数项级数和广义积分

考试时间: 90 分钟

1. 判别下列各级数的敛散性, 直接写出收敛或发散(共20分, 每题5分).

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n^3+1}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2 \pi}{\sqrt{n}}$.

2. 判别下列各广义积分的敛散性, 直接写收敛或发散(共20分, 每题5分).

(1) $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx$; (2) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$;

(3) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\, dx$; (4) $\int_0^{1} \ln x\, dx$.

3. (本题15分) 设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 中连续, 且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a, \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

都存在. 证明对任意 $\eta > 0$ 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+\eta) - f(x))\, dx = \eta(a-b).$$

4. (本题15分) 设 $f(x) = \int_0^x \cos \frac{1}{t}\, dt$, 求 $f'(0)$.

5. (本题15分) 试判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$ 的敛散性, 并给出证明.

6. (本题15分) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ 收敛, $t_n = a_{n+1} + 2a_{n+2} + \cdots + ka_{n+k} + \cdots$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 0.$$

附加题：设 $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$, $n = 2, 3, \cdots$, 证明

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{S_n}{n} = \gamma, \ \gamma \text{是 Euler 常数.}$$