座位号________ 专业班级________ 学院________ 学号________ 姓名________

（密 封 线 内 不 答 题）

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

2021-2022-1 学期《高等代数(上)》B 卷

注意事项：1. 开考前请将密封线内各项信息填写清楚；
2. 所有答案请直接答在试卷上；
3．考试形式：闭卷；
4. 本试卷共四大题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					

评阅教师请在试卷袋上评阅栏签名

得分

一、填空题：共 5 题，每题 4 分，共 20 分。

1. 设四阶行列式$|A|$中的四个列向量分别为$\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3,\vec{\beta}_4$． 若$|A|=0$但其第 2 行第 3 列交叉位置元素的代数余子式$A_{23}=1$，则向量组$\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3,\vec{\beta}_4$的一个极大线性无关组是________________________；

2. 设四个未知量的方程组$A\vec{x}=\vec{b}$有三个解$\vec{\eta}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix}$， $\vec{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}$， $\vec{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\7\end{pmatrix}$.

若其系数矩阵A的秩为2，则该方程组的一般解是________________；

3. $\begin{pmatrix}2&1&-2\\4&2&-4\\2&1&-2\end{pmatrix}^{10}=$________________；

4. 设E_n是n阶可逆矩阵，则分块矩阵$\begin{pmatrix}E_n&-E_n\\2E_n&O\end{pmatrix}$的逆矩阵为________________；

5. 若实对称矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&a-1&-1\\0&-1&a\end{pmatrix}$正定，则$a$的取值范围是________________.

得分

二、计算题：共 3 题，每题 10 分，共 30 分。

1. 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

2. 设a,b,c为数域$\mathbb{P}$上两两不同的数, 求以x_1,x_2,x_3为未知量的解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+ax_2+a^2x_3=a^3, \\ x_1+bx_2+b^2x_3=b^3, \\ x_1+cx_2+c^2x_3=c^3. \end{cases}$$

3. 在实数域上将二次型 $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1$ 化为规范形.

写出所作的非退化线性替换并求符号差.

得分

三、解答题：共 2 题，每题 15 分，共 30 分。

1. 设 $f(x)=x^3+6x^2+3px+8$, 求常数 p 的使 $f(x)$ 有重根, 并求 $f(x)$ 的所有根.

2. （1）求向量组 $\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\vec{\alpha}_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 的极大无关组和秩.

（2）若向量组 $\vec{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\vec{\beta}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix},\vec{\beta}_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$ 与向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 有相同的秩,

且 $\vec{\beta}_3$ 可由 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 表出, 求 a,b.

得分

四、证明题：共 2 题，每题 10 分，共 20 分。

1. 设 $\vec{\alpha}_1,\ldots,\vec{\alpha}_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的基础解系，$\vec{\beta}$ 是非齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b},\vec{b}\neq\vec{0}$ 的一个特解. 求证: $\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\alpha}_1,\vec{\beta}+\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\beta}+\vec{\alpha}_{n-r}$ 线性无关.

2. 记数域$\mathbb{P}$上二阶方阵的集合

$$\Gamma=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}: a,b\in\mathbb{P}\right\}.$$

1） 证明：任意 $A,B\in\Gamma$ 都满足 $AB=BA$.

2） 证明：若二阶方阵 X 使得 $AX=XA$ 对任意 $A\in\Gamma$ 成立，则 $X\in\Gamma$.