

Frattali di Newton

Francesco Maria Celentano

September 10, 2025

1 Il metodo di Newton per la ricerca degli zeri di un polinomio nel campo complesso

1.1 Generalità

Sia $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ una funzione reale, infinitamente derivabile e con derivate continue. Supponiamo che l'intervallo $[a, b]$ contenga una sola sua radice \mathbf{x}_0 . Il metodo di Newton (o metodo delle tangenti) si basa sull'idea di approssimare la curva $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ con la tangente in un punto scelto dell'intervallo. L'intersezione di questa tangente con l'asse delle ascisse fornisce un valore approssimato della radice. Questo valore viene poi utilizzato come nuovo punto di partenza, ripetendo il procedimento in modo iterativo fino ad ottenere un'approssimazione sempre più precisa di \mathbf{x}_0 . (consultare figura 1)

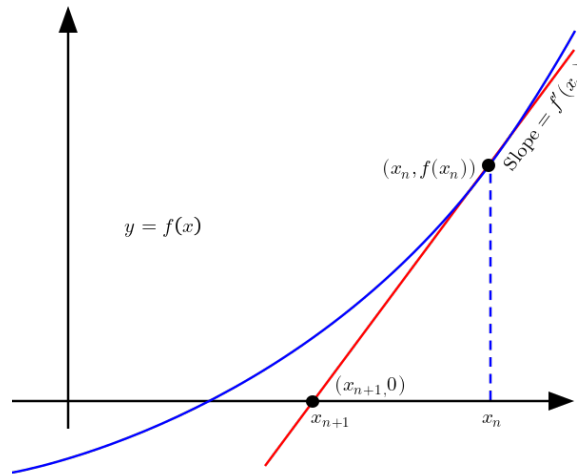


Figure 1: Descrizione grafica del metodo delle tangenti

Quindi sia $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ una funzione reale, infinitamente derivabile e con derivate continue, il metodo di Newton consiste nel prendere un valore \mathbf{x}_1 all'interno di un intervallo $[a, b]$ in cui

sappiamo esserci una sola radice e calcolare:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N^k(x_1) \quad (1)$$

dove $N(x) = x - f(x)/f'(x)$ (Dove si è usata la convezione che vede N^k come la composizione k-esima di N). Detto ciò, non è sempre detto che la quantità (1) esista e che è inoltre sia veramente soluzione di $f(x)$. Infatti dobbiamo riconoscere i seguenti tre casi:

- (1) esiste e converge ad una soluzione di $f(x)$
- (1) non esiste perchè x_1 è un punto critico
- (1) non esiste perchè l'algoritmo si blocca in un ciclo
- (1) non esiste perchè $f(x)$ non ha radici

Ciò permette quanto meno in campo reale la realizzazione di un potente algoritmo per la ricerca di soluzioni di una funzione in campo reale. Potremmo chiederci cosa potrebbe succedere in caso di funzione definita in campo complesso. Quindi sia $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio a coefficienti complessi (o più in generale una funzione meromorfa), consideriamo il sistema dinamico definito in questo modo:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{p(z_n)}{p'(z_n)} = N(z_n) \quad z_n \in \mathbb{C} \quad (2)$$

possiamo quindi calcolare la derivata di $N(z)$:

$$N'(z) = \frac{p(z)p''(z)}{p'(z)^2} \quad (3)$$

da cui notiamo che le radici di p sono attrattori per il sistema. Siamo quindi interessati allo studio del bacino di attrazione:

$$A(w) = \{z \in \mathbb{C} : N^k(z) \rightarrow w\} \quad (4)$$

per ogni w radice di p e all'insieme di Julia:

$$J(f) = \partial\{z \in \mathbb{C} : \lim_k N^k(z) \neq \infty\} = \partial K \quad (5)$$

vedremo che in questo caso l'insieme dei bacini di attrazione relativo ad ogni radice sarà notevolmente complicato.

1.2 Un caso banale

Consideriamo come prima funzione, il polinomio:

$$z^2 - c \quad (c \neq 0) \quad (6)$$

con zeri ovviamente $\pm\sqrt{c}$. Calcolando la formula di newton otteniamo quindi:

$$f(z) = \frac{z^2 + c}{2z} \quad (7)$$

da cui:

$$f(z) \pm \sqrt{c} = \frac{(z \pm \sqrt{c})^2}{2z} \quad (8)$$

quindi:

$$\frac{f(z) + \sqrt{c}}{f(z) - \sqrt{c}} = \left(\frac{z + \sqrt{c}}{z - \sqrt{c}}\right)^2 \quad (9)$$

ne segue che se $|z + \sqrt{c}|/|z - \sqrt{c}| < 1$ allora $|f^k(z) + \sqrt{c}|/|f^k(z) - \sqrt{c}| \rightarrow 0$. e quindi $f^k(z) \rightarrow -\sqrt{c}$ con $k \rightarrow \infty$. Similarmente se $|z + \sqrt{c}|/|z - \sqrt{c}| > 1$ allora $f^k(z) \rightarrow \sqrt{c}$ con $k \rightarrow \infty$.

L'insieme di julia quindi sarà dato da tutti i punti per cui $|z + \sqrt{c}| = |z - \sqrt{c}|$ ossia è la perpendicolare bisettrice di $-\sqrt{c}$ e \sqrt{c} .

1.3 C'è dunque speranza?

L'esempio appena mostrato per un polinomio di grado 2 ci porta a pensare che il dominio di attrazione ottenuto iterando il metodo di Newton sia ragionevolmente regolare.

In realtà, per polinomi di grado superiore le cose sono notevolmente diverse. Infatti possiamo farci una idea della complessità del bacino di attrazione analizzando i seguenti teoremi. Ma prima di tutto ricordo la definizione di Famiglia normale di funzioni olomorfe.

Definizione 1 (Famiglia normale). *Sia $U \subset \mathbb{C}$ un dominio e sia \mathcal{F} una famiglia di funzioni olomorfe (definite su U).*

Si dice che \mathcal{F} è una famiglia normale in U se da ogni successione $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge uniformemente su ogni compatto di U ad una funzione olomorfa su U oppure alla funzione identicamente ∞ .

Teorema 1 (Teorema di Montel). *Sia $\{g_k\}$ una famiglia di funzioni olomorfe definite su un dominio aperto U . Se $\{g_k\}$ non è una famiglia normale, allora per ogni $w \in \mathbb{C}$, con al più una eccezione, abbiamo che $g_k(z) = w$ per qualche $z \in U$ e per qualche k .*

L'insiemi di Julia di cui parliamo e le mappe di Lyapunov sono stati generati tramite un programma implementato dall'autore (reperibile a: https://github.com/Holeryn/Newton_Fractals/tree/main e colorate assegnando un colore ad ogni radice (Per Lyapunov invece usando una mappa binaria), ci tengo a dire che è possibile usare anche altri algoritmi di colorazione, ad esempio, contando i cicli.

Proof. La dimostrazione è contenuta nei libri classici di analisi complessa. \square

Lemma 1. *Dato un polinomio $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ con $n \geq 2$ e $a_n \neq 0$, esiste un numero r tale che se $|z| \geq r$, allora $|f(z)| \geq 2|z|$. In particolare, se $|f^m(z)| \geq r$ per qualche $m \geq 0$, allora $f^k(z) \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Dunque, o $f^k(z) \rightarrow \infty$ oppure l'insieme $\{f^k(z) : k = 0, 1, 2, \dots\}$ è limitato.*

Proof. Si può scegliere r sufficientemente grande in modo che se $|z| \geq r$, allora $\frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq 2|z|$ e $(|a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0|) \leq \frac{1}{2}|a_n||z|^n$. Allora, se $|z| \geq r$,

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |a_n||z|^n - (|a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0|) \\ &\geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq 2|z|. \end{aligned}$$

Inoltre, se $|f^m(z)| \geq r$ per qualche m , allora applicando questo induttivamente, si ottiene $|f^{m+k}(z)| \geq 2^m |f^k(z)| \geq r$, quindi $f^k(z) \rightarrow \infty$. \square

Lemma 2.

$$J(f) = \{z \in \mathbb{C} : \text{la famiglia } \{f^k\} \text{ non è normale in } z\}.$$

Proof. Se $z \in J(f)$, allora in ogni intorno V di z , esistono punti w tali che $f^k(w) \rightarrow \infty$, mentre $f^k(z)$ rimane limitato. Pertanto, nessuna sottosuccessione di $\{f^k\}$ converge uniformemente su V , di conseguenza $\{f^k\}$ non è normale in z .

Supponiamo ora che $z \notin J(f)$. O $z \in \text{int } K$, nel qual caso, prendendo un aperto V con $z \in V \subset \text{int } K$, si ha $f^k(w) \in K$ per ogni $w \in V$ e ogni k , dunque per il teorema di Montel, $\{f^k\}$ è normale in w (perchè è limitata nell'intorno). Altrimenti, $z \in \mathbb{C} \setminus K$, per cui $|f^k(z)| > r$ per qualche k , dove r è dato dal Lemma 1, quindi $|f^k(w)| > r$ per ogni w in qualche intorno V di z , e ancora per il Lemma 1, $f^k(w) \rightarrow \infty$ uniformemente su V , dunque nuovamente $\{f^k\}$ è normale in w . \square

Lemma 3. *Sia f un polinomio, sia $w \in J(f)$ e sia U un intorno qualsiasi di w . Allora, per ogni $j = 1, 2, \dots$, l'insieme*

$$W \equiv \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U)$$

è tutto \mathbb{C} , eccetto al più un singolo punto. Un tale punto eccezionale non appartiene a $J(f)$ ed è indipendente da w e da U .

Proof. Per il Lemma 2, la famiglia $\{f^k\}_{k=j}^{\infty}$ non è normale in w , quindi la prima parte segue immediatamente dal teorema di Montel.

Supponiamo che $v \notin W$. Se $f(z) = v$, allora, poiché $f(W) \subset W$, ne segue che $z \notin W$. Poiché $\mathbb{C} \setminus W$ consiste di al più un punto, allora $z = v$. Ne segue che f è un polinomio di grado n tale che l'unica soluzione di $f(z) - v = 0$ è $z = v$, il che implica che $f(z) - v = c(z - v)^n$ per qualche costante c .

Se z è sufficientemente vicino a v , allora $f^k(z) - v \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, convergenza che è uniforme su, ad esempio, l'insieme

$$\{z : |z - v| < (2c)^{-1/(n-1)}\}.$$

Dunque, $\{f^k\}$ è normale in v , e quindi il punto eccezionale $v \notin J(f)$.

È chiaro che v dipende solo dal polinomio f . (Infatti, se W omette un punto $v \in \mathbb{C}$, allora $J(f)$ è il cerchio con centro v e raggio $c^{-1/(n-1)}$.) \square

Lemma 4. *Sia w un attrattore per f . Allora $\partial A(w) = J(f)$. Lo stesso è vero se $w = \infty$.*

Proof. Se $z \in J(f)$, allora $f^k(z) \in J(f)$ per ogni k e quindi non può convergere a un punto fisso attrattivo, e $z \notin A(w)$.

Tuttavia, se U è un intorno qualsiasi di z , l'insieme $f^k(U)$ contiene punti di $A(w)$ per qualche k (per il Lemma 3), quindi ci sono punti arbitrariamente vicini a z che iterano verso w . Dunque, $z \in \overline{A(w)}$ e quindi $z \in \partial A(w)$.

Supponiamo invece che $z \in \partial A(w)$ ma $z \notin J(f)$. Allora z ha un intorno aperto connesso V sul quale la successione $\{f^k\}$ ha una sottosuccessione convergente o a una funzione analitica oppure a ∞ . Questa sottosuccessione converge a w su $V \cap A(w)$, che è aperto e non vuoto, e quindi anche su V , dato che una funzione analitica è costante su un insieme connesso se è costante su un qualunque suo sottoinsieme aperto.

Tutti i punti di V sono mandati in $A(w)$ dagli iterati di f , perciò $V \subset A(w)$, il che contraddice il fatto che $z \in \partial A(w)$. \square

Quindi se p ha come zeri z_1, \dots, z_n , con $p'(z_i) \neq 0$, allora dal lemma precedente, l'insieme di julia di f è la chiusura del dominio di attrazione di ogni zero, in formula:

$$J(f) = \partial A(z_1) = \dots = \partial A(z_n) \quad (10)$$

Quindi un punto sul bordo di uno qualsiasi dei bacini di attrazione deve trovarsi anche sul bordo di qualsiasi altro, ed essendo inoltre $J(f)$ innumerabile ci devono essere una molteplicità non numerabile di tali punti su ogni contorno. Questo ragionamento ci permette di capire la complessità del dominio di cui stiamo parlando e per inteso vedremo che quasi per ogni altro polinomio di ordine maggiore la situazione è ben più complicata.

1.4 Un caso meno banale (polinomi di terzo grado)

Consideriamo il polinomio:

$$p(z) = z^3 - 1 \quad (11)$$

che ha come zeri: $1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}$ e la funzione di newton è data da:

$$f(z) = \frac{2z^3 + 1}{3z^2} \quad (12)$$

la trasformazione $\rho(z) = ze^{i2\pi/3}$ è una rotazione di 120° intorno all'origine. è elementare mostrare che: $f(\rho(z)) = \rho(f(z))$. In altre parole, $A(w)$ viene trasformato in $A(we^{i2\pi/3})$

per tutte e tre gli zero di w . L'insieme di Julia deve quindi avere una simmetria a 3 lobi attorno all'origine. Se z è reale, allora $f^k(z)$ rimane reale per ogni k e, per argomenti elementari, $f^k(z)$ converge a 1 tranne che per un numero numerabile di valori reali di z . Dunque, $A(1)$ contiene l'asse reale ad eccezione di un insieme numerabile di punti e, per simmetria, $A(e^{i2\pi/3})$ e $A(e^{i4\pi/3})$ contengono le rette passanti per l'origine che formano angoli di 120° e 240° con l'asse reale, ancora una volta ad eccezione di un insieme numerabile di punti. Sappiamo inoltre che ciascun $A(w)$ contiene una regione aperta attorno a w , che ogni punto sul bordo di uno degli $A(w)$ si trova sul bordo di tutti e tre, e che esistono innumerevoli di questi "punti tripli". Ragionamenti simili seguono per polinomi di grado k -esimo.

1.4.1 Caos nei polinomi di terzo grado

Il nostro sistema dinamico è definito dalla eq (2), per cui possiamo calcolare il coefficiente di Lyapunov:

$$\sigma(x_0) = \lim_n \log\left(\left|\frac{df^n(x_0)}{dx_0}\right|\right) \quad (13)$$

ricordando la derivata di una funzione composta e le proprietà del logaritmo scriviamo la (12) come:

$$\sigma(x_0) = \lim_n \sum_{n=0}^{n-1} \log\left(\left|\frac{df(x_0)}{dx_0}\right|\right) \quad (14)$$

Questo ci permette di calcolare numericamente il coefficiente di Lyapunov in tutto lo spazio. Notiamo che per la funzione $z^3 - 1$ (ma lo stesso vale per le altre) il coefficiente di Lyapunov è positivo nella intersezione dei bacini e negativo nei bacini di attrazione. In generale Nei frattali di Newton è possibile distinguere chiaramente due regimi dinamici tramite i coefficienti di Lyapunov. All'interno dei bacini di attrazione, le orbite convergono verso le radici con comportamento contrattivo, e questo si riflette in esponenti di Lyapunov negativi. Al contrario, sui bordi dei bacini – che corrispondono al Julia set della mappa di Newton – gli esponenti di Lyapunov assumono valori positivi, rivelando la sensibilità esponenziale alle condizioni iniziali e quindi il carattere caotico della dinamica. La presenza di queste regioni a $\sigma > 0$ è ciò che rende i bordi frattali, con geometria complessa e autosimile.

1.5 Funzioni trigonometriche

Un altro gruppo di funzioni con comportamenti interessanti sono le funzioni trigonometriche. Consideriamo ad esempio $f(z) = \cos(z)$, ovviamente questa funzione ha una infinità di radici. Possiamo vedere il bacino di attrazione della funzione concentrando su un sottoinsieme finito di radici, ad esempio $z = \pi(n-1/2)$ con $n \in \{-10, -9, -8, \dots, 8, 9, 10\}$. Notiamo che sui contorni abbiamo dei cerchi più grandi al cui interno vi sono altri cerchi più piccoli, sui cui contorni vi sono altri cerchi, etc... in più notiamo che vicino al punto $z=0$, vi è una regione bianca che sta a indicare che l'algoritmo non converge. Per giustificare tale comportamento è possibile guardare la funzione, lungo l'asse reale.

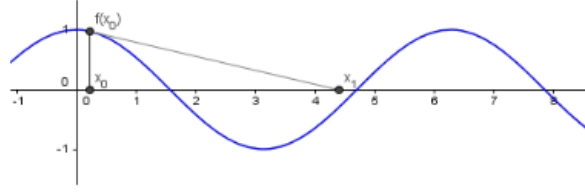


Figure 2: Prima iterazione del metodo di newton reale con punto iniziale $\frac{3\pi}{2}$

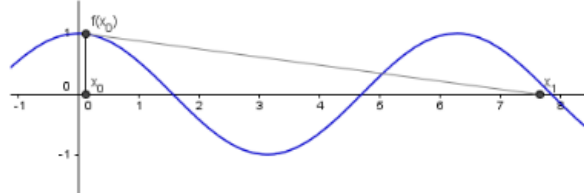


Figure 3: Prima iterazione del metodo di newton reale con punto iniziale $\frac{5\pi}{2}$

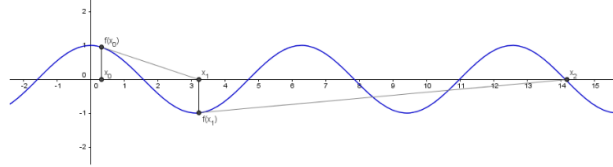


Figure 4: Seconda iterazione del metodo di newton reale con punto iniziale $\frac{9\pi}{2}$

Quando scegliamo come punto iniziale dell'algoritmo un valore vicino al punto critico in 0, otteniamo un valore quanto più lontano lungo l'asse x. Perciò i valori troppo vicini a $z=0$, portano alla divergenza numerica. Invece i valori vicini al punto critico ma sufficientemente lontani a non far divergere l'algoritmo si comporteranno dipndentemente al bacino di attrazione in cui cadranno. Spiegano i vari cerchi di colore diverso. Tuttavia, invece di finire immediatamente in un bacino di attrazione di una radice, potremmo anche finire nelle prossimità di un punto critico ,oppure vista la simmetricità della funzione in un ciclo, in entrambi i casi l'algoritmo diverge. Così spiegati i bordi bianchi tra un cerchio e l'altro. In fine potremmo finie in un vero bacino di attrazione di una radice e ciò permetterebbe l'algoritmo di convergere. Ovviamente questo schema si ripete e quindi si ottiene l'autosimilarità.

1.6 Conclusione

I bacini di attrazione dell'algoritmo di newton hanno quasi sempre un comportamento frattale nel caso di polinomi a coefficienti complessi e in generale per funzioni olomorfe (e in galleria ne sono presentate molte). . Dal punto di vista strettamente numerico, esso non garantisce la convergenza globale: esistono orbite che divergono, cicli periodici che non conducono ad alcuna radice e, regioni in cui si giunge effettivamente alle radici della funzione.

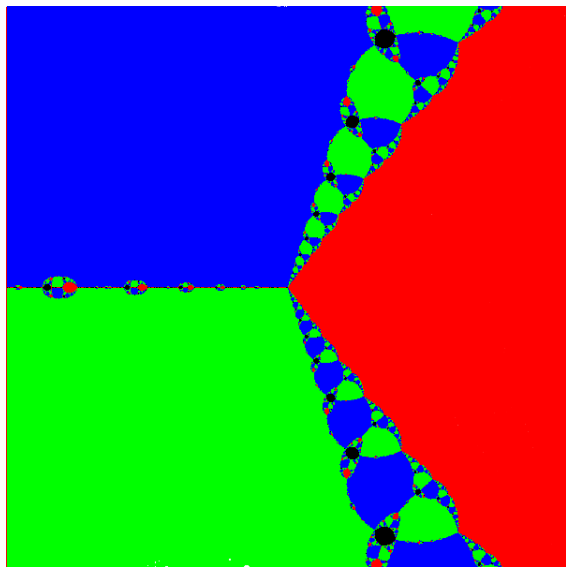


Figure 5: Insieme di Julia $z^3 - 2z + 2$

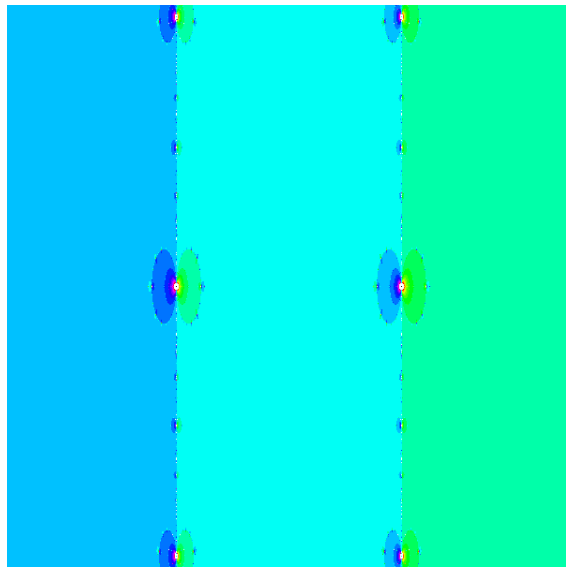


Figure 6: Insieme di Julia $\sin(z)$

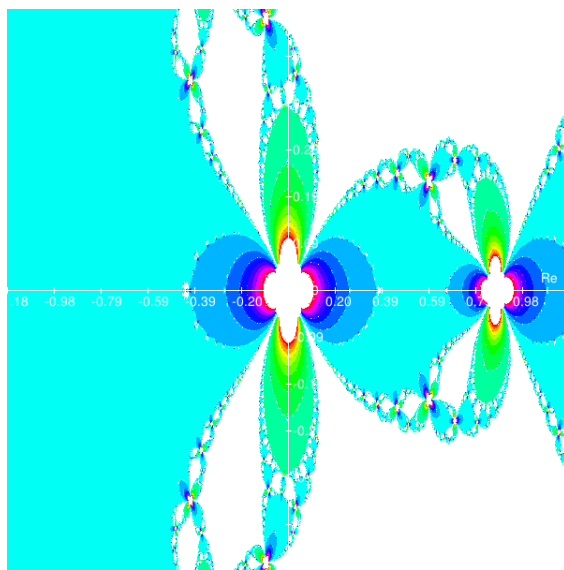


Figure 7: Insieme di Julia $z^2 \sin(z) - 1$