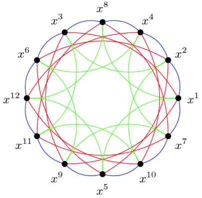
Implémentation du protocole CRS d'échange de clefs à base d'isogénies

Hugo Nartz, Clément Jacquot

16 Février 2022



Paramètres globaux

Corps de base:

$$\mathbb{F}_p \text{ avec } p \sim 2^{512}.$$

Courbe de base avec de bonnes propriétés:

$$E : Y^2 = X^3 + AX^2 + X \text{ où } A \in \mathbb{F}_p.$$

Notamment $\#E(\mathbb{F}_p) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdots$

Isogénies et Frobenius

- l: petit diviseur premier de $\#E(\mathbb{F}_p)$ co-premier à p.
- Pour tout $P \in E(\mathbb{F}_p)[l]$ il existe une unique l-isogénie

$$\phi : E \to E/ < P >$$

telle que $\ker \phi =< P >$.

- Pour certains l (*Elkies primes*), le Frobenius

$$\pi : (x, y) \in E[l] \mapsto (x^p, y^p) \in E[l]$$

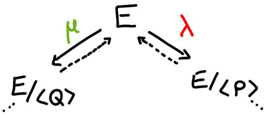
a deux valeurs propres λ et μ.

- $E[l]$ est somme de deux sous-espaces propres de cardinaux l: deux isogénies associées.

Graphes d'isogénies

- Deux l-isogénies par courbe: deux directions (λ et μ).
- Isogénie *duale* de degré l ($\dashrightarrow$): pour revenir en arrière.
- Conservation des propriétés dans la composante connexe

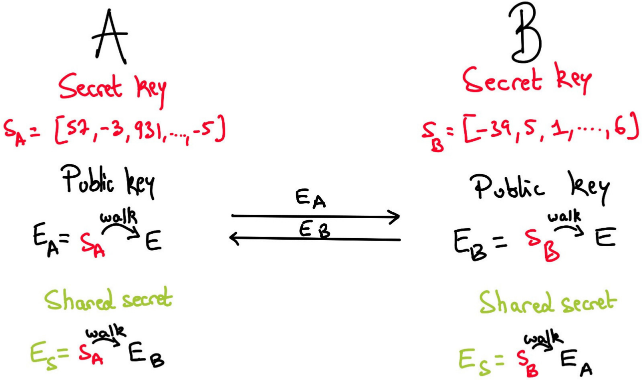
$\rightarrow$ Pour chaque l (Elkies): un cycle dont les sommets sont des courbes elliptiques et les arêtes des isogénies.



$\rightarrow$ Les pas dans le graphe commutent par rapport aux différents l.

L'échange de clefs

- Clef privée s: nombre de pas (aléatoire) pour chaque l.
- Clef publique: marche suivant les pas de la clef secrète $s \curvearrowright E$.



Points de l-torsion

On cherche $P \in E(\mathbb{F}_q)[l] = \ker \phi$. Posons $C = \#E(\mathbb{F}_q)/l$.

- Soit $Q \in E(\mathbb{F}_q)$ aléatoire.
- Si $P := C \cdot Q \neq O$, on a gagné.
- Sinon on tire un autre Q.

Si $\#E(\mathbb{F}_q) = l \cdot p_1^{f_1} \cdots p_n^{f_n}$ avec $l \wedge p_i = 1$,

$$Q = (e_0, e_1) \in \mathbb{Z}_l \times G, \text{ G abelien et } \#G = C,$$
$$C \cdot Q = (\kappa e_0, 0) \text{ pour } \kappa \in \mathbb{F}_l^*.$$

Le point $C \cdot Q$ convient avec probabilité $1 - 1/l$.

Arithmétique de Montgomery

- Courbe de Montgomery $E_{A,B} : By^2 = x^3 + Ax^2 + x$
- $\mathbf{x}$: $(X : Y : Z) \in E_{A,B} \mapsto (X : Z) \in \mathbb{P}^1$
- La loi de $E_{A,B}$ induit par $\mathbf{x}$ une loi sur $\mathbb{P}^1$

Prop. $P, Q \in E$

Si $P \neq Q$ alors

$$\begin{cases} X_{P+Q} = Z_{P-Q}[(X_P - Z_P)(X_Q + Z_Q) + (X_P + Z_P)(X_Q - Z_Q)]^2 \\ Z_{P+Q} = X_{P-Q}[(X_P - Z_P)(X_Q + Z_Q) - (X_P + Z_P)(X_Q - Z_Q)]^2 \end{cases}$$

Si $P = Q$ alors

$$\begin{cases} X_{[2]P} = (X_P + Z_P)^2(X_P - Z_P)^2 \\ Z_{[2]P} = (4X_PZ_P)[(X_P - Z_P)^2 + \frac{A+2}{4}(4X_PZ_P)] \end{cases}$$

Arithmétique de Montgomery

- Courbe de Montgomery $E_{A,B} : By^2 = x^3 + Ax^2 + x$
- $\mathbf{x}\colon (X : Y : Z) \in E_{A,B} \mapsto (X : Z) \in \mathbb{P}^1$
- La loi de $E_{A,B}$ induit par $\mathbf{x}$ une loi sur $\mathbb{P}^1$

- On remonte à $E_{A,B}$ en remarquant que $\mathbf{x}(P) = \mathbf{x}(Q) \Leftrightarrow P = \pm Q$
- $\mathbf{x}(P) \pm \mathbf{x}(Q)$ détermine $\{\mathbf{x}(P \pm Q)\}$
- xADD : $(\mathbf{x}(P), \mathbf{x}(Q), \mathbf{x}(P - Q)) \mapsto \mathbf{x}(P + Q)$
- xDBL : $\mathbf{x}(P) \mapsto \mathbf{x}(2P)$

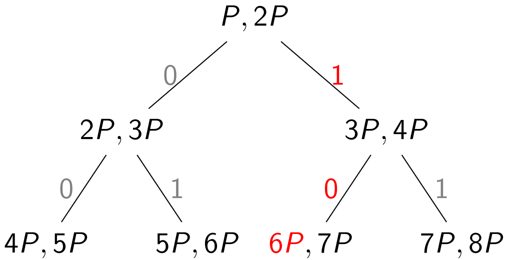
Pseudo-code échelle de Montgomery

Entrées : $P, k = \sum_{i=0}^{l-1} k_i 2^i$ avec $k_{l-1} = 1$
Sortie : kP

```
P0 = P
P1 = xDBL(P)
for(int i=l-2; i>=0, i--) {
  if(k[i]==0){
    P1 = xADD(P0, P1, P)
    P0 = xDBL(P0)
  }
  else{
    P0 = xADD(P0, P1, P)
    P1 = xDBL(P1)
  }
}
return P0
```

Échelle de Montgomery

Exemple. $k = 6 = \overline{110}^2$



Invariants: $P1 = P0 + P$ et,

après r iterations, $i = l - 2 - r$, $\begin{array}{l} P0 = \lfloor k/2^i \rfloor P \\ P1 = \lfloor k/2^i + 1 \rfloor P \end{array}$

Calcul d'isogénies

2 méthodes

- Pour $l \in \{3, 5, 7\}$: formules radicales.
- Pour $l \in \{11, 13, \cdots, 1723\}$: $\sqrt{}$-Vélu.

Vélu-step

- Donnée : un point P de l-torsion.
- But : effectuer un pas sur le graphe d'isogénies.

Prop. $\phi : E_A \to E_{A'}$ isogénie de noyau $\langle P \rangle$.

On a alors $\boxed{A' = 2\frac{1+d}{1-d}}$ où

$$d = \left(\frac{A-2}{A+2}\right)^{l} \left(\frac{h_S(1)}{h_S(-1)}\right)^{8} \text{, et}$$

$$\boxed{h_S(X) = \prod_{s \in S}(X - \mathbf{x}([s]P))}\text{, avec } S = \{1, 3, \ldots, l-2\}$$

Algorithme $\sqrt{}$-*Velu*

- $h_S(X) = \prod_{s \in S}(X - \mathbf{x}([s]P))$, avec $S = \{1, 3, \ldots, l-2\}$

Idée. Ecrire $S = (I \pm J) \cup K$ avec $\sqrt{l/2} \simeq \#I \simeq \#J \simeq \#K$

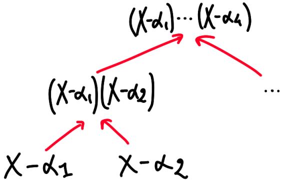
- $h_{I \pm J} = h_{I+J} h_{I-J}$
- $\mathbf{x}(P), \mathbf{x}(Q), \mathbf{x}(P+Q), \mathbf{x}(P-Q)$ sont fondamentalement reliés.
- On exprime $h_{I \pm J} = \mathrm{Res}(h_I, R_J)$ où $R_J \in \mathbb{F}_p[X]$
- Les racines de h_I étant connues, ce calcul se ramène à une multi-évaluation

$$\mathrm{Res}(h_I, R_J) = \prod_{i \in I} R_J(\mathbf{x}([i]P))$$

Multi-évaluation

- Problème: évaluer $P \in \mathbb{F}_q[X]$ en $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$.
- Equivalent à $P \bmod (X - \alpha_i)$.

Exemple pour $n = 4$: on construit par le bas



Puis on réduit P en descendant.
Complexité: $O(\mathbf{M}(n) \log n)$ si $\deg(P) \sim n$.

Isogénies radicales

- Pour $l \in \{3, 5, 7\}$.
- Model: $F = y^2 + (1 - c)xy - by - x^2(x - b)$.

On cherche des chaines de l-isogénies (ici k-pas)

$$E \to E_1 \to E_2 \to \cdots \to E_{k-1} \to E_k.$$

Exemple d'un pas ($l = 5$):

$$b' = \alpha \frac{\alpha^4 + 3\alpha^3 + 4\alpha^2 + 2\alpha + 1}{\alpha^4 - 3\alpha^3 + 4\alpha^2 - 2\alpha + 1}$$

Pour $\alpha = \sqrt[5]{b}$.

Racines l-iemes

Pour nous,

$$p = 7 \prod_{2 \leq l \leq 380} l - 1$$

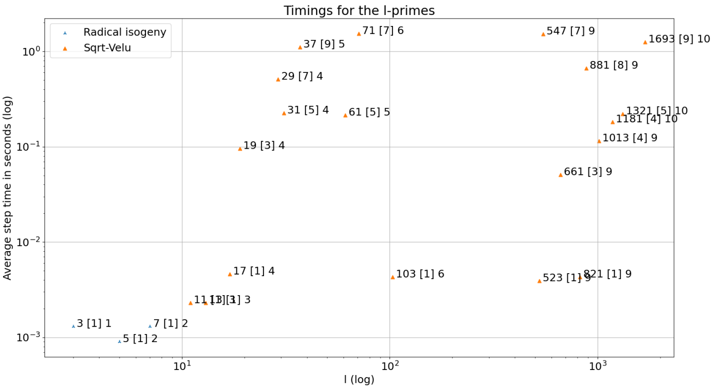
donc pour $l \in \{3, 5, 7\}$.

$$p + 1 = 0 \bmod 2l.$$

- Soit $x \in \mathbb{F}_p$.
- On écrit $p + 1 = 2lk$ pour un entier k.
- Il vient $(x^k)^l = \pm x$.

résultats expérimentaux

Clef la plus lente: 270 secondes (échange en 540s).



- Code vérifié avec Valgrind.
- 25% plus rapide que l'implémentation précédente, 92% par rapport à l'article de 2018.

Mais

- Deux premiers l inutilisables (~ 10 bits).
- Structures trop rigides.

Optimisations potentielles:

- Parallélisation GPU/multi-threading pour la multi-évaluation.
- Plus de caching.
- Plus de formules radicales.
- Meilleure courbe de base.

Formules d'additions affine

Soient $P = (x_P, y_P), Q = (x_Q, y_Q) \in E_{A,B}$ avec $x_P \neq x_Q$ et $x_P x_Q \neq 0$. Notons $P + Q = (x_{P+Q}, y_{P+Q})$ et $P - Q = (x_{P-Q}, y_{P-Q})$. Alors x_{P+Q} satisfait

$$\begin{aligned} x_{P+Q} &= B[(y_P - y_Q)/(x_P - x_Q)]^2 - A - x_P - x_Q \\ &= \frac{1}{(x_P - x_Q)^2}(B(y_P - y_Q)^2 - (A + x_P + x_Q)(x_P - x_Q)^2) \\ &= \frac{1}{(x_P - x_Q)^2}(-2By_P y_Q + x_P x_Q(x_P + x_Q + 2A) + x_P + x_Q) \\ &= \frac{B(x_Q y_P - x_P y_Q)^2}{x_P x_Q (x_P - x_Q)^2} \end{aligned}$$

De même, $x_{P-Q} = \frac{B(x_Q y_P + x_P y_Q)^2}{x_P x_Q (x_P - x_Q)^2}$
En multipliant ces équations, on obtient

$$x_{P+Q} x_{P-Q} (x_P - x_Q)^2 = (x_p x_Q - 1)^2$$

Formules d'additions projectives

On passe en coordonnées projectives. En écrivant les quotients $x = X/Z$ pour chaque point en question, On vérifie alors que
$\mathbf{x}(P+Q) = (X_{P+Q} : Z_{P+Q})$ avec

$$X_{P+Q} = Z_{P-Q}(X_P X_Q - Z_P Z_Q)^2$$

$$Z_{P+Q} = X_{P-Q}(X_P Z_Q - Z_P X_Q)^2$$

Ces formules nécessitent 8 multiplications mais peuvent être réécrites en

$$\begin{aligned} X_{P+Q} &= Z_{P-Q}[(X_P - Z_P)(X_Q + Z_Q) + (X_P + Z_P)(X_Q - Z_Q)]^2 \\ Z_{P+Q} &= X_{P-Q}[(X_P - Z_P)(X_Q + Z_Q) - (X_P + Z_P)(X_Q - Z_Q)]^2 \end{aligned}$$

qui ne nécessitent plus que 6 multiplications.