Polynôme du second degré

Téo Jauffret

5 octobre 2025

Table des matières

1 Introduction

1.1 Définition

Une fonction dite du second degré s'écrit sous la forme développé :

$$ax^2 + bx + c$$

où :

$$a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

1.2 Différence avec les fonctions du premier degré

Une fonction du premier degré est linéaire et sa courbe est une droite dont la variation est constante, tandis qu'une fonction du second degré est quadratique et sa courbe est une parabole présentant un minimum ou un maximum et un axe de symétrie.

2 Équations du second degré

2.1 Forme canonique

La forme canonique d'un polynôme permet de mettre en évidence certaine propriétés clés de celui-ci. (comme α et β)

Elle s'écrit sous la forme : $a(x - \alpha)^2 + \beta$
où :
- $\alpha = -\frac{b}{2a}$: abscisse du sommet
- $\beta = f(\alpha)$: ordonnée du sommet

Cette forme est très utile pour identifier rapidement le sommet de la parabole qui est (α, β), ce qui permet de connaitre le maximum ou minimum de la fonction.

Exemple de passage de la forme développée a la forme canonique
Soit le polynôme :

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 5$$

On calcule α et β :

$$\alpha = \frac{8}{4} = 2$$

$$\begin{aligned}\beta &= 2\alpha^2 - 8\alpha + 5 \\ &= 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 5 \\ &= 8 - 16 + 5 \\ &= -3\end{aligned}$$

On remplace les valeurs dans la fonction canonique $f(x) = a(x-\alpha) - \beta$:

$$f(x) = 2(x-2) + 3$$

Exercice n°1 : On considère la fonction $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$

1. Calculer α, β
2. En déduire la forme canonique de f

2.2 Équation d'un polynôme du second degré

Pour résoudre une équation d'un polynôme du second degré de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

On utilise le discriminant Δ (dit delta). Il sert a déterminer le nombre et la nature des solutions de l'équation.
Il se calcule en faisant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

La valeur que nous renvoie ce calcule permet de savoir le nombre de solutions de l'équation.

— $\Delta > 0$: 2 racines dans $\mathbb{R}$
— $\Delta = 0$: 1 racine dans $\mathbb{R}$ double
— $\Delta < 0$: 0 racine dans $\mathbb{R}$

On peut maintenant utiliser Δ pour calculer les solutions de l'équation.

Cas n°1 : $\Delta > 0$ donc 2 solutions
On a donc x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

donc :

$$S = \{x_1, x_2\} \text{ ou } \{x_2, x_1\} \text{ en fonction de l'ordre.}$$

Cas n°2 : $\Delta = 0$ donc 1 solution
On a donc x_0 :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

donc :

$$S = \{x_0\}$$

Cette solution est appelée racine double (ou solution double), car en réalité c'est deux fois la même racine.

Cas n°3 : $\Delta < 0$ donc 0 solution
Si $\Delta < 0$ alors il n'existe aucune solution dans les $\mathbb{R}$.
On dit que :
$$S = \varnothing$$

Exercice n°2 : On considère la fonction $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$

1. Résoudre l'équation $2x^2 - 8x + 5 = 0$

2.3 Forme factorisée

La forme factorisée d'un polynôme permet de déterminer facilement ses racines et d'étudier le signe de l'expression.
Elle s'écrit :
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$
où x_1 et x_2 sont les solutions/racines de l'équation $f(x) = 0$

Exemple de passage de la forme développé a la forme factorisée
Soit le polynôme :
$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$
On résout l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$
On utilise Δ :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 \\ &= 25 - 24 \\ &= 1 > 0 \quad \text{donc 2 solutions}\end{aligned}$$

On calcule x_1, x_2 :
$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
On écris la forme factorisée :
$$f(x) = (x - 3)(x - 2)$$
où :
- a = 1
- $x_1 = 3$
- $x_2 = 2$

Exercice n°3 : On considère la fonction $f(x) = 2x^2 + 3x + 7$

1. Résoudre l'équation $2x^2 + 3x + 7 = 2$
2. En déduire la forme factorisée de f

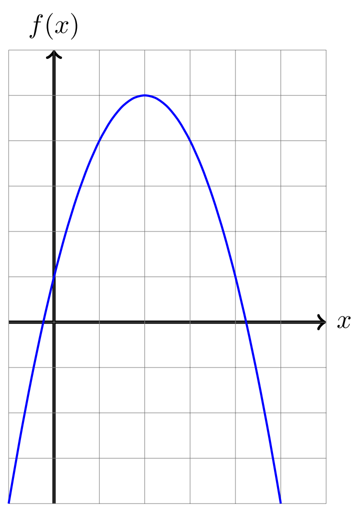
---

3 Inéquation du second degré

3.1 Signe de $f(x)$

a fixe le signe global de la fonction, c'est-à-dire son signe aux extrémités.
On remarque 2 cas :

— $a < 0$:

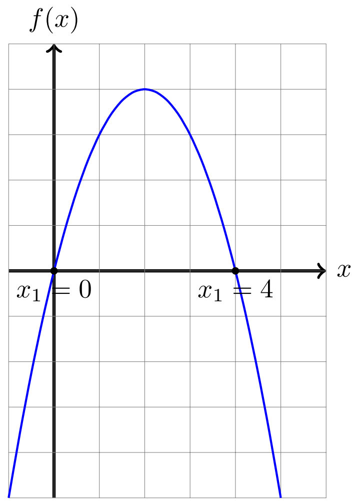


— $a > 0$:

Le signe de a n'est pas relié a la valeur de Δ.

3.2 Delta dans les courbes

— $\Delta > 0$:

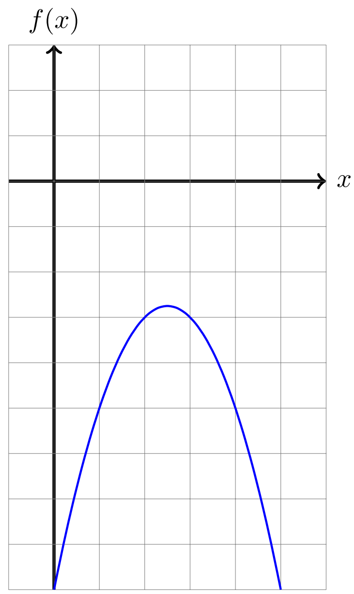


On vois bien ici x_1 et x_2 (ici dans l'exemple $a < 0$ mais cela aurais pus très bien être l'inverse, l'essentiel est d'avoir 2 solutions visible).

— $\Delta = 0$:

On vois bien ici x_0 (ici dans l'exemple $a > 0$ mais cela aurais pus très bien être l'inverse, l'essentiel est d'avoir juste 1 solution visible).

— $\Delta < 0$:



On vois bien ici que la courbe ne dépasse jamais l'axe des abscisses. Il n'y a donc aucune solution dans $\mathbb{R}$ (ici dans l'exemple $a < 0$ mais cela aurais pus très bien être l'inverse, l'essentiel est de pas avoir de solutions visible).

Exercice n°4 : On considère la fonction $f(x) = 2x^2 + 3x + 7$

1. Déduire le sens de la parabole ($\cap$ ou $\cup$)
2. Calculer Δ de f et en déduire les caractéristiques de la parabole sur un graphique.

3.3 Inéquation d'un polynôme du second degré

3.3.1 Définition

Rappel : Une inéquation est une expression mathématique dans laquelle on cherche les valeurs d'une variable qui rendent une inégalité vraie.

Une inéquation du second degré est une inéquation qui s'écrit sous la forme :

$$ax^2 + bx + c <, >, \leq, \geq 0$$

avec a $\neq 0$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$

Pour résoudre une inéquation de second degré on utilise Δ de la même manière que pour les équations du second degré :

— $\Delta > 0$: 2 racines dans $\mathbb{R}$
— $\Delta = 0$: 1 racine dans $\mathbb{R}$ double
— $\Delta < 0$: 0 racine dans $\mathbb{R}$ mais quand même des solutions !

Sauf que a la différence d'une équation on écris pas les solutions de la même manières. On va utiliser pour cela un tableau de signe.

3.3.2 Tableau de signe

Une fois les solutions trouvée grâce a Δ on peut dresser un tableau de signe.

— $\Delta > 0$ avec $a > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

— $\Delta > 0$ avec $a < 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

— $\Delta = 0$ avec $a > 0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

— $\Delta = 0$ avec $a < 0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Attention, en inéquation même dans le cas ou $\Delta < 0$ on peut écrire des solutions !

— $\Delta < 0$ avec $a > 0$:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	$+$

— $\Delta < 0$ avec $a < 0$:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	$-$

Pour bien mémoriser ses tableaux, il faut imaginer la courbe de la fonction avec a et Δ et voir ou la fonction coupe/touche/touche pas etc...

3.3.3 Résolution d'une inéquation

Pour résoudre une inéquation, après avoir fait son tableau de signe on peut dresser les solutions en écrivant l'intervalle de ce que l'on cherche.
Par exemple pour :

x	$-\infty$		4		6		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Si on cherche $f(x) < 0$ on a :

$$S =]-\infty; 4[\cup]6; +\infty[$$

Si on cherche $f(x) > 0$ on a :

$$S =]4; 6[$$

Si on cherche $f(x) \leq 0$ on a :

$$S =]-\infty; 4] \cup [6; +\infty[\quad \text{On prend } x_1 \text{ et } x_2 \text{ quand on a } \leq$$

Si on cherche $f(x) \geq 0$ on a :

$$S = [4; 6] \quad \text{On prend } x_1 \text{ et } x_2 \text{ quand on a } \geq$$

Cas particulier : $\Delta = 0$
Pour ce tableau :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Si on cherche $f(x) < 0$ on a :

$$S =]-\infty; x_0[\cup]x_0; +\infty[$$

Si on cherche $f(x) > 0$ on a :

$$S = \varnothing$$

Si on cherche $f(x) \leq 0$ on a :

$$S = \mathbb{R}$$

Si on cherche $f(x) \geq 0$ on a :

$$S = \{x_0\}$$

Ici $a < 0$, il faut juste inverser le raisonnement quand $a > 0$.

Cas particulier : $\Delta < 0$
Pour ce tableau :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

Si on cherche $f(x) > 0$ on a :

$$S = \mathbb{R}$$

Si on cherche $f(x) < 0$ on a :

$$S = \varnothing$$

Ici $a > 0$, il faut juste inverser le raisonnement quand $a > 0$.

Exemple complet de résolution d'inéquation du second degré

Soit l'inéquation :

$$x^2 - x - 6 > 0$$

On calcule Δ :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)\\ &= 1 + 24\\ &= 25 \quad \text{donc 2 racines}\end{aligned}$$

On calcule les racines :

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{25}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{25}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

On dresse le tableau de signe de f :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

a étant positif on a donc : $+, -, +$.

On résout :

$$S =]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$$

Exercice n°5 : On considère la inéquation suivante : $x^2 - 5x + 6 > 0$

1. Résoudre l'inéquation.

---

4 Extremums

4.1 Tableau de variation

Un tableau de variation est défini sous cette forme :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Il permet de voir le maximum ou minimum d'une fonction, exprimé sous la forme (α, β). (Dans ce cas $a > 0$ donc on cherche un minimum, mais si $a < 0$ alors les flèche iront dans le sens inverse et on chercherez alors un maximum.)

Exercice n°6 : On considère la fonction $f(x) = x^2 - 5x + 6$

1. Calculer α, β
2. En déduire la forme canonique de f
3. Dresser un tableau de variation de f

---

5 Exercices

Une petite série d'exercice mélangeant tout ce que l'on a vu sur le second degré.

Exercice 1 - Le rêve tarpin chelou de Lou
Lou s'était endormi a son habitude vers 23h environ. Dans son long et agréable sommeil elle a rêvée de quelque chose d'assez inhabituelle. C'était un lieu vide, mais au centre une silhouette familière, c'était Téo qui parler que en fonction mathématique tellement il étais fou du second degré ce malade mentale. Elle s'approcha et Téo lui dis de résoudre une équation. Ce qu'elle fais avec le sourire bien évidemment.

On considère la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 2$

1. Résoudre $x^2 - 3x + 2 = 0$
2. En déduire la forme factorisée de f
3. Dresser un tableau de signe de f

Exercice 2 - La nouvelle PDG de JNR