7.12.23

- v lin. (un)abhängig von $v_1, \dots, v_n$

$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n \rightarrow$ gibt es eine Lösung für $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

- $v_1, \dots, v_n$ lin. ~~(un)~~abhängig, wenn es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass v_i lin. abh. von den anderen

$\underline{\lambda_1} v_1 + \dots + \underline{\lambda_n} \cdot v_n = 0 \rightarrow$ Lineares Gleichungssystem (LGS)

Wenn $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$ die einzige Lsg. ist, dann sind die Vektoren lin. unabhängig, sonst abhängig.

- $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\in \mathbb{R}^3$

lin. unabh.?

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \Leftrightarrow$

(*) $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

(**) $\Leftrightarrow$ (I) $\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$
(II) $\lambda_3 = 0$
(III) $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

(II) in (I) und (III):
(I') $\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \ / +\lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$
(III') $\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow 2\lambda_1 = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ist die einzige Lösung. $\Rightarrow$ lin unabhängig.

nochmal: (*) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ (**)

Koordinaten:

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ 1, 2, 3 sind die Koordinaten von v bzgl der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$v = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}. \right\}$$

Aufgabe: rechne nach, dass b_1, b_2, b_3 linear unabhängig sind im 3-dim. $\mathbb{R}^3$ und deswegen eine Basis.

Wie kommt man auf die "Vorfaktoren"?

Suche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, s.d.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow$ LGS:

(I) $1 = \lambda_3 \cdot 2$

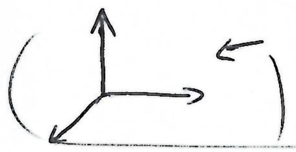
(II) $2 = 1 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3$ $\rightarrow$ lösen ...

(III) $3 = 2 \cdot \lambda_2 + 10\lambda_3$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}.$

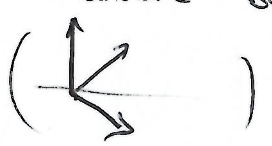
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Koordinaten bzgl der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$.

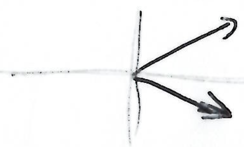


Standardbasis

andere Basis

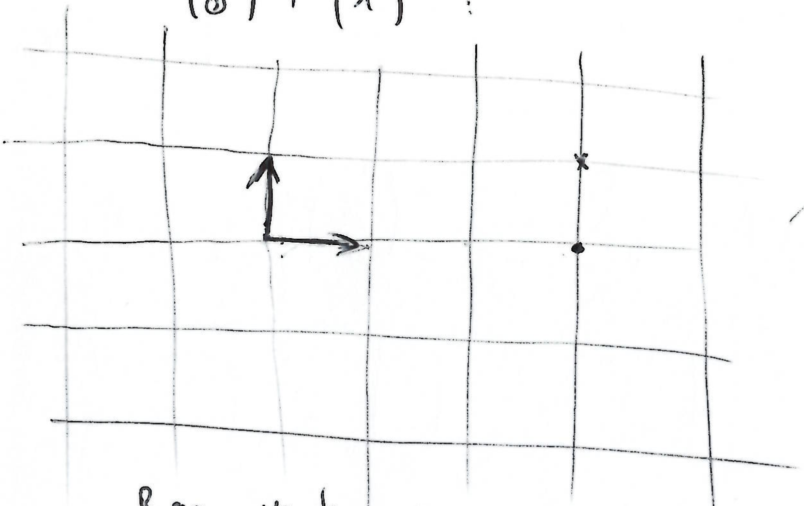


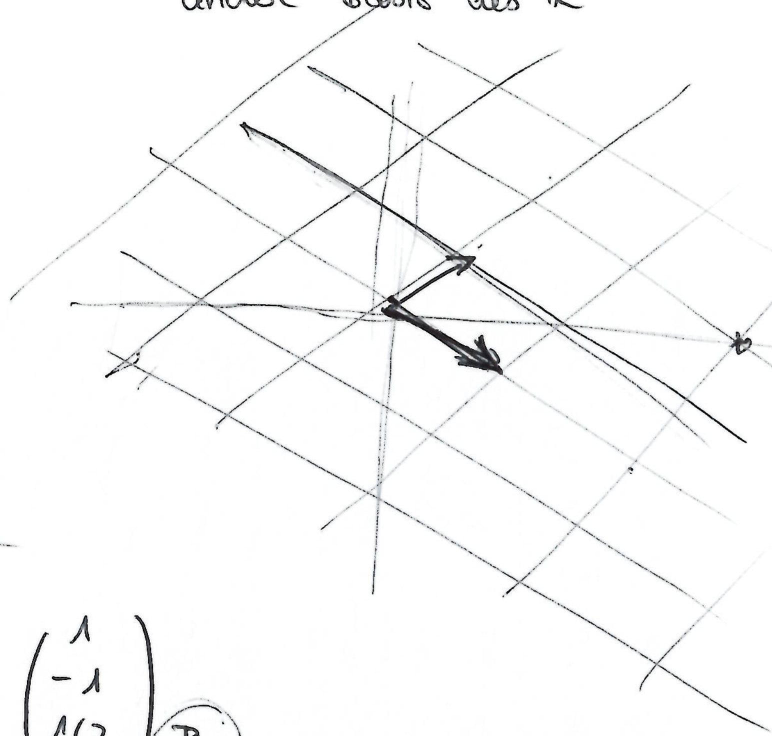
in $\mathbb{R}^2$:



Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ $\qquad$ andere Basis des $\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$:





Bsp. vorher:

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\qquad$ $\begin{pmatrix}1\\-1\\1/2\end{pmatrix}_{B}$

---

lineare Abbildungen:

$\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ Vektorraum $\quad \dim = d+1$

Basis: $1, x, x^2, \dots, x^d$

isomorph

$p(x) = x^3 - 4x^2 + x - 2 \quad \in \mathbb{R}[x]_{\leq 4} \cong \mathbb{R}^5$.

Koordinaten bzgl der Basis $B = (1, x, x^2, x^3, x^4)$

$\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\\1\\0\end{pmatrix}_B$

Isomorphismus: $\quad f: \mathbb{R}[x]_{\leq 4} \to \mathbb{R}^5$

$p(x) \mapsto \begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_4\end{pmatrix}_B$

$\parallel$

$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4$

Vorfaktoren in Vektor schreiben

$1, x+3, x^2 - x, x^3 \dots$

lineare Abbildungen, Beispiele:

$\left(f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 - x_3 \right)$

- $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \boxed{2x_1 + x_2 - x_3}$ ist linear

denn: Seien $u = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, u' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

Addition von Vektoren:

- $f\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = f\begin{pmatrix} z_1 + y_1 \\ z_2 + y_2 \\ z_3 + y_3 \end{pmatrix} = 2 \cdot (z_1 + y_1) + (z_2 + y_2) - (z_3 + y_3)$

$$f\Big(\underbrace{(z_1 + y_1)}_{= x_1}, \underbrace{(z_2 + y_2)}_{= x_2}, \underbrace{(z_3 + y_3)}_{= x_3} \Big) = 2x_1 + x_2 - x_3$$
$$= 2 \cdot (z_1 + y_1) + (z_2 + y_2) - (z_3 + y_3)$$
$$= 2 \cdot z_1 + 2 \cdot y_1 + z_2 + y_2 - z_3 - y_3$$
$$= (2 \cdot z_1 + z_2 - z_3) + (2 \cdot y_1 + y_2 - y_3)$$
$$= f(z_1, z_2, z_3) + f(y_1, y_2, y_3)$$

$\Rightarrow$ 1. Teil von Linearität, also $f(u + u') = f(u) + f(u')$.

Multiplikation mit Skalar:

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = f\begin{pmatrix} \lambda \cdot y_1 \\ \lambda \cdot y_2 \\ \lambda \cdot y_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_1 \\ \leftarrow x_2 \\ \leftarrow x_3 \end{matrix} = 2 \cdot (\lambda y_1) + (\lambda \cdot y_2) - (\lambda y_3)$$
$$= \lambda \cdot (2 \cdot y_1 + y_2 - y_3)$$
$$= \lambda \cdot f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 2. Teil von Linearität

$\Rightarrow$ linear.

2. Beispiel: Wird eine Konstante dazu addiert, ist es nicht mehr linear!

z.B. $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto 2x_1 + x_2 - x_3 + 1$

$$\left(g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 - x_3 + 1 \right)$$

nicht linear: z.B.

$$g\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 2 - 2 + 1$$
$$= 5$$

$$2 \cdot g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot (2 \cdot 1 + 1 - 1 + 1) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\Rightarrow g\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq 2 \cdot g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \Rightarrow \text{nicht linear.}$$

3. Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

z.B. $f(1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

ist linear, denn:

Seien $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ beliebig.

Dann ist $f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_1 \\ \leftarrow x_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} (y_1 + z_1) - (y_2 + z_2) \\ 2 \cdot (y_1 + z_1) + (y_2 + z_2) \end{pmatrix}$

$\to f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (y_1 - y_2) + (z_1 - z_2) \\ (2y_1 + y_2) + (2z_1 + z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ 2y_1 + y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 - z_2 \\ 2z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$= f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$: $f\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y_1 - \lambda y_2 \\ 2 \cdot \lambda y_1 + \lambda y_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

4. Beispiel: $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2^2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

ist nicht linear!

Aufgabe: nachrechnen, z. B. $g\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

bzw. $2 \cdot g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.