SOOCHOW UNIVERSITY

工程经济与伦理

计算机科学与技术学院

第三章 现金流量与资金时间价值

学习要点

- 现金流量、资金时间价值概念
- 单利、复利如何计息；
- 将来值、现值、年值的概念及计算；
- 名义利率和有效利率的关系，计算年有效利率；
- 利用利息公式进行等值计算

3.1 现金流量的概念与估计

现金流的计算期：

- 计算期的长短取决于项目的性质，或根据产品的寿命周期，或根据主要生产设备的经济寿命，或根据合资合作年限，一般取上述因素中较短者，最长不超过20年。
- 为了方便分析，我们人为地将整个计算期分为若干期，并假定现金的流入、流出是在期末发生的。通常以一年为一期，即把一年间产生的所有流入和流出累积到年末。

3.1 现金流量的概念与估计

3.1.1 现金流量概念

- 现金：指各种货币资金或非货币资产的变现价值。
- 现金流：表示特定系统在一段时间内发生的现金流量。

现金流量包括现金流入量、现金流出量和净现金流量3个具体概念：

1. 现金流入量

   指在整个计算期内所发生的实际的现金流入

2. 现金流出量

   指在整个计算期内所发生的实际现金支出

3. 净现金流量

   指现金流入量和现金流出量之差。流入量大于流出量时，其值为正，反之为负。

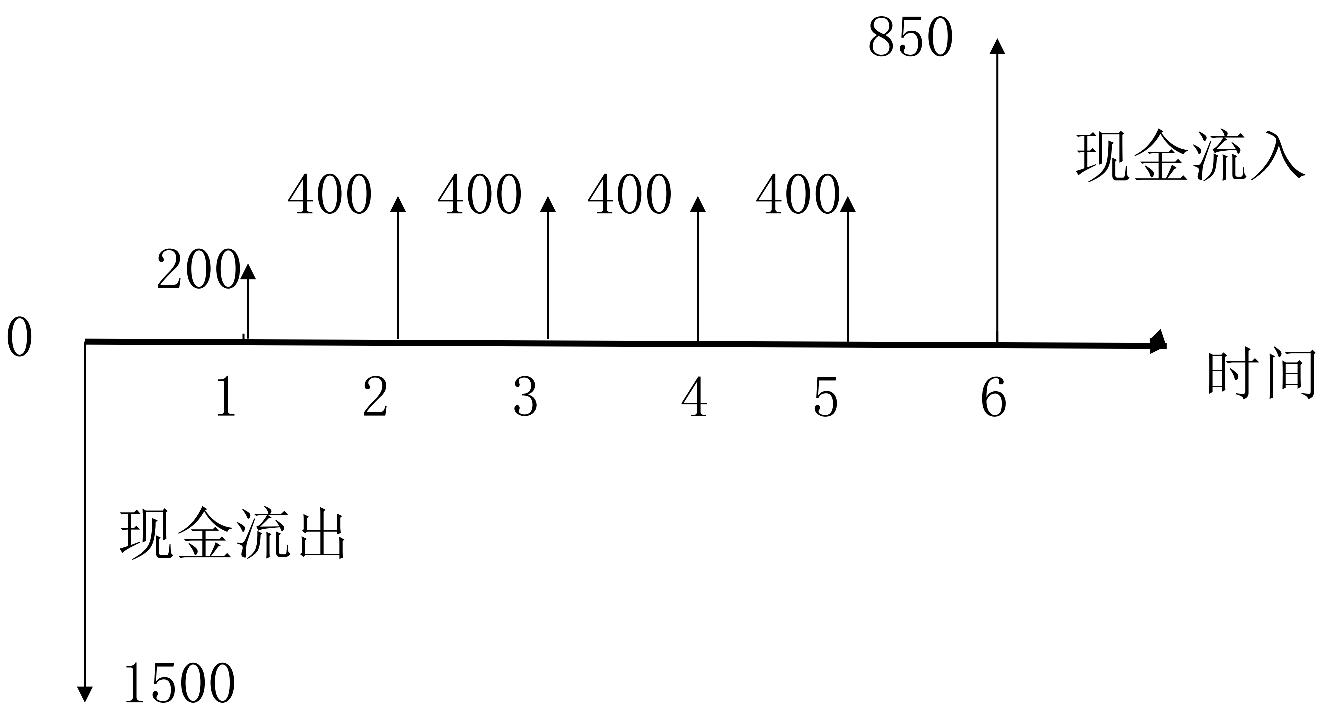
一个投资的现金流描述

- 假设某项目，第1年年初投入1500万，第1 年末收入200万， 第2年至第5年每年分别收入400万，第6年收入850万。
- 如何清晰记录多样化现金流入与流出？

- 现金流的表示（两种）：图与表

3.1.2现金流量图

- 假设某项目，第1年年初投入1500万，第1年末收入200万，第2年至第5年每年分别收入400万，第6年收入850万。如何清晰记录多样化现金流入与流出？

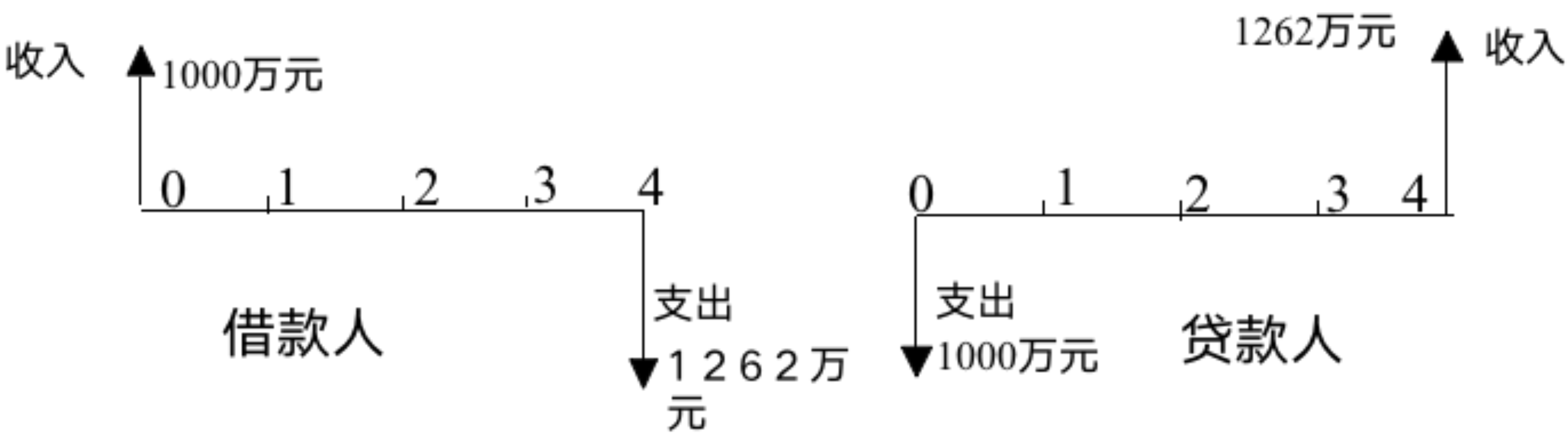


3.1 现金流量的概念与估计

现金流的图表示：

- 横轴表示现金流入、流出的时间节点，以时间为单位，如年、月、旬、周、日等；
- 在横轴的时间节点上分别以向上、向下的箭头线段标识现金流入和流出；
- 箭头线段与横轴垂直，其长短与现金流量的大小对应比例，箭头方向与流入与流出对应；

- 某企业从银行借入1000万元，4年后，需还本利和合计1262万元。画出企业角度和银行角度的现金流量图。



3.1.3 正确估计现金流量

正确估计与投资方案相关的现金流量，须注意以下4个问题：

① 与投资方案相关的现金流量是增量现金流量，即接受或拒绝某个投资方案后总现金流量的增减变动。

② 现金流量不是会计账面数字，而是当期实际发生的现金流。

③ 排除沉没成本，计入机会成本。

④ “有无对比”而不是“前后对比”.

现金流的表表示

例3-1 某公司面临两种投资方案A和B,寿命期都是4年,初始投资相同,均为10000元.实现收益的总数相同，但每年数值不同.见表3-1.

单位:元

	0	1	2	3	4
A	-10000	6000	5000	4000	2000
B	-10000	2000	4000	5000	6000

你选哪种投资方案

3.2 资金的时间价值

3.2.1 资金的时间价值概念

资金的时间价值：是指经过一定时间的增值，在没有风险和通货膨胀条件下的社会平均资金利润率。

- 增值的原因是由于资金的投资和再投资。

- 资金的时间价值是指经过一定时间的增值，在没有风险和通货膨胀条件下的社会平均资金利润率。
- 在技术经济分析中，对资金时间价值的计算方法与银行利息的计算方法相同。实际上，银行利息也是一种资金时间价值的表现方式。

时　间	10 年	20 年	30 年	40 年	50 年	100 年
5%	13.2	34.7	69.8	126.8	219.8	2 740.5
10%	17.5	63.0	180.9	486.9	1 280.3	151 575.7
15%	23.3	117.8	499.9	2 046.0	8 300.4	9 003 062.1

例如：如果年利率为9%，那么今年到手的1元存入银行，到明年这个时候可以拿到1.09元，就是说，今年的1元等值于明年的1.09元，明年的1元相当于今年的1/1.09=0.9174（元）。

利息的计算引入

- 举例：
  向银行存入的本金为P，经过N年后从银行获得资金F（又称本利和），那么“F-P”的差值即为本金P的资金时间绝对值

- 问题
  如何计算F与P的差值？即本金P在N年内的资金时间价值？

3.2.2 利息的计算

1.利息计算的种类

- 利息：指通过银行借贷资金所付或得到的比本金多的那部分增值额；
- 利率：在一定的时间内，所获得的利息与所借贷的资金（本金）的比值

	存款利率	贷款利率
1年	1.98	5.31
2年	2.25	5.49
3年	2.52	5.49
5年	2.79	5.58

利息计算的种类

- 利息的计算取决于本金、计息期数和利率。
- 用公式表示为

$$\mathrm{I} = f(P, N, i)$$

式中，I为总利息；P为本金；N为计息期数，即有多少个计息周期；i为利率，即单位本金经过一个计息周期后的增值额。

- **计息周期**表示利息的时间单位.
  - 可以根据有关规定或事先的合同约定来确定
- 利息的计算有两种: **单利和复利**

利息计算的种类

- （1）单利
  - 所谓单利既是指每期均按原始本金计算利息
  - 整个计算期内总利息的计算公式为:

$$I=P\cdot N\cdot i$$

  - 计息期末获得的本金和利息之和(简称本利和)为

$$F=P+I=P+P\cdot N\cdot i=P\cdot(1+N\cdot i)$$

式中,F是将来值,指N年末的本利和.

利息计算举例

例3-2 以单利方式借入一笔借款1000元,利率为6%,求利息和本利和.

解: 2年后应付利息为

$I=1000\times2\times0.06=120$(元)

2年后的本利和为

$F=1000\times(1+2\times0.06)=1120$(元)

利息计算的种类

- （2）复利
  - 复利计息是指将这期利息转为下期的本金，下期将按本利和的总额计息。不仅本金计算利息，利息再计利息。
  - 假设有一笔借款P, 按复利计息, 则N期末的本利和F、利息I的计算公式如下：

$$F = P(1+i)^n$$

$$I = P(1+i)^n - P$$

利息计算的种类

表3-3 按复利计息的各期利息及N期末的本利和

年份	年初欠款	年末应付利息	年末欠款
1	P	Pi	$P(1+i)$
2	$P(1+i)$	$P(1+i)i$	$P(1+i)^2$
3	$P(1+i)^2$	$P(1+i)^2i$	$P(1+i)^3$
4	$P(1+i)^3$	$P(1+i)^3i$	$P(1+i)^4$
…			
n	$P(1+i)^{n-1}$	$P(1+i)^{n-1}i$	$P(1+i)^n$

利息计算举例

例3-3 资料同例3-2,按复利计息,求2年后的利息和本利和.

- 解：

  2年后的本利和为

  $$F=1000\times(1+0.06)^{2}=1123.6(\text{元})$$

  2年后应付利息为

  $$I=1000\times(1+0.06)^{2}-1000=123.6(\text{元})$$

资金时间价值因素

- 按复利计息比较符合资金运作的实际情况，因为资金时时刻刻在运行，利息也在投资再投资当中增值，所以如果没有特别说明，均按复利计息。
- 本利和公式：$F_n = P(1+i)^N$
  - 本金P
  - 利率i (名义利率、有效利率)
  - 计算期N
  - 支付方式？

2.名义利率和有效利率

利率通常是按年计息的，但有时也把每年分几次按复利计息，例如按月、按季或按半年等，当**利率的时间单位**与**计息期不一致**时，就出现了**名义利率**与**有效利率**的概念。

- 有效利率：资金在计息期所发生的实际利率
- （年）名义利率：一般指以年为时间单位的利率，常叫年利率。
  - 一个计息期的有效利率i与一年内的计息次数n的乘积为年名义利率
  - 例如：月利率i=1%，一年计息12次，1%为有效利率，1%*12=12%为年名义利率.

有效利率与名义利率

- **名义利率**之间**不能直接进行比较**，除非它们在一年中的计息次数相同；
- 否则，必须**转化为**以**共同计息期间为基准的利率水平**，然后再进行比较。通常以1年为比较基准年限，即比较**年有效利率**

➢ 若一家报价年利率为6%，按半年计息；另一家报价年利率为5.85%，但按月计息，请问你选择哪家银行?

当利率的时间单位、计息期不一致，要转化成统一口径下的利率水平（年有效利率），然后进行比较。

有效利率与名义利率

（1）年有效利率：把各种不同计息周期的利率换算成以年为计息周期的利率。

- 如果名义利率为r，一年中计息N次，则每次计算利息的利率为r/N，根据一次支付复利公式，年末本利和为：

$$F = P \cdot (1 + \frac{r}{N})^N$$

- 而其中利息，即本利和与本金差为

$$P \cdot \left(1 + \frac{r}{N}\right)^N - P$$

- 按定义，利息与本金之比为利率，则年有效利率i_e为

$$i_e = \frac{P\left(1+\frac{r}{n}\right)^n - P}{P} = \left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1$$

例：名义利率r=12%，一年计息12次,则i_e =（1+1%）^{12}-1=12.68%

名义利率与年有效利率换算

- 【例】已知月利率=0.98%，　计算年有效利率？
- 名义利率：$0.98\% \times 12 = 11.76\%$

- 有效利率：$i=(1+0.98\%)^{12}-1=12.42\%$

❖利息计算以有效利率计算

理性消费，远离网贷

有效利率与名义利率的实例

以年为计息周期

年名义利率r	计息周期	年计息次数 m	计息期利率（i=r/m)	年实际利率 $i_{年}=(1+r/m)^{m}-1$
10%	年	1	10%	$(1+10\%)^{1}-1=10\%$
	半年	2	5%	$(1+5\%)^{2}-1=10.25\%$
	季	4	2.5%	$(1+2.5\%)^{4}-1=10.38\%$
	月	12	0.833%	$(1+0.833\%)^{12}-1=10.47\%$
	日	365	0.0274%	$(1+0.0274\%)^{365}-1=10.52\%$

名义利率与有效利率的区别

- 在复利计算中，利率周期通常以年为单位，它可以与计息周期相同，也可以不同。当计息周期小于一年时，就出现了名义利率和有效利率的概念。

- 例如，两家银行提供贷款，一家报价利率为6%，按半年计息；另一家报价利率为5.85%，但按月计息，请问你选择哪家银行?

6%的名义利率，按半年计息，r=0.06，N=2，年有效利率为

$$i_e = \left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^2 - 1 = 0.060\ 9 = 6.09\%$$

5.85%的名义利率，按月计息，r=0.058 5，N=12，年有效利率为

$$i_e = \left(1 + \frac{0.058\ 5}{12}\right)^{12} - 1 = 0.060\ 1 = 6.01\%$$

可见应向报价年利率为5.85%且按月计息的银行借款。

(2)离散复利和连续复利

- 离散复利：一年中计息次数是有限的
- 连续复利：一年中计息次数是无限的

连续复利中,年有效利率为:

$$i_e = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{r}{N}\right)^N - 1$$

由于

$$\left(1+\frac{r}{N}\right)^N = \left[\left(1+\frac{r}{N}\right)^{\frac{N}{r}}\right]^r$$

而

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{r}{N}\right)^{\frac{N}{r}} = \mathrm{e}$$

- 因而

$$i_e = \lim_{N\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{N}\right)^{\frac{N}{r}}\right]^r - 1 = \boxed{\mathrm{e}^r - 1}$$

表3-4 不同复利计算方式的有效利率

计息期	一年中的计息期数	各期的有效利率	名义利率	年有效利率
年	1	12.0000%	**12%**	12.000%
半年	2	6.0000%	**12%**	12.360%
季度	4	3.0000%	**12%**	12.551%
月	12	1.0000%	**12%**	12.683%
周	52	0.2308%	**12%**	12.736%
日	365	0.0329%	**12%**	12.748%
连续	∞	0.0000%		12.750%

一年中计算复利的次数越频繁，则年有效利率就越比名义利率高

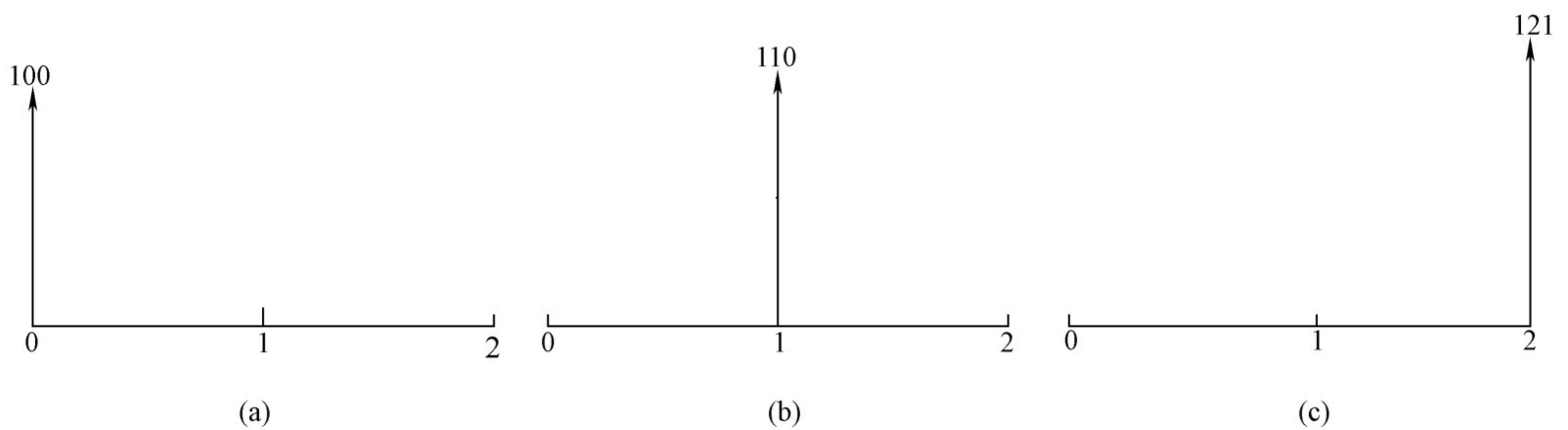
3.3 资金等值计算

3.3.1 资金等值概念

- 现象：年初1000元，利率5%，到年末本利和为1050元

年初1000元=年末1050元

在年利率为10%的情况下，现在的100元与1年后的110元等值，又与2年后的121元等值。



3.3 资金等值计算

如何判断在不同的时间点上的资金是否具有相同的价值呢？

- 等值的概念

资金等值：将不同时点的几笔资金按同一收益率标准换算到同一时点，如果其数值相等，则称这几笔资金等值。

资金等值计算：利用等值的概念，可以把在一个时点发生的资金金额换算成另一时点的等值金额的过程。

资金等值需考虑因素：金额大小、金额发生的时间、利率

3.3 资金等值计算

➢资金等值计算的类型

- 现值计算
  - 把将来某一时点的资金金额或一系列的资金金额换算成较早时间的等值金额，称为“折现”或“贴现”。
  - 将来时点上的资金折现后的资金金额称为“现值”。
- 将来值计算
  - 将任何时间发生的资金金额换算成其后某一时点的等值金额，将来某时点的资金金额称为“将来值”。
- 等额年值计算
  - 将任何时间发生的资金金额转换成与其等值的每期期末相等的金额。

3.3.2现金流量的五种类型

（1）一次支付

（2）等额支付系列

（3）均匀梯度系列

（4）几何梯度系列

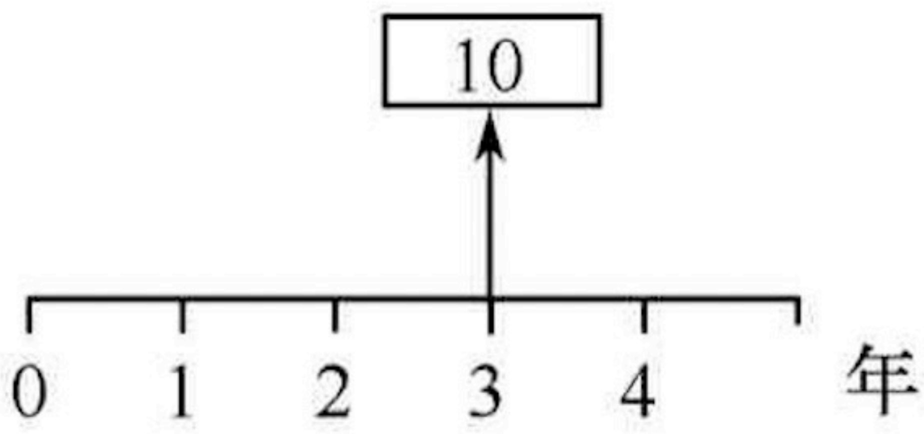
（5）不规则系列

采用的符号约定如下：

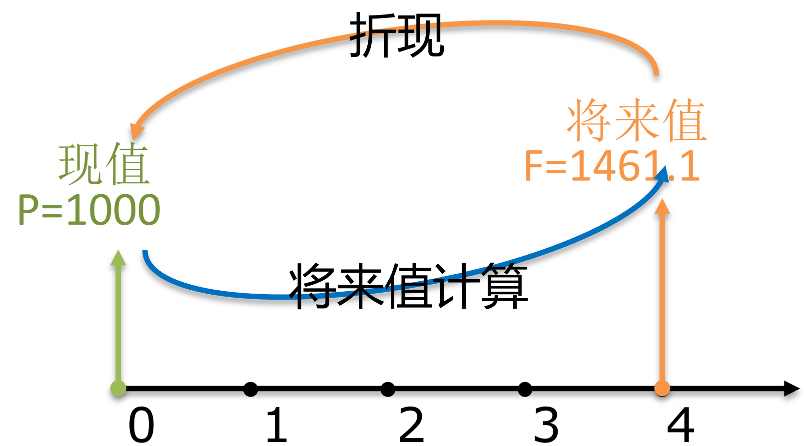
i为利率；N为计息期数；P为现值；F为将来值；A为等额支付系列的一次支付值。

（1）一次支付

- 该类现金流量型式最简单，仅包括一次支付的现值和将来值的等值关系。
- 因此，单一现金流量公式只处理两个金额：一次支付的现值P和将来值F。

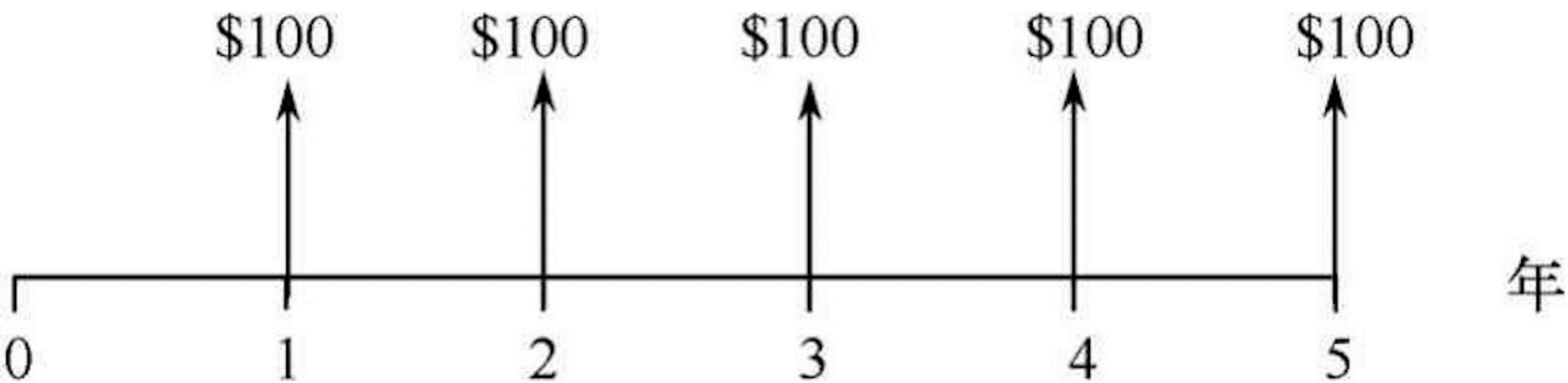


（a）一次支付



（2）等额支付系列

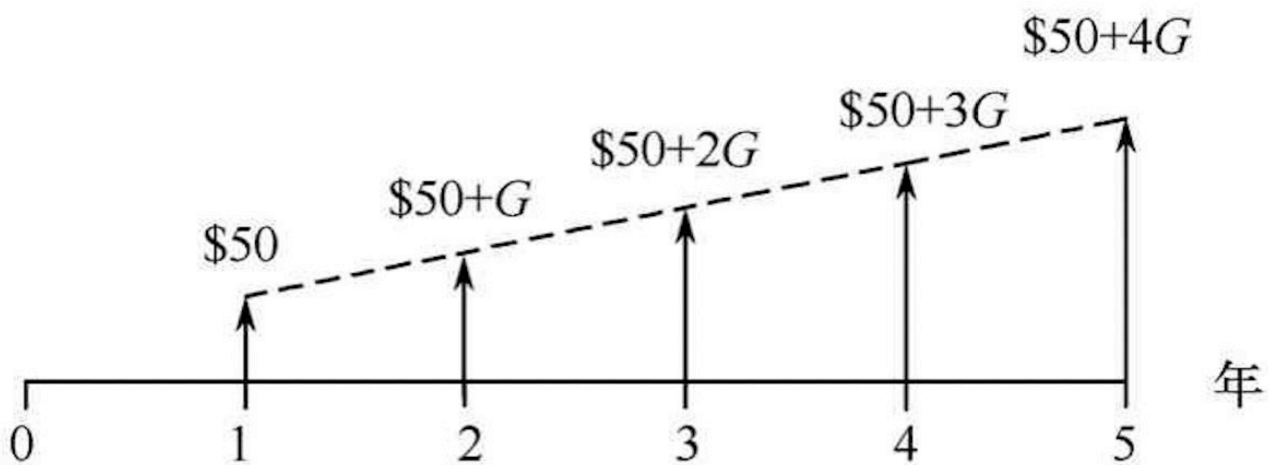
- 等额支付系列是最常见的类型，表现为定期支付一系列等额的资金，如下图所示。
- 等额支付系列公式解决的是P、F和A之间的等值关系。
- 例如，常见的分期偿还贷款合同的现金流量就属于这种类型，贷款偿还安排定期支付相等的金额（A）。



（b）等额支付系列

（3）线性梯度系列

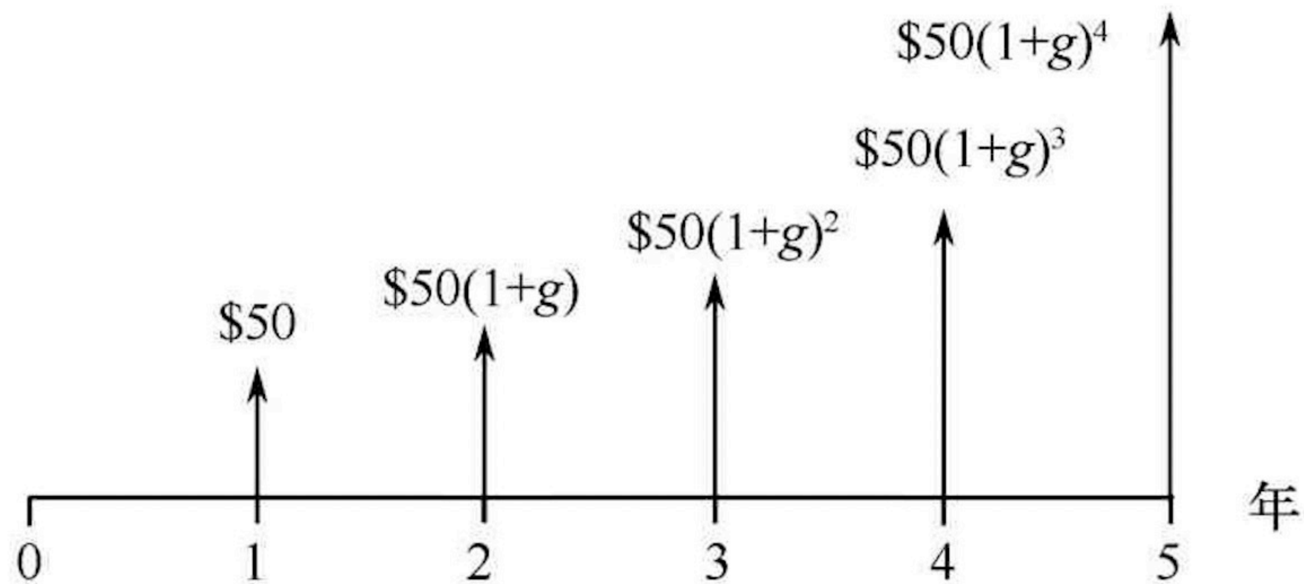
- 线性梯度系列中每笔现金流量按固定的金额增加或减少，如下图所示。
- 除了P、F和A，公式还引入了常数G作为每笔现金流量的变化量。
- 例如一项五年贷款偿还计划，其一系列年金支付按照每年500元增长，就具有这一特征，它的现金流量图呈直线上升或下降。



（c）线性梯度系列，在该系列中现金流量按固定的金额 G 增加或减少

（4）几何梯度系列

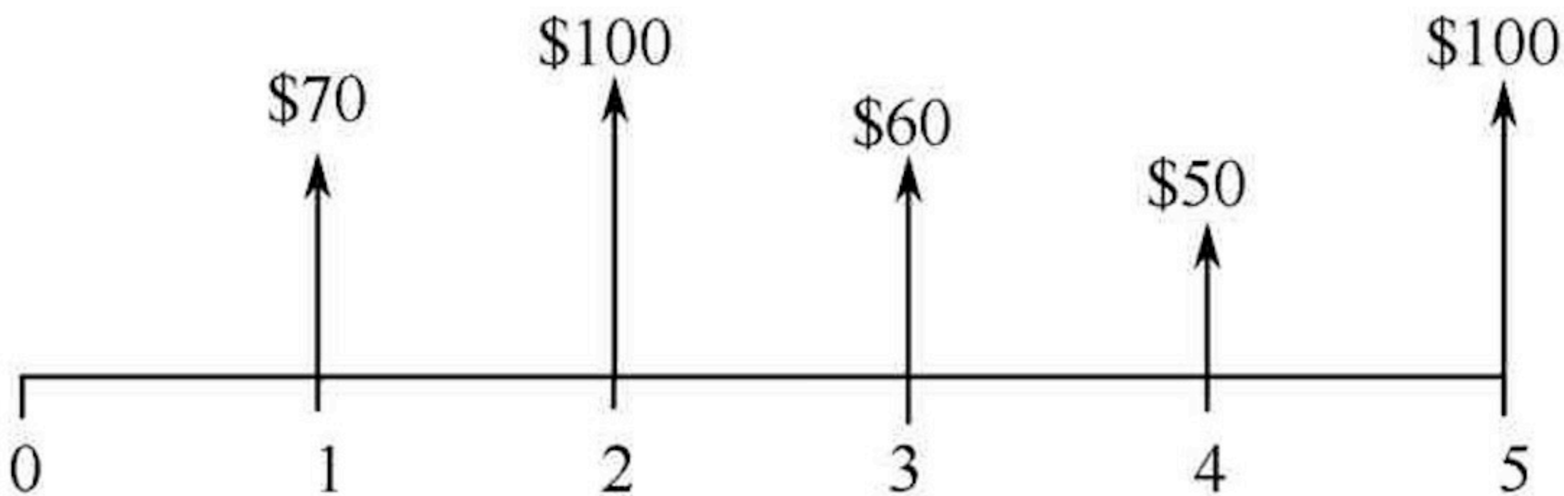
- 几何梯度系列表现为，现金流量不是按固定的金额（如500美元）变化，而是按一定的百分比率变化。
- 除了P、F和A，在公式中用变化率g来表示该百分比率。
- 例如，某项目的五年财务计划中，一种原材料的花费预计每年增长5%。



（d）几何梯度系列，在该系列中现金流量按固定的比率 g 增加或减少

（5）不规则系列

- 不规则系列的现金流量是不规则的，没有呈现出规律性的总体型式，如下图所示。



（e）不规则系列，现金流量型式不具规律性

3.3.3 资金等值计算公式

1. 一次支付复利公式

- 目的：计算现在时点发生的一笔资金的将来值。
- 举例：如果有一笔资金P按年利率i进行投资，N年后本利和应为多少?

$$F = P(1+i)^n$$

已知现值，求将来值

$$= P \bullet (F/Pi, N)$$

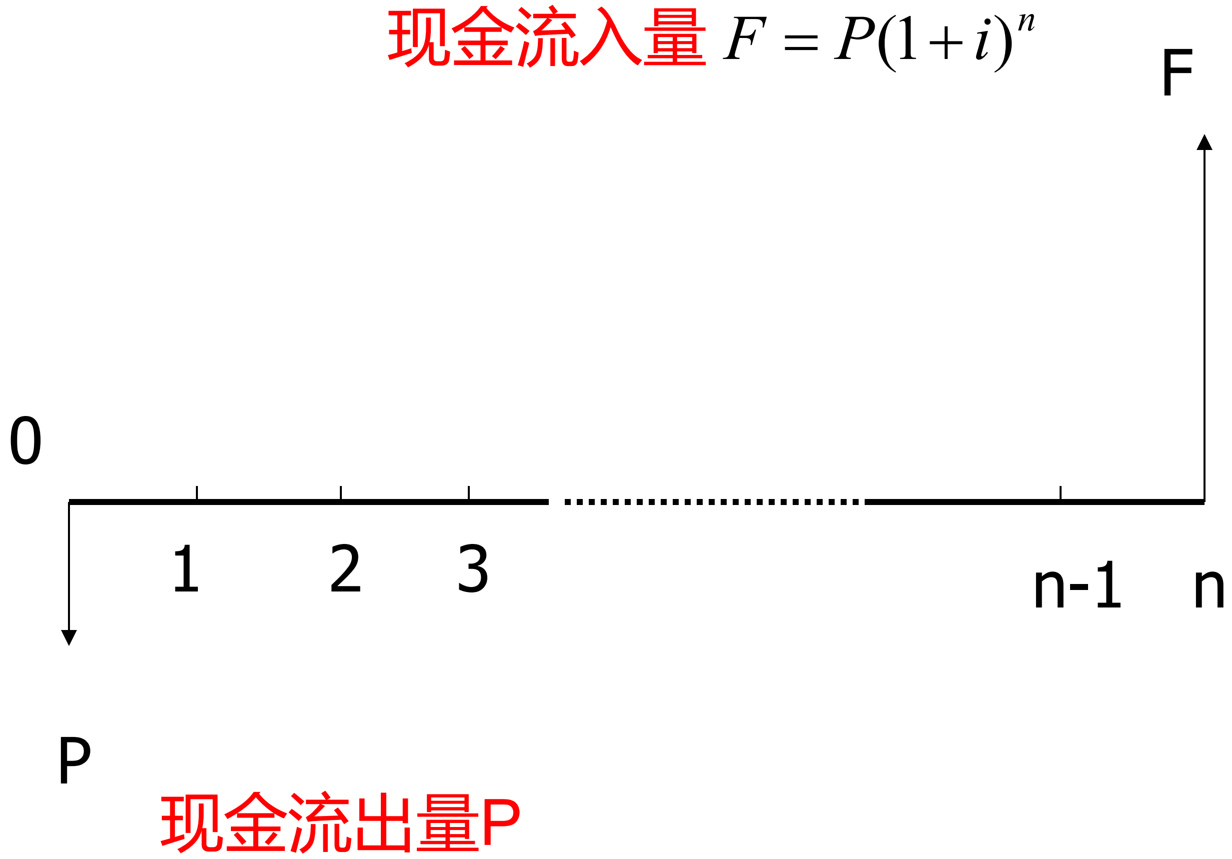
式中：

F--终值 P--现值 i--利率 n--计息期数

式中$(1+i)^n$称为一次支付复利系数，记为（F/P i,n）

按照不同的利率i和计息期数N计算出$(1+i)^N$的值，列成一个系数表（见书后附录中的附表1）。

图3-4 一次支付复利现金流量图



1. 一次支付复利公式

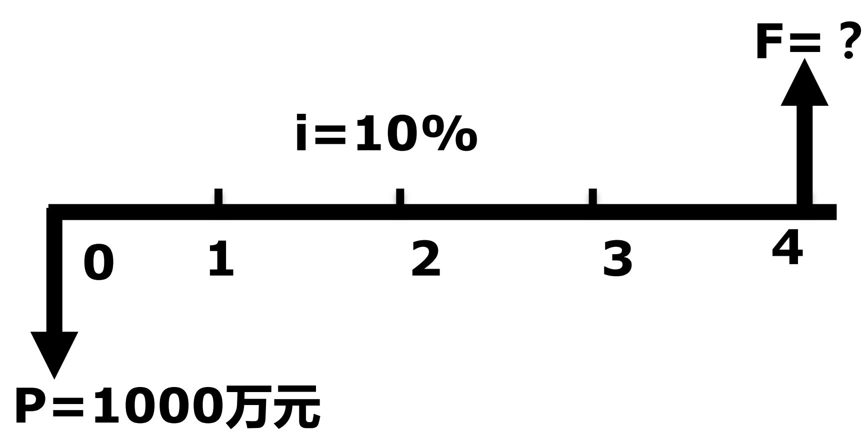
- 例3-4 某企业投资1000万元，年利率10%，4年后可得本利共多少？

解：F=1000（1+10%）^{4}

=1000（F/P10，4）

=1000*1.4641

=1464.1万元



2.一次支付现值公式

- 目的：一次支付现值公式是计算将来某一时点发生的资金的现值。
- 举例：如果以利率i进行投资，N年后收益达到F，则需投资多少?

$$P = F\frac{1}{(1+i)^n}$$

已知将来值，求现值

式中$1/(1+i)^n$称为一次支付现值系数，记(P/F i,n)

按照不同的利率i和计息期数N计算出$1/(1+i)^N$的值，列成一个系数表（见书后附录中的附表2）。

2.一次支付现值公式

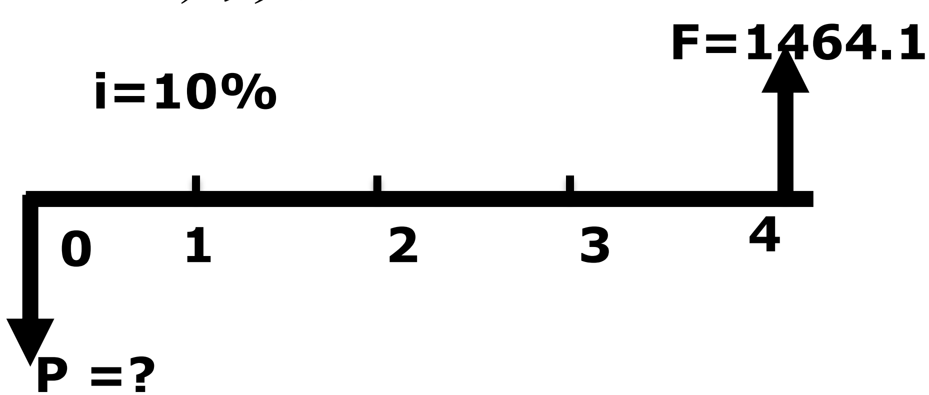
- 例3-5 某企业对投资收益率为10%的项目进行投资，欲4年后得到1464.1万元，现在应投资多少？

解：$P = 1464.1（1+10\%）^{-4}$

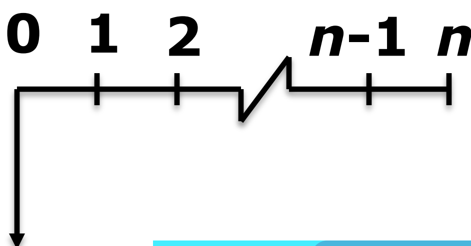
$= 1464.1（P/F\ 10，4）$

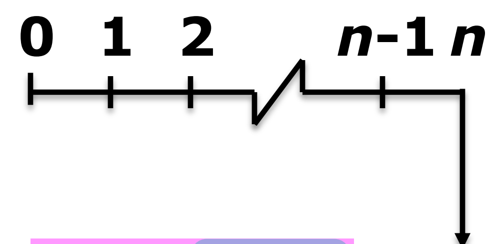
$= 1464.1 * 0.6830$

$= 1000$万元



- 现值P与终值F之间的换算
  - 1. 一次支付复利公式（已知P, i, 求F）
  - 2.一次支付现值公式（已知F，i, 求P）





P（现值）$P = F(1+i)^{-n}$

一次支付现值系数

$$P = F(P/F, i, n)$$

$F = P(1+i)^{n}$ F（终值）

一次支付未来值系数

$$F = P(F/P, i, n)$$

3.等额支付系列复利公式

- 目的：用来计算一系列期末等额资金金额的将来值。
- 举例：如果以利率i每年投入等额资金A，N年后可获得多少收益?

如果把每次的等额支付看成是一次支付，则利用一次支付复利公式可得

$$F = A + A \cdot (1+i) + \cdots + A \cdot (1+i)^{N-2} + A \cdot (1+i)^{N-1} \quad (3\text{-}9)$$

等式两边同时乘以（1+i），可得

$$F \cdot (1+i) = A \cdot (1+i) + A \cdot (1+i)^2 + \cdots + A \cdot (1+i)^{N-1} + A \cdot (1+i)^N \quad (3\text{-}10)$$

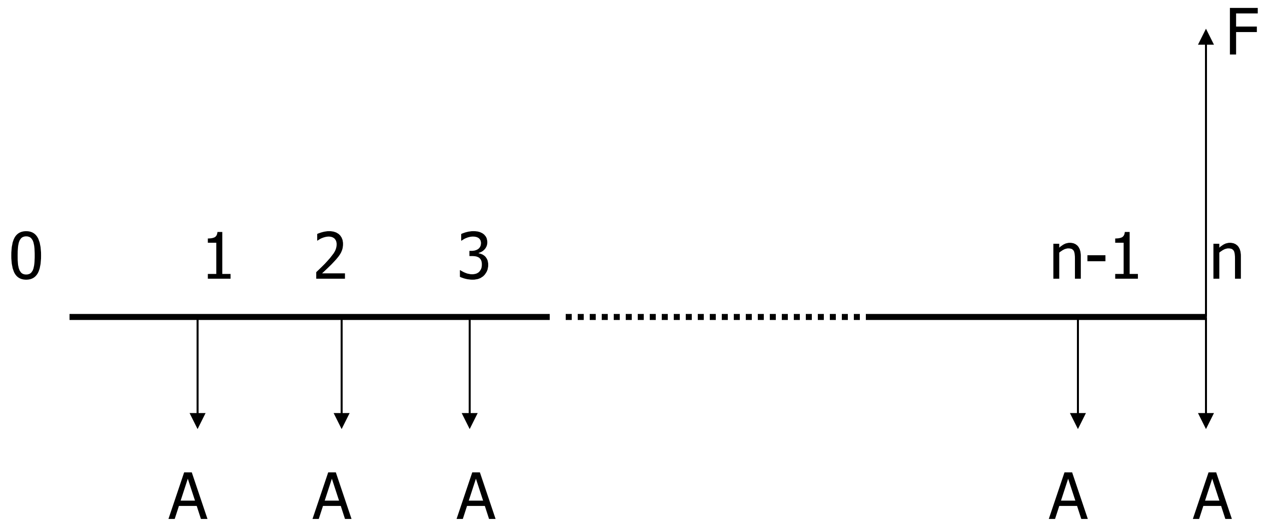
用式（3-10）减去式（3-9）$F\cdot(1+i)-F=-A+A\cdot(1+i)^N$，即

$$F = A\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

- 式中（$1+i)^n-1/i$称为等额支付系列复利系数，记为（F/A i,n)

图3-5 等额支付系列复利现金流量图

现金流入量 $F = A\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$



现金流出量$A(1+i)^{n-1}$, $A(1+i)^{n-2}$,… … $A(1+i)^2$, $A(1+i)$, A,

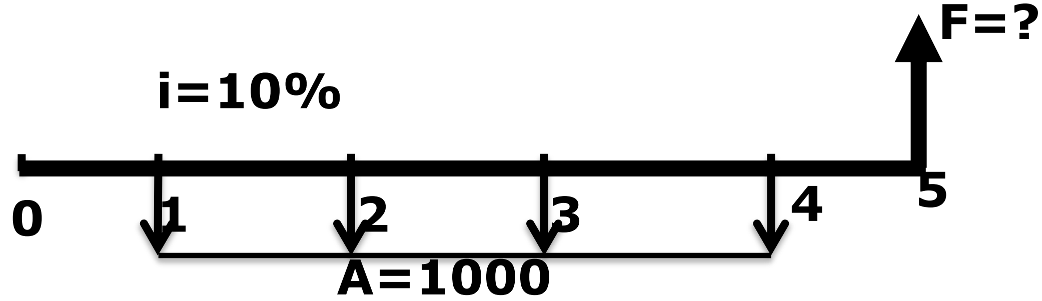
3.等额支付系列复利公式

- 例3-6 某人每年将1000元存入银行，若年利率为10%，那么5年后有多少资金可用？

解：F=1000*（F/A 10，5）

=1000*6.1051

=6105.1元



4.等额支付系列积累基金公式

- 目的：等额支付系列积累基金公式是计算将来值的等额年值。
- 举例：为了在N年末能筹集到一笔钱F，按年利率i，从现在起连续几年每年年末必须存储多少?
- 将公式（3-11）变换可得

$$A = F\frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

- 式中$i/[(1+i)^n-1]$为等额支付系列积累基金系数，记为（A/F i,n)

按照不同的利率i和计息期数N计算出$i/[(1+i)^N-1]$的值，列成一个系数表（见书后附录中的附表4）。

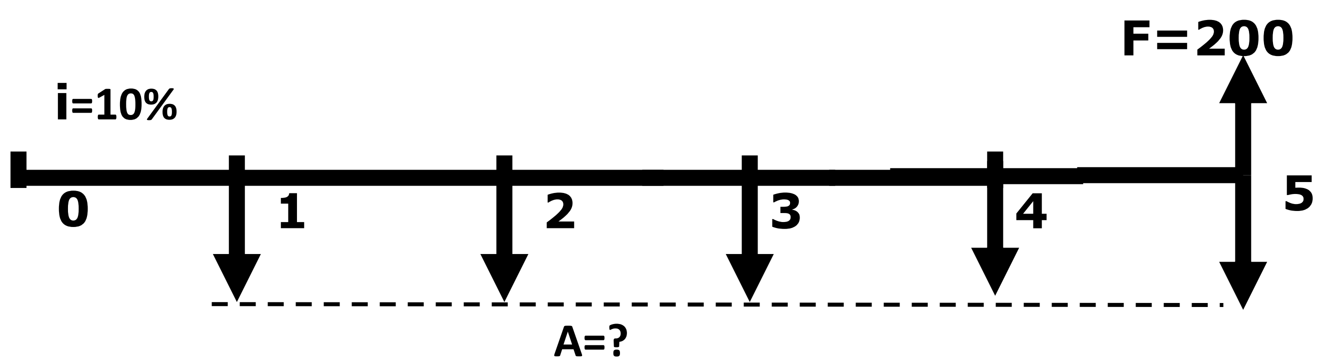
4.等额支付系列积累基金公式

- 例3-7 某企业5年后需一次性支付200万元的借款，存款利率为10%，从现在起企业每年需等额存入银行多少钱？

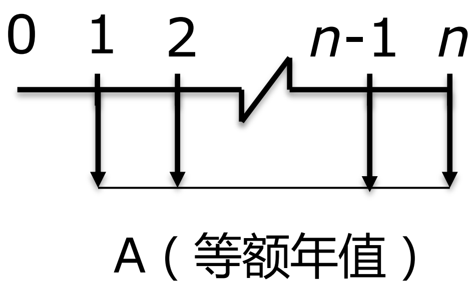
解：A=200（A/F 10，5）万元

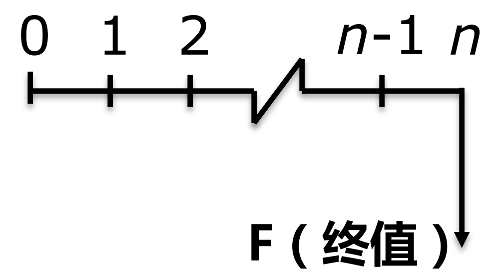
=200*0.1638万元

=32.75万元



- 等额年值A与终值F之间的换算
  – 3.等额支付系列复利公式（已知A, i,求F）
  – 4.等额支付系列积累基金公式（已知F, i,求A）





$$A = F\frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

$$F = A\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

等额支付偿债基金系数

等额支付终值系数

$$A = F(A/F, i, n)$$

$$F = A(F/A, i, n)$$

5.等额支付系列现值公式

- 目的：用来计算一系列期末等额支付金额的现值。
- 举例：为了能在今后n年中每年年末提取相等金额A，现在必须投资多少?

- 将1.一次支付复利公式 $F = P(1+i)^n$ 代入3.等额支付系列复利公式 $F = A\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ ，得

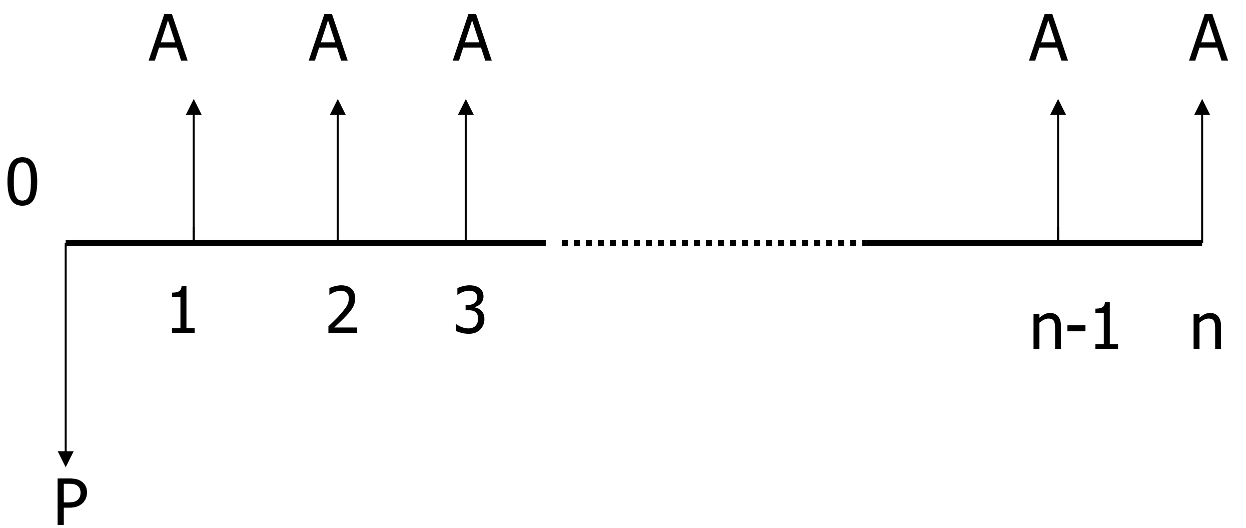
$$P = A\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

- 式中[(1+i)ⁿ-1]/[i(1+i)ⁿ]称为等额支付系列现值系数，记为(P/A i,n)

按照不同的利率i和计息期数N计算出[(1+i)ᴺ-1]/[i·(1+i)ᴺ]的值，列成一个系数表（见书后附录中的附表5）。

图3-6 等额支付系列现值现金流量图

现金流入量$A/(1+i)$, $A/(1+i)^2$,…



现金流出量P

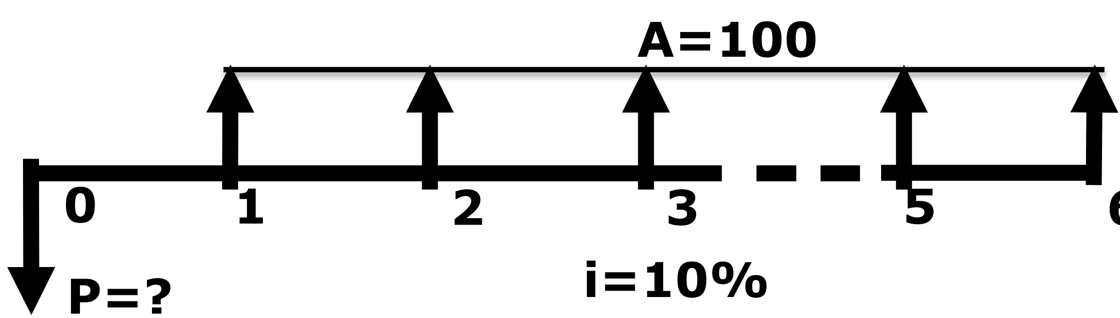
5.等额支付系列现值公式

- 例3-8 某工程项目每年获净收益100万元，利率为10%，项目可用每年所获净收益在6年内回收初始投资，问初始投资为多少？

解：P=100（P/A 10，6）

=100*4.3553

=435.53万元



6.等额支付系列资金恢复公式

- 目的：用来计算现在时点发生的资金金额的期末等额年值。
- 举例：某人以年利率i存入一项资金P，则在今后N年内，每年年末他能取出的等额资金A是多少？
- 将等额支付系列现值公式转换成：

$$A = P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

- 式中$i(1+i)^n/[(1+i)^n-1]$为等额支付系列资金恢复系数，记为(A/P i,n)

按照不同的利率i和计息期数N计算出$[i\cdot(1+i)^N]/[(1+i)^N-1]$的值，列成一个系数表（见书后附录中的附表6）。

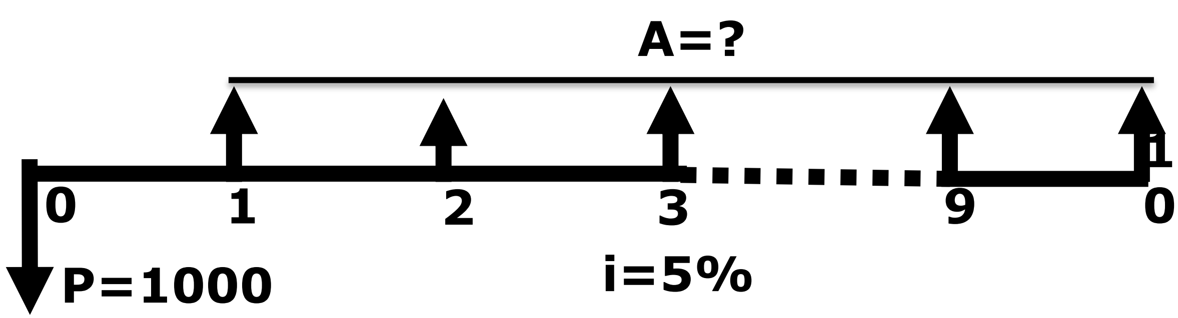
6.等额支付系列资金恢复公式

- 例3-9 某工程初期总投资为1000万元，利率为5%，问在10年内要将总投资连本带息收回，每年净收益应为多少？

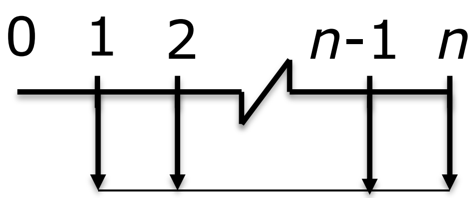
解：A=1000（A/P 5，10）

=1000*0.1295

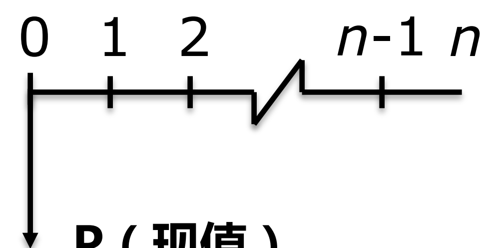
=129.5万元



- 等额年值A与现值P之间的换算
  - 5.等额支付系列现值公式（已知A, i,求P）
  - 6.等额支付系列资金恢复公式（已知P, i,求A）



A（等额年值）



P（现值）

$$A = P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

等额支付资本回收系数

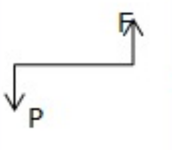
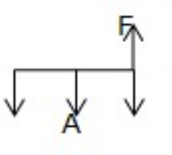
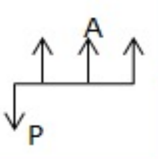
$$A = P(A/P, i, n)$$

$$P = A\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

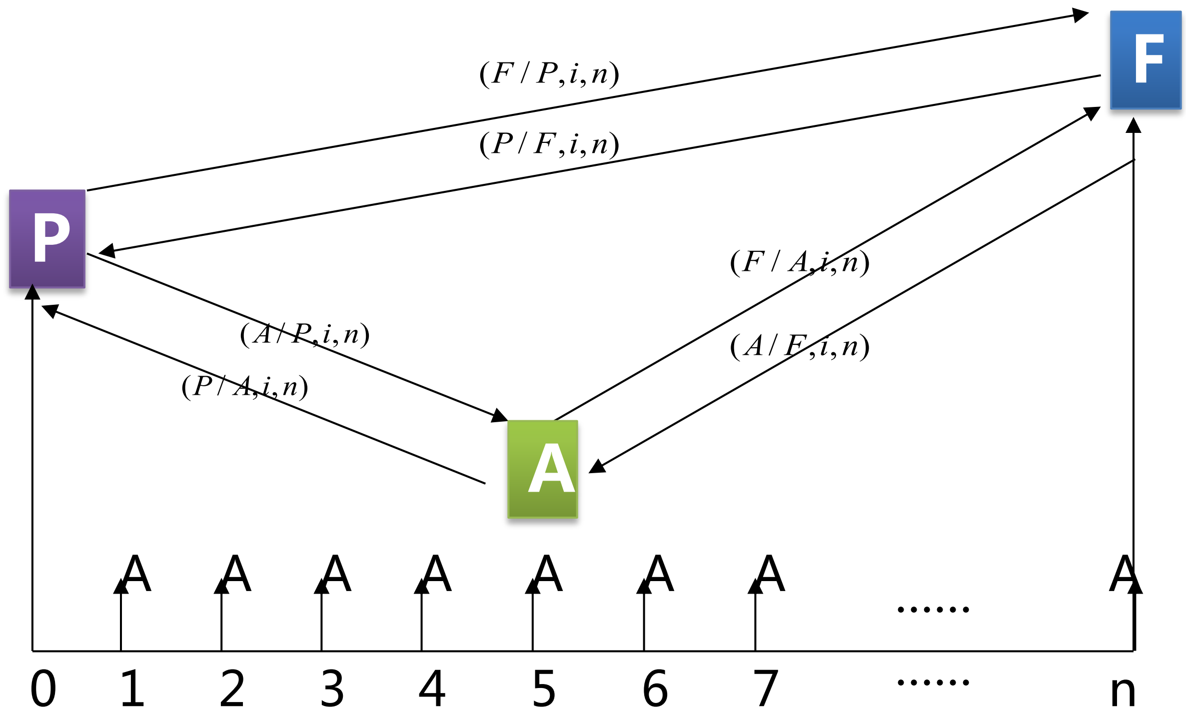
等额支付现值系数

$$P = A(P/A, i, n)$$

等值基本公式总结

支付类型	计算简图	计算公式	系　数		应用范围	说明
			系数公式	表达式		
一次支付		$F = P(1+i)^n$	$(1+i)^n$	$(F/P, i, n)$	一次支付终值	整存已知 整取多少 P→F
		$P = F(1+i)^{-n}$	$(1+i)^{-n}$	$(P/F, i, n)$	一次支付现值	整取已知 整存多少 F→P
等额支付		$F = A\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$	$\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$	$(F/A, i, n)$	年金终值	零存已知 整取多少 A→F
		$A = F\dfrac{i}{(1+i)^n-1}$	$\dfrac{i}{(1+i)^n-1}$	$(A/F, i, n)$	偿债基金	整取已知 零存多少 F→A
		$P = A\dfrac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$	$\dfrac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$	$(P/A, i, n)$	年金现值	零取已知 整存多少 A→P
		$A = P\dfrac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$	$\dfrac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$	$(A/P, i, n)$	资金回收	整存已知 零取多少 P→A

等值基本公式相互关系



7.均匀梯度系列公式

- 第一年年末支付A1，第二年年末支付A1+G，以后每年都比上一年增加一笔支付G，第N年年末支付A1+（N—1）·G。梯度系列的将来值F2计算如下：

$$
\begin{aligned}
F_2 &= G\cdot(F/Ai,N-1)+G\cdot(F/Ai,N-2)+\cdots+G\cdot(F/Ai,2)+G\cdot(F/Ai,1)\\
&= G\cdot\left[\frac{(1+i)^{N-1}-1}{i}\right]+G\cdot\left[\frac{(1+i)^{N-2}-1}{i}\right]+\cdots+G\cdot\left[\frac{(1+i)^{2}-1}{i}\right]\\
&\quad +G\cdot\left[\frac{(1+i)^{1}-1}{i}\right]\\
&= \frac{G}{i}\left[(1+i)^{N-1}+(1+i)^{N-2}+\cdots+(1+i)^2+(1+i)+(N-1)\cdot(-1)\right]\\
&= \frac{G}{i}\left[(1+i)^{N-1}+(1+i)^{N-2}+\cdots+(1+i)^2+(1+i)+1\right]-\frac{N\cdot G}{i}
\end{aligned}
$$

- 方括号中的表达式是3.等额支付系列复利系数，$F_2=\frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^N-1}{i}\right]-\frac{N\cdot G}{i}$
- 而与F2等值的等额年值为A2

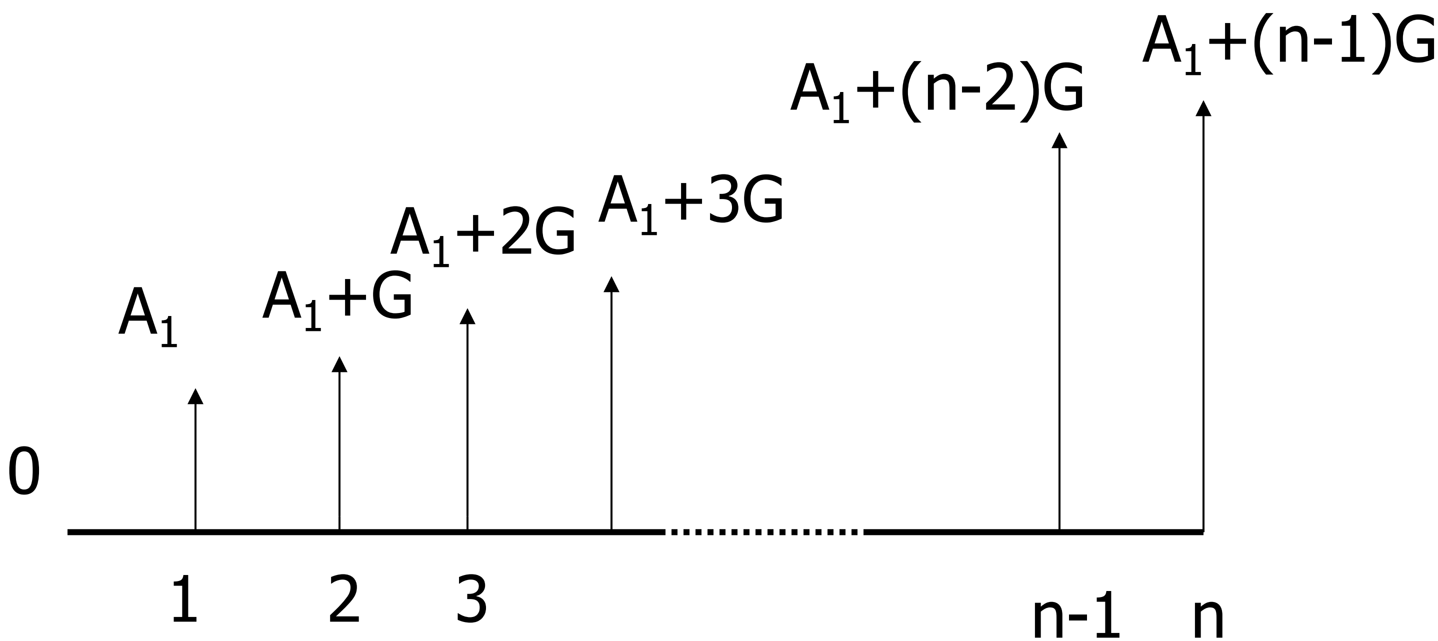
（4.等额支付系列积累基金公式）

$$
\begin{aligned}
A_2 &= F_2\cdot\left[\frac{i}{(1+i)^N-1}\right]\\
&= \left\{\frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^N-1}{i}\right]-\frac{N\cdot G}{i}\right\}\cdot\left[\frac{i}{(1+i)^N-1}\right]
\end{aligned}
$$

- 则梯度系列的等额年值：$A=A_1+G\left[\frac{1}{i}-\frac{n}{i}(A/F\,i,n)\right]$
- 式中[i/1-n/i(A/F i,n)]称为梯度系数，记为（A/G i,n)

可以通过（1/i）—（N/i）·i/[（1+i）^{N}—1]计算求得，也可查书后附录中的附表7求得。

图3-7 均匀梯度系列现金流量图



7.均匀梯度系列公式

- 例3-10 若某人第1年支付一笔10000元的保险金，之后9年内每年少支付1000元，若10年内采用等额支付的形式，则等额支付款为多少时等价于原保险计划?(年利率为8%)

解：A=10000-1000(A/G8,10)

=10000-1000*3.8713

=6128.7元

8. 运用利息公式要注意的问题

- 方案的初始投资P，假设发生在寿命期初；
- 寿命期内各项收入或支出，均假设发生在各期的期末；
- 本期的期末即是下一期的期初
- P在计算期的期初发生.
- 寿命期末发生的本利和F记在第n期期末；
- 等额支付系列A发生在每一期的期末。
- 当问题包括P，A时，P 在第一期期初，A在第一期期末
- 当问题包括F，A时，F和A同时在最后一期期末发生。
- 在均匀梯度系列中，第一个G发生在第二期期末。
- i为计息期的有效利率.

利息公式各系数之间存在以下关系：

(1)倒数关系：

- (P/F i，n) =1/ (F/P i，n)
- (P/A i，n) =1/ (A/P i，n)
- (F/A i，n) =1/ (A/F i，n)

(2)乘积关系：

- (F/P i,n)(P/A i,n)= (F/A i,n)
- (F/A i,n)(A/P i,n)=(F/P i,n)
- (A/F i,n)(F/P i,n)=(A/P i,n)

(3)特殊关系：

- (A/F i,n)+i=(A/P i,n)

3.4 等值计算实例

- 计息期与支付期一致
- 计息期短于支付期
- 计息期长于支付期

3.4.1 计息期与支付期一致的计算

1. 一次支付复利公式（3-7）

- 例3-13：要使目前的1000元与10年后的2000元等值，年利率应为多少？

解：

$$2000 = 1000\left(F/P, i, 10\right)$$

$$\left(F/P, i, 10\right) = 2$$

查附表一，当n=10，2落于7%和8%之间

i=7%时 $\left(F/P, 7, 10\right) = 1.9671$

i=8%时 $\left(F/P, 8, 10\right) = 2.1589$

用直线内插法可得：

$$i = 0.07 + 0.01 \times \frac{2.0000 - 1.9671}{2.1589 - 1.9671} = 0.07 + 0.0017 = 7.17\%$$

6. 等额支付系列资金恢复公式（3-14）

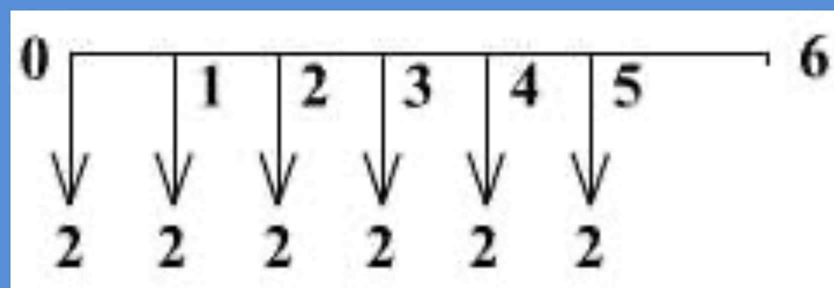
- 例3-14：某人要购买一处新房，一家银行提供20年期年利率为6%的贷款30万元，该人每年要支付多少？

解：

$$A = P\left(A/P\, i, N\right) = 30\left(A/P\, 6, 20\right) = 30 \times 0.0872 = 2.46$$（万元）

5. 等额支付系列现值公式（3-13）

- 例3-15：分期付款购车，每年初付2万元，6年付清. 设年利率为10%，相当于一次现金支付的购价为多少？



$$P = A + A\left(\tfrac{P}{A} i, N\right) = 2 + 2\left(\tfrac{P}{A} 10, 5\right) = 2 + 2 \times 3.791 = 9.582$$ （万元）

5. 等额支付系列现值公式（3-13）

- 例3-16：拟建立一项永久性的奖学金，每年计划颁发10000元，若年利率为10%，则现在应存入多少钱？

$$P = A\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = A\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

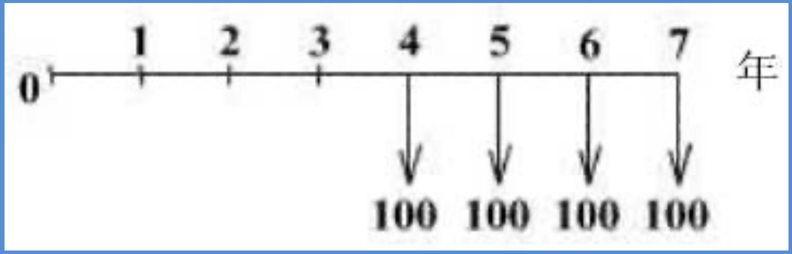
当 $n \to \infty$ 时， $(1+i)^{-n} \to 0$ 所以上式可变为

$$P = \frac{A}{i}$$

$$P = \frac{10000}{10\%} = 100000\text{（元）}$$

5. 等额支付系列现值公式（3-13）
2. 一次支付现值公式（3-8）

例3-17：从第4年到第7年每年年末有100元的收入, 年利率为10%，现金流量如图3-8所示, 求与其等值的第0年的现值为多大?



$$P_3 = A\left(P/A\, i, N\right)$$

$$= 100 \times \left(P/A\, 10, 4\right) = 100 \times 3.17 = 317$$

$$P_0 = P_3\left(P/F\, 10, 3\right) = 317 \times 0.7513 = 238.16$$

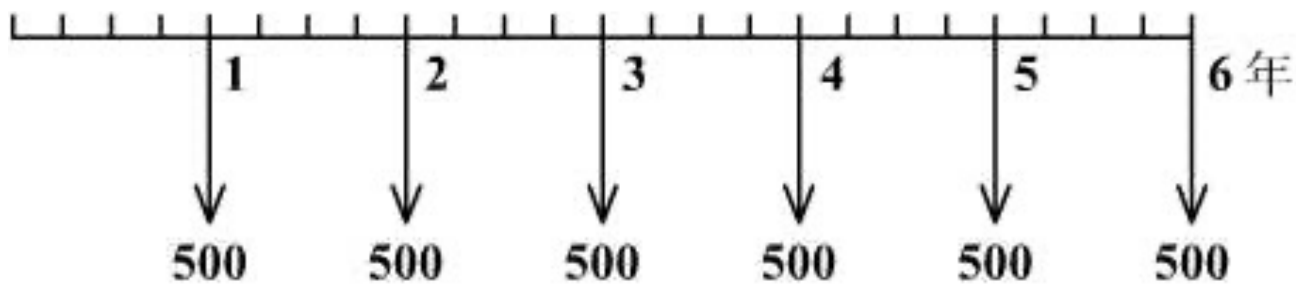
3. 等额支付系列复利公式（3-11）

- 例3-18 年利率8%，每季度计息一次，每季度末借款1400元，连续借16年，求与其等值的第16年末的将来值为多少？

$$F = A\left(F/A\, i, N\right) = 1400\left(F/A\, 2, 64\right) = 178604.53\ (元)$$

3.4.2 计息期短于支付期的计算

- 例3-19：年利率12%，每季度计息一次，每年年末支付500元，连续支付6年，求其第0年的现值为多少？
- 解：其现金流量如图



- 计息期为季度，支付期为1年，计息期短于支付期，该题不能直接套用利息公式。

需使计息期与支付期一致起来，计算方法有三种

❖方法一，计息期向支付期靠拢，求出支付期的有效利率。

年有效利率

$$i=\left(1+\frac{0.12}{4}\right)^4-1=12.55\%$$

年有效利率（3-5）

$$P=500\left(P/A\ 12.55,6\right)=2024\text{（元）}$$

3. 等额支付系列现值公式（3-13）

- 方法二 支付期向计息期靠拢，求出计息期末的等额支付。

3. 等额支付系列累计基金公式（3-12）

$$A = 500\left(A/F, 3, 4\right) = 500 \times 0.2390 = 119.5 \text{（元）}$$

$$P = 119.5\left(P/A, 3, 24\right) = 119.5 \times 16.9355 = 2024 \text{（元）}$$

3. 等额支付系列现值公式（3-13）

- 方法三 把等额支付的每一个支付看作为一次支付，求出每个支付的现值。

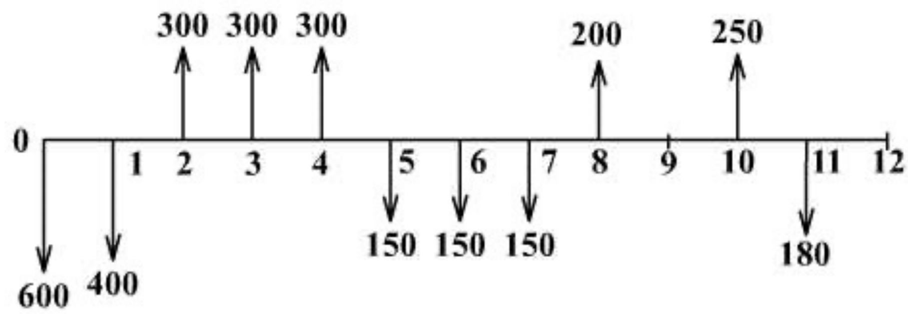
$$
\begin{aligned}
P &= 500\left(P/F\ 3,4\right)+500\left(P/F\ 3,8\right)+500\left(P/F\ 3,12\right) \\
&\quad +500\left(P/F\ 3,16\right)+500\left(P/F\ 3,20\right)+500\left(P/F\ 3,24\right) \\
&= 2024(\text{元})
\end{aligned}
$$

2. 一次支付现值公式（3-8）

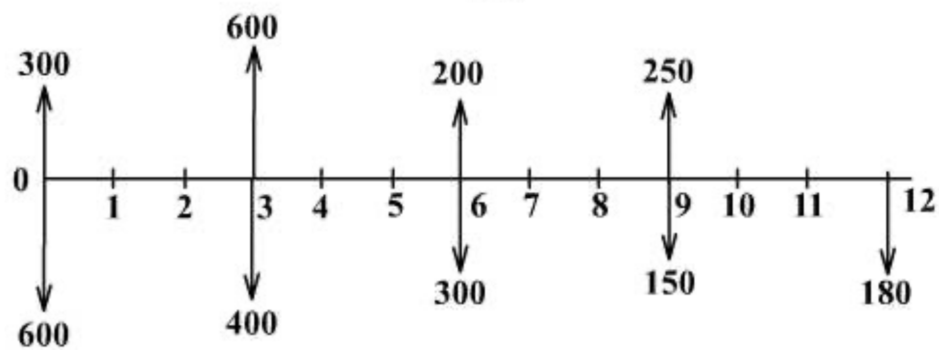
3.4.3 计息期长于支付期的计算

- 当计息期长于支付期时，在计息期所收或付的款项不计算利息，也就是该在某计息期间存入的款项，相当于在下一个计息期初存入这笔金额，在计息期内提取的款项，相当于在前一个计息期末提取了这笔金额。

- 例3-20 已知某项目的现金流量图如图所示，计息期为季度，年利率12%，求1年末的金额。



(a)



(b)

- 将图a中的现金流量整理成图（b）中的现金流量

$$F=(300-600)\cdot\left(F/P\ 3,4\right)+(600-400)\cdot\left(F/P\ 3,3\right)+(200-300)\cdot\left(F/P\ 3,2\right)$$

$$+(250-150)\cdot\left(F/P\ 3,1\right)-180$$

$$=-302.2(\text{元})$$