HAW LANDSHUT
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK
Eisenreich/Hartmann/Sagraloff/Schröter

WS 2023/2024
Blatt 5

Lösungsskizzen zur Übung „Mathematik I"

Präsenzaufgabe. (a) Der Raum hat Dimension 2, da

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(1,1,0)^T, (1,0,1)^T$ sind linear unabhängig, da

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.$$

(b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) & 1 + 0 + 1 & 1 + 1 + 2 \\ 0 + 2 \cdot (-1) + 0 & 0 + 2 \cdot 0 + 0 & 0 + 2 \cdot 1 + 0 \\ 0 + (-1) + 3 \cdot (-1) & 0 + 0 + 3 & 0 + 1 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1. Vektorräume

(a) Welche Dimension hat der folgende Unterraum des $\mathbb{R}^3$:

$$U = \operatorname{Span}\left(v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

Hinweis: Rechnen Sie nach, ob die drei Vektoren linear unabhängig oder abhängig sind! Falls sie linear abhängig sind, prüfen Sie nach ob zwei davon linear unabhängig sind...

(b) Geben Sie eine Basis von $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum und als $\mathbb{R}$-Vektorraum an. Welche Dimension hat $\mathbb{C}^2$ demnach als $\mathbb{C}$-Vektorraum und als $\mathbb{R}$-Vektorraum?

(c) Zeigen Sie: Die Menge

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 3} = \{p \in \mathbb{R}[x] : \deg p \leq 3\}$$

aller Polynome vom Grad 3 ist (mit der üblichen Addition von Polynomen) ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Geben Sie eine Basis von dieses Vektorraumes an.

(d) Ist die Menge $\mathbb{Z}[x]_{\leq 3} = \{p \in \mathbb{Z}[x] : \deg p \leq 3\}$ auch ein Vektorraum?

Lösung 1. Vektorräume

(a) Wir müssen überprüfen, ob die 3 Vektoren linear unabhängig sind. Wenn Sie diese Lösungskizze erhalten, haben Sie wahrscheinlich schon einen eleganteren Weg kennengelernt, wie man das machen kann. Aber wir rechnen zu Fuß. Sicher sind v_1 und v_2 linear unabhängig, da v_2 kein Vielfaches von v_1 ist. Sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig? Wir versuchen λ_1 und λ_2 zu finden, so dass gilt:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

das heißt:

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & -\lambda_2 & = 5 \\ 2\lambda_1 & +\lambda_2 & = 4 \\ 3\lambda_1 & +2\lambda_2 & = 5 \end{array}$$

Aus der ersten Zeile erhalten wir $\lambda_1 = 5 + \lambda_2$. Eingesetzt in die zweite Zeile ergibt sich $2(5+\lambda_2)+\lambda_2 = 4 \Rightarrow \lambda_2 = -2$ und daraus schließlich $\lambda_1 = 3$. Für diese Werte von λ_1 und λ_2 ist auch die dritte Gleichung erfüllt. Damit ist $v_3 = 3v_1 - 2v_2$ und der dritte Vektor eine Linearkombination der ersten beiden. Die drei Vektoren spannen also eine Ebene durch den Ursprung auf.

(b) $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum hat die Dimension 2 mit der Standardbasis $(1,0),(0,1)$. Und als $\mathbb{R}$-Vektorraum die Dimension 4. Eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums ist: (1,0),(i,0),(0,1),(0,i).

(c) Über $\mathbb{R}$ ist die Summe zweier Polynome vom Grad ≤ 3 wieder ein Polynom vom Grad ≤ 3 und das λ-fache eines Polynoms ($\lambda \in \mathbb{R}$) vom Grad ≤ 3 ist ebenfalls in $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Nach dem Unterraumkriterium ist also $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ ein Untervektorraum des Vektorraums aller Polynome über $\mathbb{R}$.

Eine Basis von $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ ist gegeben durch die Menge $\{1, x, x^2, x^3\}$, weil sich jedes Polynom vom Grad ≤ 3 schreiben lässt als Linearkombination von diesen Elementen.

(d) Nein, denn $\mathbb{Z}$ ist kein Körper.

Aufgabe 2. Koordinaten

(a) Zeigen Sie, dass folgendes eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Berechnen Sie dann die Koordinaten des folgenden Punkts im $\mathbb{R}^3$ bezüglich der obigen Basis B: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung 2. (a) Dazu lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \right\}$$

Bei diesem Gleichungssystem ändert sich der Lösungsraum nicht, wenn wir die Gleichungen vertauschen, bzw. die Gleichungen (oder Vielfache davon) voneinander abziehen oder addieren. Zunächst vertauschen wir Zeile 1 und 3, und ziehen dann die neue erste Zeile von den anderen beiden ab:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right\}$$

Nun addieren wir die zweite Zeile zur dritten:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right\}$$

und haben die Gleichungen so in **Treppenform** gebracht. Aus der dritten Gleichung folgt nun: $\lambda_3 = 0$, damit aus der zweiten $\lambda_2 = 0$ und wenn wir dies wieder in die erste Zeile einsetzen, erhalten wir auch $lambda_1 = 0$. Die Vektoren sind also linear unabhängig.

(b) Dazu müssen wir das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 1 \\ \lambda_1 & & & + & 3\lambda_3 & = & 1 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 3 \end{array} \right\}$$

Wieder ändert sich am Lösungsraum der Gleichungen nichts, wenn wir Gleichungen vertauschen oder addieren. Wir führen dabei genau dieselben Schritte aus wie in der Aufgabe zuvor (erste und dritte vertauschen, die neue erste Zeile von 2. und 3. abziehen, dann die zweite Zeile zur dritten addieren):

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 3 \\ \lambda_1 & & & + & 3\lambda_3 & = & 1 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 3 \\ & - & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & -2 \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & -2 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 3 \\ & - & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & -2 \\ & & & & 2\lambda_3 & = & -4 \end{array}\right\}$$

Nun können wir die dritte Gleichung durch 2 teilen: Aus der dritten Gleichung folgt $\lambda_3 = -2$. Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, erhalten wir $-\lambda_2 - 6 = -2 \Leftrightarrow \lambda_2 = -4$. Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, erhalten wir $\lambda_1 - 4 = 3$, also $\lambda_1 = 7$ Die Darstellung von v bezüglich Basis B ist also:

$$v = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}_B$$

Aufgabe 3. lineare Abbildung, Matrix

(a) Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die

$$\begin{array}{rcl} f_1((0,1)) & = & (1,1) \\ f_1((2,1)) & = & (1,0) \\ f_1((2,2)) & = & (2,2) \end{array}$$

erfüllt? Begründen sie Ihre Antwort.

(b) Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die

$$\begin{array}{rcl} f_2((1,0)) & = & (2,1), \\ f_2((1,1)) & = & (2,2), \\ f_2((3,2)) & = & (6,5) \end{array}$$

erfüllt? Begründen sie Ihre Antwort.

(c) Sollte eine der beiden Abbildungen f_1 oder f_2 existieren, so geben Sie die darstellende Matrix dieser Abbildung bezüglich der Standardbasen $\{e_1, e_2\}$ und $\{e_1, e_2\}$ an, wobei $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$!

(d) Berechnen Sie das Matritzenprodukt $A \cdot B$ für folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 3. lineare Abbildung, Matrix

(a) Nein, denn da $(2,2) = (2,1) + (0,1)$, müsste für eine Lineare Abbildung gelten: $f_1((2,2)) = f_1((2,1) + (0,1)) = f_1((2,1)) + f_1((0,1)) = (1,0) + (1,1) = (2,1) \neq (2,2)$.

(b) Die Vektoren $(1,0), (1,1)$ sind linear unabhängig und daher eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Eine lineare Abbildung ist also eindeutig durch die Bilder von $(1,0), (1,1)$ bestimmt. Es gilt: $(3,2) = (1,0) + 2 \cdot (1,1)$, und damit muss gelten $f_2((3,2)) = f_2((1,0) + 2 \cdot (1,1)) = f_2((1,0)) + 2 \cdot f_2((1,1)) = (2,1) + 2 \cdot (2,2) = (2,1) + (4,4) = (6,5)$. Damit existiert so eine lineare Abbildung f_2.

(c) f_2 ist definiert durch $e_1 = (1,0) \mapsto (2,1)$ und $e_1 + e_2 = (1,1) \mapsto (2,2)$. Es gilt: $f_2(e_2) = f_2((e_1 + e_2) - e_1) = f_2(e_1 + e_2) - f_2(e_1) = (2,2) - (2,1) = (0,1)$. Daher ist die darstellende Matrix von f_2 bzgl der Basis e_1, e_2 gegeben durch die Matrix mit den Bildern von e_1 und e_2 als Spalten:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Matrizen

(a) Geben Sie die Matrizen für folgende lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an:

- die Spiegelung f an der x-Achse
- die Spiegelung g an der y-Achse.

(b) die Spiegelung an der x-Achse gefolgt von der Spiegelung an der y-Achse.

Lösung 4. Matrizen

- $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, also $\operatorname{Mat} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also Mat $g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Das Hinereinanderausführen von f und g, also $g \circ f$ ist durch das Produkt der darstellenden Matrizen von g und f gegeben:

  $$\mathrm{Mat}(g \circ f) = \mathrm{Mat}(g) \cdot \mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$