

Mathematik I

Vorlesung 9 - Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen

Prof. Dr. Sandra Eisenreich

04. Oktober 2023

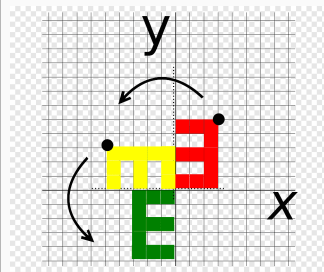
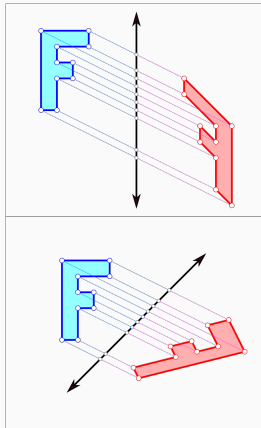
Hochschule Landshut

Motivation

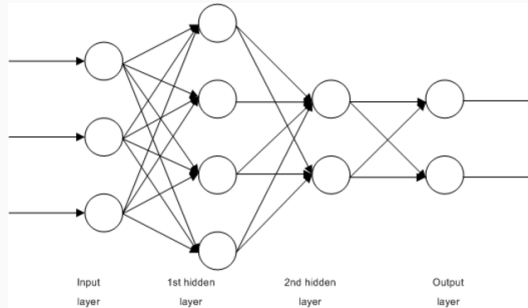
Frage: Wenn man grafisch die Drehung einer Kugel darstellen will, wie macht man das?

Allgemein: Wie beschreibt man z.B. Drehungen von Objekten im Raum? Oder Spiegelungen? Oder Skalierungen?

Diese Operationen sind **lineare Abbildungen**.



- Computergrafik besteht quasi nur aus linearen Abbildungen (Koordinatentransformationen!)
- Deep Learning im Bereich KI ebenso; ein neuronales Netz sieht so aus:



wobei die einzelnen “Layer” einer linearen Abbildung entsprechen

- sonst auch überall...

Definition

Seien U, V K -Vektorräume und $f : u \longrightarrow v$ eine Abbildung. f ist eine **lineare Abbildung**, wenn für alle $\lambda \in K$ und $u, u' \in U$ gilt:

$$f(u + u') = f(u) + f(u') \text{ und}$$

$$f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$$

(d.h. Addition und Skalarmultiplikation können mit $f(\cdot)$ vertauscht werden).

Zwei Vektorräume U und V heißen **isomorph** (Abk. $U \simeq V$), falls es eine lineare bijektive Abb. $f : U \longrightarrow V$ gibt. f nennt man dann einen **Isomorphismus**

Beachte: U und V müssen Vektorräume über demselben Körper K sein!

Satz

- Für jede lineare Abbildung $f : U \longrightarrow V$ gilt: $f(\vec{0}) = \vec{0}$.
- Sind die Abbildungen $f : U \longrightarrow V$ und $g : V \longrightarrow W$ linear, so ist auch die Komposition $g \circ f : U \longrightarrow W$ linear.
- Ist $f : U \longrightarrow V$ ein Isomorphismus, dann ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \longrightarrow U$ ein Isomorphismus.

Beispiele → Mitschrift

Wir führen nun zwei **wichtige Definitionen** ein:

Definition

Sei $f : U \longrightarrow V$ linear, dann definieren wir:

- den **Kern von** f als alle Vektoren $u \in U$, die auf 0 abgebildet werden:

$$\ker f := \{u \in U \mid f(u) = 0\}$$

- das **Bild von** f (“Im” wegen “Image”=Bild) als alle Vektoren $v \in V$, die im Bild der Abbildung f liegen, also die ein Urbild besitzen:

$$\operatorname{im} f := \{v \in V \mid \exists u \in U \text{ mit } f(u) = v\}$$

Bild und Kern zum Nachweis von surjektiv/injektiv

Wichtige Eigenschaften von Bild und Kern:

Satz

(a) Die Abbildung f ist genau dann surjektiv, wenn gilt:

$$\operatorname{im} f = V$$

(b) Sie ist genau dann injektiv, wenn gilt:

$$\ker f = \{\vec{0}\}$$

Bemerkung:

- (a) ist klar: $\operatorname{im} f = V \Leftrightarrow$ der ganze Zielraum “wird getroffen” \Leftrightarrow Surjektivität.
- (b) muss man zeigen. Es bedeutet: Eine lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn *nur* der Nullvektor auf den Nullvektor abgebildet wird (dieser wird es sowieso).

Beweis. → Mitschrift

Dies gilt auch allgemein für beliebige lineare Abbildungen f :

Satz

Für jede lineare Abbildung $f : U \longrightarrow V$ ist $\ker f$ ein linearer Unterraum von U und $\operatorname{im} f$ ein linearer Unterraum von V .

Analog zeigt man auch folgende Verallgemeinerung:

Satz

Sei $f : U \longrightarrow V$ linear und seien U_1, V_1 Teilräume von U bzw. V . Dann gilt:

- *$f(U_1)$ ist ein Teilraum von V .*
- *$f^{-1}(V_1)$ ist ein Teilraum von U .*

Wie eingangs erwähnt: Computergrafik (2D und 3D) besteht quasi nur aus linearen Abbildungen, und zwar Transformationen von einem Koordinatensystem in ein anderes.

Eine 3D-Grafik ist z.B. gegeben durch ein 3D Modell und eine Sicht in dieses Modell hinein. Diese Sicht entspricht einem Koordinatensystem. Wenn sich z.B. ein Spieler durch das 3D Modell bewegt, verändert sich also ständig das zugrundeliegende Koordinatensystem (\Leftrightarrow die zugrundeliegende Basis!). Um das mit einem Rechner auszudrücken braucht es eine “Übersetzung” von einem Koordinatensystem in ein anderes, das heißt eine lineare Abbildung, die eine Basis (z.B. die Standardbasis) übersetzt (das heißt abbildet) auf die neue Basis.

Satz

Seien U, V K -Vektorräume und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von U . Zu beliebig gegebenen Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ gibt es dann genau eine lineare Abbildung $f : U \longrightarrow V$, so dass $f(b_i) = v_i$ für alle i .

Folgerung

Eine lineare Abbildung $f : U \longrightarrow V$ ist vollständig durch ihre Werte $f(b_i)$ auf einer Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ bestimmt:

für die Koordinatendarstellung eines Vektors bezüglich der Basis B , $u = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B$, gilt:

$$\begin{aligned} f(u) &= f(\lambda_1 \cdot b_1 + \dots + \lambda_n \cdot b_n) \\ &:= \lambda_1 f(b_1) + \dots + \lambda_n f(b_n) \\ &= \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n \end{aligned}$$

Beweis. → Mitschrift.

Ohne Beweis halten wir noch eine Reihe weiterer wichtiger Ergebnisse fest:

Satz

Seien U, V endlichdimensionale K -Vektorräume, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von U und $f : U \rightarrow V$ linear. Dann ist f genau dann ein Isomorphismus, wenn $e := \{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ eine Basis von V ist (das heißt wenn f eine Basis von U auf eine Basis von V abbildet).

Folgerung

Zwei endlichdimensionale Vektorräume U, V sind genau dann isomorph, wenn $\dim U = \dim V$.

Folgerung

Alle n -dimensionalen K -Vektorräume sind isomorph zum Vektorraum K^n .

Wichtige Dimensions-Gleichung von Bild und Kern

Wir halten noch folgendes Ergebnis fest:

Satz

Sei $f : U \longrightarrow V$ linear, dann gilt

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim U.$$

Anwendungen:

Rechenregel

- Ist $\dim U < \dim V$, so kann f nicht surjektiv sein.
- Ist $\dim U > \dim V$, so kann f nicht injektiv sein.
- Ist $\dim U = \dim V$, so ist f bijektiv genau dann wenn f entweder injektiv oder surjektiv ist.

Beispiel → Mitschrift