HAW LANDSHUT
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK
Eisenreich/Hartmann/Sagraloff/Schröter

WS 2023/2024
Blatt 5
17.12.23

Übungen zur Vorlesung „Mathematik I"

Aufgabe 1. Vektorräume

(a) Welche Dimension hat der folgende Unterraum des $\mathbb{R}^3$:

$$U = \operatorname{Span}\left(v_1 := \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix} \right)$$

Hinweis: Rechnen Sie nach, ob die drei Vektoren linear unabhängig oder abhängig sind! Falls sie linear abhängig sind, prüfen Sie nach ob zwei davon linear unabhängig sind...

(b) Geben Sie eine Basis von $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum und als $\mathbb{R}$-Vektorraum an. Welche Dimension hat $\mathbb{C}^2$ demnach als $\mathbb{C}$-Vektorraum und als $\mathbb{R}$-Vektorraum?

(c) Zeigen Sie: Die Menge

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 3} = \{p \in \mathbb{R}[x] : \deg p \leq 3\}$$

aller Polynome vom Grad 3 ist (mit der üblichen Addition von Polynomen) ein $\mathbb{R}$-Teilraum des Vektorraums $\mathbb{R}[x]$.
Geben Sie eine Basis dieses Vektorraumes an.

(d) Ist die Menge $\mathbb{Z}[x]_{\leq 3} = \{p \in \mathbb{Z}[x] : \deg p \leq 3\}$ auch ein Vektorraum?

Aufgabe 2. Koordinaten

(a) Zeigen Sie, dass folgendes eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} \right\}$$

(b) Berechnen Sie dann die Koordinaten des folgenden Punkts im $\mathbb{R}^3$ bezüglich der obigen Basis B: $v = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

Aufgabe 3. lineare Abbildung, Matrix

(a) Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die

$$\begin{aligned} f_1((0,1)) &= (1,1) \\ f_1((2,1)) &= (1,0) \\ f_1((2,2)) &= (2,2) \end{aligned}$$

erfüllt? Begründen sie Ihre Antwort.

(b) Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die

$$\begin{aligned} f_2((1,0)) &= (2,1), \\ f_2((1,1)) &= (2,2), \\ f_2((3,2)) &= (6,5) \end{aligned}$$

erfüllt? Begründen sie Ihre Antwort.

(c) Sollte eine der beiden Abbildungen f_1 oder f_2 existieren, so geben Sie die darstellende Matrix dieser Abbildung bezüglich der Standardbasen $\{e_1, e_2\}$ und $\{e_1, e_2\}$ an, wobei $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$!

(d) Berechnen Sie das Matritzenprodukt $A \cdot B$ für folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Matrizen *Wenn z.B. ein Roboterarm eine Drehung um 180 Grad um eine gewisse Achse ausführt, dann eine Rotation um eine andere Achse, und Sie wissen wollen, wo der Greifer des Arms am Ende herauskommt, dann können Sie die zwei Matrizen multiplizieren.*

(a) Geben Sie die Matrizen für folgende lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an:

- die Spiegelung f an der x-Achse
- die Spiegelung g an der y-Achse.

(b) die Spiegelung an der x-Achse gefolgt von der Spiegelung an der y-Achse.