Chapter 2. 函数增长率
Growth of functions

与MIT算法导论教材对应关系

Chapter 3. 函数的渐进增长

Topics:
- Growth of functions
- O/o/Θ/Ω/ω notations

Asymptotic Growth

- **In the insertion-sort example we discussed that when analyzing algorithms we are**
  - ✓ **interested in worst-case running time as function of input size *n*.**
  - ✓ **not interested in exact constants in bound.**
  - ✓ **not interested in lower order terms (低阶项)**

Machine-independent time

- **What is insertion sort's worst-case time?**
  --It depends on the speed of our computer:
  >>relative speed (on the same machine)
  >>absolute speed (on different machine)

- **BIG IDEA:**
  --Ignore machine-dependent constants.
  --Look at growth of T(n) as n → ∞

"Asymptotic Analysis"

§ 2.1 渐近表示法

- **算法的渐近时间定义为一个函数，定义域为自然数集合N={0,1,2,…}(∵n表示Size)。但有时也将其扩展到实数或限制到自然数的某子集上。(P25)**

a. θ记号（θ-notation）

- **Def：给定一个函数g(n)，$\theta(g(n))$表示一个函数的集合：**

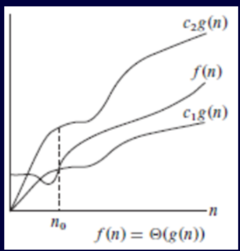
$$\boxed{\theta(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists 常数 c_1, c_2, n_0 > 0, 使得对所有的 \; n \ge n_0 有: 0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n) \} \; // n为size}$$

- **即 $f(n) \in \theta(g(n))$ 表示存在正常数c_1, c_2及足够大的n，使得f(n)夹在c_1g(n)和c_2g(n)之间**
- **通常 $f(n) \in \theta(g(n))$ 表示为 $f(n) = \theta(g(n))$,其实f(n)是Θ(g(n))的成员 (可以理解为簇中的一员)**

■ 大Θ的数学定义(渐进紧致界) 与上一页的$\theta(g(n))$无区别

对一个给定函数g(n)，用Θ(g(n))来表示以下的函数集合：

Θ(g(n))={f(n): 存在正常量c_1, c_2, n_0, 使得对所有n>=n_0, 有 $0 \le c_1g(n) \le f(n) \le c_2g(n)$}



- 存在正常量c_1, c_2 使得对于足够大的n，函数f(n)能够被“夹在”$c_1g(n)$和$c_2g(n)$之间，则f(n)属于集合Θ(g(n)), f(n)=Θ(g(n))。
- 因为Θ(g(n))是一个集合，所以我们也可以记为f(n)∈Θ(g(n))
- 我们称g(n)是f(n)的一个渐进紧致(确)界(asymptotically tight bound)

7

§ 2.1 渐近表示法(续)

- 意义：对所有的n≥n_0，函数f(n)在一个常数因子范围内等于g(n)

g(n)是f(n)的一个渐近紧致(确)界，即g(n)是f(n)的渐近上界和渐近下界

f(n)—算法的计算时间

g(n)—算法时间的数量级

不同的输入实例，一个算法的计算时间f(n)不一定相同，故算法的计算时间应该是一个函数集合。

Note： Θ定义中要求f(n)和g(n)是渐近非负的(n足够大时函数值非负)

否则 $\theta(g(n))$ 是空集

8

§ 2.1 渐近表示法(续)

- 例 (Page 27 in textbook)：
  - T(n)=an²+bn+c (a>0)

  则 $T(n) = \theta(n^2)$

  $\because$ 取$c_1 = \frac{a}{4}, c_2 = 7\frac{a}{4}, n_0 = 2\max(\frac{|b|}{a}, \sqrt{\frac{|c|}{a}})$

  对所有$n > n_0$,有$0 \le c_1n^2 \le an^2 + bn + c \le c_2n^2$成立

- 记号 $\theta(1)$：
  - 表示算法的运行时间与问题规模n无关
  - 亦可理解为常值函数 $\theta(n^0)$ (任何常数是0次多项式)

9

Asymptotic Notation in Equations

- Used to replace functions of lower-order terms to simplify equations/expressions.
- For example,

$$4n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = 4n^3 + 3n^2 + \Theta(n)$$
$$= 4n^3 + \Theta(n^2) = \Theta(n^3)$$

Or we can do the following: $4n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = 4n^3 + f(n^2)$, where $f(n^2)$ simplifies the equation

课本P27，直觉上……

§ 2.1 渐近表示法(续)

b. $O-notation$(渐近上界)

- Def: 对给定函数g(n), $O(g(n))$ 是一个函数集合

$$\boxed{\begin{aligned}&O(g(n)) = \{f(n) | \exists 常数c, n_0 > 0, such\ that\\ &0 \le f(n) \le cg(n)\ \text{for all}\ n \ge n_0\}\end{aligned}}$$

- 即在一个常数因子范围内g(n)是f(n)的渐近上界
- Θ记号强于O 记号

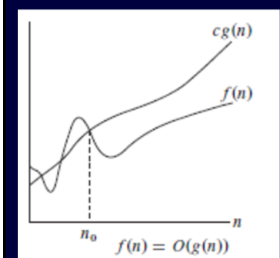
  $\because \theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$

  $\therefore f(n) = \theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$

11

■ 大O的数学定义(渐进上界)

若g(n)和f(n)是定义在正整数集合上的两个函数，则f(n)=O(g(n))表示存在两个正的常数c和n_0，使得当n≥n_0时都满足0≤f(n)≤c·g(n)。



- 函数f(n)是集合O(g(n))的成员;
- f(n)=Θ(g(n))蕴含f(n)=O(g(n))，因为Θ是一个比O记号更强的概念;
- 我们称g(n)是f(n)的一个渐进上界(Asymptotically upper bound)，限制算法最坏情况运行时间;

12

§ 2.1 渐近表示法(续)

- **Note：**
  - O描述上界，当用于界定一个最坏运行时间时，蕴含着该算法在任意输入上的运行时间都囿于此界
  - θ 则不然，一个算法的最坏运行时间是 $\theta(g(n))$ ，并非蕴含着该算法对每个输入实例的运行时间均囿于 $\theta(g(n))$
- **例：**
  - 插入排序当输入初始有序时，它的运行时间是 $\theta(n)$，而不是 $\theta(n^2)$，但 $O(n^2)$ 对任何输入实例都成立。

    $\because\ n = O(n^2)$及$n^2 = O(n^2)$均成立，

    但是

    $n^2 = \theta(n^2)$而$n \neq \theta(n^2)$

13

Example

- $an^3+bn^2+cn+d= O(n^3)$,a>0

  Proof: 前面的例子已经表明$an^3+bn^2+cn+d= \Theta(n^3)$,又由于集合$\Theta(n^3)$是被$O(n^3)$包含的，所以得到证明

- $an^2+bn+d= O(n^3)$, a>0

Example

$1/3n^2 – 3n \in O(n^2)$ because $1/3n^2 – 3n \leq cn^2$ if $c \geq 1/3- 3/n$ which holds for $c = 1/3$ and $n > 1$

$k_1n^2+k_2n+k_3 \in O(n^2)$ because $k_1n^2+k_2n+ k_3 \leq (k_1+|k_2|+|k_3|)n^2$ and for $c > k_1 + |k_2| + |k_3|$ and $n \geq 1$, $k_1n^2 + k_2n + k_3 \leq cn^2$

$k_1n^2+k_2n+k_3 \in O(n^3)$ as $k_1n^2+k_2n+k_3 \leq (k_1+|k_2|+|k_3|)n^3$

O-notation

- **Note:**

  --When we say "the running time is $O(n^2)$" we mean that the worst-case running time is $O(n^2)$ – the best case might be better.

  --Use of O-notation often makes it much easier to analyze algorithms; we can easily prove the $O(n^2)$ insertion-sort time bound.

  --We often abuse the notation a little:

  >> We often write $f(n) = O(g(n))$ instead of $f(n) \in O(g(n))$

  >> We often use $O(n)$ in equations: e.g. $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + O(n)$ (meaning that $2n^2 + 3n + 1=2n^2 + f(n)$ where $f(n)$ is some function in $O(n)$)

  >>We use $O(1)$ to denote constant time.

§ 2.1 渐近表示法(续)

- 当说算法的运行时间上界是 $O(n^2)$ 往往是指其最坏运行时间，无须修饰语，对那些最好、最坏、平均时间数量级不同者均成立，<u>而Θ则要分开表达、加修饰语</u>。

c. Ω记号 (渐近下界, lower bound)

- Def：对给定函数g(n), $\Omega(g(n))$ 是一个函数集合：

  $$\boxed{\Omega(g(n)) = \{ f(n) | \exists 常数c，n_0 > 0 \text{ such that } 0 \leq cg(n) \leq f(n) \text{ for all } n \geq n_0 \}}$$

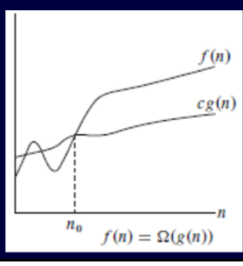
- 意义：对所有$n>n_0$，f(n)在cg(n)上方。即在一个常数因子范围内g(n)是f(n)的渐近下界

17

- 大Ω的数学定义(渐进下界)

  对一个给定函数g(n)，用Ω(g(n))来表示以下的函数集合：

  $\Omega(g(n))=\{f(n)$: 存在正常量c, n_0, 使得对所有$n \geq n_0 \geq 0$, 有 $0 \leq cg(n) \leq f(n)\}$



- 存在正常量c使得对于n_0及其右边的所有n值，函数f(n)值总大于等于cg(n) ，则f(n)属于Ω(g(n))。
- 我们称g(n)是f(n)的**渐进下界**(asymptotically lower bound)

18

§ 2.1 渐近表示法(续)

- **Th2.1 对任意函数f(n)和g(n)，$f(n)=\theta(g(n))$ 当且仅当 $f(n)=O(g(n))$和 $f(n)=\Omega(g(n))$ 。 (Page 28)**

  即：g(n)是f(n)的渐紧界当且仅当g(n)是f(n)的渐近上界和渐近下界

- **当 Ω用来界定一个算法的最好情况下的运行时间，蕴含着该算法在任意输入上的运行时间都囿于此界。**
- **例：**
  - 插入排序的下界是 $\Omega(n)$ ，对任何实例成立(即插入排序的最好运行时间是 $\Omega(n)$)

    $\because\ n=\Omega(n)\ \ n^2=\Omega(n)$

19

§ 2.1 渐近表示法(续)

d. 方程中的渐近记号 (P28~P29)

- 例：基于比较的排序时间下界是

  $$\lg n! = n\lg n - 1.44n + O(\lg n)$$

- 可消去不必要的细节，突出主项的常数因子等。

e. 小 o 记号(渐近非紧上界)

- 大 O 记号表示的渐近上界可以是渐近紧致的，也可以是渐近非紧界

  $2n^2=O(n^2)\ \ \because \frac{2n^2}{n^2}\to$ 常数2，紧致界

  $2n=O(n^2)\ \ \because \frac{2n}{n^2}\to 0$，非紧界

- 小 o 记号用来表示——函数的渐近非紧致上界

20

§ 2.1 渐近表示法(续)

e. 小 o 记号(渐近非紧上界)

- **Def：** 找出在形式化定义上与大O记号的两处差别

  $o(g(n))=\{f(n)|\forall 常数c>0,\exists 常数n_0>0\ such\ that$
  $0\le f(n)<cg(n)\ \text{for all}\ n\ge n_0\}$

  只要n足够大，g(n)是f(n)的上界

  例 2n=o(n²) 但 2n² ≠ o(n²) 。

  直观上，当 $n\to\infty$ ，f(n)相对于g(n)是可忽略的

  即： $f(n)=o(g(n))$蕴含着$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$

  或说f和g数量级不同，否则不可能对于任意常数c，都有cg(n)严格大于f(n)

21

§ 2.1 渐近表示法(续)

f. $\omega-$记号(渐近非紧下界)

- **Def：** 找出在形式化定义上与大Ω记号的两处差别

  $\omega(g(n))=\{f(n)|\forall 常数c>0,\exists 常数n_0>0\ such\ that$
  $0\le cg(n)<f(n)\ \text{for all}\ n\ge n_0\}$

  即：对任意常数c>0，cg(n)对足够大的n要严格小于f(n)。 ∴g和f必定不是同数量级，(f量级>g量级)

- **例：**

  $\frac{n^2}{2}=\omega(n)$ 但 $\frac{n^2}{2}\ne\omega(n^2)$

  $f(n)=\omega(g(n))\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\infty$

22

§ 2.1 渐近表示法(续)

g. 函数间比较

- 许多实数的关系性质可用(引申)到渐近比较，下面假定f(n)和g(n)是渐近正的
- **传递性** (对于五种渐进记号均适用)

  $f(n)=\theta(g(n))$ and $g(n)=\theta(h(n))\Rightarrow f(n)=\theta(h(n))$ //渐紧界
  $f(n)=O(g(n))$ and $g(n)=O(h(n))\Rightarrow f(n)=O(h(n))$
  $f(n)=\Omega(g(n))$ and $g(n)=\Omega(h(n))\Rightarrow f(n)=\Omega(h(n))$
  $f(n)=o(g(n))$ and $g(n)=o(h(n))\Rightarrow f(n)=o(h(n))$ //渐近非紧上界
  $f(n)=\omega(g(n))$ and $g(n)=\omega(h(n))\Rightarrow f(n)=\omega(h(n))$ //渐近非紧下界

23

§ 2.1 渐近表示法(续)

g. 函数间比较

- **自反性**

  $f(n)=\theta(f(n)),\ f(n)=O(f(n)),\ f(n)=\Omega(f(n))$
  渐近非紧界无自反性

- **对称性** (仅对渐进紧确界成立)

  $f(n)=\theta(g(n))\ iff\ g(n)=\theta(f(n))$
  紧致界有对称性

24

§ 2.1 渐近表示法(续)

g. 函数间比较

❖ 转置对称性

$f(n)=O(g(n))$ iff $g(n)=\Omega(f(n))$

//大O与大Ω对调时，f、g对称

$f(n)=o(g(n))$ iff $g(n)=\omega(f(n))$

//g是f的非紧上界等价于f是g的非紧下界

§ 2.1 渐近表示法(续)

g. 函数间比较

❖ 算数运算 (请同学课下证明)

- $O(f(n))+O(g(n)) = O(\max\{f(n),g(n)\})$;
- $O(f(n))+O(g(n)) = O(f(n)+g(n))$;
- $O(f(n))*O(g(n)) = O(f(n)*g(n))$;
- $O(cf(n)) = O(f(n))$;
- $g(n)= O(f(n)) \Rightarrow O(f(n))+O(g(n)) = O(f(n))$

§ 2.1 渐近表示法(续)

由上述4个性质，可将两函数间的渐近比较类比于两个实数间的比较。

$f(n)=O(g(n)) \approx a \le b$ //“$\approx$”相似于$f\sim a, g\sim b$

$f(n)=\Omega(g(n)) \approx a \ge b$

$f(n)=\theta(g(n)) \approx a = b$

$f(n)=o(g(n)) \approx a < b$

$f(n)=\omega(g(n)) \approx a > b$

但实数的三岐性(三分性质)不能类比到渐近表示中

三岐性 $\forall a,b \in \mathbb{R}$,下述三种情况必有一个成立：

$a<b, a=b, or\ a>b$

即任意两实数间是可比较的

§ 2.1 渐近表示法(续)

并非所有函数都是渐近可比较的

即 $\exists f(n)$ 和 $g(n)$,

可能$f(n)=O(g(n))$不成立，

而$f(n)=\Omega(g(n))$也不成立

$\therefore$ 由$Th2.1$知，$f\neq\theta(g)$

例：函数 n 和 $n^{1+\sin n}$ 之间是无法渐近比较的

$1+\sin n \Rightarrow 0\sim 2$

即 $n^{1+\sin}$ 在 $O(1)\sim O(n^2)$之间波动

Asymptotic order of growth

- A way of comparing functions that ignores constant factors and small input sizes
  - O(*g*(*n*)): class of functions *f*(*n*) that grow no faster than *g*(*n*)
  - Θ(*g*(*n*)): class of functions *f*(*n*) that grow at same rate as *g*(*n*)
  - Ω(*g*(*n*)): class of functions *f*(*n*) that grow at least as fast as *g*(*n*)

§ 2.2 标准记号和常用函数

司特林公式，重叠对数等

见教材P31.