Mathematik I

Vorlesung 12 - Gaußscher Algorithmus und lineare Gleichungssysteme

Prof. Dr. Sandra Eisenreich

14. Dezember 2023

Hochschule Landshut

12.1 Rang einer Matrix und der Gauß-Algorithmus

Motivation

Für eine Vektoren in einem Vektorraum ist es oft wichtig zu wissen, wie sie im Raum zueinander liegen.

Drei nicht-Null-Vektoren könnten (wie die Standardbasis) einen dreidimensionalen Raum aufspannen. Sie könnten aber auch in einer Ebene liegen, oder gar auf einer Geraden.

Frage: Wie findet man einfach und mit einem Algorithmus heraus, was davon der Fall ist?

Antwort: Schreibe die Vektoren als Spalten in eine Matrix und wende einen Algorithmus an (Gauß) um den sogenannten **Rang** der Matrix herauszufinden. Dieser ist gleich der Dimension des Raums, der von den Vektoren aufgespannt wird.

Rang einer Matrix

Definition

Sei $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix mit Spaltenvektoren $s_1, \dots, s_n$. Wir definieren den Rang von A als

$$\text{rang } A = \dim \langle s_1, \dots, s_n \rangle$$

Satz

Sei $f : K^n \longrightarrow K^m$ eine lineare Abbildung und $A =$ Mat $f \in K^{m\times n}$ mit Spaltenvektoren $s_1, \dots, s_n$. Dann gilt:

a) $\operatorname{im} f = \langle s_1, \dots s_n \rangle$
b) $\operatorname{rang} A = \dim \operatorname{im} f =$ *Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren von* A
c) $\dim \ker f = n - \text{rang } A$

Bedeutung des Satzes bzw. was zu merken ist

Sei $f: K^n \longrightarrow K^m$ eine lineare Abbildung und $A=$ Mat $f \in K^{m \times n}$ mit Spaltenvektoren $s_1, \ldots, s_n$

- Die Einheitsvektoren $e_1 = (1, 0, 0, \ldots), e_2 = (0, 1, 0, 0 \ldots), \ldots$ werden von f abgebildet auf die Spalten von A, also $f(e_i) = s_i$.
- Das Bild von f ist gegeben durch den Span der Bilder der Einheitsvektoren, also der Spalten von A.
- Die Anzahl von linear unabhängigen Spaltenvektoren von A ist also die Dimension des Bildes von f.
- Wegen $\dim \ker f = n - \operatorname{rang} \; A$ ist n minus die Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren von A die Dimension des Kerns von f.

WICHTIGE Zusammenhänge

Sei $f\colon K^n \longrightarrow K^m$ eine lineare Abbildung, dargestellt durch $A=$ Mat $f \in K^{m\times n}$.

Erinnerung:

(i) Eine lineare Abbildung $f\colon K^n \longrightarrow K^m$ ist genau dann surjektiv, wenn gilt:

$$\operatorname{im} f = K^m \Leftrightarrow \dim \operatorname{im} f = m$$

(ii) Sie ist genau dann injektiv, wenn gilt:

$$\ker f = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \dim \ker f = 0.$$

(iii) $\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim K^n = n$

Laut dem letzten Satz wissen wir: (iv) $\dim \operatorname{im} f = \operatorname{rang} A$

Insgesamt erhalten wir also:

- (i) + (v): f ist surjektiv $\Leftrightarrow \operatorname{rang} A =$ m. ($\operatorname{rang} A = m \Leftrightarrow \dim \operatorname{im} f = m \Leftrightarrow f$ ist surjektiv)
- (ii) + (iii) + (iv): f ist injektiv $\Leftrightarrow \dim \operatorname{im} f = n$.
- Alles zusammen: f ist bijektiv genau dann wenn $n = m = \operatorname{rang} A$.

Beweis. → Mitschrift

Folgerung

Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ *ist genau dann invertierbar, wenn* $\operatorname{rang} A = n$

Beweis. "$\Rightarrow$" A invertierbar impliziert, dass die zugehörige Abbildung

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

bijektiv ist. Somit gilt $\dim \ker f = 0$ und $\dim \operatorname{im} f = n$, also $\operatorname{rang} A = n$.

"$\Leftarrow$" Ist Rang $A = n$, dann haben wir für die zugehörige Abbildung f, dass

$\dim \ker f = n - \operatorname{rang} A = 0$

$\Rightarrow \ker f = 0$, somit ist f injektiv.

Wegen $\operatorname{rang} A = n$ ist f auch surjektiv, also bijektiv. ∎

Dimension des Spans von Zeilen = Spalten

Ohne Beweis erwähnen wir noch das folgende wichtige Resultat:

Satz

Sei $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix mit Zeilenvektoren $z_1, \ldots, z_m$ und Spaltenvektoren $s_1, \ldots, s_n$. Dann gilt:

$$\operatorname{rang} A = \dim\langle s_1, \ldots, s_n\rangle = \dim\langle z_1, \ldots, z_m\rangle () \text{“Zeilenrang”} = \text{“Spaltenrang”})$$

Der obige Satz kann bei der Bestimmung des Rangs einer Matrix hilfreich sein, nämlich dann, wenn der Zeilenrang leichter zu bestimmen ist als der Spaltenrang.

Es bleibt dennoch die Frage zu klären, wie Rang A zu bestimmen ist. Dazu bestimmen wir zunächst den Rang von Matrizen, die eine ganz spezifische Gestalt haben:

Definition (Zeilenstufenform)

Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ hat **Zeilenstufenform**, falls es natürliche Zahlen $j_1, \dots j_e$ mit $j_1 < j_2 < \dots < j_e \leq n$ und $l \in \{1, \dots, m\}$ gibt, so dass für alle $i = 1, \dots, l$ gilt:

- $a_{ij_i} \neq 0$
- $a_{rs} = 0$ für alle r, s mit $r > i$ und $s \in \{j_i, j_{i+1}, \dots, j_{i+1}1\}$
- $a_{rs} = 0$ falls $a < j_1$

Geometrisch:

Streicht man die Nulleinträge, so sieht A aus wie eine umgedrehte Treppe mit (möglicherweise) unterschiedlich langen Stufen.

Der Rang einer solchen Matrix in Zeilenstufenform lässt sich einfach bestimmen:

Satz

Sei A eine Matrix in Zeilenstufenform wie oben. Dann gilt

$$\operatorname{rang} A = l$$

Beispiel → Mitschrift

Die Kernidee zur Berechnung von Rang A für eine beliebige Matrix $A \in K^{m \times n}$ ist nun die folgende:

- Mithilfe elementarer Zeilenoperationen (kurz EZO) lässt sich A in eine Matrix A' in Zeilenstufenform **überführen**.
- Eine elementare Zeilenoperation hat keinen Einfluss auf den Rang einer Matrix.

Definition

Die folgenden Operationen auf einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ heißen elementare Zeilenoperationen:

- Vertauschen zweier Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einem $\lambda \in K \setminus \{0\}$
- Addition des λ-fachen einen Zeile zu einer anderen Zeile.

Satz

EZO andern den Rang einer Matrix nicht.

(Ohne Beweis)

Wir beschreiben nun den Algorithmus, der A mittels EZO in eine Matrix in Zeilenstufen Form umwandelt zuerst an einen Beispiel:

$$A = \begin{array}{c} I \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -I \\ -4 \cdot I \\ -3 \cdot I \end{array}$$

“Pivotelment” $= a_{11} = 1$ Danach wird die erste Zeile so oft von den anderen Zeilen abgezogen, so dass alle Einträge unter a_{11} zu Null werden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -1 \cdot II \\ -2 \cdot II \end{array}$$

Normalerweise würde es mit a_{22} weitergehen. Hier haben wir aber den Sonderfall, dass $a_{22} = a_{32} = a_{42} = 0$. Somit ist das nächste Pivotelement $a_{23} = 2$. Wieder werden die Einträge unter a_{23} durch EZO genullt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \updownarrow \end{array}$$

Wieder ein Sonderfall, nämlich $a_{34} = 0$, aber dieses mal existiert ein Nichtnull Element unter a_{34}. Somit Tausch von Zeile 3 und 4.

Kernoperation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat nun Zeilenstufenform $\Rightarrow \operatorname{rang} A = 3$
Die Nichtnullelemente in den “Ecken der Treppenstufen” heißen **Leitkoeffizienten (kurz LK)**. Am Ende des Verfahrens stimmt die Anzahl der Leitkoeffizienten mit dem Rang von A überein.

Für eine Matrix A seien $z_1, \ldots, z_m$ die Zeilen von A. Wir definieren zuerst eine sogenannte **Kernoperation**, die alle Einträge unter a_{ij} nullt:

Definition

Kernoperation an Pivotelement $a_{ij}(a_{ij} \neq 0)$: für z_k mit $k > i$

$$z_k \longmapsto z_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} \cdot z_i$$

Gauß-Algorithmus

Definition

Man startet den Algorithmus mit dem Aufruf: *Bearbeite Pivotelement* a_{11}

Bearbeite Pivotelement a_{ij}*:*

- Falls $i >$ Zeilenanzahl oder $j >$ Spaltenanzahl: Ende
- Falls $a_{ij} \neq 0$ (Standardfall):
  - Kernoperation an a_{ij}
  - *Bearbeite Pivotelement* $a_{i+1\ j+1}$
- Falls $a_{ij} = 0$ (Sonderfall):
  - Falls möglich, vertausche z_i mit z_k wobei $k > i$ und $a_{k_j} \neq 0$
    Kernoperation an a_{ij}
    Bearbeite Pivotelement $a_{i+1\ j+1}$
  - Falls $a_{k_j} = 0$ für alle $k > i$ (Sonderfall im Sonderfall):
    Bearbeite Pivotelement $a_{i+1\ j+1}$

Beispiel → Mitschrift

12.2 Lösung linearer Gleichungssysteme

Lineares Gleichungssystem

Definition

Gegeben sie eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ und ein Vektor $b \in K^m$. Dann ist ein **Lineares Gleichungssystem (LGS)** gegeben durch eine Gleichung $A \cdot x = b$ bzw.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m_2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow a_{11} \cdot x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\
\vdots \\
a_{m1} \cdot x_1 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n &= b_n
\end{aligned}$$

mit unbekannter Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$. Wir bezeichnen die Lösungsmenge mit $\text{Lös}(A, b)$.

Herleitung

Beispiel: $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 2 \cdot x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 2x_4 & = & 2 \\ 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 7 \cdot x_4 & = & 4 \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 7x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 2 \end{array}$

Beachte:

- Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalar $\lambda \neq 0$ ändert Lös(A, b) nicht.
- Addition des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen ändert Lös(A, b) nicht.
- Vertauschung zweier Gleichungen hat auch keine Auswirkung auf Lös(A, b).

Bemerke: das sind EZO, aber nicht nur für die Matrix A, sondern auch für die rechte Seite b. Wir schreiben also $(A|b)$ nebeneinander und führen dafür EZO durch.

Weiter $\rightarrow$ Mitschrift

Allgemeines Verfahren

Gegeben sei ein LGS $A \cdot x = b$ mit $A \in K^{m \times n}, \quad b \in K^m$.

1. Schritt

Betrachte die erweiterte Matrix $(A|b)$, bringe diese mittels EZO auf Zeilenstufenform $(A'|b')$.

Ergebnis:

1. Fall

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} l_1 & * & & \dots & & * & * \\ 0 & l_2 & & & & & \vdots \\ & 0 & l_3 & & & & \vdots \\ & & 0 & l_4 & & & \vdots \\ & & & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & & & & l_k & * \\ 0 & & & & & 0 & a \\ 0 & & & & & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{mit } a \neq 0, \text{ oder}$$

2. Fall

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} l_1 & * & & \dots & & * & * \\ 0 & l_2 & & & & & \vdots \\ & 0 & l_3 & & & & \vdots \\ & & 0 & l_4 & & & \vdots \\ & & & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & & & & l_k & * \\ 0 & & & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Im Fall 1 existiert keine Lösung (rang A < rang $(A|b)$).

Im Fall 2 existieren Lösungen:

2. Schritt Die Leitkoeffizienten werden mittels Multiplikation der i-ten Zeile mit l_i^{-1} zu 1 normiert.

Ergebnis: $(A'|b') =$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & * & & \cdots & & * & * \\
0 & 1 & & & & & \vdots \\
 & 0 & 1 & & & & \vdots \\
 & & 0 & 1 & & & \vdots \\
 & & & 0 & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & 1 & * \\
0 & & & & & 0 & 0 \\
0 & & & & & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Dann gilt:

3. Schritt Erzeuge Nulleinträge oberhalb der 1-en mittels EZO.

Ergebnis: $(A'|b') =$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & * \\
0 & 1 & * & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \\
\vdots & & & 1 & * & 0 & 0 & \vdots & \\
\vdots & & & & & 1 & 0 & \vdots & \\
\vdots & & & & & & 1 & 0 & \\
\vdots & & & & & & & 1 & * \\
\vdots & & & & & & & 0 & 0 \\
0 & 0 & & & & & & 0 & 0
\end{array}\right)$$

rang $A = k =$ Anzahl von Spalten mit Leitkoeffizienten (rot),
Lösungsmenge ist $(n-k)$–dimensional (grün).

Beispiele → Mitschrift

Lösung Linearer Gleichungssysteme

Satz

Es gilt: Ist $(A'|b')$ durch EZO aus $(A|b)$ hervorgegangen, dann gilt auch $Lös(A', b') = Lös(A, b)$.

Satz

Ein lineares GLS $A \cdot x = b$ *mit* $A \in K^{m \times m}, b \in K^m$ *hat mindestens eine Lösung* $\Leftrightarrow b \in \operatorname{Im} A$ $\Leftrightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|b)$.

Außerdem gilt: Ist w *eine Lösung von* $Ax = b$*, dann gilt:*

$$\begin{aligned} Lös(A, b) &= w + \ker A \\ &= w + Lös(A, 0) \end{aligned}$$

Dimension der Lösungen eines GLS

<u>Beachte:</u> $\ker A$ ist ein linearer Unterraum der Dimension:

$\dim \ker A = n - \dim \operatorname{im} A = n - \operatorname{rang} A = n -$ Anzahl der Treppenstufen

Somit gilt allgemein:

Satz

$Ax = b$ hat entweder keine Lösung (falls $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang}(A|b)$), oder der Lösungsraum ist $(n - \operatorname{rang} A)$- dimensional, und von der Form

$$w + \ker A,$$

wobei w irgendeine Lösung von $Ax = b$ ist.

12.3 Das Inverse einer Matrix

Invertieren einer Matrix an einem Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ Gesucht ist A^{-1}. Dazu erweitern wir die Matrix A um die Einheitsmatrix derselben Größe:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dies entspricht drei GLSen auf einmal:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \cdot \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist die Lösung $X = (x_{ij})$ die Inverse von A.

Weiter → Mitschrift