

# 相対性理論（佐藤）

使用しているのは第 17 刷.

## 第 4 章

# Riemann 幾何学

### 4.5 曲率

■(4.100) Riemann の曲率テンソルを 4 階共変で表すと,

$$\begin{aligned}
 R_{mni j} &= g_{mk} R^k{}_{nij} \\
 &= g_{mk} (\partial_i \Gamma^k{}_{nj} - \partial_j \Gamma^k{}_{ni} + \Gamma^a{}_{nj} \Gamma^k{}_{ai} - \Gamma^a{}_{ni} \Gamma^k{}_{aj}) \\
 &= \partial_i (g_{mk} \Gamma^k{}_{nj}) - \Gamma^k{}_{nj} \partial_i g_{mk} - \partial_j (g_{mk} \Gamma^k{}_{ni}) + \Gamma^k{}_{ni} \partial_j g_{mk} + g_{mk} \Gamma^a{}_{nj} \Gamma^k{}_{ai} - g_{mk} \Gamma^a{}_{ni} \Gamma^k{}_{aj} \\
 &= \partial_i \Gamma_{m,nj} - \Gamma^a{}_{nj} \partial_i g_{ma} - \partial_j \Gamma_{m,ni} + \Gamma^a{}_{ni} \partial_j g_{ma} + g_{mk} \Gamma^a{}_{nj} \Gamma^k{}_{ai} - g_{mk} \Gamma^a{}_{ni} \Gamma^k{}_{aj} \\
 &= \partial_i \Gamma_{m,nj} - \partial_j \Gamma_{m,ni} \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

$$+ \Gamma^a{}_{nj} (g_{mk} \Gamma^k{}_{ai} - \partial_i g_{ma}) \tag{4.2}$$

$$- \Gamma^a{}_{ni} (g_{mk} \Gamma^k{}_{aj} - \partial_j g_{ma}) \tag{4.3}$$

となる. ここで, Christoffel 記号の定義

$$\Gamma^k{}_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij})$$

から,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{m,ij} &= g_{mk} \Gamma^k{}_{ij} \\
 &= \frac{1}{2} g_{mk} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) \\
 &= \delta^l{}_m (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) \\
 &= \frac{1}{2} (\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{mi} - \partial_m g_{ij}) \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned}
 [4.1] &= \partial_i \Gamma_{m,nj} - \partial_j \Gamma_{m,ni} \\
 &= \frac{1}{2} \partial_i (\partial_n g_{jm} + \partial_j g_{mn} - \partial_m g_{nj}) - \frac{1}{2} \partial_j (\partial_n g_{im} + \partial_i g_{mn} - \partial_m g_{ni}) \\
 &= \frac{1}{2} (\partial_n \partial_i g_{mj} + \partial_m \partial_j g_{ni} - \partial_m \partial_i g_{nj} - \partial_n \partial_j g_{mi}). \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

次に, [4.2] は,

$$\Gamma^a{}_{nj} (g_{mk} \Gamma^k{}_{ai} - \partial_i g_{ma}) = \Gamma^a{}_{nj} (\Gamma_{m,ai} - \partial_i g_{ma})$$

$$\begin{aligned}
&= \Gamma^a{}_{nj} \left[ \frac{1}{2} (\partial_a g_{im} + \partial_i g_{ma} - \partial_m g_{ai}) - \partial_i g_{ma} \right] \\
&= -\frac{1}{2} \Gamma^a{}_{nj} (\partial_m g_{ai} + \partial_i g_{ma} - \partial_a g_{im}) \\
&= -\Gamma^a{}_{nj} \Gamma_{a,im} \\
&= -g^{rs} \Gamma_{r,mi} \Gamma_{s,nj}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

と書くことができる. [4.3] はこの計算で  $i$  と  $j$  を入れ替えて,

$$\Gamma^a{}_{ni} (g_{mk} \Gamma^k{}_{aj} - \partial_j g_{ma}) = -g^{rs} \Gamma_{r,mj} \Gamma_{s,ni} \tag{4.7}$$

となる. [4.5][4.6][4.7] から,

$$\begin{aligned}
R_{mnij} &= \frac{1}{2} (\partial_n \partial_i g_{mj} + \partial_m \partial_j g_{ni} - \partial_m \partial_i g_{nj} - \partial_n \partial_j g_{mi}) \\
&\quad + g^{rs} (\Gamma_{r,mj} \Gamma_{s,ni} - \Gamma_{r,mi} \Gamma_{s,nj})
\end{aligned}$$

となる.

## 第 5 章

# 一般相対論

### 5.2 電磁場の共変形式

まずは特殊相対論が扱う Euclid 空間での電磁場の共変形式を考える。この時、場のラグランジアン密度は、

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_{\text{em}} \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} f^{ij} f_{ij} + A_i j^i\end{aligned}\tag{5.1}$$

で与えられる。この時、作用  $S$  は、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{c} \int \left( -\frac{1}{4\mu_0} f^{ij} f_{ij} + A_i j^i \right) d^4x \\ &= \frac{1}{c} \int \left( -\frac{1}{4\mu_0} \eta^{ik} \eta^{jl} f_{kl} f_{ij} + A_i j^i \right) d^4x \\ &= \frac{1}{c} \int \left[ -\frac{1}{4\mu_0} \eta^{ik} \eta^{jl} (\partial_k A_l - \partial_l A_k) (\partial_i A_j - \partial_j A_i) + A_i j^i \right] d^4x\end{aligned}\tag{5.2}$$

である。計量は  $(-, +, +, +)$  としておこう。  $A_i$  を力学変数として作用  $S$  を極小にする変分を考えると、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_j A_i} = 0\tag{5.3}$$

が得られる。これを計算すると、

$$\partial_j f^{ij} = \mu_0 j^i\tag{5.4}$$

もしくは、Maxwell 方程式

$$\partial^k \partial_k A^i = \partial_j (\eta^{jk} \partial_k A^i) = -\mu_0 j^i$$

となる。

次に Riemann 空間での共変形式に拡張する。まず、電磁テンソルは、

$$f_{ij} = A_{j;i} - A_{i;j}\tag{5.5}$$

になる。ちなみに、Christoffel 記号の下添字は可換なのでこれは特殊相対論での表式と変わらない。2 階反変テンソルは、

$$f^{ij} = g^{ik} g^{jl} f_{kl}$$

$$\begin{aligned}
&= g^{ik} g^{jl} (A_{l;k} - A_{k;l}) \\
&= g^{ik} A^j_{;k} - g^{jl} A^i_{;l} \\
&= A^{j;i} - A^{i;j}
\end{aligned}$$

となる。最後の式は反変微分を使った：

$$A^{;i} \equiv g^{ij} A_{;j}.$$

さて、[5.4] を一般相対論に拡張すると、

$$\begin{aligned}
-\mu_0 j^i &= -f^{ij}_{;j} \\
&= A^{i;j}_{;j} - A^{j;i}_{;j} \\
&= A^{i;j}_{;j} - A^{j;i}_{;j} + A^j_{;j}{}^{;i} - A^j_{;j}{}^{;i} \\
&= A^{i;j}_{;j} - g^{ik} (A^j_{;k;j} - A^j_{;j;k}) - A^j_{;j}{}^{;i} \\
&= A^{i;j}_{;j} - g^{ik} A^j_{[k;j]} - A^j_{;j}{}^{;i} \\
&= A^{i;j}_{;j} - A^j_{;j}{}^{;i} + g^{ik} R^j_{ljk} A^l \\
&= A^{i;j}_{;j} - A^j_{;j}{}^{;i} - g^{ik} R^j_{ljk} A^l \\
&= A^{i;j}_{;j} - A^j_{;j}{}^{;i} - g^{ik} R_{lk} A^l
\end{aligned} \tag{5.6}$$

になると予想される。

一般相対論での作用  $S$  を求めて、この変分から [5.6] を証明しよう。一般相対論では、体積要素が一般座標変換に対し不変である必要がある。計量  $g_{ij}(x)$  の Riemann 空間から  $\eta_{ij}(x')$  の Euclid 空間に移ることを考えると、

$$\eta_{ij}(x') = \partial'_i x^k \partial'_j x^l g_{kl}(x)$$

なので、これの行列式を取って、

$$-1 = \left| \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \right|^2 g$$

となる。ただし、 $g = \det g_{kl}$  である。よって、体積要素について、

$$\begin{aligned}
dx'^4 &= \left| \frac{\partial(x')}{\partial(x)} \right| d^4x \\
&= \sqrt{-g} d^4x
\end{aligned}$$

となる。このように微小体積を選べば作用は一般座標変換に対し不変となる。従って、作用は

$$S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x \tag{5.7}$$

となる。ここでも同様に力学変数  $A_i$  の変分を取って ( $g$  は座標系に固有の値なので変分を取らない)、

$$\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial A_i} - \partial_j \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial \partial_j A_i} = 0 \tag{5.8}$$

を解けばよい。ラグランジアン密度は [5.1] と同じである。この式の左辺は、

$$\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \partial_j \frac{\sqrt{-g} \partial \mathcal{L}}{\partial \partial_j A_i} = \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \sqrt{-g} \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_j A_i} - \partial_j \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_j A_i}$$

$$= \sqrt{-g} \mu_0 j^i - \sqrt{-g} \partial_j f^{ij} - \partial_j \sqrt{-g} f^{ij}$$

なので,

$$-\mu_0 j^i = -\partial_j f^{ij} - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_j \sqrt{-g} f^{ij} \quad [5.9]$$

となる。電磁テンソルの発散は,

$$\begin{aligned} f^{ij}{}_{;j} &= \partial_j f^{ij} + \Gamma^i_{rj} f^{rj} + \Gamma^j_{rj} f^{ir} \\ &= \partial_j f^{ij} + \Gamma^i_{rj} f^{rj} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_j \sqrt{-g} f^{ij} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $f^{ij}$  は反対称テンソル、 $\Gamma^i_{rj}$  は  $r, j$  について対称なので、縮約をあらわに書けば、

$$\begin{aligned} \sum_{r,j} \Gamma^i_{rj} f^{rj} &= \sum_{r>j} (\Gamma^i_{rj} f^{rj} + \Gamma^i_{jr} f^{jr}) + \sum_r \Gamma^i_{rr} f^{rr} \\ &= \sum_{r>j} \Gamma^i_{rj} (f^{rj} + f^{jr}) \\ &= \sum_{r>j} \Gamma^i_{rj} (f^{rj} - f^{rj}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。よって、 $f^{ij}{}_{;j}$  の第2項は0なので、

$$\partial_j f^{ij} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_j \sqrt{-g} f^{ij} = f^{ij}{}_{;j}$$

となる。[5.9] に代入して、

$$-\mu_0 j^i = -f^{ij}{}_{;j}$$

となり、[5.6] が得られた。

### 5.3 場の運動方程式、エネルギー運動量テンソル

■特殊相対論でのエネルギー運動量テンソル ラグランジアン密度が  $\mathcal{L}$  のとき、作用は

$$S = \iint \mathcal{L}(q, \partial_i q) dx^3 d\tau = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} d^4x \quad [5.10]$$

で与えられるのであった。ただし、 $q$  は固有時間  $\tau$  と座標  $x^{1,2,3}$  を引数にとる力学変数である。この時、最小作用の原理から、

$$\delta S = 0$$

を解けば、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i q} = 0 \quad [5.11]$$

が得られる。これは運動方程式に相当するものである（解析力学で言うところの Euler-Lagrange の運動方程式）。これより、

$$\partial_i L = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \partial_i q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k q} \partial_i \partial_k q$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k q} \partial_i q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k q} \partial_k \partial_i q \\
&= \partial_k \left( \partial_i q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k q} \right)
\end{aligned}$$

となる。さらに、 $\partial_i = \delta^k_i \partial_k$  によって左辺を書き直すと

$$\partial_k \left( \partial_i q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k q} - \delta^k_i \mathcal{L} \right) = 0$$

となるので、

$$T^k_i = \delta^k_i \mathcal{L} - \partial_i q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k q} \quad [5.12]$$

を定義すれば、力学場の運動方程式は、

$$\partial_k T^k_i = 0 \quad [5.13]$$

と表すことができる。 $q$  がいくつかあるときは、 $\partial_i \mathcal{L}(q^{(r)}, \partial_k q^{(r)})$  の展開で全ての  $q^{(t)}$  及び  $\partial_k q^{(r)}$  についての微分の和に書き直せばよいので、

$$T^k_i = \partial_i q^{(r)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k q^{(r)}} - \delta^k_i \mathcal{L}$$

となる。

次に、テンソル  $T^k_i$  が表すものについて考えよう。ここで、3次元での Gauss の定理の拡張として、

$$\int \partial_k T^k_i d^4x = \int T^k_i dS_k \quad [5.14]$$

を使う。これから、[5.13] はあるベクトル

$$p^i = \int T^{ki} dS_k = \int \eta^{li} T^k_l dS_k$$

が保存することを表している（積分範囲は任意の閉超曲面）。ここで、我々は力学場を扱いたいので、 $p^i$  が4元運動量と同じ表式になるようにしよう。考えやすいように、積分範囲は  $x^0 = (\text{一定})$  とする。 $i = 0$  では、

$$p^0 = \int T^{k0} dS_k = \int T^{00} dV \quad [5.15]$$

となる。2つ目の式変形については、3次元空間で  $z = (\text{一定})$  で面積分すればベクトルの  $z$  成分と面素  $dx dy$  のみを考えればよいことからの類推で分かるだろう。ところで、[5.12] から、

$$T^{00} = T^0_l \eta^{l0} = \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L}$$

となる。これはエネルギー（ハミルトニアン）密度である。 $p^0 = E/c$  なので、改めて

$$p^i = \frac{1}{c} \int T^{ki} dS_k \quad [5.16]$$

とすれば  $p^i$  は4元運動量となる。

[5.12] で定義された  $T^k_i$  もしくは  $T^{ik}$  は対称でない。ところで、[5.13] を満たすものは [5.12] 以外にも無数にある。 $\partial_k T^{ki} = 0$  をある  $T^{ki}$  がみたすのであれば、

$$T^{ki} + \partial_l \varphi^{lki}, \quad \varphi^{lki} = -\varphi^{kli} \quad [5.17]$$

もこの方程式を満たす．実際に代入すれば,

$$\begin{aligned}\partial_k (T^{ki} + \partial_l \varphi^{lki}) &= \partial_k \partial_l \varphi^{lki} \\ &= -\partial_l \partial_k \varphi^{kli}\end{aligned}$$

となる．添字  $k, l$  を入れ替えても同じ値になる：

$$\partial_l (T^{li} + \partial_k \varphi^{kli}) = \partial_l \partial_k \varphi^{kli}.$$

この2式を比べて,  $\partial_k \partial_l \varphi^{lki} = 0$  である．よって, 証明された． $\varphi^{lki}$  を加えて  $T^{ki}$  を対称にすることを考えるが, これによって運動量の表式が変わってはいけない．[5.16] について,

$$\begin{aligned}\int \partial_l \varphi^{lki} dS_k &= \frac{1}{2} \int (\partial_l \varphi^{lki} dS_k + \partial_l \varphi^{lki} dS_k) \\ &= \frac{1}{2} \int (\partial_l \varphi^{lki} dS_k - \partial_k \varphi^{lki} dS_l) \\ &= \frac{1}{2} \int \varphi^{lki} df_{kl}\end{aligned}$$

ただし,  $df_{kl}$  は超曲面を囲む通常の2次元曲面の積分要素である．この積分を無限遠で行えば, 無限遠では粒子もポテンシャルも存在しないため, この積分は0である．よって, [5.17] を満たせば運動量に関する要請は自動的に満たされる．よってこれ以外に  $T^{ki}$  への要請が必要である．

ここで, 要請としてテンソル  $T^{ki}$  から角運動量テンソルの密度<sup>\*1</sup>を求められることを採用しよう．具体的には, [5.16] と比べて,

$$M^{ki} = \sum (x^k p^i - x^i p^k) = \frac{1}{c} \int (x^k T^{ri} - x^i T^{rk}) dS_r \quad [5.18]$$

とするのがよいだろう．さて, [5.13] 以降の運動量に関する議論と同様にして, 角運動量  $M^{ki}$  が保存される条件は,

$$\partial_r (x^k T^{ri} - x^i T^{rk}) = 0 \quad [5.19]$$

である． $\partial_i x^k = \delta^k_i$ , [5.13] から, この式は

$$\delta^k_r T^{ri} - \delta^i_r T^{rk} = 0$$

となり, 結局

$$T^{ik} = T^{ki} \quad [5.20]$$

となることが分かる．結局, 我々は  $T^{ki}$  が対称テンソルになるように  $\varphi^{lki}$  を選べばよいのだ．

ここで  $T^{ki}$  から求まる量について再び記しておく：

$$p^i = \frac{1}{c} \int T^{ki} dS_k, \quad M^{ki} = \frac{1}{c} \int (x^k T^{ri} - x^i T^{rk}) dS_r. \quad [5.21]$$

これらの量が保存することから  $T^{ki}$  に課せられる条件は,

$$\partial_k T^{ki} = 0, \quad T^{ik} = T^{ki}. \quad [5.22]$$

---

<sup>\*1</sup> 場古典とか



$p$  について,  $k=0$  の超曲面で積分すれば,  $i=0$  及び  $i=1,2,3$  について,

$$\frac{E}{c} = \frac{1}{c} \int T^{00} dV, \quad p^1 = \frac{1}{c} \int T^{01} dV, \dots$$

となるので,  $T^{00} = W$  はエネルギー密度,  $T^{01}/c = T^{10}/c$ ,  $T^{02}/c = T^{20}/c$ ,  $T^{03}/c = T^{30}/c$  は運動量密度である. ここで, 流量について考えるために,  $T^{ki}$  の発散の式で時間成分と空間成分を分けると,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0a}}{\partial x^a} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial T^{b0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ba}}{\partial x^a} = 0$$

が得られる. 第1の式を積分すると,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} T^{00} dV + \int_{\Omega} \frac{\partial T^{0a}}{\partial x^a} dV = 0$$

左辺第2項に Gauss の定理を適用して,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} T^{00} dV + \int_{\partial\Omega} c T^{0a} df_a = 0$$

となる. ただし,  $\partial\Omega$  は積分領域  $\Omega$  の表面であり,  $df_a$  は  $\partial\Omega$  の面素の各軸成分である. この式はエネルギーが単位時間当たり単位面積当たり  $a$  の向きに  $cT^{0a} = S^a$  だけ流出していることを表す. 先程の結果と合わせれば, 運動量とはエネルギーの流れであることが分かる. 第2の式についても同様にすると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{T^{b0}}{c} dV + \int_{\partial\Omega} T^{ba} df_a = 0$$

となる.  $T^{b0}/c = T^{0b}/c = S^b/c^2$  で, これを体積分すれば運動量になるので, この式は,

$$\int_{\partial\Omega} T^{ba} df_a = -\frac{\partial p^b}{\partial t} = -F^b$$

となる. これはいわゆる応力テンソル  $\sigma^{ba}$  であり,  $x^a$  に垂直な面から  $x^b$  の向きに流れ出る運動量を表す. よって,  $T^{ij}$  は,

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} W & \frac{S^x}{c} & \frac{S^y}{c} & \frac{S^z}{c} \\ \frac{S^x}{c} & -\sigma^{xx} & -\sigma^{xy} & -\sigma^{xz} \\ \frac{S^y}{c} & -\sigma^{yx} & -\sigma^{yy} & -\sigma^{yz} \\ \frac{S^z}{c} & -\sigma^{zx} & -\sigma^{zy} & -\sigma^{zz} \end{pmatrix} \quad [5.23]$$

となる. これをエネルギー運動量テンソルと呼ぶ.

**■一般相対論でのエネルギー運動量テンソル** 先程とは別の考え方によって一般相対論でのエネルギー運動量テンソルを求めることにする. 電磁場で調べたように, 作用は

$$S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x \quad [5.24]$$

となる. ここでも同様に変分を取るが, 物質場の変数  $A_i$  だけでなく, 計量  $g_{ij}$  についても変分をとる必要がある. つまり,

$$\delta S_{\text{tot}}(A_i, g_{ij}) = 0$$

を解けば,  $A_i, g_{ij}$  に関する条件が分かる\*2.

結局,

$$T_{ij} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[ \partial_k \left( \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial(\partial_k g^{ij})} \right) - \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{ij}} \right] \quad [5.25]$$

となる. ところで, テンソル  $g^{ij}$  による  $G$  (計量と適当な対称テンソル  $X_{ij}$  の積) の偏微分は,

$$dG = \frac{\partial G}{\partial g^{ij}} dg^{ij} \quad [5.26]$$

を意味する. よって, 計量の対称性から, 実際に  $i \neq j$  のような成分を求める際は表式通りの値を 2 倍する必要がある. 何故ならば,  $G = g^{ij} X_{ij}$  のうち, 例えば,  $g^{12}$  に対応する部分は

$$g^{12} X_{12} + g^{21} X_{21} = 2g^{12} X_{12}$$

なので,

$$dG = 2X_{12}dg^{12}$$

となる. これは単純な計算結果

$$\frac{\partial G}{\partial g^{ij}} = X_{ij}$$

の 2 倍である.

一般相対論での電磁場のエネルギー運動量テンソルを求めよう. 電磁場のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} f^{ij} f_{ij}$$

である. これを [5.25] に代入して,

$$\begin{aligned} T_{ij} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{ij}} \sqrt{-g} + \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{ij}} \mathcal{L} \right] \\ &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left[ -\frac{\sqrt{-g}}{4\mu_0} \frac{\partial (g^{ak} g^{bl} f_{ab} f_{kl})}{\partial g^{ij}} + \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{ij}} \mathcal{L} \right] \\ &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left[ -\frac{\sqrt{-g}}{4\mu_0} (g^{bl} f_{ib} f_{jl} + g^{ak} f_{ai} f_{kj}) + \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{ij}} \mathcal{L} \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\sqrt{-g}}{2\mu_0} g^{bl} f_{ib} f_{jl} - \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{ij}} \mathcal{L} \right] \\ &= \frac{1}{\mu_0} g^{kl} f_{ik} f_{jl} - \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{ij}} \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{\mu_0} g^{kl} f_{ik} f_{jl} - \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial g^{ij}} \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{\mu_0} g^{kl} f_{ik} f_{jl} + \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g^{ij}} \mathcal{L} \end{aligned}$$

\*2 この先の大まかな流れは次のような感じ: 先ほどの全体の作用変分は  $A$  を固定した時の作用変分と  $g$  を固定した時の作用変分の和に等しい. 更に, 運動方程式から  $g$  を固定させた時の作用変分は 0, 最小作用の原理から全体の作用変分は 0 である. よって,  $g$  を変数とした時の作用変分も 0 となる. これによって, 時空の変化に対する方程式も立てることができる. この時, この方程式の中にある 2 階のテンソルをエネルギー運動量テンソルと定義する. (詳しくは本文 (5.54) など)

となる。  $g_{ij}$  の余因子を  $\Delta_{ij}$  などと表すと、

$$g = \sum_j g^{ij} \Delta_{ji}$$

のように表すことができる。  $g^{ij}$  で偏微分し、

$$\frac{\partial g}{\partial g^{ij}} = \Delta_{ji} \quad [5.27]$$

が得られる。ところで、行列式について  $i$  についても和を取るようにすれば、

$$g = \frac{1}{4} g^{ij} \Delta_{ij}$$

となる。更に、

$$\delta^i_i g = g^{ij} \Delta_{ij}$$

と変形し、

$$g^{ij} g_{ij} g = g^{ij} \Delta_{ij}$$

となる。よって、

$$g g_{ij} = \Delta_{ij}$$

となる。これを [5.27] に代入すれば、

$$\frac{\partial g}{\partial g^{ij}} = g g^{ij}$$

となる。よって、電磁場のエネルギー運動量テンソルは、

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{1}{\mu_0} g^{kl} f_{ik} f_{jl} - \frac{1}{4\mu_0} \frac{1}{g} g g^{ij} f^{kl} f_{kl} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left( g^{kl} f_{ik} f_{jl} - \frac{1}{4} g^{ij} f^{kl} f_{kl} \right) \end{aligned}$$

と求まる。

## 第 6 章

# 球対称な重力場の真空解と粒子の運動

### 演習問題 6.1

■Schwarzschild 解 原点にのみ質点が存在し、周りは球対称で静的な真空空間の計量を求めよう。計量  $g_{ij}$  を、

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}(cdt)^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

とする。このとき、Christoffel 記号は、

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij})$$

で与えられる。Christoffel 記号のうち、0 でない条件について考えよう。まず、直ちに、() の  $g^{kl}$  から、 $k = l$  であることが分かって。さらに、() の中が 0 でないためには、 $j = k(= l), i = k(= l), i = j$  のいずれかが成立する必要がある。最後の場合については、 $\partial_l = \partial_k$  が含まれるので、 $i = j = 0, 1, 2$  の場合は  $k = 1, i = j = 3$  の場合は  $k = 1, 2$  が可能である。よって、

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{10} &= \Gamma^0_{01} = \frac{\nu'}{2}, & \Gamma^1_{00} &= \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda} \\ \Gamma^1_{11} &= \frac{\lambda'}{2}, & \Gamma^1_{22} &= -re^{-\lambda}, & \Gamma^1_{33} &= -r\sin^2\theta e^{-\lambda} \\ \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, & \Gamma^2_{33} &= -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma^3_{13} &= \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, & \Gamma^3_{23} &= \Gamma^3_{32} = \cot\theta \end{aligned} \quad [6.1]$$

である。' は  $r$  による微分を表す。

先程の計量を Einstein 方程式

$$R^i_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R = \frac{8\pi G}{c^4}T^i_j$$

に代入して、各関数  $\nu, \lambda$  を求めよう。このために、Ricci テンソル

$$R_{mj} = R^i_{mij} = \partial_i \Gamma^i_{mj} - \partial_j \Gamma^i_{mi} + \Gamma^a_{mj} \Gamma^i_{ai} - \Gamma^a_{mi} \Gamma^i_{aj}$$

及び Ricci スカラー

$$R = R^i_i$$

を求める（この時点で上の方程式の縮約を取って  $R$  を  $T$  に変えると手間が少なくなるが、折角なので  $R$  も明らかな形にしておこう）。

$$R^0_0 = g^{0i}R_{i0}$$

$$\begin{aligned}
&= g^{00} R_{00} \\
&= -e^{-\nu} [\partial_i \Gamma^i_{00} - \partial_0 \Gamma^i_{0i} + \Gamma^a_{00} \Gamma^i_{ai} - \Gamma^a_{0i} \Gamma^i_{a0}] \\
&= -e^{-\nu} [\partial_1 \Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{00} (\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}) - (\Gamma^0_{01} \Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{00} \Gamma^0_{10})] \\
&= -\frac{1}{2} \nu'' e^{-\lambda} - \frac{1}{4} \nu' (\nu' - \lambda') e^{-\lambda} - \frac{\nu'}{r} e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^1{}_1 &= g^{1i} R_{i1} \\
&= g^{11} R_{11} \\
&= e^{-\lambda} [\partial_i \Gamma^i_{11} - \partial_1 \Gamma^i_{1i} + \Gamma^a_{11} \Gamma^i_{ai} - \Gamma^a_{1i} \Gamma^i_{a1}] \\
&= e^{-\lambda} [\partial_1 \Gamma^1_{11} - \partial_1 \Gamma^i_{1i} + \Gamma^1_{11} \Gamma^i_{1i} - (\Gamma^0_{10} \Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{13} \Gamma^3_{31})] \\
&= -\frac{1}{2} \nu'' e^{-\lambda} - \frac{1}{4} \nu' (\nu' - \lambda') e^{-\lambda} + \frac{\lambda'}{r} e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^2{}_2 &= g^{2i} R_{i2} \\
&= g^{22} R_{22} \\
&= \frac{1}{r^2} [\partial_i \Gamma^i_{22} - \partial_2 \Gamma^i_{2i} + \Gamma^a_{22} \Gamma^i_{ai} - \Gamma^a_{2i} \Gamma^i_{a2}] \\
&= \frac{1}{r^2} [\partial_1 \Gamma^1_{22} - \partial_2 \Gamma^3_{23} + \Gamma^1_{22} \Gamma^i_{1i} - (\Gamma^1_{22} \Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{21} \Gamma^1_{22} - \Gamma^3_{23} \Gamma^3_{23})] \\
&= \frac{1}{r^2} \left[ 1 - e^{-\lambda} - r e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{2} - \frac{\lambda'}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^3{}_3 &= g^{3i} R_{i3} \\
&= g^{33} R_{33} \\
&= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} [\partial_i \Gamma^i_{33} - \partial_3 \Gamma^i_{3i} + \Gamma^a_{33} \Gamma^i_{ai} - \Gamma^a_{3i} \Gamma^i_{a3}] \\
&= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} [(\partial_1 \Gamma^1_{33} + \partial_2 \Gamma^2_{33}) + (\Gamma^1_{33} \Gamma^i_{1i} + \Gamma^2_{33} \Gamma^i_{2i}) \\
&\quad - (\Gamma^1_{33} \Gamma^3_{13} + \Gamma^2_{33} \Gamma^3_{23} + \Gamma^3_{13} \Gamma^1_{33} + \Gamma^3_{23} \Gamma^2_{33})] \\
&= \frac{1}{r^2} \left[ 1 - e^{-\lambda} - r e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{2} - \frac{\lambda'}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

さて、空間は真空なので、エネルギー運動量テンソルが 0 であるので、重力場の方程式は、

$$R^i{}_j - \frac{1}{2} R \delta^i{}_j = 0$$

となる。(0, 0) 成分は、

$$0 = \frac{1}{2} (R^0{}_0 - R^1{}_1 - R^2{}_2 - R^3{}_3) = e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2}$$

となる。(1, 1) 成分は、

$$0 = \frac{1}{2} (-R^0{}_0 + R^1{}_1 - R^2{}_2 - R^3{}_3) = e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2}$$

となる。(2,2) 及び (3,3) 成分は,

$$0 = \frac{1}{2} (-R^0_0 - R^1_1 + R^2_2 - R^3_3) = e^{-\lambda} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right)$$

となる。上の式を,  $r \rightarrow \infty$  で

$$g_{00} = -1 - \frac{2}{c^2} \phi = -1 + \frac{2GM}{rc^2}$$

に一致するという静的な弱い重力場に対する境界条件の下で解くと,

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) (cdt)^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

が得られる。この厳密解を, Schwarzschild 解といい, 計量を Schwarzschild 計量と呼ぶ。

■Birkhoff の定理 先程は空間が静的という条件を課したが, 実はこれを課さなくても, 同じ答えが得られる。これを Birkhoff の定理と言う。空間が静的でなくなったので,  $\partial_0$  の項が無視できなくなっている。その結果増える Christoffel 記号は,

$$\Gamma^0_{00} = \frac{\dot{\nu}}{2c}, \quad \Gamma^0_{11} = \frac{\dot{\lambda}}{2c} e^{\lambda-\nu}, \quad \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \frac{\dot{\lambda}}{2c}$$

である。 $\dot{\phantom{x}}$  は時間微分を表す。この結果, Ricci テンソルには, 次の項が加わる。

$$\begin{aligned} R^0_0: & -e^{-\nu} [\partial_0 \Gamma^0_{00} - (\partial_0 \Gamma^0_{00} + \partial_0 \Gamma^1_{01})] = -e^{-\nu} \left[ -\frac{\ddot{\lambda}}{2c^2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4c^2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4c^2} \right] \\ R^1_1: & -e^{-\nu} [\partial_0 \Gamma^0_{11} + \Gamma^0_{11} \Gamma^i_{0i} - (\Gamma^0_{11} \Gamma^1_{01} + \Gamma^1_{10} \Gamma^0_{11})] = -e^{-\nu} \left[ -\frac{\ddot{\lambda}}{2c^2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4c^2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4c^2} \right] \end{aligned}$$

$R^2_2, R^3_3$  は変わらない。よって, 先程の式は,

$$\begin{aligned} 0 &= e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \\ 0 &= e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \\ 0 &= e^{-\lambda} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right) + e^{-\nu} \left[ -\frac{\ddot{\lambda}}{c^2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2c^2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{2c^2} \right] \end{aligned}$$

となる。さらに,  $R^1_0$  について,

$$\begin{aligned} 0 &= R^1_0 \\ &= g^{1i} R_{i0} \\ &= g^{11} R_{10} \\ &= e^{-\lambda} [\partial_i \Gamma^i_{10} - \partial_0 \Gamma^i_{1i} + \Gamma^a_{10} \Gamma^i_{ai} - \Gamma^a_{1i} \Gamma^i_{a0}] \\ &= e^{-\lambda} [(\partial_0 \Gamma^0_{10} + \partial_1 \Gamma^1_{10}) - \partial_0 (\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11}) + (\Gamma^0_{10} \Gamma^i_{0i} + \Gamma^1_{10} \Gamma^i_{1i}) \\ &\quad - (\Gamma^0_{10} \Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{11} \Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{10} \Gamma^0_{10} - \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{10})] \end{aligned}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r}$$

なので,

$$\dot{\lambda} = 0.$$

さらに, 新しい  $(1, 1)$  成分の式を時間で微分すれば,

$$\dot{\nu} = 0.$$

以上から, 静的空間でなくとも, 球対称な真空に対する厳密解は Schwarzschild 解のみであると分かる.

## 第 7 章

# 超高密度天体とブラックホール

### 7.3 Schwarzschild ブラックホール

■Kruskal 座標系と Penrose 図 Schwarzschild 計量は Schwarzschild 半径

$$r = r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

で発散する。さらに、その内外で時間の項に対する計量の符号が変化し、内外を統一的に扱うことが難しい。よって、

$$\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{r_g}\right) = u^2 - v^2, \quad \tanh\left(\frac{ct}{2r_g}\right) = \begin{cases} \frac{v}{u} & (r \geq r_g) \\ \frac{u}{v} & (r < r_g) \end{cases}$$

と座標変換を行う。

$r \geq r_g$  の場合の Schwarzschild 計量の表式を調べよう。この時、 $u, v$  は次のように表すことができる：

$$\begin{aligned} u^2 &= \cosh^2\left(\frac{ct}{2r_g}\right) \left(\frac{r}{r_g} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{r_g}\right) \\ v^2 &= \sinh^2\left(\frac{ct}{2r_g}\right) \left(\frac{r}{r_g} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{r_g}\right). \end{aligned}$$

両辺微分すれば、

$$\begin{aligned} 2u \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{r}{r_g^2} \exp\left(\frac{r}{r_g}\right) \cosh^2\left(\frac{ct}{2r_g}\right) \\ 2u \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{c}{r_g} \left(\frac{r}{r_g} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{r_g}\right) \cosh\left(\frac{ct}{2r_g}\right) \sinh\left(\frac{ct}{2r_g}\right) \\ 2v \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{r}{r_g^2} \exp\left(\frac{r}{r_g}\right) \sinh^2\left(\frac{ct}{2r_g}\right) \\ 2v \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{c}{r_g} \left(\frac{r}{r_g} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{r_g}\right) \cosh\left(\frac{ct}{2r_g}\right) \sinh\left(\frac{ct}{2r_g}\right) \end{aligned}$$

となる。よって、Schwarzschild 計量の立体角  $r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$  を含まない部分を次のように表す：

$$Adu^2 - Bdv^2 = A \left( \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial r} dr \right)^2 - B \left( \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial r} dr \right)^2$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{r-r_g}{4r_g^3} \exp\left(\frac{r}{r_g}\right) \left[ A \sinh^2\left(\frac{ct}{2r_g}\right) - B \cosh^2\left(\frac{ct}{2r_g}\right) \right] (cdt)^2 \\
&\quad + \frac{r^2}{4r_g^3(r-r_g)} \exp\left(\frac{r}{r_g}\right) \left[ A \cosh^2\left(\frac{ct}{2r_g}\right) - B \sinh^2\left(\frac{ct}{2r_g}\right) \right] dr^2 \\
&\quad + \frac{rc}{4r_g^3} (A-B) \exp\left(\frac{r}{r_g}\right) \cosh\left(\frac{ct}{2r_g}\right) \sinh\left(\frac{ct}{2r_g}\right) dr dt.
\end{aligned}$$

これを Schwarzschild 計量の該当部分

$$-\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2$$

と比較すると,

$$A = B = f^2 = \frac{4r_g^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_g}\right) > 0$$

である. よって,  $(u, v)$  座標系での Schwarzschild 計量は,

$$ds^2 = f^2(-dv^2 + du^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

で表される.  $r < r_g$  の場合も同様にすれば, 同じ形になることがわかる. この座標系を Kruskal 座標系と呼ぶ (本文図 7-5).

極限について記すと,

$$\begin{aligned}
I^+ (r: \text{finite}, t \rightarrow +\infty): & u \rightarrow \pm\infty, u \sim v \\
I^- (r: \text{finite}, t \rightarrow -\infty): & u \rightarrow \pm\infty, u \sim -v \\
I^0 (t: \text{finite}, r \rightarrow +\infty): & |v| < |u| \rightarrow \infty \\
\mathcal{I}^+ (ct-r: \text{finite}, ct+r \rightarrow \infty): & u \rightarrow \pm\infty, |v| < |u|, u/v \sim 1 \\
\mathcal{I}^- (ct+r: \text{finite}, ct-r \rightarrow \infty): & u \rightarrow \pm\infty, |v| < |u|, u/v \sim -1
\end{aligned}$$

Kruskal 座標系をさらに,

$$u + v = \tan\left(\frac{\phi + \xi}{2}\right), \quad u - v = -\tan\left(\frac{\phi - \xi}{2}\right)$$

によって変換する. 各領域の式は,

$$\begin{aligned}
\text{I: } & u > 0, -v < u < v \\
\text{II: } & u < v < \sqrt{1+u^2} \quad (u > 0), \quad -u < v < \sqrt{1+u^2} \quad (u < 0) \\
\text{III: } & u < 0, v < u < -v \\
\text{IV: } & -\sqrt{1+u^2} < v < -u \quad (u > 0), \quad -\sqrt{1+u^2} < v < u \quad (u < 0)
\end{aligned}$$

である. これによって Penrose 図 (本文図 7-7) が得られる.

## 第 8 章

# 宇宙論

### 8.1 完全流体近似

相対論的宇宙論では宇宙を完全流体として扱うことが多い。完全流体とは、圧力が等方的で、粘性・熱伝導がない流体である。粘性がないので応力は必ず断面に垂直な向きであり、熱伝導がないので、エネルギーは粒子の流れによって運ばれる。これらの条件から、静止している（流体が静止して見える座標系から見た時の）完全流体は、

$$\frac{\partial \rho c^2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x^\mu} = 0 \quad [8.1]$$

を満たしているはずである。前者がエネルギー保存、後者が運動量保存則を表している。ここで、エネルギー運動量テンソルとして、

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad [8.2]$$

を採用すれば、先程の条件は、

$$\partial_j T^{ij} = 0$$

と言うように、今までと同様の形式になる（例えば、力学場でのテンソルなど）。

このテンソルは他の座標系ではどのように表現されるだろうか？ 流体が4元速度  $u^i$  で動いて見える座標系を考える。簡単のため、流体は  $x$  軸方向に運動しているとする。考えている座標系と流体に固定された座標系の Lorentz 変換は、

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\tau \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

で与えられる。  $x = vt$  を代入すれば、

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

が分かる。これは固有時間についての式である。これを使って4元速度を具体的に求めれば、

$$u^0 = \frac{cd\tau}{dt} = \frac{c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad [8.3]$$

$$u^1 = \frac{dx}{d\tau} = \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \sqrt{(u^0)^2 - c^2} \quad [8.4]$$

が得られる。よって、Lorentz 変換は4元速度を使えば、

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \begin{pmatrix} u^0/c & u^1/c & 0 & 0 \\ u^1/c & u^0/c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [8.5]$$

と表すことができる。我々が知りたいエネルギー運動量テンソルは、

$$T^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^a} \frac{\partial x^j}{\partial x'^b} T'^{ab}$$

と変換されるので、先程の式を代入すれば、

$$\begin{aligned} T^{00} &= \left(\frac{u^0}{c}\right)^2 T'^{00} + \left(\frac{u^1}{c}\right)^2 T'^{11} \\ &= \rho (u^0)^2 + \left(\frac{u^0}{c}\right)^2 p - p \end{aligned} \quad [8.6]$$

となる。他の成分についても同様に計算すればエネルギー運動量テンソルが求まる。

これを一般相対論に拡張してみよう。流体に固定した座標系の計量は  $\eta^{ab}$ （瞬間的に流体と速度が一致している慣性系を考えている）で、我々の座標系の計量は  $g^{ij}$  なので、

$$g^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^a} \frac{\partial x^j}{\partial x'^b} \eta^{ab}$$

と変換される。時間成分と空間成分に分ければ、

$$\begin{aligned} g^{ij} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial x^i}{\partial \tau} \frac{\partial x^j}{\partial \tau} + \sum_{a=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x'^a} \frac{\partial x^j}{\partial x'^a} \\ &= -\frac{1}{c^2} u^i u^j + \sum_{a=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x'^a} \frac{\partial x^j}{\partial x'^a} \end{aligned}$$

となる。さらに、エネルギー運動量テンソルの変換も全く同様に、

$$T^{ij} = -\rho u^i u^j + p \sum_{a=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x'^a} \frac{\partial x^j}{\partial x'^a}$$

と表すことができる。以上2式から、

$$T^{ij} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^i u^j + p g^{ij} \quad [8.7]$$

と求まる。もしも我々の座標系が慣性系なら計量を  $g^{ij}$  から  $\eta^{ij}$  にしてやればよい。

## 8.2 Friedmann モデル

■(8.13), (8.14) 一様で等方な空間に時間を加えて作った時空の計量

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{k}{a^2} r^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (k = 1, 0, -1)$$

$$= -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ d\chi^2 + \begin{Bmatrix} \sin^2 \chi \\ \chi^2 \\ \sinh^2 \chi \end{Bmatrix} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

を Robertson-Walker 計量という。  $a(t)$  を宇宙のスケール項と呼ぶ。

さらに、宇宙を満たす物体は静止している完全流体とする。そのエネルギー運動量テンソルは、

$$T^i_j = T^{ik} g_{kj} = \begin{pmatrix} -\rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

である。

まずは、  $k = 1$  の時の Christoffel 記号を求めよう。

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij})$$

に Robertson - Walker 計量を代入すれば、

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{11} &= \frac{a\dot{a}}{c}, & \Gamma^0_{22} &= \frac{a\dot{a}}{c} \sin^2 \chi, & \Gamma^0_{33} &= \frac{a\dot{a}}{c} \sin^2 \chi \sin^2 \theta \\ \Gamma^1_{01} &= \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^1_{22} &= -\sin \chi \cos \chi, & \Gamma^1_{33} &= -\sin \chi \cos \chi \sin^2 \theta \\ \Gamma^2_{02} &= \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^2_{12} &= \cot \chi, & \Gamma^2_{33} &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma^3_{03} &= \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^3_{13} &= \cot \chi, & \Gamma^3_{23} &= \cot \theta \end{aligned}$$

となる（下添字を入れ替えたものについては省略した）。この時、Ricci テンソルは、

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\partial_0 \Gamma^i_{0i} - \Gamma^a_{0i} \Gamma^i_{a0} \\ &= -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{11} &= \partial_i \Gamma^i_{11} - \partial_1 \Gamma^i_{1i} + \Gamma^a_{11} \Gamma^i_{ai} - \Gamma^a_{1i} \Gamma^i_{a1} \\ &= \frac{a\ddot{a}}{c^2} + 2 \frac{\dot{a}^2}{c^2} + 2 \end{aligned}$$

である。よって、混合形式にすれば、

$$R^0_0 = \frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}, \quad R^1_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2}{c^2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2}{a^2}$$

となる。

Einstein 方程式は、

$$R^i_j - \frac{1}{2} R \delta^i_j + \Lambda \delta^i_j = \frac{8\pi G}{c^4} T^i_j$$

である。両辺縮約すれば,

$$R = 4\Lambda - \frac{8\pi G}{c^4}T$$

が得られる。  $T$  はエネルギー運動量テンソルのトレース  $T^i_i$  である。上の2式から  $R$  を消去すれば,

$$R^i_j - \Lambda\delta^i_j + \frac{4\pi G}{c^4}T\delta^i_j = \frac{8\pi G}{c^4}T^i_j$$

となり, 完全流体であれば  $T = 3p - \rho c^2$  なので,

$$R^i_j - \Lambda\delta^i_j + \frac{4\pi G}{c^4}(3p - \rho c^2)\delta^i_j = \frac{8\pi G}{c^4}T^i_j \quad [8.8]$$

となる。  $k = 1$  での Ricci テンソルを代入すれば,  $(0, 0)$  及び  $(1, 1)$  成分について, それぞれ,

$$\begin{cases} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho - \frac{4\pi G}{c^2}p + \frac{\Lambda}{3}c^2 \\ \frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{c^2}{a^2} = 4\pi G\rho - \frac{4\pi G}{c^2}p + \Lambda c^2 \end{cases}$$

が得られる。

$k = 0$  では,

$$\Gamma^2_{12} \rightarrow \frac{1}{\chi}, \quad \Gamma^3_{13} \rightarrow \frac{1}{\chi}$$

なので,

$$R_{11} \rightarrow \frac{\ddot{a}a}{c^2} + 2\frac{\dot{a}^2}{c^2}.$$

$k = -1$  では,

$$\Gamma^2_{12} \rightarrow \coth \chi, \quad \Gamma^3_{13} \rightarrow \coth \chi$$

なので,

$$R_{11} \rightarrow \frac{\ddot{a}a}{c^2} + 2\frac{\dot{a}^2}{c^2} - 2.$$

以上から, 全ての場合をまとめれば,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}c^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}c^2 \\ 2\frac{\ddot{a}}{a} + \left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}c^2\right] &= -8\pi G\frac{p}{c^2} + \Lambda c^2 \end{aligned}$$

が得られる。

## 第 9 章

# 重力波

### 9.3 重力波のエネルギー

■エネルギー運動量擬テンソル 一般相対論において、無限小変換を考えれば、エネルギー・運動量が保存される条件は次のようになる：

$$T^j_{i;j} = 0. \quad [9.1]$$

さて、この条件式をそのまま共変微分すると、左辺は

$$\begin{aligned} T^j_{i;j} &= \partial_j T^j_i + \Gamma^j_{rj} T^r_i - \Gamma^r_{ij} T^j_r \\ &= \partial_j T^j_i + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_r \sqrt{-g} \cdot T^r_i - \Gamma^r_{ij} T^j_r \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_j (\sqrt{-g} \cdot T^j_i) - \frac{1}{2} g^{rl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) T^j_r \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_j (\sqrt{-g} \cdot T^j_i) - \frac{1}{2} \partial_i g_{jl} \cdot T^{jl} - \frac{1}{2} (T^{jl} \partial_j g_{li} - T^{jl} \partial_l g_{ij}) \end{aligned}$$

となる．ところで、最後の括弧は2項目の  $j, l$  を入れ替えると0になることが分かる．よって、条件式 [9.1] は

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_j (\sqrt{-g} \cdot T^j_i) - \frac{1}{2} \partial_i g_{jl} \cdot T^{jl} = 0 \quad [9.2]$$

と表される．ところで、力学場でのエネルギー運動量テンソルは、

$$T_{ij} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[ \partial_k \left( \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial(\partial_k g^{ij})} \right) - \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{ij}} \right] \quad [9.3]$$

のように表され、このエネルギー・運動量が保存される条件は

$$\partial_j (\sqrt{-g} \cdot T^j_i) = 0 \quad [9.4]$$

である．これは明らかに [9.2] と矛盾する．よって、[9.2] ないしは [9.1] の  $T^j_i$  は力学場 [9.3] 以外のものを含んでいると考えるのがよさそうだ．そして、これを  $t^j_i$  と表すことにしよう．つまり、エネルギー・運動量が保存される条件は、[9.4] 改め

$$\partial_k [\sqrt{-g} (T^j_i + t^j_i)] = 0 \quad [9.5]$$

である。これは [9.1] と両立可能なので、 $t^j_i$  には次の条件が課せられる：

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_j(\sqrt{-g}\cdot t^j_i) + \frac{1}{2}\partial_i g_{jl}\cdot T^{jl} = 0. \quad [9.6]$$

この  $t^j_i$  をエネルギー運動量擬テンソルと呼ぶ。

■(9.48) 使う式について簡単にまとめておく。

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \eta_{ij} + h_{ij}, \quad g^{ij} = \eta^{ij} - h^{ij}, \quad |h_{ij}| \ll 1, \quad \sqrt{-g} \sim 1 \\ \phi_{ij} &= h_{ij} - \frac{1}{2}h g_{ij} \sim h_{ij} - \frac{1}{2}h \eta_{ij} = h_{ij} + \frac{1}{2}\phi \eta_{ij} \\ \square \phi_{ij} &= -\frac{16\pi G}{c^4} T_{ij} : (\text{Einstein's Equation}) \\ \partial_j \phi^j_i &= 0 : (\text{gauge condition}) \end{aligned}$$

これらを [9.6] に代入すれば、

$$\begin{aligned} \partial_j t^j_i &= \frac{c^4}{32\pi G} \partial_i \left( \phi_{kl} - \frac{\eta_{kl}}{2} \phi \right) \eta^{st} \partial_s \partial_t \phi^{kl} \\ &= \frac{c^4}{32\pi G} \partial_i \phi_{kl} \cdot \eta^{st} \partial_s \partial_t \phi^{kl} - \frac{c^4}{64\pi G} \eta_{kl} \eta^{st} \partial_i \phi \cdot \partial_s \partial_t \phi^{kl} \\ &= \frac{c^4}{32\pi G} \partial_i \phi_{kl} \cdot \eta^{st} \partial_s \partial_t \phi^{kl} - \frac{c^4}{64\pi G} \eta^{st} \partial_i \phi \cdot \partial_s \partial_t \phi \\ &= \frac{c^4}{32\pi G} [\partial_s (\partial_i \phi_{kl} \cdot \eta^{st} \partial_t \phi^{kl}) - \partial_s \partial_i \phi_{kl} \cdot \eta^{st} \partial_t \phi^{kl}] \\ &\quad - \frac{c^4}{64\pi G} [\partial_s (\eta^{st} \partial_i \phi \cdot \partial_t \phi) - \eta^{st} \partial_s \partial_i \phi \cdot \partial_t \phi] \end{aligned}$$

が求まる。□ 内の 2 項目について、

$$\begin{aligned} \partial_s \partial_i \phi_{kl} \cdot \eta^{st} \partial_t \phi^{kl} &= \frac{1}{2} \partial_s \partial_i \phi_{kl} \cdot \eta^{st} \partial_t \phi^{kl} + \frac{1}{2} \partial_s \partial_i \phi_{kl} \cdot \eta^{st} \partial_t \phi^{kl} \\ &= \frac{1}{2} \partial_s \partial_i \phi_{kl} \cdot \eta^{st} \partial_t \phi^{kl} + \frac{1}{2} \partial_t \partial_i \phi_{kl} \cdot \eta^{ts} \partial_s \phi^{kl} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i \partial_s \phi_{kl} \cdot \eta^{st} \partial_t \phi^{kl} + \partial_s \phi^{kl} \cdot \partial_i \eta^{st} \partial_t \phi_{kl}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i \partial_s \phi_{kl} \cdot \eta^{st} \partial_t \phi^{kl} + \partial_s \phi_{kl} \cdot \partial_i \eta^{st} \partial_t \phi^{kl}) \\ &= \frac{1}{2} \partial_i (\partial_s \phi_{kl} \cdot \eta^{st} \partial_t \phi^{kl}) \\ &= \partial_j \left[ \frac{1}{2} \delta^j_i (\partial_s \phi_{kl} \cdot \eta^{st} \partial_t \phi^{kl}) \right] \end{aligned}$$

などとなるので、先程の計算結果に代入し、

$$\partial_j t^j_i = \frac{c^4}{64\pi G} \partial_j \left[ 2\partial_i \phi_{kl} \cdot \eta^{jt} \partial_t \phi^{kl} - \eta^{jt} \partial_i \phi \cdot \partial_t \phi + \delta^j_i \left( \frac{1}{2} \eta^{st} \partial_s \phi \cdot \partial_t \phi - \partial_s \phi_{kl} \cdot \eta^{st} \partial_t \phi^{kl} \right) \right]$$

となる。よって、

$$t^j_i = \frac{c^4}{64\pi G} \left[ 2\partial_i \phi_{kl} \cdot \eta^{jt} \partial_t \phi^{kl} - \eta^{jt} \partial_i \phi \cdot \partial_t \phi + \delta^j_i \left( \frac{1}{2} \eta^{st} \partial_s \phi \cdot \partial_t \phi - \partial_s \phi_{kl} \cdot \eta^{st} \partial_t \phi^{kl} \right) \right]$$

と求まる。