

Московский физико-технический институт  
(государственный университет)

Лабораторная работа по электричеству

**Измерение магнитного поля Земли [3.1.3]**

Талашкевич Даниил Александрович  
Группа Б01-009

Долгопрудный  
2021

# Содержание

<b>1</b>	<b>Теоретическое введение</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Экспериментальное оборудование и методика измерений</b>	<b>2</b>
2.1	Определение магнитного момента магнитных шариков . . .	2
2.1.1	Метод 1 . . . . .	2
2.1.2	Метод 2 . . . . .	2
2.2	Измерение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли . . . . .	3
2.3	Измерение вертикальной составляющей индукции магнитного поля Земли. Магнитное наклонение . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Ход работы</b>	<b>5</b>
3.1	Определение магнитного момента, намагниченности и остаточной магнитной индукции вещества магнитных шариков	5
3.2	Определение горизонтальной составляющей магнитного поля Земли . . . . .	7
3.3	Определение вертикальной составляющей магнитного поля Земли . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Вывод</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Литература</b>	<b>12</b>

**Цель работы:** исследовать свойства постоянных неодимовых магнитов; измерить с их помощью горизонтальную и вертикальную составляющие индукции магнитного поля Земли и магнитное склонение.

**Используемое оборудование:** неодимовые магниты; тонкая нить для изготовления крутильного маятника; медная проволока; электронные весы; секундомер; измеритель магнитной индукции; штангенциркуль; брусок, линейка и штатив из немагнитных материалов; набор гирь и разновесов.

## 1 Теоретическое введение

Магнитное поле точечного диполя с магнитным моментом  $\mathbf{m} = SI$  определяется по формуле, аналогичной формуле для поля элементарного электрического диполя:

$$\mathbf{B}_{\text{дип}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right) \quad (1)$$

При этом сила, действующая на диполь, равна

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (2)$$

А момент силы равен

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m} \times \mathbf{B}] \quad (3)$$

В частном случае, когда моменты двух небольших магнитов направлены вдоль соединяющей их прямой, сила их взаимодействия равна

$$F = -\frac{6m_1m_2}{r^4} \quad (4)$$

Если магнитные моменты направлены перпендикулярно соединяющей их прямой, то

$$F = \frac{3m_1m_2}{r^4} \quad (5)$$

## 2 Экспериментальное оборудование и методика измерений

### 2.1 Определение магнитного момента магнитных шариков

#### 2.1.1 Метод 1

Величину магнитного момента  $m$  двух одинаковых шариков можно рассчитать, зная их массу  $M$  и определив максимальное расстояние  $r_{\max}$ , на котором они ещё удерживают друг друга в поле тяжести (см. рис.). Из формулы для взаимодействия диполей имеем

$$m = \sqrt{\frac{Mgr_{\max}^4}{6}} \quad (6)$$

Таким образом с помощью измеренного магнитного момента шарика можно измерить индукцию магнитного поля

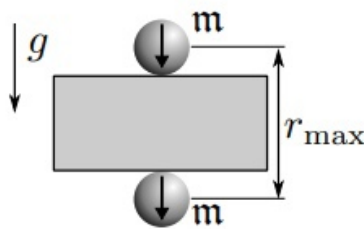


Рис. 1: Измерение магнитных моментов шариков

#### 2.1.2 Метод 2

Величину магнитного момента шариков можно определить также по силе их сцепления. Она определяется как сила, необходимая для разрыва двух сцепившихся магнитных шариков. Сила сцепления максимальна, если шары соединяются своими противоположными полюсами (магнитные моменты сонаправлены).

Максимальную силу сцепления можно определить по весу магнитной цепочки, которую способен удержать самый верхний магнитный шарик. При этом для расчёта прочности цепочки достаточно учитывать силу взаимодействия верхнего шара с 3–4 ближайшими соседями.

$$F = \frac{3m^2}{8R^4} \left( 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) = 1,08 \cdot \frac{3m^2}{8R^4} \quad (7)$$

## 2.2 Измерение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли

Магнитное поле Земли можно измерить по периоду крутильных колебаний «магнитной стрелки» вокруг вертикальной оси.

«Магнитная стрелка» образована сцепленными друг с другом  $n$  намагниченными шариками. Для крепления нити в работе используется штатив, изготовленный из немагнитного материала. Магнитные моменты всех шариков направлены в одну сторону вдоль оси «стрелки». При отклонении стрелки на угол  $\theta$  от равновесного положения в горизонтальной плоскости возникают крутильные колебания вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стрелки.

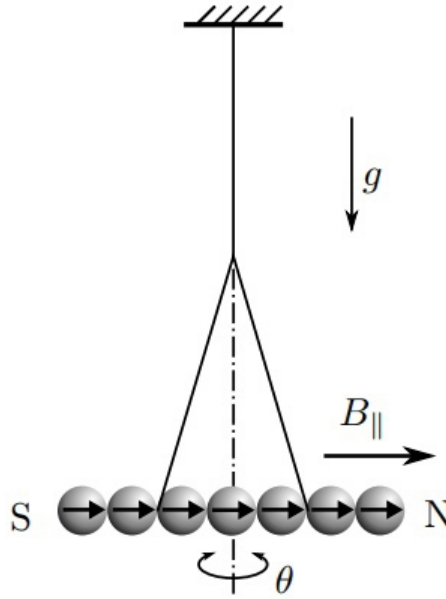


Рис. 2: Крутильный маятник во внешнем магнитном поле

$$M = -m_n B_{||} \sin \theta \Rightarrow J_n \ddot{\theta} + m_n B_{||} \theta = 0 \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{J_n}{m_n B_{||}}} \quad (8)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_n}{m_n B_{\parallel}}} = 2\pi\sqrt{\frac{n^3 MR^2}{12m_n B_{\parallel}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{MR^2}{3m B_{\parallel}}} n \quad (9)$$

### 2.3 Измерение вертикальной составляющей индукции магнитного поля Земли. Магнитное наклонение

Для измерения вертикальной составляющей вектора индукции поля Земли используется та же установка, что и для измерения горизонтальной составляющей с тем лишь отличием, что подвешенная магнитная «стрелка» закрепляется на нити в одной точке. В этом случае стрелка, составленная из чётного числа одинаковых шариков и подвешенная за середину, расположится не горизонтально, а под некоторым углом к горизонту.

Это связано с тем, что вектор  $\mathbf{B}$  индукции магнитного поля Земли не горизонтален, а образует с горизонтом некоторый угол  $\beta$ , зависящий от географической широты  $\phi$  места, где проводится опыт. Величина угла  $\beta$  называется магнитным наклонением.

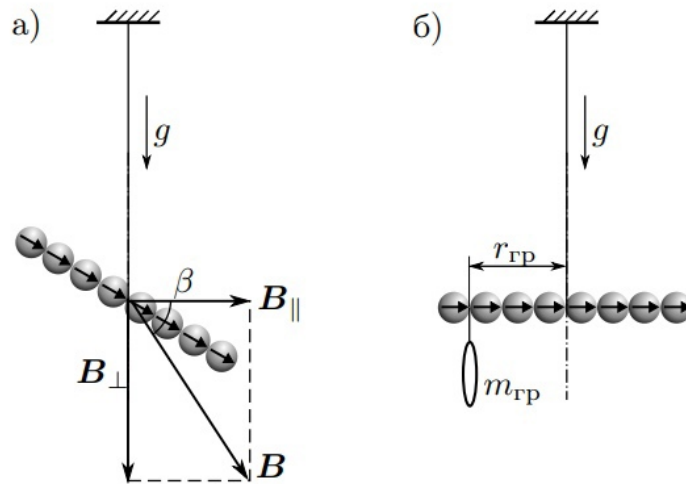


Рис. 3: Измерение вертикальной составляющей поля и магнитного наклонения

$$M_n = m B_{\perp} n \quad (10)$$

### 3 Ход работы

#### 3.1 Определение магнитного момента, намагниченности и остаточной магнитной индукции вещества магнитных шариков

Измерив диаметр и массу шарика, получаем следующие результаты

$$d = 6,4 \pm 0,01 \text{ мм},$$

$$10m_0 = 8,41 \pm 0,001 \text{ гр.}$$

$$m_0 = 0,841 \pm 0,0001 \text{ гр.}$$

Так как порядок погрешности  $10^{-4}$ , а самой величины  $10^{-3}$ , то будем считать, что  $m_0 = 0,841 \text{ гр}$  и  $\varepsilon_{m_0} = 0\%$ .

С помощью магнетометра измерим индукцию поля  $B_p$  на полюсах шарика

$$B_p = 236,1 \pm 11,8 \text{ мТс}, \quad \varepsilon_{B_p} = 5\%.$$

Проложим между двумя магнитными шариками брусок из немагнитного материала. Увеличивая расстояние между бруском и верхним магнитиком, определим на каком максимальном расстоянии  $r_{\max}$  шарики удерживают друг друга в поле тяжести Земли

$$r_{\max} = 19 \pm 1 \text{ мм.}$$

Теперь рассчитаем величину магнитного момента магнитика  $m_0$  и оценим погрешность измерений:

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{m_0 g r_{\max}^4}{6}},$$

получаем  $\mathfrak{m} = 42,31 \text{ эрг/Гс}$ .

$$\varepsilon_{\mathfrak{m}} = \frac{\sqrt{\frac{g r_{\max}^4}{4 \cdot 6 m_0} \cdot \sigma_{m_0}^2 + \frac{4 r_{\max}^2 g m_0}{6} \sigma_{r_{\max}}^2}}{\mathfrak{m}} \approx 10,5\%$$

Получаем  $\mathfrak{m} = 42,31 \pm 4,44 \text{ эрг/Гс}$ .

Используя дополнительные шарики, составим цепочку из 20-30 шариков, и с помощью неодимовых магнитов в форме параллелепипедов,

подсоединим цепочку к гире и разновесам так, чтобы общая масса системы составила  $\sim 250$  г. Добавляя или удаляя шарики, подбираем минимальный вес системы цепочки с гирей, при котором она отрывается от верхнего шарика. Получаем

$$n = 21 \text{ шарик ,}$$

$$m = 271,5 \pm 0,021.$$

Рассчитаем силу сцепления двух шаров радиуса  $R$  и по ней определим магнитный момент шарика  $\mathbf{m}$ , а так же оценим погрешность результата.

$$F_0 = \frac{6\mathbf{m}^2}{(2R)^4} = \frac{3\mathbf{m}^2}{8R^4} \quad (\text{ед. СГС})$$

Тогда минимальный вес цепочки, при которой она оторвётся от верхнего шарика, равен

$$F = F_0 \left( 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots \right) \approx 1,08F_0$$

Получаем

$$F = 266070 \text{ дин} \Rightarrow \mathbf{m} = \sqrt{\frac{8F \cdot R^4}{3 \cdot 1,08}} = 71,50 \text{ эрг/Гс} .$$

$$\varepsilon_F = \frac{\varepsilon_m \cdot g}{F} = \frac{21}{266070} \cdot 100\% = 0,008\% ,$$

$$\varepsilon_{\mathbf{m}} = \frac{\sqrt{\frac{8R^4}{4 \cdot 3 \cdot 1,08F} \cdot \sigma_F^2 + \frac{4R^2 \cdot 8F}{3 \cdot 1,08} \cdot \sigma_R^2}}{\mathbf{m}} \approx 3,6\% .$$

Получаем  $\mathbf{m} = 71,50 \pm 2,59$  эрг/Гс.

Оценим полученные значения. Опираемся будем на значения, полученные с помощью магнетометра

$$B_p = \frac{2}{3}B_r = \frac{2}{3}4\pi M = \frac{2}{3}4\pi \frac{\mathbf{m}}{V} ,$$

$$\text{получаем } \mathbf{m} = \frac{3}{8\pi}B_p V = 38,68 \text{ эрг/Гс}$$

$$\varepsilon_{B_p} = 5\% , \quad \varepsilon_{\mathbf{m}} \approx 5\% ,$$



$$m = 38,68 \pm 1,93 \text{ эрг/Гс.}$$

По полученному результату видно, что более точный результат значения магнитных моментов дает метод А. Результат, полученный по этому методу ложится в пределах погрешности в теоретическое (оцененное с помощью магнитометра) значение. Метод Б в свою очередь не ложится в пределах  $3\sigma$ , что говорит о неприменимости данного метода.

### 3.2 Определение горизонтальной составляющей магнитного поля Земли

Соберём крутильный маятник из 12 магнитных шариков и подвесим его на немагнитном штативе. Используя  $\Lambda$ -образный подвес, установим "магнитную стрелку" в горизонтальное положение (юстировка системы).

Возбудим крутильные колебания маятника вокруг вертикальной оси и определим их период. Так же мы легко убедились, что упругость нити на период колебаний можно не учитывать.

Исследуем зависимость периода  $T$  крутильных колебаний "стрелки" от количества магнитных шариков  $n$ , составляющих "стрелку". Измерения проведём для значений  $n = 3, 4, 5, \dots, 12$ . Таблица полученных результатов

n	N	$T_N$	$T$
3	20	21,20	1,06
4	20	28,23	1,41
5	20	35,25	1,76
6	20	41,82	2,09
7	20	48,19	2,41
8	20	55,44	2,77
9	20	63,02	3,15
10	20	68,95	3,45
11	20	75,20	3,76
12	20	82,00	4,10

Таблица 1: время периода колебаний от количества шариков

Построим график экспериментальной зависимости  $T(n)$ , а так же убедимся в линейности этой зависимости. По значению углового коэффициента рассчитаем величину горизонтальной составляющей магнитного поля Земли и оценим погрешность полученного результата

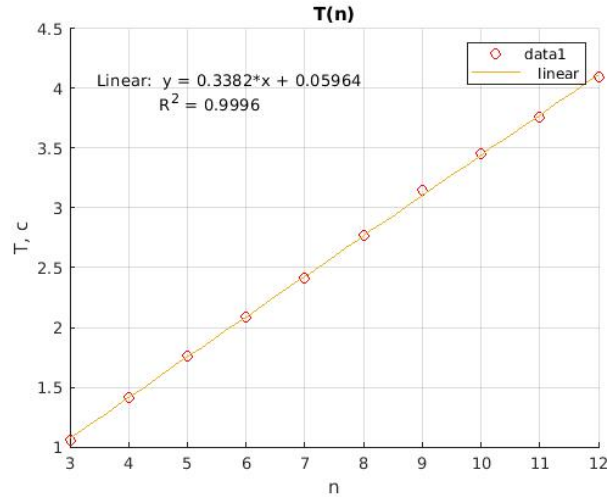


Рис. 4: график зависимости периода колебаний от числа шариков

коэффициент углового наклона

$$k = 2\pi \sqrt{\frac{m_0 R^2}{3mB_{\parallel}}} = 0,3382 \text{ c}.$$

$$\sigma_k = 0,0023 \text{ с}.$$

Тогда горизонтальная составляющая магнитного поля

$$B_{\parallel} = \frac{4\pi^2 m_0 R^2}{k^2 3m} = 0,224 \text{ Э}.$$

$$\varepsilon_{B_{\parallel}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{-2 \cdot 4\pi^2 m_0 R^2}{k^3 3m}\right)^2 \cdot \sigma_k^2 + \left(2R \frac{4\pi^2 m_0}{k^2 3m}\right)^2 \cdot \sigma_R^2 + \left(\frac{-4\pi^2 m_0 R^2}{k^2 3m^2}\right)^2 \cdot \sigma_m^2 + \left(\frac{4\pi^2 R^2}{3k^3 m}\right)^2 \cdot \sigma_{m_0}^2}}{B_{\parallel}}$$

$$\varepsilon_{B_{\parallel}} = 11,14\%.$$

Получаем  $B_{\parallel} = 0,224 \pm 0,025 \text{ Э}$ .

### 3.3 Определение вертикальной составляющей магнитного поля Земли

Изготовим магнитную "стрелку" из  $n = 10$  шариков и подвесим её за середину с помощью нити на штативе.

Определим механический момент сил, действующий со стороны магнитного поля Земли на горизонтально расположенную магнитную "стрелку". Для этого, с помощью одного или нескольких кусочков проволоки, уравновесим "стрелку" в горизонтальном положении.

С помощью весов будем определять массу уравновешивающего груза  $m_{\text{гр}}$ .

Из условия равновесия рассчитаем механический момент сил  $M$ , действующих на горизонтальную "стрелку" со стороны поля Земли. Измерения момента сил проведём для чётных значений  $n = 4, 6, 8, 10, 12$ . Таблица полученных данных

n	m, гр	r, см	M(n)
4	0,276	0,64	173,1072
6	0,152	1,28	190,6688
8	0,088	1,92	165,5808
10	0,112	2,56	280,9856

Таблица 2: зависимость момента сил от кол-ва шариков

По полученным данным построим график зависимости  $M(n)$ .

Используя результаты измерений  $B_{\perp}$  и  $B_{\parallel}$ , определим магнитное наклонения  $\beta$  и полную величину индукции магнитного поля Земли на широте Долгопрудного.

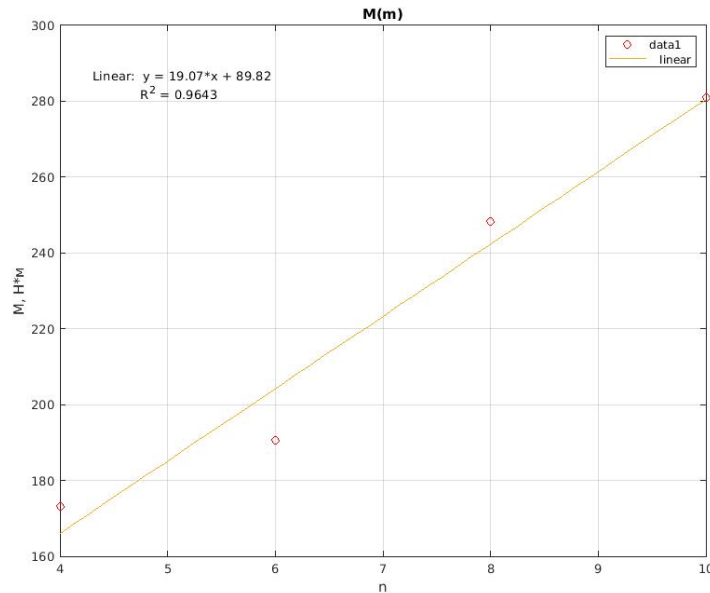


Рис. 5: график зависимости механического момента от  $n$

$$k = mB_{\perp} \Rightarrow B_{\perp} = \frac{k}{m} = \frac{19,07}{42,31} = 0,451.$$

$$\beta = \arctan \frac{B_{\perp}}{B_{\parallel}} = 63,59^{\circ}.$$

Найдем погрешность  $\beta$ :

$$\varepsilon_k = 64\%$$

$$\varepsilon_{B_{\perp}} = \frac{\sqrt{\sigma_m^2 \left(\frac{k}{m^2}\right)^2 + \sigma_k^2 \left(\frac{1}{m}\right)^2}}{B_{\perp}} = 42,37\%$$

$$\varepsilon_{\beta} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{B_{\parallel} \left(1 + \left(\frac{B_{\parallel}}{B_{\perp}}\right)^2}\right)}\right)^2 \sigma_{B_{\perp}}^2 + \left(\frac{B_{\perp}}{1 + \left(\frac{B_{\parallel}}{B_{\perp}}\right)^2}\right)^2 \sigma_{\beta_{\parallel}}^2}}{\beta} = 10,7\%$$

Получаем:

$$B_{\perp} = 0,451 \pm 0,191 \text{ Э} ,$$

$$\beta = 63,59 \pm 6,80^{\circ} .$$

Так же оценим полное магнитное поле Земли

$$B = \sqrt{B_{\perp}^2 + B_{\parallel}^2} = 0,503 \text{ Э} \approx 0,04 \text{ мТс} ,$$

$$\varepsilon_B = \frac{\sqrt{\left(\frac{2B_{\parallel}}{2\sqrt{B_{\perp}^2 + B_{\parallel}^2}}\right)^2 \sigma_{B_{\parallel}}^2 + \left(\frac{2B_{\perp}}{2\sqrt{B_{\perp}^2 + B_{\parallel}^2}}\right)^2 \sigma_{B_{\perp}}^2}}{B} = 34,13\%.$$

## 4 Вывод

Разные способы измерения магнитных моментов дают сильно различающиеся значение, не лежащие в пределах  $3\sigma$  друг от друга.

Первый способ (по двум шарикам) даёт результат  $\mathbf{m} = 42,31 \pm 4,44 \text{ эрг/Гс}$ , что хорошо согласуется с теоретическим значением (измерянным при помощи магнетометра)  $\mathbf{m}_{\text{теор}} = 38,68 \text{ эрг/Гс}$ , т.е. лежит в пределах  $\sigma$ .

Второй же способ (силовой) даёт значение  $\mathbf{m} = 71,50 \pm 2,59 \text{ эрг/Гс}$ , что не попадает даже в  $3\sigma$ , что говорит и неприменимости данного метода. Это объясняется следующим: при выполнении данного способа определения магнитного момента определить при какой массе происходит отрыв было крайне сложно, так же важным фактором являлось то, что эта масса зависит от "расположения шариков т.е. если их перефасовать, то значения будут совершенно другими. Поэтому данная величина зависила от расположения и для получения более точного значения необходимо было производить многократные измерения и искать "максимум" массы, т.е. такое расположение шариков, при котором бы их магнитное взаимодействие было максимальным.

Полученно значение для  $\beta = 63,59 \pm 6,80^{\circ}$ . Теоретического ( $55,56^{\circ}$ ). Получили относительное расхождение от теоретического:

$$\frac{|\beta_{\text{эксп}} - \beta_{\text{теор}}|}{\beta_{\text{теор}}} = 0,14$$

Полученное экспериментальное значение лежит в пределах  $2\sigma$ , что говорит о некоторой степени применимости данного метода.

Полученное экспериментальное значение магнитного поля Земли в Долгопрудном  $B = 0,041 \pm 0,014$ , теоретическое значение  $B_{\text{теор}} = 0,05$  мТс . Видно, что полученное значение попадает в теоретическое в пределах погрешности, однако данный способ определений не эффективен, так как относительная погрешность 34%.

## 5 Литература

1. **Лабораторный практикум по общей физике:** Учебное пособие. В трех томах. Т. 2. Электричество и магнетизм /Гладун А.Д., Александров Д.А., Берулёва Н.С. и др.; Под ред. А.Д. Гладуна - М.: МФТИ, 2007. - 280 с.
2. **Данные о магнитном поле Земли:** [www.rusmagnet.ru](http://www.rusmagnet.ru)