《数学分析》　试题一

录入：李浩然

1. （20 分，每题 5 分）计算下列积分和极限。

（1）$\int \frac{1}{t^4+1}dt$　（2）$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$　（3）$\int \frac{x+(\sin x)^2}{1+\cos x}dx$　（4）$\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln(\frac{1}{x}))^x$

2. （10 分）如果关于 x 的函数表达式如下，求一阶导数和二阶导数。

$y' = \frac{x+y}{x-y}$

$y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$

$$\arctan\frac{y}{x} = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$$

3. （10 分）若 $y = f^2(f^2(f^2(x)))$，求一阶导数。

$8f(f^2(f^2(x)))\cdot f(f^2(x))\cdot f(x)\cdot f'(x)\cdot f'(f^2(x))\cdot f'(f^2(f^2(x)))$

4. （10 分）求 $y = \arctan x - \ln(1+x^2)$ 的极值。

$y'=0 \to x=\frac{1}{2}$

$y = \arctan\frac{1}{2} - \ln\frac{5}{4}$

5. （10 分）若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在实轴上可微，且满足 $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} < 0$，证明在方程 $f(x)=0$ 的两根中间一定有 $g(x)=0$ 的解。

⇒连续　$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' > 0$　$\frac{f(x)}{g(x)}$

罗尔　$h(a)=h(b)=0$　$\exists \xi\in(a,b)$　$h'(\xi)=0$　~~$f(x)$~~ $\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'<0$

6. （10 分）若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且满足 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$，证明 $f(x)$ 一定在 (a,b) 内取得最小值。

7. （10 分）利用夹逼定理证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$。　$\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} <$　$(n!)^2 > n^n$　$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$

8. （10 分）画出 $y = \ln(\frac{1+x}{1-x})$ 的图像。

9. （10 分）如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$。

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(a_1-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}$

$$\int \frac{c(x+a)+d}{(x+a)^2+b} = \frac{d}{\sqrt{b}}\arctan\frac{x+a}{\sqrt{b}} + \frac{c}{2}\ln[(x+a)^2+b] + C$$

《数学分析》 答案一

编写：李滔
录入：李浩然
审定：周启文

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \arcsin\frac{2(x-\frac{a+b}{2})}{|a-b|} + C$$

$(n!)^2 > n^n$

Rolle：(a,b)连续，$[a,b]$可导

$f(a)=f(b)$ 则$\exists\,\xi\in(a$

s.t. $f'(\xi)=0$

闭区间连函最值定理

$f(x)$在$[a,b]$连续

则有最值

1. （1）解：$\int\frac{1}{t^4+1}dt=\int\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}t+\frac{1}{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}t+\frac{1}{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right)dt$

$$=\int\left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(t+\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{1}{4}}{(t+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}\right]+\left[\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}(t-\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{1}{4}}{(t-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}\right]dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}t+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}t-1)+C$$

（2）解：

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}-ab-(x-\frac{a+b}{2})^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4}-(x-\frac{a+b}{2})^2}}$$

$$=\arcsin\frac{2(x-\frac{a+b}{2})}{|a-b|}+C$$

（3）（如果题目没错的话，答案如下；如果题目是$\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$，请看书本 192 页（10）题。）

解：$\int\frac{x+(\sin x)^2}{1+\cos x}dx=\int\frac{x+1-\cos^2 x}{1+\cos x}dx=\int\left[\frac{x}{1+\cos x}+(1-\cos x)\right]dx$

$$=\int\frac{x}{1+\cos x}dx+x-\sin x+C_1$$

下面求$\int\frac{x}{1+\cos x}dx$ 令t=tan(x/2)cos$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，进而$x=2\arctan t$。

这样的话，

$$\int \frac{x}{1+\cos x}dx = \int \frac{2\arctan t}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} d(2\arctan t) = \int 2\arctan t dt = 2t\arctan t - \ln(1+t^2) + C_2$$

$$\therefore \quad \int \frac{x+(\sin x)^2}{1+\cos x}dx = x\tan\frac{x}{2} - \ln(1+\tan^2\frac{x}{2}) + x - \sin x + C$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + 2\ln|\cos\frac{x}{2}| + x - \sin x + C$$

（4）解：$\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln(\frac{1}{x}))^x \overset{令\frac{1}{x}=t}{=} \lim\limits_{t\to\infty}(\ln t)^{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{t\to\infty} e^{\frac{\ln\ln t}{t}} \overset{洛必达}{=} e^{\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\frac{1}{\ln t}} = e^0 = 1$

2. 解：一阶导数：两边同时对 x 求导得

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(\sqrt{x^2+y^2})'$$

$$\therefore \quad \frac{xy'-y}{x^2+y^2} = \frac{x+yy'}{x^2+y^2}$$

$$\therefore \quad y' = \frac{x+y}{x-y}$$

二阶导数：由一阶导数 $y' = \frac{x+y}{x-y}$，两边再同时对 x 求导得

$$y'' = \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}$$

$$\therefore \quad y'' = \frac{2xy'-2y}{(x-y)^2}$$

代入已求出的一阶导数 $y' = \frac{x+y}{x-y}$，有 $y'' = \frac{2x^2+2y^2}{(x-y)^3}$

3. 解：利用复合函数的求导法则。

$[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x)$

$[f^2(f^2(x))]' = 2f(f^2(x))\bullet[f(f^2(x))]' = 2f(f^2(x))\bullet f'(f^2(x))\bullet 2f(x)\bullet f'(x)$

$[f^2(f^2(f^2(x)))]' = 2f(f^2(f^2(x)))\bullet[f(f^2(f^2(x)))]' =$

$2f(f^2(f^2(x)))\bullet f'(f^2(f^2(x)))\bullet[f^2(f^2(x))]'$

$=8f(f^2(f^2(x)))\bullet f'(f^2(f^2(x)))\bullet f(f^2(x))\bullet f'(f^2(x))\bullet f(x)\bullet f'(x)$

4. 解：$y'=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{1-2x}{1+x^2}$　当$y'=0$时，$x=\dfrac{1}{2}$

而$x\in(-\infty,\dfrac{1}{2})$时，$y'>0;x\in(\dfrac{1}{2},+\infty)$时，$y'<0$

$\therefore$　$x=\dfrac{1}{2}$是极大值点，极大值为$\arctan\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{5}{4}$

函数y无极小值。

5. 证明：用反证法，设a,b是$f(x)$的任意两根，假设$g(x)\neq 0,x\in[a,b]$

构造函数$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则$h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

注意到$h(a)=h(b)=0$，则由 Rolle 定理，$\exists\xi\in(a,b),s.t.h'(\xi)=0$

由题设条件，$h'(x)>0,\forall x\in[a,b]$，这与$h'(\xi)=0$矛盾。所以假设不成立。

6. 证明：取x_1,x_2满足$a<x_1<x_2<b$，则$f(x)$在$[x_1,x_2]$连续，进而在$[x_1,x_2]$上有最大 小

值，不妨设为$f(x_0),x_0\in[x_1,x_2]$。

又$\because\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$

$\therefore\exists\dfrac{b-a}{4}>\delta>0,s.t.x\in(a,a+\delta]\cup[b-\delta,b)$时，$f(x)>f(x_0)$

又$\because$　$f(x)$在$[a+\delta,b-\delta]$上连续

$\therefore f(x)$在$[a+\delta,b-\delta]$有最小值，设为$f(x'),x'\in[a+\delta,b-\delta]$，则$f(x')\le f(x_0)$。

综上，$\forall x\in(a,b)$,有$f(x)\ge f(x'),x'\in[a+\delta,b-\delta]$，即$f(x)$一定在$(a,b)$内取到最小值

7. 证明：

$$\because (n!)^2>n^n$$

$$\therefore (n!)^{\frac{1}{n}}>n^{\frac{1}{2}},\text{则}\frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}<\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}=0$，故由夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}=0$

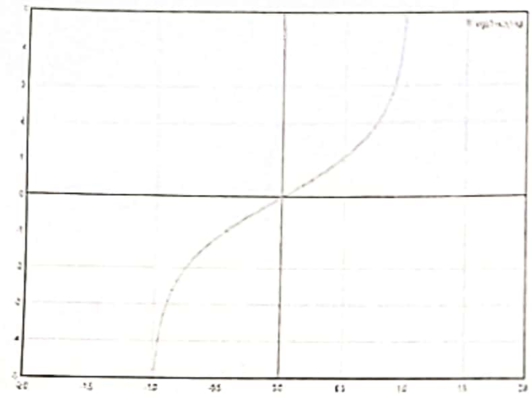
8. 解：定义域为（-1，1），奇函数，零点为（0，0）

$y'=\dfrac{2}{1-x^2}>0$，故递增区间为（-1，1）

$y''=\dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$，故（-1，0）为上凸区间，（0，1）为下凸区间，0 为拐点

渐近线：$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to+1^-}f(x)=\infty$, 故 $x=\pm1$ 是垂直渐近线；无水平渐近线，

无斜渐近线。



9. 证明：由题意可知，对于 $\forall\varepsilon_1>0,\exists N_1, s.t.$ 当 $n>N_1$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon_1$

$$\therefore \left|\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}-a\right|=\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|$$

$$\le\left|\frac{(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)}{n}\right|+\left|\frac{a_{N_1+1}-a}{n}\right|+\cdots+\left|\frac{a_n-a}{n}\right|$$

$$<\left|\frac{(a_1-a)+\cdots(a_{N_1}-a)}{n}\right|+\frac{n-N_1}{n}\varepsilon_1<\frac{|(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)|}{n}+\varepsilon_1$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)|}{n}=0$

因此，对 $\forall\varepsilon_1>0,\exists N_2$, 当 $n>N_2$ 时, $\dfrac{|(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots(a_{N_1}-a)|}{n}<\varepsilon_1$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则对于 $\forall\varepsilon=2\varepsilon_1>0,\exists N$，

当 $n>N$时，$\left|\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\dfrac{\left|(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)\right|}{n}+\varepsilon_1<\varepsilon_1+\varepsilon_1=\varepsilon$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

数学分析 试题二

编写：xxx

录入：张铸明

审定：xxx

1、（20分）求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos(x^2)}{x^4}$；　$\frac{1}{2}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$；　$\frac{1}{2}$

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x^2}e^t arctant dt}{e^{x^2}}$；

（4）$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$。

2、（30分）求下列积分：

（1）$\int\frac{x}{3+x^2}dx$；　$\frac{1}{2}\ln(x^2+3)$

（2）$\int x^2e^{-x}dx$；　$(-x^2-2x-2)e^{-x}$

（3）$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　$\frac{\arcsin x-x\sqrt{1-x^2}}{2}$

（4）$\int\frac{dx}{2+sinx}dx$；

（5）$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$；　$\frac{\sqrt{3}}{3}$

（6）$\int_1^2 x^2lnxdx$。　$\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$

3、（10分）求曲线$y^2=x$与$y=-x+2$围成图形的面积。　$\cancel{\frac{37}{6}}$　$\frac{9}{2}$

4、（8分）分析函数$y=\frac{x^2}{1+x}$在实轴上的单调性、极值点、凸性、渐近线与拐点。　$\lim\frac{y}{x}$

$-\infty\ -2\ \ 0\ \ +\infty$　$\nearrow\ \searrow\ \nearrow$　$0,-2$　$-\infty\ -1\ +\infty$　$<0\ \ >0$

5、（7分）证明：$1-x<e^{-x}<1-x+\frac{x^2}{2}(0<x<1)$。　拐

6、（10分）设函数在$[a,b]$上连续。令

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,a<x<b$$

求证：当$a<x<b$时，有$F'(x)=f(x)$。

7、（10分）设$f(x)$在$[0,1]$内存在连续导数。从$[0,1]$内取出n个点$x_k(1 \le k \le n)$满足：

$$\frac{k-1}{n} \le x_k \le \frac{k}{n}, 1 \le k \le n$$

证明：

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} f(x_k)}{n} - \int_0^1 f(x)dx\right| \le \frac{1}{n} \max_{0 \le x \le 1} |f'(x)|$$

8、（5分）设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且对任意的$x, y \in [a,b]$，总有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

证明：$f(x)$为下凸函数。

数学分析　答案二

编写：xxx
录入：张铸明
审定：周启文

1、解：

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x^2}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$.

(2)$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{(2+x)e^x}=\frac{1}{2}$.

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^{x^2}e^t arctant dt}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2xe^{x^2}arctanx^2}{2xe^{x^2}}=lim_{x\to\infty}arctanx^2=\frac{\pi}{2}$

(4)$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$

2、解：

(1)$\int\frac{x}{3+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+3)}{x^2+3}=\frac{1}{2}ln\left|x^2+3\right|+c$

(2)$\int x^2e^{-x}dx=\int x^2d(-e^{-x})=-x^2e^{-x}+\int e^{-x}dx^2=-x^2e^{-x}+\int 2xe^{-x}dx$

$=-xe^{-x}+\int 2xd(-e^{-x})=-xe^{-x}-2xe^{-x}+\int 2e^{-x}dx$

$=-xe^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+c$

(3)$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int(\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx$

$=-(\frac{1}{2}arcsinx+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}-arcsinx)+c=\frac{1}{2}arcsinx-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+c$

(4)$\int\frac{dx}{2+sinx}dx=\int\frac{dx}{2sin^2\frac{x}{2}+2cos^2\frac{x}{2}+2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}=\int\frac{\frac{1}{cos^2\frac{x}{2}}dx}{2+2tan^2\frac{x}{2}+2tan\frac{x}{2}}$

$=\int\frac{dtan\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}+tan\frac{x}{2}}=\int\frac{d(tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2})}{(tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}arctan\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}(tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2})\right]+c$

(5)令$x=sin\theta$，则有

$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dsin\theta}{cos^3\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{cos^2\theta}=tan\frac{\pi}{6}-tan0=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(6)$\int_1^2 x^2lnxdx=\int_1^2\frac{1}{3}lnxdx^3=\frac{1}{3}x^3lnx|_1^2-\int_1^2\frac{1}{3}x^3(\frac{1}{x})dx=(\frac{1}{3}x^3lnx-\frac{x^3}{9})|_1^2=\frac{8}{3}ln2-\frac{7}{9}$

3、解：联立，有$\begin{cases} y^2=x \\ y=-x+2\end{cases}$解得交点坐标$A(1,1),B(4,-2)$.对所求区域

关于y进行积分，得：$S=\int_{-2}^{1}2-y-y^2dy=\frac{9}{2}$。

4、解：由于$y=\frac{x^2}{1+x}$，故其定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$。

求导，得$y'=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$。令$y'=0$，得$x_1=-2,x_2=0$。从而，$(-\infty,-2)$与$(0,+\infty)$为单调递增区间，$(-2,-1)$与$(-1,0)$为单调递减区间；$y$在$x=-2$处取得极大值$-4$，在$x=0$处取得极小值0。

再次求导，得$y''=\frac{2}{(1+x)^3}$。当$x<-1$时，$y''<0$，于是原函数在$(-\infty,-1)$上凸；同理可知在$(-1,+\infty)$下凸。原函数无拐点。

由于$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\infty$，故函数无水平渐近线；

由于$\lim\limits_{x\to1^+}y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-}y=-\infty$，故函数有一条垂直渐近线$x=-1$；

由于$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(1+x)}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=-1$，故函数存在斜渐近线$y=x-1$。

5、证明：令$f(x)=e^{-x}+x-1,g(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}(0<x<1)$。则$f'(x)=1-e^{-x}$。当$0<x<1$时，$\frac{1}{e}<\frac{1}{e^x}<1$，因此$f'(x)>0(0<x<1)$，从而$f(x)>f(0)=0$。于是，$1-x<e^{-x}$。

同时，$g'(x)=e^{-x}+x-1>0$，故$g(x)$在$(0,1)$单增，$g(x)>g(0)=0$。于是，$e^{-x}<1-x+\frac{x^2}{2}$。

综上，$1-x<e^{-x}<1-x+\frac{x^2}{2}(0<x<1)$。

6、证明：

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right]=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt$$

$(\Delta x>0)$。由积分中值定理，存在$\xi\in[x,x+\Delta x]$使得$\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt=\Delta xf(\xi)$。令$\Delta\to x$，则$x+\Delta\to x,\xi\to x$。由$f(x)$的连续性便有

$$F'(x)=\lim_{\Delta\to0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta\to0}f(\xi)=f(x)$$

命题得证。

7、证明：由定积分的性质与积分中值定理，

$$\int_0^1 f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)$$

其中，$\xi_k\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$，$k=1,2,...,n$。又因为$f(x)$在$[0,1]$上可导，由拉格朗日，存在$y_k\in$【(k-1)/n, $\frac{k}{n}$】，使得 $f(x_k)-f(\xi_k)=f'(y_k)(x_k-\xi_k),k=$

$1,2,...,n$。因此，

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} f(x_k)}{n} - \int_0^1 f(x)dx\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right|$$

$$=\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} f'(y_k)(x_k-\xi_k)\right|$$

$$\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f'(y_k)|\,|x_k-\xi_k| \leq \frac{1}{n}\max_{0\leq x\leq 1}|f'(x)|\sum_{k=1}^{n}|x_k-\xi_k|$$

$$\leq\frac{1}{n}\max_{0\leq x\leq 1}|f'(x)|$$

命题得证。

8、证明：当$\lambda \in (0,1)$且λ为有限二进制小数$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i}$，其中$a_i = 0,1(i=1,2,...,n-1,\text{n})$。当$a_n=1$时，$1-\lambda=\sum_{1}^{n} \frac{b_i}{2^i}$，其中$b_i=1-a_i(i=1,2,...,n-1,\text{n})$，$b_n=1$，且对于(a,b)内任意两点$x,y$，有$f(a_ix+b_iy) \leq a_if(x)+b_if(y), i=1,2,...,n-1$。此时，

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) = f\left(x\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2^i} + y\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{2^i}\right)$$

$$\leq\frac{1}{2}f(a_1x+b_1y)+\frac{1}{2}f\left(x\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{2^{i-1}} + y\sum_{i=2}^{n}\frac{b_i}{2^{i-1}}\right)$$

$$\leq\ldots\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2^i}f(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{2^i}f(y)$$

$$=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

即有$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$。

当λ为$(0,1)$内的任意实数时，存在收敛于λ的二进制小数序列$\{\lambda_n\}$且满足上列不等式。由于$f(x)$连续，故令$n\to\infty$，即有$\lim\limits_{n\to\infty} f(\lambda_n x+(1-\lambda_n)y) \leq \lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_n f(x)+(1-\lambda_n)f(y))$，化简得$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$。故$f(x)$在$[a,b]$下凸，命题得证。

数学分析　试题三

编写：xxx
录入：张铸明
审定：xxx

1、（48分）计算：

（1）$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi$;

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{1+x^2}}$;

（3）$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^4}$;　$\frac{1}{12}$

（4）$\int(e^{2x}-\sin 2x+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}})dx$;　$\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}\cos2x+3\arcsin x$

（5）$\int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx$;　$(4-2x)\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$

（6）$\int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2-x+1}dx$;　$\frac{3\pi}{16}-\frac{1}{2}\ln3$

（7）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4+3\tan x}$;

（8）设$f(x)=x^3\sin x$，求$f^{(99)}(0),f^{(100)}(0)$。　$(uv)'=u'v+uv'$　$(uv)''=u''v+2u$

2、（12分）讨论函数$y=\frac{(x-2)^2}{x^2}$在实轴上的单调性、极值点、凸性、渐近线与拐点。

3、（10分）（5班做第一题，其余班级做第二题）

3.1 证明：(a)$x^p-1>p(x-1),(p\geq2,x>1)$；(b)$\frac{\sqrt2}{16}<\int_0^1\frac{x^7}{\sqrt{1+x}}dx<\frac{1}{8}$;

3.2 求抛物线$(y-2)^2=x-1$在$(2,3)$处的切线及其与x轴所围有界区域的面积。

4、（12分）设$f(x)$在R上可导，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在且相等，证明：存在$\xi\in R$使得$f'(\xi)=0$。

5、（10分）设$f(x)$在有界区间(a,b)内一致连续。证明：$f(x)$有界。

8、（8分）设函数$f(x)$在(A,B)上连续，$A<a<b<B$。证明：

$$\lim_{h\to0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx=f(b)-f(a).$$

数学分析　答案三

编写：张铸明
录入：张铸明
审定：周启文

1、解：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\int_0^1\sin\pi x dx=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x|_0^1=\frac{2}{\pi}$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x)^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\pi^2}{4}$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-xe^{-\frac{x^2}{2}}+\sin x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-e^{-\frac{x^2}{2}}+x^2e^{-\frac{x^2}{2}}+\cos x}{12x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(3x-x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}-\sin x}{24x}=$
$\lim\limits_{x\to0}\frac{(3-6x^2+x^4)e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{24}=\frac{1}{12}$.

1(3) 泰勒公式解法

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24})}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^4}{8}-\frac{x^4}{24}}{x^4}=\frac{1}{8}-\frac{1}{24}=$

(4) $\int(e^{2x}-\sin 2x+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}})dx=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}\cos 2x+3\arcsin x+c$.

(5)令$\sqrt{x}=t$，得

$\int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx=\int t\sin t d(t^2)=\int 2t^2\sin t dt=-2t^2\cos t+\int 4t\cos t dt$
$=-2t^2\cos t+4t\sin t-4\int\sin t dt=-2t^2\cos t+4t\sin t+4\cos t+c$
$=-2x\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+4\cos\sqrt{x}+c$.

(6) $\int_{-1}^1\frac{x}{x^2-x+1}dx=\int_{-1}^1\frac{(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{x^2-x+1}dx=\int_{-1}^1\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}dx+\int_{-1}^1\frac{1}{2(x^2-x+1)}dx=$
$\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)|_{-1}^1+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-\frac{1}{2})|_{-1}^1=-\frac{1}{2}\ln 3+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$.

(7)令$I=\int\frac{dx}{4+3\tan x}=\int\frac{\cos x}{4\cos x+3\sin x}dx$，$J=\int\frac{\sin x}{4\cos x+3\sin x}dx$。则
$4I+3J=\int dx=x+c_1$，
$3I-4J=\int\frac{3\cos x-4\sin x}{4\cos x+3\sin x}dx=\int\frac{d(4\cos x+3\sin x)}{4\cos x+3\sin x}=\ln|4\cos x+3\sin x|+c_2$。从而，

代入值求积分，再求解 I

$4I+3J=\frac{\pi}{2}$
$3I-4J=\ln\frac{3}{4}$

$I=\frac{4x+3\ln|4\cos x+3\sin x|}{25}+c$。故
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4+3\tan x}=\frac{4x+3\ln|4\cos x+3\sin x|}{25}|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi+3\ln\frac{3}{4}}{25}$。

(8) $f(x)=x^3\sin x$，由莱布尼茨公式，有：
$f^{(99)}(x)=x^3\sin(x+\frac{99}{2}\pi)+99\times3x^2\sin(x+\frac{98}{2}\pi)+\frac{99\times98}{2}\times6x\sin(x+\frac{97}{2})\pi+$

$\frac{99\times98\times97}{3\times2\times1}\times6\sin(x+\frac{96}{2}\pi)$,
从而，$f^{(99)}(0)=0$。同理可解得$f^{(100)}(0)=\frac{99\times98\times97}{3\times2\times1}\times6\sin(x+\frac{97}{2}\pi)=941094$。

2、解：$y=\frac{(x-2)^3}{x^2}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，其零点为$x=2$。
$y'=\frac{(x-2)^2(x+4)}{x^3}$。令$y'=0$，解得$x_1=2,x_2=-4$。经验证，原函数的单调递增区间为$(-\infty,-4),(0,+\infty)$，单调递减区间为$(-4,0)$。因而，$x=-4$为原函数的极大值点，极大值为$-\frac{27}{2}$；函数无极小值。
$y''=\frac{24(x-2)}{x^4}$，令$y''=0$，得$x=2$，从而函数的拐点为$(2,0)$。
当$x\in(2,\infty)$时，$y''>0$，函数下凸；
当$x\in(-\infty,0)$与$(0,2)$时，$y''<0$，函数上凸。
$\lim\limits_{x\to\infty}y=\infty$，故原函数无水平渐近线；
$\lim\limits_{x\to0}y=-\infty$，故原函数存在垂直渐近线$x=0$；
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1,\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=-6$，故原函数存在斜渐近线$y=x-6$。
3.1、证明：
(a)令$f(x)=x^p-1-p(x-1)$，则$f'(x)=px^p-p=p(x^{p-1}-1)$。由于$x>1$且p大于等于2，所以$f'(x)>0$恒成立，故$f(x)$严格递增，$f(x)>f(1)=0$，即$x^p-1>p(x-1)$。
(b)因为$x\in(0,1)$，故$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{1+x}}<1$。因此，
$\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{2}x^7dx<\int_0^1\frac{x^7}{\sqrt{1+x}}dx<\int_0^1x^7dx$,
计算即可得到$\frac{\sqrt{2}}{16}<\int_0^1\frac{x^7}{\sqrt{1+x}}dx<\frac{1}{8}$。
3.2、解：因为$(y-2)^2=x-1$，两边关于x求导，得$2(y-2)y'=1,y'=\frac{1}{2(y-2)}$。
从而，$(2,3)$处的切线斜率为$y'|_{(2,3)}=\frac{1}{2}$，切线方程为$y=\frac{1}{2}x+2$。
所求面积为$\int_0^3((y-2)^2+1-(2y-4))dy=9$。

4、证明：设$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。
（1）若$f(x)=A$恒成立，则$f'(x)=0$，命题显然成立；
（2）若存在$x_0\in(-\infty,+\infty)$使得$f(x_0)\neq A$。
令$x=\tan t$，$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，再令$g(t)=f(x)$，于是有$\lim\limits_{t\to-\frac{\pi}{2}}g(t)=\lim\limits_{t\to+\frac{\pi}{2}}g(t)=A$。因为$f(x)$在$R$上连续可导，故$g(t)$在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上连续可导。补充定义$g(t)=A,t=\pm\frac{\pi}{2}$，则$g(t)$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上连续，在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上可导。由罗尔定理，存

在$\xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$使得$g'(\xi) = 0$,从而$g'(\xi) = (f(\tan\xi))' = f'(\xi)sec^2\xi = 0$，其中$sec^2\xi \neq 0$。于是，$f'(\tan\xi) = f'(x_1) = 0$，命题得证。

5、证明：若$f(x)$在(a,b)上一致连续，则$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$，使得当$x', x'' \in (a,b)$且有$|x'-x''| < \delta$时，总有$|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$。因此，对$\forall x', x'' \in (a, a+\delta)$，总有$|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$。
由柯西收敛原理知$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$存在。设$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \alpha$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \beta$。构造函数：

$$g(x) = \begin{cases} \alpha, & x = a \\ f(x), & x \in (a,b) \\ \beta, & x = b \end{cases}$$

可知$g(x)$在$[a,b]$上一致连续，因而$g(x)$在$[a,b]$上有界，从而$f(x)$在(a,b)上有界。

6、证明：因为$f(x)$在(A,B)上连续，故$f(x)$在$[a,b]$上连续。又因为$A < a < b < B$，所以$\exists h > 0$使得$f(x+h)$也连续。
由微积分基本定理，设$F(x)$为$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，即$F'(x) = f(x)$，则有$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$。同理，有有$\int_a^b f(x+h)dx = F(b+h) - F(a+h)$。所以，

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^b (f(x+h)-f(x))dx}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(F(b+h)-F(a+h))-(F(b)-F(a))}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{F(b+h)-F(b)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}\\
&=f(b)-f(a).\end{aligned}$$