HAW LANDSHUT | WS 2023/2024
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK | Blatt 0
Eisenreich/Hartmann/Sagraloff/Schröter

Lösungsskizzen zur Übung „Mathematik I"

Grundrechenarten

Aufgabe 1. (a) $4^2 + (3+4)\cdot 3 = 16 + 21 = 37$

(b) $g - (a+b) + (c-f) = g - a - b + c - f$

(c) $(u-v)(x+y) = ux + uy - vx - vy$

(d) $(6x)^2 = 36x^2$

(e) $(2h-3f)^2 = (2h)^2 - 2\cdot(2h)\cdot(3f) + (3f)^2 = 4h^2 - 12hf + 9f^2$

(f) $(m+2n)^3 = (m+2n)(m^2+2\cdot m\cdot(2n)+(2n)^2) = (m+2n)(m^2+4mn+4n^2) = m^3 + 4m^2n + 4mn^2 + 2nm^2 + 8mn^2 + 8n^3 = m^3 + 6m^2n + 12mn^2 + 8n^3$.

(g) $\frac{(2^2)^3}{2} = \frac{4^3}{2} = 2\cdot 4^2 = 2\cdot 16 = 32$

(h) $\frac{a^b}{a^2} = a^{b-2}$

(i) $\frac{a^5\cdot a^{11}}{a^3\cdot 5} = \frac{a^{5+11-3}}{5} = \frac{a^{13}}{5}$

Bruchrechnen

Aufgabe 2. Vereinfachen Sie soweit möglich:

(a) $-\frac{7}{20} - \frac{1}{20} = -\frac{8}{20} = -\frac{2}{5}$

(b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(c) $\frac{\frac{4}{9}\cdot 3}{10\cdot\frac{91}{7}} = \frac{\frac{4}{3}}{10\cdot 13} = \frac{2}{3\cdot 5\cdot 13} = \frac{2}{3\cdot 5\cdot 13} = \frac{2}{195}$

(d) $\frac{7a+7b}{\frac{a+b}{a-b}} = 7(a+b)\cdot\frac{a-b}{a+b} = 7(a-b)$

(e) $\frac{a^2c+2abc+cb^2}{ac+bc} = \frac{c(a+b)^2}{(a+b)c} = a+b$

(f) $\frac{2-3a}{2} + \frac{1+\frac{9}{2}a}{3} = \frac{6-9a}{6} + \frac{2+9a}{6} = \frac{6-9a+2+9a}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

Aufgabe 3. Bringen Sie auf einen Hauptnenner:

(a) $\frac{10}{3a} - \frac{7}{2b} + \frac{5}{6} = \frac{20b-21a+5ab}{6ab}$

(b) $\frac{9}{x-3} - \frac{-2x}{3y} = \frac{27y-(-2x)(x-3)}{3y(x-3)} = \frac{27y+2x^2-6x)}{3y(x-3)} = \frac{27y+2x^2-6x)}{3yx-9y}$

Binomische Formeln

Aufgabe 4. (a) $\frac{(t^2-6t+9)(9+6t+t^2)}{(t^2-9)} = \frac{(t-3)^2(3+t)^2}{(t+3)(t-3)} = (t-3)(t+3) = t^2-9$

(b) $\frac{y^3-8y^2+16y}{y-4} = \frac{y(y-4)^2}{y-4} = y(y-4) = y^2-4y$

(c) $\frac{-2f^2+16fh-32h^2}{-2f^2+32h^2} = \frac{(-2)(f-4h)^2}{(-2)(f-4h)(f+4h)} = \frac{f-4h}{f+4h}$

(Un-)Gleichungen mit einer Variablen

Aufgabe 5. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $x = b-a$

(b) $x^2+4x+4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

(c) $\frac{x-6}{x} = 4$ Für $x = 0$ nicht definiert! Sei also $x \neq 0$ Then $x-6 = 4x \Leftrightarrow -6 = 3x \Leftrightarrow x = -2$

(d) $4(2x-7) = 3x-5(2-x) \Leftrightarrow 8x-28 = 3x-10+5x \Leftrightarrow 8x-28 = 8x-10 \Leftrightarrow -28 = 10 \Rightarrow$ Die Gleichung hat keine Lösungen.

(e) $x^3 = 4x^2 \Leftrightarrow x^2(x-4) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0,4\}$

(f) $(x+2)^2 = x(x-4) \Leftrightarrow x^2+4x+4 = x^2-4x \Leftrightarrow 8x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

(g) Bemerkung: $x \neq 3$, da wir sonst links durch 0 teilen! Sei also $x \neq 3$: $\frac{2a-1}{3-x} = 4a+2 \Leftrightarrow 2a-1 = (4a+2)(3-x)$ 1. Falls $4a+2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$, so lautet die Gleichung $-2 = 0$, und besitzt keine Lösung. 2. Falls $4a+2 \neq 0 : 3-x = \frac{2a-1}{4a+2} \Leftrightarrow x = 3-\frac{2a-1}{4a+2}$ Da x nicht 3 sein darf, ist die Lösungsmenge leer, falls $\frac{2a-1}{4a+2} = 0 \Leftrightarrow 2a-1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$. Sonst ist die Lösung gegeben durch obige Formel.

Aufgabe 6. Geben Sie die Lösungsmengen an:

(a) $x^2+3x-4 = 0 \Leftrightarrow \left(x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3\pm5}{2} \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = -4$

(b) $x^2-3x-4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \frac{3\pm5}{2} \Leftrightarrow x_1 = 4, x_2 = -1$

(c) $|x-3| = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} \Leftrightarrow |x-3| = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x_1 = 3+\frac{1}{6}, x_2 = 3-\frac{1}{6}$

(d) $|x-3| = |x+2| \Leftrightarrow$ Der Abstand zwischen x und 3 ist genauso groß wie der Abstand zwischen x und $-2 \Leftrightarrow x$ liegt exakt zwischen -2 und 3 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

(e) $3x+3 < 5x+5 \Leftrightarrow -2 < 2x \Leftrightarrow x > -1$

(f) $2x+3 > x^2 \Leftrightarrow x^2-2x-3 < 0$. Die Nullstellen der quadratischen Gleichung sind gegeben durch $x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{2\pm4}{2} = 1 \pm 2$, daher erfüllen genau die Punkte $x \in (-1,3)$ die Ungleichung.

(g) $\frac{2x+3}{x} \geq x$
Bemerkung: $x = 0$ ist niemals teil der Lösungsmenge, da dann durch 0 geteilt wird! 1. Fall: $x > 0 \Rightarrow 2x + 3 \geq x^2 \Leftrightarrow 2x + 3 \geq x^2 x^2 - 2x - 3 \leq 0$. Wegen voriger Aufgabe erfüllen genau die Punkte $x \in [-1,3]$ die Ungleichung, aber da $x > 0$ gilt, sind ist $]0,3]$ die Lösungsmenge in diesem Fall.
2. Fall: $x < 0 : 2x+3 \leq x^2 \Leftrightarrow x^2-2x-3 \geq 0$. Die quadratische Gleichung ist dieselbe wie oben, und die Werte der Parabel sind ≥ 0 genau für $]-\infty,-1] \cup [3,\infty[$. Die Lösungsmenge in diesem Fall ($x < 0$) ist also $]-\infty,-1]$.
Insgesamt ergibt sich als Lösungsmenge $]-\infty,-1] \cup]0,3]$.

Knobelaufgaben

Aufgabe 7. Der Bankräuber ist Berta. Wir müssen zeigen, dass sie die Kriterien erfüllt, und zwar als einzige. Begründung: Wir schreiben A für Anton, B für Berta, C für Christian, und "=BR" für "ist der Bankräuber". In folgender Tabelle überprüfen wir, welche Aussagen wahr sind für die drei möglichen Fälle A,B oder C = BR; wir schreiben w="wahr" und f="falsch":

	A=BR	B=BR	C=BR
Aussage 1	w	f	f
Aussage 2	w	f	w
Aussage 3	f	w	w

Da nur im Fall B=BR genau eine der Aussagen wahr ist, muss Berta der Bankräuber sein.

Aufgabe 8. (a) Wir wissen, dass Max nur an einem Tag der Woche die Wahrheit sagt. Mit anderen Worten: mindestens zwei der drei Aussagen sind Lügen.

(b) Max sagt entweder an Tag 1 oder an Tag 3 die Wahrheit, denn: Angenommen, Max lügt and beiden Tagen. Dann stimmt die Negation von Tag 1: er sagt am Montag oder Dienstag die Wahrheit, UND die Negation von Tag 3: er sagt am Mittwoch oder Freitag die Wahrheit. Demnach würde er zweimal die Woche die Wahrheit sagen, was nicht stimmt. Daher sagt er entweder an Tag 1 oder Tag 3 die Wahrheit.

(c) Weil Max am Tag 1 oder 3 die Wahrheit sagt, lügt er also definitiv an Tag 2. Wir wissen also: Tag 2 ist nicht Donnerstag, Samstag oder Sonntag, das heißt Tag 1 ist nicht Mittwoch, Freitag oder Samstag, und Tag 3 ist nicht Freitag, Samstag oder Montag.

(d) 1. Fall: Max sagt an Tag 1 die Wahrheit lügt an Tag 3, dann sagt er am Mittwoch oder Freitag die Wahrheit. Tag 1 ist also Mittwoch oder Freitag. Wir wissen aber aus dem vorigen Schritt, dass Tag 1 nicht Mittwoch oder Freitag ist. Deswegen kann Max nicht an Tag 1 die Wahrheit sagen.

(e) Es muss also der 2. Fall stimmen: Max sagt an Tag 3 die Wahrheit und lügt an Tag 1, das heißt er sagt entweder am Montag oder Dienstag die Wahrheit. Tag 3 ist also entweder Montag oder Dienstag. Wir wissen aber aus dem vorletzten Schritt, dass an Tag 3 nicht Montag sein kann, also ist an Tag 3 Dienstag. $\Rightarrow$ Max sagt am Dienstag die Wahrheit.