

Московский физико-технический институт  
(государственный университет)

Лабораторная работа по электричеству

**Спектры электрических сигналов (компьютер) [3.6.1]**

Талашкевич Даниил Александрович  
Группа Б01-009

Долгопрудный  
2021

# Содержание

<b>1</b>	<b>Аннотация</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Теоретические сведения</b>	<b>1</b>
2.1	Спектральный анализ электрических сигналов . . . . .	1
2.2	Периодическая последовательность прямоугольных импульсов . . . . .	3
2.3	Периодическая последовательность цугов . . . . .	4
2.4	Амплитудно-модулированные колебания. . . . .	5
<b>3</b>	<b>Обработка данных</b>	<b>5</b>
3.1	Периодические прямоугольные импульсы . . . . .	5
3.2	Периодическая последовательность цугов . . . . .	7
3.3	Амплитудно-модулированные колебания . . . . .	11
3.4	Частотная модуляция . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Заключение</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Литература</b>	<b>15</b>

## 1 Аннотация

**Цель работы:** изучить спектральный состав периодических электрических сигналов.

**В работе используются:** анализатор спектра (ПК), генератор прямоугольных импульсов и сигналов специальной формы, осциллограф.

В работе изучается спектральный состав периодических электрических сигналов различной формы: последовательности прямоугольных импульсов, последовательности цугов и амплитудно модулированных гармонических колебаний. Спектры этих сигналов наблюдаются с помощью промышленного анализатора спектра и сравниваются с рассчитанными теоретически.

## 2 Теоретические сведения

Сколько угодно сложный электрический сигнал  $V(t)$  может быть разложен на более простые сигналы. В радиотехнике широко используется разложение сигнала  $V(t)$  на совокупность гармонических сигналов различных частот  $\omega$ . Функция  $F(\omega)$ , описывающая зависимость амплитуд отдельных гармоник от частоты, называется амплитудной спектральной характеристикой сигнала  $V(t)$ . Представление сложного периодического сигнала в виде суммы дискретных гармонических сигналов в математике называется разложением в ряд Фурье.

Зная спектральный состав  $F(\omega)$  периодической последовательности некоторого импульса  $V(t)$ , мы можем осуществить обратное преобразование Фурье: сложив отдельные гармоники со своими амплитудами и фазами, получить необходимую последовательность импульсов. Степень совпадения полученного сигнала с  $V(t)$  определяется количеством синтезированных гармоник: чем их больше, тем лучше совпадение. Рассмотрим конкретные примеры периодических функции, которые будут предметом исследования в нашей работе.

Рассмотрим конкретные примеры периодических функций, которые будут предметом исследования в нашей работе.

## 2.1 Спектральный анализ электрических сигналов

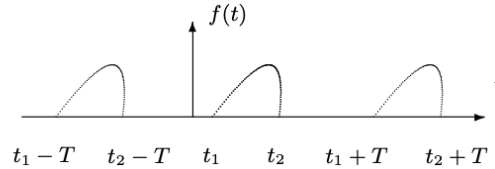


Рис. П.1. График периодической функции с периодом повторения  $T$

Пусть заданная функция  $f(t)$  периодически повторяется с частотой  $\Omega_1 = 2\pi/T$ , где  $T$  – период повторения (рис. П.1). Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)]$$

или

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n)$$

Здесь  $a_0/2 = A_0/2$  – постоянная составляющая (среднее значение) функции  $f(t)$ ;  $a_n$  и  $b_n$  – амплитуды косинусных и синусных членов разложения. Они определяются выражениями

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt$$

Точку начала интегрирования  $t_1$  можно выбрать произвольно. В тех случаях, когда сигнал четен относительно  $t = 0$ , в тригонометрической записи остаются только косинусные члены, т.к. все коэффициенты  $b_n$  обращаются в нуль. Для нечетной относительно  $t = 0$  функции, наоборот, ряд состоит только из синусных членов.

Амплитуда  $A_n$  и фаза  $\psi_n$   $n$ -й гармоники выражаются через  $a_n$  и  $b_n$  следующим образом:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \psi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$$

Как мы видим, спектр любой периодической функции состоит из набора гармонических колебаний с дискретными частотами:  $\Omega_1, 2\Omega_1, 3\Omega_1 \dots$  и постоянной составляющей, которую можно рассматривать как колебание с нулевой частотой  $(0 \cdot \Omega_1)$ .

Представим выражение в комплексной форме. Для этого заменим косинусы экспонентами в соответствии с формулой

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

Подстановка даёт

$$f(t) = \frac{1}{2} \left( A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-i\psi_n} e^{in\Omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\psi_n} e^{-in\Omega_1 t} \right)$$

Введём комплексные амплитуды  $\tilde{A}_n$  и  $\tilde{A}_{-n}$

$$\tilde{A}_n = A_n e^{-i\psi_n}; \quad \tilde{A}_{-n} = A_n e^{i\psi_n}; \quad \tilde{A}_0 = A_0$$

Разложение  $f(t)$  приобретает вид

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n e^{in\Omega_1 t}$$

Как мы видим, введение отрицательных частот (типа  $n\Omega_1$ ) позволяет записать разложение Фурье особенно простым образом.

Для расчёта комплексных амплитуд  $A_n$  умножим левую и правую части на  $e^{-ik\Omega_1 t}$  и проинтегрируем полученное равенство по времени на отрезке, равном одному периоду, например, от  $t_1 = 0$  до  $t_2 = 2\pi/\Omega_1$ . В правой части обратятся в нуль все члены, кроме одного, соответствующего  $n = k$ . Этот член даёт  $A_k T/2$ . Имеем поэтому

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\Omega_1 t} dt$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

## 2.2 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

С амплитудой  $V_0$ , длительностью  $\tau$ , частотой повторения  $f_{\text{повт}} = 1/T$ , где  $T$  — период повторения импульсов.

Среднее значение

$$\langle V \rangle = \frac{a_0}{2} = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 dt = V_0 \frac{\tau}{T}$$

Амплитуды косинусных составляющих равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}$$

Поскольку наша функция чётная, все амплитуды синусоидальных гармоник  $b_n = 0$ . Спектр  $F(\nu)$  последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. П.3. Амплитуды гармоник  $A_n$  меняются по Закону  $(\sin x)/x$ . На рис. П.3 изображён спектр для случая, когда  $T$  кратно  $\tau$ . Назовём шириной спектра  $\Delta\omega$  (или  $\Delta\nu$ ) расстояние от главного максимума ( $\nu = 0$ ) до первого нуля, возникающего, как нетрудно убедиться, при  $\Omega_1 = 2\pi/\tau$ . При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \quad \text{или} \quad \Delta\nu\Delta t \simeq 1$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов  $\Delta\nu$  и  $\Delta t$  является частным случаем соотношения неопределённости в квантовой механике. Несовместимость острой локализации волнового процесса во времени с узким спектром частот - явление широко известное в радиотехнике. Ширина селективной настройки  $\Delta\nu$  радиоприёмника ограничивает приём радиосигналов длительностью  $t < 1/\Delta\nu$ .

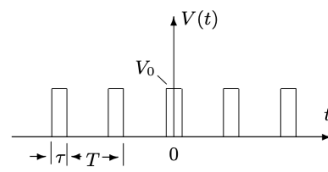


Рис. П.2. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

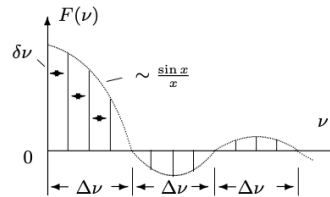


Рис. П.3. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

## 2.3 Периодическая последовательность цугов

Гармонического колебания  $V_0 \cos(\omega_0 t)$  с длительностью цуга  $\tau$  и периодом повторения  $T$  (рис. П.4)

Функция  $f(t)$  снова является чётной относительно  $t = 0$ . Амплитуда  $n$ -й гармоники равна

$$\begin{aligned} A_n = a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt = \\ &= V_0 \frac{\tau}{T} \left( \frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right) \end{aligned}$$

Такое спектральное распределение  $F(\omega)$  для случая, когда  $\frac{T}{\tau}$  равно целому числу, представлено на рис. П.5. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и спектр цугов (см. рис. П.3 и П.5),

мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину  $\omega_0$ .

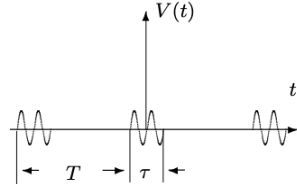


Рис. П.4. Периодическая последовательность пугов

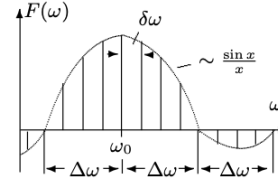


Рис. П.5. Спектр периодической последовательности пугов

## 2.4 Амплитудно-модулированные колебания.

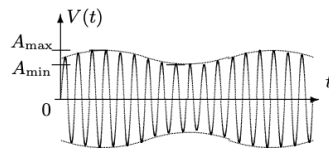


Рис. П.6. Гармонические колебания, модулированные по амплитуде

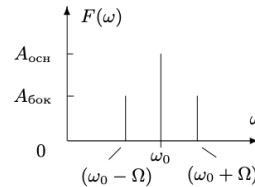


Рис. П.7. Спектр колебаний, модулированных по амплитуде

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты  $\omega_0$ , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой  $\Omega$  ( $\Omega \ll \omega_0$ ) (рис. П.6):

$$f(t) = A_0[1 + m \cos(\Omega t)] \cos(\omega t)$$

Коэффициент  $m$  называют глубиной модуляции. При  $m < 1$  амплитуда колебаний меняется от минимальной  $A_{\min} = A_0(1 - m)$  до максимальной  $A_{\max} = A_0(1 + m)$ . Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно-модулированных колебаний:

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 \cos(\omega_0 t) + A_0 m \cos(\Omega t) \cos(\omega_0 t) = \\ &= A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega) t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega) t \end{aligned}$$

$\tau$ , мкс	40	60	80	100	120	140	160	180	200
$\Delta\nu$ , кГц	25	16,5	12,5	10	8,5	7	6,5	5,5	5
$\frac{1}{\tau}$ , кГц	25	16,66	12,5	10	8,33	7,14	6,25	5,56	5

Таблица 1: Зависимость ширины спектра от времени длительности импульса

Спектр  $F(\omega)$  таких колебаний содержит три составляющих (рис. П. 7) Основная компонента представляет собой исходное немодулированное колебание с несущей частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $A_{oc} = A_0$  — первое слагаемое в правой части; боковые компоненты спектра соответствуют гармоническим колебаниям с частотами  $(\omega_0 + \Omega)$  и  $(\omega_0 - \Omega)$  — Второе и третье слагаемые. Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют  $m/2$  от амплитуды немодулированного колебания:  $A_{бок} = A_0 m/2$

### 3 Обработка данных

#### 3.1 Периодические прямоугольные импульсы

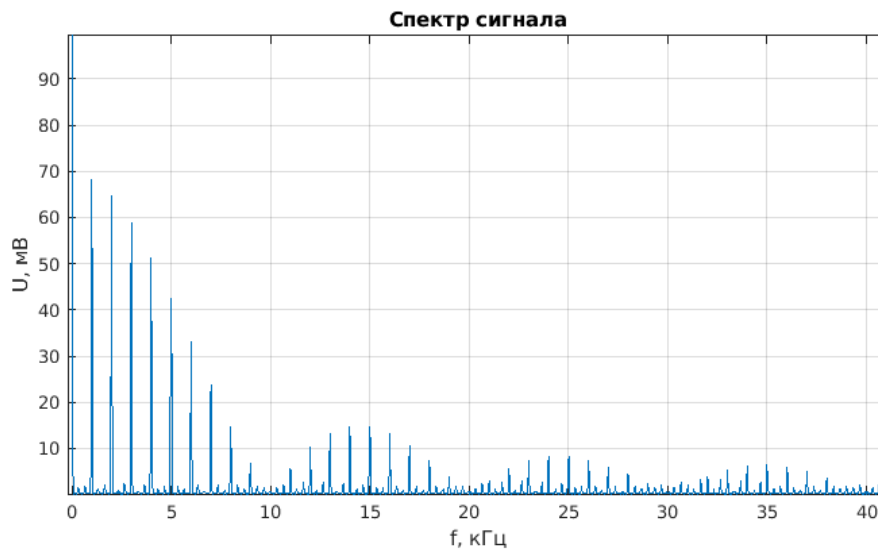
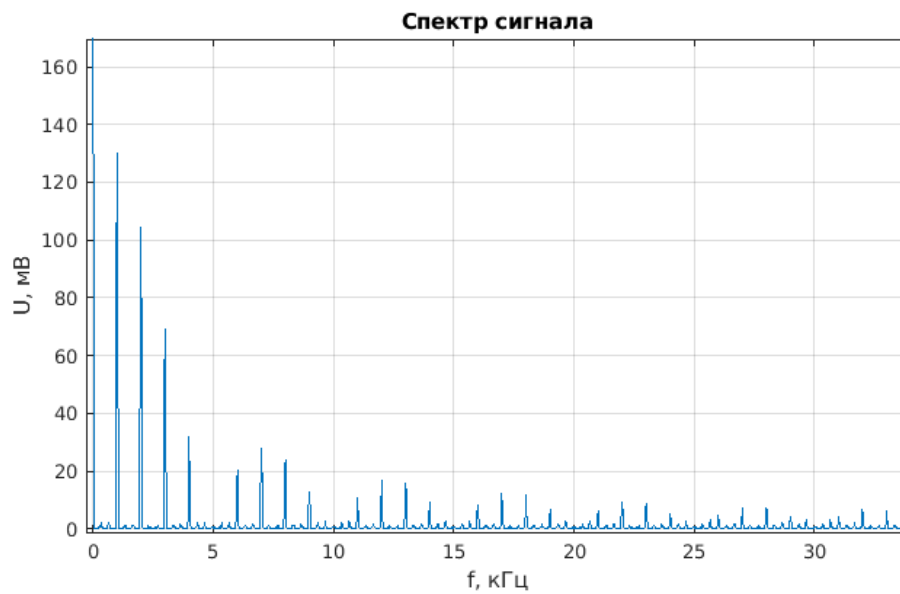
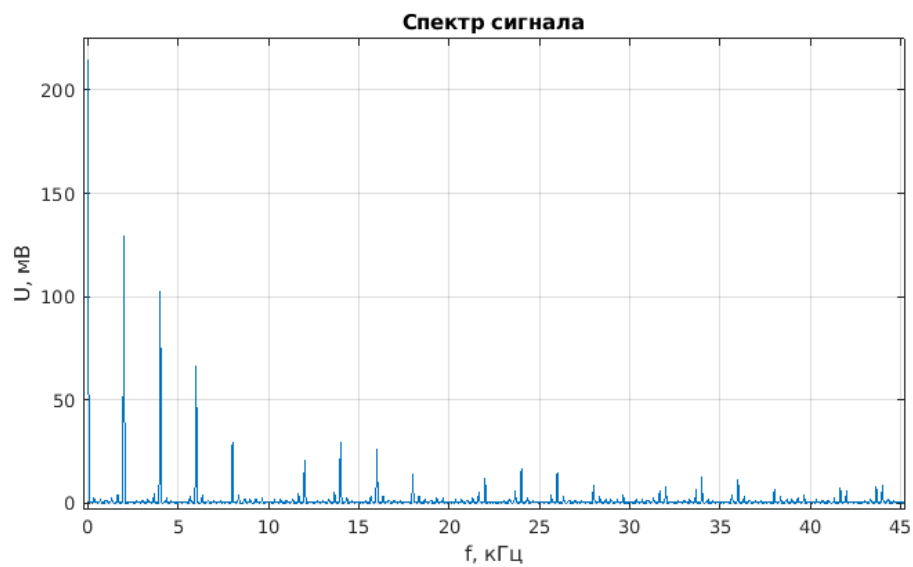


Рис. 1: Спектр при  $f_{повт} = 1$  кГц,  $\tau = 100$  мкс

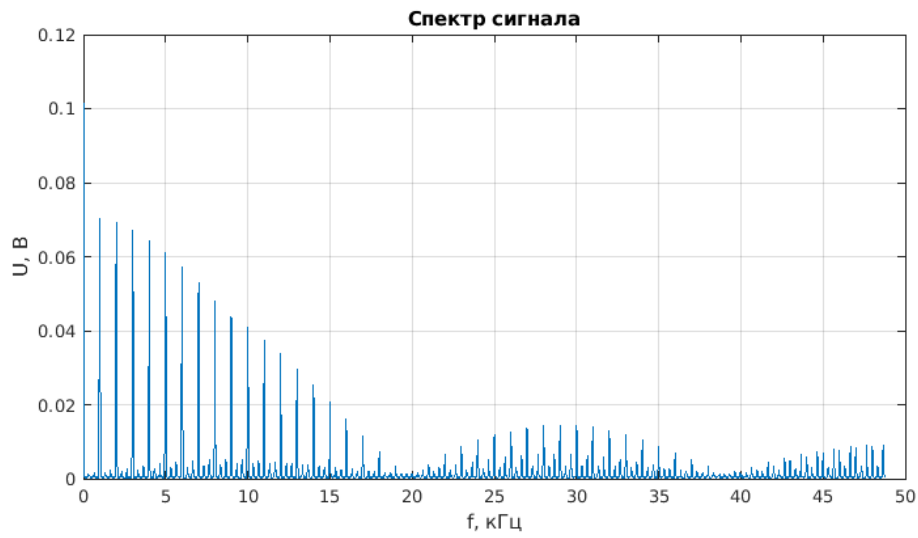
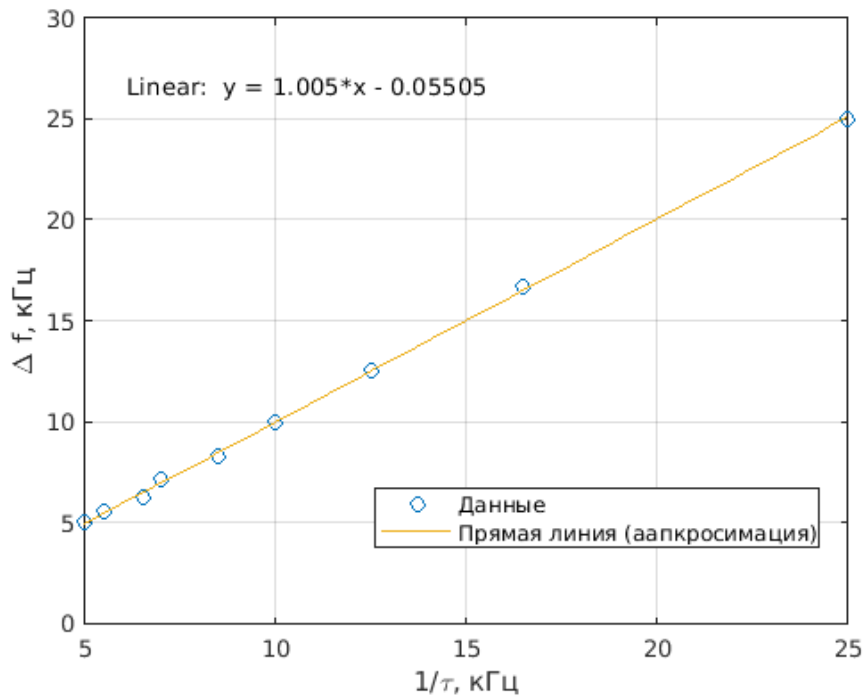
При фиксированной частоте  $f_{повт} = 1$  кГц будем менять  $\tau$ , при этом будет меняться ширина спектра. Зафиксируем наблюдения в таблице.

Построим график зависимости  $\Delta\nu(\frac{1}{\tau})$ :



Рис. 2: Спектр при  $f_{\text{повт}} = 1$  кГц,  $\tau = 200$  мксРис. 3: Спектр при  $f_{\text{повт}} = 2$  кГц,  $\tau = 100$  мкс

Из графика следует выполнение соотношения неопределённости для прямоугольных импульсов:  $\Delta\nu \cdot \tau \approx 1$ .

Рис. 4: Спектр при  $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 50 \text{ мкс}$ Рис. 5: Зависимость  $\Delta\nu(\frac{1}{\tau})$

$\delta\nu$ , кГц	0,5	1	2	4	5
$f_{\text{повт}}$ , кГц	0,5	1	2	4	5

Таблица 2: Зависимость расстояния между компонентами спектра от частоты повторения цугов

### 3.2 Периодическая последовательность цугов

Установим несущую частоту цугов  $\nu_0 = 25$  кГц, частота запуска цугов  $f_{\text{повт}} = 1$  кГц с длительностью импульса  $\tau = 100$  мкс.

Проанализируем, как меняется спектр при изменении длительности импульса цуга.

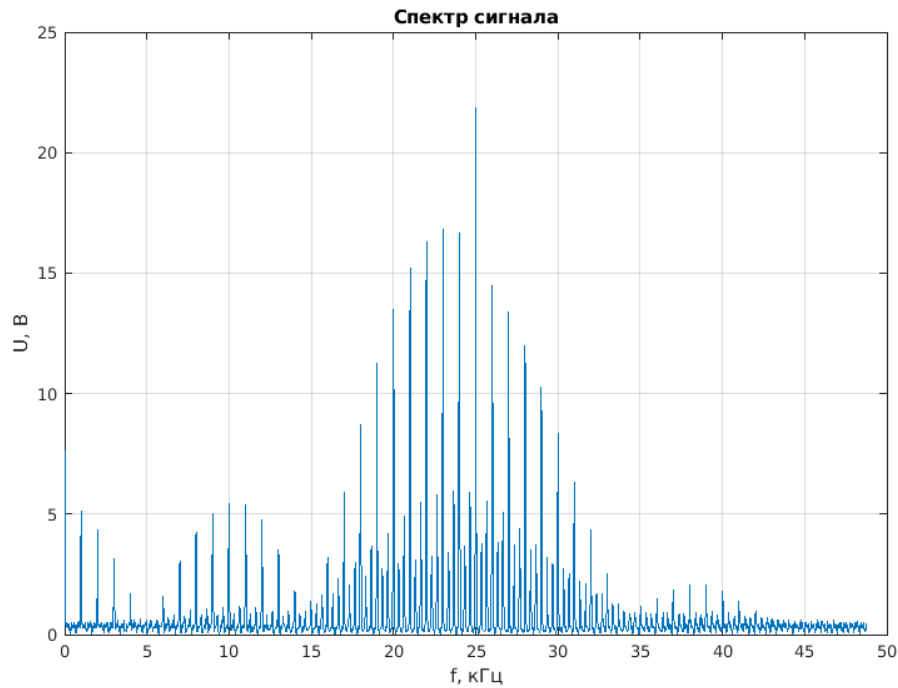
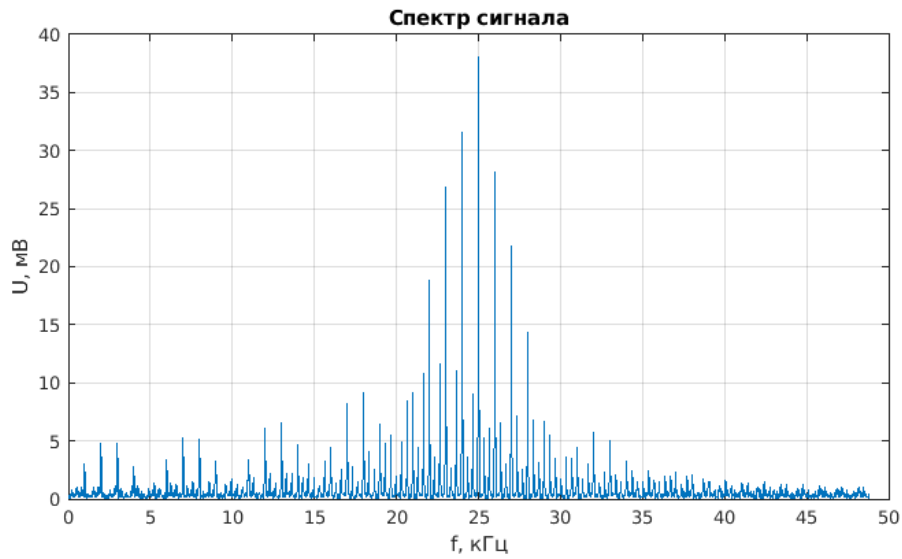
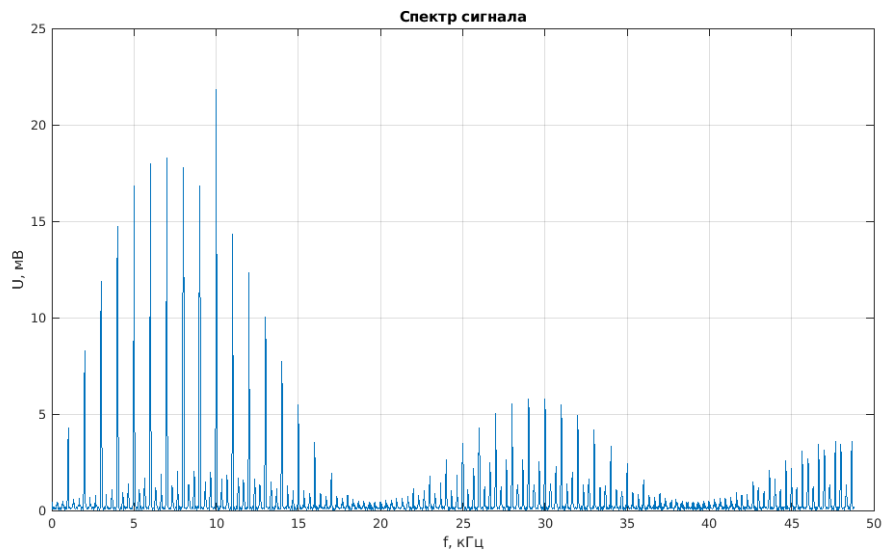


Рис. 6: Спектр при  $\nu_0 = 25$  кГц,  $\tau = 100$  мкс

Теперь проанализируем, как меняется спектр при изменении несущей частоты.

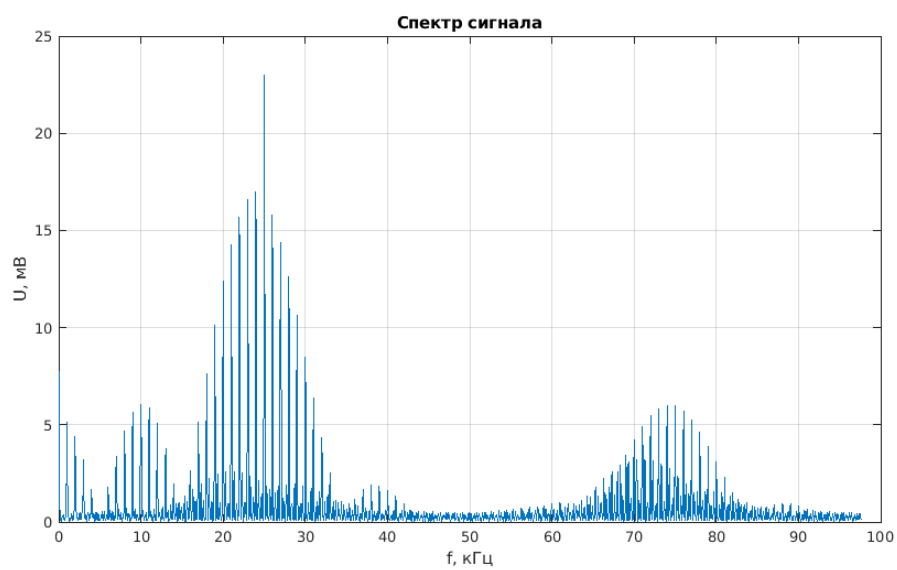
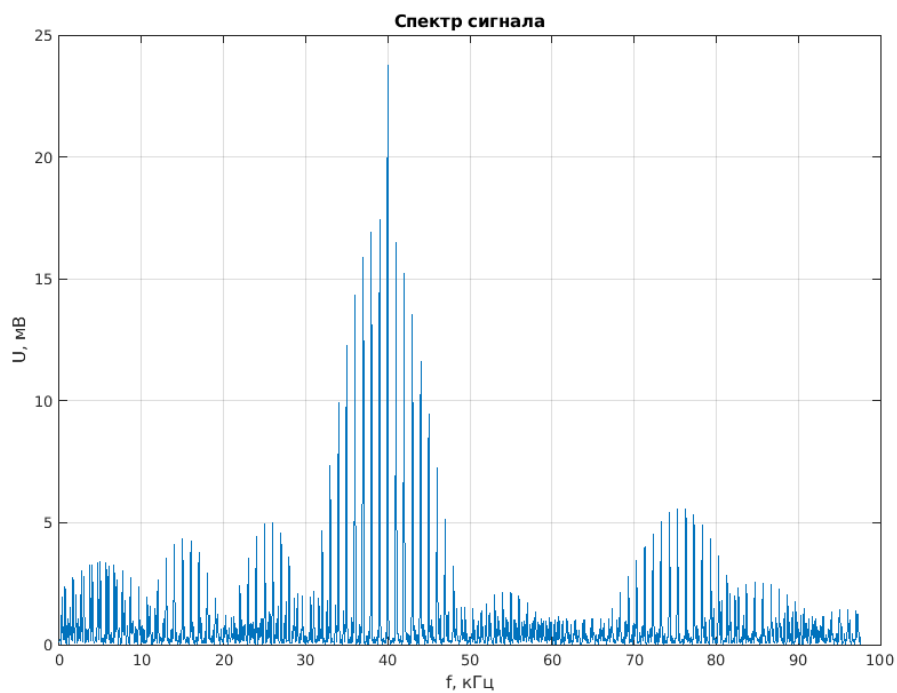
Установим несущую частоту  $\nu_0 = 30$  кГц при  $\tau = 100$  Гц, варьируя частоту запуска цугов. Снимем зависимость расстояния между соседними спектральными компонентами от частоты повторения цугов:

Данные по расстоянию между компонентами спектра получены по

Рис. 7: Спектр при  $\nu_0 = 25$  кГц,  $\tau = 200$  мксРис. 8: Спектр при  $\nu_0 = 10$  кГц,  $\tau = 100$  мкс

более, чем 80 точек данных, и с точностью до погрешности генератора совпадают со значениями частоты повторения цугов  $f_{\text{повт}}$ .

Получается, что  $\delta\nu = kf_{\text{повт}}$ , где  $k \approx 1$ . Из теории следует, что значения двух величин совпадают, значит экспериментальная зависимость верна.

Рис. 9: Спектр при  $\nu_0 = 25 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 100 \text{ мкс}$ Рис. 10: Спектр при  $\nu_0 = 40 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 100 \text{ мкс}$

И для прямоугольных импульсов, и для цугов при повышении частоты повторения импульсов увеличивается расстояние между компонентами спектра, а при повышении длительности импульса уменьшается ширина спектра. Разница между графиками спектров прямоугольного импульса и цуга в том, что спектр цуга смещён на значение несущей частоты в сторону повышения частоты. То есть при устремлении несущей частоты к нулю графики наложатся друг на друга.

### 3.3 Амплитудно-модулированные колебания

Установим синусоидальный сигнал частоты  $\nu_0 = 25$  кГц, амплитуды 0,5 В. Подключим модуляцию к этому сигналу амплитуды 0,1 В и частоты  $\nu = 1$  кГц.

Меняя глубину модуляции до 1, измерим следующие значения:

$A_{min}, \text{ мВ}$	450	375	300	225	150	75	0
$A_{max}, \text{ мВ}$	550	625	700	775	850	925	1000
$m$	0,1	0,25	0,4	0,55	0,7	0,85	1
$A_{бок}, \text{ мВ}$	17	43	68	94	120	147	174
$A_{осн}, \text{ мВ}$	343	341	342	342	340	342	341
$\frac{A_{бок}}{A_{осн}}$	0,496	0,126	0,199	0,275	0,353	0,430	0,510

Таблица 3: Зависимость  $\frac{A_{бок}}{A_{осн}}$  от  $m$

Построим график зависимости.

Получилось значение  $k = 0,511 \pm 0,021$ , согласно же теории это значение должно равняться 0,5. То есть получилось верное соотношение амплитуд при различных модуляциях.

При увеличении частоты модуляции две боковые гармоники отдаляются от основной по величине на спектре.

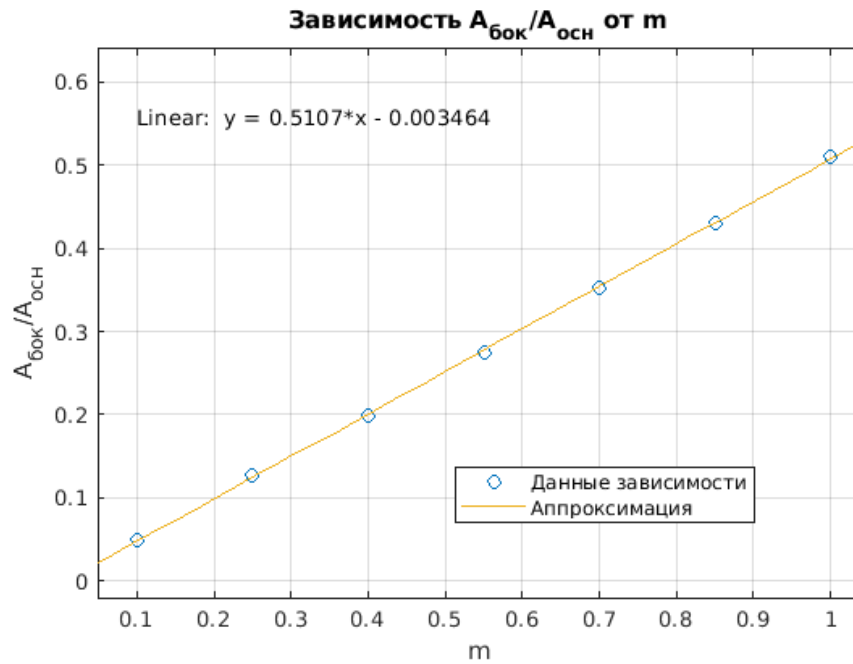
### 3.4 Частотная модуляция

Установим синусоидальный сигнал с частотой  $\nu = 25$  кГц с синусоидальной модуляцией частоты 1 кГц с девиацией частоты 100 Гц.

Меняя девиацию, снимем зависимость амплитуд гармоник от её значения.

Построим график зависимости  $\frac{A_{+1}}{A_0}$  от  $\beta$ :

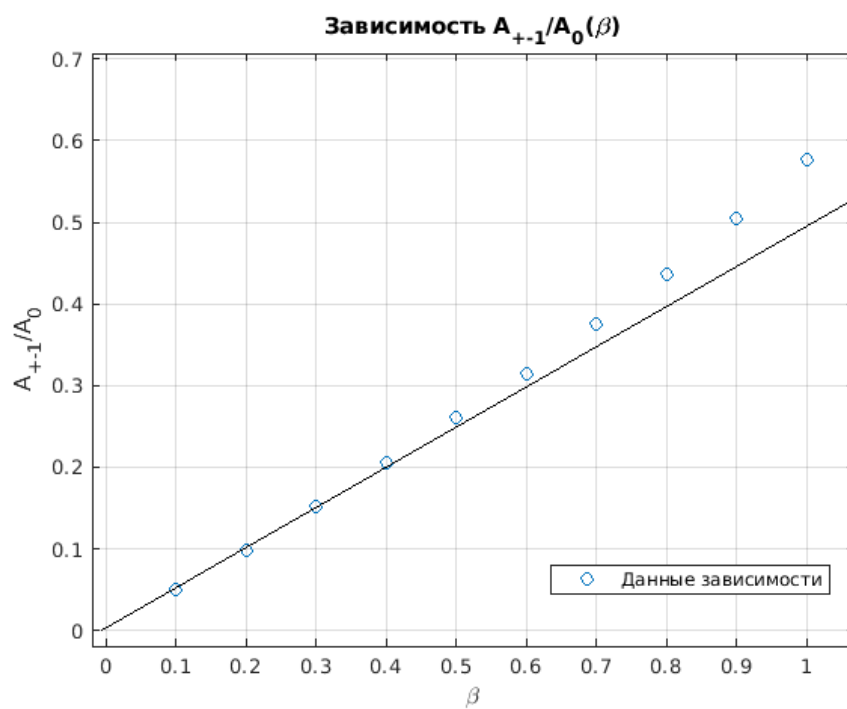
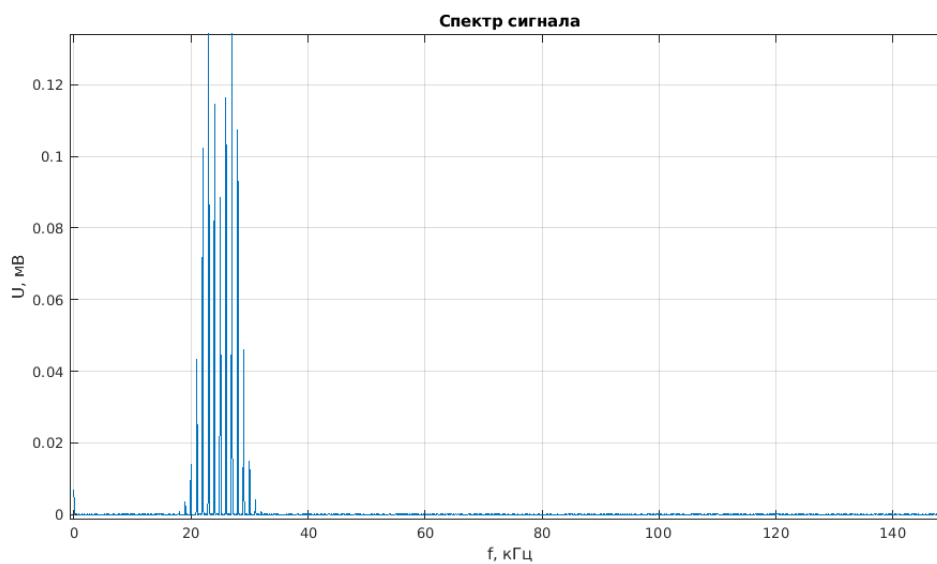
Предельная кривая, построенная при  $\beta \ll 1$ , даёт отношение боковых гармоник к основной  $k = 0,5$ , что и соответствует теоретической формуле,

Рис. 11: График зависимости  $\frac{A_{\text{бок}}}{A_{\text{осн}}}$  от  $m$ 

$\Delta f_m$ , кГц	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$A_0$ , мВ	338	335	331	325	318	309	299	287	273	260
$A_{+-1}$ , мВ	17	33	50	67	83	97	112	125	138	150
$A_{+-2}$ , мВ	0	2	4	7	10	15	20	26	32	38
$\beta$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\frac{A_{+-1}}{A_0}$	0,050	0,099	0,151	0,206	0,261	0,314	0,375	0,436	0,505	0,577

выведенной в приближении  $\beta \ll 1$ . При этом значения  $\beta \geq 0,9$  дают отклонение от построенной прямой больше, чем 10 %.

При дальнейшей увеличении частоты девиации получим более сложные спектры:

Рис. 12: График зависимости  $\frac{A_{+1}}{A_0}$  от  $\beta$ Рис. 13: Спектр при частоте девиации  $\Delta f_m = 3$  кГц



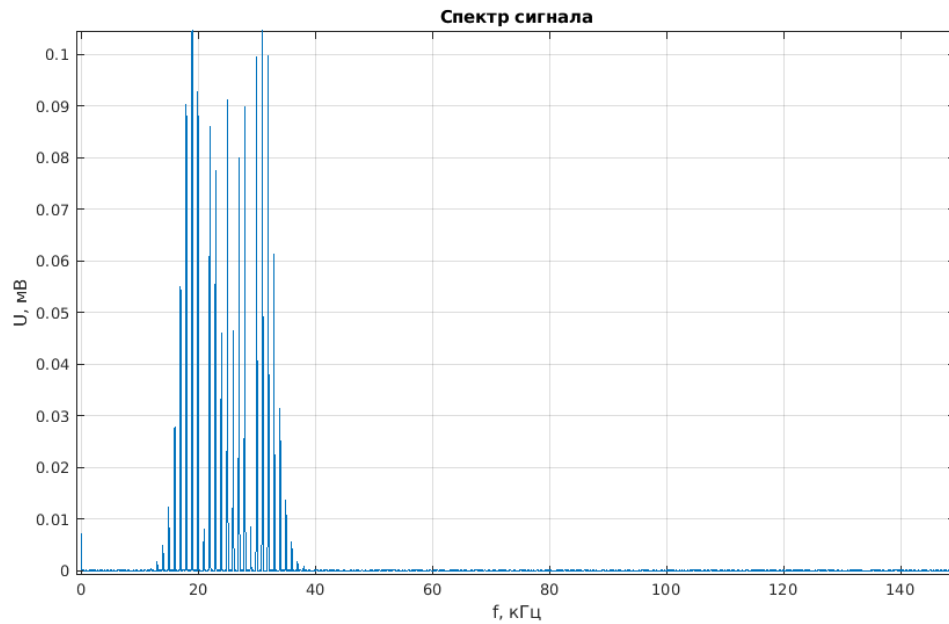


Рис. 14: Спектр при частоте девиации  $\Delta f_m = 7,5$  кГц

## 4 Заключение

В ходе выполнения работы теоретическое описание спектров исследуемых сигналов подтвердилось на основе их изучения с помощью генератора и осциллографа.

## 5 Литература

1. **Лабораторный практикум по общей физике:** учеб. пособие. В трёх томах. Т. 2. Электричество и магнетизм / Никулин М. Г., Попов П. В., Нозик А. А., и др.; под ред. А. В. Максимычева, М. Г. Никулина. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : МФТИ, 2019. — 370 с. ISBN 978-5-7417-0709-8 (Т. 2. Электричество и магнетизм)