Mathematik II

1. **$\sqrt{2}$ ist irrational**
   Begründen Sie, warum $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

   Hinweis: Nehmen Sie an, es gilt $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, wobei $\frac{m}{n}$ vollständig gekürzt ist.

2. **(ir)rationale Zahlen**
   Gegeben seien rationale Zahlen p, q und irrationale Zahlen r, s. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:
   (a) $x = p + q$ ist eine rationale Zahl.
   (b) $y = r + s$ ist eine irrationale Zahl.
   (c) $z = p + r$ ist eine irrationale Zahl.

3. **Mengen malen**
   Bestimmen Sie in den folgenden Fällen jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, die den Ungleichungen genügen, und skizzieren Sie diese Mengen auf der Zahlengeraden:

   (a) $\frac{x-1}{x+1} < 1$,
   (b) $x^2 + x + 1 \geq 0$,
   (c) $x^3 - x^2 < 2x - 2$,
   (d) $|1 - x| \leq 1 + 2x$,
   (e) $15x^2 \leq 7x + 2$,
   (f) $|x + 1| + |5x - 2| = 6$,
   (g) $\frac{x|x|}{2} = 8$,
   (h) $x|x| = \frac{1}{2}x^3$,
   (i) $|x - 4| > x^2$.

4. **dreiecks-artige Ungleichungen**
   Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antwort!
   (a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x - y| \leq |x| - |y|$.
   (b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichung $|x - y| = ||x| - |y||$.
   (c) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

5. **inf, min, max, sup**
   Untersuchen Sie die Mengen
   (a) $M = \{x \in \mathbb{R} \colon x = n/(n+1), n \in \mathbb{N}\}$,
   (b) $M = \{x \in \mathbb{R} \colon x = 1/(n+1) + (1 + (-1)^n)/2n, n \in \mathbb{N}\}$,
   (c) $M = \{n^2/2^n \colon n \in \mathbb{N}\}$

   auf Beschränktheit und bestimmen Sie ggf. Infimum, Supremum, Minimum und Maximum.