中山大学本科生期末考试

考试科目:《离散数学基础》(B卷)

学年学期:	2022学年第二学期	姓　名:	______
学　院/系:	计算机学院	学　号:	______
考试方式:	闭卷	年级专业:	______
考试时长:	120分钟	班　别:	______
任课老师:	周晓聪、龙冬阳、娄定俊、周育人、杨跃东、李绿周		

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:"考试作弊者,不授予学士学位。"

—— 以下为试题区域,共六道大题,总分100分,考生请在答题纸上作答 ——

一、选择题(共30分,每小题3分,选对全部选项得3分,选对部分选项得1分,不选或选错选项不得分)

1. 下面哪一组的两个公式是逻辑等值的? ___B___

A. 公式$\neg(p \to q)$ 和 $\neg p \to q$　　**B.** 公式$\neg(p \leftrightarrow q)$ 和 $\neg p \leftrightarrow q$

C. 公式$\neg(p \to q)$ 和 $\neg p \to \neg q$　　**D.** 公式$\neg(p \leftrightarrow q)$ 和 $\neg p \leftrightarrow \neg q$

2. 对于命题"并非所有火车都比所有汽车跑得快",下面哪些说法是正确的? ___C,D___

A. 可使用所有火车构成的集合作为符号化这个命题的论域。

B. 符号化这个命题时,可提取"……比汽车跑得快"作为一元谓词。

C. 这是对个体类之间关系进行判断的命题,"火车"和"汽车"都是个体类。

D. 符号化这个命题时,"所有火车"和"所有汽车"都要用到全称量词。

3. 设全集U是整数集$\mathbb{Z}$,定义集合$A = \{x \mid \exists y((x-y=1)) \wedge (0 \le y \le 3)\}$,下面哪些公式为真? ___A,C,D___

A. $\forall x(x \in A \to x \le 4)$　　**B.** $\forall x(x \le 4 \to x \in A)$

C. $\forall x(0 \le x \le 3 \to (x+1) \in A)$　　**D.** $\forall x(x \in A \to \exists y(x-y=1))$

4. 设全集U是正整数集$\mathbb{Z}^+$,对任意正整数n,定义集合A_n是n的所有正因子构成的集合,对于集合族$\mathcal{A} = \{A_{12}, A_{18}, A_{24}, A_{36}\}$,下面哪些命题是正确的? ___A,D___

A. 对任意正整数k,若$k \in \bigcap \mathcal{A}$,则$k$是12的正因子

B. 对任意正整数k,若$k \in \bigcup \mathcal{A}$,则$k$是12的正因子

C. 对任意正整数k,只要k是12的正因子,则$k \in \bigcap \mathcal{A}$

D. 对任意自然数k,只要k是12的正因子,则$k \in \bigcup \mathcal{A}$

5. 设A是非空集合,下面哪些说法是正确的? ___A, B, C___

A. 如果R是A上的等价关系,则$R \circ R = R$

B. 如果R是A上的等价关系,则$R \cup R^{-1} = R$

C. 如果R是A上的对称、传递关系,则$R \cup \Delta_A$是A上的等价关系

D. 如果R是A上的自反、传递关系,则$R \cup R^{-1}$是A上的等价关系

6. 下面定义的自然数集$\mathbb{N}$上的函数哪些是单函数？ A,C

A. 函数$f_1(n) = 2n^2 + 1$
B. 函数$f_2(n) = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$
C. 函数$f_3(n) = \lceil (2n+1)/2 \rceil$
D. 函数$f_4(n) = |n-5|$

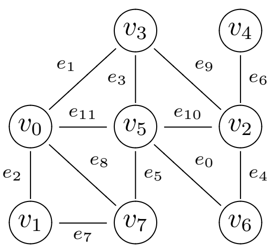
7. 对于函数$f(n) = (n^3 + n^2 \log n)(\log n + 1) + (12 \log n)(n^3 + 1)$，下面哪些说法是正确的？ C

A. $f \in O(n^3)$ **B.** $f \in O(n^2 \log n)$ **C.** $f \in O(n^3 \log n)$ **D.** $f \in O(n^2)$

8. $\mathbb{N}$是自然数集，定义函数$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，$f(x) = x \mod 3$（即$x$除以3的余数），则$f$是 D 。

A. 满射不是单射 **B.** 单射不是满射 **C.** 双射 **D.** 不是单射也不是满射

9. 对于下图的点割集，下面哪些说法是正确的？ A, C



A. 顶点集$V_1 = \{v_0, v_7\}$是图的点割集。
B. 顶点集$V_2 = \{v_2, v_5\}$是图的点割集。
C. 顶点集$V_3 = \{v_3, v_5\}$是图的点割集。
D. 上图的点连通度是2。

10. 下面哪些说法是正确的？ B

A. 如果一个图的所有顶点的度数都是偶数，则它是欧拉图。
B. 如果一个图是欧拉图，则它所有顶点的度数都是偶数。
C. 如果一个$n(n \geq 3)$阶图的任意两个顶点度数之和大于等于n，则它必定是哈密顿图。
D. 如果一个$n(n \geq 3)$阶图是哈密顿图，则它的任意两个顶点度数之和都大于等于n。

二、填空题（共8分，每空1分）

1. 写出一个与一阶逻辑公式$\neg(\forall x \exists y (P(x,y) \to \forall z R(x,y,z)))$逻辑等值的前束范式公式：

$\exists x \forall y \exists z (P(x,y) \land \neg R(x,y,z))$

2. 设全集$U = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 9\}$，集合$A = \{0,2,4,6,8\}, B = \{1,2,3,5,8\}, C = \{1,3,5,7,9\}$，则$A - (B \cup C) =$ $\{0,4,6\}$ 。

3. 设集合$A = \{0,1,2,3,4,5\}$上的关系$R = \{\langle 1,4\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,2\rangle\}, S = \{\langle 4,5\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,3\rangle\}$，则$R$和$S$的复合$S \circ R =$ $\{\langle 1,5\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 4,3\rangle\}$ ，R的传递闭包$t(R) =$ $\{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,4\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,2\rangle\}$ 。

4. 长度为6且恰好含有3个0的三进制串有 $C(6,3) * 2^3 = 20 * 8 = 160$ 个，长度为6且至少含有3个0的三进制串有 $3^6 - C(6,0) * 2^6 - C(6,1) * 2^5 - C(6,2) * 2^4 = 233$ 个（直接填最后的结果）。

5. 如果T是一棵满3叉树（满3元树），且有9个内部顶点，则它总共有___28___个顶点，其中有___19___片叶子。

三、形式论证构造题（10分）

用一阶逻辑公式符号化下列命题，并证明该推理的有效性：(设论域是所有人的集合)。

任何人如果他喜欢步行，他就不喜欢乘汽车。每一个人或者喜欢乘汽车或者喜欢骑自行车。有的人不爱骑自行车。因此，有的人不爱步行。

解答：设论域是人类的集合，谓词$P(x)$表示x喜欢步行，$Q(x)$表示x喜欢乘汽车，$R(x)$表示x喜欢骑自行车。上述推理的前提可做如下符号化：

(1) “任何人如果他喜欢步行，他就不喜欢乘汽车”符号化为：$\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$；

(2) “每一个人或者喜欢乘汽车，或者喜欢骑自行车”符号化为：$\forall x(Q(x) \vee R(x))$；

(3) “有的人不爱骑自行车”符号化为：$\exists x(\neg R(x))$。

而结论“有的人不爱步行”则符号化为：$\exists x(\neg P(x))$。因此上述推理可符号化为：

$$\forall x(P(x) \to \neg Q(x)),\ \forall x(Q(x) \vee R(x)),\ \exists x(\neg R(x)) \Longrightarrow \exists x(\neg P(x))$$

可使用下面的论证验证上述推理的有效性：

(1)	$\exists x(\neg R(x))$	// 前提
(2)	$\neg R(c)$	// (1)存在例化
(3)	$\forall x(Q(x) \vee R(x))$	// 前提
(4)	$Q(c) \vee R(c)$	// (3)全称例化
(5)	$Q(c)$	// (2),(4)析取三段论
(6)	$\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$	// 前提
(7)	$P(c) \to \neg Q(c)$	// (6)全称例化
(8)	$\neg P(c)$	// (5),(7)假言易位
(9)	$\exists x(\neg P(x))$	// (8)存在泛化

评分标准：建议此题总分10分。1. 写出前提和结论的正确一阶公式各1分，总共占4分；2. 写出正确的证明占6分，错一处扣1分，直到4分扣完。

四、计算题（14分，第1题6分，第2题8分）

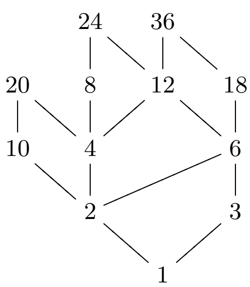
1. 设集合$S = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 18, 20, 24, 36\}$，以整除关系为偏序。

(a) 画出偏序集S的哈斯图；

(b) 给出S的极小元和极大元；

(c) 给出子集$\{3, 4, 6\}$的所有上界和所有下界。

解答：1. 偏序集S的哈斯图如下：



2. 从哈斯图可以看到，S的极小元有1，极大元有20, 24, 36。

3. 从哈斯图可以看到，子集$\{3,4,6\}$的上界有12,24,36，下界有1。

评分标准：

建议此题总分6分。1. 给出偏序集S的哈斯图总分为2分，画错一处扣1分，画错两处或以上不给分。画错是指连了不该连的边，或者没有连不该连的边。如果整个图上下全部颠倒，但边没有连错可视为正确的哈斯图。

2. 正确给出极小元给1分，正确给出极大元给1分，正确的含义是既不能多给，也不能少给。

3. 正确给出所有上界给1分，正确给出所有下界给1分，正确的含义是既不能多给，也不能少给。

2. 利用容斥原理求解不定方程$x_1+x_2+x_3+x_4=16$的满足$1\le x_1\le 4, 3\le x_2\le 6, x_3\ge 4$的所有非负整数解个数。

解答：令全集U是该不定方程满足$x_1\ge 1, x_2\ge 3, x_3\ge 4$的所有非负整数解个数。条件$P_1$表示$x_1\ge 5$，条件$P_2$表示$x_2\ge 7$，则所求的是全集中满足$\overline{P}_1\overline{P}_2$的解个数，且由允许重复的组合计数公式有：

$$\begin{aligned}
N &= C(4-1+16-1-3-4, 4-1) = C(11,3) = 165\\
N(P_1) &= C(4-1+16-5-3-4, 4-1) = C(7,3) = 35\\
N(P_2) &= C(4-1+16-1-7-4, 4-1) = C(7,3) = 35\\
N(P_1P_2) &= C(4-1+16-5-7-4, 4-1) = C(3,0) = 1
\end{aligned}$$

因此由容斥原理有$N(\overline{P}_1\overline{P}_2) = N - N(P_1) - N(P_2) + N(P_1P_2) = 165-35-35+1 = 96$。因此该不定方程满足题目所给条件的非负整数解个数有96个。

评分标准：

建议此题总分8分。1. 正确给出全集给1分，正确给出条件P_1给1分，正确给出条件P_2给1分，正确给出四个计算式各给1分，最后利用容斥原理给出正确的最后结果给1分。

2. 如果全集或某个条件没有正确给出，但根据答题者自己给出的条件给出了正确的计算式，则每个正确的计算式仍给1分，最后的容斥原理使用正确也给1分。

3. 如果计算公式和组合数按照答题者自己给出的条件是对的，但组合数的计算结果发生错误，则不管有多少计算错误都扣1分。

五、证明题（24分，第1题10分，第2题8分，第3题6分）

1. 设R是非空集合A上的关系，证明：

(1) 若R是自反的，则其传递闭包$t(R)$也是自反的。

(2) 若R是传递的，则其自反闭包$r(R)$也是传递的。

(3) $rt(R) = tr(R)$为包含R的最小的自反且传递的关系，这里$rt(R)$表示先对R求传递闭包，再求自反闭包，即$rt(R)$是$r(t(R))$，类似地$tr(R)$是$t(r(R))$。

证明　(1) 若R是自反的，则$\Delta_A\subseteq R$，因此$\Delta_A\subseteq R\subseteq t(R)$，因此$t(R)$也是自反的。

(2) 若R是传递的，则$R\circ R\subseteq R$，从而：

$$\begin{aligned}
r(R) &= (R\cup\Delta_A)\circ(R\cup\Delta_A) = (R\circ R)\cup(R\circ\Delta_A)\cup(\Delta_A\circ R)\cup(\Delta_A\circ\Delta_A)\\
&= (R\circ R)\cup R\cup\Delta_A \;\subseteq\; R\cup R\cup\Delta_A = R\cup\Delta_A = r(R)
\end{aligned}$$

因此$r(R)$也是传递的。

(3) 首先，因为$R\subseteq r(R)$，因此$t(R)\subseteq tr(R)$，而$r(R)$是自反的，由(1)所证有$tr(R)$也是自反的，即$tr(R)$是包含$t(R)$的自反关系，因此$rt(R)\subseteq tr(R)$。另一方面，$R\subseteq t(R)$，所以$r(R)\subseteq rt(R)$，而$t(R)$是传递的，由(2)所证有$rt(R)$也是传递的，即$rt(R)$是包含$r(R)$的传递关系，因此$tr(R)\subseteq rt(R)$。综合起来就有$rt(R) = tr(R)$。

最后，对任意关系T，若$R\subseteq T$，且T是自反且传递的关系，则由T是包含R的自反关系有$r(R)\subseteq T$，从而再由T是包含$r(R)$的传递关系有$tr(R)\subseteq T$，这就证明了$rt(R)$是包含R的最小的自反且传递的关系。 □

评分标准：建议此题总分10分。第(1)问2分、第(2)问3分、第(3)问5分（第一部分3分，第二部分2分）。

2. 若$f: A \to B$是从A到B的函数，定义函数$g: B \to 2^A$，$\forall b \in B$，$g(b) = \{x \mid x \in A \wedge f(x) = b\}$，证明：若$f$是$A$到$B$的满射，则$g$是从$B$到$2^A$的单射。

证明 $\forall b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$，因为$f$是满射，所以$\exists a_1, a_2 \in A$使得$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2$，且$f(a_1) \neq f(a_2)$，由于$f$是函数，所以$a_1 \neq a_2$。又$g(b_1) = \{x \mid x \in A \wedge f(x) = b_1\}$，$g(b_2) = \{x \mid x \in A \wedge f(x) = b_2\}$，所以$a_1 \in g(b_1), a_2 \in g(b_2)$但$a_1 \notin g(b_2), a_2 \notin g(b_1)$，所以$g(b_1) \neq g(b_2)$，即$\forall b_1, b_2$当$b_1 \neq b_2$时有$g(b_1) \neq g(b_2)$，因此$g$是单射。 □

评分标准：建议此题总分8分，会利用f是满射3分，会基于f是函数2分，会利用单射的定义3分

3. 设G为具有n个顶点m条边的简单图，且$m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，请证明$G$是连通图。

证明 反证法：若G不连通，则$k = p(G) \geq 2$，设其k个连通分支的顶点数分别为$n_1, n_2, \cdots, n_k$，则对任意的$1 \leq i \leq k$有$1 \leq n_i \leq n-1$，且$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$。当G的每个连通分支都是完全图时边数最大，因此G最多有

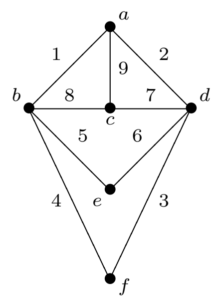
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(n_i-1)}{2} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{(n-1)(n_i-1)}{2} = \frac{n-1}{2} \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = \frac{(n-1)(n-k)}{2}$$

若$k \geq 2$，则与$m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$矛盾，因此$G$只有一个连通分支，即$G$是连通图。 □

评分标准：建议此题总分6分。会利用反证法1分，得到每个连通分支是完全图边数最大3分，最后推出矛盾占2分。

六、算法题（14分，第1题6分，第2题8分）

1. 使用Prim算法计算下面无向图的最小生成树，请使用表格形式给出算法从顶点a开始每一步考虑的边以及挑选的边。



解答：下面表格给出了Prim算法从顶点a开始每一次循环考虑的边以及对边的选择：

Step	Nodes in Tree	Consider Edges	Select Edge
Step 1	a	(a, b), (a, d), (a, c)	[1]=(a, b)
Step 2	a, b	(a, d), (a, c), (b, c), (b, e), (b, f)	[2]=(a, d)
Step 3	a, b, d	(a, c), (b, c), (b, e), (b, f), (c, d), (d, e), (d, f)	[3]=(d, f)
Step 4	a, b, d, f	(a, c), (b, c),(b, e), (c, d), (d, e)	[5]=(b, e)
Step 5	a, b, d, f, e	(a, c), (b, c), (c, d)	[7]=(c, d)

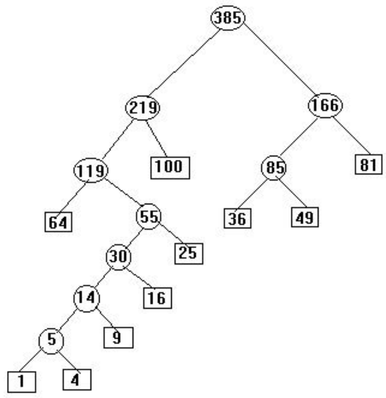
其中中括号括住的数值是相应边的权重，可看到最后得到的最小生成树的总权重为18。

评分标准：

建议此题总分6分。每一步给出的所考虑的边和选中的边全对得1分，计算最后的总权重得1分。

2. 用权数$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$构造一棵最优二叉树，并算出它的权。

解答：下面给出了最终的哈夫曼树，以及它的权。



最终得到的哈夫曼树的权重是

$$81 \times 2 + 36 \times 3 + 49 \times 3 + 100 \times 2 + 25 \times 4 + 1 \times 7 + 4 \times 7 + 9 \times 6 + 16 \times 5 + 64 \times 3 = 1078$$

评分标准：建议此题总分8分，其中给出哈夫曼树6分，计算权重2分。

此卷按题型：选择题30%、填空题8%、计算题（含算法题）28%、证明题（含论证构造）34%
按知识点：逻辑部分17%、组合计数10%、集合关系函数45%、图论28%