Mathematik I

Vorlesung 8 - Vektorräume

Prof. Dr. Sandra Eisenreich

23. Oktober 2023

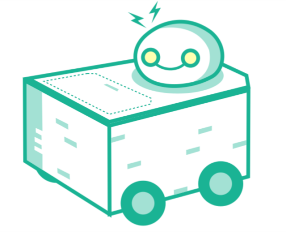
Hochschule Landshut

8.1 Vektorräume, Unterräume

Motivation und Anwendung in der Informatik

Raum, in dem wir uns bewegen: $\mathbb{R}^3$; dies ist ein **Vektorraum**.
Anwendungen in der Industrie spielen sich in ganz vielen Fällen im $\mathbb{R}^3$ ab, wo z.B. Koordinaten von Bauteilen erfasst werden, um festzustellen, ob es Qualitätsmängel oder Abweichungen gibt; Roboter bewegen sich im $\mathbb{R}^3$, autonome Logistik-Fahrzeuge ebenso,. . . . 3D-Game-Engines, etc etc. Und: schon mal was von "Vektorisierung" beim Programmieren gehört...?

Quelle: Wikimedia



Quelle: Wikimedia

Definition

Sei K ein Körper. Ein K-Vektorraum V besteht aus einer additiven Gruppe $(V, +)$ (das sind die Vektoren) und einer skalaren Multiplikation:

$$\begin{aligned} \cdot: \quad & K \times V \to V \\ & (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v, \end{aligned}$$

so dass für alle $\lambda, \mu \in K$ und $v, w \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} (V1) \quad & \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v \\ (V2) \quad & 1 \cdot v = v \\ (V3) \quad & \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \\ (V4) \quad & (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \end{aligned}$$

Bezeichnungen:

$0 \in K$ ist die 0 im Körper K

$\vec{0} \in V$ ist das neutrale Element in V. häufig schreibt man auch $\vec{0} = 0$.

Satz (Rechenregeln)

$(V5)$ $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ *für alle* $\lambda \in K$

$(V6)$ $0 \cdot v = \vec{0}$ *für alle* $v \in V$

$(V7)$ $(-1) \cdot v = -v$

$(V5)$ – $(V7)$ können aus $(V1)$ – $(V4)$ hergeleitet werden.

Beispiel: $\mathbb{R}^n$

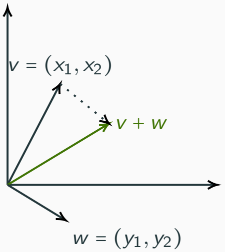
Satz

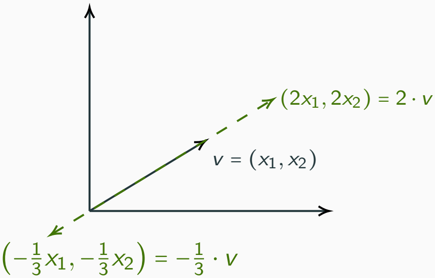
Für $n = 1, 2, 3, \dots$ ist $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n\}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, wobei

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &:= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\\ \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) &:= (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda x_n)\end{aligned}$$

Man prüft nun leicht nach, dass $(\mathbb{R}^n, +)$ eine Gruppe ist. Das Nullelement ist $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ und die Skalarmultiplikation erfüllt $V1 - V4$. In Zukunft schreiben wir Elemente des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ als **Spaltenvektoren**, d.h. wir schreiben $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ anstatt $(x_1, \dots, x_n)$.

- Ein Element $v = (x_1, x_2)$ kann als Punkt im $\mathbb{R}^2$ mit Koordinaten x_1 und x_2 aufgefasst werden, aber auch als Pfeil (Vektor) vom Ursprung zum Punkt (x_1, x_2).
- Addition zweier Vektoren ist das Aneinandersetzen der einzelnen Vektoren
- Skalare Multiplikation mit λ entspricht einer Verlängerung/Verkürzung des Vektors v um Faktor $|\lambda|$. Ist $\lambda > 0$, dann zeigt $\lambda \cdot v$ in die gleiche Richtung wie v, sonst in die Gegenrichtung.





Beispiel: K^n

Satz

Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und jeden Körper K ist der Raum $K^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in K \, \forall \, i = 1, \ldots, n\}$ ein K-Vektorraum, wobei

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) &:= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) &:= (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda x_n) \text{ für } \lambda \in K \end{aligned}$$

Beispiel:

- $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \{(a + ib, c + id) | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$
- $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) | \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\}$, ein Vektor darin wäre zum Beispiel $(\overline{2}, \overline{0}, \overline{3})$. Dieser Vektorraum enthält $5 \cdot 5 \cdot 5$ Elemente.
- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$
- $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ enthält beispielsweise $3 \cdot 3 = 9$ Elemente der Form (x_1, x_2) mit $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Exemplarisch: $(\overline{0}, \overline{2}) + (\overline{2}, \overline{2}) = (\overline{2}, \overline{1})$, und $\overline{2} \odot (\overline{1}, \overline{2}) = (\overline{2}, \overline{1})$

Beispiel: Polynomringe

- Sei K ein Körper, dann ist der **Polynomring** $K[x]$ein K-Vektorraum. (Man kann Polynome addieren und mit beliebigen Elementen von K durchmultiplizieren).
- Auch die **Menge** $K[x]_{\leq d}$ **aller Polynome von Grad** d **oder weniger** ist ein K-Vektorraum: Beachte, dass mit $p, q \in K[x]_{\leq d}$ auch $p + q \in K[x]_{\leq d}$ und $\lambda \cdot p \in K[x]_{\leq d}$ für alle $\lambda \in K$ gilt.
- Die Menge M aller Abbildungen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ist ein $\mathbb{Q}$–Vektorraum:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

Der Nullvektor in M ist die Abbildung f mit $f(x) = 0$ für alle x.

Unterräume eine Vektorraums

Definition

Ist V ein K-Vektorraum und $U \subset V$, und U selbst ein K-Vektorraum, so heißt U ein **Unterraum oder Untervektorraum von** V.

Ob eine Teilmenge $U \subset V$ ein Unterraum ist, lässt sich wie folgt feststellen:

Satz

Ist V ein K-Vektorraum, $U \subset V$, dann ist U ein Unterraum von V, wenn gilt:

(U1) Abgeschlossenheit bzgl. Addition: $u + v \in U$ für alle $u, v \in U$

(U2) Abgeschlosenheit bzgl. Skalarmultiplikation: $\lambda \cdot u \in U$ für alle $u \in U$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Bemerkung: Wegen $0 \cdot u = \vec{0}$ muss jeder Unterraum von V auch den Nullvektor enthalten.

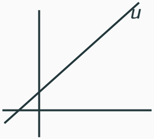
Unterräume von $\mathbb{R}^2$

Satz

Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $U \subset V$ ein Unterraum. Es gibt nur 3 verschiedene Arten von Unterräumen von $\mathbb{R}^2$:

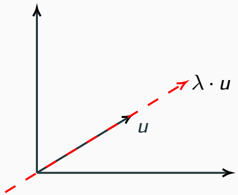
- *Nullvektor: $U = \{\vec{0}\}$ (der einfachste Vektorraum).*
- *Geraden durch den Nullpunkt: $U = \{\lambda \cdot u_1 | \lambda \in \mathbb{R}\}$ für ein $u_1 \neq 0$ in $\mathbb{R}^2$.*
- *der ganze Raum $U = \mathbb{R}^2$.*

Beachte: Eine Gerade U, die nicht durch den Ursprung geht, ist kein Unterraum.



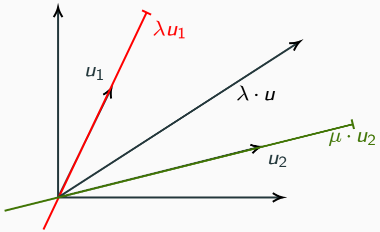
Beweis. 1.Fall: $U = \{\vec{0}\}$. Dies ist ein Untervektorraum.

Wenn $U \neq \{\vec{0}\}$ ist, dann gibt es ein $u_1 \in U$ mit $u_1 \neq \vec{0}$. Wegen (U2) müssen auch alle Vielfachen $\lambda \cdot u_1$ von u_1 in U liegen. Somit ist die gesamte Gerade durch den Nullpunkt in Richtung u_1 in U enthalten.



2. Fall: Es gibt keinen weiteren Vektor $u_2 \in U$, der nicht ein Vielfaches von u_1 ist. Dann gilt: $U = \{\lambda \cdot u_1 | \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist eine Gerade durch den Nullpunkt.

3. Fall: Es gibt einen weiteren Vektor $u_2 \in U$, der kein Vielfaches von u_1 ist. (u_1 und u_2 zeigen in unterschiedliche Richtungen). Dann gilt wegen U2, dass auch alle Vielfachen $\lambda \cdot u_1$ und alle Vielfachen $\mu \cdot u_2$ in U liegen, und wegen U1, dass alle Elemente $\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2$ in U liegen. Da sich jedes Element in $\mathbb{R}^2$ als $\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2$ für gewisse λ und μ schreiben lässt, gilt also $U = V$.

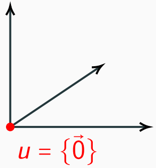


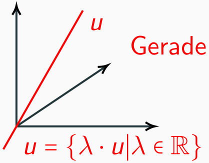
Unterräume von $\mathbb{R}^n$ (z.B. $\mathbb{R}^3$)

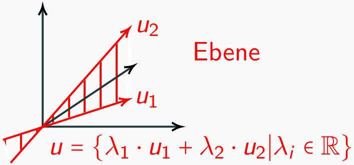
Satz

Es gibt nur (n+1) verschiedene Arten von Unterräumen U von $\mathbb{R}^n$: Nullvektor $U = \{\vec{0}\}$ und:

- *Geraden durch den Nullpunkt: $U = \{\lambda \cdot u_1 | \lambda \in \mathbb{R}\}$ für ein $u_1 \neq 0$ in $\mathbb{R}^2$.*
- *Ebenen, die von zwei nicht-parallelen Vektoren u_1, u_2 aufgespannt weren:*
  $U = \{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 u_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ ("Linearkombinationen von u_1, u_2")
- *dreidimensionale Räume, die von einer Ebene wie oben (mit Vektoren u_1, u_2) und einem zusätzlichen Vektor u_3 aufgespannt werden, der nicht in der Ebene liegt:*
  $U = \{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 | \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$ ("Linearkombinationen von u_1, u_2, u_3")
- *etc...*







Motivation Linearkombination, lineare Unabhängigkeit

Auf den letzten Folien haben wir gesehen, dass zwei Dinge für Unterräume wichtig sind: Räume, die aufgespannt werden von unterschiedlich vielen Vektoren (das nennt man den **Span** dieser Vektoren), das heißt dass jeder Vektor v in diesem Unterraum geschrieben werden kann als Summe von Vielfachen dieser Vektoren:

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

So etwas nennt man **Linearkombination**. Außerdem haben wir gesehen, dass eine zusätzliche "Dimension" (wir kennen den Begriff offiziel noch nicht, aber bei $\mathbb{R}$ können wir es uns vorstellen) durch einen zusätzlichen Vektor nur dazukommt, wenn er nicht in dem Raum liegt, der von den bisherigen aufgespannt wird - dass er also nicht geschrieben werden kann als so eine Linearkombination wie oben. Man sagt, so ein Vektor ist **linear unabhängig** von den anderen Vektoren.

Wenn wir also Begriffe wie Dimensionen von Unterräumen betrachten wollen, müssen wir uns mit diesen Begriffen auseinandersetzen.

Linearkombinationen

Wir möchten unsere Ergebnisse in $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern:

Satz/Definition

Sei V ein K-Vektorraum, $v_1, \ldots v_n \in V$. für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ heißt die Summe

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n$$

Linearkombination *von $v_1, \ldots, v_n$. Wir bezeichnen die Menge aller Linearkombinationen von $v_1, \ldots v_n$ mit* **Span**$(v_1, \ldots, v_n)$ *und schreiben auch:*

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle := Span(v_1, \ldots, v_n) := \{\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n v_n | \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\}$$

Satz: $\langle v_1, \ldots v_n \rangle$ *ist ein Unterraum von V.*

Beispiel: Eine Gerade in $\mathbb{R}^n$ ist der Span von einen Vektor, eine Ebene in $\mathbb{R}^n$ der Span von zwei Vektoren, etc.

8.2 Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension

Lineare Unabhängigkeit eines Vektors von anderen Vektoren

Definition

Sei V ein K-Vektorraum, $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann heißt $v \in V$ **linear abhängig** von $v_1, \dots, v_n \in V$, falls

$$v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$$

Das ist gleichbedeutend dazu, dass v eine Linearkombination der anderen Vektoren ist, d.h. v ist linear abhängig von $v_1, \dots, v_n$ genau dann wenn man v schreiben kann als

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n v_n \text{ für gewisse } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K)$$

Gilt $v \notin \langle v_1, \dots v_n \rangle$, so sagen wir, dass v **linear unabhängig** von $v_1, \dots, v_n$ ist.

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren untereinander

Definition

Sei V ein K-Vektorraum. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen **linear abhängig**, falls es ein i gibt mit

$$v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$$

Ansonsten heißen die Vektoren $v_1, \ldots v_n$ **linear unabhängig**.

Satz

Rechenregel zum Überprüfen von Linearer Abhängigkeit: *Die Vektoren $v_1, \ldots v_n$ sind genau dann linear unabhängig, falls aus der Gleichung*

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = \vec{0}$$

folgt, dass

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Gibt es eine Nicht-Null-Lösung, so sind sie linear abhängig. Also: Überprüfen von linearer Abhängigkeit $=$ Lösen eines Linearen Gleichungssystems!

Beispiele

- Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3 = \vec{0},$$

also sind die Vektoren linear abhängig. v_1 und v_2 sind aber linear unabhängig, da aus

$$\lambda_i \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 = \vec{0}$$

folgt, dass
$2 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 = 0$,
$1 \cdot \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ und
$0 + \lambda_2 = 0$
Hier gibt es nur eine Lösung, nämlich $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

- Sie $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ und
$$v_1 = x^2,$$
$$v_2 = x \cdot (1 - x),$$
und
$$v_3 = (1 - x)^2$$
. Um herauszufinden, ob v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, betrachten wir

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 &= 0 \quad = \text{Nullpolynom} \\ \Rightarrow \lambda_1 \cdot x^2 + \lambda_2 x(1-x) + \lambda_3 \cdot (1-x)^2 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_3 + (\lambda_2 - 2\lambda_3) \cdot x + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) \cdot x^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 & = & 0 \\ \text{und } \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 = 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

Somit sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

Basis und Dimension von Vektorräumen

Definition

Eine Teilmenge B des Vektorraums V heißt Basis von V, wenn gilt

(B1) $\mathrm{Span}(B) = V$ (d.h. B erzeugt V)

(B2) Die Vektoren in B sind alle linear unabhängig.

Beispiel:

- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^2$, da beide Vektoren linear unabhängig sind, und für jeden Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt, dass
$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Standardbasis des K^n

Satz/Definition

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist eine Basis von K^n für einen Körper K. Die Basis B heißt **Standardbasis**. *Der i–te Vektor*

$$e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit 1 an der i-ten Stelle heißt i-**ter Einheitsvektor**.

Beispiel: Standardbasis des $\mathbb{R}^3$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ (Einheitsvektoren Richtung $x-$, $y-$, und $z-$Achse).

- Die Einheitsvektoren **erzeugen** den $\mathbb{R}^3$, d.h. man kann jeden Vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ schreiben als Linearkombination davon:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **linear unabhängig**: Das zeigen wir der Rechenregel. Wir betrachten die Gleichung

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt sofort: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, deswegen sind die Vektoren linear unabhängig.

Weitere Basis des $\mathbb{R}^3$

$$B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Schritt: zu zeigen: v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig. Das machen wir mit der Rechenregel. Wir betrachten also die Gleichung

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das entspricht dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} (I) & 1 \cdot \lambda_1 & + & 0 \cdot \lambda_2 & + & 1 \cdot \lambda_3 & = & 0 \\ (II) & 0 \cdot \lambda_1 & + & 1 \cdot \lambda_2 & + & 1 \cdot \lambda_3 & = & 0 \\ (III) & 1 \cdot \lambda_1 & + & 0 \cdot \lambda_2 & + & 0 \cdot \lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

$(III) \Rightarrow \lambda_1 = 0$, das in (I) eingesetzt liefert $\lambda_3 = 0$, das in (II) eingesetzt ergibt: $\lambda_2 = 0$.
$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ sind linear unabhängig.

2. Schritt: (mit ein wenig Theorie können wir uns den bald sparen) zu zeigen: v_1, v_2, v_3 erzeugen den $\mathbb{R}^3$, das heißt man kann jeden Vektor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ schreiben als eine Linearkombination von diesen dreien, also also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das liefert wieder ein lineares Gleichungssystem und wir müssen es für beliebige x, y, z nach λ_1, λ_2 und λ_3 auflösen. zusätzliche Übungsaufgabe für zu Hause!
Resultat: $\lambda_1 = z, \lambda_2 = -x + y + z, \lambda_3 = x - z$. Da es eine Lösung für alle x, y und z gibt, erzeugen die drei Vektoren den $\mathbb{R}^3$.

Weitere (Gegen)Beispiele von Basen:

- $B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist keine Basis des $\mathbb{R}^3$.
  - Es gilt zwar $\text{Span}(B) = \mathbb{R}^3$, also die Vektoren **erzeugen** $\mathbb{R}^3$. (warum? → siehe Übungsblatt! Geht wie zuvor mit einem linearen Gleichungssystem)
  - aber die Vektoren in B sind **linear abhängig**. Begründung: Dazu löst man das lineare Gleichungssystem $v_1 = \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$ nach $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ auf (Zusatz-Übungsaufgabe!) und erhält:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 \in \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$$
- $B = \{1, x, x^2\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ (siehe Übungsblatt)

Es stellen sich nun folgende Fragen:

- Hat jeder Vektorraum eine Basis?
- Haben zwei verschiedene Basen gleich viele Elemente?

Die Antwort liefert der folgende Satz, den wir hier nicht beweisen:

Satz

Jeder Vektorraum hat eine Basis. Je zwei Basen eines Vektorraums haben gleich viele Elemente.

Definition

Hat eine Vektorraum eine endliche Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, dann nennen wir n die **Dimension von** V. Gibt es keine endliche Basis, so ist B **unedlichdimensional**. Man schreibt $n = \dim V$.

Beispiele

- für $V = \mathbb{R}^n$ ist $\dim V = n$ Wir haben gesehen, dass alle Unterräume von $\mathbb{R}^n$ Geraden, Ebenen, ... sind. Diese werden jeweils von $1, 2, 3, \ldots$ linear unabhängigen Vektoren aufgespannt. Es gibt somit zu jedem $k \in \{1, \ldots, n\}$ einen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^n$ der Dimension k. Der Unterraum $U = \{0\}$ hat Dimension 0.
- Der Vektorraum $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ wird von den Elemente $1, x, x^2, \ldots, x^n$ aufgespannt. Da diese auch linear unabhängig sind, gilt $\dim \mathbb{R}[x]_{\leq n} = n + 1$.
  Der Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ ist unendlichdimensional, da $\langle p_1, \ldots p_n \rangle$ kein Polynom enthalten kann, dessen Grad Größer ist als $\max_i \deg p_i$.
  $\Rightarrow \mathbb{R}[x] \neq \langle p_1, \ldots, p_n \rangle$

Basisergänzungssatz

Satz (Basisergänzungssatz)

Seien V ein n-dimensionaler Vektorraum, und $v_1, \dots, v_m$ linear unabhängige Vektoren. Dann kann man $v_1, \dots, v_m$ mit Vektoren $v_{m+1}, \dots, v_n$ ergänzen, so dass $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V ist.

Beweisskizze:

Gilt $\langle v_1, \dots v_m \rangle \neq V$, dann kann man ein $v_{m+1} \in V \backslash \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ finden. Die Vektoren $v_1, \dots, v_{m+1}$ sind dann auch linear unabhängig. Durch analoge Vorgehensweise erhalt man so Vektoren $v_{m+1}, \dots, v_n$ bis schließlich $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$. Dann ist $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis. ∎

Motivation - Koordinaten

Wir sagen im $\mathbb{R}^3$ bei einem Vektor $v = (1, 2, 3)$, dass er die **Koordinaten** $1, 2$ und 3 hat. Das ist tatsächlich etwas ungenau. Eigentlich müsste man sagen, er hat die Koordinaten 1,2, und 3 **bezüglich der Standardbasis**, weil

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Andererseits ist eine andere Basis des $\mathbb{R}^3$ gegeben durch:

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \right\} \text{ und es gilt}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Dann sind **bezüglich dieser Basis die Koordinaten nun** $1, -1$**, und** $\frac{1}{2}$**.**

Motivation - Koordinatendarstellung bezüglich anderer Basen

Bisher haben wir die Darstellung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

also als Koordinatendarstellung gelesen. Aber wie schreiben wir den Vektor, wenn wir eine andere Basis als die Standardbasis zugrunde liegen haben?

In der Basis B sind die Koordinaten $1, -1$, und $\frac{1}{2}$, also sollten wir den Vektor schreiben als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

aber das wäre verwirrend... deswegen schreibt man einen Index B mit zum Vektor:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_B$$

Satz/Definition

Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis das K-Vektorraums V. Dann gibt es für jedes $v \in V$ Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so dass

$$v = \lambda_1 \cdot b_1 + \ldots + \lambda_n b_n.$$

Die Elemente λ_i sind eindeutig bestimmt. Wir nennen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die **Koordinaten von** V **bzgl.** *B und schreiben*

$$v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B$$

Beweis.

- Die Existenz von $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ folgt aus der Tatsache, dass B eine Basis ist.
- Eindeutigkeit von $\lambda_1, \dots, \lambda_n$: Nehmen wir an, diese Linearfaktoren wären nicht eindeutig, also es gäbe $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n \in K$, so dass

  $$v = \lambda_1 \cdot b_1 + \ldots + \lambda_n \cdot b_n = \lambda'_1 \cdot b_1 + \ldots + \lambda'_n \cdot b_n.$$

  Daraus ergibt sich:

  $$0 = (\lambda_1 - \lambda'_1) \cdot b_1 + \ldots + (\lambda_n - \lambda'_n) \cdot b_n.$$

  da $b_1, \dots, b_n$ linear unabhängig sind, muss also nach der Definition von linearer Unabhängigkeit gelten: $\lambda_i - \lambda'_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, also $\lambda_i = \lambda'_i$. ∎