离散数学基础习题答案

Answers to Exercises in Elementary Discrete Mathematics

周晓聪　　乔海燕

中山大学数据科学与计算机学院, 广州 510275

2021 年 1 月 19 日

目录

第六章　关系

练习 6.1 设A, B, C是集合，证明集合交对笛卡尔积的分配律：

(1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$　　(2) $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

证明 (1) 我们有，对任意x, y，

$$\begin{array}{lll} & \langle x, y\rangle \in A \times (B \cap C) & // \text{笛卡尔积的定义} \\ \text{当且仅当} & x \in A \ \wedge \ y \in B \cap C & // \text{集合交的定义} \\ \text{当且仅当} & x \in A \ \wedge \ y \in B \ \wedge \ y \in C & // \text{幂等律、交换律、结合律} \\ \text{当且仅当} & (x \in A \ \wedge \ y \in B) \ \wedge \ (x \in A \ \wedge \ y \in C) & // \text{笛卡尔积的定义} \\ \text{当且仅当} & \langle x, y\rangle \in A \times B \ \wedge \ \langle x, y\rangle \in A \times C & // \text{集合交的定义} \\ \text{当且仅当} & \langle x, y\rangle \in (A \times B) \cap (A \times C) & \end{array}$$

(2) 可类似证明，我们有，对任意x, y，

$$\begin{array}{lll} & \langle x, y\rangle \in (B \cap C) \times A & // \text{笛卡尔积的定义} \\ \text{当且仅当} & x \in B \cap C \ \wedge \ y \in A & // \text{集合交的定义} \\ \text{当且仅当} & x \in B \ \wedge \ x \in C \ \wedge \ y \in A & // \text{幂等律、交换律、结合律} \\ \text{当且仅当} & (x \in B \ \wedge \ y \in A) \ \wedge \ (x \in C \ \wedge \ y \in A) & // \text{笛卡尔积的定义} \\ \text{当且仅当} & \langle x, y\rangle \in B \times A \ \wedge \ \langle x, y\rangle \in C \times A & // \text{集合交的定义} \\ \text{当且仅当} & \langle x, y\rangle \in (B \times A) \cap (C \times A) & \end{array}$$

□

练习 6.2 设A, B, C是集合，证明集合差对笛卡尔积的分配律：

(1) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$　　(2) $(B - C) \times A = (B \times A) - (C \times A)$

证明 (1) 我们有，对任意x, y，

$$\begin{array}{lll} & \langle x, y\rangle \in A \times (B - C) & // \text{笛卡尔积的定义} \\ \text{当且仅当} & x \in A \ \wedge \ y \in B - C & // \text{集合差的定义} \end{array}$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{当且仅当} & x \in A \ \wedge \ y \in B \ \wedge \ y \notin C & \\
 & \langle x, y\rangle \in (A \times B) - (A \times C) & // \text{集合差的定义} \\
\text{当且仅当} & \langle x, y\rangle \in (A \times B) \ \wedge \ \neg(\langle x, y\rangle \in (A \times C)) & // \text{笛卡尔积的定义} \\
\text{当且仅当} & (x \in A \ \wedge \ y \in B) \ \wedge \ \neg(x \in A \ \wedge \ y \in C) & // \text{德摩尔根律} \\
\text{当且仅当} & (x \in A \ \wedge \ y \in B) \ \wedge \ (x \notin A \ \vee \ y \notin C) & // \text{分配律} \\
\text{当且仅当} & (x \in A \ \wedge \ y \in B \ \wedge \ x \notin A) \ \vee \ (x \in A \ \wedge \ y \in B \ \wedge \ y \notin C) & // \text{矛盾律、同一律} \\
\text{当且仅当} & x \in A \ \wedge \ y \in B \ \wedge \ y \notin C &
\end{array}
$$

因此$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$。

(2) 可类似证明，我们有，对任意x, y，

$$
\begin{array}{lll}
 & \langle x, y\rangle \in (B - C) \times A & // \text{笛卡尔积的定义} \\
\text{当且仅当} & x \in B - C \ \wedge \ y \in A & // \text{集合差的定义} \\
\text{当且仅当} & x \in B \ \wedge \ x \notin B \ \wedge \ y \in A & \\
 & \langle x, y\rangle \in (B \times A) - (C \times A) & // \text{集合差的定义} \\
\text{当且仅当} & \langle x, y\rangle \in (B \times A) \ \wedge \ \neg(\langle x, y\rangle \in (C \times A)) & // \text{笛卡尔积的定义} \\
\text{当且仅当} & (x \in B \ \wedge \ y \in A) \ \wedge \ \neg(x \in C \ \wedge \ y \in A) & // \text{德摩尔根律} \\
\text{当且仅当} & (x \in B \ \wedge \ y \in A) \ \wedge \ (x \notin C \ \vee \ y \notin A) & // \text{分配律} \\
\text{当且仅当} & (x \in B \ \wedge \ y \in A \ \wedge \ x \notin C) \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ y \in A \ \wedge \ y \notin A) & // \text{矛盾律、同一律、交换律} \\
\text{当且仅当} & x \in B \ \wedge \ x \notin C \ \wedge \ y \in A &
\end{array}
$$

因此$(B - C) \times A = (B \times A) - (C \times A)$。 □

练习 6.3 证明笛卡尔积运算保持子集关系，即对任意集合A, B, C, D，若$A \subseteq C$且$B \subseteq D$，则$A \times B \subseteq C \times D$。

证明 设$A \subseteq C$且$B \subseteq D$，对任意x, y，我们有：

$$
\begin{array}{rlll}
\langle x, y\rangle \in A \times B & \text{当且仅当} & x \in A \ \wedge \ y \in B & // \text{笛卡尔积的定义} \\
 & \text{蕴含} & x \in C \ \wedge \ y \in D & // A \subseteq C \text{且} B \subseteq D \\
 & \text{当且仅当} & \langle x, y\rangle \in C \times D &
\end{array}
$$

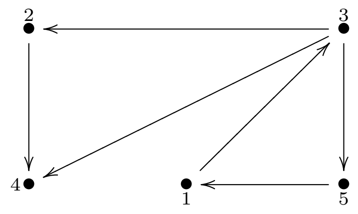
因此$A \times B \subseteq C \times D$。 □

练习 6.4 设集合$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，定义集合A上的关系R：

$$R \ = \ \{\langle 2, 4\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 3, 5\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 5, 1\rangle\}$$

画出R的关系图并给出它的关系矩阵。

解答：关系R的关系图及其关系矩阵如下。



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

练习* 6.5 设集合$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，定义集合A上的关系R：

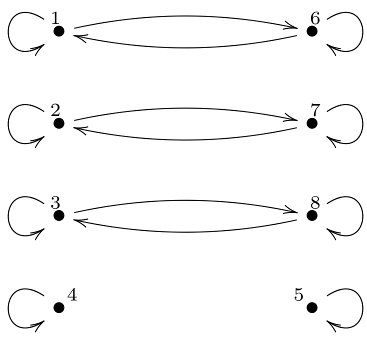
$$R = \{\langle a,b\rangle \in A\times A \mid a \equiv b(\mod 5)\}$$

使用元素枚举法给出R，并给出它的关系图和关系矩阵。

解答：下面使用元素枚举法给出R：

$$R = \{\langle 1,6\rangle, \langle 6,1\rangle, \langle 2,7\rangle, \langle 7,2\rangle, \langle 3,8\rangle, \langle 8,3\rangle\} \cup \Delta_A$$

这里Δ_A是A上的恒等关系。关系R的关系图和关系矩阵如下：



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

练习 6.6 设集合$A = \{1,2,3,4\}, B = \{a,b,c,d\}, C = \{x,y,z\}$。集合$A$到$B$的关系$R \subseteq A\times B$和集合$B$到$C$的关系$S \subseteq B\times C$分别定义为：

$$R = \{\langle 2,b\rangle, \langle 4,b\rangle, \langle 3,c\rangle, \langle 3,c\rangle, \langle 4,a\rangle\} \qquad S = \{\langle b,x\rangle, \langle d,z\rangle, \langle d,y\rangle, \langle b,y\rangle, \langle d,z\rangle\}$$

计算$R^{-1}, S^{-1}, S\circ R$和$R^{-1}\circ S^{-1}$。

解答：

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \{\langle b,2\rangle, \langle b,4\rangle, \langle c,3\rangle, \langle c,3\rangle, \langle a,4\rangle\} \\ S^{-1} &= \{\langle x,b\rangle, \langle z,d\rangle, \langle y,d\rangle, \langle y,b\rangle, \langle z,d\rangle\} \\ S\circ R &= \{\langle 2,x\rangle, \langle 2,y\rangle, \langle 4,x\rangle, \langle 4,y\rangle\} \\ R^{-1}\circ S^{-1} &= \{\langle x,2\rangle, \langle x,4\rangle, \langle y,2\rangle, \langle y,4\rangle\} \end{aligned}$$

练习* 6.7 定义实数集$\mathbb{R}$上的关系：

$$R_1 = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x \leq y\} \qquad R_2 = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x < y\}$$
$$R_3 = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x = y\} \qquad R_4 = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x \neq y\}$$

计算R_1^{-1}，R_2^{-1}，$R_1\circ R_2$，$R_2\circ R_1$，$R_2\circ R_3$，$R_2\circ R_4$。

解答：我们直接利用关系运算的定义来进行计算：

$$\begin{aligned}
R_1^{-1} &= \{\langle x,y\rangle \mid \langle y,x\rangle \in R_1\} = \{\langle x,y\rangle \mid y \leq x\} = \{\langle x,y\rangle \mid x \geq y\} \\
R_2^{-1} &= \{\langle x,y\rangle \mid \langle y,x\rangle \in R_2\} = \{\langle x,y\rangle \mid y < x\} = \{\langle x,y\rangle \mid x > y\}\} \\
R_1\circ R_2 &= \{\langle x,z\rangle \mid \exists y(\langle x,y\rangle \in R_2 \ \wedge\ \langle y,z\rangle \in R_1)\} \\
&= \{\langle x,z\rangle \mid \exists y(x < y \ \wedge\ y \leq z)\} = \{\langle x,z\rangle \mid x < z\} = R_2 \\
R_2\circ R_1 &= \{\langle x,z\rangle \mid \exists y(\langle x,y\rangle \in R_1 \ \wedge\ \langle y,z\rangle \in R_2)\} \\
&= \{\langle x,z\rangle \mid \exists y(x \leq y \ \wedge\ y < z)\} = \{\langle x,z\rangle \mid x < z\} = R_2 \\
R_2\circ R_3 &= \{\langle x,z\rangle \mid \exists y(\langle x,y\rangle \in R_3 \ \wedge\ \langle y,z\rangle \in R_2)\} \\
&= \{\langle x,z\rangle \mid \exists y(x = y \ \wedge\ y < z)\} = \{\langle x,z\rangle \mid x < z\} = R_2 \\
R_2\circ R_4 &= \{\langle x,z\rangle \mid \exists y(\langle x,y\rangle \in R_4 \ \wedge\ \langle y,z\rangle \in R_2)\} \\
&= \{\langle x,z\rangle \mid \exists y(x \neq y \ \wedge\ y < z)\} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}
\end{aligned}$$

注意，对于最后的$R_2\circ R_4$，对任意两个实数x,z，都不难找到一个实数y，使得$x\neq y$且$y<z$，因此，对任意的实数x,z都有$\langle x,z\rangle \in R_2\circ R_4$，即$R_2\circ R_4$是全关系$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$。

练习* 6.8 设集合$A=\{1,2,3,4\}$，集合A上的关系$R=\{\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$，$S=\{\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,4\rangle\}$。

(1) 基于关系的有序对集合表示计算$R\cup S$，$R\cap S$，$R-S$，R^{-1}，$R\circ S$和$S\circ R$；

(2) 基于关系的矩阵表示计算$R\cup S$，$R\cap S$，$R-S$，R^{-1}，$R\circ S$和$S\circ R$。

解答：(1) 下面是基于关系的有序对进行计算：

$$\begin{aligned}
R\cup S &= \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle\} \\
R\cap S &= \{\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle\} \\
R-S &= \{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle\} \\
R^{-1} &= \{\langle 4,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\} \\
S\circ R &= \{\langle 2,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,2\rangle\} \\
R\circ S &= \{\langle 3,4\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle\}
\end{aligned}$$

(2) 下面计算关系矩阵进行计算：

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R\cup S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{R\cap S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{R-S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{S\circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{R\circ S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

练习 6.9 补充证明定理6.9，即证明：(1) 对任意关系R，$(R^{-1})^{-1} = R$；(2) 对任意关系R, S，若$R \subseteq S$则$R^{-1} \subseteq S^{-1}$；(3) 证明$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$。

证明 (1) 对任意x, y，$\langle x, y\rangle \in (R^{-1})^{-1}$当且仅当$\langle y, x\rangle \in R^{-1}$，当且仅当$\langle x, y\rangle \in R$，因此$(R^{-1})^{-1} = R$。

(2) 对任意关系R, S，若$R \subseteq S$，则对任意x, y，若$\langle x, y\rangle \in R^{-1}$，则$\langle y, x\rangle \in R$，而$R \subseteq S$，因此$\langle y, x\rangle \in S$，从而$\langle x, y\rangle \in S^{-1}$，这表明$R^{-1} \subseteq S^{-1}$。

(3) 对任意x, y，$\langle x, y\rangle \in (R \cap S)^{-1}$，当且仅当$\langle y, x\rangle \in R \cap S$，当且仅当$\langle y, x\rangle \in R$且$\langle y, x\rangle \in S$，当且仅当$\langle x, y\rangle \in R^{-1}$且$\langle x, y\rangle \in S^{-1}$，当且仅当$\langle x, y\rangle \in R^{-1} \cap S^{-1}$，因此$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$。□

练习 6.10 对任意关系R, S, T，证明$(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$，其中哪个方向的子集关系可使用关系复合保持子集关系更简洁地证明？

证明 我们使用考察元素的方法证明该等式，对任意x, y，

	$\langle x, y\rangle \in (R \cup S) \circ T$	// 关系复合的定义
当且仅当	$\exists z(\langle x, z\rangle \in T \ \wedge\ \langle z, y\rangle \in R \cup S)$	// 集合并的定义
当且仅当	$\exists z(\langle x, z\rangle \in T \ \wedge\ (\langle z, y\rangle \in R \vee \langle z, y\rangle \in S)$	// 分配律
当且仅当	$\exists z((\langle x, z\rangle \in T \ \wedge\ \langle z, y\rangle \in R) \vee (\langle x, z\rangle \in T \ \wedge\ \langle z, y\rangle \in S))$	// 量词分配等值式
当且仅当	$\exists z(\langle x, z\rangle \in T \ \wedge\ \langle z, y\rangle \in R) \vee \exists z(\langle x, z\rangle \in T \ \wedge\ \langle z, y\rangle \in S)$	// 关系复合的定义
当且仅当	$\langle x, y\rangle \in R \circ T \ \vee\ \langle x, y\rangle \in S \circ T$	// 集合并的定义
当且仅当	$\langle x, y\rangle \in (R \circ T) \ \cup\ (S \circ T)$	

因此$(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$。

注意到，对任意集合A, B, C，$A \cup B \subseteq C$当且仅当$A \cup C$且$B \subseteq C$，所以我们可使用关系复合保持子集关系证明$(R \circ T) \cup (S \circ T) \subseteq (R \cup S) \circ T$，因为$R \subseteq R \cup S$，所以$R \circ T \subseteq (R \cup S) \circ T$，类似地由$S \subseteq R \cup S$，所以$S \circ T \subseteq (R \cup S) \circ T$，因此$(R \circ T) \cup (S \circ T) \subseteq (R \cup S) \circ T$、 □

练习* 6.11 给出关系R, S, T的具体例子，说明$(T \circ R) \cap (T \circ S)$不一定是$T \circ (R \cap S)$的子集。

解答：令$A = \{1, 2, 3\}$，A上的二元关系：

$$R = \{\langle 1, 2\rangle\} \qquad S = \{\langle 1, 3\rangle\} \qquad T = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$$

则我们有：

$$\begin{aligned} T \circ R &= \{\langle 1, 1\rangle & \quad T \circ S &= \{\langle 1, 1\rangle\} & \quad (T \circ R) \cap (T \circ S) &= \{\langle 1, 1\rangle\} \\ & & R \cap S &= \varnothing & T \circ (R \cap S) &= \varnothing \end{aligned}$$

在这个例子中，$(T \circ R) \cap (T \circ S)$不是$T \circ (R \cap S)$的子集。

练习 6.12 设$A = \{1, 2, 3, 4\}$，A上的下面哪些关系是自反的、反自反的、对称的、反对称的或传递的？

$$\begin{aligned} (1)\quad R_1 &= \{\langle 2, 3\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 1, 1\rangle\} \\ (2)\quad R_2 &= \{\langle 1, 2\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle\} \\ (3)\quad R_3 &= \{\langle 1, 2\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle\} \\ (4)\quad R_4 &= \{\langle 3, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 2, 4\rangle\} \end{aligned}$$

解答：(1) 关系R_1不是自反的，因为$\langle 2, 2\rangle \notin R_1$，也不是反自反的，因为$\langle 1, 1\rangle \in R_1$，不是对称的，因为$\langle 2, 3\rangle \in R_1$但$\langle 3, 2\rangle \notin R_1$。$R_1$是反对称的，因为

$$R_1^{-1} = \{\langle 3, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$$

$R_1^{-1} \cap R = \{\langle 1, 1\rangle\} \subseteq \Delta_A$。注意到：

$$R_1 \circ R_1 = \{\langle 4, 3\rangle, \langle 1, 1\rangle\} \subseteq R_1$$

因此R_1是传递的。

(2) 关系R_2不是自反的，因为$\langle 2, 2\rangle \notin R_2$，也不是反自反的，因为$\langle 4, 4\rangle \in R_2$，是对称的，因为

$$R_2^{-1} = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle\} = R_2$$

R_2不是反对称的，因为$\langle 2, 1\rangle \in R_2$且$\langle 1, 2\rangle \in R_2$。由于$\langle 1, 2\rangle \in R_2$且$\langle 2, 4\rangle \in R_2$，但$\langle 1, 4\rangle \notin R_2$，因此$R_2$不是传递的。

(3) 关系R_3不是自反的，因为$\langle 2, 2\rangle \notin R_3$，也不是反自反的，因为$\langle 3, 3\rangle \in R_3$，不是对称的，因为$\langle 4, 3\rangle \in R_3$，但是$\langle 3, 4\rangle \notin R_3$，也不是反对称的，因为$\langle 2, 1\rangle \in R_3$且$\langle 1, 2\rangle \in R_3$。由于$\langle 1, 2\rangle \in$

R_3且$\langle 2,4\rangle \in R_3$，但$\langle 1,4\rangle \notin R_3$，因此$R_3$不是传递的。

(4) 关系R_4是自反的，因为$\Delta_A = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\} \subseteq R_4$。不是反自反的，因为$\langle 1,1\rangle \in R_4$。不是对称的，因为$\langle 2,3\rangle \in R_4$但$\langle 3,2\rangle \notin R_4$。也不是反对称的，因为$\langle 3,4\rangle \in R_3$且$\langle 4,3\rangle \in R_3$。注意到：

$$R_4 \circ R_4 = \{\langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\} \subseteq R_4$$

因此R_4是传递的。

练习* 6.13 设A是非0实数构成的集合，即$A = \mathbb{R} - \{0\}$，A上的下面哪些关系是自反的、反自反的、对称的、反对称的或传递的？

$$\begin{aligned}
&(1) \quad R_1 = \{\langle x,y\rangle \in A \times A \mid x = y+1 \vee x = y-1\} \\
&(2) \quad R_2 = \{\langle x,y\rangle \in A \times A \mid x = 1 \vee y = 1\} \\
&(3) \quad R_3 = \{\langle x,y\rangle \in A \times A \mid xy \geq 1\} \\
&(4) \quad R_4 = \{\langle x,y\rangle \in A \times A \mid x - y \text{ 是有理数}\}
\end{aligned}$$

解答：(1) R_1不是自反关系，例如$\langle 1,1\rangle \notin R_1$，实际上，对任意的实数$x \in A$，都有$\langle x,x\rangle \notin R_1$，因为既不可能$x = x+1$也不可能$x = x-1$，因此$R_1$是反自反的。$R_1$是对称的，因为对任意$x,y \in A$，若$\langle x,y\rangle \in R_1$，则$x = y+1$或$x = y-1$，显然这时有$y = x-1$或$y = x+1$，因此$\langle y,x\rangle \in R_1$，因此$R_1$是对称的，显然$R_1$不是反对称的，例如有$\langle 2,3\rangle \in R_1$且$\langle 3,2\rangle \in R_1$。$R_1$不是传递的，例如$\langle 2,3\rangle \in R_1$且$\langle 3,4\rangle \in R_1$，但$\langle 2,4\rangle$不属于$R_1$。总之，$R_1$是反自反、对称的关系，但不是自反的、反对称或传递关系。

(2) R_2不是自反关系，因为$\langle 2,2\rangle \notin R_2$。$R_2$也不是反自反关系，例如$\langle 1,1\rangle \in R_2$。$R_2$是对称关系，对任意$x,y \in A$，若$\langle x,y\rangle \in R_2$，则$x = 1 \vee y = 1$，从而有$y = 1 \vee x = 1$，从而$\langle x,y\rangle \in R_2$。$R_2$不是反对称的，例如$\langle 1,2\rangle \in R_2$且$\langle 2,1\rangle \in R_2$。$R_2$不是传递的，因为$\langle 2,1\rangle \in R_2$且$\langle 1,2\rangle \in R_2$，但$\langle 2,2\rangle \notin R_2$。总之，$R_1$是对称关系，但不是自反的、反自反的、反对称或传递的。

(3) R_3不是自反关系，因为$\langle 1/2,1/2\rangle \notin R_3$。$R_3$也不反自反关系，因为$\langle 2,2\rangle \in R_3$。$R_3$显然是对称关系，因为$xy \geq 1$意味着$yx \geq 1$，所以$R_3$也不反称关系，例如$\langle 1,2\rangle \in R_3$且$\langle 2,1\rangle \in R_3$。$R_3$不是传递关系，因为有$\langle 1/2,2\rangle \in R_3$且$\langle 2,1/2\rangle \in R_3$，但$\langle 1/2,1/2\rangle \notin R_3$。总之，$R_3$是对称关系，但不是自反的、反自反的、反对称或传递的。

(4) R_4是自反关系，因为对任意的$x \in A$，$x - x = 0$是有理数，因此对任意$x \in A$有$\langle x,x\rangle \in R_4$，因此$R_4$不是反自反关系，例如$\langle 1,1\rangle \in R_4$。$R_4$是对称关系，因为若$x - y$是有理数，则$y - x$也是有理数，因此$R_4$不是反对称关系，例如$\langle 1,2\rangle \in R_4$且$\langle 2,1\rangle \in R_4$。$R_4$是传递关系，因为对任意$x,y,z \in A$，若$x - y$是有理数，且$y - z$是有理数，则$x - z = x - y + y - z$显然也是有理数。总之$R_4$是自反、对称和传递关系，但不是反自反或反对称关系。

练习 6.14 非空集合A上的全关系是否具有自反性，反自反性、对称性、反对称性或传递性？

解答：非空集合A上的全关系$A \times A$是自反的，因为显然$\Delta_A \subseteq A \times A$，不是自反的，因为$A$是非空的，所以存在元素$a \in A$，且$\langle a,a\rangle \in A \times A$。全关系是对称的，因为显然它的逆仍是它自己。当$A$只有一个元素时，$A \times A$也是反对称的，而当$A$的元素多于一个时，则不是反对称的。$A \times A$显然也是传递的，因为它与它的复合肯定也是$A \times A$的子集（实际上就等于$A \times A$）。

练习 6.15 设R是集合A上的关系。证明关系逆运算保持所有的关系性质，即：(1) 若R是自反的，则R^{-1}也是自反的；(2) 若R是反自反的，则R^{-1}也是反自反的；(3) 若R是对称的，则R^{-1}也是对称的；(4) 若R是反对称的，则R^{-1}也是反对称的；(5) 若R是传递的，则R^{-1}也是传递的；

证明 (1) 若R是自反的，则$\Delta_A \subseteq R$，而关系逆保持子集关系，因此也有$\Delta_A = \Delta_A^{-1} \subseteq R^{-1}$，因此$R^{-1}$也是自反的；

(2) 若R是反自反的，则$R \cap \Delta_A = \varnothing$，从而

$$R^{-1} \cap \Delta_A = R^{-1} \cap \Delta_A^{-1} = (R \cap \Delta_A)^{-1} = \varnothing^{-1} = \varnothing$$

因此R^{-1}也是反自反的。

(3) 若R是对称的，则$R = R^{-1}$，从而$(R^{-1})^{-1} = R^{-1}$，这表明R^{-1}也是对称的。

(4) 若R是反对称的，则$R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$，而$R = (R^{-1})^{-1}$，因此这就意味着$(R^{-1})^{-1} \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$，因此$R^{-1}$也是反对称的。

(5) 若R是传递的，则$R \circ R \subseteq R$，由于关系逆保持子集关系，因此$(R \circ R)^{-1} \subseteq R^{-1}$，而$(R \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ R^{-1}$，因此$R^{-1} \circ R^{-1} \subseteq R^{-1}$，这表明$R^{-1}$也是传递的。 □

练习 6.16 设R和S是集合A上的关系。证明集合交运算保持所有的关系性质，即：(1) 若R和S是自反的，则$R \cap S$也是自反的；(2) 若R和S是反自反的，则$R \cap S$也是反自反的；(3) 若R和S是对称的，则$R \cap S$也是对称的；(4) 若R和S是反对称的，则$R \cap S$也是反对称的；(5) 若R和S是传递的，则$R \cap S$也是传递的。

证明 (1) 若R, S是自反的，则$\Delta_A \subseteq R$且$\Delta_A \subseteq S$，从而$\Delta_A \subseteq R \cap S$，因此$R \cap S$也是自反的；

(2) 若R, S是反自反的，则$R \cap \Delta_A = \varnothing$且$S \cap \Delta_A = \varnothing$，从而

$$(R \cap S) \cap \Delta_A = R \cap \Delta_A \cap S = \varnothing \cap S = \varnothing$$

因此$R \cap S$也是反自反的。实际上，上述证明表明，只要R或S是反自反的，则$R \cap S$是反自反的。进一步，不难看到$R \cap S$是反自反的，当且仅当R或S是反自反的。

(3) 若R, S是对称的，则$R = R^{-1}$且$S = S^{-1}$，从而$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} = R \cap S$，这表明$R \cap S$也是对称的。

(4) 若R, S是反对称的，则$R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$且$S \cap S^{-1} \subseteq \Delta_A$，从而

$$(R \cap S) \cap (R \cap S)^{-1} = (R \cap S) \cap R^{-1} \cap S^{-1} = (R \cap R^{-1}) \cap (S \cap S^{-1}) \subseteq \Delta_A \cap \Delta_A = \Delta_A$$

因此$R \cap S$也是反对称的。

(5) 若R, S是传递的，则$R \circ R \subseteq R$且$S \circ S \subseteq S$，根据关系复合与集合交运算之间的联系，我们有：

$$(R \cap S) \circ (R \cap S) \subseteq (R \circ R) \cap (R \circ S) \cap (S \circ R) \cap (S \circ S) \subseteq (R \circ R) \cap (S \circ S) \subseteq R \cap S$$

因此$R \cap S$也是传递的。 □

练习* 6.17 设R和S是集合A上的关系。证明集合差运算保持关系的反自反性、对称性和反对称性，即：(1) 若R和S是反自反的，则$R-S$也是反自反的；(2) 若R和S是对称的，则$R-S$也是对称的；(3) 若R和S是反对称的，则$R-S$也是反对称的。

证明 (1) 设R和S都是反自反的，对任意$x\in A$，若$\langle x,x\rangle\in R-S$，即$\langle x,x\rangle\in R$且$\langle x,x\rangle\notin S$，则$\langle x,x\rangle\in R$，这与$R$是反自反的矛盾，因此$R-S$必然是反自反的。实际上，当$R$是反自反时，对任意关系$S$，都有$R-S$是反自反的。

(2) 设R和S都是反对称的，对任意$x,y\in A$，若$\langle x,y\rangle\in R-S$，这意味着$\langle x,y\rangle\in R$且$\langle x,y\rangle\notin S$，而$R$是对称的，因此有$\langle y,x\rangle\in R$，又$S$是对称的，因此由$\langle x,y\rangle\notin S$必然也有$\langle y,x\rangle \not\!S$，从而$\langle y,x\rangle\in R-S$，这就表明$R-S$也是对称的。

(3) 设R和S都是反对称的，对任意$x,y\in A$，若$\langle x,y\rangle\in R-S$且$\langle y,x\rangle\in R-S$，这意味着$\langle x,y\rangle\in R$且$\langle y,x\rangle\in R$，而$R$是反对称的，因此有$x=y$，这就表明$R-S$也是反对称的。从这个证明也可看到，当$R$是反对称时，对任意关系$S$，都有$R-S$是反对称的。 □

练习* 6.18 设R和S是集合A上的关系。举例说明：(1) 若R和S是自反的，但$R-S$不一定是自反的；(2) 若R和S是传递的，但$R-S$不一定是传递的。

解答：设$A=\{1,2,3\}$

(1) 若$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,2\rangle\}$，而$S=\Delta_A$，则$R$和$S$都是自反的，但$R-S=\{\langle 1,2\rangle\}$，显然不是自反的。实际上，对任意非空集合$A$上的关系$R$和$S$，若$R$和$S$是自反的，则$R-S$必定不是自反的。

(2) 若$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$，$S=\{\langle 1,3\rangle\}$，则$R\circ R=\{\langle 1,3\rangle\}\subseteq R$，因此$R$是传递的，而$S\circ S=\varnothing$，因此$S$也是传递的，但$R-S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，显然不是传递的。

练习* 6.19 设R是非空集A上的关系，称R是**反传递关系**，如果对任意$x,y,z\in A$，$\langle x,y\rangle\in R$且$\langle y,z\rangle\in R$蕴涵$\langle x,z\rangle\notin R$。证明$R$是反传递关系当且仅当$(R\circ R)\cap R=\varnothing$。

证明 我们首先证明若R是反传递关系蕴涵$(R\circ R)\cap R=\varnothing$。我们用反证法，假定$R$是反传递的，但是$(R\circ R)\cap R\neq\varnothing$，即存在$x,y\in A$，使得$\langle x,y\rangle\in(R\circ R)\cap R$，即有$\langle x,y\rangle\in R\circ R$且$\langle x,y\rangle\in R$，而$\langle x,y\rangle\in R\circ R$意味着存在$z\in A$，使得$\langle x,z\rangle\in R$且$\langle z,y\rangle\in R$，而这根据$R$是反传递的，则蕴涵$\langle x,y\rangle \not\!R$，矛盾！因此这时必有$(R\circ R)\cap R=\varnothing$。

其次，我们证明$(R\circ R)\cap R=\varnothing$蕴涵$R$是反传递的。同样用反证法，若$R$不是反传递的，即存在$x,y,z\in A$，使得$\langle x,y\rangle\in R$且$\langle y,z\rangle\in R$但$\langle x,z\rangle\in R$，而$\langle x,y\rangle\in R$且$\langle y,z\rangle\in R$意味着$\langle x,z\rangle\in R\circ R$，因此这时$\langle x,z\rangle\in(R\circ R)\cap R$，与$(R\circ R)\cap R$是空集矛盾！因此这时必有$R$是反传递的。

综上证明了R是反传递关系当且仅当$(R\circ R)\cap R=\varnothing$。 □

练习 6.20 考虑下面的命题：

命题 *设R是A上关系，在$\wp(A)$上定义关系S:*

$$S=\{\langle X,Y\rangle\in\wp(A)\times\wp(A)\mid\exists x\in X\exists y\in Y(x\,R\,y)\}$$

如果R是传递的，则S也是传递的。

(1) 对于该命题，下面的证明存在什么错误？

证明：设R是传递的。设$\langle X, Y\rangle \in S$且$\langle Y, Z\rangle \in S$，则按照$S$的定义，$x\,R\,y$且$y\,R\,z$，这里$x \in X, y \in Y$且$z \in Z$。由于$R$是传递的，从而$x\,R\,z$，从而由$x \in X$且$z \in Z$，根据$S$的定义就有$\langle X, Z\rangle \in S$，因此$S$也是传递的。

(2) 上述命题是否正确？使用证明或反例给出判断的理由。

解答：(1) 上述证明的错误在于，当$\langle X, Y\rangle \in S$且$\langle Y, Z\rangle \in S$时，按照$S$的定义，应该是存在$x$和$y$使得$x\ R\ y$，且存在$z$和$w$使得$z\ R\ w$，这里$z$不一定就是$w$，因此不能根据$R$是传递的，得到$\langle X, Z\rangle \in S$。

(2) 上述命题是不正确的，例如设$A = \{1, 2, 3, 4\}$，$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$，显然$R$是传递关系。则对$\wp(A)$上定义的关系$S$：

$$S \ = \ \{\langle X, Y\rangle \in \wp(A) \times \wp(A) \mid \exists x \in X \exists y \in Y (x\,R\,y)\}$$

显然有$\{1\}\ S\ \{2, 3\}$（因为$\langle 1, 2\rangle \in R$），且$\{2, 3\}\ S\ \{4\}$（因为$\langle 3, 4\rangle \in R$），但$\langle\{1\}, \{4\}\rangle \notin S$，因为按照$S$的定义，$\langle\{1\}, \{4\}\rangle \in S$当且仅当$\langle 1, 4\rangle \in R$，但$\langle 1, 4\rangle \notin R$，所以$\langle\{1\}, \{4\}\rangle \notin S$。

练习 6.21 设R是A上的关系，令$B = \{X \in \wp(A) \mid X \neq \varnothing\}$，并定义$B$上的关系$S$

$$S = \{\langle X, Y\rangle \in B \times B \mid \forall x \in X \forall y \in Y (x\,R\,y)\}$$

证明：如果R是传递关系，则S也是传递关系。为什么在定义B时要排除空集？

证明 设R是A上的传递关系，则对任意$X, Y, Z \in B$，若$\langle X, Y\rangle \in S$且$\langle Y, Z\rangle \in S$，即$\forall x \in X \forall y \in Y, \langle x, y\rangle \in R$且$\forall y \in Y \forall z \in Z, \langle y, z\rangle \in R$，从而对任意$x \in X$及任意$z \in Z$，由于$Y$非空，因此必存在$y_0 \in Y$，使得$\langle x, y_0\rangle \in R$且$\langle y_0, z\rangle \in R$，而$R$是传递的，因此$\langle x, z\rangle \in R$，也即对任意$x \in X, z \in Z$有$\langle x, z\rangle \in R$，从而$\langle X, Z\rangle \in S$，这表明$S$是传递的。

如果B包含空集$\varnothing$，则根据S的定义，对A的任意子集B，都有$\langle B, \varnothing\rangle \in S$，且$\langle \varnothing, B\rangle \in S$，这样即使$R$是传递的，$S$也不一定是传递的。例如设$A = \{1, 2, 3, 4\}$，$R = \{\langle 1, 2\rangle\}$，则$R$是传递的，如果$B$包含空集，则$\langle\{2\}, \varnothing\rangle \in S$且$\langle \varnothing, \{1\}\rangle \in S$，但$\langle\{2\}, \{1\}\rangle \notin S$，因此按上面方式定义的$S$不是传递的。 □

练习 6.22 设R是A上关系，定义$\wp(A)$上关系S

$$S = \{\langle X, Y\rangle \in \wp(A) \times \wp(A) \mid \forall x \in X \exists y \in Y (x\,R\,y)\}$$

对于下面每一问，给出证明或反例：(1) 如果R是自反的，S是否也是自反的？(2) 如果R是对称的，S是否也是对称的？(3) 如果R是传递的，S是否也是传递的？

解答：(1) 如果R是自反的，则S也是自反的，因为对任意$X \in \wp(A)$，由于R是自反的，因此对任意$x \in X$，都存在$x \in X$ 使得$\langle x, x\rangle \in R$，这表明$\langle X, X\rangle \in S$。

(2) 如果R是对称的，S不一定是对称的。例如$A = \{1, 2, 3\}$，$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$，则$R$是对称的，从而有$\langle\{1\}, \{2, 3\}\rangle \in S$，但$\langle\{2, 3\}, \{1\}\rangle \notin S$，因此$\langle 3, 1\rangle \notin R$。

(3) 如果R是传递的，则S也是传递的。对任意$X, Y, Z \in \wp(A)$，若$\langle X, Y\rangle \in S$且$\langle Y, Z\rangle \in S$，即对任意$x \in X$存在$y \in Y$使得$\langle x, y\rangle \in R$，且对任意$y \in Y$，存在$z \in Z$使得$\langle y, z\rangle \in R$。从而对任

意$x \in X$，由$\langle X, Y\rangle \in S$，则存在$y_0 \in Y$使得$\langle x, y_0\rangle \in R$，而对于$y_0$，由$\langle Y, Z\rangle \in S$，即存在$z_0 \in Z$，使得$\langle y_0, z_0\rangle \in R$，而$R$是传递的，因此$\langle x, z_0\rangle \in R$，这表明对任意$x \in X$，都存在$z \in Z$使得$\langle x, z\rangle \in R$，因此$\langle X, Z\rangle \in S$，因此$S$是传递的。

练习 6.23 假定集合A的元素都是字符，例如是小写字母构成的集合，编写程序判断A上的关系是否具有自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性。

解答：略

练习* 6.24 设R和S是集合A上的关系。证明：

(1) $r(R\cap S) = r(R)\cap r(S)$；

(2) $s(R\cap S) \subseteq s(R)\cap s(S)$，并举例说明不一定有$s(R)\cap s(S) \subseteq s(R\cap S)$（提示，注意有$s(\varnothing) = \varnothing$，即空关系的对称闭包仍是空关系，找到$R$和$S$的例子使得$s(R\cap S) = s(\varnothing) = \varnothing$，但$s(R)\cap s(S) \neq \varnothing$）

(3) $t(R\cap S) \subseteq t(R)\cap t(S)$，并举例说明不一定有$t(R)\cap t(S) \subseteq t(R\cap S)$（提示，同样有$t(\varnothing) = \varnothing$，找到$R$和$S$的例子使得$t(R\cap S) = t(\varnothing) = \varnothing$，但$t(R)\cap t(S) \neq \varnothing$）

解答：(1) 根据自反闭包的计算公式容易证明：

证明 由于关系R的自反闭包$r(R) = R\cup \Delta_A$，因此：

$$\begin{aligned} r(R\cap S) &= (R\cap S)\cup \Delta_A = (R\cup \Delta_A)\cap (S\cup \Delta_A) \\ r(R)\cap r(S) &= (R\cup \Delta_A)\cap (S\cup \Delta_A) \end{aligned}$$

这就证明了$r(R\cap S) = r(R)\cap r(S)$。 □

(2) 我们根据闭包保持子集关系证明：

证明 因为$R\cap S \subseteq R$，对称闭包保持子集关系，因此有$s(R\cap S) \subseteq s(R)$，类似地，因为$R\cap S \subseteq S$，因此$s(R\cap S) \subseteq s(S)$，从而$s(R\cap S) \subseteq s(R)\cap s(S)$。 □

令$A = \{1, 2, 3\}$，$R = \{\langle 1, 2\rangle\}, S = \{\langle 2, 1\rangle\}$，则：

$$\begin{aligned} s(R) &= \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\} & s(S) &= \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\} & s(R)\cap s(S) &= \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\} \\ & & R\cap S &= \varnothing & s(R\cap S) &= \varnothing \end{aligned}$$

可看到，上面的例子没有$s(R)\cap s(S) \subseteq s(R\cap S)$。

(3) 同样可根据闭包保持子集关系证明：

证明 因为$R\cap S \subseteq R$，对称闭包保持子集关系，因此有$t(R\cap S) \subseteq t(R)$，类似地，因为$R\cap S \subseteq S$，因此$t(R\cap S) \subseteq t(S)$，从而$t(R\cap S) \subseteq t(R)\cap t(S)$。 □

令$A = \{1, 2, 3\}$，$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}, S = \{\langle 1, 3\rangle\}$，则：

$$\begin{aligned} t(R) &= \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle\} & t(S) &= \{\langle 1,3\rangle\} & t(R)\cap t(S) &= \{\langle 1,3\rangle\} \\ & & R\cap S &= \varnothing & t(R\cap S) &= \varnothing \end{aligned}$$

可看到，上面的例子没有$t(R)\cap t(S) \subseteq t(R\cap S)$。

练习 6.25 设集合$A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 4,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}$是集合$A$上的关系，计算$R$的自反闭包$r(R)$，对称闭包$s(R)$和传递闭包$t(R)$。

解答：(1) R的自反闭包$r(R)=R\cup\Delta_A=\{\langle 4,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$。
(2) R的对称闭包$s(R)=R\cup R^{-1}=\{\langle 4,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,3\rangle\}$。
(3) 对于R的传递闭包，我们计算R^2,R^3和R^4，

$$\begin{aligned}R^2 &= \{\langle 4,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,1\rangle\}\\ R^3 &= \{\langle 4,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}=R\\ R^4 &= \{\langle 4,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,1\rangle\}=R^2\end{aligned}$$

因此$t(R)=R\cup R^2=\{\langle 4,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,1\rangle\}$。

练习* 6.26 设集合$A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 4,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,1\rangle\}$是集合$A$上的关系。
(1) 利用关系矩阵的逻辑积运算计算R的传递闭包；
(2) 利用Warshall算法计算R的传递闭包。

解答：(1) 下面使用关系矩阵的逻辑积运算计算R的传递闭包：

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad M_R^{[2]}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad M_R^{[3]}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_R^{[4]}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad M_{t(R)}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

(2) 下面利用Warshall算法计算R的传递闭包：

$$M_W^{[0]}=M_R=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad M_W^{[1]}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad M_W^{[2]}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_W^{[3]}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad M_W^{[4]}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

最后得到的R的传递闭包是：

$$t(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,1\rangle\}$$

练习* 6.27 设R和S都是非空集A上的关系，证明：对任意自然数n，$(R\cap S)^n\subseteq R^n\cap S^n$。

证明 我们使用数学归纳法证明，其中利用关系复合保持子集关系，以及关系交运算与关系复合运算之间的联系，即对任意关系$R\circ(S\cap T)\subseteq(R\circ S)\cap(R\circ T)$：

(1) 归纳基：显然当$n=0,1$时成立，因为$(R\cap S)^0=\Delta_A$而$R^0\cap S^0=\Delta_A\cap\Delta_A=\Delta$。

(2) 归纳步：设当$n=k$是有$(R\cap S)^k\subseteq R^k\cap S^k$，则我们有：

$$\begin{aligned}(R\cap S)^{k+1} = (R\cap S)^k\circ(R\cap S) &\subseteq (R^k\cap S^k)\circ R(\cap S)\\ &\subseteq (R^k\circ R)\cap(R^k\circ S)\cap(S^k\circ R)\cap(S^k\circ S)\\ &\subseteq (R^k\circ R)\cap(S^k\circ S)=R^{k+1}\cap S^{k+1}\end{aligned}$$

综上由数学归纳法有对任意自然数n，$(R\cap S)^n\subseteq R^n\cap S^n$。 □

练习 6.28 设R和S都是非空集A上的关系，且满足：(i) R和S都是自反和传递关系；(ii) $R\circ S=S\circ R$，证明：$t(R\cup S)=R\circ S$。

证明 我们根据传递闭包的定义证明。假定R和S都是自反和传递的关系，且$R\circ S=S\circ R$。

(1) 首先证明这时有$R\subseteq R\circ S$且$S\subseteq R\circ S$。对任意x,y，若$\langle x,y\rangle\in R$，则由S是自反的，因此$\langle x,x\rangle\in S$，从而根据关系复合的定义，$\langle x,y\rangle\in R\circ S$，这表明$R\subseteq R\circ S$；类似地，对任意$x,y$，若$\langle x,y\rangle\in S$，则由$R$是自反的，从而$\langle y,y\rangle\in R$，从而$\langle x,y\rangle\in R\circ S$，这表明$S\subseteq R\circ S$，从而$R\cup S\subseteq R\circ S$；

(2) 其次我们证明$R\circ S$是传递的。注意到这时：

$$(R\circ S)\circ(R\circ S)=R\circ(S\circ R)\circ S=R\circ(R\circ S)\circ S=(R\circ R)\circ(S\circ S)\subseteq R\circ S$$

因此$R\circ S$是传递的。

(3) 最后我们证明对A上任意的传递关系T，若$R\cup S\subseteq T$，则$R\circ S\subseteq T$。注意到，这时对任意x,y，若$\langle x,y\rangle\in R\circ S$，而存在$z\in A$使得$\langle x,z\rangle\in S$且$\langle z,y\rangle\in R$，由于$R\cup S\subseteq T$，因此$R\subseteq T$且$S\subseteq T$，从而$\langle x,z\rangle\in T$且$\langle z,y\rangle\in T$，由于$T$是传递的，因此$\langle x,y\rangle\in T$，这就表明确实有$R\circ S\subseteq T$。

根据以上三点，由传递闭包的定义有$R\circ S$这时是$R\cup S$的传递闭包，即$t(R\cup S)=R\circ S$。 □

练习 6.29 假定集合A的元素都是字符，例如是小写字母构成的集合，编写程序计算A上的关系的自反闭包、对称闭包和传递闭包，特别地，其中传递闭包既可以使用矩阵的逻辑积运算进行计算，也可使用Warshall算法进行计算。

解答：略

练习 6.30 证明：

(1) 自反闭包保持关系的对称性和传递性，即若非空集A上的关系R是对称的，则$r(R)$也是对称的；而若R是传递的，则$r(R)$也是传递的。

(2) 对称闭包保持关系的自反性，即若非空集A上的关系R是自反的，则$s(R)$也是自反的。但对称闭包不保持关系的传递性，举例说明当非空集A上的关系R是传递关系时，$s(R)$不一定是传递的。

(3) 传递闭包保持关系的自反性和对称性，即若非空集A上的关系R是自反的，则$t(R)$也是自反的；而若R是对称的，则$t(R)$也是对称的。

证明 (1) 注意到$r(R)=R\cup\Delta_A$。若R是对称的，则$R^{-1}=R$，从而：

$$(r(R))^{-1}=(R\cup\Delta_A)^{-1}=R^{-1}\cup\Delta_A^{-1}=R\cup\Delta_A=r(R)$$

因此$r(R)$也是对称的。若R是传递的，则$R\circ R\subseteq R$，从而：

$$r(R)\circ r(R)=(R\cup\Delta_A)\circ(R\cup\Delta_A)=(R\circ R)\cup(R\circ\Delta_A)\cup(\Delta_A\circ R)\cup(\Delta_A\circ\Delta_A)\subseteq R\cup\Delta_A=r(R)$$

因此$r(R)$也是传递的。

(2) 注意到$s(R)=R\cup R^{-1}$。若R是自反的，则$\Delta_A\subseteq R$，显然就有$\Delta_A\subseteq R\cup R^{-1}=s(R)$，因此这时$s(R)$也是自反的。对称闭包不保持关系的传递性，例如$A=\{1,2\},R=\langle 1,2\rangle$，则$R$是传递的（因为$R\circ R=\varnothing\subseteq R$），但是$s(R)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$，不是传递的，因为$\langle 1,1\rangle\notin R$。

(3) 很容易证明传递闭包保持关系的自反性，因为R是自反的当且仅当$\Delta_A\subseteq R$，而$R\subseteq t(R)$，因此当R是自反关系时，显然有$\Delta_A\subseteq A\subseteq t(R)$，因此$t(R)$也是自反的。对于对称性，注意到$t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n\cup\cdots$，我们使用数学归纳法证明：若$R$是对称的，则对任意的正整数$n$，有$R^n$是对称的：

(i) 当$n=1$时，显然成立。(ii) 假定R^k是对称的，对于R^{k+1}，对任意x,y，若$\langle x,y\rangle\in R^{k+1}=R^k\circ R$，则存在$z$使得$\langle x,z\rangle\in R$且$\langle z,y\rangle\in R^k$，由于$R$和$R^k$都是对称的，因此也有$\langle z,x\rangle\in R$且$\langle y,z\rangle\in R^k$，从而$\langle y,z\rangle\in R\circ R^k=R^{k+1}$（注意对任意正整数$m,n$我们有$R^{m+n}=R^m\circ R^n=R^n\circ R^m$），这就表明$R^{k+1}$也是对称的。这就证明了，当$R$是对称关系时，对任意正整数$n$，$R^n$都是对称关系。

从而对任意x,y，若$\langle x,y\rangle\in t(R)$，则根据$t(R)$的计算公式，存在正整数$n$使得$\langle x,y\rangle\in R^n$，而$R^n$是对称的，因此$\langle y,x\rangle\in R^n$，因此$\langle y,x\rangle\in t(R)$，这表明$t(R)$也是对称的，即传递闭包保持关系的对称性。 □

练习 6.31 设R是非空集A上的关系，证明：(1) $rs(R)=sr(R)$；(2) $rt(R)=tr(R)$；(3) $st(R)\subseteq ts(R)$，举例说明不一定有$ts(R)\subseteq st(R)$。这里$rs(R)$是指先求R的对称闭包$s(R)$，然后再求$s(R)$的自反闭包，即$r(s(R))$的简写，其他公式的含义也类似。

证明 (1) 我们利用自反闭包和对称闭包的公式证明，我们有：

$$\begin{aligned}rs(R)&=r(R\cup R^{-1})=\Delta_A\cup R\cup R^{-1}\\ sr(R)&=s(\Delta_A\cup R)=(\Delta_A\cup R)\cup(\Delta_A\cup R)^{-1}=(\Delta_A\cup R)\cup\Delta_A^{-1}\cup R^{-1}=\Delta_A\cup R\cup R^{-1}\end{aligned}$$

因此$rs(R)=sr(R)$。 □

(2) 由于传递闭包的计算公式比较复杂，因此这里我们利用闭包的性质分别证明$rt(R)\subseteq tr(R)$以及$tr(R)\subseteq rt(R)$。注意到$rt(R)$是$t(R)$的自反闭包，我们只要证明$tr(R)$包含$t(R)$且是自反关系，就可根据闭包的性质得到$rt(R)\subseteq tr(R)$。由于$R\subseteq r(R)$，且闭包保持子集关系，因此$t(R)\subseteq tr(R)$，$r(R)$显然是自反关系，而传递闭包保持关系的自反性，因此$tr(R)$也是自反关系，这就得到$rt(R)\subseteq tr(R)$。

类似地，由于$R\subseteq t(R)$，且闭包保持子集关系，因此$r(R)\subseteq rt(R)$，由于$t(R)$是传递关系，而自反闭包保持关系的传递性，因此$rt(R)$也是传递的，从而由$tr(R)$是$r(R)$的传递闭包可得到$tr(R)\subseteq rt(R)$。

综上证明了$rt(R) = tr(R)$。

(3) 首先，类似地，由于$R \subseteq s(R)$，而闭包保持子集关系，因此$t(R) \subseteq ts(R)$，由于$s(R)$是对称关系，而传递闭包保持关系的对称性，因此$ts(R)$也是对称关系，从而由$st(R)$是$t(R)$的对称闭包得到$st(R) \subseteq ts(R)$。

类似上面举例说明对称闭包不保持关系传递性，令$A = \{1, 2\}$，$R = \langle 1, 2\rangle$，则R本身是传递的，所以$t(R) = R$，而$st(R) = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$。另一方面，$s(R) = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$，从而$ts(R) = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$，这时显然没有$ts(R) \subseteq st(R)$。

练习 6.32 设R是非空集A上的关系，证明$tsr(R)$是包含R的最小的等价关系。

证明 首先显然$R \subseteq r(R) \subseteq sr(R) \subseteq tsr(R)$，因此$tsr(R)$包含$R$，而且由于$r(R)$是自反的，对称闭包和传递闭包都保持关系的自反性，因此$tsr(R)$是自反的。由于$sr(R)$是对称的，而传递闭包保持关系的对称性，因此$tsr(R)$也是对称的，最后显然$tsr(R)$是传递的，因此$tsr(R)$是包含R的等价关系。

对任意关系T，若T是等价关系且$R \subseteq T$，则由T是等价关系，得到T是自反关系，且包含R，因此由闭包的定义，$r(R) \subseteq T$，继而由T是对称的，得到$sr(R) \subseteq T$，继而由T是传递的得到$tsr(R) \subseteq T$，这就表明$tsr(R)$是包含R的最小的自反、对称和传递的关系，也即$tsr(R)$是包含R的最小的等价关系。 □

练习 6.33 设$A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$，定义$A$上的关系$R$: $R = \{\langle\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\rangle \mid a + d = b + c\}$。证明$R$是等价关系，并分别给出$\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle$的等价类。

证明 首先R是自反的，对任意$\langle a, b\rangle \in A$，由于$a + b = b + a$，因此$\langle\langle a, b\rangle, \langle a, b\rangle\rangle \in R$。

其次，R是对称的，对任意$\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle \in A$，若$\langle\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\rangle \in R$，则$a + d = b + c$，从而$c + b = d + a$，从而$\langle\langle c, d\rangle, \langle a, b\rangle\rangle \in R$。

最后，R是传递的，对任意$\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle, \langle e, f\rangle \in A$，若$\langle\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\rangle \in R$且$\langle\langle c, d\rangle, \langle e, f\rangle\rangle \in R$，则$a + d = b + c$以及$c + f = d + e$，从而$a + d + c + f = b + c + d + e$，从而$a + f = b + e$，从而$\langle\langle a, b\rangle, \langle e, f\rangle\rangle \in R$。

这就证明了R是等价关系。 □

对任意$\langle a, b\rangle \in A$，

$$[\langle a, b\rangle]_R = \{\langle x, y\rangle \mid a + y = b + x\} = \{\langle x, y\rangle \mid x - y = a - b\}$$

也即对任意$\langle x, y\rangle$，$\langle x, y\rangle \in [\langle a, b\rangle]_R$当且仅当$x - y$等于$a - b$。因此:

$$\begin{aligned}
[\langle 0, 0\rangle]_R &= \{\langle x, x\rangle \mid x \in \mathbb{N}\} \\
[\langle 0, 1\rangle]_R &= \{\langle x, x + 1\rangle \mid x \in \mathbb{N}\} \\
[\langle 1, 0\rangle]_R &= \{\langle x + 1, x\rangle \mid x \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

【**讨论**】注意上述A关于R等价类的定义，我们使用了减法以帮助同学理解。在定义R时没有用减法只是因为减法对自然数集不封闭，所以上面使用了加法定义R。前后两个元素之差相同的自然数对属于同一等价类，因此可用这个差来命名这个等价类集合，从而实际上每一个这样的等价类都

对应一个整数，也即A/R本质上可看做整数集，例如$[\langle 0,0\rangle]_R$对应0，$[\langle 0,1\rangle]_R$对应-1，而$[\langle 1,0\rangle]_R$对应1等等。

练习* 6.34 设$A=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{\langle 0,0\rangle\}$，定义$A$上的关系$R$：$R=\{\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle\mid ad=bc\}$。证明$R$是等价关系，并分别给出$\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle$的等价类。

解答：根据等价关系的定义容易证明R是等价关系。

证明 (1) 首先证明R是自反的：对任意$\langle a,b\rangle\in A$，因为$ab=ba$，因此$\langle\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle\rangle\in R$，即$R$是自反的；

(2) 其次证明R是对称的：对任意$\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\in A$，若$\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle\in R$，即$ad=bc$，则$cb=da$，即$\langle\langle c,d\rangle,\langle a,b\rangle\rangle\in R$，从而$R$是对称的；

(3) 最后证明R是传递的：对任意$\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle\in A$，若$\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle\in R$且$\langle\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle\rangle\in R$，即$ad=bc$，而且$cf=de$，从而$adcf=bcde$，从而$a+f=b+e$，从而$\langle\langle a,b\rangle,\langle e,f\rangle\rangle\in R$，从而$R$是传递的。 □

根据等价类的定义，我们有：

$$\begin{aligned}
[\langle 1,2\rangle] &= \{\langle a,b\rangle\in A\mid 1\cdot b=2\cdot a\} &= \{\langle a,b\rangle\in A\mid a/b=1/2\}\\
[\langle 2,1\rangle] &= \{\langle a,b\rangle\in A\mid 2\cdot b=1\cdot a\} &= \{\langle a,b\rangle\in A\mid a/b=2\}
\end{aligned}$$

练习* 6.35 设$A=\{1,2,3,4,5\}$，定义A上的关系R：

$$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 5,4\rangle\}\cup\Delta_A$$

证明R是等价关系并给出A关于R的商集。

证明 显然R是自反的，而且$R^{-1}=R$，因此R也是对称的，且不难得到$R\circ R=R$，因此R也是传递的，而且有：

$$[1]_R=[2]_R=\{1,2\} \qquad [3]_R=\{3\} \qquad [4]_R=[5]_R=\{4,5\}$$

因此$A/R=\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$。 □

练习 6.36 设R和S都是非空集A上的等价关系，判断下面的关系是否也是A上的等价关系，并说明理由。

$$(1)\ R\cup S \qquad (2)\ R\cap S \qquad (3)\ R^{-1} \qquad (4)\ R\circ S$$

解答：(1) 由于两个传递关系的并不一定是传递关系，因此$R\cup S$不是等价关系，例如，设$A=\{1,2,3\}$，$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}\cup\Delta_A$，且$S=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}\cup\Delta_A$，则$R$和$S$都是等价关系，但是

$$R\cup S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}\cup\Delta_A$$

显然$R\cup S$不是传递关系，因而也不是等价关系。

(2) 由于两个自反关系的交仍是自反关系，两个对称关系的交仍是对称关系，而且两个传递关系的交也仍是传递关系，因此两个等价关系的交仍是等价关系。

(3) 由于一个自反关系的逆仍是自反关系，一个对称关系的逆仍是对称关系，而且一个传递关系的逆也仍是传递关系，因此说个个等价关系的逆仍是等价关系。

(4) 由于两个对称关系的复合不一定，因此两个等价关系的复合也不一定是等价关系，例如，设$A = \{1, 2, 3\}$，$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$和$S = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$，则$R \cup \Delta_A$和$S \cup \Delta_A$都是等价关系，但是，注意到$R \circ S = \{\langle 3, 2\rangle\}$，我们有：

$$(R \cup \Delta_A) \circ (S \cup \Delta_A) = (R \circ S) \cup R \cup S \cup \Delta_A = \{\langle 3, 2\rangle\} \cup R \cup S \cup \Delta_A$$

显然$(R \cup \Delta_A) \circ (S \cup \Delta_A)$不是对称关系（因为$\langle 2, 3\rangle$不在这个关系中），因此也不是等价关系。

练习 6.37 设R是非空集A上关系，定义关系S：

$$S = \{\langle a, b\rangle \in A \times A \mid \exists c \in A, \langle a, c\rangle \in R \text{ 且 } \langle c, b\rangle \in R\}$$

证明若R是等价关系，则S也是等价关系。

证明 首先S是自反关系，因为R自反关系，所以对任意$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \in R$，从而根据$S$的定义也有$\langle a, a\rangle \in S$。其次，对任意$a, b \in A$，若$\langle a, b\rangle \in S$，则存在$c$使得$\langle a, c\rangle \in R$且$\langle c, b\rangle \in R$，而$R$是对称关系，因此也有$\langle b, c\rangle \in R$且$\langle c, a\rangle \in R$，从而根据$S$的定义有$\langle b, a\rangle \in S$，这表明$S$是对称关系。

最后对任意的a, b, c，若$\langle a, b\rangle \in S$且$\langle b, c\rangle \in S$，则存在$d$使得$\langle a, d\rangle \in R$且$\langle d, b\rangle \in R$，且存在$e$使得$\langle b, e\rangle \in R$且$\langle e, c\rangle \in R$，由于$R$是传递的，因此$\langle a, b\rangle \in R$且$\langle b, c\rangle \in R$，从而根据$S$的定义有$\langle a, c\rangle \in S$，这表明$S$是传递的。综上就有当$R$是等价关系时，$S$也等价关系。 □

【讨论】实际上，不难看到$S = R \circ R$，从而当R是等价关系时，$R \circ R$也是等价关系，这是下面练习6.39的特例。

练习 6.38 设R和S都是非空集A上等价关系，而且$A/R = A/S$，证明$R = S$。

证明 对任意$a, b \in R$，若$\langle a, b\rangle \in R$，则$b \in [a]_R$，由于$A/R = A/S$，因此存在$c \in A$，使得$[a]_R = [c]_S$，从而有$b \in [c]_S$且$a \in [c]_S$，因此$\langle a, b\rangle \in S$，这表明$R \subseteq S$，同理可证$S \subseteq R$，因此$R = S$。 □

练习 6.39 设R和S都是非空集合A上的等价关系，证明$R \circ S$是等价关系当且仅当$R \circ S = S \circ R$。

证明 ($\Longrightarrow$)：首先我们证明当$R \circ S$是等价关系时，蕴含$R \circ S = S \circ R$。注意到，这时对任意$a, b \in A$，若$\langle a, b\rangle \in R \circ S$，则由$R \circ S$是等价关系有$\langle b, a\rangle \in R \circ S$，从而存在$c \in A$使得$\langle b, c\rangle \in S$且$\langle c, a\rangle \in R$，由于$R$和$S$都是等价关系，因此也有$\langle c, b\rangle \in S$且$\langle a, c\rangle \in R$，从而$\langle a, b\rangle \in S \circ R$，这表明$R \circ S \subseteq S \circ R$。反之若$\langle a, b\rangle \in S \circ R$，则存在$c \in A$使得$\langle a, c\rangle \in R$且$\langle c, b\rangle \in S$，而$R$和$S$都是等价关系，因此$\langle c, a\rangle \in R$且$\langle b, c\rangle \in S$，从而$\langle b, a\rangle \in R \circ S$，而$R \circ S$是等价关系，因此$\langle a, b\rangle \in R \circ S$，这表明$S \circ R \subseteq R \circ S$，因此有$R \circ S = S \circ R$。

($\Longleftarrow$)：我们证明当R和S都是等价关系，且$R \circ S = S \circ R$时有$R \circ S$是等价关系。首先由于两个自反关系的复合仍是自反关系，因此$R \circ S$是自反关系。这时$R \circ S$也是对称关系，因为：

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} = S \circ R = R \circ S$$

而这时我们又有：

$$(R \circ S) \circ (R \circ S) = (R \circ R) \circ (S \circ S) \subseteq R \circ S$$

因此$R \circ S$也是传递关系，综上有$R \circ S$是等价关系。 □

【讨论】从上面的证明不难看到我们有这样的命题：设R和S都是非空集合A上的对称关系，则$R \circ S$是对称关系当且仅当$R \circ S = S \circ R$。

练习* 6.40 设$A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，即实数对构成的集合。对于下面的每个由$A$的子集构成的集合族，判断它是否构成$A$ 的划分，如果是划分，给出这个划分所导出的等价关系。

(1) $\mathcal{F}_1$包括三个集合：x或y是正数的实数对$\langle x, y\rangle$集合；x是正数的实数对$\langle x, y\rangle$集合；和y是正数的实数对$\langle x, y\rangle$集合。

(2) $\mathcal{F}_2$包括三个集合：$x - y > 0$的实数对$\langle x, y\rangle$集合；$x - y < 0$的实数对$\langle x, y\rangle$集合；$x - y = 0$的实数对$\langle x, y\rangle$集合。

(3) $\mathcal{F}_3$包括三个集合：$xy > 0$的实数对$\langle x, y\rangle$集合；$xy < 0$的实数对$\langle x, y\rangle$集合；$xy = 0$的实数对$\langle x, y\rangle$集合。

解答：(1) $\mathcal{F}_1$不是划分，因为给出的三个集合不是两两不相交，例如，x或y是正数的实数对$\langle x, y\rangle$集合，和x是正数的实数对$\langle x, y\rangle$的集合，这两个集合的交不是空集。

(2) $\mathcal{F}_2$是划分，直观地看，给出的三个集合将平面划分为三个不相交的部分，一个部分是x坐标大于y坐标的点，或者说是在直线$x = y$的下方，第二个部分就是直线$x = y$上的点，第三个部分是在直线$x = y$下方的点，即x坐标小于y坐标的点。它导出的等价关系R_2可定义为：对任意的$\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle \in A$，

$$\langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle \in R_2 \text{ 当且仅当 } (x - y)(u - v) > 0 \vee (x = y \wedge u = v)$$

不难证明R_2是等价关系，而且R_2直观地看，就是$\langle x, y\rangle$和$\langle u, v\rangle$有关系R_2，要么$x = y$且$u = v$，即$\langle x, y\rangle$和$\langle u, v\rangle$都是直线$x = y$上的点，要么$x - y$和$u - v$有相同的符号，如果都大于0，则都在直线$x = y$的下方，如果都小于0，则都在直线$x = y$的上方。

(3) $\mathcal{F}_3$是划分，直观地看，给出的三个集合将平面划分为三个不相交的部分，一个部分是在一三象限的点（坐标乘积大于0），第二个部分在坐标轴上的点（即至少有一个坐标为0），第三个部分是在二四象限点（坐标乘积小于0）。它导出的等价关系R_3可定义为：对任意的$\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle \in A$，

$$\langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle \in R_3 \text{ 当且仅当 } xyuv > 0 \vee (xy = 0 \wedge uv = 0)$$

不难证明R_3是等价关系，而且R_3直观地看，就是$\langle x, y\rangle$和$\langle u, v\rangle$有关系R_3，要么$xy = 0$且$uv = 0$，即$\langle x, y\rangle$和$\langle u, v\rangle$都至少有一个坐标是0，即都在坐标轴上，要么xy和uv有相同的符号，如果都大于0，则在一三象限，如果都小于0，则在二四象限。

练习 6.41 设$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，确定下面的集合族是否是A的划分，如果是则给出它所导出的

等价关系。

(1) $\mathcal{F}_1 = \{\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{5,2,1\}\}$ (2) $\mathcal{F}_2 = \{\{1\},\{2\},\{3,4,5\}\}$

(3) $\mathcal{F}_3 = \{\{1,2\},\{4,5\}\}$ (4) $\mathcal{F}_4 = \{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$

解答：(1) $\mathcal{F}_1$不是A的划分，因为$\{1,2,3\}\cap\{3,4,5\}=\{3\}\neq\varnothing$；
(2) $\mathcal{F}_2$是A的划分，它所导出的等价关系是：

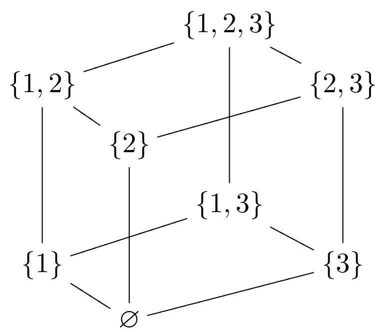
$$R_2 = \{\langle 3,4\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 5,4\rangle\}\cup\Delta_A$$

(3) $\mathcal{F}_3$不是A的划分，因为$3\notin\bigcup\mathcal{F}_3$；
(4) $\mathcal{F}_4$是A的划分，它所导出的等价关系是：

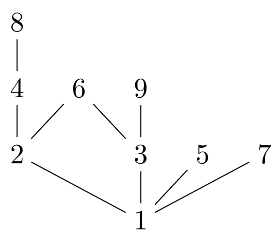
$$R_4 = \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 5,4\rangle\}\cup\Delta_A$$

练习* 6.42 画出下面偏序集的哈斯图：
(1) 偏序集$(A,\subseteq)$，这里$A=\wp(\{1,2,3\})$；
(2) 偏序集$(A,|)$，这里$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，而$|$是整除关系。

解答：(1) 偏序集$(A,\subseteq)$的哈斯图如下，这里$A=\wp(\{1,2,3\})$：

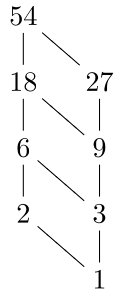


(2) 偏序集$(A,|)$的哈斯图如下，这里$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，而$|$是整除关系：



练习* 6.43 设A是54的所有正因子构成的集合，以整除关系构成偏序集$(A,|)$，给出$(A,|)$的所有极大元、极小元、最大元、最小元，以及子集$\{2,3,6\}$的上界、下界、上确界、下确界。

解答：注意到$A=\{1,2,3,6,9,18,27,54\}$，以整除关系构成的偏序集$(A,|)$的哈斯图如下，从而很容易得到$(A,|)$的极大元，极小元，最大元，最小元，以及子集$\{2,3,6\}$的上界、下界、上确界和下确界。



(1)　$(A, |)$ 极大元：54　　极小元：1

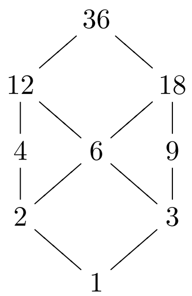
(2)　$(A, |)$ 最大元：54　　最小元：1

(3)　$\{2, 3, 6\}$ 上界有：$6, 18, 54$　　上确界：6

(4)　$\{2, 3, 6\}$ 下界有：1　　下确界：1

练习 6.44 设A是36的所有正因子构成的集合，以整除关系构成偏序集$(A, |)$，给出$(A, |)$的所有极大元、极小元、最大元、最小元，以及子集$\{3, 6, 9\}$的上界、下界、上确界、下确界。

解答：注意到$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$，以整除关系构成的偏序集$(A, |)$的哈斯图如下，从而很容易得到$(A, |)$的极大元，极小元，最大元，最小元，以及子集$\{3, 6, 9\}$的上界、下界、上确界和下确界。



(1)　$(A, |)$ 极大元：36　　极小元：1

(2)　$(A, |)$ 最大元：36　　最小元：1

(3)　$\{2, 3, 6\}$ 上界有：$18, 36$　　上确界：18

(4)　$\{2, 3, 6\}$ 下界有：1　　下确界：1

练习 6.45 设R是A上偏序关系且S是B上偏序关系。在$A \times B$上定义关系T如下：

$$T = \{\langle\langle a, b\rangle, \langle a', b'\rangle\rangle \in (A \times B) \times (A \times B) \mid a\ R\ a' \ \wedge\ b\ S\ b'\}$$

证明T是$A \times B$上的偏序关系。如果R和S都是全序，是否T也必然是全序？

证明　对任意有序对$\langle a, b\rangle \in A \times B$，由于$R$和$S$都是偏序关系，因此有$a\ R\ a$和$b\ S\ b$，从而根据$T$的定义有$\langle a, b\rangle\ T\ \langle a, b\rangle$，因此$T$也是自反的。

对任意有序对$\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle \in A \times B$，若$\langle a, b\rangle\ T\ \langle c, d\rangle$且$\langle c, d\rangle\ T\ \langle a, b\rangle$，则根据$T$的定义有$a\ R\ c$和$b\ S\ d$，以及$c\ R\ a$和$d\ S\ b$，从而由$R$和$S$是反对称的有$a = c$且$b = d$，即$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$，这表明$T$也是反对称的。

对任意有序对$\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle, \langle e, f\rangle \in A \times B$，若$\langle a, b\rangle\ T\ \langle c, d\rangle$且$\langle c, d\rangle\ T\ \langle e, f\rangle$，则根据$T$的定义有$a\ R\ c$和$b\ S\ d$，以及$c\ R\ e$和$d\ R\ f$，从而由$R$和$S$是传递的有$a\ R\ e$且$c\ R\ f$，从而有$\langle a, b\rangle\ T\ \langle e, f\rangle$，这表明$T$也是传递的。

综上有T也是偏序关系。但当R和S都是全序时，T不一定是全序。例如设$A = \{1, 2\}$，$R = S = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle\} \subseteq A \times A$，显然$R$和$S$是全序，这时$T \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$是$A \times A$上的偏序，但不是全序，因为$\langle 1, 2\rangle$和$\langle 2, 1\rangle$在偏序$T$下是两个不可比较的$A \times A$的元素。 □

练习 6.46 设R是A上偏序关系且S是B上偏序关系。在$A \times B$上定义关系T如下：

$$T = \{\langle\langle a, b\rangle, \langle a', b'\rangle\rangle \in (A \times B) \times (A \times B) \mid a\ R\ a' \ \wedge\ (\text{若 } a = a' \text{ 则 } b\ S\ b')\}$$

证明T是$A \times B$上的偏序关系。如果R和S都是全序，是否T也必然是全序？

证明 对任意有序对$\langle a,b\rangle \in A \times B$，由于$R$和$S$都是偏序关系，因此有$a\ R\ a$和$b\ S\ b$，从而有$a\ R\ a$且当$a = a$时有$b\ S\ b$，因此根据$T$的定义有$\langle a,b\rangle\ T\ \langle a,b\rangle$，因此$T$也是自反的。

对任意有序对$\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in A \times B$，若$\langle a,b\rangle\ T\ \langle c,d\rangle$且$\langle c,d\rangle\ T\ \langle a,b\rangle$，则根据$T$的定义有$a\ R\ c$和当$a = c$时$b\ S\ d$，以及$c\ R\ a$和当$c = a$时$d\ S\ b$，因为$R$是反对称的，因此由$a\ R\ c$和$c\ R\ a$有$c = a$，从而有$b\ S\ d$且$d\ S\ b$，而$S$也是反对称的，因此也有$b = d$，因此$\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$，这表明$T$也是反对称的。

对任意有序对$\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle, \langle e,f\rangle \in A \times B$，若$\langle a,b\rangle\ T\ \langle c,d\rangle$且$\langle c,d\rangle\ T\ \langle e,f\rangle$，则根据$T$的定义有$a\ R\ c$和当$a = c$时有$b\ S\ d$，以及$c\ R\ e$和当$c = e$时有$d\ R\ f$，从而由$R$是传递的有$a\ R\ e$，进一步，若$a = e$，则由$a\ R\ c$以及$c\ R\ e$，即$c\ R\ a$，及$R$的反对称性就也有$a = c$，从而$a = c = e$，从而根据$T$的定义就有$b\ S\ d$且$d\ S\ f$，再根据$S$的传递性就有$b\ S\ f$，也即当$a = e$时有$b\ S\ f$，从而根据$T$的定义就有$\langle a,b\rangle\ T\ \langle e,f\rangle$，这就表明$T$也是传递的。

综上有T也是偏序关系。当R和S都是全序时，对任意有序对$\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in A \times B$，由$R$是全序的，从而有$a\ R\ c$或$c\ R\ a$，我们分情况考虑：(1) 若有$a\ R\ c$但$a \neq c$，则根据$T$的定义有$\langle a,b\rangle\ T\ \langle c,d\rangle$；(2) 若有$c\ R\ a$但$a \neq c$，则根据$T$的定义有$\langle c,d\rangle\ T\ \langle a,b\rangle$；(3) 若$a\ R\ c$且$c\ R\ a$，即有$a = c$，从而由$S$的定义就有$b\ S\ d$或$d\ S\ b$，从而根据$T$的定义就有$\langle a,b\rangle\ T\ \langle c,d\rangle$或$\langle c,d\rangle\ T\ \langle a,b\rangle$。总之，当$R$和$S$都是全序时，总有$\langle a,b\rangle\ T\ \langle c,d\rangle$或$\langle c,d\rangle\ T\ \langle a,b\rangle$，这就表明$T$这时也是全序。 □

【**讨论**】这里基于R和S定义的偏序T类似于英语词典中单词的排列顺序，即先看第一个字母决定顺序，如果第一个字母再看第二个字母等等，而不是像上一个练习那样同时看单词中的所有字母。可看到上一练习当所基于的偏序R和S是全序时导出的偏序T不是全序，但这里类似词典中单词排序（简称词典序）的形式由R和S导出偏序T，则当R和S都是全序时，T也是全序。

练习 6.47 设R是非空集A上的关系，证明：若R是反自反且传递的关系，则R也是反对称的。

证明 我们使用反证法。若R不是反对称的，则由A是非空集，意味着存在$a,b \in A$，$\langle a,b\rangle \in R$，$\langle b,a\rangle \in R$，且$a \neq b$。但R是传递的，从而由$\langle a,b\rangle \in R$和$\langle b,a\rangle \in R$由$\langle a,a\rangle \in R$，这与R是反自反的矛盾！因此R必是反对称的。 □

练习 6.48 设R是非空集A上的拟序关系，即R是自反、传递的关系。在A上定义关系$R_\equiv$为：对任意$a,b \in A$，

$$\langle a,b\rangle \in R_\equiv \quad \text{当且仅当} \quad \langle a,b\rangle \in R \text{ 且 } \langle b,a\rangle \in R$$

证明：(1) $R_\equiv$是A上的等价关系。(2) 在A关于$R_\equiv$的商集$A/R_\equiv$上定义关系$\preceq_R$，对任意$[a]_{R_\equiv}, [b]_{R_\equiv}$，

$$[a]_{R_\equiv} \preceq_R [b]_{R_\equiv} \quad \text{当且仅当} \quad \langle a,b\rangle \in R$$

证明上述定义是合适的，即若$[a]_{R_\equiv} \preceq_R [b]_{R_\equiv}$，则对任意的$x \in [a]_{R_\equiv}$和$y \in [b]_{R_\equiv}$都有$\langle x,y\rangle \in R$。最后证明$\preceq_R$是$A/R_\equiv$上的偏序关系。

证明 (1) 对任意$a \in A$，由于R是自反的，因此有$\langle a,a\rangle \in R$，从而根据$R_\equiv$的定义有$\langle a,a\rangle \in R_\equiv$，即$R_\equiv$是自反的。对任意$a,b \in A$，若$\langle a,b\rangle \in R_\equiv$，则根据$R_\equiv$的定义有$\langle a,b\rangle \in R$且$\langle b,a\rangle \in R$，从而也有$\langle b,a\rangle \in R$且$\langle a,b\rangle \in R$，从而也有$\langle b,a\rangle \in R_\equiv$，即$R_\equiv$是对称的。对任意$a,b,c \in A$，若$\langle a,b\rangle \in R_\equiv, \langle b,c\rangle \in R_\equiv$，则根据$R_\equiv$的定义有$\langle a,b\rangle \in R$且$\langle b,a\rangle \in R$，以及$\langle b,c\rangle \in R$且$\langle c,b\rangle \in R$，从而根

据R的传递性有$\langle a,c\rangle \in R$且$\langle c,a\rangle \in R$，从而$\langle a,c\rangle \in R_{\equiv}$，这表明$R_{\equiv}$也是传递的。综上有$R_{\equiv}$是$A$上的等价关系。

(2) 我们首先证明$\preceq_R$的定义是合适的，对任意$a,b \in A$，若$[a]_{R_{\equiv}} \preceq_R [b]_{R_{\equiv}}$，则有$\langle a,b\rangle \in R$，从而对任意的$x \in [a]_{R_{\equiv}}$和$y \in [b]_{R_{\equiv}}$，由$x \in [a]_{R_{\equiv}}$有$\langle x,a\rangle \in R_{\equiv}$，从而$\langle x,a\rangle \in R$且$\langle a,x\rangle \in R$，类似地由$y \in [b]_{R_{\equiv}}$有$\langle y,b\rangle \in R$且$\langle b,y\rangle \in R$，从而由$\langle x,a\rangle \in R, \langle a,b\rangle \in R$和$\langle b,y\rangle \in R$，以及$R$的传递性有$\langle x,y\rangle \in R$。直观地说，当$[a]_{R_{\equiv}} \preceq_R [b]_{R_{\equiv}}$时，这两个等价类中任意分别抓两个元素出来都有关系$R$，因此$\preceq_R$的定义与等价类的代表无关，从而是合适的。

显然$\preceq_R$是自反的，因为R是自反的，对任意$a \in R$都有$\langle a,a\rangle \in R$，从而总有$[a]_{R_{\equiv}} \preceq_R [a]_{R_{\equiv}}$。对任意$a,b$，若$[a]_{R_{\equiv}} \preceq_R [b]_{R_{\equiv}}$且$[b]_{R_{\equiv}} \preceq_R [a]_{R_{\equiv}}$，则有$\langle a,b\rangle \in R$且$\langle b,a\rangle \in R$，从而$\langle a,b\rangle \in R_{\equiv}$，从而$[a]_{R_{\equiv}} = [b]_{R_{\equiv}}$，这表明$\preceq_R$是反对称的。对任意$a,b,c$，若$[a]_{R_{\equiv}} \preceq_R [b]_{R_{\equiv}}$且$[b]_{R_{\equiv}} \preceq_R [c]_{R_{\equiv}}$，则有$\langle a,b\rangle \in R$且$\langle b,c\rangle \in R$，从而由$R$的传递性有$\langle a,c\rangle \in R$，从而$[a]_{R_{\equiv}} \preceq_R [c]_{R_{\equiv}}$，这表明$\preceq_R$是传递的。综上有$\preceq_R$是$A/R_{\equiv}$上的偏序关系。 □

练习 6.49 设$(A,\preceq)$是偏序集，$B \subseteq A$，U是B的所有上界构成的集合。证明：(1) U是向上封闭的(closed upward)，即，如果$x \in U$且$x \preceq y$，则$y \in U$；(2) B的任意元素都是U的下界；(3)如果x是U的下确界，则x是B的上确界。

解答：(1) 对任意$x,y \in A$，若$x \in U$且$x \preceq y$，则x是B的上界，也即对任意$b \in B$有$b \preceq x$，从而由$x \preceq y$，有对任意$b \in B$有$b \preceq y$，也即y也是B的上界，从而$y \in U$，这表明U向上封闭。

(2) 设b是B的任意元素，对任意$u \in U$，因为u是B的上界，所以有$b \preceq u$，因此对U的任意元素都有$b \preceq u$，这表明b是U的下界。

(3) 若x是U的下确界，从而对任意$b \in B$，由(2)有b是U的下界，而x是U的下确界，从而$b \preceq x$，也即对任意$b \in B$有$b \preceq x$，这表明x是B的上界，从而$x \in U$，但x又是U的下确界，也即对任意$u \in U$有$x \preceq u$，因此x是U的最小元，而U是B的所有上界构成的集合，因此x是B的上确界。