离散数学基础习题答案

Answers to Exercises in Elementary Discrete Mathematics

周晓聪　　乔海燕

中山大学数据科学与计算机学院, 广州 510275

2021 年 1 月 19 日

目录

第五章　集合

练习 5.1 分别使用元素枚举法和性质概括法定义下面的集合。

(1) 1到100（包括1和100）的完全平方数构成的集合；

(2) 1到100中17的倍数构成的集合；

(3) 24的所有正因子构成的集合；

(4) 长度为4且含有偶数个1的二进制串构成的集合。

解答: (1) 1到100的完全平方数构成的集合，用元素枚举法则是集合$\{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100\}$，用性质概括法则是：$\{k^2 \mid k \in \mathbb{N} \ \wedge \ 1 \leq k \leq 10\}$。

(2) 1到100中17的倍数构成的集合，用元素枚举法则是集合$\{17,34,51,68,85\}$，用性质概括法则是：$\{17k \mid k \in \mathbb{N} \ \wedge \ 1 \leq 17k \leq 100\}$。

(3) 24的所有正因子构成的集合，用元素枚举法则是集合$\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$，用性质概括法则是：$\{k \in \mathbb{N} \mid k \mid 24\}$。

(4) 长度为4且含有偶数个1的二进制串构成的集合，用元素枚举法则是

$$\{0000,0011,0101,0110,1001,1010,1100,1111\}$$

用性质概括法则是：$\{w \in \Sigma^* \mid w\text{的长度为4且含有偶数个1}\}$，其中字母集$\Sigma = \{0,1\}$。

练习* 5.2 设全集U是自然数集$\mathbb{N}$，定义集合A：

$$A \ = \ \{x+y \mid x,y \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 4, 1 \leq y^2 \leq 10\}$$

(1) 使用元素枚举法给出集合A；

(2) 判断下面公式的真值（注意，个体变量的论域是全集$\mathbb{N}$）。

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall x(x \in A \leftrightarrow \exists y \exists z(1 \leq y \leq 4 \ \wedge \ 1 \leq z^2 \leq 10 \ \wedge x = y+z)) \\ (2) & \forall x \forall y((x+y) \in A \to (1 \leq x \leq 4 \ \wedge \ 1 \leq y^2 \leq 10)) \\ (3) & \forall x \forall y((1 \leq x \leq 4 \ \wedge \ 1 \leq y^2 \leq 10) \to (x+y) \in A) \\ (4) & \exists x \exists y((x+y) \in A \wedge (x > 5 \vee y^2 > 10)) \end{array}$$

解答: (1) 在A的定义中，实际上x的取值只能是$1,2,3,4$，而y的取值只能是$1,2,3$，因此有：

$$A = \{2,3,4,5,6,7\}$$

(2) 公式$\forall x(x \in A \leftrightarrow \exists y \exists z(1 \leq y \leq 4 \ \wedge \ 1 \leq y^2 \leq 10 \ \wedge x = y + z))$就是集合$A$的定义的含义，因此真值为真。

而公式$\forall x \forall y((x+y) \in A \rightarrow (1 \leq x \leq 4 \ \wedge \ 1 \leq y^2 \leq 10))$的真值为假，例如取$x = 1, y = 6$，则$x + y = 7 \in A$，但却没有$1 \leq y^2 \leq 10$。

公式$\forall x \forall y((1 \leq x \leq 4 \ \wedge \ 1 \leq y^2 \leq 10) \rightarrow (x+y) \in A)$的真值为真，因为对于蕴涵式$(1 \leq x \leq 4 \ \wedge \ 1 \leq y^2 \leq 10) \rightarrow (x+y) \in A$，只有当$x = 1, 2, 3$或4，且$y = 1, 2$或3时才为真，而不管哪一种情况，都有$x + y \in A$。

公式$\exists x \exists y((x+y) \in A \wedge (x > 5 \vee y^2 > 10))$的真值为真，例如取$x = 1, y = 6$则，$x + y \in A$，而$y^2 > 10$。

练习 5.3 设全集U是自然数集，A, B, C, D是它的子集，且

$$A = \{1, 2, 8, 10\} \qquad B = \{n \mid n^2 < 50\}$$
$$C = \{n \mid n \text{ 是3的倍数且 } n < 20\} \qquad D = \{n \mid n = 2^i, i < 6, i \in \mathbb{N}\}$$

计算下列集合表达式：

(1) $A \cup (C \cap D)$　(2) $A \cap (B \cup (C \cap D))$

(3) $B - (A \cap C)$　(4) $\wp(A)$

解答：首先我们使用元素枚举法给出各集合：

$$A = \{1, 2, 8, 10\} \qquad B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$C = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\} \qquad D = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$$

可看到$C \cap D = \varnothing$且$A \cap C = \varnothing$，因此：

(1) $A \cup (C \cap D) = A = \{1, 2, 8, 10\}$

(2) $A \cap (B \cup (C \cap D)) = A \cap B = \{1, 2\}$

(3) $B - (A \cap C) = B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(4) $\wp(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{8\}, \{10\}, \{1, 2\}, \{1, 8\}, \{1, 10\}, \{2, 8\}, \{2, 10\}, \{8, 10\},$
$\{1, 2, 8\}, \{1, 2, 10\}, \{1, 8, 10\}, \{2, 8, 10\}, \{1, 2, 8, 10\}\}$

练习 5.4 设全集$U = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 20\}$，集合$A, B, C$都是全集$U$的子集，且$A = \{x \mid x \text{ 是3的倍数}\}$，$B = \{x \mid x \text{ 是4的倍数}\}$，$C = \{x \mid x \text{ 是5的倍数}\}$，计算下面的集合表达式。

(1) $A \cap B$　(2) $A \cup B$　(3) $A - B$

(4) $A \cap (B \cup C)$　(5) $A - (B - C)$　(6) $\overline{A - C}$

解答：首先我们使用元素枚举法给出各集合：

$$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} \qquad B = \{4, 8, 12, 16, 20\} \qquad C = \{5, 10, 15, 20\}$$

因此有：

(1) $A \cap B = \{12\}$

(2) $A \cup B = \{3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 20\}$

(3) $A - B = \{3, 6, 9, 15, 18\}$

(4) $A \cap (B \cup C) = A \cap \{4, 5, 8, 10, 12, 15, 16, 20\} = \{12, 15\}$

(5) $A - (B - C) = A - \{4, 8, 12, 16\} = \{3, 6, 9, 15, 18\}$

(6) $\overline{A - C} = \overline{\{3, 6, 9, 12, 18\}} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20\}$

练习* 5.5 设全集U是自然数集，集合A和B都是全集U的子集，且$A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$，$B = \{4k \mid k \in \mathbb{N}\}$，计算$A \cap B, A \cup B$和$A - B$。

解答：根据A的定义，对任意自然数x，$x \in A$当且仅当$3 \mid x$；而根据B的定义，对任意自然数x，$x \in B$当且仅当$4 \mid x$，因此：

(1) 对任意自然数x，$x \in A \cap B$当且仅当$x \mid 3$且$x \mid 4$，当且仅当$x \mid 12$，因此：

$$A \cap B = \{12k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

(2) 对任意自然数x，$x \in A \cup B$当且仅当$x \mid 3$或$x \mid 4$，当且仅当$x \textbf{ mod } 12 = 0, 3, 4, 6, 8$或$9$，因此：

$$A \cup B = \{x \mid \exists k \in \mathbb{N}(x = 12k \vee x = 12k + 3 \vee x = 12k + 4 \vee x = 12k + 6 \vee x = 12k + 8 \vee x = 12k + 9)\}$$

(3) 对任意自然数x，$x \in A - B$当且仅当$x \mid 3$且$x \nmid 4$，当且仅当$x \textbf{ mod } 12 = 3, 6, 9$，因此：

$$A - B = \{x \mid \exists k \in \mathbb{N}(x = 12k + 3 \vee x = 12k + 6 \vee x = 12k + 9)\}$$

练习 5.6 设A_n是n的所有正因子构成的集合，集合族$\mathcal{A} = \{A_{12}, A_{18}, A_{24}, A_{36}\}$，计算$\bigcap \mathcal{A}$和$\bigcup \mathcal{A}$。

解答：首先我们有：

$$A_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \qquad A_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

$$A_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24\} \qquad A_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

从而有：

$$\begin{aligned}\bigcap\mathcal{A} &= A_{12}\cap A_{18}\cap A_{24}\cap A_{36} &= \{1,2,3,6\}\\ \bigcup\mathcal{A} &= A_{12}\cup A_{18}\cup A_{24}\cup A_{36} &= \{1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36\}\end{aligned}$$

不难看到$\bigcap\mathcal{A}$是$12,18,24,36$的所有公因子的集合。

练习 5.7 设A_n是n的所有正因子构成的集合，集合族$\mathcal{A}=\{A_{4k}\mid k\in\mathbb{Z}^+\}$，计算$\bigcap\mathcal{A}$和$\bigcup\mathcal{A}$。

解答：由于$A_4=\{1,2,4\}$，而对任意$k\in\mathbb{Z}^+$，$1,2,4$都是$4k$的正因子，也即$1,2,4\in A_{4k}$，从而：

$$\bigcap\mathcal{A}=A_4=\{1,2,4\}$$

而对任意正整数$k\in\mathbb{Z}^+$，显然有$k\in A_{4k}$，从而$k\in\bigcup\mathcal{A}$，这表明$\bigcup\mathcal{A}=\mathbb{Z}^+$。

练习 5.8 计算下面集合的幂集。

(1) $\{a\}$ (2) $\{a,b\}$ (3) $\{a,b,c\}$

解答：根据幂集的定义有：

$$\begin{aligned}\wp(\{a\}) &= \{\varnothing,\{a\}\}\\ \wp(\{a,b\}) &= \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}\\ \wp(\{a,b,c\}) &= \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}\end{aligned}$$

练习* 5.9 计算下面集合的幂集。

(1) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ (2) $\{a,\{b\},\{\{c\}\}\}$ (3) $\wp(\{\{a\}\})$

解答：很容易根据幂集的定义计算：

$$\begin{aligned}(1)\quad & \wp(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})\\ &= \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\\ (2)\quad & \wp(\{a,\{b\},\{\{c\}\}\})\\ &= \{\varnothing,\{a\},\{\{b\}\},\{\{\{c\}\}\},\{a,\{b\}\},\{a,\{\{c\}\}\},\{\{b\},\{\{c\}\}\},\{a,\{b\},\{\{c\}\}\}\}\\ (3)\quad & \wp(\{\{a\}\}) = \wp(\{\varnothing,\{\{a\}\}\})\end{aligned}$$

练习* 5.10 设a是全集的某个元素，判断下面的命题是否为真。

(1) $a\in\{a\}$ (2) $\{a\}\in\{a\}$ (3) $\{a\}\in\{a,\{a\}\}$

(4) $\{a\}\subseteq\{a\}$ (5) $\{a\}\subseteq\{a,\{a\}\}$ (6) $\{\{a\}\}\subseteq\{a,\{a\}\}$

解答：

命题(1) 为真，因为a是$\{a\}$的元素；

命题(2) 为假，因为$\{a\}$不是$\{a\}$的元素，$\{a\}$的元素只有a；

命题(3) 为真，因为$\{a, \{a\}\}$有两个元素，其中一个为a，而另一个元素就是$\{a\}$；

命题(4) 为真，因为$\{a\} = \{a\}$；

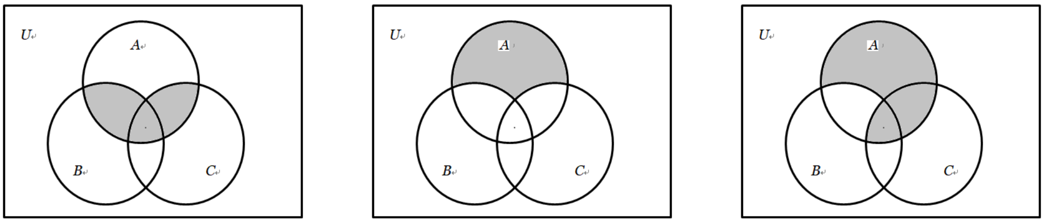
命题(5) 为真，因为$\{a\}$只有元素a，而$\{a, \{a\}\}$有两个元素，一个是a，一个是$\{a\}$；

命题(6) 为真，因为$\{\{a\}\}$只有一个元素$\{a\}$，而这个元素属于$\{a, \{a\}\}$，后者有两个元素，一个是a，一个是$\{a\}$；

练习 5.11 设U是全集，A, B, C是U的子集，使用文氏图表示下面的集合表达式。

$$(1)\quad A \cap (B \cup C) \qquad\qquad (2)\quad A - (B \cup C) \qquad\qquad (3)\quad A - (B - C)$$

解答：下面从左至右分别给出了集合表达式$A \cap (B \cup C)$, $A - (B \cup C)$和$A - (B - C)$的文氏图。



练习 5.12 设U是全集，A, B, C是U的子集，使用成员关系表表示下面的集合表达式。

$$(1)\quad A \cap (B \cup C) \qquad\qquad (2)\quad A - (B \cup C) \qquad\qquad (3)\quad A - (B - C)$$

解答：我们使用下面的成员关系表给出这些集合表达式。

A	B	C	$B \cup C$	$B - C$	$A \cap (B \cup C)$	$A - (B \cup C)$	$A - (B - C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	0	1

练习 5.13 考虑命题：*若$A \subseteq C, B \subseteq C$，且$x \in A$，则$x \in B$。*

(1) 对于该命题，下面证明有什么错误？

证明 *设$x \notin B$。由于$x \in A$且$A \subseteq C$，因此$x \in C$。既然$x \notin B$且$B \subseteq C$，所以$x \notin C$。但前面已经证明$x \in C$，矛盾！因此由反证法，我们有$x \in B$。*

(2) 给出一个例子说明上面命题不成立。

解答：(1) 上面证明的错误在于，由$x \notin B$和$B \subseteq C$不能得到$x \notin C$，因为$B \subseteq C$是意味着若$x \in B$，则$x \in C$，但若$x \notin B$，并不能得到$x \notin C$，否定蕴涵式的前件，不能得到后件的否定。

(2) 很容易举一个例子，例如$A=\{1\},B=\{2\},C=\{1,2\}$且$x=1$，显然$A\subseteq C$且$B\subseteq C$，且$1\in A$，但不能得到$1\in B$。

练习* 5.14 设A,B是任意集合，试给出下列各式成立的充分必要条件，并说明理由。

$$(1)\ A\cap B=A \qquad (2)\ A\cup B=A$$
$$(3)\ A\oplus B=A \qquad (4)\ A\cap B=A\cup B$$

解答: (1) $A\cap B=A$的充要条件是$A\subseteq B$。因为当$A\cap B=A$时，对任意$x\in A$，就有$x\in A\cap B$，从而$x\in B$，因此$A\subseteq B$。反之若$A\subseteq B$，则对任意的x，若$x\in A\cap B$，则显然$x\in A$，反之，若$x\in A$，则由于$A\subseteq B$，从而$x\in B$，从而$x\in A\cap B$，这就证明了$A=A\cap B$。

(2) $A\cup B=A$的充要条件是$B\subseteq A$。因为当$A\cup B=A$时，对任意$x\in B$，显然有$x\in A\cup B$，从而$x\in A$，因此$B\subseteq A$。反之若$B\subseteq A$，则对任意x，若$x\in A\cup B$，则要么$x\in A$，要么$x\in B$，而当$x\in B$时由$B\subseteq A$也有$x\in A$，因此总有$x\in A$，即$A\cup B\subseteq A$，反之若$x\in A$，则显然有$x\in A\cup B$，因此$A=A\cup B$。

(3) $A\oplus B=A$的充要条件是$B=\varnothing$，显然当$B=\varnothing$时，根据对称差的定义有$A\oplus\varnothing=A$。另一方面，若$A\oplus B=A$，而$B\neq\varnothing$，即存在元素$b\in\varnothing$。分情况讨论: (i) 若$b\in A$，则$b\in A\cap B$，从而根据对称差的定义有$b\notin A\oplus B$，这表明$A\neq A\oplus B$，矛盾! (ii) 若$b\notin A$，则这时$b\in A\cup B$且$b\notin A\cap B$，从而$b\in A\oplus B$，这也表明$A\neq A\oplus B$，矛盾! 这就证明了当$A\oplus B=A$时必有$B=\varnothing$。

(4) $A\cap B=A\cup B$的充要条件是$A=B$。显然当$A=B$时有$A\cap B=A\cup B$。另一方面，设$A\cap B=A\cup B$但$A\neq B$。由$A\neq B$得存在元素$a\in A$且$a\notin B$，或者存在元素$b\in B$且$b\notin B$。不难看到这两种情况的证明是类似的，因此不失一般性，假设存在$a\in A$且$a\notin B$，从而$a\in A\cup B$但$a\notin A\cap B$，这表明$A\cap B\neq A\cup B$，矛盾! 因此当$A\cap B=A\cup B$时必有$A=B$。

练习 5.15 设A,B,C和D是集合。集合等式$(A-B)-(C-D)=(A-C)-(B-D)$是否成立，如成立请证明，如不成立请举例说明。

解答: 这个等式不成立，例如$A=\{1\},B=\{1,2\},C=\{2\},D=\{1,2\}$，则:

$$A-B=\varnothing \qquad C-D=\varnothing \qquad A-C=\{1\} \qquad B-D=\varnothing$$

从而$(A-B)-(C-D)=\varnothing$，而$(A-C)-(B-D)=\{1\}$，两者不相同。

练习* 5.16 设A,B,C是集合，证明: 若$A\cap B=A\cap C$且$A\cup B=A\cup C$，则$B=C$。

证明 不难看到$B\subseteq C$的证明与$C\subseteq B$的证明类似，因此我们只需证明$B\subseteq C$即可。对任意x，若$x\in B$，我们分情况证明也有$x\in C$: (i) 若$x\in A$，则$x\in A\cap B$，而$A\cap B=A\cap C$，从而$x\in A\cap C$，这就得到$x\in C$; (ii) 若$x\notin A$，则由$x\in B$得到$x\in A\cup B$，而$A\cup B=A\cup C$，从而$x\in A\cup C$，又因为$x\notin A$，所以必有$x\in C$，这也得到$x\in C$。综上总有$x\in C$，也即当$A\cup B=A\cap C$且$A\cup B=A\cup C$时有$B\subseteq C$，类似地可证明这时也有$C\subseteq B$，从而$B=C$。 □

练习 5.17 设A,B,C是集合，证明: 若$A\cap B=A\cap C$且$\overline{A}\cap B=\overline{A}\cap C$，则$B=C$。

证明 对任意x，若$x\in B$，我们分两种情况:

(1) $x \in A$，则$x \in A \cap B$，而$A \cap B = A \cap C$，从而$x \in A \cap C$，从而$x \in C$；
(2) $x \notin A$，从而$x \in \overline{A} \cap B$，而$\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap C$，从而$x \in \overline{A} \cap C$，从而也有$x \in C$。
综上当$x \in B$时总有$x \in C$，即$B \subseteq C$。类似可证明$C \subseteq B$，因此$B = C$。 □

练习 5.18 证明对称差运算满足交换律：即对任意集合A, B，$A \oplus B = B \oplus A$。

证明 由对称差的定义由$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$，因此$B \oplus A = (B - A) \cup (A - B)$，因此$A \oplus B = B \oplus A$。 □

练习 5.19 设A, B, C是集合，判断$A \cup (B \oplus C) = (A \cup B) \oplus (A \cup C)$是否成立，并说明理由。

解答：我们使用集合的成员关系表来判断上面的等式是否成立。

A	B	C	$B \oplus C$	$A \cup (B \oplus C)$	$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) \oplus (A \cup C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1	0

可以看到等式不成立，根据上面的成员关系表我们也可举例说明上述等式不成立，设$A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}$，则：

$$\begin{aligned} B \oplus C &= \{2,3\} & & & A \cup (B \oplus C) &= \{1,2,3\} \\ A \cup B &= \{1,2\} & A \cup C &= \{1,3\} & (A \cup B) \oplus (A \cup C) &= \{2,3\} \end{aligned}$$

练习 5.20 设A, B, C是集合，判断$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$是否成立，并说明理由。

解答：我们使用集合的成员关系表来判断上面的等式是否成立。

A	B	C	$B \oplus C$	$A \cap (B \oplus C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \oplus (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0

可以看到等式成立。我们也可使用逻辑演算证明如下：对任意x，

$$
\begin{aligned}
& x \in A \cap (B \oplus C) && // \cap\text{的定义} \\
\equiv\ & x \in A\ \wedge\ x \in (B \oplus C) && // \oplus\text{的定义} \\
\equiv\ & x \in A\ \wedge\ ((x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in C \wedge x \notin B)) && // \text{分配律} \\
\equiv\ & (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& x \in (A \cap B) \oplus (A \cap C) && // \oplus\text{的定义} \\
\equiv\ & (x \in A \cap B \wedge x \notin A \cap C) \vee (x \notin A \cap B \wedge x \in A \cap C) && // \cap\text{的定义} \\
\equiv\ & (x \in A \wedge x \in B \wedge \neg(x \in A \wedge x \in C)) \vee (\neg(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in A \in x \in C) && // \text{德摩尔根律} \\
\equiv\ & (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \notin B \wedge x \in A \in x \in C) && // \text{分配律、矛盾律、同一律}
\end{aligned}
$$

因此等式成立。

练习 5.21 证明下面的集合等式。

(1) $(A - B) - C = (A - C) - B$ (2) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

证明

$$
\begin{aligned}
(1)\quad (A - B) - C &= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} && // \text{集合差的性质} \\
&= (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B} && // \text{集合交满足交换律} \\
&= (A - C) - B && // \text{集合交满足交换律} \\
(2)\quad (A - B) - C &= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} && // \text{集合差的性质} \\
(A - C) - (B - C) &= (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B \cap \overline{C}} && // \text{集合差的性质} \\
&= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C) && // \text{德摩尔根律、双重否定律} \\
&= (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C} \cap C) && // \text{分配律} \\
&= A \cap \overline{C} \cap \overline{B} && // \text{矛盾律、同一律}
\end{aligned}
$$

这就证明了(1)和(2)给出的等式都成立。 □

练习 5.22 考虑下面的命题：

对任意集合A, B, C，如果$A - B \subseteq C$且$A \not\subseteq C$，则$A \cap B \neq \varnothing$。

对于该命题的下面证明是否正确？如果正确，它使用了什么证明策略？如果不正确，能否更正？这个命题是否为真？

证明 *既然$A \not\subseteq C$，则可选择某个x使得$x \in A$且$x \notin C$。既然$x \notin C$且$A - B \subseteq C$，所以$x \notin A - B$，因此，要么$x \notin A$，要么$x \in B$，但是前面已经假定$x \in A$，因此必有$x \in B$。既然$x \in A$且$x \in B$，因此$x \in A \cap B$，因此$A \cap B \neq \varnothing$。*

解答：上述证明是正确的，总体上使用的是直接证明的策略。具体来说，$A \not\subseteq C$，即$\neg(\forall x(x \in$

$A \to x \in C)$)，也即$\exists x(x \in A \wedge x \notin C)$，因此存在$x$，$x \in A$且$x \notin C$。由$x \notin C$且$A - B \subseteq C$得到$x \notin A - B$是假言易位，因为$A - B \subseteq C$意味着$x \in A - B \to x \in C$。而$x \notin A - B$，即$\neg(x \in A - B)$，即$\neg(x \in A \wedge x \notin B)$，也即$x \notin A \vee x \in B$。而$x \in A$，因此由析取三段论得到$x \in B$，从而由合取规则得到$x \in A \wedge x \in B$，即$x \in A \cap B$，从而$A \cap B \neq \varnothing$。

练习 5.23 考虑下面的命题：

设A, B, C是集合且$A \subseteq B \cup C$，则要么$A \subseteq B$要么$A \subseteq C$。

对于该命题的下面证明是否正确？如果正确，它使用了什么证明策略？如果不正确，能否更正？这个命题是否正确？

证明 *设x是A的任意元素，因为$A \subseteq B \cup C$，因此有要么$x \in B$，要么$x \in C$：*

情况一：$x \in B$。由于x是A的任意元素，这意味着$\forall x \in A(x \in B)$，即$A \subseteq B$。

情况二：$x \in C$。由于x是A的任意元素，类似地，这意味着$\forall x \in A(x \in C)$，即$A \subseteq C$。

因此，这表明要么$A \subseteq B$，要么$A \subseteq C$。

解答：这个证明是不正确的，虽然开始时假设x是A的任意元素，但在由$A \subseteq B \cup C$得到$x \in B$或$x \in C$后，分情况考虑$x \in B$时，这时的x已经不是A的任意元素，所以不能得到$\forall x(x \in A \to x \in B)$。

这个不是正确的，例如$A = \{1, 2\}$，$B = \{1\}$且$C = \{2\}$，显然$A \subseteq B \cup C$，但没有$A \subseteq B$，也没有$A \subseteq C$。

练习* 5.24 设A, B, C是集合，证明：

(1) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$；

(2) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$当且仅当$C \subseteq A$。

证明 (1) 由于$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$，由于$A \cap C \subseteq C$，且$\cup$保持子集关系，从而就得到

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq (A \cap B) \cup C$$

(2) 首先若$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$，则对任意的$x$，若$x \in C$，则$x \in (A \cap B) \cup C$，而$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$，从而$x \in A \cap (B \cup C)$，从而$x \in A$，这就得到$C \subseteq A$；

另一方面，若$C \subseteq A$，则由$C \subseteq B \cup C$可得$C \subseteq A \cap (B \cup C)$，而显然$A \cap B \subseteq A$，且$A \cap B \subseteq B \cup C$，因此也有$A \cap B \subseteq A \cap (B \cup C)$，从而就有$(A \cap B) \cup C) \subseteq A \cap (B \cup C)$。 □

练习 5.25 设A, B, C是集合且$A - B \subseteq C$，证明$A - C \subseteq B$。

证明 对任意x，若$x \in A - C$，则$x \in A$且$x \notin C$，若这时$x \notin B$，则$x \in A$且$x \notin B$，从而$x \in A - B$，从而由$A - B \subseteq C$得到$x \in C$，与$x \notin C$，矛盾！因此这时必有$x \in B$，这就证明了$A - C \subseteq B$。 □

练习* 5.26 证明如果集合A和$B - C$不相交，则$A \cap B \subseteq C$。

证明 注意，集合A和$B - C$不相交的意思是$A \cap (B - C) = \varnothing$。对任意$x$，若$x \in A \cap B$，即$x \in A$且$x \in B$。由于$A \cap (B - C) = \varnothing$，因此有$x \notin (B - C)$，这时若$x \notin C$，则$x \in B$且$x \notin C$，即$x \in (B - C)$，矛盾！因此这时必有$x \in C$，这就证明了$A \cap B \subseteq C$。 □

练习 5.27 设A, B, C是集合。证明$(A \cup B) - C \subseteq A \cup (B - C)$

证明 对任意x，若$x \in (A \cup B) - C$，即$x \in A \cup B$且$x \notin C$。分情况考虑：(1) 若$x \in A$，则显然有$x \in A \cup (B - C)$，而(2) 若$x \in B$，则$x \in B$且$x \notin C$，从而$x \in B - C$，从而也有$x \in A \cup (B - C)$。因此当$x \in (A \cup B) - C$时总有$x \in A \cup (B - C)$，即$(A \cup B) - C \subseteq A \cup (B - C)$。 □

练习 5.28 设A, B, C是集合，证明$A - (B - C) \subseteq (A - B) \cup C$。

证明 对任意x，若$x \in A - (B - C)$，即$x \in A$且$x \notin (B - C)$，即$x \in A$且$(x \notin B \vee x \in C)$，从而若$x \in C$，则$x \in (A - B) \cup C$，而若$x \notin B$，则由$x \in A$且$x \notin B$得到$x \in A - B$，也有$x \in (A - B) \cup C$，因此总有$A - (B - C) \subseteq (A - B) \cup C$。 □

练习 5.29 设A, B, C是集合。证明$A - C \subseteq (A - B) \cup (B - C)$。

证明 对任意x，若$x \in A - C$，即$x \in A$且$x \notin C$。这时若(1) $x \notin B$，则$x \in A$且$x \notin B$，从而$x \in A - B$，从而$x \in (A - B) \cup (B - C)$；而若(2) $x \in B$，则$x \in B$且$x \notin C$，从而$x \in B - C$，从而也有$x \in (A - B) \cup (B - C)$。总之，这时总有$x \in (A - B) \cup (B - C)$，因此$A - C \subseteq (A - B) \cup (B - C)$。□

练习* 5.30 设A, B是集合，证明$A = B$当且仅当$\wp(A) = \wp(B)$。

证明 显然当$A = B$时有$\wp(A) = \wp(B)$，因此我们只要证明$\wp(A) = \wp(B)$蕴涵$A = B$。对任意x，若$x \in A$，则$\{x\} \in \wp(A)$，而$\wp(A) = \wp(B)$，从而$\{x\} \in \wp(B)$，从而$\{x\} \subseteq B$，从而$x \in B$，这就证明了当$\wp(A) = \wp(B)$时有$A \subseteq B$，类似地可证明这时也有$B \subseteq A$，因此有$A = B$。 □

练习 5.31 设A, B是集合，证明$\wp(A \cap B) = \wp(A) \cap \wp(B)$。

证明 对任意集合S，若$S \in \wp(A \cap B)$，则$S \subseteq A \cap B$，从而$S \cap A$且$S \cap B$，即$S \in \wp(A)$且$S \in \wp(B)$，从而$S \in \wp(A) \cap \wp(B)$，这表明$\wp(A \cap B) \subseteq \wp(A) \cap \wp(B)$。

反之，对任意集合S，若$S \in \wp(A) \cap \wp(B)$，则$S \subseteq A$且$S \subseteq B$，从而$S \subseteq A \cap B$，从而$S \in \wp(A \cap B)$，这表明$\wp(A) \cap \wp(B) \subseteq \wp(A \cap B)$。 □

练习 5.32 证明对任意集合A, B，若$\wp(A) \cup \wp(B) = \wp(A \cup B)$，则$A \subseteq B$或$B \subseteq A$。

证明 对任意集合A, B，设$\wp(A) \cup \wp(B) = \wp(A \cup B)$。这时若没有$(A \subseteq B$或$B \subseteq A)$，即$A \not\subseteq B$且$B \not\subseteq A$。注意到$A \not\subseteq B$意味着存在$a$，$a \in A$但$a \notin B$，而$B \not\subseteq A$意味着存在$b$，$b \in B$但$b \notin A$。从而$\{a, b\} \subseteq A \cup B$，即$\{a, b\} \in \wp(A \cup B)$，但$\{a, b\} \not\subseteq A$，即$\{a, b\} \notin \wp(A)$，且$\{a, b\} \not\subseteq B$，即$\{a, b\} \notin \wp(B)$，从而$\{a, b\} \notin \wp(A) \cup \wp(B)$，这与$\wp(A) \cup \wp(B) = \wp(A \cup B)$矛盾！因此由反证法，当$\wp(A) \cup \wp(B) = \wp(A \cup B)$时有$A \subseteq B$或$B \subseteq A$。 □

练习 5.33 设$\mathcal{A}$是集合族且B是集合，证明如果$\bigcup \mathcal{A} \subseteq B$，则$\mathcal{A} \subseteq \wp(B)$。

证明 对任意集合S，若$S \in \mathcal{A}$，则对任意元素$x \in S$，根据$\bigcup \mathcal{A}$的定义有$x \in \bigcup \mathcal{A}$，而$\bigcup \mathcal{A} \subseteq B$，因此$x \in B$，这就表明$S \subseteq B$，从而$S \in \wp(B)$，这就表明$\mathcal{A} \subseteq \wp(B)$。 □

【**讨论**】实际上，这个命题的逆命题也成立：若$\mathcal{A} \subseteq \wp(B)$，则$\bigcup \mathcal{A} \subseteq B$。因为对任意元素$x$，若$x \in \bigcup \mathcal{A}$，则存在集合$S \in \mathcal{A}$使得$x \in S$，而$\mathcal{A} \subseteq \wp(B)$，因此$S \in \wp(B)$，即$S \subseteq B$，从而由$x \in S$得到$x \in B$，这就表明$\bigcup \mathcal{A} \subseteq B$。

练习 5.34 假设全集U的元素都是字符，例如小写字母构成的集合，编写程序实现U的子集之间的集合并、集合交、集合差、集合补和U 的子集的幂集运算。