

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Лабораторная работа по электричеству

**Резонанс напряжений в последовательном контуре
[3.2.2]**

Талашкевич Даниил Александрович
Группа Б01-009

Долгопрудный
2021

Содержание

1	Аннотация	1
1.1	Теоретическое вступление и модель	1
1.1.1	Вынужденные колебания	1
1.1.2	Резонанс	2
1.2	Экспериментальная установка	4
2	Ход работы	5
2.1	Закон Ома в цепи переменного тока	5
2.2	Резонанс напряжений	6
3	Обработка результатов	6
4	Вывод	9
5	Литература	9

1 Аннотация

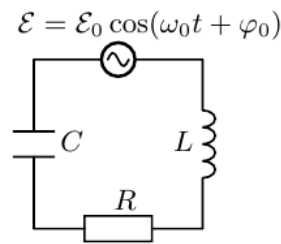
Цель работы: исследование резонанса напряжений в последовательном колебательном контуре с изменяемой ёмкостью, получение амплитудно-частотных и фазово-частотных характеристик, определение основных параметров контура.

В работе используются: генератор сигналов, источник напряжения, нагрузкой которого является последовательный колебательный контур с переменной ёмкостью, двухканальный осциллограф, цифровые вольтметры.

1.1 Теоретическое вступление и модель

1.1.1 Вынужденные колебания

Для схемы, изображенной ниже запишем правило Кирхгофа:



$$\ddot{U}_C + 2\gamma \dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = \omega_0^2 \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Решая данное дифференциальное уравнение получаем:

$$U_C(t) = U_{C0} e^{i\omega t}$$

$$U_{C0} = \frac{\mathcal{E}_0}{i\omega C Z}, \quad Z = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}, \quad U_{R0} = \frac{R\mathcal{E}_0}{Z}, \quad U_{L0} = i\omega L \frac{\mathcal{E}_0}{Z}$$

Т.е. закон Ома можно переписать в следующем виде:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}, \quad U_{R0} = Z_R I_0, \quad U_{C0} = Z_C I_0, \quad U_{L0} = Z_L I_0, \quad \text{где}$$

$$Z_R = R, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

Импедансы контура и его отдельных элементов – комплексные числа – могут быть представлены в показательной форме:

$$Z = Z_0 e^{i\psi}$$

где $Z_0 = |Z|$ – модуль комплексного числа, $\psi = \arg Z$ – его аргумент (фаза). Для импеданса рассматриваемого последовательного контура при этом находим

$$Z_0 = \sqrt{(\operatorname{Re} Z)^2 + (\operatorname{Im} Z)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{R}{\cos \psi_I}$$

$$\operatorname{tg} \psi_I = \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Отсюда получаем выражения для действительной части тока и средней мощности активных потерь в контуре:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos \psi_I \cos(\omega t + \varphi_0 - \psi_I)$$

$$P = \langle I^2 R \rangle = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2R} \cos^2 \psi_I,$$

где угловые скобки означают усреднение по периоду колебаний.

1.1.2 Резонанс

Для исследования вынужденных колебаний и резонанса запишем вещественные части решений дифференциального уравнения, положив для сокращения записи равной нулю начальную фазу: $\varphi_0 = 0$. В результате приходим к уравнениям

$$I(t) = \frac{U_R(t)}{R} = I_\omega \cos(\omega t - \psi_I), \quad I_\omega = \frac{\mathcal{E}_0}{Z_0}$$

$$Z_0 = R \sqrt{1 + \left[\frac{\rho}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]^2}, \quad \psi_I = \arctg \left[\frac{\rho}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

$$U_C(t) = U_{C\omega} \cos(\omega t - \psi_C), \quad U_{C\omega} = \mathcal{E}_0 \frac{\rho}{Z_0} \frac{\omega_0}{\omega}, \quad \psi_C = \psi_I + \pi/2,$$

$$U_L(t) = U_{L\omega} \cos(\omega t - \psi_L), \quad U_{L\omega} = \mathcal{E}_0 \frac{\rho}{Z_0} \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \psi_L = \psi_I - \pi/2.$$

2) Поведение системы носит резонансный характер: при $\omega = \omega_0$, когда мнимая часть импеданса контура $\text{Im } Z = 0$ и соответственно

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \rho, \quad \text{Im } Z = 0, \quad Z_0 = R, \quad \psi_I = 0$$

амплитуды тока и напряжения на сопротивлении R достигают максимальных значений:

$$I_{\omega_0} = \mathcal{E}_0 / R, \quad U_{R\omega_0} = RI_{\omega_0} = \mathcal{E}_0$$

$$I_{\omega} = \frac{\mathcal{E}_0 / R}{\sqrt{1 + (\tau \Delta \omega)^2}}, \quad U_{C\omega} = \frac{Q \mathcal{E}_0 \omega_0 / \omega}{\sqrt{1 + (\tau \Delta \omega)^2}}, \quad U_{L\omega} = \frac{Q \mathcal{E}_0 \omega / \omega_0}{\sqrt{1 + (\tau \Delta \omega)^2}}$$

В резонансе, когда для высокочастотного контура $\omega = \omega_0$, $\Delta \omega = 0$, выражения для амплитуд тока и напряжений на ёмкости и индуктивности, фазовых сдвигов ψ и их производных по частоте

$\psi' = d\psi/d\omega$ принимают вид

$$\begin{aligned} I_{\omega}(\omega_0) &= \frac{\mathcal{E}_0}{R}, & \psi_I(\omega_0) &= 0 \\ U_{C\omega}(\omega_0) &= Q \mathcal{E}_0, & \psi_C(\omega_0) &= \frac{\pi}{2} \\ U_{L\omega}(\omega_0) &= Q \mathcal{E}_0, & \psi_L(\omega_0) &= -\frac{\pi}{2} \\ \psi'_I(\omega_0) &= \psi'_L(\omega_0) = \psi'_C(\omega_0) = \tau \end{aligned}$$

Для параллельного контура можно получить выражения для аналогичных величин:

$$\begin{aligned} I_C(t) &= Q I_0 \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\cos(\omega t - \psi_C)}{\sqrt{1 + (\tau \Delta \omega)^2}}, & \psi_C &= \arctg(\tau \Delta \omega) - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{Q} \\ I_L(t) &= Q I_0 \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\cos(\omega t - \psi_L)}{\sqrt{1 + (\tau \Delta \omega)^2}}, & \psi_L &= \arctg(\tau \Delta \omega) + \frac{\pi}{2} \\ U(t) &= Q \rho I_0 \frac{\cos(\omega t - \psi_U)}{\sqrt{1 + (\tau \Delta \omega)^2}}, & \psi_U &= \arctg(\tau \Delta \omega) + \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{Q} \end{aligned}$$

При резонансе, когда в принятом выше приближении $\omega = \omega_0$, $\Delta \omega = 0$, амплитуды токов в ветвях контура, напряжения на нём, фазовые сдвиги ψ и их производные по циклической частоте $\psi' = d\psi/d\omega$ принимают вид

$$\begin{aligned}
I_{C\omega}(\omega_0) &= QI_0, & \psi_C(\omega_0) &= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{Q} \\
I_{L\omega}(\omega_0) &= QI_0, & \psi_L(\omega_0) &= \frac{\pi}{2} \\
U_\omega(\omega_0) &= Q^2 RI_0, & \psi_U(\omega_0) &= \frac{1}{Q} \\
\psi'_C(\omega_0) &= \psi'_L(\omega_0) = \psi'_U(\omega_0) = \tau
\end{aligned}$$

1.2 Экспериментальная установка

В данной работе изучаются резонансные явления в последовательном колебательном контуре (резонанс напряжений). Схема экспериментального стенда показана на рис. 1. Синусоидальный сигнал от генератора поступает на вход управляемого напряжением источника напряжения (см., например, [3]), собранного на операционном усилителе, питание которого осуществляется встроенным блоком-выпрямителем от сети ~ 220 В (цепь питания на схеме не показана). Источник напряжения (источник с нулевым внутренним сопротивлением) обеспечивает с высокой точностью постоянство амплитуды сигнала $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ на меняющейся по величине нагрузке - последовательном колебательном контуре, изображённом на рис. 1 в виде эквивалентной схемы.

Источник напряжения, колебательный контур и блок питания заключены в отдельный корпус, отмеченный на рисунке штриховой линией. На корпусе имеются коаксиальные разъёмы «Вход», « U_1 » и « U_2 », а также переключатель магазина ёмкостей C_n с указателем номера $n = 1, 2, \dots, 7$. Величины ёмкостей C_n указаны на установке. Напряжение \mathcal{E} на контуре через разъём « U_1 » попадает одновременно на канал 1 осциллографа и вход 1-го цифрового вольтметра. Напряжение на конденсаторе U_C подаётся через разъём « U_2 » одновременно на канал 2 осциллографа и вход 2-го цифрового вольтметра.

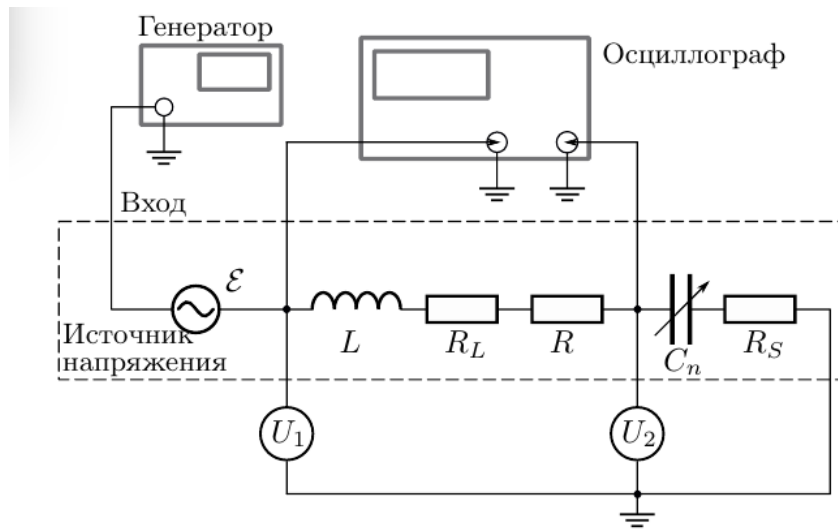


Рис. 1. Схема экспериментального стенда

2 Ход работы

2.1 Закон Ома в цепи переменного тока

Подготовив установку, выставив пределы всех измерительных приборов и выкрутив ручку регулятора напряжения в положение напряжения $\approx 127\text{В}$, можем приступить к снятию данных.

Указатель на положение сердечника установили на отметку $x = 5 \pm 1\text{ мм}$ и, перемещая сердечник шагами по 2 мм, снимаем зависимость тока I , напряжения U_R, U_L, U_{R+L} , а так же мощности P_L от координаты сердечника x .

Полученные результаты представлены в таблице.

	$x, \text{ мм}$	$U_R, \text{ В}$	$U_{R+L}, \text{ В}$	$U_L, \text{ В}$	$I, \text{ дел}$	$I, \text{ А}$	$P_L, \text{ дел}$	$P_L, \text{ Вт}$
1	5	73	112	73	34	85	42	10.5
2	7	78	110	65	36	90	38	9.5
3	9	81	109	61	37	92.5	36	9
4	11	84	108	56	37.5	93.75	34	8.5
5	13	85	107	52	39.5	98.75	32	8
6	15	87	107	50	40	100	31	7.75
7	17	89	107	47	41	102.5	30	7.5

Таблица 1: Показания приборов от положения сердечника

Так же для снятия и обработки результатов пригодилась таблица с характеристиками приборов.

Амперметр – 2.5 А
Вольтметры – 150 В
Ваттметр – 25 В
Переключатель катушки напряжений – 100 В
Штепсель токовой катушки I – 0.25 А
R_1 – 98 Ом

Таблица 2: Характеристики установки

2.2 Резонанс напряжений

Подготовим установку вместе с измерительными приборами. Установив сердечник в среднее положение ($x \approx 12$ мм), подбираем значение ёмкости так, чтобы наблюдать резонанс тока по изменению эллипса на экране ЭО.

При резонансе измерим показания $I, U_{C,\text{рез}}, U_{\Sigma,\text{рез}}$ и по полученным данным оценим добротность контура по формуле (10).

x , мм	C , мкФ	I , А	U_C , В	U_{Σ} , В	Q	$R_{\text{доп}}$
12	55.2	410	242	41	5.902	5.6

Таблица 3: Показания приборов при резонансе

Для резонансного положения сердечника измерим омическое сопротивление витков катушки с помощью мультиметра GDM , а затем – L , r_L с помощью измерителя LCR на частотах 50 Гц и 1 кГц.

3 Обработка результатов

- По результатам измерений P_L и I найдем значение r_L по следующей формуле $P_L = I^2 r_L$. Теперь по следующей формуле

$$U_L = I \sqrt{r_L^2 + (\Omega L)^2} \quad (1)$$

вычислим L ($\Omega = 50$ Гц).

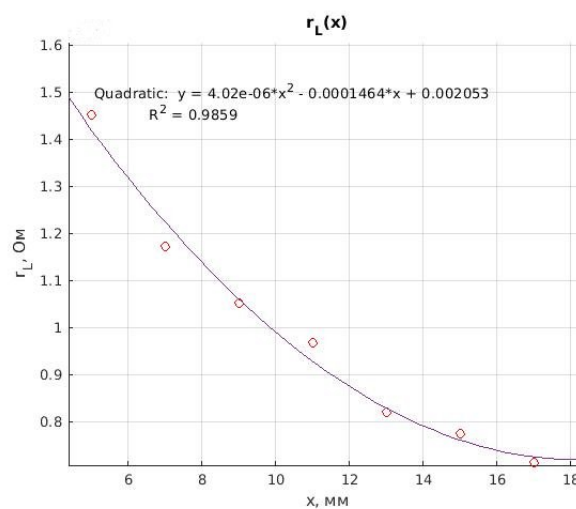
Для 50 Гц	
L , мН	159,42
r_L , Ом	3,696
Для 1 КГц	
L , мН	141,58
r_L , Ом	52,97

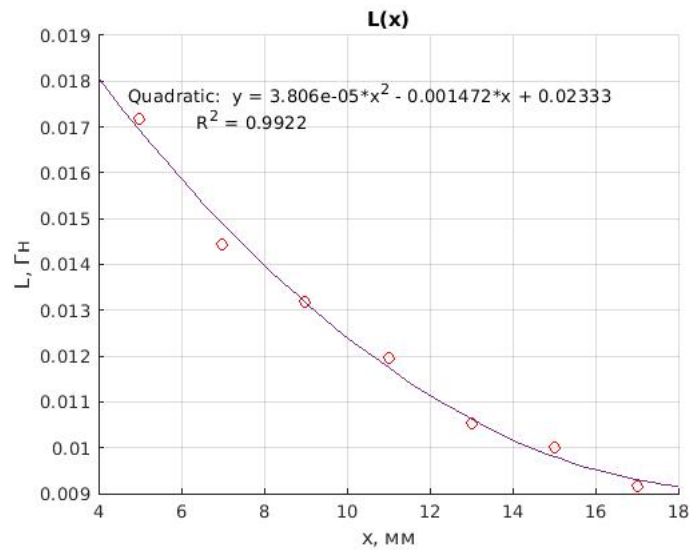
Таблица 4: Данные с мультиметра GDM и LCR измерителя

r_L , Ом	x , мм	L , Гн
1,45	5	0,01718
1,17	7	0,01444
1,05	9	0,01319
0,97	11	0,01195
0,82	13	0,01053
0,78	15	0,01
0,71	17	0,00917

Результаты вычислений заносим в таблицу:

Построим графики зависимостей L и r_L от положения сердечника и по полученной аппроксимации зависимости определим по ним значения L и r_L , соответствующие резонансному положению сердечника.





- Рассчитаем активное сопротивление катушки r_L через ток и напряжение на контуре, используя следующие соотношения:

$$R_{\Sigma} = R_1 + r_L$$

$$U_{\Sigma, \text{рез}} = I_{\text{рез}} R_{\Sigma}, \quad U_{C, \text{рез}} = \frac{I_{\text{рез}}}{\Omega C}$$

Тогда получаем

$$r_L = \frac{U_{\Sigma, \text{рез}}}{U_{C, \text{рез}} \cdot \Omega C} - R_1 = 1,16 \text{ Ом}$$

Так же рассчитаем L и r_L через добротность Q при помощи следующих соотношений

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_{\Sigma}} = \frac{1}{\omega_0 C R_{\Sigma}}$$

$$R_{\Sigma} = R_1 + r_L$$

$$Q = \frac{U_{C, \text{рез}}}{U_{\Sigma, \text{рез}}}$$

Отсюда получаем $L = 120,32$; $r_L = 1,08$ Ом.

- Сведем результаты измерений в таблицу:

	Омметр	LCR	График	$f(I, U_{\Sigma})_{\text{рез}}$	$f(Q)$
r_L , Ом	2,170	3,70	0,88	1,16	1,08
L , мГн	—	159,42	111,47	—	120,32

Таблица 5: Данные с мультиметра GDM и LCR измерителя

4 Вывод

При выполнении данной лабораторной работы было получено, что разные методы дают величины одного порядка, различающиеся в пределах погрешности между собой. Однако не все они попадают в пределы погрешности с действительной величиной. Причиной этого может являться эффект, при котором катушка и конденсатор имеют ненулевую действительную часть импеданса, в связи с чем происходят потери еще и на этих элементах и теоретическая зависимость будет иметь другой характер.

5 Литература

1. **Лабораторный практикум по общей физике:** Учебное пособие. В трех томах. Т. 2. Электричество и магнетизм /Гладун А.Д., Александров Д.А., Берулёва Н.С. и др.; Под ред. А.Д. Гладуна - М.: МФТИ, 2007. - 280 с.