离散数学基础习题答案

Answers to Exercises in Elementary Discrete Mathematics

周晓聪　　乔海燕

中山大学数据科学与计算机学院, 广州 510275

2021 年 1 月 19 日

目录

第七章　函数

练习 7.1 设$A=\{1,2,3,4,5\},B=\{a,b,c,d\}$，判断下面的笛卡尔积集$A\times B$子集是否是函数，并说明理由。

$$F_1 = \{\langle 5,b\rangle,\langle 3,d\rangle,\langle 4,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 5,d\rangle\} \qquad F_2 = \{\langle 4,c\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 5,c\rangle,\langle 1,c\rangle,\langle 3,b\rangle\}$$
$$F_3 = \{\langle 2,c\rangle,\langle 4,b\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 1,b\rangle\} \qquad F_4 = \{\langle 1,d\rangle,\langle 2,c\rangle,\langle 3,d\rangle,\langle 4,a\rangle,\langle 5,d\rangle\}$$

解答：(1) F_1不是函数，因为A的元素5有B的两个元素与之对应，即有$\langle 5,b\rangle,\langle 5,d\rangle\in F_1$。

(2) F_2不是函数，因为A的元素1有B的两个元素与之对应，即有$\langle 1,b\rangle,\langle 1,c\rangle\in F_1$。

(3) F_3不是函数，因为A的元素5没有B的元素与之对应。

(4) F_4是函数，A的每个元素有且有一个B的元素与之对应。

练习 7.2 设$A=\{1,2,3,4,5\},B=\{a,b,c,d\}$，给出下面函数的值域，以及$A$的子集$S=\{1,2,3\}$在$f$下的像集$f(S)$和$B$的子集$T=\{a,b\}$在$f$下的逆像集$f^{-1}(T)$。

$$f_1 = \{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,d\rangle,\langle 4,c\rangle,\langle 5,d\rangle\} \qquad f_2 = \{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 4,b\rangle,\langle 5,c\rangle\}$$

解答：(1) 函数f_1的值域是$\{a,c,d\}$，自己$S=\{1,2,3\}$在f_1下的像集$f_1(S)=\{a,d\}$，B的子集$T=\{a,b\}$在f下的逆像集$f_1^{-1}(T)=\{1,2\}$。

(2) 函数f_2的值域是$\{a,b,c\}$，自己$S=\{1,2,3\}$在f_2下的像集$f_2(S)=\{a,b\}$，B的子集$T=\{a,b\}$在f下的逆像集$f_2^{-1}(T)=\{1,2,3,4\}$。

练习* 7.3 设$f:A\to B$是函数，S和T都是B的子集，证明：(1) $S\subseteq T$蕴涵$f^{-1}(S)\subseteq f^{-1}(T)$；(2) $f^{-1}(S\cap T)=f^{-1}(S)\cap f^{-1}(T)$。

证明　(1) 假定$S\subseteq T$，对任意$a\in A$，若$a\in f^{-1}(S)$，即$f(a)\in S$，由于$S\subseteq T$，因此也有$f(a)\in T$，从而也有$a\in f^{-1}(T)$，这就证明了$S\subseteq T$蕴涵$f^{-1}(S)\subseteq f^{-1}(T)$。

(2) 我们可以用下面的演算证明$f^{-1}(S\cap T)=f^{-1}(S)\cap f^{-1}(T)$：对任意$a\in A$，

$$\begin{aligned}
a\in f^{-1}(S\cap T) \quad & \text{当且仅当} \quad f(a)\in S\cap T \\
& \text{当且仅当} \quad f(a)\in S \ \land\ f(a)\in T \\
& \text{当且仅当} \quad a\in f^{-1}(S) \ \land\ a\in f^{-1}(T) \\
& \text{当且仅当} \quad a\in f^{-1}(S)\cap f^{-1}(T)
\end{aligned}$$

□

练习 7.4 设$f : A \to B$是函数，证明：

(1) 对A的任意两个子集S,T，$f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$；

(2) 对B的任意两个子集W,V，$f^{-1}(W \cup V) = f^{-1}(W) \cup f^{-1}(V)$。

证明 (1) 对任意$y \in B$，

$$
\begin{array}{llll}
y \in f(S \cup T) & \text{当且仅当} & \exists x(x \in S \cup T \ \wedge \ f(x) = y) & // \text{像集的定义} \\
& \text{当且仅当} & \exists x((x \in S \vee x \in T) \ \wedge \ f(x) = y) & // \text{集合并的定义} \\
& \text{当且仅当} & \exists x((x \in S \ \wedge \ f(x) = y) \vee (x \in T \ \wedge \ f(x) = y)) & // \text{合取对析取分配} \\
& \text{当且仅当} & \exists x(x \in S \ \wedge \ f(x) = y) \vee \exists x(x \in T \ \wedge \ f(x) = y) & // \text{存在量词对析取分配} \\
& \text{当且仅当} & y \in f(S) \vee y \in f(T) & // \text{像集的定义} \\
& \text{当且仅当} & y \in f(S) \cup f(T) & // \text{集合并的定义}
\end{array}
$$

因此$f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$

(2) 对任意$x \in A$，

$$
\begin{array}{llll}
x \in f^{-1}(W \cup V) & \text{当且仅当} & f(x) \in W \cup V & // \text{逆像集的定义} \\
& \text{当且仅当} & f(x) \in W \vee f(x) \in V & // \text{集合并的定义} \\
& \text{当且仅当} & x \in f^{-1}(W) \vee x \in f^{-1}(V) & // \text{逆像集的定义} \\
& \text{当且仅当} & x \in f^{-1}(W) \cup f^{-1}(V) & // \text{集合并的定义}
\end{array}
$$

因此$f^{-1}(W \cup V) = f^{-1}(W) \cup f^{-1}(V)$。 □

【**讨论**】可以看到，这一题本质上都是证明两个集合相等，因此可采用考察元素的方法证明它们。另外，$f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$的根本原因是存在量词对析取分配，而$f(S \cap T) \neq f(S) \cap f(T)$的原因是存在量词对合取不分配。

练习* 7.5 设$f : A \to B$是函数，且S是B上关系，在A上定义关系R：

$$R = \{(x, y) \in A \times A \mid (f(x), f(y)) \in S\}$$

证明：(1) 若S是自反关系，则R也是自反关系；(2) 若S是对称关系，则R也是对称关系；(3) 若S是传递关系，则R也是传递关系。

证明 (1) 假定S是自反的，则对任意$x \in A$，有$\langle f(x), f(x)\rangle \in S$，从而根据$R$的定义也有$\langle x, x\rangle \in R$，即$R$也是自反的；

(2) 假定S是对称的，则对任意$x, y \in A$，若$\langle x, y\rangle \in R$，即$\langle f(x), f(y)\rangle \in S$，由于$S$是对称的，则$\langle f(y), f(x)\rangle \in S$，从而根据$R$的定义也有$\langle y, x\rangle \in R$，即$R$也是对称的；

(3) 假定S是传递的，则对任意$x, y, z \in A$，若$\langle x, y\rangle \in R$且$\langle y, z\rangle \in R$，即$\langle f(x), f(y)\rangle \in S$且$\langle f(y), f(z)\rangle \in S$，由于$S$是传递的，因此也有$\langle f(x), f(z)\rangle \in S$，从而根据$R$的定义，$\langle x, z\rangle \in R$，这表明$R$也是传递的。 □

练习 7.6 设$f : A \to B$是函数，且R是A上关系，在B上定义关系S：

$$S = \{(x, y) \in B \times B \mid \exists u \in A \exists v \in A(f(u) = x \ \wedge \ f(v) = y \ \wedge \ (u, v) \in R)\}$$

使用证明或反例给出下面每一问的判断理由。(1) 如果R是自反的，是否S也必然是自反的？(2) 如果R是对称的，是否S也必然是对称的？(3) 如果R是传递的，是否S也必然是传递的？

解答: (1) 如果R是自反的，S不一定是自反的，例如$A = \{1, 2\}, B = \{a, b\}$，$f = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle\}$，$R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$，显然$R$是自反的，但是$S = \{\langle a, a\rangle\}$，不是自反的，可看到$b \in B$没有原像，因此$\langle b, b\rangle$不属于$S$。

(2) 如果R是对称的，则S也是对称的。对任意$x, y \in B$，若$\langle x, y\rangle \in S$，即存在$u, v \in A$使得$f(u) = x$且$f(v) = y$，且$\langle u, v\rangle \in R$，由于$R$是对称的，因此也有$\langle v, u\rangle \in R$，从而存在$u, v \in A$使得$f(v) = y$且$f(u) = x$，且$\langle v, u\rangle \in R$，这表明$\langle y, x\rangle \in S$，因此$S$是对称的。

(3) 如果R是传递的，则S不一定是传递的。例如$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c\}$，

$$f = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 4, b\rangle, \langle 3, c\rangle\} \qquad R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 4, 3\rangle\}$$

显然R是传递的，但是$S = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$，不是传递的。

【**讨论**】我们可以通过试图证明R是传递的蕴含S也是传递的，思考哪里存在问题来发现反例。我们知道，对任意$x, y, z \in B$，若$\langle x, y\rangle \in S$和$\langle y, z\rangle \in S$，则存在$u, v \in A$，$f(u) = x, f(v) = y$且$\langle u, v\rangle \in R$，以及存在$w, t \in A$，$f(w) = y, f(t) = z$且$\langle w, t\rangle \in R$，所以当使得$\langle y, z\rangle \in S$的$y$的原像$w$不等于使得$\langle x, y\rangle \in S$的$y$的原像$v$时，我们不能利用$R$的传递性得到$S$的传递性，因此我们在举反例的时候就要利用这一点。

从逻辑上来说，这也表明我们在做存在例化的时候，所选择的常量要是新的常量，而不能是已经用过的常量！！另外，通过这个分析，我们也可看到，如果f是单函数，则从$f(v) = y = f(w)$可得到$v = w$，从而可利用R的传递性得到S的传递性。

练习 7.7 判断下面定义的集合A到B的函数是否是单函数、满函数或双函数。

(1) 集合$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}$，函数$f_1 = \{\langle 1, b\rangle, \langle 2, c\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 4, c\rangle, \langle 5, c\rangle\}$；

(2) 集合$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}$，函数$f_2 = \{\langle 1, d\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 4, c\rangle, \langle 5, a\rangle\}$；

(3) 集合$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$，函数$f_3 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, d\rangle, \langle 3, c\rangle, \langle 4, b\rangle\}$；

(4) 集合$A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d, e\}$，函数$f_4 = \{\langle 1, e\rangle, \langle 2, d\rangle, \langle 3, b\rangle\}$

解答: (1) 函数f_1不是单函数，因为$f_1(2) = c = f_1(4)$，也不是满函数，因为不存在$x \in A$使得$f_1(x) = d$，因此f_1也不是双函数。

(2) 函数f_2不是单函数，因为$f_2(2) = b = f_2(3)$，是满函数，B的每个元素都有原像，例如a的原像有5，b的原像有2, 3，c的原像有4，d的原像有1，当然f_2不是双函数。

(3) 函数f_3是双函数，即既是单函数，又是满函数，它的逆函数是$f_3^{-1} = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 4\rangle, \langle c, 3\rangle, \langle 2, d\rangle\}$。

(4) 函数f_4是单函数，它有左逆$g = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle d, 2\rangle, \langle e, 1\rangle\}$，但$f_4$不是满函数，因为$a \in B$没有原像，从而也不是双函数。

练习* 7.8 判断下面给出的实数集上的函数是否是单函数、满函数或双函数。

(1) $f_1(x) = 2x^2 + 1$　　(2) $f_2(x) = 3x^3 + 2$

(3) $f_3(x) = \lfloor (x+1)/2 \rfloor$　　(4) $f_4(x) = (x^2+1)/(x^2+3)$

解答：很容易根据对实数集上的函数性质给出回答：

(1) 函数$f_1(x) = 2x^2 + 1$不是单函数，因为$f(-1) = f(1) = 3$，它也不是满函数，因为总有$2x^2 + 1 \geq 1$，从而对于小于1的实数，在f_1下没有原像，因此f_1也不是双函数；

(2) 函数$f_2(x) = 3x^3 + 2$是单函数，对任意x_1, x_2，若$f_2(x_1) = f_2(x_2)$，即不难得到$x_1^3 = x_2^3$，从而$x_1 = x_2$。f_2也是满函数，对任意实数y，令$y = 3x^3 + 2$，则可得到$x = \sqrt[3]{(y-2)/3}$，也即任意实数y在f_2下的原像是$\sqrt[3]{(y-2)/3}$，因此f_2是双函数。

(3) 函数$f_3(x) = \lfloor (x+1)/2 \rfloor$，因为显然有$f_3(0.1) = f_3(0.2)$，它也不是满函数，因为对任意实数，$f_3(x)$的结果是整数，也即非整数的实数在$f_3$下没有原像，所以$f_3$也不是双函数。

(4) 函数$f_4(x) = (x^2+1)/(x^2+3)$不是单函数，因为$f(-1) = f(1)$，它也不是满函数，因为对任意实数x，总有$f_4(x) \geq 0$，因此对于小于0的实数在f_4下没有原像，所以f_4也不是双函数。

练习 7.9 判断下面给出的自然数集$\mathbb{N}$上的函数是否是单函数、满函数或双函数。

(1) $f_1(n) = 2n^2 + 1$　　(2) $f_2(n) = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$

(3) $f_3(n) = \lceil (2n+1)/2 \rceil$　　(4) $f_4(n) = |n - 5|$

解答：(1) f_1是单函数，对任意自然数n, m，若$f(n) = f(m)$，则$2n^2+1 = 2m^2+1$，从而$n^2 = m^2$，对于自然数而言，这意味着$n = m$。但f_1不是满函数，例如不存在自然数n，使得$2n^2 + 1 = 2$，即$2n^2 = 1$，因此2在f_1下没有原像。因此f_1也不是双函数。

(2) f_2不是单函数，例如$f(1) = \lfloor (1+1)/2 \rfloor = 1$，而$f(2) = \lfloor (2+1)/2 \rfloor = 1$。$f_2$是满函数，$f_2(0) = 0$，而对于任意大于0的自然数$n$，$f_2(2n-1) = \lfloor (2n-1+1)/2 \rfloor = n$，也即$n$在$f_2$下的原像是$2n-1$，因此每个自然数在$f_2$下都有原像，即$f_2$是满函数。$f_2$不是双函数。

(3) 实际上，$f_3(n) = \lceil (2n+1)/2 \rceil = \lceil n + 1/2 \rceil = n + 1$，因此$f_3$是单函数，但不是满函数，因为0在$f_3$下没有原像，$f_3$也不是双函数。

(4) f_4不是单函数，例如$f(0) = 5 = f(10)$，f_4是满函数，对任意自然数n，显然$f(n+5) = n$，因此每个自然数在f_4下都有原像。f_4不是双函数。

练习* 7.10 设集合$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d\}$，定义$A$到$B$的函数$f = \{\langle 1, d\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 4, a\rangle, \langle 5, a\rangle\}$，定义$B$到$A$的函数$g = \{\langle a, 3\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle d, 4\rangle\}$，计算$f \circ g$和$g \circ f$。

解答：根据函数复合的定义，容易得到：

$$\begin{aligned} f \circ g &= \{\langle a, a\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle d, a\rangle\} \\ g \circ f &= \{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 5, 3\rangle\} \end{aligned}$$

注意$f \circ g$是B上的函数，而$g \circ f$是A上的函数。

练习 7.11 定义实数集上的函数$f(x)=x^2+1$以及$g(x)=\lfloor(x^2+1)\rfloor$，计算$f\circ g$和$g\circ f$。

解答：根据函数复合的定义，容易得到：对任意实数x，

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= f(g(x))=f(\lfloor(x^2+1)\rfloor)=(\lfloor(x^2+1)\rfloor)^2+1\\(g\circ f)(x) &= g(f(x))=g(x^2+1)=\lfloor((x^2+1)^2+1)\rfloor=\lfloor((x^4+2x^2+2)\rfloor\end{aligned}$$

练习 7.12 设$A=\wp(\mathbb{R})$，定义函数$f:\mathbb{R}\rightarrow A$为$f(x)=\{y\in\mathbb{R}\mid y^2<x\}$。(1) 计算$f(2)$；(2) f是否是单函数，满函数或双函数？

解答：(1) 显然$f(2)=\{y\in\mathbb{R}\mid y^2<2\}=\{y\in\mathbb{R}\mid -\sqrt{2}<y<\sqrt{2}\}$，也即$f(2)$等于开区间$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$。

(2) f不是单函数，因为当实数$x\leq 0$时，由于对任意实数y都有$y^2\geq 0$，因此对小于等于0的实数x，总有$f(x)=\varnothing$，例如$f(-1)=f(-2)=\varnothing$，因此f不是单函数。

f也不是满函数，我们证明整个实数集$\mathbb{R}$在f下没有原像，因为若它的原像是x_0，则$x_0>0$（当$x_0\leq 0$时总有$f(x_0)=\varnothing$。若$x_0\leq 1$，则实数$1\not\in f(x_0)$（这时实数$y\in f(x_0)$当且仅当$y^2<x_0<1$），而若$x_0>1$，则$x_0\not\in f(x_0)$（这时实数$y\in f(x_0)$当且仅当$y^2<x_0$，但当$x_0>1$时总有$x_0^2>x_0$），因此无论哪种情况总存在不属于$f(x_0)$的实数，与$f(x_0)=\mathbb{R}$矛盾！这表明$\mathbb{R}$在f下没有原像，因此f不是满函数。

练习* 7.13 设$f:A\rightarrow B$和$g:B\rightarrow C$是函数，证明：

(1) 如果$g\circ f$是单函数，则f是单函数，但g不一定是单函数；

(2) 如果$g\circ f$是满函数，则g是满函数，但f不一定是满函数；

(3) 如果$g\circ f$是双函数，则f是单函数且g是满函数。

证明 (1) 设$g\circ f$是单函数，对任意$x_1,x_2\in A$，若$f(x_1)=f(x_2)$，则有$g(f(x_1))=g(f(x_2))$，而$g\circ f$是单函数，从而$x_1=x_2$，这就表明f也是单函数。

这时g不一定是单函数，例如设$A=\{1,2\},B=\{a,b,c\},C=\{0,1\}$，$f$定义为$f(1)=a,f(2)=b$，而$g(a)=0,g(b)=0,g(c)=1$，则$(g\circ f)(1)=0,(g\circ f)(2)=1$，即$g\circ f$是单函数，$f$也是单函数，但$g$不是单函数。

(2) 设$g\circ f$是满函数。对任意$c\in C$，由于$g\circ f$是满函数，因此存在$a\in A$，使得$(g\circ f)(a)=c$，从而c在g下有原像$f(a)$，因此g也是满函数。

这时f不一定是满函数，同样设设$A=\{1,2\},B=\{a,b,c\},C=\{0,1\}$，$f$定义为$f(1)=a,f(2)=b$，而$g(a)=0,g(b)=0,g(c)=1$，则$(g\circ f)(1)=0,(g\circ f)(2)=1$，即$g\circ f$是满函数，$g$也是满函数，但$f$不是满函数。

(3) 由(1)和(2)立即可得。 □

练习 7.14 设$f:A\rightarrow B$和$g:B\rightarrow C$是函数，证明：(1) 如果f是满函数但g不是单函数，则$g\circ f$不是单函数。(2) 如果f不是满函数但g是单函数，则$g\circ f$不是满函数。

证明 待证命题的结论都是否定式，因此适宜使用反证法。

(1) 假设f是满函数但g不是单函数时，$g\circ f$却是单函数，则对任意$b_1,b_2\in B$，若$g(b_1)=g(b_2)$，则由于f是满函数，存在$a_1\in A$使得$f(a_1)=b_1$，且存在a_2使得$f(a_2)=b_2$，从而有

$$g(f(a_1))=g(b_1)=g(b_2)=g(f(a_2))$$

这样由$g\circ f$是单函数就得到$a_1=a_2$，从而有$b_1=f(a_1)=f(a_2)=b_2$，也即由$g(b_1)=g(b_2)$这时可得$b_1=b_2$，这表明g是单与函数，与假设g不是单函数矛盾！因此$g\circ f$不是单函数。

(2) 假设f不是满函数但g是单函数时，$g\circ f$是满函数，则对任意$b\in B$，注意到$g(b)\in C$，从而对于$g(b)$，存在$a\in A$，使得$(g\circ f)(a)=g(b)$，即$g(f(a))=g(b)$，而这时g是单函数，因此有$f(a)=b$，这表明对任意$b\in B$都存在$a\in A$使得$f(a)=b$，即f是满函数，与假设f不是满函数矛盾！因此$g\circ f$不是满函数。 □

练习 7.15 设A是非空集，$f:A\to B$是函数且R是A上关系，定义B上关系S如下：

$$S=\{(x,y)\in B\times B\mid \exists u\in A\exists v\in A(f(u)=x\wedge f(v)=y\wedge (u,v)\in R)\}$$

证明：(1) 如果R是自反关系且f是满函数，则S是自反的；(2) 如果R是传递关系且f是单函数，则S是传递的。

证明 (1) 如果R是自反关系，且f是满函数，则对任意$x\in B$，由f是满函数，从而存在$u\in A$使得$f(u)=x$，而由R是自反关系，即有$\langle u,u\rangle\in R$，从而根据S的定义有$\langle x,x\rangle\in S$，即S是自反的。

(2) 对任意$x,y,z\in B$，若$\langle x,y\rangle\in S$和$\langle y,z\rangle\in S$，则存在$u,v\in A$，$f(u)=x,f(v)=y$且$\langle u,v\rangle\in R$，以及存在$w,t\in A$，$f(w)=y,f(t)=z$且$\langle w,t\rangle\in R$，而由f是单函数，因此由$f(w)=y=f(v)$有$w=v$，从而由$\langle u,v\rangle\in R$且$\langle w,t\rangle=\langle v,t\rangle\in R$，由$R$是传递的，就有$\langle u,t\rangle\in R$，从而存在$u,t\in A$，使得$f(u)=x,f(t)=z$且$\langle u,t\rangle\in R$，从而根据$S$的定义就有$\langle x,z\rangle\in S$，这就证明了$S$的传递性。 □

练习 7.16 判断下面实数集上的函数是否是单函数，满函数或双函数。如果是单函数，给出它的一个左逆，如果是满函数给出它的一个右逆，如果是双函数给出它的逆函数。

(1) $f_1(x)=x^2$　　(2) $f_2(x)=x^3$

(3) $f_3(x)=\lfloor x\rfloor$　　(4) $f_4(x)=|x|$

解答: (1) 作为实数集上的函数f_1，不是单函数，因为由$f(-2)=f(2)=4$，也不是满函数，因为对任意的实数$y<0$，不存在实数x使得$f_1(x)=x^2=y$。当然f_1更不是双函数。

(2) 作为实数集上的函数f_2是双函数，它的逆函数是f_2^{-1}，对任意实数y，$f_2^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$，显然有对任意实数x，

$$\begin{aligned} f_2(f_2^{-1}(x)) &= f_2(\sqrt[3]{x})=(\sqrt[3]{x})^3=x \\ f_2^{-1}(f_2(x)) &= f_2^{-1}(x^3)=\sqrt[3]{x^3}=x \end{aligned}$$

(3) 作为实数集上的函数f_3不是单函数，显然$f_3(3.1)=f_3(3.2)=3$，也不是满函数，因为它的值域只是整数集，非整数的实数，例如3.1没有原像。

(4) 作为实数集上的函数f_4不是单函数，显然$f(-3)=f(3)=3$，也不是满函数，因为它的值域只是非负实数集，负数，例如-3没有原像。

练习* 7.17 判断下面从正整数对集$\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$到正整数集$\mathbb{Z}^+$的函数是否是单函数、满函数或双函数，如果是单函数，给出它的一个左逆，如果是满函数给出它的一个右逆，如果是双函数给出它的逆函数。

$$(1)\quad f_1(m,n)=m^2+n^2 \qquad\qquad (2)\quad f_2(m,n)=|m-n|+1$$
$$(3)\quad f_3(m,n)=\lfloor (m+n)/2\rfloor \qquad\qquad (4)\quad f_4(m,n)=m$$

解答: 注意，这些函数正整数对到正整数的函数，而不是整数对到整数的函数。

(1) 函数$f_1(m,n)=m^2+n^2$不是单函数，因为$f(1,2)=f(2,1)$，也不是满函数，因为正整数1没有原像，不存在任何正整数对$\langle m,n\rangle$使得$m^2+n^2=1$。因此函数f_1不是双函数。

(2) 函数$f_2(m,n)=|m-n|+1$不是单函数，因为$f_2(2,1)=f_2(3,2)$。它是满函数，因为对任意正整数k，都存在正整数对$\langle k,1\rangle$，使得$f_2(k,1)=k$。因此这意味着它的一个右逆是$g:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$为，对任意正整数$k$，$g(k)=\langle k,1\rangle$。因此函数$f_2$不是双函数。

(3) 函数$f_3(m,n)=\lfloor (m+n)/2\rfloor$不是单函数，因为$f_2(1,2)=f(2,1)$。它是满函数，对任意整数$k$，都存在整数对$\langle k,k\rangle$使得$f_3(k,k)=k$。因此这意味着它的一个右逆$g:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$为，对任意正整数$k$，$g(k)=\langle k,k\rangle$。因此函数$f_3$不是双函数。

(4) 函数$f_4(m,n)=m$不是单函数，因为$f_4(1,2)=f_4(1,3)$，但f_4是满函数，因为对任意整数k，都存在整数对$\langle k,1\rangle$使得$f_4(k,1)=k$。因此这意味着它的一个右逆$g:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$为，对任意正整数$k$，$g(k)=\langle k,1\rangle$。因此函数$f_4$不是双函数。

练习 7.18 设A,B,C是集合，$f:A\to B$，$g:B\to C, h:B\to C$是函数。证明：如果f是满函数且$g\circ f=h\circ f$，则$g=h$。

证明 由f是满函数，它存在右逆$k:B\to A$，使得$f\circ k=\mathbf{id}_B$，从而由$g\circ f=h\circ f$有$g\circ f\circ k=h\circ f\circ k$，即$g\circ\mathbf{id}_B=h\circ\mathbf{id}_B$，即$g=h$。 □

练习 7.19 设A,B,C是集合，$f:B\to C$，$g:A\to B, h:A\to B$是函数。证明：如果f是单函数且$f\circ g=f\circ h$，则$g=h$。

证明 若B是空集，则作为从A到$B=\varnothing$的函数只能是空函数（即这时A也必须是空集），从而命题平凡成立。设B不是空集，则由f是单函数，它存在左逆$k:C\to B$，使得$k\circ f=\mathbf{id}_B$，从而由$f\circ g=f\circ h$有$k\circ f\circ g=k\circ f\circ h$，即$\mathbf{id}_B\circ g=\mathbf{id}_B\circ h$，即$g=h$。 □

练习* 7.20 设A,B,C,D都是集合，证明：若A与C等势，B与D等势，且$A\cap B=C\cap D=\varnothing$，则$A\cup B$与$C\cup D$等势。

证明 因为A与C等式，所以存在双函数$f:A\to C$，B与D等式，所以也存在双函数$g:B\to D$，当$A\cap B=C\cap D=\varnothing$时，我们可定义函数$h:A\cup B\to C\cup D$，对任意$x\in A\cup B$，

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{若 } x\in A \\ g(x) & \text{若 } x\in B \end{cases}$$

由于$A\cap B=\varnothing$，即对任意的$x\in A\cup B$，要么$x\in A$，要么$x\in B$，二者必居其一，因此函数h的定义是合适的。而且基于这一点，以及f和g都是双函数，容易证明h也是双函数，因此$A\cup B$与$C\cup D$等势。 □

练习 7.21 设A,B,C,D都是集合，证明：如果A与C等势，B与D等势，则$A\times B$与$C\times D$等势。

证明 由A于C等势，因此存在双函数$f:A\to C$，由B与D等势，因此存在双函数$g:B\to D$，从而我们可定义函数$h:A\times B\to C\times D$，对任意$\langle a,b\rangle\in A\times B$，

$$h(\langle a,b\rangle)=h(a,b)=\langle f(a),g(b)\rangle$$

我们证明h是双函数。

首先对任意$\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\in A\times B$，若$h(a,b)=h(c,d)$，则$\langle f(a),g(b)\rangle=\langle f(c),g(d)\rangle$，从而$f(a)=f(c)$且$g(b)=g(d)$，从而由$f$和$g$都是单函数有$a=c$且$b=d$，也即$\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$，这表明$h$是单函数。

对任意$\langle x,y\rangle\in C\times D$，由于$f$是满函数，因此存在$a\in A$使得$f(a)=x$，同样由于$g$是满函数，因此存在$b\in B$使得$g(b)=y$，从而$h(a,b)=\langle f(a),g(b)\rangle=\langle x,y\rangle$，这表明$h$也是满函数。 □

练习 7.22 证明：(1) 对任意自然数m,n，$m\in n$当且仅当$m^+\in n^+$；(2) 对任意自然数n有$n\notin n$。

证明 我们首先使用数学归纳法证明命题“对任意自然数m，如果$m\in n$，则$m\subseteq n$”对任意自然数n成立，也即令：$P(n)$是$\forall m\in\mathbb{N}(m\in n\to m\subseteq n)$，我们根据自然数集的定义，使用数学归纳法证明$\forall n\in\mathbb{N}P(n)$。

(i) 归纳基：显然$P(0)$成立，因为0就是空集，没有任何自然数属于0，因此$P(0)$平凡成立。

(ii) 归纳步：假定$P(k)$成立，考虑$P(k+1)$，注意根据自然数的（集合论）定义$k+1=k^+=k\cup\{k\}$。对任意自然数m，若$m\in k^+$，则$m\in k$或$m=k$：(a) 若$m\in k$，则由归纳假设$P(k)$有$m\in k$，而$k\subseteq k^+$，所以$m\in k^+$；(b) 若$m=k$，则显然有$m\in k^+$。

因此根据对任意自然数n和m，若$m\in n$，则$m\subseteq n$。下面我们证明(1)和(2)。

(1) 对于充分性，即$m\in n$蕴含$m^+\in n^+$，我们通常使用归纳法，令$Q(n)$是$\forall m\in\mathbb{N}(m\in n\to m^+\in n^+$，我们使用数学归纳法证明$\forall nQ(n)$：

(i) 归纳基：类似地由$Q(0)$成立，因为没有自然数属于0（即空集）。

(ii) 归纳步：假设$Q(k)$成立，考虑$Q(k^+)$，对任意自然数m，若$m\in k^+=k\cup\{k\}$，则$m\in k$或$m=k$，如果$m\in k$则由$Q(k)$成立得$m\in k$，而$k\subseteq k^+$，因此$m\in k^+$；如果$m=k$，则由$k\in k^+$也得到$m\in k^+$，这表明$Q(k^+)$成立。

对于必要性，即$m^+\in n^+$蕴含$m\in n$，注意到若$m^+\in n^+$，则$m^+\in n\cup\{n\}$，从而$m^+\in n$或$m^+=n$，显然若$m^+=n$，则由$m\in m^+$得$m\in n$，而若$m^+\in n$，则由上面证明的命题有$m^+\subseteq n$，从而由$m\in m^+$得$m\in n$。总之，当$m^+\in n^+$时总有$m\in n$。

综上就证明了对任意自然数m,n，$m\in n$当且仅当$m^+\in n^+$。

(2) 我们令$H(n)$表示$n\notin n$，我们针对自然数n使用数学归纳法证明$\forall n\in\mathbb{N}H(n)$。

(i) 归纳基：显然$H(0)$成立，因为$0\notin 0$（即$\varnothing\notin\varnothing$）。

(ii) 归纳步：假定$H(k)$成立，即$k\notin k$，考虑$H(k^+)$，对于k^+，若$k^+\in k^+$，则根据(1)有$k\in k$，与归纳假设矛盾！因此只有$k^+\notin k^+$。

根据数学归纳法，这就证明了对任意自然数n有$n\notin n$。 □

练习* 7.23 证明：若A和B都是可数集，则$A\cap B, A\cup B$和$A\times B$都是可数集（提示，对于$A\times B$，先证明$A\times B$到$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$有单函数）。

证明　设A和B都是可数集，也存在单函数$f:A\to\mathbb{N}$和$g:B\to\mathbb{N}$。要证明$A\cap B, A\cup B$和$A\times B$是可数集，只要证明也存在它们到$\mathbb{N}$的单函数即可。

对集合$A\cap B$，我们可定义函数$h_1:A\cap B\to\mathbb{N}$，对任意$x\in A\cap B$，$h_1(x)=f(x)$，显然因为f是单函数，因此h_1也是单函数。

对集合$A\cup B$，我们可定义函数$h_2:A\cup B\to\mathbb{N}$，对任意$x\in A\cup B$，

$$h_2(x)=\begin{cases} f(x) & 若\ x\in A \\ g(x) & 若\ x\not\in A, 即\ x\in B-A \end{cases}$$

由f和g是单函数，不难证明h_2是单函数。

对集合$A\times B$，我们可定义函数$h_3:A\times B\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$，对任意$\langle x,y\rangle\in A\times B$，$h_3(x,y)=\langle f(x),g(y)\rangle$，显然由$f$和$g$是单函数可容易证明$h_3$也是单函数，而存在双函数$J:\mathbb{N}\times\mathbb{N}$，这样$J\circ h_3$就是$A\times B$到$\mathbb{N}$的单函数。 □

练习 7.24 使用数学归纳法证明例子7.22定义的函数J_n对任意的自然数$n\geq 2$都是双函数。

证明　显然当$n=2$时，$J_2=J$是双函数，假定当$n=k$时，J_k是双函数。注意到J_{k+1}的定义是，对任意$a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1}\in\mathbb{N}$，

$$J_{k+1}(a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1}) \;=\; J(a_1,J_k(a_2,\cdots,a_{k+1}))$$

从而对任意自然数$a_1,\cdots,a_{k+1}$和$b_1,\cdots,b_{k+1}$，若

$$J_{k+1}(a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1})=J_{k+1}(b_1,b_2,\cdots,b_k,b_{k+1})$$

则$J(a_1,J_k(a_2,\cdots,a_{k+1}))=J(b_1,J_k(b_2,\cdots,b_{k+1}))$，由于$J$是双函数，因此$a_1=b_1$且$J_k(a_2,\cdots,a_{k+1})=J_k(b_2,\cdots,b_{k+1})$，又$J_k$也是双函数，因此就有$a_2=b_2,\cdots,a_{k+1}=b_{k+1}$，这就表明$J_{k+1}$也是单函数。

对任意自然数a，由于J是双函数，因此存在a_1,b使得$J(a_1,b)=a$，而由于J_k是双函数，因此又存在$a_2,\cdots,a_{k+1}$使得$J_k(a_2,\cdots,a_{k+1})=b$，从而$J_{k+1}(a_1,a_2,\cdots,a_{k+1})=a$，这表明$J_{k+1}$也是双函数。

综上，根据数学归纳法有对任意$n\geq 2$，J_n都是双函数。 □

练习 7.25 利用算术基本定理(The Fundamental Theorem of Arithmetic)，即每个大于1的正整数都可唯一分解为质因数的积，定义函数$P:\mathbb{Z}^*\to\mathbb{Z}$，这里$\mathbb{Z}^*=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbb{Z}^n$，

$$\forall\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle\in\mathbb{Z}^n,\quad P(a_1,a_2,\cdots,a_n)=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_n^{a_n}$$

这里p_i是第i个质数，第1个质数是2，第2个质数是3，等等。证明P是单函数，从而得到$\mathbb{Z}^*$是可数集。

证明　对任意正整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_1,b_2,\cdots,b_m$，若$P(a_1,a_2,\cdots,a_n)=P(b_1,b_2,\cdots,b_m)=z$，则

$$z=p_1^{a_1}\cdots p_n^{a_n}=p_1^{b_1}\cdots p_m^{b_m}$$

但根据算术基本定理，正整数z唯一地分解为质因数的积，因此必有$n = m$，且$a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_m$（即$b_n$），这就表明$P$是单函数。 □

【讨论】实际上，由算术基本定理，对任意正整数z都有唯一的分解$p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$，从而正整数$z$在$P$下有原像$\langle a_1, \cdots, a_n \rangle$，也即$P$是$\mathbb{Z}^*$到$\mathbb{Z}^+$的双函数。

练习* 7.26 证明有理数集$\mathbb{Q}$是可数集（提示：根据定义，有理数是能表示成分数p/q的实数，这里p和q都是整数，且$q \neq 0$，这表明有$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$的满函数）。

证明　根据定义，有理数是能表示成分数p/q（这里$q \neq 0$）的实数，这表明我们可定义从整数对(p, q)到有理数集的满函数$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$，例如，对任意整数$p, q$，

$$f(p, q) = \begin{cases} p/q & \text{若 } q \neq 0 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

f不是单函数，但由于每个有理数都能表示成分数p/q，因此每个有理数在f下都存在原像，因此f是满函数。而$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$是可数集，即存在$\mathbb{N}$到$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$的满函数$g$，从而$f \circ g$就是从$\mathbb{N}$到$\mathbb{Q}$的满函数，从而$\mathbb{Q}$也是可数集。 □

练习 7.27 设集合A是可数集，证明$\mathcal{P}_f(A) = \{S \mid S \subseteq A \text{ 且 } S \text{ 是有穷集}\}$也是可数集。

证明　首先我们证明，若A是可枚举集，则$A^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} A^i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{(a_1, \cdots, a_i) \mid a_1, \cdots, a_i \in A\}$，即由$A$的元素构成的所有有限序列的集合也是可枚举集。

因为A是可枚举集，所以存在单函数$f : A \to \mathbb{Z}^+$，从而可定义函数$g : A^* \to \mathcal{Z}$为，

$$\forall (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A^*, \quad g(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n))$$

显然g也是单函数，而$\mathcal{Z}$到$\mathbb{Z}^+$有双函数h，从而$h \circ g$是从A^*到$\mathbb{Z}^+$的单函数，即A^*是可枚举集。

这样，进一步我们很容易定义函数$f : \mathcal{P}_{fin}(A) \to A^*$为：

$$\forall S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \in \mathcal{P}_{fin}(A), \ f(S) = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A^*$$

显然f是单射，而A^*是可枚举集，因此$\mathcal{P}_{fin}(A)$也是可枚举集。 □

练习 7.28 证明实数的开区间$(0, 1)$与$\wp(\mathbb{N})$等势，从而得到实数集与自然数集的幂集等势（提示：$\wp(\mathbb{N})$与$\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$等势，因此可类似考虑0和1之间实数的二进制表示法进行证明，但要注意二进制表示的小数$0.1000\cdots$（后面无穷多个0）和$0.0111\cdots$（后面无穷多个1）是同一个实数）。

证明　我们构造两个单函数即可：一个是从$(0, 1)$到$\wp(\mathbb{N})$的单函数；一个是从$\wp(\mathbb{N})$到$(0, 1)$的单函数。

对任意小数$0 < x < 1$，我们考虑其二进制表示：

$$0.x_0 x_1 \cdots x_n \cdots$$

这里$0 \le x_i \le 1$，如果x的二进制表示是有穷的，则在后面添加无穷多个0。从而可定义函数f，

$$f(x) \ = \ \{i \in \mathbb{N} \mid x_i = 1\}$$

显然函数f是单函数，因为每个小数都有唯一的二进制表示。

反之，类似地，对于自然数子集$S \subseteq \mathbb{N}$，设它的特征函数是φ_S，定义函数$g : \wp(\mathbb{Z}^+) \to (0,1)$：

$$g(S) = 0.\varphi_S(1)\varphi_S(2)\cdots\varphi_S(n)\cdots$$

我们将$0.\varphi_S(1)\varphi_S(2)\cdots\varphi_S(n)\cdots$看作一个十进制表示的小数，显然$g$也是单函数。注意，如果将它看作二进制表示的话，可能导致g不是单函数，因为$0.1 = 0.01111\cdots = \frac{1}{2}$（但在十进制里，只有$0.099999\cdots$才等于$0.1$。这也使得这里的$g$和$f$不互为逆函数，不能一次性得到双射。 □

【讨论】注意，这里我们是说，对于任意一个小数（或者实数）在某个进制下有唯一的表示，但是某个进制下的写出数字序列却可能表示相同的实数（由于序列可能是无穷的），例如十进制的$0.0999999\cdots$实际上也是实数0.1，但0.1这个实数的十进制展开按照我们的规定它只是$0.1000\cdots$，而非$0.9999\cdots$。

练习* 7.29 证明函数$f(x) = (x^3+2x+1)/(x+1)$是$O(x^2)$，但不是$O(x)$。

证明　容易看到，当$x \ge 3$时有$(x-1)^2 \ge 2$，即$x^2 \ge 2x+1$，从而$x^3+x^2 \ge x^3+2x+1$，从而$(x^3+2x+1)/(x+1) \le x^2$，因此取$C=1, k=3$，则当$x \ge k$时总有$(x^3+2x+1)/(x+1) \le Cx^2$，因此根据大$O$记号的定义有$f$是$O(x^2)$的。

对于任意的常数C和$k > 0$，取$x > \max\{2C, k\}$时有$x > 2C$且$x > 0$，从而$x^3 > 2Cx^2$，从而：$x^3+2x+1 > CX^2 + Cx$，从而$(x^3+2x+1)/(x+1) > Cx$。因此对任意常数C和$k > 0$，当$x > \max\{2C,k\}$时，总有$(x^3+2x+1)/(x+1) > Cx$，从而根据大O记号的含义有f不是$O(x)$。□

练习 7.30 证明函数$f(n) = 3^n + 2^n + 1$是$O(3^n)$，但f不是$O(2^n)$。

证明　显然当$n \ge 1$时有$2^n+1 \le 3^n$，从而当$n > 1$时有$f(n) \le 2\cdot 3^n$，即存在$k=1$和$C=2$，使得当$n > k$时$f(n) \le C\cdot 3^n$，因此f是$O(3^n)$。

我们知道，$(3/2)^n$随着n的增大而不断增大，因此对任意正整数C和k，总存在n_0，使得$n \ge n_0$时有$(3/2)^n \ge C$，例如令$n = \max\{1, \log C/(\log 2/3)\}$时有$n \ge n_0$蕴含$(3/2)^n \ge C$，即$3^n \ge C\cdot 2^n$，从而当$n \ge \max\{n_0, k\}$时有$f(n) \ge 3^n \ge C\dot{2}^n$，这表明$f$不是$O(2^n)$。 □

练习 7.31 给出下面表达式定义的正整数集到实数集的函数尽可能好的大O估计。

(1)　$(n^3+n^2\log n)(\log n+1)+(12\log n)(n^3+1)$　　(2)　$(n^4+n^2\log n)/(n^2+(\log n)^2)$

(3)　$(2^n+n^2)(n^3+3^n)$　　(4)　$(n2^n+5^n)(n!+3^n)$

解答：(1) 注意到$\log n$是$O(n)$，因此$n\log n$是$O(n^3)$，从而$(n^3+n^2\log n)$是$O(n^3)$，因此$(n^3+n^2\log n)(\log n+1)$是$O(n^3\log n)$，而$(12\log n)(n^3+1)$也是$O(n^3\log n)$，因此$((n^3+n^2\log n)(\log n+1)+(12\log n)(n^3+1))$是$O(n^3\log n)$。

(2) 容易证明当$n \geq 1$时$\log n \leq n$，因此$n^2\log n$是$O(n^4)$，从而$(n^4+n^2\log n)$是$O(n^4)$，因此当$n \geq 1$时$(\log n)^2 \leq n^2$，因此$(n^2+(\log n)^2)$是$\Theta(n^2)$，因此$(n^4+n^2\log n)/(n^2+(\log n)^2)$是$O(n^4/n^2)$，即$O(n^2)$。

(3) 容易使用数学归纳法证明当$n \geq 4$时$n^2 \leq 2^n$，且当$n \geq 3$时$n^3 \leq 3^n$，因此(2^n+n^2)是$O(2^n)$，而(n^3+3^n)是$O(3^n)$，因此$(2^n+n^2)(n^3+3^n)$是$O(2^n \cdot 3^n)$，即$O(6^n)$。

(4) 容易使用数学归纳法证明当$n \geq 0$时$n2^n \leq 5^n$，且当$n \geq 6$时$3^n \leq n!$（实际上第四章习题已经证明这一点），所以$(n2^n+5^n)$是5^n，而$(n!+3^n)$是$O(n!)$，因此$(n2^n+5^n)(n!+3^n)$是$O(5^n \cdot n!)$。

练习 7.32 给出下面表达式定义的实数集上函数尽可能好的大O估计。

(1) $(x\log x)(x^3+1)$	(2) $(x^2+8)(x+1)$
(3) $(x\log x+x^2)(x^3+2)$	(4) $(x^3+5\log x)/(x^4+1)$

解答: (1) 由于x^3是$O(x^3)$，因此$(x\log x)(x^3+1)$是$O(x^4\log x)$；
(2) 由于(x^2+8)是$O(x^2)$，而$(x+1)$是$O(x)$，因此$(x^2+8)(x+1)$是$O(x^3)$；
(3) 由于$(x\log x+x^2)$是$O(x^2)$，而(x^3+2)是$O(x^3)$，因此$(x\log x+x^2)(x^3+2)$是$O(x^5)$；
(4) 由于$(x^3+5\log x)$是$O(x^3)$，而x^4+1是$\Theta(x^4)$，因此$(x^3+5\log x)/(x^4+1)$是$O(x^{-1})$。

练习* 7.33 使用最小的n给出下面实数集上函数的$O(x^n)$的估计。

(1) $f(x)=2x^3+x^2\log x$	(2) $3x^3+(\log x)^4$
(3) $(x^4+x^2+1)/(x^3+1)$	(4) $(x^5+5(\log x)^2)/(x^3+x\log x)$

解答: 这一题我们可基于基本的结果，以及组合函数的增长情况来求解。

1) 我们有$2x^3$是$O(x^3)$，而$\log x$是$O(x)$的，但x不是$O(\log x)$，因此$x^2\log x$是$O(x^2\cdot x)$，即$O(x^3)$的，但x^3不是$O(x^2)$的，因此整个$f(x)$就是$O(x^3)$，而且不是$O(x^2)$的，因此最小的n是3。

2) 我们有$3x^3$是$O(x^3)$，且$(\log x)^4$是$O(x)$（注意：对于实数c,d，只要实数$c>0, d>0$，则无论c和d的值怎样都有$(\log x)^d$是$O(x^c)$且$O(x^c)$不是$(\log x)^d$），因此整个函数是$O(x^3)$，而且不是$O(x^2)$的，因为$3x^3$不是$O(x^2)$的，因此最小的n是3。

3) 我们有x^4+x^2+x是$O(x^4)$，且x^3+1是$\Omega(x^3)$，因此整个函数是$O(x^4/x^3)$，即是$O(x)$的。实际上，显然当$x>1$时总有$x^2 \leq x^4$，因此：

$$(x^4+x^2+x)/(x^3+1) \leq 2x$$

即$f(x)$确实是$O(x)$的。进一步我们可证明$f(x)$不是$O(1)$，因为对任意的k和C，要使得

$$(x^4+x^2+x)/(x^3+1) \geq C \qquad \text{即} \qquad x^4+x^2+x \geq Cx^3+C$$

只要$x \geq \max(k,C)$即可。因此最小的n是1.

4) 我们有x^5是$O(x^5)$，而$5(\log x)^2$是$O(x)$的，因此$x^4+5(\log x)^2$是$O(x^4)$，而不难证明$x^3+x\log x$是$\Omega(x^3)$，因此整个函数是$O(x^5/x^3)$的$O(x^2)$的，显然整个函数不是$O(x)$的，因此最小的n是2。

练习 7.34 设f,g都是数集上的函数，证明：函数f是$\Theta(g)$当且仅当存在常数$C_1>0,C_2>0$和k，使得当$x>k$时总有$C_1|g(x)|\le|f(x)|\le C_2|g(x)|$。

证明 根据定义f是$\Theta(g)$当且仅当f是$\Omega(g)$且f是$O(g)$，而f是$\Omega(g)$意味着存在$C_1>0$以及$k_1>0$使得当$x>k_1$时$C_1|g(x)|\le|f(x)|$，而f是$O(g)$意味着存在$C_2>0$及$k_2>0$使得当$x>k_2$时有$|f(x)|\le C_2|g(x)|$，从而取$k=\max\{k_1,k_2\}$，则有当$x>k$时有$C_1|g(x)|\le|f(x)|\le C_2|g(x)|$。

反之，如果存在$C_1>0,C_2>0$和k使得当$x>k$时总有$C_1|g(x)|\le|f(x)|\le C_2|g(x)|$，则显然有$f$是$\Omega(g)$且$f$是$O(g)$，即$f$是$\Theta(g)$。 □

练习 7.35 设f,g都是数集上的函数，证明：(1) 函数f是$O(g)$当且仅当g是$\Omega(f)$；(2) 函数f是$\Theta(g)$当且仅当f是$O(g)$且g是$O(f)$。

证明 (1) 若函数f是$O(g)$，则存在$C>0$和$k>0$，使得当$x>k$时$|f(x)|\le C|g(x)|$，由于$C>0$，因此有$|g(x)|\ge 1/C|f(x)|$，也即存在$C'=1/C>0$及$k>0$使得当$x>k$时$|g(x)|\ge C'|f(x)|$，也即g是$\Omega(f)$。

反之若函数g是$\Omega(f)$，则存在$C>0$和$k>0$，使得当$x>k$时$|g(x)|\ge C|f(x)|$，由于$C>0$，因此有$|f(x)|\le 1/C|g(x)|$，也即存在$C'=1/C>0$及$k>0$使得当$x>k$时$|f(x)|\le C'|f(x)|$，也即f是$O(f)$。

(2) 根据定义，f是$\Theta(g)$当且仅当f是$O(g)$且f是$\Omega(g)$，而由(1)有f是$\Omega(g)$当且仅当g是$O(f)$，因此f是$\Theta(g)$当且仅当f是$O(g)$且g是$O(f)$。 □

练习* 7.36 对于前面给出的计算两个非负整数的最大公因子$\gcd(-,-)$的朴素算法，即算法1.5，确定算法的输入规模、基本操作，执行次数最多的基本操作，分析该基本操作与输入规模的函数关系，最后给出最坏情况下的算法复杂度的大O估计。

解答：计算两个非负整数的最大公因子$\gcd(-,-)$的朴素算法如下：

```
   输入：两个非负整数a和b
   输出：返回gcd(a, b)
1  令d是a和b的小者;
2  if (d 等于 0) then 返回 a和b的大者;
3  while (d ≥ 1) do
4      if (a 是 d 的倍数且 b 是 d 的倍数) then 返回 d;
5      d := d − 1;
6  end
```

这个算法的输入规模可使用整数a或b度量，或更准确地说使用a和b的小者度量，基本操作包括计算两个整数的小者，计算两个整数的大者，判断整数的大小、判断一个整数是否是另一个整数的倍数，整数减法和整数赋值等。执行次数最多的基本操作是算法第5行的将d减一赋给d，计算的次数与a和b的小者相等，因此算法的复杂度是$O(\min\{a,b\})$。

练习 7.37 对于前面给出的打印一个集合幂集的算法，即算法5.1，确定算法的输入规模、基本操作，执行次数最多的基本操作，分析该基本操作与输入规模的函数关系，最后给出最坏情况下的算法复杂度的大O估计。

解答：打印一个集合幂集的算法如下：

输入：集合$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$
输出：输出A的幂集，即A的所有子集

1 令长度为n的二进制串$b_1b_2\cdots b_n$为全0串，即为$00\cdots0$
2 **while** ($b_1b_2\cdots b_n$不是全1串$11\cdots1$) **do**
3 　　输出二进制串$b_1b_2\cdots b_n$对应的A的子集，即若b_i为1输出a_i，否则不输出a_i;
4 　　$i := n$;
5 　　**while** (b_i等于1) **do** 将b_i改为0，然后令i等于$i-1$;
6 　　将b_i改为1;
7 **end**
8 输出全1串，即$11\cdots1$对应的A的子集，即A自己，也即输出A的所有元素;

根据上面算法的描述，算法输入的规模应该以集合A的个数n进行度量，n也是算法中用到的二进制串的长度。该算法的基本操作包括将一个二进制串设置为全0串，判断一个二进制串是否是全1串，根据一个二进制串输出相应集合的子集，判断二进制位是否是1，对一个二进制位进行赋值，整数减法与赋值。算法第5行循环中将二进制位b_i改为0，并将整数i变为$i-1$的操作执行次数最多，对于第5行的循环本身而言，这个操作的可能执行n次，而第2行到第7行的循环总共执行的次数是2^n，因此整个算法的复杂度是$O(n2^n)$。

【**讨论**】对于上面算法的描述，可以认为将一个二进制串设置为全0串，判断一个二进制串是否是全1串，根据一个二进制串输出相应集合的子集这些操作都是基本操作，因为上面算法的描述中没有对这些操作做进一步的分解。但实际上，直观地看，这些操作的执行时间与二进制长度n是相关的，并不是常数时间。稍加思考不难看到，这些操作实际上也可基于对二进制位进行复制，以及判断二进制是否是1，打印集合A的元素等基本操作完成。因此这一题也可将判断二进制位是否是1，对一个二进制位进行赋值，整数减法与赋值，打印集合A的元素作为基本操作，并注意到算法第3行本身也需要循环，其中打印集合A的元素的操作也要执行n次，因此在整个算法中执行的次数也是$O(n2^n)$，整个算法的复杂度仍是$O(n2^n)$。

练习 7.38 对前面给出的计算两个非负整数最大公因子的欧几里得算法，即算法1.6，确定算法的输入规模、基本操作，执行次数最多的基本操作，分析该基本操作与输入规模的函数关系，最后给出最坏情况下的算法复杂度的大O估计。

解答：计算两个非负整数的最大公因子$\gcd(-,-)$的欧几里得算法如下：

输入：两个非负整数a和b
输出：返回$\gcd(a,b)$
1 令x是a和b的小者，y是a和b的大者;
2 **while** (x大于0) **do**
3 　　令r等于y整除x的余数;
4 　　令y等于x，而x等于r
5 **end**
6 **return** y 　// 当循环终止时y是最后一次的除数，因此是a和b的最大公因数

这个算法的输入规模可使用整数a或b度量，或更准确地说使用a和b的小者度量。根据上面的算法描述，这个算法中的基本操作是计算两个正整数的小者、计算两个正整数的大者，计算一个整数整除另一个整数的余数，整数赋值等。执行次数最多的基本操作是第2行循环中的第3行和第4行的整除求余数操作和整数赋值操作。对于它们的具体执行次数，简单地看由于y整除x的余数总是小

于x，因此在第4行将x赋值为r后，第2行循环判断中的x总是在减少的，因此第3行和第4行执行的次数不会超过x，也即简单地看算法的时间复杂度是$O(\min\{a,b\})$。

Rosen的教材中给出了一个更为精细的分析：假定$a \geq b$，$r_0 = a, r_1 = b$，对于上述算法有：

$$
\begin{aligned}
r_0 &= r_1 q_1 + r_2 && 0 \leq r_2 < r_1, \\
r_1 &= r_2 q_2 + r_3 && 0 \leq r_3 < r_2, \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n && 0 \leq r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= r_n q_n
\end{aligned}
$$

这里n就是循环的执行次数，最后的商r_n就是a, b的最大公因数。注意到$q_1, q_2, \cdots, q_n$都大于等于1，且$q_n \geq 2$（因为$r_n < r_{n-1}$），所以有：

$$
\begin{aligned}
r_n \geq 1 &= F_2 \\
r_{n-1} \geq 2r_n \geq 2F_2 &= F_3 \\
r_{n-2} \geq r_{n-1} + r_n \geq F_3 + F_2 &= F_4 \\
&\vdots \\
r_2 \geq r_3 + r_4 \geq F_{n-1} + F_{n-2} &= F_n \\
b = r_1 \geq r_2 + r_3 \geq F_n + F_{n-1} &= F_{n+1}
\end{aligned}
$$

也就是说用上述算法求a和b（$a \geq b$）的最大公因数，如果第2行的循环执行了n次，则$b \geq F_{n+1}$，这里F_i是斐波拉契数列的第i项。不难证明当$n > 2$时$F_{n+1} > \alpha^{n-1}$，这里$\alpha = (1+\sqrt{5})/2$，因此有$b > \alpha^{n-1}$，因此：$\log_{10} b > (n-1)\log_{10}\alpha > (n-1)\cdot 0.208 > (n-1)/5$，因此$n - 1 < 5 \cdot \log_{10} b$，也即上述算法的复杂度是$O(\log_{10} b)$。

练习* 7.39 设计一个算法以一组整数$a_1, a_2, \cdots, a_n$为输入，这里$n \geq 2$，从中找出第二大的整数数值，即在$a_1, a_2, \cdots, a_n$的不同整数值中只有一个整数值大于等于该整数值。确定算法的输入规模、基本操作，执行次数最多的基本操作，分析该基本操作与输入规模的函数关系，最后给出最坏情况下的算法复杂度的大O估计。

解答：参考算法如下。

```
输入：一组整数a_1, a_2, ···, a_n
输出：输出这一组整数中第二大的整数secondlargest
largest := a_1;   secondlargest := a_2;
if (a_2 > a_1) then secondlargest := a_1;   largest := a_2; end
if (n = 2) then return secondlargest;
for (i := 3 to n)
    if (a_i > largest) then secondlargest := largest;   largest := a_i; end
    if (a_i > secondlargest and a_i ≤ largest) then secondlargest := a_i;
end
return secondlargest;
```

显然这个算法的输入规模用这组整数的个数n来度量，基本操作主要是整数赋值、整数加法、比较两个数的大小。执行次数最多的基本操作是第5行和第6行的比较数的大小，总共执行$n-2$次，因此这个算法的时间复杂度为$O(n)$。

练习 7.40 设计一个算法判断一组整数$a_1, a_2, \cdots, a_n$是否有重复的整数，即是否存在两个整数$i, j, i \neq j$使得$a_i = a_j$，确定算法的输入规模、基本操作，执行次数最多的基本操作，分析该基本操作与输入规模的函数关系，最后给出最坏情况下的算法复杂度的大O估计。

解答：参考算法如下。

```
   输入：一组整数a_1, a_2, ···, a_n
   输出：存在重复的整数输出“Yes”，否则输出“No”
1  for (i = 1 to n) do
2      for (j = i + 1 to n) do
3          if (a_i = a_j) 输出“Yes”，并返回;
4      end
5  end
6  输出“No”
```

显然这个算法的输入规模用这组整数的个数n来度量，基本操作主要是整数赋值、整数加法、比较两个数的大小。执行次数最多的基本操作是第3行比较数的大小，在第2行的循环中本身执行$n-i-1$次，而第2行循环在第1行循环中，因此总共执行的次数是 $\sum_{i=1}^{n}(n-i-1)$，因此算法的复杂度是$O(n^2)$。