Mathematik I

Vorlesung 9 - Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen

Prof. Dr. Sandra Eisenreich

23. Oktober 2023

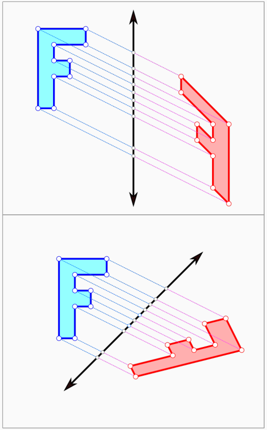
Hochschule Landshut

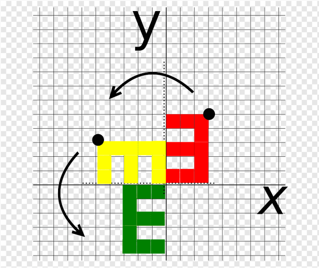
Motivation

Frage: Wenn man grafisch die Drehung einer Kugel darstellen will, wie macht man das?

Allgemein: Wie beschreibt man z.B. Drehungen von Objekten im Raum? Oder Spiegelungen? Oder Skalierungen?

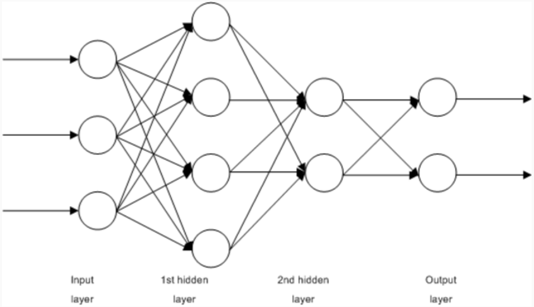
Diese Operationen sind **lineare Abbildungen**.





Anwendungen in der Informatik

- Computergrafik besteht quasi nur aus linearen Abbildungen (Koordinatentransformationen!)
- Deep Learning im Bereich KI ebenso; ein neuronales Netz sieht so aus:



  wobei die einzelnen “Layer” einer linearen Abbildung entsprechen
- sonst auch überall...

Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen

Definition

Seien U, V K–Vektorräume und $f \cdot u \longrightarrow v$ eine Abbildung. f ist eine **lineare Abbildung**, wenn für alle $\lambda \in K$ und $u, u' \in U$ gilt:

$$\begin{aligned} f(u+u') &= f(u) + f(u') \text{ und} \\ f(\lambda \cdot u) &= \lambda \cdot f(u) \end{aligned}$$

(d.h. Addition und Skalarmultiplikation können mit $f(\cdot)$ vertauscht werden).

Zwei Vektorräume U und V heißen **isomorph** (Abk. $U \simeq V$), falls es eine lineare bijekive Abb. $f : U \longrightarrow V$ gibt. f nennt man dann einen **Isomorphismus**

Beachte: U und V müssen Vektorräume über demselben Körper K sein!

Eigenschaften von linearen Abbildungen und Isomorphismen

Satz

- *Für jede lineare Abbildung* $f : U \longrightarrow V$ *gilt:* $f(\vec{0}) = \vec{0}$.
- *Sind die Abbildungen* $f : U \longrightarrow V$ *und* $g : V \longrightarrow W$ *linear, so ist auch die Komposition* $g \circ f : U \longrightarrow V$ *linear.*
- *Ist* $f : U \longrightarrow V$ *ein Isomorphismus, dann ist auch die Umkehrabbildung* $f^{-1} : V \longrightarrow U$ *ein Isomorphismus.*

Beispiele: → Mitschrift.

Beispiele

Beispiel 1: $f: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto 2x_1 + x_2 - x_3$ ist linear:

- Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot (\lambda x_1) + (\lambda \cdot x_2) - (\lambda x_3) = \lambda \cdot (2x_1 + x_2 - x_3) = \lambda \cdot f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

- Addition von Vektoren:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Beispiel 2: aber: Wird eine Konstante hinzu addiert, ist die Abbildung nicht mehr linear. Betrachte die Abbildung:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto 2x_1 + x_2 - x_3 + 1$$

Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ funktioniert nicht: Gegenbeispiel (für $\lambda = 2$):

$$\begin{aligned} f\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 2 - 2 + 1 = 5, \text{ aber} \\ 2 \cdot f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 2 \cdot (2 + 1 - 1 + 1) = 6 \neq f\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Beispiel 3: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ ist linear.

- Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 - \lambda x_2 \\ 2\lambda x_1 + \lambda x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

- Addition von Vektoren:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 - x_2 - y_2 \\ 2(x_1 + y_1) + x_2 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ 2y_1 + y_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ ist sogar ein **Isomorphismus**, denn f ist **linear** und:

- f ist **injektiv**: Wir müssen zeigen: Wenn $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$, dann ist $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

  Dies zeigen wir durch Widerspruch. Angenommen, $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$ und

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ 2y_1 + y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (x_1 - y_1) - (x_2 - y_2) \\ 2(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Lösung des Gleichungssystems: $y_1 = x_1, y_2 = x_2$, im Widerspruch zu $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$.

- f ist **surjektiv**: Dazu müssen wir zeigen, dass jeder beliebige Vektor (y_1, y_2) im Zielraum ein Urbild unter f hat. Wir suchen also (x_1, x_2), so dass

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

  Wir müssen also ein lineares Gleichungssystem lösen: $(I) x_1 - x_2 = y_1, (II) 2x_1 + x_2 = y_2$ Aus (I) folgt $x_1 = y_1 + x_2$, dies in (II): $2y_1 + 2x_2 + x_2 = y_2 \Rightarrow 3x_2 = y_2 - 2y_1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}(y_2 - y_1)$. Dies in (I) eingesetzt ergibt: $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2$. Jeder Vektor im Zielraum hat also ein Urbild!

Beispiel 4: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2^2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ ist nicht linear (nachrechnen!)

Beispiel 5: $D : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x], p \longmapsto p'$ (= Ableitung von p) ist linear:

> Mulitplikation mit Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$: $D(\lambda \cdot p) = (\lambda \cdot p)' = \lambda \cdot p' = \lambda \cdot D(p)$ und
>
> Addition von Vektoren = Polynomen: $D(p + q) = (p + 1)' = p' + q' = D(p) + D(q)$.

Die Abbildung ist zudem surjektiv (jedes Polynom hat eine Stammfunktion), aber nicht injektiv, da beispielsweise

$$D(3x^2 + 1) = 6x = D(3x^2).$$

D ist also kein Isomorphismus.

Kern und Bild

Wir führen nun zwei **wichtige Definitionen** ein:

Definition

Sei $f : U \longrightarrow V$ linear, dann definieren wir:

- den **Kern von** f als alle Vektoren $u \in U$, die auf 0 abgebildet werden:

$$\ker f := \{u \in U | f(u) = 0\}$$

- das **Bild von** f ("Im" wegen "Image"=Bild) als alle Vektoren $v \in V$, die im Bild der Abbildung f liegen, also die ein Urbild besitzen:

$$\operatorname{im} f := \{v \in V | \exists u \in U \text{ mit } f(u) = v\}$$

Bild und Kern zum Nachweis von surjektiv/injektiv

Wichtige Eigenschaften von Bild und Kern:

Satz

(a) *Die Abbildung f ist genau dann surjektiv, wenn gilt:*

$$\operatorname{im} f = V$$

(b) *Sie ist genau dann injektiv, wenn gilt:*

$$\ker f = \{\vec{0}\}$$

.

Bemerkung:

- (a) ist klar: $\operatorname{im} f = V \Leftrightarrow$ der ganze Zielraum "wird getroffen" $\Leftrightarrow$ Surjektivität.
- (b) muss man zeigen. Es bedeutet: Eine lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn *nur* der Nullvektor auf den Nullvektor abgebildet wird (dieser wird es sowieso).

Beweis.

"$\Rightarrow$" Angenommen, f ist injektiv. Sei $u \in \ker f$, d.h. $f(u) = 0$. Da $f(\vec{0}) = 0 = f(u)$, muss somit $u = \vec{0}$ sein, also $\ker f = \{\vec{0}\}$.

"$\Leftarrow$" Sei nun $\ker f = \{\vec{0}\}$ und $f(u) = f(v)$. Dann gilt auch $f(u) - f(v) = \vec{0}$,

also wegen der Linearität der Abbildung

$$\begin{aligned} & f(u - v) = \vec{0} \Rightarrow u - v \in \ker\ f \Rightarrow u - v = \vec{0} \\ \Rightarrow \quad & u = v. \end{aligned}$$

Also ist f injektiv. ∎

Beispiele

Beispiel 1: $f: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$

1.1 Kern von f:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker f \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow x_3 = -2x_1 \text{ und } x_2 = -3x_1$$

Somit gilt: $\ker f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow$ $\ker f$ ist als Span eines Vektors ein *linearer Unterraum*! (werden sehen: das ist immer so.)

1.2 Bild von f: Es gilt $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Das Bild von f erhält man, wenn man alle möglichen Werte $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ einsetzt, d.h.

$$\operatorname{im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Diese Vektoren $(1,1), (1,-1)$ und $(-1,2)$ sind nicht linear unabhängig, da:

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da aber $(1,1)$ und $(1,-1)$ linear unabhängig sind, gilt $\operatorname{im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow f$ ist surjektiv.

Satz

Für jede lineare Abbildung $f : U \longrightarrow V$ ist $\ker f$ ein linearer Unterraum von U und $\operatorname{im} f$ ein linearer Unterraum von V.

Analog zeigt man auch folgende Verallgemeinerung:

Satz

Sei $f : U \longrightarrow V$ linear und seien U_1, V_1 Teilräume von U bzw. V. Dann gilt:

- *$f(U_1)$ ist ein Teilraum von V.*
- *$f^{-1}(V_1)$ ist ein Teilraum von U.*

Motivation - lineare Abbildungen und Basen/Koordinatentransformationen

Wie eingangs erwähnt: Computergrafik (2D und 3D) besteht quasi nur aus linearen Abbildungen, und zwar Transformationen von einem Koordinatensystem in ein anderes.

Eine 3D-Grafik ist z.B. gegeben durch ein 3D Modell und eine Sicht in dieses Modell hinein. Diese Sicht entspricht einem Koordinatensystem. Wenn sich z.B. ein Spieler durch das 3D Modell bewegt, verändert sich also ständig das zugrundeliegende Koordinatensystem ($\Leftrightarrow$ die zugrundeligende Basis!). Um das mit einem Rechner auszudrücken braucht es eine "Übersetzung" von einem Koordinatensystem in ein anderes, das heißt eine lineare Abbildung, die eine Basis (z.B. die Standardbasis) übersetzt (das heißt abbildet) auf die neue Basis.

Lineare Abbildungen und Basen

Satz

Seien U, V K-Vektorräume und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von U. Zu beliebig gegebenen Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ gibt es dann genau eine lineare Abbildung $f : U \longrightarrow V$, so dass $f(b_i) = v_i$ für alle i.

Folgerung

Eine lineare Abbildung $f : U \longrightarrow V$ ist vollständig durch ihre Werte $f(b_i)$ auf einer Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ bestimmt:

für die Koordinatendarstellung eines Vektors bezüglich der Basis B, $u = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B$, gilt:

$$\begin{aligned} f(u) &= f(\lambda_1 \cdot b_1 + \dots + \lambda_n \cdot b_n) \\ &:= \lambda_i f(b_1) + \dots + \lambda_n \cdot f(b_n) \\ &= \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n \end{aligned}$$

Beweis. Sei $u \in U$ ein Vektor und

$$u = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B = \lambda_1 \cdot b_1 + \ldots + \lambda_n \cdot b_n$$

die Koordinatendarstellung von u bzgl. B. Wir definieren eine Abbildung $f : U \longrightarrow V$ wie folgt:

- $f(b_i) := v_i$ für $i = 1, \ldots, n$
- Da f linear sein soll, haben wir keine andere Wahl, als wie folgt $f(u)$ zu definieren

$$\begin{aligned} f(u) &= f(\lambda_1 \cdot b_1 + \ldots + \lambda_n \cdot b_n) \\ &:= \lambda_i f(b_1) + \ldots + \lambda_n \cdot f(b_n) \\ &= \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n \end{aligned}$$

Es ist nun leicht zu überprüfen, dass f tatsächlich linear ist. ■

Isomorphismen von VR

Ohne Beweis halten wir noch eine Reihe weiterer wichtiger Ergebnisse fest:

Satz

Seien U, V endlichdimensionale K-Vektorräume, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von U and $f : U \longrightarrow V$ linear. Dann ist f genau dann ein Isomorphismus, wenn $e := \{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ eine Basis von V ist (das heißt wenn f eine Basis von U auf eine Basis von V abbildet).

Folgerung

Zwei endlichdimensionale Vektorräume U, V sind genau dann isomorph, wenn $\dim U = \dim V$.

Folgerung

Alle n-dimensionalen K-Vektorräume sind isomorph zum Vektorraum K^n.

Beweis. → Mitschrift.

Wichtige Dimensions-Gleichung von Bild und Kern

Wir halten noch folgendes Ergebnis fest:

Satz

Sei $f : U \longrightarrow V$ linear, dann gilt

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim U.$$

Anwendungen:

Rechenregel

- Ist $\dim U < \dim V$, so kann f nicht surjektiv sein.
- Ist $\dim U > \dim V$, so kann f nicht injektiv sein.
- Ist $\dim U = \dim V$, so ist f bijektiv genau dann wenn f entweder injektiv oder surjektiv ist.

Beispiel

Wir hatten vorhin das Bsp.

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Hier gilt: $\dim \ker f = \dim \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$

$\dim \operatorname{im} f = \dim \mathbb{R}^2 = 2$, also $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$.

Betrachtet man eine allgemeine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, so gilt immer $\dim \operatorname{im} f \leq 2$, also ergeben sich folgende Möglichkeiten

1. $\dim \ker f = 1$ und $\dim \operatorname{im} f = 2$
2. $\dim \ker f = 2$ und $\dim \operatorname{im} f = 1$
3. $\dim \ker f = 3$ und $\dim \operatorname{im} f = 0$.

f ist also nie injektiv.