

诚信应考, 考试作弊将带来严重后果!

华南理工大学期中考试

2022-2023学年第一学期《数学分析(一)》期中试卷

注意事项: 1. 考前请将密封线内填写清楚;
2. 所有答案请直接答在试卷上, 满分100+20分.

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得 分								

一、(30分) 求解下面极限、上极限或下极限

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n + \sqrt{1}} + \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n + \sqrt{n}} \right)^n$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)^n$.

(3) $\varliminf_{n \rightarrow \infty} e^{n(-1)^n}$ 和 $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} e^{n(-1)^n}$.

二、(15分) 判断数列 $\{\tan n\}$ 是否收敛, 其中 n 为正整数.

三、(15分) 设 $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时数列 $\{A_n\}$ 极限存在. $\{p_n\}$ 为单调递增的正数数列, 且 $p_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$). 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_n} = 0.$$

四、(15分) 用有限开覆盖定理证明致密性定理.

五、 (10分) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 用 $\varepsilon - N$ 方法证明: 若

$$x_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n},$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

六、 (15分) 设 $a_1 > b_1 > 0$, 记

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots$$

证明: 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 极限存在且都等于 $\sqrt{a_1 b_1}$.

七、(附加题, 20分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$x_{m+n} \leq x_m + x_n \quad (m, n = 1, 2, \cdots),$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{x_n}{n}.$$