11.12.23

lineare Abbildungen:

$$f\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 2\cdot f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) = f\left(1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= f\left(1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) + f\left(2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) + f\left(3\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= 1\cdot f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\cdot f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 3\cdot f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}-2\\4\\100\end{pmatrix} = (-2)\cdot f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 4\cdot f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 100\cdot f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Der Wert der Abbildung auf jedem Vektor im $\mathbb{R}^3$ ist festgelegt durch die Werte von einer linearen Abb. f auf der Basis $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

z.B. Wenn ich weiß (Bsp): $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $\quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linear

$$f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-2+0\\3+2+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$$

2×3 - Matrix (2 Zeilen, 3 Spalten)

$$\begin{array}{c}\rightarrow\\\rightarrow\\ \\\end{array}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\3 & 1 & 1\end{pmatrix}\\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow\end{array}$$

Beispiel Matrix $\leftrightarrow$ lineare Abb:

Zeilen ↓ Spalten ↓

Matrix

$$\text{Mat}\, f_A = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$ } Anzahl von Zeilen $\quad A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Anzahl von Spalten

$\to$ lineare Abb.? $\quad f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f_A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix} \qquad f_A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix} \qquad f_A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix} = \ldots$$

Bsp.: lineare Abb.:

$$f_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 2x_1 - 4x_2 + 10x_3$$ linear

$$f_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 2x_1 - 4x_2 + 10x_3 + 15$$ nicht linear

$$f_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 2x_1^2 - 4x_2 + 10x_3$$ nicht linear

$f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f_4\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 2x_1^2 - 4x_2^2 + 10x_3^2$$ nicht linear

$f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f_5\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1 - 4x_2 + 10x_3 \\ -x_1 + 5x_2 - 12x_3\end{pmatrix}$$ linear

$$f_6\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 2x_1$$ linear

↓ ↓ ↓ 3 Spalten

$$\text{Mat}\, f_5 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 10 \\ -1 & 5 & -12 \end{pmatrix}$$

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lin. Abb. dargestellt durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$

$$f_5\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 1 - 4\cdot 0 + 10\cdot 0\\ -1 + 5\cdot 0 - 12\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

$$f_5\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 0 - 4\cdot 1 + 10\cdot 0\\ -0 + 5\cdot 1 - 12\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$$

$$f_5\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-12\end{pmatrix}$$

Bsp. für eine Nicht-Standard-Basis:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Augenommen wir haben eine lineare Abb. f mit: (Beispiel)

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Matrix bzgl. Standardbasis:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrix bzgl $\mathcal{B}$:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Beispiele zu Bild und Kern einer lin. Abb.:

$$f: \mathbb{R}^{3} \to \mathbb{R}^2 \quad \leftarrow \text{3-dimensional}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Kern von f:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker f \iff f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \text{(I)} & x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \text{(II)} & x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{LGS}$$

$\Leftrightarrow$ (I) $x_3 = x_1 + x_2$ $\rightarrow$ in (II): $x_1 - x_2 + 2\cdot(x_1 + x_2) = 0$

$x_1 - x_2 + 2x_1 + 2x_2 = 0$

$3x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \underline{x_2 = -3x_1}$

· in (I) $\Rightarrow x_3 = x_1 + x_2 = x_1 + (-3x_1) = \underline{-2x_1}$

x_1 ist freie Variable

$\Leftrightarrow$ $\ker f$ = Lösungsmenge $= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_2 = -3x_1,\; x_3 = -2x_1 \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -3x_1 \\ -2x_1 \end{pmatrix} \middle| \; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

= <u>Gerade</u> durch 0 in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

= Unterraum des $\mathbb{R}^3$ $\leftarrow$ eindimensional

$f(v) = 0$ $\qquad f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \underbrace{f(v)}_{=0} = 0.$

- <u>Bild von f:</u>

$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

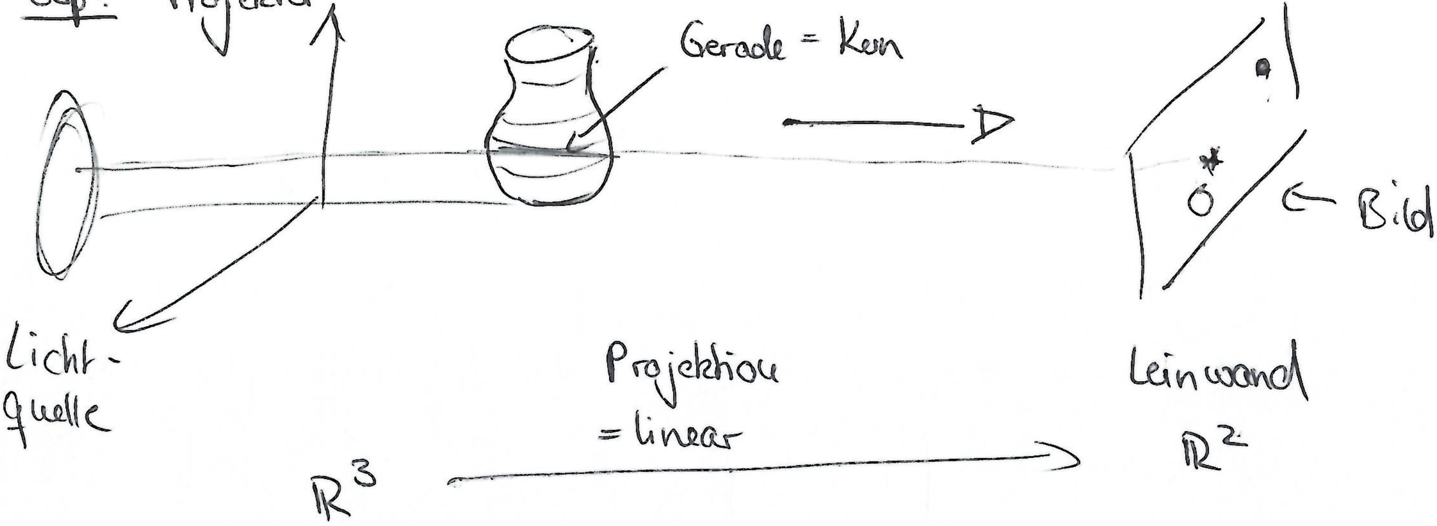
$\Rightarrow$ <u>Bild</u> von $f = \operatorname{im}(f) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

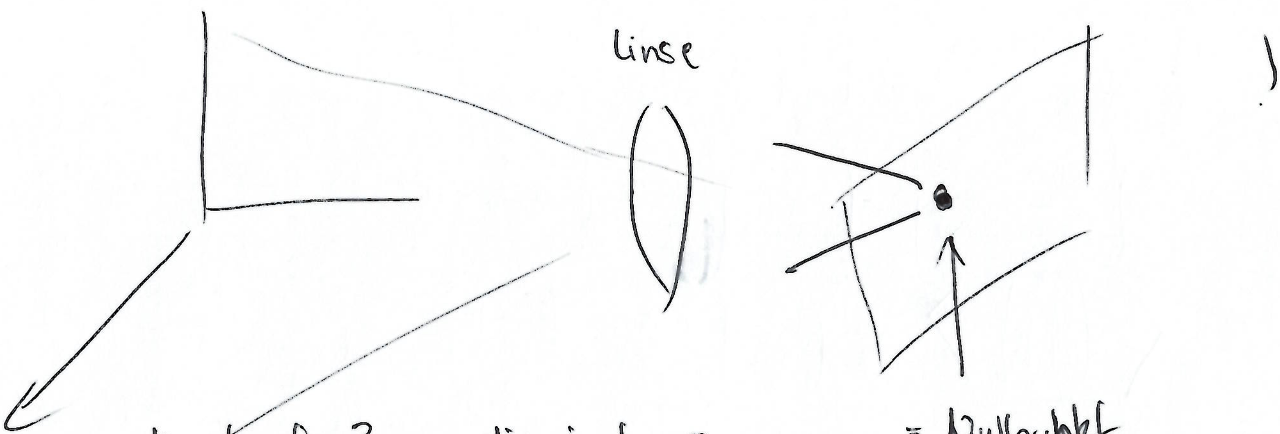
$= \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

ein Teilraum von $\mathbb{R}^2$

$= \mathbb{R}^2$ $\leftarrow$ <u>2-dimensional</u>

Bsp.: Projektor





$\dim \ker f = 3$ $\dim \operatorname{im} f = 0$

= Nullpunkt
= Brennpunkt d. Linse
(d.h. der ~~...~~ ganze Raum wird in diesem Punkt fokussiert)

f (linear) ist injektiv, wenn:

für zwei Vektoren $v \neq v'$ gilt: $f(v) \neq f(v')$ / $-f(v')$

$\Leftrightarrow$ $f(v) - f(v') \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $f(\underbrace{v - v'}_{w = v - v' \neq 0}) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $w \notin \ker(f)$.

$\Leftrightarrow$ ~~...~~ für alle $w \neq 0$ gilt: $w \notin \ker(f)$

$\Rightarrow$ f inj. $\Leftrightarrow$ $\ker(f) = \{\vec{0}\}$

(Ang. es gäbe ein $w \neq \vec{0}$ in $\ker(f)$. ($\Rightarrow f(w) = 0$)

sei $v \in V$ $f(v)$ $f(\underbrace{v + w}_{\neq v}) = f(v) + \underbrace{f(w)}_{=0} = f(v)$

$\leftarrow$ Basis von ?

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ $\qquad f: V \to W \leftarrow$ K-VR.

f so dass ~~$f(v_1) = b$~~ $f(b_1) = v_1, \dots, f(b_n) = v_n$

Sei $v \in V$ beliebig. Dann kann v geschrieben werden als Linearkombination der Basisvektoren, also $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ s.d.

$$V = \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \dots + \lambda_n \cdot b_n.$$

$$f(v) = f(\lambda_1 \cdot b_1 + \dots + \lambda_n \cdot b_n) = \lambda_1 \cdot \underline{f(b_1)} + \dots + \lambda_n \cdot \underline{f(b}$$

$$= \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n. \quad \square$$

B

Frage: Wann ist eine lineare Abb. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ surjektiv ~~bijektiv~~?

$\uparrow$ Standardbasis $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

f ist surjektiv ~~wenn~~ $\Leftrightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$

$\operatorname{im} f = \operatorname{Span}\left(f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right)$

$\Leftrightarrow \underbrace{f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{Basis des } \mathbb{R}^3}$ spannen den $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$ Basis des $\mathbb{R}^3$

Dann folgt aus $\dim \ker f + \underbrace{\dim \operatorname{im} f}_{=3} = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

$\Rightarrow \dim \ker f = 0 \Rightarrow \ker f = \{\vec{0}\}. \Rightarrow f$ injektiv.

D.h. insgesamt: f ist <u>bijektiv</u> $\Leftrightarrow$ f eine Basis vom "linken" Raum auf eine Basis vom "rechten" Raum abbildet

$$f: \underset{\substack{\uparrow \\ \dim U}}{U} \longrightarrow V \qquad \underline{\text{linear}}$$

$U \leftarrow$ Basis $b_1, \ldots, b_n$

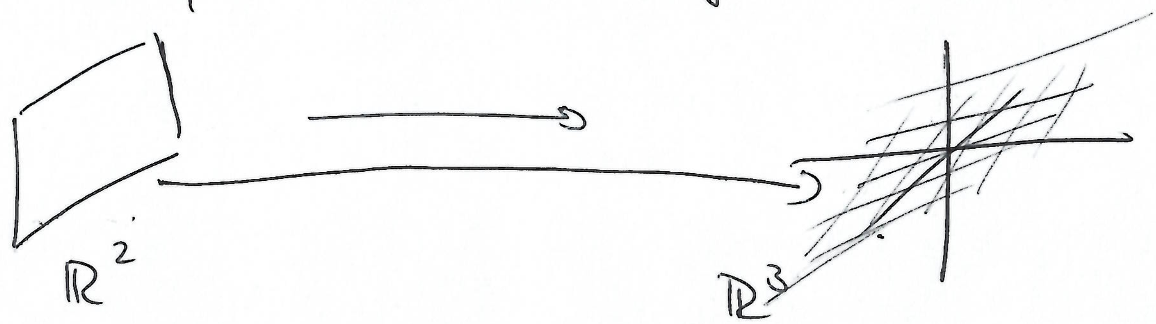
$$\dim U \leq \dim V$$

$$\Rightarrow \operatorname{Dim} \operatorname{im} f = \dim \langle \underbrace{f(b_1), \ldots, f(b_n)}_{n \text{ Vektoren}} \rangle \leq \underset{\substack{\| \\ \dim U}}{n}$$

$$< \dim V$$

$\rightarrow$ f kann nicht surjektiv sein, weil das Bild von f aufgespannt wird durch die Bilder der Basisvektoren von U, und das Bild weniger als $\dim V$.

Bsp.: f:



Einbettung einer Ebene in den 3-dim Raum kann nicht surj. sein.