算法作业 2

张昊　　1927405160

2021 年 10 月 6 日

3.2-3

证明. **首先证明**：$\lg(n!) = \Theta(n\lg n)$，即证明：$0 \le c_1 n\lg n \le \lg(n!) \le c_2 n\lg n$。

显然，当 $n \le 2$ 时，$n! < n^n$，故有 $\lg(n!) \le \lg(n^n) = n\lg n$。因此取 $c_2 = 1$，有 $\lg(n!) = O(n\lg n)$。

由斯特林近似公式，

$$\begin{aligned}\lg(n!) &= \lg(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n(1+\Theta(\frac{1}{n}))) \\ &= \lg(\sqrt{2\pi n}) + n\lg(\frac{n}{e}) + \lg(1+\Theta(\frac{1}{n})) \\ &\ge n\lg(\frac{n}{e})\end{aligned} \tag{1}$$

目标是要证：$\lg(n!) \ge c_1 n\lg n$，故只要证：

$$n\lg(\frac{n}{e}) \ge c_1 n\lg n \tag{2}$$

2式可化简为：

$$\begin{aligned}n\lg(\frac{n}{e}) &\ge c_1 n\lg n \\ \lg(\frac{n}{e}) &\ge \lg(n^{c_1}) \\ \frac{n}{e} &\ge n^{c_1} \\ n^{1-c_1} &\ge e\end{aligned} \tag{3}$$

因此可以取任意的 $c_1 \in (0,\ 1)$，使得2式成立，即 $\lg(n!) \ge c_1 n\lg n$ 成立。

这里取 $c_1 = \frac{1}{2}$，有 $\lg(n!) = \Omega(n\lg n)$。

由3式可得，取 $c_1 = \frac{1}{2}$ 时，$n \ge e^2$。

综上所述，取 $c_1 = \frac{1}{2}$，$c_2 = 1$，$n_0 = \max(e^2, 2) = e^2$ 可以证明此结论。

接下来证明：$n! = \omega(2^n)$，即证明：$0 \le c2^n < n!$。

由斯特林近似公式，

$$\begin{aligned}n! &= \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n(1+\Theta(\frac{1}{n})) \\ &\ge (\frac{n}{e})^n \\ &= (\frac{n}{2e})^n 2^n\end{aligned} \tag{4}$$

目标是要证：$n! > c2^n$，故只要证：

$$(\frac{n}{2e})^n 2^n > c2^n \tag{5}$$

5式可化简为：$(\frac{n}{2e})^n > c$。
因为当 $n \geq 2e$ 时，$(\frac{n}{2e})^n$ 单调递增，且 $(\frac{n}{2e})^n \geq 1$。
故取 $n_0 = 2e + 1$，$c = 1$，可证明5式成立，即 $n! = \omega(2^n)$。
接下来证明：$n! = o(n^n)$，即证明：$0 \leq n! < cn^n$。
由斯特林近似公式，

$$n! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n(1 + \Theta(\frac{1}{n}))$$

由于 $n \in Z_+$ 时，$\Theta(\frac{1}{n}) \leq 1$，所以

$$\begin{aligned} n! &= \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n(1 + \Theta(\frac{1}{n})) \\ &\leq 2\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n \\ &= \frac{2\sqrt{2\pi n}}{e^n}\, n^n \end{aligned} \tag{6}$$

目标是要证：$n! < cn^n$，故只要证：

$$\frac{2\sqrt{2\pi n}}{e^n}\, n^n < cn^n \tag{7}$$

7式可化简为：$\frac{2\sqrt{2\pi n}}{e^n} < c$。
当 $n \geq \frac{1}{2}$ 时，$\frac{2\sqrt{2\pi n}}{e^n}$ 单调递减，且 $\frac{2\sqrt{2\pi n}}{e^n} \leq 2\sqrt{\frac{\pi}{e}}$。
故取 $n_0 = 1$，$c = 2\sqrt{\frac{\pi}{e}}$，可证明7式成立，即 $n! = o(n^n)$。

$\square$

思考题 3.2

解. 如下表所示。

	A	B	O	o	Ω	ω	Θ
a.	$\lg^k n$	n^ϵ	否	否	是	是	否
b.	n^k	c^n	否	否	是	是	否
c.	$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$	否	否	否	否	否
d.	2^n	$n^{\frac{n}{2}}$	是	是	否	否	否
e.	$n^{\lg c}$	$c^{\lg n}$	是	否	是	否	是
f.	$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$	是	否	是	否	是