Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Лабораторная работа по электричеству

Измерение магнитного поля Земли [3.1.3]

Талашкевич Даниил Александрович
Группа Б01-009

Долгопрудный
2021

Содержание

1 Аннотация

В работе изучается спектральный состав периодических электрических сигналов различной формы: последовательности прямоугольных импульсов, последовательности цугов и амплитудно модулированных гармонических колебаний. Спектры этих сигналов наблюдаются с помощью промышленного анализатора спектра и сравниваются с рассчитанными теоретически.

2 Теоретические сведения

Сколь угодно сложныи электрическии сигнал V (t) может быть разложен на более простые сигналы. В радиотехнике широко используется разложение сигнала V (t) на совокупность гармонических сигналов различных частот ω. Функция F(ω), описывающая зависимость амплитуд отдельных гармоник от частоты, называется амплитуднои спектральнои характеристикои сигнала V(t). Представление сложного периодического сигнала в виде суммы дискретных гармонических сигналов в математике называется разложением в ряд Фурье.

Зная спектральныи состав F(ω) периодическои последовательности некоторого импульса V (t), мы можем осуществить обратное преобразование Фурье: сложив отдельные гармоники со своими амплитудами и фазами, получить необходимую последовательность импульсов. Степень совпадения полученного сигнала с V (t) определяется количеством синтезированных гармоник: чем их больше, тем лучше совпадение. Рассмотрим конкретные примеры периодических функции, которые будут предметом исследования в нашеи работе.

Рассмотрим конкретные примеры периодических функций, которые будут предметом исследования в нашей работе.

2.1 Спектральный анализ электрических сигналов

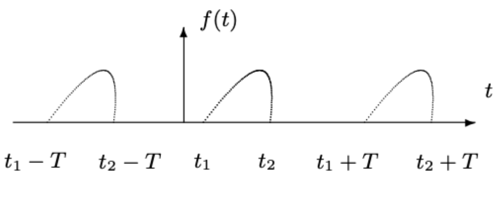

Рис. П.1. График периодической функции с периодом повторения T

Пусть заданная функция $f(t)$ периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = 2\pi/T$, где $T-$ период повторения (рис. П.1). Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)\right]$$

или

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n)$$

Здесь $a_0/2 = A_0/2-$ постоянная составляюпдая (среднее значение) функции $f(t); a_n$ и b_n- амплитуды косинусных и синусных членов разложения. Они определяются выражениями

$$\begin{array}{c} a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t)\, dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t)\, dt \end{array}$$

Точку начала интегрирования t_1 можно выбрать произвольно. В тех случаях, когда сигнал четен относительно t = 0, в тригонометрическои записи остаются только косинусные члены, т.к. все коэффициенты b_n обращаются в нуль. Для нечетнои относительно t = 0 функции, наоборот, ряд состоит только из синусных членов.

Амплитуда A_n и фаза $\psi_n n$ -й гармоники выражаются через a_n и b_n следуюшим образом:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \psi_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}$$

Как мы видим, спектр любой периодической функции состоит из набора гармонических колебаний с дискретными частотами: $\Omega_1, 2\Omega_1, 3\Omega_1 \ldots$ и постоянной составляющей, которую можно рассматривать как колебание с нулевой частотой $(0 \cdot \Omega_1)$.

Представим выражение в комплексной форме. Для этого заменим косинусы экспонентами в соответствии с формулой

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

Подстановка даёт

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-i\psi_n} e^{in\Omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\psi_n} e^{-in\Omega_1 t}\right)$$

Введём комплексные амплитуды $\tilde{A}_n$ и $\tilde{A}_{-n}$

$$\tilde{A}_n = A_n e^{-i\psi_n}; \quad \tilde{A}_{-n} = A_n e^{i\psi_n}; \quad \tilde{A}_0 = A_0$$

Разложение $f(t)$ приобретает вид

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n e^{in\Omega_1 t}$$

Как мы видим, введение отрицательных частот (типа nΩ_1) позволяет записать разложение Фурье особенно поостым образом.

Для расчёта комплексных амплитуд A_n умножим левую и правую части на $e^{-ik\Omega_1 t}$ и проинтегрируем полученное равенство по времени на отрезке, равном одному периоду, например, от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi/\Omega_1$. В правой части обратятся в нуль все члены, кроме одного, соответствующего $n = k$. Этот член даёт $A_k T/2$. Имеем поэтому

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\Omega_1 t}dt$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

2.2 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

С амплитудой V_0, длительностью τ, частотой повторения $f_{\text{повт}} = 1/T$, где $T-$ период повторения импульсов.

Среднее значение
$\langle V\rangle = \frac{a_0}{2} = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 dt = V_0\frac{\tau}{T}$

Амплитуды косинусных составляющих равны

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos\left(n\Omega_1 t\right) dt = 2V_0\frac{\tau}{T}\frac{\sin\left(n\Omega_1\tau/2\right)}{n\Omega_1\tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}$$

Поскольку наша функция чётная, все амплитуды синусоидальных гармоник $b_n = 0$. Спектр $F(\nu)$ последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. П.3. Амплитуды гармоник A_n меняются по Закону $(\sin x)/x$ На рис. П.3 изображён спектр для случая, когда T кратно τ. Назовём шириной спектра $\Delta\omega$ (или $\Delta\nu$) расстояние от главного максимума ($\nu = 0$) до первого нуля, возникающего, как нетрудно убедиться, при $\Omega_1 = 2\pi/\tau$ При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \quad \text{или} \quad \Delta\nu\Delta t \simeq 1$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов $\Delta\nu$ и Δt является частным случаем соотношения неопределенности в квантовой механике. Несовместимость острой локализации волнового процесса во времени с узким спектром частот - явление широко известное в радиотехнике. Ширина селективной настройки $\Delta\nu$ радиоприёмника ограничивает приём радиосигналов Длительностью $t < 1/\Delta\nu$

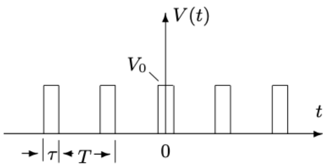

Рис. П.2. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

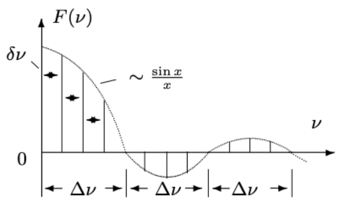

Рис. П.3. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

2.3 Периодическая последовательность цугов

Гармонического колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторения T (рис. П.4)

Функция $f(t)$ снова является чётной относительно $t = 0$. Амплитуда n -й гармоники равна

$$A_n = a_n = \frac{2}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_o t) \cdot \cos(n\Omega_1 t)\, dt =$$
$$= V_0 \frac{\tau}{T}\left(\frac{\sin\left[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}}\right)$$

Такое спектральное распределение F (ω) для случая, когда $\frac{T}{\tau}$ равно целому числу, представлено на рис. П.5. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и спектр цугов (см. рис. П.3 и П.5), мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину ω_0.

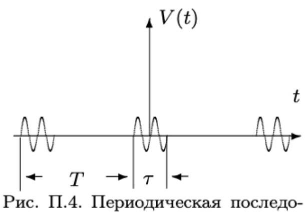

Рис. П.4. Периодическая последовательность цугов

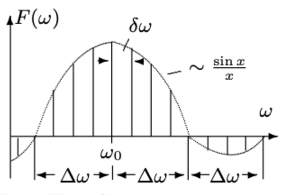

Рис. П.5. Спектр периодической последовательности цугов

2.4 Амплитудно-модулированные колебания.

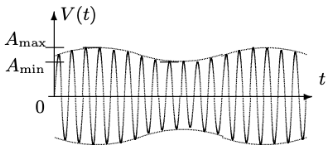

Рис. П.6. Гармонические колебания, модулированные по амплитуде

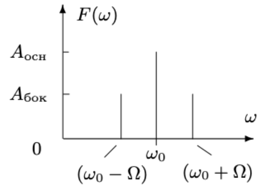

Рис. П.7. Спектр колебаний, модулированных по амплитуде

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0, амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой Ω ($\Omega \ll \omega_0$) (рис. П.6):

$$f(t) = A_0[1 + m\cos(\Omega t)]\cos(\omega t)$$

Коэффициент m называют глубиной модуляции. При $m < 1$ амплитуда колебаний меняется от минимальной $A_{\text{min}} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{\text{max}} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{\text{max}} - A_{\text{min}}}{A_{\text{max}} + A_{\text{min}}}$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно-модулированных колебаний:

$$f(t) = A_0\cos(\omega_0 t) + A_0 m\cos(\Omega t)\cos(\omega_0 t) =$$
$$= A_0\cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2}\cos(\omega_0 + \Omega)\,t + \frac{A_0 m}{2}\cos(\omega_0 - \Omega)\,t$$

Спектр $F(\omega)$ таких колебаний содержит три составляющих (рис. П. 7) Основная компонента представляет собой исходное немодулированное колебание с иесущей частотой ω_0 и амплитудой $A_{\text{ос}} = A_0 -$ первое слагаемое в правой части; боковые компоненты спектра соответствуют гармоническим колебаниям с частотами $(\omega_0 + \Omega)$ и $(\omega_0 - \Omega) -$ Второе и третье слагаемые. Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют $m/2$ от амплитуды немодулированного колебания: $A_{\text{бок}} = A_0 m/2$

3 Экспериментальное оборудование и методика измерений

4 Ход работы

5 Вывод

6 Литература

1. **Лабораторный практикум по общей физике:** Учебное пособие. В трех томах. Т. 2. Электричество и магнетизм /Гладун А.Д., Александров Д.А., Берулёва Н.С. и др.; Под ред. А.Д. Гладуна - М.: МФТИ, 2007. - 280 с.

2. **Данные о магнитном поле Земли:** www.rusmagnet.ru