离散数学基础习题答案

Answers to Exercises in Elementary Discrete Mathematics

周晓聪　　乔海燕

中山大学数据科学与计算机学院, 广州 510275

2021 年 1 月 19 日

目录

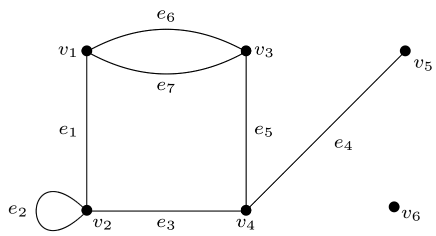
第九章 图与树

练习 9.1 设无向图$G=(V,E)$，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_6\}$，

$$\begin{aligned} E \;=\; \{ \; & e_1=(v_1,v_2),\;\; e_2=(v_2,v_2),\;\; e_3=(v_2,v_4),\;\; e_4=(v_4,v_5), \\ & e_5=(v_3,v_4),\;\; e_6=(v_1,v_3),\;\; e_7=(v_3,v_1) \; \} \end{aligned}$$

(1) 画出G的图形；
(2) 求出G中各顶点的度及奇数度顶点的个数；
(3) 指出G中的平行边、环、孤立点、悬挂边及悬挂顶点。G是简单图吗？

解答: (1) G的图形如下。



(2) 顶点v_1的度数是3，顶点v_2的度数是4，顶点v_3的度数是3，顶点v_4的度数是3，顶点v_5的度数是1，顶点v_6的度数是0，奇数度顶点有v_1,v_3,v_4,v_5，因此有4个奇数度顶点。

(3) 图G中的平行边是e_6和e_7，环是e_2，孤立点是v_6，悬挂边是e_4，而v_5是悬挂顶点。

练习* 9.2 设无向图G有12条边，已知G的3度顶点有6个，而其他顶点的度数都小于3，问G至少有多少个顶点？为什么？

解答: 因为图G有12条边，因此图G的度数之和是24，而图G的3度顶点有6个，则这去了18个度数和，剩下6个度数每个顶点的度数要小于3,那么至少需要3个顶点，因此图G一共至少有9个顶点。

练习 9.3 设9阶无向图G的每个顶点的度数不是5就是6，证明G至少有5个6度顶点，或至少有6个5度顶点。

证明 我们使用反证法，假设图G并非至少有5个6度顶点或至少有6个5度顶点，也即图G至多有4个6度顶点且至多有5个5度顶点，那么因为图G有9个顶点，而且每个顶点的度数不是5就是6，这样就会恰好是4个6度顶点且5个5度顶点，从而顶点度数总和是$24+25=49$，但这与握手定理矛盾，因为握手定理表明顶点度数总和只能是偶数。因此这表明G至少有5个6度顶点或至少有6个5度顶点。 □

【讨论】我们也可直接证明。图G有9个顶点，根据握手定理，奇数度数顶点个数必然是偶数个，因此图G的5度顶点个数只能是0个、2个、4个、6个或8个，而图G的顶点度数不是5就是6，这样相应地6度顶点分别是9个、7个、5个、3个或1个，可以看到这五种情况，每种情况都是至少有5个6度顶点或至少有6个5度顶点，因此待证命题成立。

练习 9.4 设n阶图G有m条边，证明

$$\delta(G) \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta(G)$$

证明 注意到$\delta(G)$是图G的顶点度数最小的顶点度数，因此n阶图G的顶点度数总和总大于等于$n\delta(G)$，$\Delta(G)$是图G的顶点度数最大的顶点度数，因此n阶图G的顶点度数总和总小于等于$n\Delta(G)$。而根据握手定理，顶点度数总和等于边数两倍，即$2m$，因此就有$n\delta(G) \leq 2m \leq n\Delta(G)$，即$\delta(G) \leq 2m/n \leq \Delta(G)$。 □

练习* 9.5 确定完全图K_n、圈C_n、轮图W_n、n立方体图Q_n和完全二部图$K_{m,n}$的每个顶点的度数，以及边数。

解答：(1) 完全图K_n的每个顶点都与其他$n-1$个顶点有边，因此每个顶点的度数都是$n-1$，因此度数总和是$n(n-1)$，因此边数是$n(n-1)/2$；

(2) 圈C_n的每个顶点都与相邻的两个顶点有边，因此每个顶点的度数都是2，因此度数总和是$2n$，因此边数是n。

(3) 轮图W_n有$n+1$个顶点，除中心顶点外，其他每个顶点都有圈上相邻的两个顶点有边，而且与中心有边，因此度数是3，而中心顶点与圈上的n个顶点都有边相连，因此度数是n，因此总的度数是$3n+n=4n$，从而边数是$2n$。

(5) 立方体图Q_n有2^n个顶点，每个顶点可使用长度为n的二进制串标记，两个顶点之间有边当且仅当这两个顶点的二进制串只有一位不同，从而对任意一个顶点，与它相邻的顶点有n个（分别在第1位，第2位，等等，第n位与该顶点不相同），因此每个顶点的度数都是n，顶点度数总和是$2^n \cdot n$，从而边数是$2^{n-1} \cdot n$。

(6) 完全二部图$K_{m,n}$的顶点集划分为V_1和V_2两个子集，其中V_1有m个顶点，且与V_2的n个顶点的每个顶点有边相连，因此这m个顶点的度数是n，而V_2的n个顶点的每个顶点与V_1的m个顶点都有边相连，因此这n个顶点的度数是m，因此顶点度数之和是$2mn$，从而边数是mn。

练习 9.6 确定完全图K_n、圈C_n、轮图W_n、n立方体图Q_n什么情况下可能是二部图。

解答：(1) 显然K_2是二部图，当$n \geq 3$时，由于任意两个顶点都有边相连，因此K_n的顶点不可能分为两个子集，每个子集内的顶点之间没有边，因此当$n \geq 3$时，K_n都不是二部图。

(2) 对于圈C_n，任选一个顶点，按照顺时针进行依次轮流使用0和1进行标记，则每个标记为0的顶点只与标记为1的顶点有边，除非最后标记的顶点与第一个标记的顶点有相同的标记，这时n是奇数。因此当n是偶数时C_n是二部图，而当n是奇数时，C_n不是二部图。

(3) 对于轮图W_n，因为中心顶点与其他顶点有边相连，而其他顶点之间又有边相连，所以不可能分为两个子集，每个子集内的顶点没有边，因此W_n都不是二部图。注意对于圈C_n和W_n，都有$n \geq 3$。

(4) 对于立方体图Q_n，令V_1是那些顶点标记含有奇数个1的顶点构成的集合，而V_2是那些顶点标记含有偶数个1的顶点构成的集合，则由于任意两个含有奇数个1的二进制串不可能只有1位不同，任何两个含有偶数个1的二进制串也不可能只有1位不同，因此V_1和V_2内的任意两个顶点之间都没有边，因此Q_n总是二部图。

练习 9.7 设G是n个顶点m条边的简单图，v是G中度数为k的顶点，e是G的一条边。

(1) $G-v$有多少个顶点和多少条边？

(2) $G-e$有多少个顶点和多少条边？

(3) $G\backslash e$有多少个顶点和多少条边？

解答：(1) 由于v的度数为k，所以删除v就删除了一个顶点和k条边，因此$G-v$有$n-1$个顶点和$m-k$条边；

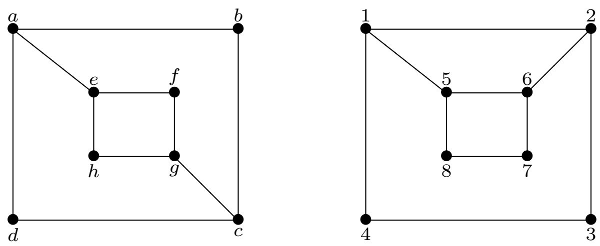
(2) 删除边e不会删除顶点，只删除一条边，因此$G-e$有n个顶点和$m-1$条边。

(3) $G\backslash e$将边e收缩为一个顶点，然后原来与e的两个端点相连的边都与这个顶点相连，因此$G\backslash e$有$n-1$个顶点和$m-1$条边。

练习* 9.8 设G为至少有两个顶点的简单图，证明G至少有两个顶点度数相同。

证明 设图G有n个顶点，因为G是简单图，因此$\Delta(G)\leq n-1$，如果G的顶点的度数都不相同，则图G的顶点度数构成的序列必是$(0,1,\cdots,n-1)$，即有一个顶点的度数是$n-1$且有一个顶点的度数为0，但这不可能，因为度数为$n-1$的顶点需要与其他$n-1$个顶点都有边相连，但度数为0的顶点则与其他顶点都没有边相连，矛盾！所以G至少有两个顶点度数相同。 □

练习 9.9 下面两个图G_1和G_2同构吗？如果同构，请写出它们顶点之间的对应关系；如果不同构，请说明理由。



G_1 G_2

解答：这两个图不同构，因为图G_1的每个3度顶点都只与1个3度顶点相邻，而图G_2的每个3度顶点都与2个3度顶点相邻。不难证明，若图G和G'同构，同构函数是f，则对图G的每个顶点v，及与v相邻的每个顶点u，图G'的顶点$f(v)$与$f(u)$相邻，且u的度数与$f(u)$的度数也相同。

练习* 9.10 判断下面两个命题是否正确，并说明理由：

(1) 任何两个同构的图都有相同的顶点数和相同的边数；

(2) 任何具有相同顶点数和相同边数的图都是同构的。

解答：(1)是正确的，任何两个同构的图都有相同的顶点数和相同边数，因为使得两个图的同构的函数f不仅是它们的顶点集之间的双函数，而且是它们的边集之间的双函数。

(2) 是错误的，具有相同顶点数和相同边数的两个图不能确保是同构的，例如练习9.9的两个图具有相同的顶点数和边数，但它们不是同构的。

练习 9.11 给定简单图$G=(V,E)$，$|V|=n,|E|=m$，若$m>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，则G连通。

证明 反证法：若G不连通，则$k=p(G)\geq 2$，设其k个连通分支的顶点数分别为$n_1,n_2,\cdots,n_k$，则对任意的$1\leq i\leq k$有$1\leq n_i\leq n-1$，且$\sum_{i=1}^{k}n_i=n$。当G的每个连通分支都是完全图时边数最大，因此G最多有

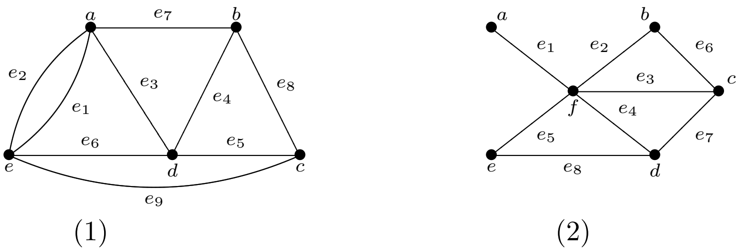
$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i(n_i-1)}{2}\leq\sum_{i=1}^{k}\frac{(n-1)(n_i-1)}{2}=\frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)=\frac{(n-1)(n-k)}{2}$$

若$k\geq 2$，则与$m>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$矛盾，因此G只有一个连通分支，即G是连通图。 □

练习* 9.12 给定简单图$G=(V,E)$，$|V|=n$，若对任意的两个顶点$u,v\in V$都有$d(u)+d(v)\geq n-1$，则G连通。

证明 反证法：若G不连通，则至少有两个连通分支，从其中两个连通分支中分别取顶点u和v，设这两个连通分支的顶点数分别为n_u和n_v，则$d(u)\leq n_u-1$且$d(v)\leq n_v-1$，从而$d(u)+d(v)\leq n_u+n_v-2=n-2$，这与$d(u)+d(v)\geq n-1$矛盾，因此$G$是连通图。 □

练习* 9.13 对于下面两个图：



(1) 求图(1)中3条边和4条边的边割集各一个，求图(2)的一个最小边割集和一个最大的边割集；

(2) 求图(1)中的一个最小的点割集，在(2)中求含1个顶点和2个顶点的点割集各一个；

(3) 求图(1),(2)的点连通度、边连通度。

解答：(1) $\{e_7,e_4,e_8\}$为图(1)中三条边的边割集，$\{e_6,e_3,e_4,e_5\}$为四条边的边割集。图(2) 中最小的边割集是$\{e_1\}$，最大的边割集是$\{e_2,e_3,e_4,e_5\}$；

(2) $\{a,d,c\}$是图(1)中的最小点割集，$\{f\}$是图(2)中含一个顶点集的点割集，(2) 中无2个顶点的点割集。

(3) 图(1) 的点连通度是3，边连通度也是3；图(2) 的点连通图是1，边连通度也是1。

练习 9.14 设v为无向连通图G的一个顶点，v为割点当且仅当存在与v不同的两个顶点u和w，使得v处在每一条从u到w的路径上。

证明 若v是G的割点，则存在$V-v$的一个划分$\{V_1,V_2\}$，使得对任意的$u\in V_1,w\in V_2$，v在每一条u到w的路径上，而由划分的要求，V_1和V_2不空，因此确实存在$u\in V_1,w\in V_2$，而且u,w与v不同，使得v处在每一条从u到w的路径上。

反之，若存在与v不同的两个顶点u和w，使得v处在每一条从u到w的路径上。假设这时v不是割点，则$G-v$连通，即u与w连通，从而它们之间存在不经过v的路径，这与前提条件矛盾！ □

练习 9.15 设e为无向连通图$G=(V,E)$的一条边，e为桥当且仅当存在V的一个划分$\{V_1,V_2\}$，使得对任意的$u{\in}V_1,w{\in}V_2$，e在每一条u到w的路径上。

证明 设e是桥，则这时$G-e$有且只有两个连通分支G_1,G_2，设它们的顶点集分别是V_1,V_2，则$\{V_1,V_2\}$就是V的一个划分，而且对任意的$u{\in}V_1,w{\in}V_2$，e在u到w的每一条路径上，否则若存在一条不经过e的路径，则u和w在$G-e$中连通，这与它们处在$G-e$的不同连通分支矛盾。

反之，设存在V的一个划分$\{V_1,V_2\}$，使得对任意的$u{\in}V_1,w{\in}V_2$，e在每一条u到w的路径上。若这时e不是桥，则$G-e$仍连通，则存在$u{\in}V_1,w{\in}V_2$（划分块非空集），且u到w之间在$G-e$中存在路径，该路径不经过e，矛盾！ □

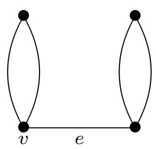
练习 9.16 分别构造连通图G_1,G_2,G_3，使得：

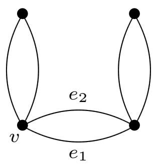
(1) $\kappa(G_1)=\lambda(G_1)<\delta(G_1)$；

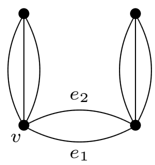
(2) $\kappa(G_2)<\lambda(G_2)=\delta(G_2)$；

(3) $\kappa(G_3)<\lambda(G_2)<\delta(G_3)$。

解答：我们分别构造下面的图G_1,G_2,G_3：







可以看到，图G_1的最小度$\delta(G_1)=2$，而e是G_1的桥，因此$\lambda(G_1)=1$，v是G_1的割点，因此$\kappa(G_1)=1$，从而有$\kappa(G_1)=\lambda(G_1)<\delta(G_1)$。

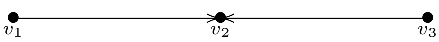
图G_2的最小度$\delta(G_2)=2$，G_2没有桥，而$\{e_1,e_2\}$是G_2的边割集，因此$\lambda(G_2)=2$，v是G_2的割点，因此$\kappa(G_2)=1$，从而有$\kappa(G_2)<\lambda(G_2)=\delta(G_2)$。

图G_3的最小度$\delta(G_2)=3$，G_2没有桥，而$\{e_1,e_2\}$是G_3的边割集，因此$\lambda(G_3)=2$，v是G_3的割点，因此$\kappa(G_3)=1$，从而有$\kappa(G_3)<\lambda(G_3)<\delta(G_3)$。

练习* 9.17 (1) 证明：若无向图G恰有两个奇度顶点，则这两个顶点是连通的；(2) 若有向图D中只有两个奇度顶点，他们一个可达另一个或相互可达吗？

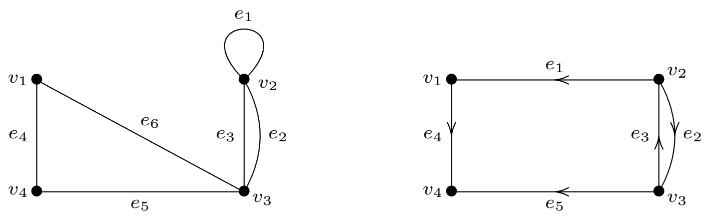
证明 (1) 用反证法：假设这两个顶点之间没有通路，即这两个顶点处于不同的连通分支，那么这两个连通分支就刚好只有一个奇度顶点，这与握手定理矛盾，因为握手定理表明任意一个图必有偶数个奇度顶点。

(2) 若有向图D只有两个奇度顶点，它们不一定一个可达另一个，更不能相互可达。



例如上面的图，v_1和v_3都是奇度顶点，但v_1不可达v_3，v_3也不可达v_1。 □

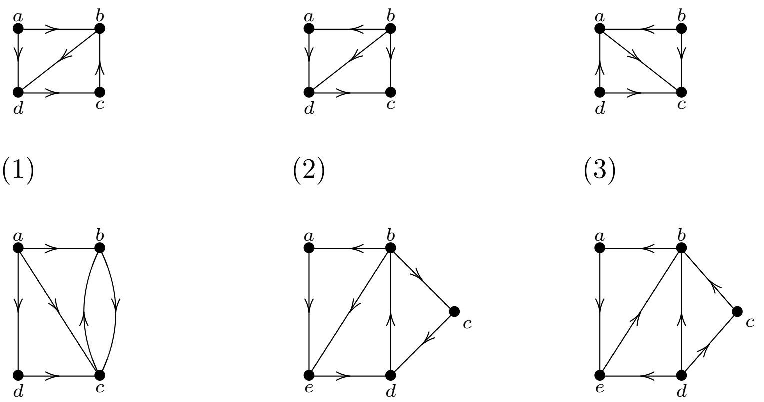
练习 9.18 给出下面无向图G和有向图D的关联矩阵：



解答：无向图G的关联矩阵M_G和有向图D的关联矩阵M_D分别如下左右矩阵所示。

$$M_G = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad M_D = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

练习 9.19 对于下面六个图：



(1) (2) (3) (4) (5) (6)

(i) 哪几个是强连通的？(ii) 哪几个是单向连通的？(iii) 那几个是弱连通的？

解答：图(1)不是强连通的，因为a只有出度；是单向连通的，因为a可以到达其他三个顶点；显然是弱连通的。图(2) 不是强连通的，因为c只有入度；是单向连通的，因为b可以到达其他三个顶点；显然是弱连通的。图(3) 不是强连通的，因为d只有出度；也不是单向连通的，因为b只有入度，这样b不能到达d，d也不能到达b。图(4) 不是强连通的，因为a只有出度；是单向连通的，因为a可以到达其他三个顶点；图(5) 是强连通的，存在经过所有顶点的有向回路：$a \to e \to d \to b \to c \to d \to b \to a$；从而也是单向连通和若连通的；图(6) 不是强连通的，因为d只有出度；d可到达另外四个顶点，因此是单向连通的，显然也是弱连通的。

因此这些图都是弱连通的，除图(3)之外都是单向连通的，而只有图(5)是强连通的。

练习 9.20 设$D = (V, E)$是单向连通的有向图，则对V的任意非空子集$V' \subseteq V$，都存在顶点$u \in V'$，使得对任意的$v \in V'$，都有从u到达v的有向道路。

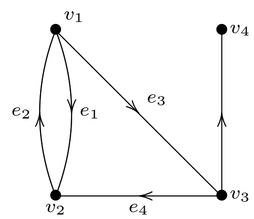
证明 使用反证法。假设D不满足上述所说性质，则D必存在不满足此性质的顶点子集。设$V_1 = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\} \subseteq V$是不满足上述性质的极小顶点集，显然$|V_1| \geq 2$。令$V_2 = V_1 - \{v_k\}$，则$V_2$非空，且满足上述性质，也即存在$u \in V_2$，对任意的$v \in V_2$，都有从$u$到达$v$的有向道路。从而，对于$V_1$而言，它不满足上述性质就是因为不存在$u$到$v_k$的道路。

但我们能证明这时也不存在从v_k到u的道路，因为若存在v_k到u的道路，则由于u到V_1的其他顶点都有道路，从而v_k到V_1的所有顶点就都有道路，这与V_1不满足上述性质矛盾！但若既不存在u到v_k的道路，又不存在v_k到u的道路，则与D是单向连通的有向图矛盾！因此D不存在满足上述性质顶点子集，也即引理成立。 □

练习 9.21 设D是有向图，D单向连通当且仅当D存在经过D中每个顶点至少一次的通路。

证明 设$D = (V, E)$，且$|V| = n$。显然当D存在经过D中每个顶点至少一次的通路时，D是单向连通的。反之，若D是单向连通的，根据练习9.20，D存在顶点v_1，v_1可到达其他所有的顶点。类似地，$V - \{v_1\}$存在顶点v_2可到达$V - \{v_1\}$中的所有顶点，等等，$V - \{v_1, v_2, \cdots, v_{n-2}\}$中存在顶点$v_{n-1}$可到达$v_n$，从而$v_1 v_2 v_3 \cdots v_{n-1} v_n$是经过$D$中每个顶点至少一次的通路。 □

练习 9.22 对于下面的有向图D：



(1) 写出G的邻接矩阵；(2) 求G中长度为3的通路总数，以及其中有多少条回路；(3) 求G的可达矩阵$P = [p_{ij}]$。图G的可达矩阵P是n阶方阵（n是图G的顶点数），且当v_i可达v_j时$p_{ij} = 1$，否则$p_{ij} = 0$。

解答：(1) G的邻接矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

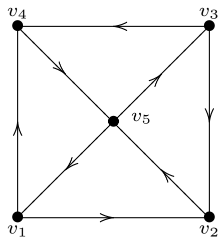
(2) 我们可计算A^2, A^3，可看到长度为3的通路有8条，其中回路有3条。

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) 图G的可达矩阵$P = [p_{ij}]$可先计算$B = [b_{ij}] = A + A^2 + A^3$，则有$p_{ij} = 1$当且仅当$b_{ij} \geq 1$：

$$B = A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

练习* 9.23 对于下面的有向图D：



(1) 给出图D的邻接矩阵A；(2) D中长度为4的通路有多少条，其中有几条为回路？(3) 利用Warshall算法求图D的可达矩阵，请写出计算的中间结果。图D是哪种类型的有向连通图？

解答：上图的邻接矩阵如下：

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

为了求D中长度为4的通路数，要计算A^4：

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\end{pmatrix}\qquad A^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0&2\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&2\\1&0&1&0&0\\0&2&0&2&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}\qquad A^2=\begin{pmatrix}0&4&0&4&0\\0&0&0&0&4\\0&4&0&4&0\\0&0&0&0&4\\4&0&4&0&0\end{pmatrix}$$

根据A^4，将其中的元素都加起来得到长度为4的通路数，也即D有32条长度为4的通路。因为对角线元素之和为0，故D中无长度为4的回路。

根据上面的矩阵A, A^2, A^3, A^4，我们可得到$B = A + A^2 + A^3 + A^4$，及可达矩阵P：

$$B=A+A^2+A^3+A^4=\begin{pmatrix}2&5&2&5&2\\1&2&1&2&5\\2&5&2&5&2\\1&2&1&2&5\\5&2&5&2&4\end{pmatrix}\qquad P=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

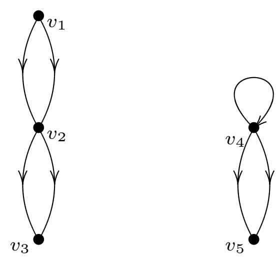
如果我们利用Warshall算法，其中的计算结果如下：其中$P^{(k)}$表示第k次循环计算后得到的结果：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad W^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W^{(2)} = W^{(3)} = W^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad W^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

上面$W^{(5)}$就是可达矩阵P，与上面计算的一致。根据这个可达矩阵知道D是强连通图。

练习 9.24 对于下面的有向图D：



(1) 给出图D的邻接矩阵A；(2) 求v_1到各顶点的距离，即v_1到各顶点最短有向通路的长度（v_1到v_1自己的距离为0，如果v_1到某个顶点没有有向通路，则距离为无穷大）；(3) 求图D的可达矩阵。

解答：(1) 我们先给出该有向图D的邻接矩阵A：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

为了回答(2)和(3)，我们先计算A^2, A^3, A^4，

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 顶点v_1到自己的距离为0，v_1到v_2有有向边，因此v_1到v_2的距离为2，而A中$a_{13} = 0$，即v_1到v_3没有边，但A^2中$a_{13}^{(2)} = 1$，表明v_1到v_3中有长度为2的有向通路，因此v_1到v_3的距离是2。由于v_1与v_4和v_5在不同的（弱）连通分支中，因此v_1到v_4的距离为无穷大，v_1到v_5的距离也为无穷大。

(3) 根据上面计算的A, A^2, A^3, A^4，我们可得$B = A + A^2 + A^3 + A^4$，及可达矩阵P。

$$B = A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

练习 9.25　设无向简单图G是$k(k \geq 2)$棵树构成的森林，且有n个顶点，m条边，证明$m = n - k$。

证明　设G的k个连通分支分别是$G_1, \cdots, G_k$，且分别有$n_1, \cdots, n_k$个顶点和分别有$m_1, \cdots, m_k$条边，则由于$G_1, G_2, \cdots, G_k$都是树，因此有$m_1 = n_1 - 1, m_2 = n_2 - 1, \cdots, m_k = n_k - 1$，从而有$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n_1 - 1 + n_2 - 1 + \cdots + n_k - 1 = n - k$。 □

练习 9.26　设无向简单图G有n个顶点，$n-1$条边，则G为树。这个命题正确吗？为什么？

解答: 这个命题不正确，当图G不连通时，它不一定是树，例如图G由K_3再加上一个孤立点构成，则有4个顶点3条边，但显然不是树。

练习* 9.27　设无向简单图G有n个顶点，$n-1$条边，证明：G是连通当且仅当G无回路。

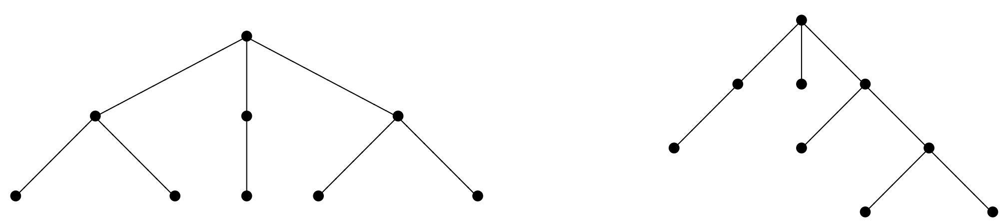
证明　(1) 设G是连通的，这时每条边都必然是桥，否则若边e不是桥，即$G-e$还是连通的，但是连通图的边数必大于等于$n-1$，而G有n个顶点，$n-1$条边，从而$G-e$有n个顶点，但只有$n-2$条边，所以$G-e$不可能是连通的。G的每条边都是桥，意味着G不可能有回路。

(2) 设G没有回路，若G有$k > 1$个连通分支，每个连通分支的顶点数分别是$n_1, \cdots, n_k$，则G的每个连通分支无回路，即G的每个连通分支是树，从而G的每个连通分支的边数分别是$n_1 - 1, \cdots, n_k - 1$，从而G的边数m为$n_1 - 1 + n_2 - 1 + \cdots + n_k - 1 = n - k$，当$k > 1$时与$m = n - 1$矛盾！因此必有$k = 1$，即$G$是连通图。 □

练习 9.28　已知无向树T有三个3度顶点，一个2度顶点，其余都是1度顶点。(1) T有几个叶子节点？(2) 画出两棵满足上述度数要求的非同构的无向树。

解答: (1) 设T有x个1度节点，则T共有$3+1+x$个顶点，而这所有顶点的度数之和是$3 \cdot 3 + 2 + x = x + 11$，树的边数等于顶点数减1，因此$T$共有$3 + 1 + x - 1 = 3 + x$条边，又由握手定理，边数两倍等于顶点度数之和，因此有$2(3 + x) = x + 11$，从而得到$x = 5$，因此T有5个1度顶点，也即有5个叶子节点。

(2) 下面是两棵满足上述度数要求的非同构的无向树。



练习 9.29　一棵无向树有n_i个顶点的度数为i，$i=1,2,\cdots,k$。如果已知$n_2,n_3,\cdots,n_k$，试问n_1应为多少？

解答：一棵无向树有n_i个顶点的度数为i，则这所有顶点的度数之和是$\sum_{i=1}^{k}(n_i\cdot i)$，而顶点个数是$\sum_{i=1}^{k}n_i$，边数等于顶点数减1，因此边数是$(\sum_{i=1}^{k}n_i)-1$，又边数是顶点度数之和两倍，因此有：

$$2\cdot(\sum_{i=1}^{k}n_i)-2=\sum_{i=1}^{k}(n_i\cdot i)$$

从而得到：

$$n_1=\sum_{i=2}^{k}[n_i\cdot(i-2)]+2$$

练习* 9.30　设T是一棵非平凡的无向树，$\Delta(T)\geq k$，证明：T至少含有k片树叶。

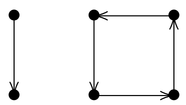
证明　设T有n个顶点。若T中至多有s片树叶，假设$s\leq k$，则T中有$n-s$个顶点的度数大于等于2,又至少有一个顶点的度数大于等于k，从而由握手定理及树的基本性质有：

$$2m=2n-1=\sum_{i=1}^{n}d(v_i)\geq 2(n-s-1)+k+s\Longrightarrow s\leq k$$

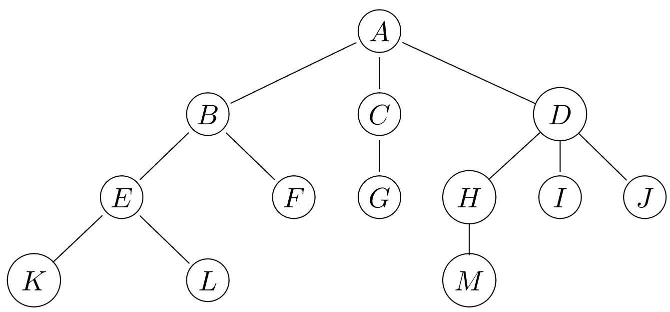
这与$s\leq k$矛盾，所以T至少有k片树叶。 □

练习 9.31　有向图D仅有一个顶点入度为0，其余顶点的入度都是1，D一定是有向树吗？

解答：仅有一个顶点入度为0，其余顶点的入度都是1，有向图D不一定是有向树。例如下面的有向图只有一个顶点入度为0，其余顶点的入度都是1，但不是树。注意这个有向图的基图不是无向树。



练习* 9.32　对于下面根树T：



(1) 给出它所有的根节点、叶子节点和内部节点；

(2) 给出每个节点的层数；

(3) 给出树的高度和最大出度；

(4) 给出它的中序、前序和后序遍历结果。

解答: 我们用标记节点的字母表示这个节点。

(1) 这棵树的根节点是A，叶子节点包括K, L, F, G, M, I, J，内部节点包括A, B, E, C, D, H；

(2) 节点A的层数是0，B, C, D的层数是1，E, F, G, H, I, J的层数是3，K, L, M的层数是4；

(3) 树的高度是4，最大出度是3，节点A和D的出度都是3；

(4) 树的前序遍历节点序列是: $ABEKLFCGDHMIJ$; 中序遍历节点序列是: $KELBFACGHMDIJ$; 后序遍历节点序列是: $KLEFBGCMHIJDA$。

练习 9.33 证明：一棵高度为h的m元树至多有m^h片叶子。

证明 对高度h进行数学归纳证明，即令$P(h)$是命题"高度为h的m元树至多有m^h片叶子"，用数学归纳证明$P(h)$对任意自然数h都成立。显然当$h = 0$时，这棵树就是一个顶点，这个顶点既是根也是叶子，因此$P(0)$成立。

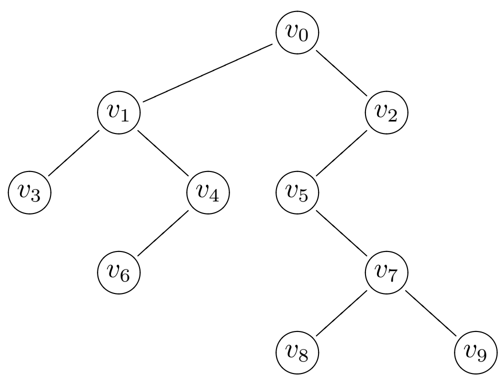
对任意的$k \geq 0$，假定$P(0), P(1), \cdots, P(k)$都成立，也即对任意高度为j的树，$0 \leq j \leq k$，其叶子节点个数都小于m^j。考虑高度为$k+1$的m元树，它的叶子节点都是以它的根节点的一个儿子节点为根的子树的叶子节点，而这样的子树高度j都小于等于k大于等于0，从而其叶子节点个数都小于等于m^j，从而也小于m^k，由于是m元树，这样的子树个数最多m个，因此高度为$k+1$的m元树的叶子节点最多为$m \cdot m^k = m^{k+1}$，因此$P(k+1)$成立。

因此根据强归纳法，$P(h)$对任意的自然数h都成立。 □

练习 9.34 证明：一棵有l片叶子的m元树的高度h大于等于$\lceil \log_m l \rceil$，即$h \geq \lceil \log_m l \rceil$，从而若若$T$是平衡满$m$元树，则$h = \lceil \log_m l \rceil$。

证明 因为高度为h的m元树最多有m^h片叶子，因此$l \leq m^h$，从而$\log_m l \leq h$，由于h是整数，因此$\lceil \log_m l \rceil \leq h$。而教材正文（定理9.11）又证明了对平衡满$m$元树有$h \leq \lceil \log_m l \rceil$，因此这就表明对平衡满$m$元树，有$h = \lceil \log_m l \rceil$。 □

练习 9.35 请给出下面二叉树的中序、前序和后序遍历结果。



解答: 上面二叉树的中序遍历结果是: $v_3v_1v_6v_4v_0v_5v_8v_7v_9v_2$; 前序遍历结果是: $v_0v_1v_3v_4v_6v_2v_5v_7v_8v_9$; 后序遍历结果是: $v_3v_6v_4v_1v_8v_9v_7v_5v_2v_0$。

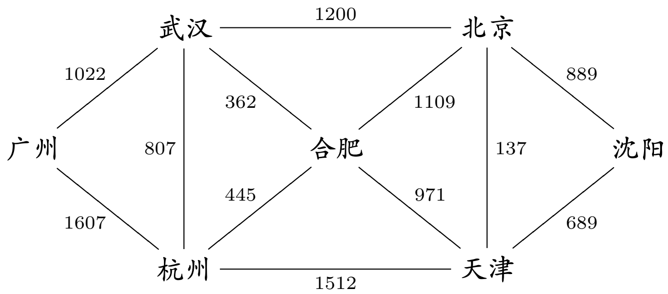
练习 9.36 给出表达式:

$$((a + (b * c) * d) - e) \div (f + g) + (h * i) * j$$

的波兰符号法和逆波兰符号法表示。

解答：该表达式的波兰记号法表示是：$+\div-+a**bcde+fg**hij$，逆波兰记号法表示是：$abc*d*+e-fg+\div hi*j*+$。

练习 9.37 使用Dijkstra算法求下面带权图中广州到其他所有城市的最短路径：



解答：下面的表格给出了求解广州到其他各城市之间的最短距离的Dijkstra算法执行过程：

步骤	广州	武汉	杭州	合肥	北京	天津	沈阳
0	$\boxed{0}$	1022/广州	1607/广州	∞	∞	∞	∞
1		$\boxed{1022}$/广州	1607/广州	1384/武汉	2222/武汉	∞	∞
2			1607/广州	$\boxed{1384}$/武汉	2222/武汉	2355/合肥	∞
3			$\boxed{1607}$/广州		2222/武汉	2355/合肥	∞
4					$\boxed{2222}$/武汉	2355/合肥	3111/北京
5						$\boxed{2355}$/合肥	3044/天津
6							$\boxed{3044}$/天津

最后得到广州到各城市之间的最短路径及距离为：

广州到武汉的最短路径是：广州 $\to$ 武汉　　长度为：1022

广州到杭州的最短路径是：广州 $\to$ 杭州　　长度为：1607

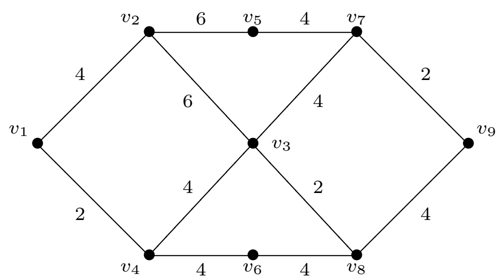
广州到合肥的最短路径是：广州 $\to$ 武汉 $\to$ 合肥　　长度为：1384

广州到北京的最短路径是：广州 $\to$ 武汉 $\to$ 北京　　长度为：2222

广州到天津的最短路径是：广州 $\to$ 武汉 $\to$ 合肥 $\to$ 天津　　长度为：2355

广州到沈阳的最短路径是：广州 $\to$ 武汉 $\to$ 合肥 $\to$ 天津 $\to$ 沈阳　　长度为：3044

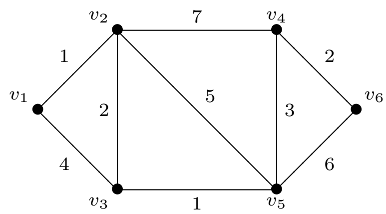
练习 9.38 使用Dijkstra算法求下面带权图中v_1到v_9的最短路径：



解答：下面的表格给出了求解v_1到顶点v_9的最短距离的Dijkstra算法执行过程，可得到v_1到顶点v_9的最短路径是$v_1v_4v_3v_8v_9$，最短距离是12。

步骤	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
0	$\boxed{0}$	$4/v_1$	∞	$2/v_1$	∞	∞	∞	∞	∞
1		$4/v_1$	$6/v_4$	$\boxed{2}/v_1$	∞	$6/v_4$	∞	∞	∞
2		$\boxed{4}/v_1$	$6/v_4$		$10/v_2$	$6/v_4$	∞	∞	∞
3			$\boxed{6}/v_4$		$10/v_2$	$6/v_4$	$10/v_3$	$8/v_3$	∞
4					$10/v_2$	$\boxed{6}/v_4$	$10/v_3$	$8/v_3$	∞
5					$10/v_2$		$10/v_3$	$\boxed{8}/v_3$	$12/v_8$
6					$\boxed{10}/v_2$		$10/v_3$		$12/v_8$
7							$\boxed{10}/v_3$		$12/v_8$
8									$\boxed{12}/v_8$

练习* 9.39 写出下面带权无向图的距离矩阵，并使用Dijkstra算法求下面图中v_1到其余各顶点的最短路径。



解答：下面的矩阵D给出该无向图的距离矩阵，而表格给出了求解v_1到其他各顶点间最短距离的Dijkstra算法执行过程：

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & 7 & \infty & 0 & 3 & 2 \\ \infty & 5 & 1 & 3 & 0 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

步骤	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
0	$\boxed{0}$	$1/v_1$	$4/v_1$	∞	∞	∞
1		$\boxed{1}/v_1$	$3/v_2$	$8/v_2$	$6/v_2$	∞
2			$\boxed{3}/v_2$	$8/v_2$	$4/v_3$	∞
3				$7/v_5$	$\boxed{4}/v_3$	$10/v_5$
4				$\boxed{7}/v_5$		$9/v_4$
5						$\boxed{9}/v_4$

最后得到v_1到各顶点之间的最短路径及距离为：

v_1 到 v_2 的最短路径是：v_1v_2 长度为：1

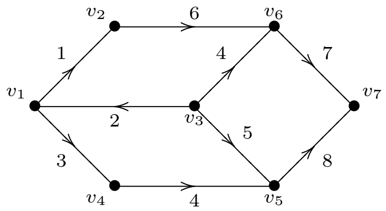
v_1 到 v_3 的最短路径是：$v_1v_2v_3$ 长度为：3

v_1 到 v_4 的最短路径是：$v_1v_2v_3v_5v_4$ 长度为：7

v_1 到 v_5 的最短路径是：$v_1v_2v_3v_5$ 长度为：4

v_1 到 v_6 的最短路径是：$v_1v_2v_3v_5v_4v_6$ 长度为：9

练习 9.40 写出下面带权有向图的距离矩阵，并使用Dijkstra算法求v_1到各点的最短距离。



解答：下面的矩阵D给出该有向图的距离矩阵，而表格给出了求解v_1到其他各顶点间最短距离的Dijkstra算法执行过程：

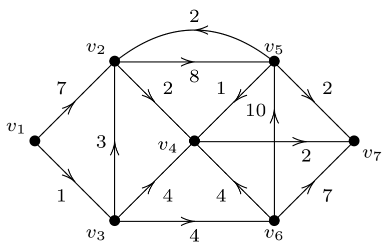
$$D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty & 5 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

步骤	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
0	$\boxed{0}$	$1/v_1$	∞	$3/v_1$	∞	∞	∞
1		$\boxed{1}/v_1$	∞	$3/v_1$	∞	$7/v_2$	∞
2			∞	$\boxed{3}/v_1$	$7/v_4$	$7/v_2$	∞
3			∞		$\boxed{7}/v_4$	$7/v_2$	$15/v_5$
4			∞			$\boxed{7}/v_2$	$14/v_6$
5			∞				$\boxed{14}/v_6$
6			$\boxed{\infty}$				

最后得到v_1到各顶点之间的最短路径及距离为：

v_1 到 v_2 的最短路径是：v_1v_2	长度为：1
v_1 到 v_3 没有路径	
v_1 到 v_4 的最短路径是：v_1v_4	长度为：3
v_1 到 v_5 的最短路径是：$v_1v_4v_5$	长度为：7
v_1 到 v_6 的最短路径是：$v_1v_2v_6$	长度为：7
v_1 到 v_6 的最短路径是：$v_1v_2v_6v_7$	长度为：14

练习 9.41 使用Dijsktra算法计算v_1到v_7的最短路径：



解答：下面的表格给出了求解v_1到顶点v_7的最短距离的Dijkstra算法执行过程，可看到v_1到v_7的最短路径是$v_1v_3v_4v_7$，最短距离是7。

步骤	$v1$	$v2$	$v3$	$v4$	$v5$	$v6$	$v7$
Step 0	$\boxed{0}/-$	$7/v1$	$1/v1$	$\infty/-$	$\infty/-$	$\infty/-$	$\infty/-$
Step 1		$4/v3$	$\boxed{1}/v1$	$5/v3$	$\infty/-$	$5/v3$	$\infty/-$
Step 2		$\boxed{4}/v3$		$5/v3$	$12/v2$	$5/v3$	$\infty/-$
Step 3				$\boxed{5}/v3$	$12/v2$	$5/v3$	$7/v4$
Step 4					$12/v2$	$\boxed{5}/v3$	$7/v4$
Step 5					$12/v2$		$\boxed{7}/v4$

【讨论】注意到，在这个求解过程中，第6步已经得到v_1到v_7的最短距离，因此可以终止算法，这时v_1到v_2和v_5的最短距离还没有计算到。当Dijkstra算法用于求某两个特定点的最短距离时，只要得到这两个特定顶点的最短距离，那么算法就可以终止了，不必计算其中一个顶点到其他所有顶点的最短距离。

练习 9.42 实际上，带权图的距离矩阵$D = [d_{ij}]$中的元素d_{ij}给出的是v_i到v_j直接有有向边的带权路径长度，而计算矩阵乘法$D \times D = D^{(2)} = [d_{ij}^{(2)}]$时$d_{ij}^{(2)}$的值是通过考察对任意的顶点$v_k$，$v_i$经过$v_k$再到$v_j$经过一个中间顶点的路径，如果要得到最小的带权路径长度，在计算$d_{ij}^{(2)}$时可使用如下方法：

$$d_{ij}^{(2)} = \min\{d_{ij}, \min_{1 \le k \le n}(d_{ik} + d_{kj})\}$$

这里$+$是普通实数加法，但约定对任意的实数r有$r + \infty = \infty$。

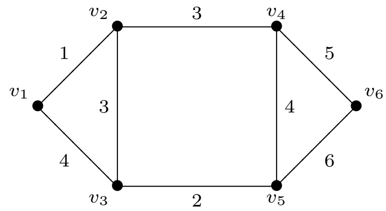
可看到，$d'_{ij} = \min_{1 \le k \le n}(d_{ik} + d_{kj})$是$v_i$到$v_j$经过两个顶点的最小带权路径长度，从而$d_{ij}^{(2)} = \min\{d_{ij}, d'_{ij}\}$就是$v_i$到$v_j$至多经过一个顶点的最小带权路径长度。类似地计算$D^{(3)} = D^{(2)} \times D$等等，一直到$D^{(n)}$，得到至多经过$n-1$个中间顶点的最小带权路径长度。注意到，对有$n$个顶点的有向图，两个顶点之间有有向通路则有至多经过$n-1$个中间顶点的有向路径。因此计算到D^n可得到任意两个顶点之间的这小带权路径长度。试基于这个想法，对Warshall算法进行修改以计算带权图的任意两个顶点的最短距离。

解答：基于带权图的距离矩阵，$D = [d_{ij}]$给出的是顶点v_i到v_j直接有有向边的带权路径长度，而D^n则可给出至多经过$n-1$个中间顶点的最小带权路径的长度，只是在计算D^n时矩阵的乘法不是基于两个矩阵的一行与一列对应元素相乘然后相加，而是对应元素做加法（即对应有向边的权相加），然后再求它们的小者（从而找出最短路径）。Warshall算法可基于这个思想，稍加修改之后用来求D^n。算法可用伪码描述如下。

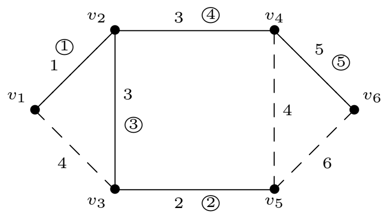
```
   输入：n个顶点的有向图或无向图的距离矩阵D
   输出：给出任意两个顶点之间最短路径的矩阵W = D^n
1  令矩阵W = D;
2  for (k := 1 to n) do
3      for (i := 1 to n) do
4          for (j := 1 to n) do w_ij = min{w_ij, w_ik + w_kj}
5      end
6  end
```

算法第2行开始的循环在第$k-1$次循环执行完毕之后得到$w_{ij}^{(k-1)}$是顶点v_i到v_j之间中间顶点全部在集合$\{v_1, \cdots, v_{k-1}\}$的最短路径长度，而第k次循环执行第4行语句时，比较v_i到v_j之间中间顶点全部在集合$\{v_1, \cdots, v_{k-1}\}$的最短路径长度，以及v_i到v_k之间以及v_k到v_j之间中间顶点都全部在$\{v_1, \cdots, v_{k-1}\}$的最短路径长度，从而得到v_i到v_j之间中间顶点全部在集合$\{v_1, \cdots, v_{k-1}, v_k\}$的最短路径长度。当执行$n$次循环之后，即$k = n$时，$w_{ij}^{(n)}$就给出$v_i$到$v_j$之间的最短路径长度，因此该循环执行完毕之后的$W$就给出了$D^n$。

练习* 9.43 分别使用Kruskal算法和Prim算法求下图的最小生成树：

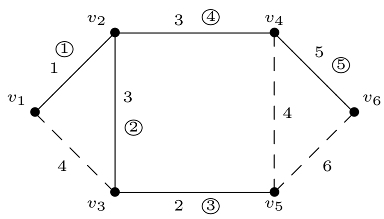


解答：(1) Kruskal算法根据边的权从小到大选择边，只要待选的边不与已选的边构成回路即可。下图的实线边给出了这个图的最小生成树，边上的带圈数字标记给出了选边的顺序。右边的表格给出了考虑的边的顺序，其中第5,6步所考虑的边由于与已选边构成回路而没有被选中。



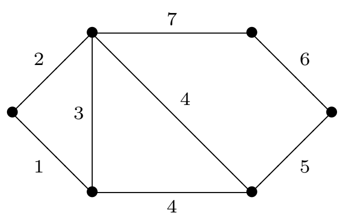
Step	Consider Edge	Selected or not
Step 1	$[1.0] = (v1, v2)$	✓
Step 2	$[2.0] = (v3, v5)$	✓
Step 3	$[3.0] = (v2, v3)$	✓
Step 4	$[3.0] = (v2, v4)$	✓
Step 5	$[4.0] = (v1, v3)$	×
Step 6	$[4.0] = (v4, v5)$	×
Step 7	$[5.0] = (v4, v6)$	✓

(2) Prim算法任选一个顶点作为当前生成树T的顶点，然后通过在所有一个端点在T，另一个端点不在T的边中选择权最小的边，将这条边及其端点加入到T中而不断扩展T，直到T包含图的所有顶点就得到这个图的最小生成树。下面左边图的实线边给出了这个图的最小生成树，边上的带圈数字标记给出了选边的顺序，右边的表给出了每一步的选边时考虑的边，其中V'是在T中的顶点。

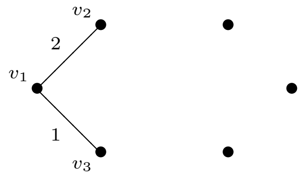


	V'	$V - V'$	考查的边	选中的边
①	v_1	v_2, v_3, v_4, v_5, v_6	$(v_1, v_2), (v_1, v_3)$	(v_1, v_2)
②	v_1, v_2	v_3, v_4, v_5 v_6	$(v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_3)$	(v_2, v_3)
③	v_1, v_2, v_3	v_4, v_5, v_6	$(v_2, v_4), (v_3, v_5)$	(v_3, v_5)
④	v_1, v_2, v_3, v_5	v_4, v_6	$(v_2, v_4), (v_5, v_4), (v_5, v_6)$	(v_2, v_4)
⑤	v_1, v_2, v_3, v_5, v_4	v_6	$(v_4, v_6), (v_5, v_6)$	(v_4, v_6)

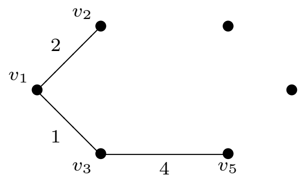
练习 9.44 分别使用Kruskal算法和Prim算法求下图的最小生成树：



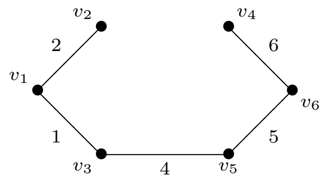
解答：(1) 根据Kruskal算法计算上图的最小生树过程如下：首先选中权为1的边(v_1, v_3)，然后选中权为2的边(v_1, v_2)，得到的结果如下：



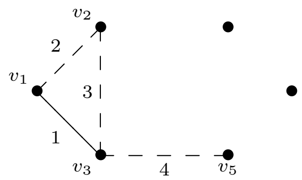
这时再选权最小的边(v_2, v_3)将构成回路，因此选权次小的边，这时可选(v_3, v_5)，也可选(v_2, v_5)，这两条边的权一样，随机选一条边即可，我们选(v_3, v_5)得到的结果如下：



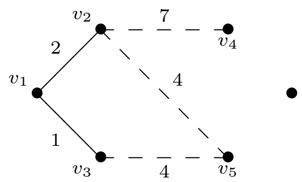
这时再选权最小的边(v_2, v_5)也将构成回路，因此选权次小的边，即边(v_5, v_6)，然后最选剩下的权最小的边(v_4, v_6)，得到最后的最小生成树如下：



(2) 如果使用Prim算法，假定从顶点v_1开始，即$V' = \{v_1\}$，选与v_1关联的权最小的边(v_1, v_3)，再加入顶点v_3，得到$V' = \{v_1, v_3\}$，$V - V' = \{v_2, v_4, v_5, v_6\}$，这时得到的结果（选中的边）如下图实线所示，而端点分别在V'和$V - V'$中的边在下图用虚线表示（原图中其他边没有画出）：

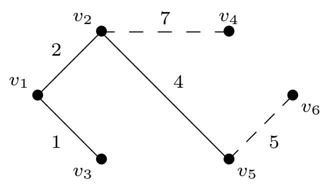


下一步，在上图中虚线表示的三条边中选权最小的边(v_1, v_2)，然后将顶点v_2加入，得到$V' = \{v_1, v_2, v_3\}$，$V - V' = \{v_4, v_5, v_6\}$，这时得到的结果（选中的边）如下图实线所示，而端点分别在V'和$V - V'$中的边在下图用虚线表示（原图中其他边没有画出）：

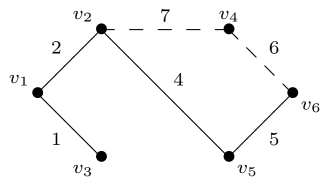


下一步，在上图中虚线表示的三条边中选权最小的边，这一次有两条边的权都是4，随机选其中一条，例如我们选取(v_2, v_5)，然后将顶点v_5加入，得到$V' = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$，$V - V' = \{v_4, v_6\}$，这时得到的结果（选中的边）如下图实线所示，而端点分别在V'和$V - V'$中的边在下图用虚线表示（原图

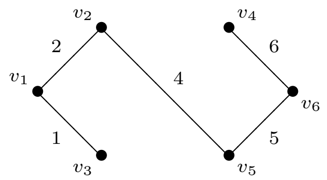
中其他边没有画出）：



下一步，在上图中虚线表示的二条边中选权最小的边(v_5, v_6)，然后将顶点v_6加入，得到$V' = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6\}$，$V - V' = \{v_4\}$，这时得到的结果（选中的边）如下图实线所示，而端点分别在V'和$V - V'$中的边在下图用虚线表示（原图中其他边没有画出）：



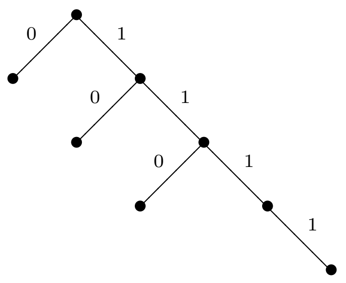
下一步，在上图中虚线表示的二条边中选权最小的边(v_4, v_6)（实际上，由于这时$V - V'$只有一个顶点，那就是选与该顶点相关联的权最小的边），将v_4加入到V'，得到$V' = V$，算法终止，最后得到的最小生成树如下：

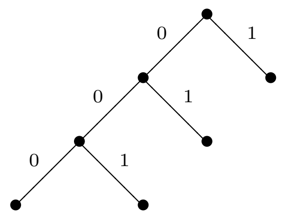


练习 9.45　下面给出的三个符号串集中，哪些是前缀码，哪些不是？为什么？

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \ B_1 = \{0, 10, 110, 1111\}\\
&(2)\ \ B_2 = \{1, 01, 001, 000\}\\
&(3)\ \ B_3 = \{1, 11, 101, 0001, 0011\}
\end{aligned}
$$

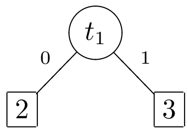
解答: (1)和(2)给出的是前缀码，它们所对应的二叉树如下图所示。(3)给出的不是前缀码，因为码1是码11的前缀。



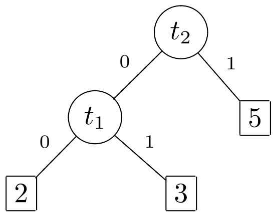


练习 9.46　求带权为2, 3, 5, 7, 8的最优二叉树，并写出其对应的二元前缀码。

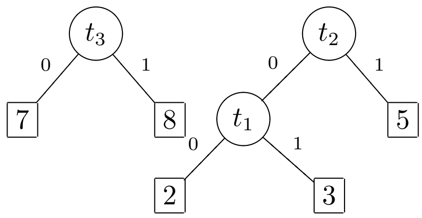
解答：我们首先取权值最小的两个叶子构造，得到：



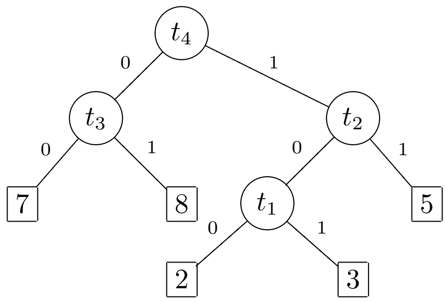
删除最小的两个权值，将t_1的权加入，再进行排序得到：$5(t_1), 5, 7, 8$，再取最小的两个叶子进行构造，得到：



删除最小的两个权值，将t_2的权加入，再排序得到：$7, 8, 10(t_2)$，再取最小的两个叶子进行构造，得到：



最后我们得到的最有二叉树如下：



因此2对应的二元前缀码是：100；3对应的二元前缀码是101；5对应的二元前缀码是11；7对应的二元前缀码是00；8对应的二元前缀码是01。

练习* 9.47　在通信中要传输八进制数字0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7，这些数字出现的频率分别是：

0 ：30%	1 ：20%	2 ：15%	3 ：10%
4 ：10%	5 ：6%	6 ：5%	7 ：4%

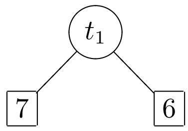
编一个最佳前缀码，使通信中出现的二进制数字尽可能少：

(1) 画出相应的二叉树；

(2) 写出每个数字对应的前缀码；

(3) 传输按上述比例出现的数字10000个时，至少要用多少个二进制数字？

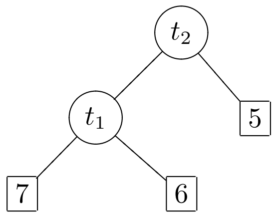
解答：为方便起见，我们将权值乘100进行计算。从小到大排序后得到（括号中是相应的八进制数字）：取最小的两个权值进行构造，得到：



删除上面最小的两个权值，将节点t_1的权9加入，重新排序后得到：

$$6(5)\qquad 9(t_1)\qquad 10(4)\qquad 10(3)\qquad 15(2)\qquad 20(1)\qquad 30(0)$$

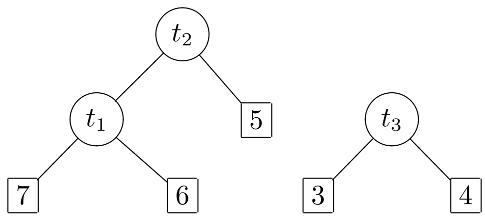
再取最小的两个权值进行构造，得到：



删除上面最小的两个权值，将节点t_2的权15加入，重新排序后得到：

$$10(4)\qquad 10(3)\qquad 15(2)\qquad 15(t_2)\qquad 20(1)\qquad 30(0)$$

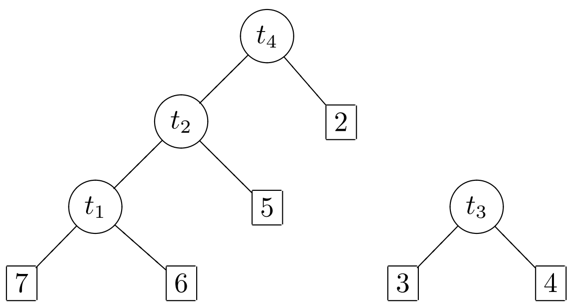
再取最小的两个权值进行构造，得到：



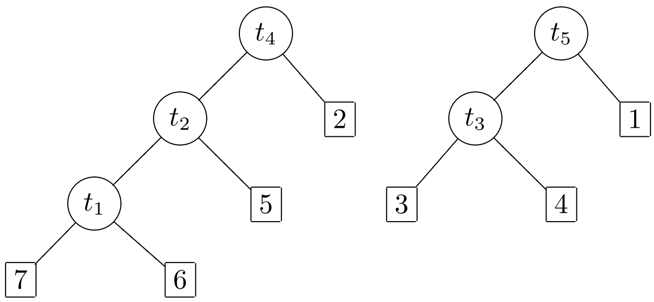
删除上面最小的两个权值，将节点t_3的权20加入，重新排序后得到：

$$15(2)\qquad 15(t_2)\qquad 20(1)\qquad 20(t_3)\qquad 30(0)$$

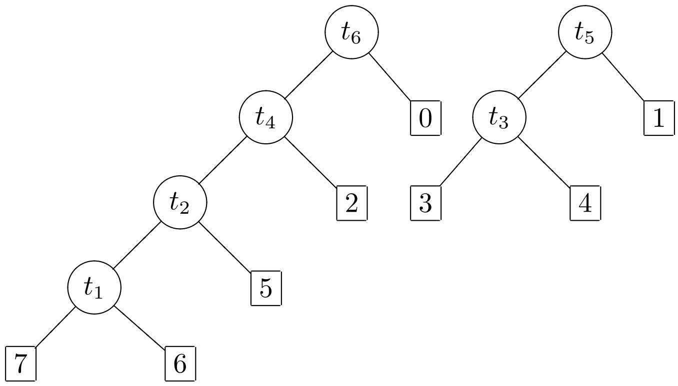
再取上面最小的两个权值进行构造，得到：



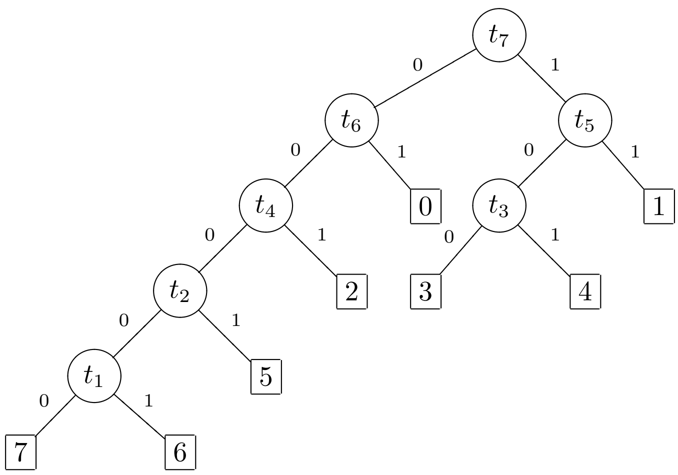
删除上面最小的两个权值，将节点t_4的权20加入，重新排序后得到：20(1)，20(t_3)，30(0)，30(t_4)，再取最小的两个权值进行构造，得到：



删除上面最小的两个权值，将节点t_5的权40加入，重新排序后得到：30(0)，30(t_4，40(t_5)，再取最小的两个权值进行构造，得到：



删除上面最小的两个权值，将节点t_6的权60加入，重新排序后得到：40(t_5)，60(t_6)，最后，我们得到最优二叉树为：



这样我们得到每个八进制数的编码如下：

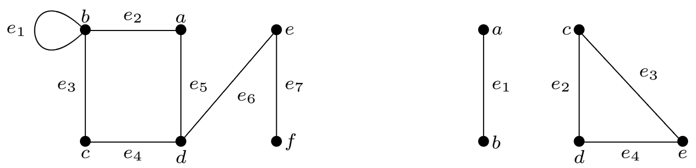
7 : 00000	6 : 00001	5 : 0001	4 : 101
3 : 100	2 : 001	1 : 11	0 : 01

上述最优二叉树的权为：

$$W(T) = (4+5)\times 5+6\times 4+(15+10+10)\times 3+(20+30)\times 2=274$$

也即按权值比例传送100个八进制数所需的二进制数为274个，从而传送10000个所需的二进制数为27400个。

练习* 9.48 下面是两个平面图G_1, G_2，请分别给出它们各个面的边界及度：



解答：上面左边的图中有三个面：

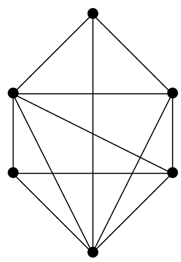
R_1 的边界为回路$C_1 = be_1b$，　其度为 1

R_2 的边界为回路$C_2 = ae_2be_3ce_4de_5a$，　其度为 4

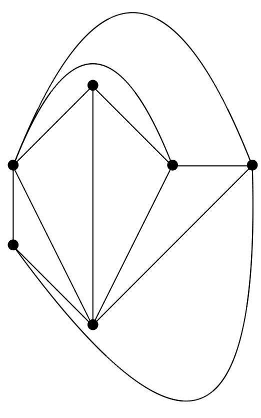
R_0 为无限面，其边界为回路$C_3 = fe_7ee_6de_5ae_2be_1be_3ce_4de_6ee_7f$，　其度为9

上面右面的图有两个面：R_1为有限面，其边界为$C_1 = ce_3ee_4de_2c$，其度为3。R_0为无限面，其边界由两个回路构成，一个是回路$ce_3ee_4de_2c$，另一个是回路ae_1be_1a，其度为$3+2=5$。

练习 9.49 下图是否是平面图，如果是请给出它的一个平面嵌入。是否是极大平面图？为什么？



解答：这个图是平面图，下面是它的一个平面嵌入。这个平面图的顶点数是$n = 6$，边数是$m = 12$，因为所有简单平面图的顶点数和边数满足$m \le 3n-6$，而这个平面图已经使得$12 = m = 3n-6$，因此这个平面图是极大平面图。



练习 9.50 设连通简单平面图G的面数$r < 12$，最小度$\delta(G) \geq 3$，证明G至少有一个面的度小于5。

证明　假如每个面的度数均大于等于5，则有$2m \geq 5r$, 又$2m \geq 3n$，由欧拉公式$n - m + r = 2$推出$m \geq 30$. 又$r = m - n + 2 \geq m - 2m/3 + 2 = 12$. 矛盾! □

练习* 9.51 设G是边数m小于30的简单平面图，试证明G中存在度数小于等于4的顶点。

证明　用反证法。设图的顶点个数是n，边数是m。假设每个顶点的度数都大于4，则$d(v_i) \geq 5$，从而$2m \geq 5n$，即$n \leq \frac{2}{5}m$，由于简单平面图有$m \leq 3n - 6$代入得$m \leq \frac{6}{5}m - 6$，即有$m \geq 30$，与边数小于30矛盾。 □

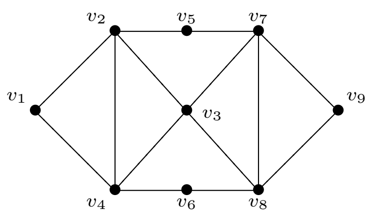
练习 9.52 设简单平面图G的顶点数$n = 7$，边数$m = 15$，证明G的每个面的度都是3。

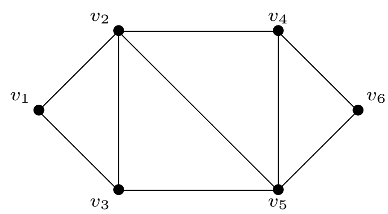
证明　因为这个简单平面图的顶点数$n = 7$，边数$m = 15$，满足$m = 3n - 6$，因此它是极大平面图，极大平面图的每个面的度数都是3，因此这个简单平面图G的每个面的度数都是3。 □

练习* 9.53 设G是连通的简单平面图，顶点数为n，边数为m，面数为r，试证明：若G的最小度$\delta(G) = 4$，则G中至少有6个顶点的度数小于等于5。

证明　若G的最小度是4，我们使用反证法证明G中至少有6个顶点的度数小于等于5。假设G至多有5个顶点的度数小于等于5，则n个顶点的度数之和大于等于$5 \cdot 4 + 6(n - 5)$，其中$5 \cdot 4$是这5个顶点的度数之和，因为最小度是4，所以它们的度数之和大于等于20，而剩下$n - 5$个顶点的度数都大于等于6。由握手定理，顶点度数之和等于边数2倍，所以$2m \geq 20 + 6(n - 5)$，即$m \geq 3n - 5$，这与连通简单平面图的边数$m \leq 3n - 6$矛盾! □

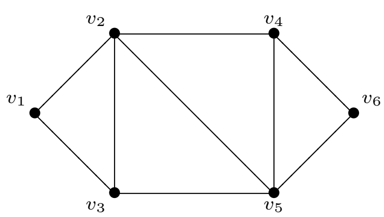
练习 9.54 下面两个图是否是欧拉图或半欧拉图? 如果是请给出它的欧拉回路或欧拉通路。

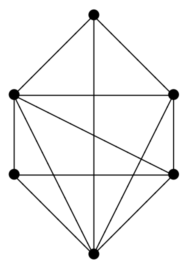




解答: 左边的图是欧拉图，它的每个顶点的度数都是偶数。例如，它的一个欧拉回路是：$v_1v_2v_5v_7v_9v_8v_7v_3v_8v_6v_4v_3v_2v_4v_1$。右边的图是半欧拉图，它只有$v_3$和$v_4$两个顶点的度数为奇数，其他顶点的度数都是偶数。例如它的一个欧拉道路是：$v_4v_6v_5v_4v_2v_1v_3v_2v_5v_3$。

练习 9.55 下面两个图是否满足定理9.25 或推论9.26 的条件? 是否是哈密尔顿图或半哈密尔顿图? 如果是请给出它的哈密尔顿回路或哈密尔顿通路。





解答: 上图左边不满足定理??或推论??的条件，即不是任意两个顶点的度数之和都大于等于$n-1$，这里$n=6$，例如v_1和v_6的顶点度数都是2，其和小于5，但是这个图显然是哈密顿图，例如一个哈密顿回路是$v_1v_2v_4v_6v_5v_3v_1$。

上图右边的图满足定理定理??或推论??的条件，因为这个图的顶点数是6，但是任意一个顶点的度数都大于等于3，因此任意两个顶点的度数之和都大于等于6，因此是哈密顿图，很容易看到，最外围的边构成了一个哈密顿回路。