Matrikelnummer: Name:

Probeklausur Mathematik I

Prof. Dr. Sandra Eisenreich
Wintersemester 2023/24, Hochschule Landshut

(a) Schreiben Sie auf *die ersten beiden* Titelseiten Ihren Namen.

(b) Schreiben Sie auf *jedes* Blatt Ihre Matrikelnummer.

(c) Diese Probeklausur besteht aus 8 Aufgaben auf 9 Seiten. Bitte prüfen Sie, ob Aufgaben oder Seiten fehlen.

- Verwenden Sie dokumentenechte Stifte (kein Bleistift) in blau oder schwarz.
- Schreiben Sie Ihre Antworten in die dafür vorhergesehen Felder.
- Hilfsmittel: nicht-programmierbarer Taschenrechner.
- Legen Sie Ihren Personalausweis/Studentenausweis lesbar auf den Tisch.
- Keine vorzeitige Abgabe in den letzten 5 Minuten möglich.
- Bleiben Sie bitte am Ende an Ihrem Platz, bis die Klausuren eingesammelt und durchgezählt wurden.
- Viel Erfolg!

Aufgabe	Punkte	Erreicht
Abbildungen	4	
Lineare Abhängigkeit	4	
Teilraum	5	
Berechnungen	17	
Logik	6	
Vollständige Induktion	10	
LGS	10	
Lineare (Un)abhängigkeit	4	
Gesamt	60	

1. **Abbildungen** (4 Punkte)

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 1}, x \mapsto x^2 + 1$ Kreuzen Sie bei allen zutreffenden Aussagen Ja an, sonst Nein:

□ Ja □ Nein Die Abbildung f ist injektiv.

□ Ja □ Nein Die Abbildung f ist surjektiv.

□ Ja □ Nein Die Abbildung f ist linear.

□ Ja □ Nein Die Abbildung f ist ein Isomorphismus.

2. **Lineare Abhängigkeit** (4 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum. Unter welchen Bedingungen sind Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ linear abhängig? Kreuzen Sie bei allen zutreffenden Aussagen Ja an, sonst Nein:

□ Ja □ Nein Die Determinante der Matrix, die die Vektoren als Spalten hat, ist nicht Null.

□ Ja □ Nein v_1 lässt sich schreiben als Linearkombination von $v_2, \dots, v_n$

□ Ja □ Nein $v_1 \in \mathrm{Span}(v_2, \dots, v_n)$.

□ Ja □ Nein Der Rang der Matrix, die die Vektoren als Spalten hat, ist n.

3. **Teilraum** (5 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum, und $U \subset V$ eine Teilmenge. Unter welchen der unten aufgeführten Bedingungen ist U ein Teilraum von V? Falls U wie beschrieben ein Teilraum ist, kreuzen Sie "Jaän, sonst "Nein".

□ Ja □ Nein U ist abgeschlossen bezüglich Inversenbildung und Addition.

□ Ja □ Nein U ist abgeschlossen bezüglich Skalarmultiplikation mit Elementen in K und Addition.

□ Ja □ Nein $U = \mathrm{Span}(v)$ für einen Vektor $v \in V$.

□ Ja □ Nein U ist eine Gerade, die nicht durch den Nullpunkt geht.

□ Ja □ Nein $U = \{0\}$

4. **Berechnungen** (17 Punkte)

(a) (7 Punkte) Wandeln Sie die Zahl 131 ins Binär- und ins 9-er System um und geben Sie den Rechenweg an.

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie in $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ (wobei Sie das Ergebnis als Restklasse einer Zahl zwischen 0 und 26 darstellen):

$$\overline{4} \odot (\overline{11} \odot \overline{3} \oplus \overline{1})$$

(c) (3 Punkte) Was ist die Länge der komplexen Zahl $3 - 4i$?

(d) (4 Punkte) Berechnen Sie das Matritzenprodukt $A \cdot B$ für folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. **Logik** (6 Punkte)

Prüfen Sie mit einer Wahrheitstabelle, ob folgende Äquivalenz von Aussagen gilt:

$$(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg(\neg A \wedge \neg B))$$

6. **Vollständige Induktion** (10 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

7. **LGS** (10 Punkte)

Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & 2x_4 & = & -6 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & & & = & 4 \end{array}$$

8. **Lineare (Un)abhängigkeit** (4 Punkte)

Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig oder abhängig? Geben Sie den Rechenweg an!

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$