18.03.2024

1 Die reellen Zahlen

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Ansatz: nicht explizite Konstruktion von $\mathbb{R}$, sondern sammeln charakteristischer Eigenschaften von $\mathbb{R}$.

Erinnerung: $\mathbb{R}$ ist Körper.

Def. 1.1: [Anordnungsaxiome]
Ein Körper K heißt angeordnet, wenn es eine Teilmenge $P \subseteq K$, den sog. Positivbereich, mit den folgenden Eigenschaften gibt:

A1) P, $-P$ und $\{0\}$ sind paarweise disjunkt
(wobei $-P = \{x \in K : -x \in P\}$)

A2) $P \cup -P \cup \{0\} = K$

A3) $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P,\ x \cdot y \in P$

Die Elemente aus P heißen positiv.
——— " ——— $-P$ heißen negativ.

Def. 1.2: [Ordnungsrelationen]

In einem angeordneten Körper K, mit Positivbereich P, definieren wir für alle $x, y \in K$:

- $x < y$ gdw $y - x \in P$
- $x \leq y$ gdw $x < y$ oder $x = y$
- $x > y$ gdw $x - y \in P$
- $x \geq y$ gdw $x > y$ oder $x = y$

Bem.: $x > 0$ gdw $x \in P$

Satz 1.3: [Eigenschaften]

Sei K ein angeordneter Körper und $x, y, z, w \in K$. Dann gilt

a) $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)

b) $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität)

c) $x \leq y$ oder $y \leq x$ (Linearität)

d) $x \leq y,\ z \leq w \Rightarrow x + z \leq y + w$ (Verträglichkeit mit „+")

e) $x < y,\ z > 0 \Rightarrow xz < yz$ (Verträglichkeit mit „·")
$x < y,\ z < 0 \Rightarrow xz > yz$ ⚠

f) $x > 0 \Rightarrow -x < 0$ (Übergang zum Inversen)
$x > y \Rightarrow -x < -y$
$0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$

__Bew.:__ (teilweise)

ad a) Angenommen, es wäre $x \neq y$.

Aus $x \leq y$ folgt $\boxed{y - x \in P}$

und aus $y \leq x$ folgt $x - y \in P$

und somit $\boxed{y - x = -(x-y) \in -P}$

was ein Widerspruch zu A1 (Disjunktheit) ist.

Die Annahme ist also falsch und wir haben $x = y$ gezeigt.

ad b) Wenn $x = y$ oder $\overset{y=z}{\cancel{y=z}}$, dann ist die Folgerung sofort klar.

Für $x \neq y$ und $\overset{y \neq z}{\cancel{y \neq z}}$ gilt $y - x \in P$

und $z - y \in P$,

also insbesondere $(z-y) + (y-x) = z - x \in P$

und damit $z > x$.

$\square$

__Bem.:__ · Eigenschaften a) – c) zeigen, dass „$\leq$" eine lineare Ordnungsrelation bildet.

· Eigenschaft e) führt oft zu hässlichen Fallunterscheidungen.

· Sei $x \neq 0$. Dann gilt für $\left\{ \begin{matrix} x < 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\}$ wg. e): $\begin{matrix} x^2 > 0 \\ x^2 > 0 \end{matrix}$

Insbesondere ist $1 = 1^2 > 0$.

• Aus $1 > 0$ folgt $-1 < 0$ und

somit kann $\mathbb{C}$ kein angeordneter

Körper sein. (denn es wäre auch $i^2 = -1 > 0$ s.o.)

Aus $0 < 1$ folgt (in jedem angeordneten Körper K)

$$0 < 1 < 1+1 < 1+1+1 < \ldots < \underbrace{1+\ldots+1}_{n\text{-mal}}$$

womit all diese Zahlen verschieden sind. Es gilt also

$$\mathbb{N} \subseteq K$$

und wegen der Körperaxiome auch $\mathbb{Z}, \mathbb{Q} \subseteq K$.