离散数学基础习题答案

Answers to Exercises in Elementary Discrete Mathematics

周晓聪　　乔海燕

中山大学数据科学与计算机学院, 广州 510275

2021 年 1 月 19 日

版权所有，翻印必究

目录

第二章　命题逻辑

练习* 2.1 判断下列句子哪些是命题，哪些不是命题？对于是命题的句子，说明是原子命题还是复合命题。

(1) 离散数学是计算机专业的必修课。

(2) $y > 10$

(3) 中山大学是地处粤港澳大湾区的一所大学。

(4) 计算机能思考吗？

(5) 课堂上请不要讲小话！

(6) 2是质数当且仅当三角形有三条边。

(7) 北京既举办过夏季奥运会，又举办过冬季奥运会。

(8) 班上同学或者熟悉C++语言，或者熟悉Java语言。

解答：

1. 是命题，而且是原子命题；
2. 不是命题，因为其中含有通常认为是变量的y；
3. 是命题，而且是原子命题；
4. 不是命题，因为它不是陈述句；
5. 不是命题，因为它不是陈述句；
6. 是复合命题，是一个逻辑双蕴涵命题（逻辑等价命题）；
7. 是复合命题，是一个逻辑与命题；
8. 是复合命题，是一个逻辑或命题。

练习 2.2 画出下面每个公式的抽象语法树。

(1) $((\neg(\neg r)) \to (\neg(q \vee p)))$

(2) $((r \to (q \leftrightarrow s)) \vee (q \leftrightarrow s))$

(3) $(((p \vee p) \leftrightarrow (p \wedge s)) \to (p \wedge s))$

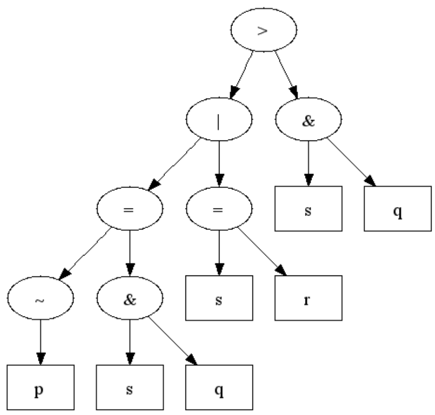
(4) $(\neg(((q \vee r) \leftrightarrow (t \wedge s)) \leftrightarrow (t \wedge s)))$

(5) $((((\neg t) \vee (r \wedge r)) \to (\neg s)) \leftrightarrow (\neg(r \wedge r)))$

(6) $((((\neg p) \leftrightarrow (s \wedge q)) \vee (s \leftrightarrow r)) \to (s \wedge q))$

(7) $((s \wedge r \leftrightarrow q \to t) \wedge (p \wedge p)) \wedge t$

解答：**略**。实际上，我们已经编写计算机程序自动生成一个公式的抽象语法树，但是目前只是利用GraphViz进行图形排版，我们尚未找到GraphViz如何与LaTeX结合以展示更漂亮的数学符号的方法，因此只给出公式(6) $(\neg p \leftrightarrow s \wedge q) \vee (s \leftrightarrow r) \to s \wedge q$的由程序自动生成的抽象语法树：



练习* 2.3 分别列出下面每个公式的所有子公式。

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \ ((((\neg t) \vee (r \wedge r)) \to (\neg s)) \leftrightarrow (\neg (r \wedge r)))\\
&(2)\ \ ((((\neg p) \leftrightarrow (s \wedge q)) \vee (s \leftrightarrow r)) \to (s \wedge q))\\
&(3)\ \ (p \to q \wedge r) \wedge (\neg p \to (\neg q \wedge \neg r))\\
&(4)\ \ (p \to (q \to r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \to r)
\end{aligned}
$$

解答：(1) 给出的公式的子公式包括：t, $(\neg t)$, r, $(r \wedge r)$, $((\neg t) \vee (r \wedge r))$, s, $(\neg s)$, $(((\neg t) \vee (r \wedge r)) \to (\neg s))$, $(\neg (r \wedge r))$, $((((\neg t) \vee (r \wedge r)) \to (\neg s)) \leftrightarrow (\neg (r \wedge r)))$。

(2) 给出的公式的子公式包括：p, $(\neg p)$, s, q, $(s \wedge q)$, $((\neg p) \leftrightarrow (s \wedge q))$, r, $(s \leftrightarrow r)$, $(((\neg p) \leftrightarrow (s \wedge q)) \vee (s \leftrightarrow r))$, $((((\neg p) \leftrightarrow (s \wedge q)) \vee (s \leftrightarrow r)) \to (s \wedge q))$。

(3) 给出的公式的子公式包括：p, q, r, $(q \wedge r)$, $(p \to (q \wedge r))$, $(\neg p)$, $(\neg q)$, $(\neg r)$, $((\neg q) \wedge (\neg r))$, $((\neg p) \to ((\neg q) \wedge (\neg r)))$, $((p \to (q \wedge r)) \wedge ((\neg p) \to ((\neg q) \wedge (\neg r))))$。

(4) 给出的公式的子公式包括：p, q, r, $(q \to r)$, $(p \to (q \to r))$, $(p \wedge q)$, $((p \wedge q) \to r)$, $((p \to (q \to r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \to r))$。

【**讨论**】这里(1),(2)给出的公式是含有足够多圆括号的严格形式公式，而(3)和(4)给出的公式已经省略了一些括号。但无论是那种形式的公式，都应该正确地给出它所包含的子公式。我们的程序通过算符优先分析法，可得到公式(3)的严格形式：$((p \to (q \wedge r)) \wedge ((\neg p) \to ((\neg q) \wedge (\neg r))))$，并给出了一种简写形式：$(p \to q \wedge r) \wedge (\neg p \to \neg q \wedge \neg r)$，而公式(4)简写为$p \to q \to r \leftrightarrow p \wedge q \to r$。

练习* 2.4 设命题变量集$\mathbf{Var} = \{p, q, r, s, t\}$，真值赋值函数$\sigma : \mathbf{Var} \to \mathbf{2}$定义如下：

$$\sigma(p) = \mathbf{0} \qquad \sigma(q) = \mathbf{1} \qquad \sigma(r) = \mathbf{0} \qquad \sigma(s) = \mathbf{1} \qquad \sigma(t) = \mathbf{1}$$

分别给出下面公式在真值赋值函数σ下的真值。

$$(1)\ \ ((((q\vee t)\wedge(\neg(p\vee s)))\vee(s\vee t))\wedge t)$$
$$(2)\ \ ((((t\wedge p)\leftrightarrow(q\wedge r))\wedge(s\vee t))\to(q\wedge r))$$

解答：我们使用表格的形式给出这两个公式在真值赋值函数σ下的真值。

(1) 公式$A=((((q\vee t)\wedge(\neg(p\vee s)))\vee(s\vee t))\wedge t)$的真值计算如下：

p	q	r	s	t	$q\vee t$	$p\vee s$	$\neg(p\vee s)$	C	$s\vee t$	B	A
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**

这里$B=(((q\vee t)\wedge(\neg(p\vee s)))\vee(s\vee t))$，$C=((q\vee t)\wedge(\neg(p\vee s)))$。

(2) 公式$A=((((t\wedge p)\leftrightarrow(q\wedge r))\wedge(s\vee t))\to(q\wedge r))$的真值计算如下：

p	q	r	s	t	$t\wedge p$	$q\wedge r$	C	$s\vee t$	B	$q\wedge r$	A
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**

这里$B=(((t\wedge p)\leftrightarrow(q\wedge r))\wedge(s\vee t))$，$C=((t\wedge p)\leftrightarrow(q\wedge r))$。

练习 2.5 将使用公式B替换A中的所有命题变量p得到的公式记为$A[B/p]$，这可根据公式A的结构进行归纳定义。请填写下面有关这个归纳定义的空。

(1) **归纳基**：如果公式A就是命题变量p，则$A[B/p]$的结果是B，也即$p[B/p]=B$；如果公式A是命题变量q，这里$q\neq p$，则$A[B/p]$的结果是____________，也即$q[B/p]=$ ____________；

(2) **归纳步**：如果公式A是公式$(\neg C)$，则$A[B/p]$的结果是$(\neg C[B/p])$，也即$(\neg C)[B/p]=(\neg C[B/p])$；如果公式$A$是公式$(C\oplus D)$，这里$\oplus$代表$\wedge,\vee,\to$或$\leftrightarrow$，则$A[B/p]$的结果是____________，也即$(C\oplus D)[B/p]=$ ____________。

解答：(1) 当$q\neq p$时，$q[B/p]$的结果还是q。

(2) $A[B/p]$的结果是分别将C和D中的p用B替换，然后将置换的结果再做运算$\oplus$，即$(C\oplus D)[B/p]=(C[B/p]\oplus D[B/p])$。

【**讨论**】例如，对公式$(p\to(q\to r))\to(p\to q)\vee(q\to r)$，用$p\wedge q$去替换$p$, 同时用$p\to q$替换$q$得到（此结果同样由计算机自动计算得到）：

$$(p\wedge q\to(p\to q)\to r)\to(p\wedge q\to p\to q)\vee((p\to q)\to r)$$

练习 2.6 给定命题变量集$\mathbf{Var}$和真值赋值函数$\sigma:\mathbf{Var}\to\mathbf{2}$。对于命题变量$p\in\mathbf{Var}$，以及$t\in\mathbf{2}$，定义真值赋值函数$\sigma[p\mapsto t]:\mathbf{Var}\to\mathbf{2}$为：对任意命题变量$q\in\mathbf{Var}$，

$$\sigma[p\mapsto t](q)\ =\ \begin{cases} t & \text{如果 } q=p \\ \sigma(q) & \text{如果 } q\neq p \end{cases}$$

直观地，$\sigma[p\mapsto t]$除了将命题变量p赋值为t之外，对其他命题变量的赋值与σ相同。

(1) 证明：对任意公式A和B，$\sigma(A[B/p])=\sigma[p\mapsto\sigma(B)](A)$。直观地，使用公式$B$替换公式$A$中$p$的所有出现得到的公式$A[B/p]$在真值赋值函数$\sigma$下的真值等于公式$A$在真值赋值函数$\sigma[p\mapsto\sigma(B)]$下的真值（提示：基于$A[B/p]$的归纳定义对$A$的结构进行归纳证明）。

(2) 根据(1)，使用反证法证明如果A是永真式，p是命题变量，则对于任意的公式B，$A[B/p]$也是永真式（这就严格地证明了教材定理2.4）。

解答：(1) 我们对公式A的结构做归纳，证明$\sigma(A[B/p]) = \sigma[p \mapsto \sigma(B)](A)$，也就是说我们要证明的性质是：对任意公式$B$，$\sigma(A[B/p]) = \sigma[p \mapsto \sigma(B)](A)$，然后证明此性质对任意公式$A$成立。

证明 对A的结构做归纳：

(1) 若A是命题变量，这时分两种情况：(i) 如果A就是命题变量p，则$p[B/p] = B$，从而：

$$\sigma(A[B/p]) = \sigma(p[B/p]) = \sigma(B) \qquad \sigma[p \mapsto \sigma(B)](A) = \sigma[p \mapsto \sigma(B)](p) = \sigma(B)$$

因此有$\sigma(A[B/p]) = \sigma[p \mapsto \sigma(B)](A)$。而若(ii) A是命题变量q，这里$q \neq p$，从而：

$$\sigma(A[B/p]) = \sigma(q[B/p]) = \sigma(q) \qquad \sigma[p \mapsto \sigma(B)](A) = \sigma[p \mapsto \sigma(B)](q) = \sigma(q)$$

因此也有$\sigma(A[B/p]) = \sigma[p \mapsto \sigma(B)](A)$。

(2) 若A是公式$(\neg C)$，则根据归纳假设，对任意公式B有$\sigma(C[B/p]) = \sigma[p \mapsto \sigma(B)](C)$，从而：

$$\begin{aligned} \sigma(A[B/p]) &= \sigma((\neg C)[B/p]) = \sigma(\neg(C[B/p])) \\ \sigma[p \mapsto \sigma(B)](A) &= \sigma[p \mapsto \sigma(B)](\neg C) \end{aligned}$$

注意到$\sigma(\neg(C[B/p])) = 1$当且仅当$\sigma(C[B/p]) = 0$，而$\sigma[p \mapsto \sigma(B)](\neg C) = 1$当且仅当$\sigma[p \mapsto \sigma(B)](C) = 0$，而根据归纳假设有$\sigma(C[B/p]) = \sigma[p \mapsto \sigma(B)](C)$，因此$\sigma(\neg(C[B/p])) = \sigma[p \mapsto \sigma(B)](\neg C)$，即$\sigma(A[B/p]) = \sigma[p \mapsto \sigma(B)](A)$。

(3) 若A是公式$C \oplus D$，则根据归纳假设有，对任意公式B有$\sigma(C[B/p]) = \sigma[p \mapsto \sigma(B)](C)$，以及$\sigma(D[B/p]) = \sigma[p \mapsto \sigma(B)](D)$，从而：

$$\begin{aligned} \sigma(A[B/p]) &= \sigma((C \oplus D)[B/p]) = \sigma((C[B/p]) \oplus (D[B/p])) = \sigma(C[B/p]) \oplus_2 \sigma(D[B/p]) \\ \sigma[p \mapsto \sigma(B)](A) &= \sigma[p \mapsto \sigma(B)](C \oplus D) = \sigma[p \mapsto \sigma(B)](C) \oplus_2 \sigma[p \mapsto \sigma(B)](D) \end{aligned}$$

这里对$\oplus$代表的每个逻辑运算符，我们可相应地在真值集$\mathbf{2} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$上定义运算$\oplus_2$。例如，对于逻辑蕴涵$\to$，我们可定义$\to_2$为：$(0 \to_2 0) = (0 \to_2 1) = (1 \to_2 1) = 1$，而$(1 \to_2 0) = 0$。从而根据命题逻辑公式真值的定义，对任意公式$G$和$H$，和任意真值赋值函数$\sigma$，都有$\sigma(G \oplus H) = \sigma(G) \oplus_2 \sigma(H)$。

从而对于A是公式$C \oplus D$的情况，根据归纳假设我们有：

$$\sigma(C[B/p]) \oplus_2 \sigma(D[B/p]) = \sigma[p \mapsto \sigma(B)](C) \oplus_2 \sigma[p \mapsto \sigma(B)](D)$$

即有$\sigma(A[B/p]) = \sigma[p \mapsto \sigma(B)](A)$。

这就完成了上述性质对任意公式A成立的结构归纳证明。 $\square$

(2) 设A是永真式，则对任意的真值赋值函数σ都有$\sigma(A) = 1$。从而对任意命题变量p和任意公式B，若$A[B/p]$不是永真式，即存在真值赋值函数σ_0使得$\sigma_0(A[B/p]) \neq 1$，而根据(1)的证明有：

$$\sigma_0(A[B/p]) = \sigma_0[p \mapsto \sigma_0(B)](A) \neq 1$$

这与A是永真式，即A在任意的真值赋值函数σ，当然也包括真值赋值函数$\sigma_0[p \mapsto \sigma_0(B)]$下的真值为1矛盾！因此必有$A[B/p]$也是永真式。

练习 2.7 证明下面的公式是永真式：

(1) $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$　　　　(2) $((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$

解答：(1) 构造公式$(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$的真值表，可看到它是永真式：

p	q	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \wedge (p \to q)$	$\neg p$	$\neg q \wedge (p \to q) \to \neg p$
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**

(2) 构造公式$((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$的真值表，可看到它是永真式：

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$(p \vee q) \wedge \neg p \to q$
0	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**

【**讨论**】注意，上面的真值表实际上是由计算机程序自动生成。

练习* 2.8 构造下面公式的真值表，并判断它的类型，即是永真式、矛盾式还是偶然式。

(1) $\neg(r \to \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$　　　　(2) $(\neg p \to q) \vee (q \wedge \neg r)$

(3) $(p \to q \wedge r) \wedge (\neg p \to (\neg q \wedge \neg r))$　　　　(4) $(p \to (q \to r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \to r)$

解答：(1) 构造公式$A = \neg(r \to \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$的真值表，可看到它是偶然式（非永真的可满足式）。

p	q	r	$\neg q$	$r \to \neg q$	$\neg(r \to \neg q)$	$\neg r$	$p \wedge \neg r$	A
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**

(2) 构造公式$A = (\neg p \to q) \vee (q \wedge \neg r)$的真值表，可看到它是偶然式（非永真的可满足式）。

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	A
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1

(3) 构造公式$A = (p \rightarrow q \wedge r) \wedge (\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r))$的真值表，可看到它是偶然式（非永真的可满足式）。

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow q \wedge r$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg q \wedge \neg r$	$\neg p$	$\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)$	A
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1

(4) 构造公式$A = (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$的真值表，可看到它是永真式。

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	A
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

练习 2.9 判断下面公式的类型，即是永真式、矛盾式还是偶然式。

(1) $\neg(r \rightarrow \neg q) \vee (p \rightarrow \neg r)$　　(2) $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$

(3) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$　　(4) $(p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$

解答：(1) 构造公式$\neg(r \rightarrow \neg q) \vee (p \rightarrow \neg r)$的真值表，可看到它是偶然式：

p	q	r	$\neg q$	$r \to \neg q$	$\neg(r \to \neg q)$	$\neg r$	$p \to \neg r$	$\neg(r \to \neg q) \vee (p \to \neg r)$
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1

(2) 构造公式$(\neg p \vee \neg q) \to (p \leftrightarrow \neg q)$的真值表，可看到它是偶然式：

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \leftrightarrow \neg q$	$\neg p \vee \neg q \to (p \leftrightarrow \neg q)$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1

(3) 构造公式$(p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)$的真值表，可看到它是偶然式：

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to \neg q$	$(p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1

(4) 构造公式$A = (p \to q \to r) \to (p \to q) \vee (q \to r)$的真值表，可看到它是永真式：

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \to q$	$(p \to q) \vee (q \to r)$	A
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

练习 2.10 定义联结词“异或($\overline{\vee}$)”为：$p\overline{\vee}q$为真当且仅当p和q的真值不同，请根据此定义，使用列真值表的方法证明下列等值式：

(1) $(p\overline{\vee}q)\overline{\vee}r \;\equiv\; p\overline{\vee}(q\overline{\vee}r)$

(2) $p \wedge (q\overline{\vee}r) \;\equiv\; (p \wedge q)\overline{\vee}(p \wedge r)$

解答：根据异或联结词的真值定义我们可构造真值表证明这两个等值式。

(1) 构造$A = (p\bar{\vee}q)\bar{\vee}r \leftrightarrow p\bar{\vee}(q\bar{\vee}r)$的真值表，可看到$A$是永真式，这就证明了等值式$(p\bar{\vee}q)\bar{\vee}r \equiv p\bar{\vee}(q\bar{\vee}r)$，即异或运算在等值的意义下满足结合律。

p	q	r	$(p\bar{\vee}q)$	$(p\bar{\vee}q)\bar{\vee}r$	$(q\bar{\vee}r)$	$p\bar{\vee}(q\bar{\vee}r)$	A
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**

(2) 构造$A = p \wedge (q\bar{\vee}r) \leftrightarrow (p \wedge q)\bar{\vee}(p \wedge r)$的真值表，可看到$A$是永真式，这就证明了等值式$p \wedge (q\bar{\vee}r) \equiv (p \wedge q)\bar{\vee}(p \wedge r)$，即在等值的意义下逻辑与对异或运算有分配律。

p	q	r	$(q\bar{\vee}r)$	$p \wedge (q\bar{\vee}r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q)\bar{\vee}(p \wedge r)$	A
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**

练习 2.11 设公式A与A'逻辑等值，B与B'逻辑等值。证明：(1) $(\neg A) \equiv (\neg A')$；(2) $A \wedge B \equiv A' \wedge B', A \vee B \equiv A' \vee B', A \to B \equiv A' \to B'$以及$A \leftrightarrow B \equiv A' \leftrightarrow B'$。

【**证明**】我们基于逻辑等值的定义证明。

(1) 对任意真值赋值函数σ，因为A与A'逻辑等值，所以$\sigma(A) = \sigma(A')$，而$\sigma(\neg A) = 1$当且仅当$\sigma(A) = 0$，$\sigma(\neg A') = 1$当且仅当$\sigma(A')$，因此这表明也有$\sigma(\neg A) = \sigma(\neg A')$，因此根据逻辑等值的定义，$\neg A$与$\neg A'$逻辑等值。

(2) 对任意真值赋值函数σ，因为A与A'逻辑等值，A与B'逻辑等值，所以$\sigma(A) = \sigma(A')$且$\sigma(B) = \sigma(B')$，从而对$A \oplus B$和$A' \oplus B'$，这里$\oplus$是$\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$，根据$\oplus$的真值计算方法，不难得到也有$\sigma(A \oplus B) = \sigma(A' \oplus B')$，这表明$A \oplus B$与$A' \oplus B'$逻辑等值。 □

【**讨论**】(1) 这一题要证明的结论实际上可由如下的事实立即可得：$\neg, \wedge$等等这些运算符是函数，即它们的运算结果由参与运算的公式的真值唯一确定。

(2) 这一题的结论以及逻辑等值关系是对称、传递的这些性质是我们使用等值演算证明两个逻辑公式等值的基础，或者说是证明如下定理的基础：对任意公式A，如果B是它的子公式，且B'与B等值，则使用B'置换B在A的一处或多处出现得到的公式A'与公式A逻辑等值。

我们使用结构归纳法证明这一点：对公式A做结构归纳，

(i) 若公式A是命题变量p，则它的子公式只有p，这时如果用与p等值的B'公式置换p，则得到的公式A'就是B'，因此命题成立，即A'与A逻辑等值（这时A'是B'，而A就是p）；

(ii) 若公式A是公式$(\neg C)$，这时它的子公式只有A自己和C的子公式，如果用与A等值的公式置换整个A，当然命题平凡成立，而按归纳假设，用与C的子公式B等值的B'置换得到的公式C'与C逻辑等值，从而这时也有$(\neg C)$与$(\neg C')$等值，从而这意味着用与C的子公式B等值的B'置换A中出现的B得到的公式$A' = (\neg C')$也与$A = (\neg C)$逻辑等值，因此命题也成立。

(iii) 若公式A是公式$(C \oplus D)$，利用A的子公式是A自己，或是C或D的子公式，而归纳假设是命题对于C和D成立，以及这一题证明的结论就可得到命题对于公式$(C \oplus D)$也成立。

练习 2.12 使用命题逻辑的等值演算证明下面的逻辑等值式。

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \ \neg(r \vee (q \wedge (\neg r \to \neg p))) \ \equiv\ \neg r \wedge (p \vee \neg q)\\
&(2)\ \ \neg(p \vee \neg q) \to (q \to r) \ \equiv\ q \to (p \vee r)\\
&(3)\ \ (\neg p \wedge (\neg q \wedge r)) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r) \ \equiv\ r\\
&(4)\ \ (p \to (q \to p)) \ \equiv\ (\neg p \to (p \to \neg q))
\end{aligned}
$$

【**证明**】按题目要求，需要使用等值演算证明这些逻辑等值式。

$$
\begin{aligned}
(1)\quad \neg(r \vee (q \wedge (\neg r \to \neg p))) &\equiv \neg(r \vee (q \wedge (r \vee \neg p))) && // \text{蕴涵等值式}\\
&\equiv \neg(r \vee ((q \wedge r) \vee (q \wedge \neg p))) && // \text{分配律}\\
&\equiv \neg(r \vee (q \wedge \neg p)) && // \text{吸收律}\\
&\equiv \neg r \wedge \neg(q \wedge \neg p) && // \text{德摩尔根律}\\
&\equiv \neg r \wedge (\neg q \vee \neg\neg p) && // \text{德摩尔根律}\\
&\equiv \neg r \wedge (p \vee \neg q) && // \text{双重否定律、交换律}\\
(2)\quad \neg(p \vee \neg q) \to (q \to r) &\equiv (\neg p \wedge q) \to (q \to r) && // \text{德摩尔根律、双重否定律}\\
&\equiv (\neg p \wedge q) \to (\neg q \vee r) && // \text{蕴涵等值式}\\
&\equiv \neg(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \vee r) && // \text{蕴涵等值式}\\
&\equiv (p \vee \neg q) \vee (\neg q \vee r) && // \text{德摩尔根律、双重否定律}\\
&\equiv \neg q \vee (p \vee r) && // \text{幂等律、交换律}\\
&\equiv q \to (p \vee r) && // \text{蕴涵等值式}\\
(3)\quad (\neg p \wedge (\neg q \wedge r)) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r) &\equiv (\neg p \wedge (\neg q \wedge r)) \vee ((q \vee p) \wedge r) && // \text{分配律}\\
&\equiv (\neg(p \vee q) \wedge r) \vee ((p \vee q) \wedge r) && // \text{德摩尔根律、交换律}\\
&\equiv (\neg(p \vee q) \vee (p \vee q)) \wedge r && // \text{分配律}\\
&\equiv r && // \text{排中律、同一律}\\
(4)\quad (p \to (q \to p)) &\equiv \neg p \vee (\neg q \vee p) && // \text{蕴涵等值式}\\
&\equiv \neg\neg p \vee (\neg p \vee \neg q) && // \text{交换律、双重否定律}\\
&\equiv \neg p \to (p \to \neg q) && // \text{蕴涵等值式}
\end{aligned}
$$

【讨论】(1) 在写等值演算过程时，最好使用尾注释的方式给出其中所用到的关键基本等值式，包括分配律、吸收律、德摩尔根律、蕴涵等值式、双蕴涵等值式等。

(2) 等值演算的一个基本思路就是将两边的公式都往范式方向靠拢，即尽量使用蕴涵等值式和双蕴涵等值式将蕴涵和双蕴涵运算符去掉，然后使用德摩尔根律将否定移到原子命题的前面来。

(3) 上面第(4)个逻辑等值式，实际上两边都是永真式。

练习* 2.13 证明下面的逻辑等值式。

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \ (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p) \ \equiv\ (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p) \\
&(2)\ \ \neg(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow (\neg p \vee q)) \ \equiv\ \neg p \vee q \\
&(3)\ \ (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \ \equiv\ (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \\
&(4)\ \ p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \ \equiv\ (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r
\end{aligned}
$$

解答：题目中没有要求必须使用某种方法，因此可使用真值表，也可使用等值演算的方法证明这些逻辑等值式。我们这里使用等值演算的方法。

(1) 我们使用等值演算分别给出逻辑等值式两边的主合取范式和主析取范式。

$$
\begin{aligned}
& (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p) && \text{// 扩展析取式为极大项} \\
\equiv\ & (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge \\
& \quad (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) && \text{// 剔除重复的极大项} \\
\equiv\ & (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) && \text{// 对极大项进行编码} \\
\equiv\ & M_0 \wedge M_1 \wedge M_4 \wedge M_2 \\
& (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p) && \text{// 扩展合取式为极小项} \\
\equiv\ & (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee \\
& \quad (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) && \text{// 剔除重复的极小项} \\
\equiv\ & (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) && \text{// 对极小项进行编码} \\
\equiv\ & m_7 \vee m_6 \vee m_3 \vee m_5
\end{aligned}
$$

根据与一个公式逻辑等值的主析取范式和主合取范式间的对应关系，我们证明了上述逻辑等值式。

(2) 下面的等值演算可证明逻辑等值式$\neg(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow (\neg p \vee q)) \ \equiv\ \neg p \vee q$

$$
\begin{aligned}
\neg(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow (\neg p \vee q)) \ &\equiv\ \neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee (\neg p \vee q)) && \text{// 蕴涵等值式} \\
&\equiv\ (p \wedge q) \vee (\neg p \vee (\neg p \vee q)) && \text{// 蕴涵等值式} \\
&\equiv\ (p \wedge q) \vee (\neg p \vee q) && \text{// 幂等律} \\
&\equiv\ (p \wedge q) \vee q \vee \neg p && \text{// 交换律、结合律} \\
&\equiv\ q \vee \neg p && \text{// 吸收律} \\
&\equiv\ \neg p \vee q && \text{// 交换律}
\end{aligned}
$$

(3) 下面的等值演算可证明$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)$与$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$逻辑等值，因为它们都与$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r)$逻辑等值。

$$
\begin{aligned}
& (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) && \text{// 分配律} \\
\equiv\ & ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \vee q) \wedge ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \vee r) && \text{// 吸收律} \\
\equiv\ & ((\neg p \wedge r) \vee q) \wedge ((p \wedge q) \vee r) && \text{// 分配律} \\
\equiv\ & ((\neg p \vee q) \wedge (r \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) && \text{// 交换律、幂等律} \\
\equiv\ & (\neg p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) &&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) && \text{// 分配律} \\
\equiv\ & (p \vee \neg p) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (q \vee r) && \text{// 否定律、同一律} \\
\equiv\ & (p \vee r) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (q \vee r) && \text{// 交换律} \\
\equiv\ & (\neg p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) &&
\end{aligned}
$$

(4) 下面的等值演算可证明$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$与$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$逻辑等值，（题目中没有强调用等值演算，含有$\leftrightarrow$的等值式实际上更适合使用真值表证明）：

$$
\begin{aligned}
& p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) && \text{// 等价等值式} \\
\equiv\ & p \leftrightarrow ((q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)) && \text{// 蕴涵等值式} \\
\equiv\ & (p \leftrightarrow ((\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q))) && \text{// 等价等值式} \\
\equiv\ & (p \rightarrow ((\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q))) \wedge ((\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q)) \rightarrow p && \text{// 蕴涵等值式} \\
\equiv\ & (\neg p \vee ((\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q))) \wedge (\neg((\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q)) \vee p) && \text{// 分配律} \\
\equiv\ & ((\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee q)) \wedge ((\neg(\neg q \vee r) \vee \neg(\neg r \vee q)) \vee p) && \text{// 德摩尔根律} \\
\equiv\ & ((\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee q)) \wedge (((q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg q)) \vee p) && \text{// 分配律} \\
\equiv\ & ((\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee q)) \wedge (((q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg q)) \vee p) && \text{// 分配律} \\
\equiv\ & (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) && \text{// 极大项编码} \\
\equiv\ & M_6 \wedge M_5 \wedge M_0 \wedge M_3 &&
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
& (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r && \text{// 等价等值式} \\
\equiv\ & ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \leftrightarrow r && \text{// 蕴涵等值式} \\
\equiv\ & ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \leftrightarrow r && \text{// 等价等值式} \\
\equiv\ & (((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p))) && \text{// 蕴涵等值式} \\
\equiv\ & (\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee r) \wedge (\neg r \vee ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p))) && \text{// 分配律} \\
\equiv\ & (\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee r) \wedge ((\neg r \vee \neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg q \vee p)) && \text{// 德摩尔根律} \\
\equiv\ & ((\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg(\neg q \vee p))) \vee r) \wedge ((\neg r \vee \neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg q \vee p)) && \text{// 德摩尔根律}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv (((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \vee r) \wedge ((\neg r \vee \neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg q \vee p)) && \text{// 分配律} \\
&\equiv ((p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge ((\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) && \text{// 极大项编码} \\
&\equiv M_0 \wedge M_6 \wedge M_5 \wedge M_3
\end{aligned}
$$

因此这两个公式逻辑等值。

练习 2.14 判定公式$p \to (q \to r)$是否与$\neg(p \wedge q) \vee r$逻辑等值，并给出证明。

解答：使用下面的等值演算可证明这两个公式逻辑等值：

$$
\begin{aligned}
p \to (q \to r) &\equiv \neg p \vee (\neg q \vee r) && \text{// 蕴涵等值式} \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r && \text{// 结合律} \\
&\equiv \neg(p \wedge q) \vee r && \text{// 德摩尔根律}
\end{aligned}
$$

练习 2.15 判定公式$(p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)$是否与$p \vee (q \leftrightarrow r)$逻辑等值，并给出证明。

解答：记$A = (p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)$，$B = p \vee (q \leftrightarrow r)$，我们列真值表如下：

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	A	$q \leftrightarrow r$	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

因此这两个公式逻辑等值。

练习 2.16 使用命题逻辑的等值演算求分别与下面公式逻辑等值的主析取范式和主合取范式。

(1) $p \to (\neg q \wedge \neg r)$　　(2) $((p \vee q) \to r) \to q$

(3) $(\neg p \wedge q) \to r$　　(4) $p \to ((q \wedge r) \to s)$

解答：我们主要通过扩展编码的方式来得到与公式逻辑等值的主析取范式和主合取范式。

(1) 对于公式$p \to (\neg q \wedge \neg r)$，很容易得到它的一个析取范式：

$$\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$$

命题变量包括p, q, r，简单合取式$\neg p$的编码是$0--$，扩展得到的极小项包括m_0, m_1, m_2和m_3，简单合取式$\neg q \wedge \neg r$的编码是-00，扩展得到的极小项包括m_0, m_4，从而得到与公式等值的析取范式是：$m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4$，从而与公式等值的合取范式是：$M_5 \wedge M_6 \wedge M_7$。

(2) 我们先使用等值演算求公式的一个范式：

$$\begin{aligned}((p \vee q) \to r) \to q &\equiv \neg((p \vee q) \to r) \vee q && // \text{蕴涵等值式} \\ &\equiv \neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee q && // \text{蕴涵等值式} \\ &\equiv ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee q && // \text{德摩尔根律} \\ &\equiv (p \vee q) \wedge (\neg r \vee q) && // \text{幂等律、分配律}\end{aligned}$$

得到一个合取范式$(p \vee q) \wedge (\neg r \vee q)$。析取式$p \vee q$的编码是00−，扩展得到的极大项包括$M_0, M_1$，析取式$(\neg r) \vee q$的编码是−01，扩展得到的极大项包括$M_1, M_5$，因此得到与公式等值的合取范式是$M_0 \wedge M_1 \wedge M_5$，从而与公式等值的析取范式是$m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7$。

(3) 我们先使用等值演算求公式的一个范式：

$$\begin{aligned}(\neg p \wedge q) \to r &\equiv \neg(\neg p \wedge q) \vee r && // \text{蕴涵等值式} \\ &\equiv p \vee \neg q \vee r && // \text{双重否定律、德摩尔根律}\end{aligned}$$

这是一个极大项M_2，因此与公式等值的主合取范式是M_2，而与它等值的主析取范式则是

$$m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

(4) 我们先使用等值演算求公式的一个范式：

$$\begin{aligned}p \to ((q \wedge r) \to s) &\equiv \neg p \vee ((q \wedge r) \to s) && // \text{蕴涵等值式} \\ &\equiv \neg p \vee (\neg(q \wedge r) \vee s) && // \text{蕴涵等值式} \\ &\equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s && // \text{德摩尔根律}\end{aligned}$$

命题变量包括p, q, r, s，这是极大项M_{14}，因此与公式等值的主合取范式是M_{14}，而与公式等值的主析取范式就是：

$$m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_8 \vee m_9 \vee m_{10} \vee m_{11} \vee m_{12} \vee m_{13} \vee m_{15}$$

练习 2.17 使用列真值表的方法求分别与下面公式逻辑等值的主析取范式和主合取范式。

(1) $(p \to (q \wedge r)) \wedge (\neg p \to (\neg q \wedge \neg r))$　　(2) $(\neg p \to \neg q) \vee r$

(3) $(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$　　(4) $(\neg p \vee \neg q) \to (p \leftrightarrow \neg q)$

解答：(1) 列公式$A = (p \to (q \wedge r)) \wedge (\neg p \to (\neg q \wedge \neg r))$的真值表如下：

p	q	r	$q \wedge r$	$p \to q \wedge r$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg q \wedge \neg r$	$\neg p \to \neg q \wedge \neg r$	A
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**

从而得到与公式等值的主析取范式是$m_0 \vee m_7$，而主合取范式是$M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$。

(2) 列公式$A = (\neg p \to \neg q) \vee r$的真值表如下：

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to \neg q$	$(\neg p \to \neg q) \vee r$
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**

从而得到与公式等值的主合取范式是M_2，而主析取范式是$m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$。

(3) 列公式$A = (\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$的真值表如下：

p	q	$\neg p$	$\neg p \to q$	$\neg q$	$\neg q \vee p$	$(\neg p \to q) \to \neg q \vee p$
0	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**

注意，这个公式中只有两个变量p, q，因此与公式等值的主合取范式是M_1，而主析取范式是$m_0 \vee m_2 \vee m_3$。

(4) 列公式$A = (\neg p \vee \neg q) \to (p \leftrightarrow \neg q)$的真值表如下：

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \leftrightarrow \neg q$	$\neg p \vee \neg q \to (p \leftrightarrow \neg q)$
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**

同样，这个公式中只有两个变量p, q，因此与公式等值的主合取范式是M_0，而主析取范式是$m_1 \vee m_2 \vee m_3$。

练习* 2.18 求分别与下面公式逻辑等值的主析取范式和主合取范式。

(1) $(q \vee \neg p) \rightarrow r$ (2) $(p \rightarrow (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$

(3) $(p \wedge \neg r) \vee (s \wedge p)$ (4) $((p \vee \neg q) \rightarrow r) \leftrightarrow q$

解答：(1) 我们有：

$$\begin{aligned}
(q \vee \neg p) \rightarrow r &\Leftrightarrow \neg(q \vee \neg p) \vee r && \text{// 蕴含等值式} \\
&\Leftrightarrow (\neg q \wedge p) \vee r && \text{// 德摩尔根律、双重否定律} \\
&\Leftrightarrow (\neg q \vee r) \wedge (p \vee r) && \text{// 分配律}
\end{aligned}$$

而：

$$\neg q \vee r \Leftrightarrow (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \;\Leftrightarrow\; M_2 \wedge M_6$$
$$p \vee r \Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \;\Leftrightarrow\; M_0 \wedge M_2$$

因此与$(q \vee \neg p) \rightarrow r$等值的主合取范式是：$M_0 \wedge M_2 \wedge M_6$。根据主合取范式与主析取范式之间的关系，与之等值的主析取范式就是：$m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$。

(2) 公式$(p \rightarrow (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$的真值表如下，设$A = (p \rightarrow (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$，$B = p \rightarrow (q \wedge r)$, $C = (p \vee q) \rightarrow r$

p	q	r	$(q \wedge r)$	B	$(p \vee q)$	C	A
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

根据该真值表，与该公式等值的主析取范式是$m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7$，而与之等值的主合取范式是$M_2 \wedge M_5$。

(3) 注意，这一题所含的命题变量是p, r, s，而且公式$(p \wedge \neg r) \vee (s \wedge p)$本身是析取范式，所以我们使用等值演算求它的主析取范式：

$$p \wedge \neg r \;\equiv\; (p \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg r \wedge s)$$
$$s \wedge p \;\equiv\; (p \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge r \wedge s)$$

因此它的主析取范式是$(p \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge r \wedge s)$，即$m_4 \vee m_5 \vee m_7$，从而它的主合取范式是$M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_6$。

(4) 我们列$A = ((p \vee \neg q) \rightarrow r) \leftrightarrow q$的真值表如下：

p	q	r	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow r$	$((p \vee \neg q) \rightarrow r) \leftrightarrow q$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1

因此A的主析取范式是$m_0 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_7$，从而主合取范式是$M_1 \wedge M_5 \wedge M_6$。

练习* 2.19 构造验证下面推理有效性的论证。

(1) $p \rightarrow q,\ (\neg q \vee r) \wedge \neg r,\ \neg(\neg p \wedge s) \implies \neg s$

(2) $p \rightarrow (q \rightarrow r), (q \wedge s) \rightarrow t, \neg u \rightarrow (s \wedge \neg t) \implies p \rightarrow (q \rightarrow u)$

(3) $p \rightarrow q,\ r \rightarrow s,\ \neg q \vee t,\ \neg s \vee w,\ \neg(t \wedge w), p \rightarrow r \implies \neg p$

(4) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(r \vee s),\ (q \rightarrow p) \vee \neg r,\ r \implies p \leftrightarrow q$

(5) $s \rightarrow \neg q, s \vee p, \neg p \leftrightarrow q \implies p$

(6) $p \rightarrow (q \vee r), s \rightarrow \neg r, p \wedge s \implies q$

(7) $\neg(p \wedge q),\ q \vee r,\ \neg r \implies \neg p$

(8) $p \rightarrow (q \rightarrow r), r \rightarrow \neg r, s \rightarrow p, t \rightarrow q \implies s \rightarrow \neg t$

解答

(1) 使用下面的论证验证推理$p \rightarrow q,\ (\neg q \vee r) \wedge \neg r,\ \neg(\neg p \wedge s) \implies \neg s$的有效性：

(1)	s	// 附加前提
(2)	$(\neg q \vee r) \wedge \neg r$	// 前提
(3)	$\neg r$	// (2)化简规则
(4)	$\neg q \vee r$	// (2)化简规则
(5)	$\neg q$	// (3),(4)析取三段论
(6)	$p \rightarrow q$	// 前提
(7)	$\neg p$	// (5),(6)假言易位
(8)	$\neg p \wedge s$	// (1),(7)合取规则
(9)	$\neg(\neg p \wedge s)$	// 前提
(10)	$\neg s$	// (1),(8),(9)反证法

(2) 使用下面的论证验证推理$p \to (q \to r), (q \wedge s) \to t, \neg u \to (s \wedge \neg t) \implies p \to (q \to u)$的有效性：

(1)	p	// 附加前提
(2)	q	// 附加前提
(3)	$\neg u$	// 附加前提
(4)	$\neg u \to (s \wedge \neg t)$	// 前提
(5)	$s \wedge \neg t$	// (3),(4)假言推理
(6)	s	// (5)化简规则
(7)	$q \wedge s$	// (2),(6)合取规则
(8)	$(q \wedge s) \to t$	// 前提
(9)	t	// (7),(8)假言推理
(10)	$\neg t$	// (5)化简规则
(11)	u	// (3),(9),(10)反证法
(12)	$q \to u$	// (2),(11)附加前提法
(13)	$p \to (q \to u)$	// (1),(12)附加前提法

(3) 使用下面的论证验证推理$p \to q,\ r \to s,\ \neg q \vee t,\ \neg s \vee w,\ \neg(t \wedge w), p \to r \implies \neg p$的有效性：

(1)	p	// 附加前提
(2)	$p \to q$	// 前提
(3)	q	// (1),(2)假言推理
(4)	$\neg q \vee t$	// 前提
(5)	t	// (3),(4)析取三段论
(6)	$p \to r$	// 前提
(7)	r	// (1),(6)假言推理
(8)	$r \to s$	// 前提
(9)	s	// (7),(8)假言推理
(10)	$\neg s \vee w$	// 前提
(11)	w	// (9),(10)析取三段论
(12)	$t \wedge w$	// (5),(11)合取规则
(13)	$\neg(t \wedge w)$	// 前提
(14)	$\neg p$	// (1),(12),(13)反证法

(4) 使用下面的论证验证推理$\neg(p \to q) \to \neg(r \vee s)$, $(q \to p) \vee \neg r$, $r \implies p \leftrightarrow q$的有效性：

(1)	r	// 前提
(2)	$(q \to p) \vee \neg r$	// 前提
(3)	$q \to p$	// (1),(2)析取三段论
(4)	$r \vee s$	// (1)附加规则
(5)	$\neg(p \to q) \to \neg(r \vee s)$	// 前提
(6)	$p \to q$	// (4),(5)假言易位
(7)	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	// (3),(6)合取规则
(8)	$p \leftrightarrow q$	// (7)双蕴涵逻辑等值

(5) 使用下面的论证验证推理$s \to \neg q, s \vee p, \neg p \leftrightarrow q \implies p$的有效性：

(1)	$\neg p$	// 附加前提
(2)	$s \vee p$	// 前提
(3)	s	// (1),(2)析取三段论
(4)	$s \to \neg q$	// 前提
(5)	$\neg q$	// (3),(4)假言推理
(6)	$\neg p \leftrightarrow q$	// 前提
(7)	$(\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p)$	// (6)双蕴涵逻辑等值
(8)	$\neg p \to q$	// (7)化简规则
(9)	q	// (1),(8)假言推理
(10)	p	// (1),(5),(9)反证法

(6) 使用下面的论证验证推理$p \to (q \vee r), s \to \neg r, p \wedge s \implies q$的有效性：

(1)	$p \wedge s$	// 前提
(2)	p	// (1)化简规则
(3)	$p \to (q \vee r)$	// 前提
(4)	$q \vee r$	// (2),(3)假言推理
(5)	s	// (1)化简规则
(6)	$s \to \neg r$	// 前提
(7)	$\neg r$	// (5),(6)假言推理
(8)	q	// (4),(7)析取三段论

(7) 使用下面的论证验证推理$\neg(p \wedge q)$, $q \vee r$, $\neg r \implies \neg p$的有效性：

(1)	p	// 附加前提
(2)	$\neg r$	// 前提
(3)	$q \vee r$	// 前提
(4)	q	// (2),(3)析取三段论
(5)	$p \wedge q$	// (1),(4)合取规则
(6)	$\neg(p \wedge q)$	// 前提
(7)	$\neg p$	// (1),(5),(6)反证法

(8) 使用下面的论证验证推理$p \to (q \to r), r \to \neg r, s \to p, t \to q \implies s \to \neg t$的有效性：

(1)	s	// 附加前提
(2)	t	// 附加前提
(3)	$s \to p$	// 前提
(4)	p	// (1),(3)假言推理
(5)	$t \to q$	// 前提
(6)	q	// (2),(5)假言推理
(7)	$p \to (q \to r)$	// 前提
(8)	$q \to r$	// (4),(7)假言推理
(9)	r	// (6),(8)假言推理
(10)	$r \to \neg r$	// 前提
(11)	$\neg r$	// (9),(10)假言推理
(12)	$\neg t$	// (2),(10),(11)反证法
(13)	$s \to \neg t$	// (1),(12)附加前提法

练习 2.20 指出下列句子中的原子命题，并依次用p, q, r表示，然后将整个句子符号化：

(1) 这电脑虽然配置很好，但是很贵，我没有钱购买；

(2) 我和小刘是很好的朋友；

(3) 小周只有上数学课，才认真听；

(4) 小周只要上数学课，就认真听；

(5) 除非是上数学课，否则小周不会认真听；

(6) 两个三角形全等当且仅当其对应的边都相等。

解答：(1) 原子命题包括：p : 电脑配置很好；q : 电脑很贵；r : 我没有钱购买。命题符号化为$p \wedge q \wedge r$。

(2) 整个命题是一个原子命题，可符号化为p；

(3) 原子命题包括：p : 小周上数学课；q : 小周认真听。整个命题符号化为：$q \to p$，表示小周上数学课是小周认真听的必要条件。

(4) 原子命题与(3)相同，这个命题表达的是小周上数学课是他认真听的充分条件，因此符号化为$p \to q$；

(5) 原子命题与(3)相同，这个命题的含义也是“只有上数学课，小周才会认真听”，表达的是，上数学课是小周认真听的必要条件，因此也符号化为$q \to p$。

(6) 原子命题包括：p : 两个三角形全等，q : 对应的边都相等。整个命题符号化为$p \leftrightarrow q$。

练习* 2.21 指出下列句子中的原子命题，并依次用p, q, r表示，然后将整个句子符号化：

(1) 若a和b是奇数，则$a + b$是偶数。

(2) 只有在正整数$n \leq 2$时，不定方程$x^n + y^n = z^n$才有正整数解。

(3) 两矩阵相等当且仅当其对应的元素分别相等。

(4) 这苹果虽然甜，但我不打算买。

(5) 除非我接到正式邀请，否则我不去参加圣诞晚会。

(6) 我和小王是同学。

(7) 尽管她学习成绩不太好，但她的动手能力很强。

(8) 我的手机没电了，借你的手机用了一下。

解答:

(1) 令p表示：a是奇数；q表示：b是奇数；r表示：$a + b$是偶数，则符号化为：$p \wedge q \to r$；

(2) 令p表示：正整数$n \leq 2$；q表示：不定方程$x^n + y^n = z^n$有正整数解，则符号化为$q \to p$；

(3) 令p表示：两矩阵相同；q表示：两矩阵对应的元素分别相等，则符号化为$p \leftrightarrow q$；

(4) 令p表示：这苹果甜；q表示：我打算买，则符号化为$p \wedge \neg q$；

(5) 令p表示：我接到正式邀请；q表示：我去参加圣诞晚会，则符号化为$\neg p \to \neg q$；

(6) 这整个句子是原子命题，可直接使用p表示：我和小王是同学；

(7) 令p表示：她学习成绩不太好；q表示：她的动手能力强，则符号化为$p \wedge q$；

(8) 令p表示：我的手机没电了；q表示：借你的手机用一下，则符号化为$p \wedge q$。

练习* 2.22 使用命题变量p:“小李修离散数学”、q:“小李可以毕业”、r:“小李可以找工作”、s:“小李读完这本书”符号化下面的语句：

(1) 如果小李不修离散数学则他不可以毕业；

(2) 如果小李不可以毕业，则他不可以找工作；

(3) 如果小李读完这本书，则他可以找工作；

(4) 小李没有修离散数学但是他读完了这本书。

说上述语句是**一致的**(consistent)，如果存在对其中命题变量（即p, q, r, s）的真值赋值，使得上述语句（符号化得到的命题）的真值都为真。试判断上述语句是否是一致的，并说明理由。

解答: 首先：(1) 符号化为$\neg p \to \neg q$；(2) 符号化为$\neg q \to \neg r$；(3) 可符号化$s \to r$；(4) 可符号好为$\neg p \wedge s$。容易看到，要使得所有公式都为真，则要使得$\neg p \wedge s$为真，从而必须有p赋值为$\mathbf{0}$，且s赋值为$\mathbf{1}$，从而有$\neg p \to \neg q$要为真，得到$\neg q$的真值必须为真，即q必须赋值为$\mathbf{0}$，从而类似地由$\neg q \to \neg r$得到r也必须赋值为$\mathbf{0}$。但由于s必须赋值为$\mathbf{1}$，而r也必须赋值为$\mathbf{0}$，从而得到$s \to r$的真值这时为假。因此不存在对p, q, r, s的真值赋值使得这四个公式的真值都为真，因此上述语句不是一致的。

注意也可列这四个公式的合取的真值表，从而得到它是矛盾式，这表明上述语句不是一致的。

练习 2.23 写出命题“*如果你努力尝试，那么你会成功*”的逆命题(converse)、逆否命题(contrapositive)和否命题(inverse)。

解答：命题“如果你努力尝试，那么你会成功”的逆命题是“如果你成功（了），那么你努力尝试（过）”，逆否命题是“如果你没有成功，那么你没有努力尝试”，而否命题是“如果你没有努力尝试，那么你不会成功”。

练习* 2.24 已知p, q, r, s四人有且仅有2人参加围棋比赛，但必须满足下列四项条件：

(1) p和q仅一人参加；

(2) 若r参加，则s也参加；

(3) q和s至多参加一人；

(4) 若s不参加，则p也不参加。

请使用命题逻辑的等值演算求解应派哪两个人参加。

解答：令p表示“p参加”，q表示“q参加”，r表示“r参加”，s表示“s参加”。则四个条件分别符号化为：

1. “p和q仅一人参加”符号化为：$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \iff (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
2. “若r参加，则s也参加”符号化为：$r \to s \iff \neg r \vee s$；
3. “q和s至多参加一人”符号化为：$\neg(q \wedge s) \iff (\neg q \vee \neg s)$；
4. “若s不参加，则p也不参加”符号化为：$\neg s \to \neg p \iff \neg p \vee s$。

从而要求应派哪两个人参加，需要求解如下公式的成真赋值：

$$F = (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee s)$$

其中：

(1) $(p \vee q)$扩展得到的极大项是M_0至M_3；

(2) $(\neg p \vee \neg q)$扩展得到的极大项是M_{12}至M_{15}；

(3) $(\neg r \vee s)$扩展得到的极大项是：M_2, M_6, M_{10}, M_{14}；

(4) $(\neg q \vee \neg s)$扩展得到的极大项是：M_5, M_7, M_{13}, M_{15}；

(5) $(\neg p \vee s)$扩展得到的极大项是：$M_8, M_{10}, M_{12}, M_{14}$。

所以F的主析取范式是：$m_4 \vee m_9 \vee m_{11}$，又根据已知条件，只能派两人去，所以只有m_9对应的成真赋值1001满足条件，即应派p和s去。实际上，该公式的真值表如下（此真值表由计算机程序自动生成，因此没有给出中间子公式的真值计算）：

p	q	r	s	$(p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)\wedge(\neg r\vee s)\wedge(\neg q\vee\neg s)\wedge(\neg p\vee s)$
0	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**1**	**0**
0	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**0**

练习 2.25 四个代表队甲、乙、丙和丁进行比赛，观众A,B和C对比赛的胜负问题进行猜测：A说“甲只能取第三，丙是冠军”；B说“丙只能取第二，乙是第三”；C说“丁取第二，甲是第一”。比赛结束后，对照真正的名次，发现他们都只猜对了一半，请问比赛名次到底是怎样的？

解答：这一题的简单解法是基于每个只猜对一半，使用假设法。我们可假设A说的“甲只能取第三”是对的，那么C说的“甲是第一”是错误的，从而他说的“丁取第二”是对的，从而B说的“丙只能取第二”是错的，从而“乙是第三”就要是对的，但这与前面的假设A说的“甲只能取第三”矛盾，因此可得A说的“甲只能取第三”是错误的，“丙是冠军”是对的，从而B说的“丙只能取第二”是错误的，“乙是第三”是正确的，且C说的“甲是第一”是错误的，“丁取第二”是正确的，因此最终的比赛名次是：丙是冠军、丁第二、乙第三、甲第四。

更严谨，从而也更复杂的解法是使用命题变量p表示“甲第三”、q表示“丙第一”、r表示“丙第二”、s表示“乙第三”、t表示“丁第二”、w表示“甲第一”。然后因为每人只猜对一半，即根据甲的话有$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$，注意，这里还表达了A的两句话中有且有一句为真，注意到有：

$$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q) \quad\equiv\quad (p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)$$

类似地，根据B的话有$(r\vee s)\wedge(\neg r\vee\neg s)$，根据C的话有$(t\vee w)\wedge(\neg t\vee\neg w)$。

进一步，我们根据常识，一个名次不可能两个人同时得，一个人也不可能同时得两个名次，从而还有：

(1) p甲第三和w甲第一不能同时正确，即有$\neg(p\wedge w)$，即$(\neg p\vee\neg w)$，同样q丙第一和r丙第三不能同时为真，即有$(\neg q\vee\neg r)$；

(2) p甲第三和s乙第三不能同时正确，即有$(\neg p\vee\neg s)$，q丙第一和w甲第一不能同时为真，即有$(\neg q\vee\neg w)$，r丙第二和t丁第二不能同时为真，即有$(\neg r\vee\neg t)$。

总之，根据每人猜对一半，以及常识，对于原子命题p, q, r, s, t, w，题意表明有下面的公式为真，也即下面公式的成真赋值就可以告诉我每个人说的话哪句是正确的，哪句是错误的，从而确定比赛的名次：

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (r \vee s) \wedge (\neg r \vee \neg s) \wedge (t \vee w) \wedge (\neg t \vee \neg w) \wedge$$
$$(\neg p \vee \neg w) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge (\neg q \vee \neg w) \wedge (\neg r \vee \neg t)$$

上面是一个合取范式，使用编码扩展的方式可得到与它等值的主范式，我们借助计算机程序的时序，扩展后可得到它的主范式包括除M_{22}之外的所有极大项，也即它的主析取范式是m_{22}，也即上述公式的成真赋值是010110，也即只有当p, r, w赋值为0，q, s, t赋值为1时上述公式才为真，也即丙第一、乙第三和丁第二为真。

练习 2.26 某勘探队有3名队员，有一天取得一块矿样，三人的判断如下：(1) *甲说：这不是铁，也不是铜*；(2) *乙说：这不是铁，是锡*；(3) *丙说：这不是锡，是铁*。经实验鉴定后发现，其中一人两个判断都正确，一人判断对一半，另外一人全错了。试根据以上信息，判断矿样到底是铜、铁还是锡。

解答：同样，这一题简单的解法是使用假设和分析，特别是注意到乙和丙的话是互为否定的，如果乙的判断对一半，例如他的“这不是铁”是对的，而“是锡”是错的，则丙的判断“这不是锡”是对的，而“是铁”是错误的；同样若他的“是锡”是对的，而“这不是铁”是错的，则丙的判断“是铁”是对的，而“这不是锡”是错的，也即这样两个人的判断都是对一半，但题意表明只有一个人对一半，因此要么乙的判断全错（从而丙的判断全对），要么乙的判断全对（从而丙的判断全错），也即只可能是甲的判断对一半。

然后我们使用假设法，假定甲的“这不是铁”的判断是对的，而“也不是铜”的判断是错的，也即矿样是铜，这样乙的判断“这不是铁”是正确的，“是锡”是错误的，也即他的判断也对一半，这不符合题意。因此只能是甲的“这不是铁”的判断是错误的，也即矿样是铁，从而这时丙的判断全对，而乙的判断全错。综上我们就得到矿样是铁。

稍微严谨一点的解答是使用命题变量p表示“矿样是铁”，q表示“矿样是铜”，r表示“矿样是锡”。从而可能的情况可符号化为：

(1) 甲说的“这不是铁”是对的，而“也不是铜”是错的，且乙的判断全对，丙的判断全错，用公式表示为：

$$\neg p \wedge q \wedge (\neg p \wedge r) \wedge \neg(p \wedge \neg r)$$

注意到这个公式化简后逻辑等值于$\neg p \wedge q \wedge r$，但这与常识矛盾，即不能q与r都为真，因此不是这种情况；

(2) 甲说的“这不是铁”是对的，而“也不是铜”是错的，且乙的判断全错，丙的判断全对，用公式表示为：

$$\neg p \wedge q \wedge \neg(\neg p \wedge r) \wedge (p \wedge \neg r)$$

注意到这个公式显然是矛盾式，因此也不是这种情况

(3) 甲说的“这不是铁”是错的，而“也不是铜”是对的，且乙的判断全对，丙的判断全错，用公式表示为：

$$p \wedge \neg q \wedge (\neg p \wedge r) \wedge \neg(p \wedge \neg r)$$

注意到这个公式显然是矛盾式，因此也不是这种情况

(4) 甲说的"这不是铁"是错的，而"也不是铜"是对的，且乙的判断全错，丙的判断全对，用公式表示为：

$$p \wedge \neg q \wedge \neg(\neg p \wedge r) \wedge (p \wedge \neg r)$$

注意到这个公式化简后逻辑等值于$p \wedge \neg q \wedge \neg r$，这表明矿样是铁，不是铜，也不是锡。

练习* 2.27 判断下面的推理是否有效。如果是有效的推理，请将它符号化，并给出论证加以验证。如果不是有效的推理，请给出理由。

(1) 李娟是数学专业或计算机专业学生；如果李娟不懂离散数学，那么她不是数学专业学生；如果李娟懂离散数学，那么她很聪明；李娟不是计算机专业学生。因此，李娟很聪明。

(2) 如果今天是星期二，那么我有一次计算方法测验或物理测验. 如果物理老师生病，那么没有物理测验. 今天是星期二并且物理老师生病. 所以，我有一次计算方法测验.

(3) 只要张三曾到过受害者房间且11点前没有离开，则张三犯了谋杀罪。张三曾到过受害者房间。如果张三在11 点前离开，则看门人会看见他。看门人没看见他。所以，张三犯了谋杀罪。

解答：(1) 设p表示"李娟是数学专业学生"、q表示"李娟是计算机专业学生"、r表示"李娟懂离散数学"、s表示"李娟很聪明"，上述推理可符合化为从前提$p \vee q, \neg r \rightarrow \neg p, r \rightarrow s, \neg q$推出结论$s$，这个推理是有效，可使用下面的论证验证：

(1) $\neg q$	// 前提引入
(2) $p \vee q$	// 前提引入
(3) p	// (1),(2)析取三段论
(4) $\neg r \rightarrow \neg p$	// 前提引入
(5) r	// (3),(4)拒取式
(6) $r \rightarrow s$	// 前提引入
(7) s	// (5),(6)假言推理

(2) 设p: 今天是星期二; q: 我有一次计算方法测验; r: 我有一次物理测验; s: 物理老师生病。则是从前提$p \rightarrow (q \vee r), s \rightarrow \neg r, p \wedge s$推出结论$q$。验证该推理有效性的论证如下：

(1) $p \wedge s$	// 前提引入
(2) p	// (1)化简
(3) $p \rightarrow (q \vee r)$	// 前提引入
(4) $q \vee r$	// (2),(3)分离规则
(5) s	// (1)化简
(6) $s \rightarrow \neg r$	// 前提引入
(7) $\neg r$	// (5),(6)分离规则
(8) q	// (4),(7)析取三段论

(3) 设p：张三曾到过受害者房间，q：张三11点前没有离开，r：张三犯了谋杀罪。s：看门人看见他。则是从前提$p \wedge \neg q \to r, p, q \to s, \neg s$推出结论$r$。验证该推理的论证如下

(1)	$\neg s$	// 前提
(2)	$q \to s$	// 前提
(3)	$\neg q$	// (1),(2)假言易位
(4)	p	// 前提
(5)	$p \wedge \neg q$	// (3),(4)合取规则
(6)	$p \wedge \neg q \to r$	// 前提
(7)	r	// (5),(6)假言推理

练习 2.28 一公安人员审查一件盗窃案，得到如下事实：(1) *张平或王磊盗窃了机房的计算机一台；(2) 若张平盗窃了计算机，则作案时间不可能发生在午夜之前；(3) 若王磊的证词正确，则午夜时机房里的灯未灭；(4) 若王磊的证词不正确，则作案时间发生在午夜之前；(5) 午夜时光机房灯灭了。*请判断盗窃计算机的是张平还是王磊。

解答：我们对事实进行符号化，然后分析可以推出怎样的结论，最后构造论证验证从这些事实推出该结论的合理性。通过分析，这些事实中有以下原子命题：p : 张平盗窃了机房的计算机一台；q : 王磊盗窃了机房的计算机一台；r : 盗窃作案时间发生在午夜之前；s : 王磊的证词正确；t : 午夜时机房的灯灭了。基于这些原子命题，得到的事实可符号化为：

(1) “张平或王磊盗窃了机房的计算机一台”，符号化为：$p \vee q$；

(2) “若张平盗窃了计算机，则作案时间不可能发生在午夜之前”，符号化为：$p \to \neg r$；

(3) “若王磊的证词正确，则午夜时机房里的灯未灭”，符号化为：$s \to \neg t$；

(4) “若王磊的证词不正确，则作案时间发生在午夜之前”，符号化为：$\neg s \to r$；

(5) “午夜时光机房灯灭了”，符号化为：t。

使用自然推理系统的推理规则，经过分析，我们可得到结论q，即王磊盗窃了机房的计算机一台，可使用下面的论证验证从上述事实（前提）得到结论q的推理的有效性：

(1)	t	// 前提
(2)	$s \to \neg t$	// 前提
(3)	$\neg s$	// (1),(2)假言易位
(4)	$\neg s \to r$	// 前提
(5)	r	// (3),(4)假言推理
(6)	$p \to \neg r$	// 前提
(7)	$\neg p$	// (5),(6)假言易位
(8)	$p \vee q$	// 前提
(9)	q	// (7),(8)析取三段论

练习 2.29 设：(i). p : 小王来；(ii). q : 小张来；(iii). s : 小李来；(iv). r : 小赵来。请符号化下面的推理，并构造论证验证其有效性。

如果小王来，则小张和小李中恰好有一人来。如果小张来，则小赵就不来。所以，如果小赵来了，但小李没来，则小王也没来。

解答：首先对上述推理的前提进行符号化：

(1) "如果小王来，则小张和小李中恰好有一人来"符号化为：$p \to ((q \wedge \neg s) \vee (s \wedge \neg q))$，注意，这里需要使用到排斥或，而且由于$(q \wedge \neg s) \vee (s \wedge \neg q)$与$(q \vee s) \wedge \neg(q \wedge s)$逻辑等值，因此这也可符号化为：$p \to (q \vee s) \wedge \neg(q \wedge s)$；

(2) "如果小张来，则小赵就不来"符号化为：$q \to \neg r$。

上述推理的结论是"如果小赵来了，但小李没来，则小王也没来"，符号化为$(r \wedge \neg s) \to \neg p$。

这里可看到结论是蕴涵式，因此需要将$r \wedge \neg s$作为附加前提，一起来得到$\neg p$，这时的$\neg p$又是否定式，因此我们进一步将p作为附加前提来推出矛盾，从而得到下面的论证：

(1)	$r \wedge \neg s$	// 附加前提
(2)	r	// (1)化简规则
(3)	$q \to \neg r$	// 前提
(4)	$\neg q$	// (2),(3)假言易位
(5)	p	// 附加前提
(6)	$p \to (q \vee s) \wedge \neg(q \wedge s)$	// 前提
(7)	$(q \vee s) \wedge \neg(q \wedge s)$	// (5),(6)假言推理
(8)	$q \vee s$	// (7)化简规则
(9)	s	// (4),(8)析取三段论
(10)	$\neg s$	// (1)化简规则
(11)	$\neg p$	// (5),(9),(10)反证法
(12)	$(r \wedge \neg s) \to \neg p$	// (1),(11)附加前提法

根据上述论证可看到，实际上，无需在前提"如果小王来，则小张和小李中恰好有一人来"中强调"小张和小李中恰好有一人来"，只要有前提"如果小王来，则小张或小王来"就可以得到所需要的结论了。

练习 2.30 收集有关悖论的相关知识，写成小论文并给全班同学做有关悖论知识的讲座。

练习 2.31 收集更多的逻辑谜题及其解答，写成小论文并给全班同学做有关逻辑谜题的讲座。

练习 2.32 编写一个计算机程序，基于算法2.1 构造符合定义2.2 的命题逻辑公式的抽象语法树（提示：自己确定如何输入和输出逻辑运算符）。

练习 2.33 编写一个计算机程序，基于算法2.1 构造符合定义2.2 的命题逻辑公式的真值表（提示：自己确定如何输入和输出逻辑运算符）。

练习 2.34 编写一个计算机程序，在构造命题逻辑公式抽象语法树的基础上，验证一个为证明两个公式逻辑等值的等值演算过程是否正确，即检查该等值演算过程中使用了怎样的子公式置换，以及使用的基本等值式是否正确。假定所给的等值演算过程中出现的公式都严格符合定义2.2 的定义，且只用到表2.8 所给的基本等值式。

练习 2.35 编写一个计算机程序，给定一个析取范式形式的命题逻辑公式，将其扩展成等值的主析取范式，只需输出该主析取范式包含的所有极小项的编码即可。类似地，给定一个合取范式形式的命题逻辑公式，输出与其逻辑等值的主合取范式包含的所有极大项的编码。

练习 2.36 编写一个计算机程序，在构造命题逻辑公式抽象语法树的基础上，检查一个为验证某个推理的有效性而构造的论证是否正确，即检查论证中的每个公式是使用前面哪些公式通过怎样的基本推理规则得到，使用公式替换推理规则的字母是否正确。假定论证中的每个公式都严格符合定义2.2 的定义，且只用到基本推理规则，在做等值置换时只用到基本等值式。