarrow{i'_\lambda} & \bigoplus M_\lambda & \xrightarrow{\tilde{p}'} & \varinjlim M_\lambda\end{array}$$

逆に，$x\in\varinjlim(\ker\varphi_\lambda)$ とする．十分大きな $\lambda\in\Lambda$ と $x_\lambda\in\ker\varphi_\lambda$ によって $x=\tilde{\pi}\circ i_\lambda(x_\lambda)$ と表せる．$\imath(x)=\imath\circ\tilde{\pi}\circ i_\lambda(x_\lambda)=\tilde{p}\circ i_\lambda(x_\lambda)$ なので，$(\varinjlim\varphi)\circ\imath(x)=(\varinjlim\varphi)\circ\tilde{p}\circ i_\lambda(x_\lambda)=\tilde{p}'\circ i'_\mu\circ\varphi_\lambda(x_\mu)=0$ となる．従って，$\imath(x)\in\ker(\varinjlim\varphi)$ であり，$\varinjlim(\ker\varphi_\lambda)\subset\ker(\varinjlim\varphi)$.

$$\begin{tikzcd}
L_\lambda \arrow[r, "i_\lambda"] \arrow[d, "\varphi_\lambda"'] & \bigoplus L_\lambda \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "\varphi_\lambda^{\oplus}"'] & \varinjlim L_\lambda \arrow[d, "\varinjlim \varphi"] \\
M_\lambda \arrow[r, "i'_\lambda"] & \bigoplus M_\lambda \arrow[r, "\tilde{p}'"] & \varinjlim M_\lambda \\
\operatorname{Im}\varphi_\lambda \arrow[r, "i'_\lambda"] \arrow[u, hook] & \bigoplus \operatorname{Im}\varphi_\lambda \arrow[r, "\tilde{\pi}'"] \arrow[u, hook] & \varinjlim(\operatorname{Im}\varphi_\lambda) \arrow[u, "\jmath"']
\end{tikzcd}$$

$y \in \operatorname{Im}(\varinjlim \varphi)$ とする．$y = (\varinjlim \varphi)(x)$ となる $x \in \varinjlim L_\lambda$ が存在する．直極限の性質から $\lambda \in \Lambda$ と $x_\lambda \in L_\lambda$ によって $x = \tilde{p} \circ i_\lambda(x_\lambda)$ と表せる．従って，

$$y = (\varinjlim \varphi)(x) = (\varinjlim \varphi) \circ \tilde{p} \circ i_\lambda(x_\lambda) = \tilde{p}' \circ i'_\lambda \circ \varphi_\lambda(x_\lambda) = \jmath \circ \tilde{\pi}' \circ i'_\lambda \circ \varphi_\lambda(x_\lambda) \in \jmath\left(\varinjlim(\operatorname{Im}\varphi_\lambda)\right)$$

であり，$\operatorname{Im}(\varinjlim \varphi) \subset \varinjlim(\operatorname{Im}\varphi_\lambda)$.

逆に，$y \in \varinjlim(\operatorname{Im}\varphi_\lambda)$ とする．$\lambda \in \Lambda$ と $y_\lambda \in \operatorname{Im}\varphi_\lambda$ によって $y = \tilde{\pi}' \circ i'_\lambda(y_\lambda)$ と表せる．$y_\lambda = \varphi_\lambda(x_\lambda)$ となる $x_\lambda \in L_\lambda$ が存在するので，

$$\jmath(y) = \jmath \circ \tilde{\pi}' \circ i'_\lambda \circ \varphi_\lambda(x_\lambda) = \tilde{p}' \circ i'_\lambda \circ \varphi_\lambda(x_\lambda) = (\varinjlim \varphi) \circ \tilde{p} \circ i_\lambda(x_\lambda) \in \operatorname{Im}(\varinjlim \varphi).$$

従って，$\varinjlim(\operatorname{Im}\varphi_\lambda) \subset \operatorname{Im}(\varinjlim \varphi)$. □

1.2 Hom と ⊗

■例 1.17

(v) 直極限の準同型

証明 $\{M_\lambda\}$ を直族とする．$\lambda < \mu$ に対し R 準同型

$${}^{\#}f_{\lambda\mu}\colon \operatorname{Hom}_R(M_\mu, N) \ni f \mapsto f \circ f_{\mu\lambda} \in \operatorname{Hom}_R(M_\lambda, N)$$

を定義することによって $\{\operatorname{Hom}_R(M_\lambda, N)\}$ は逆族となる．実際，$\lambda < \mu < \nu$，$f \in \operatorname{Hom}_R(M_\nu, N)$ とすれば，${}^{\#}f_{\lambda\mu} \circ {}^{\#}f_{\mu\nu}(f) = f \circ f_{\nu\mu} \circ f_{\mu\lambda} = f \circ f_{\nu\lambda} = {}^{\#}f_{\lambda\nu}(f)$ である．$h \in \operatorname{Hom}_R\left(\varinjlim M_\lambda, N\right)$ とすれば，$(h \circ \tilde{p} \circ i_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \in \varprojlim \operatorname{Hom}_R(M_\lambda, N)$ である．実際，直極限の構成から $h \circ \tilde{p} \in \operatorname{Hom}_R(\bigoplus M_\lambda, N)$ となり，(iii) の証明から，$(h \circ \tilde{p} \circ i_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \in \prod \operatorname{Hom}_R(M_\lambda, N)$ となる．${}^{\#}f_{\lambda\mu} \circ p_\mu((h \circ \tilde{p} \circ i_\lambda)) = h \circ \tilde{p} \circ i_\mu \circ f_{\mu\lambda} = h \circ \tilde{p} \circ i_\lambda = p_\lambda((h \circ \tilde{p} \circ i_\lambda))$ であるので，逆極限の構成から，$(h \circ \tilde{p} \circ i_\lambda) \in \varprojlim \operatorname{Hom}_R(M_\lambda, N)$ となる．以上から，R 準同型

$$\psi\colon \operatorname{Hom}_R\left(\varinjlim M_\lambda, N\right) \ni h \mapsto (h \circ \tilde{p} \circ i_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \in \varprojlim \operatorname{Hom}_R(M_\lambda, N)$$

が得られた．ψ は単射である．実際，$(h \circ \tilde{p} \circ i_\lambda) = (0, \ldots, 0)$ とすれば，全ての $\lambda \in \Lambda$ と $x_\lambda \in M_\lambda$ に対し $h \circ \tilde{p} \circ i_\lambda(x_\lambda) = 0$ となる．ところで，$\varinjlim M_\lambda$ の任意の元は十分大きな $\lambda \in \Lambda$ と $x_\lambda \in M_\lambda$ によって $\tilde{p} \circ i_\lambda(x_\lambda)$ と表せる．従って，$h = 0$ である．

$$\begin{tikzcd}
M_\lambda \arrow[r, "i_\lambda"] \arrow[d, "f_\lambda"'] & \bigoplus M_\lambda \arrow[d, "\tilde{p}"] \\
N & \varinjlim M_\lambda \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}$$

最後に，ψ が全射であることを示す．$(f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \in \varprojlim \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, N)$ とする．直和の普遍性から，R 準同型 $f\colon \bigoplus M_\lambda \to N$ で，全ての $\lambda \in \Lambda$ に対して $f_\lambda = f \circ i_\lambda$ となるものが一意に存在する．R 準同型

$$h\colon \varinjlim M_\lambda \ni \tilde{x} \mapsto f_\lambda(x_\lambda) \in N \quad \tilde{x} = \tilde{p} \circ i_\lambda(x_\lambda), \quad x_\lambda \in M_\lambda$$

を考える．これは $x_\lambda \in M_\lambda$ 及び $\lambda \in \Lambda$ の取り方に依らない．実際，$\tilde{x} = \tilde{p} \circ i_\lambda(x_\lambda) = \tilde{p} \circ i_\lambda(y_\lambda)$ とすれば，$\tilde{p} \circ i_\lambda(x_\lambda - y_\lambda) = 0$ となるので，ある $\mu > \lambda$ が存在して $f_{\mu\lambda}(x_\lambda - y_\lambda)$ となる．$f_\lambda(x_\lambda) = f_\mu \circ f_{\mu\lambda}(x_\lambda) = f_\mu \circ f_{\mu\lambda}(y_\lambda) = f_\lambda(y_\lambda)$ なので，h は $x_\lambda \in M_\lambda$ の取り方に依らない．$\tilde{x} = \tilde{p} \circ i_\lambda(x_\lambda) = \tilde{p} \circ i_\mu(y_\mu)$ とする．$\mu > \lambda$ なら $\tilde{p} \circ i_\lambda(x_\lambda) = \tilde{p} \circ i_\mu \circ f_{\mu\lambda}(x_\lambda) = \tilde{p} \circ i_\mu(y_\mu)$ となり，先程の場合に帰着される．これで ψ が全射であることが示せた． □

(vi) 直極限の準同型

証明 $\{N_\lambda\}$ を逆族とする．$\lambda < \mu$ に対し R 準同型

$$g^{\#}_{\lambda\mu}\colon \mathrm{Hom}_R(M, N_\mu) \ni g \mapsto g_{\lambda\mu} \circ g \in \mathrm{Hom}_R(M, N_\lambda)$$

によって $\{\mathrm{Hom}_R(M, N_\lambda)\}$ は逆族となる．実際，$\lambda < \mu < \nu$，$f \in \mathrm{Hom}_R(M, N_\nu)$ として，$g^{\#}_{\lambda\mu} \circ g^{\#}_{\mu\nu}(f) = g_{\lambda\mu} \circ g_{\mu\nu} \circ f = g_{\lambda\nu} \circ f = g^{\#}_{\lambda\nu}(f)$ である．$f \in \mathrm{Hom}_R(M, \varprojlim N_\lambda)$ に対し，$(p_\lambda \circ f \mid \lambda \in \Lambda) \in \varprojlim \mathrm{Hom}_R(M, N_\lambda)$ となる．実際，容易に分かるように $(p_\lambda \circ f \mid \lambda \in \Lambda) \in \prod \mathrm{Hom}_R(M, N_\lambda)$ である．$g^{\#}_{\lambda\mu} \circ p_\mu((p_\lambda \circ f)) = g_{\lambda\mu} \circ p_\mu \circ f$ となるが，f の値域は $\varprojlim N_\lambda$ なので，$g_{\lambda\mu} \circ p_\mu \circ f = p_\lambda \circ f = p_\lambda((p_\lambda \circ f))$ となる．以上から，R 準同型

$$\psi\colon \mathrm{Hom}_R\left(M, \varprojlim N_\lambda\right) \ni h \mapsto (p_\lambda \circ h \mid \lambda \in \Lambda) \in \varprojlim \mathrm{Hom}_R(M, N_\lambda) \subset \prod \mathrm{Hom}_R(M, N_\lambda)$$

が得られた．ψ は単射である．実際，$(p_\lambda \circ h) = (0, \ldots)$ とすると，全ての $\lambda \in \Lambda$ と $x \in M$ に対し $p_\lambda \circ h(y) = 0$ となる．従って，$h = 0$ となる．最後に，ψ が全射であることを示す．$(h_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \in \varprojlim \mathrm{Hom}_R(M, N_\lambda)$ とすれば，$g^{\#}_{\lambda\mu} \circ p_\mu((h_\lambda)) = p_\lambda((h_\lambda))$ なので $g_{\lambda\mu} \circ h_\mu = h_\lambda$．従って，$(h_\lambda) \in \mathrm{Hom}_R\left(M, \varprojlim N_\lambda\right)$ であり，$\psi((h_\lambda)) = (h_\lambda)$． □

■例 1.19

(v) 直極限とテンソル積

証明 $\{M_\lambda\}$ を直族とする．$\lambda < \mu$ に対し R 準同型

$$f_{\mu\lambda} \otimes 1\colon M_\lambda \otimes_R N \ni x_\lambda \otimes y \mapsto f_{\mu\lambda}(x_\lambda) \otimes y \in M_\mu \otimes_R N$$

によって $\{M_\lambda \otimes_R N\}$ は直族となる．実際，$\lambda < \mu < \nu$，$x_\lambda \in M_\lambda$，$y \in N$ に対し $(f_{\nu\mu} \otimes 1) \circ (f_{\mu\lambda} \otimes 1)(x_\lambda \otimes y) = (f_{\nu\mu} \otimes 1)(f_{\mu\lambda}(x_\lambda) \otimes y) = f_{\nu\mu} \circ f_{\mu\lambda}(x_\lambda) \otimes y = f_{\nu\lambda}(x_\lambda) \otimes y = (f_{\nu\lambda} \otimes 1)(x_\lambda \otimes y)$ となる．R 同型 $\phi\colon (\bigoplus M_\lambda) \otimes_R N \simeq \bigoplus (M_\lambda \otimes_R N)$ によって，包含写像

$$\phi \circ (i_\lambda \otimes 1)\colon M_\lambda \otimes_R N \ni x_\lambda \otimes y \mapsto \phi \circ (i_\lambda \otimes 1)(x_\lambda \otimes y) = \phi(i_\lambda(x_\lambda) \otimes y) \in \bigoplus (M_\lambda \otimes_R N)$$

を構成する．$\tilde{N} = \langle i_\mu \circ f_{\mu\lambda}(x_\lambda) - i_\lambda(x_\lambda) \rangle$ とすれば，直極限は $\varinjlim M_\lambda = (\bigoplus M_\lambda) / \tilde{N}$ となる．$\{M_\lambda \otimes_R N\}$ の直極限 $\varinjlim (M_\lambda \otimes_R N)$ を構成する際の ker は

$$\langle \phi \circ (i_\mu \otimes 1)(f_{\mu\lambda} \otimes 1)(x_\lambda \otimes y) - \phi \circ (i_\lambda \otimes 1)(x_\lambda \otimes y) \rangle = \langle \phi(i_\mu \circ f_{\mu\lambda}(x_\lambda) \otimes y) - \phi(i_\lambda(x_\lambda) \otimes y) \rangle = \phi(\tilde{N} \otimes N)$$

とかける．従って，

$$\varinjlim (M_\lambda \otimes_R N) = \bigoplus (M_\lambda \otimes_R N) / \phi(\tilde{N} \otimes N) \simeq \left(\bigoplus M_\lambda\right) \otimes_R N/(\tilde{N} \otimes_R N)$$
$$\simeq \left(\bigoplus M_\lambda/\tilde{N}\right) \otimes_R N = (\varinjlim M_\lambda) \otimes_R N.$$

1 つ目の同型は $\psi = \phi^{-1}\colon \bigoplus(M_\lambda \otimes_R N) \simeq (\bigoplus M_\lambda) \otimes_R N$ から自然に誘導される：

$$\bigoplus (M_\lambda \otimes_R N) / \phi(\tilde{N} \otimes N) \ni x + \phi(\tilde{N} \otimes N) \mapsto \psi(x) + \tilde{N} \otimes N \in \left(\bigoplus M_\lambda\right) \otimes_R N/(\tilde{N} \otimes_R N).$$

2 つ目の同型は

$$\left(\bigoplus M_\lambda\right) \otimes_R N/(\tilde{N} \otimes_R N) \ni (x \otimes y) + \tilde{N} \otimes_R N \mapsto (x + \tilde{N}) \otimes y \in \left(\bigoplus M_\lambda/\tilde{N}\right) \otimes_R N$$

で与えられる． □

■例 1.20　(i) の $\mathrm{Hom}_R(L, \mathrm{Hom}_S(M, N))$ は正しくは $\mathrm{Hom}_S(L, \mathrm{Hom}_R(M, N))$．(ii) も同様の修正．

1.3　射影的加群，単射的加群，平坦加群

■補題 1.4

(v) $\Phi^\wedge \circ \Psi = 1$

証明　先ずは記号を整理しておく．(iv) で与えられた単射

$$\Phi\colon M \ni x \mapsto \Phi_x = (M^\wedge \ni \varphi \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \in M^{\wedge\wedge}$$

及びその双対：

$$\Phi^\wedge\colon M^{\wedge\wedge\wedge} \ni \xi \mapsto \xi \circ \Phi \in M^\wedge.$$

$M^\wedge$ に対して (iv) を考えた写像単射：

$$\Psi\colon M^\wedge \ni \varphi \mapsto \Psi_\varphi = (M^{\wedge\wedge} \ni \chi \mapsto \chi(\varphi) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \in M^{\wedge\wedge\wedge}.$$

先ず，$\Psi(\varphi) = \Psi_\varphi = (M^{\wedge\wedge} \ni \chi \mapsto \chi(\varphi) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \in M^{\wedge\wedge\wedge}$ とおく．$\varphi \in M^\wedge$ に対し

$$(\Phi^\wedge \circ \Psi)(\varphi) = \Phi^\wedge(\Psi(\varphi)) = \Phi^\wedge(\Psi_\varphi) = \Psi_\varphi \circ \Phi \in M^\wedge$$

なので，$x \in M$ に対し，

$$(\Phi^\wedge \circ \Psi)(\varphi)(x) = (\Psi_\varphi \circ \Phi)(x) = \Psi_\varphi(\Phi(x)) = \Psi_\varphi(\Phi_x) = \Phi_x(\varphi) = \varphi(x).$$

従って，$(\Phi^\wedge \circ \Psi)(\varphi) = \varphi$ であり，$\Phi^\wedge \circ \Psi = 1$． □

■**補題** 1.5

$f^{\wedge\wedge}$ の L への制限

証明 先ずは記号を整理しておく．(iv) で与えられた単射

$$\Phi\colon L \ni x \mapsto \Phi_x = (L^{\wedge} \ni \varphi \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \in L^{\wedge\wedge}$$

と

$$\Phi'\colon M \ni y \mapsto \Phi'_y = (M^{\wedge} \ni \varphi' \mapsto \varphi'(y) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \in M^{\wedge\wedge}.$$

$f\colon L \to M$ の双対

$$f^{\wedge}\colon M^{\wedge} \ni \varphi' \mapsto \varphi' \circ f \in L^{\wedge}$$

とその双対

$$f^{\wedge\wedge}\colon L^{\wedge\wedge} \ni \chi \mapsto \chi \circ f^{\wedge} \in M^{\wedge\wedge}.$$

$f^{\wedge\wedge}$ の L への制限を考えるが，Φ によって $L \subset L^{\wedge\wedge}$ とみなしているので，正確には $f^{\wedge\wedge}$ の $\{\,\Phi_x \mid x \in L\,\}$ への制限を考える．$f^{\wedge\wedge}(\Phi_x) = \Phi_x \circ f^{\wedge} \in M^{\wedge\wedge}$ なので，これが $\Phi'_{f(x)}$ と等しいことを示せばよい．$\varphi' \in M^{\wedge}$ として，

$$(\Phi_x \circ f^{\wedge})(\varphi') = \Phi_x(f^{\wedge}(\varphi')) = \Phi_x(\varphi' \circ f) = (\varphi' \circ f)(x) = \varphi'(f(x)) = \Phi'_{f(x)}(\varphi').$$

従って，$f^{\wedge\wedge}(\Phi_x) = \Phi'_{f(x)}$ となり，$f^{\wedge\wedge}$ の L への制限は f となる．

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ {\scriptstyle\Phi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\Phi'} \\ L^{\wedge\wedge} & \xrightarrow[f^{\wedge\wedge}]{} & M^{\wedge\wedge} \end{array}$$

□

$g^{*\wedge}$ の L への制限

証明 先ずは記号を整理しておく．(iv) で与えられた単射

$$\Phi\colon R \ni a \mapsto \Phi_a = (R^{\wedge} \ni \varphi \mapsto \varphi(a) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \in R^{\wedge\wedge}$$

と

$$\Phi'\colon L \ni x \mapsto \Phi'_x = (L^{\wedge} \ni \varphi' \mapsto \varphi'(x) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \in L^{\wedge\wedge}.$$

$g\colon L \to R^{\wedge}$ の双対

$$g^{\wedge}\colon R^{\wedge\wedge} \ni \chi \mapsto \chi \circ g \in L^{\wedge}.$$

$g^* = g^{\wedge} \circ \Phi\colon R \to L^{\wedge}$ の双対

$$g^{*\wedge}\colon L^{\wedge\wedge} \ni \chi' \mapsto \chi' \circ g^* = \chi' \circ g^{\wedge} \circ \Phi \in R^{\wedge}.$$

$g^{*\wedge}$ の L への制限を考えるが，Φ' によって $L \subset L^{\wedge\wedge}$ とみなしているので，正確には $g^{*\wedge}$ の $\{\, \Phi'_x \mid x \in L \,\}$ への制限を考える．$g^{*\wedge}(\Phi'_x) = \Phi'_x \circ g^{\wedge} \circ \Phi \in R^{\wedge}$ なので，$a \in R$ として

$$(\Phi'_x \circ g^{\wedge} \circ \Phi)(a) = \Phi'_x(g^{\wedge}(\Phi(a))) = \Phi'_x(g^{\wedge}(\Phi_a)) = \Phi'_x(\Phi_a \circ g) = (\Phi_a \circ g)(x) = \Phi_a(g(x)) = g(x)(a).$$

従って，$g^{*\wedge}(\Phi'_x) = g(x)$ となり，$g^{*\wedge}$ の L への制限は g となる． $\square$

第 2 章

複体とホモロジー

2.2　2 重複体

■**例** 2.8

平坦加群の定義．左 R 加群 L に対し，以下の 2 つは同値である：

(i) L は平坦加群である（定義 1.5，p.46）

(ii) 任意の右 R 加群の完全列 $\cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \cdots$ に対し $\cdots \longrightarrow M_1 \otimes_R L \longrightarrow M_2 \otimes_R L \longrightarrow \cdots$ が完全である．

証明　(ii) が成立すれば (i) が成立することは明らか（0 からはじまる適当な完全列を考えればよい）．

(i) が成立しているときに (ii) が成立することを示すには，(i) のもとで右 R 加群の完全系列

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$$

に対し

$$M_1 \otimes_R L \xrightarrow{f\otimes 1} M_2 \otimes_R L \xrightarrow{g\otimes 1} M_3 \otimes_R L$$

が完全となること，すなわち $\mathrm{Im}(f \otimes 1) = \ker(g \otimes 1)$ を証明すればよい．

$g\colon M_2 \to M_3$ に対し，R 加群の準同型

$$g'\colon M_2 \ni m_2 \mapsto g(m_2) \in \mathrm{Im}\, g$$

と包含写像 $\imath\colon \mathrm{Im}\, g \hookrightarrow M_3$ を考えれば，明らかに $g = \imath \circ g'$ となる．g' は全射なので

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g'} \mathrm{Im}\, g' \longrightarrow 0$$

は完全列で，テンソル積は右完全なので

$$M_1 \otimes_R L \xrightarrow{f\otimes 1} M_2 \otimes_R L \xrightarrow{g'\otimes 1} \mathrm{Im}\, g' \otimes_R L \longrightarrow 0$$

も完全である：$\mathrm{Im}(f \otimes 1) = \ker(g' \otimes 1)$．

$\imath\colon \operatorname{Im} g \hookrightarrow M_3$ は単射であるので，(i) から $\imath \otimes 1\colon \operatorname{Im} g' \otimes_R L \to M_3 \otimes_R L$ も単射である：

$$\begin{tikzcd}
M_1 \otimes_R L \arrow[r, "f\otimes 1"] & M_2 \otimes_R L \arrow[rr, "g'\otimes 1"] \arrow[dr, "g\otimes 1"'] & & \operatorname{Im} g' \otimes_R L \arrow[r] \arrow[dl, "\imath\otimes 1"] & 0 \\
& & M_3 \otimes_R L & &
\end{tikzcd}$$

$\ker(g' \otimes 1) = \ker(g \otimes 1)$ を示せば証明は完了する．$\sum x_i \otimes y_i \in \ker(g' \otimes 1)$ とすれば，$(g \otimes 1)(\sum x_i \otimes y_i) = (\imath \otimes 1) \circ (g' \otimes 1)(\sum x_i \otimes y_i) = 0$ なので，$\sum x_i \otimes y_i \in \ker(g \otimes 1)$ である．従って $\ker(g' \otimes 1) \subset \ker(g \otimes 1)$. $\sum x_i \otimes y_i \in \ker(g \otimes 1)$ とすれば，$0 = (g \otimes 1)(\sum x_i \otimes y_i) = (\imath \otimes 1) \circ (g' \otimes 1)(\sum x_i \otimes y_i)$ である．$\imath \otimes 1$ は単射なので，$(g' \otimes 1)(\sum x_i \otimes y_i) = 0$ すなわち $\sum x_i \otimes y_i \in \ker(g' \otimes 1)$ であり，$\ker(g \otimes 1) \subset \ker(g' \otimes 1)$. □

■例 2.10

単射的加群の定義. 左 R 加群 I に対し，以下の 2 つは同値である：

(i) I は単射的加群である（定義 1.2，p.40）

(ii) 任意の左 R 加群の完全列 $\cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \cdots$ に対し $\cdots \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_2, I) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M_1, I) \longrightarrow \cdots$ が完全である．

証明 (ii) が成立すれば (i) が成立することは定理 1.7(p.49) から明らか.

(i) が成立しているときに (ii) が成立することを示すには，(i) のもとで左 R 加群の完全系列

$$M_1 \xrightarrow{\ f\ } M_2 \xrightarrow{\ g\ } M_3$$

に対し

$$\operatorname{Hom}_R(M_3, I) \xrightarrow{\ {}^{\#}g\ } \operatorname{Hom}_R(M_2, I) \xrightarrow{\ {}^{\#}f\ } \operatorname{Hom}_R(M_1, I)$$

が完全となること，すなわち $\operatorname{Im}({}^{\#}g) = \ker({}^{\#}f)$ を証明すればよい．$g\colon M_2 \to M_3$ に対し，R 加群の準同型

$$g'\colon M_2 \ni m_2 \mapsto g(m_2) \in \operatorname{Im} g$$

と包含写像 $\imath\colon \operatorname{Im} g \hookrightarrow M_3$ を考えれば，明らかに $g = \imath \circ g'$ となる．g' は全射なので

$$M_1 \xrightarrow{\ f\ } M_2 \xrightarrow{\ g'\ } \operatorname{Im} g \longrightarrow 0$$

は完全列で，Hom_R は左完全なので

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Im} g, I) \xrightarrow{\ {}^{\#}g'\ } \operatorname{Hom}_R(M_2, I) \xrightarrow{\ {}^{\#}f\ } \operatorname{Hom}_R(M_1, I)$$

も完全である：$\operatorname{Im}({}^{\#}g') = \ker({}^{\#}f)$．$\imath\colon \operatorname{Im} g \hookrightarrow M_3$ は単射なので，(i) の仮定から $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Im} g, I)$ に対し，$\varphi = \tilde{\varphi} \circ \imath = {}^{\#}\imath(\tilde{\varphi})$ となる $\tilde{\varphi} \in \operatorname{Hom}_R(M_3, I)$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Im} g, I) \arrow[rr, "{}^{\#}g'"] & & \operatorname{Hom}_R(M_2, I) \arrow[r, "{}^{\#}f"] & \operatorname{Hom}_R(M_1, I) \\
& & \operatorname{Hom}_R(M_3, I) \arrow[ul, "{}^{\#}\imath"] \arrow[ur, "{}^{\#}g"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Im}({}^{\#}g') = \mathrm{Im}({}^{\#}g)$ を示せば証明は完了する．$\mathrm{Im}({}^{\#}g')$ の元は $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Im}\, g, I)$ によって ${}^{\#}g'(\varphi)$ と表すことができ，

$$ {}^{\#}g'(\varphi) = \varphi \circ g' = \tilde{\varphi} \circ \imath \circ g' = \tilde{\varphi} \circ g = {}^{\#}g(\varphi) \in \mathrm{Im}({}^{\#}g) $$

となるので，$\mathrm{Im}({}^{\#}g') \subset \mathrm{Im}({}^{\#}g)$．$\mathrm{Im}({}^{\#}g)$ の元は $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_R(M_3, I)$ によって ${}^{\#}g(\tilde{\varphi})$ と表すことができ，

$$ {}^{\#}g(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi} \circ g = \tilde{\varphi} \circ \imath \circ g' = \varphi \circ g' = {}^{\#}g'(\varphi) \in \mathrm{Im}({}^{\#}g') $$

となるので，$\mathrm{Im}({}^{\#}g) \subset \mathrm{Im}({}^{\#}g')$． □

射影的加群の定義．左 R 加群 P に対し，以下の 2 つは同値である：

(i) P は射影的加群である（定義 1.1，p.36）

(ii) 任意の左 R 加群の完全列 $\cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \cdots$ に対し $\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M_2) \longrightarrow \cdots$ が完全である．

証明 (ii) が成立すれば (i) が成立することは定理 1.3(p.37) から明らか．

(i) が成立しているときに (ii) が成立することを示すには，(i) のもとで左 R 加群の完全系列

$$ M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 $$

に対し

$$ \mathrm{Hom}_R(P, M_1) \xrightarrow{f^{\#}} \mathrm{Hom}_R(P, M_2) \xrightarrow{g^{\#}} \mathrm{Hom}_R(P, M_3) $$

が完全となること，すなわち $\mathrm{Im}\, f^{\#} = \ker g^{\#}$ を証明すればよい．$f\colon M_1 \to M_2$ に対し，R 加群の準同型

$$ f'\colon\ \mathrm{Coim}\, f = M_1/\ker f \ni m_1 + \ker f \mapsto f(m_1) \in M_2 $$

と射影 $\pi\colon M_1 \to \mathrm{Coim}\, f$ を考えれば，明らかに $f = f' \circ \pi$ となる．f' は単射なので

$$ 0 \longrightarrow \mathrm{Coim}\, f \xrightarrow{f'} M_2 \xrightarrow{g} M_3 $$

は完全列で，Hom_R は左完全なので

$$ 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, \mathrm{Coim}\, f) \xrightarrow{f'^{\#}} \mathrm{Hom}_R(P, M_2) \xrightarrow{g^{\#}} \mathrm{Hom}_R(P, M_3) $$

も完全である：$\mathrm{Im}\, f'^{\#} = \ker g^{\#}$．$\pi\colon M_1 \to \mathrm{Coim}\, f$ は全射なので，(i) の仮定から $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(P, \mathrm{Coim}\, f)$ に対し，$\varphi = \pi \circ \tilde{\varphi} = \pi^{\#}(\tilde{\varphi})$ となる $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_R(P, M_1)$ が存在する：

$$ \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P, \mathrm{Coim}\, f) \arrow[rr, "f'^{\#}"] & & \mathrm{Hom}_R(P, M_2) \arrow[r, "g^{\#}"] & \mathrm{Hom}_R(P, M_3) \\ & & \mathrm{Hom}_R(P, M_1) \arrow[ul, "\pi^{\#}"] \arrow[ur, "f^{\#}"'] & & \end{tikzcd} $$

$\mathrm{Im}(f'^{\#}) = \mathrm{Im}(f^{\#})$ を示せば証明は完了する．$\mathrm{Im}(f'^{\#})$ の元は $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(P, \mathrm{Coim}\, f)$ によって $f'^{\#}(\varphi)$ と表すことができ，

$$ f'^{\#}(\varphi) = f' \circ \varphi = f' \circ \pi \circ \tilde{\varphi} = f \circ \tilde{\varphi} = f^{\#}(\tilde{\varphi}) \in \mathrm{Im}(f^{\#}) $$

となるので，$\mathrm{Im}(f'^{\#}) \subset \mathrm{Im}(f^{\#})$．$\mathrm{Im}(f^{\#})$ の元は $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_R(P, M_1)$ によって $f^{\#}(\tilde{\varphi})$ と表すことができ，

$$f^{\#}(\tilde{\varphi}) = f \circ \tilde{\varphi} = f' \circ \pi \circ \tilde{\varphi} = f' \circ \varphi = f'^{\#}(\varphi) \in \mathrm{Im}(f'^{\#})$$

となるので，$\mathrm{Im}(f^{\#}) \subset \mathrm{Im}(f'^{\#})$． □

$\boldsymbol{H}(\mathrm{Hom}_R(A, \boldsymbol{Y})) \simeq \boldsymbol{H}(\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}))$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \mathrm{Hom}_R(X_0, B) & \xrightarrow{{}^{\#}(\partial'_1)} & \mathrm{Hom}_R(X_1, B) & \xrightarrow{{}^{\#}(\partial'_2)} & \mathrm{Hom}_R(X_2, B) \\
 & & & & {\scriptstyle (\varepsilon'')^{\#}}\downarrow & & {\scriptstyle (\varepsilon'')^{\#}}\downarrow & & {\scriptstyle (\varepsilon'')^{\#}}\downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(A, Y^0) & \xrightarrow{{}^{\#}(\varepsilon')} & \mathrm{Hom}_R(X_0, Y^0) & \xrightarrow{{}^{\#}(\partial'_1)} & \mathrm{Hom}_R(X_1, Y^0) & \xrightarrow{{}^{\#}(\partial'_2)} & \mathrm{Hom}_R(X_2, Y^0) \\
 & & {\scriptstyle -(d''^0)^{\#}}\downarrow & & {\scriptstyle -(d''^0)^{\#}}\downarrow & & {\scriptstyle -(d''^0)^{\#}}\downarrow & & {\scriptstyle -(d''^0)^{\#}}\downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(A, Y^1) & \xrightarrow{{}^{\#}(\varepsilon')} & \mathrm{Hom}_R(X_0, Y^1) & \xrightarrow{{}^{\#}(\partial'_1)} & \mathrm{Hom}_R(X_1, Y^1) & \xrightarrow{{}^{\#}(\partial'_2)} & \mathrm{Hom}_R(X_2, Y^1) \\
 & & {\scriptstyle (d''^1)^{\#}}\downarrow & & {\scriptstyle (d''^1)^{\#}}\downarrow & & {\scriptstyle (d''^1)^{\#}}\downarrow & & {\scriptstyle (d''^1)^{\#}}\downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(A, Y^2) & \xrightarrow{{}^{\#}(\varepsilon')} & \mathrm{Hom}_R(X_0, Y^2) & \xrightarrow{{}^{\#}(\partial'_1)} & \mathrm{Hom}_R(X_1, Y^2) & \xrightarrow{{}^{\#}(\partial'_2)} & \mathrm{Hom}_R(X_2, Y^2)
\end{array}$$

証明 ふちどり双対鎖複体，全双対鎖複体は次のように定義される：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \left\{ \mathrm{Hom}_R(A, Y^q) \mid (-1)^{q+1}(d''^q)^{\#} \right\}, \\
\boldsymbol{B} &= \left\{ \mathrm{Hom}_R(X_p, B) \mid {}^{\#}(\partial'_{p+1}) \right\}, \\
\boldsymbol{W} &= \left\{ \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_R(X_p, Y^q) \;\middle|\; \sum_{p+q=n} {}^{\#}(\partial'_{p+1}) + (-1)^{n+1}(d''^q)^{\#} \right\}.
\end{aligned}$$

ここで，$W^n \to W^{n+1}$ の n 次双対境界作用素は次のようになる $(1 \leq k \leq n)$：

$$\tilde{f}_W^n \colon W^n \ni \begin{pmatrix} f^{n,0} \\ f^{n-1,1} \\ \vdots \\ f^{0,n} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f^{n,0} \circ \partial'_{n+1} \\ f^{n-1,1} \circ \partial_n + (-1)^{n+1} d''^0 \circ f^{n,0}) \\ \vdots \\ f^{n-k,k} \circ \partial'_{n-k+1} + (-1)^{n+1} d''^{k-1} \circ f^{n-k+1,k-1} \\ \vdots \\ (-1)^{n+1} d''^n \circ f^{0,n} \end{pmatrix} \in W^{n+1}.$$

準同型 $\boldsymbol{\varphi} \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{W}$ を

$$\varphi^n \colon \mathrm{Hom}_R(A, Y^n) \xrightarrow{{}^{\#}(\varepsilon')} \mathrm{Hom}_R(X_0, Y^n) \xrightarrow{i_n} W_n = \bigoplus\nolimits_{p+q=n} \mathrm{Hom}_R(X_p, Y^q)$$

によって定める．

φ が鎖準同型であることを証明する．そのためには次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(A, Y^n) & \xrightarrow{i_n \circ {}^{\#}(\varepsilon')} & \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_R(X_p, Y^q) \\ {\scriptstyle (-1)^{n+1}(d''^n)^{\#}} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \tilde{f}_W^n} \\ \mathrm{Hom}_R(A, Y^{n+1}) & \xrightarrow[i_{n+1} \circ {}^{\#}(\varepsilon')]{} & \bigoplus_{p+q=n+1} \mathrm{Hom}_R(X_p, Y^q) \end{array}$$

$f^n \in \mathrm{Hom}_R(A, Y^n)$ とすれば，

$$\begin{aligned} \tilde{f}_W^n \circ i_n \circ {}^{\#}(\varepsilon')(f^n) &= \tilde{f}_W^n((0, \ldots, 0, f^n \circ \varepsilon')) = (0, \ldots, 0, (-1)^{n+1}(d''^n)^{\#}(f^n \circ \varepsilon')) \\ &= (0, \ldots, 0, (-1)^{n+1} d''^n \circ f^n \circ \varepsilon') \\ &= i_{n+1} \circ {}^{\#}(\varepsilon') \circ (-1)^{n+1}(d''^n)^{\#}(f^n) \end{aligned}$$

となるので，$\tilde{f}_W^n \circ i_n \circ {}^{\#}(\varepsilon') = i_{n+1} \circ {}^{\#}(\varepsilon') \circ (-1)^{n+1}(d''^n)^{\#}$．従って，鎖準同型

$$\varphi^{n*} \colon H^n(\boldsymbol{A}) = \ker(d''^n)^{\#} / \mathrm{Im}(d''^{n-1})^{\#} \to H^n(\boldsymbol{W}) = \ker \tilde{f}_W^n / \mathrm{Im}\, \tilde{f}_W^{n-1}$$

が引き起こされる．

追加補題 2.2.1. $f^{p,q} \in \mathrm{Hom}_R(X_p, Y^q)$ $(p+q=n)$ に対し，$\sum_{p+q=n} f^{p,q} \in \ker \tilde{f}_W^n \subset W^n$ とする：

$$[2.2.2] \qquad \begin{aligned} & f^{n,0} \circ \partial'_{n+1} = 0, \\ & f^{n-1,1} \circ \partial'_n + (-1)^{n+1} d''^0 \circ f^{n,0} = 0, \\ & \qquad \vdots \\ & f^{n-k,k} \circ \partial'_{n-k+1} + (-1)^{n+1} d''^{k-1} \circ f^{n-k+1,k-1} = 0, \\ & \qquad \vdots \\ & (-1)^{n+1} d''^n f^{0,n} = 0. \end{aligned}$$

このとき，$f^{p,q} \in \mathrm{Hom}_R(X_p, Y^q)$ $(p+q=n-1)$ が存在し，$\tilde{f}_W^{n-1}(f^{n-1,0} + \cdots + f^{0,n-1})$ のはじめの $n-1$ 成分を $(f^{n,0}, \ldots, f^{1,n-1})$ と等しくできる：

$$[2.2.3] \qquad \begin{aligned} & f^{n-1,0} \circ \partial'_n = f^{n,0}, \\ & f^{n-2,1} \circ \partial'_{n-1} + (-1)^n d''^0 \circ f^{n-1,0} = f^{n-1,1}, \\ & \qquad \vdots \\ & f^{n-k-1,k} \circ \partial'_{n-k} + (-1)^n d''^{k-1} f^{n-k,k-1} = f^{n-k,k}, \\ & \qquad \vdots \\ & f^{0,n-1} \circ \partial'_1 + (-1)^n d''^{n-2} f^{1,n-2} = f^{1,n-1}. \end{aligned}$$

証明 まず $f^{n-1,0}$ の存在を証明する．

$$\mathrm{Hom}_R(X_{n-1}, Y^0) \xrightarrow{{}^{\#}(\partial'_n)} \mathrm{Hom}_R(X_n, Y^0) \xrightarrow{{}^{\#}(\partial'_{n+1})} \mathrm{Hom}_R(X_{n+1}, Y^0)$$

が完全なので，[2.2.2]1 番目の式から $f^{n,0} \in \ker {}^{\#}(\partial'_{n+1}) = \mathrm{Im}\, {}^{\#}(\partial'_n)$ なので，[2.2.3]1 番目の式を満たす $f^{n-1,0}$ の存在が分かる．[2.2.2]2 番目の式と [2.2.3]1 番目の式から

$$0 = f^{n-1,1} \circ \partial'_n + (-1)^{n+1} d''^0 \circ f^{n-1,0} \circ \partial'_n = {}^{\#}(\partial'_n) \left\{ f^{n-1,1} + (-1)^{n+1} d''^0 \circ f^{n-1,0} \right\}$$

なので,

$$f^{n-1,1}+(-1)^{n+1}d''^0\circ f^{n-1,0}\in \ker{}^{\#}(\partial'_n)=\mathrm{Im}{}^{\#}(\partial'_{n-1}).$$

従って，[2.2.3]2 番目の式を満たす $f^{n-1,1}$ の存在が分かる．以下同様にして $f^{n-2,1},\dots,f^{0,n-1}$ が構成できる． □

追加補題 2.2.4. 上の補題の状況で,

[2.2.5]
$$f^{0,n}+(-1)^{n+1}d''^{n-1}\circ f^{0,n-1}=a^n\circ\varepsilon'$$

となる $a^n\in\ker(d''^n)^{\#}\subset\mathrm{Hom}_R(A,X^n)$ が存在する．

証明 [2.2.3] の最後の式に d''^{n-1} を作用させ（$d''^{n-1}\circ d''^{n-2}=0$）

$$d''^{n-1}\circ f^{0,n-1}\circ\partial'_1=d''^{n-1}\circ f^{1,n-1}.$$

従って,

$$\begin{aligned}{}^{\#}(\partial'_1)(f^{0,n}+(-1)^{n+1}d''^{n-1}\circ f^{0,n-1})&=f^{0,n}\circ\partial'_1+(-1)^{n+1}d''^{n-1}\circ f^{0,n-1}\circ\partial'_1\\&=f^{0,n}\circ\partial'_1+(-1)^{n+1}d''^{n-1}\circ f^{1,n-1}\\&=0.\end{aligned}$$

最後に [2.2.2] で $k=n$ とした式を用いた．従って,

$$f^{0,n}+(-1)^{n+1}d''^{n-1}\circ f^{0,n-1}\in\ker{}^{\#}(\partial'_1)=\mathrm{Im}{}^{\#}(\varepsilon').$$

これで [2.2.5] を満足する $a^n\in\mathrm{Hom}_R(A,X^n)$ の存在が証明された．あとは $a^n\in\ker(d''^n)^{\#}$ を示せばよい．[2.2.2] 最後の式から $f^{0,n}\in\ker(d''^n)^{\#}$ なので，[2.2.5] に d''^n を作用させて，$d''^n\circ a^n\circ\varepsilon'=0$．すなわち $d''^n\circ a^n\circ\varepsilon'(X_0)=0$．$\varepsilon'\colon X_0\to A$ は全射なので，$d''^n\circ a^n(A)=0$ となり，$a^n\in\ker(d''^n)^{\#}$． □

φ^{n*} が全射であることを証明する．$H^n(\boldsymbol{W})=\ker\tilde{f}^n_W/\,\mathrm{Im}\,\tilde{f}^{n-1}_W$ の任意の元は $(f^{n,0},\dots,f^{1,n-1},f^{0,n})+\mathrm{Im}\,\tilde{f}^{n-1}_W$ と表せる．追加補題 2.2.1 から $f^{n-1,0},\dots,f^{0,n-1}$ が存在して,

$$\tilde{f}^{n-1}_W(f^{n-1,0},\dots,f^{0,n-1})=(f^{n,0},\dots,f^{1,n-1},(-1)^n d''^{n-1}\circ f^{0,n-1})\in\mathrm{Im}\,\tilde{f}^{n-1}_W$$

となる．従って,

$$(f^{n,0},\dots,f^{0,n})+\mathrm{Im}\,\tilde{f}^{n-1}_W=(0,\dots,0,f^{0,n}-(-1)^n d''^{n-1}\circ f^{0,n-1})+\mathrm{Im}\,\tilde{f}^{n-1}_W.$$

さらに, 追加補題 2.2.4 から $f^{0,n}-(-1)^n d''^{n-1}\circ f^{0,n-1}=a^n\circ\varepsilon'$ ならしめる $a^n\in\ker(d'')^{\#}\subset\mathrm{Hom}_R(A,Y^n)$ が存在するので,

$$\varphi^{n*}(a^n+\mathrm{Im}(d''^{n-1})^{\#})=(0,\dots,0,a^n\circ\varepsilon')+\mathrm{Im}\,\tilde{f}^{n-1}_W=(f^{n,0},\dots,f^{1,n-1},f^{0,n})+\mathrm{Im}\,\tilde{f}^{n-1}_W.$$

φ^{n*} が単射であることを証明する．$a^n\in\mathrm{Hom}_R(A,Y^n)$ が $\varphi^{n*}(a^n+\mathrm{Im}(d''^{n-1})^{\#})=0$ とする．これは $\varphi^n(a^n)\in\mathrm{Im}\,\tilde{f}^{n-1}_W$ と同値．すなわち，$f^{p,q}\in\mathrm{Hom}_R(X_p,Y^q)$ $(p+q=n-1)$ が存在し,

[2.2.6]
$$\begin{aligned}0&=f^{n-1,0}\circ\partial'_n\\&\ \ \vdots\\0&=f^{n-k-1,k}\circ\partial'_{n-k}+(-1)^n d''^{k-1}\circ f^{n-k,k-1}\\&\ \ \vdots\\a^n\circ\varepsilon'&=(-1)^n d''^{n-1}\circ f^{0,n-1}\end{aligned}$$

となる．$a^n + \mathrm{Im}(d''^{n-1})^\# \in \ker\varphi^{n*}$ と仮定したので，$a^n + \mathrm{Im}(d''^{n-1})^\# = 0$，すなわち $a^n \in \mathrm{Im}(d''^{n-1})^\# \subset \mathrm{Hom}_R(A, Y^n)$ を示せばよい．

[2.2.6]1 番目の式から $0 = {}^\#(\partial'_n)(f^{n-1,0})$ なので，$a^n \in \ker^\#(\partial'_n) = \mathrm{Im}^\#(\partial'_{n-1})$．従って，$g^{n-2,0} \in \mathrm{Hom}_R(X_{n-2}, Y^0)$ によって $f^{n-1,0} = {}^\#(\partial'_{n-1})(g^{n-2,0}) = g^{n-2,0} \circ \partial'_{n-1}$ と表せる．

[2.2.6] で $k = 1$ として，

$$\begin{aligned}0 &= f^{n-2,1} \circ \partial'_{n-1} + (-1)^n d''^0 \circ f^{n-1,0} \\ &= f^{n-2,1} \circ \partial'_{n-1} + (-1)^n d''^0 \circ g^{n-2,0} \circ \partial'_{n-1} \\ &= {}^\#(\partial'_{n-1})\left(f^{n-2,1} + (-1)^n d''^0 \circ g^{n-2,0}\right).\end{aligned}$$

従って，$f^{n-2,1} + (-1)^n d''^0 \circ g^{n-2,0} \in \ker^\#(\partial'_{n-1}) = \mathrm{Im}^\#(\partial'_{n-2})$ なので，$g^{n-3,1} \in \mathrm{Hom}_R(X_{n-3}, Y^1)$ によって，

$$f^{n-2,1} + (-1)^n d''^0 \circ g^{n-2,0} = {}^\#(\partial'_{n-2})(g^{n-3,1}) = g^{n-3,1} \circ \partial'_{n-2}$$

となる．よって，

$$f^{n-2,1} = g^{n-3,1} \circ \partial'_{n-2} - (-1)^n d''^0 \circ g^{n-2,0}.$$

[2.2.6] で $k = 2$ として，

$$\begin{aligned}0 &= f^{n-3,2} \circ \partial'_{n-2} + (-1)^n d''^1 \circ f^{n-2,1} \\ &= f^{n-3,2} \circ \partial'_{n-2} + (-1)^n d''^1 \circ g^{n-3,1} \circ \partial'_{n-2} \\ &= {}^\#(\partial'_{n-2})\left(f^{n-3,2} + (-1)^n d''^1 \circ g^{n-3,1}\right).\end{aligned}$$

従って，$f^{n-3,2} + (-1)^n d''^1 \circ g^{n-3,1} \in \ker^\#(\partial'_{n-2}) = \mathrm{Im}^\#(\partial'_{n-3})$ なので，$g^{n-4,2} \in \mathrm{Hom}_R(X_{n-4}, Y^2)$ によって，

$$f^{n-3,2} + (-1)^n d''^1 \circ g^{n-3,1} = {}^\#(\partial'_{n-3})(g^{n-4,2}) = g^{n-4,2} \circ \partial'_{n-3}$$

となる．よって，

$$f^{n-3,2} = g^{n-4,2} \circ \partial'_{n-3} - (-1)^n d''^1 \circ g^{n-3,1}.$$

以降同様に繰り返して，$k = n-2$ から $f^{1,n-2} = g^{0,n-2} \circ \partial'_1 - (-1)^n d''^{n-3} \circ g^{1,n-3}$ が得られる．

[2.2.6] で $k = n-1$ として，

$$\begin{aligned}0 &= f^{0,n-1} \circ \partial'_1 + (-1)^n d''^{n-2} \circ f^{1,n-2} \\ &= f^{0,n-1} \circ \partial'_1 + (-1)^n d''^{n-2} \circ g^{0,n-2} \circ \partial'_1 \\ &= {}^\#(\partial'_1)\left(f^{0,n-1} + (-1)^n d''^{n-2} \circ g^{0,n-2}\right).\end{aligned}$$

従って，$f^{0,n-1} + (-1)^n d''^{n-2} \circ g^{0,n-2} \in \ker^\#(\partial'_1) = \mathrm{Im}^\#(\varepsilon')$ なので，$a^{n-1} \in \mathrm{Hom}_R(A, Y^{n-1})$ によって，

$$f^{0,n-1} + (-1)^n d''^{n-2} \circ g^{0,n-2} = {}^\#(\varepsilon')(a^{n-1}) = a^{n-1} \circ \varepsilon'$$

となる．よって，

$$f^{0,n-1} = a^{n-1} \circ \varepsilon' - (-1)^n d''^{n-2} \circ g^{0,n-2}.$$

[2.2.6] 最後の式から

$$a^n \circ \varepsilon' = (-1)^n d''^{n-1} \circ f^{0,n-1} = (-1)^n d''^{n-1} \circ a^{n-1} \circ \varepsilon'$$

なので，$0 = {}^\#(\varepsilon')\left(a^n - (-1)^n d''^{n-1} \circ a^{n-1}\right)$ である．${}^\#(\varepsilon')\colon \mathrm{Hom}_R(A, Y^n) \to \mathrm{Hom}_R(X_0, Y^n)$ は単射なので，$a^n = (-1)^n d''^{n-1} \circ a^{n-1}$．すなわち $a^n \in \mathrm{Im}(d''^{n-1})^\#$． □

2.3 係数加群を持つホモロジー

A が射影的 R 加群なら $H^n(\mathrm{Hom}_R(A,\boldsymbol{X}))\simeq\mathrm{Hom}_R\left(A,H^n(\boldsymbol{X})\right)$ (p.94).

証明 R 加群の完全系列

$$0\longrightarrow B^n\xrightarrow{\ i\ }Z^n\xrightarrow{\ p\ }Z^n/B^n\longrightarrow 0$$

に対し,

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(A,B^n)\xrightarrow{i^\#}\mathrm{Hom}_R(A,Z^n)\xrightarrow{p^\#}\mathrm{Hom}_R(A,Z^n/B^n)\longrightarrow 0$$

は完全系列となる(定理 1.3, p.37).従って,

[2.3.1] $$\mathrm{Hom}_R(A,Z^n/B^n)\simeq\mathrm{Hom}_R(A,Z^n)/\ker p^\#=\mathrm{Hom}_R(A,Z^n)/i^\#\,\mathrm{Hom}_R(A,B^n).$$

$\mathrm{Hom}_R(A,\boldsymbol{X})=\{\mathrm{Hom}_R(A,X^n),(d^n)^\#\}$ において,

$$\ker(d^n)^\#=\{\,f^n\in\mathrm{Hom}_R(A,X^n)\mid d^n\circ f^n=0\,\}\simeq\mathrm{Hom}_R(A,Z^n)$$

である.実際,$f^n\in\ker(d^n)^\#$ とすれば,$d^n\circ f^n=0$ なので $\mathrm{Im}\,f^n\subset\ker d^n=Z^n$.従って,値域を制限することで $\ker(d^n)^\#$ の元から一意に $\mathrm{Hom}_R(A,Z^n)$ の元が定まる.$\mathrm{Hom}_R(A,Z^n)$ の任意の元に対応する $\ker(d^n)^\#$ の元が存在するので,$\ker(d^n)^\#\simeq\mathrm{Hom}_R(A,Z^n)$.

また,

$$\mathrm{Im}(d^{n-1})^\#=\left\{\,d^{n-1}\circ f^{n-1}\mid f^{n-1}\in\mathrm{Hom}_R(A,X^{n-1})\,\right\}\simeq\mathrm{Hom}_R(A,B^n)$$

である.実際,次の図式:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f^{n-1}"'] \arrow[dr, "f^n"] & & \\
X^{n-1} \arrow[rr, "d^{n-1}"] & & B^n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

において A は射影的であることから従う.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Im}(d^{n-1})^\# \arrow[d, "\simeq"] & \subset & \ker(d^n)^\# \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{Hom}_R(A,B^n) \arrow[rr, "i^\#"] & & \mathrm{Hom}_R(A,Z^n)
\end{tikzcd}$$

[2.3.1] と併せて

$$H^n(\mathrm{Hom}_R(A,\boldsymbol{X}))=\ker(d^n)^\#/\mathrm{Im}(d^{n-1})^\#\simeq\mathrm{Hom}_R(A,Z^n)/i^\#\,\mathrm{Hom}_R(A,B^n)\simeq\mathrm{Hom}_R(A,Z^n/B^n).$$

□

■例 2.21

$H_n(\varinjlim \boldsymbol{X}_\nu) = \varinjlim H_n(\boldsymbol{X}_\nu)$

証明 例 1.13(iii) から $\tilde{\partial}_n = \varinjlim \partial_{\nu,n}\colon \varinjlim X_{\nu,n} \to \varinjlim X_{\nu,n-1}$ が存在し，以下の図式が可換となる．

$$\begin{array}{ccccccc}
X_{\lambda,n} & \xrightarrow{f_{\mu\lambda,n}} & X_{\mu,n} & \xrightarrow{i_{\mu,n}} & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_{\lambda,n} & \xrightarrow{\tilde{p}_n} & \varinjlim X_{\nu,n} \\
\downarrow{\scriptstyle \partial_{\lambda,n}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{\mu,n}} & & \downarrow{\scriptstyle \oplus\partial_{\lambda,n}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\partial}_n} \\
X_{\lambda,n-1} & \xrightarrow[f_{\mu\lambda,n-1}]{} & X_{\mu,n-1} & \xrightarrow[i_{\mu,n-1}]{} & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_{\lambda,n-1} & \xrightarrow[\tilde{p}_{n-1}]{} & \varinjlim X_{\nu,n-1}
\end{array}$$

まず，$\varinjlim \boldsymbol{X}_\nu = \{\varinjlim X_{\nu,n}, \tilde{\partial}_n\}$ が鎖複体であること，すなわち $\tilde{\partial}_{n-1} \circ \tilde{\partial}_n = 0$ を証明する．

$$\begin{array}{ccc}
X_{\lambda,n} & \xrightarrow{\tilde{p}_n \circ i_{\lambda,n}} & \varinjlim X_{\nu,n} \\
\downarrow{\scriptstyle \partial_{\lambda,n}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\partial}_n} \\
X_{\lambda,n-1} & \xrightarrow{\tilde{p}_{n-1} \circ i_{\lambda,n-1}} & \varinjlim X_{\nu,n-1} \\
\downarrow{\scriptstyle \partial_{\lambda,n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\partial}_{n-1}} \\
X_{\lambda,n-2} & \xrightarrow[\tilde{p}_{n-2} \circ i_{\lambda,n-2}]{} & \varinjlim X_{\nu,n-2}
\end{array}$$

$\tilde{x}_n \in \varinjlim X_{\nu,n}$ に対し，$\tilde{x}_n = \tilde{p}_n \circ i_{\lambda,n}(x_{\lambda,n})$ となる $x_{\lambda,n} \in X_{\lambda,n}$ が存在する．従って，

$$\tilde{\partial}_{n-1} \circ \tilde{\partial}_n(\tilde{x}_n) = \tilde{\partial}_{n-1} \circ \tilde{\partial}_n \circ \tilde{p}_n \circ i_{\lambda,n}(x_{\lambda,n}) = \tilde{p}_{n-2} \circ i_{\lambda,n-2} \circ \partial_{\lambda,n-1} \circ \partial_{\lambda,n}(x_{\lambda,n}) = 0.$$

例 1.13(iv) から

[2.3.2] $$H_n(\varinjlim \boldsymbol{X}_\nu) = \ker \tilde{\partial}_n / \operatorname{Im} \tilde{\partial}_{n+1} = \varinjlim(\ker \partial_{\lambda,n}) / \varinjlim(\operatorname{Im} \partial_{\lambda,n+1}).$$

さらに，各行が完全な可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} \partial_{\lambda,n+1} & \longrightarrow & \ker \partial_{\lambda,n} & \longrightarrow & H_n(\boldsymbol{X}_\lambda) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} \partial_{\mu,n+1} & \longrightarrow & \ker \partial_{\mu,n} & \longrightarrow & H_n(\boldsymbol{X}_\mu) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

に対し例 1.13(v) を適用して，完全系列

$$0 \longrightarrow \varinjlim(\operatorname{Im} \partial_{\lambda,n+1}) \longrightarrow \varinjlim(\ker \partial_{\lambda,n}) \longrightarrow \varinjlim(H_n(\boldsymbol{X}_\lambda)) \longrightarrow 0$$

が得られる．従って [2.3.2] から

$$\varinjlim(H_n(\boldsymbol{X}_\lambda)) \simeq \varinjlim(\ker \partial_{\lambda,n}) / \varinjlim(\operatorname{Im} \partial_{\lambda,n+1}) = H_n(\varinjlim \boldsymbol{X}_\nu).$$

□

第 3 章

Tor と Ext

3.2 Tor

■**定理** 3.14

(i) の証明

証明 B_1 の射影的分解を $(\boldsymbol{Y}, B_1, \varepsilon)$ とする．

$$Y_n \xrightarrow{\partial_n} Y_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} Y_0 \xrightarrow{\varepsilon} B_1 \longrightarrow 0$$

$f\colon A_1 \to A_2$ に対し，$f_n = f \otimes 1\colon A_1 \otimes_R Y_n \to A_2 \otimes_R Y_n$ とする．$\boldsymbol{f}$ は鎖準同型である．すなわち，次の可換図式が得られる．

$$\begin{array}{ccc} A_1 \otimes_R Y_n & \xrightarrow{1\otimes\partial_n} & A_1 \otimes_R Y_{n-1} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f_n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} \\ A_2 \otimes_R Y_n & \xrightarrow{1\otimes\partial_n} & A_2 \otimes_R Y_{n-1} \end{array}$$

定理 2.1 から次数つきホモロジー加群の準同型 $\boldsymbol{f}^*$ が得られる：

[3.2.1] $\quad f_n^*\colon H_n(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y}) \ni a_1 \otimes y_n + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial_{n+1}) \mapsto f(a_1) \otimes y_n + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial_{n+1}) \in H_n(A_2 \otimes_R \boldsymbol{Y})$.

B_2 の射影的分解を $(\boldsymbol{Y}', B_2, \varepsilon')$ とする．

$$Y'_n \xrightarrow{\partial'_n} Y'_{n-1} \xrightarrow{\partial'_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial'_1} Y'_0 \xrightarrow{\varepsilon'} B_2 \longrightarrow 0$$

$f\colon A_1 \to A_2$ に対し，$f'_n = f \otimes 1\colon A_1 \otimes_R Y'_n \to A_2 \otimes_R Y'_n$ とする．$\boldsymbol{f}'$ は鎖準同型である．すなわち，次の可換図式が得られる．

$$\begin{array}{ccc} A_1 \otimes_R Y'_n & \xrightarrow{1\otimes\partial'_n} & A_1 \otimes_R Y'_{n-1} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f'_n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f'_{n-1}} \\ A_2 \otimes_R Y'_n & \xrightarrow{1\otimes\partial'_n} & A_2 \otimes_R Y'_{n-1} \end{array}$$

定理 2.1 から次数つきホモロジー加群の準同型 $\boldsymbol{f}'^*$ が得られる：

[3.2.2] $\quad f_n'^*\colon H_n(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y}') \ni a_1 \otimes y'_n + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial'_{n+1}) \mapsto f(a_1) \otimes y'_n + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial'_{n+1}) \in H_n(A_2 \otimes_R \boldsymbol{Y}')$.

$\varphi\colon B_1 \to B_2$ に対し，定理 3.2 から $\varphi_n\colon Y_n \to Y'_n$ が得られ，次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd} Y_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] & Y_{n-1} \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \\ Y'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & Y'_{n-1} \end{tikzcd}$$

従って，次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd} A_1 \otimes_R Y_n \arrow[r, "1\otimes\partial_n"] \arrow[d, "1\otimes\varphi_n"] & A_1 \otimes_R Y_{n-1} \arrow[d, "1\otimes\varphi_{n-1}"] \\ A_1 \otimes_R Y'_n \arrow[r, "1\otimes\partial'_n"] & A_1 \otimes_R Y'_{n-1} \end{tikzcd}$$

定理 2.1 から次数つきホモロジー加群の準同型 $\boldsymbol{\varphi}^*$ が得られる：

[3.2.3] $\varphi^*_n\colon H_n(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y}) \ni a_1 \otimes y_n + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial_{n+1}) \mapsto a_1 \otimes \varphi_n(y_n) + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial'_{n+1}) \in H_n(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y}')$.

同様にして，次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd} A_2 \otimes_R Y_n \arrow[r, "1\otimes\partial_n"] \arrow[d, "1\otimes\varphi_n"] & A_2 \otimes_R Y_{n-1} \arrow[d, "1\otimes\varphi_{n-1}"] \\ A_2 \otimes_R Y'_n \arrow[r, "1\otimes\partial'_n"] & A_2 \otimes_R Y'_{n-1} \end{tikzcd}$$

定理 2.1 から次数つきホモロジー加群の準同型 $\boldsymbol{\varphi}'^*$ が得られる：

[3.2.4] $\varphi'^*_n\colon H_n(A_2 \otimes_R \boldsymbol{Y}) \ni a_2 \otimes y_n + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial_{n+1}) \mapsto a_2 \otimes \varphi_n(y_n) + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial'_{n+1}) \in H_n(A_2 \otimes_R \boldsymbol{Y}')$.

[3.2.1][3.2.2][3.2.3][3.2.4] から次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd} H_n(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y}) \arrow[r, "f^*_n"] \arrow[d, "\varphi^*_n"] & H_n(A_2 \otimes_R \boldsymbol{Y}) \arrow[d, "\varphi'^*_n"] \\ H_n(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y}') \arrow[r, "f'^*_n"] & H_n(A_2 \otimes_R \boldsymbol{Y}') \end{tikzcd}$$

すなわち次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Tor}_n{}^R(A_1, B_1) \arrow[r, "f^*_n"] \arrow[d, "\varphi^*_n"] & \mathrm{Tor}_n{}^R(A_2, B_1) \arrow[d, "\varphi'^*_n"] \\ \mathrm{Tor}_n{}^R(A_1, B_2) \arrow[r, "f'^*_n"] & \mathrm{Tor}_n{}^R(A_2, B_2) \end{tikzcd}$$

□

(ii) の証明

証明 完全系列

$$0 \longrightarrow B_1 \xrightarrow{\ \varphi\ } B_2 \xrightarrow{\ \psi\ } B_3 \longrightarrow 0$$

に対し，次の可換図式が得られる（定理 3.4）．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
Y_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] & Y_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "\partial_1"] & Y_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi_0"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
Y'_n \arrow[r, "\partial'_n"] \arrow[d, "\psi_n"] & Y'_{n-1} \arrow[r, "\partial'_{n-1}"] \arrow[d, "\psi_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "\partial'_1"] & Y'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d, "\psi_0"] & B_2 \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
Y_n \arrow[r, "\partial''_n"] \arrow[d] & Y''_{n-1} \arrow[r, "\partial''_{n-1}"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\partial''_1"] & Y_0 \arrow[r, "\varepsilon''"] \arrow[d] & B_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

上の図式で

$$
0 \longrightarrow Y_n \xrightarrow{\varphi_n} Y'_n \xrightarrow{\psi_n} Y''_n \longrightarrow 0
$$

は分裂しているので，$f\colon A_1 \to A_2$ によって，次の可換図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \otimes_R Y_n \arrow[r, "1\otimes\varphi_n"] \arrow[d, "f\otimes 1"] & A_1 \otimes_R Y'_n \arrow[r, "1\otimes\psi_n"] \arrow[d, "f\otimes 1"] & A_1 \otimes_R Y''_n \arrow[r] \arrow[d, "f\otimes 1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \otimes_R Y_n \arrow[r, "1\otimes\varphi_n"] & A_2 \otimes_R Y'_n \arrow[r, "1\otimes\psi_n"] & A_2 \otimes_R Y''_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

上の図式の写像はいずれも鎖準同型である．ここで，

$$
\begin{aligned}
f_n^*\colon H_n(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y}) \ni a_1 \otimes y_n + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial_{n+1}) &\mapsto f(a_1) \otimes y_n + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial_{n+1}) \in H_n(A_2 \otimes_R \boldsymbol{Y}) \\
f_n'^*\colon H_n(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y}') \ni a_1 \otimes y'_n + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial'_{n+1}) &\mapsto f(a_1) \otimes y'_n + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial'_{n+1}) \in H_n(A_2 \otimes_R \boldsymbol{Y}') \\
f_n''^*\colon H_n(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y}'') \ni a_1 \otimes y''_n + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial''_{n+1}) &\mapsto f(a_1) \otimes y''_n + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial''_{n+1}) \in H_n(A_2 \otimes_R \boldsymbol{Y}'')
\end{aligned}
$$

とすれば，定理 2.4 から連結準同型 $\delta_n\colon H_n(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y}'') \to H_{n-1}(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y})$ 及び $\delta'_n\colon H_n(A_2 \otimes_R \boldsymbol{Y}'') \to H_{n-1}(A_2 \otimes_R \boldsymbol{Y})$ が存在して，次の図式が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
H_n(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y}'') \arrow[r, "f_n''^*"] \arrow[d, "\delta_n"] & H_n(A_2 \otimes_R \boldsymbol{Y}'') \arrow[d, "\delta'_n"] \\
H_{n-1}(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y}) \arrow[r, "f_{n-1}^*"] & H_{n-1}(A_2 \otimes_R \boldsymbol{Y})
\end{tikzcd}
$$

Tor に換言すれば次のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_n{}^R(A_1, B_3) \arrow[r, "f_n''^*"] \arrow[d, "\delta_n"] & \mathrm{Tor}_n{}^R(A_2, B_3) \arrow[d, "\delta'_n"] \\
\mathrm{Tor}_{n-1}{}^R(A_1, B_1) \arrow[r, "f_{n-1}^*"] & \mathrm{Tor}_{n-1}{}^R(A_2, B_1)
\end{tikzcd}
$$

$\square$

(iii) の証明

証明 $\varphi\colon B_1 \to B_2$ に対し，次の可換図式が得られる（定理 3.2）．

$$\begin{tikzcd}
Y_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] & Y_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "\partial_1"] & Y_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi_0"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
Y'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & Y'_{n-1} \arrow[r, "\partial'_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "\partial'_1"] & Y'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & B_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

完全系列

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3 \longrightarrow 0$$

に対し，Y_n, Y'_n は射影的，従って平坦である（補題 1.7 系）から，次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \otimes_R Y_n \arrow[r, "f\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\varphi_n"] & A_2 \otimes_R Y_n \arrow[r, "g\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\varphi_n"] & A_3 \otimes_R Y_n \arrow[r] \arrow[d, "1\otimes\varphi_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \otimes_R Y'_n \arrow[r, "f\otimes 1"] & A_2 \otimes_R Y'_n \arrow[r, "g\otimes 1"] & A_3 \otimes_R Y'_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

上の図式の写像はいずれも鎖準同型である．ここで，

$$\begin{aligned}
\varphi_n^*\colon H_n(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y}) \ni a_1 \otimes y_n + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial_{n+1}) &\mapsto a_1 \otimes \varphi_n(y_n) + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial'_{n+1}) \in H_n(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y}') \\
\varphi_n'^*\colon H_n(A_2 \otimes_R \boldsymbol{Y}) \ni a_2 \otimes y_n + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial_{n+1}) &\mapsto a_2 \otimes \varphi_n(y_n) + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial'_{n+1}) \in H_n(A_2 \otimes_R \boldsymbol{Y}') \\
\varphi_n''^*\colon H_n(A_3 \otimes_R \boldsymbol{Y}) \ni a_3 \otimes y_n + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial_{n+1}) &\mapsto a_3 \otimes \varphi_n(y_n) + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial'_{n+1}) \in H_n(A_3 \otimes_R \boldsymbol{Y}')
\end{aligned}$$

とすれば，定理 2.4 から連結準同型 $\delta_n\colon H_n(A_3 \otimes_R \boldsymbol{Y}) \to H_{n-1}(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y})$ 及び $\delta'_n\colon H_n(A_3 \otimes_R \boldsymbol{Y}') \to H_{n-1}(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y}')$ が存在して，次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
H_n(A_3 \otimes_R \boldsymbol{Y}) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "\varphi_n''^*"] & H_{n-1}(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y}) \arrow[d, "\varphi_{n-1}^*"] \\
H_n(A_3 \otimes_R \boldsymbol{Y}') \arrow[r, "\delta'_n"] & H_{n-1}(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y}')
\end{tikzcd}$$

Tor に換言すれば次のようになる．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_n{}^R(A_3, B_1) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "\varphi_n''^*"] & \mathrm{Tor}_{n-1}{}^R(A_1, B_1) \arrow[d, "\varphi_{n-1}^*"] \\
\mathrm{Tor}_n{}^R(A_3, B_2) \arrow[r, "\delta'_n"] & \mathrm{Tor}_{n-1}{}^R(A_1, B_2)
\end{tikzcd}$$

□

(iv) の証明

証明 完全系列

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] & A_3 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & B_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & B_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

を考える．定理 3.4 から次の可換図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
Y_{1,n} \arrow[r, "\partial_{1,n}"] \arrow[d, "\varphi_{1,n}"] & Y_{1,n-1} \arrow[r, "\partial_{1,n-1}"] \arrow[d, "\varphi_{1,n-1}"] & \cdots \arrow[r, "\partial_{1,1}"] & & Y_{1,0} \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[d, "\varphi_{1,0}"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & 0 \\
Y_{2,n} \arrow[r, "\partial_{2,n}"] \arrow[d, "\varphi_{2,n}"] & Y_{2,n-1} \arrow[r, "\partial_{2,n-1}"] \arrow[d, "\varphi_{2,n-1}"] & \cdots \arrow[r, "\partial_{2,1}"] & & Y_{2,0} \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[d, "\varphi_{2,0}"] & B_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & 0 \\
Y_{3,n} \arrow[r, "\partial_{3,n}"] \arrow[d] & Y_{3,n-1} \arrow[r, "\partial_{3,n-1}"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\partial_{3,1}"] & & Y_{3,0} \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[d] & B_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

さらに，完全系列

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y_{1,n} \arrow[r, "\varphi_{1,n}"] & Y_{2,n} \arrow[r, "\varphi_{2,n}"] & Y_{3,n} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

は分裂している．以上から，次の可換図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \otimes_R Y_{1,n} \arrow[r, "1\otimes\varphi_{1,n}"] \arrow[d, "f_1\otimes 1"] & A_1 \otimes_R Y_{2,n} \arrow[r, "1\otimes\varphi_{2,n}"] \arrow[d, "f_1\otimes 1"] & A_1 \otimes_R Y_{3,n} \arrow[r] \arrow[d, "f_1\otimes 1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \otimes_R Y_{1,n} \arrow[r, "1\otimes\varphi_{1,n}"] \arrow[d, "f_2\otimes 1"] & A_2 \otimes_R Y_{2,n} \arrow[r, "1\otimes\varphi_{2,n}"] \arrow[d, "f_2\otimes 1"] & A_2 \otimes_R Y_{3,n} \arrow[r] \arrow[d, "f_2\otimes 1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_3 \otimes_R Y_{1,n} \arrow[r, "1\otimes\varphi_{1,n}"] \arrow[d] & A_3 \otimes_R Y_{2,n} \arrow[r, "1\otimes\varphi_{2,n}"] \arrow[d] & A_3 \otimes_R Y_{3,n} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

定理 1.2，補題 1.7 系から各行・列は完全である．定理 2.2 の証明から，次の図式を右上から左下に辿れば

$\delta_n \circ \delta^*_{n+1}\colon H_{n+1}(A_3 \otimes_R \boldsymbol{Y}_3) \to H_{n-1}(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y}_1)$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & A_3 \otimes_R Y_{2,n+1} \arrow[r, "1\otimes\varphi_{2,n+1}"] \arrow[dr, "1\otimes\partial_{2,n+1}"] & A_3 \otimes_R Y_{3,n+1} \\
 & A_2 \otimes_R Y_{1,n} \arrow[r, "f_2\otimes 1"] \arrow[dr, "1\otimes\partial_{1,n}"] & A_3 \otimes_R Y_{1,n} \arrow[r, "1\otimes\varphi_{1,n}"] & A_3 \otimes_R Y_{2,n} \\
0 \arrow[r] & A_1 \otimes_R Y_{1,n-1} \arrow[r, "f_1\otimes 1"] & A_2 \otimes_R Y_{1,n-1} &
\end{tikzcd}
$$

同様に，次の図式を右上から左下に辿れば $\delta_{n+1} \circ \delta^*_{n}\colon H_{n+1}(A_3 \otimes_R \boldsymbol{Y}_3) \to H_{n-1}(A_1 \otimes_R \boldsymbol{Y}_1)$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & A_3 \otimes_R Y_{2,n+1} \arrow[r, "f_2\otimes 1"] \arrow[dr, "1\otimes\partial_{3,n+1}"] & A_3 \otimes_R Y_{3,n+1} \\
 & A_1 \otimes_R Y_{2,n} \arrow[r, "1\otimes\varphi_{2,n}"] \arrow[dr, "1\otimes\partial_{2,n}"] & A_1 \otimes_R Y_{3,n} \arrow[r, "f_1\otimes 1"] & A_2 \otimes_R Y_{3,n} \\
0 \arrow[r] & A_1 \otimes_R Y_{1,n-1} \arrow[r, "1\otimes\varphi_{1,n-1}"] & A_1 \otimes_R Y_{2,n-1} &
\end{tikzcd}
$$

p.112 の可換図式から，次の可換図式が得られる．1 行目が $\delta_n \circ \delta^*_{n+1}$ で 3 行目が $\delta_{n+1} \circ \delta^*_{n}$ である．

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \otimes_R Y_{1,n-1} \arrow[r, "f_1\otimes 1"] & A_2 \otimes_R Y_{1,n-1} & A_2 \otimes_R Y_{1,n} \arrow[l, "1\otimes\partial_{1,n}"'] \arrow[r, "f_2\otimes\varphi_{1,n}"] & {} \\
A_1 \otimes_R Y_{1,n-1} \arrow[u, "\psi_{1,n-1}"] \arrow[d, equal] \arrow[r, "g_{n,1}"] & Z_{n-1} \arrow[u, "\psi_{3,n-1}"'] \arrow[d, "\psi_{2,n-1}"] & Z_n \arrow[l, "\partial_n"'] \arrow[u, "\psi_{3,n}"] \arrow[d, "\psi_{2,n}"] \arrow[r, "g_{2,n}"] & {} \\
A_1 \otimes_R Y_{1,n-1} \arrow[r, "1\otimes\varphi_{1,n-1}"] & A_1 \otimes_R Y_{2,n-1} & A_1 \otimes_R Y_{2,n} \arrow[l, "1\otimes\partial_{2,n}"'] \arrow[r, "f_1\otimes\varphi_{2,n}"] & {}
\end{tikzcd}
$$

(続き)

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "f_2\otimes\varphi_{1,n}"] & A_3 \otimes_R Y_{2,n} & A_3 \otimes_R Y_{2,n+1} \arrow[l, "1\otimes\partial_{2,n+1}"'] \arrow[r, "1\otimes\varphi_{2,n+1}"] & A_3 \otimes_R Y_{3,n+1} \\
{} \arrow[r, "g_{2,n}"] & A_2 \otimes_R Y_{2,n} \arrow[u, "f_2\otimes 1"'] \arrow[d, "1\otimes\varphi_{2,n}"] & A_2 \otimes_R Y_{2,n+1} \arrow[l, "1\otimes\partial_{2,n}"'] \arrow[u, "f_2\otimes 1"'] \arrow[d, "1\otimes\varphi_{2,n+1}"] \arrow[r, "f_2\otimes\varphi_{2,n}"] & A_3 \otimes_R Y_{3,n+1} \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] \\
{} \arrow[r, "f_1\otimes\varphi_{2,n}"] & A_2 \otimes_R Y_{3,n} & A_2 \otimes_R Y_{3,n+1} \arrow[l, "1\otimes\partial_{3,n+1}"'] \arrow[r, "f_2\otimes 1"] & A_3 \otimes_R Y_{3,n+1}
\end{tikzcd}
$$

なお，

$$Z_n = A_1 \otimes_R Y_{2,n-1} \oplus A_2 \otimes_R Y_{1,n-1}, \quad \partial_n = 1 \otimes \partial_{2,n} \oplus 1 \otimes \partial_{1,n}$$

である．

$$\delta_{n+1}\delta^*(a_3 \otimes y_{3,n+1} + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial_{3,n+2})) = \psi_{1,n-1}\delta_n \circ \delta^*_{n+1}(a_3 \otimes y_{3,n+1} + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial_{3,n+2}))$$

$$= -\delta_n \circ \delta^*_{n+1}(a_3 \otimes y_{3,n+1} + \mathrm{Im}(1 \otimes \partial_{3,n+2}))$$

となるので，$\delta_n \circ \delta^*_{n+1} = -\delta_{n+1} \circ \delta^*_n$. □

■例 3.2

$T_n(A,B) \simeq \ker(1_{n-1} \otimes 1)$ の構成

証明 A の射影的分解 $(\boldsymbol{P}, A, p_0)$ を以下のように構成する（定理 3.1）.

$$\begin{array}{l}
0 \longrightarrow R_0 \xrightarrow{i_0} P_0 \xrightarrow{p_0} A \longrightarrow 0 \\
0 \longrightarrow R_1 \xrightarrow{i_1} P_1 \xrightarrow{p_1} R_0 \longrightarrow 0 \\
\qquad\qquad \vdots \\
0 \longrightarrow R_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1}} P_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} R_{n-2} \longrightarrow 0 \\
0 \longrightarrow R_n \xrightarrow{i_n} P_n \xrightarrow{p_n} R_{n-1} \longrightarrow 0
\end{array} \tag{3.2.5}$$

$\partial_k = i_{k-1} \circ p_k \colon P_k \to P_{k-1}$ である．$0 \to R_{n-1} \to P_{n-1} \to R_{n-2} \to 0$ に (iv) を適用して，完全系列

$$T_1(P_{n-1}, B) \longrightarrow T_1(R_{n-2}, B) \xrightarrow{\tilde{\delta}_{1,n-1}} R_{n-1} \otimes_R B \xrightarrow{i_{n-1} \otimes 1} P_{n-1} \otimes_R B \tag{3.2.6}$$

を得る．(ii) から $T_1(P_{n-1}, B) = 0$ なので，同型

$$0 \longrightarrow T_1(R_{n-2}, B) \xrightarrow{\tilde{\delta}_{1,n-1}} \ker(i_{n-1} \otimes 1) \longrightarrow 0$$

を得る．同様に，$0 \to R_{n-2} \to P_{n-2} \to R_{n-3} \to 0$ に (iv) を適用して，完全系列

$$T_2(P_{n-2}, B) \longrightarrow T_2(R_{n-3}, B) \xrightarrow{\tilde{\delta}_{2,n-2}} T_1(R_{n-2}, B) \longrightarrow T_1(P_{n-2}, B)$$

を得る．(ii) から $T_2(P_{n-2}, B) = T_1(P_{n-2}, B) = 0$ なので，同型

$$0 \longrightarrow T_2(R_{n-3}, B) \xrightarrow{\tilde{\delta}_{2,n-2}} T_1(R_{n-2}, B) \longrightarrow 0 \tag{3.2.7}$$

を得る．以上を続けて，同型

$$\tilde{\delta}_{1,n-1} \circ \tilde{\delta}_{2,n-2} \circ \cdots \circ \tilde{\delta}_{n,0} \colon T_n(A,B) \simeq \ker(i_{n-1} \otimes 1)$$

を得る． □

$T_n(A,B) \simeq \ker(1_{n-1} \otimes 1)$ の可換性.

証明 準同型 $f \colon A_1 \to A_2$ を考える．先と同様に A_1, A_2 の射影的分解 $(\boldsymbol{P}, A_1, p_0)$, $(\boldsymbol{P}', A_2, p'_0)$ を構成する．f_0, ϕ_0 が存在し次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R_0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "\phi_0"] & P_0 \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "f_0"] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R'_0 \arrow[r, "i'_0"] & P'_0 \arrow[r, "p'_0"] & A_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

同様に次の可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\phi_1"] & P_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "f_1"] & R_0 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R'_1 \arrow[r, "i'_1"] & P'_1 \arrow[r, "p'_1"] & R'_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

これを繰り返し，次の可換図式を得る.

[3.2.8]

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d, "\phi_{n-1}"] & P_{n-1} \arrow[r, "p_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & R_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n-2}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R'_{n-1} \arrow[r, "i'_{n-1}"] & P'_{n-1} \arrow[r, "p'_{n-1}"] & R'_{n-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

[3.2.6] から次の可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_1(R_{n-2}, B) \arrow[r, "\tilde{\delta}_{1,n-1}"] \arrow[d, "\exists_1 \psi_1"] & R_{n-1} \otimes_R B \arrow[r, "i_{n-1}\otimes 1"] \arrow[d, "\phi_{n-1}\otimes 1"] & P_{n-1} \otimes_R B \arrow[d, "f_{n-1}\otimes 1"] \\
0 \arrow[r] & T_1(R'_{n-2}, B) \arrow[r, "\tilde{\delta}'_{1,n-1}"] & R'_{n-1} \otimes_R B \arrow[r, "i'_{n-1}\otimes 1"] & P'_{n-1} \otimes_R B
\end{tikzcd}$$

ψ_1 が一意に存在することは容易に分かる．[3.2.7] から次の可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_2(R_{n-3}, B) \arrow[r, "\tilde{\delta}_{2,n-2}"] \arrow[d, "\exists_1 \psi_2"] & T_1(R_{n-2}, B) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_2(R'_{n-3}, B) \arrow[r, "\tilde{\delta}'_{2,n-2}"] & T_1(R'_{n-2}, B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

以上を続けて，可換図式

$$\begin{tikzcd}
T_n(A_1, B) \arrow[r, "\tilde{\delta}"] \arrow[d, "\psi_n"] & \ker(i_{n-1} \otimes 1) \arrow[d, "\phi_{n-1}\otimes 1"] \\
T_n(A_2, B) \arrow[r, "\tilde{\delta}'"] & \ker(i'_{n-1} \otimes 1)
\end{tikzcd}$$

を得る. □

$\ker(1_{n-1} \otimes 1) \simeq \mathrm{Tor}_n{}^R(A, B)$ の構成

証明 [3.2.5] のように射影的分解を構成する.

$$\mathrm{Tor}_n{}^R(A, B) = H_n(\boldsymbol{P} \otimes_R B) = \ker(\partial_n \otimes 1)/\operatorname{Im}(\partial_{n+1} \otimes 1)$$

である．テンソル積の右完全性から

$$R_n \otimes_R B \xrightarrow{i_n \otimes 1} P_n \otimes_R B \xrightarrow{p_n \otimes 1} R_{n-1} \otimes_R B \longrightarrow 0$$

$$R_{n+1} \otimes_R B \xrightarrow{i_{n+1} \otimes 1} P_{n+1} \otimes_R B \xrightarrow{p_{n+1} \otimes 1} R_n \otimes_R B \longrightarrow 0$$

であり，$\partial_{n+1} = i_n \circ p_{n+1}$ なので，

$$\mathrm{Im}(\partial_{n+1} \otimes 1) = \mathrm{Im}((i_n \otimes 1) \circ (p_{n+1} \otimes 1)) = \mathrm{Im}(i_n \otimes 1) = \ker(p_n \otimes 1).$$

また，

$$\ker(\partial_n \otimes 1) = \ker((i_{n-1} \otimes 1) \circ (p_n \otimes 1)) = (p_n \otimes 1)^{-1}(\ker(i_{n-1} \otimes 1))$$

となるので, 全射準同型 $p_n \otimes 1\colon \ker(\partial_n \otimes 1) \to \ker(i_{n-1} \otimes 1)$ を得る. 準同型定理から $\ker(\partial_n \otimes 1)/\ker(p_n \otimes 1) \simeq \ker(i_{n-1} \otimes 1)$ となる．以上から，同型

$$\tilde{p}_n\colon \ \mathrm{Tor}_n{}^R(A,B) \ni a \otimes b + \mathrm{Im}(\partial_{n+1} \otimes 1) \mapsto p_n(a) \otimes b \in \ker(i_{n-1} \otimes 1)$$

を得る. □

$\ker(1_{n-1} \otimes 1) \simeq \mathrm{Tor}_n{}^R(A,B)$ の可換性

証明 [3.2.8] から，$\boldsymbol{f} \otimes 1\colon \boldsymbol{P} \otimes_R B \to \boldsymbol{P}' \otimes_R B$ は鎖準同型である．従って，

$$(f_n \otimes 1)^*\colon H_n(\boldsymbol{P} \otimes_R B) \ni (a \otimes b) + \mathrm{Im}(\partial_{n+1} \otimes 1) \mapsto f_n(a) \otimes b + \mathrm{Im}(\partial'_{n+1} \otimes 1) \in H_n(\boldsymbol{P} \otimes_R B)$$

は同型である（定理 2.1）．[3.2.8] と同様の式から $p'_n \circ f_n = \phi_{n-1} \circ p_n$ なので，次の図式が可換となる．

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Tor}_n{}^R(A_1,B) & \xrightarrow{\tilde{p}_n} & \ker(i_{n-1} \otimes 1) \\
\downarrow{\scriptstyle (f_n \otimes 1)^*} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{n-1} \otimes 1} \\
\mathrm{Tor}_n{}^R(A_2,B) & \xrightarrow{\tilde{p}'_n} & \ker(i'_{n-1} \otimes 1)
\end{array}$$

□

■例 3.5（問題 2）

（イ）

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

に対して，定理 3.18(iii)（ニ）から

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_R(B,B) & \xrightarrow{\delta_E} & \mathrm{Ext}_R{}^1(A,B) \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle {}^{\#}\gamma^1} \\
\mathrm{Hom}_R(B,B) & \xrightarrow{\delta_{E'}} & \mathrm{Ext}_R{}^1(A',B)
\end{array}$$

が可換となるので，$\delta_{E'}(1_{B'}) = \mathrm{ch}(E') = {}^{\#}\gamma^1(\mathrm{ch}(E)) = {}^{\#}\gamma^1(\delta_E(1_B))$．よって，次の可換図式を得る．

$$\begin{array}{ccc}
E(A,B) & \xrightarrow{\Phi_\gamma} & E(A',B) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ch}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ch}} \\
\mathrm{Ext}_R{}^1(A,B) & \xrightarrow{{}^{\#}\gamma} & \mathrm{Ext}_R{}^1(A',B)
\end{array}$$

(ロ)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & E' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & E \arrow[r] \arrow[u] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0 \end{tikzcd}$$

に対して，定理 3.18(iii)（ニ）から

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_R(B', B') \arrow[r, "\delta_{E'}"] \arrow[d, "{}^{\#}\alpha"] & {\mathrm{Ext}_R}^1(A, B') \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Hom}_R(B, B') \arrow[r, "\delta'"] & {\mathrm{Ext}_R}^1(A, B') \end{tikzcd}$$

なので，$\alpha \circ \delta_E(1_B) = \delta' \circ \alpha^{\#}(1_B) = \delta' \circ \alpha$.

さらに，定理 3.18(v) 中央左の図式から

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_R(B, B) \arrow[r, "\delta_E"] \arrow[d, "\alpha^{\#}"] & {\mathrm{Ext}_R}^1(A, B) \arrow[d, "\alpha^{\#}"] \\ \mathrm{Hom}_R(B, B') \arrow[r, "\delta'"] & {\mathrm{Ext}_R}^1(A, B') \end{tikzcd}$$

なので，$\delta_{E'}(1_{B'}) = \delta' \circ {}^{\#}\alpha(1_{B'}) = \delta' \circ \alpha$．以上から，$\mathrm{ch}(E') = \alpha \circ \mathrm{ch}(E)$．よって，次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd} E(A, B) \arrow[r, "\Psi_\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{ch}"] & E(A, B') \arrow[d, "\mathrm{ch}"] \\ {\mathrm{Ext}_R}^1(A, B) \arrow[r, "\alpha^{\#}"] & {\mathrm{Ext}_R}^1(A, B') \end{tikzcd}$$

(ハ)　A の射影的分解を

$$X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

A' の射影的分解を

$$X'_n \xrightarrow{\partial'_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X'_1 \xrightarrow{\partial'_1} X'_0 \longrightarrow A' \longrightarrow 0$$

とする．$A \oplus A'$ の射影的分解として $X_n \oplus X'_n$ が取れる（定理 3.4 の証明）．

§2.3 から

$$\begin{aligned} {\mathrm{Ext}_R}^1(A, B) \oplus {\mathrm{Ext}_R}^1(A', B') &= H^1(\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{X}, B)) \oplus H^1(\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{X}', B')) \\ &\simeq H^1(\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{X}, B) \oplus \mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{X}', B')) \end{aligned}$$

および

$${\mathrm{Ext}_R}^1(A \oplus A', B \oplus B') \simeq H^1(\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{X}', B \oplus B'))$$

と書ける．

(ニ) （イ）（ロ）から次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & \Psi_{\nabla_B}\circ\Phi_{\Delta_A}(E\oplus E') \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & B\oplus B \arrow[r] \arrow[u, "\nabla_B"'] \arrow[d, equal] & \Phi_{\Delta_A}(E\oplus E') \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, "\Delta_A"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B\oplus B \arrow[r] & E\oplus E' \arrow[r] & A\oplus A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

解答で構成した $\tilde{E}$ は $E+E' = \Psi_{\nabla_B}\circ\Phi_{\Delta_A}(E\oplus E')$ と同型である．さらに，

$$\mathrm{ch}(E+E') = \mathrm{ch}(\Psi_{\nabla_B}\circ\Phi_{\Delta_A}(E\oplus E')) = {\nabla_B}^{\#}\circ\mathrm{ch}(\Phi_{\Delta_A}(E\oplus E')) = {\nabla_B}^{\#}\circ{}^{\#}\Delta_A\,\mathrm{ch}(E\oplus E').$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(E+E') &= \mathrm{ch}(\Psi_{\nabla_B}\circ\Phi_{\Delta_A}(E\oplus E')) = {\nabla_B}^{\#}\circ\mathrm{ch}(\Phi_{\Delta_A}(E\oplus E')) \\ &= {\nabla_B}^{\#}\circ{}^{\#}\Delta_A\,\mathrm{ch}(E\oplus E') \qquad\qquad = \nabla_B\circ\mathrm{ch}(E\oplus E')\circ\Delta_A.\end{aligned}$$

ch: $E(A,B)\to {\mathrm{Ext}_R}^1(A,B)$ は準同型，すなわち $\mathrm{ch}(E+E') = \mathrm{ch}(E)+\mathrm{ch}(E')$.

証明 定理 3.20 の証明と同様にして，次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, "\gamma"] & P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, "\gamma'"] & P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi'"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "f'"] & E' \arrow[r, "g"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

連結準同型を δ: $\mathrm{Hom}_R(Q,B)\to{\mathrm{Ext}_R}^1(A,B)$ とする．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(B,B) \arrow[r, "\delta_E"] \arrow[d, "{}^{\#}\gamma"] & {\mathrm{Ext}_R}^1(A,B) \\
\mathrm{Hom}_R(Q,B) \arrow[ur, "\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(B,B) \arrow[r, "\delta_{E'}"] \arrow[d, "{}^{\#}\gamma'"] & {\mathrm{Ext}_R}^1(A,B) \\
\mathrm{Hom}_R(Q,B) \arrow[ur, "\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{ch}(E) = \delta_E(1_B) = \delta\circ{}^{\#}\gamma(1_B) = \delta\circ\gamma, \qquad \mathrm{ch}(E') = \delta_{E'}(1_B) = \delta\circ{}^{\#}\gamma'(1_B) = \delta\circ\gamma'.$$

$\delta\oplus\delta\colon \mathrm{Hom}_R(Q\oplus Q, B\oplus B)\to \mathrm{Ext}_R{}^1(A\oplus A, B\oplus B)$ が連結準同型となる（コホモロジーの連結準同型の構成から分かる）．従って，次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(B\oplus B, B\oplus B) \arrow[r, "\delta_{E\oplus E'}"] \arrow[d, "{}^{\#}(\gamma\oplus\gamma')"'] & \mathrm{Ext}_R{}^1(A\oplus A, B\oplus B) \\
\mathrm{Hom}_R(Q\oplus Q, B\oplus B) \arrow[ur, "\delta\oplus\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

従って，

$$\mathrm{ch}(E\oplus E') = \delta_{E\oplus E'}(1_{B\oplus B}) = (\delta\oplus\delta)\circ{}^{\#}(\gamma\oplus\gamma')(1_{B\oplus B}) = (\delta\oplus\delta)\circ(\gamma\oplus\gamma') = (\delta\circ\gamma)\oplus(\delta\circ\gamma').$$

$a\in A$ に対し，

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(E+E')(a) &= \nabla_B\circ\mathrm{ch}(E\oplus E')\circ\Delta_A(a) = \nabla_B\circ((\delta\circ\gamma)\oplus(\delta\circ\gamma'))(a,a)\\
&= \nabla_B\circ(\delta\circ\gamma(a)\oplus\delta\circ\gamma'(a)) = \delta\circ\gamma(a)+\delta\circ\gamma(a)\\
&= \mathrm{ch}(E)(a)+\mathrm{ch}(E')(a)
\end{aligned}$$

となるので，$\mathrm{ch}(E+E') = \mathrm{ch}(E)+\mathrm{ch}(E')$ □

3.3 Künneth の定理

■定理 3.21

$\delta_n = \oplus(\jmath_p\otimes 1)^*$（ただし $\jmath_p\colon B_p\hookrightarrow Z_p$）

証明 $\partial'_n\colon X_n\to X_{n-1}$, $Z_n=\ker\partial'_n$, $B_{n-1}=\mathrm{Im}\,\partial'_n$ および $\partial_n"\colon Y_n\to Y_{n-1}$ とする．Y_m は平坦 R 加群なので，鎖複体の完全系列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_n \arrow[r, "\imath_n"] \arrow[d, "\partial'_n"] & X_n \arrow[r, "\partial'_n"] \arrow[d, "\partial'_n"] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial'_{n-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1} \arrow[r, "\imath_{n-1}"] & X_{n-1} \arrow[r, "\partial'_{n-1}"] & B_{n-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

から完全系列

$$0 \longrightarrow Z_n\otimes_R Y_m \xrightarrow{\imath_n\otimes 1} X_n\otimes_R Y_m \xrightarrow{\partial'_n\otimes 1} B_{n-1}\otimes_R Y_m \longrightarrow 0$$

が得られる．テンソル積鎖複体は

$$(\boldsymbol{Z}\otimes_R\boldsymbol{Y})_n = \bigoplus_{p=0}^{n} Z_p\otimes_R Y_{n-p},\quad (\boldsymbol{X}\otimes_R\boldsymbol{Y})_n = \bigoplus_{p=0}^{n} X_p\otimes_R Y_{n-p},\quad (\boldsymbol{B}\otimes_R\boldsymbol{Y})_n = \bigoplus_{p=1}^{n} B_{p-1}\otimes_R Y_{n-p}$$

で与えられ，n 次境界作用素は

$$\partial_n = \sum_{p=0}^{n}\left(\partial'_p\otimes 1 + (-1)^p 1\otimes\partial''_{n-p}\right)$$

で与えられる．$(\boldsymbol{Z} \otimes_R \boldsymbol{Y})_n$, $(\boldsymbol{B} \otimes_R \boldsymbol{Y})_n$ では第 1 項は 0 である．以上から，テンソル積鎖複体の完全系列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\boldsymbol{Z} \otimes_R \boldsymbol{Y})_n \arrow[r, "\oplus(\imath_p\otimes 1)"] \arrow[d, "\partial_n"] & (\boldsymbol{X} \otimes_R \boldsymbol{Y})_n \arrow[r, "\oplus(\partial'_p\otimes 1)"] \arrow[d, "\partial_n"] & (\boldsymbol{B} \otimes_R \boldsymbol{Y})_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\boldsymbol{Z} \otimes_R \boldsymbol{Y})_{n-1} \arrow[r, "\oplus(\imath_p\otimes 1)"] & (\boldsymbol{X} \otimes_R \boldsymbol{Y})_{n-1} \arrow[r, "\oplus(\partial'_p\otimes 1)"] & (\boldsymbol{B} \otimes_R \boldsymbol{Y})_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

が得られる．

定理 2.2 の証明 (p.62) にあるように，$\delta_n\colon H_n(\boldsymbol{B} \otimes_R \boldsymbol{Y}) \to H_{n-1}(\boldsymbol{Z} \otimes_R \boldsymbol{Y})$ は

$$\delta_n = \{\oplus(\imath_p \otimes 1)^*\}^{-1} \circ \partial'_n \circ \{\oplus(\partial'_p \otimes 1)^*\}^{-1}$$

で与えられる．

$H_n(\boldsymbol{B} \otimes_R \boldsymbol{Y})$ の代表元は

$$\ker \partial_n = \ker \left(\sum (-1)^p 1 \otimes \partial''_{n-p}\right) \subset (\boldsymbol{B} \otimes_R \boldsymbol{Y})_n = \bigoplus_{p=1}^{n} B_{p-1} \otimes_R Y_{n-p}$$

の元なので，$\sum \partial'_p(x_p) \otimes y_{n-p}$（ただし $\partial''_{n-p}(y_{n-p}) = 0$）と表せる．これを δ_n で移せば $\sum \partial'_p(x_p) \otimes y_{n-p}$ となるので，結局 $\delta_n = \oplus(\jmath_p \otimes 1)^*$ である（ただし $\jmath_p\colon B_p \hookrightarrow Z_p$）． $\square$

第 6 章

関手

6.4 随伴関手

■例 6.11 (vii). $F\colon S\text{-}\mathbf{Mod} \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ を $F(L) = M \otimes_S L$, $G\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \to S\text{-}\mathbf{Mod}$ を $F(N) = \mathrm{Hom}_R(M, N)$ に修正．例 1.20 (p.34) から $\mathrm{Hom}_R(M \otimes_S L, N) \simeq \mathrm{Hom}_S(L, \mathrm{Hom}_R(M, N))$ なので，$F \dashv G$.

■(II)$_3$

$$(\delta \circ F)_X = \delta_{F(X)},\ (F \circ \varepsilon)_X = F(\varepsilon_X),\ (G \circ \delta)_Y = G(\delta_Y),\ (\varepsilon \circ G)_Y = \varepsilon_{G(Y)}$$

証明 $f\colon X' \to X$ とする．関手 F を作用させて $F(f)\colon F(X') \to F(X)$ を得る．(II)$_1$ 右の図式で $Y = F(X')$, $Y' = F(X)$, $g = F(f)$ とすれば，

$$\begin{array}{ccc} X' & \qquad & F \circ G \circ F(X') \xrightarrow{\delta_{F(X')}} F(X') \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle F\circ G\circ F(f)} \qquad\qquad \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ X & & F \circ G \circ F(X) \xrightarrow{\delta_{F(X)}} F(X) \end{array}$$

を得る．従って，$(\delta \circ F)_X := \delta_{F(X)}$ とすれば，自然変換 $\delta \circ F\colon F \circ G \circ F \to F$ を得る．

(II)$_1$ 左の図式に関手 F を作用させれば，

$$\begin{array}{ccc} X' & \qquad & F(X') \xrightarrow{F(\varepsilon_{X'})} F \circ G \circ F(X') \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \qquad\qquad \downarrow{\scriptstyle F\circ G\circ F(f)} \\ X & & F(X) \xrightarrow{F(\varepsilon_X)} F \circ G \circ F(X) \end{array}$$

を得る．従って，$(F \circ \varepsilon)_X := F(\varepsilon_X)$ とすれば，自然変換 $F \circ \varepsilon\colon F \to F \circ G \circ F$ を得る．

$G \circ \delta$, $\varepsilon \circ G$ についても同様． □

第 7 章

層

7.1 前層，層

■例 7.7 $\{U_i\}_{i\in I}$ を U の開被覆，$X=\bigcup_{i\in I}(U_i{}^{n+1})\subset U^{n+1}$ とする．$s\colon U^{n+1}\to\mathbb{R}$ を，

$$s(x)=\begin{cases}0 & (x\in X)\\ 1 & (x\notin X)\end{cases}$$

と定める．任意の $x\in U$ に対し，$x\in U_i$ となる $i\in I$ が存在する．$\rho_{V,U}(s)=s|_{U_i{}^n}=0$ なので，$|s|=\varnothing$ である．よって，A.S. 層は既約でない．

■(IV)

前層 $\mathscr{F}$ に対して，$\mathscr{G}$ が $\mathscr{F}$ の局所零部分前層，$\mathscr{F}/\mathscr{G}$ が既約前層ならば，$\mathscr{G}=\mathscr{F}_0$

証明 U を X の開集合，$s\in\mathscr{F}_0(U)$，$s'=s+\mathscr{G}(U)\in\mathscr{F}_0/\mathscr{G}(U)$ とする．$\mathscr{F}_0$ は局所零なので $|s|=\varnothing$．従って，任意の $x\in U$ に対し，x の開近傍 $V\subset U$ が存在し $\rho^{\mathscr{F}}_{UV}(s)=0\in\mathscr{G}(U)$．$\rho^{F/\mathscr{G}}_{UV}(s')=\rho^{\mathscr{F}}_{UV}(s)+\mathscr{G}(V)=0$ なので $|s'|=\varnothing$．$\mathscr{F}/\mathscr{G}$ は既約なので $s'=0$，すなわち $s\in\mathscr{G}(U)$ である．よって $\mathscr{F}_0(U)\subset\mathscr{G}(U)$ となる． □

■(XVII)

$\rho^{\mathscr{G}}_{VW}\circ\varphi_V=\varphi_W\circ\rho^{\mathscr{F}}_{VW}$

証明 $V\subset U$ に対し $\rho^{\mathscr{G}}_{VV_i}\circ\varphi_V=\varphi^{(i)}_{V_i}\circ\rho^{\mathscr{F}}_{VV_i}$ によって $\varphi(V)\colon\mathscr{F}(V)\to\mathscr{G}(V)$ を定義する．$V_i=V\cap U_i$ 及び $W_i=W\cap U_i$ とする．

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(V_i) \arrow[r, "\varphi^{(i)}_{V_i}"] \arrow[d, "\rho^{\mathscr{F}}_{V_iW_i}"'] & \mathscr{G}(V_i) \arrow[d, "\rho^{\mathscr{G}}_{V_iW_i}"] \\
\mathscr{F}(W_i) \arrow[r, "\varphi^{(i)}_{W_i}"] & \mathscr{G}(W_i)
\end{tikzcd}$$

$s\in\mathscr{F}(V)$ とする．証明する式の左辺を W_i に制限すれば

$$\rho^{\mathscr{G}}_{WW_i}\circ\rho^{\mathscr{G}}_{VW}\circ\varphi_V(s)=\rho^{\mathscr{G}}_{VW_i}\circ\varphi_V(s)=\rho^{\mathscr{G}}_{V_iW_i}\circ\rho^{\mathscr{G}}_{VV_i}\circ\varphi_V(s)=\rho^{\mathscr{G}}_{V_iW_i}\circ\varphi^{(i)}_{V_i}\circ\rho^{\mathscr{F}}_{VV_i}(s)$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi^{(i)}_{W_i} \circ \rho^{\mathscr{F}}_{V_i W_i} \circ \rho^{\mathscr{F}}_{V V_i}(s) = \varphi^{(i)}_{W_i} \circ \rho^{\mathscr{F}}_{V W_i}(s) = \varphi^{(i)}_{W_i} \circ \rho^{\mathscr{F}}_{W W_i} \circ \rho^{\mathscr{F}}_{V W}(s) \\
&= \rho^{\mathscr{G}}_{W W_i} \circ \varphi_W \circ \rho^{\mathscr{F}}_{V W}(s),
\end{aligned}
$$

すなわち右辺の W_i への制限になる．$\{ W_i \}$ は W の開被覆で $\mathscr{G}$ は層なので，$\rho^{\mathscr{G}}_{VW} \circ \varphi_V(s) = \varphi_W \circ \rho^{\mathscr{F}}_{VW}(s)$．□

7.2 前層の圏，層の圏

■(VIII)

> $\Gamma(\operatorname{Im}\varphi) = \mathscr{G}$，$t \in \mathscr{G}(U)$ なら U のある開被覆 $\{ U_i \}$ が存在して $\rho^{\mathscr{G}}_{UU_i}(t) \in (\operatorname{Im}\varphi)(U_i)$

証明 $t \in \Gamma(\operatorname{Im}\varphi)(U) = \Gamma(U, \operatorname{Im}\varphi)$ の代表を $\{ t_i, U_i \}_{i \in I}$ とする ($t_i \in (\operatorname{Im}\varphi)(U_i) \subset \mathscr{G}(U_i)$)．切断面の代表の定義から $\rho^{\mathscr{G}}_{U_i, U_{ij}}(t_i) = \rho^{\mathscr{G}}_{U_j, U_{ij}}(t_j)$．$t$ の U_i への制限 $\rho^{\Gamma(\operatorname{Im}\varphi)}_{UU_i}(t)$ の代表は，補題 7.5 から

$$
\left\{ U_{ij}, \rho^{\operatorname{Im}\varphi}_{U_j, U_{ij}}(t_j) \right\}_{j \in I} = \left\{ U_{ij}, \rho^{\mathscr{G}}_{U_j, U_{ij}}(t_j) \right\}_{j \in I}
$$

で与えられる．$t_i \in (\operatorname{Im}\varphi)(U_i)$ の $\Gamma(\operatorname{Im}\varphi)(U_i)$ への埋め込み $\imath_{U_i}(t_i)$ は補題 7.6 から $\{ U_i, t_i \}$ で代表され，$\{ U_{ij}, \rho^{\mathscr{G}}_{U_j, U_{ij}}(t_j) \}_{j \in I} \sim \{ U_i, t_i \}$．以上から，$\rho^{\Gamma(\operatorname{Im}\varphi)}_{UU_i}(t) = \imath_{U_i}(t_i)$ が示された．□

■(IX)

> 層の準同型 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ が単射なら $\varphi = \ker\psi$ となる $\psi\colon \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ が存在する

証明 $\pi\colon \mathscr{G} \to \mathscr{G}/\varphi(\mathscr{F})$（前層の準同型），$\mathscr{H} = \mathit{\Gamma}(\mathscr{G}/\varphi(\mathscr{F}))$ 及び $\psi = \mathit{\Gamma} \circ \pi$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
(\operatorname{Ker}\psi)(U) \arrow[r] & \mathscr{G}(U) \arrow[r, "\psi(U)"] \arrow[d, "\pi(U)"] & \mathit{\Gamma}(\mathscr{G}/\varphi(\mathscr{F}))(U) \\
& (\mathscr{G}/\varphi(\mathscr{F}))(U) \arrow[ur, "\imath_U"'] &
\end{tikzcd}
$$

補題 7.6 より $\mathit{\Gamma}(U) = \imath_U$ は単射なので

$$
(\operatorname{Ker}^* \psi)(U) = (\operatorname{Ker}\psi)(U) = \operatorname{Ker}(\psi(U)) = \operatorname{Ker}(\imath_U \circ \pi(U)) = \operatorname{Ker}(\pi(U)) = \varphi(U)(\mathscr{F}(U)).
$$

□

> 層の準同型 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ が全射なら $\varphi = \operatorname{cok}^* \psi$ となる $\psi\colon \mathscr{H} \to \mathscr{F}$ が存在する

証明 準同型 φ が全射なので (VIII) より $\mathit{\Sigma}(\operatorname{Im}\varphi) = \mathscr{G}$．前層の準同型 $\bar{\varphi}\colon \mathscr{F} \to \operatorname{Im}\varphi$ によって $\varphi = \mathit{\Sigma} \circ \bar{\varphi}$ となる．$\mathscr{H} = \operatorname{Ker}\bar{\varphi}$ 及び $\psi = \ker\bar{\varphi}$ とする．

$$
\operatorname{Ker}\bar{\varphi} \xrightarrow{\psi} \mathscr{F} \xrightarrow{\bar{\varphi}} \operatorname{Im}\varphi \xrightarrow{\mathit{\Sigma}} \mathscr{G}
$$

$(\operatorname{Cok}\psi)(U) = \operatorname{Cok}(\psi(U)) = \mathscr{F}(U)/\operatorname{Im}\psi(U) = \mathscr{F}(U)/\operatorname{Ker}\bar{\varphi}(U) = \operatorname{Im}\bar{\varphi}(U) = \bar{\varphi}(U)(\mathscr{F}(U))$ なので

$$
(\operatorname{Cok}^* \psi)(U) = \mathit{\Sigma}(U)(\operatorname{Cok}\psi(U)) = \mathit{\Sigma}(U) \circ \bar{\varphi}(U)(\mathscr{F}(U)) = \varphi(U)(\mathscr{F}(U)).
$$

□

■(XI)

$\mathscr{F}$ が軟弱層なら $\psi(U)\colon \mathscr{G}(U) \to \mathscr{H}(U)$ は全射

証明 $u \in \mathscr{H}(U)$ とする．$\psi\colon \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ が全射なので (VIII) より，U のある開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ と $t_i \in \mathscr{G}(U_i)$ が存在して，$\rho^{\mathscr{H}}_{UU_i}(u) = \psi(U_i)(t_i)$.

$$\rho^{\mathscr{H}}_{UU_{ij}}(u) = \rho^{\mathscr{H}}_{U_iU_{ij}} \circ \rho^{\mathscr{H}}_{UU_i}(u) = \rho^{\mathscr{H}}_{U_iU_{ij}} \circ \psi(U_i)(t_i) = \psi(U_{ij}) \circ \rho^{\mathscr{G}}_{U_iU_{ij}}(t_i)$$

なので, $\psi(U_{ij})\circ\rho^{\mathscr{G}}_{U_iU_{ij}}(t_i) = \psi(U_{ij})\circ\rho^{\mathscr{G}}_{U_jU_{ij}}(t_j)$. すなわち $\rho^{\mathscr{G}}_{U_iU_{ij}}(t_i) - \rho^{\mathscr{G}}_{U_jU_{ij}}(t_j) \in \ker\psi(U_{ij}) = \operatorname{Im}\varphi(U_{ij})$. よって，$s_{ij} \in \mathscr{F}(U_{ij})$ が存在して，$\rho^{\mathscr{G}}_{U_iU_{ij}}(t_i) - \rho^{\mathscr{G}}_{U_jU_{ij}}(t_j) = \varphi(U_{ij})(s_{ij})$ となる．

s_{ij} が補題 7.7 の条件を満たすことを確かめる．まず，$\varphi(U_{ij})(s_{ij}) = -\varphi(U_{ij})(s_{ji})$ で $\varphi(U_{ij})$ は単射なので $s_{ij} = -s_{ji}$．さらに

$$\begin{aligned}\varphi(U_{ijk}) \circ \rho^{\mathscr{F}}_{U_{ij}U_{ijk}}(s_{ij}) &= \rho^{\mathscr{G}}_{U_{ij}U_{ijk}} \circ \varphi(U_{ij})(s_{ij}) = \rho^{\mathscr{G}}_{U_{ij}U_{ijk}} \circ \rho^{\mathscr{G}}_{U_iU_{ij}}(t_i) - \rho^{\mathscr{G}}_{U_{ij}U_{ijk}} \circ \rho^{\mathscr{G}}_{U_iU_{ij}}(t_i)\\ &= \rho^{\mathscr{G}}_{U_iU_{ijk}}(t_i) - \rho^{\mathscr{G}}_{U_jU_{ijk}}(t_j)\end{aligned}$$

なので

$$\varphi(U_{ijk}) \circ \rho^{\mathscr{F}}_{U_{ij}U_{ijk}}(s_{ij}) + \varphi(U_{ijk}) \circ \rho^{\mathscr{F}}_{U_{jk}U_{ijk}}(s_{jk}) + \varphi(U_{ijk}) \circ \rho^{\mathscr{F}}_{U_{ki}U_{ijk}}(s_{ki}) = 0.$$

$\varphi(U_{ijk})$ は単射なので (iii) が満足される．従って，$s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ が存在して $s_{ij} = \rho^{\mathscr{F}}_{U_jU_{ij}}(s_j) - \rho^{\mathscr{F}}_{U_iU_{ij}}(s_i)$．これより

$$\begin{aligned}\rho^{\mathscr{G}}_{U_iU_{ij}}(t_i) - \rho^{\mathscr{G}}_{U_jU_{ij}}(t_j) &= \varphi(U_{ij})(s_{ij}) = \varphi(U_{ij}) \circ \rho^{\mathscr{F}}_{U_jU_{ij}}(s_j) - \varphi(U_{ij}) \circ \rho^{\mathscr{F}}_{U_iU_{ij}}(s_i)\\ &= \rho^{\mathscr{G}}_{U_jU_{ij}} \circ \varphi(U_j)(s_j) - \rho^{\mathscr{G}}_{U_iU_{ij}} \circ \varphi(U_i)(s_i).\end{aligned}$$

$t'_i = t_i + \varphi(U_i)(s_i)$ とすれば $\rho^{\mathscr{G}}_{U_iU_{ij}}(t'_i) = \rho^{\mathscr{G}}_{U_jU_{ij}}(t'_j)$．従って，$t \in \mathscr{G}(U)$ が存在して $\rho^{\mathscr{G}}_{UU_i}(t) = t'_i$．以上から

$$\begin{aligned}\rho^{\mathscr{H}}_{UU_i} \circ \psi(U)(t) &= \psi(U_i) \circ \rho^{\mathscr{G}}_{UU_i}(t) = \psi(U_i)(t'_i) = \psi(U_i)(t_i) + \psi(U_i) \circ \varphi(U_i)(s_i)\\ &= \psi(U_i)(t_i) = \rho^{\mathscr{H}}_{UU_i}(u).\end{aligned}$$

$\mathscr{H}$ は層なので $u = \psi(U)(t)$ となる． □

7.3 層の茎

■補題 7.12　$\tilde{c} = \{\, c_x \mid x \in U \,\}$ とする．$\varPhi_+^{-1}(\tilde{c})$ が $\varDelta[\mathscr{F}]$ の開集合であることを示す．$(a_x, b_x) \in \varPhi_+^{-1}(\tilde{c})$ とする．定義より $a_x + b_x = c_x \in \mathscr{F}_x$ である．本文から，ある $x \in W \subset U$ と $a', b' \in \mathscr{F}(W)$ が存在し，$\rho_{Wx}(a') = a_x$ などとなる．$S = \{\, (a'_y, b'_y) \mid y \in W \,\}$ とする．$(a_x, b_x) \in S$ である．$S = \varDelta[\mathscr{F}] \cap (\tilde{a} \times \tilde{b})$ なので，S は $\varDelta[\mathscr{F}]$ の開集合．さらに，任意の $y \in W$ に対して $a'_y + b'_y = c_y \in \tilde{c}$ となるので，$S \subset \varPhi_+^{-1}(\tilde{c})$.

$U \subset X$ が開集合であるためには，任意の $x \in U$ に対し，U に含まれる x の開近傍が存在することが必要十分

なので，$\varPhi_+^{-1}(\tilde{c})$ は $\varDelta[\mathscr{F}]$ の開集合.

第 8 章

スペクトル系列

8.1 定義と基本的性質

■(8.12)′

$${}'E_2{}^{p,q} \simeq {}'H^p({}''H^q(K))$$

証明 p.279 はじめに与えられた写像を

$$\tilde{d}'^p\colon \ker d''^{p,q}/\operatorname{Im} d''^{p,q-1} \ni [x^{p,q}] \mapsto [d'(x^{p,q})] \in \ker d''^{p+1,q}/\operatorname{Im} d''^{p+1,q-1}$$

とする．

$$\begin{array}{ccccc} {}'E_2{}^{p,q} & \xrightarrow{\quad\quad\phi\quad\quad} & \ker \tilde{d}'^p & \xrightarrow{\quad\pi\quad} & {}'H^p({}''H^q(K)) = \ker \tilde{d}'^p/\operatorname{Im}\tilde{d}'^{p-1} \\ \cup & & \cup & & \cup \\ [x^{p,q}+x^{p+1,q-1}] & \longmapsto & x^{p,q}+\operatorname{Im} d''^{p,q-1} & \longrightarrow & (x^{p,q}+\operatorname{Im} d''^{p,q-1})+\operatorname{Im}\tilde{d}'^{p-1} \end{array}$$

(8.10) から $d''(x^{p,q})=0$ なので，$\operatorname{Im}\phi \subset \ker \tilde{d}'^p$.

$\pi\circ\phi$ が well-defined であることを示す（ϕ は $x^{p,q}$ の取り方に依存）．$[x]=[x^{p,q}+x^{p+1,q-1}]$ が ${}'E_2$ の零元とする．(8.11) から，ある $y^{p,q-1}\in K^{p,q-1}$ と $y^{p-1,q}\in K^{p-1,q}$ が存在し

$$d''(y^{p,q-1})+d'(y^{p-1,q})=x^{p,q},\quad d''(y^{p-1,q})=0.$$

よって，

$$\phi([x])=x^{p,q}+\operatorname{Im} d''^{p,q-1}=d'(y^{p-1,q})+\operatorname{Im} d''^{p,q-1}.$$

$d'(y^{p-1,q})\in d'(\ker d''^{p-1,q})$ なので $\phi([x])\in\operatorname{Im}\tilde{d}'^{p-1}$．よって，$\pi\circ\phi([x])=0$ となる．

$\pi\circ\phi([x^{p,q}+x^{p+1,q-1}])=0$ とする．$x^{p,q}+\operatorname{Im} d''^{p,q-1}\in\operatorname{Im}\tilde{d}'^{p-1}$ なので，ある $y^{p-1,q}\in\ker d''^{p-1,q}$ が存在し，

$$x^{p,q}+\operatorname{Im} d''^{p,q-1}=d'(y^{p-1,q})+\operatorname{Im} d''^{p,q-1}.$$

よって，ある $y^{p,q-1}\in K^{p,q-1}$ が存在し，

$$x^{p,q}-d'(y^{p-1,q})=d''(y^{p,q-1}).$$

(8.11) から $[x^{p,q}+x^{p+1,q-1}]=0$ なので $\pi\circ\phi$ は単射.

$(x^{p,q} + \operatorname{Im} d''^{p,q-1}) + \operatorname{Im} \tilde{d}'^{p-1} \in \ker \tilde{d}'^{p} / \operatorname{Im} \tilde{d}'^{p-1}$ とする．

$$x^{p,q} + \operatorname{Im} d''^{p,q-1} \in \ker \tilde{d}'^{p-1} \subset \ker d''^{p,q} / \operatorname{Im} d''^{p,q-1}$$

なので $x^{p,q} \in \ker d''^{p,q}$．さらに $\tilde{d}'^{p}(x^{p,q} + \operatorname{Im} d''^{p,q-1}) = 0$ なので，$d'(x^{p,q}) \in \operatorname{Im} d''^{p+1,q-1}$．従って，ある $x^{p+1,q-1}$ が存在して $d'(x^{p,q}) = -d''(x^{p+1,q-1})$ となる．よって，(8.10) を満たし，$\pi \circ \phi$ は全射． □

■(III)　図式

$$\begin{array}{ccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
{\scriptstyle d'^{2,0}}\uparrow & & {\scriptstyle d'^{2,1}}\uparrow & & {\scriptstyle d'^{2,2}}\uparrow & & \\
K^{2,0} & \xrightarrow{d''^{2,0}} & K^{2,1} & \xrightarrow{d''^{2,1}} & K^{2,2} & \xrightarrow{d''^{2,2}} & \cdots \\
{\scriptstyle d'^{1,0}}\uparrow & & {\scriptstyle d'^{1,1}}\uparrow & & {\scriptstyle d'^{1,2}}\uparrow & & \\
K^{1,0} & \xrightarrow{d''^{1,0}} & K^{1,1} & \xrightarrow{d''^{1,1}} & K^{1,2} & \xrightarrow{d''^{1,2}} & \cdots \\
{\scriptstyle d'^{0,0}}\uparrow & & {\scriptstyle d'^{0,1}}\uparrow & & {\scriptstyle d'^{0,2}}\uparrow & & \\
K^{0,0} & \xrightarrow{d''^{0,0}} & K^{0,1} & \xrightarrow{d''^{0,1}} & K^{0,2} & \xrightarrow{d''^{0,2}} & \cdots
\end{array}$$

の各列・行が完全とする．

$$A^p = \ker d''^{p,0}, \quad B^p = \ker d'^{0,p}$$

とする．$d'^{p,0}$ と $d''^{0,p}$ の適当な制限により

$$d'^{p,0} \colon A^p \to A^{p+1}, \quad d''^{0,p} \colon B^p \to B^{p+1}$$

となる．(II)(8.12)$'$ から

$${}'E_2{}^{p,q} = {}'H^p(\ker d''^{p,q} / \operatorname{Im} d''^{p,q-1}).$$

$q \geq 1$ に対しては，図式の完全性から ${}'E_2{}^{p,q} = {}'H^p(0) = 0$．$q < 0$ に対しては，K がコホモロジー的スペクトル系列であることから，${}'E_2{}^{p,q} = 0$．$q = 0$ の場合，$d''^{p,-1} = 0$ とすれば，$\ker d''^{p,0} / \operatorname{Im} d''^{p,-1} = A^p$ なので，${}'E_2{}^{p,q} = H^p(\boldsymbol{A})$．

$q \neq 0$ なら ${}'E_2{}^{p,q} = 0$．

$${}'E_2{}^{p-2,q+1} \xrightarrow{d_2{}^{p-2,q+1}} {}'E_2{}^{p,q} = 0 \xrightarrow{d_2{}^{p,q}} {}'E_2{}^{p+2,q-1}$$

よって，SP III (8.3) から

$${}'E_3{}^{p,q} \simeq \ker d_2{}^{p,q} / \operatorname{Im} d_2{}^{p-2,q+1} = 0.$$

これを繰り返せば ${}'E_2{}^{p,q} \simeq \cdots \simeq {}'E_\infty{}^{p,q} = 0$．

$q = 0$ なら ${}'E_2{}^{p,0} = H^p(\boldsymbol{A})$．

$${}'E_2{}^{p-2,1} = 0 \xrightarrow{d_2{}^{p-2,1}} {}'E_2{}^{p,0} = H^p(\boldsymbol{A}) \xrightarrow{d_2{}^{p,0}} {}'E_2{}^{p+2,-1} = 0$$

よって，SP III (8.3) から

$${}'E_3{}^{p,0} \simeq \ker d_2{}^{p,0} / \operatorname{Im} d_2{}^{p-2,1} = H^p(\boldsymbol{A}).$$

これを繰り返せば ${}'E_2{}^{p,0} \simeq \cdots \simeq {}'E_\infty{}^{p,0} = H^p(\boldsymbol{A})$．

(8.6) から

$$E_\infty{}^{p,q} \simeq G_p(H^{p+q}(K)) = F_p(H^{p+q}(K))/F_{p+1}(H^{p+q})K = H^{p+q}(K)_p/H^{p+q}(K)_{p+1}.$$

$q=0$ なら $H^p(K)_p/H^p(K)_{p+1} \simeq E_\infty{}^{p,0} \simeq H^p(\boldsymbol{A})$ である．補題 8.1 から $H^p(K)_{p+1} = F_{p+1}(H^p(K)) = 0$ なので $H^p(K)_p \simeq H^p(\boldsymbol{A})$.

$q \geq 1$ なら $H^p(K)_{p-q}/H^p(K)_{p-q+1} \simeq E_\infty{}^{p-q,q} = 0$ である．よって $H^p(K)_{p-q} \simeq H^p(K)_{p-q+1}$．これを繰り返せば，$H^p(K) = H^p(K)_0 \simeq H^p(K)_p \simeq H^p(\boldsymbol{A})$.

8.2 Grothendieck スペクトル系列

■(I)

$$(8.19):\ \ 0 \longrightarrow K^{r,s} \longrightarrow J^{r,s} \longrightarrow L^{r+1,s} \longrightarrow 0$$

証明 $Z^0 = \ker F(d^0)$, $B^1 = \operatorname{Im} F(d^0)$ の単射的分解を

$$0 \longrightarrow Z^0 \xrightarrow{\ \varepsilon\ } K^{0,0} \xrightarrow{\ \varepsilon^0\ } K^{0,1} \xrightarrow{\ \varepsilon^1\ } \cdots$$

$$0 \longrightarrow B^1 \xrightarrow{\ \varepsilon''\ } L^{0,0} \xrightarrow{\ \varepsilon''^0\ } L^{0,1} \xrightarrow{\ \varepsilon''^1\ } \cdots$$

とする．$J^{0,0} = K^{0,0} \times L^{1,0}$ とする．$\imath^{0,0}$, $\pi^{0,0}$ は標準的写像とする．

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & Z^0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\imath^0"] & K^{0,0} \arrow[d, shift left, "\imath^{0,0}"] \\
A \arrow[r, "g"] \arrow[ur, dashed, "g'"] & F^0 \arrow[r, dashed, "\varepsilon'"] \arrow[d, "\pi^0"] \arrow[ur, dashed, "f^0"] & J^{0,0} \arrow[u, shift left, "p^{0,0}"] \arrow[d, shift left, "\pi^{0,0}"] \\
0 \arrow[r] & B^1 \arrow[r, "\varepsilon''"] \arrow[d] & L^{1,0} \arrow[u, shift left, "\imath''^{0,0}"] \arrow[d] \\
 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

$K^{0,0}$ は単射的対象なので，$\varepsilon = f^0 \circ \imath^0$ となる $f^0 \colon F^0 \to K^{0,0}$ が存在する．

$$\varepsilon' = \imath^{0,0} \circ f^0 + \imath''^{0,0} \circ \varepsilon'' \circ \pi^0 \colon F^0 \to J^{0,0}$$

とする．ε' が単射であることを示す．$\boldsymbol{B}$ の対象 A と $g \colon A \to F^0$ について $\varepsilon' \circ g = 0$ とする．$g = 0$ を示せば良い．与式から

$$\imath^{0,0} \circ f^0 \circ g + \imath''^{0,0} \circ \varepsilon'' \circ \pi^0 \circ g = 0.$$

これに左から $p^{0,0}$, $\pi^{0,0}$ を作用させて $f^0 \circ g = 0$, $\varepsilon'' \circ \pi^0 \circ g = 0$ となる. ε'' は単射なので $\pi^0 \circ g = 0$. $\imath^0 = \ker \pi^0$ なので，$g' \colon A \to Z^0$ によって $g = \imath^0 \circ g'$ と一意に分解できる．よって $0 = f^0 \circ g = f^0 \circ \imath^0 \circ g' = \varepsilon \circ g'$．$\varepsilon$ は全射なので $g' = 0$.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Z^0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\imath^0"] & K^{0,0} \arrow[r] \arrow[d, "\imath^{0,0}"] & \operatorname{Cok}\varepsilon \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\tilde{\imath}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^0 \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d, "\pi^0"] & J^{0,0} \arrow[r] \arrow[d, "\pi^{0,0}"] & \operatorname{Cok}\varepsilon' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\tilde{\pi}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B^1 \arrow[r, "\varepsilon''"] \arrow[d] & L^{1,0} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Cok}\varepsilon'' \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

双対核の定義から $\tilde{\imath}\colon \operatorname{Cok}\varepsilon \to \operatorname{Cok}\varepsilon'$ と $\tilde{\pi}\colon \operatorname{Cok}\varepsilon' \to \operatorname{Cok}\varepsilon''$ が存在し，上の図式は可換となる．例 5.3 から

$$0 \longrightarrow \operatorname{Cok}\varepsilon \xrightarrow{\tilde{\imath}} \operatorname{Cok}\varepsilon' \xrightarrow{\tilde{\pi}} \operatorname{Cok}\varepsilon''$$

は完全．$\tilde{\pi}$ が全射であることを示す．$\boldsymbol{B}$ の対象 A と $g\colon \operatorname{Cok}\varepsilon'' \to A$ について $g\circ\tilde{\pi} = 0$ とする．$g = 0$ を示せば良い．与式より

$$0 = g\circ\tilde{\pi}\circ\operatorname{cok}\varepsilon' = g\circ\operatorname{cok}\varepsilon''\circ\pi^{0,0}.$$

$\operatorname{cok}\varepsilon''\circ\pi^{0,0}$ は全射なので $g = 0$.

§5.3 (I) から $\operatorname{Cok}\varepsilon = \operatorname{Coim}\varepsilon_0$．§5.1 (VII)* から $\operatorname{im}\varepsilon^0$, $\operatorname{im}\varepsilon''^0$ は単射.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Coim}\varepsilon^0 \arrow[r, "\operatorname{im}\varepsilon^0"] \arrow[d] & K^{0,1} \\
 & \operatorname{Cok}\varepsilon' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Coim}\varepsilon''^0 \arrow[r, "\operatorname{im}\varepsilon''^0"] \arrow[d] & L^{0,1} \\
 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

はじめと同じ状況なので，同様の議論を繰り返せばよい． □

$'H^q(G(J^{\bullet,\bullet})) = G(K^{q,p})/G(L^{q,p})$

証明 (8.20) の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
K^{r,1} \arrow[r, hook, "\imath^{r,1}"] & J^{r,1} \arrow[r, two heads, "\pi^{r,1}"] & L^{r+1,1} \arrow[r, hook, "\varphi^{r+1,1}"] & K^{r+1,1} \arrow[r, hook, "\imath^{r+1,1}"] & J^{r+1,1} \\
K^{r,0} \arrow[u, "\varepsilon^{r,0}"] \arrow[r, hook, "\imath^{r,0}"] & J^{r,0} \arrow[u, "{\varepsilon'}^{r,0}"] \arrow[r, two heads, "\pi^{r,0}"] & L^{r+1,0} \arrow[u, "{\varepsilon''}^{r+1,0}"] \arrow[r, hook, "\varphi^{r+1,0}"] & K^{r+1,0} \arrow[u, "\varepsilon^{r+1,0}"] \arrow[r, hook, "\imath^{r+1,0}"] & J^{r+1,0} \arrow[u, "{\varepsilon'}^{r+1,0}"] \\
Z^{r} \arrow[u, "\varepsilon^{r}"] \arrow[r, hook, "\imath^{r}"] & F^{r} \arrow[u, "{\varepsilon'}^{r}"] \arrow[r, two heads, "\pi^{r}"] & B^{r+1} \arrow[u, "{\varepsilon''}^{r+1}"] \arrow[r, hook, "\varphi^{r+1}"] & Z^{r+1} \arrow[u, "\varepsilon^{r+1}"] \arrow[r, hook, "\imath^{r+1}"] & F^{r+1} \arrow[u, "{\varepsilon'}^{r+1}"] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

に左完全函手 G を作用させる．(8.19) から

$$0 \longrightarrow K^{r,s} \xrightarrow{\imath^{r,s}} J^{r,s} \xrightarrow{\pi^{r,s}} L^{r+1,s} \longrightarrow 0$$

は完全分裂系列なので,

$$0 \longrightarrow G(K^{r,s}) \xrightarrow{G(\imath^{r,s})} G(J^{r,s}) \xrightarrow{G(\pi^{r,s})} G(L^{r+1,s}) \longrightarrow 0$$

も完全分裂系列．従って，次の可換図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
G(K^{r,1}) \arrow[r, hook, "G(\imath^{r,1})"] & G(J^{r,1}) \arrow[r, two heads, "G(\pi^{r,1})"] & G(L^{r+1,1}) \arrow[r, hook, "G(\varphi^{r+1,1})"] & G(K^{r+1,1}) \arrow[r, hook, "G(\imath^{r+1,1})"] & G(J^{r+1,1}) \\
G(K^{r,0}) \arrow[u, "G(\varepsilon^{r,0})"] \arrow[r, hook, "G(\imath^{r,0})"] & G(J^{r,0}) \arrow[u, "G({\varepsilon'}^{r,0})"] \arrow[r, two heads, "G(\pi^{r,0})"] & G(L^{r+1,0}) \arrow[u, "G({\varepsilon''}^{r+1,0})"] \arrow[r, hook, "G(\varphi^{r+1,0})"] & G(K^{r+1,0}) \arrow[u, "G(\varepsilon^{r+1,0})"] \arrow[r, hook, "G(\imath^{r+1,0})"] & G(J^{r+1,0}) \arrow[u, "G({\varepsilon'}^{r+1,0})"]
\end{tikzcd}
$$

ここで

$$d'^{r,s} = G(\imath^{r+1,s}) \circ G(\varphi^{r+1,s}) \circ G(\pi^{r,s}), \quad d''^{r,s} = (-1)^r G({\varepsilon'}^{r,s})$$

とすれば,

$$\operatorname{Ker} d'^{r,s} = G(K^{r,s}), \quad \operatorname{Im} d'^{r-1,s} = G(L^{r,s}).$$

d', d'' により 2 重双対鎖複体 $G(J^{\bullet,\bullet})$（必ずしも (8.16)(8.17) とは一致しない）が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & G(J^{r,s+1}) \arrow[u] \arrow[r, "d'^{r,s+1}"] & G(J^{r+1,s+1}) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & G(J^{r,s}) \arrow[u, "d''^{r,s}"] \arrow[r, "d'^{r,s}"] & G(J^{r+1,s}) \arrow[u, "d''^{r+1,s}"] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

d' に関するコホモロジー群は

$${}'H^q(G(J^{\bullet,\bullet})) = \operatorname{Ker} d'^{q,p} / \operatorname{Im} d'^{q-1,p} = G(K^{q,p})/G(L^{q,p}).$$

□