Mathematik I

Vorlesung 8 - Vektorräume

Prof. Dr. Sandra Eisenreich

23. Oktober 2023

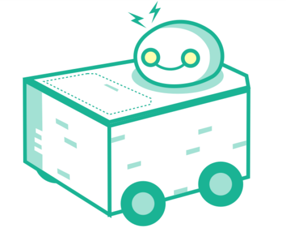
Hochschule Landshut

8.1 Vektorräume, Unterräume

Motivation und Anwendung in der Informatik

Raum, in dem wir uns bewegen: $\mathbb{R}^3$; dies ist ein **Vektorraum**.
Anwendungen in der Industrie spielen sich in ganz vielen Fällen im $\mathbb{R}^3$ ab, wo z.B. Koordinaten von Bauteilen erfasst werden, um festzustellen, ob es Qualitätsmängel oder Abweichungen gibt; Roboter bewegen sich im $\mathbb{R}^3$, autonome Logistik-Fahrzeuge ebenso,.... 3D-Game-Engines, etc etc.

Quelle: Wikimedia



Quelle: Wikimedia

Definition

Sei K ein Körper. Ein K-Vektorraum V besteht aus einer additiven Gruppe $(V, +)$ (das sind die Vektoren) und einer skalaren Multiplikation:

$$\begin{aligned} \cdot : \quad & K \times V \to V \\ & (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v, \end{aligned}$$

so dass für alle $\lambda, \mu \in K$ und $v, w \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} &(V1) \quad \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v \\ &(V2) \quad 1 \cdot v = v \\ &(V3) \quad \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \\ &(V4) \quad (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \end{aligned}$$

Bezeichnungen:

$0 \in K$ ist die 0 im Körper K

$\vec{0} \in V$ ist das neutrale Element in V. häufig schreibt man auch $\vec{0} = 0$.

Satz (Rechenregeln)

(V5) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ *für alle* $\lambda \in K$

(V6) $0 \cdot v = \vec{0}$ *für alle* $v \in V$

(V7) $(-1) \cdot v = -v$

$(V5) - (V7)$ können aus $(V1) - (V4)$ hergeleitet werden.

Beispiel: $\mathbb{R}^n$

Satz

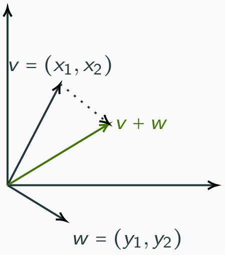
Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n\}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, wobei

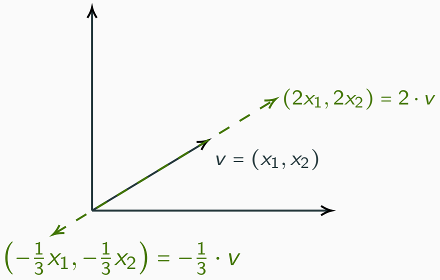
$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) &:= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) &:= (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

Man prüft nun leicht nach, dass $(\mathbb{R}^n, +)$ eine Gruppe ist. Das Nullelement ist $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ und die Skalarmultiplikation erfüllt $V1 - V4$. In Zukunft schreiben wir Elemente des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ als **Spaltenvektoren**, d.h. wir schreiben $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ anstatt $(x_1, \ldots, x_n)$.

Geometrische Interpretation

- Ein Element $v = (x_1, x_2)$ kann als Punkt im $\mathbb{R}^2$ mit Koordinaten x_1 und x_2 aufgefasst werden, aber auch als Pfeil (Vektor) vom Ursprung zum Punkt (x_1, x_2).
- Addition zweier Vektoren ist das Aneinandersetzen der einzelnen Vektoren
- Skalare Multiplikation mit λ entspricht einer Verlängerung/Verkürzung des Vektors v um Faktor $|\lambda|$. Ist $\lambda > 0$, dann zeigt $\lambda \cdot v$ in die gleiche Richtung wie v, sonst in die Gegenrichtung.





Beispiel: K^n

Satz

Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ *und jeden Körper* K *ist der Raum* $K^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in K \,\forall\, i = 1, \ldots, n\}$ *ein* K*-Vektorraum, wobei*

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) &:= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) &:= (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda x_n) \text{ für } \lambda \in K \end{aligned}$$

Beispiele: → Mitschrift.

Beispiel: Polynomringe

- Sei K ein Körper, dann ist der **Polynomring** $K[x]$ein K-Vektorraum. (Man kann Polynome addieren und mit beliebigen Elementen von K durchmultiplizieren).
- Auch die **Menge** $K[x]_{\leq d}$ **aller Polynome von Grad** d **oder weniger** ist ein K-Vektorraum: Beachte, dass mit $p, q \in K[x]_{\leq d}$ auch $p + q \in K[x]_{\leq d}$ und $\lambda \cdot p \in K[x]_{\leq d}$ für alle $\lambda \in K$ gilt.
- Die Menge M aller Abbildungen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ist ein $\mathbb{Q}$–Vektorraum:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

Der Nullvektor in M ist die Abbildung f mit $f(x) = 0$ für alle x.

Unterräume eine Vektorraums

Definition

Ist V ein K-Vektorraum und $U \subset V$, und U selbst ein K-Vektorraum, so heißt U ein **Unterraum oder Untervektorraum von** V.

Ob eine Teilmenge $U \subset V$ ein Unterraum ist, lässt sich wie folgt feststellen:

Satz

Ist V ein K-Vektorraum, $U \subset V$, dann ist U ein Unterraum von V, wenn gilt:

(U1) Abgeschlossenheit bzgl. Addition: $u + v \in U$ für alle $u, v \in U$

(U2) Abgeschlosenheit bzgl. Skalarmultiplikation: $\lambda \cdot u \in U$ für alle $u \in U$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Bemerkung: Wegen $0 \cdot u = \vec{0}$ muss jeder Unterraum von V auch den Nullvektor enthalten.

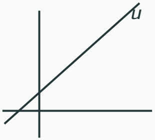
Unterräume von $\mathbb{R}^2$

Satz

Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $U \subset V$ ein Unterraum. Es gibt nur 3 verschiedene Arten von Unterräumen von $\mathbb{R}^2$:

- *Nullvektor: $U = \{\vec{0}\}$ (der einfachste Vektorraum).*
- *Geraden durch den Nullpunkt: $U = \{\lambda \cdot u_1 | \lambda \in \mathbb{R}\}$ für ein $u_1 \neq 0$ in $\mathbb{R}^2$.*
- *der ganze Raum $U = \mathbb{R}^2$.*

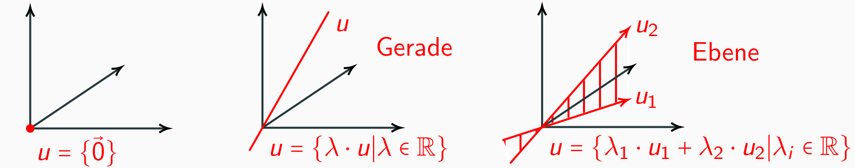
Beachte: Eine Gerade U, die nicht durch den Ursprung geht, ist kein Unterraum.
Beweis. → Mitschrift.



Satz

Es gibt nur (n+1) verschiedene Arten von Unterräumen U von $\mathbb{R}^n$: Nullvektor $U = \{\vec{0}\}$ und:

- *Geraden durch den Nullpunkt: $U = \{\lambda \cdot u_1 | \lambda \in \mathbb{R}\}$ für ein $u_1 \neq 0$ in $\mathbb{R}^2$.*
- *Ebenen, die von zwei nicht-parallelen Vektoren u_1, u_2 aufgespannt weren:*
  $U = \{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 u_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ ("Linearkombinationen von u_1, u_2")
- *dreidimensionale Räume, die von einer Ebene wie oben (mit Vektoren u_1, u_2) und einem zusätzlichen Vektor u_3 aufgespannt werden, der nicht in der Ebene liegt:*
  $U = \{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 | \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$ ("Linearkombinationen von u_1, u_2, u_3")
- *etc...*



Motivation Linearkombination, lineare Unabhängigkeit

Auf den letzten Folien haben wir gesehen, dass zwei Dinge für Unterräume wichtig sind: Räume, die aufgespannt werden von unterschiedlich vielen Vektoren (das nennt man den **Span** dieser Vektoren), das heißt dass jeder Vektor v in diesem Unterraum geschrieben werden kann als Summe von Vielfachen dieser Vektoren:

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

So etwas nennt man **Linearkombination**. Außerdem haben wir gesehen, dass eine zusätzliche "Dimension" (wir kennen den Begriff offiziel noch nicht, aber bei $\mathbb{R}$ können wir es uns vorstellen) durch einen zusätzlichen Vektor nur dazukommt, wenn er nicht in dem Raum liegt, der von den bisherigen aufgespannt wird - dass er also nicht geschrieben werden kann als so eine Linearkombination wie oben. Man sagt, so ein Vektor ist **linear unabhängig** von den anderen Vektoren.

Wenn wir also Begriffe wie Dimensionen von Unterräumen betrachten wollen, müssen wir uns mit diesen Begriffen auseinandersetzen.

Linearkombinationen

Wir möchten unsere Ergebnisse in $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern:

Satz/Definition

Sei V ein K-Vektorraum, $v_1, \ldots v_n \in V$. für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ heißt die Summe

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n$$

Linearkombination *von $v_1, \ldots, v_n$. Wir bezeichnen die Menge aller Linearkombinationen von $v_1, \ldots v_n$ mit* **Span**$(v_1, \ldots, v_n)$ *und schreiben auch:*

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle := Span(v_1, \ldots, v_n) := \{\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n v_n | \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\}$$

Satz: $\langle v_1, \ldots v_n \rangle$ *ist ein Unterraum von V.*

Beispiel: Eine Gerade in $\mathbb{R}^n$ ist der Span von einen Vektor, eine Ebene in $\mathbb{R}^n$ der Span von zwei Vektoren, etc.

8.2 Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension

Lineare Unabhängigkeit eines Vektors von anderen Vektoren

Definition

Sei V ein K-Vektorraum, $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann heißt $v \in V$ **linear abhängig** von $v_1, \dots, v_n \in V$, falls

$$v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$$

Das ist gleichbedeutend dazu, dass v eine Linearkombination der anderen Vektoren ist, d.h. v ist linear abhängig von $v_1, \dots, v_n$ genau dann wenn man v schreiben kann als

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n v_n \text{ für gewisse } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K)$$

Gilt $v \notin \langle v_1, \dots v_n \rangle$, so sagen wir, dass v **linear unabhängig** von $v_1, \dots, v_n$ ist.

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren untereinander

Definition

Sei V ein K-Vektorraum. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen **linear abhängig**, falls es ein i gibt mit

$$v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$$

Ansonsten heißen die Vektoren $v_1, \ldots v_n$ **linear unabhängig**.

Satz

Rechenregel zum Überprüfen von Linearer Abhängigkeit: *Die Vektoren $v_1, \ldots v_n$ sind genau dann linear unabhängig, falls aus der Gleichung*

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = \vec{0}$$

folgt, dass

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Gibt es eine Nicht-Null-Lösung, so sind sie linear abhängig. Also: Überprüfen von linearer Abhängigkeit $=$ Lösen eines Linearen Gleichungssystems!

Basis und Dimension von Vektorräumen

Definition

Eine Teilmenge B des Vektorraums V heißt Basis von V, wenn gilt

(B1) $\mathrm{Span}(B) = V$ (d.h. B erzeugt V)

(B2) Die Vektoren in B sind alle linear unabhängig.

Beispiele: → Mitschrift

Standardbasis des K^n

Satz/Definition

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist eine Basis von K^n für einen Körper K. Die Basis B heißt **Standardbasis**. *Der i–te Vektor*

$$e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit 1 an der i-ten Stelle heißt i-**ter Einheitsvektor**.

Beispiel R^3: → Mitschrift

Es stellen sich nun folgende Fragen:

- Hat jeder Vektorraum eine Basis?
- Haben zwei verschiedene Basen gleich viele Elemente?

Die Antwort liefert der folgende Satz, den wir hier nicht beweisen:

Satz

Jeder Vektorraum hat eine Basis. Je zwei Basen eines Vektorraums haben gleich viele Elemente.

Definition

Hat eine Vektorraum eine endliche Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, dann nennen wir n die **Dimension von** V. Gibt es keine endliche Basis, so ist B **unedlichdimensional**. Man schreibt $n = \dim V$.

Satz (Basisergänzungssatz)

Seien V ein n-dimensionaler Vektorraum, und $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängige Vektoren. Dann kann man $v_1, \ldots, v_m$ mit Vektoren $v_{m+1}, \ldots, v_n$ ergänzen, so dass $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist.

Beweisskizze:

Gilt $\langle v_1, \ldots v_m \rangle \neq V$, dann kann man ein $v_{m+1} \in V \backslash \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ finden. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_{m+1}$ sind dann auch linear unabhängig. Durch analoge Vorgehensweise erhalt man so Vektoren $v_{m+1}, \ldots, v_n$ bis schließlich $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = V$. Dann ist $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis. ■

Motivation - Koordinaten

Wir sagen im $\mathbb{R}^3$ bei einem Vektor $v = (1, 2, 3)$, dass er die **Koordinaten** $1, 2$ und 3 hat. Das ist tatsächlich etwas ungenau. Eigentlich müsste man sagen, er hat die Koordinaten 1,2, und 3 **bezüglich der Standardbasis**, weil

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Andererseits ist eine andere Basis des $\mathbb{R}^3$ gegeben durch:

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \right\} \text{ und es gilt}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Dann sind **bezüglich dieser Basis die Koordinaten nun $1, -1$, und $\frac{1}{2}$.**

Motivation - Koordinatendarstellung bezüglich anderer Basen

Bisher haben wir die Darstellung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

also als Koordinatendarstellung gelesen. Aber wie schreiben wir den Vektor, wenn wir eine andere Basis als die Standardbasis zugrunde liegen haben?

In der Basis B sind die Koordinaten $1, -1$, und $\frac{1}{2}$, also sollten wir den Vektor schreiben als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

aber das wäre verwirrend... deswegen schreibt man einen Index B mit zum Vektor:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_B$$

Satz/Definition

Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis das K-Vektorraums V. Dann gibt es für jedes $v \in V$ Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so dass

$$v = \lambda_1 \cdot b_1 + \ldots + \lambda_n b_n.$$

Die Elemente λ_i sind eindeutig bestimmt. Wir nennen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die **Koordinaten von** *V* **bzgl.** *B und schreiben*

$$v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B$$