

中山大学本科生期末考试

考试科目:《离散数学基础》(A卷)

学年学期: 2020学年第二学期

学院/系: 计算机学院

考试方式: 闭卷

考试时长: 120分钟

任课老师: 周晓聪、乔海燕、周育人、杨跃东、龙冬阳

姓 名: _____

学 号: _____

年级专业: _____

班 别: _____

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者,不授予学士学位。”

—以下为试题区域,共十二道大题(最后一题为附加题),总分110分,考生请在答题纸上作答—

一、(10分) 设 A, B, C 是任意集合,证明 $(A-B) \cup (A-C) = \emptyset$ 当且仅当 $A \subseteq B \cap C$ 。

二、(12分) 给定集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ 和函数 $f: A \rightarrow B$, 这里函数 f 是:

$$f(1) = a \quad f(2) = b \quad f(3) = a \quad f(4) = c \quad f(5) = b \quad f(6) = d$$

定义函数 $\varphi: \wp(A) \rightarrow \wp(B)$: 对任意 $S \subseteq A$,

$$\varphi(S) = \{y \in B \mid \forall x \in A (f(x) = y \rightarrow x \in S)\}$$

- (1) 对于集合 $S = \{1, 2, 3\}$, 计算 $\varphi(S)$;
- (2) 给定 A 的一个子集 S , 对于某个 $x \in A$, 若 $x \in S$, 是否必定有 $f(x) \in \varphi(S)$? 为什么?
- (3) 给定 A 的一个子集 S , 对于某个 $x \in A$, 若 $f(x) \in \varphi(S)$, 是否必定有 $x \in S$? 为什么?

三、(9分) 设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 证明 $R \circ R$ 也是 A 上的等价关系。

四、(6分) 设集合 $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 24\}$, 以整除关系为偏序构成偏序集 $(A, |)$, 即对任意 $a, b \in A$, a 小于等于 b 当且仅当 a 是 b 的因子。

- (1) 画出偏序集 $(A, |)$ 的哈斯图(注意小的元素画在下方、大的元素画在上方);
- (2) 给出偏序集 $(A, |)$ 的极大元、极小元、最大元和最小元;
- (3) 给出偏序集 $(A, |)$ 的子集 $S = \{4, 6, 12\}$ 的上界、下界、上确界和下确界。

五、(8分) 给定集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 和 A 上的二元关系 $R = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 2 \rangle, \langle 5, 5 \rangle\}$ 。

- (1) 画出关系 R 的关系图;
- (2) 给出关系 R 的关系矩阵 M_R ;

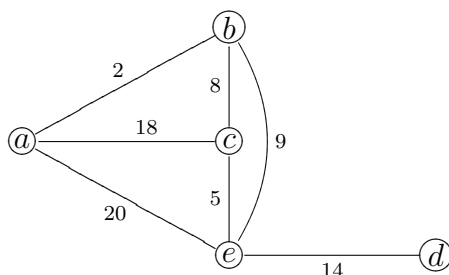
(3) 使用Warshall算法求关系 R 的传递闭包的关系矩阵 $M_{t(R)}$ ，注意要写出执行Warshall算法第 k 次主循环后所得到的矩阵 $W_k(k = 1, 2, \dots)$ 。

六、(10分) 在小于等于300的正整数中：(1) 不能被3和5整除，也不能被7整除的正整数有多少个？(2) 可以被3整除，但不能被5整除和也不能被7整除的正整数有多少个？

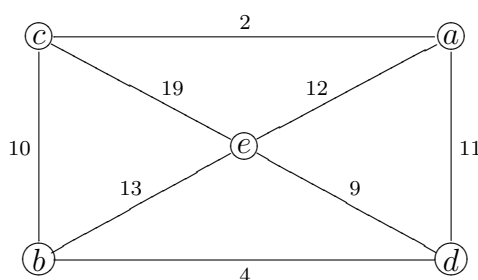
七、(10分) 不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$ 满足 $x_1 \geq 2, 1 < x_2 < 6, x_3 \leq 5$ 的非负整数解有多少个？

八、(9分) 求解常系数齐次线性递推关系式 $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3}$ ，其中初始条件是： $a_0 = 0, a_1 = 4, a_2 = 18$ 。

九、(9分) 使用Dijkstra算法计算下面带权无向图顶点 a 到其余所有顶点间的最短路径和最短距离。注意，需要以合适方式给出算法执行过程中每次选中的顶点以及对其他顶点当前最短路径和最短距离标记的修改。



十、(9分) 使用Prim算法发现下面带权无向图的最小生成树。假定最初选择的顶点是 a ，给出算法执行过程中每一步所考虑的边以及选择的边。



十一、(8分) 证明：如果 G 是连通简单平面图且顶点数 $n \leq 11$ ，则 G 有顶点的度数小于等于4。