

Mathematik I

Vorlesung 14 - Eigenwerte und Eigenvektoren

Prof. Dr. Sandra Eisenreich

23. Oktober 2023

Hochschule Landshut

Motivation + Anwendung in der Informatik

- Eine Drehung im R^3 ist eine lineare Abbildung. Gibt es einen Vektor, der durch die Drehung fest bleibt? Genau, die Achse, um die man dreht!
- Eine Spiegelung an einer Ebene lässt auch manche Vektoren konstant: alle in der Spiegelebene.
- Man kann zeigen: für alle linearen Abbildungen gibt es Vektoren (sog. **Eigenvektoren**) oder ganze Unterräume (sog. **Eigenräume**), die konstant bleiben oder nur gestreckt werden. Der Streckungsfaktor heißt **Eigenwert**.
- z.B. zum Ausrechnen von großen Potenzen von Matrizen
- Datenkomprimierung
- Bildverarbeitung
- Statistik
- Datenanalyse (Hauptkomponentenanalyse)
- Praktische Informatik (z.B. PageRank - Algorithmus)

Eigenwert und Eigenvektor

Definition

Sei $f : K^n \rightarrow K^n$ (K Körper) eine lineare Abbildung. Ein $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert von f** , wenn es einen Vektor $v \in K^n$ gibt, so dass $v \neq 0$ und

$$f(v) = \lambda \cdot v.$$

v heißt dann **Eigenvektor zum Eigenwert λ** (das heißt er wird unter f nur um λ gestreckt).

Definition (Eigenraum)

Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert der linearen Abbildung $f : K^n \rightarrow K^n$, dann ist der **Eigenraum zu λ** definiert als die Menge aller Vektoren, die unter f nur um λ gestreckt werden:

$$T_\lambda := \{v \in K^n \mid f(v) = \lambda \cdot v\}$$

Satz

Jeder Eigenraum ist ein linearer Unterraum.

Beweis. Betrachte den Eigenraum T_λ zum Eigenwert λ der Funktion $f : K^n \rightarrow K^n$.

- **Abgeschlossenheit bzgl. Addition von Vektoren:** Für $v_1, v_2 \in T_\lambda$ gilt:

$$\left. \begin{array}{l} f(v_1) = \lambda \cdot v_1 \\ f(v_2) = \lambda \cdot v_2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda v_1 + \lambda \cdot v_2 = \lambda \cdot (v_1 + v_2)$$

Also ist auch $v_1 + v_2 \in T_\lambda$.

- **Abgeschlossenheit bzgl. Multiplikation mit Skalar:** Für $\mu \in K$ gilt

$$f(\mu \cdot v_1) = \mu \cdot f(v_1) = \mu \cdot \lambda \cdot v_1 = \lambda \cdot (\mu \cdot v_1)$$

also gilt auch $\lambda \cdot v_1 \in T_\lambda$.

Dies zeigt, dass T_λ ein linearer Unterraum ist. ■

Beispiel 1:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

also sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von f zu den Eigenwerten 3 und 4.

Beispiel 2:

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

also sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von f zu den Eigenwerten 2 und 3.

Herleitung: Berechnung von Eigenvektoren

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, und $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ziel: Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen. Wie?

Wir wissen: $v = (x, y)$ ist genau dann Eigenvektor zum Eigenwert λ wenn gilt: $A \cdot v = \lambda \cdot v$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}}_{A-\lambda \cdot E_2} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_v &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow v$ ist genau dann Eigenvektor zum Eigenwert λ , wenn gilt:

$$(A - \lambda \cdot E_2) \cdot v = 0, \text{ d.h. wenn } v \in \ker(A - \lambda \cdot E_2)$$

Berechnung von Eigenvektoren

Das, was wir auf der letzten Seite hergeleitet haben, gilt allgemein:

Satz

Sei $f: K^n \rightarrow K^n$ eine lineare Abbildung, dargestellt durch $A = \text{Mat } f \in K^{n \times n}$. Außerdem sei E_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix. Dann gilt:

- v ist genau dann Eigenvektor zum Eigenwert λ , wenn gilt:

$$(A - \lambda \cdot E_n) \cdot v = 0 \text{ (LGS!)}, \text{ d.h. wenn } v \in \ker(A - \lambda \cdot E_n)$$

- Ist λ ein Eigenwert von f bzw. A , so gilt:

$$T_\lambda = \ker(A - \lambda \cdot E_n) = \text{Lösungsmenge des LGS: } (A - \lambda \cdot E_n) \cdot v = 0$$

- λ ist genau dann ein Eigenwert von f bzw. A , wenn

$$\ker(A - \lambda \cdot E_n) \neq \{0\}, \text{ d.h. wenn } \dim \ker(A - \lambda \cdot E_n) > 0.$$

Herleitung: Eigenwertberechnung

Falls wir wissen, dass λ ein Eigenwert ist, bekommen wir den Eigenraum T_λ als die Lösungsmenge (mit dem Gauß-Algorithmus leicht zu bestimmen!) des LGS

$$(A - \lambda \cdot E_n) \cdot v = 0.$$

Also bleibt die Frage: Wie finden wir die Eigenwerte λ , d.h. die mit $\dim \ker(A - \lambda \cdot E_n) > 0$?

Erinnerung: Es gilt: $\dim \ker(A - \lambda \cdot E_n) + \text{rang}(A - \lambda \cdot E_n) = n$

Antwort: Aus obigem folgt:

$$\dim \ker(A - \lambda \cdot E_n) > 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A - \lambda \cdot E_n) < n \Leftrightarrow \det(A - \lambda \cdot E_n) = 0$$

\Rightarrow Vorgehen: Berechne die Determinante von $A - \lambda \cdot E_n$ mit λ als Variable. Dies ist ein Polynom in λ (man nennt es das **charakteristische Polynom**). Die Nullstellen sind die Eigenwerte!

Charakteristisches Polynom

Definition

Für unbestimmtes λ ist $\det(A - \lambda \cdot E_n)$ ein Polynom von Grad n , das sogenannte **Charakteristische Polynom** $\chi_A(\lambda)$.

Satz

λ ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn $\det(A - \lambda \cdot E_n) = 0$, das heißt die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$.

Rechenregel

Berechnung von Eigenwerten und Eigenräumen:

- 1. Schritt: Berechne das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_n)$
- 2. Schritt: Berechne die Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$. Das sind die Eigenwerte.
- 3. Schritt: Für jeden in Schritt 2 berechneten Eigenwert, löse das LGS $(A - \lambda \cdot E_n)v = 0$ durch Anwenden des Gauß-Algorithmus. Der Lösungsraum ist T_λ .

Beispiel für $n = 2$

Wie vorher sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, und $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Schritt: Bestimme das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2)$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

2. Schritt: Bestimme die Nullstellen des obigen Polynoms, das sind die Eigenwerte!

$$\chi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \text{Der einzige Eigenwert ist } 2.$$

3. Schritt: Zu berechnen ist also der Eigenraum

$$T_2 = \ker(A - 2 \cdot E_2) = \text{Lösungsmenge des LGS: } (A - 2 \cdot E_2)v = 0$$

$$\text{mit Gauß: } \begin{pmatrix} 3 - 2 & -1 \\ 1 & 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-I} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$\Rightarrow T_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

Beispiel für $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

1. Schritt: Bestimme das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5 - \lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 3 \\ -6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 - \lambda \\ 6 & -6 \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \cdot (-2 + \lambda + \lambda^2) + 3 \cdot (-6 - 3\lambda) + 3 \cdot (12 + 6\lambda) = 16 + 12\lambda - \lambda^3 \end{aligned}$$

2. Schritt: Bestimme die Eigenwerte = Nullstellen von χ_A :

Durch Ausprobieren erhält man die Nullstelle $\lambda = 4$. Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (-\lambda^3 + 12\lambda + 16) : (\lambda - 4) = -\lambda^2 - 4\lambda - 4 \\ -\lambda^3 + 4\lambda^2 \\ \hline -4\lambda^2 + 12\lambda + 16 \\ -4\lambda^2 + 16\lambda \\ \hline -4\lambda + 16 \\ -4\lambda + 16 \\ \hline - \quad - \end{array}$$

Es bleibt bei der Division das Polynom $-\lambda^2 - 4\lambda - 4$ übrig.

Da $-\lambda^2 - 4\lambda - 4 = -(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = -(\lambda + 2)^2$ erhalten wir somit die Eigenwerte

$$\boxed{\lambda_1 = 4 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -2}$$

3. Schritt: Bestimme die Eigenräume zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -2$.

3.1 Eigenwert $\lambda_1 = 4$: Der Eigenraum T_4 ist der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$(A - 4 \cdot E_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Mit Gauß: $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{+I} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & -12 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} :(-3) \\ :(-12) \\ -// \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-//} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 - \frac{x_3}{2} = 0 \\ x_2 - \frac{x_3}{2} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{x_3}{2} \\ x_2 = \frac{x_3}{2} \end{array} \right\}$ x_3 ist dabei beliebig.

$$\Rightarrow T_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_3/2 \\ x_3/2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } 4.$$

3.2 Eigenwert $\lambda_2 = -2$: Der Eigenraum T_{-2} ist der Lösungsraum des LGS

$$(A + 2 \cdot E_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0. \quad \text{Mit Gau\ss:}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2I]{-I} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 - x_3.$$

$$\Rightarrow T_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Beispiel in \mathbb{R}^3 von vorhin: die erzeugenden Vektoren für alle Eigenräume waren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Was fällt auf? - Die Vektoren sind linear unabhängig, also eine Basis des \mathbb{R}^3 !

Dies gilt allgemein:

Satz

- Sind v_1, \dots, v_k Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, dann sind die Vektoren v_1, \dots, v_k linear unabhängig.
- Sind die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ alle verschieden und in K , dann bilden die Eigenvektoren v_1, \dots, v_n zu den jeweiligen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ eine Basis von K^n .

reelle symmetrische Matrizen

Bisher hatten wir “schöne” Beispiele, in denen χ_A für reelle Vektorräume immer in Linearfaktoren zerfallen ist. Aber: das muss nicht sein, z.B. wenn $\chi_A(\lambda) = x^2 + 1$ (keine Nullstelle in \mathbb{R} , also keine Eigenwerte!)

Frage: Wann sind wir in einem “schönen” Fall mit reellen Nullstellen?

Satz

- Falls n ungerade, dann besitzt χ_A immer mindestens eine reelle Nullstelle.
- Falls A eine reelle symmetrische Matrix ist (d.h. $A = A^T$), dann besitzt χ_A nur reelle Nullstellen.
- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, d.h. $A = A^T$. Dann sind alle Eigenwerte reell und Eigenvektoren v, v' zu unterschiedlichen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander, d.h. $v \cdot v' = 0$.

Symmetrische Matrizen sind also gut! Glücklicherweise kommen in Anwendungen (z.B. in der KI) oft symmetrische Matrizen vor.

Diagonalisierbare Matrizen

Dass es wie bei reellen symmetrischen Matrizen eine Basis aus Eigenvektoren gibt ist so eine tolle Eigenschaft, dass man ihr einen eigenen Namen gibt.

Definition

Eine Matrix A , für die n Eigenvektoren v_1, \dots, v_n zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (möglicherweise mit Vielfachheit) bekannt sind und eine Basis des \mathbb{R}^n bilden, nennt man **diagonalisierbar**.

Satz

- *Reelle symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar.*
- *Ist A eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenvektoren v_1, \dots, v_n zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, dann gilt für die Matrix B mit den Eigenvektoren als Spalten ($B = (v_1 \dots v_n)$):*

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Anwendung: Effektives Potenzieren von Matrizen

Für diagonalisierbare Matrizen wie oben kann man schnell Potenzen ausrechnen! Es gilt nämlich (mit der Bezeichnung von vorhin):

$$\begin{aligned} A^k &= B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot B^{-1} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot B^{-1} \cdot \dots \\ &= B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}. \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Schritt 1: Berechnen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A(\lambda) = \det\{A - \lambda \cdot E_2\} = \det \begin{pmatrix} 9 - \lambda & 2 \\ 2 & 6 - \lambda \end{pmatrix} (9 - \lambda) \cdot (6 - \lambda) - 2 \cdot 2 = 50 - 15\lambda + \lambda^2 = (\lambda - 5)(\lambda - 10)$$

Schritt 2: Berechne die Eigenwerte = Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$: $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 10$.

Schritt 3: Berechne die Eigenräume.

3.1 Eigenraum zu $\lambda_1 = 5$:

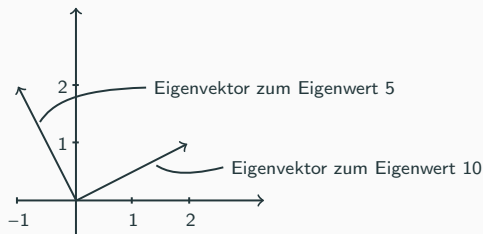
$$A - 5 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 9 - 5 & 2 \\ 2 & 6 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T_5 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

3.1 Eigenraum zu $\lambda_1 = 10$:

$$A - 10 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 9-10 & 2 \\ 2 & 6-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_{10} = \ker(A - 10 \cdot E_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Dann gilt: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, also die Eigenvektoren stehen tatsächlich senkrecht aufeinander und ergeben eine Orthogonalbasis des \mathbb{R}^2 .

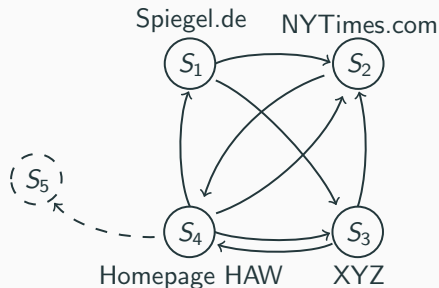


Wir können nun sehr schnell Potenzen von A berechnen. Es gilt nämlich:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = B \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot B^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A^k &= B \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{B^{-1} \cdot B}_{E_2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{B^{-1} \cdot B}_{E_2} \cdots \underbrace{B^{-1} \cdot B}_{E_2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot B^{-1} \\ &= B \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 10^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1} \end{aligned}$$

Anwendung: Der Page Rank Algorithmus



Gegeben: Das Internet bestehend aus Webseiten S_1, \dots, S_N und Verlinkungen von Webseiten S_i zu Webseiten S_j .

Idee: Eine Webseite ist wichtig, wenn andere wichtige Webseiten auf diese verlinken.

Problem: Implizite Definition

Um die Wichtigkeit einer Webseite zu bestimmen betrachtet man das sog. **Zufallssurfer / Random Surfer -Modell**.

Regel: Befindet sich der Zufallssurfer zum Zeitpunkt t auf der Seite S_i und existieren l_i Links von S_i zu anderen Seiten S_j , dann wird jede dieser Seiten zum Zeitpunkt $t + 1$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{l_i}$ angewählt. Wir bezeichnen mit $w_i(t)$ die Wahrscheinlichkeit, dass man sich zum Zeitpunkt t auf der Seite S_i befindet,

zum **Beispiel**:

$$w_1(t) = \frac{1}{3} \cdot w_4(t-1)$$

$$w_2(t) = \frac{1}{2} w_1(t-1) + \frac{1}{2} w_3(t-1) + \frac{1}{3} w_4(t-1)$$

$$w_3(t) = \frac{1}{2} w_1(t-1) + \frac{1}{3} w_4(t-1)$$

$$w_4(t) = w_2(t-1) + \frac{1}{2} w_3(t-1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ w_4(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(t-1) \\ w_2(t-1) \\ w_3(t-1) \\ w_4(t-1) \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{M \text{ (Übergangsmatrix)}} \cdot w(t-1) \end{aligned}$$

Also falls die Wahrscheinlichkeitsverteilung stationär wird (d.h. $w(t)$ verändert sich nicht mehr/oder kaum ab einem gewissen t_0), so gilt

$$w \approx w(t) = M \cdot w(t-1) = M \cdot w$$

Also im Grenzwert gilt $w = M \cdot w$, und somit ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung w ein Eigenvektor von M .

Problem: Gibt es Seiten, auf denen keine Links zu andern Seiten existieren, die aber selbst verlinkt sind, dann kann der Zufallssurfer auf solchen Seiten gefangen sein.

Ausweg: In jeden Schritt wählt der Zufallssurfer einen der bestehenden Links mit Wahrscheinlichkeit $1 - d$, und geht auf eine beliebige Seite mit Wahrscheinlichkeit $\frac{d}{N}$. Hierbei ist $d \in (0, 1)$ der sogenannte Dämpfungsfaktor. Dann ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Zeitpunkt t :

$$w(t) = (1 - d) \cdot M \cdot w(t-1) + d \cdot \begin{pmatrix} 1/N \\ 1/N \\ \vdots \\ 1/N \end{pmatrix} = (1 - d) \cdot M \cdot w(t-1) + \frac{d}{N} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Falls die Verteilung $w(t)$ stationär wird ($= w$) dann gilt:

$$w = (1-d) \cdot M \cdot w + \frac{d}{N} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow w = (1-d) \cdot M \cdot w + \frac{d}{N} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\text{da } w_1+w_2+\dots+w_N=1} w$$

$$\Rightarrow w = \left((1-d) \cdot M + \frac{d}{N} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \right) w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Also: } w = \underbrace{\left((1-d) \cdot M + \frac{d}{N} \cdot E \right)}_{M_d} \cdot w, \text{ wobei } E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

In unserem Beispiel wäre also

$$M_d = (1 - d) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ & & \vdots & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{also für } d = \frac{1}{2}: M_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ & & \vdots & \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{7}{24} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{7}{24} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{7}{24} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Somit müsste man das folgende Eigenwertproblem lösen:

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \dots & \dots \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$$

Satz (Perron Frobenius)

Die Matrix M_d hat die Eigenschaft, dass es genau einen reell-wertigen Eigenvektor mit ausschließlich positiven Koordinaten gibt. Weiter gilt, dass der zugehörige Eigenwert reell ist und den höchsten Betrag aller Eigenwerte hat.