

Московский физико-технический институт  
(государственный университет)

Устный экзамен по физике (термодинамика)  
Вопрос по выбору

**Термодинамическая устойчивость**

Талашкевич Даниил  
Группа Б01-009

Долгопрудный  
2021

# Содержание

<b>1</b>	<b>Алгебра логики</b>	<b>1</b>
1.1	Задача 1 . . . . .	1
1.2	Задача 2 . . . . .	2
1.3	Задача 3 . . . . .	3
1.4	Задача 4 . . . . .	3
1.5	Задача 5 . . . . .	5
1.6	Задача 6 . . . . .	5
1.7	Задача 7 . . . . .	6
1.8	Задача 8 . . . . .	7
1.9	Задача 9 . . . . .	7
1.10	Задача 10 . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Множества и логика</b>	<b>8</b>
2.1	Задача 1 . . . . .	8
2.2	Задача 2 . . . . .	9
2.3	Задача 3 . . . . .	10
2.4	Задача 4 . . . . .	11
2.5	Задача 5 . . . . .	12
2.6	Задача 6 . . . . .	13
2.7	Задача 7 . . . . .	14
2.8	Задача 8 . . . . .	15
2.9	Задача 9 . . . . .	16
2.10	Задача 10 . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Математические определения, утверждения, доказательства</b>	<b>18</b>
3.1	Задача 1 . . . . .	18
3.2	Задача 2 . . . . .	19
3.3	Задача 3 . . . . .	21
3.4	Задача 4 . . . . .	21
3.5	Задача 5 . . . . .	22
3.6	Задача 6 . . . . .	23
	3.6.1 Задача 6 (а) . . . . .	24
	3.6.2 Задача 6 (б) . . . . .	25
3.7	Задача 7 . . . . .	26
3.8	Задача 8 . . . . .	27
3.9	Задача 9 . . . . .	29
3.10	Задача 10 . . . . .	30
3.11	Задача 10* . . . . .	30

# 1 Алгебра логики

## 1.1 Задача 1

Согласно условию задачи,

$$\neg(x = y) \wedge ((y < x) \rightarrow (2z > x)) \wedge ((x < y) \rightarrow (x > 2z)) = 1$$

Так как это выражение - истина, тогда истине равны:

$$a) \neg(x = y) = 1$$

$$b) (y < x) \rightarrow (2z > x) = 1$$

$$c) (x < y) \rightarrow (x > 2z) = 1$$

Из пункта а) следует, что  $x \neq y$ , то есть  $x \neq 16$ .

Пункт б) выполняется всегда, кроме случая:

$$\begin{cases} (y < x) = 1 \\ (2z > x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > y \\ x \geq 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 16 \\ x \geq 14 \end{cases}$$

$$x > 16$$

То есть пункт б) выполняется, если

$$x \leq 15$$

Пункт в) отличается от б) только знаками неравенств:

$$x \geq 15$$

В итоге получили систему уравнений:

$$\begin{cases} x \geq 15 \\ x \leq 15 \\ x \neq 16 \end{cases}$$

$$x = 15$$

**Ответ: 15**

## 1.2 Задача 2

$$f(x, y, z) = \neg((x \wedge \neg y) \wedge z)$$

Найдём все значения функции для построения таблицы истинности:

$$f(0, 0, 0) = \neg((0 \wedge \neg 0) \wedge 0) = \neg(0 \wedge 0) = 1$$

$$f(0, 0, 1) = \neg((0 \wedge \neg 0) \wedge 1) = \neg(0 \wedge 1) = 1$$

$$f(0, 1, 0) = \neg((0 \wedge \neg 1) \wedge 0) = \neg(0 \wedge 0) = 1$$

$$f(0, 1, 1) = \neg((0 \wedge \neg 1) \wedge 1) = \neg(0 \wedge 1) = 1$$

$$f(1, 0, 0) = \neg((1 \wedge \neg 0) \wedge 0) = \neg(1 \wedge 0) = 1$$

$$f(1, 0, 1) = \neg((1 \wedge \neg 0) \wedge 1) = \neg(1 \wedge 1) = 0$$

$$f(1, 1, 0) = \neg((1 \wedge \neg 1) \wedge 0) = \neg(0 \wedge 0) = 1$$

$$f(1, 1, 1) = \neg((1 \wedge \neg 1) \wedge 1) = \neg(1 \wedge 0) = 1$$

$x$	$y$	$z$	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

### 1.3 Задача 3

$$1 \oplus x_1 \oplus x_2 = (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1)$$

Для доказательства рассмотрим, когда (в каких случаях) оба выражения равны истине:

$$1) f_1(x_1, x_2) = (1 \oplus x_1) \oplus x_2 = 1$$

a) если  $x_1 = 0$ , то  $x_2 = 0$ ,

b) если  $x_1 = 1$ , то  $x_2 = 1$ , То есть  $x_1 = x_2$ , если  $f_1(x_1, x_2) = 1$

$$2) f_2(x_1, x_2) = (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1) = 1$$

Заметим, что  $x_1 = x_2 = 0$  или  $x_1 = x_2 = 1$ , иначе возникает ситуация  $1 \rightarrow 0 = 0$ , то есть  $x_1 = x_2$ , если  $f_2(x_1, x_2) = 1$

Оба выражения равны истине только тогда, когда  $x_1 = x_2$ , в остальных случаях ( $x_1 \neq x_2$ ) они равны нулю (лжи), то есть булевы функции  $f_1(x_1, x_2)$  и  $f_2(x_1, x_2)$  ведут себя одинаково при различных  $x_1$  и  $x_2$ , значит они эквивалентны.

**Доказано**

### 1.4 Задача 4

$$a) x \wedge (y \rightarrow z) = (x \wedge y) \rightarrow (x \wedge z)$$

Пусть  $x = 0$ , тогда выражение слева в a) всегда равно нулю

$$(0 \wedge (y \rightarrow z)) = 0$$

Значит

$$(x \wedge y) \rightarrow (x \wedge z) = 0$$

$$\begin{cases} x \wedge y = 1 \\ x \wedge z = 0 \end{cases}$$

$$x = y = 1$$

Получили, что  $x = 1$ , предполагая, что  $x = 0$ . Противоречие. Дистрибутивность не вы

$$b) x \oplus (y \leftrightarrow z) = (x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$$

Предположим, что выражение слева  $(x \oplus (y \leftrightarrow z))$  равно истине, тогда:

$$x \oplus (y \leftrightarrow z) = 1 \quad (1)$$

$$(x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z) = 1 \quad (2)$$

Рассмотрим решение уравнения (1): случай 1:

$$\begin{cases} x \oplus y = 1 \\ x \oplus z = 1 \end{cases}$$

$$y = z \neq x$$

Рассмотрим случай 2:

$$\begin{cases} x \oplus y = 0 \\ x \oplus z = 0 \end{cases}$$

$$y = z = x$$

В любом случае в решении  $(x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z) = 1$  выполняется  $y = z$ .

Решением уравнения (2) являются 2 системы:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y \neq z \end{cases} \quad (4)$$

То есть одно из решений содержит  $y \neq z$ , но в решении уравнения (1) всегда  $y = z$ . Противоречие. Дистрибутивность не выполняется.

## 1.5 Задача 5

a) Коммутативность для импликации  $x \rightarrow y = y \rightarrow x$  не выполняется, так как если  $x = 0, y = 1$ , то  $0 \rightarrow 1 = 1$ , но  $1 \rightarrow 0 = 0$

b) Ассоциативность  $(x \rightarrow y) \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z)$  не выполняется, так как при если  $x = 0$ , то  $x \rightarrow (y \rightarrow z) = 1$  при любых  $y$  и  $z$ , при этом  $x \rightarrow y = 1$ , но если  $z = 0$ , то  $(x \rightarrow y) \rightarrow z = 0$ , в то время как  $x \rightarrow (y \rightarrow z) = 1$

## 1.6 Задача 6

a)  $f(x_1, x_2, x_3) = 00111100$

Для наглядности составим таблицу истинности:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Заметим, что при  $x_1 = x_2$  выходит  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ , а в других случаях  $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ , значит  $x_1$  и  $x_2$  - существенные переменные, а  $x_3$  - фиктивная.

b)  $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \rightarrow (x_1 \vee x_2)) \rightarrow x_3$

Если  $x_1 = 1$ , то  $(x_1 \rightarrow (x_1 \vee x_2)) = (1 \rightarrow 1) = 1$ .

Если  $x_1 = 0$ , то  $(x_1 \rightarrow (x_1 \vee x_2)) = (0 \rightarrow (0 \vee x_2)) = 1$ .

Получили, что  $(x_1 \rightarrow (x_1 \vee x_2)) = 1$  не зависит от  $x_1$  и тем более от  $x_2$ , значит  $g(x_1, x_2, x_3) = 1 \rightarrow x_3$ . Итак,  $x_1$  и  $x_2$  - фиктивные переменные, а  $x_3$  - существенная.

## 1.7 Задача 7

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \vee f(0, x_2, \dots, x_n)) \wedge (\neg x_1 \vee f(1, x_2, \dots, x_n))$$

1) Пусть  $f(0, x_2, \dots, x_n) = 0$ , тогда:

$$f(0, x_2, \dots, x_n) = (0 \vee f(0, x_2, \dots, x_n)) \wedge (1 \vee f(1, x_2, \dots, x_n)) = 0 \wedge 1 = 0$$

Выражение выполняется.

2) Пусть  $f(0, x_2, \dots, x_n) = 1$ , тогда:

$$f(0, x_2, \dots, x_n) = (0 \vee f(0, x_2, \dots, x_n)) \wedge (1 \vee f(1, x_2, \dots, x_n)) = 1 \wedge 1 = 1$$

Выражение выполняется.

3) Пусть  $f(1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , тогда:

$$f(1, x_2, \dots, x_n) = (1 \vee f(0, x_2, \dots, x_n)) \wedge (0 \vee f(1, x_2, \dots, x_n)) = 1 \wedge 0 = 0$$

Выражение выполняется.

4) Пусть  $f(1, x_2, \dots, x_n) = 1$ , тогда:

$$f(0, x_2, \dots, x_n) = (1 \vee f(0, x_2, \dots, x_n)) \wedge (0 \vee f(1, x_2, \dots, x_n)) = 1 \wedge 1 = 1$$

Выражение выполняется.

Итак, исходное равенство выполняется для любых функций с любыми значениями  $x_1$ . Интересно также отметить, что равенство выполняется для любого аргумента  $x_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ), так как аргументы являются независимыми.



## 1.8 Задача 8

$$x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n} = 1$$

Равенство возможно только в одном случае:  $x_i^{\alpha_i} = 1$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Значение  $x_i^{\alpha_i}$  зависит от  $x_i$  и  $\alpha_i$ : если  $x_i = 0$ , то  $\alpha_i = 0$ , чтобы  $x_i^{\alpha_i} = 1$  и если  $x_i = 1$ , то  $\alpha_i = 1$ , чтобы  $x_i^{\alpha_i} = 1$ . Определённому значению  $x_i$  соответствует определённое  $\alpha_i$ , значит если выбран определённый набор  $x_1, \dots, x_n$ , ему будет соответствовать единственный набор  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

**Доказано**

## 1.9 Задача 9

$$\bigvee_{i,j} (x_i \oplus x_j) = (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \dots \vee \overline{x_n})$$

1)  $\bigvee_{i,j} (x_i \oplus x_j) = 1$ , если хотя бы одна комбинация  $x_i$  и  $x_j$  отличается по значениям. В этом же случае  $(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) = 1$ , так как среди  $x_i$  будет по крайней мере одна единица, и  $(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \dots \vee \overline{x_n}) = 1$ , так как по крайней мере найдётся одно значение  $x_i = 0$ , а значит  $\overline{x_i} = 1$ . Значит

$$\bigvee_{i,j} (x_i \oplus x_j) = (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \dots \vee \overline{x_n}) = 1$$

Получается, что равенство в условии выполняется.

2)  $\bigvee_{i,j} (x_i \oplus x_j) = 0$ , если все значения  $x_i$  равны (0 или 1), значит либо  $(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) = 0$ , либо  $(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \dots \vee \overline{x_n}) = 0$ , тогда

$$\bigvee_{i,j} (x_i \oplus x_j) = (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \dots \vee \overline{x_n}) = 0$$

Равенство в условии снова выполняется, значит оно справедливо для любых значений  $x_i$ .

## 1.10 Задача 10

Пусть булева функция выражается только через связи  $\vee$  и  $\wedge$ . Заметим, что эти связи могут только либо сохранять предыдущие значения выражений (переменных), либо увеличивать их до 1, значит функции, использующие только эти связи - нестрого возрастающие. Получается, что нестрого или строго убывающую функцию эти связи описать не могут (перевести 1 в 0), для этого как минимум требуется использовать связку  $\neg$ . Значит существует убывающая функция, которая не может быть описана только связками  $\vee$  и  $\wedge$ .

## 2 Множества и логика

### 2.1 Задача 1

Верно ли, что для любых множеств  $A$  и  $B$  выполняется равенство:

$$(A \setminus B) \cap ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = A \setminus B ?$$

**Решение:**

$$(A \setminus B) \cap ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = A \setminus B$$

Обозначим  $X = A \setminus B$ , пусть  $x \in X$ , тогда  $x \in A \cap \overline{B}$ , значит можно переписать равенство в условии так:

$$(A \cap \overline{B}) \cap ((A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}) = A \cap \overline{B}$$

$A \cup B$  - объединение множеств, а  $A \cap B$  - пересечение, тогда понятно, что множество  $(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$  можно заменить на  $A \triangle B$ , тогда условие переписывается в виде:

$$(A \cap \overline{B}) \cap (A \triangle B) = A \cap \overline{B}$$

По определению операции "симметричное или"

$$A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

Значит  $(A \cap \overline{B}) \subseteq (A \triangle B)$  и справедливо

$$(A \cap \overline{B}) \cap (A \triangle B) = A \cap \overline{B}$$

Это выражение эквивалентно исходному, значит и исходное равенство верно.

**Ответ: верно**

## 2.2 Задача 2

Верно ли, что для любых множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$  выполняется равенство:  
 $((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cup C)) = A \setminus (B \cup C)$  ?

**Решение:**

$$((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cap C)) = A \setminus (B \cup C)$$

Для удобства перепишем равенство, пользуясь тем, что  $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ :

$$((A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C})) \cap (A \cap \overline{(B \cap C)}) = A \cap \overline{(B \cup C)}$$

Воспользуемся формулой дистрибутивности и законом де Моргана:

$$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = A \cap \overline{(B \cap C)}$$

Равенство в условии принимает вид:

$$(A \cap \overline{(B \cap C)}) \cap (A \cap \overline{(B \cap C)}) = A \cap \overline{(B \cup C)}$$

Очевидно, что

$$(A \cap \overline{(B \cap C)}) \cap (A \cap \overline{(B \cap C)}) = (A \cap \overline{(B \cap C)})$$

Тогда равенство принимает вид:

$$A \cap \overline{(B \cap C)} = A \cap \overline{(B \cup C)}$$

$$A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})$$

Понятно, что это равенство неверно.

**Ответ: неверно**

### 2.3 Задача 3

Верно ли, что для любых множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$  выполняется равенство:  
 $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ ?

**Решение:**

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$$

Преобразуем равенство так же, как и в первых двух задачах:

$$(A \cap B) \cap \overline{C} = (A \cap \overline{C}) \cap (B \cap \overline{C})$$

В записанном равенстве используются только операции пересечения  $\cap$ , а они ассоциативны:

$$A \cap B \cap \overline{C} = A \cap \overline{C} \cap B \cap \overline{C}$$

$$A \cap B \cap \overline{C} = A \cap \overline{C} \cap B$$

$$A \cap B \cap \overline{C} = A \cap B \cap \overline{C}$$

Получили верное равенство, значит равенство в условии верно.

**Ответ: верно**

## 2.4 Задача 4

Верно ли, что для любых множеств  $A$  и  $B$  выполняется включение  $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) \subseteq B$ ?

### Решение:

$$(A \cup B) \setminus (A \setminus B) \subseteq B$$

Для анализа этого включения немного его преобразуем:

$$(A \cup B) \cap \overline{(A \setminus B)} \subseteq B$$

$$\overline{(A \setminus B)} \cap (A \cup B) \subseteq B$$

Очевидно, что  $(A \setminus B) \subseteq A$  и  $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ . Значит  $B \subseteq \overline{(A \setminus B)}$ , при этом  $\overline{(A \setminus B)} \cap A = B \cap A$  и  $\overline{(A \setminus B)} \cap B = B$ . Применим дистрибутивность:

$$\overline{(A \setminus B)} \cap (A \cup B) \subseteq B$$

$$(\overline{(A \setminus B)} \cap A) \cup (\overline{(A \setminus B)} \cap B) \subseteq B$$

Теперь подставим записанные ранее выражения:

$$(B \cap A) \cup B \subseteq B$$

Очевидно, что  $B \subseteq B$  и  $(B \cap A) \subseteq B$ , тогда верно и

$$(B \cap A) \cup B \subseteq B$$

Это включение было получено из включения в условии, значит и включение в условии верно.

**Ответ: верно**

## 2.5 Задача 5

Пусть  $P = [10, 40]$ ;  $Q = [20, 30]$ ; известно, что отрезок  $A$  удовлетворяет соотношению

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \wedge ((x \in Q) \rightarrow (x \in A)).$$

**Решение:**

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \wedge ((x \in Q) \rightarrow (x \in A)) = 1$$

Из равенства следует, что:

$$\begin{cases} (x \in A) \rightarrow (x \in P) = 1 \\ (x \in Q) \rightarrow (x \in A) = 1 \end{cases}$$

Первое равенство выполняется всегда, кроме случая:

$$\begin{cases} (x \in A) = 1 \\ (x \in P) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in A \\ x \notin [10, 40] \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$A \subseteq [10, 40]$$

Второе равенство выполняется всегда, кроме случая:

$$\begin{cases} (x \in Q) = 1 \\ (x \in A) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [20, 30] \\ x \notin A \end{cases}$$

Отсюда получаем, что  $A \subseteq [\alpha, \beta]$ , где  $\alpha \leq 20$ , а  $\beta \geq 30$  Запишем два полученных условия:

$$\begin{cases} A \subseteq [\alpha, \beta], \text{ где } \alpha \leq 20, \text{ а } \beta \geq 30 \\ A \subseteq [10, 40] \end{cases}$$

Значит  $A \subseteq [\alpha, \beta]$ , где  $\alpha \in [10, 20]$ , а  $\beta \in [30, 40]$  Минимально возможный отрезок  $A$  равен 10, максимальный - 30.

**Ответ: 1) 30, 2) 10**

## 2.6 Задача 6

Про множества  $A, B, X, Y$  известно, что  $A \cap X = B \cap X, A \cup Y = B \cup Y$ . Верно ли, что тогда выполняется равенство  $A \cup (Y \setminus X) = B \cup (Y \setminus X)$ ?

### Решение:

По условию  $A \cap X = B \cap X, A \cup Y = B \cup Y$ . Предположим, что справедливо

$$A \cup (Y \setminus X) = B \cup (Y \setminus X)$$

Преобразуем равенство следующим образом:

$$A \cup (Y \cap \bar{X}) = B \cup (Y \cap \bar{X})$$

$$(A \cup Y) \cap (A \cup \bar{X}) = (B \cup Y) \cap (B \cup \bar{X})$$

По условию, как уже было записано,  $A \cup Y = B \cup Y$ , значит

$$(A \cup Y) \cap (A \cup \bar{X}) = (A \cup Y) \cap (B \cup \bar{X})$$

Возьмём дополнение обеих частей равенства, используя закон де Моргана:

$$\overline{(A \cup Y) \cap (A \cup \bar{X})} = \overline{(A \cup Y) \cap (B \cup \bar{X})}$$

Сделаем маленькое преобразование:

$$(X \cap \bar{A}) = (X \cap \bar{A}) \cup \emptyset = (X \cap \bar{A}) \cup (X \cap \bar{X}) = X \cap (\bar{A} \cup \bar{X}) = X \cap \overline{(A \cap X)} = X \setminus (A \cap X)$$

Тогда

$$\overline{(A \cup Y)} \cup (X \setminus (A \cap X)) = \overline{(A \cup Y)} \cup (X \setminus (B \cap X))$$

По условию  $A \cap X = B \cap X$ , значит равенство выполняется.

**Ответ: верно**

## 2.7 Задача 7

Пусть  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$  — невозрастающая последовательность множеств. Известно, что  $A_1 \setminus A_4 = A_6 \setminus A_9$ . Докажите, что  $A_2 \setminus A_7 = A_3 \setminus A_8$ .

### Решение:

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$$

$$A_1 \setminus A_4 = A_6 \setminus A_9$$

Очевидно, что  $A_6 \setminus A_9 \subseteq A_6$ , но тогда и  $A_1 \setminus A_4 \subseteq A_6$ , также по условию  $A_6 \subseteq A_4$ . Получается, что  $A_1 \setminus A_4 \subseteq A_6 \subseteq A_4$ , то есть  $A_1 \setminus A_4 \subseteq A_4$ , но по определению разности множеств  $A_1 \setminus A_4 \not\subseteq A_4$  в общем случае. Противоречия не возникает только если  $A_1 = A_4$ , тогда  $A_1 \setminus A_4 = \emptyset \subseteq A_4$ .

Описанная выше ситуация возможна только при  $A_1 = A_2 = A_3 = A_4$ , а так как по условию  $A_1 \setminus A_4 = A_6 \setminus A_9 = \emptyset$ , то  $A_6 = A_7 = A_8 = A_9$ .

Тогда получается, что  $A_2 = A_3$  и  $A_7 = A_8$  и  $A_2 \setminus A_7 = A_3 \setminus A_8$ .

**Доказано**



## 2.8 Задача 8

Пусть  $A, B, C, D$  — такие отрезки прямой, что  $A \triangle B = C \triangle D$  (симметрические разности равны). Верно ли, что выполняется включение  $A \cap B \subseteq C$ ?

## Решение:

$$A \triangle B = C \triangle D$$

Пусть  $A = (\alpha_0, \alpha_1)$ ,  $B = (\beta_0, \beta_1)$ , причём  $\alpha_0 < \beta_0 < \beta_1 < \alpha_1$ , то есть  $B \subseteq A$ . Тогда  $A \triangle B = A \setminus B = (\alpha_0, \beta_0) \cup (\beta_1, \alpha_1)$ .

Выберем такие  $C$  и  $D$ , что  $C = (\alpha_0, \beta_0)$ ,  $D = (\beta_1, \alpha_1)$  и  $C \triangle D = (\alpha_0, \beta_0) \cup (\beta_1, \alpha_1)$ . Тогда получим, что  $A \triangle B = C \triangle D$ , что и написано в условии.

Но тогда  $A \cap B = B = (\beta_0, \beta_1)$ , а  $C = (\alpha_0, \beta_0)$ , то есть  $(A \cap B) \cap C = \emptyset$ , тогда тем более  $(A \cap B) \subseteq C$ .

**Не верно**

## 2.9 Задача 9

Характеристической функцией множества  $A$  называется функция:

$$X_A : U \rightarrow \{0, 1\}.$$

такая, что

$$X_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Докажите, что

- а)  $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ ;
- б)  $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ ;
- в)  $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ ;
- г)  $\chi_{\bar{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$ .

## Решение:

Основываясь на том, что функции алгебры логики аналогичны с теоретико-множественными операторами, получим:

а)  $A \cap B = A \wedge B$ . Пользуясь условием получим, что

$A$	$B$	$A \wedge B$	$A \cdot B$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Видно, что выполняется при всех  $(A, B) \Rightarrow \chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ . Доказано.

б)  $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \wedge \overline{B}$

$A$	$B$	$A \wedge \overline{B}$	$\chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

Видно, что выполняется при всех  $(A, B) \Rightarrow \chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ . Доказано.

в)  $A \cup B = A \vee B$

$A$	$B$	$A \vee B$	$\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Видно, что выполняется при всех  $(A, B) \Rightarrow \chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ . Доказано.

г)  $\overline{A}$

$A$	$\overline{A}$	$1 - \chi_A(x)$
0	1	1
1	0	0

Видно, что выполняется при всех  $(A, B) \Rightarrow \chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$ . Доказано.

**Ответ: доказано.**

## 2.10 Задача 10

Используя формализм счетного объединения, докажите, что в любом бесконечном множестве есть счетное подмножество.

**Решение:**

Пусть множество  $\mathbf{B}$  бесконечно. Тогда оно содержит хотя бы один элемент  $a_1$ . В силу бесконечности  $\mathbf{B}$  в нём найдется элемент  $a_2$ , отличный от  $a_1$ . Так как элементы  $a_2$  и  $a_1$  не исчерпывают всего множества  $\mathbf{B}$ , то в нём найдется элемент  $a_3$ , отличный и от  $a_2$  и от  $a_1$ . Если уже выделено  $n$  элементов  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , то в силу бесконечности  $\mathbf{B}$  в нём найдётся еще один элемент, который обозначим  $a_{n+1}$ , отличный от всех ранее выбранных элементов. Таким образом, для каждого натурального числа  $n$  можно выделить элемент

$a_n$  из  $\mathbf{B}$ , причём все выделенные элементы попарно различны. Выделенные элементы образуют последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ . Множество её членов по определению счётно, и это множество есть часть  $\mathbf{B}$ .

**Ответ: доказано.**

### 3 Математические определения, утверждения, доказательства

#### 3.1 Задача 1

Убедитесь в истинности утверждения (при произвольных  $A$  и  $B$ ):  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ . (1) Зафиксируем произвольную параболу. Пусть  $A$  — утверждение «ветви параболы направлены вверх», а  $B$  = «парабола пересекает 0 (прямую  $y = 0$ )». Проследите за следующими рассуждениями. Утверждение «если ветви параболы направлены вверх, то парабола пересекает 0», очевидно, ложно; тогда истинным должно быть утверждение «если парабола пересекает 0, то ветви параболы направлены вверх», но оно также ложно. То есть оба утверждения в дизъюнкции (1) ложны (при некотором выборе утверждений  $A$  и  $B$ ), но сама дизъюнкция истинна! Найдите ошибку в рассуждениях.

#### Решение:

Утверждение "ветви параболы направлены вверх" обозначим за  $A$ , а "парабола пересекает 0" за  $B$ .

В рассуждениях сказано, что если ветви параболы направлены вверх, то парабола пересекает 0 – ложное утверждение, то есть  $A \rightarrow B = 0$ , что возможно, только если  $A = 1$  и  $B = 0$ , значит парабола никогда не пересекает ноль, что и является ошибкой в рассуждениях – если ветви параболы направлены вверх, то возможна ситуация, когда парабола пересекает ноль.

Если же парабола, ветви которой направлены вверх, действительно не пересекает 0, то истинно утверждение "если ветви параболы направлены вниз, то она пересекает 0". Рассуждения симметричны в обе стороны. Тогда либо  $A \rightarrow B = 1$ , либо  $B \rightarrow A = 1$ , значит всегда выполняется формула  $(B \rightarrow A = 1) \vee (A \rightarrow B = 1)$ .

## 3.2 Задача 2

В доме живут А, его жена В и их дети С, D, Е, при этом справедливы следующие утверждения: 1) если А смотрит телевизор, то и В смотрит телевизор; 2) хотя бы один из D и Е смотрит телевизор; 3) ровно один из В и С смотрит телевизор; 4) С и D либо оба смотрят, либо оба не смотрят телевизор; 5) если Е смотрит телевизор, то А и D тоже смотрят телевизор. Кто смотрит и кто не смотрит телевизор?

## Решение:

Согласно условиям можно записать:

$$\begin{cases} A \rightarrow B = 1 \\ D \vee E = 1 \\ B \oplus C = 1 \\ C \leftrightarrow D = 1 \\ E \rightarrow (A \wedge D) = 1 \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда  $E = 1$ , тогда  $A = D = 1$  (последнее условие). Из 1-ого условия следует, что  $B = 1$ , тогда из 3-его условия  $C = 0$ . Получили, что не выполняется 4-ое условие – противоречие. Итак,  $E = 0$ . Теперь система выглядит так:

$$\begin{cases} A \rightarrow B = 1 \\ D = 1 \\ B \oplus C = 1 \\ C \leftrightarrow D = 1 \end{cases}$$

Здесь из 4-ого условия следует, что  $C = 1$ , из 3-его условия –  $B = 0$ , тогда из 1-ого –  $A = 0$ . Итак,  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$ ,  $D = 1$ ,  $E = 0$ . Телевизор смотрят только  $C$  и  $D$ .

**Ответ:** телевизор смотрят  $C$  и  $D$

### 3.3 Задача 3

Докажите, используя контрапозицию, что если  $x^2 - 6x + 5$  чётно, то  $x$  нечётно; здесь  $x \in \mathbb{Z}$ .

#### Решение:

Предположим, что  $x^2 - 6x + 5$  нечётно, тогда чётно  $x^2 - 6x = x(x - 6)$ . То есть либо чётно  $x$ , либо  $x - 6$ . Если чётно  $x$ , то чётно и  $x - 6$  и наоборот, значит  $x(x - 6)$  всегда чётно, если чётно  $x$ . Значит если нечётно  $x^2 - 6x + 5$ , то чётно  $x$ . Отсюда получаем, что если чётно  $x^2 - 6x + 5$ , то нечётно  $x$ .

### 3.4 Задача 4

Докажите, что произведение положительного рационального числа и иррационального числа — иррациональное число.

#### Решение:

Пусть  $a$  — рациональное число, а  $b$  — иррациональное число. Пусть число  $ab$  — рациональное. Пусть числа  $a = p_1/q_1$  и  $ab = p_2/q_2$  — несократимые дроби, где  $p_1, q_1, p_2, q_2$  — целые числа, тогда  $b = (ab)/a = p_2q_1/q_2p_1$  — дробь с целыми числами  $p_2q_1$  и  $q_2p_1$ , тогда  $b$  — рациональное число. Но по предположению  $b$  — иррациональное число — противоречие.

Итак, произведение положительного рационального числа и иррационального числа — иррациональное число.

### 3.5 Задача 5

Про непустые попарно несовпадающие множества  $A$ ,  $B$  и  $C$  известно, что  $C \setminus A \subseteq B$  и  $C \setminus B \subseteq A$ . Возможно ли, что  $B = A \cap C$ ?

#### Решение:

Сразу подставим  $B$  в условия, получим систему:

$$\begin{cases} C \setminus A \subseteq (A \cap C) \\ C \setminus (A \cap C) \subseteq A \end{cases}$$

Очевидно, что  $C \setminus A \not\subseteq A$ , при этом  $(A \cap C) \subseteq A$ , но из первого условия системы следует, что  $C \setminus A \subseteq (A \cap C) \subseteq A$  – противоречие.

$$C \setminus (A \cap C) = C \cap \overline{(A \cap C)} = C \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) = (C \cap \overline{A}) \cup \emptyset = C \cap \overline{A} = C \setminus A \not\subseteq A$$

По условию же полученное сверху равенство не выполняется – второе противоречие.

Итак, такая ситуация невозможна.

**Ответ: невозможна**



### 3.6 Задача 6

Докажите равенства:

$$a) 1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + \dots + (n-1) \cdot 1 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{6};$$

$$b) \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2};$$

## Решение:

### 3.6.1 Задача 6 (а)

$$1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + \dots + (n-1) \cdot 1 = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

Докажем равенство с помощью метода математической индукции: база индукции:  $n = 1$ , тогда  $0 = 0$  – выполняется.

Пусть справедливо

$$1 \cdot (k-1) + 2 \cdot (k-2) + \dots + (k-1) \cdot 1 = \frac{(k-1)k(k+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} i(k-i) = \frac{(k-1)k(k+1)}{6}$$

Докажем, что будет справедливо и

$$1 \cdot k + 2 \cdot (k-1) + \dots + k \cdot 1 = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^k i(k+1-i) = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$

Проведем некоторые преобразования:

$$\sum_{i=1}^k i(k+1-i) - \sum_{i=1}^{k-1} i(k-i) = \frac{k(k+1)(k+2-k+1)}{6} = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^k ik - \sum_{i=1}^{k-1} ik + \sum_{i=1}^k i - \left( \sum_{i=1}^k i^2 - \sum_{i=1}^{k-1} i^2 \right) = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$k^2 + \sum_{i=1}^k i - k^2 = \sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$$

Получили справедливое равенство (сумма арифметической прогрессии), значит и исходное равенство в условии верно.

### 3.6.2 Задача 6 (б)

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

База индукции  $n = 1$ :

$$\cos x = \frac{\sin(1 + \frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{\sin 1,5x - \sin\frac{x}{2}}{2 \cdot \sin\frac{x}{2}} \Rightarrow \cos x = \frac{2 \cdot \cos x \cdot \sin 0,5x}{2 \cdot \sin 0,5x}.$$

Здесь использована формула для разности синусов:

$$\sin t - \sin s = 2 \cdot \cos \frac{t+s}{2} \cdot \sin \frac{t-s}{2}$$

База индукции выполняется.

Пусть при  $n = k$  выполняется:

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos kx = \frac{\sin(k + \frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

Докажем для  $n = k + 1$ :

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos (k+1)x = \frac{\sin(k + 1 + \frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin(k + \frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} + \cos(k+1)x = \frac{\cos\frac{(k+2)x}{2} \cdot \sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin 0,5x}$$

Домножим обе части равенства на  $\sin\frac{x}{2}$  и немного преобразуем:

$$\frac{\sin\frac{(2k+1)x}{2}}{2} - \frac{\sin\frac{x}{2}}{2} + \frac{\sin\frac{(2k+3)x}{2}}{2} - \frac{\sin\frac{(2k+1)x}{2}}{2} = \frac{\sin\frac{(k+2+k+1)x}{2}}{2} - \frac{\sin\frac{x}{2}}{2}$$

Отсюда получаем, что  $0 = 0$  – верное равенство, значит все выражения справедливы – выражение доказано.

### 3.7 Задача 7

В зачете участвовало несколько студентов и преподавателей. Известно, что в комнату, где происходил зачет, каждый участник зачета вошел лишь однажды и что каждый преподаватель поговорил с каждым студентом. Докажите, что в какой-то момент зачета в комнате присутствовали либо все студенты (и, может быть, кто-то из преподавателей), либо все преподаватели (и, может быть, кто-то из студентов).

#### Решение:

Рассмотрим случай, когда ни в какой момент времени в аудитории не находились все преподаватели одновременно. Тогда по-любому для того, чтобы в аудиторию вошёл последний преподаватель, должен выйти какой-то другой преподаватель до этого. Но этот другой преподаватель может выйти только в том случае, когда он уже примет всех студентов, а для этого все студенты должны были поприсутствовать в аудитории, к тому же никто оттуда ещё не ушёл, так как они не сдали предмет последнему преподавателю. Значит в этом случае в какой-то момент времени в аудитории присутствуют все студенты.

Теперь рассмотрим случай, когда ни в какой момент времени в аудитории не находились все студенты одновременно. Тогда по аналогии чтобы вошёл последний студент нужно, чтобы какой-то другой студент уже ушёл, но тогда этот студент должен сдать все предметы, откуда следует, что все преподаватели собрались в аудитории, так как они как минимум не приняли одного студента. Значит в этом случае в какой-то момент времени в аудитории присутствуют все преподаватели.

### 3.8 Задача 8

Найдите ошибку в доказательстве по индукции утверждения «все лошади одного цвета», точнее  $A(n)$  = «любые  $n$  лошадей одного цвета». База,  $A(1)$ , очевидна: одна лошадь одного цвета. Шаг,  $A(n) \rightarrow A(n+1)$  : уберём одну лошадь из  $n+1$  и воспользуемся предложением  $A(n)$  — получим, что оставшиеся  $n$  лошадей одного цвета. Вернём теперь убранный лошадь, уберём другую лошадь и опять воспользуемся предложением  $A(n)$  — опять получим, что выбранные  $n$  лошадей одного цвета, а значит и убранный в начале лошадь того же цвета, что и все остальные. Итак, мы доказали, что любая  $n+1$  лошадь одного цвета.

## Решение:

В условии "одного цвета" трактуется как "одинакового цвета", а операция одинаковости – эквивалентности – применима только для количества лошадей, не равного единице, так как нельзя утверждать, что 1 лошадь имеет одинаковый цвет – бессмыслица. Значит базу индукции надо определять для количества лошадей  $n = 2$ . Отсюда получаем такую базу: любые две лошади имеют одинаковый цвет, что, очевидно, не выполняется для любых двух лошадей. Значит база индукции изначально не верна и доказывать далее для общего случая  $k$  лошадей бессмысленно.

### 3.9 Задача 9

В прямоугольнике  $3 \cdot n$  стоят фишки трех цветов, по  $n$  штук каждого цвета. Докажите, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

#### Решение:

Воспользуемся методом математической индукции: база индукции ( $n = 1$ ) очевидна (у нас только один столбик и как бы мы не расставляли цвета, у нас будут все цвета).

Пусть при  $n = k$  выполняется, тогда докажем для  $n = k + 1$ :

Пусть в верхней клетке последнего столбца стоит фишка цвета  $a$ . Разберём два случая:

1. В третьей строке есть фишки только одного цвета, отличного от  $a$ ; обозначим этот цвет  $c$ . Во второй строке должна быть фишка цвета  $b$  (в последней строке их нет, а в первой их меньше  $k + 1$ ); переставим её в последний столбец.

2. В третьей строке есть фишки обоих оставшихся цветов. Заметим, что во второй строке есть фишка цвета, отличного от  $a$  (фишек цвета  $a$  всего  $k + 1$ , а одна уже занята в первой строке). Пусть это фишка цвета  $b$ ; переставим её в последний столбец. В третьей строке есть фишка третьего цвета  $c$ , переставим её в последний столбец.

В каждом случае в последнем столбце оказались фишки всех трёх цветов. Отбросив его, мы получим таблицу  $(3 \cdot k)$ , удовлетворяющую условию задачи. По предположению индукции фишки в ней можно переставить требуемым образом. Тем самым, мы переставили фишки и в этой таблице  $3 \cdot (k + 1)$ , значит по математической индукции следует, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

### 3.10 Задача 10

В утверждении ниже встречаются два высказывания, к которым применены некоторые логические связки:

"за окном идет дождь, то, если за окном не идет дождь, то гипотеза Римана верна".

Запишите эти два высказывания, а также перепишите утверждение в формульном виде (с переменными и логическими связками) и докажите, что получившаяся формула является тавтологией.

### Решение:

1. Обозначим высказывание : "за окном идет дождь " за  $A = 1$ , тогда высказывание "за окном не идет дождь" за  $\bar{A} = 0$ .
2. Тогда  $A \rightarrow \bar{A} = \bar{A} \vee \bar{A} = \bar{A} = 0$ .
3. Высказывание "Гипотеза Римана верна" обозначим за  $B$ . Тогда:  
 $\bar{A} \rightarrow B = 0 \rightarrow B = 1$  при любых значениях  $B$ . Значит получившаяся формула является тавтологией.

**Ответ: доказано.**

### 3.11 Задача 10\*

Докажите, что каждое число  $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n}$ , где  $a_i \in \mathbb{N}$  не квадраты целых чисел, иррационально.

### Решение:

Докажем по методу математической индукции.

База индукции ( $n = 1$ ):

Покажем, что корень из любого  $p \in \mathbb{N}$ , где  $p$  – не квадрат целого числа – это иррациональное число:

От противного: положим, что  $\sqrt{p}$  рационально, тогда представим его в виде  $\frac{a}{b}$  (где  $\frac{a}{b}$  – несократимая дробь)  $\Rightarrow p = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow p \cdot b^2 = a^2 \Rightarrow$  что  $a^2$  делится на  $p$ , а так как  $a$  представляет собой целое число по определению несократимой дроби, то его можно представить в виде  $a = f_1 f_2 \dots f_n$ , а так как  $p \in \mathbb{N}$ , то какое-то  $f_i = p$ , тогда у  $a^2$  будет множитель  $p^2 \Rightarrow a^2$  делится на  $p^2$ .  $a$  представим в виде  $kp$ , тогда  $b^2 p = k^2 p^2 \Rightarrow b^2 = k^2 p$ . Проведя аналогичные действия имеем, что и  $b$  делится на  $p$ , тогда представляя его в виде  $b = mp$  получаем, что:



$\sqrt{p} = \frac{a}{b} = \frac{kp}{mp}$  – сократимая дробь, противоречие. Значит мы доказали, что корень из  $p \in \mathbb{N}$ , где  $p$  не квадрат целого числа – это иррациональное число.

Пусть при  $n = k : \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}$  – иррационально. Докажем для  $n = k + 1$  :

1) Обозначив  $\sum_{i=1}^k \sqrt{a_i}$  за  $P$ , где  $P$  – иррациональное число. Тогда  $\sum_{i=1}^{k+1} \sqrt{a_i} = P + \sqrt{a_{k+1}}$ . Обозначим  $\sqrt{a_{k+1}}$  за  $\sqrt{Q}$  для удобства.

Докажем, что  $R = P + \sqrt{Q}$  – иррациональное. Пойдем методом от противного :

$R$  – рациональное, тогда и  $R^2$  – рациональное :  $R^2 = P^2 + Q + 2P \cdot \sqrt{Q}$ .  $Q \in \mathbb{N}$ , тогда остается рассмотреть  $P^2 + 2P \cdot \sqrt{Q}$  :

Обозначим  $P^2 + 2P \cdot \sqrt{Q}$  за  $R_1$ . Опять пойдем от противного : пусть  $R_1$  рациональное, тогда :

$R_1 = P(P + 2\sqrt{Q})$ , где  $P$  иррациональное по определению, тогда рассмотрим  $(P + 2\sqrt{Q})$ . От противного : пусть  $R_2 = (P + 2\sqrt{Q})$  – рациональное, тогда  $R_2^2$  – тоже.  $R_2^2 = P^2 + 4Q + 4P\sqrt{Q}$ .  $4Q$  не иррациональное. Теперь докажем, что при наших условиях на  $P$  и  $Q$  будет выполняться, что  $4P\sqrt{Q}$  – иррациональное.

$P\sqrt{Q}$  может быть рациональным, только если  $P$  может быть представлено в двух видах: 1)  $P = k\sqrt{Q}$  или 2)  $P = \frac{k}{\sqrt{Q}}$  (где  $k$  рациональное число). Рассмотрим оба случая:

1) Если  $P = k\sqrt{Q}$ , то  $P = \sqrt{k^2 \cdot Q}$  (обозначим  $P_1 = k^2 \cdot Q$  – не полный квадрат натурального числа). Тогда докажем, что сумма 2 корней из неполных квадратов – это иррациональное число.

Тогда рассмотрим уже искомую  $R = \sqrt{P_1} + \sqrt{Q}$ .  $R$  иррационально, если  $P_1$  и  $Q$  не являются квадратами рациональных чисел. Предположим противное; т.е. что  $R$  рационально. Тогда возведение в квадрат обеих частей уравнения  $R = \sqrt{P_1} + \sqrt{Q}$  дает

$$R^2 = P_1 + 2 \cdot \sqrt{P_1 Q} + Q.$$

и поэтому

$$\sqrt{P_1 Q} = (R^2 - P_1 - Q)/2.$$

Правая часть обязательно является рациональным числом. Если  $(P_1 Q)$  не является квадратом рационального числа, то противоречие.

Однако, даже если  $(P_1 Q)$  – квадрат рационального числа,  $R$  может не быть рациональным. Предположим, что  $Q$  равно  $P_1$ . Тогда  $R = 2\sqrt{P_1}$ . Если

$P_1$  не является квадратом рационального числа ( а оно не является), то  $R$  обязательно иррационально.

Предположим, что  $(P_1Q)$  квадрат рационального числа, но  $P_1$  не квадрат рационального числа и , пусть без ограничения общности положим,  $P_1 < Q$ . Это означает, что для того, чтобы  $(PQ)$  было квадратом рационального числа  $Q = P_1S^2$ , где  $S$  – рациональное число. Таким образом,  $R = \sqrt{P_1}(1 + S)$ . Это означает, что  $R$  является произведением иррационального числа и рационального числа и, следовательно, иррационально.

2)  $P = \frac{k}{\sqrt{Q}}$ .  $P = \frac{k \cdot \sqrt{Q}}{Q}$  и можно сослаться к первому пункту.

Итак, доказали методом математической индукции, что сумма корней в условии иррациональна.