

函数项级数和Fourier分析

考试时间: 90 分钟

1. 求解下列各题(共40分, 每题10分).

(1) 试用“ $\varepsilon - \delta$ ”语言分别叙述: 在 I 中, $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$ 和 $\{f_n(x)\}$ 不一致收敛于 $f(x)$.

(2) 计算 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$.

(3) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{n^2} x^{n^3}$ 的收敛范围.

(4) 求函数 $|\sin x|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的 Fourier 展开式; 并指出该 Fourier 级数是否为一致收敛的.

2. (本题15分) 设 $u_n(x) \in C[a, b]$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $S(x)$. 证明: $S(x) \in C[a, b]$, 即 $S(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数.

3. (本题15分) 将函数 $f(x) = x^2$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) 展开为 Fourier 级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 的和.

4. (本题15分) 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

在 $[-1, 1]$ 中不一致收敛. (提示: 利用 Cauchy 原理)

5. (本题15分) 证明函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 中有二阶连续导数, 并计算 $f''(x)$.