04.12.23 ①

Vektorräume:

z.B. $\mathbb{R}[X]$ $\quad \pi \cdot x^2 + 2.3 \cdot x - 10 = f(x)$

- $(\mathbb{R}[x], +)$ ist eine Gruppe

  Polynome kann man addieren

  z.B. $p(x) = x^2 - 0{,}5x \qquad g(x) = x^{10} + 2x^8 + 0{,}5 \cdot x + 1$

  $\longrightarrow p(x) + g(x) = x^{10} + 2x^8 + 1$

  Inverses von $p(x)$: $-p(x)$ ...

- Skalarmultiplikation: z.B. $5 \cdot p(x) = \underline{5}x^2 - \underline{2{,}5}x$

$\Rightarrow$ $\underline{\mathbb{R}[x]}$ ist ein Vektorraum!

$\Downarrow$

Polynome = Vektoren.

- $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ = Polynome vom Grad $\leq d$.

  sind ein Vektorraum.

  - Addition von zwei Polynomen vom Grad $\leq d$
    ist wieder ein Polynom —"—

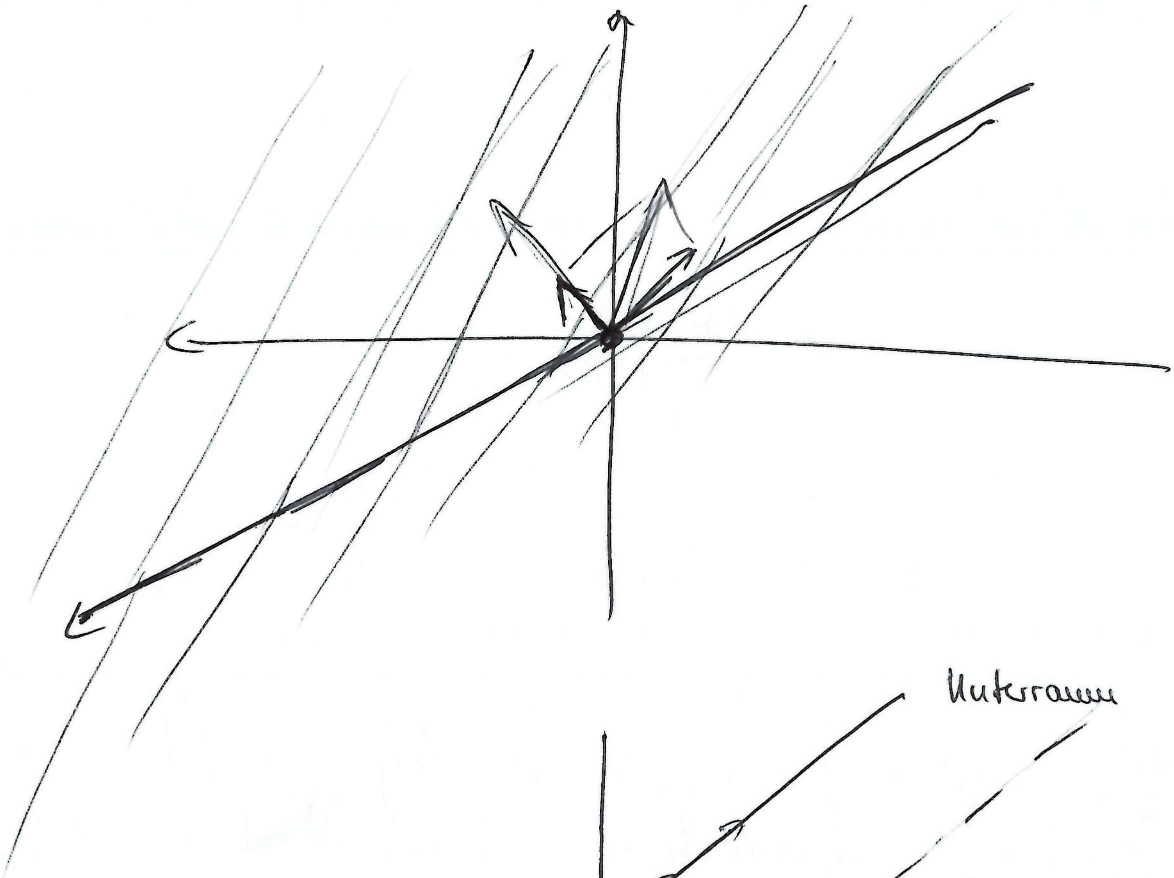
  - Multipliziert man ein Polynom vom Grad $\leq d$ mit einer reellen Zahl durch (Skalarmultiplikation) dann bekommt man wieder eins vom Grad $\leq d$ ✓

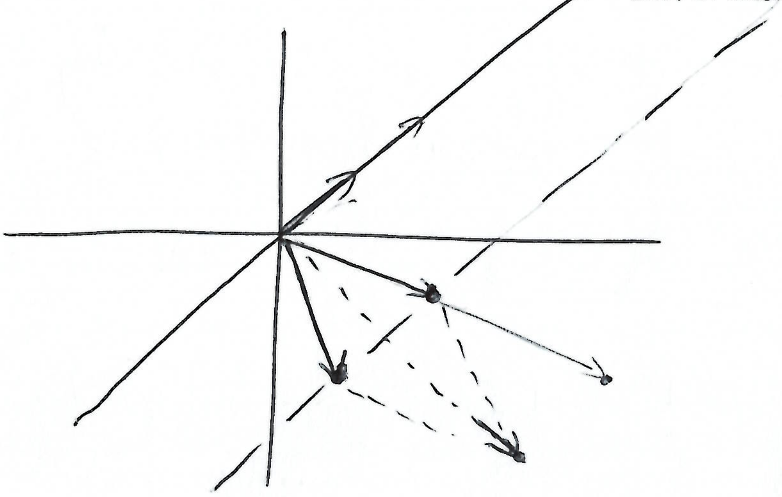
$p(x) = 4 \cdot x^2 + 2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$p(2) = 4 \cdot 2^2 + 2 \qquad g(2) = p(2)$

$g(x) = x^4 + 2$

$$p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto p(x) = 4x^2 + 2$$

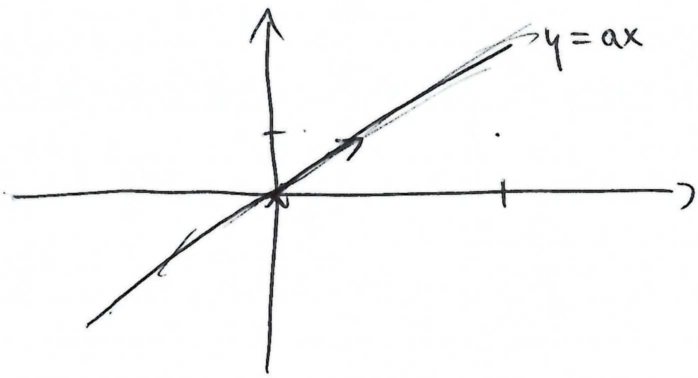




im $\mathbb{R}$:

2 Unterräume: $\{\vec{0}\}$
$\mathbb{R}$

im $\mathbb{R}^2$:



- $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$
- 1-dimensionale Unterräume:
  z.B. x-Achse $\cong \mathbb{R}$
  y-Achse

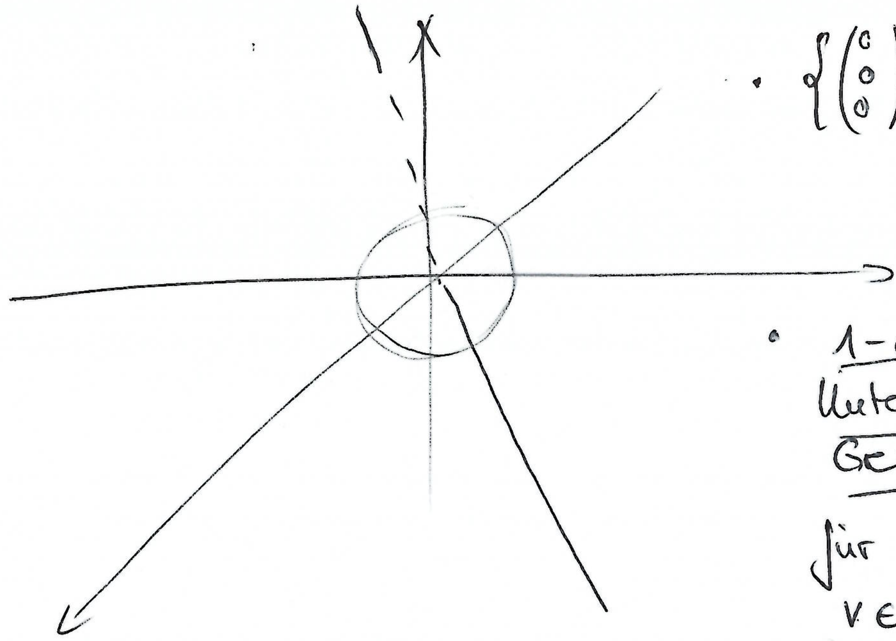
jede Gerade durch den Nullpunkt:

$y = ax$ $\quad \begin{pmatrix}x\\ax\end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$

für $x \in \mathbb{R}$.

und $\mathbb{R}^2$.

im $\mathbb{R}^3$:

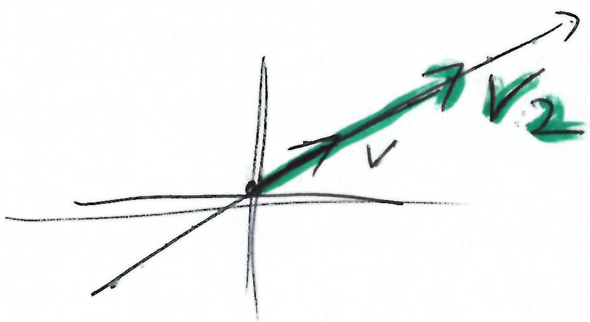


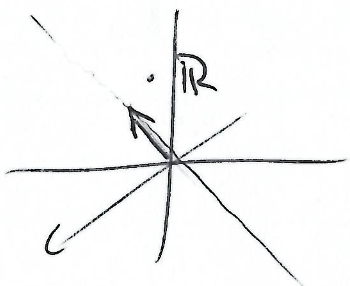
- $\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}$

- 1-dimensionale Unterräume: Geraden $= v \cdot \mathbb{R} = \mathrm{Span}(v)$ für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$

eine Gerade ist gegeben durch $\mathbb{R} \cdot v$ für ein $v \in \mathbb{R}^3$ z.B. $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \cdot \mathbb{R} = \begin{pmatrix}1\\0\\-0{,}5\end{pmatrix} \cdot \mathbb{R} = \underline{\mathrm{Span}} \begin{pmatrix}1\\0\\-0{,}5\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \mathbb{R} = \begin{pmatrix}\pi\\\pi\\\pi\end{pmatrix} \cdot \mathbb{R} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \cdot \mathbb{R} = \begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix} \cdot \mathbb{R}$$





- 2-dimensionalen Unterräume: Ebenen durch den Nullvektor. $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ mit $v_1 \neq \lambda v_2$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.
  bzw. v_1, v_2 nicht parallel.

$\to$ Ebene, die durch v_1, v_2 aufgespannt wird

$$E = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid a \cdot v_1 + b \cdot v_2 = v,\ a, b \in \mathbb{R} \} = \boxed{\mathrm{Span}(v_1, v_2)}$$

$\cancel{\lambda_1 v_1}$

Sind $v_1, \dots, v_n$ lin. (un)abhängig?

$\boxed{v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n} \quad | - v_1$ Gleichungssystem

$\to$ Löse für $\lambda_2, \dots, \lambda_n$.

z. B. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

linear abhängig

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 2\lambda_1 + \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 \\ 1 &= 0 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 + 1 \cdot \lambda_3 \\ 1 &= 2\lambda_1 + \lambda_2 + 0 \end{aligned}\right\}$$ 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten.

$(\mathrm{III}) \Leftrightarrow \lambda_2 = 1 - 2\lambda_1$ in (I) und (II).

(I) $1 = 2\lambda_1 + 1 - 2\lambda_1 = 1$

(II) $1 = 1 - 2\lambda_1 + \lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = 2\lambda_1$

$\quad / -1 + 2\lambda_1$

z. B. für $\lambda_1 = 1$:

$\Rightarrow$ Lösungsmenge $\cancel{\lambda_1}$ $\lambda_2 = 1 - 2\lambda_1$ $\quad \lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = 2\lambda_1 \quad \lambda_3 = 2$

Augenommen v_1 lin. abh. von $v_2, \dots, v_n$

$\to v_1 = \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ für gewisse $\lambda_2, \dots, \lambda_n$.

$\Rightarrow 0 = -v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ $\quad \lambda_1 = -1 \neq 0$.

$\Rightarrow 0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n v_n$, mit nicht allen $\lambda_i = 0$.

~~Wenn v_1 lin. unabh. ist von $v_2, \dots, v_n$ dann hat die Gleichung $0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ zwar die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$~~

Wenn v_1 lin. unabh. ist von $v_2, \dots, v_n$, dann betrachten wir das lin. Gleichungssystem

$\underline{\lambda_1} \cdot v_1 + \underline{\lambda_2} \cdot v_2 + \dots + \underline{\lambda_n} \cdot v_n = 0$ mit <u>Variablen</u> $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

Eine Lösung für $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Gibt es eine andere Lsg? d.h. eine Lösung mit einem $\lambda_i \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \cdot v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_i} \cdot v_2 + \dots \underbrace{\frac{\lambda_i}{\lambda_i}}_{=1} v_i + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_i} \cdot v_n = 0 \quad \Big/ -v_i \quad \cdot(-1)$$

$$\Rightarrow v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \cdot v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i} \cdot v_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} \cdot v_n$$

Widerspruch zur Annahme dass ~~alle~~ $v_1, \dots v_n$ linear unabh. sind!

$\Rightarrow$ es gibt <u>keine</u> Lösung außer $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

<u>Zusammengefasst:</u>

- Wenn $v_1, \dots, v_n$ <u>lin. abh.</u> sind, dann hat die Gleichung $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0$ eine Lösung für $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ <u>außer</u> $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$
- Wenn $v_1, \dots, v_n$ <u>linear unabhängig</u> sind, dann hat die Gleichung $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0$ <u>nur</u> die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

<u>Basis des $\mathbb{R}^3$</u>: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Beispiele zu lin. Abhängigkeit:

- $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$0 = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & 0 = 2\cdot\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 + 4\cdot\lambda_3 \\ (\mathrm{II}) & 0 = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \\ (\mathrm{III}) & 0 = 0 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Löse dieses lineare Gleichungssystem}$$

($\rightarrow$ Eine ~~Die~~ Lösung ist $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = (-1)$.

$\Rightarrow$ v_1, v_2, v_3 sind linear)

$(\mathrm{III}) \Rightarrow \lambda_2 = -2\lambda_3$ in (I) $0 = 2\cdot\lambda_1 - 2\lambda_3 + 4\lambda_3 =$

$= 2\lambda_1 + 2\lambda_3 = 2(\lambda_1 + \lambda_3)$

$\Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_3$

in (II) $0 = \lambda_1 + 2\lambda_3 - \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_3$

$\Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_3$

$\Rightarrow$ Die Lösungsmenge ist $\{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-\lambda_3, -2\lambda_3, \lambda_3) \mid \lambda_3 \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda_3 \,\middle|\, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$

Da die Lösungsmenge $\neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist, sind v_1, v_2, v_3 linear abhängig.

$\Rightarrow \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ hat Dimension ≤ 2

$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$.

Aber: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind nicht linear abhängig weil sie keine Vielfachen voneinander sind

$\Rightarrow \dim \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = 2$.

- $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$:

  $p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$

  $v_1 = 1 \quad v_2 = x \quad v_3 = x^2$ ist eine Basis von V

  - V ist die Menge der Linearkomb. von $1, x, x^2$

    $\rightarrow 1, x, x^2$ <u>erzeugt</u> V $\quad (\mathrm{Span}(1, x, x^2) = V)$

  - v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig

    $0 = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 v_3$

    $= \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2$

    Dies ist nur mögl. wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

- $\dim \mathbb{R}[x]_{\leq 5} = 6$

- $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$ mit Basis: $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, \ldots$

- $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \quad v_1 = x^2 \quad v_2 = x(1-x) \quad v_3 = (1-x)^2$

  v_1, v_2, v_3 lin. unabhängig?

  $0 = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 (x - x^2) + \lambda_3 \cdot (1 - 2x + x^2)$

  $\cancel{= \lambda_1 x^2 + \lambda_2 \, 2x}$ $\quad \ldots$ ausrechnen

  $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ist die einzige Lösung

---

- Basis von $\mathbb{R}^2$: z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  von $\mathbb{R}^3$ z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  von $\mathbb{R}^n$ z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

z. B. $\mathbb{R}^3$.

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig
(kein Vielfaches von einander)

Man findet einen dritten Vektor, der die zwei zu einer Basis ergänzt., z. B.

$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.