

Московский физико-технический институт  
(государственный университет)

Лабораторная работа по электричеству

**Спектры электрических сигналов (компьютер) [3.6.1]**

Талашкевич Даниил Александрович  
Группа Б01-009

Долгопрудный  
2021

# Содержание

<b>1</b>	<b>Аннотация</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Теоретические сведения</b>	<b>1</b>
2.1	Спектральный анализ электрических сигналов . . . . .	1
2.2	Периодическая последовательность прямоугольных импульсов . . . . .	3
2.3	Периодическая последовательность цугов . . . . .	4
2.4	Амплитудно-модулированные колебания. . . . .	5
<b>3</b>	<b>Метод, результаты и обработка</b>	<b>6</b>
3.1	Исследование спектра периодических последовательностей прямоугольных импульсов . . . . .	6
3.2	Исследование спектра периодической последовательности цугов . . . . .	7
3.3	Исследование спектра амплитудно модулированного сигнала	9
<b>4</b>	<b>Вывод</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Литература</b>	<b>11</b>

## 1 Аннотация

В работе изучается спектральный состав периодических электрических сигналов различной формы: последовательности прямоугольных импульсов, последовательности цугов и амплитудно модулированных гармонических колебаний. Спектры этих сигналов наблюдаются с помощью промышленного анализатора спектра и сравниваются с рассчитанными теоретически.

## 2 Теоретические сведения

Сколь угодно сложный электрический сигнал  $V(t)$  может быть разложен на более простые сигналы. В радиотехнике широко используется разложение сигнала  $V(t)$  на совокупность гармонических сигналов различных частот  $\omega$ . Функция  $F(\omega)$ , описывающая зависимость амплитуд отдельных гармоник от частоты, называется амплитудной спектральной характеристикой сигнала  $V(t)$ . Представление сложного периодического сигнала в виде суммы дискретных гармонических сигналов в математике называется разложением в ряд Фурье.

Зная спектральный состав  $F(\omega)$  периодической последовательности некоторого импульса  $V(t)$ , мы можем осуществить обратное преобразование Фурье: сложив отдельные гармоники со своими амплитудами и фазами, получить необходимую последовательность импульсов. Степень совпадения полученного сигнала с  $V(t)$  определяется количеством синтезированных гармоник: чем их больше, тем лучше совпадение. Рассмотрим конкретные примеры периодических функции, которые будут предметом исследования в нашей работе.

Рассмотрим конкретные примеры периодических функций, которые будут предметом исследования в нашей работе.

### 2.1 Спектральный анализ электрических сигналов

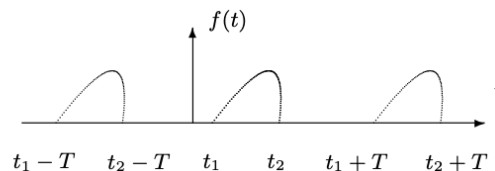


Рис. П.1. График периодической функции с периодом повторения  $T$

Пусть заданная функция  $f(t)$  периодически повторяется с частотой  $\Omega_1 = 2\pi/T$ , где  $T$  – период повторения (рис. П.1). Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)]$$

или

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n)$$

Здесь  $a_0/2 = A_0/2$  – постоянная составляющая (среднее значение) функции  $f(t)$ ;  $a_n$  и  $b_n$  – амплитуды косинусных и синусных членов разложения. Они определяются выражениями

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt$$

Точку начала интегрирования  $t_1$  можно выбрать произвольно. В тех случаях, когда сигнал четен относительно  $t = 0$ , в тригонометрической записи остаются только косинусные члены, т.к. все коэффициенты  $b_n$  обращаются в нуль. Для нечетной относительно  $t = 0$  функции, наоборот, ряд состоит только из синусных членов.

Амплитуда  $A_n$  и фаза  $\psi_n$  -й гармоники выражаются через  $a_n$  и  $b_n$  следующим образом:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \psi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$$

Как мы видим, спектр любой периодической функции состоит из набора гармонических колебаний с дискретными частотами:  $\Omega_1, 2\Omega_1, 3\Omega_1 \dots$  и постоянной составляющей, которую можно рассматривать как колебание с нулевой частотой ( $0 \cdot \Omega_1$ ).

Представим выражение в комплексной форме. Для этого заменим косинусы экспонентами в соответствии с формулой

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

Подстановка даёт

$$f(t) = \frac{1}{2} \left( A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-i\psi_n} e^{in\Omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\psi_n} e^{-in\Omega_1 t} \right)$$

Введём комплексные амплитуды  $\tilde{A}_n$  и  $\tilde{A}_{-n}$

$$\tilde{A}_n = A_n e^{-i\psi_n}; \quad \tilde{A}_{-n} = A_n e^{i\psi_n}; \quad \tilde{A}_0 = A_0$$

Разложение  $f(t)$  приобретает вид

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n e^{in\Omega_1 t}$$

Как мы видим, введение отрицательных частот (типа  $n\Omega_1$ ) позволяет записать разложение Фурье особенно простым образом.

Для расчёта комплексных амплитуд  $A_n$  умножим левую и правую части на  $e^{-ik\Omega_1 t}$  и проинтегрируем полученное равенство по времени на отрезке, равном одному периоду, например, от  $t_1 = 0$  до  $t_2 = 2\pi/\Omega_1$ . В правой части обратятся в нуль все члены, кроме одного, соответствующего  $n = k$ . Этот член даёт  $A_k T/2$ . Имеем поэтому

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\Omega_1 t} dt$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

## 2.2 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

С амплитудой  $V_0$ , длительностью  $\tau$ , частотой повторения  $f_{\text{повт}} = 1/T$ , где  $T$  — период повторения импульсов.

Среднее значение

$$\langle V \rangle = \frac{a_0}{2} = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 dt = V_0 \frac{\tau}{T}$$

Амплитуды косинусных составляющих равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}$$

Поскольку наша функция чётная, все амплитуды синусоидальных гармоник  $b_n = 0$ . Спектр  $F(\nu)$  последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. П.3. Амплитуды гармоник  $A_n$  меняются по Закону  $(\sin x)/x$ . На рис. П.3 изображён спектр для случая, когда  $T$  кратно  $\tau$ . Назовём шириной спектра  $\Delta\omega$  (или  $\Delta\nu$ ) расстояние от главного максимума ( $\nu = 0$ ) до первого нуля, возникающего, как нетрудно убедиться, при  $\Omega_1 = 2\pi/\tau$ . При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \quad \text{или} \quad \Delta\nu\Delta t \simeq 1$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов  $\Delta\nu$  и  $\Delta t$  является частным случаем соотношения неопределенности в квантовой механике. Несовместимость острой локализации волнового процесса во времени с узким спектром частот - явление широко известное в радиотехнике. Ширина селективной настройки  $\Delta\nu$  радиоприёмника ограничивает приём радиосигналов длительностью  $t < 1/\Delta\nu$

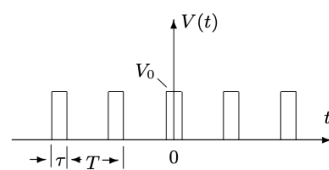


Рис. П.2. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

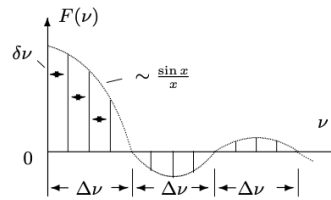


Рис. П.3. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

## 2.3 Периодическая последовательность цугов

Гармонического колебания  $V_0 \cos(\omega_0 t)$  с длительностью цуга  $\tau$  и периодом повторения  $T$  (рис. П.4)

Функция  $f(t)$  снова является чётной относительно  $t = 0$ . Амплитуда  $n$ -й гармоники равна

$$A_n = a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt = \\ = V_0 \frac{\tau}{T} \left( \frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} \right)$$

Такое спектральное распределение  $F(\omega)$  для случая, когда  $\frac{T}{\tau}$  равно целому числу, представлено на рис. П.5. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и спектр цугов (см. рис. П.3 и П.5), мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину  $\omega_0$ .

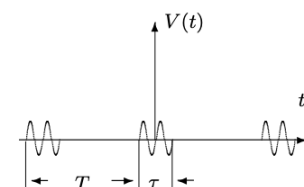


Рис. П.4. Периодическая последовательность цугов

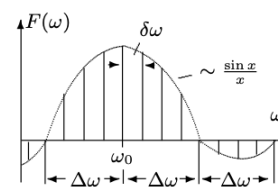


Рис. П.5. Спектр периодической последовательности цугов

## 2.4 Амплитудно-модулированные колебания.

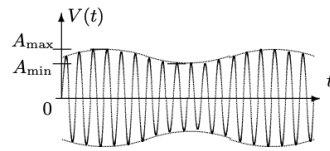


Рис. П.6. Гармонические колебания, модулированные по амплитуде

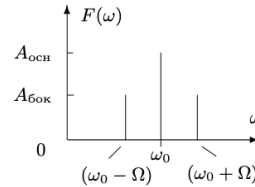


Рис. П.7. Спектр колебаний, модулированных по амплитуде

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты  $\omega_0$ , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой  $\Omega$  ( $\Omega \ll \omega_0$ ) (рис. П.6):

$$f(t) = A_0[1 + m \cos(\Omega t)] \cos(\omega_0 t)$$

Коэффициент  $m$  называют глубиной модуляции. При  $m < 1$  амплитуда колебаний меняется от минимальной  $A_{\min} = A_0(1 - m)$  до максимальной  $A_{\max} = A_0(1 + m)$ . Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно-модулированных колебаний:

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 \cos(\omega_0 t) + A_0 m \cos(\Omega t) \cos(\omega_0 t) = \\ &= A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega) t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega) t \end{aligned}$$

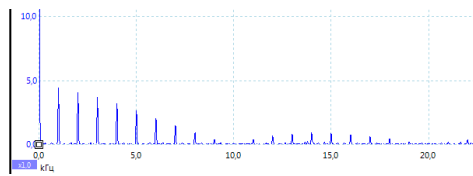
Спектр  $F(\omega)$  таких колебаний содержит три составляющих (рис. П. 7) Основная компонента представляет собой исходное немодулированное колебание с несущей частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $A_{\text{ос}} = A_0$  — первое слагаемое в правой части; боковые компоненты спектра соответствуют гармоническим колебаниям с частотами  $(\omega_0 + \Omega)$  и  $(\omega_0 - \Omega)$  — Второе и третье слагаемые. Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют  $m/2$  от амплитуды немодулированного колебания:  $A_{\text{бок}} = A_0 m/2$

### 3 Метод, результаты и обработка

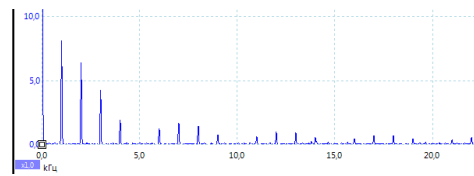
#### 3.1 Исследование спектра периодических последовательностей прямоугольных импульсов

Устанавливаем прямоугольные колебания с  $\nu_{\text{повт}} = 1$  кГц (период  $T = 1$  мс) и длительностью импульса  $\tau = 100$  мкс.

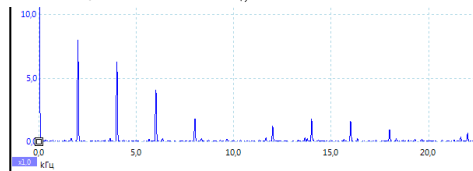
Получаем на экране спектр сигнала и, изменяя либо  $\tau$ , либо  $\nu_{\text{повт}}$ , наблюдаем, как изменяется спектр.



$\nu_{\text{повт}} = 1$  кГц,  $\tau = 100$  мкс



$\nu_{\text{повт}} = 1$  кГц,  $\tau = 200$  мкс



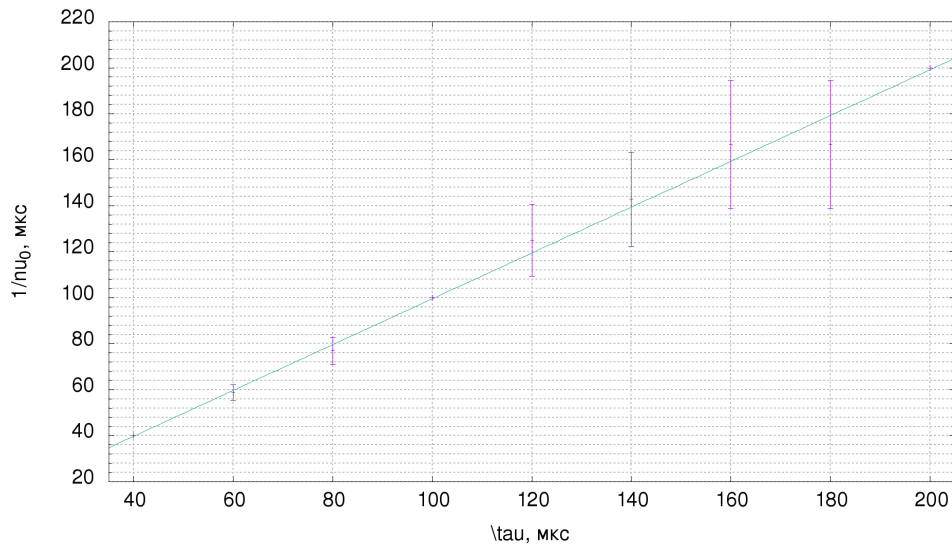
$\nu_{\text{повт}} = 2$  кГц,  $\tau = 100$  мкс

Из данных видно, что, при увеличении  $\tau$ , уменьшается  $\Delta\nu$ , а при увеличении  $\nu_{\text{повт}}$ , увеличивается расстояние между пиками.

Измерим зависимость  $\Delta\nu$  от  $\tau$ :

$\tau$ , мкс	$\nu_0$ , кГц	$\Delta\nu_0$ , кГц	$1/\nu_0$ , мкс	$\Delta 1/\nu_0$ , мкс
40.0	30	30	40.0	0
60.0	17	17	59	3
80.0	13	13	77	6
100.0	10	10	100.0	0
120.0	8	8	125	16
140.0	7	7	140	20
160.0	6	6	170	30
180.0	6	6	170	30
200.0	5	5	200.0	0

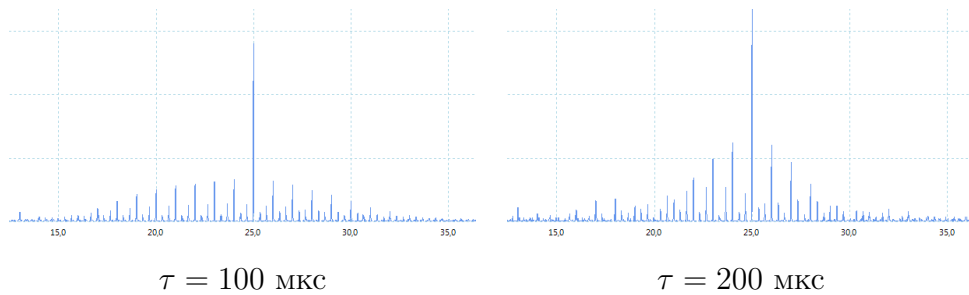




Из графика  $\Delta\nu \cdot \tau = 1.004 \pm 0.014$ , что подтверждает соотношение неопределенностей.

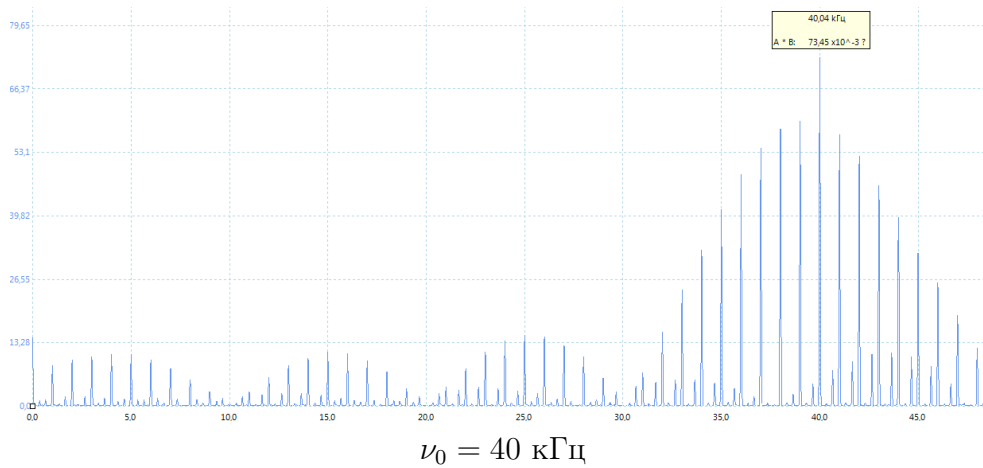
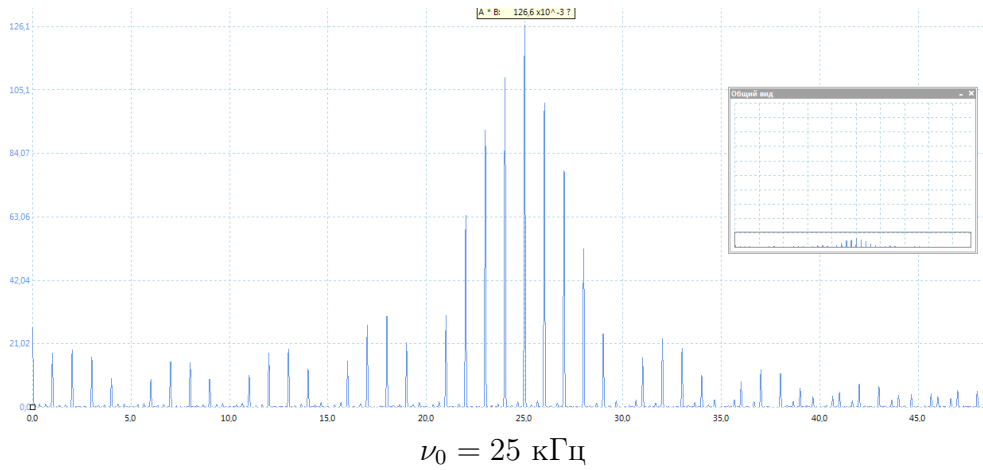
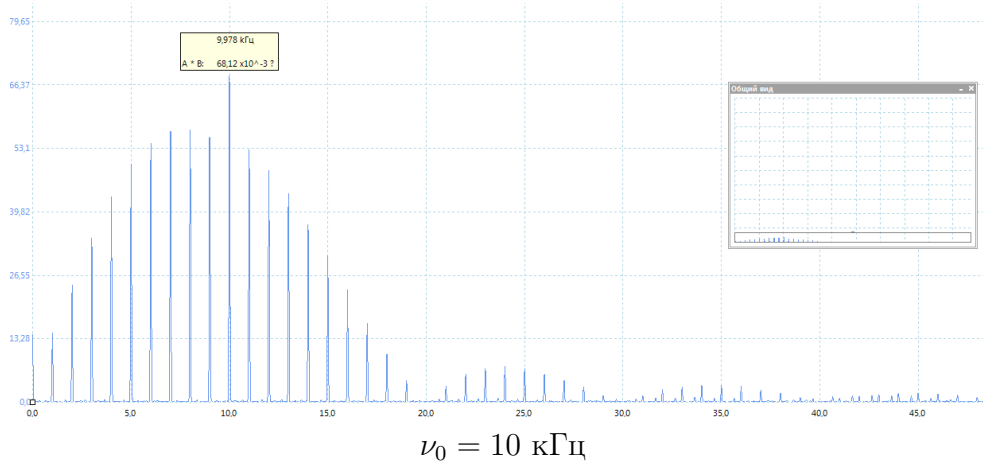
### 3.2 Исследование спектра периодической последовательности цугов

Посмотрим на последовательность цугов с характерными параметрами:  $\nu_0 = 50$  кГц частота повторения импульсов  $f_{\text{повт}} = 1$  кГц и исследуем спектр этого сигнала для разных длительностей импульса:



Из данных видно, что при изменении  $\tau$  значение  $\Delta\omega$  обратнопропорционально меняется.

Рассмотрим поведение спектрограммы при фиксированном значении  $\tau$  и меняющемся значении  $\nu_0$ :



Из данных видно, что при изменении  $\nu_0$  картина смещается без изменения расстояния между спектральными компонентами.

Рассмотрим то, как это расстояние меняется при изменении  $f_{\text{повт}}$ :

$f_{\text{повт}}$	$\nu$ , кГц
0.5	0.5
1.0	1.0
2.0	2.0
4.0	4.0
5.0	5.0

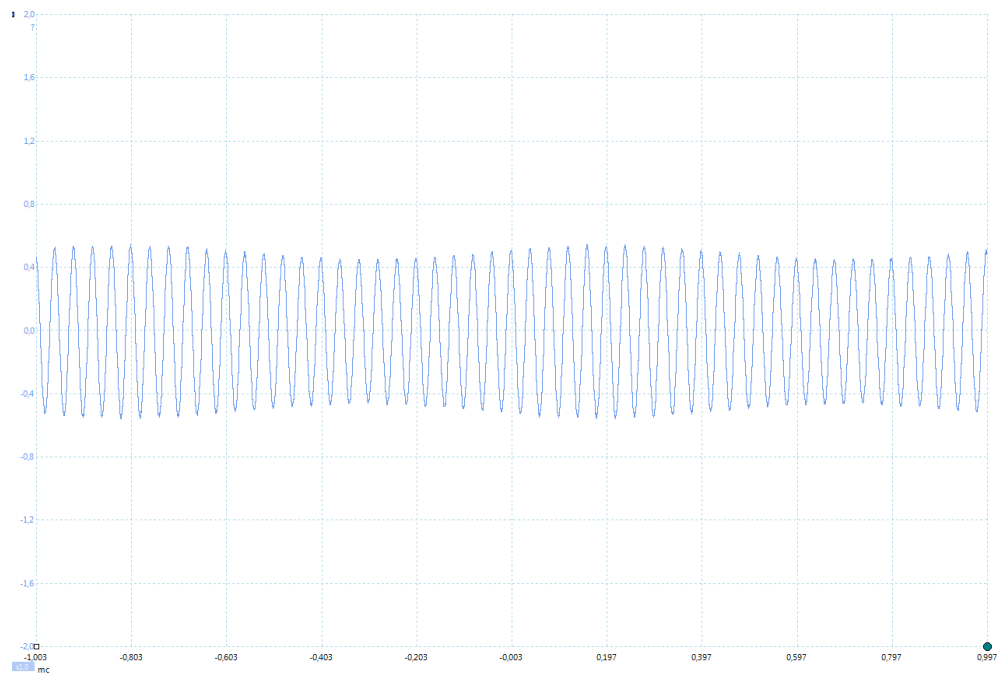
Погрешность результатов определяется погрешностью генератора – 0.5 Гц.

$$\frac{f_{\text{повт}}}{\nu, \text{кГц}} = 1 \pm 0.1\%,$$

что согласуется с теорией.

### 3.3 Исследование спектра амплитудно модулированного сигнала

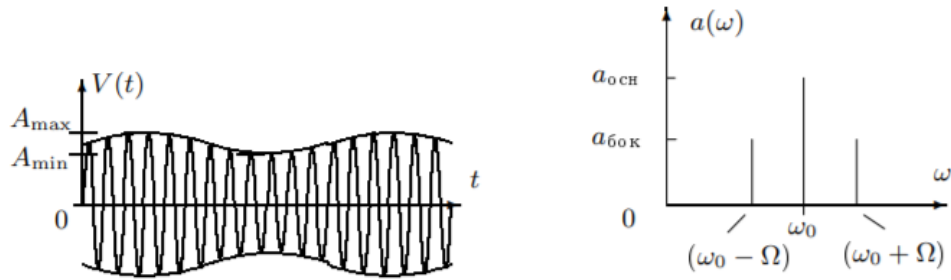
Рассмотрим амплитудно промодулированную синусоиду с параметрами  $\nu_0 = 25 \text{кГц}$ ,  $\nu_{\text{мод}} = 1 \text{кГц}$ :



$$\nu_0 = 40 \text{ кГц}$$

Посмотрим на спектрограмму этого сигнала:

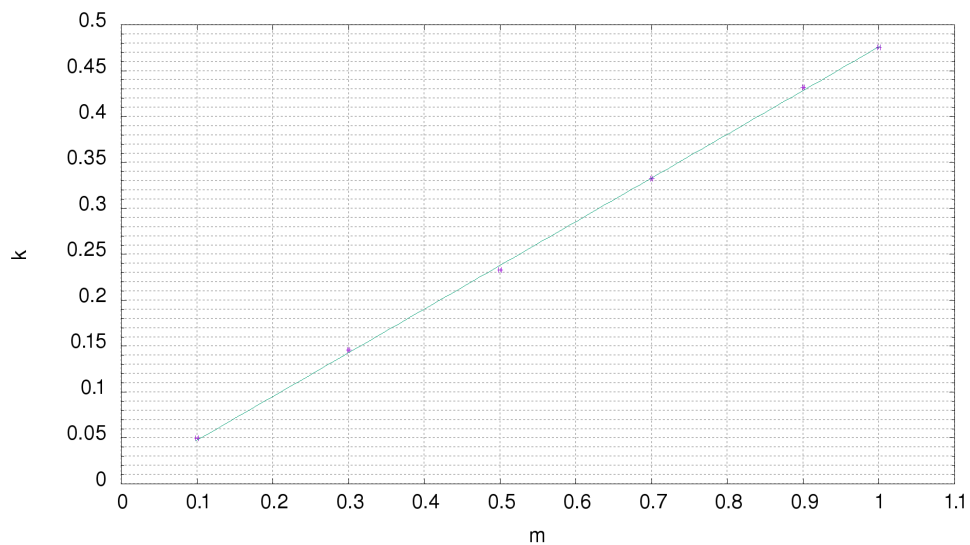
<тут должен быть скрин со спектрограммой, но у меня его нет>



Посмотрим зависимость отношения амплитуд  $k = A_{\text{бок}}/A_{\text{оч}}$  у боковых и основной частоты от параметра  $m = (A_{\text{max}} - A_{\text{min}})/(A_{\text{max}} + A_{\text{min}})$ .

$A_{\text{max}} - A_{\text{min}}, \text{ В}$	$A_{\text{бок}}, \text{ В}$	$m$	$k$
0.2	0.0160	0.1	0.0497
0.6	0.0470	0.3	0.1460
1.0	0.0750	0.5	0.2329
1.4	0.1070	0.7	0.3323
1.8	0.1390	0.9	0.4317
2.0	0.1530	1.0	0.4752

$$A_{\text{оч}} = (322 \pm 0.5) \text{ мВ}, \Delta A_{\text{бок}} = 0.0005 \text{ В}, \Delta k = 0.0016$$



Из графика

$$\frac{k}{m} = 0.476 \pm 0.015,$$

что сходится с теоретическим значением 0.5.

## 4 Вывод

В данной работе мы изучили понятие спектра и ознакомились с принципами спектрального анализа, а также исследовали спектральный состав периодических электрических сигналов.

Мы посмотрели на прямоугольные импульсы, пути гармонических колебаний, а также гармонические сигналы, модулированные по амплитуде. Кроме того, был экспериментально проверен частный случай выполнения соотношения неопределённости.

XX

## 5 Литература

1. **Лабораторный практикум по общей физике:** учеб. пособие. В трёх томах. Т. 2. Электричество и магнетизм / Никулин М. Г., Попов П. В., Нозик А. А., и др.; под ред. А. В. Максимычева, М. Г. Никулина. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : МФТИ, 2019. — 370 с. ISBN 978-5-7417-0709-8 (Т. 2. Электричество и магнетизм)