诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

2021-2022-1 学期《高等代数(上)》A 卷

注意事项：1. 开考前请将密封线内各项信息填写清楚；
2. 所有答案请直接答在试卷上；
3．考试形式：闭卷；
4. 本试卷共四大题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					

评阅教师请在试卷袋上评阅栏签名

得分

一、填空题：共 5 题，每题 4 分，共 20 分。

1. 用 A_{ij} 表示行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 中第 i 行第 j 列交叉位置元素的代数余子式，

则 $A_{11}+2A_{12}+A_{13}+A_{14}=$____________________.

2. 设 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$ 是四个线性无关的向量，

则向量组 $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_4,\vec{\alpha}_4+\vec{\alpha}_1$ 的秩是____________________.

3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^9 =$ ____________________

4. 设 A 为 n 阶方阵且 $A^3=O$，则 E_n+A 的逆矩阵为____________________.

5. 若实二次型 $f(x,y,z)=t(x^2+y^2+z^2)+3y^2-4xy-2xz+4yz$ 正定，

则 t 的取值范围是____________________.

座位号______ 专业班级______ 学院______ 学号 □□□□□□□□□□□□ 姓名______

（密封线内不答题） 密 封 线

得分

二、计算题：共 3 题，每题 10 分，共 30 分。

1. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} (1+a)^2 & (1+b)^2 & (1+c)^2 \\ (2+a)^2 & (2+b)^2 & (2+c)^2 \\ (3+a)^2 & (3+b)^2 & (3+c)^2 \end{vmatrix}.$$

2. 计算$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$，并求$4\times 2$矩阵$X$使得

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 在实数域上将二次型 $x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_3x_4$ 化为规范形.

写出所作的非退化线性替换并求符号差.

得分

三、解答题：共 2 题，每题 15 分，共 30 分。

1. 设 $f(x)=x^4+2x^3+5x^2+4x+4$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的形式微商．求 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的最大公因式 $(f(x),f'(x))$，并将 $f(x)$ 分解为有理数域上不可约多项式的乘积.

2. 设非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

增广矩阵的秩为2, 求a,b的值、线性方程组的一般解、并给出它的导出齐次线性方程组的基础解系.

得分

四、证明题：共 2 题，每题 10 分，共 20 分。

1. 设 $\vec{\alpha}_1,\ldots,\vec{\alpha}_s$ 是 s 个线性无关的向量且可由另 s 个向量 $\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\ldots,\vec{\beta}_s$ 线性表出.

   求证：$\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\ldots,\vec{\beta}_s$ 也线性无关.

2. 设数域$\mathbb{P}$上矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的秩为1.

1） 证明：存在数域$\mathbb{P}$上的$n\times 1$矩阵P和$1\times n$矩阵Q使得$A=PQ$.

2） 证明：对任意正整数k，有$A^k=\lambda^{k-1}A$，其中常数$\lambda=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$.