HAW LANDSHUT | WS 2023/2024
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK | Blatt 6
Eisenreich/Hartmann/Sagraloff/Schröter

Lösungsskizzen zur Übung „Mathematik I"

Präsenzaufgabe. Wir berechnen die Determinante von $B - \lambda\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -2-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ indem wir nach der letzten Zeile entwickeln:
$\det(B-\lambda\mathbb{1}) = (-1)^{3+3} \cdot (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda)$
Die Eigenwerte sind also $0, 1, -2$.
Eigenraum zu $\lambda = 0$:

$$B + 0\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{R} \cdot (2,1,0) \text{ ist der Eigenraum zum Eigenwert 0.}$$

Aufgabe 1. Lineare Gleichungssysteme, Gauß Formulieren Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme in Matrixschreibweise und lösen Sie sie!

(a)
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= -6 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= -5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Lösung 1. Lineare Gleichungssysteme, Gauß

(a) Das LGS ist äquivalent zu $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Dieses Gleichungssystem können wir lösen, indem wir den Gauß-Algorithmus auf die folgende erweiterte Matrix anwenden:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ +2I \\ +I \\ +I \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +3II \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 23 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ -III \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \\ \cdot(-\frac{1}{6}) \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} -IV \\ +3IV \\ -9\cdot IV \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\frac{1}{4} \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} +III \\ +III \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -II \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 3 \end{array}\right\}$$

(b) Das LGS ist äquivalent zu $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dieses Gleichungssystem können wir lösen, indem wir den Gauß-Algorithmus auf die folgende erweiterte Matrix anwenden:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 4 & -2 & -6 \\ -1 & -1 & -2 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -2 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +I \\ -3I \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \; II \leftrightarrow IV \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -II \\ \cdot(-\frac{1}{4}) \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} +IV \\ +IV \\ -5\cdot IV \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2III \\ +III \\ \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -II \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 2 \end{array}\right\}$$

Aufgabe 2. Determinante Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 20 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 21 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 22 & 4 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(d) Für welche $a, b \in \mathbb{Q}$ sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

linear unabhängig in $\mathbb{Q}^3$?

Lösung 2. Determinante

(a) Für eine 2x2-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist die Determinante $ad - bc$, daher ist $\det A = 2 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) = 6 - (-8) = 6 + 8 = 14$.

(b) Entwicklung nach der zweiten Zeile ergibt:

$$\det B = (-1)^{2+2} \cdot b \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ b & b \end{pmatrix} = b \cdot (2b - b) = b \cdot b = b^2$$

(c) Wir ziehen zunächst die dritte Zeile von der ersten und zweiten ab, was die Determinante nicht verändert, und erhalten:

$$\det B = \det \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun entwickeln wir nach der letzten Spalte und erhalten:

$$\det C = (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

(d) Wir entwickeln nach der ersten Zeile und erhalten:

$$\det D = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Dann entwickeln wir nach der zweiten Zeile und bekommen:

$$\begin{aligned} \det D &= 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \det \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) - 2 \cdot \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right) \\ &= 4 \cdot (-2 + 16 + 3 - 4 + 2 - 12) - 2 \cdot (-1 + 8 - 24 - 8 - 4 - 6) \\ &= 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-35) = 12 + 70 = 82 \end{aligned}$$

(e) Die drei Vektoren sind genau dann linearn unabhängig, wenn die Detenante der Matrix mit den Vektoren als Spalten ungleich Null ist. Berechnen wir also die Determinante von

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 3 & b \end{pmatrix}.$$

Dazu entwickeln wir nach der zweiten Zeile:$\det A = (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (1 \cdot 3 - 2 \cdot a) = 2a - 3$. Die drei Vektoren sind also genau dann linear unabhängig in $\mathbb{Q}^3$, wenn $2a - 3 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{3}{2}$. Der Wert von b ist beliebig in $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3. Eigenwerte Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen:

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung 3. Eigenwerte

(a) • Berechnen des charakteristische Polynoms:

- $\det(A-\lambda E_3) = \det\left(\begin{array}{ccc|cc} 5-\lambda & -2 & -2 & 5-\lambda & -2 \\ -2 & -1-\lambda & -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -1-\lambda & -2 & -1 \end{array}\right) = (5-\lambda)\cdot(-1-\lambda)^2-4-4-4(-1-\lambda)-(5-\lambda)-4(-1-\lambda) = (5-\lambda)\cdot(1+2\lambda+\lambda^2)-8+4+4\lambda-5+\lambda+4+4\lambda = 5+10\lambda+5\lambda^2-\lambda-2\lambda^2-\lambda^3+9\lambda-5 = -\lambda^3+3\lambda^2+18\lambda = -\lambda(\lambda^2-3\lambda-18)$
- Bestimmen der Nullstellen des charakteristischen Polynoms = Eigenwerte der Matrix: $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \frac{3\pm\sqrt{9+4\cdot 18}}{2} = \frac{3\pm 9}{2} \Rightarrow \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -3$.
- Berechnen des Eigenraums zum Eigenwert $\lambda = 0$: Der Eigenraum ist der Lösungsraum des LGS

  $$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

  Wir berechnen diesen mit dem Gauß-Algorithmus $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +\frac{2}{5}I \\ +\frac{2}{5}I \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 0 & -\frac{9}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & -\frac{9}{5} & -\frac{9}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} \\ \cdot(-\frac{5}{9}) \\ -II \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} +2II \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Berechnen des Eigenraums zum Eigenwert $\lambda_2 = 6$: Der Eigenraum ist der Lösungsraum des LGS

  $$\begin{pmatrix} 5-6 & -2 & -2 \\ -2 & -1-6 & -1 \\ -2 & -1 & -1-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -7 & -1 \\ -2 & -1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

  Wir berechnen diesen mit dem Gauß-Algorithmus $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -7 & -1 \\ -2 & -1 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2I \\ -2I \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} \cdot -1 \\ \cdot(-\frac{1}{3}) \\ +II \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} -2II \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -4x_3, x_2 = x_3 \Rightarrow$ $T_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Berechnen des Eigenraums zum Eigenwert $\lambda_3 = -3$:

- $$\begin{pmatrix} 5-(-3) & -2 & -2 \\ -2 & -1-(-3) & -1 \\ -2 & -1 & -1-(-3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

  Wir berechnen diesen mit Elementaren Zeilenumformungen: $\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \leftrightarrow II \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 8 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +4I \\ -I \end{matrix} \quad \rightarrow$
  $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -6 \\ & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\frac{1}{6} \\ +\frac{1}{2}II \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2II \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \rightarrow$
  $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x_1 = x_3, x_2 = x_3 \Rightarrow T_{-3} =$
  $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b)

- Berechnen des charakteristische Polynoms: Entwicklung nach der ersten Zeile liefert: $\det(B - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 2-\lambda & -3 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$
  $(2-\lambda) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \cdot (2-\lambda)(1-\lambda)$
- Bestimmen der Nullstellen des charakteristischen Polynoms = Eigenwerte der Matrix: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$.
- Berechnen des Eigenraums zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$: Der Eigenraum ist der Lösungsraum des LGS

  $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

  Wir berechnen diesen mit dem Gauß-Algorithmus $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \leftrightarrow III \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3I \\ \\ \end{matrix} \quad \rightarrow$
  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x_1 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 2x_1$
  $\Rightarrow T_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} =$

$\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$

- Berechnen des Eigenraums zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$: Der Eigenraum ist der Lösungsraum des LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|}1 & 0 & 0\\6 & 1 & -3\\2 & 0 & 0\end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 0$$

Wir berechnen diesen mit dem Gauß-Algorithmus $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\6 & 1 & -3\\2 & 0 & 0\end{pmatrix} \begin{matrix}\\-6I\\-2I\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 - 3x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 3x_3$

$\Rightarrow T_1 = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3x_3\\x_3\end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R}\right\} = \text{Span}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$