离散数学基础习题答案

Answers to Exercises in Elementary Discrete Mathematics

周晓聪　　乔海燕

中山大学数据科学与计算机学院, 广州 510275

2021 年 1 月 19 日

目录

第三章　一阶逻辑

练习 3.1 分析下面句子中原子命题的谓词、量词、个体或个体类，并指出该原子命题是对具体个体进行判断还是对个体类进行判断。

(1) 圆周率π是无理数；

(2) 所有有理数都是实数，而且所有无理数也都是实数；

(3) 有些实数是有理数，而且有些实数是无理数；

(4) 任何两个有理数之间都存在有理数。

解答：(1) 谓词是“…是无理数”，个体是“圆周率π”，这个原子命题是对具体个体“圆周率”进行判断；

(2) 这个命题有两个原子命题“所有有理数都是实数”和“所有无理数也都是实数”，前一个原子命题中谓词是“…是实数”，个体类是“有理数”，量词是“所有”，是全称命题；后一个原子命题中谓词也是“…是实数”，个体类是“无理数”，量词是“所有”，也是全称命题。这两个原子命题都是对个体类进行判断。

(3) 这个命题有两个原子命题“有些实数是有理数”和“有些实数是无理数”，前一个原子命题中谓词是“…是有理数”，个体类是“实数”，量词是“有些”，是存在命题；后一个原子命题中谓词是“…是无理数”，个体类是“实数”，量词是“有些”，也是存在命题。这两个原子命题都是对个体类进行判断。

(4) 这个命题的谓词是“…和…之间存在…”，个体类是“有理数”，量词是“任何”，是全称命题，是对个体类进行判断。

练习* 3.2 画出下面一阶逻辑公式的抽象语法树。

(1) $\forall x(F(x) \to G(x))$　　(2) $\exists x(F(x) \land G(x)) \lor \neg\forall x(G(x) \to F(x))$

(3) $\forall x(F(x) \to \exists y(G(y) \land H(x, y)))$　　(4) $\exists x F(x) \to \exists x\forall y(G(x) \lor H(x, y))$

解答：略

练习 3.3 给出下面一阶逻辑公式的所有子公式。

(1) $\forall x(F(x) \to G(x))$　　(2) $\exists x(F(x) \lor \forall y(G(y) \land H(x, y))$

(3) $\forall x F(x) \lor \exists x G(x)$　　(4) $\forall x\exists y(F(x, y) \to H(x, z))$

解答：(1) 公式$\forall x(F(x) \to G(x))$的子公式除它自己外，还包括$F(x) \to G(x)$，$F(x)$和$G(x)$。

(2) 公式$\exists x(F(x)\vee\forall y(G(y)\wedge H(x,y))$除它自己外，还包括$F(x)\vee\forall y(G(y)\wedge H(x,y))$，$F(x)$，$\forall y(G(y)\wedge H(x,y))$，$G(y)\wedge H(x,y)$，$G(y)$和$H(x,y)$。

(3) 公式$\forall xF(x)\vee\exists xG(x)$的子公式除它自己外，还包括$\forall xF(x)$和$\exists xG(x)$，以及$F(x)$和$G(x)$。

(4) 公式$\forall x\exists y(F(x,y)\to H(x,z))$的子公式除它自己外，还包括$\exists y(F(x,y)\to H(x,z))$，$F(x,y)\to H(x,z)$，以及$F(x,y)$和$H(x,z)$。

练习* 3.4 指出下面公式中每个量词的辖域，以及每个个体变量符号是指示变量、约束出现还是自由出现，并说明每个个体变量是公式的自由变量还是约束变量。

(1) $\exists x(N(x)\to\forall y\forall z(P(y)\wedge L(x,y,z)))$　(2) $\forall x(P(x)\to\exists xQ(x))\vee(\forall xH(x)\to G(x))$

(3) $\exists x\forall y(P(x,y)\to R(x))\wedge Q(y)$　(4) $\forall y(A(x,y)\to\forall xB(x,y))\wedge\exists zC(x,y,z)$

解答：(1) 公式$\exists x(N(x)\to\forall y\forall z(P(y)\wedge L(x,y,z)))$中：

(i) 量词$\exists x$的辖域是公式$(N(x)\to\forall y\forall z(P(y)\wedge L(x,y,z)))$，而量词$\forall y$的辖域是$\forall z(P(y)\wedge L(x,y,z))$，量词$\forall z$的辖域是$(P(y)\wedge L(x,y,z))$。

(ii) $\exists x$中的x是指示变量，而$N(x)$和$L(x,y,z)$中的x都是约束出现；$\forall y$的y是指示变量，$P(y)$和$L(x,y,z)$中的y都是约束出现，$\forall z$中的z是指示变量，$L(x,y,z)$中的z是约束出现。

(iii) 个体变量x,y,z都是公式的约束变量。

(2) 公式$\forall x(P(x)\to\exists xQ(x))\vee(\forall xH(x)\to G(x))$中：

(i) 前一个量词$\forall x$的辖域是$(P(x)\to\exists xQ(x))$，量词$\exists x$的辖域是$Q(x)$，后一个量词$\forall x$的辖域是$H(x)$；

(ii) 前一个量词$\forall x$的x是指示变量，$P(x)$中的x是约束出现，$\exists x$中的x是指示变量，$Q(x)$中的x是约束出现，$\forall x$的x是指示变量，$H(x)$中的x是约束出现，而$G(x)$中的x是自由出现。

(iii) 由于x在$G(x)$中的出现是自由出现，因此x是整个公式的自由变量。

(3) 公式$\exists x\forall y(P(x,y)\to R(x))\wedge Q(y)$中：

(i) 量词$\exists x$的辖域是$\forall y(P(x,y)\to R(x))$，量词$\forall y$的辖域是$(P(x,y)\to R(x))$；

(ii) $\exists x$中的x是指示变量，$P(x,y)$和$R(x)$中的x都是约束出现，$\forall y$是指示变量，$P(x,y)$中的y是约束出现，而$Q(y)$中的y是自由出现；

(iii) x是公式的约束变量，而y是公式的自由变量。

(4) 公式$\forall y(A(x,y)\to\forall xB(x,y))\wedge\exists zC(x,y,z)$中：

(i) 量词$\forall y$的辖域是$(A(x,y)\to\forall xB(x,y))$，量词$\forall x$的辖域是$B(x,y)$，量词$\exists z$的辖域是$C(x,y,z)$；

(ii) $\forall y$中的y是指示变量，$A(x,y)$和$B(x,y)$中的y是约束出现，$C(x,y,z)$中的y是自由出现，$\forall x$中的x是指示变量，$A(x,y)$和$C(x,y,z)$中的x是自由出现，而$B(x,y)$中的x约束出现。$\exists z$中的z是指示变量，$C(x,y,z)$中的z是约束变量；

(iii) x和y是公式的自由变量，而z是公式的约束变量。

练习 3.5 可归纳定义使用新的个体变量y替换个体变量x在一阶公式A的所有自由出现的结果。将替换得到的公式记为$A[y/x]$，完成下面的空以给出$A[y/x]$完整的归纳定义。

(1) 为定义$A[y/x]$，先根据项的结构归纳定义$t[y/x]$，即使用y替换x在项t的所有出现得到的项：

(i) 若t是个体常量c，则$t[y/x]=c[y/x]=c$；

(ii) 若t是个体变量z，则

$$t[y/x] = z[y/x] = \begin{cases} y & 若\ z = x \\ z & 若\ z \neq x \end{cases}$$

(iii) 若t是$f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，则$t[y/x] = $ ____________。

(2) 根据公式A的结构归纳定义$A[y/x]$，

(i) 若A是原子公式$F(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，则$A[y/x] = $ ____________。

(ii) 若A是公式$(\neg B)$，则$A[y/x] = (\neg B)[y/x] = (\neg B[y/x])$。

(iii) 若A是公式$(B \oplus C)$，这里$\oplus$代表$\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$，则$A[y/x] = $ ____________。

(iv) 若公式A是量词公式$\forall z B$，则：

$$A[y/x] = (\forall z B)[y/x] = \begin{cases} \forall z B & 若\ x = z \\ \forall z(B[y/x]) & 若\ x \neq z \end{cases}$$

(v) 若公式A是量词公式$\exists z B$，则$A[y/x] = $ ____________。

解答：(1) 中的(ii)，若t是$f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，则$t[y/x] = f(t_1[y/x], t_2[y/x], \cdots, t_n[y/x])$；
(2) 中的(i)，若A是原子公式$F(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，则

$$A[y/x] = F(t_1, t_2, \cdots, t_n) = F(t_1[y/x], t_2[y/x], \cdots, t_n[y/x])$$

其中的(v)与(iv)类似，若公式A是量词公式$\exists z B$，则：

$$A[y/x] = (\exists z B)[y/x] = \begin{cases} \exists z B & 若\ x = z \\ \exists z(B[y/x]) & 若\ x \neq z \end{cases}$$

【**讨论**】这里的关键是用新的个体变量y替换个体变量x在一阶公式A的所有自由出现的结果，因此当A是$\forall x B$或$\exists x B$时，x是在A中约束出现的，因此用新的个体变量y替换个体变量x在一阶公式A的所有自由出现的结果仍是A，也即替换不能针对约束变量进行。

练习* 3.6 给定解释$\mathcal{M}$：论域$\mathbf{D} = \{-2, 3, 6\}$，而$F(x)$为真当且仅当$x \leq 3$，$G(x)$为真当且仅当$x > 5$。确定公式$\exists x(F(x) \vee G(x))$在解释$\mathcal{M}$下的真值。

解答：$F(x)$为真当且仅当$x \leq 3$，即$F(-2)$和$F(3)$为真，$F(6)$为假，而$G(x)$为真当且仅当$x > 5$，也即$G(-2)$和$G(3)$为假，$G(6)$为真。论域$\mathbf{D}$是有限集，因此可通过展开量词而确定公式的真值：

$$\begin{aligned} \exists x(F(x) \vee G(x)) &\equiv (F(-2) \vee G(-2)) \vee (F(3) \vee G(3)) \vee (F(6) \vee G(6)) \\ &\equiv (\mathbf{1} \vee \mathbf{0}) \vee (\mathbf{1} \vee \mathbf{0}) \vee (\mathbf{0} \vee \mathbf{1}) \ \equiv\ \mathbf{1} \vee \mathbf{1} \vee \mathbf{1} \ \equiv\ \mathbf{1} \end{aligned}$$

练习 3.7 给定解释$\mathcal{M}$，其论域$\mathbf{D}$是整数集，函数符号f的解释是普通乘法，谓词$E(x,y)$的解释是$x=y$，请给出公式$\exists y\forall xE(f(x,y),y)$的直观含义，并根据常识确定其真值。

解答：公式$\exists y\forall xE(f(x,y),y)$的直观含义是，存在整数$y$，对任意整数$x$，都有$x$乘以$y$等于$y$。该公式的真值为真，因为存在整数0，对任意整数$x$都有$x*0=0$。

练习 3.8 给定解释$\mathcal{M}$为：论域$\mathbf{D}=\{2,4\}$，而$P(x)$为真当且仅当x是素数，$D(x,y)$为真当且仅当x可整除y，$E(x,y)$为真当且仅当$x+y=xy$。请给出公式$\forall x\exists y((\neg P(x)\vee D(x,y))\to E(x,y))$在解释$\mathcal{M}$下的真值。

解答：由于论域$\mathbf{D}$是有限集，我们可使用类似等值演算的方法确定公式的真值，而且根据题中所给出的解释有：$P(2)$为真，而$P(4)$为假；$D(2,2),D(2,4),D(4,4)$为真，$D(4,2)$为假；$E(2,2)$为真，而$E(2,4),E(4,2),E(4,4)$为假。因此我们有：

$$\begin{aligned}
&\forall x\exists y((\neg P(x)\vee D(x,y))\to E(x,y))\\
\equiv\ &\exists y((\neg P(2)\vee D(2,y))\to E(2,y))\ \wedge\ \exists y((\neg P(4)\vee D(4,y))\to E(4,y))\\
\equiv\ &(((\neg P(2)\vee D(2,2))\to E(2,2))\vee((\neg P(2)\vee D(2,4))\to E(2,4)))\wedge\\
&(((\neg P(4)\vee D(4,2))\to E(4,2))\vee((\neg P(4)\vee D(4,4))\to E(4,4)))\\
\equiv\ &(((\mathbf{0}\vee\mathbf{1})\to\mathbf{1})\vee((\mathbf{0}\vee\mathbf{1})\to\mathbf{0}))\ \wedge\ (((\mathbf{1}\vee\mathbf{0})\to\mathbf{0})\vee((\mathbf{1}\vee\mathbf{1})\to\mathbf{0}))\\
\equiv\ &(\mathbf{1}\vee\mathbf{0})\wedge(\mathbf{0}\vee\mathbf{0})\ \equiv\ \mathbf{0}
\end{aligned}$$

因此公式$\forall x\exists y((\neg P(x)\vee D(x,y))\to E(x,y))$在解释$\mathcal{M}$下的真值为假。

【**讨论**】公式$\forall x\exists y((\neg P(x)\vee D(x,y))\to E(x,y))$的直观含义是，对任意$x\in\{2,4\}$，存在$y\in\{2,4\}$，若$x$不是素数或$x$整除$y$，则$x+y=xy$。由于存在$x=4$，4不是素数，且对于$y=2$或$y=4$都没有$4+y=4y$，因此该公式在题中所给出的解释$\mathcal{M}$下的真值为假。

练习* 3.9 给定解释$\mathcal{M}$，其论域$\mathbf{D}$是整数集，函数符号f的解释是普通加法，谓词$E(x,y)$的解释是$x=y$，请给出公式$\exists x\forall yE(f(x,y),y)$的直观含义，并根据常识确定其真值。

解答：在解释$\mathcal{M}$下，公式$\exists x\forall yE(f(x,y),y)$的直观含义是，存在整数$x$，对任意整数$y$，有$f(x,y)=y$，也就即，存在整数$x$，对任意整数$y$，有$x+y=y$。因为确实存在$x=0$，对任意整数$y$，都有$0+y=y$，因此该公式在解释$\mathcal{M}$下的真值为真。

练习 3.10 给定解释的论域是自然数集N，确定下面公式的真值。

(1) $\forall x\exists y(2x-y=0)$	(2) $\exists y\forall x(2x-y=0)$
(3) $\forall x\exists y(x-2y=0)$	(4) $\forall x(x<10\to\forall y(y<x\to y<9))$
(5) $\exists y\exists z(y+z=100)$	(6) $\forall x\exists y(y>x\wedge\exists z(y+z=100))$

解答：当解释的论域是自然数集N时：

(1) 公式$\forall x\exists y(2x-y=0)$的直观含义是，对任意自然数$x$，存在自然数$y$，$2x-y=0$，显然真值为真，因为对任意自然是$x$，可令$y=2x$；

(2) 公式$\exists y\forall x(2x-y=0)$的直观含义是，存在自然数$y$，对任意自然数$x$，$2x-y=0$，真值为假，因为对任意自然数$y$，都存在自然数，例如$x=y+1$，使得$2x-y\neq 0$；

(3) 公式$\forall x\exists y(x-2y=0)$的直观含义是，对任意自然数$x$，存在自然数$y$，$x-2y=0$，显然真值为假，因为对自然数$x=1$，不存在自然数$y$，使得$1-2y=0$；

(4) 公式$\forall x(x<10\to\forall y(y<x\to y<9))$的直观含义是，对任意自然数$x$，若$x<10$，则对任意自然数$y$，$y<x$蕴含$y<9$，真值为真，因为对任意小于10的自然数，比它还小的自然数y肯定小于9；

(5) 公式$\exists y\exists z(y+z=100)$的直观含义是，存在自然数$y$，存在自然数$z$，$y+z=100$，显然真值为真，例如可取$y=50, z=50$；

(6) 公式$\forall x\exists y(y>x\wedge\exists z(y+z=100))$的直观含义是，对任意自然数$x$，存在自然数$y$，$y>x$且存在自然数$z$使得$y+z=100$，真值为假，因为对于自然数$x=100$，不存在比$x$还大的自然数$y$，存在自然数$z$使得$y+z=100$。

练习 3.11 给定解释的论域是整数集$\mathbb{Z}$，确定练习3.10中公式的真值。

解答：当解释的论域是整数集$\mathbb{Z}$时：

(1) 公式$\forall x\exists y(2x-y=0)$的直观含义是，对任意整数$x$，存在整数$y$，$2x-y=0$，显然真值为真，因为对任意自然是$x$，可令$y=2x$；

(2) 公式$\exists y\forall x(2x-y=0)$的直观含义是，存在整数$y$，对任意整数$x$，$2x-y=0$，真值为假，因为对任意整数$y$，都存在整数，例如$x=y+1$，使得$2x-y\neq 0$；

(3) 公式$\forall x\exists y(x-2y=0)$的直观含义是，对任意整数$x$，存在整数$y$，$x-2y=0$，显然真值为假，因为对整数$x=1$，不存在整数$y$，使得$1-2y=0$；

(4) 公式$\forall x(x<10\to\forall y(y<x\to y<9))$的直观含义是，对任意整数$x$，若$x<10$，则对任意整数$y$，$y<x$蕴含$y<9$，真值为真，因为对任意小于10的整数，比它还小的整数y肯定小于9；

(5) 公式$\exists y\exists z(y+z=100)$的直观含义是，存在整数$y$，存在整数$z$，$y+z=100$，显然真值为真，例如可取$y=50, z=50$；

(6) 公式$\forall x\exists y(y>x\wedge\exists z(y+z=100))$的直观含义是，对任意整数$x$，存在整数$y$，$y>x$且存在整数$z$使得$y+z=100$，**真值为真**，因为对任意整数$x$，总存在比它大的整数$y$，且存在整数$z=100-y$使得$y+z=100$。

练习 3.12 给定解释的论域是实数集$\mathbb{R}$，确定练习3.10中公式的真值。

解答：当解释的论域是实数集$\mathbb{R}$时：

(1) 公式$\forall x\exists y(2x-y=0)$的直观含义是，对任意实数$x$，存在实数$y$，$2x-y=0$，显然真值为真，因为对任意自然是$x$，可令$y=2x$；

(2) 公式$\exists y\forall x(2x-y=0)$的直观含义是，存在实数$y$，对任意实数$x$，$2x-y=0$，真值为假，因为对任意实数$y$，都存在实数，例如$x=y+1$，使得$2x-y\neq 0$；

(3) 公式$\forall x\exists y(x-2y=0)$的直观含义是，对任意实数$x$，存在实数$y$，$x-2y=0$，**真值为真**，因为对任意实数$x$，都可令实数$y=x/2$，这样就有$x-2y=0$；

(4) 公式$\forall x(x<10\to\forall y(y<x\to y<9))$的直观含义是，对任意实数$x$，如果$x<10$，则对任意实数$y$，$y<x$蕴含$y<9$，**真值为假**，因为对任意小于10的实数$x$，当实数$y$小于$x$时不意味着$y<9$，例如，对于实数$x=9.5$，$y=9.2$，$x<10$且$y<x$，但$x>9$。

(5) 公式$\exists y\exists z(y+z=100)$的直观含义是，存在实数$y$，存在实数$z$，$y+z=100$，显然真值为真，例如可取$y=50, z=50$；

(6) 公式$\forall x\exists y(y>x\wedge\exists z(y+z=100))$的直观含义是，对任意实数$x$，存在实数$y$，$y>x$且存在实数$z$使得$y+z=100$，**真值为真**，因为对任意实数$x$，总存在比它大的实数$y$，且存在实数$z=100-y$使得$y+z=100$。

【**讨论**】可以看到，当论域不同时，公式的真值也不相同。从另一角度看，公式的真值不同也反映了不同论域的特点。例如，当论域为自然数集和整数集时，公式(6)的真值不同，这是因为整数集包括负数，而自然数集没有负数；当论域为整数集和实数集时，公式(3)的真值不同，反映实数集包含小数，但整数集不包含小数，不能除以任意整数；公式(4)的真值不同，反映整数集不是连续的，而实数集是连续的，任意两个实数之间都存在实数，但并不是任意两个整数之间还存在整数。

练习* 3.13 给定解释的论域$D=\{a,b\}$，使用类似等值演算的方式展开下面公式中的量词。

(1) $\forall x(F(x)\wedge\exists yG(x,y))$　　(2) $\forall x(F(x)\to\exists yG(x,y))$

(3) $\forall x\forall y(P(x,y)\to\neg P(y,x))$　　(4) $\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\to H(y,z)))$

解答:

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & \forall x(F(x)\wedge\exists yG(x,y))\\
\equiv\ & (F(a)\wedge\exists yG(a,y))\ \wedge\ (F(b)\wedge\exists yG(b,y))\\
\equiv\ & (F(a)\wedge(G(a,a)\vee G(a,b)))\ \wedge\ (F(b)\wedge(G(b,a)\vee G(b,b)))\\
(2)\quad & \forall x(F(x)\to\exists yG(x,y))\\
\equiv\ & (F(a)\to\exists yG(a,y))\ \wedge\ (F(b)\to\exists yG(b,y))\\
\equiv\ & (F(a)\to(G(a,a)\vee G(a,b)))\ \wedge\ (F(b)\to(G(b,a)\vee G(b,b)))\\
(3)\quad & \forall x\forall y(P(x,y)\to\neg P(y,x))\\
\equiv\ & \forall y(P(a,y)\to\neg P(y,a))\ \wedge\ \forall y(P(b,y)\to\neg P(y,b))\\
\equiv\ & ((P(a,a)\to\neg P(a,a))\wedge(P(a,b)\to\neg P(b,a)))\wedge\\
& ((P(b,a)\to\neg P(a,b))\wedge(P(b,b)\to\neg P(b,b)))\\
(4)\quad & \exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\to H(y,z)))\\
\equiv\ & (F(a)\wedge\forall y(G(y)\to H(y,z)))\vee(F(b)\wedge\forall y(G(y)\to H(y,z)))\\
\equiv\ & (F(a)\wedge(G(a)\to H(a,z))\wedge(G(b)\to H(b,z)))\vee\\
& (F(b)\wedge(G(a)\to H(a,z))\wedge(G(b)\to H(b,z)))
\end{aligned}
$$

练习* 3.14 判断下面公式是永真式、矛盾式还是只是可满足式（而非永真式），并说明理由。

(1) $\exists x(A(x)\wedge B(x))\to\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$　　(2) $\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)\to\exists x(A(x)\wedge B(x))$

(3) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\to\forall x(A(x)\vee B(x))$　　(4) $\forall x(A(x)\vee B(x))\to\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$

解答：

(1) $\exists x(A(x)\wedge B(x)) \to \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$是永真式，对任意解释，若$\exists x(A(x)\wedge B(x))$的真值为真，也即存在解释论域的元素$d$使得$A(d) \wedge B(d)$的真值为真，也即存在解释论域的元素$d$使得$A(d)$为真，而且$B(d)$为真，从而存在解释论域的元素$d$使得$A(d)$为真，而且存在论域解释的元素$d$使得$B(d)$为真，也即$\exists xA(x)$为真且$\exists xB(x)$为真，即$\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$为真。

(2) $\exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \to \exists x(A(x) \wedge B(x))$只是可满足式，不是永真式。例如，设解释$\mathcal{M}_1$的论域是正整数集，$A(x)$的解释是$x$是奇数，$B(x)$的解释是$x$是偶数，这时$\exists xA(x)$的直观含义是存在正整数是偶数，这显然为真，而$\exists xB(x)$的直观含义是存在正整数是奇数，这也显然为真，因此公式$\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$的真值为真。但公式$\exists x(A(x) \wedge B(x))$的直观含义是存在正整数既是奇数也是偶数，这显然为假，因此整个蕴涵式$\exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \to \exists x(A(x) \wedge B(x))$的真值为假。

另一方面，设解释$\mathcal{M}_2$的论域也是正整数集，$A(x)$的解释是x是奇数，$B(x)$的解释是x是质数，则$\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$的直观含义是，存在正整数是奇数，而且存在正整数是质数，这显然为真，而公式$\exists x(A(x) \wedge B(x))$的直观含义是，存在正整数，它既是奇数又是质数，这也为真，因此整个蕴涵式的真值为真。

从这两个解释我们得到公式$\exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \to \exists x(A(x) \wedge B(x))$是可满足式，但不是永真式。

(3) $\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \to \forall x(A(x) \vee B(x))$是永真式。对任意解释，若$\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$为真，则$\forall xA(x)$为真，或者$\forall xB(x)$为真。分情况考虑：(i) 若$\forall xA(x)$为真，即对解释论域的任意元素$d$，都有$A(d)$为真，从而对解释论域的任意元素$d$都有$A(d) \vee B(d)$为真，即$\forall x(A(x) \vee B(x))$为真；(ii) 若$\forall xB(x)$为真，即对解释论域的任意元素$d$，都有$B(d)$为真，从而对解释论域的任意元素$d$都有$A(d)\vee B(d)$为真，即$\forall x(A(x)\vee B(x))$为真。总之，总有$\forall x(A(x)\vee B(x))$为真，这就证明了$\forall xA(x)\vee \forall xB(x) \to \forall x(A(x) \vee B(x))$是永真式。

(4) $\forall x(A(x)\vee B(x)) \to \forall xA(x)\vee\forall xB(x)$不是永真式，只是可满足式。设解释$\mathcal{M}_1$的论域是$D = \{1,2\}$，$A$的解释是$A(1)$为真，$A(2)$为假，而$B$的解释是$B(1)$为假，而$B(2)$为真，则$\forall x(A(x)\vee B(x))$逻辑等值于$(A(1) \vee B(1)) \wedge (A(2) \vee B(2))$，从而其真值为真，而$\forall xA(x)$的真值为假，$\forall xB(x)$的真值也为假，从而$\forall x(A(x)\vee B(x))$的真值也为假，因此整个蕴涵式$\forall x(A(x)\vee B(x)) \to \forall xA(x)\vee\forall xB(x)$的真值为假。

另一方面，设解释$\mathcal{M}_2$的论域也是$D = \{1,2\}$，A的解释是$A(1)$和$A(2)$都为真，而B的解释是$B(1)$和$B(2)$都为真，显然这时$\forall x(A(x) \vee B(x))$和$\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$的真值都为真，整个蕴涵式的真值为真。

从这两个解释我们得到公式$\forall x(A(x) \vee B(x)) \to \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$是可满足式，但不是永真式。

练习 3.15 判断下面公式是永真式、矛盾式还是只是可满足式（而非永真式），并说明理由。

(1)	$\forall x\exists yF(x,y) \to \exists y\forall xF(x,y)$	(2)	$\exists y\forall xF(x,y) \to \forall x\exists yF(x,y)$
(3)	$\forall x\forall yF(x,y) \to \exists x\forall yF(x,y)$	(4)	$\forall x\forall yF(x,y) \to \forall x\exists yF(x,y)$
(5)	$\exists x\exists yF(x,y) \to \exists x\forall yF(x,y)$	(6)	$\exists x\exists yF(x,y) \to \forall x\exists yF(x,y)$

解答：(1) 公式$\forall x\exists yF(x,y) \to \exists y\forall xF(x,y)$是非永真式的可满足式。设解释的论域是$\mathbf{D} = \{a,b\}$。(i) 若$F$的解释是：$F(a,a), F(a,b), F(b,a), F(b,b)$都为假，也即$F$的解释是空集，那么$\forall x\exists yF(x,y)$的真值为假，从而整个蕴涵式的真值为真；(ii) 但若F的解释是$F(a,b), F(b,a)$为真，而$F(a,a), F(b,b)$的

真值为假，则$\forall x\exists yF(x,y)$的真值为真，而$\exists y\forall xF(x,y)$的真值为假，整个蕴涵式的真值为假。

(2) 公式$\exists y\forall xF(x,y)\to\forall x\exists yF(x,y)$是永真式，因为对任意解释，设其论域是$\mathbf{D}$，若$\exists y\forall xF(x,y)$的真值为真，则存在论域的元素$y$使得对论域的任意元素$x$，都有$F(x,y)$为真。由于论域非空，因此存在论域元素$d_0$，使得对任意元素$x$，都有$F(x,d_0)$为真。从而对论域的任意元素$x$，都存在$y=d_0$，使得$F(x,d_0)$为真，即$\forall x\exists yF(x,y)$的真值为真，因此这个公式是永真式。

(3) 公式$\forall x\forall yF(x,y)\to\exists x\forall yF(x,y)$是永真式，因为对任意解释，设其论域是$\mathbf{D}$，若$\forall x\forall yF(x,y)$的真值为真，则对论域的任意元素$x,y$，都有$F(x,y)$为真。由于论域非空，因此存在论域元素$d_0$，且对任意元素$y$，也都有$F(d_0,y)$为真，即$\exists x\forall yF(x,y)$的真值为真，因此这个公式是永真式。

(4) 公式$\forall x\forall yF(x,y)\to\forall x\exists yF(x,y)$是永真式，因为对任意解释，设其论域是$\mathbf{D}$，若$\forall x\forall yF(x,y)$的真值为真，则对论域的任意元素$x,y$，都有$F(x,y)$为真。由于论域非空，因此存在论域元素$d_0$，且对任意元素$x$，也都有$F(x,d_0)$为真，也即对论域任意元素$x$，都存在论域元素$d_0$使得$F(x,d_0)$为真，从而$\forall x\exists yF(x,y)$的真值为真，因此这个公式是永真式。

(5) 公式$\exists x\exists yF(x,y)\to\exists x\forall yF(x,y)$是非永真式的可满足式。设解释的论域是$\mathbf{D}=\{a,b\}$。(i) 若$F$的解释是：$F(a,a),F(a,b),F(b,a),F(b,b)$都为假，也即$F$的解释是空集，那么$\exists x\exists yF(x,y)$的真值为假，从而整个蕴涵式的真值为真；(ii) 但若F的解释是$F(a,b),F(b,a)$为真，而$F(a,a),F(b,b)$的真值为假，则$\exists x\exists yF(x,y)$的真值为真，而$\exists x\forall yF(x,y)$的真值为假，整个蕴涵式的真值为假。

(6) 公式$\exists x\exists yF(x,y)\to\forall x\exists yF(x,y)$是非永真式的可满足式。设解释的论域是$\mathbf{D}=\{a,b\}$。(i) 若$F$的解释是：$F(a,a),F(a,b),F(b,a),F(b,b)$都为假，也即$F$的解释是空集，那么$\exists x\exists yF(x,y)$的真值为假，从而整个蕴涵式的真值为真；(ii) 但若F的解释是$F(a,b)$为真，而$F(a,a),F(b,a),F(b,b)$的真值为假，则$\exists x\exists yF(x,y)$的真值为真，而$\forall x\exists yF(x,y)$的真值为假，整个蕴涵式的真值为假。

【讨论】(1) 要说明一个公式只是可满足式（而非永真式），则要给出一个解释使得该公式的真值为真，还要给出一个解释使得该公式的真值为假；

(2) 这些公式都是闭公式，因此在确定公式真值时无需考虑个体变量指派函数。这里为简单起见，我们给出的解释都只使用了简单的有限论域。通常，对于这种给出解释确定公式真值的问题，我们无需给出像自然数集、整数集这种似乎更有意义的集合作为论域。

练习 3.16 使用约束变量改名分别将下面的公式变换为一个逻辑等值的公式，且该公式每个量词的指示变量都不同，而且每个个体变量要么只是约束出现，要么只是自由出现。

$$\begin{aligned}&(1)\quad \forall x(F(x,y)\to\exists y(G(x,y)\wedge H(z)))\to\forall xQ(x,z)\\&(2)\quad \exists x(A(x,y)\to\forall yB(y,z))\to\exists yC(x,y,z)\end{aligned}$$

解答：对于每个公式，我们使用等值演算来得到满足要求的公式：

$$\begin{aligned}(1)\quad &\forall x(F(x,y)\to\exists y(G(x,y)\wedge H(z)))\to\forall xQ(x,z) && //\ \text{约束变量改名}\\ \equiv\ &\forall u(F(u,y)\to\exists y(G(u,y)\wedge H(z)))\to\forall xQ(x,z) && //\ \text{约束变量改名}\\ \equiv\ &\forall u(F(u,y)\to\exists v(G(u,v)\wedge H(z)))\to\forall xQ(x,z) && //\ \text{量词辖域扩充}\\ \equiv\ &\forall u\exists v(F(u,y)\to(G(u,v)\wedge H(z)))\to\forall xQ(x,z) && //\ \text{量词辖域扩充}\\ \equiv\ &\exists u(\exists v(F(u,y)\to(G(u,v)\wedge H(z)))\to\forall xQ(x,z)) && //\ \text{量词辖域扩充}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \exists u\forall v((F(u,y)\to(G(u,v)\wedge H(z)))\to\forall xQ(x,z)) && \text{// 量词辖域扩充}\\
&\equiv \exists u\forall v\forall x((F(u,y)\to(G(u,v)\wedge H(z)))\to Q(x,z))
\end{aligned}$$

这样得到的公式，每个量词的指示变量都不相同，且u,v,x只是约束出现，而y,z只是自由出现。

$$\begin{aligned}
(2)\quad & \exists x(A(x,y)\to\forall yB(y,z))\to\exists yC(x,y,z) && \text{// 约束变量改名}\\
&\equiv \exists u(A(u,y)\to\forall yB(y,z))\to\exists yC(x,y,z) && \text{// 约束变量改名}\\
&\equiv \exists u(A(u,y)\to\forall vB(v,z))\to\exists yC(x,y,z) && \text{// 约束变量改名}\\
&\equiv \exists u(A(u,y)\to\forall vB(v,z))\to\exists wC(x,w,z) && \text{// 量词辖域扩充}\\
&\equiv \exists u\forall v(A(u,y)\to B(v,z))\to\exists wC(x,w,z) && \text{// 量词辖域扩充}\\
&\equiv \forall u(\forall v(A(u,y)\to B(v,z))\to\exists wC(x,w,z)) && \text{// 量词辖域扩充}\\
&\equiv \forall u\exists v((A(u,y)\to B(v,z))\to\exists wC(x,w,z)) && \text{// 量词辖域扩充}\\
&\equiv \forall u\exists v\exists w((A(u,y)\to B(v,z))\to C(x,w,z))
\end{aligned}$$

这样得到的公式，每个量词的指示变量都不相同，且u,v,w只是约束出现，而x,y,z只是自由出现。

练习* 3.17 根据逻辑等值的定义证明$\exists x(P(x)\to Q(x))\ \equiv\ \forall xP(x)\to\exists xQ(x)$。

证明 对任意解释，如果$\exists x(P(x)\to Q(x))$的真值为真，则存在解释论域的元素d，使得$P(d)\to Q(d)$为真，我们分情况讨论：(i) 若$P(d)$为假，则$\forall xP(x)$为假，从而蕴涵是$\forall xP(x)\to\exists xQ(x)$平凡为真；(ii) 若$P(d)$为真，则$Q(d)$也为真，从而存在论域元素$d$使得$Q(d)$为真，从而$\exists xQ(x)$为真，从而蕴涵式$\forall xP(x)\to xQ(x)$为真。

反之，若$\forall xP(x)\to\exists xQ(x)$为真，我们同样分情况讨论：(i) 若$\forall xP(x)$为假，则存在论域的元素$d$使得$P(d)$为假，从而这时$P(d)\to Q(d)$为真，也即存在论域元素$d$使得$P(d)\to Q(d)$为真，从而$\exists x(P(x)\to Q(x))$为真。(ii) 若$\forall xP(x)$为真，则$\exists xQ(x)$也为真，从而存在论域元素$d$，使得$Q(d)$为真，从而存在论域元素$d$使得$P(d)\to Q(d)$为真，即$\exists x(P(x)\to Q(x))$为真。

综上我们证明了逻辑等值式$\exists x(P(x)\to Q(x))\ \equiv\ \forall xP(x)\to\exists xQ(x)$。 □

练习 3.18 判断$\forall x(P(x)\leftrightarrow Q(x))$和$\forall xP(x)\leftrightarrow\forall xQ(x)$是否逻辑等值，并说明理由。

解答：这两个公式不逻辑等值。设解释的论域$\mathbf{D}=\{a,b\}$，$P(a)$为真，而$P(b)$为假，$Q(a)$为假，而$Q(b)$为真，则这时$\forall x(P(x)\leftrightarrow Q(x))$的真值显然为假，而$\forall xP(x)$的真值为假，$\forall xQ(x)$的真值也为假，从而$\forall xP(x)\leftrightarrow\forall xQ(x)$的真值为真，因此这两者不逻辑等值。

【**讨论**】(1) 实际上，我们可证明$\forall x(P(x)\leftrightarrow Q(x))$的真值为真，蕴含$\forall xP(x)\leftrightarrow\forall xQ(x)$的真值也为真。对任意解释$\mathcal{M}$，设其论域是$\mathbf{D}$。若$\forall x(P(x)\leftrightarrow Q(x))$为真，即对论域的任意元素$x$，$P(x)$的真值和$Q(x)$的真值都相同，从而若$\forall xP(x)$的真值为真，即对论域的任意元素$x$，$P(x)$为真，那么$Q(x)$也为真，即对论域任意元素$x$，也有$Q(x)$为真，即$\forall xQ(x)$的真值为真，反之，若$\forall xP(x)$的真值为真，则也有$\forall xP(x)$的真值为真。

但若$\forall xP(x)\leftrightarrow\forall xQ(x)$的真值为真，则$\forall x(P(x)\leftrightarrow Q(x))$的真值也为真，除非$\forall xP(x)$和$\forall xQ(x)$的真值都为真。

练习 3.19 使用一阶逻辑的等值演算证明等值式$\forall xP(x)\to\exists x\neg Q(x)\ \equiv\ \neg\forall x(P(x)\wedge Q(x))$。

解答：我们有下面的等值演算：

$$\begin{aligned}
\forall x P(x) \to \exists x \neg Q(x)) &\equiv \neg \forall x P(x) \lor \exists x \neg Q(x) && \text{// 蕴涵等值式} \\
&\equiv \exists x(\neg P(x)) \lor \exists x \neg Q(x) && \text{// 量词否定等值式} \\
&\equiv \exists x(\neg P(x) \lor \neg Q(x)) && \text{// 存在量词对析取分配} \\
&\equiv \exists x(\neg(P(x) \land Q(x))) && \text{// 德摩尔根律} \\
&\equiv \neg \forall x(P(x) \land Q(x)) && \text{// 量词否定等值式}
\end{aligned}$$

练习* 3.20 使用一阶逻辑的等值演算证明等值式$\exists x(G(x) \to H(x)) \equiv \exists x \exists y(G(x) \to H(y))$。

解答：我们可使用下面的等值演算证明上述等值式：

$$\begin{aligned}
\exists x(G(x) \to H(x)) &\equiv \exists x(\neg G(x) \lor H(x)) && \text{// 蕴涵等值式} \\
&\equiv \exists x(\neg G(x)) \lor \exists x H(x) && \text{// 存在量词对析取分配} \\
&\equiv \exists x(\neg G(x)) \lor \exists y H(y) && \text{// 约束变量改名} \\
&\equiv \exists x(\neg G(x) \lor \exists y H(y)) && \text{// 量词辖域扩张} \\
&\equiv \exists x \exists y(G(x) \lor H(y)) && \text{// 量词辖域扩张} \\
&\equiv \exists x \exists y(G(x) \to H(y)) && \text{// 蕴涵等值式}
\end{aligned}$$

练习 3.21 给出与下面一阶逻辑公式逻辑等值的一个前束范式。

$$\forall x(A(x) \to B(x,y)) \to (\forall y \neg C(y) \lor \exists z D(y,z))$$

解答：我们使用下面的等值演算求与该公式等值的一个前束范式：

$$\begin{aligned}
& \forall x(A(x) \to B(x,y)) \to (\forall y \neg C(y) \lor \exists z D(y,z)) \\
\equiv\ & \forall x(A(x) \to B(x,y)) \to (\forall u \neg C(u) \lor \exists z D(y,z)) && \text{// 约束变量改名} \\
\equiv\ & \exists x((A(x) \to B(x,y)) \to (\forall u \neg C(u) \lor \exists z D(y,z))) && \text{// 量词辖域扩张} \\
\equiv\ & \exists x((A(x) \to B(x,y)) \to \forall u(\neg C(u) \lor \exists z D(y,z))) && \text{// 量词辖域扩张} \\
\equiv\ & \exists x \forall u((A(x) \to B(x,y)) \to (\neg C(u) \lor \exists z D(y,z))) && \text{// 量词辖域扩张} \\
\equiv\ & \exists x \forall u((A(x) \to B(x,y)) \to \exists z(\neg C(u) \lor D(y,z))) && \text{// 量词辖域扩张} \\
\equiv\ & \exists x \forall u \exists z((A(x) \to B(x,y)) \to (\neg C(u) \lor D(y,z))) && \text{// 量词辖域扩张}
\end{aligned}$$

因此得到与该公式逻辑等值的一个前束范式是：$\exists x \forall u \exists z((A(x) \to B(x,y)) \to (\neg C(u) \lor D(y,z)))$。

练习* 3.22 给出与下面一阶逻辑公式逻辑等值的一个前束范式。

$$\exists x(F(x) \to G(x,y)) \to (\forall y H(y) \to \forall z R(y,z))$$

解答：我们使用下面的等值演算求与该公式等值的一个前束范式：

$$
\begin{aligned}
& \exists x(F(x) \to G(x,y)) \to (\forall y H(y) \to \forall z R(y,z)) && // \text{约束变量改名} \\
\equiv\ & \exists x(F(x) \to G(x,y)) \to (\forall u H(u) \to \forall z R(y,z)) && // \text{量词辖域扩张} \\
\equiv\ & \forall x((F(x) \to G(x,y)) \to (\forall u H(u) \to \forall z R(y,z))) && // \text{量词辖域扩张} \\
\equiv\ & \forall x((F(x) \to G(x,y)) \to \exists u(H(u) \to \forall z R(y,z))) && // \text{量词辖域扩张} \\
\equiv\ & \forall x \exists u((F(x) \to G(x,y)) \to (H(u) \to \forall z R(y,z))) && // \text{量词辖域扩张} \\
\equiv\ & \forall x \exists u((F(x) \to G(x,y)) \to \forall z(H(u) \to R(y,z))) && // \text{量词辖域扩张} \\
\equiv\ & \forall x \exists u \forall z((F(x) \to G(x,y)) \to (H(u) \to R(y,z)))
\end{aligned}
$$

因此得到与该公式逻辑等值的一个前束范式是：$\forall x \exists u \forall z((F(x) \to G(x,y)) \to (H(u) \to R(y,z)))$。

练习 3.23 在一阶逻辑的自然推理系统中，指出下面论证的错误：

(1)	$\exists x P(x)$	// 前提
(2)	$P(a)$	// (1)存在例化
(3)	$\exists x P(x) \to \forall y R(y)$	// 前提引入
(4)	$P(a) \to \forall y R(y)$	// (3)存在例化
(5)	$P(a) \to R(b)$	// (4)全称例化
(6)	$R(b)$	// (2),(5)假言推理
(7)	$P(a) \wedge R(b)$	// (2),(6)合取规则
(8)	$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	// (7)存在泛化

解答：(3)不能通过存在存在例化得到(4)，(3)不是前束范式公式，应该先使用等值演算变换为前束范式公式$\exists x P(x) \to \forall y R(y) \equiv \forall x(P(x) \to \forall y R(y)) \equiv \forall x \forall y(P(x) \to R(y))$，然后使用两次全称例化得到$P(a) \to R(a)$。上述的论证中，(7)也不能通过存在泛化得到(8)，因为(7)中的两个常量不相同。改正后的论证如下：

(1)	$\exists x P(x)$	// 前提
(2)	$P(a)$	// (1)存在例化
(3)	$\exists x P(x) \to \forall y R(y)$	// 前提引入
(4)	$\forall x \forall y(P(x) \to R(y))$	// (3)辖域扩张
(5)	$\forall y(P(a) \to R(y))$	// (4)全称例化
(6)	$P(a) \to R(a)$	// (5)全称例化
(7)	$R(a)$	// (2),(6)假言推理
(8)	$P(a) \wedge R(a)$	// (2),(7)合取规则
(9)	$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	// (8)存在泛化

也可以是这样：

(1) $\exists x P(x)$ // 前提
(2) $\exists x P(x) \to \forall y R(y)$ // 前提引入
(3) $\forall y R(y)$ // (1),(2)假言推理
(4) $P(a)$ // (1)存在例化
(5) $R(a)$ // (3)全称例化
(6) $P(a) \wedge R(a)$ // (4),(5)合取规则
(7) $\exists (P(x) \wedge R(x))$ // (6)存在泛化

练习* 3.24 待验证的推理是：$\forall x(A(x) \to B(x)) \Longrightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$，请指出下面论证的错误，并改正（即给出正确的论证）：

(1) $\forall x(A(x) \to B(x))$ // 前提引入
(2) $A(a) \to B(a)$ // (1)全称量词消除
(3) $\exists x A(x)$ // 附加前提引入
(4) $A(a)$ // (3)存在量词消除
(5) $B(a)$ // (2),(4)蕴涵消除
(6) $\exists x B(x)$ // (5)存在量词引入
(7) $\exists x A(x) \to \exists x B(x)$ // (3),(6)附加前提证明法

解答：上述论证中的第(4)步是错误的，在使用存在量词消除时使用了在前面的公式序列中已经存在的个体常量a，应该改正为：

(1) $\exists x A(x)$ // 附加前提引入
(2) $A(a)$ // (3)存在量词消除
(3) $\forall x(A(x) \to B(x))$ // 前提引入
(4) $A(a) \to B(a)$ // (1)全称量词消除
(5) $B(a)$ // (2),(4)蕴涵消除
(6) $\exists x B(x)$ // (5)存在量词引入
(7) $\exists x A(x) \to \exists x B(x)$ // (1),(6)附加前提证明法

练习* 3.25 构造论证验证从前提$\exists x F(x) \to \forall y(G(y) \to H(y))$，$\exists x L(x) \to \exists y G(y)$推出结论$\exists x(F(x) \wedge L(x)) \to \exists y H(y)$的推理的有效性。

解答：可使用下面的论证验证推理的有效性：

(1) $\exists x(F(x) \wedge L(x))$ // 附加前提

(2) $F(a) \wedge L(a)$	// (1)存在量词消除
(3) $L(a)$	// (2)合取消除
(4) $\exists x L(x)$	// (3)存在量词引入
(5) $\exists x L(x) \to \exists y G(y)$	// 前提
(6) $\exists y G(y)$	// (4),(5)假言推理
(7) $F(a)$	// (2)合取消除
(8) $\exists x F(x)$	// (7)存在量词引入
(9) $\exists x F(x) \to \forall y(G(y) \to H(y))$	// 前提
(10) $\forall y(G(y) \to H(y))$	// (8),(9)假言推理
(11) $G(b)$	// (6)存在量词消除
(12) $G(b) \to H(b)$	// (10)存在量词消除
(13) $H(b)$	// (11),(12)假言推理
(14) $\exists y H(y)$	// (13)存在量词引入

练习* 3.26 构造论证验证从前提$\neg\exists x(F(x) \wedge H(x))$, $\forall x(G(x) \to H(x))$推出结论$\forall x(G(x) \to \neg F(x))$的推理的有效性。

解答：可使用下面的论证验证推理的有效性：

(1) $G(y)$	// 附加前提
(2) $\forall x(G(x) \to H(x))$	// 前提
(3) $G(y) \to H(y)$	// (2)全称量词消除
(4) $H(y)$	// (1),(3)假言推理
(5) $\neg\exists x(F(x) \wedge H(x))$	// 前提
(6) $\forall x(\neg F(x) \vee \neg H(x))$	// (5)逻辑等值
(7) $\neg F(y) \vee \neg H(y)$	// (6)全称量词消除
(8) $\neg F(y)$	// (4),(7)析取三段论
(9) $G(y) \to \neg F(y)$	// (1),(8)附加前提法
(10) $\forall x(G(x) \to \neg F(x))$	// (9)全称量词引入

练习 3.27 构造论证验证从前提$\exists x P(x) \to \forall x((P(x) \vee Q(x)) \to R(x))$, $\exists x P(x), \exists x Q(x)$推出结论$\exists x \exists y(R(x) \wedge R(y))$的推理的有效性

解答：可使用下面的论证验证推理的有效性：

(1) $\exists x P(x)$	// 前提
(2) $\exists x P(x) \to \forall x((P(x) \vee Q(x)) \to R(x))$	// 前提

$$
\begin{array}{lll}
(3) & \forall x((P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x)) & // \text{(1),(2)假言推理} \\
(4) & P(a) & // \text{(1)存在例化} \\
(5) & P(a) \vee Q(a) & // \text{(4)附加规则} \\
(6) & P(a) \vee Q(a) \rightarrow R(a) & // \text{(3)全称例化} \\
(7) & R(a) & // \text{(5),(6)假言推理} \\
(8) & \exists x Q(x) & // \text{前提} \\
(9) & Q(b) & // \text{(8)存在例化} \\
(10) & P(b) \vee Q(b) & // \text{(9)附加规则} \\
(11) & P(b) \vee Q(b) \rightarrow R(b) & // \text{(3)全称例化} \\
(12) & R(b) & // \text{(10),(11)假言推理} \\
(13) & R(a) \wedge R(b) & // \text{(7),(12)合取规则} \\
(14) & \exists y(R(a) \wedge R(y)) & // \text{(13)存在泛化} \\
(15) & \exists x \exists y(R(x) \wedge R(y)) & // \text{(14)存在泛化}
\end{array}
$$

【**讨论**】实际上，我们可证明$\exists x \exists y(R(x) \wedge R(y))$与$\exists x R(x)$逻辑等值：

$$
\begin{aligned}
\exists x R(x) & \equiv \exists x R(x) \wedge \exists x R(x) && // \text{幂等律} \\
& \equiv \exists x R(x) \wedge \exists y R(y) && // \text{约束变量改名} \\
& \equiv \exists x(R(x) \wedge \exists y R(y)) && // \text{量词辖域扩充} \\
& \equiv \exists x \exists y(R(x) \wedge R(y)) && // \text{量词辖域扩充}
\end{aligned}
$$

练习 3.28 构造论证验证从前提$\forall x(F(x) \rightarrow G(x) \wedge H(x)), \exists x(F(x) \wedge Q(x))$推出结论$\exists x(H(x) \wedge Q(x))$的推理的有效性。

解答：可使用下面的论证验证推理的有效性：

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \exists x(F(x) \wedge Q(x)) & // \text{前提} \\
(2) & F(a) \wedge Q(a) & // \text{(1)存在例化} \\
(3) & \forall x(F(x) \rightarrow G(x) \wedge H(x)) & // \text{前提} \\
(4) & F(a) \rightarrow G(a) \wedge H(a) & // \text{(3)全称例化} \\
(5) & F(a) & // \text{(2)化简规则} \\
(6) & G(a) \wedge H(a) & // \text{(4),(5)假言推理} \\
(7) & H(a) & // \text{(6)化简规则} \\
(8) & Q(a) & // \text{(2)化简规则} \\
(9) & H(a) \wedge Q(a) & // \text{(7),(8)合取规则} \\
(10) & \exists x(H(x) \wedge Q(x)) & // \text{(9)存在泛化}
\end{array}
$$

练习* 3.29 根据给定的谓词将自然语言命题符号化为一阶逻辑公式。

(1) 设$A(x)$表示x是考生，$B(x)$表示x提前进入考场，$C(x)$表示x取得良好成绩，符号化句子“并非所有提前进入考场的考生都能取得良好成绩”；

(2) 令$P(x)$表示x是素数，$G(x,y)$表示x大于等于y，符号化句子“没有最大的素数”；

(3) 令$N(x)$表示x是自然数，$E(x,y)$表示x等于y，$S(x,y)$表示y是x的后继，符号化句子“每个自然数都有惟一的后继”；

(4) 令$P(x)$表示x是汽车，$Q(x)$表示x是火车，$R(x,y)$表示x比y慢，符号化句子“有些汽车比所有的火车都慢”。

解答：

(1) $\neg\forall x(A(x)\wedge B(x)\rightarrow C(x))$

(2) $\neg\exists x(P(x)\wedge\forall y(P(y)\rightarrow G(x,y)))$

(3) $\forall x(N(x)\rightarrow\exists y(Q(x,y)\wedge\forall z(Q(x,z)\rightarrow E(y,z))))$

(4) $\exists x(P(x)\wedge\forall y(Q(y)\rightarrow R(x,y)))$

练习* 3.30 将下面的自然语言命题符号化为一阶逻辑公式。

(1) 每个学生都至少学一门课程；

(2) 有在职学生没有修过任何数学课程；

(3) 每个在职的大一学生都学习某门高级课程。

解答：

(1) 设$A(x)$表示x是学生，$M(x)$表示x是课程，$T(x,y)$表示x修（学习）y，则符号化为$\forall x(A(x)\rightarrow\exists y(M(y)\wedge T(x,y)))$；

(2) 设$A(x)$表示x是在职学生，$M(x)$表示x是课程，$T(x,y)$表示x修（学习）y，则符号化为$\exists x(A(x)\wedge\forall y(M(y)\rightarrow\neg T(x,y)))$；

(3) 设$A(x)$表示x是在职的大一学生，$M(x)$表示x是课程，$T(x,y)$表示x修（学习）y，则符号化为$\forall x(A(x)\rightarrow\exists y(M(y)\wedge T(x,y)))$。

练习 3.31 令谓词$I(x)$为“x能上因特网”，$C(x,y)$为谓词“x和y交谈过”，以及$x\neq y$表示“x与y不是同一个学生”，其中x和y的论域都是班上的所有学生的集合。符号化下面的命题。

(1) 班上有人能上因特网，但是从未与班上其他同学交谈过；

(2) 班上至少有两个学生，他们没有与班上的同一个学生交谈过。

解答：(1) “班上有人能上因特网，但是从未与班上其他同学交谈过”的含义是“班上有学生x，x能上因特网，而且对班上任意学生y，如果x和y不是同一人，则x与y没有交谈过”，因此这个命题符号化为：$\exists x(I(x)\wedge\forall y(x\neq y\ \rightarrow\ \neg C(x,y)))$。

(2) “班上至少有两个学生，他们没有与班上的同一个学生交谈过”的含义是“班上有学生x和y，x和y不是同一个学生，而且，没有班上学生z，x和z交谈过，而且y也和z交谈过”，因此这个命题符号化为：$\exists x\exists y(x\neq y\ \wedge\ \neg\exists z(C(x,z)\wedge(y,z)))\ \equiv\ \exists x\exists y(x\neq y\ \wedge\ \forall z(\neg C(x,z)\vee\neg C(y,z)))$。

练习 3.32 设论域是实数集$\mathbb{R}$，符号化下面的命题。每个命题中的自由变量是哪个？

(1) 任何大于x的数大于y；

(2) 对任意数a，方程$ax^2+4x-2=0$至少有一个解当且仅当$a\geq -2$；

(3) 不等式$x^3-3x<3$的所有解都小于10；

(4) 如果存在数x使得$x^2+5x=w$且存在数y使得$4-y^2=w$，则w在-10和10之间。

解答：(1) "任何大于x的数大于y"的含义是"对任何实数z，如果z大于x，则z大于y，因此符号化为：$\forall z(z>x \ \rightarrow\ z>y)$。这个命题中的自由变量是$x$和$y$。

(2) "对任意数a，方程$ax^2+4x-2=0$至少有一个解当且仅当$a\geq-2$"的含义是，"对任意实数a，存在实数x使得$ax^2+4x-2=0$当且仅当$a\geq-2$"，因此符号化为：$\forall a(\exists x(ax^2+4x-2=0)\leftrightarrow a\geq 2)$。这个命题中没有自由变量。

(3) "不等式$x^3-3x<3$的所有解都小于10"的含义是"对任意实数x，若$x^3-3x<3$，则$x<10$"，因此符号化为：$\forall x(x^3-3x<3 \ \rightarrow\ x<10)$，这个命题中也没有自由变量。

(4) "如果存在数x使得$x^2+5x=w$且存在数y使得$4-y^2=w$，则w在-10和10之间"符号化为：$\exists x(x^2+5x=w)\ \wedge\ \exists y(4-y^2=w)\ \rightarrow\ (-10\leq w\leq 10)$，这个命题中的自由变量是$w$。

练习 3.33 构造验证下面自然语言推理有效性的论证：

任何人如果他喜欢步行，他就不喜欢乘汽车。每一个人或者喜欢乘汽车，或者喜欢骑自行车。有的人不爱骑自行车。因而有的人不爱步行。(论域为人类的集合)

解答：设论域是人类的集合，谓词$F(x)$表示x喜欢步行，$G(x)$表示x喜欢乘汽车，$H(x)$表示x喜欢骑自行车。上述推理的前提可做如下符号化：

(1) "任何人如果他喜欢步行，他就不喜欢乘汽车"符号化为：$\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x))$；

(2) "每一个人或者喜欢乘汽车，或者喜欢骑自行车"符号化为：$\forall x(G(x)\vee H(x))$；

(3) "有的人不爱骑自行车"符号化为：$\exists x(\neg H(x))$。

而结论"有的人不爱步行"则符号化为：$\exists x(\neg F(x))$。因此上述推理可符号化为：

$$\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x)),\ \forall x(G(x)\vee H(x)),\ \exists x(\neg H(x))\Longrightarrow\exists x(\neg F(x))$$

可使用下面的论证验证上述推理的有效性：

(1)	$\exists x(\neg H(x))$	// 前提
(2)	$\neg H(a)$	// (1)存在例化
(3)	$\forall x(G(x)\vee H(x))$	// 前提
(4)	$G(a)\vee H(a)$	// (3)全称例化
(5)	$G(a)$	// (2),(4)析取三段论
(6)	$\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x))$	// 前提
(7)	$F(a)\rightarrow\neg G(a)$	// (6)全称例化
(8)	$\neg F(a)$	// (5),(7)假言易位
(9)	$\exists x(\neg F(x))$	// (8)存在泛化

练习* 3.34 取个体域为所有学生构成的集合，设： (i). $F(x)$: x是一年级学生； (ii). $H(x)$: x是高年级学生； (iii). $L(x)$: x是理科学生； (iv). $G(x,y)$: x是y的辅导员； (v). a : 小王。请符号化下面的推理，并构造论证验证其有效性：

每个一年级学生至少有一个高年级学生作他的辅导员。凡理科学生的辅导员都是理科学生。小王是理科一年级学生。因此至少有一个理科高年级学生。

解答: 首先前提符号化为: $\forall x(F(x) \to \exists y(H(y) \wedge G(y,x)))$, $\forall x \forall y(L(x) \wedge G(y,x) \to L(y))$, $L(a) \wedge F(a)$，而结论符号化为: $\exists x(L(x) \wedge H(x))$，验证上述推理有效性的论证如下:

(1)	$\forall x(F(x) \to \exists y(H(y) \wedge G(y,x)))$	// 前提
(2)	$F(a) \to \exists y(H(y) \wedge G(y,a))$	// (1)全称量词消除
(3)	$L(a) \wedge F(a)$	// 前提
(4)	$F(a)$	// (3)化简规则
(5)	$\exists y(H(y) \wedge G(y,a))$	// (2),(4)假言推理
(6)	$H(b) \wedge G(b,a)$	// (5)存在量词消除
(7)	$H(b)$	// (6)化简规则
(8)	$G(b,a)$	// (6)化简规则
(9)	$\forall x \forall y(L(x) \wedge G(y,x) \to L(y))$	// 前提
(10)	$\forall y(L(a) \wedge G(y,a) \to L(y))$	// (9)全称量词消除
(11)	$(L(a) \wedge G(b,a) \to L(b))$	// (10)全称量词消除
(12)	$L(a)$	// (3)化简规则
(13)	$L(a) \wedge G(b,a)$	// (8),(12)合取规则
(14)	$L(b)$	// (11),(13)假言推理
(15)	$L(b) \wedge H(b)$	// (7),(14)合取规则
(16)	$\exists x(L(x) \wedge H(x))$	// (15)存在量词引入

练习* 3.35 符号化下面的推理，并构造验证其有效性的论证:

每一个自然数不是奇数就是偶数；如果自然数是偶数则它能被2整除；并不是所有的自然数都能被2整除。因此，有的自然数是奇数。

解答: 令个体域是自然数集合，$Q(x)$表示x是奇数，$P(x)$表示x是偶数，$R(x)$表示x能被2整除。首先将前提和结论进行符号化，得到要验证的推理是从前提$\forall x(Q(x) \vee P(x))$, $\forall x(P(x) \leftrightarrow R(x))$, $\neg\forall x R(x)$推出结论$\exists Q(x)$。验证上述推理有效性的论证如下:

(1)	$\neg\forall x R(x)$	// 前提引入
(2)	$\exists x \neg R(x)$	// (1)量词否定等值式
(3)	$\neg R(c)$	// (2)存在量词消除
(4)	$\forall x(P(x) \leftrightarrow R(x))$	// 前提引入
(5)	$P(c) \leftrightarrow R(c)$	// (4)全称量词消除

(6)	$P(c) \to R(c)$	// (5)等价消除
(7)	$\neg P(c)$	// (3),(6)拒取式
(8)	$\forall x(Q(x) \vee P(x))$	// 前提引入
(9)	$Q(c) \vee P(c)$	// (8)全称量词消除
(10)	$Q(c)$	// (7),(9)析取三段论
(11)	$\exists x Q(x)$	// (10)存在量词引入

练习 3.36 符号化下面的推理，并构造论证验证其有效性：

每个学生或是勤奋的或是聪明的。所有勤奋的都会有所作为。并非每个学生都有所作为。所以，有些学生是聪明的。

解答：设论域是学生的集合，谓词$F(x)$表示x是勤奋的，$G(x)$表示x是聪明的，$H(x)$表示x会有所作为。上述推理的前提可做如下符号化：(1)“每个学生或是勤奋的或是聪明的”符号化为：$\forall x(F(x) \vee G(x))$；(2)“所有勤奋的都会有所作为”符号化为：$\forall x(F(x) \to H(x))$；(3)“并非每个学生都有所作为”符号化为：$\neg \forall x H(x)$，这逻辑等值于$\exists x(\neg H(x))$。而结论“有些学生是聪明的”则符号化为：$\exists x G(x)$。因此上述推理可符号化为：

$$\forall x(F(x) \vee G(x)),\ \forall x(F(x) \to H(x)),\ \exists x(\neg H(x)) \Longrightarrow \exists x G(x)$$

可使用下面的论证验证上述推理的有效性：

(1)	$\exists x(\neg H(x))$	// 前提
(2)	$\neg H(a)$	// (1)存在例化
(3)	$\forall x(F(x) \to H(x))$	// 前提
(4)	$F(a) \to H(a)$	// (3)全称例化
(5)	$\neg F(a)$	// (2),(4)假言易位
(6)	$\forall x(F(x) \vee G(x))$	// 前提
(7)	$F(a) \vee G(a)$	// (6)全称例化
(8)	$G(a)$	// (5),(7)析取三段论
(9)	$\exists x G(x)$	// (8)存在泛化