算法设计与分析

主讲人：权丽君

Email: ***ljquan@suda.edu.cn***

苏州大学 计算机学院







第三讲 分治策略

内容提要：

- 分治法基本思想
- 最大子数组问题
- 矩阵乘法的Strassen算法
- 递归式求解方法







第三讲 分治策略

内容提要：

- 分治法基本思想
- 最大子数组问题
- 矩阵乘法的Strassen算法
- 递归式求解方法

分治法的基本思想

- **基本思想：**当问题规模比较大而无法直接求解时，将原始问题分解为几个规模较小、但类似于原始问题的子问题，然后递归地求解这些子问题，最后合并子问题的解以得到原始问题的解。
- **分治策略遵循三个步骤：**

1）分解（Divide）：将原问题分为若干个规模较小、相互独立，形式与原问题一样的子问题。

2）解决（Conquer）：递归地解各个子问题。若子问题足够小，则直接求解；否则“递归”地求解各个子问题，即继续将较大子问题分解为更小的子问题，然后重复上述计算过程。

3）合并（Combine）：将子问题的结果合并成原问题的解。

当子问题的规模足够大，需要进一步分解并递归求解时，这种情况称为递归情况（recursive case）；若子问题的规模变得足够小，不再需要再进一步分解了，这种情况称为基本情况（base case）（基本情况的子问题可以直接求解）。

分治算法的实例：归并排序

- **归并排序的基本思路：**
  - ① **分解**：把 n 个元素分成各含 $n/2$ 个元素的子序列；
  - ② **解决**：用归并排序算法对两个子序列递归地排序；
  - ③ **合并**：合并两个已排序的子序列以得到排序结果。
- **归并排序的过程描述：**

```
MERGE-SORT(A, p, r)
1    if p < r
2        Then q ←⌊(p+r)/2⌋
3            MERGE-SORT(A, p, q)
4            MERGE-SORT(A, q+1, r)
5            MERGE(A, p, q, r)
```

- **归并排序的时间分析：**

$$T(n)=\begin{cases}\Theta(1) & \text{if } n=1\\ 2T(n/2)+\Theta(n) & \text{if } n>1\end{cases}$$

- 递归式
  - 使用递归式可以很自然地刻画分治算法的运行时间
  - 等式或不等式，通过更小的输入上的函数值来描述一个函数

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & if\ n = 1; \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) & if\ n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + T\left(\frac{n}{3}\right) + \Theta(n)$$

- 三种求解递归式的方法
  - 代入法： 我们猜测一个界，然后用数学归纳法证明这个界是正确的。
  - 递归树法：将递归式转换为一棵树，其结点表示不同层次的递归调用产生的代价。然后采用边界和技术来求解递归式。
  - 主方法： 可求解形如下面公式的递归式的界：
  - $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$
  - 其中$a \geq 1, b > 1, f(n)$是一个给定的函数。







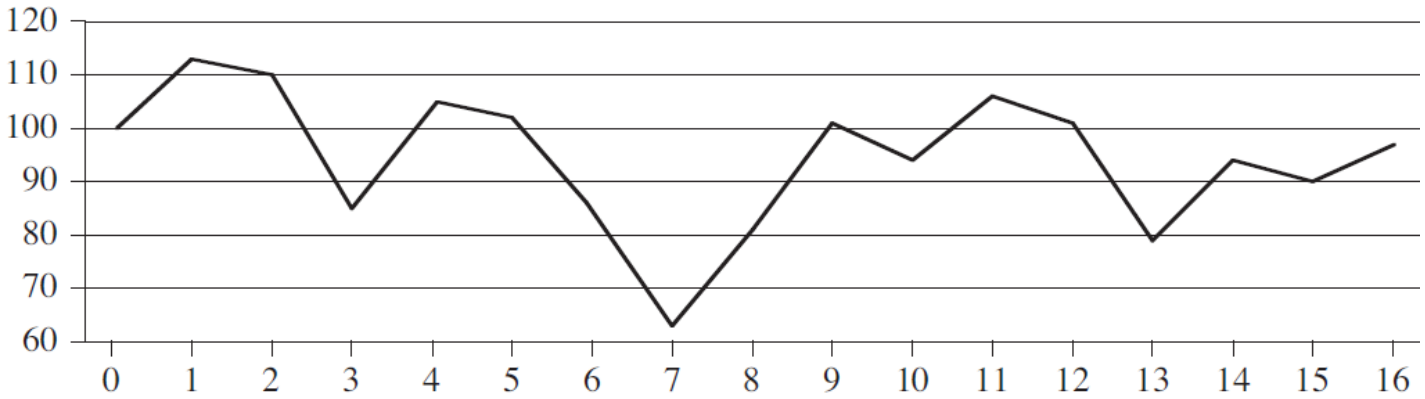
第三讲 分治策略

内容提要：

- 分治法基本思想
- 最大子数组问题
- 矩阵乘法的Strassen算法
- 递归式求解方法

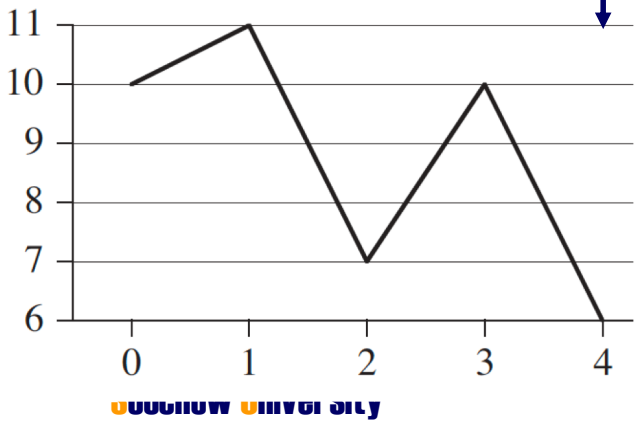
最大子数组问题

- 一个关于炒股的 story：



Day	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Price	100	113	110	85	105	102	86	63	81	101	94	106	101	79	94	90	97
Change		13	−3	−25	20	−3	−16	−23	18	20	−7	12	−5	−22	15	−4	7

反例



- 问：哪段时间最赚钱？
  即股市有起落，从哪天到哪天的收益最大呢？

最大子数组问题

- **从问题定义到建模求解：**
  - ✓ 求解炒股问题的算法模型：最大子数组问题
  - ✓ 已知数组 A，在 A 中寻找“和”最大的非空连续子数组

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	13	–3	–25	20	–3	–16	–23	18	20	–7	12	–5	–22	15	–4	7

maximum subarray

称这样的连续子数组为最大子数组 (maximum subarray)

- **怎么求解？**
  - ✓ **方法一：暴力求解法（brute-force solution）**

搜索 A 的每一对起止下标区间的和，和最大的子区间就是最大子数组，时间复杂度：$\binom{n}{2} = \theta(n^2)$

最大子数组问题

- **怎么求解？**
  - ✓ **方法二：使用分治策略求解**

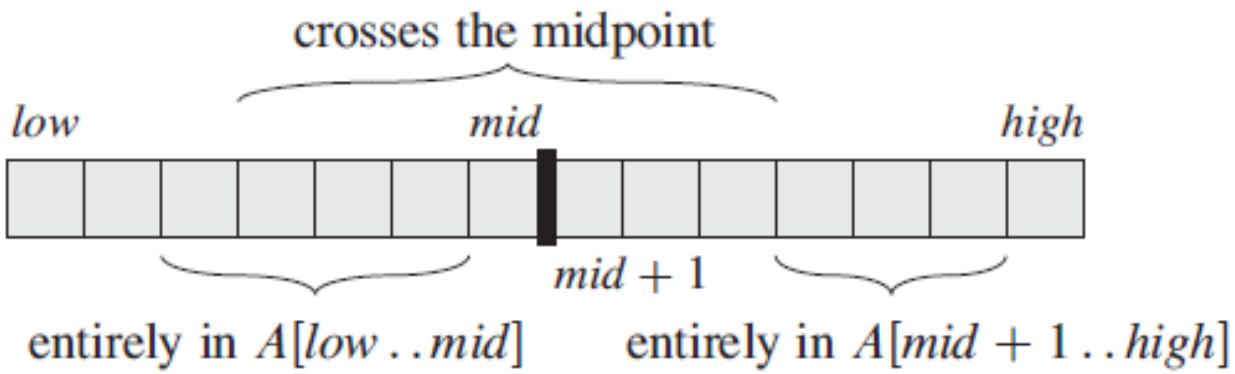
    设当前要寻找子数组 $A[low..high]$ 的最大子数组

    分治的基本思想是：

    - 首先将子数组 $A[low..high]$ 划分为两个规模尽量相等的子数组，分割点：$mid=(low+high)/2$。
    - 然后分别求解 $A[low..mid]$ 和 $A[mid+1..high]$ 的最大子数组。

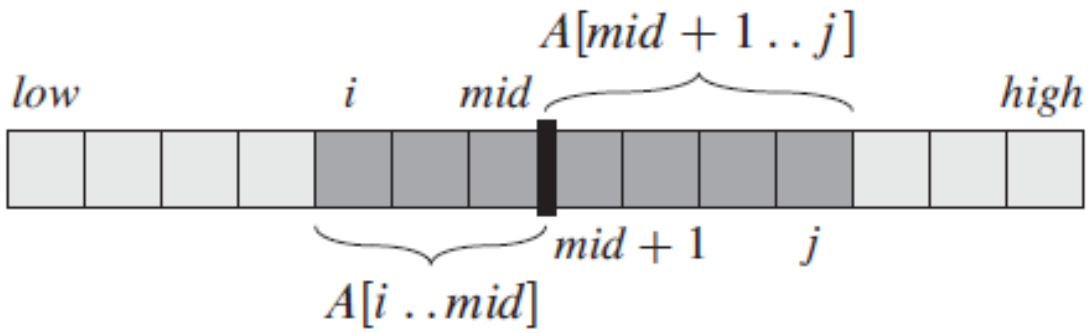
最大子数组问题

- **基于上述划分，$A[low..high]$ 的连续子数组 $A[i..j]$ 所处的位置必是下面三种情况之一：**
  - 完全位于左子数组 $A[low..mid]$ 中，因此 $low \le i \le j \le mid$
  - 完全位于右子数组 $A[mid+1..high]$ 中，因此 $mid \le i \le j \le high$
  - 跨越了中点，因此 $low \le i \le mid < j \le high$



最大子数组问题

- $A[low..high]$的**最大子数组**也是 $A[low..high]$ 的连续子数组，所以 $A[low..high]$ 的一个**最大子数组**所处的位置也必然是这三种情况之一。
- 即：$A[low..high]$ 的这个“最大子数组”必然是：或者**完全位于**$A[low..mid]$ **中**、或者**完全位于** $A[mid+1..high]$ **中**、或者是**跨越中点的所有子数组中和最大的那个**。

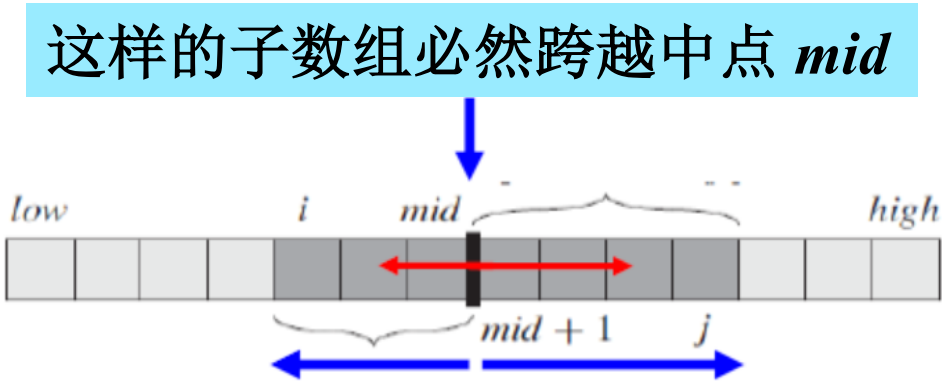


最大子数组问题

- **求解过程分析：**

  1）对于完全位于$A[low..mid]$ 和 $A[mid+1..high]$ 中的最大子数组，可以在这两个较小的子数组上用递归的方法进行求解。

  2）怎么寻找跨越中点的最大子数组呢？



从 mid 出发，分别向左和向右找出和最大的子区间，然后合并这两个区间即可得到跨越中点时的 $A[low..high]$ 的最大子数组。

最大子数组问题

- 以下2个过程用于求解最大子数组问题：
  - ✓ **过程1**：FIND-MAX-CROSSING-SUBARRAY，求跨越中点的最大子数组

```
FIND-MAX-CROSSING-SUBARRAY(A, low, mid, high)
1   left-sum = −∞
2   sum = 0
3   for i = mid downto low
4       sum = sum + A[i]
5       if sum > left-sum
6           left-sum = sum
7           max-left = i
8   right-sum = −∞
9   sum = 0
10  for j = mid + 1 to high
11      sum = sum + A[j]
12      if sum > right-sum
13          right-sum = sum
14          max-right = j
15  return (max-left, max-right, left-sum + right-sum)
```

搜索从 *mid* 开始向左的半个区间，找出左边最大的连续子数组的和

同理，搜索从 mid+1 开始向右的半个区间，找出右边最大的连续子数组的和

返回搜索的结果

  - ✓ **时间复杂度**：$(mid\text{-}low+1)+(high\text{-}mid)=high\text{-}low+1=n$

最大子数组问题

- ✓ **过程2：**FIND-MAXIMUM-SUBARRAY, 求最大子数组问题的分治算法

```
FIND-MAXIMUM-SUBARRAY(A, low, high)
1  if high == low
2       return (low, high, A[low])          // base case: only one element
3  else mid = ⌊(low + high)/2⌋
4       (left-low, left-high, left-sum) =
            FIND-MAXIMUM-SUBARRAY(A, low, mid)
5       (right-low, right-high, right-sum) =
            FIND-MAXIMUM-SUBARRAY(A, mid + 1, high)
6       (cross-low, cross-high, cross-sum) =
            FIND-MAX-CROSSING-SUBARRAY(A, low, mid, high)
7       if left-sum ≥ right-sum and left-sum ≥ cross-sum
8            return (left-low, left-high, left-sum)
9       elseif right-sum ≥ left-sum and right-sum ≥ cross-sum
10           return (right-low, right-high, right-sum)
11      else return (cross-low, cross-high, cross-sum)
```

求 $A[low..mid]$ 的最大子数组

求 $A[mid+1..high]$ 的最大子数组

求跨越中点的最大子数组

返回三个最大子子数组中的大者作为问题的解

最大子数组问题

- **FIND-MAXIMUM-SUBARRAY的时间分析证明**

令 T(n) 表示求解 n 个元素的最大子数组问题的执行时间

1）当 $n = 1$ 时，$T(1) = \Theta(1)$；

2）当 $n > 1$ 时，对 $A[low..mid]$和 $A[mid+1..high]$两个子问题递归求解，每个子问题的规模是 $n/2$，所以每个子问题的时间为$T(n/2)$，两个子问题递归求解的总时间是 $2T(n/2)$。

3）FIND-MAX-CROSSING-SUBARRAY的时间是 $\Theta(n)$。

- **算法FIND-MAXIMUM-SUBARRAY执行时间 T(n) 的递归式为：**

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n = 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{if } n > 1 \end{cases} \Rightarrow T(n) = \Theta(n \lg n)$$







第三讲 分治策略

内容提要：

- 分治法基本思想
- 最大子数组问题
- 矩阵乘法的Strassen算法
- 递归式求解方法

Strassen矩阵乘法

回顾一下矩阵运算

已知两个n阶方阵： $A=(a_{ij})_{nxn}$， $B=(b_{ij})_{nxn}$

1）**矩阵加法**

$C=A+B=(c_{ij})_{nxn}$ ，其中，$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$，$i,j=1,2,\ldots,n$

时间复杂度： $\Theta(n^2)$

2）**矩阵乘法**

$C=AB=(c_{ij})_{nxn}$ ，其中，$c_{ij}=\sum_{1\le k\le n}a_{ik}b_{kj}$，$i,j=1,2,\ldots,n$

时间复杂度： $\Theta(n^3)$。

共有n^2个c_{ij}需要计算，每个c_{ij}需要n次乘运算,n-1次加法

Strassen矩阵乘法

朴素的矩阵乘法:

已知两个 n 阶方阵：$A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}$, 定义乘积 $C=A\cdot B$ 中的元素：

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$$

实现两个 $n\times n$ 矩阵乘的过程：

```
SQUARE-MATRIX-MULTIPLY(A, B)
1  n = A.rows
2  let C be a new n × n matrix
3  for i = 1 to n
4      for j = 1 to n
5          c_ij = 0
6          for k = 1 to n
7              c_ij = c_ij + a_ik · b_kj
8  return C
```

朴素的矩阵乘的计算时间是$\Theta(n^3)$

Strassen矩阵乘法

- **基于分治策略的矩阵乘算法：**

  设 $n=2^k$，两个 n 阶方阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$

  N: 若 $n\neq 2^k$，可通过在 A 和 B 中补0使之变成阶是2的幂的方阵

- ✓ 首先，将 A、B 和 C 分成4个 $n/2\times n/2$ 的子矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

- ✓ 可以将公式 C=AB 改写为：

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= A_{11}\cdot B_{11}+A_{12}\cdot B_{21}, \\ C_{12} &= A_{11}\cdot B_{12}+A_{12}\cdot B_{22}, \\ C_{21} &= A_{21}\cdot B_{11}+A_{22}\cdot B_{21}, \\ C_{22} &= A_{21}\cdot B_{12}+A_{22}\cdot B_{22}. \end{aligned}$$

共有：8次$(n/2)\times(n/2)$ 矩阵乘
4次$(n/2)\times(n/2)$ 矩阵加

Strassen矩阵乘法

- **SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE，求矩阵乘的分治算法**

```
SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A, B)
1  n = A.rows
2  let C be a new n × n matrix
3  if n == 1
4      c11 = a11 · b11
5  else partition A, B, and C as in equations (4.9)
6      C11 = SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A11, B11)
           + SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A12, B21)
7      C12 = SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A11, B12)
           + SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A12, B22)
8      C21 = SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A21, B11)
           + SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A22, B21)
9      C22 = SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A21, B12)
           + SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A22, B22)
10 return C
```

复制矩阵，花费$\Theta(n^2)$

使用下标，花费$\Theta(1)$

$\Theta(n^2)$

T(n/2)

N: 任意两个子矩阵块的乘可以沿用同样的规则：如果子矩阵的阶大于2，则将子矩阵分成更小的子矩阵，直到每个子矩阵只含一个元素为止。从而构造出一个递归计算过程。

Strassen矩阵乘法

- **SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE的时间分析证明**

  令 $T(n)$ 表示两个 $n\times n$ 矩阵相乘的计算时间

  1）当 $n=1$ 时，$T(1)=\Theta(1)$；

  2）当 $n>1$ 时，8次 $n/2\times n/2$ 矩阵乘，花费时间为$8T(n/2)$，

  4次 $n/2\times n/2$ 矩阵加，花费 $\Theta(n^2)$ 时间。

- **算法SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE执行时间 $T(n)$ 的递归式为**：

$$T(n)=\begin{cases}\Theta(1) & \text{if } n=1\\ 8T(n/2)+\Theta(n^2) & \text{if } n>1\end{cases}\Rightarrow T(n)=\Theta(n^3)$$

Strassen矩阵乘法

- **Strassen方法核心思想:**
  - 令递归树稍微不那么茂盛，即只递归进行 7 次而不是 8个 $n/2\times n/2$ 矩阵乘
- **Strassen方法具体步骤：**

  1）按上述方法将输入矩阵 A、B 和输出矩阵 C 分解为 $n/2\times n/2$ 的子矩阵。采用下标计算方法，此步骤花费$\Theta(1)$时间。

  2）创建10个 $n/2\times n/2$ 的矩阵 S_1，S_1 ，…，S_{10}，每个矩阵保存步骤1）中创建的两个矩阵的和或差。花费时间为$\Theta(n^2)$。

  3）用步骤1）中创建的子矩阵和步骤2）中创建的10个矩阵，递归地计算7个矩阵积P_1，P_2 ，…，P_7。每个矩阵P_i都是$n/2\times n/2$。

  4）通过P_i矩阵的不同组合进行加减运算，计算出结果矩阵C的子矩阵C_{11}，C_{12}，C_{21}，C_{22}。花费时间为$\Theta(n^2)$。

Strassen矩阵乘法

Strassen方法细节：

$$
\begin{aligned}
S_1 &= B_{12} - B_{22}, \\
S_2 &= A_{11} + A_{12}, \\
S_3 &= A_{21} + A_{22}, \\
S_4 &= B_{21} - B_{11}, \\
S_5 &= A_{11} + A_{22}, \\
S_6 &= B_{11} + B_{22}, \\
S_7 &= A_{12} - A_{22}, \\
S_8 &= B_{21} + B_{22}, \\
S_9 &= A_{11} - A_{21}, \\
S_{10} &= B_{11} + B_{12}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_1 &= A_{11} \cdot S_1 = A_{11} \cdot B_{12} - A_{11} \cdot B_{22}, \\
P_2 &= S_2 \cdot B_{22} = A_{11} \cdot B_{22} + A_{12} \cdot B_{22}, \\
P_3 &= S_3 \cdot B_{11} = A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{11}, \\
P_4 &= A_{22} \cdot S_4 = A_{22} \cdot B_{21} - A_{22} \cdot B_{11}, \\
P_5 &= S_5 \cdot S_6 = A_{11} \cdot B_{11} + A_{11} \cdot B_{22} + A_{22} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{22}, \\
P_6 &= S_7 \cdot S_8 = A_{12} \cdot B_{21} + A_{12} \cdot B_{22} - A_{22} \cdot B_{21} - A_{22} \cdot B_{22}, \\
P_7 &= S_9 \cdot S_{10} = A_{11} \cdot B_{11} + A_{11} \cdot B_{12} - A_{21} \cdot B_{11} - A_{21} \cdot B_{12}.
\end{aligned}
$$

7次$(n/2)\times(n/2)$ 矩阵相乘

10次$(n/2)\times(n/2)$ 矩阵加减法

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= P5 + P4 - P2 + P6 \\
C_{12} &= P1 + P2 \\
C_{21} &= P3 + P4 \\
C_{22} &= P5 + P1 - P3 - P7
\end{aligned}
$$

8次$(n/2)\times(n/2)$ 矩阵加减法

Strassen矩阵乘法

- **Strassen方法的时间分析证明**

令 $T(n)$ 表示两个 $n \times n$ 矩阵的Strassen矩阵乘所需的计算

1）当 $n = 1$ 时，$T(1) = \Theta(1)$；

2）当 $n > 1$ 时，7次 $(n/2)\times(n/2)$ 矩阵乘，花费时间为 $7T(n/2)$，18次$(n/2)\times(n/2)$ 矩阵加减，花费 $\Theta(n^2)$ 时间。

- **Strassen方法执行时间 $T(n)$ 的递归式为**：

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n = 1 \\ 7T(n/2) + \Theta(n^2) & \text{if } n > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} T(n) &= \Theta(n^{\lg 7}) \\ &\approx \Theta(n^{2.81}) \end{aligned}$$







第三讲 分治策略

内容提要：

- 分治法基本思想
- 最大子数组问题
- 矩阵乘法的Strassen算法
- 递归式求解方法

✓代入法

✓递归树法

✓主方法

递归式求解方法

- **分治算法的计算时间表达式往往是递归式**
  - ✓ 如归并排序、最大子数组的分治算法运行时间T(n)的递归式为：

$$T(n)=\begin{cases}\Theta(1) & \text{if } n=1\\ 2T(n/2)+\Theta(n) & \text{if } n>1\end{cases}$$

边界条件

递归方程

  - ✓ Strassen矩阵乘法的运行时间T(n)的递归式为：

$$T(n)=\begin{cases}\Theta(1) & \text{if } n=1\\ 7T(n/2)+\Theta(n^2) & \text{if } n>1\end{cases}$$

- **那么如何化简递归式，以得到形式简单的限界函数？**
  - ✓ 代换法
  - ✓ 递归树法
  - ✓ 主方法

N：递归式求解的结果是得到形式简单的渐近限界函数表示（即用O、Ω、Θ表示的函数式）

递归式求解方法

- **预处理——对表达式细节的简化**

为便于处理，通常做如下假设和简化处理：

（1）运行时间函数T(n)的定义中，一般假定自变量为正整数；因为这样的 n 通常表示数据的个数。

（2）忽略递归式的边界条件，即 n 较小时函数值的表示；原因在于虽然递归式的解会随着 T(1) 值的改变而改变，但此改变不会超过常数因子，对函数的阶没有根本影响。

（3）对上取整、下取整运算做合理简化，如：

$$\mathrm{T}(n) = \mathrm{T}(\lceil n/2 \rceil) + \mathrm{T}(\lfloor n/2 \rfloor) + f(n)$$

通常忽略上、下取整函数，就可写作以下简单形式：

$$\mathrm{T}(n) = 2\mathrm{T}(n/2) + f(n)$$

代入法

- **代换法求解递归式要点：**

1. 猜测解的形式。
2. 用数学归纳法找出使解真正有效的常数，并证明解是正确的。

例：$T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n$

解：（1）猜测其解为 $T(n)=O(n\lg n)$

（2）证明选择常数 $c>0$，可有$T(n) \le cn\lg n$。

假定此上界对所有正数 $m<n$ 都成立的，对于 $m=\lfloor n/2 \rfloor$，有 $T(\lfloor n/2 \rfloor) \le c\lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor)$。将其带入递归式，得到

$$T(n) \le 2(c\lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor))+n \le cn\lg(n/2)+n$$

$$=cn\lg n-cn\lg 2+n$$

$$=cn\lg n-cn+n \le cn\lg n$$

其中，只要 $c \ge 1$ ，最后一步都会成立。

- 上面的过程证明了当n足够大时猜测的正确性，但对边界值 是否成立呢？

  即： T(n)≤cnlogn 的结论对于较小的n成立吗？

- 分析：事实上，对n=1，上述结论存在问题：

  （1）作为边界条件，我们有理由假设T(1)=1；

  （2）但对n=1，带入表达式有：T(1)≤c•1•log1=0，与T(1)=1不相符。

- 归纳证明的基础不成立，怎么处理？

- 从n_0的性质出发：只需要存在常数n_0，使得$n \geq n_0$时结论成立即可，所以n_0不一定取1。

所以，这里不取$n_0=1$，而取$n_0=2$，用T(2)、T(3)代替T(1) 作为归纳证明中的边界条件：

（1）依然合理地假设T(1) =1。

（2）研究什么样的c使得T(2)、T(3)可以满足T(n)≤cnlogn。

（即使得 T(2)≤2clog2　　且　　T(3)≤3clog3 成立）

- 将T(1)=1带入递归式，有：T(2) = 4，T(3)=5
- 要使 T(2)≤2clog2 和T(3)≤3clog3 成立，只要c≥2即可。
- 综上所述，取常数c≥2，结论T(n)≤cnlogn成立。

命题得证。

代入法

- **应用数学归纳法要求解对边界条件成立：**

✓ 一般通过证明边界条件符合归纳证明的基本情况。但可能出现归纳证明基本情况不能满足的问题。

✓ 解决办法：扩展边界条件。渐近界只要求 $n \geq n_0$ 即可，故可以选择适当的 n_0 ，让 $T(n_0)$ 代替作为归纳证明中的边界条件，使递归假设对很小的 n 也成立。

如何猜测递归式的解呢？

- 遗憾的是，并不存在通用的方法来猜测递归式的正确解。

- 1）主要靠经验

  - 尝试1：看有没有形式上类似的表达式，以此推测新递归式解的形式。
  - 尝试2：先猜测一个较宽的界，然后再缩小不确定范围，逐步收缩到紧确的渐近界。
  - 避免盲目推测：$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1$，猜测$T(n) = O(n)$

$$T(n) \le c\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1 = cn + 1$$

原因：并未证出一般形式T(n)≤cn成立。（cn+1≮cn）

必要的时候要做一些技术处理

- 1）去掉一个低阶项
  - 新的猜测是$T(n) \le cn - d$，**d是一个大于0的一个常数**
  - $\boldsymbol{T(n) \le c\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - d\right) + c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - d\right) + 1 = cn - 2d + 1 \le cn - d}$
  - 只要$d \ge 1$,**此事就成立**
- 2）变量代换：对陌生的递归式做些简单的代数变换，使之变成较熟悉的形式。

例：设有递归式 $T(n) \le 2T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \log n$

分析：原始形态比较复杂

(1) **做代数代换**：令 $m = \log n$，则n=2^m，$\sqrt{n} = 2^{m/2}$

(2) **忽略下取整**，直接使用$\sqrt{n}$ 代替 $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$

得：

$$T(2^m) \le 2T(2^{m/2}) + m$$

再设 **S(m) = T(2^m)**，得以下形式递归式：

$$S(m) \le 2S(m/2) + m$$

从而获得**形式上熟悉**的递归式。

根据前面的一些讨论，可得新的递归式的上界是：

$$O(m \log m)$$

再**将S(m)、m=log*n* 带回T(n)**，有，

$$\begin{aligned} T(n) &= T(2^m) \\ &= S(m) = O(m \log m) \\ &= O(\log n \log \log n) \end{aligned}$$

这里，$m = \log n$

代入法

- **代换法求解步骤小结：**
  - ✓ 猜测递归式没有通用的方法
  - ✓ 需要经验、创新性
  - ✓ 试探法
  - ✓ 递归树
  - ✓ 证明较宽松的上下界，然后再缩小不确定性区间
- **注意事项：**
  - ✓ 对更小的值做更强的假设
  - ✓ 避免陷阱
  - ✓ 适当时进行变量替换

递归树法

- 画递归树有助于猜想递归式的解
- 当用递归式表示分治算法的运行时间时，递归树的方法尤其有用
- 递归树中，每一个节点都代表着递归函数调用集合中一个子问题的代价。将树中每一层内的代价相加得到一个每层代价的集合，再将每层的代价相加得到递归式所有层次的总代价
- 但递归树法不够严谨，使用递归树产生好的猜测时，通常需要容忍小量的“不良量”
  - ✓ floor, ceiling忽略
  - ✓ n 经常假设为某个整数的幂次方
- 通常作法：用递归树法生成好的猜测，然后可用代入法验证猜测是否正确

递归树法

基于递归树的时间分析

- **节点代价**：在递归树中，每个节点有求解相应（子）问题 的**代价**(cost，这里指除递归以外的其它代价)。
- **层代价**：每一层各节点代价的和。
- **总代价**：整棵树的各层代价之和
- **目　标**：利用树的性质，获取对递归式解的猜测，然后用代换法或其它方法加以验证。

▫例：求解 $T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \theta(n^2)$

准备性工作：为简单起见，对一些细节做必要、合理的简化和假设，这里为：

（1）**去掉底函数的表示**

- 理由：底函数和顶函数对递归式求解并不 “重 要” 。

（2）**假设n是4的幂**，即$n=4^k$，$k=\log_4 n$。

- 一般，当证明$n=4^k$成立后，再加以适当推广，就可以把结论推广到n不是4的幂的一般情况了。

（3）**展开$\theta(n^2)$**，代表递归式中非重要项。

- 假设其常系数为c，c>0，从而去掉θ符号，转变成cn^2的形式，便于后续的公式化简。

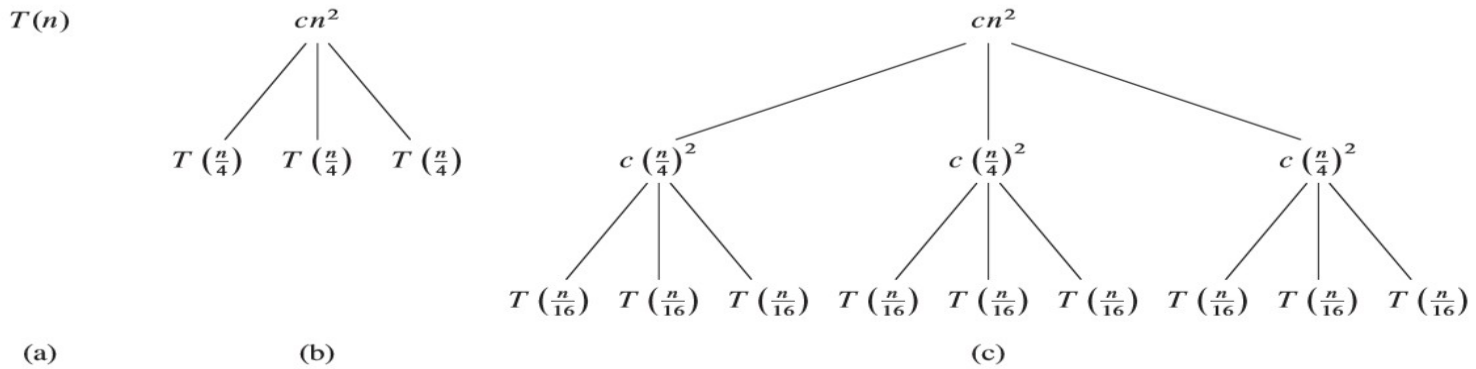
最终得以下形式的递归式：$T(n) = 3T(n/4) + cn^2$

递归树法

- 例：求解 $T(n) = 3T(n/4) + cn^2$

关键：1）树的深度如何确定？

2）每个节点的代价—>每层的代价—>总代价



a) 对原始问题T(n)的描述。

b) 第一层递归调用的分解情况，cn^2是顶层计算除递归以外的代价，T(n/4)是分解出来的规模为n/4的子问题的代价，总代价$T(n)=3T(n/4)+cn^2$。

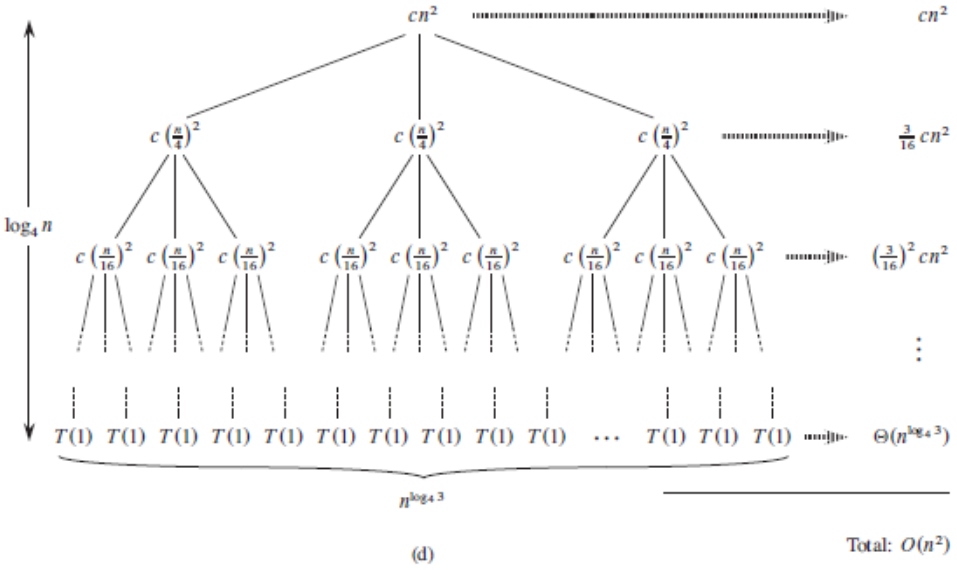
c) 第二层递归调用的分解情况。$c(n/4)^2$是三棵二级子树除递归以外的代价。

递归树法

- **例：求解 $T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2$**

1）树的深度：子问题的规模按1/4的方式减小，在递归树中深度为i 的节点子问题的大小为 $n/4^i$。

- 当 $n/4^i = 1$ 时，子问题规模仅为1，达到边界值。
- 所以，
  - 节点分布层：$0 \sim \log_4 n$
  - 树共有 $\log_4 n+1$ 层
  - 从第2层起，每一层上的节点数为上层节点数的3倍
  - 深度为i 的层节点数为 3^i。



2）代价计算

- ✓ 深度为 i 的每个结点的代价为：$c(n/4^i)^2$
- ✓ 对 i=0, 1, 2, …, $\log_4 n$-1, 深度为 i 的所有结点的总代价为：$3^i c(n/4^i)^2 = (3/16)^i cn^2$
- ✓ 最底层结点为 $n^{\log_4 3}$，每个结点代价为 T(1)，总代价为 $n^{\log_4 3}T(1)$，即 $\Theta(n^{\log_4 3})$

递归树法

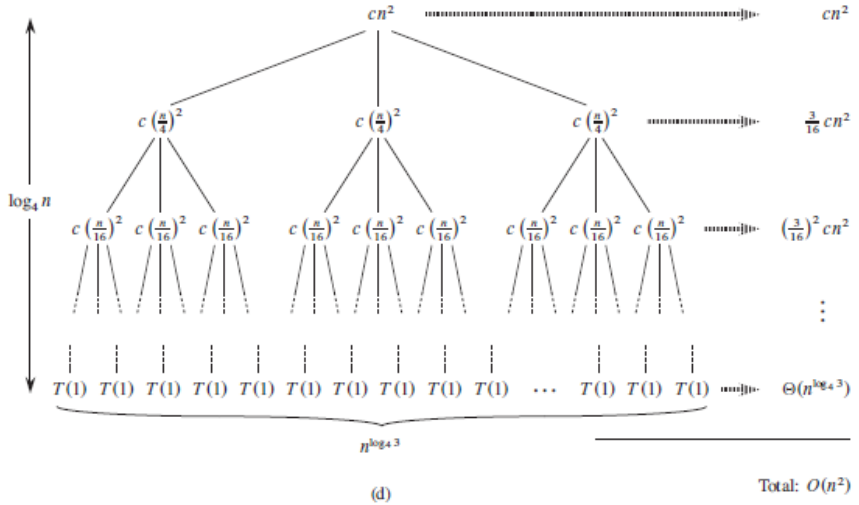
- **例：求解 $T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2$**

所有层次的代价之和，即整棵树的代价:

$$T(n) = cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(\log_4 3)$$

$$= \frac{(3/16)^{\log_4 n} - 1}{(3/16) - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$



无限递减几何级数

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) < \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$= \frac{1}{1 - (3/16)} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$= \frac{16}{13} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$= O(n^2)$$

- 对于实数x≠1，和式$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$是一个几何级数（等比数列），其值为$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$
- 当和是无穷的且|x|<1时，得到无穷递减几何级数，此时

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}$$

至此，获得T(n)解的一个猜测：$T(n)=O(n^2)$，成立吗？

用代换法证明猜测的正确：

- 将$T(n)\le dn^2$作为归纳假设，d是待确定的常数，带入推论证明 过程，有

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2) \\
&\le 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2 \le 3d\lfloor n/4 \rfloor^2 + cn^2 \\
&\le 3d(n/4)^2 + cn^2 \\
&= \frac{3}{16}dn^2 + cn^2
\end{aligned}
$$

c是引入的另一个常量

显然，要使得$T(n)\le dn^2$成立，只要$d\ge(16/13)c$即可。所以，$T(n)\le dn^2$的猜测成立

定理得证（边界条件的讨论略）。

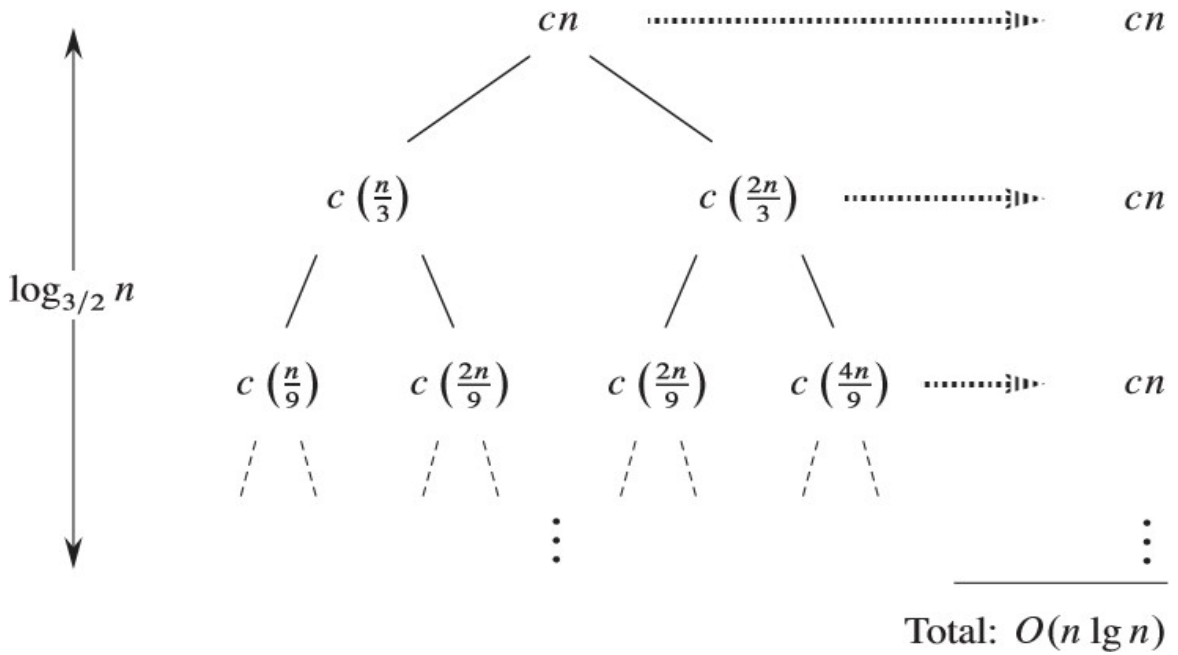
另： $O(n^2)$是$T(n)$的一个紧确界，为什么？

例 求表达式$\mathrm{T}(n)=T\left(\frac{n}{3}\right)+T\left(\frac{2n}{3}\right)+O(n)$，（这里，表达式中直接省略了下取整和上取整函数）：

进一步地，引入常数c,展开O(n)，得

$$\mathrm{T}(n)\leq T\left(\frac{n}{3}\right)+T\left(\frac{2n}{3}\right)+cn$$

递归树为：



分析：

- 该树并不是一个完全的二叉树。
  - 从根往下，越来越多的内节点在左侧消失(1/3分叉上)，因 此每层的代价并不都是cn，而是≤cn的某个值。
- 树的深度：
  - 在上述形态中，最长的路径是最右侧路径，由

$n \rightarrow (2/3)n \rightarrow (2/3)^2 n \rightarrow \ldots \rightarrow 1$组成。

  - 当$k=\log_{3/2} n$时，$(3/2)^k/n=1$，所以树的深度为$\log_{3/2} n$。
- **递归式解的猜测**：
  - 至此，我们可以合理地猜测该树的总代价至多是层数乘以 每层的代价，并鉴于上面关于层代价的讨论，我们可以假 设递归式的上界为：

$$O(cn\log_{3/2} n)=O(n\log n)$$

注：这里，我们假设每层的代价为cn。事实上，cn为每层代价的上 界，这一假设是合理的细节简化处理。

猜测的证明：证明O(nlogn)是递归式的上界

即证明：T(n)≤dnlogn，d是待确定的合适正常数。

$$
\begin{aligned}
T(n) &\le T(n/3) + T(2n/3) + cn \\
&\le d(n/3)\log(n/3) + d(2n/3)\log(2n/3) + cn \\
&= (d(n/3)\log n - d(n/3)\log 3) + (d(2n/3)\log n - d(2n/3)\log 3/2)) + cn \\
&= dn\log n - d((n/3)\log 3 + (2n/3)\log(3/2)) + cn \\
&= dn\log n - d((n/3)\log 3 + (2n/3)\log 3 - (2n/3)\log 2) + cn \\
&= dn\log n - dn(\log 3 - 2/3) + cn \le dn\log n
\end{aligned}
$$

成立吗？

上式成立的条件是： $d \ge c/(\log 3 - (2/3))$

所以猜测正确，递归式的解得证。

主方法

- 主方法是求解如下形式的递归式

$$T(n)=aT(n/b)+f(n)$$

其中 $a\geq 1$ 和 $b>1$是常数，$f(n)$ 是一个渐近正的函数。

- 主方法要求针对三种情况，但这样很容易确定许多递归式的解，甚至可以不需要计算。
- 在上面的递归式中，因为 n/b 可能不是整数，可以用 $\lfloor n/b \rfloor$ 和 $\lceil n/b \rceil$来代替 n/b。这种代替不会对递归式的渐近行为产生影响。
- 实际上，在分析分治算法的运行时间时，经常略去下取整和上取整函数，以方便对递归式的分析。

主方法

- **主方法的正确性依赖于如下的主定理**

定理 4.1 (主定理)

假设 $a \geq 1$ 和 $b > 1$ 为常数，$f(n)$为一函数，$T(n)$ 是定义在非负整数上的递归式：$T(n)=aT(n/b)+f(n)$， 其中将 n/b 解释为 $[n/b]$ 和 $\lfloor n/b \rfloor$。那么 $T(n)$ 可能有如下的渐近界：

1. 若对某个常数 $\varepsilon > 0$ 有 $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$。
2. 若 $f(n) = O(n^{\log_b a})$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$。
3. 若对某个常数 $\varepsilon > 0$ 有 $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$，且对某个常数 $c>1$ 和所有足够大的 n 有 $af(n/b) \leq cf(n)$，则 $T(n) = \Theta(f(n))$。

主方法

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

$$T(n) = \left\{ \begin{array}{ll} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{if } f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \\ \Theta(n^{\log_b a} \lg n) & \text{if } f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \\ \Theta(f(n)) & \text{if } f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \text{ and } af(n/b) \le cf(n) \end{array} \right\} \exists \varepsilon > 0,\ c < 1$$

□将函数 $f(n)$ 与函数 $n^{\log_b a}$ 进行比较，两个函数较大者决定了递归式的解：

✓若函数 $n^{\log_b a}$ 更大，如情况1，则 $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$；

✓若函数 $f(n)$ 更大，如情况3，则 $T(n)=\Theta(f(n))$；

✓若两个函数大小相当，如情况2，则 $T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\lg n)$。

□使用主方法技术细节：

✓情况1，$f(n)$ 要多项式意义上小于 $n^{\log_b a}$

✓情况3，$f(n)$ 要多项式意义上大于 $n^{\log_b a}$，且满足 $af(n/b)\le cf(n)$

- 上面三种情况并未覆盖所有可能的f(n)，即case1&2和case2&3之间的缝隙。
- 若递归式中的f(n)与 $n^{\log_b a}$ 的关系不满足上述性质：
  - f(n)小于等于$n^{\log_b a}$，但不是多项式地小于。
  - f(n)大于等于$n^{\log_b a}$，但不是多项式地大于。
- 情况3中要求的正则条件不成立

则不能用主方法求解该递归式。

主方法

口 使用主方法举例

例1：T(*n*)=9T(*n*/3)+*n*

解：$a=9,\ b=3,\ f(n)=n \Rightarrow n^{\log_b a}=n^{\log_3 9}=n^2=\Theta(n^2)$

$\Rightarrow f(n)=\mathrm{O}(n^{\log_3 9-\varepsilon}),\ \text{where } \varepsilon=1 \Rightarrow \mathrm{T(n)}=\Theta(n^2)$

例2：T(*n*)=T(2*n*/3)+1

解：$a=1,\ b=3/2,\ f(n)=1 \Rightarrow n^{\log_b a}=n^{\log_{3/2}1}=n^0=1$

$\Rightarrow f(n)=\Theta(n^{\log_{3/2}1})=\Theta(1) \Rightarrow \mathrm{T(n)}=\Theta(\lg n)$

例3：T(*n*)=3T(*n*/4)+*n*lg*n*

解：$a=3,\ b=4,\ f(n)=n\lg n \Rightarrow n^{\log_b a}=n^{\log_4 3}=\mathrm{O}(n^{0.793})$

$\Rightarrow f(n)=\Omega(n^{\log_4 3+\varepsilon}),\ \text{where } \varepsilon\approx 0.2,$

$af(n/b)=3(n/4)\lg(n/4)\leqslant(3/4)n\lg n=cf(n)\ \text{for}\ c=3/4$

$\Rightarrow \mathrm{T}(n)=\Theta(n\lg n)$

主方法

口 使用主方法举例

例4：T(*n*)=2T(*n*/2)+*n*lg*n*

解：$a=2,\ b=2,\ f(n)=n\lg n \Rightarrow n^{\log_b a}=n$

上述情况可能错误的应用情况3，因为 $f(n)=n\lg n$ 渐近大于 $n^{\log_b a}=n$。但是它并不是多项式意义上的大于，对任意正常数ε，比值 $f(n)/n^{\log_b a}=(n\lg n)/n$ 都渐近小于 n^{ε}。因此，递归式落入了情况2和情况3的间隙。







- 归并算法的其它经典应用
- 第7章 快速排序
- 第9章 中位数和顺序统计量
- 第33章 寻找最近点对
- 第30章 多项式与快速傅立叶变换

寻找最近点对

- Closest pair. 给定平面中的 n 个点，找到它们之间具有最小欧几里得距离的一对。
- 基本几何图元.
  - ✓ 图形、计算机视觉、地理信息系统、分子建模、空中交通管制。
  - ✓ 最近邻的特例，欧几里得 MST，Voronoi。

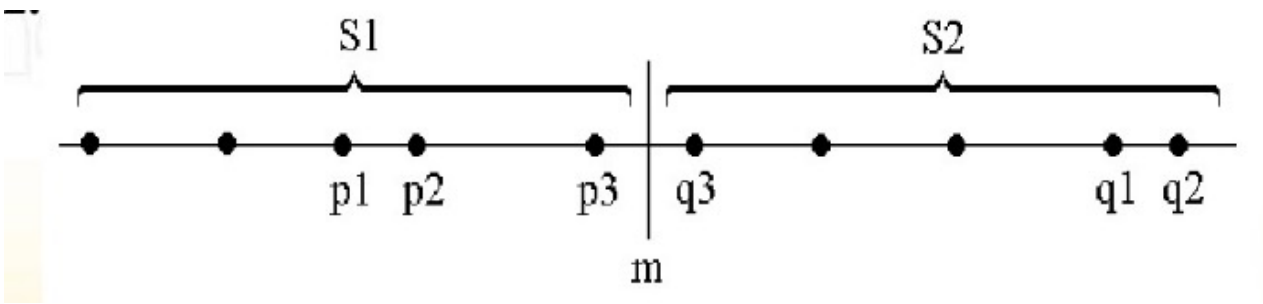
fast closest pair inspired fast algorithms for these problems

- Brute force. Check all pairs of points p and q with $\Theta(n^2)$ comparisons.
- 1-D version. O(n log n) easy if points are on a line.
- Assumption. No two points have same x coordinate.

to make presentation cleaner

1-D Closest Pair

- 分治法
- Divide the points S into two sets S1, S2 by some x-coordinate so that p<q for all p ∈ S1, and q ∈ S2.
- Recursively compute closest pair (p1,p2) in S1 and (q1,q2) in S2



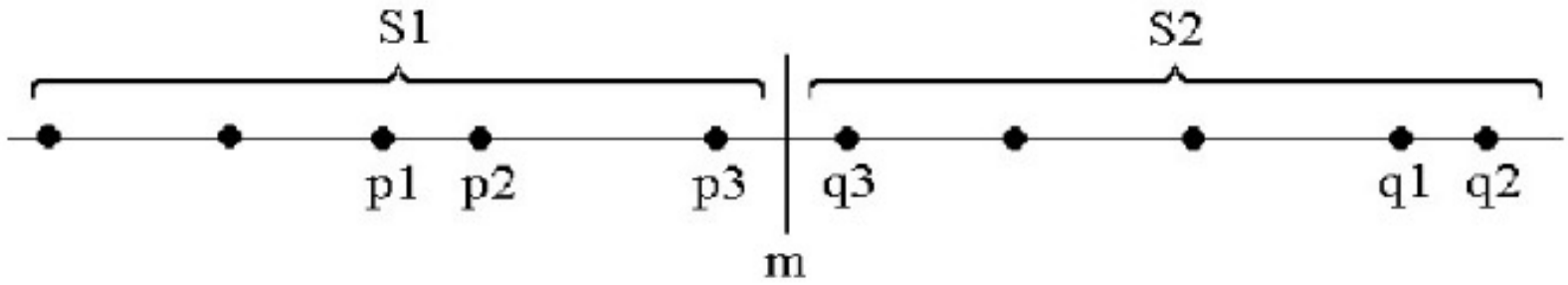
- Let d be the smallest separation found so far:
  - ✓ d = min(|p2-p1|, |q2-q1|)

1-D Closest Pair









- The closest pair is (p1,p2), or (q1,q2), or some (p3,q3) where p3 ∈ S1 and q3 ∈ S2
- Key Ovservation: if (p3, q3) is the closet pair and m is the dividing coordinate, then p3,q3 must be within d of m (why?)
  - ✓ How many points of S1 can lie in the interval (m-d, m]?
  - ✓ By definition of d, at most one.
  - ✓ Same holds for S2.
  - ✓ Then, P3 must be the rightmost point of S1 and q3 the leftmost point of S2

1-D Closest Pair





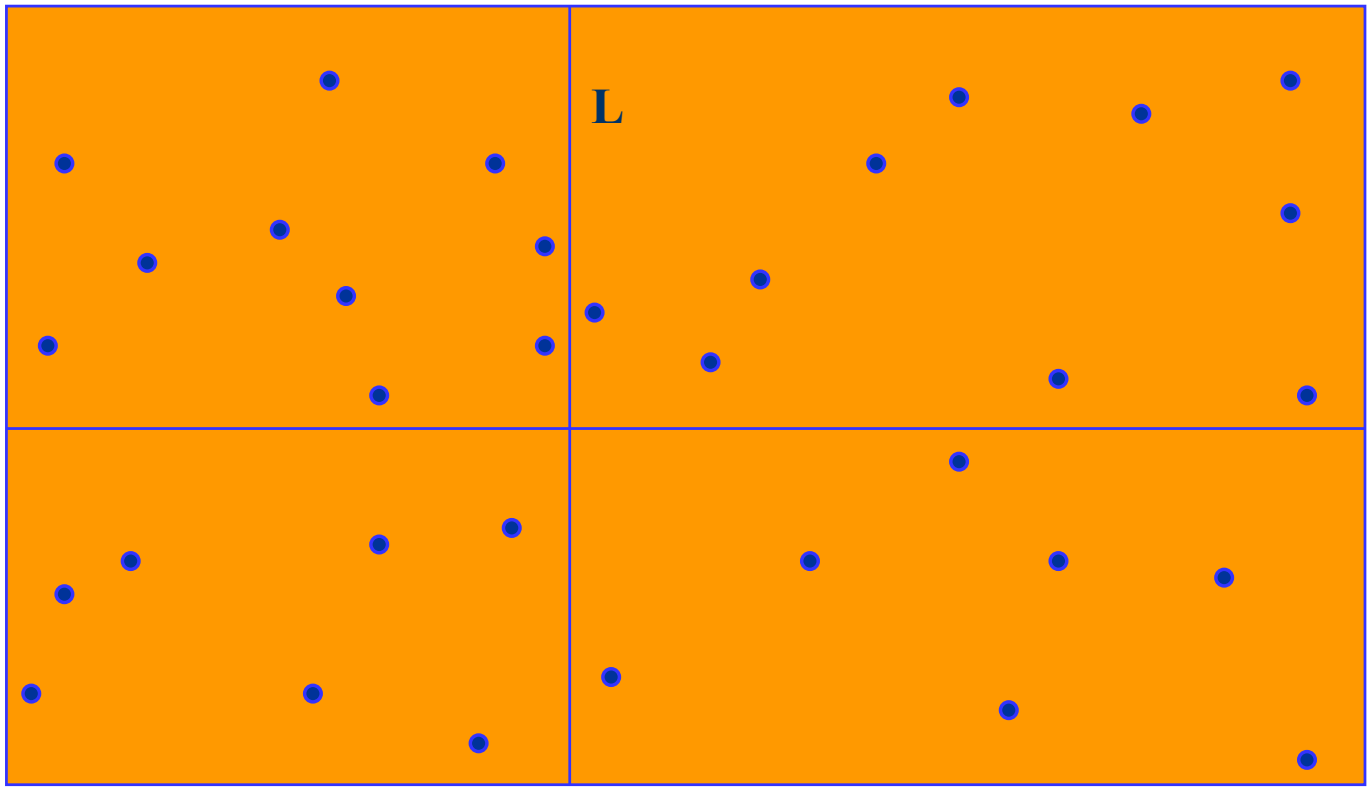


```
Closest_Pair_1D (S[l … r])
//Input: A subarray S[l … r] of a given array S[0 … n-1] of real
         numbers
//Output: The distance between the closest pair of numbers
if  i = l return ∞
else if r - l =1 return S[r] - S[l]
else
        M ← the median of S
        k ← partition(S, l, r, M)
        p ← max(S[l … k]);    q ← min(S[k+1 … r])
        return  min{Cloest_Pair_1D(S[l … k),
                    Cloest_Pair_1D(S[k+1 … r]), q-p}
```

- Recurrence isT（n）=2T(n/2)+O(n)，which solves to T(n)=O(nlogn)

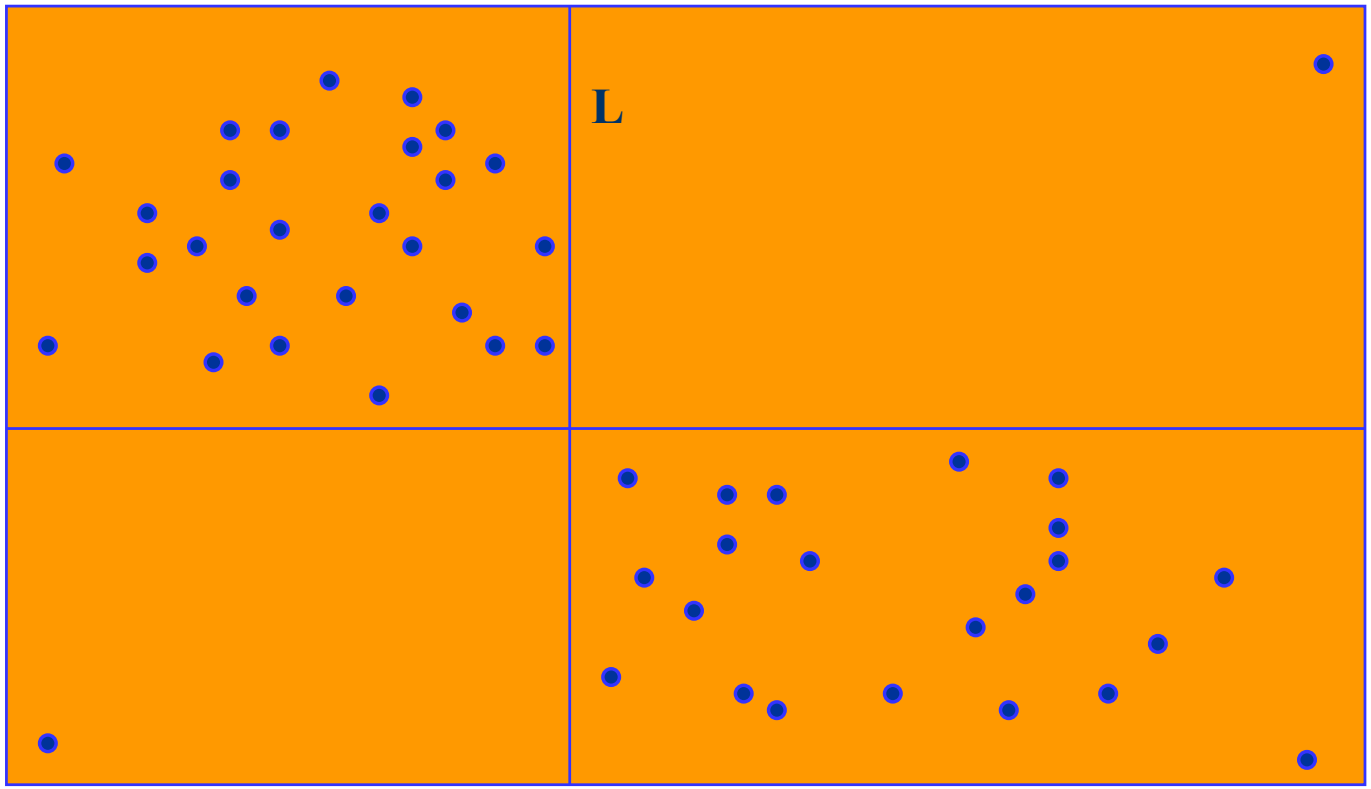
2D Closest Pair of Points: First Attempt

- Divide. Sub-divide region into 4 quadrants.



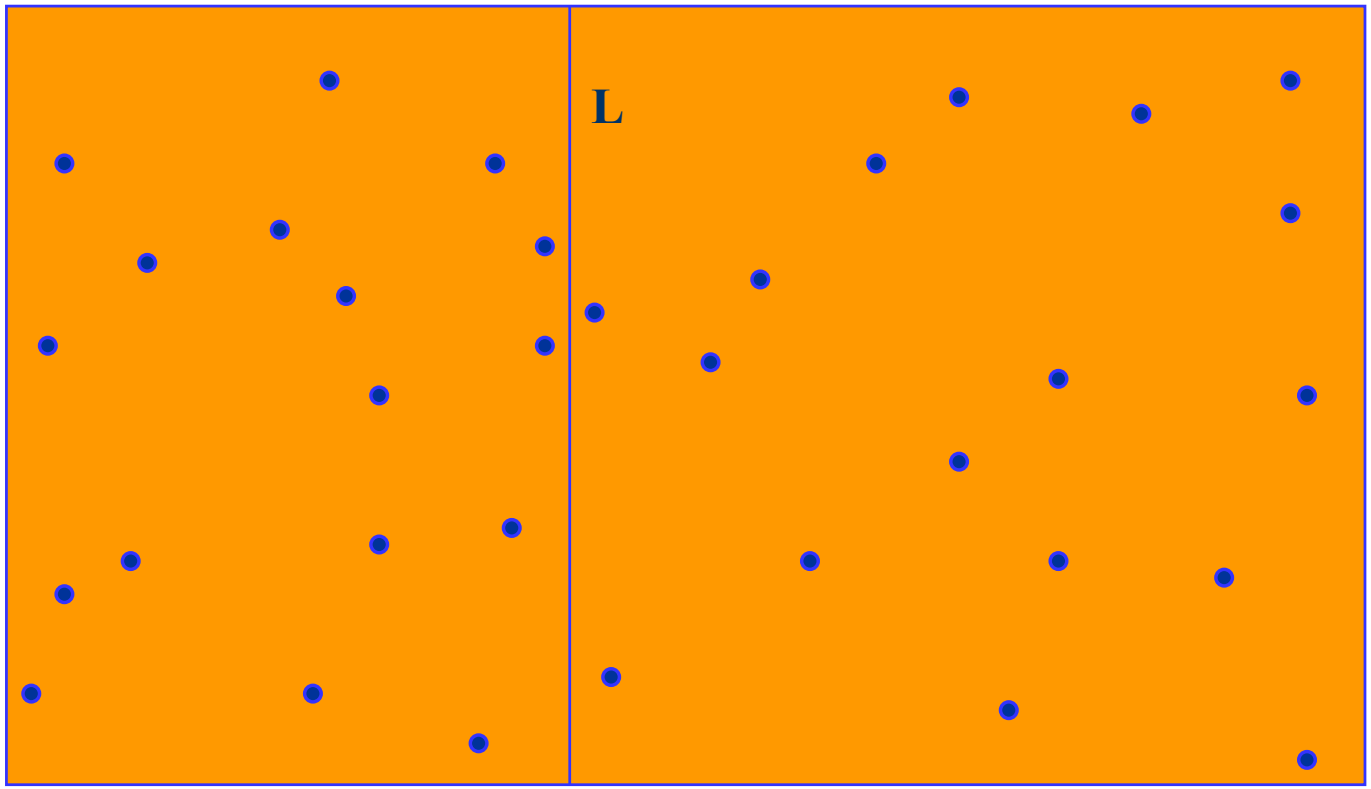
2D Closest Pair of Points: First Attempt

- Divide. Sub-divide region into 4 quadrants.
- Obstacle. Impossible to ensure n/4 points in each piece.



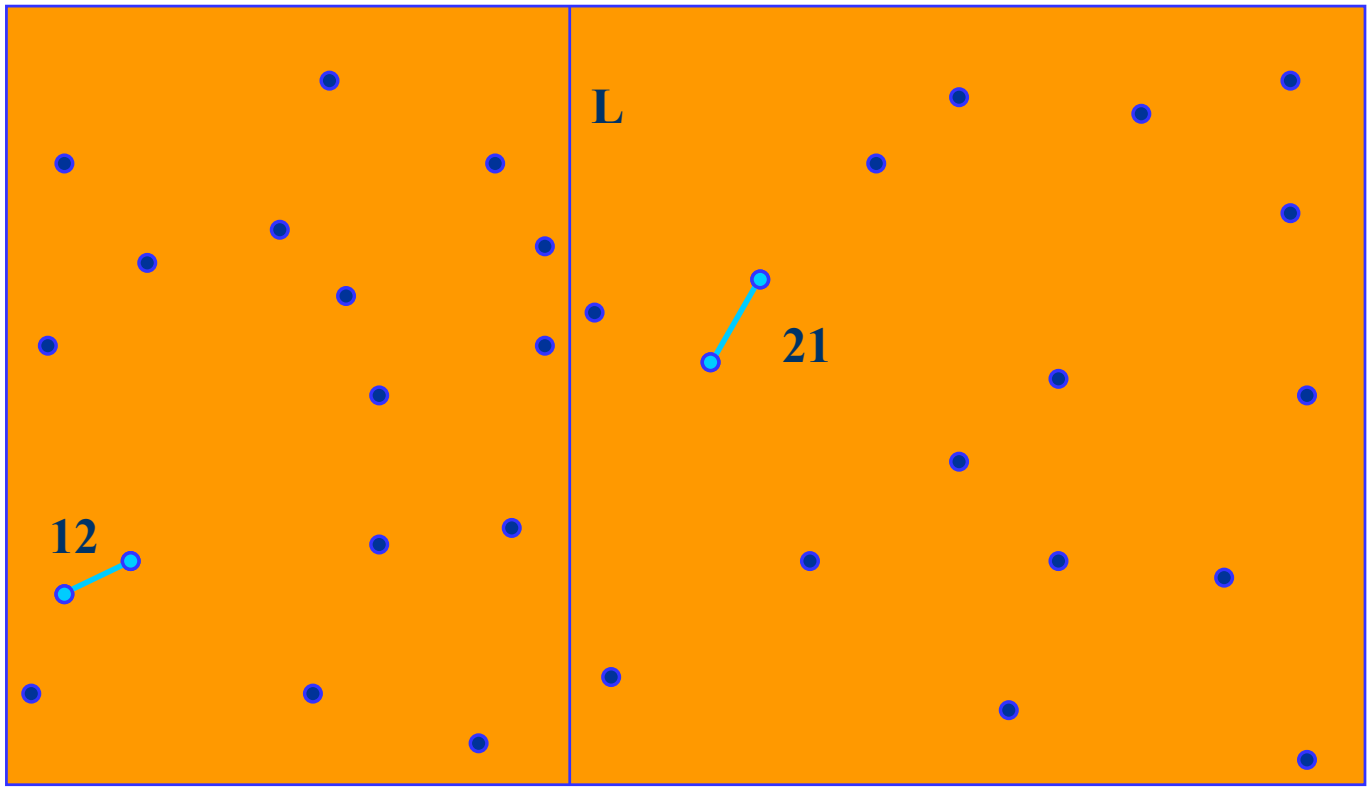
2D Closest Pair of Points

- Algorithm.
  - ✓ Divide: draw vertical line L so that roughly ½n points on each side.



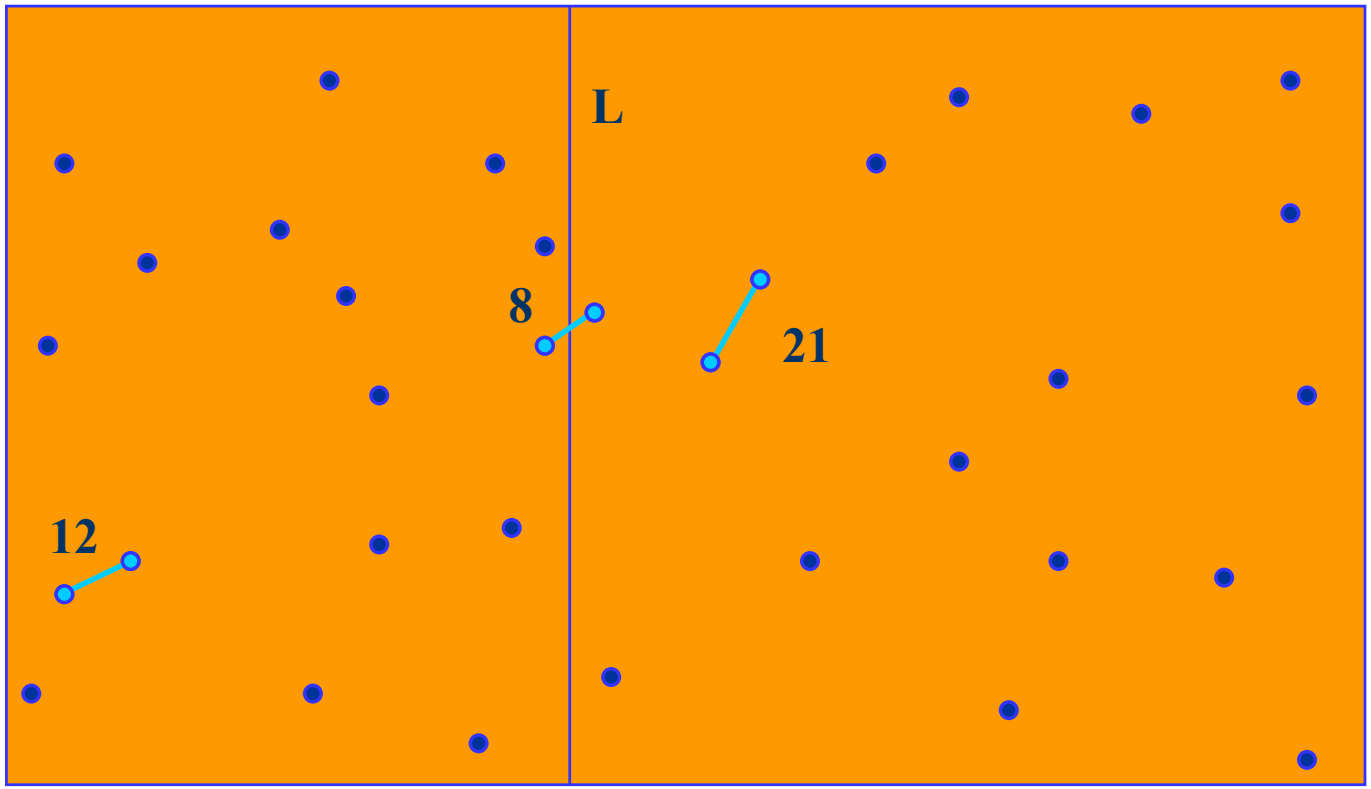
2D Closest Pair of Points

- Algorithm.
  - ✓ Divide: draw vertical line L so that roughly ½n points on each side.
  - ✓ Conquer: find closest pair in each side recursively.



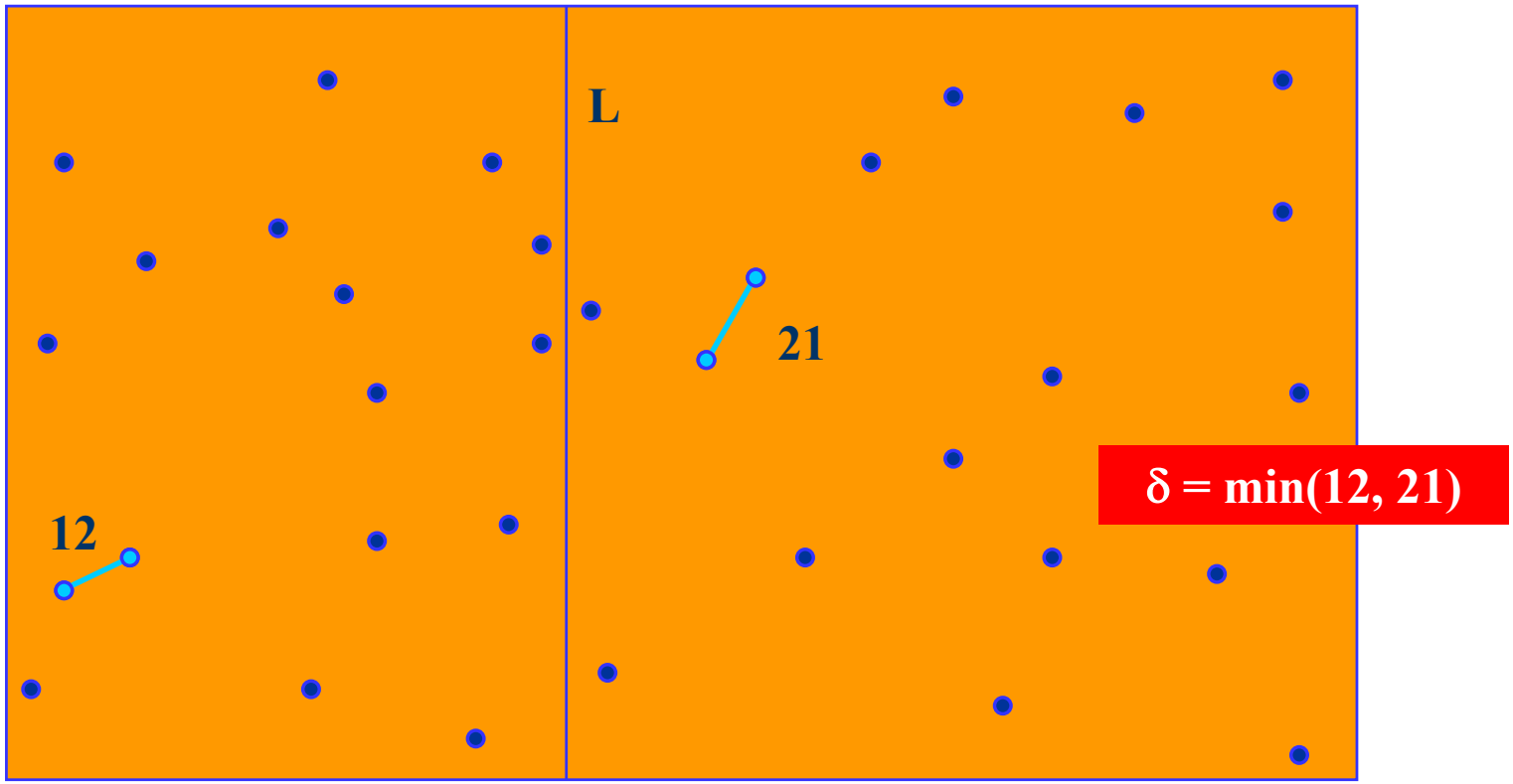
2D Closest Pair of Points

- Algorithm.
  - ✓ Divide: draw vertical line L so that roughly ½n points on each side.
  - ✓ Conquer: find closest pair in each side recursively. ← seems like $\Theta(n^2)$
  - ✓ Combine: find closest pair with one point in each side.
  - ✓ Return best of 3 solutions.



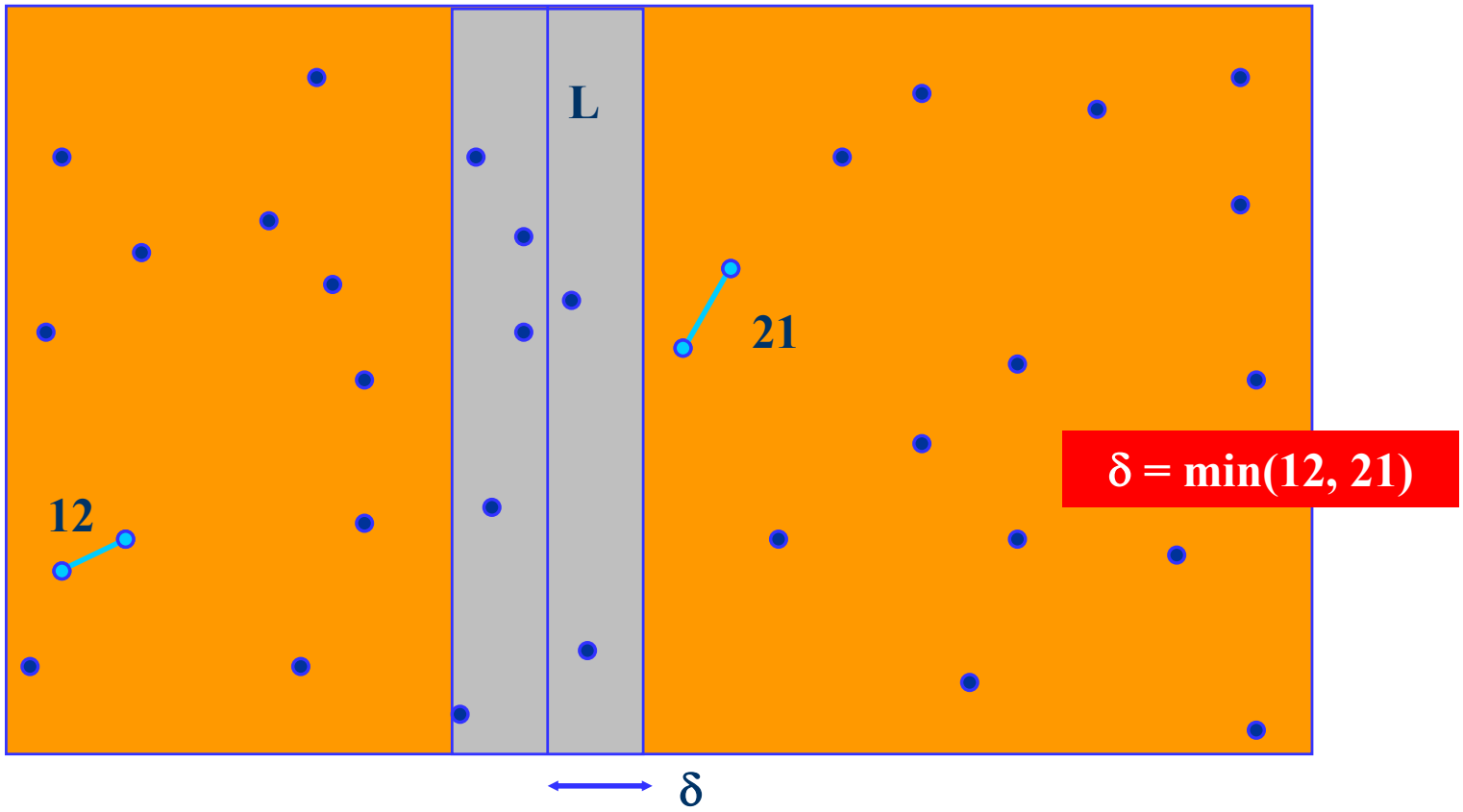
2D Closest Pair of Points

- Find closest pair with one point in each side, assuming that distance < δ.



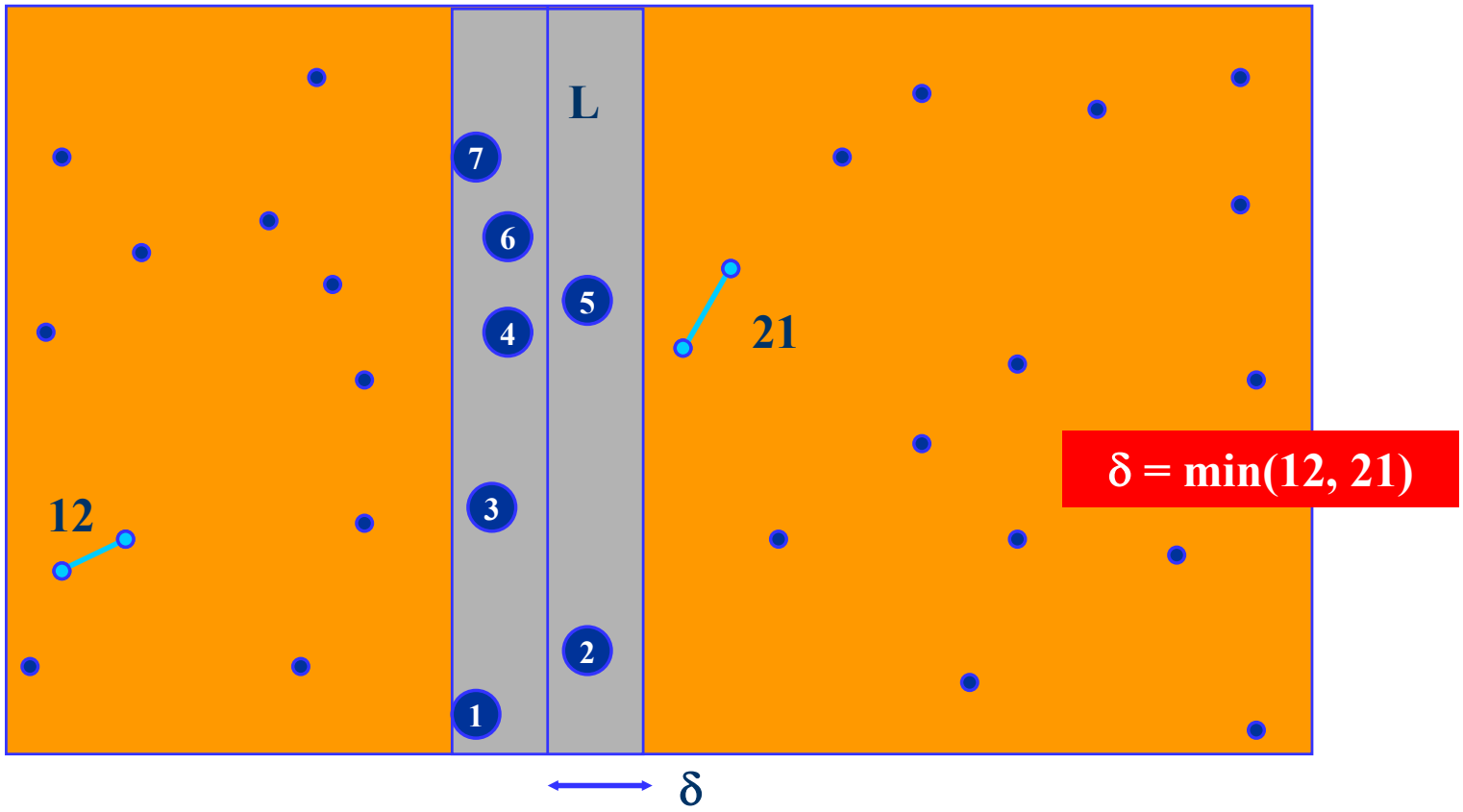
2D Closest Pair of Points

- Find closest pair with one point in each side, assuming that distance < δ.
  - ✓ Observation: only need to consider points within δ of line L.



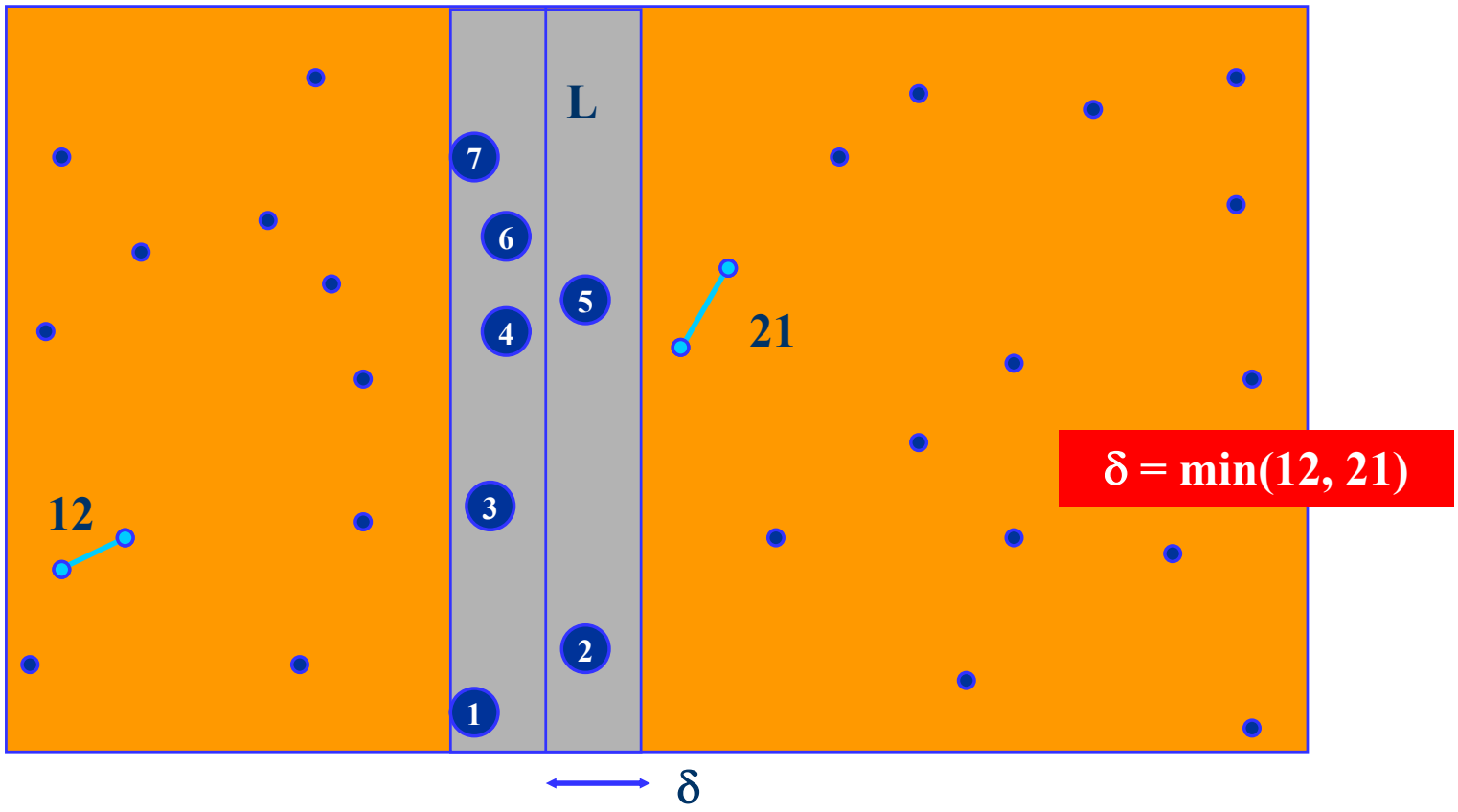
2D Closest Pair of Points

- Find closest pair with one point in each side, assuming that distance < δ.
  - ✓ Observation: only need to consider points within δ of line L.
  - ✓ Sort points in 2δ-strip by their y coordinate.



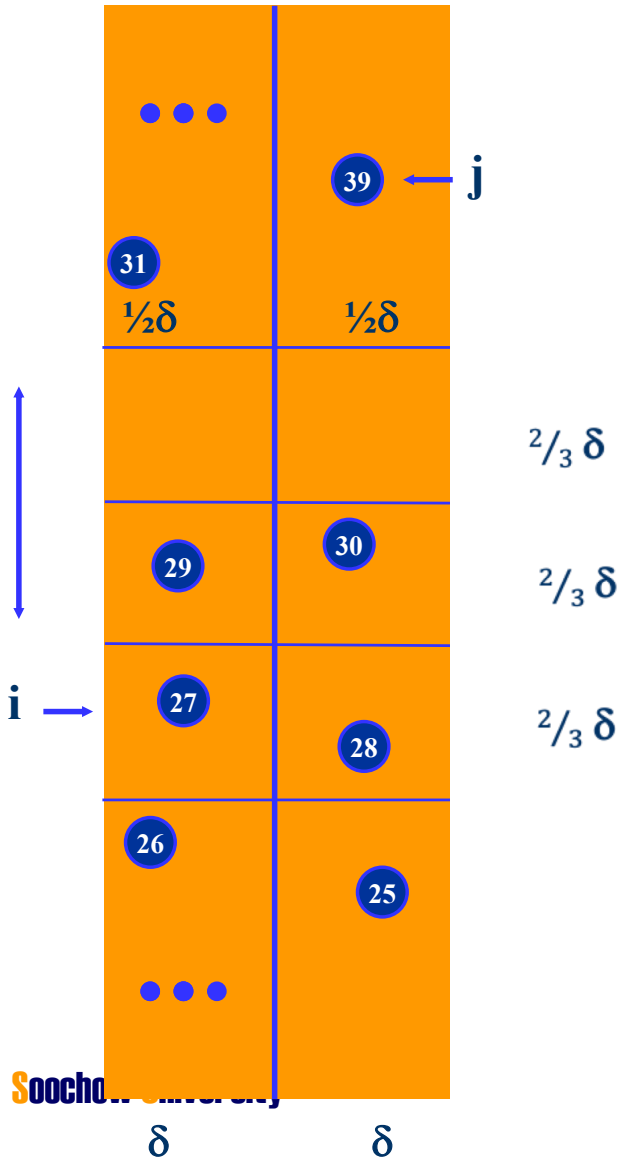
2D Closest Pair of Points

- Find closest pair with one point in each side, assuming that distance < δ.
  - ✓ Observation: only need to consider points within δ of line L.
  - ✓ Sort points in 2δ-strip by their y coordinate.
  - ✓ For each point in P1, only check distances of those within 6 positions in sorted list!



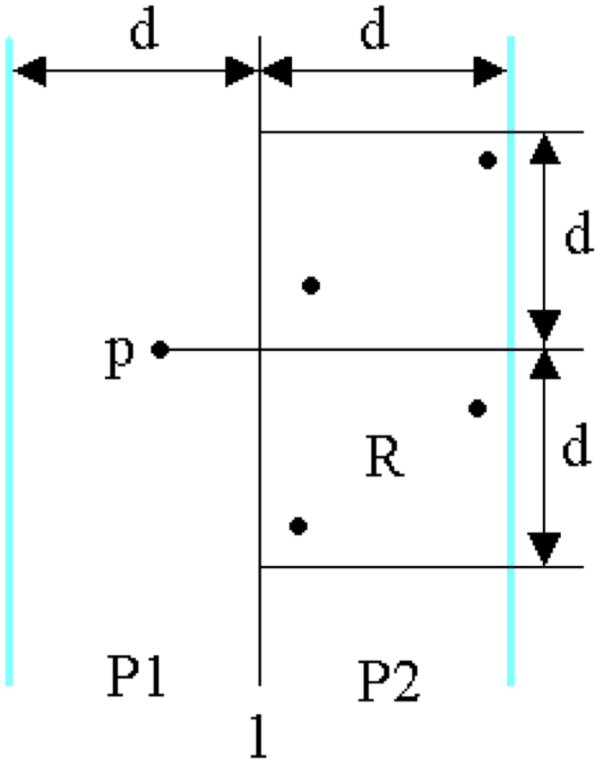
2D Closest Pair of Points

- Def. Let s_i be the point in the 2δ-strip, with the i^{th} smallest y-coordinate.
- Claim. If $|i - j| \geq 6$, then the distance between s_i and s_j is at least δ.
- Pf.
  - ✓ No two points lie in same ½δ-by-$^2/_3$δ box.



2D Closest Pair of Points

- 考虑P1中任意点p它若与P2中的点q构成最接近点对的候选者则必有distance(p,q)<d。满足这个条件的P2中的点一定路在一个d*2d的矩形R中
- P2中任何2个S中的点的距离都不小于d。由此可以推出矩形R中最多只有6个S中的点。



2D Closest Pair of Points





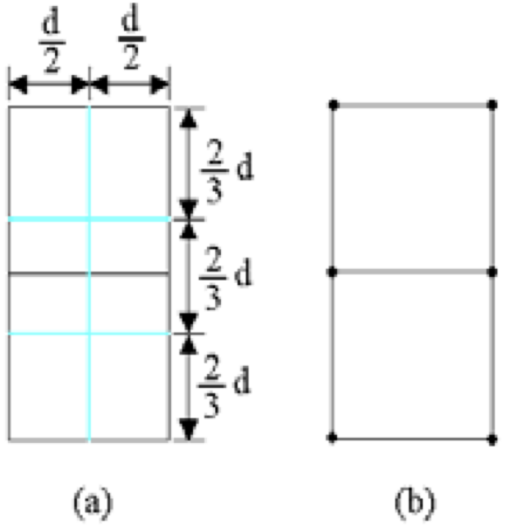


- 证明:将矩形R的长为2d的边3等分，将它的长为d的边2等分，由此导出6个(d/2)×(2d/3)的矩形。

  若矩形R中有多于6个S中的点，则由鸽舍原理易知至少有一个(d/2)×(2d/3)的小矩形中有2个以上S中的点。

- 设u，v是位于同一小矩形中的2个点，则令他们之间距离表示为：distance (u, v)，计算公式如下

$$(x(u)-x(v))^2+(y(u)-y(y))^2 \le \left(d/2\right)^2+\left(2d/3\right)^2=\frac{25}{36}d^2$$



2D Closest Pair Algorithm

```
Closest-Pair(p1, …, pn) {
    Compute separation line L such that half the points
    are on one side and half on the other side.

    δ1 = Closest-Pair(left half)
    δ2 = Closest-Pair(right half)
    δ  = min(δ1, δ2)

    Delete all points further than δ from separation line L

    Sort remaining points by y-coordinate.

    Scan points in y-order and compare distance between
    each point and next 6 neighbors. If any of these
    distances is less than δ, update δ.

    return δ.
}
```

O(n log n)

2T(n / 2)

O(n)

O(n log n)

O(n)







- Running time.

$$T(n) \le 2T(n/2) + O(n \log n) \Rightarrow T(n) = O(n \log^2 n)$$

- Q. Can we achieve O(n log n)?
- A. Yes. Don't sort points in strip from scratch each time.
  - ✓ Each recursive returns two lists: all points sorted by y coordinate, and all points sorted by x coordinate.
  - ✓ Sort by merging two pre-sorted lists.

$$T(n) \le 2T(n/2) + O(n) \Rightarrow T(n) = O(n \log n)$$

Closest Pair Algorithm

```
Closest-Pair(P,X, Y) {
    Compute P_left和P_right,根据x的中位数;                    O(n)
    Compute X_left和X_right,根据P_left和P_right;               O(n)
    Compute Y_left和Y_right,根据P_left和P_right;               O(n)

    δ1 = Closest-Pair(P_left, X_left, Y_left)                  2T(n / 2)
    δ2 = Closest-Pair(P_right, X_right, Y_right)
    δ  = min(δ1, δ2)

    Delete all points further than δ from separation line L    O(n)

    remaining points Sorted by y-coordinate.

    Scan X_left points in y-order and compare distance         O(n)
between each point and next 6 neighbors in X_right. If any
of these distances is less than δ, update δ.

    return δ.
}
```







谢谢！

Q & A

作业：4.2-1 4.2-2

4.3-6

4.4-4

4.5-3

写2个快排版本比较之