確率過程(Y_t, Z_t)に対するBSDE

$$Y_t = \xi + \int_t^T h(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s^\top \cdot dW_s$$

定義

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: 確率空間
- $W: [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$: d次元Wiener過程
- $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$: Wのフィルトレーション
- $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$: m次元Backwardプロセス
- $\{Z_t\}_{t\in[0,T]}$:$m\times d$次元制御プロセス
- $\xi \in \mathbb{R}^m$: Y_tの終端条件
- $h: [0,T]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}^m$:Y_tのドリフト

オプション評価との関連

- T:オプション満期
- d:原資産数
- m:評価対象オプション個数
- Y_t:オプション価格

確率過程(X_t, Y_t, Z_t)に対するFBSDE

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s, Y_s, Z_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, Y_s, Z_s)^\top \cdot dW_s$$

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T h(s, X_s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s^\top \cdot dW_s$$

定義

- $W: [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$: d次元Wiener過程
- $\{X_t\}_{t \in [0,T]}$: n次元Forwardプロセス
- $x_0 \in \mathbb{R}^n$: X_tの初期値
- $g(X_T) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: X_t 依存のY_t終端条件
- $\mathrm{A} = [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d}$
- $\mu: A \to \mathbb{R}^n$:X_tのドリフト
- $\sigma: A \to \mathbb{R}^n$:X_tのボラティリティ
- $h: A \to \mathbb{R}^m$:Y_tのドリフト

オプション評価との関連

- T:オプション満期
- d:原資産数
- m:評価対象オプション個数
- X_t:原資産価格
- Y_t:オプション価格
- $g(X_T)$:満期でのペイオフ

オプション時価評価におけるFBSDE

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)^\top \cdot dW_s$$

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T h(s, X_s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s^\top \cdot dW_s$$

定義

- $W: [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$: d次元Wiener過程
- $\{X_t\}_{t \in [0,T]}$: d次元Forwardプロセス
- $x_0 \in \mathbb{R}^d$: X_tの初期値
- $g(X_T) \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$: X_t 依存のY_t終端条件
- $\mu: [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$:X_tのドリフト
- $\sigma: [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$:X_tのボラティィリティ
- $h: [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$:$Y_t$のドリフト

変更点

- $d = n, m = 1$
  - 無裁定条件
  - オプション1個を評価
- X_tはY_t, Z_tに依存しない

オプション時価評価におけるFBSDE

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s\ )^\top \cdot dW_s$$

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T h(s, X_s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s^\top \cdot dW_s$$

リスク中立測度下、$r(t)$: 無リスク金利（確定的）とすると

- $h(t, X_t, Y_t, Z_t) = -r(t) Y_t$
- $Z_t^i = \sum_{j=1}^n \Delta_t^i\, \sigma^{ij}(t, X_t)$

FBSDEを解いて得られる情報

- Y_t:オプション価格
- Δ_t^i：デルタ

時間グリッドを$0 = t_0 < t_1 \ldots < t_N = T$とする

- X_t Euler-Maruyama法によるサンプルパス$\left\{X_{t_n}^i\right\}_{i=1,\ldots,K,n=0,\ldots,N}$

$$X_{t_{n+1}}^i = X_{t_n} + \mu\left(t_n, X_{t_n}^i\right)(t_{n+1} - t_n) + \sigma\left(t_n, X_{t_n}^i\right)^{\top}\left(W_{t_{n+1}}^i - W_{t_n}^i\right)$$

- Y_{t_n}, Z_{t_n}:NNで近似し最適化
    - Forward Solver： $Y_{t_0}, \left\{Z_{t_n}\right\}_{t=0}^{N-1}$をNNにより近似、$\left\{Y_{t_n}\right\}_{t=1}^{N}$を計算
        - $Y_{t_0} = Y_0^{NN}\left(x_0 \mid \theta_y\right)$
        - $Z_{t_n} = Z^{NN}\left(t_n, X_{t_n} \mid \theta_z\right) \quad t = 0, \ldots, N-1$

    損失関数

        - $L\left(\theta_y, \theta_z\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K}\left(g\left(X_{t_N}^i\right) - Y_{t_N}^i\right)^2$
    - Backward Solver：$\left\{Z_{t_n}\right\}_{t=0}^{N-1}$をNNにより近似、$\left\{Y_{t_n}\right\}_{t=N-1}^{0}$を計算
        - $Y_{t_N}^i = g\left(X_{t_N}^i\right)$ 各パス満期でのペイオフを終端条件とする
        - $Z_{t_n} = Z^{NN}\left(t_n, X_{t_n} \mid \theta_z\right) \quad t = 0, \ldots, N-1$

    損失関数

        - $L(\theta_z) = \frac{1}{N}\mathrm{Var}\left[Y_{t_0}\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K}\left(Y_{t_0}^i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K} Y_{t_0}^i\right)^2$

例：Backward solverでの計算の流れ