線形代数 ①

恒等変換　$n \times n$ 行列　$R^n \to R^n$ への写像

$f \rightleftarrows f^{-1}$ が存在する

斉(セイ)一次式(形式) $y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n$　(定数項のない一次式)
homogeneous linear polinormal

双一次形式
bilinear form　内積 $(\vec{x}, A\vec{y}) = (A\vec{y})^T\vec{x} = \vec{y}^T \cdot A^T\vec{x} = ({}^TA\vec{x}, \vec{y})$

$= \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$

トレース(シュプール)

$trA\ (SpA) = \sum a_{ii}$　　$tr(AB) = tr(BA)$

コーシー・シュワルツの不等式　$(\vec{a}, \vec{b}) \leqq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

直交　$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta = 0$　$(\theta = \frac{\pi}{2})$

正規直交系　$\vec{x}_{1 \cdots n}$, $|\vec{x}_i| = 1$, $(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \delta_{ij}$
(orthonormal system)　例 $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \cdots \vec{e}_n$

行列関数(函数)

例　$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^i}{i!} + \cdots$

$\rightleftarrows$　$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots \frac{A^i}{i!} + \cdots$　(収束するか?) $= \exp(A)$

ヤコビ行列 (= 函数行列)

$\vec{y} = A\vec{x}$　　$J = \frac{\partial(y_1, \cdots y_m)}{\partial(x_1 \cdots x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = A$

$m = n$ の時
ヤコビ行列式 (ヤコビアン、函数行列式)

$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}$

線形代数 ②

シュミットの直交化

部分空間W の底(基底)としてつねに 正規直交系を設定可能

$W \to \{\vec{b_1}, \cdots \vec{b_s}\}$

$$\left(\begin{aligned} f_1 &= c_{11}\vec{a_1} \\ f_2 &= c_{12}\vec{a_1} + c_{22}\vec{a_2} \\ &\vdots \\ f_r &= c_{1r}\vec{a_1} + c_{2r}\vec{a_2} + \cdots + c_{rr}\vec{a_r} \end{aligned}\right.$$

{ → 三角行列
= 固有値は対角成分の値

直交補空間 (部分空間の)

Wのすべての $\vec{x}$ と直交する $\vec{y}$ の集合 $\longrightarrow W^{\perp}$

計量ベクトル空間 = 実数ベクトル に「内積」が定義された空間

$(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0$ & $(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \rightleftarrows \vec{a} = 0$ (=正定値符号)

n次元 計量ベクトル空間で 計量を変えない変換 = 直交行列

(n次正方)

直交行列 = K　$(K\vec{x}, K\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$

$|K\vec{x}| = |\vec{x}|$

$|K| = \pm 1$

$\vec{e_1} \cdots \vec{e_n}$ が正規直交底 $\rightleftarrows$ $K\vec{e_1}, \cdots K\vec{e_n}$ も

$K^T K = K K^T = E$

cf 複素数化
ユニタリー行列
ユニタリー変換
unitary

固有値・固有ベクトル・固有方程式 (=固有多項式)

固有方程式(=特性方程式)

$\vec{x} \neq 0$, $A\vec{x} = a\vec{x} \rightleftarrows (A - aE)\vec{x} = 0 \rightleftarrows |A - \alpha E| = 0$

Aの固有ベクトル
Aの固有値

固有空間 $\vec{0}$と固有ベクトルの線形写像

固有方程式 は 底の変換に対して不変 (→なので固有~特性~)

$$|P^{-1}AP - \alpha E| = |P^{-1} \cdot (A - \alpha E)P| = |P|^{-1}|A - \alpha E||P|$$
$$= |A - \alpha E|$$

最小多項式 : $f(A) = 0$ となる スカラ係数の多項式 $f(x)$ は全て $\varphi_A(x)$ で割り切れる。
$\varphi_A(x)$　$\rightleftarrows$ $\varphi_A(x) = 0$ の根は(重複度を除き) 固有値と一致

線形代数 ③

ハミルトン・コーシーの定理

Aの固有多項式を $f_A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_j x^{n-i}$ とするとき、

$$f_A(A) = \sum_{i=0}^{n} a_j A^{n-1} = 0$$

べきゼロ行列（冪零行列）

$A^n = 0$ （ある n に対し）

正則行列

= non-singular matrix （特異点のない行列）

= 逆行列をもつ。 $AA^{-1} = E$

A, B が正則 $\rightleftarrows$ ABは正則 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$A^0 = E$, $A^{-n} = (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$ $(n = 1, 2 \cdots)$

対角化

Aに対し、 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ 対角行列にすること。

$\rightleftarrows$ Aの最小多項式 $\varphi_A(x) = \Pi(x - a_i)$ は重根をもたない

$\rightleftarrows$ 固有空間の直和に分解

$\rightleftarrows$ Aは対角行列に「相似」である、Aは「準単純」である。

$\rightleftarrows$ $\vec{x} \in W \to A\vec{x} \in W$ $(W \in R^n,\ A \in R^{n \times n})$

フロベニウスの定理

cf ↓
ジョルダンの標準形

$A = S + N$, $SN = NS$ S:対角化可能行列, N:冪零

$f(x)$ なる多項式に対し、

$$f(A) = f(S+N) = f(S) + f'(S)N + \frac{1}{2!}f''(S)N^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(S)N^{n-1}$$

$$S \overset{\text{相似}}{\sim} \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \to f(S) = \begin{pmatrix} f(a_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(a_n) \end{pmatrix}$$

$f(A)$の固有値は $f(a_1), \cdots f(a_n)$ である。

線形代数 ④

symmetric matrix
対称行列　$A^T = A$　　cf. skew-symmetric matrix 交代行列, 歪対称行列　$A^T = -A$

(分散共分散行列)

A, B を対称行列とするとき.　$AB = BA$ = 対称行列

A を実対称行列とするとき、A は直交行列 T により対角化可能

cf
複素化
エルミート行列

二次形式

例　$(x\ y)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = (x\ y)\begin{pmatrix}x+y\\ x+2y\end{pmatrix} = x^2 + 2xy + 2y$

$$\vec{x}^T A \vec{x} = \sum a_{ij}\, x_i x_j = (\vec{Ax}, \vec{x})$$

内積表現

係数行列 (=対称行列)

$= A[\vec{x}]$ (Siegel表記)

ちなみに $\vec{x}^T A \vec{y}$ は双一次形式

双一次形式 & $\vec{x} = \vec{y}$ ⇢ 二次形式

極化形式 polarizati

cf. 双対空間
テンソル代数

二次形式の直交変換

$A[\vec{x}]$ に対し、直交変換 $\vec{x} = K\vec{x}'$ をおこなう

$A[\vec{x}] = (A\vec{x}, \vec{x}) = (AK\vec{x}', K\vec{x}') = K^T A K[x']$

$= a_1 x_1'^2 + a_2 x_2'^2 + \cdots + a_n x_n'^2$　($A[\vec{x}]$ の標準形)

$(a_1 \cdots a_n)$ は A の固有値

線形代数⑤

◎ ベクトル・行列の(偏)微分と転置 の 多変量拡張(☆)

例 $f(x,y,z)$ $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$ (ナブラ=勾配)

$f(\vec{x})$ $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\right)^T$

ベクトル方向$\vec{u}$を考えると(空間の全微分, フィレシェ導関数)

$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\cdot\vec{u} = (\nabla f(\vec{x}), \vec{u}) = \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\right)^T \vec{u}$ なので、$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}$は

$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \left(\frac{df}{dx_1} \ \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ とする ⇒ 転置形で微分される

fがベクトル$\vec{y}$の場合も同様に考えると

$$\frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdots \left\{ \begin{array}{l} \vec{y}\text{はそのまま} \\ \underline{\vec{x}\text{は転置}} \end{array} \right.$$

$\vec{y}$が行列Aの場合も同様に考えると $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial A}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_{1n}}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial a_{m1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_{mn}}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdots \left\{ \begin{array}{l} A\text{はそのまま} \\ \underline{\vec{x}\text{は転置}} \end{array} \right.$$

$\vec{x}$が行列Bの場合も同様に $A = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{1n} \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial A}{\partial B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial b_{11}} & \cdots & \frac{\partial a_{1n}}{\partial b_{p1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{m1}}{\partial b_{1q}} & \cdots & \frac{\partial a_{mn}}{\partial b_{pq}} \end{pmatrix} \cdots \left\{ \begin{array}{l} A\text{はそのまま} \\ B\text{は転置} \end{array} \right.$$

$n = p,\ m = q$

線形代数⑥

- 二次形式のトレース化．→成分で展開

$$\vec{x}^T A \vec{x} = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + (a_{12}+a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$A\vec{x}\vec{x}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(x_1\ x_2) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}(x_1\ x_2)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 & a_{11}x_1x_2 + a_{12}x_2^2 \\ a_{21}x_1^2 + a_{22}x_1x_2 & a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A\vec{x}\vec{x}^T) = a_{11}x_1^2 + (a_{12}+a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

なので．$\vec{x}^T A \vec{x} = \mathrm{tr}(A\vec{x}\vec{x}^T)$　（混合正規分布のEMアルゴリズム

- トレースの微分

$$\frac{\partial\ \mathrm{tr}(AB)}{\partial A} = B^T \quad \text{（成分計算）}$$

- 行列式の微分　$\dfrac{\partial |A|}{\partial A} = \tilde{A}^T$ （余因子行列）$= |A|(A^{-1})^T$

- log行列式の微分

$$\frac{\partial \log|A|}{\partial A} = \frac{1}{|A|}\cdot\frac{\partial |A|}{\partial A} = \frac{1}{|A|}\cdot|A|(A^{-1})^T$$

$$(\log f)' = \frac{f'}{f} \qquad = (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-T}$$