离散数学基础习题答案

Answers to Exercises in Elementary Discrete Mathematics

周晓聪　　乔海燕

中山大学数据科学与计算机学院, 广州 510275

2021 年 1 月 19 日

目录

第八章　计数与组合

练习 8.1 设$S = \{1,2,3,4,5,6\}$，(1) 使用S中的数字能构成多少个三位数？(2) 其中有多少数字不同的三位数？(3) 有多少奇数？(4) 有多少数字不同的奇数？(5) 有多少数字不同的偶数？

解答：(1) 由于S中没有0，因此能构成的三位数（可含重复数字）的每一位都有6个选择，因此总共有$6^3 = 216$个三位数。

(2) 如果要求每一位数字不同，则百位有6个选择，十位有5个选择，个位有4个选择，总共有$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$个这样的三位数。

(3) 要使得是奇数，则个位只能选$1,3,5$三种选择，而百位和十位仍有6个选择，因此总共有$3 \cdot 6 \cdot 6 = 108$个这样的三位数。

(4) 要使得是奇数，且数字不同，则先确定个位有$1,3,5$三种选择，十位除与个位不同外其他数字都可选，因此有5个选择，而百位有4个选择，因此$3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$个这样的三位数。

(5) 要使得是偶数，且数字不同，则先确定个位有$2,4,6$三种选择，十位除与个位不同外其他数字都可选，因此有5个选择，而百位有4个选择，因此也有$3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$个这样的三位数。

练习* 8.2 设$S = \{0,1,2,3,4,5,6\}$，(1) 使用S中的数字能构成多少个三位数？(2) 其中有多少数字不同的三位数？(3) 有多少奇数？(4) 有多少数字不同的奇数？(5) 有多少数字不同的偶数？

解答：(1) 使用S中的数字能构成的三位数的百位数除0之外，其他数字都能选，因此有6种选择，而十位与个位7个数字都可选，因此根据乘法原理总共有$6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$个；

(2) 使用S中的数字能构成的数字不同的三位数的百位数除0之外，其他数字都能选，因此有6种选择，而十位数可选除百位所选数字之外的6个数字之一，而个位数可选除百位和十位数字之外的5个数字之一，因此根据乘法原理总共有$6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$个；

(3) 使用S中的数字能构成的三位数奇数的个位数只能选1,3,5三个数字之一，百位数不能选0，因此有6种选择，十位数有7种选择，因此根据乘法原理总共有$3 \cdot 6 \cdot 7 = 126$个；

(4) 使用S中的数字能构成的数字不同的三位数奇数的个位数只能选1,3,5三个数字之一，百位数不能选0以及个位数已经选中的数字，因此有5种选择，十位数不能选个位和百位已经选中的数字，因此也有5种选择，因此根据乘法原理总共有$3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$个；

(5) 使用S中的数字能构成的数字不同的三位数偶数需要区分两种情况：(i) 如果个位数选0，则百位数有6种选择，而十位数可选剩下的5个数字，有5种选择，根据乘法原理这种情况总共有$1 \cdot 6 \cdot 5 = 30$个三位数偶数；(ii) 如果个位数从2,4, 6这三个数字中选择，则百位数不能选0以及个位数已经选中的数字，因此有5种选择，十位数不能选个位和百位已经选中的数字，因此也有5种选择。因此根据乘法原理这种情况总共有$3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$个；(i)和(ii)两种情况是不重叠的，因此根据加法原理，使用S中的数字能构成的数字不同的三位数偶数总数是$30 + 75 = 105$个。

练习 8.3 某计算机学院有男生20名，女生15名，现在要推选一位学生任学生会主席，有多少种推选方法？如果要推选一位学生任学生会主席，一位任副主席，又有多少种推选方法？如果要求任学生会主席和副主席的学生性别要不同，则有多少种推选方法？

解答：(1) 推选一位学生任学生会主席，则有$20 + 15 = 35$种推选方法。(2) 要推选一位学生任主席，一位任副主席，则主席人选有35种，副主席人选有34种，从而总共有$35 \cdot 34 = 1190$种。(3) 如果要求任学生会主席和副主席的学生性别不同，则可按主席的性别分：(i) 如果主席人选的性别是男生则有20种可能，这时副主席人选有15种可能，因此这时有300种可能；(ii) 如果主席人选是女生则有15种可能，副主席人选有20种可能，因此这时也有300种可能，因此担任主席和副主席的学生性别不同就总共有600种推选方法。

【**讨论**】也可使用减法原理来求解主席和副主席的人选性别不同的推选方法数：总的推选方法是1190种，而主席和副主席学生性别相同的方法可分为两类，一类是两位学生全是男生，这样有$20 \cdot 19 = 380$种推选方法，一类是两位学生全是女生，这样有$15 \cdot 14 = 210$种推选方法，因此主席和副主席人选性别相同的推选方法数是$380 + 210 = 590$种，从而性别不同的推选方法数是$1190 - 590 = 600$种。

练习 8.4 某计算机学院有计算机软件专业30名学生，其中男女学生各15名，计算机应用专业40名学生，其中男女学生各20名。现在要推选一位学生任学生会主席，一位任副主席，要求主席和副主席必须来自不同专业，且性别也不同，试问有多少种推选方法？

解答：我们按照推选任主席的学生的专业和性别进行分类讨论：

(1) 该学生来自软件专业的男生：即任主席的学生有15人可选，而副主席的学生人选只能来自应用专业的女生，有20人可选，因此这时有$15 \cdot 20 = 300$种可选方法；

(2) 该学生来自软件专业的女生，类似地也有300种可选方法；

(3) 该学生来自应用专业的男生：即任主席的学生有20人可选，而副主席的学生只能来自软件专业的，有15人可选，因此这时有$15 \cdot 20 = 300$种可选方法；

(4) 该学生来自应用专业的女生，类似地也有300种可选方法。

因此主席和副主席来自不同专业且性别也不同的推选方法总共有1200种。

【**讨论**】我们也可利用减法原理和容斥原理结合来求解。学生总数是$30 + 40 = 70$，所以总的推选方法数是$70 \cdot 69 = 4830$（我们总是认定主席和副主席需要不同的学生担任）。主席和副主席来自不同专业、不同性别的方法数等于总方法数减去主席和副主席来自相同专业，或来自相同性别的方法数。

(1) 主席和副主席来自相同专业，则如果都来自软件专业有$30 \cdot 29 = 870$种方法，都来自应用专业则有$40 \cdot 39 = 1560$种方法，因此来自相同专业总共有$870 + 1560 = 2430$；

(2) 主席和副主席来自相同性别，则如果都来自男生则有$(20+15)\cdot(20+15-1) = 35\cdot 34 = 1190$，同样都来自女生也有1190种方法，因此来自相同性别总共有2380种方法；

(3) 主席和副主席来自相同专业且来自相同性别，则如果都来自软件专业男生有$15 \cdot 14 = 210$，同样都来自软件专业女生也有210种方法，如果都来自应用专业男生则有$20 \cdot 19 = 380$种可选方法，同样都来自应用专业女生也有380中可选方法，因此来自相同专业且来自相同性别的推选方法总共有$210 + 210 + 380 + 380 = 1180$。

从而来自不同专业且性别也不同的推选方法等于$4830-2430-2380+1180=1200$种可选方法，答案与上面相同。

练习* 8.5 某计算机学院有计算机系统专业20名学生，其中男女学生各10名，计算机软件专业30名学生，其中男女学生各15名，计算机应用专业40名学生，其中男女学生各20名。现在要推选一位学生任学生会主席，一位任副主席，要求主席和副主席必须来自不同专业，且性别也不同，试问有多少种推选方法？

解答：我们按照推选任主席的学生的专业和性别进行分类讨论：

(1) 该学生来自系统专业的男生：即任主席的学生有10人可选，而副主席的学生人选则在其他专业的女生中选择，有$15+20$人可选，因此总共有$10\cdot 35=350$种可选方法；

(2) 该学生来自系统专业的女生，类似地也有350种可选方法；

(3) 该学生来自软件专业的男生：即任主席的学生有15人可选，而副主席的学生人选则在其他专业的女生中选择，有$10+20$人可选，因此总共有$15\cdot 30=450$种可选方法；

(4) 该学生来自软件专业的女生，类似地也有450种可选方法；

(5) 该学生来自应用专业的男生：即任主席的学生有20人可选，而副主席的学生人选则在其他专业的女生中选择，有$10+15$人可选，因此总共有$20\cdot 25=500$种可选方法；

(6) 该学生来自应用专业的女生，类似地也有500种可选方法。

因此总共的推选方法共有$2\cdot(350+450+500)=2600$种。

【讨论】为检查上述答案的正确性，我们也可利用减法原理来计算，即主席和副主席人选来自不同专业且不同性别的方法数等于所有可选的方法数减去主席和副主席人选来自相同专业或来自相同性别的方法数。学生总人数是90人，因此所有可选的方法数是$90\cdot 89=8010$种，而按照容斥原理，主席和副主席人选来自相同专业或来自相同性别的方法数等于主席和副主席人选来自相同专业的方法数加上主席和副主席人选来自相同性别的方法数，再减去主席和副主席人选既来自相同专业又来自相同性别的方法数：

(1) 主席和副主席人选来自相同专业的方法数：$20\cdot 19+30\cdot 29+40\cdot 39=2810$，这里$20\cdot 19, 30\cdot 29$和$40\cdot 39$是人选分别来自系统、软件和应用专业的方法数；

(2) 主席和副主席人选来自相同性别的方法数：$45\cdot 44+45\cdot 44=3960$，这里两个$45\cdot 44$分别是人选来自男生和女生的方法数；

(3) 主席和副主席人选既来自相同专业又来自相同性别的方法数：$(10\cdot 19+15\cdot 14+20\cdot 19)\cdot 2=1360$，这里$10\cdot 19, 15\cdot 14$和$20\cdot 19$分别人选分别来自系统、软件和应用专业的男生（或女生）的方法数，后面乘以2，是因为每个专业男女生人数都相同，因此主席和副主席人选都来自某个专业的男生方法数和都来自某个专业的女生方法数相同。

因此席和副主席人选来自不同专业且不同性别的方法数等于$8010-2810-3960+1360=2600$种，这表明这两种计算方法都是正确的。不难想到，这两种不同的计数方法之间可建立一个等式，并且推广到一般的情况。

不难看到，对于这一题，直接计算比使用减法原理要简单。

练习 8.6 整数：(1) $3^4\times 5^2\times 7^6\times 11$，(2) 620，(3) 10^{10}，分别有多少个不同的正因子？

解答：(1) 整数$3^4\times 5^2\times 7^6\times 11$的每个正因子的质因子分解必然具有有$3^{a_1}\times 5^{a_2}\times 7^{a_3}\times 11^{a_4}$的形式，其中$0\leq a_1\leq 4, 0\leq a_2\leq 2, 0\leq a_3\leq 6, 0\leq a_4\leq 1$，也即每个正因子可通过取若干个$3, 5, 7, 11$而得

到，其中3的取法有5种（0到4），5的取法有3种，7的取法有7种，11的取法有两种，因此根据乘法原理，该整数的因子个数有$5\cdot 3\cdot 7\cdot 2=210$个。

(2) 注意到$620=2^2\times 5\times 31$，因此它的正因子个数有$3\cdot 2\cdot 2=12$个。

(3) 注意到$10^{10}=2^{10}\times 5^{10}$，因此它的正因子个数有$11\cdot 11=121$个。

练习* 8.7 四位数的正整数中至少有一位是0的数有多少？至少有一位是2的数有多少？

解答: 首先四位数的正整数总共有9000个（从1000到9999），其中不含0的数有$9\cdot 9\cdot 9\cdot 9=6561$个，因为这时每一位都有9个数字（即1到9）可选择，因此四位数的正整数中至少有一位是0的数有$9000-6561=2439$个。

在所有的四位数的正整数中，不含2的数有$8\cdot 9\cdot 9\cdot 9=5832$个，因为这时千位只有1以及3到9这8个数字可选，其他位有9个数字可选，因此四位数的正整数中至少有一位是2的数有$9000-5832=3168$个。

【讨论】我们也可不用减法原理而直接求解。

(1) 对于至少有一位是0的数，我们先分为：(i) 恰好有1位是0；(ii) 恰好有2位是0；(ii) 恰好有3位是0。对于恰好有一位是0的数，又可分为个位0，十位是0和百位是0三种情况，而对于这每一种情况，每个位置都有9个选择，因此每种情况均有$9\cdot 9\cdot 9=729$个数，因此恰好有一位是0的数总共有$3\cdot 729=2187$个数。恰好有2位是0，则可在百、十、个位上选2个位置为0，然后剩下的位置和千位都有9个选择，因此恰好有2位是0的数总共有$3\cdot 9\cdot 9=243$个；最后恰好有3位是0 的，则只能是百、十、个位是0，即只能是1000到9000这9个数，因此至少一位是0的数有$2187+243+9=2439$个。

(2) 对于至少有一位是2的数，同样先分为：(i) 恰好有1位是2；(ii) 恰好有2位是2；(ii) 恰好有3位是2；(iv) 恰好有4位2。对于恰好有一位是2的数，又可分为个位2，十位是2、百位是2这三种情况以及千位是2的情况，而对于前三种情况，千位有8种选择，其他两位有9个选择，因此有$8\cdot 9\cdot 9=648$个，三种情况总共有$3\cdot 648=1944$个，对于千位是2的情况，剩下三个位置都有9个选择，因此总共有$9\cdot 9\cdot 9=729$个。因此恰好有一位是0的数总共有$1944+729=2673$个数。恰好有两位是2，则可在千、百、十、个位上选两个位置为2，其中有三种情况选择了千位，这时剩下位置都有9个选择，因此这三种情况总共有$3\cdot 9\cdot 9=243$，另外三种情况没有选择千位，这时千位只有8个选择，而剩下一位有9个选择，因此这三种情况总共有$3\cdot 8\cdot 9=216$，因此恰好有2位是2的数总共有$216+243=459$个；恰好有三是2的，其中三种情况选到了千位，这时剩下一位有9个选择，因此这四种情况总共有$3\cdot 9=27$个，剩下一种情况则是$1222,3222,\cdots,9222$这8个数，因此恰好有3位2的四位数总共有$27+8=35$个，最后四位都是2的数只有一个，即2222，因此至少一位是2的数有$2673+459+35+1=3168$个。

不难看到，对于这一题，减法原理比直接式计算更为简单。

练习 8.8 六人围着一张圆桌而坐，请问有多少种方法？

解答: 六人围着一张圆桌而坐的方法数是$6!/6=5!=120$中。

练习* 8.9 表8.1给出的两个程序片段执行完毕之后，程序变量k的值分别是多少？

解答: (1) 程序片段(1)的两个 **for** 语句是分别执行的，一个从i等于1到n的循环相当于依次从1到n中选一个i的值，因此第一个 **for** 语句中$k:=k+1$的执行次数等于从1到n选一个i的值的方法

表 8.1　练习8.9的两个程序片段

(1) $k = 0$;
for $i = 1$ to n do $k := k+1$;
for $j = 1$ to m do $k := k+1$;
	(2) $k = 0$;
	for $i = 1$ to n do
	for $j = 1$ to m do
	if $i \neq j$ then $k := k+1$;

数，即n次，而第二个 **for** 循环$k := k+1$的执行次数等于从1到m选一个j的值的方法数，即m次，两个循环语句分别执行，相当于i的值选择和j的值选择是分别进行的，使用加法原理，从而k的值最后是$n+m$。

(2) 程序片段(2)的两个循环是嵌套进行的，相等于执行$k := k+1$时先要完成选i的值的任务，再要完成选j的值的任务，这是分步进行的，因此需要使用乘法原理，而其中 **if** 语句的判断$i \neq j$，相当于对每个选择的i值，j需要选与i不同的值，因此i的可选值是n个，而对每个i的可选值，j的可选值个数不同：

(i) 若$n \leq m$，则对n个可选的i值，每个i值j有$m-1$种可选的值，因此语句$k := k+1$总共执行$n(m-1)$次，k的最终值是$n(m-1)$。

(ii) 若$n > m$，在当i选的值是1到m中的每个值时，这时j有$m-1$种可选的值；但当i选的值是$m+1$到n中的每个值时，由于这时$i \neq j$总是成立，因此j的可选值有m个。前者使得语句$k := k+1$执行了$m(m-1)$次，而后者使得语句$k := k+1$执行了$(n-m)m$次，因此总共执行了$m(m-1)+(n-m)m = m(n-1)$次，从而k的最终值是$m(n-1)$。

综上，在程序片段(2)执行完之后k的值是$a(b-1)$，这里$a = \min\{m,n\}$，而$b = \max\{m,n\}$。

【讨论】注意，程序片段(2)执行完之后k的值并不等于$n(m-1)$。实际上，由于以i为循环变量的循环中，在以j为循环变量的循环之前没有对k值做任何修改，所以即使将以j为循环变量的循环作为外层循环，而以i为循环变量的循环作为内存循环，**if** 语句的执行次数应该是相同的，都是nm次，而语句$k := k+1$的执行次数等于从1到n中选一个数，然后再从1到m中选一个数，且这两个数不相等的方法数，等于选的总方法数mn，减去选的两个数相等的方法数，而选两个数相等的次数等于n和m的小者的值，因此$k := k+1$的执行次数等于mn减去m和n中的小者。

练习 8.10 在1到300的整数（包括1和300）分析求满足以下条件的整数个数：(1) 同时能被3，5和7整除；(2) 不能被3和5整除，也不能被7 整除；(3) 可以被3整除，但不能被5和7整除；(4) 只被3，5和7中的一个数整除。

解答：设1到300的整数构成的集合是U，其中能被3整除的整数构成的集合是A，能被5整除的整数构成的集合是B，能被7整除的整数构成的集合是C，则有：

$$|U| = 300 \qquad |A| = \lfloor 300/3 \rfloor = 100$$
$$|B| = \lfloor 300/5 \rfloor = 60 \qquad |C| = \lfloor 300/7 \rfloor = 42$$

从而我们有：

(1) 能同时被3, 5和7整除的整数个数是：

$$|A \cap B \cap C| = \lfloor 300/\mathrm{lcm}(3,5,7) \rfloor = \lfloor 300/105 \rfloor = 2$$

(2) 而不能被3和5整除，也不能被7整除的整数构成的集合是$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$，从而有：

$$\begin{aligned}\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C} &= \overline{A\cup B\cup C} = |U| - |A\cup B\cup C| \\ &= |U| - |A| - |B| - |C| + |A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C| - |A\cap B\cap C| \\ &= 300 - 100 - 60 - 42 + \lfloor 300/(3\cdot 5)\rfloor + \lfloor 300/(3\cdot 7)\rfloor + \lfloor 300/5\cdot 7\rfloor - 2 \\ &= 98 + 20 + 14 + 8 - 2 = 138\end{aligned}$$

因此不能被3和5整除，也不能被7整除的有138个。

(3) 可以被3整除，但不能被5和7整除的整数构成的集合是$A\cap\overline{B}\cap\overline{C}=A-(B\cup C)$，从而有：

$$\begin{aligned}|A-(B\cup C)| &= |A| - |A\cap(B\cup C)| = |A| - |(A\cap B)\cup(A\cap C)| \\ &= |A| - |A\cap B| - |A\cap C| + |A\cap B\cap C| \\ &= 100 - \lfloor 300/(3\cdot 5)\rfloor - \lfloor 300/(3\cdot 7)\rfloor + 2 \\ &= 100 - 20 - 14 + 2 = 68\end{aligned}$$

因此可以被3整除，但不能被5和7整除有68个。

(4) 只被3，5和7中的一个数整除构成的集合是$(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{A}\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{A}\cap\overline{B}) = (A-(B\cup C))\cup(B-(A\cup C)\cup(C-(A\cup B))$，不难看到：

$$\begin{aligned}|A-(B\cup C)| &= 68 \\ |B-(A\cup C)| &= |B| - |B\cap A| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C| = 60 - 20 - 8 + 2 = 34 \\ |C-(B\cup A)| &= |C| - |C\cap B| - |C\cap A| + +|A\cap B\cap C| = 42 - 8 - 14 + 2 = 22\end{aligned}$$

从而只被3，5和7中的一个数整除的整数个数是：

$$(A-(B\cup C))\cup(B-(A\cup C)\cup(C-(A\cup B)) = |(A-(B\cup C))|+|(B-(A\cup C))|+|(C-(A\cup B))| = 68+34+22 = 124$$

因此这样的整数有124个。

练习* 8.11 在小于1000的正整数中：(1) 有多少数可以被2，3，或5整除？(2) 不能被7，11，或13整除？(3) 被3整除，但不能被7整除？

解答：设小于1000的正整数，即1到999的整数构成的集合是U，且设：

$$\begin{aligned}A &= \{x\in U \mid x\text{ 能被2整除}\} & B &= \{x\in U \mid x\text{ 能被3整除}\} & C &= \{x\in U \mid x\text{ 能被5整除}\} \\ D &= \{x\in U \mid x\text{ 能被7整除}\} & E &= \{x\in U \mid x\text{ 能被11整除}\} & F &= \{x\in U \mid x\text{ 能被13整除}\}\end{aligned}$$

则有$|U|=999$，且：

$$\begin{aligned}|A| &= \lfloor 999/2\rfloor = 499 & |B| &= \lfloor 999/3\rfloor = 333 & |C| &= \lfloor 999/5\rfloor = 199 \\ |D| &= \lfloor 999/7\rfloor = 142 & |E| &= \lfloor 999/11\rfloor = 90 & |F| &= \lfloor 999/13\rfloor = 76\end{aligned}$$

从而我们有：

(1) 能被2, 3或5整除的整数个数是：

$$\begin{aligned} |A\cup B\cup C| &= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C| \\ &= 499+333+199-\lfloor 999/(2\cdot 3)\rfloor-\lfloor 999/(2\cdot 5)\rfloor-\lfloor 999/(3\cdot 5)\rfloor+\lfloor 999/(2\cdot 3\cdot 5)\rfloor \\ &= 1031-166-99-66+33=733 \end{aligned}$$

(2) 不能被7，11，或13整除，也即既不能被7整除，也不能被11整除，也不能被13整除，这样的整数个数是：

$$\begin{aligned} |\overline{D}\cap\overline{E}\cap\overline{F}| &= |U|-|D\cup E\cup F| \\ &= |U|-|D|-|E|-|F|+|D\cap E|+|D\cap F|+|E\cap F| \\ &= 999-142-90-76+\lfloor 999/(7\cdot 11)\rfloor+\lfloor 999/(7\cdot 13)\rfloor+\lfloor 999/(11\cdot 13)\rfloor-\lfloor 999/(7\cdot 11\cdot 13)\rfloor \\ &= 691+\lfloor 999/77\rfloor+\lfloor 999/91\rfloor+\lfloor 999/143\rfloor-\lfloor 999/1001\rfloor \\ &= 691+12+10+6-0=719 \end{aligned}$$

(3) 被3整除但不能被7整除的整数个数是：

$$|B\cap\overline{D}| \;=\; |B|-|B\cap D|=333-\lfloor 999/(3\cdot 7)\rfloor=333-47=286$$

练习 8.12 200人中有150人喜爱游泳或喜爱慢跑或同时喜欢两者，若85人喜爱游泳，60人同时喜爱游泳和慢跑，问有多少人喜爱慢跑？

解答：设200人构成的全集是U，其中喜爱游泳的人构成的集合是A，希望慢跑的人构成的集合是B，则根据题意：

$$|U|\;=200 \qquad |A\cup B|\;=150 \qquad |A|\;=85 \qquad |A\cap B|=60$$

问有多少人喜爱慢跑，即要计算$|B|$，我们有：

$$150=|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=85+|B|-60$$

从而$|B|=150-85+60=125$，即有125人喜爱慢跑。

练习 8.13 某计算机学院学生选课情况如下：260名学生选法语，208人选德语，160人选俄语，76人选法语和德语，48人选法语和俄语，62人选德语和俄语，三门课都选的有30人，三门课都没选的人有150，试问：(1) 一共有多少学生？(2) 有多少人选法语和德语，而没有选俄语？

解答：设计算机学院所有学生构成的集合是全集U，选法语课的学生构成集合A，选德语的学生

构成集合B，选俄语的学生构成的集合C，则根据题意有：

$$
\begin{aligned}
|A| &= 260 & |B| &= 208 & |C| &= 160 & |A\cap B\cap C| &= 30\\
|A\cap B| &= 76 & |A\cap C| &= 48 & |B\cap C| &= 62 & |\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}| &= 150
\end{aligned}
$$

则至少选了法语、德语或俄语课的学生人数是：

$$
\begin{aligned}
|A\cup B\cup C| &= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|\\
&= 260+208+160-76-48-62+30 = 472
\end{aligned}
$$

而

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}| = |\overline{A\cup B\cup C}| = |U| - |A\cup B\cup C|$$

因此$U = |A\cup B\cup C| + |\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}| = 472+150 = 622$人，即该学院总共有622人。

选法语和德语而没有选俄语构成的集合是$A\cap B\cap\overline{C} = (A\cap B)-C$，因此

$$|A\cap B\cap\overline{C}| = |(A\cap B)-C| = |A\cap B| - |A\cap B\cap C| = 76-30 = 46$$

即有46人选了法语和德语但没有选俄语。

练习* 8.14 对一个有50人的初中班对四大名著的喜欢情况进行了调查，发现每个人都至少喜欢一本名著，且其中32人喜欢西游记，28人喜欢水浒传，24人喜欢三国演义，6人喜欢红楼梦。20人同时喜欢西游记和水浒转，18人同时喜欢西游记和三国演义，8人同时喜欢西游记、水浒传以及三国演义。奇怪的是喜欢红楼梦的同学对西游记、水浒传和三国演义都不喜欢。问只喜欢西游记、只喜欢水浒传、只喜欢三国演义及只喜欢红楼梦的同学各有几人？

解答：设整个初中班的学生构成的集合是全集U，喜欢西游记的学生构成的集合是A，喜欢水浒传的学生构成的集合是B，喜欢三国演义的学生构成的集合是C，喜欢红楼梦的学生构成的集合是D。则根据题意我们有：

$$
\begin{aligned}
|U| &= 50 & |A| &= 32 & |B| &= 28 & |C| &= 24\\
|A\cap B| &= 20 & |A\cap C| &= 18 & |A\cap B\cap C| &= 8 & |D| &= 6
\end{aligned}
$$

而$D\cap A = D\cap B = D\cap C = D\cap A\cap B\cap C = \varnothing$。

只喜欢西游记的学生构成的集合是$A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}$，我们有：

$$
\begin{aligned}
&|A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}|\\
&= |A\cap\overline{B\cup C\cup D}|\\
&= |A-(B\cup C\cup D)| \;=\; |A| - |A\cap(B\cup C\cup D)|\\
&= |A| - (|(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)|\\
&= |A| - (|A\cap B|+|A\cap C|+|A\cap D|-|A\cap B\cap C|-|A\cap B\cap D|-|A\cap C\cap D|+|A\cap B\cap C\cap D|)\\
&= 32-(20+18+0-8-0-0+0) = 2
\end{aligned}
$$

只喜欢水浒传的学生构成的集合是$B \cap \overline{A} \cap \overline{C} \cap \overline{D}$，类似地，我们有：

$$\begin{aligned}
&|B \cap \overline{A} \cap \overline{C} \cap \overline{D}| \\
=& |B| - (|B \cap A| + |B \cap C| - |B \cap A \cap C|) \\
=& 28 - (20 + |B \cap C| - 8) = 16 - |B \cap C|
\end{aligned}$$

这里$|B \cap C|$题目中并没有直接给出，但由于班上50人每人至少喜欢一本名著，意味着$A \cup B \cup C \cup D = U$，且由于喜欢红楼梦的同学对西游记、水浒传和三国演义都不喜欢，因此$A \cup B \cup C = U - D$，从而：

$$|A \cup B \cup C| = |U - D| = |U| - |D| = 50 - 6 = 44$$

另一方面由容斥原理有：

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\
&= 32 + 28 + 24 - 20 - 18 - |B \cap C| + 8 \ = \ 54 - |B \cap C|
\end{aligned}$$

从而$|B \cap C| = 54 - |A \cup B \cup C| = 54 - 44 = 10$，从而只喜欢水浒传的学生数是$16 - |B \cap C| = 16 - 10 = 6$。

只喜欢三国演义的学生构成的集合是$C \cap \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{D}$，类似地，我们有：

$$\begin{aligned}
&|C \cap \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{D}| \\
=& |C| - (|C \cap A| + |C \cap B| - |B \cap A \cap C|) \\
=& 24 - (18 + 10 - 8) = 4
\end{aligned}$$

由于喜欢红楼梦的同学对西游记、水浒传和三国演义都不喜欢，因此喜欢红楼梦的6学生就是只喜欢红楼梦的学生。

综上，只喜欢西游记、只喜欢水浒传、只喜欢三国演义及只喜欢红楼梦的同学分别有2, 6, 4, 6人。

练习 8.15 证明如果从$1, 2, 3, \cdots, 200$中选出100个整数，且所选的这些整数中有一个小于16，证明存在2个所选的整数，使得它们中的一个能被另一个整除。

证明 结合鸽笼原理使用反证法。假定从1到200选出了100个整数，且它们两两互不整除。注意到根据算数基本定理，每个整数都可唯一地分解成$q \cdot 2^b$的形式，这里b是非负整数，是该整数质数分解中2的幂，而q是一个奇数，从而从1到200选出的这100个整数只能有如下的形式：

$$1 \cdot 2^{b_1}, \quad 3 \cdot 2^{b_2}, \quad 5 \cdot 2^{b_3}, \cdots, \quad 199 \cdot 2^{b_{100}}$$

因为1到200的每个整数写成$q \cdot 2^b$的形式时，其中的奇数q必然满足$1 \le q \le 199$，如果选出的两个整数分别写成$q_i \cdot 2^{b_i}$和$q_j \cdot 2^{b_j}$时，使得$q_i = q_j$，则这两个整数必定一个整除另一个，因此这选出的两两互不整除的整数必定分别是1到199中的这100个奇数分别乘以2的某次幂，即这100个奇数都会用到。

由于其中有一个整数小于16，假定是$a_0 = q \cdot 2^{k_0}$，这里$1 \le q \le 15$是一个奇数。考虑形如$3^i \cdot q \cdot 2^k$的

整数，$i=0,1,2,\cdots$：若$3^i\cdot q<199$，则选出的100个整数中必定存在形如$a=3^i\cdot q\cdot 2^k$的整数，但这时需要$k<k_0$，因为若$k\geq k_0$，则$a_0\mid a$。所以：

(1) 当$8\leq q<16$时，k_0只能是0（注意$a_0<16$），这时$3\cdot q<199$，但选出的100个整数中不能有$3\cdot q\cdot 2^k$这种形式的整数（因为不存在比k_0还小的非负整数k），矛盾！

(2) 当$4\leq q<8$时，$k_0<2$，这时$3^2\cdot q<199$，但选出的100个整数中不能有$3^2\cdot q\cdot 2^k$这种形式的整数，因为这时$3\cdot q<199$，$3\cdot q\cdot 2_1^k$也是在这100个整数中，且$k<k_1<k_0$，但这不可能，因为$k_0<2$；

(3) 当$2\leq q<4$时，$k_0<3$，这时$3^3\cdot q<199$，$q\cdot 2^{k_0}, 3\cdot q\cdot 2^{k_1}, 3^2\cdot q\cdot 2^{k_2}, 3^3\cdot q\cdot 2^{k_3}$不可能都属于上面选出的100个整数中，因为$k_0>k_1>k_2>k_3\geq 0$，但$k_0<3$；

(4) 最后，类似地，若$q=1$，则$k_0<4$，这时$3^4\cdot q<199$，$q\cdot 2^{k_0}, 3\cdot q\cdot 2^{k_1}, 3^2\cdot q\cdot 2^{k_2}, 3^3\cdot q\cdot 2^{k_3}, 3^4\cdot q\cdot 2^{k_4}$不可能都属于上面选出的100个整数中，因为$k_0>k_1>k_2>k_3>k_4\geq 0$但$k_0<4$。

综上，要使得选出的100个整数两两互不整除从而是1到199中的100个奇数分别乘以2的某次幂，而其中又有一个整数小于16是不可能的，也即在选出的100个整数中有一个整数小于16的情况下必定存在两个整数，其中一个能整除另外一个。 □

【讨论】如果从1到200中选出100个整数，没有要求其中一个整数小于16，则选出的100个整数是可能两两互不整除的，例如选出101到200这100个整数，它们是两两互不整除的。

练习* 8.16 一位围棋职业棋手有11周时间准备围棋世界大赛，他决定每天至少下一盘棋，但为了不使自己过于疲劳还决定每周下棋最多12盘。证明存在连续若干天，期间他恰好下了21盘棋。

证明 注意11周总共有77天，设第i天该棋手下a_i盘棋，则对任意的$i=1,\cdots,77$，$a_i\geq 1$。令s_i是该棋手从第1天到第i总共下棋的盘数和，即$s_i=a_1+\cdots+a_i$。每周至多下12盘，因此整个11周至多下了$11\cdot 12=132$，又$a_i\geq 1$，因此有：

$$1\leq s_1<s_2<\cdots<s_{77}<132$$

从而对任意$i=1,\cdots,77$，有$22<s_i+21<153$，考虑下面154个正整数：

$$s_1,s_2,\cdots,s_{77},s_1+21,s_2+21,\cdots,s_{77}+21$$

这154个正整数全部在1到153之间，因此必存在两个数相等，而所有$s_i,i=1,\cdots,77$是严格递增的，和$s_i+21,i=1,\cdots,77$也是严格递增的，因此必存在i,j使得$s_i=s_j+21$，从而$s_i-s_j=21$且$j<i$，也即$a_{j+1}+a_{j+2}+\cdots+a_i=21$，即这些天该棋手恰好下了21盘棋。 □

练习 8.17 设m,n是互质的两个正整数，a和b是两个整数，且$0\leq a\leq m-1$以及$0\leq b\leq n-1$。证明存在正整数x，使得$x\equiv a(\mod m)$且$x\equiv b(\mod n)$。

证明 我们首先证明，当m,n互质时，对任意整数p，若$n\mid pm$，则$n\mid p$。这时因为，m,n互质即$\gcd(m,n)=1$，从而根据贝祖定理，存在整数s,t使得$ms+nt=1$，这时若$n\mid pm$，即存在整数q使得$qn=pm$，而由$ms+nt=1$有$pms+pnt=p$，从而$qns+pnt=p$，即$p=(qs+pt)n$，因此$n\mid p$。

对于互质的两个正整数m,n，对于$0\leq a\leq m-1$和$0\leq b\leq n-1$，考虑下面n个整数：

$$a,\ \ m+a,\ \ 2m+a,\ \ \cdots,\ \ (n-1)m+a$$

我们证明这n个整数整除n的余数互不相同。因为若存在$0 \le i < j \le (n-1)$，使得$im+a$和$jm+a$整除n的余数都是r，则存在整数p和q使得$im+a = pn+r$且$jm+a = qn+r$，从而$(j-i)m = (q-p)n$，这表明$n \mid (j-i)m$，而m, n互质，因此$n \mid (j-i)$，但是$0 \le i < j \le (n-1)$，因此n不可能整除$j-i$，矛盾！

因此$a, m+a, \cdots, (n-1)m+a$这n个整数整除n的余数互不相同，由于$0 \le b \le n-1$，因此必存在k，使得$km+a$整除n的余数b，也即又存在q使得$km+a = qn+b$，也即存在正整数x，使得$x = km+a$且$x = qn+b$，也即$x \equiv a(\mid m)$且$x \equiv b(\mod n)$。 □

【**讨论**】上述命题推广到两两互质的n个正整数$m_1, m_2, \cdots, m_n$，且$0 \le a_i \le m_i - 1, i = 1, \cdots, n$，则存在正整数$x$使得$x \equiv a_i(\mod m_i)$，或者说线性同余方程组$x \equiv a_i(\mod m_i), i = 1, \cdots, n$有解，这个定理称为**中国剩余定理**(the Chinese Remainder Theorem)，最早可见于中国南北朝时期（公元5世纪）的数学著作《孙子算经》。

练习 8.18 证明若从$\{1, 2, \cdots, 3n\}$中选择$n+1$个整数，那么总存在两个整数，它们间最多差2。

证明 1到$3n$这些整数中可这样分成n组，每组三个整数，分别是$3i+1, 3i+2, 3i+3$，i的取值从0到$n-1$。从而当从1到$3n$中选择$n+1$个整数时，必定有两个整数属于同一组，这属于同一组的两个整数间就最多差2。 □

练习 8.19 证明对任意$n+1$个整数$a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$，存在两个整数$a_i$和$a_j$，$i \ne j$，使得$a_i - a_j$能够被$n$整除。

证明 考虑$a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$这$n+1$个整数整除$n$的余数，由于整除$n$的可能余数只有$0, \cdots, n-1$这$n$种可能，因此必存在$i, j$，$i \ne j$，$a_i$和$a_j$整除$n$的余数相同，这时$a_i - a_j$就能够被$n$整除。 □

练习 8.20 证明在$n+1$个小于等于$2n$的正整数中，至少有两个正整数是互质的。

证明 我们首先证明，对任意正整数a，a和$a+1$是互质的。因为若d是a和$a+1$的公因子，且$d \ge 2$，而存在q和p使得$a = dq$且$a+1 = dp$，从而$dp - dq = 1$，即$d(p-q) = 1$，但这与$d \ge 2$矛盾！

从而对于1到$2n$这$2n$个整数，可分成n组，每一组是$2i-1$和$2i$，这里$i = 1, \cdots, n$，从而从1到$2n$中选$n+1$个数，必定有两个整数属于属于同一组，也即存在j，使得$2j-1$和$2j$都在选中的$n+1$个数中，而这两个数是互质的。 □

练习 8.21 有多少数字各不相同的五位数，其中又有多少不包含20作为子串？编写计算机程序验证你的计数结果。

解答：对于数字各不相同的五位数，万位可选除0以外的9个数字，其他位可选其他与已选的数字不同的任何数字，因此总共有$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$个。

对于其中不包含20作为子串的数字，我们可以先计算其中包含20作为子串的五位数，这时可将子串20看做一个字符，与其他8个数字一起排列，由于20不以0开头，所以可放在任何位置，而且必须放在一个位置。注意这时只有4个位置，20作为组合占据一个位置，其他8个数字再排列。对20占据的任意一个位置，其他8个数字在剩下3个位置排列的可能情况是$8 \cdot 7 \cdot 6$，20可占据4个位置的任意一个，因此含有20作为子串的五位数共有$4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 1344$，因此不包含20作为子串的五位数共有$27216 - 1344 = 25872$个。

练习* 8.22 在长度为8的二进制串中，有多少恰好含有5个0？有多少至少含有5个0？又有多少至多含有5个0？编写计算机程序验证你的计数结果。

解答：在长度为8的二进制串中，恰好含有5个0的串的个数是$C(8,5)=56$，而至少含有5个0的二进制串可分为含有五个0，含有六个0，含有七个0，含有八个0，因此总共有：

$$C(8,5)+C(8,6)+C(8,7)+C(8,8)=56+28+8+1=93$$

即总共有93个。而至多含有5个0的二进制串可分为不含0，含一个0，等等一直到含五个0，因此总共有：

$$C(8,0)+C(8,1)+C(8,2)+C(8,3)+C(8,4)+C(8,5)=1+8+28+56+70+56=219$$

即总共有219个。

练习 8.23 在长度为10的三进制串（即由$0,1,2$构成的串）中，有多少恰好含有3个0且恰好含有3个1？又有多少至少含有3个0或至少含有3个1？又有多少至多含有3个0或至多含有3个1？编写计算机程序验证你的计数结果。

解答：(1) 对于恰好含有3个0且恰好含有3个1的长度为10的三进制串，首先是在10个位置中选3个位置放0，然后在剩下的7个位置选3个位置放1，然后剩下的4个位置放2，因此这样的串有$C(10,3)\cdot C(7,3)=120\cdot 35=4200$个。

(2) 对于至少含有3个0或至少含有3个1长度为10的三进制串个数，它等于长度为10的三进制串总数，减去至多含有2个0且至多含有2个1 的长度为10的三进制串个数，而至多含有2个0且至多含有2个1的长度为10的三进制串可分为：(a) 含有0个0且至多含有2个1的这样的串；(b) 含有1个0且至多含有2个1的这样的串；以及(c) 含有2个0且至多含有2个1的这样的串。

而(a) 含有0个0且至多含有2个1的这样的串，又分为含有0个0且恰好含有0个1，恰好含有1个1，恰好含有2个1三种情况，因此有$C(10,0)C(10,0)+C(10,0)C(10,1)+C(10,0)C(10,2)=1+10+45=56$。

而(b) 含有1个0且至多含有2个1的这样的串，又分为含有1个0且恰好含有0个1，恰好含有1个1，恰好含有2个1三种情况，因此有$C(10,1)C(9,0)+C(10,1)C(9,1)+C(10,1)C(9,2)=10\cdot(1+9+36)=460$。

而(c) 含有2个0且至多含有2个1的这样的串，又分为含有2个0且恰好含有0个1，恰好含有1个1，恰好含有2个1三种情况，因此有$C(10,2)(C(8,0)+C(8,1)+C(8,2))=45\cdot(1+8+28)=1665$。

因此至多含有2个0且至多含有2个1长度为10的三进制串个数是$56+460+1665=2181$个，从而至多含有3个0或至多含有3个1的三进制串个数是$3^{10}-2181=59049-2181=56868$个。

(3) 对于至多含有3个0或至多含有3个1的长度为10的三进制串个数，根据容斥原理，它等于至多含有3个0的长度为10的三进制串个数，加上至多含有3个1的长度为10的三进制串个数，最后减去至多含有3个0且至多含有3个1的长度为10的三进制串个数。

至多含有3个0的长度为10的三进制串可分为恰好含有0个0，1个0，2个0，3个0的长度为10的三进制串，因此其有$C(10,0)\cdot 2^{10}+C(10,1)\cdot 2^9+C(10,2)\cdot 2^8+C(10,3)\cdot 2^7=1024+10\cdot 512+45\cdot 256+120\cdot 128=33024$个

类似地，至多含有3个1的长度为10的三进制串也有33024个。而至多含有3个0且至多含有3个1的三进制串，可类似(2)分为：(a) 恰好含有0个0且至多含有3个1长度为10的三进制串；(b) 恰好含有1个0且至多含有3个1长度为10的三进制串；(c) 恰好含有2个0且至多含有3个1长度为10的三进制串；以及(d) 恰好含有3个0且至多含有3个长度为10的三进制串，因此有：

$$C(10,0)\cdot\sum_{i=0}^{3}C(10,i)+C(10,1)\cdot\sum_{i=0}^{3}C(9,i)+C(10,2)\cdot\sum_{i=0}^{3}C(8,i)+C(10,3)\cdot\sum_{i=0}^{3}C(7,i)$$
$$=176+10\cdot 130+45\cdot 93+120\cdot 64=13341$$

因此至多含有3个0或至多含有3个1的长度为10的三进制串个数为$2\cdot 33024-13341=52707$个。

练习 8.24 计算机学院打算在6名计算机系统专业、8名计算机软件专业和10名计算机应用专业学生中推选6名学生会干部，请问有多少种推选方法？如果要求每个专业都至少有一位学生作为学生会干部，又有多少种推选方法？

解答：从6名计算机系统专业、8名计算机软件专业和10名计算机应用专业学生，总共24名学生中推选6名学生会干部的方法数是$C(24,6)=134596$种。

要求每个专业都至少一位学生作为学生会干部，则可以从上述推选方法总数减去没有计算机系统专业学生、或没有计算机软件专业学生，或没有计算机应用专业学生作为学生会干部的方案。

设集合A是没有推选计算机系统专业学生，即只从计算机软件专业和计算机应用专业推选学生作为学生会干部的方案集合，集合B是没有推选计算机软件专业，即只从计算机系统专业和计算机应用专业推选学生作为学生会干部的方案集合，而集合C是没有推选计算机应用专业，即只从计算机系统专业和计算机软件专业推选学生作为学生会干部的方案集合。我们需要计算$|A\cup B\cup C|$。

注意到A是只从计算机软件专业和计算机应用专业推选学生作为学生会干部的方案，即只从这两个专业18学生中推选6名学生会干部的方案数，因此$|A|=C(18,6)=18564$，类似地$|B|=C(16,6)=8008$，$|C|=C(14,6)=3003$。根据容斥原理，我们还需计算$|A\cap B|,|A\cap C|,|B\cap C|$和$|A\cap B\cap C|$。

注意到$A\cap B$是既没有推选计算机系统专业又没有推选计算机软件专业学生，即只从计算机应用专业学生中推选学生会干部的方案集合，因此$|A\cap B|=C(10,6)=210$，类似地$|A\cap C|=C(8,6)=28$，$|B\cap C|=C(6,6)=1$，而$A\cap B\cap C$表示没有从任何专业推选，不可能有这样的方案，因此$|A\cap B\cap C|=0$。

从而没有计算机系统专业学生、或没有计算机软件专业学生，或没有计算机应用专业学生推选为学生会干部的方案数是

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C| &=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|\\ &=18564+8008+3003-210-28-1+0=29336\end{aligned}$$

因此每个专业都至少一位学生的推选方法数是$134596-29336=105260$。

【**讨论**】(1) 由于一共有三个专业，因此要求每个专业都至少有一位学生的推选方法数，是等于总的推选方法数，减去没有计算机系统专业，或没有计算机软件专业，或没有计算机应用专业，后者需要利用容斥原理进行求解。

(2) 同样地，要求每个专业都至少有一位学生的推选方法数不等于先从每个专业选一名学生，然后再从剩下的学生选3名学生作为学生会干部的方法数。

(3) 我们可通过生成长度为24的二进制串，并将其分长度为6，8，10的三段，通过检查整个二进制串中1的总数是否为6，以及每一段是否至少一个1而验证我们计数的正确性。这个二进制串中每一位代表一位学生，为1表示入选学生会干部，三段分别代表三个专业。每一段至少一个1表示这个专业至少有一位学生入选学生会干部。

练习* 8.25 英文小写字母有5个元音字母和21个辅音字母，在长度为8的英文小写字母串中：(1) 有多少含有元音字母的串？(2) 有多少含有元音字母且没有重复字母的串？(3) 有多少含有至少两个元音字母的串？(4) 有多少含有至少两个元音字母且没有重复字母的串？

解答：(1) 含有元音字母的串等于所有长度为8的串的总数减去不含有元音字母的串数，所有长度为8的串的总数有26^8个，而不含有元音的串的总数，相当于串只含有辅音字母，因此有21^8个，因此含有元音字母的串数为$26^8 - 21^8 = 171004205215$。

(2) 含有元音字母的且没有重复字母的串数等于所有长度为8的不含重复字母的串总数减去不含有元音字母的串数，所有长度为8 的不含重复字母的串数有$P(26,8) = 62990928000$个，而其中不含元音字母的串数有$P(21,8) = 8204716800$，因此含有元音字母且不含重复字母的长度为8的字母串数为$P(26,8) - P(21,8) = 54786211200$。

(3) 在长度为8的字母串中，含有至少两个元音字母的串等于串总数减去不含有元音字母的串数，再减去恰好含有一个元音字母的串数，而恰好含有一个元音字母的串数为$C(8,1)\cdot 5\cdot 21^7 = 72043541640$，因此含有至少两个元音字母的串数为

$$26^8 - 21^8 - C(8,1)\cdot 5\cdot 21^7 = 98960663575$$

(4) 在长度为8的不含重复字母的串中，含有至少两个元音字母的串等于串总数减去不含有元音字母的串数，再减去恰好含有一个元音字母的串数，而恰好含有一个元音字母的串数为$C(8,1)\cdot 5\cdot P(21,7) = 23442048000$，因此含有至少两个元音字母的（不含重复字母的）串数为

$$P(26,8) - P(21,8) - C(8,1)\cdot 5\cdot P(21,7) = 54786211200 - 23442048000 = 31344163200$$

【**讨论**】读者在解答的时候，可以只给出计算公式，而无需给出计算的结果，或者可借助计算器等辅助工具给出公式的计算结果。

练习 8.26 在六位数的正整数中，有多少含有奇数数字的奇数？又有多少含有偶数数字的奇数？有多少含有奇数数字的偶数？又有多少含有偶数数字的偶数？编写计算机程序验证你的计数结果。

解答：首先六位数的正整数总共有$999999 - 100000 + 1 = 900000$个。对于含有奇数数字的奇数，实际上只要是奇数，则它的个位就必须是奇数数字，因此所有六位数的奇数都含有奇数数字，类似地，任意偶数也都含有偶数数字，而六位数的正整数中奇数个数和偶数个数一样多，因此共有450000个含有奇数数字的奇数，也共有450000个含有偶数数字的偶数。

对于含有偶数数字的奇数，则是所有奇数个数减去只含有奇数数字的奇数个数，而只含有奇数数字的六位数都是奇数，因此只需计算只有奇数数字的六位数个数即可，这时每一位都可

从$1,3,5,7,9$中选择，因此总共有$5^6=15625$，从而含有偶数数字的奇数个数有$450000-15625=434375$个。

对于含有奇数数字的偶数，则是所有偶数个数减去只含有偶数数字的偶数个数，而只含有偶数数字的六位数都是偶数，因此只需计算只有偶数数字的六位数个数即可，这时最高为（十万位）只能是$2,4,6,8$中选一个数字，而其他位都可从$0,2,4,6,8$中选择，因此总共有$4\cdot 5^5=12500$个，从而含有奇数数字的偶数有$450000-12500=437500$个。

因此在在六位数的正整数中，有450000个含有奇数数字的奇数，有434375个含有偶数数字的奇数，有437500个含有奇数数字的偶数，有450000个含有偶数数字的偶数。

练习* 8.27 分别给出下面组合等式的代数证明和组合证明：设n,r是自然数，$1\le r<n$，

$$r\binom{n}{r}=n\binom{n-1}{r-1}$$

证明 (1) 首先是代数证明，利用组合数的计算公式即可：

$$\begin{aligned} r\binom{n}{r} &= r\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!} &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \\ n\binom{n-1}{r-1} &= n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \end{aligned}$$

因此等式成立。

(2) 对于组合证明，我们将等式看做是：

$$\binom{n}{r}\binom{r}{1}=\binom{n}{1}\binom{n-1}{r-1}$$

等式两边都是从n为学生中选出r位学生作为学生会成员并在其中推选一位学生为主席的方法数：

等式左边就是首先在n位学生选出r位学生作为学生会成员，然后再在这r位学生中选一位学生作为主席，前者有$\binom{n}{r}$种可选方法，后者有r种可选方法，因此总共有$\binom{n}{r}\binom{r}{1}$；

而等式右边是先在n位学生中选出1为学生作为学生会主席，然后再从剩下的$n-1$位学生中选$r-1$位学生与刚才的主席一起构成学生会成员，前一步有$\binom{n}{1}$种可选方法，后一步有$\binom{n-1}{r-1}$种可选方法，因此总共有$\binom{n}{1}\binom{n-1}{r-1}$。

因此等式两边都是对完成同一任务方法数的计数，因此等式成立。 □

练习 8.28 分别给出下面等式的代数证明和组合证明：设n,m,k都是自然数，且$k\le m\le n$，

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

证明 (1) 首先是代数证明，利用组合数的计算公式即可：

$$\begin{aligned} \binom{n}{m}\binom{m}{k} &= \frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{m!}{k!(m-k)!} &= \frac{n!}{(n-m)!k!(m-k)!} \\ \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} &= \frac{n!}{(n-m)!k!(m-k)!} \end{aligned}$$

(2) 对于组合证明，我们论证等式两边都是对完成这样任务的方法的计数：从n位学生选m位学生作为学生会成员，且这些学生会成员中选k位学生作为学生会干部。

等式左边是从n位学生中先选出m位学生作为学生会成员，然后则从这m位选出的学生会员中推选k位学生作为学生会干部，因此方法数是$C(n,m)C(m,k)$。

等式右边是从n位学生中先选出k位学生作为学生会干部，并成为当然的学生会成员，这有$C(n,k)$种可能的推选方法，然后在从剩下的$n-k$位学生中选出$m-k$位学生作为学生会的（普通）成员，这又有$C(n-k,m-k)$种可能的推选方法，从而这也选出了m位学生作为学生会成员，且其中有k位学生是学生会干部，且有$C(n,k)C(n-k,m-k)$种可能的推选方法。

因此等式两边都是对完成同一任务的可能方法数的计数，因此等式成立。 □

练习* 8.29 给出等式$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$的一个组合证明。

证明 我们说等式两边都是对完成这样的任务的方法的计数：从n位学生选若干学生作为学生会成员，并从中推选一位学生作为学生会主席。

等式左边是基于学生会成员人数进行分类：注意到$k=0$时，$k\binom{n}{k}=0$，而当$k=1,2,\cdots,n$时，先从n学生中选k作为学生会成员，然后再从这k位学生中选一位作为主席，根据乘法原理这总共有$\binom{n}{k}\binom{k}{1}$种方法。学生会成员人数不同的方法数不重叠，因此根据加法原理，从n为学生选若干学生作为学生会成员，并从中推选一位学生作为学生会主席的方法总数是$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$，即等式左边的计数结果；

等式右边是先从n位学生中选一位学生作为主席，然后剩下的$n-1$为学生都有两种可能，作为学生会成员，或者不作为学生成员，因此根据乘法原理这总共有$n2^{n-1}$种可能。

因此等式两边都是对完成同一任务的可能方法数的计数，因此等式成立。 □

练习 8.30 给出等式$\sum_{k=0}^{n} k\left[\binom{n}{k}\right]^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$的一个组合证明。

证明 注意到$C(n,k)=C(n,n-k)$，我们将待证等式看做：

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{1}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{1}\binom{2n-1}{n-1}$$

我们论证等式两边都是对完成这样任务的方法的计数：从n位老师和n位学生选n位老师或学生构成评教组，再从这n位老师或学生中选一位老师担任评教组组长。

等式左边是按选出的n位老师或学生的评教组中有多少位老师进行分类，分为$k=1,\cdots,n$位老师，因此等式左边和式的每一项是先从n位老师中选k位老师进入评教组，并从这k位老师选一位担任组长，然后再从n位学生选$n-k$位学生也进入评教组，共组成n位老师或学生的评教组，并且一位老师担任组长。对于评教组有k位老师时，这有$C(n,k)C(k,1)C(n,n-k)$种可能的方法，从而总共有$\sum_{k=1}^{n} C(n,k)C(k,1)C(n,n-k)$中可能方法。

等式右边是从n位老师中先选出一位老师担任评教组组长，并成为评教组当然成员，再从剩下的总共$2n-1$位老师或学生中选$n-1$位老师或学生进入评教组，与组长一起构成由n位老师或学生的评教组，且一位老师担任组长，这有$C(n,1)C(2n-1,n-1)$种可能的方法。

因此等式两边都是对完成同一任务的可能方法数的计数，因此等式成立。 □

练习 8.31 设n, k是整数，且$1 \le k \le n$，证明$\binom{n}{k} \le n^k/2^{k-1}$。

证明　令$P(n)$是命题：对任意整数k，若$1 \le k \le n$则$\binom{n}{k} \le n^k/2^{k-1}$。我们对$n$使用数学归纳法证明$P(n)$对所有的正整数都成立。

(1) 归纳基：当$n = 1$时，即对于$P(1)$，显然对于任意的整数k，若$1 \le k \le n$，即对于$k = 1$时有$\binom{1}{1} \le 1^1/2^{1-1}$成立，因此$P(1)$成立。

(2) 归纳步：假定当$n = m$时成立，即有$P(m)$为真。考察$n = m+1$，根据帕斯卡等式我们有：对任意的$1 \le k \le m+1$，

$$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}$$

若$k = m+1$，则有$\binom{m+1}{k} = 1$，而$(m+1)^k/2^{k-1} = (m+1)^{m+1}/2^m$，当$m \ge 1$时，显然$(m+1)^{m+1} \ge 2^m$，因此当$k = m+1$时，$P(m+1)$成立。当$k = 1$时有$\binom{m+1}{k} = m+1$，而$(m+1)^k/2^{k-1} = m+1$，因此也有$P(m+1)$成立。而若$2 \le k \le m$，则也有$1 \le k-1 \le m$，从而根据归纳假设有$P(m)$为真，也即有

$$\binom{m}{k} \le m^k/2^{k-1} \qquad \text{且} \qquad \binom{m}{k-1} \le m^{k-1}/2^{k-2}$$

从而由帕斯卡等式有：

$$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \le \frac{m^k}{2^{k-1}} + \frac{m^{k-1}}{2^{k-2}} = \frac{m^{k-1}(m+2)}{2^{k-1}}$$

注意到当$k \ge 2$时有

$$\frac{m+2}{m+1} \le \frac{m+1}{m} \le \left(\frac{m+1}{m}\right)^{k-1} \qquad \text{即} \;\; m^{k-1}(m+2) \le (m+1)^k$$

从而得到当$2 \le k \le m$时$\binom{m+1}{k} \le (m+1)^k/2^{k-1}$，也即总有$P(m+1)$成立。根据数学归纳法，这就证明了对任意正整数$n$有$P(n)$成立，也即对任意正整数$n, k$，若$1 \le k \le n$，则有$\binom{n}{k} \le n^k/2^{k-1}$。 □

练习 8.32 设n, k是整数且$1 \le k < n$，证明：

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}$$

证明　我们使用组合数的计算公式进行证明：

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} \\
\binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}
\end{aligned}$$

因此等式成立。 □

练习 8.33 设n是正整数，证明

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1} = \binom{2n+2}{n+1}/2 - \binom{2n}{n}$$

证明　实际上，注意到：

$$\binom{2n+2}{n+1}/2 = \frac{(2n+2)!}{2(n+1)!(n+1)!} = \frac{2(n+1)(2n+1)!}{2(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} = \binom{2n+1}{n+1}$$

而根据帕斯卡等式有：

$$\binom{2n+1}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n}$$

因此要证明的等式实际上是：

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1} = \binom{2n}{n+1}$$

这个等式很容易使用组合证明法证明：等式左右两边都是长度为$2n$且含有$n+1$个1的二进制串个数。等式右边显然是长度为$2n$且含有$n+1$个1的二进制串个数，而等式左边是对这样的二进制串按照前面n位中含有1的个数进行分类，每一类前面n位含有k个1，由于总共含有$n+1$个1，因此前面n位至少有一个1，因此$k = 1, \cdots, n$。长度为$2n$的二进制前面n位含有k个1的可能个数是先在前面n位选k位为1，然后在后面n位选$n+1-k$位为1即可，因此这样的二进制串个数是$C(n,k)C(n,n+1-k) = C(n,k)C(n,k-1)$。从而总数就是$\sum_{k=1}^{n} C(n,k)C(n,k-1)$，它也等于$C(2n,n+1)$。 □

【**讨论**】实际上要证明的等式：

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n+1-k} = \binom{2n}{n+1}$$

是朱世杰-范德蒙等式的特例。设m,n,r是自然数，$r \leq m, r \leq n$，范德尔蒙德等式是：

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{r-k}\binom{n}{k} = \binom{m+n}{r}$$

不难看到，实际上，当$r \leq m+n$时朱世杰-范德蒙等式就成立。取其中$m = n, r = n+1$就得到这一题要证明的等式，注意，当$k = 0$和$k = n+1$时都有$\binom{n}{k}\binom{n}{n+1-k} = 0$。

练习* 8.34 使用数学归纳法证明下面两个等式。

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{m+k}{k} = \binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \cdots + \binom{m+r}{m} = \binom{m+r+1}{r}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

证明　(1) 对第一个等式，对r做数学归纳法，当$r = 0$时，

$$\text{左边} = \binom{m+0}{0} = 1 \qquad\qquad \text{右边} = \binom{m+1}{0} = 1$$

假设$r=p$时成立，则对于$r=p+1$，有：

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p+1}\binom{m+k}{k} &= \sum_{k=0}^{p}\binom{m+k}{k}+\binom{m+p+1}{p+1} && \text{// 归纳假设}\\
&= \binom{m+p+1}{p}+\binom{m+p+1}{p+1} && \text{// 帕斯卡等式}\\
&= \binom{m+(p+1)+1}{p+1}=\binom{m+r+1}{r}
\end{aligned}$$

(2) 对第二个等式，对n做数学归纳法，当$n=0$时，

$$\text{左边 }=\binom{0}{m} \qquad\qquad \text{右边 }=\binom{1}{m+1}$$

注意，这当$m=0$时左右两边都等于1，而当$m>0$时，左右两边都等于0（根据我们上面对特殊值给出的定义）。假设$n=p$时成立，则对于$n=p+1$，有：

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p+1}\binom{k}{m} &= \sum_{k=0}^{p}\binom{k}{m}+\binom{p+1}{m} && \text{// 归纳假设}\\
&= \binom{p+1}{m+1}+\binom{p+1}{m} && \text{// 帕斯卡等式}\\
&= \binom{(p+1)+1}{m+1}=\binom{n+1}{m+1}
\end{aligned}$$

□

练习* 8.35 单词$MISSISSIPPI$包含的字母能构成多少个不同的大写字母串？

解答：这是1个M，4个I，4个P和2个P可构成长度为11的大写字母串的个数，因此是：

$$\frac{11!}{1!4!4!2!}=\frac{39916800}{1\cdot 24\cdot 24\cdot 2}=34650$$

练习 8.36 单词$EVERGREEN$包含的字母能构成多少个不同的大写字母串？

解答：这是4个E，1个V，2个R，1个G和1个N可构成长度为9的大写字母串的个数，因此是：

$$\frac{9!}{4!1!2!1!1!}=\frac{362880}{24\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 1}=7560$$

练习 8.37 有多少个方法将编号为1到12的球放到编号为1到6的盒子中，使得每个盒子恰好有两个球？

解答：这是将12个可区别的球放到6个可区别的盒子，使得每个盒子恰好有2个球的问题，因此是：

$$\frac{12!}{2!2!2!2!2!2!}=\frac{479001600}{64}=7484400$$

练习 8.38 有多少个方法将15个可区别的球放到5个可区别的盒子中，使得每个盒子的球数分别是1个、2个、3个、4个和5个？

解答：这是将15个可区别的球放到5个可区别的盒子，使得每个盒子恰好有1个、2个、3个、4个和5个球的问题，因此是：

$$\frac{15!}{1!2!3!4!5!} = \frac{1,307,674,368,000}{1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 24 \cdot 120} = 37,837,800$$

练习* 8.39 水果店中有很多苹果、梨子、橙子和桃子，请问：(1) 从中选10个水果的方法有多少种？(2) 从中选10个水果且每种水果至少有一个的方法有多少种？(3) 从中选10个水果且至少有4个苹果的方法有多少种？(4) 从中选10个水果且至多有1个苹果的方法有多少种？

解答：(1) 从四类水果允许重复地选10个水果的方法数是$C(4-1+10,10) = C(13,3) = 286$种方法；

(2) 从四类水果允许重复地选10个水果且每种水果至少有一个的方法数，相当于每种水果先都选一个，然后再从四类水果重复地选6个水果的方法数，因此有$C(4-1+6,6) = C(9,6) = 84$种方法；

(3) 从四类水果允许重复地选10个水果且至少有4个苹果的方法数，相当于先选4个苹果，然后再从四类水果重复地选6个水果的方法数，因此有$C(4-1+6,6) = C(9,6) = 84$种方法；

(4) 从四类水果允许重复地选10个水果且至多有1个苹果的方法，相当于从这四类水果重复地选10个水果的所有方法数，减去从这四类水果重复地选10个水果且至少有两个苹果的方法数，因此有$C(4-1+10,10) - C(4-1+10-2,10-2) = C(13,3) - C(11,3) = 286 - 165 = 121$种方法。

练习 8.40 不定方程$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$有多少非负整数解？

解答：这等价于从4类物体可重复地选10个物体的问题，因此该不定方程有$C(4-1+10,10) = C(13,3) = 286$个非负整数解。

练习 8.41 不等式$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 12$有多少非负整数解？

解答：这等价于不定方程$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$的非负整数解个数，因此也等价于从5类物体可重复地选12个物体的问题，因此该不定方程有$C(5-1+12,12) = C(16,4) = 1820$个非负整数解。

练习* 8.42 不定方程$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$的非负整数解中，(1) 有多少解满足$x_1 \geq 3$? (2) 有多少解满足$x_1 \leq 5$? (3) 有多少解满足$2 \leq x_1 \leq 6, 1 \leq x_2 \leq 4$且$x_3 \geq 5$?

解答：(1) 满足$x_1 \geq 3$的非负整数解个数是$C(5-1+20-3,20-3) = C(21,4) = 5985$；

(2) 满足$x_1 \leq 5$的非负整数解个数是总的解个数减去满足$x_1 \geq 6$的解个数，因此是

$$\begin{aligned} C(5-1+20,20) - C(5-1+20-6,20-6) &= C(24,4) - C(18,4) \\ &= 10626 - 3060 = 7566\text{（个）} \end{aligned}$$

(3) 设：全集是满足$x_1 \geq 2, x_2 \geq 1$且$x_3 \geq 5$的解构成的集合；性质P_1表示$x_1 > 6$，即$x_1 \geq 7$，性质P_2表示$x_2 > 4$，即$x_2 \geq 5$。则满足$2 \leq x_1 \leq 6, 1 \leq x_2 \leq 4$且$x_3 \geq 5$的解个数是$N(\overline{P}_1\overline{P}_2)$。我们有：

$$\begin{aligned}
N &= C(5-1+20-2-1-5, 20-2-1-5) = C(16,4) = 1820 && // \ x_1 \geq 2, x_2 \geq 1, x_3 \geq 5 \\
N(P_1) &= C(5-1+20-7-1-5, 20-7-1-5) = C(11,4) = 330 && // \ x_1 \geq 7, x_2 \geq 1, x_3 \geq 5 \\
N(P_2) &= C(5-1+20-2-5-5, 20-2-5-5) = C(12,4) = 495 && // \ x_1 \geq 2, x_2 \geq 5, x_3 \geq 5 \\
N(P_1P_2) &= C(5-1+20-7-5-5, 20-7-5-5) = C(7,4) = 35 && // \ x_1 \geq 7, x_2 \geq 5, x_3 \geq 5
\end{aligned}$$

从而

$$N(\overline{P}_1\overline{P}_2) = N - N(P_1) - N(P_2) + N(P_1P_2) = 1820 - 330 - 495 + 35 = 1030$$

即足$2 \leq x_1 \leq 6, 1 \leq x_2 \leq 4$且$x_3 \geq 5$的解个数是1030个。

练习 8.43 不等式$x_1 + x_2 + x_3 \leq 18$的非负整数解中，(1) 有多少解满足$x_1 > 3$? (2) 有多少解满足$x_1 < 5$? (3) 有多少解满足$1 \leq x_1 \leq 4, x_2 > 4$且$x_3 < 6$?

解答：不定方程$x_1 + x_2 + x_3 \leq 18$的非负整数解与不定方程$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$的非负整数解一一对应，其中$x_4$是为了将不等式转换成等式而引入的一个未知数。

(1) 满足$x_1 > 3$，即满足$x_1 \geq 4$的解的个数是$C(4-1+18-4, 18-4) = C(17,3) = 680$。

(2) 满足$x_1 < 5$的解个数等于所有解个数减去满足$x_1 \geq 5$的解个数，所有解的个数是$C(4-1+18, 18) = C(21,3)$，而满足$x_1 \geq 5$的解个数是$C(4-1+18-5, 18-5) = C(16,3)$，因此满足$x_1 < 5$的解个数是$C(21,3) - C(16,3) = 1330 - 560 = 770$。

(3) 设：全集是满足$x_1 \geq 1, x_2 \geq 5$的非负整数解的个数，性质P_1表示$x_1 > 4$，即$x_1 \geq 5$，性质P_3表示$x_3 \geq 6$，则要计算的解的个数是$N(\overline{P}_1\overline{P}_3)$，我们有：

$$\begin{aligned}
N &= C(4-1+18-1-5, 18-1-5) = C(15,3) = 455 && // \ x_1 \geq 1, x_2 \geq 5 \\
N(P_1) &= C(4-1+18-5-5, 18-5-5) = C(11,3) = 165 && // \ x_1 \geq 5, x_2 \geq 5 \\
N(P_3) &= C(4-1+18-1-5-6, 18-1-5-6) = C(9,3) = 84 && // \ x_1 \geq 1, x_2 \geq 5, x_3 \geq 6 \\
N(P_1P_3) &= C(5-1+18-5-5-6, 18-5-5-6) = C(5,3) = 10 && // \ x_1 \geq 5, x_2 \geq 5, x_3 \geq 6
\end{aligned}$$

从而

$$N(\overline{P}_1\overline{P}_3) = N - N(P_1) - N(P_3) + N(P_1P_3) = 455 - 165 - 84 + 10 = 216$$

即满足$1 \leq x_1 \leq 4, x_2 > 4$且$x_3 < 6$的非负整数解个数是216个。

练习 8.44 设$A = \{1,2,3,4\}$，$B = \{a,b\}$，A到B的函数有多少个？A到B的满函数有多少个？

解答：令全集U是集合A到B的所有函数构成的集合，性质P_a表示B的元素a在函数下没有原

像，P_b表示b没有原像，则A到B的函数个数是$N=|U|$，A到B的满函数个数是$N(\overline{P}_a\overline{P}_b)$。我们有：

$$\begin{aligned} N &= |B|^{|A|}=2^4=16 \\ N(P_a) &= |B-\{a\}|^{|A|}=1^4=1 \\ N(P_b) &= |B-\{b\}|^{|A|}=1^4=1 \\ N(P_aP_b) &= 0 \end{aligned}$$

注意最后$N(P_aP_b)$是A到空集的函数个数，显然是0。从而

$$N(\overline{P}_a\overline{P}_b)\ =N-N(P_a)-N(P_b)-N(P_c)+N(P_aP_b)=16-1-1=14$$

因此A到B的满函数个数是14个。

练习 8.45 证明引理8.18 。

这个引理断定：对于串$a=a_1a_2\cdots a_n$，它的任意从a_1开始的子串$a_1a_2\cdots a_i$都称为a的**前缀**(prefix)。对任意$1\leq i\leq n$，具有相同前缀$a_1a_2\cdots a_i$的所有长度为n的串中，在字典序下串$b=a_1a_2\cdots a_ib_1b_2\cdots b_{n-i}$最大，其中对任意$1\leq k\leq n-i$，$b_k\in S-\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}$，且：

$$b_1>b_2>\cdots>b_{n-i}$$

而串$c=a_1a_2\cdots a_ic_1c_2\cdots c_{n-i}$最小，其中对任意$1\leq k\leq n-i$，$c_k\in S-\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}$，且：

$$c_1<c_2<\cdots<c_{n-i}$$

对于任意串$a=a_1a_2\cdots a_n$都存在唯一的最短前缀$a_1\cdots a_i$，使得a是所有具有相同前缀$a_1\cdots a_i$的串中的最大串。

证明 对$1\leq i\leq n$，设d是具有前缀$a_1a_2\cdots a_i$且长度为n的一个串，即$d=a_1a_2\cdots a_id_1\cdots d_{n-i}$，这里对$1\leq k\leq n-i$，有$d_k\in S-\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}$。由于引理给出的待证最大的串$b$中的$b_1$是$S-\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}$中的最大者，因此$d_1\leq b_1$，若$d_1<b_1$，则$d\preceq b$，否则若$d_1=b_1$，则$d_2$和$b_2$是集合$S-\{a_1,a_2,\cdots,a_i,b_1\}$中的字符，且$b_2$是该集合中最大字符，因此也有$d_2\leq b_2$。一般地，对任意$1\leq j\leq n-i$，若对任意的$1\leq k<j$有$d_k=b_k$，则$d_j,b_j$是集合$S-\{a_1,\cdots,a_i,b_1,\cdots,b_k\}$中的字符，且$b_j$是该集合中最大的字符，即总有$d_j\leq b_j$，因此总有$d\preceq b$，即$b$是具有前缀$a_1a_2\cdots a_i$的所有串中的最大串。

类似地，对任意$1\leq j\leq n-i$，若对任意的$1\leq k<j$有$d_k=c_k$，则d_j,c_j是集合$S-\{a_1,\cdots,a_i,b_1,\cdots,b_k\}$中的字符，且$c_j$是该集合中最小的字符，即总有$c_j\leq d_j$，因此总有$c\preceq d$，即$c$是具有前缀$a_1a_2\cdots a_i$的所有串中的最小串。

对于任意的串$a=a_1a_2\cdots a_n$，记性质$P(k)$是命题“对任意$k\leq j<n$有$a_{j+1}<a_j$”，设i是使得$P(i)$成立的最小正整数，即有$P(i)$成立，且对任意$1\leq k\leq n$，若$P(k)$也成立，则$i\leq k$，则a是所有具有相同前缀$a_1\cdots a_i$的串中的最大串，因为这时有$a_{i-1}\prec a_i$（若$i>1$），且对任

意$i \le k \le n$，$a_{k+1} < a_k$，即有：

$$a_{i-1} < a_i \quad 且 \quad a_i > a_{i+1} > a_{i+2} > \cdots > a_n$$

这样根据上面对最大串性质的说明，a是所有具有相同前缀$a_1 \cdots a_i$的串中的最大串。注意，这里我们假设字符就是数字，因此它们之间的序使用$>, \ge, <$或$\le$表示，而串之间的序使用$\prec$或$\preceq$表示。 □

练习* 8.46 对于下面的每个数字串，假设集合S是包含数字串中所有数字的集合，给出算法8.1 以该数字串为输入时，返回的下一个S全排列对应的数字串。

(1) 31425　　(2) 152643　　(3) 34287651　　(4) 459138672

解答：(1) 31425的下一个$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$全排列对应的数字串是31452；
(2) 152643的下一个$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$全排列对应的数字串是153246；
(3) 34287651的下一个$S = \{1, \cdots, 8\}$全排列对应的数字串是34512678；
(4) 459138672的下一个$S = \{1, \cdots, 9\}$全排列对应的数字串是459138726。

练习 8.47 设$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，对于下面的每个数字串，给出算法8.2 以该数字为输入时，返回的下一个S的4组合对应的数字串。

(1) 2567　　(2) 1357　　(3) 1456　　(4) 1267

解答：根据该算法，(1) 2567的下一个S的4组合对应的数字串是3456；(2) 1357的下一个S的4组合对应的数字串是1367；(3) 1456的下一个S的4组合对应的数字串是1457；(4) 1267的下一个S的4组合对应的数字串是1345。

练习 8.48 设计一个枚举不定方程$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$的所有非负整数解的算法，以$n, r$为输入，输出是每个解未知数$x_1, \cdots, x_n$的值。设计算法时使用类似算法8.2 的思路，生成$S = \{1, 2, \cdots, n\}$的所有允许重复的$r$组合，然后将每个对应这样组合的串$a_1 \cdots a_r$转换成不定方程的一个解。

解答：我们知道，对于$S = \{1, \cdots, n\}$（无重复）的r组合，设$a = a_1 \cdots a_r$是对应S的r组合的一个串，要得到覆盖a的对应S的r组合的串，需要找到a中与最大串$(n-r+1)(n-r+2)\cdots n$的对应数字不同的最大位置i，也即$a_i \ne n - r + i$，但对于任意的$i < j \le r$，都有$a_j = n - r + j$。然后保持$a_1, \cdots a_{i-1}$不变，将第i位置的a_i加1，剩下第$i+1$个位置到第r个位置的数字依次是前一个数字加1，则得到覆盖a的串。只要a不是最大串，则$i > 0$，总可以这样得到覆盖a的串。

对于S的允许重复的r组合对应这样的数字串$a_1 \cdots a_r$的集合，其中$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_r$，即$a_1, a_2 \cdots, a_r$按非递减顺序排列。这样的串在字典序下最小的串是$11 1\cdots 1$（$r$个1），表示$r$个物体都取自第1类物体，而在字典序下最大的串是$nn\cdots n$（$r$个$n$）。一般地，串$a_1 \cdots a_r$中有多少个1，代表从第1类物体中取多少个物体，有多少i代表从第i类物体中取多少个物体等等。

对于这样一个串（即其中数字按非递减顺序排序的串）$a = a_1 \cdots a_r$，在这样的串集合中，以字典序为偏序，覆盖a的下一个串应该是与最大串$nn\cdots n$比较，找到最小的i满足$a_i \ne n$且对任意的$j > i$都有$a_j = n$，则将a_i改为$a_i + 1$，而剩下从j到r的字符都改为$a_i + 1$即可。

练习* 8.49 给出长度为n且不含有连续两个0的二进制串个数的递推关系式。

解答：我们记A_n是长度为n、不含有两个连续0的二进制串构成的集合，$a_n = |A_n|$。我们要找到关于a_n的递推式，这需要考虑A_n的结构。对于任意的$w \in A_n$：

(1) 若$w = 1u$，则必有$u \in A_{n-1}$；

(2) 否则，若$w = 0u$，则必须有$u = 1v$，即$w = 01v$，这时v必须是长度为$n-2$且不含有两个连续0的二进制串。

因此$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$，对任意的$n \geq 2$，而$a_0 = 1, a_1 = 2$，因为长度为0的空串不含连续两个0，而长度为1的两个二进制串（即0和1）都不含连续两个0。

练习 8.50 给出长度为n且含有连续三个0的二进制串个数的递推关系式。

解答：记A_n是长度为n、含有三个连续0的二进制串构成的集合，$a_n = |A_n|$。要找到关于a_n的递推式，需要考虑A_n的结构。对于任意的$w \in A_n$：

(1) 若$w = 1u$，则必有$u \in A_{n-1}$；

(2) 否则，若$w = 0u$，则又分两种情况：(a) 若$u = 1v$，即$w = 01v$，则有$v \in A_{n-2}$；(b) 否则若$u = 0v$，即$w = 00v$，则又分两种情况：(i) $v = 1s$，即$w = 001s$，则s必有$s \in A_{n-3}$；(ii) 否则$v = 0s$，则$w = 000s$，则s可以是任意长度为$n-3$的二进制串。

因此$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + 2^{n-3}$，对任意的$n \geq 3$，而$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0$。

练习 8.51 给出长度为n且不含有连续三个0的二进制串个数的递推关系式。

解答：记A_n是长度为n、不含三个连续0的二进制串构成的集合，$a_n = |A_n|$。要找到关于a_n的递推式，需要考虑A_n的结构。对于任意的$w \in A_n$：

(1) 若$w = 1u$，则必有$u \in A_{n-1}$；

(2) 否则，若$w = 0u$，则又分两种情况：(a) 若$u = 1v$，即$w = 01v$，则有$v \in A_{n-2}$；(b) 否则若$u = 0v$，即$w = 00v$，则必有$v = 1s$，其中$s \in A_{n-3}$。

因此$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$，对任意的$n \geq 2$，而$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4$。

练习* 8.52 给出长度为n且含有01作为子串的二进制串个数的递推关系式。

解答：记A_n是长度为n、含01的二进制串构成的集合，$a_n = |A_n|$。要找到关于a_n的递推式，需要考虑A_n的结构。对于任意的$w \in A_n$：

(1) 若$w = 1u$，则必有$u \in A_{n-1}$；

(2) 否则，若$w = 0u$，则u可以是除了全0串之外的任意串，也即只要u中至少含有一个1即可，这是因为当u含有至少一个1时，这个1跟它前面的0（对于w而言，前面肯定有0）就构成了w中的01子串。因此这样的u可以有$2^{n-1} - 1$个。

因此$a_n = a_{n-1} + 2^{n-1} - 1$，对任意的$n \geq 2$，而$a_0 = 0, a_1 = 0$。

练习* 8.53 给出长度为n且不含有连续两个0的三进制串个数的递推关系式。

解答：记A_n是长度为n、不含连续两个0的三进制串构成的集合，$a_n = |A_n|$。要找到关于a_n的递推式，需要考虑A_n的结构。对于任意的$w \in A_n$：

(1) 若$w = 2u$，则必有$u \in A_{n-1}$；

(2) 若$w=1u$，则必有$u \in A_{n-1}$；

(3) 若$w=0u$，则u必是$1v$或$2v$，其中$v \in A_{n-2}$，也即u可以有$2a_{n-2}$个。

因此$a_n = 2(a_{n-1}+a_{n-2})$，对任意的$n \geq 2$，而$a_0 = 1, a_1 = 3$。

练习 8.54 给出长度为n且不含有连续两个0也不含有连续两个1的三进制串个数的递推关系式。

解答：记A_n是长度为n、不含连续两个0或两个1（即既不含连续两个0，也不含连续两个1）的三进制串构成的集合，$a_n = |A_n|$。要找到关于a_n的递推式，需要考虑A_n的结构。对于任意的$w \in A_n$：

(1) 若$w=2u$，则必有$u \in A_{n-1}$；

(2) 若$w=1u$，则若(i) $u=2v$，则必有$v \in A_{n-2}$；(ii) 若$u=0v$，则v不能取所有A_{n-2}中的串，因为v还可能以0开头。这提示我们应该进一步区分A_n的结构，我们记：

$$\begin{array}{lcll} A_n^0 & = & \text{长度为}n\text{、不含连续两个0或连续两个1，且以0开头的三进制串构成的集合} & a_n^0 = |A_n^0| \\ A_n^1 & = & \text{长度为}n\text{、不含连续两个0或连续两个1，且以1开头的三进制串构成的集合} & a_n^1 = |A_n^1| \\ A_n^2 & = & \text{长度为}n\text{、不含连续两个0或连续两个1，且以2开头的三进制串构成的集合} & a_n^2 = |A_n^2| \end{array}$$

显然：

$$A_n = A_n^0 \cup A_n^1 \cup A_n^2 \qquad\qquad a_n = a_n^0 + a_n^1 + a_n^2$$

这时：

(1) 对于任意的$w \in A_n^2$，即$w=2u$，则$u \in A_{n-1}$，这意味着

$$a_n^2 = a_{n-1} = a_{n-1}^0 + a_{n-1}^1 + a_{n-1}^2$$

(2) 对任意的$w \in A_n^1$，即$w=1u$，则必有$u \in A_{n-1}^0$或$u \in A_{n-1}^2$，这意味着

$$a_n^1 = a_{n-1}^0 + a_{n-1}^2$$

(3) 类似地，对任意的$w \in A_n^0$，即$w=0u$，则必有$u \in A_{n-1}^1$或$u \in A_{n-1}^2$，这意味着

$$a_n^0 = a_{n-1}^1 + a_{n-1}^2$$

上面三式相加，我们有：

$$\begin{aligned} a_n &= a_n^0 + a_n^1 + a_n^2 = a_{n-1}^1 + a_{n-1}^2 + a_{n-1}^0 + a_{n-1}^2 + a_{n-1} \\ &= a_{n-1}^1 + a_{n-1}^0 + a_{n-1}^2 + a_{n-1}^2 + a_{n-1} \\ &= a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-1} = 2a_{n-1} + a_{n-2} \end{aligned}$$

也即，我们有：$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$，对任意的$n \geq 2$，且$a_0 = 1, a_1 = 3$。

练习* 8.55 给出长度为n且不含有连续两个相同数字的三进制串个数的递推关系式。

解答：记A_n是长度为n、不含连续两个相同字符（即既不含连续两个0，也不含连续两个1，也不含连续两个2）的三进制串构成的集合，$a_n = |A_n|$。要找到关于a_n的递推式，需要考虑A_n的结构。基

于上面题目的经验，我们细分A_n的构成，记：

$$\begin{aligned}
A_n^0 &= \text{长度为}n\text{、不含连续两个相同字符，且以0开头的三进制串构成的集合} & a_n^0 &= |A_n^0| \\
A_n^1 &= \text{长度为}n\text{、不含连续两个相同字符，且以1开头的三进制串构成的集合} & a_n^1 &= |A_n^1| \\
A_n^2 &= \text{长度为}n\text{、不含连续两个相同字符，且以2开头的三进制串构成的集合} & a_n^2 &= |A_n^2|
\end{aligned}$$

显然：

$$A_n = A_n^0 \cup A_n^1 \cup A_n^2 \qquad\qquad a_n = a_n^0 + a_n^1 + a_n^2$$

这时，对任意的$n \geq 2$：

(1) 对于任意的$w \in A_n^2$，即$w = 2u$，则必有$u \in A_{n-1}^0$或$u \in A_{n-1}^1$，这意味着

$$a_n^2 = a_{n-1}^0 + a_{n-1}^1$$

(2) 对任意的$w \in A_n^1$，即$w = 1u$，则必有$u \in A_{n-1}^0$或$u \in A_{n-1}^2$，这意味着

$$a_n^1 = a_{n-1}^0 + a_{n-1}^2$$

(3) 对任意的$w \in A_n^0$，即$w = 0u$，则必有$u \in A_{n-1}^1$或$u \in A_{n-1}^2$，这意味着

$$a_n^0 = a_{n-1}^1 + a_{n-1}^2$$

上面三式相加，我们有：

$$\begin{aligned}
a_n &= a_n^0 + a_n^1 + a_n^2 \\
&= a_{n-1}^1 + a_{n-1}^2 + a_{n-1}^0 + a_{n-1}^2 + a_{n-1}^0 + a_{n-1}^1 \\
&= 2(a_{n-1}^0 + a_{n-1}^1 + a_{n-1}^2) \\
&= 2a_{n-1}
\end{aligned}$$

也即，我们有：$a_n = 2a_{n-1}$，对任意的$n \geq 2$，且$a_0 = 1, a_1 = 3$。

练习 8.56 对于将不可区别的r个球放到n个可区别盒子的方法数，可以通过选定一个盒子，将所有的方法数分为这个盒子不放球和这个盒子至少放一个球的两类，然后建立一个与n, r有关的递推关系式，并验证$C(n-1+r, r)$是该递推关系式的解。

解答：我们记将不可区别的r个球放到n个可区别盒子的方法数为$T(n, r)$，选定一个盒子，例如编号为1的盒子，所有的方法数可分为这个盒子不放球和这个盒子至少放一个球的两类，其中这个盒子不放球，则相当于将不可区别的r个球放到剩下的$n-1$个可区别盒子，其方法数为$T(n-1, r)$，而这个盒子至少一个球，则先在这个盒子放一个球，然后将剩下的$r-1$个球放到这n个可区别的盒子中，其方法数为$T(n, r-1)$，因此我们有递推关系式：

$$T(n, r) = T(n-1, r) + T(n, r-1), \quad n \geq 2, r \geq 2$$

对于该递推关系式的初始条件，我们考虑当只有一个盒子，即$n=1$时，显然将r个球放到1个盒子的方法数总是为1，即$T(1,r)=1$，而当$r=1$时，将1个球放到n个可区别盒子的方法数显然是n，即$T(n,1)=n$，甚至若$r=0$，将0个球放到n个盒子的方法数可理解为1，即只有一种方法，就是什么事也不用做。不难看到确实有$T(n,1)=T(n-1,1)+T(n,0)$。总之，我们有：当$n\geq 1, r\geq 0$时，

$$\begin{cases} T(n,r)=T(n-1,r)+T(n,r-1) & n\geq 2, r\geq 2 \\ T(1,r)=1 & r\geq 0 \\ T(n,0)=1 & n\geq 1 \end{cases}$$

很容易验证，$T(n,r)=C(n-1+r,r)$满足上述递推式：

$$\begin{aligned} T(n,r)=C(n-1+r,r) &= C(n-2+r,r)+C(n-1+r-1,r-1) \\ &= C(n-1+r-1,r)+C(n-1+r-1,r-1) \\ &= T(n-1,r)+T(n,r-1) \\ T(1,r)=C(1-1+r,r) &= C(r,r)=1 \\ T(n,0)=C(n-1+0,0) &= C(n-1,0)=1 \end{aligned}$$

练习 8.57 确定下面的递推关系式哪些是线性的，哪些不是线性的，哪些是常系数的，哪些不是常系数，哪些是齐次的，哪些是非齐次的，并确定每个递推式的阶。

(1) $a_n=2a_{n-3}$ (2) $a_n=5$ (3) $a_n=a_{n-1}^2$ (4) $a_n=2a_{n-4}+2^n$

(5) $a_n=a_{n-2}a_{n-3}$ (6) $a_n=a_{n-2}+n+3$ (7) $a_n=4a_{n-2}+6a_{n-7}$ (8) $a_n=n(a_{n-1}+a_{n-3})$

解答: (1) $a_n=2a_{n-3}$是线性、常系数、齐次递推关系式，阶是3；

(2) $a_n=5$是线性、常系数、非齐次递推关系式，5不含有a_i，因此是非齐次项，阶是0；

(3) $a_n=a_{n-1}^2$是非线性、常系数、齐次递推关系式，a_{n-1}^2是一个非线性项，阶是1；

(4) $a_n=2a_{n-4}+2^n$是线性、常系数、非齐次递推关系式，2^n是非齐次项，阶是4；

(5) $a_n=a_{n-2}a_{n-3}$是非线性、常系数、齐次递推关系式，$a_{n-2}a_{n-3}$是一个非线性项，阶是3；

(6) $a_n=a_{n-2}+n+3$是线性、常系数、非齐次递推关系式，$n+3$是一个车非齐次项，阶是2；

(7) $a_n=4a_{n-2}+6a_{n-7}$是线性、常系数、齐次递推关系式，阶是7；

(8) $a_n=n(a_{n-1}+a_{n-3})$是线性、非常系数、齐次递推关系式，n不是常系数，阶是3。

练习 8.58 求解下面递推关系式及初始条件确定的序列的通项公式。

(1) $a_0=1, a_1=0, a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}, n\geq 2$ (2) $a_0=6, a_1=8, a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}, n\geq 2$

(3) $a_0=4, a_1=10, a_n=6a_{n-1}-8a_{n-2}, n\geq 2$ (4) $a_0=4, a_1=1, a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}, n\geq 2$

解答: (1) 递推关系式$a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$的特征方程是$x^2-5x+6=0$，它的根是$r_1=2$和$r_2=3$，

因此该递推关系式的通解具有形式$a_n=\beta_1 2^n+\beta_2 3^n$，代入初始条件得到线性方程组：

$$\begin{cases} \beta_1+\beta_2 &= 1 \\ 2\beta_1+3\beta_2 &= 0 \end{cases}$$

容易解得$\beta_1=3,\beta_2=-2$，因此该递推关系式的通解是$a_n=3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$。

(2) 递推关系式$a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}$的特征方程是$x^2-4x+4=0$，它的根二重根是$r=2$，因此该递推关系式的通解具有形式$a_n=(\beta_1+\beta_2\cdot n)2^n$，代入初始条件得到线性方程组：

$$\begin{cases} \beta_1 &= 6 \\ (\beta_1+\beta_2)\cdot 2 &= 8 \end{cases}$$

容易解得$\beta_1=6,\beta_2=-2$，因此该递推关系式的通解是$a_n=(6-2n)\cdot 2^n$。

(3) 递推关系式$a_n=6a_{n-1}-8a_{n-2}$的特征方程是$x^2-6x+8=0$，它的根是$r_1=2$和$r_2=4$，因此该递推关系式的通解具有形式$a_n=\beta_1 2^n+\beta_2 4^n$，代入初始条件得到线性方程组：

$$\begin{cases} \beta_1+\beta_2 &= 4 \\ 2\beta_1+4\beta_2 &= 10 \end{cases}$$

容易解得$\beta_1=3,\beta_2=1$，因此该递推关系式的通解是$a_n=3\cdot 2^n+4^n$。

(4) 递推关系式$a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}$的特征方程是$x^2-2x+1=0$，它的根二重根是$r=1$，因此该递推关系式的通解具有形式$a_n=(\beta_1+\beta_2\cdot n)1^n$，代入初始条件得到线性方程组：

$$\begin{cases} \beta_1 &= 4 \\ \beta_1+\beta_2 &= 1 \end{cases}$$

容易解得$\beta_1=4,\beta_2=-3$，因此该递推关系式的通解是$a_n=4-3n$。

练习* 8.59 给定初始条件$a_0=3,a_1=6$且$a_2=0$，求解递推关系式$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}-2a_{n-3}$。

解答：该递推关系式的特征方程是$x^3=2x^2+x-2$，即$(x-1)(x-2)(x+1)=0$，因此方程的三个根为$r_1=1,r_2=2$和$r_3=-1$，因此递推关系式的通解具有形式：$a_n=\beta_1+\beta_2 2^n+\beta_3(-1)^n$，代入初始条件得到线性方程组：

$$\begin{cases} \beta_1+\beta_2+\beta_3 &= 3 \\ \beta_1+2\beta_2-\beta_3 &= 6 \\ \beta_1+4\beta_2+\beta_3 &= 0 \end{cases}$$

容易解得$\beta_1=6,\beta_2=-1,\beta_3=-2$，因此该递推关系式的通解是$a_n=6-2^n-2\cdot(-1)^n$。

练习 8.60 对于下面不同的$F(n)$，给出递推关系式$a_n=8a_{n-2}-16a_{n-4}+F(n)$的特解形式。

(1) $F(n)=(-2)^n$	(2) $F(n)=n2^n$	(3) $F(n)=n^2 4^n$
(4) $F(n)=(n^2-n-1)(-2)^n$	(5) $F(n)=2$	(6) $F(n)=n^4 2^n$

解答：齐次递推关系式$a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4}$的特征方程是$x^4 - 8x^2 + 16 = 0$，即$(x^2-4)^2$，因此它有两个二重根，分别是2和$-2$。

(1) 当非齐次项是$F(n) = (-2)^n$时，-2是特征方程的二重根，因此它的一个特解是$n^2 \cdot p_0 \cdot (-2)^n$；

(2) 当非齐次项是$F(n) = n2^n$时，2是特征方程的二重根，因此它的一个特解是$n^2 \cdot (p_0 + p_1 \cdot n) \cdot 2^n$；

(3) 当非齐次项是$F(n) = n^2 4^n$时，由于4不是特征方程的二重根，因此它的一个特解形式是$(p_0 + p_1 \cdot n + p_2 \cdot n^2) \cdot 4^n$；

(4) 当非齐次项是$F(n) = (n^2 - n - 1)(-2)^n$时，由于$-2$是特征方程的二重根，因此它的一个特解形式是$n^2 \cdot (p_0 + p_1 \cdot n + p_2 \cdot n^2) \cdot (-2)^n$；

(5) 当非齐次项是$F(n) = 2$时，注意，这其实是$2 \cdot 1^n$，而1不是特征方程的二重根，因此它的一个特解是p_0；

(6) 当非齐次项是$F(n) = n^4 2^n$时，由于2是特征方程的二重根，因此它的一个特解形式是$n^2(p_0 + p_1 \cdot n + p_2 \cdot n^2 + p_3 \cdot n^3 + p_4 \cdot n^4) \cdot 2^n$；

练习* 8.61 给定初始条件$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1$，求解问题8.44 给出的递推关系式$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}$。

解答：这个线性非齐次递推关系式的伴随线性齐次递推关系式的特征方程是$x^2 - x - 1 = 0$，它的两个根是$r_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$，它的非齐次项是$F(n) = 2^{n-2}$，2不是这个特征方程的根，因此它的一个特解具有形式$a_n^{(p)} = p_0 2^n$，将这个特解形式代入递推关系式有：

$$p_0 2^n = p_0 2^{n-1} + p_0 2^{n-2} + 2^{n-2}$$

即有$4p_0 = 2p_0 + p_0 + 1$，从而$p_0 = 1$。因此这个递推关系式的通解具有形式：

$$a_n = \beta_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2^n$$

将初始条件$a_0 = 0, a_1 = 0$代入得到：

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 + 1 &= 0 \\ \beta_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \beta_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2 &= 0 \end{aligned}$$

解得$\beta_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}}\right), \beta_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}}\right)$，从而该递推关系式的通解是：

$$a_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2^n$$

练习 8.62 给定初始条件$a_0 = 1$，求解递推关系式$a_n = 2a_{n-1} + 2n^2$。

解答：伴随递推关系式$a_n = 2a_{n-1} + 2n^2$的线性齐次递推关系式$a_n = 2a_{n-1}$的特征方程是$x = 2$，也即它的根是2，非齐次项$2n^2$相当于$2n^2 1^n$，而1不是特征方程的根，因此它的一个特解形

式是$a_n^{(p)} = (p_0 + p_1 n + p_2 n^2)$，代入递推关系式有：

$$a_n^{(p)} = 2a_{n-1}^{(p)} + 2n^2 \qquad \text{即} \quad (p_0 + p_1 n + p_2 n^2) = 2(p_0 + p_1(n-1) + p_2(n-1)^2) + 2n^2$$

整理得到：

$$(p_2 + 2)n^2 + (p_1 - 4p_2)n + (2p_2 - 2p_1 + p_0) = 0$$

上式对任意的$n \geq 1$成立，因此有：

$$\left\{\begin{array}{rcl} p_2 + 2 & = & 0 \\ p_1 - 4p_2 & = & 0 \\ 2p_2 - 2p_1 + p_0 & = & 0 \end{array}\right.$$

解得$p_2 = -2, p_1 = -8, p_0 = -12$，因此特解是$a_n^{(p)} = -12 - 8n - 2n^2$。而伴随的线性齐次递推关系式$a_n = 2a_{n-1}$的解是$a_n^{(h)} = \beta_1 2^n$，从而递推关系式$a_n = 2a_{n-1} + 2n^2$的解是：

$$a_n = \beta_1 2^n - 12 - 8n - 2n^2$$

利用$a_0 = 1$代入有$1 = \beta_1 - 12$，从而$\beta_1 = 13$，因此该递推关系式的解是$a_n = 13 \cdot 2^n - 12 - 8n - 2n^2$。

练习 8.63 设$n = 4^k$，确定满足递推关系式$f(n) = 5f(n/4) + 6n$的函数$f(n)$，其中$f(1) = 1$，然后假定f是一个递增函数，给出f的一个大O估计。

解答：我们考虑一般的递推关系式$f(n) = af(n/b) + cn^d$，设$n = b^k$，则有：

$$\begin{aligned} f(b^k) &= af(b^{k-1}) + c(b^k)^d = af(b^{k-1}) + c(b^d)^k \\ &= a(a(f(b^{k-2}) + c(b^d)^{k-1})) + c(b^k)^d = a^2 f(b^{k-2}) + ac(b^d)^{k-1} + c(b^d)^k \\ &= a^2(af(b^{k-3}) + c(b^d)^{k-2}) + ac(b^d)^{k-1} + c(b^d)^k = a^3 f(b^{k-3}) + a^2 c(b^d)^{k-2} + ac(b^d)^{k-1} + c(b^d)^k \\ &= \cdots \\ &= a^i f(b^{k-i}) + a^{i-1}c(b^d)^{k-(i-1)} + a^{i-2}c(b^d)^{k-(i-2)} + \cdots + c(b^d)^k = a^i f(b^{k-i}) + c\sum_{j=0}^{i-1} a^j (b^d)^{k-j} \\ &= a^k f(1) + c\sum_{j=0}^{k-1} a^j (b^d)^{k-j} \end{aligned}$$

对于上面的第二项和式，令$i = (k-1) - j$，即$j = (k-1) - i$，我们有：

$$c\sum_{j=0}^{k-1} a^j (b^d)^{k-j} \;=\; c\sum_{i=0}^{k-1} a^{(k-1)-i}(b^d)^{i+1} = ca^{k-1}b^d \sum_{i=0}^{k-1} (b^d/a)^i$$

从而根据等比数列的求和公式有：

$$c\sum_{j=0}^{k-1}a^j(b^d)^{k-j}=ca^{k-1}b^d\sum_{i=0}^{k-1}(b^d/a)^i=\begin{cases}ca^{k-1}b^d\left[\dfrac{(b^d/a)^k-1}{(b^d/a)-1}\right]\;=\;cb^d\left[\dfrac{(b^d)^k-a^k}{b^d-a}\right] & \text{若 } b^d\neq a\\ ca^{k-1}b^dk\;=\;cb^da^{k-1}k & \text{若 } b^d=a\end{cases}$$

这样我们有：

$$f(b^k)\;=\;\begin{cases}a^kf(1)+cb^d\left[\dfrac{(b^d)^k-a^k}{b^d-a}\right] & \text{若 } b^d\neq a\\ a^kf(1)+cb^da^{k-1}k & \text{若 } b^d=a\end{cases}$$

由$n=b^k$，有$a^k=n^{\log_b a}$，而$k=\log_b n$，$(b^d)^k=(b^k)^d=n^d$，且当$a=b^d$时，$d=\log_b a$，从而有：

$$f(n)\;=\;\begin{cases}\left[\dfrac{cb^d}{b^d-a}\right]n^d+\left[\dfrac{f(1)-cb^d}{b^d-a}\right]n^{\log_b a} & \text{若 } b^d\neq a\\ f(1)n^d+(cb^d/a)n^d\log_b n & \text{若 } b^d=a\end{cases}$$

通过上式我们就证明了主定理：若函数f满足递推关系式$f(n)=af(n/b)+cn^d$的增函数，则有：

$$f(n)\;\text{是}\;\begin{cases}O(n^d) & \text{若 } a<b^d \text{ 即 } \log_b a<d\\ O(n^d\log n) & \text{若 } a=b^d \text{ 即 } \log_b a=d\\ O(n^{\log_b a}) & \text{若 } a>b^d \text{ 即 } \log_b a>d\end{cases}$$

这里$a\geq 1,b>1$是整数，且$c\geq 0,d\geq 0$是实数。

具体到这一题，我们有$a=5,b=4,c=6,a=1$，因此有$f(n)=-24n+25n^{\log_4 5}$，由于$\log_4 5>1$，因此f是$O(n^{\log_4 5})$。

练习* 8.64 设$n=2^k$，确定满足递推关系式$f(n)=8f(n/2)+n^2$的函数$f(n)$，其中$f(1)=1$，然后假定f是一个递增函数，给出f的一个大O估计。

解答：根据上一题的推导，具体到这一题，我们有$a=8,b=2,c=1,d=2$，因此$f(n)=-n^2+2n^{\log_2 8}=-n^2+2n^3$，因此$f$是$O(n^3)$。

练习 8.65 使用分治策略设计一个从一组整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$中发现最大整数的算法。给出该算法效率分析的递推关系式，并给出它的一个大O估计。

解答：基于分治的策略我们可将这一组整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$分成两部分，一部分是$a_1,\cdots a_{\lfloor n/2\rfloor}$，另一部分是$a_{\lfloor n/2\rfloor+1},\cdots,a_n$，递归地从每一部分找到其中的最大整数，假设分别是$x$和$y$，然后再比较$x$和$y$的大小，返回其大者即可。

算法的伪码描述如上，执行$\mathit{findmax}(a_1,\cdots,a_n,1,n)$则可得到一组整数$a_1,\cdots,a_n$中的最大者。当这一组整数的个数是$n$时，上述算法将其分为大致为$n/2$的两部分，且在得到两部分整数的最大者之后，只要额外做一次比较即可得到整组数据的最大者，因此其时间复杂度函数$f(n)$的递推关系式是：$f(n)=2f(n/2)+1$，对照主定理，这里有$a=2,b=2,c=1,d=0$，$a>b^d$，因此f是$O(n^{\log_b a})=O(n)$。

```
function findmax(a_1, a_2, ..., a_n : 整数, i, j : 大于等于1小于等于n的整数)
    // 这个函数返回a_1, a_2, ..., a_n这一组整数从a_i到a_j中的最大者
    if (i = j) then return a_i
    k := ⌊(j − i)/2⌋;
    x := findmax(a_1, a_2, ..., a_n, i, i + k);
    y := findmax(a_1, a_2, ..., a_n, i + k + 1, j);
    if (x ≥ y) then return x else return y
end
```

练习* 8.66 使用分治策略设计计算x^n的算法，这里x是实数，n是非负整数。给出该算法效率分析的递推关系式，并给出它的一个大O估计。

解答：首先计算x^n的递归算法基于x^n的下面递推公式：

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{若 } n = 0 \\ x^{n/2} \cdot x^{n/2} & \text{若 } n > 0 \text{ 且是偶数} \\ x^{(n-1)/2} \cdot x^{(n-1)/2} \cdot x & \text{若 } n > 0 \text{ 且是奇数} \end{cases}$$

因此，这个算法是将规模为n的问题分解为求一个规模大致为$n/2$的问题（只要递归调用一次计算$x^{n/2}$或$x^{(n-1)/2}$ 即可，额外的乘法最多是2次（当n是奇数时），因此其乘法次数的递推关系式是：

$$f(n) = f(n/2) + 2$$

对照主定理，这时有$a = 1, b = 2, c = 2, d = 0$，从而$1 = a = b^d = 2^0$，因此根据主定理有$f(n)$是$O(\log_2 n)$的。

```
function power(x : 实数, n : 非负整数)
    if (n == 0) then return 1
    else if (n 是偶数 ) then
        temp = power(x, n/2);
        return temp * temp;
    else
        temp = power(x, (n − 1)/2);
        return x * temp * temp;
    end
end
```

练习 8.67 使用分治策略设计计算$x^n \mod m$的算法，这里x是整数，n是非负整数，m是大于1的整数。给出该算法效率分析的递推关系式，并给出它的一个大O估计。

解答：首先计算$x^n \text{mod } m$的递归算法可基于下面的递推公式：

$$x^n \text{mod } m = \begin{cases} 1 & \text{若 } n = 0 \\ ((x^{n/2} \text{mod } m) \cdot (x^{n/2} \text{mod } m)) \text{mod } m & \text{若 } n > 0 \text{ 且是偶数} \\ ((x^{(n-1)/2} \text{mod } m) \cdot (x^{(n-1)/2} \text{mod } m) \cdot (x \text{mod } m)) \text{mod } m & \text{若 } n > 0 \text{ 且是奇数} \end{cases}$$

因此，这个算法是将规模为n的问题分解为求一个规模大致为$n/2$的问题（只要递归调用一次计算$x^{n/2} \mod m$或$x^{(n-1)/2} \mod m$即可，而额外的乘法最多是2次（当n是奇数时），以及额外的求模

操作2次，因此其算法复杂度函数$f(n)$的递推关系式是：

$$f(n) \;=\; f(n/2) + C$$

对照主定理，这时有$a = 1, b = 2, d = 0$，从而$1 = a = b^d = 2^0$，因此根据主定理有$f(n)$是$O(\log_2 n)$的。

```
function modpower(x : 实数, n : 非负整数, m : 正整数)
    if (n == 0) then return 1
    else if (n 是偶数 ) then
        temp = modpower(x, n/2, m);
        return (temp * temp)  mod m;
    else
        temp = modpower(x, (n − 1)/2, m);
        return ((x  mod m) * temp * temp)  mod m;
    end
end
```