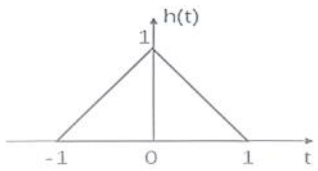
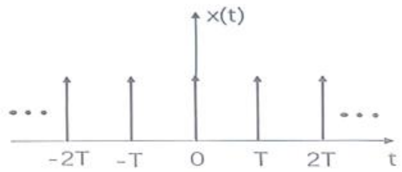
信号与系统期末复习题

2024年6月20日 0:36

一、设$h(t)$是左图所示的三角脉冲，$x(t)$为右图所示的单位冲激串，即$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$。对下列$T$值，求出$y(t)=x(t)*h(t)$，并画出对应的波形图。

（1）$T=2$；（2）$T=3/2$；（3）$T=1$





二、有两个连续时间周期信号的基波周期$T=1/2$：

$x(t)=\cos(4\pi t)$，$y(t)=\sin(4\pi t)$。

（1）求$x(t)$的傅里叶级数的系数；

（2）求$y(t)$的傅里叶级数的系数。

二、有两个连续时间周期信号的基波周期$T=1/2$：

$x(t)=\cos(4\pi t)$，$y(t)=\sin(4\pi t)$。

（1）求$x(t)$的傅里叶级数的系数；

（2）求$y(t)$的傅里叶级数的系数。

解 (a) 因 $T=1/2,\omega_0=2\pi/\frac{1}{2}=4\pi$，故

$$x(t)=\frac{1}{2}(e^{j4\pi t}+e^{-j4\pi t})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk(4\pi)t}$$

其中，$a_1=a_{-1}=1/2$，其余 $a_k=0$。

(b) $y(t)=\frac{1}{2j}(e^{j4\pi t}-e^{-j4\pi t})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k e^{jk(4\pi)t}$

其中，$b_1=-\frac{1}{2}j$，$b_{-1}=\frac{1}{2}j$，其余 $b_k=0$。

四、考虑一个因果线性时不变系统，其系统方程为$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$。

（1）求该系统的频率响应$H(e^{j\omega})$；

（2）在输入为$x[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$时，求系统响应$y[n]$；

（3）输入傅里叶变换 $X\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}$ 时，求系统响应。

（3）输入傅里叶变换 $X\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}$ 时，求系统响应。

当 $X(e^{j\omega})=\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}$ 时，有

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}=\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}+\frac{\frac{8}{9}+\frac{1}{9}e^{-j\omega}}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}$$

由(b)中(ii)知 $(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{FT} \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}$

故 $\frac{8}{9}(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{9}n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1] \xleftrightarrow{FT} \dfrac{\frac{8}{9}+\frac{1}{9}e^{-j\omega}}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}$

从而得其响应为

五、已知某连续时间线性时不变系统的频率响应$H(j\omega)=\frac{1-j\omega}{1+j\omega}$，输入为周期信号$e(t)=\sin(t)+\sin(3t)$。

（1）画出$H(j\omega)$的幅频特性和相频特性曲线；

（2）求系统对该输入的响应$r(t)$，画出$r(t)$和$e(t)$的波形，讨论传输是否引起失真。

可能用到的等式：$\arctan 1=45°$， $\arctan 3=71°56'$。

五、已知某连续时间线性时不变系统的频率响应$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1-\mathrm{j}\omega}{1+\mathrm{j}\omega}$，输入为周期信号$e(t)=\sin(t)+\sin(3t)$。

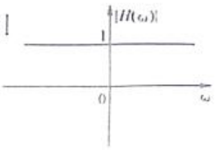
（1）画出$H(\mathrm{j}\omega)$的幅频特性和相频特性曲线；

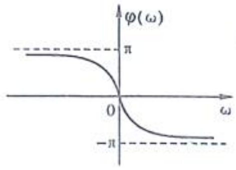
（2）求系统对该输入的响应$r(t)$，画出$r(t)$和$e(t)$的波形，讨论传输是否引起失真。

可能用到的等式：$\arctan 1=45°$，$\arctan 3=71°56'$。

$$H(\omega)=\frac{1-\mathrm{j}\omega}{1+\mathrm{j}\omega}=\frac{\sqrt{1+\omega^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan(-\omega)}}{\sqrt{1+\omega^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan(\omega)}}=\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\arctan(-\omega)}$$

$|H(\omega)|=1$





$\varphi(\omega)=2\arctan(-\omega)$

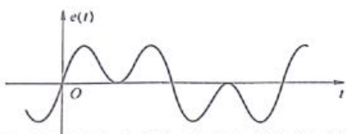
五、已知某连续时间线性时不变系统的频率响应$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1-\mathrm{j}\omega}{1+\mathrm{j}\omega}$，输入为周期信号$e(t)=\sin(t)+\sin(3t)$。

（1）画出$H(\mathrm{j}\omega)$的幅频特性和相频特性曲线；

（2）求系统对该输入的响应$r(t)$，画出$r(t)$和$e(t)$的波形，讨论传输是否引起失真。

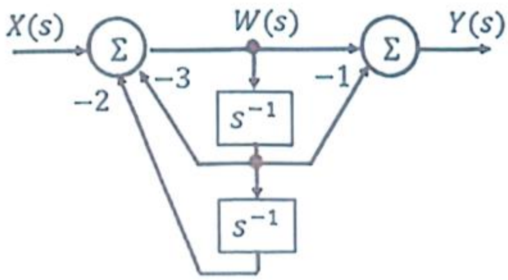
可能用到的等式：$\arctan 1=45°$，$\arctan 3=71°56'$。

$$\begin{aligned}r(t)&=\frac{\mathrm{j}}{2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}90°}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90°}\right)-\frac{\mathrm{j}}{2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}143°52'}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}3t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}143°52'}\right)\\&=\sin(t-90°)-\sin(3t-143°52')\end{aligned}$$



输出信号是有失真的。这说明虽然系统的幅频特性为常数，但相频特性曲线不是过原点的直线，因而不同频率的输入信号其对应的延时不同，造成输出信号的失真。

六、某连续时间因果线性时不变系统的结构如下图所示：



（1）求系统函数$H(s)$；

（2）写出该系统的微分方程；

（3）求该系统的单位冲激响应。

$X(s)-3s^{-1}W(s)-2s^{-2}W(s)=W(s)$

$Y(s)=W(s)-s^{-1}W(s)$

$H(s)=Y(s)/X(s)=(1-s^{-1})/(1+2s^{-2}+3s^{-1})=(s^2-s)/(s^2+3s+2)$

收敛域为$\mathrm{Re}\{s\}>-1$。

六-2、已知某连续时间因果线性时不变系统由如下微分方程描述：

$$\frac{dy(t)}{dt}+0.5y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

（1）求该系统的系统函数$H(s)$及其收敛域；

（2）画出$H(s)$的零极点图；

（3）该系统是否稳定？

（4）若系统的初始条件为：$y(0^-)=1$，求输入$x(t)=e^{-2t}u(t)$时，系统的零输入响应和零状态响应。

（4）若系统的初始条件为：$y(0^-)=1$，求输入$x(t)=e^{-2t}u(t)$时，系统的零输入响应和零状态响应。

对方程两边做单边拉普拉斯变换：

$$sY(s)-y(0^-)+0.5Y(s)=s\chi(s)$$

$$\chi(s)=\frac{1}{s+2}$$

$$Y(s)=\frac{y(0^-)}{s+0.5}+\frac{s\chi(s)}{s+0.5}$$

令

$$Y_{zi}(s)=\frac{y(0^-)}{s+0.5}=\frac{1}{s+0.5}$$

其反变换为零输入响应：

$$y_{zi}(t)=e^{-0.5t}u(t),\qquad (t>0^-)$$

令

$$Y_{zs}(s)=\frac{s\chi(s)}{s+0.5}=\frac{s}{(s+2)(s+0.5)}=\frac{4/3}{s+2}-\frac{1/3}{s+0.5}$$

其反变换为零状态响应：

$$y_{zs}(t)=\frac{4}{3}e^{-2t}u(t)-\frac{1}{3}e^{-0.5t}u(t)$$

七、描述某离散时间线性时不变因果系统的差分方程为

$$6y[n]-5y[n-1]+y[n-2]=6f[n]-12f[n-1]$$

其中$f[n]$为输入信号，$y[n]$为输出响应。

（1）求系统函数$H(z)$；

（2）判断该系统稳定与否？并说明理由。

$$6Y(z)-5z^{-1}Y(z)+z^{-2}Y(z)=6F(z)-12z^{-1}F(z)$$

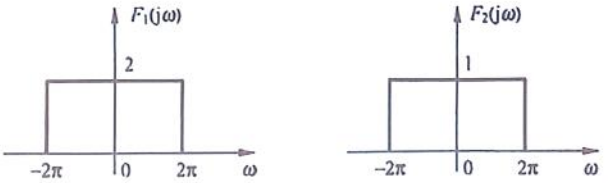
$$H(z)=\frac{Y(z)}{F(z)}=\frac{6-12z^{-1}}{6-5z^{-1}-z^{-2}}$$

收敛域为 $|z|>1/2$ 。

$$=\frac{6z^2-12z}{6z^2-5z-1}=\frac{z^2-2z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$

（2）由于极点为1/2和1/3，均位于单位圆之内，收敛域包含单位圆，因此系统是稳定系统。

八、已知$f_1(t)\leftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)$，$f_2(t)\leftrightarrow F_2(\mathrm{j}\omega)$，其中$F_1(\mathrm{j}\omega)$和$F_2(\mathrm{j}\omega)$的波形分别如下图所示。现对组合信号$f(t)=f_1(t)+f_2^2(t)$进行冲激串采样得到$f_s(t)$（采样间隔为$T_s$）。



（1）要能从$f_s(t)$中恢复出$f(t)$，最大抽样间隔T_{smax}为多少？

（2）若取$T=T_{smax}$，画出抽样后的信号$f_s(t)$的频谱图$F_s(\mathrm{j}\omega)$；

（3）若将$f_s(t)$通过一个频率特性为$H(\mathrm{j}\omega)=u(\omega+2\pi)-u(\omega-2\pi)$的理想低通滤波器，画出滤波器输出端的频谱$Y(\mathrm{j}\omega)$。

解：（1）由于$f(t)=f_1(t)+f_2^2(t)$，其频谱为

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}\left[f_1(t)+f_2^2(t)\right]$$
$$=\mathscr{F}\left[f_1(t)\right]+\mathscr{F}\left[f_2^2(t)\right]$$
$$=F_1(\mathrm{j}\omega)+\frac{1}{2\pi}F_2(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)$$

而$F_2(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)$的频带上限为$4\pi$，$F_1(\mathrm{j}\omega)$的最高频率分量为$2\pi$，所以$F(\mathrm{j}\omega)$的频带上限为$\omega_m=4\pi\ \mathrm{rad/s}$。

根据抽样定理，得$\omega_s=2\pi/T_s\geq 2\omega_m=8\pi\ \mathrm{rad/s}$，得到$T_s\leq 0.25\ \mathrm{s}$，即能从$f_s(t)$中恢复出$f(t)$，所需要的最大抽样间隔
0.25 s。

（2）当$T_s=0.25$时，冲激序列表达式为

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-0.25n)$$

冲激序列傅里叶变换为

$$\mathscr{F}\left[\delta_T(t)\right]=\mathscr{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-0.25n)\right]$$
$$=8\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-8\pi n)$$