HAW LANDSHUT | WS 2023/2024
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK | Blatt 1
Eisenreich/Hartmann/Sagraloff/Schröter

Lösungsskizzen zur Übung „Mathematik I"

Präsenzaufgabe. (a) $\frac{4}{16} - \frac{1}{5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5-4}{20} = \frac{1}{20}$

(b) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2) = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 4xy$

(c) $\frac{a+b}{x} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow a + b = \frac{2}{5}x \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}(a+b)$

(d)
- wahr, da $24 = 3 \cdot 7 + 3$ Rest 3 hat,
- falsch, da $14 = 2 * 7 + 0$ Rest 0 hat
- wahr, da $-6 = (-1) \cdot 7 + 1$ Rest 1 hat, und $8 = 7 + 1$ ebenso.

Aufgabe 1. Beschreibung von Mengen Beschreiben Sie folgende Mengen durch eine charakterisierende Eigenschaft aller Elemente:

(a) $M := \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\}$

(b) $N := \{2, 3, 5, 9, 17, 33, 65, \ldots\}$

(c) $R := \{3, 8, 13, 18, 23, 28, \ldots\}$

(d) $S := \{1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, \ldots\}$

Lösung 1. Beschreibung von Mengen

- $M = \{x | x = 2 \cdot k + 1 \text{ für } k \in \mathbb{N}_0\}$
- $N = \{x | x = 2^k + 1 \text{ für } k \in \mathbb{N}_0\}$
- $R = \{x | x = 5 \cdot k + 3 \text{ für } k \in \mathbb{N}_0\}$
- Ein beliebter Trick in der Mathematik: Alternierendes Vorzeichen in einer Folge erhält man durch $(-1)^k$. Damit ist
  $S = \{x | x = k \cdot (-1)^{k+1}, k \in \mathbb{N}\}$
  Alternativ: $S = \{x | x = 2 \cdot k + 1 \text{ für } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } x = 2 \cdot k \text{ für } -k \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 2. Relationen
Untersuchen Sie die folgenden Relationen auf Symmetrie, Reflexivität und Transitivität.

(a) $R := \{(x, y)|$ Bestandskunde x und Bestandskunde y haben mindestens ein gemeinsames Produkt unter ihren bisherigen Einkäufen$\}$.

(b) $R := \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} |\ a$ und b besitzen einen gemeinsamen Teiler größer als $1\}$

Schreiben Sie Ihre Überlegungen strukturiert auf, indem Sie zunächst für jede Eigenschaft Ihre Behauptung formulieren (z.B. "R ist (nicht) reflexiv.") und dann die Begründung dafür liefern.

Lösung 2. Relationen

(a) **R ist reflexiv:**
Kunde x hat offensichtlich dieselben Produkte in seinen bisherigen Einkäufen wie er selbst.
R ist symmetrisch:
Hat Kunde x schon einmal dasselbe Produkt gekauft wie Kunde y, so auch umgekehrt.
R ist nicht transitiv:
Hat Kunde x in der Vergangenheit dasselbe Produkt A gekauft wie Kund y, und Kunde y dasselbe Produkt $B \neq A$ wie Kunde z, aber Kunde x kein gemeinsames Produkt mit Kunde z, so gilt zwar xRy und yRz, aber nicht xRz.

(b) **R ist nicht reflexiv:**
Es ist a ein Teiler von a, das heißt aRa ist richtig für alle $a > 1$, aber $1R1$ ist falsch und daher ist die Reflexivität nicht für alle Elemente von $\mathbb{N}$ erfüllt.
R ist symmetrisch:
ganz offensichtlich gilt für alle $(a,b) : aRb \Rightarrow bRa$
R ist nicht transitiv:
Das sieht man am Besten wieder an einem Beispiel: $2R6, 6R3$ aber nicht $2R3$

Aufgabe 3. Restklassen Gegeben sei folgende Relation:

$$R := \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \text{ und } y \text{ haben denselben Rest beim Teilen durch } 3\}.$$

(a) Untersuchen Sie die Relation R auf Symmetrie, Reflexivität und Transitivität.

(b) Geben Sie in Mengenschreibweise alle $y \in \mathbb{Z}$ an, für die gilt: $2Ry$.

(c) Geben Sie in Mengenschreibweise alle $y \in \mathbb{Z}$ an, für die gilt: $17Ry$.

(d) Geben Sie in Mengenschreibweise alle $z \in \mathbb{Z}$ an, für die gilt: $-2Rz$.

Lösung 3. Restklassen

(a) R **ist reflexiv:**
xRx ist klar: x hat denselben Rest beim Teilen durch 3 wie x
R **ist symmetrisch:**
ganz offensichtlich gilt für alle (x, y) : Ist xRy, dann haben x und y denselben Rest beim Teilen durch 3, also auch umgekehrt $\Rightarrow yRx$
R **ist transitiv:**
Gilt xRy und yRz, so hat y denselben Rest $r \in \{0, 1, 2\}$ beim Teilen durch 3 wie x, und z hat denselben Rest beim Teilen durch 3 wie y, also auch r. Das heißt sowohl x als auch z haben den Rest $r \Rightarrow xRz$.

(b) Das ist die Menge derjenigen $y \in \mathbb{Z}$, die beim Teilen durch 3 Rest 2 haben, das heißt:

$$3+2 = 5, 6+2 = 8, 9+2 = 11, 12+2 = 14, \ldots, -3+2 = -1, -6+2 = -4, -9+2 = -7, \ldots$$

Man kann sie schreiben als Vielfache von 3 plus 2. Die gesuchte Menge ist also:

$$\begin{aligned} 2 \bmod 3 &:= \text{Menge der Zahlen mit Rest 2 beim Teilen durch 3} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} |\ y = 3 \cdot k + 2 \text{ für } k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

(c) Das ist die Menge derjenigen $y \in \mathbb{Z}$, die beim Teilen durch 3 denselben Rest haben wie $17 = 15 + 2$, das heißt den Rest 2, also dieselbe Menge wie oben. Man schreibt: $17 \bmod 3 = 2 \bmod 3$.

(d) Das ist die Menge derjenigen $y \in \mathbb{Z}$, die beim Teilen durch 3 denselben Rest haben wie $-2 = 3 + 1$, das heißt den Rest 1. Die gesuchte Menge ist also

$$\begin{aligned} 1 \bmod 3 &:= \text{Menge der Zahlen mit Rest 1 beim Teilen durch 3} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} |\ y = 3 \cdot k + 1 \text{ für } k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Abbildungen Geben Sie in den folgenden Aufgaben das Bild der Abbildungen an, und prüfen Sie mit Begründung, ob die Abbildungen injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind.

(a) $f : \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\leq 0}, x \mapsto x^2$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 3$.

Lösung 4. (Abbildungen)

(a)
- Bild: $\mathbb{R}_{\geq 0}$, da alle $y \geq 0$ das Urbild $x = -\sqrt{y} \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ haben.
- surjektiv: Da Bild = Zielmenge
- injektiv: Seien $x \neq y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Da x und y positive Zahlen sind, ist $x^2 \neq y^2$, also $f(x) \neq f(y)$, deswegen ist f injektiv.

(b)
- Bild: $\mathbb{R}_{\geq 0}$, da alle $y \geq 0$ das Urbild $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ haben, aber kein $y < 0$ ein Urbild hat, da $x^2 = y < 0$ keine Lösung in $\mathbb{R}$ hat.
- nicht surjektiv: Da $\mathrm{im} f = \mathbb{R}_{\geq 0} \neq \mathbb{R}$ = Zielmenge, z.B. hat -1 kein Urbild, da $x^2 = -1$ keine reelle Lösung hat.
- nicht injektiv: Es gilt z.B. $-1, 1 \in \mathbb{R}$= Definitionsmenge, aber $f(-1) = f(1) = 1$. $y = 1$ hat also zwei Urbilder in der Definitionsmenge!

(c)
- Bild: $\mathbb{R}_{\geq 0}$ wie in a)
- surjektiv: da $\mathrm{im} f = \mathbb{R}_{\geq 0} \neq \mathbb{R}$ = Zielmenge
- nicht injektiv wie in b) $f(-1) = f(1) = 1$.

(d) Trickfrage. Diese Abbildungsvorschrift macht keinen Sinn, da die Bilder von $x \in \mathbb{R}$ nicht in $\mathbb{R}_{\leq 0}$ liegen!