Eisenreich/Hartmann/Sagraloff/Schröter

Lösungsskizzen zur Übung „Mathematik I"

Präsenzaufgabe. (a) Die Definitionsmenge hat vier Elemente: $\{0,2\}^2 = \{(0,0),(0,2),(2,0),(2,2)\}$, $f(0,0) = 0, f(0,2) = 2, f(2,0) = 4, f(2,2) = 6$. Die Abbildung ist injektiv, weil alle Elemente der Definitionsmenge unterschiedliche Bilder haben. Die Abbildung ist surjektiv, weil jedes Element in der Zielmenge $\{2x|x \in \{0,1,2,3\}\} = \{0,2,4,6\}$ ein Urbild hat. Da f injektiv und surjektiv ist, ist f auch bijektiv.

(b)
- $C \wedge A$
- $A \to B$
- $A \to \neg B$
- $((A \to B) \wedge A) \to B$

Aufgabe 1. Abbildungen

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 3$.

(b) Seien die Mengen A und B durch $A := \{\alpha, \beta, \gamma\}$ und $B := \{1,2,3,4,5\}$ definiert. Begründen Sie, warum keine Abbildung $A \to B$ surjektiv sein kann!

(c) Seien $f : M \mapsto N$ und $g : N \mapsto S$ Abbildungen. Beweisen Sie: Sind f und g surjektiv (bzw. injektiv), so ist auch $g \circ f$ surjektiv (bzw. injektiv).

Lösung 1. (Abbildungen)

(a)
- Bild: $\mathrm{im} f = \mathbb{R}_{\geq 3}$: Ist $y \in \mathbb{R}_{\geq 3}$, so ist $y - 3 \geq 0$ und wir können die Wurzel ziehen, also ist $x = \sqrt{(y-3)}$ ein Urbild von y. Ist $y \notin \mathbb{R}_{\geq 3}$, dann ist $y - 3 < 0$ und die Gleichung $x^2 = y - 3$ hat keine Lösung.
- nicht surjektiv: zum Beispiel gibt es kein Urbild von $0 \in \mathbb{R}$, da $x^2 + 3 = 0$ keine Lösung hat.
- nicht injektiv, da z.B. $f(-1) = f(1) = 1 - 3 = -2$, -2 hat also zwei Urbilder.

(b) Das Bild $f(A) = \{f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)\}$ besitzt höchstens drei verschiedene Elemente. Da die Zielmenge V jedoch aus 5 verschiedenen Elementen besteht, gibt es mindestens zwei Elemente in $B \backslash f(A)$. Diese beiden Elemente besitzen kein Urbild, daher ist f nicht surjektiv.

(c)
- $g \circ f$ ist surjektiv: Sei $z \in S$ Dann gibt es ein $y \in N$ mit $g(y) = z$. Weiter gibt es ein $x \in M$ mit $f(x) = y$. Dann ist $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ also ist x Urbild von z.
- $g \circ f$ ist injektiv: Seien $x, y \in M$. Weil f injektiv ist, ist $f(x) \neq f(y)$. Weil g injektiv ist, ist deswegen $g(f(x)) \neq g(f(y)$, das heißt $(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y)$.

Aufgabe 2. Mächtigkeit von Mengen Geben Sie die Mächtigkeit folgender Mengen an:

(a)
- $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und M_1^2
- $M_2 = \bigcup_{i \in M_1} \{i, i+1, i+2\}$
- $M_3 = P(\{1\}), M_4 = P(\{\varnothing, \{1\}\})$ und $M_5 = P(\{1, 2, 3\})$.

(b) Sei S die Menge aller *endlichen* Strings, die sich aus 0-en und 1-en bilden lassen, d.h.

$$L = \{b_1 \dots b_k | b_i \in \{0, 1\} \text{ und } k \in \mathbb{N}\}$$

Zeigen Sie, dass L die gleiche Mächtigkeit wie die Menge der natürlichen Zahlen hat. (Hinweis: überlegen Sie, wie man die Elemente von L in einer Liste aufschreiben kann!)

Lösung 2.

(a)
- $|M_1| = 7$, $|M_1^2| = 7^2 = 49$
- $M_2 = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5\} \cup \ldots \cup \{7, 8, 9\} = \{1, 2, \ldots, 9\} \Rightarrow |M_2| = 9$.
- $M_3 = \{\varnothing, \{1\}\} \Rightarrow |M_3| = 2, M_4 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{1\}, M\} \Rightarrow |M_4| = 4; M_5 = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \Rightarrow |M_5| = 8$.

(b) Alle Strings aus L lassen sich in einer definierten Reihenfolge hinschreiben, z.B.:

$$0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, ...$$

und damit lässt sich die Menge der Strings durchnummerieren. Wir bezeichnen die Strings in der Liste mit $a_1, a_2, \ldots$, das heißt $L = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{N} \to L, n \mapsto a_n$. Diese Abbildung ist bijektiv, deswegen hat L die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$.

Aufgabe 3. Logik

(a) Ist die folgende Aussage eine Tautologie? Begründen Sie Ihre Behauptung.

$$((A \to B) \wedge A) \to B$$

(b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussageformeln gleichwertig sind:

$$A \wedge (B \vee \neg A) \text{ und } (A \wedge B) \wedge (B \vee \neg B)$$

(c) Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- $\forall x \in \mathbb{N}: \quad x > 0$
- $\exists x \in \mathbb{N}: \quad -x > 0$
- $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad y - x$ ist eine Primzahl
- $\forall y \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{N} \quad y - x$ ist eine Primzahl
- $\exists x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad y - x \geq 0$
- $\exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad y - x \geq 0$

Lösung 3.

(a) Ja. Begründung: Komplette Wahrheitstabelle, oder: Wegen der Wahrheitstabelle von $\rightarrow$ kann die Aussage nur dann falsch sein, wenn B falsch ist und $((A \rightarrow B) \wedge A)$ zugleich wahr ist. Das kann aber nicht sein:

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge A$
w	f	f	f
f	f	w	f

Deswegen ist $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$ immer wahr, also Tautologie.

(b) Das machen wir mit einer Wahrheitstafel mit 4 Zeilen. Sie können die Formeln vollständig auswerten, man kann es aber auch etwas verkürzen: $B \vee \neg B$ ist immer wahr. Die rechte Formel ist also gleichwertig zu $A \wedge B$. Werten wir die linke Formel aus und vergleichen sie mit $A \wedge B$:

A	B	$B \vee \neg A$	$A \wedge (B \vee \neg A)$	$A \wedge B$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	f	f
f	f	w	f	f

Damit sind die beiden Formeln gleichwertig.

(c)
- wahr, da alle natürlichen Zahlen positiv sind.
- falsch, da es keine negative natürliche Zahl gibt.
- wahr, z.B. $y = x + 2$
- falsch, z.B. $y = 1$, dann ist $y - x \leq 0$ keine Primzahl
- wahr für $x = 1$
- falsch, weil für jedes $y \in \mathbb{N}$ für $x = y + 1$ gilt: $y - x = -1 < 0$

Aufgabe 4. Beweisarten Beweisen Sie die Aussage "Die Summer zweier ungerader Zahlen ist gerade." mit folgenden Beweisarten:

(a) direkter Beweis

(b) Widerspruchsbeweis

Lösung 4. (a) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ ungerade. Dann gibt es zwei ganze Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$, so dass $a = 2k+1, b = 2l+1$. Dann gilt

$$a + b = 2k + 1 + 2l + 1 = 2k + 2l + 2 = 2 \cdot (k + l + 1)$$

$\Rightarrow a + b$ ist gerade, da durch 2 teilbar.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ ungerade. Angenommen, $a + b$ wäre eine ungerade Zahl. Dann kann man $a + b$ schreiben als $a + b = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, und da b ungerade ist, kann man es schreiben als $b = 2l + 1$ für ein $l \in \mathbb{Z}$. Dann gilt: $a = (a + b) - b = 2k + 1 - (2l + 1) = 2k - 2l = 2(k - l)$ ist gerade, im Widerspruch zur Annahme, dass a auch ungerade ist.

Aufgabe 5. Induktion Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion die Richtigkeit der foglenden Aussage für alle natürlichen Zahlen n:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Lösung 5. Induktionsanfang: $1^3 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$

Induktionsannahme: Es sei $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Induktionsschluss: Unter Verwendung der Induktionsannahme erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4} + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)$$

$$= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}{4} = \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4} = (*)$$

Jetzt rechnen wir einmal aus, was herauskommen müsste, wenn die Aussage stimmt:

$$\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \frac{(n^2+2n+1)(n^2+4n+4)}{4} =$$

$$\frac{n^4 + 4n^3 + 4n^2 + 2n^3 + 8n^2 + 8n + n^2 + 4n + 4}{4} = (*)$$

Durch Vergleich stellen Sie fest, dass die beiden Brüche übereinstimmen. Damit ist $A(n+1)$ wahr.