1、$f(n) = an^2 + bn + c$ ，其中 a、b、c 为常量且 $a > 0$

证明：$f(n) = \Theta(n^2)$

解：需要证明存在足够大的n，使得 $c_1 n \leq an^2 + bn + c \leq c_2 n$

∴ $c_1 = ?$; $c_2 = ?$; $n_0 = ?$

① $an^2 + bn + c = \frac{1}{4}an^2 + \frac{3}{4}an^2 + bn + c$

$\geq \frac{1}{4}an^2 + \frac{3}{4}an^2 - |b|n - |c|$

$= \frac{1}{4}an^2 + (\frac{1}{2}an^2 - |b|n) + (\frac{1}{4}an^2 - |c|)$

$\geq \underbrace{\boxed{\frac{1}{4}a}}_{c_1} n^2$

∴ $\frac{1}{2}an^2 - |b|n \geq 0$ $\Downarrow$ $n \geq 2\frac{|b|}{a}$

$\frac{1}{4}an^2 - |c| \geq 0$ $\Downarrow$ $n \geq 2\sqrt{\frac{|c|}{a}}$

∴ 当 $n_0 = 2\max(\frac{|b|}{a}, \sqrt{\frac{|c|}{a}})$ ，$c_1 = \frac{1}{4}a$ 时，左边成立

② $an^2 + bn + c \leq an^2 + |b|n + |c| \leq c_2 n^2$

∵ $|b|n \leq \frac{1}{2}an^2$ $|c| \leq \frac{1}{4}an^2$

∴ $an^2 + \frac{1}{2}an^2 + \frac{1}{4}an^2 \leq an^2 + |b|n + |c| \leq c_2 n^2$

$(a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a) \leq c_2$

∴ $c_2 \geq \frac{7}{4}a$

∴ 取常数 $c_1 = \frac{1}{4}a$, $c_2 = \frac{7}{4}a$, $n_0 = 2\max(\frac{|b|}{a}, \sqrt{\frac{|c|}{a}})$ ……

法二 $an^3+bn^2+cn+d=\Omega(n^3), a>0$

需要证明 $c_1 n^3 \le an^3+bn^2+cn+d$

Proof: $an^3+bn^2+cn+d \ge c_1 n^3$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}an^3+(\frac{1}{2}an^3+bn^2+cn+d)$$

$$\ge \frac{1}{2}an^3+(\frac{1}{2}an^3-|b|n^2-|c|n-|d|)$$

$n\ge 1$ $$\ge \frac{1}{2}an^3+(\frac{1}{2}an^3-|b|n^2-|c|n^2-|d|n^2)$$

$$\ge \frac{1}{2}an^3+(\frac{1}{2}an-|b|-|c|-|d|)n^2$$

$$\ge \frac{1}{2}an^3$$

$$\frac{1}{2}an-|b|-|c|-|d|=0$$

$$n=\frac{2(|b|+|c|+|d|)}{a}+1, \quad c_1=\frac{1}{2}a.$$

$an+b = O(n^2)$, $a>0$

需证明：$0 \le an+b \le cn^2$

① $an+b \le an+|b|$

$\le an^2+|b|n^2$

$= (a+|b|)n^2 \le cn^2$

$\therefore c \ge a+|b|$

② $an+b>0$

$n > -\frac{a}{b}$

$\therefore$ 通过取 $c=a+|b|$,

$n_0 = \max(1, -\frac{a}{b})$,

可以证明此结论