Mathematik I

Vorlesung 11 - Skalarprodukt von Vektoren

Prof. Dr. Sandra Eisenreich

11. Dezember 2023

Hochschule Landshut

Motivation

aus der Schule bekannt: "das" Skalarprodukt (es gibt tatsächlich ganz viele; das bekannte ist das **Standardskalarprodukt**), geschrieben als ein "$u \circ v$" oder mit Klammern "$\langle u, v \rangle$" z.B.:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 1 + 4 + 9 = 14$$

Wir schreiben das Skalarprodukt hier mit den Klammern "$\langle u, v \rangle$".

Erinnerung: Das Skalarprodukt definiert einen Längenbegriff von Vekoren über die **Norm**, geschrieben als $\| \ \|$, die gegeben ist durch: $\|u\| = \sqrt{u \circ u} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$, also z.B. für obigen Vektor:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{14}.$$

Mit diesem Längenbegriff definiert man auch den **Euklidischen Abstand** von Vektoren als

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

Anwendungen in der Informatik

häufige Zitate von Prof. Auer (Programmieren II und III):

“Das wichtigste Produkt ist das Skalarprodukt!”
“Das Skalarprodukt ist ein Qualitätsprodukt” oder “....ein Produkt in Premium-Segment” oder “ ... Spitzenprodukt”

Fakt ist: Das Skalarprodukt kommt in so vielen Anwendungen in der Informatik vor, dass es keinen Sinn macht, alle hier aufzuzählen, aber auf jeden Fall bei MR/KI ständig... z.B.: Maß für Ähnlichkeit von Vektoren oder Datensätzen:

- mit dem Standardskalarprokukt wird gemessen, inwiefern die Vektoren in dieselbe Richtung zeigen.
- es gibt aber auch andere Skalarprodukte als das, das Sie aus der Schule kennen, die auch Abstandsbegriffe bzw. Ähnlichkeit von Vektoren definieren. Diese können von KI gelernt werden, um ähnliche Größen (z.B. ähnliche Wörter) zu clustern.

Weil es als Matrizenmultiplikation geschrieben werden kann, führen wir es hier ein.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren

Definition

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

heißt **Skalarprodukt**, wenn für alle $u, v, w \in V$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(S1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$,

(S2) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$

(S3) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

(S4) $\langle u, u \rangle \geq 0$, und $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Aus (S3) folgt, dass auch $\langle u, v + w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ und $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$.

Satz/Definition

Für $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ *definieren wir:*

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Satz: $\langle \ , \ \rangle$ *ist ein Skalarprodukt.*

Rechenregel

Wichtig: Man kann dieses Skalarprodukt auch mit Matrizenmultiplikation schreiben:

$$\langle u, v \rangle = u^T \cdot v = (u_1, u_2, u_3) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Motivation - Norm

Mit Hilfe des Skalarprodukts im $\mathbb{R}^3$ definiert man die sogenannte **Norm** von Vektoren, die die Länge eines Vektors angibt:

Im $\mathbb{R}^3$ kennen Sie diese bereits: für $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ ist

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{u^T \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Erinnern Sie sich, dass diese Norm (die Länge eines Vektors) folgende Eigenschaften erfüllt:

(N1) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$, also die Länge eines um λ gestreckten Vektors ist das λ-fache.

(N2) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, (die **Dreiecksungleichung**), und

(N3) wenn die Norm eines Vektors 0 ist, ist der Vektor $\vec{0}$.

Norm

Solch eine Norm kann man auch für allgemeine Skalarprodukte definieren:

Definition

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\| \,\|: V \to \mathbb{R}$ heißt **Norm**, wenn für alle $u, v \in V$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(N1) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$,

(N2) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, (die **Dreiecksungleichung**), und

(N3) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$

Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

Satz/Definition

Für $u = (u_1, \ldots, u_n)$ *und* $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ *ist*

$$\langle u, v \rangle := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

ein Skalarprodukt und eine Norm gegeben durch (Beweis: nachrechnen):

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u^T u} = \sqrt{u_1^2 + \ldots u_n^2}$$

Beispiele → Mitschrift

Definition

Ist $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$, so ist $\frac{1}{\|u\|}u$ ein Vektor in Richtung u mit der Länge 1, da

$$\left\| \frac{1}{\|u\|} u \right\| = \frac{1}{\|u\|} \|u\| = 1.$$

Wir nennen diesen Vektor den **normierten Vektor zu** u.

Satz

Im R^2 und R^3 gilt für $u, v \neq 0$:

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha,$$

wobei $0 \leq u, v \leq 180°$ der Winkel zwischen den Vektoren u und v ist. Das heißt es gilt:

$$\langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow u \textit{ steht senkrecht auf } v.$$

Den Beweis führen wir hier nicht durch.

Definition

In einem Vektorraum mit Skalarprodukt heißen zwei Vektoren u und v **orthogonal**, wenn gilt $\langle u, v\rangle = 0$. Wir schreiben dann $u \perp v$.

Definition

Eine Basis $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ eines Vektorraums mit Skalarprodukt heißt **Orthonormalbasis**, wenn gilt: $\|b_i\| = 1$ und $b_i \perp b_j$ für alle i, j mit $i \neq j$.

Orthonormalbasen sind Basen die ein rechtwinkliges Koordinatensystem in den Raum legen, wie die Standardnormalbasis mit $x-, y-$ und $z-$Achse, also "schöne" Koordinatensysteme.

Beispiel:

- Die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ ist eine Orthonormalbasis.
- $b_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$ ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$.