

# Probeklausur Mathematik I

Prof. Dr. Sandra Eisenreich  
Wintersemester 2023/24, Hochschule Landshut

- (a) Schreiben Sie auf *die ersten beiden* Titelseiten Ihren Namen.
- (b) Schreiben Sie auf *jedes* Blatt Ihre Matrikelnummer.
- (c) Diese Probeklausur besteht aus 8 Aufgaben auf 9 Seiten. Bitte prüfen Sie, ob Aufgaben oder Seiten fehlen.
- Verwenden Sie dokumentenechte Stifte (kein Bleistift) in blau oder schwarz.
  - Schreiben Sie Ihre Antworten in die dafür vorhergesehen Felder.
  - Hilfsmittel: nicht-programmierbarer Taschenrechner.
  - Legen Sie Ihren Personalausweis/Studentenausweis lesbar auf den Tisch.
  - Keine vorzeitige Abgabe in den letzten 5 Minuten möglich.
  - Bleiben Sie bitte am Ende an Ihrem Platz, bis die Klausuren eingesammelt und durchgezählt wurden.
  - Viel Erfolg!

Aufgabe	Punkte	Erreicht
Abbildungen	4	
Lineare Abhängigkeit	4	
Teilraum	5	
Berechnungen	17	
Logik	6	
Vollständige Induktion	10	
LGS	10	
Lineare (Un)abhängigkeit	4	
<b>Gesamt</b>	<b>60</b>	

Matrikelnummer:

Name:

---

**1. Abbildungen**

(4 Punkte)

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}, x \mapsto x^2 + 1$  Kreuzen Sie bei allen zutreffenden Aussagen Ja an, sonst Nein:

- ☐ Ja ☐ Nein Die Abbildung  $f$  ist injektiv.
- ☐ Ja ☐ Nein Die Abbildung  $f$  ist surjektiv.
- ☐ Ja ☐ Nein Die Abbildung  $f$  ist linear.
- ☐ Ja ☐ Nein Die Abbildung  $f$  ist ein Isomorphismus.

**2. Lineare Abhängigkeit**

(4 Punkte)

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Unter welchen Bedingungen sind Vektoren  $v_1, \dots, v_n \in V$  linear abhängig? Kreuzen Sie bei allen zutreffenden Aussagen Ja an, sonst Nein:

- ☐ Ja ☐ Nein Die Determinante der Matrix, die die Vektoren als Spalten hat, ist nicht Null.
- ☐ Ja ☐ Nein  $v_1$  lässt sich schreiben als Linearkombination von  $v_2, \dots, v_n$
- ☐ Ja ☐ Nein  $v_1 \in \text{Span}(v_2, \dots, v_n)$ .
- ☐ Ja ☐ Nein Der Rang der Matrix, die die Vektoren als Spalten hat, ist  $n$ .

**3. Teilraum**

(5 Punkte)

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, und  $U \subset V$  eine Teilmenge. Unter welchen der unten aufgeführten Bedingungen ist  $U$  ein Teilraum von  $V$ ? Falls  $U$  wie beschrieben ein Teilraum ist, kreuzen Sie "Ja", sonst "Nein".

- ☐ Ja ☐ Nein  $U$  ist abgeschlossen bezüglich Inversenbildung und Addition.
- ☐ Ja ☐ Nein  $U$  ist abgeschlossen bezüglich Skalarmultiplikation mit Elementen in  $K$  und Addition.
- ☐ Ja ☐ Nein  $U = \text{Span}(v)$  für einen Vektor  $v \in V$ .
- ☐ Ja ☐ Nein  $U$  ist eine Gerade, die nicht durch den Nullpunkt geht.
- ☐ Ja ☐ Nein  $U = \{0\}$

---

#### 4. Berechnungen

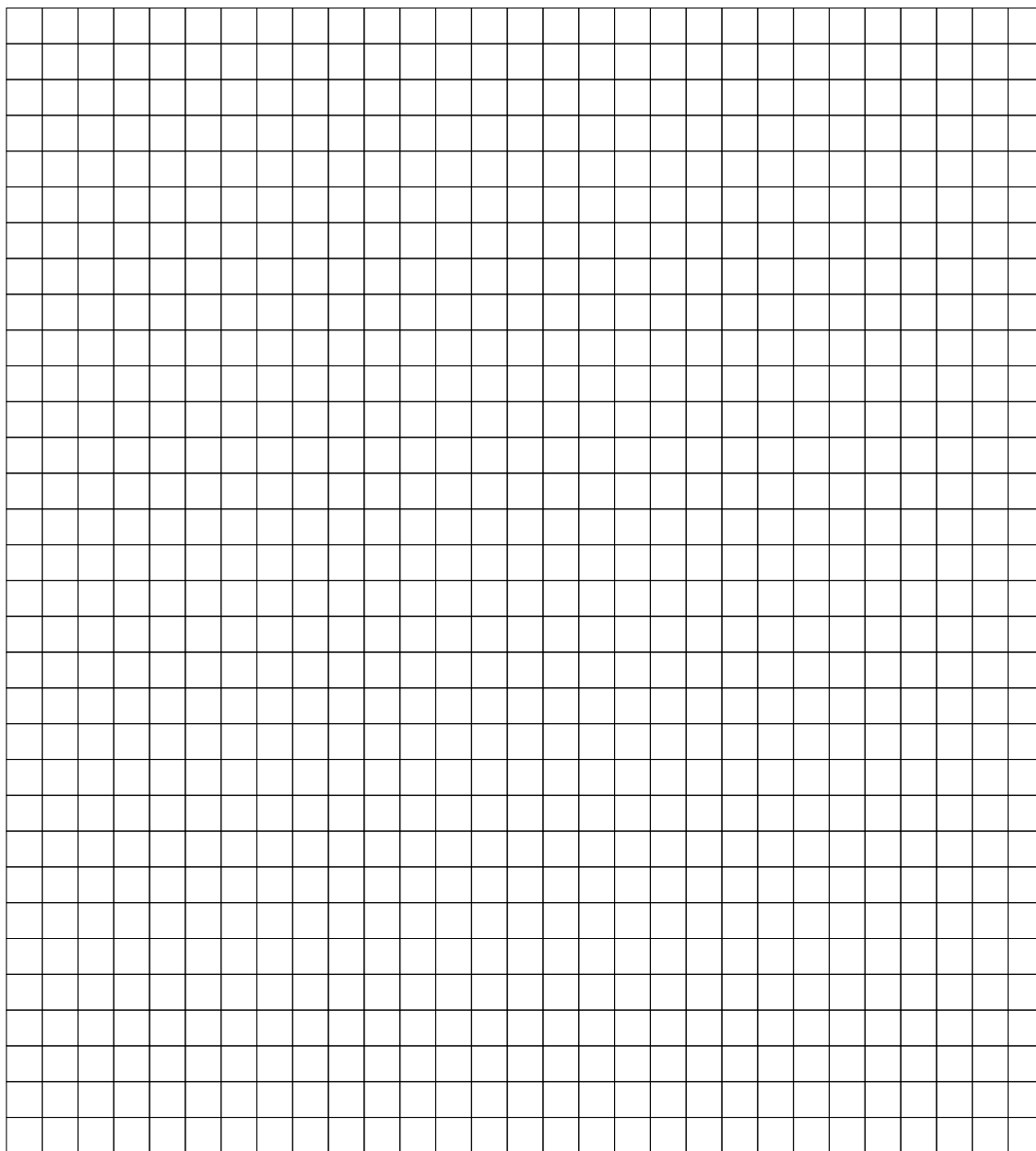
(17 Punkte)

- (a) (7 Punkte) Wandeln Sie die Zahl 131 ins Binär- und ins 9-er System um und geben Sie den Rechenweg an.
- (b) (3 Punkte) Berechnen Sie in  $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$  (wobei Sie das Ergebnis als Restklasse einer Zahl zwischen 0 und 26 darstellen):

$$\overline{4} \odot (\overline{11} \odot \overline{3} \oplus \overline{1})$$

- (c) (3 Punkte) Was ist die Länge der komplexen Zahl  $3 - 4i$ ?
- (d) (4 Punkte) Berechnen Sie das Matrizenprodukt  $A \cdot B$  für folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

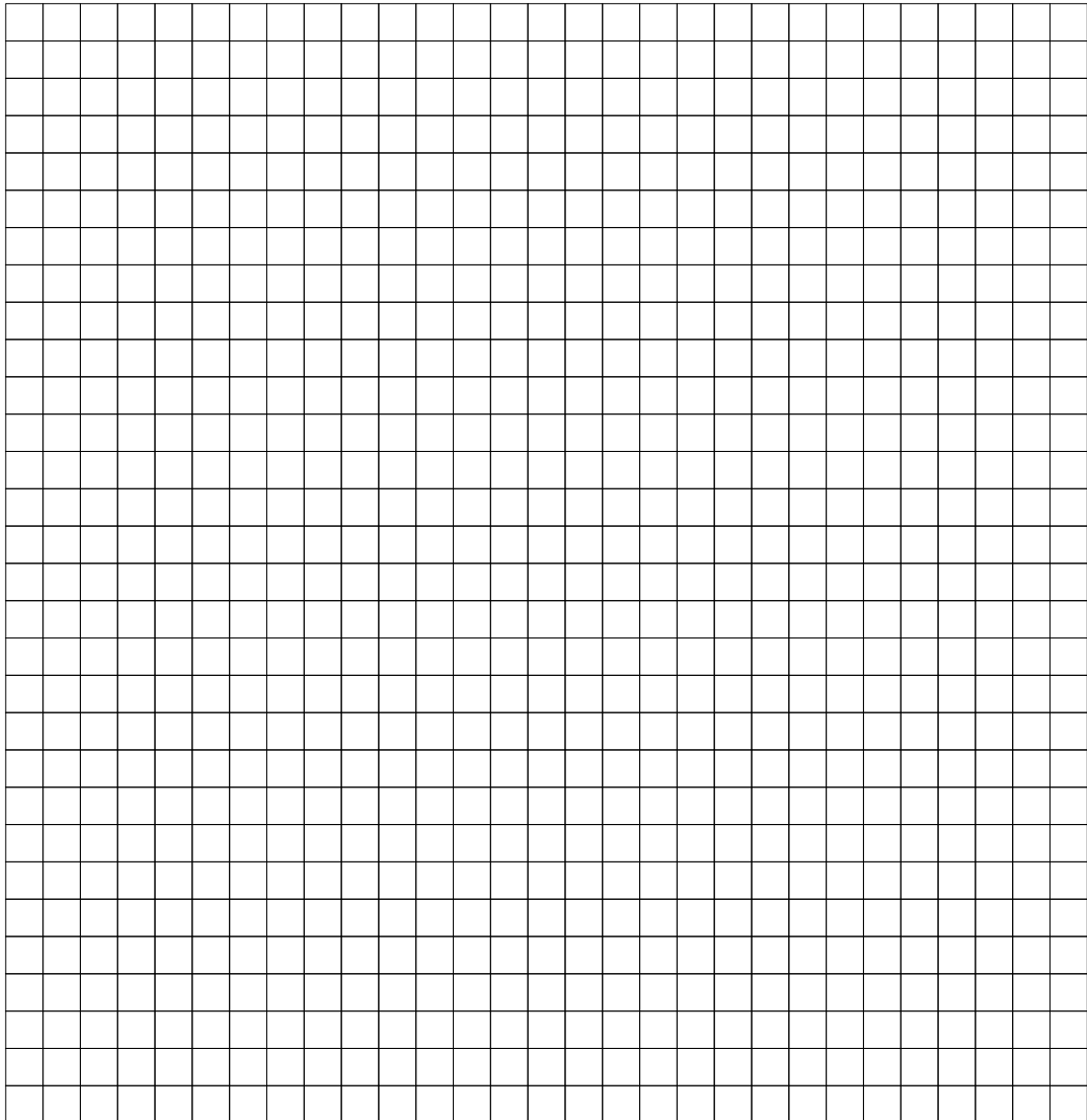


5. **Logik**

(6 Punkte)

Prüfen Sie mit einer Wahrheitstabelle, ob folgende Äquivalenz von Aussagen gilt:

$$(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg(\neg A \wedge \neg B))$$

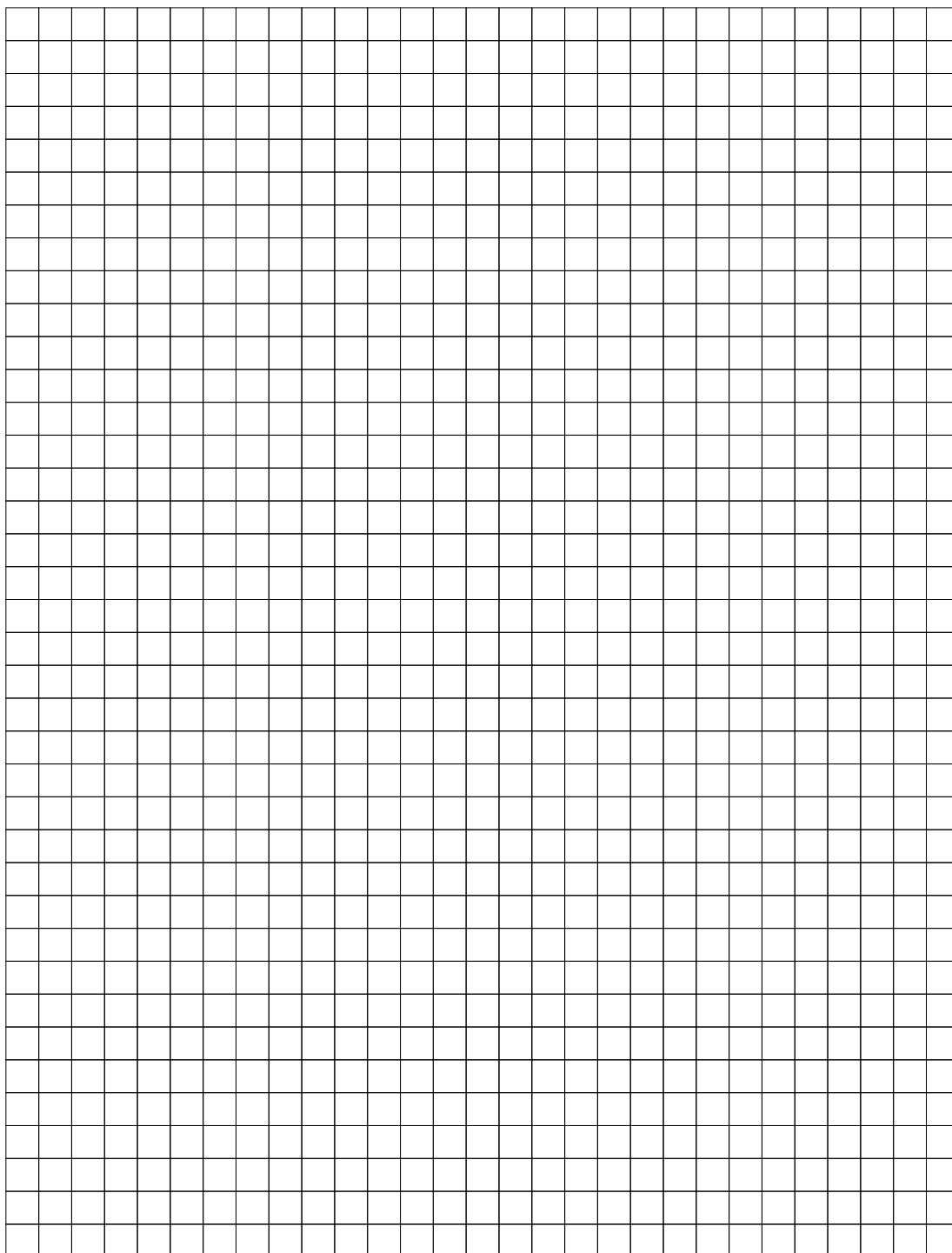


---

**6. Vollständige Induktion****(10 Punkte)**

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

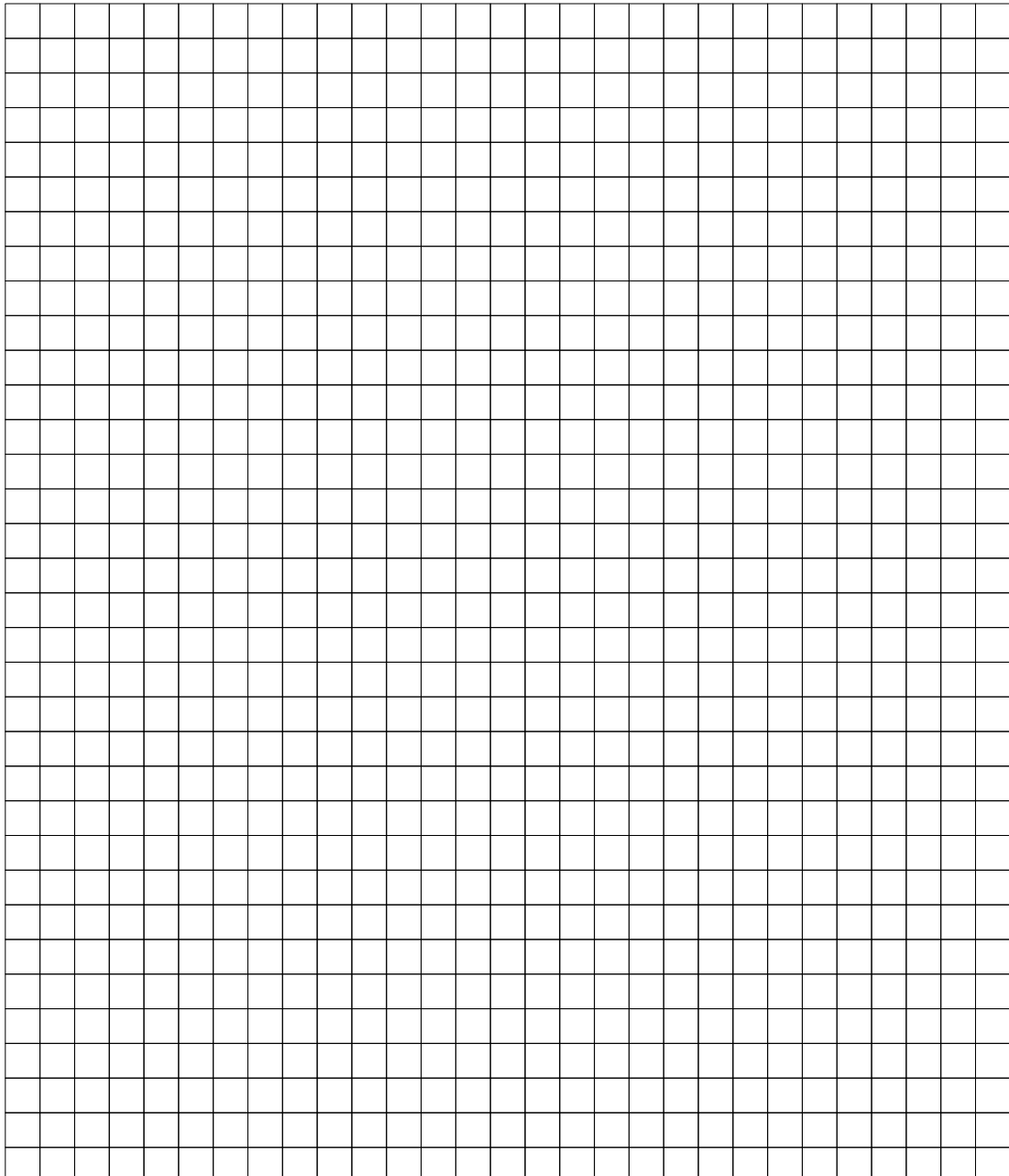


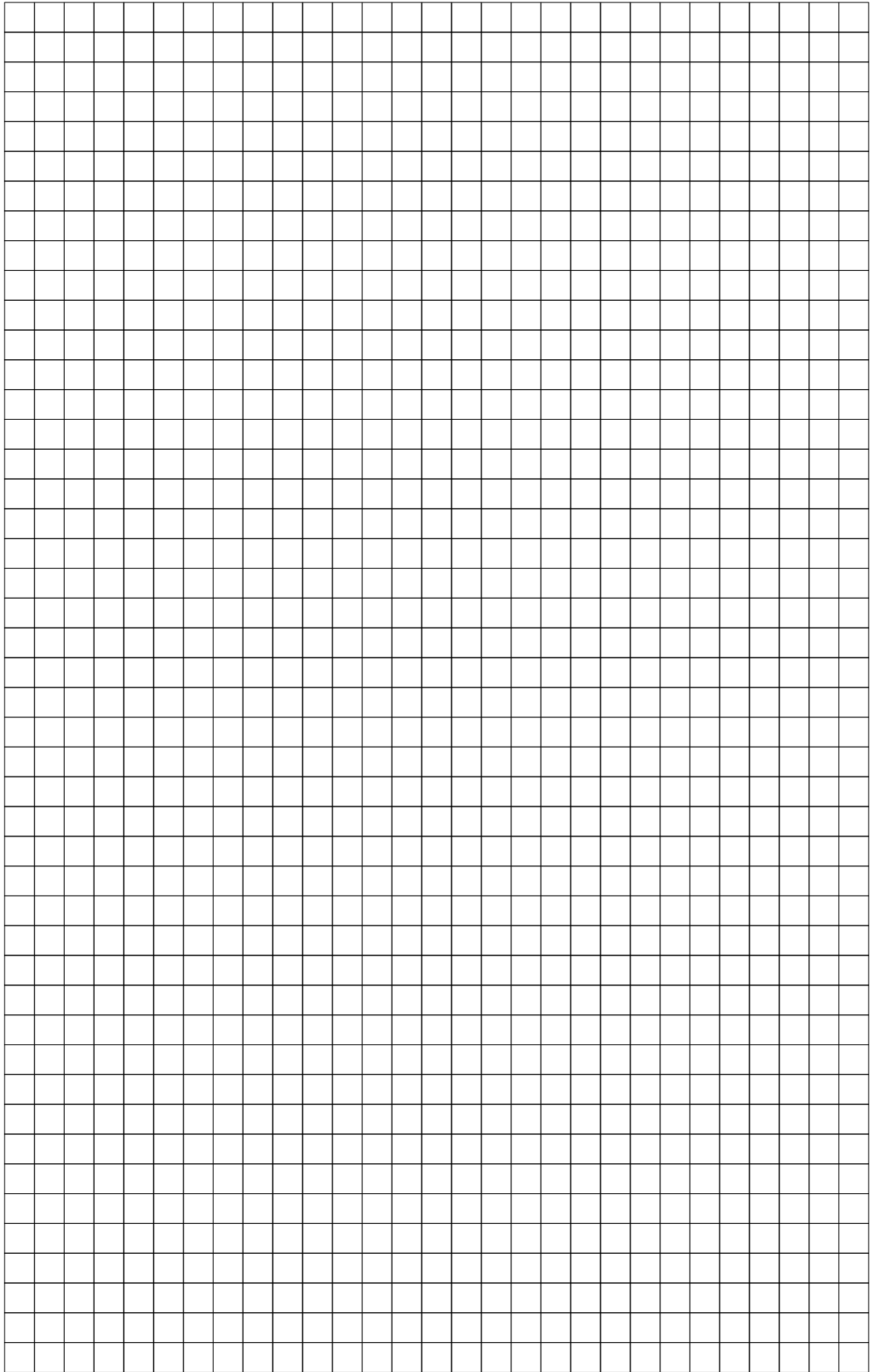
7. LGS

(10 Punkte)

Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cccccccl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & 2x_4 & = & -6 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & & & = & 4 \end{array}$$







8. **Lineare (Un)abhängigkeit**

(4 Punkte)

Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig oder abhängig? Geben Sie den Rechenweg an!

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

