HAW LANDSHUT — WS 2023/2024
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK — Blatt 3
Eisenreich/Hartmann/Sagraloff/Schröter

Lösungsskizzen zur Übung „Mathematik I"

Präsenzaufgabe.

(a) **Induktionsanfang**: $1^2 + 1 = 2$ und damit gerade.
Induktionsannahme: Angenommen, $n^2 + n$ ist gerade, also durch 2 teilbar.
Induktionsschritt: $n \to n+1$: zu zeigen ist: $(n+1)^2+(n+1)$ ist gerade.
hierzu:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 + (n+1) &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 = (n^2 + n) + (2n + 2)\\ &= (\text{gerade Zahl nach IV}) + 2(n + 1)\end{aligned}$$

und eine Summe von zwei geraden Zahlen ist gerade.

(b) $(10001)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 1 = 17$
$22 = 16 + 4 + 2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (10110)_2$

Aufgabe 1. Vollständige Induktion 2 Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion die Richtigkeit der foglenden Aussagen für alle natürlichen Zahlen n:

(a) $2^n > n^2$ für $n \geq 5$.

(b) $n^3 + 11 \cdot n$ ist durch 6 teilbar.

Lösung 1. (a) **Induktionsanfang:** $A(5)$: linke Seite $= 2^5 = 32$ rechte Seite $= 5^2 = 25$, und da $32 > 25$ ist $A(5)$ wahr.

Induktionsannahme: Wir nehmen nun an, die Aussage gilt für n, das heißt es gilt: $2^n > n^2$.

Induktionsschluss: zu zeigen ist: $2^{n+1} > (n+1)^2$, also $2^{n+1} > n^2+2n+1$.
$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > 2 \cdot n^2 = n^2 + n^2$ nach Induktionsvoraussetzung. Es bleibt also zu zeigen, dass $2 \cdot n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow n^2 \geq 2n + 1$. Aber da $n \geq 5$, ist $n^2 \geq 5n = 2n + 3n > 2n + 1$.

(b) z.z.: n^3+11n ist durch 6 teilbar. **Induktionsanfang:** $A(1)$: $1^3+11 = 12$ ist durch 6 teilbar.

Induktionsannahme: Sei $n^3 + 11n = 6k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ (Das heißt, dass $n^3 + 11n$ ein Vielfaches von 6 ist.)

Induktionsschluss: Zeige, dass $(n+1)^3 + 11(n+1)$ durch 6 teilbar ist:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 11(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 11n + 11 &= (n^3 + 11n) + 3(n^2 + n) + 12 \\ &= 6k + 12 + 3(n^2 + n)\end{aligned}$$

Die ersten beiden Summanden sind durch 6 teilbar. Der dritte Summand ist dann durch 6 teilbar, wenn $n^2 + n$ eine gerade Zahl ist. Stimmt das? Da $n^2 + n = n(n+1)$ ist, ist der dritte Summand immer das Produkt aus einer geraden und einer ungerade Zahl, und das ist immer gerade. Damit ist $A(n+1)$ gezeigt.

Aufgabe 2. Zahlsysteme

(a) Wandeln Sie folgende Zahlen vom Binärsystem ins Dezimalsystem um:

- 1111
- 101010

(b) Wandeln Sie folgende Zahlen vom Dezimalsystem ins Binärsystem um:

- 127
- 1024

(c) Da $2^4 = 16$ ist, entsprechen je 4 Ziffern einer Binärzahl einer Ziffer im Hexadezimalsystem. Wandeln Sie die Hexadezimalzahl $(ABC012)_{16}$ in eine Binärzahl um, indem Sie die einzelnen Ziffern $A, B, C, 0, 1, 2$ des Hexadezimalsystems jeweils als viertellige Binärzahl schreiben.

Lösung 2. Zahlsysteme

(a)
- $(1111)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$
- $(101010)_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 32 + 8 + 2 = 42$

(b) Wandeln Sie folgende Zahlen vom Dezimalsystem ins Binärsystem um:

- $127 = 64+32+16+8+4+2+1 = 1\cdot2^6+1\cdot2^5+1\cdot2^4+1\cdot2^3+1\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0 = (1111111)_2$
- $1024 = 1 \cdot 2^10 = (10000000000)_2$

(c) Es ist $16 = 2^4$ und als Folge daraus kann man in einer Binärzahl immer 4 Ziffern zu einer Hexadezimalziffer zusammenfassen. Zum Beispiel ist $(A)_{16} = (1010)_2$, $(B)_{16} = (1011)_2, (C)_{16} = (1100)_2$,. Deswegen gilt:

$$(ABC012)_{16} = (1010\ 1011\ 1100\ 0000\ 0001\ 0010)_2$$

Aufgabe 3. Euklidischer Algorithmus, ggT

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größen gemeinsamen Teiler $d = \mathrm{ggT}(a,b)$ von $a = 3192$ und $b = 2079$, und geben Sie ganze Zahlen $s,t \in \mathbb{Z}$ an, so dass $s \cdot a + t \cdot b = d$.

(b) Verwenden Sie den Euklidischen Algorithmus, um Zahlen $s,t \in \mathbb{Z}$ mit $s \cdot 49 + t \cdot 21 = -14$ zu finden! Hinweis: berechnen Sie erst s', t' mit $s' \cdot 49 + t' \cdot 21 = ggT(49,21)$!

(c) Gibt es s,t, so dass $s \cdot 49 + t \cdot 21 = 15$?

Lösung 3. Euklidischer Algorithmus, ggT

(a) Der erweiterte Euklid'sche Algorithmus: 3192, 2079

$$\begin{array}{cclll}
3192 & = & 1 \cdot 2079 & +1113, & \Rightarrow \quad r_1 = a - b \\
a & = & b & +r_1 & \\
2079 & = & 1 \cdot 1113 & +966, & \Rightarrow \quad r_2 = b - r_1 = b - (a-b) = 2b - a \\
b & = & r_1 & +r_2 & \\
1113 & = & 1 \cdot 966 & +147, & \Rightarrow \quad r_3 = r_1 - r_2 = (a-b) - (2b-a) = 2a - 3b \\
r_1 & = & r_2 & +r_3 & \\
966 & = & 6 \cdot 147 & +84, & \Rightarrow \quad r_4 = r_2 - 6 \cdot r_3 = 2b - a - 6 \cdot (2a - 3b) \\
 & & & & \qquad = 2b - a - 12a + 18b = 20b - 13a \\
r_2 & = & 6 \cdot r_3 & +r_4 & \\
147 & = & 1 \cdot 84 & +63, & \Rightarrow \quad r_5 = r_3 - r_4 = 2a - 3b - (20b - 13a) \\
 & & & & \qquad = 15a - 23b \\
r_3 & = & 1 \cdot r_4 & +r_5 & \\
84 & = & 1 \cdot 63 & +21, & \Rightarrow \quad r_6 = r_4 - r_5 = 20b - 13a - (15a - 23b) \\
 & & & & \qquad = 43b - 28a \\
r_4 & = & 1 \cdot r_5 & +r_6 &
\end{array}$$

Es ist also $ggt(3192, 2079) = 21 = (-28)a + 43b$

(b) Nochmal der Euklid'sche Algorithmus:

$$49 = 21 \cdot 2 + 7$$
$$21 = 7 \cdot 3 + 0$$

Es ist $ggt(9,21) = 7$ und $7 = 1 \cdot 49 - 2 \cdot 21$. Dann ist $-14 = (-2) \cdot 7 = -2 \cdot 49 + 4 \cdot 21$

(c) Kann auch $15 = s \cdot 49 + t \cdot 21$ sein? Der ggt 7 teilt die rechte Seite dieser Gleichung, weil er Teiler von 49 und von 21 ist. Dann muss er auch die linke Seite teilen, aber 7 ist kein Teiler von 15.

Aufgabe 4. Rechnen mit Restklassen
Berechnen Sie folgende Werte:

(a) $-7 \mod 6$, $49 \mod 6$, $-1 \mod 6$, $-16 \mod 6$, $-16 \mod 7$, $-34 \mod 5$

(b) $\overline{7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 40}$ in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

(c) $\overline{4} \odot (\overline{11} \odot \overline{3} \oplus \overline{1})$ in $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$

(d) $(\overline{-21} \odot \overline{2}) \oplus \overline{16}$in $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$

(e) $\overline{7^{123}}$ in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Lösung 4. Rechnen mit Restklassen

(a) $-7 \mod 6 = -6-1 \mod 6 = -1 \mod 6 = 6-1 \mod 6 = 5$, $49 \mod 6 = 48+1 \mod 6 = 1$, $-2 \mod 6 = 6-2 \mod 6 = 4$, $-16 \mod 6 = -18+2 \mod 6 = 2$, $-16 \mod 7 = -21+5 \mod 7 = 5$, $-34 \mod 5 = -35+1 \mod 5 = 1$

(b) $\overline{7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 40} = \overline{7} \odot \overline{13} \odot \overline{19} \odot \overline{40} = \overline{1} \odot \overline{1} \odot \overline{1} \odot \overline{4} = \overline{4}$,

(c) $\overline{4} \odot (\overline{11} \odot \overline{3} \oplus \overline{1}) = \overline{4} \odot (\overline{11 \cdot 3} \oplus \overline{1}) = \overline{4} \odot (\overline{6} \oplus \overline{1}) = \overline{4} \odot \overline{7} = \overline{28} = \overline{1}$.

(d) $(\overline{-21} \odot \overline{2}) \oplus \overline{16} = (\overline{6} \odot \overline{2}) \oplus \overline{16} = \overline{12} \oplus \overline{16} = \overline{1}$

(e) $\overline{7^{123}} = \overline{7}^{123} = \overline{1}^{123} = \overline{1}$.

Aufgabe 5. Hashing mit Restklassen *Wir haben in der Vorlesung besprochen, warum Hashing im realen Leben oft zum Einsatz kommt: wenn Sie zum Beispiel einen Online-Handel betreiben, wollen Sie Ihre Kunden mit zehnstelligen Kundennummern ungern in einer Liste mit 10^{10} Zeilen abspeichern. Für diesen Fall verwendet man Hashing, um die Kunden mit wenig Speicherbedarf und kurzen Suchzeiten mit System in einer Liste abspeichern zu können.* Gegeben sei der folgende Datensatz bestehend aus Name und zugehöriger Identnummer:

$$\begin{aligned} D :=\{&(\text{Anton}, 5929), (\text{Berta}, 13495), (\text{Carla}, 10269), (\text{Friedrich}, 9541), (\text{Dora}, 7558), \\ &(\text{Emil}, 7560), (\text{Gerda}, 11080), (\text{Hans}, 5871), (\text{Ida}, 5872), (\text{Xaver}, 9438), \\ &(\text{Bernd}, 9447), (\text{Max}, 2078)\} \end{aligned}$$

Wir betrachten folgende Hashing-Funktion

$$\begin{aligned} h : D &\mapsto \{0, \dots, 12\} \\ (x, y) &\mapsto y \mod 13 \end{aligned}$$

(a) Ist h kollisionsfrei?

(b) Verwenden Sie lineare Sondierung, um die Einträge des Datensatzes in einer Liste (der Länge 13) einzusortieren.

(c) Ist es auch möglich mittels quadratischer Sondierung eine solche Liste zu erstellen?

Lösung 5. Hashing mit Restklassen Berechnen wir zunächst einmal die Hashwerte der einzelnen Zahlen (das kann der Taschenrechner):

5929	13495	10269	9541	7558	7560	11080	5871	5872	9438	9447	2078
1	1	12	12	5	7	4	8	9	0	9	11

(a) Sie sehen, dass Hashwerte mehrfach auftreten, die Funktion ist also nicht kollisionsfrei.

(b) Die Einträge in die Hashtabelle bei linearer Sondierung lauten:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$Friedr$	$Anton$	$Berta$	$Xaver$	$Gerda$	$Dora$		$Emil$	$Hans$	Ida	$Bernd$	Max	$Carla$

(c) Es ist $13 \mod 4 = 1$, damit erreicht die quadratische Sondierung nicht jedes Element der Liste. Probierern Sie es aus! Mit einer Liste der Länge 11 wäre quadratische Sondierung möglich ($11 \mod 4 = 3$)