14.12.23 ①

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineare Abb. s.d. $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x \cdot f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y \cdot f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \Bigg| \qquad = \begin{pmatrix}2 \cdot x + 4 \cdot y\\-3 \cdot x + y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 4\\-3 & 1\end{pmatrix} \leftarrow \text{"darstellende Matrix"} \text{ zu } f = \text{Mat } f$$

Matrizen-Vektor-Produkt:

Zeile $\longrightarrow$ 11 $\leftarrow$ Spalte 12

$$\begin{pmatrix}\textcircled{2} & \textcircled{4}\\\textcircled{-3} & \textcircled{1}\end{pmatrix}_{21 \quad 22} \cdot^{32}_{14} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2\\-3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}2 & 4\\-3 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 \cdot x + 4 \cdot y\\-3 \cdot x + 1 \cdot y\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

$\uparrow$

Spaltenvektoren: $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

Zeilenvektoren: $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}2 & 4\\-3 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Matrix $\longrightarrow$ lineare Abb:

$B = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$

$$~~f~~ \; f_B : \mathbb{R}^{\textcircled{2}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\textcircled{2}}, \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x + 2 \cdot y\\3 \cdot x + 4 \cdot y\end{pmatrix}$$

$\uparrow$ ~~Al~~ Anzahl von Spalten

$\uparrow$ Anzahl von Zeilen

$$f_B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x \cdot f_B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y \cdot f_B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Beispiele:

- Matrix $A = \begin{pmatrix} -10 & \pi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to$ lin. Abb. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

~~$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (-10\cdot x + \pi\cdot y$~~

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10 & \pi\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\cdot x + \pi\cdot y\\ x + 0\cdot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10x+\pi\cdot y\\x\end{pmatrix}$$

~~Di das~~ $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\1\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi\\0\end{pmatrix}$

geometrische Transformationen:

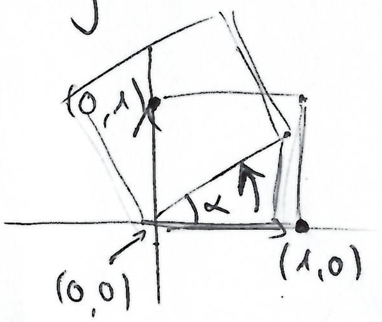
todo:
- Berechne die Bilder der Einheitsvektoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
- Schreibe diese in die Spalten

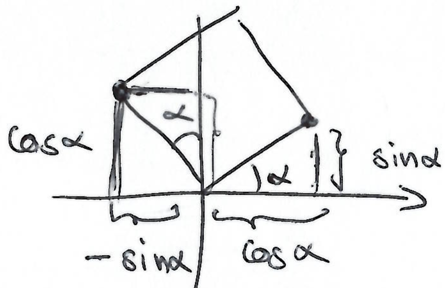
- identische Abbildung:

$\mathrm{id}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\mathrm{id}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\to \text{Mat id} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{\text{Identitätsmatrix}} = I_2 = E_2$$

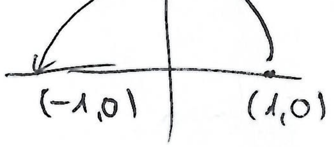
- Drehung um α: (gegen den Uhrzeigersinn)





$f_\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$ $f_\alpha\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\end{pmatrix}$

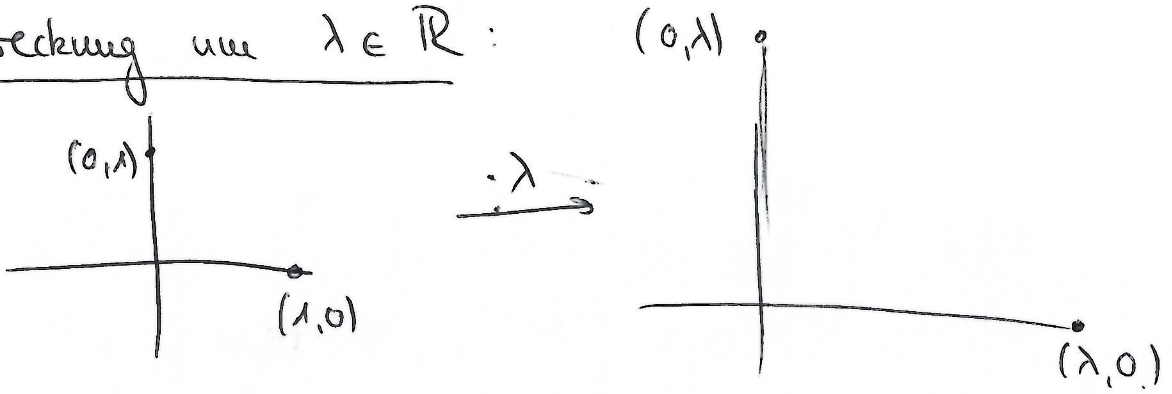
$$\text{Mat } f_\alpha = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$



z.B.: $\alpha = 80°$: Mat $f_{90°}$: $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$

$\alpha = 45°$ $\quad \mathrm{Mat} f_{45°} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

- Streckung um $\lambda \in \mathbb{R}$:



$\mathrm{Mat}\, f_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

- Spiegelung an der Winkelhalbierenden:

$\mathrm{Mat}\, f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

um ~~und~~ $\binom{1}{1}$

- Verschiebung: keine lineare Abb.

$f\binom{x}{y} = \binom{x+1}{y+1}$

Verknüpfung von linearen Abbildungen

Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abb. mit Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

und g: — " — — " — — " — $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

was ist $\mathrm{Mat}\,(g \circ f)$?

$f\binom{1}{0} = \binom{a_{11}}{a_{21}}$ $\quad f\binom{0}{1} = \binom{a_{12}}{a_{22}}$

$$B \cdot \binom{a_{11}}{a_{21}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \binom{a_{11}}{a_{21}} = \begin{pmatrix} b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} \\ b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{21} \end{pmatrix} = g \circ f \binom{1}{0}$$

$$g \circ f \binom{0}{1} = B \cdot \binom{a_{12}}{a_{22}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \binom{a_{12}}{a_{22}} = \begin{pmatrix} b_{11} \cdot a_{12} + b_{12} \cdot a_{22} \\ b_{21} \cdot a_{12} + b_{22} \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}(g \circ f) = \begin{pmatrix} (b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21}) & (b_{11} \cdot a_{12} + b_{12} \cdot a_{22}) \\ (b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{21}) & (b_{21} \cdot a_{12} + b_{22} \cdot a_{22}) \end{pmatrix}$$

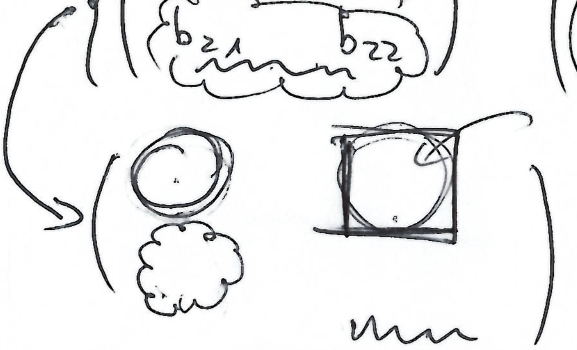
$$\|$$

1. Zeile

1. Spalte

$$\underset{\underset{B}{\shortparallel}}{\text{Mat}\,g} \cdot \underset{\underset{A}{\shortparallel}}{\text{Mat}\,f} = \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Spalten



Beispiele:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ.

Allgemein: Eine lin. Abb. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist gegeben durch eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \longleftarrow \text{(m) Zeilen}$$

n Spalten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Beispiele: trigonometrische Formeln:

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

$$f_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad f_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}\, f_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} =$$

$$\overset{*}{=} \text{Mat}\, f_\beta \cdot \text{Mat}\, f_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta \cdot \cos\alpha - \sin\beta \cdot \sin\alpha & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

(*) Die Drehung um $(\alpha+\beta)$ ist dasselbe wie eine Drehung um α und danach eine Drehung um β

$$\Rightarrow \quad f_{\alpha+\beta} = f_\beta \circ f_\alpha$$

- $$B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}_{} \Big\}\, 3 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f_B : \mathbb{R}^{②} \longrightarrow \mathbb{R}^{③} \qquad f_A : \mathbb{R}^{④} \longrightarrow \mathbb{R}^{②}$$

$$\text{Mat}(f_B \circ f_A) = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbb{R}^{④} \longrightarrow \mathbb{R}^{③}$$

Spalten ↑   ← Zeilen

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right. \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{2} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overset{\downarrow}{-4} & \overset{\downarrow}{1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 1} \longrightarrow \\ \rightarrow -1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & -1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ \longrightarrow 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -4 & -4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$