Matrikelnummer: Name:

Probeklausur Mathematik I

Prof. Dr. Sandra Eisenreich
Wintersemester 2023/24, Hochschule Landshut

(a) Schreiben Sie auf *die ersten beiden* Titelseiten Ihren Namen.

(b) Schreiben Sie auf *jedes* Blatt Ihre Matrikelnummer.

(c) Diese Probeklausur besteht aus 8 Aufgaben auf 8 Seiten. Bitte prüfen Sie, ob Aufgaben oder Seiten fehlen.

- Verwenden Sie dokumentenechte Stifte (kein Bleistift) in blau oder schwarz.
- Schreiben Sie Ihre Antworten in die dafür vorhergesehen Felder.
- Hilfsmittel: nicht-programmierbarer Taschenrechner.
- Legen Sie Ihren Personalausweis/Studentenausweis lesbar auf den Tisch.
- Keine vorzeitige Abgabe in den letzten 5 Minuten möglich.
- Bleiben Sie bitte am Ende an Ihrem Platz, bis die Klausuren eingesammelt und durchgezählt wurden.
- Viel Erfolg!

Aufgabe	Punkte	Erreicht
Abbildungen	4	
Lineare Abhängigkeit	4	
Teilraum	5	
Berechnungen	17	
Logik	6	
Vollständige Induktion	10	
LGS	10	
Lineare (Un)abhängigkeit	4	
Gesamt	60	

1. **Abbildungen** (4 Punkte)
Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 1}, x \mapsto x^2 + 1$ Kreuzen Sie bei allen zutreffenden Aussagen Ja an, sonst Nein:

- □ Ja □ Nein Die Abbildung f ist injektiv.
- □ Ja □ Nein Die Abbildung f ist surjektiv.
- □ Ja □ Nein Die Abbildung f ist linear.
- □ Ja □ Nein Die Abbildung f ist ein Isomorphismus.

Lösung:
F, W, F, F

2. **Lineare Abhängigkeit** (4 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum. Unter welchen Bedingungen sind Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear abhängig? Kreuzen Sie bei allen zutreffenden Aussagen Ja an, sonst Nein:

- □ Ja □ Nein Die Determinante der Matrix, die die Vektoren als Spalten hat, ist nicht Null.
- □ Ja □ Nein v_1 lässt sich schreiben als Linearkombination von $v_2, \ldots, v_n$
- □ Ja □ Nein $v_1 \in \operatorname{Span}(v_2, \ldots, v_n)$.
- □ Ja □ Nein Der Rang der Matrix, die die Vektoren als Spalten hat, ist n.

Lösung:
F, W, W, F

3. **Teilraum** (5 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum, und $U \subset V$ eine Teilmenge. Unter welchen der unten aufgeführten Bedingungen ist U ein Teilraum von V? Falls U wie beschrieben ein Teilraum ist, kreuzen Sie "Jaän, sonst "Nein".

- □ Ja □ Nein U ist abgeschlossen bezüglich Inversenbildung und Addition.
- □ Ja □ Nein U ist abgeschlossen bezüglich Skalarmultiplikation mit Elementen in K und Addition.
- □ Ja □ Nein $U = \operatorname{Span}(v)$ für einen Vektor $v \in V$.
- □ Ja □ Nein U ist eine Gerade, die nicht durch den Nullpunkt geht.
- □ Ja □ Nein $U = \{0\}$

Lösung:
F, W, W, F, W

4. **Berechnungen** (17 Punkte)

(a) (7 Punkte) Wandeln Sie die Zahl 131 ins Binär- und ins 9-er System um und geben Sie den Rechenweg an.

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie in $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ (wobei Sie das Ergebnis als Restklasse einer Zahl zwischen 0 und 26 darstellen):

$$\overline{4} \odot (\overline{11} \odot \overline{3} \oplus \overline{1})$$

(c) (3 Punkte) Was ist die Länge der komplexen Zahl $3 - 4i$?

(d) (4 Punkte) Berechnen Sie das Matritzenprodukt $A \cdot B$ für folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a)

$$\left.\begin{array}{rcrlc} 131:2 & = & 65 & \text{Rest} & 1 \\ 65:2 & = & 32 & \text{Rest} & 1 \\ 32:2 & = & 16 & \text{Rest} & 0 \\ 16:2 & = & 8 & \text{Rest} & 0 \\ 8:2 & = & 4 & \text{Rest} & 0 \\ 4:2 & = & 2 & \text{Rest} & 0 \\ 2:2 & = & 1 & \text{Rest} & 0 \\ 1:2 & = & 0 & \text{Rest} & 1 \end{array}\right. \Rightarrow 131 = (10000011)_2.$$

$$\left.\begin{array}{rcrlc} 131:9 & = & 14 & \text{Rest} & 5 \\ 14:9 & = & 1 & \text{Rest} & 5 \\ 1:9 & = & 0 & \text{Rest} & 1 \end{array}\right. \Rightarrow 131 = (155)_9$$

(b) $\overline{4} \odot (\overline{11} \odot \overline{3} \oplus \overline{1}) = \overline{4} \odot (\overline{11 \cdot 3} \oplus \overline{1}) = \overline{4} \odot (\overline{6} \oplus \overline{1}) = \overline{4} \odot \overline{7} = \overline{28} = \overline{1}$.

(c) $|3 - 4i| = \sqrt{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5. **Logik** (6 Punkte)

Prüfen Sie mit einer Wahrheitstabelle, ob folgende Äquivalenz von Aussagen gilt:

$$(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg(\neg A \wedge \neg B))$$

Lösung:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	$(A \vee B)$
w	w	f	f	f	w	w
w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	f	w	w
f	f	w	w	w	f	f

Die Äquivalenz gilt.

6. **Vollständige Induktion** (10 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

Lösung:

Induktionanfang: $n = 1$:
linke Seite $= \frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$;
rechte Seite $= \frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$
$\Rightarrow$ Die Behauptung ist richtig für $n = 1$.

Induktionsvoraussetzung: Angenommen, die Behauptung gilt für n, also:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

Induktionsschritt: zu zeigen ist:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\frac{1}{(2(n+1)-1)\cdot(2(n+1)+1)}=\frac{n+1}{2(n+1)+1}$$

rechte Seite $= \frac{n+1}{2n+3}$
linke Seite $= \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} \overset{IV}{=} \frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} =$
$\frac{n\cdot(2n+3)+1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} =$ rechte Seite.

Nebenrechnung Polynomdivision: $(2n^2+3n+1):(2n+1)=n+1$.

7. **LGS** (10 Punkte)

Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & 2x_4 & = & -6 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & & & = & 4 \end{array}$$

Lösung:

Betrachte die erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -6 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2I \\ -I \\ +I \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -II \\ +II \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) III \leftrightarrow IV \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ +3III \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \\ \cdot\frac{1}{2} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} +IV \\ -3IV \\ +2IV \\ \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2III \\ +5III \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{1}{3} \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} +II \\ \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = 2.$ $\Rightarrow$ Die Lösungsmenge besteht aus dem Vektor $(0, -2, 1, 2)$.

8. **Lineare (Un)abhängigkeit** (4 Punkte)

Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig oder abhängig? Geben Sie den Rechenweg an!

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Die drei Vektoren sind linear abhängig, da

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) = 0 - 1 + 4 - 0 - 0 - 3 = 0.$$