Mathematik I

Vorlesung 13 - Die Determinante von Matrizen

Prof. Dr. Sandra Eisenreich

23. Oktober 2023

Hochschule Landshut

Determinante

Es gibt eine Funktion (genannt: Determinante) $\det : K^{n\times n} \to K$, welche misst, ob eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ invertierbar ist, oder nicht. Genauer gilt: A is invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Im Fall $K = \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$) kann man den Wert $\det A$ auch Größe interpretieren, mit der wir nachrechnen können, ob die Spaltenvektoren linear unabhängig sind. Wir präzisieren:

Definition

Eine Funktion $D : K^{n\times n} \to K$ heißt **Determinantenfunktion (kurz: Determinante)**, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(Hier schreiben wir eine Matrix A in Zeilenform $A = (z_1, \dots, z_n)$ mit Zeilenvektoren $z_1, \dots, z_n$)

- $D(E_n) = 1$ (Normierungseigenschaft)
- D ist **multilinear**, d.h.
  $D(z_1, \dots, z_i + z_i', \dots, z_n) = D(z_1, \dots, z_i, \dots, z_n) + D(z_1, \dots, z_i', \dots, z_n)$, und
  $D(z_1, \dots, \lambda \cdot z_i, \dots, z_n) = \lambda \cdot D(z_1, \dots, z_n)$ für alle $\lambda \in K$.
  D ist **alternierend**:
  $D(z_1, \dots, z_i, \dots z_j, \dots, z_n) = (-1) \cdot D(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n)$,
  d.h. das Vertauschen zweier Zeilen ändert den Wert um einen Faktor -1.

Eindeutigkeit der Determinantenfunktion und lineare Unabhängigkeit

Satz

Es gibt genau eine Determinantenfunktion $\det : K^{n\times n} \to K$. *Wir können somit von* **der Determinantenfunktion det** *sprechen. Bezeichnung:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Bedeutung der Determinante

Satz

Es gilt:

- *Die Spalten bzw. Zeilen seiner Matrix von A sind linear abhängig genau dann wenn* $\det(A) = 0$ *(also genau dann linear unabhängig wenn* $\det(A) \neq 0$*).*
- *Die Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist invertierbar genau dann wenn* $\det(A) \neq 0$*, genauer:*

$$\begin{aligned} \det A \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad A \textit{ ist invertierbar} \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{rang} A = n \\ &\Leftrightarrow \quad \ker A = 0 \end{aligned}$$

Berechnung von Determinanten in Dimension 2 und 3

Satz

Die Determinante lässt sich für kleine Dimensionen wie folgt berechnen:

- *Für $n = 2$:*

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- *Für $n = 3$:*

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

Wie kann man sich das merken? → Regel von Sarrus:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$

Zeilen- bzw. Spaltenentwicklung

Was wenn $n \geq 4$? $\rightarrow$ Reduziere induktiv auf $n = 3$!

Satz

Sei $A \in K^{n\times n}$. Es sei A_{ij} die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die aus A entsteht, wenn man die i-te Zeile und die j-te Spalte streicht.

Dann gelten folgende Berechnungsregeln für die Determinante:

- *Entwicklung nach der i-ten Zeile:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

- *Entwicklung nach der j-ten Zeile:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Beispiel 1

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+2}\cdot 2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 3\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -2\cdot\det\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) + 3\cdot\det\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \\
&= -2\cdot(1-4+0-0-5+8)+3\cdot(2-3+0-0+2+6) \\
&= -2\cdot 0+3\cdot 7 = 21
\end{aligned}
$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 21 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+2}\cdot 2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{3+3}\cdot 1\cdot(-2)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= (-2)\cdot\det\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \\
&= (-2)\cdot(-1-24-8-4+6-8) \\
&= (-2)\cdot(-39) = 78
\end{aligned}$$

Auswirkung einer EZO auf den Wert einer Determinantenfunktion

Es gibt aber noch einen besseren Weg $\det A$ zu berechnen. Dazu benötigen wir:

Satz

Ist A eine Matrix, dann haben EZO folgende Auswirkungen auf $\det A$:

a) *Vertauschen zweier Zeilen ändert den Wert um den Faktor - 1 (weil $\det$ alternierend ist).*
b) *Addition des λ-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile ändert den Wert nicht (s.ob.).*
c) *Multiplikation einer Zeile mit λ ändert den Wert um den Faktor λ (weil $\det$ multilinear ist).*

Berechnung der Determinante im Allgemeinen

Satz

Sei $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix. Überführt man A durch EZO mit s Zeilenvertauschungen in Zeilenstufenform

$$A' = \begin{pmatrix} l_1 & & & & \\ & l_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & l_k & \\ & & & 0 & \end{pmatrix},$$

dann gilt:

- *Ist $k < n$, dann gilt $\det(A) = 0$.*
- *Ist $k = n$, also $\operatorname{rang} A = n$, dann gilt:*

$$\det(A) = (-1)^s \cdot l_1 \cdot \ldots \cdot l_n$$

Rechenregeln

Wie berechnet man $\det(A)$ für eine $(n \times n)$-Matrix?

- für $n = 2$ und $n = 3$ verwende die Formel bzw. Regel von Sarrus.
- für $n \geq 4$ gibt es zwei Möglichkeiten:
  - wenn eine Zeile oder Spalte viele Null-Einträge hat, ist es am schnellsten, nach dieser Zeile oder Spalte zu entwickeln.
  - Sonst kann man immer folgendes tun: Führe EZO aus, um eine Matrix A in Zeilenstufenform zu überführen. Führe dabei Buch, inwieweit sich der Wert der Determinante in jedem Schritt ändert, siehe nächstes Beispiel.

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 10 = 20
\end{aligned}
$$

Ohne Beweis geben wir noch folgenden Satz an:

Satz

Für $A, B \in K^{n\times n}$ *gilt* $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. *Insbesondere gilt für* $A \in GL(G) : \det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$.

Es gibt noch eine weitere Methode, die Determinante zu berechnen: Die Cramersche Regel. Dazu braucht man aber noch eine Definition bzw. folgenden Satz:

Satz

Für $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m,j=1,\dots,n} \in K^{m\times n}$, *sei* $A^t := (a_{ji}) \in K^{n\times m}$ *die sogenannte* **transponierte Matrix** *(für quadratische Matrizen erhält man* A^t *durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen).*

Für $A \in K^{n\times n}$ *gilt:* $\det A = \det A^t$

Bedeutung der Transponierten Matrix: Die transponierte Matrix ist weit über diesen Kontext hinaus von Bedeutung! Nicht nur in der KI: die transponierte wird immer wieder vorkommen im Studium.

Beispiele

- Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ ist $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$
- Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ ist $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ und $\det A = \det A^t = 1$ (Nachrechnen!)

Es ist sogar möglich, die Lösung eines linearen GLS direkt mit Hilfe von Determinanten anzugeben:

Satz (Cramersche Regel)

Sei $A \in K^{n \times n}$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix, $b \in K^n$, und A_j die Matrix, die man erhält, wenn man die j-te Spalte von A durch b ersetzt. Dann gilt:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \Leftrightarrow x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}$$