

市内电动汽车快速充电设施的最优规划

李嘉逸¹ 张宏刚¹ 夏雪¹ 宁康红² 彭明伟² 陈慧妙³ 胡泽春³

(1. 中国电力工程顾问集团西南电力设计院有限公司, 成都市 610021; 2. 中国能源建设集团浙江省电力设计院有限公司, 杭州市 310012; 3. 清华大学电机工程与应用电子技术系, 北京市 100084)

摘要: 针对市内电动汽车快速充电设施的规划问题, 提出了一种以快速充电设施建设与运营总费用最小化为目标的优化方法。该方法首先将覆盖待规划区域的地图划分为若干个相等的正方形区块。其次根据划分后各区块的交通流量、土地使用费用, 并结合快速充电设施布置候选点、充电站容量费用、快速充电机成本与电动汽车渗透率等参数, 建立市内快速充电设施规划的数学模型。模型考虑了充电设施服务半径、所建充电设施的电量与容量要求等约束。最后, 以北京市五环内区域为算例进行充电设施规划仿真以及结果分析。

关键词: 电动汽车; 快速充电需求; 充电设施规划; 混合整数线性规划

Optimal Planning of Electric Vehicle Fast Charging Facilities in Urban Areas

LI Jiayi¹, ZHANG Honggang¹, XIA Xue¹, NING Kanghong², PENG Mingwei²,
CHEN Huimiao³, HU Zechun³

(1. CPECC Southwest Electric Power Design Institute Co., Ltd., Chengdu 610021, China;

2. China Energy Engineering Group Zhejiang Electric Power Design Institute Co., Ltd., Hangzhou 310012, China;

3. Department of Electrical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

ABSTRACT: This paper proposes a fast charging facility planning method in urban areas which aims to minimize both the construction and operation costs. Firstly, we divide the maps including the plan area into equal squares. Secondly, the mathematical model of planning is formulated with considering the traffic flow in each square area, the land using fee, the candidate sites of charging facilities, the capacity charge for charging stations, the costs of fast chargers and the penetration rate of electric vehicles. The constraints of the model include the service radius, the power and energy capacity requirements. Finally, we take the area within the fifth ring of Beijing as example to simulate the charging facility planning and analyze the results.

KEYWORDS: electric vehicle; fast charging demand; charging facility planning; mixed integer linear programming

中图分类号: TM 732

文献标志码: A

文章编号: 1000-7229(2017)01-0017-06

DOI: 10.3969/j.issn.1000-7229.2017.01.003

0 引言

随着化石能源的枯竭和环境污染的加剧, 传统燃油汽车的发展受到了制约, 电动汽车产业在全球范围内引起了越来越多的关注^[1-3]。同时, 电池技术的进步为电动汽车的推广与应用提供了重要的技术支撑, 城市交通电气化已成为一种必然的发展趋势^[4-7]。在我国, 电动汽车作为七大新兴战略性新兴产业之一, 已经

在北京、上海、深圳、杭州、重庆等一批城市初步形成规模化发展的态势^[1-8]。充电设施的完善是电动汽车大规模发展与应用的必要前提, 也是电动汽车产业链中的重要环节。根据《电动汽车充电基础设施发展指南(2015—2020年)》的要求, 我国将进一步大力推进充电基础设施的建设, 在2020年满足全国500万辆电动汽车的充电需求。

近几年, 已有一些学者对电动汽车充电设施的优化规划问题进行了研究。文献[9]基于能量等效的原则, 进行电动汽车的充电负荷预测与充电站的选址定容, 并针对规划方案给出了经济性与用户便利性的评估方法。文献[10]以地理因素和服务半径来确定

基金项目: 国家重点基础研究发展计划项目(973计划)(2013CB22820)

Project supported by the National Basic Research Program of China (973 Program) (2013CB228202)

充电站候选站址,并在此基础上建立了以投资、运营成本与网损费用之和最小化为目标的充电站最优规划数学模型。文献[8]分析了各类电动汽车的充电模式,提出了充电负荷的预测模型,并在此基础上给出了充电设施需求的计算方法,最后通过区块划分的方法进行了充电设施的规划。文献[11]在充电站规划中考虑了变电站和道路的布局。文献[12-13]在充电站规划中考虑了配电网约束。

在已发表的文献中,充电设施规划问题的求解方法有多种。例如,文献[14-16]基于Voronoi图确定充电站的服务范围并进行充电站规划;文献[17-18]中运用了Voronoi图与栅格化的方法;文献[19]采用了改进的原始-对偶内点法求解考虑电网运行约束的优化规划模型;文献[20]则采用了计算速度较快的启发式方法。

为满足未来电动汽车的快速充电需求,本文针对市内的快速充电设施规划提出一种综合考虑建设和运营成本的规划方法。该方法首先将待规划区域划分为若干个相等的正方形小区块,再根据市内交通流量分布、电动汽车渗透率、市内土地使用价格、快速充电设施服务半径要求、快速充电设施布置候选点以及快速充电设施建设成本信息,以快速充电设施建设与运营总费用最小化为目标,以满足所建充电站在候选站址区块内、给定的充电站服务半径限制、所建充电设施满足充电需求的电量与容量要求等约束,实现市内电动汽车快速充电设施的最优规划。以北京市五环内区域的快速充电站规划为算例,验证所提方法的有效性。

1 电动汽车快速充电设施规划问题描述

电动汽车快速充电设施的规划是为了满足电动汽车在行驶途中出现的快速充电需求,在电动汽车的普及过程中起着关键性的作用。充电站的规划通常需要事先确定候选站址以降低优化的难度。对于充电站候选站址的选取,从城市规划的角度来看,需要充分考虑城市交通网络布局的约束和城市的用地情况;从电动汽车用户的角度来看,充电站选址还需要考虑与充电需求的分布与用户充电的便捷性。

对于给定的充电站候选站址,合理的规划模型需要包含电动汽车负荷预测、充电需求分析与最终的选址定容。对于快速充电站而言,负荷需求考虑市内车流量、电动汽车渗透率以及快速充电站的服务半径。在本文中,假设每个充电站只对位于其服务半径内的电动汽车提供充电服务。对于电动汽车而言,车主可能选择距离其在服务半径内的任何一个充电站进行充电,而不是一定前往最近的充电站。

在以上假定的基础上,按充电设施建设与运营的总成本最小化为目标进行快速充电设施规划建模。

2 快速充电设施规划的数学模型

2.1 模型设定

充电设施的规划涉及选址定容问题。为了方便数学模型的建立与求解,我们将待规划区域分为 $N \times M$ 个正方形小区域,并令这些小区域的集合为 U 。设候选站址的集合为 D ,则 $D \subset U$ 。设 $R(i, j)$ 为区块 $(i, j) \in D$ 处的充电站的服务半径内的区块的集合。

2.2 优化目标与约束条件

以充电设施建设与运营的总成本最小化为目标,优化模型的目标函数如下:

$$\min \sum_{(i, j) \in U} [G_{ij} (C^{\text{Ch}} + \xi C^{\text{Cap}} P + C_{ij}^{\text{L}} A) + W_{ij} C^{\text{OI}} + W_{ij} C_{ij}^{\text{Op}}] \quad (1)$$

式中: G_{ij} 表示在区块 (i, j) 处建设的充电站内的充电机个数; C^{Ch} 表示单个充电机成本; ξ 表示快速充电站容量上限与所有快速充电机总功率的比值(大于1); C^{Cap} 表示单位容量投资费用(包括配变、电缆等费用); P 表示快速充电机的额定功率; C_{ij}^{L} 表示区块 (i, j) 处的土地使用费用; A 表示每个充电机的平均占地面积; W_{ij} 为0-1变量,取1表示在区块 (i, j) 处建设充电站,取0表示不在区块 (i, j) 处建设充电站; C^{OI} 表示与充电机个数无关的充电站建设费用; C_{ij}^{Op} 表示在区块 (i, j) 处建设的充电站的运行费用,在规划阶段近似认为其与建设费用成比例关系,即

$$C_{ij}^{\text{Op}} = \alpha [G_{ij} (C^{\text{Ch}} + \xi C^{\text{Cap}} P + C_{ij}^{\text{L}} A) + W_{ij} C^{\text{OI}}] \quad (2)$$

式中 α 为比例系数。

约束条件包括:

$$\sum_{(k, l) \in U} S_{ij}^{kl} \leq G_{ij}, \forall (i, j) \in D \quad (3)$$

$$S_{ij}^{kl} = 0, \forall (i, j) \in D, \forall (k, l) \notin R(i, j) \quad (4)$$

$$S_{ij}^{kl} \geq 0, \forall (i, j) \in D, \forall (k, l) \in R(i, j) \quad (5)$$

$$G_{ij} \geq 0, \forall (i, j) \in D \quad (6)$$

$$\sum_{(i, j) \in D} S_{ij}^{kl} \geq \gamma \eta J_{kl}, \forall (k, l) \in U \quad (7)$$

$$P \sum_{(i, j) \in D} S_{ij}^{kl} \geq \gamma \eta J_{kl} Q, \forall (k, l) \in U \quad (8)$$

$$0 \leq G_{ij} \leq \Gamma W_{ij} \quad (9)$$

$$G_{ij} + \Gamma(1 - W_{ij}) > 0 \quad (10)$$

式中: S_{ij}^{kl} 表示区块 (i, j) 处的候选站址在 (k, l) 点处所能提供的充电服务能力,每个候选站址的最大充电服务能力等于其快速充电机总数; γ 为电动汽车渗透率; η 为行驶中的电动汽车出现充电需求的概率; J_{ij}

表示区块 (i, j) 处的车流量; P 为快速充电机的额定功率; Q 表示每辆车平均每次的快速充电需求; Γ 为一个足够大的正数。约束 (3) 表示每个充电站对各个区块的服务能力之和不大于其最大服务能力; 约束 (4) 表示每个充电站对其服务半径之外的区块的服务能力为 0; 约束 (5) 表示每个充电站对其服务半径之内的区块的服务能力大于等于 0; 约束 (6) 表示每个充电站的快速充电机数量大于等于 0; 约束 (7) 表示所有充电站在每个区块处的服务能力总和不小于该区块处的有充电需求的电动汽车数量; 约束 (8) 表示所有充电站对每个区块出的最大输出电量不小于该区块处的总充电需求; 约束 (9) 和 (10) 表示建设了充电站的区块对应的 W_{ij} 值为 1, 否则为 0。

上述模型可采用混合整数规划算法。若无解, 表示没有满足要求的快速充电设施规划方案, 需求改输入参数, 可增加候选站址或扩大充电站服务半径, 从而使得所有的区块都处于至少一个候选站址的服务范围内。

3 算例分析

3.1 参数设定

电动汽车充电设施优化规划仿真算例选取北京市五环以内区域作为待规划范围(地图如图 1 所示)。考虑到北京市五环以内近似为 1 个 $24 \text{ km} \times 24 \text{ km}$ 的区域, 将图 1 中的区域划分为 12×12 个正方形小区块, 其中每一个正方形区块的边长为 2 km , 并对每一个正方形小区块编号并删去多余部分, 结果如图 2 所示。

算例的参数设置主要通过资料以及调研得到, 部分难以获取的数据通过合理的假设得到。主要参数设定如下。充电机投资(含所有配套设备投资): 25 万元/个; 接入电网的容量费用: 1.5 万元/kW; 每个充电站与充电机无关的建设费用: 20 万元; 单个充电机平均占地面积(含停车位以及通道用地) 25 m^2 /个; 年运营费用占投资费用的比例为 10%; 电动汽车行驶过程中产生快速充电需求的比例为 2%; 充电机额定充电功率 60 kW; 充电站设定容量上限与充电机总功率的比值为 130%; 平均每辆车每次充电需求 $40 \text{ kW} \cdot \text{h}$ 。另外, 我们假设每个充电站的生命周期为 50 年, 贴现率 5%, 从而将充电机投资、接入电网的容量费用与每个充电站与充电机无关的建设费用换算为等年值, 换算后的值分别为 13 694 元/个、821 元/kW 和 10 955 元。

各区块土地租赁费用和交通流量数据结合北京市部分地段的土地出租价格与主要道路车流量信息, 并按

照从市中心往外呈线性递减的趋势设置。基于 12×12 的正方形区块划分, 由内往外共 6 个等级。所设定的土地租赁价格分别为: 3 650, 3 285, 2 920, 2 555, 2 190, 1 825 元/($\text{a} \cdot \text{m}^2$)。所设定的交通流量数据分别为 6 000, 5 600, 5 200, 4 800, 4 400, 4 000 辆/h。

在算例分析选取了 3 种候选点情景进行仿真, 这 3 种情景的候选点数量分别为 33, 43, 53, 具体候选点参见附表 A1。候选点的选取主要遵循几条基本原则:

- (1) 避开用于绿化或有湖泊、山丘的区块;
- (2) 避开政府用地和商业用地紧张的区块;
- (3) 尽量接近交通干道。

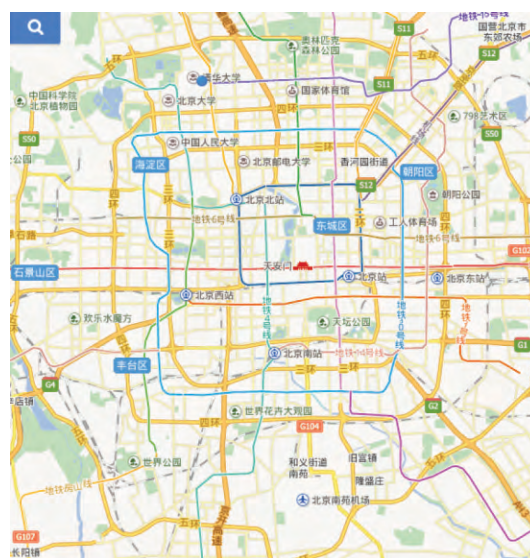


图 1 北京市五环内区域地图

Fig. 1 Map of area within the fifth ring of Beijing



图 2 北京市五环内区域划分图

Fig. 2 Divided map of area within the fifth ring of Beijing

算例在充电站服务半径为 4 km ,对 3 种候选点情景分别在电动汽车渗透率为 10% ,15% ,20% 下进行了仿真。此外 ,还对服务半径为 6 km ,电动汽车渗透率为 10% 时 3 种候选点的情景进行了仿真。

3.2 仿真结果及分析

仿真计算在 CPU 为 Intel Core i7 ,内存 16G 的台式计算机上完成 ,程序编写在 Visual Studio 环境下采用 C#语言实现。每个情景的优化计算可在 1 s 内完成。仿真的主要数据结果和充电设施布局情况如表 1—4 和图 3 所示。

表 1 快速充电设施年投资费用(服务半径:4 km)
Table 1 Annual costs of fast charging facilities
(service radius: 4 km) 亿元

候选点数量	电动汽车 渗透率为 10%	电动汽车 渗透率为 15%	电动汽车 渗透率为 20%
33	2.007	3.002	3.998
43	1.985	2.968	3.941
53	1.977	2.953	3.906

表 2 被选中的候选点个数(服务半径:4 km)
Table 2 Selected number of candidates
(service radius: 4 km) 个

候选点数量	电动汽车 渗透率为 10%	电动汽车 渗透率为 15%	电动汽车 渗透率为 20%
33	27	29	31
43	31	32	34
53	32	34	36

表 3 快速充电设施年投资费用(电动汽车渗透率:10%)
Table 3 Annual costs of fast charging facilities
(penetration rate of electric vehicles: 10%) 亿元

候选点数量	服务半径为 4 km	服务半径为 6 km
33	2.007	1.944
43	1.985	1.915
53	1.977	1.910

表 4 被选中的候选点个数(电动汽车渗透率:10%)
Table 4 Selected number of candidates
(penetration rate of electric vehicles: 10%) 个

候选点数量	服务半径为 4 km	服务半径为 6 km
33	27	19
43	31	22
53	32	24

由表 1、表 2 ,在相同的电动汽车渗透率下 ,快速充电设施的年投资费用随候选点数量增加而略有下降 ,这是由于候选点的增多带来了更多的充电设施建

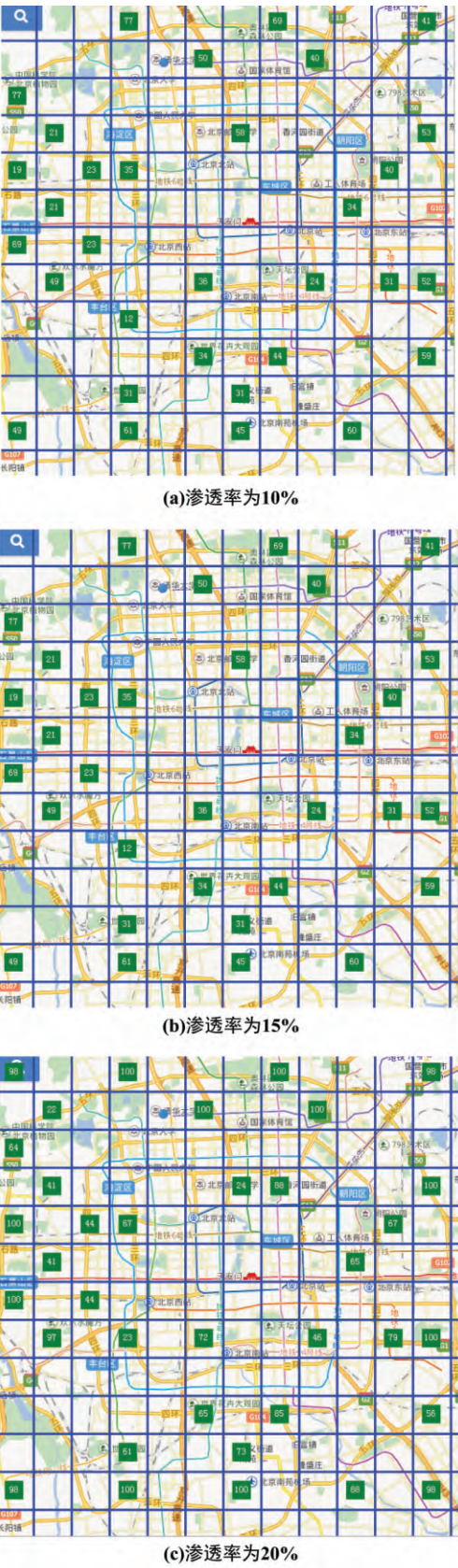


图 3 候选点 53 个时不同电动汽车渗透率下的快速充电机分布
Fig. 3 Distribution of fast charging facilities when number of candidates is 53

设方案。也正因如此,可以看出随着候选点数量的上升,被选中的候选点呈增加趋势,这是因为更多的土地租赁价格较低的充电站可以代替较少的土地租赁价格较高的充电站,并且使得总体经济效益提升。

图3给出的快速充电机分布情况可以直观地看出布点都尽可能地往远离市中心的区块分布,这是由于越靠近市中心,土地租赁价格越高,运营成本越高。而电动汽车渗透率的提高使得布点更多,较为孤立的候选点建桩数量相对较多,并有部分达到了所设定的上限100个。随着电动汽车的进一步发展,这些建桩数量达到100个的候选点附近需要增加新的充电点。

由表3、表4可以看出,充电站服务半径的增加带来了年投资成本、被选中候选点数量的减少,因为建站数量的减少可以降低与充电机数量无关的基础投资费用。本质上,服务半径要求的扩大虽然降低了总的投资成本,但是牺牲了电动汽车用户充电的便捷性,用户需要行驶更远的距离来充电。

4 结 论

本文提出了一种基于地图划分的市内快速充电设施规划方法。该方法以快速充电设施的建设和运行总成本最小化为目标,综合考虑了交通流量、土地使用费用、充电设施数量和能量要求等约束。算例分析表明快速充电设施的分布呈现远离市中心的趋势,以降低投资成本。同时更多的候选点数量能够降低快速充电设施的投资成本,并且随着电动汽车的渗透率的增加,需要增加可以建站的候选点,否则将无法满足市内的快速充电需求。因而考虑电动汽车的多阶段发展与规划有利于日后充电设施的建设。

5 参考文献

- [1] 陈良亮,张浩,倪峰,等. 电动汽车能源供给设施建设现状与发展探讨[J]. 电力系统自动化, 2011, 35(14): 11-17.
CHEN Liangliang, ZHANG Hao, NI Feng, et al. Present situation and development trend for construction of electric vehicle energy supply infrastructure [J]. Automation of Electric Power Systems, 2011, 35(14): 11-17.
- [2] 胡泽春,宋永华,徐智威,等. 电动汽车接入电网的影响与利用[J]. 中国电机工程学报, 2012, 32(4): 1-10.
HU Zechun, SONG Yonghua, XU Zhiwei, et al. Impacts and utilization of electric vehicles integration into power systems [J]. Proceedings of the CSEE, 2012, 32(4): 1-10.
- [3] BOULANGER A G, CHU A C, MAXX S, et al. Vehicle electrification: Status and issues [J]. Proceedings of the IEEE, 2011, 99(6): 1116-1138.
- [4] 武力. 电动汽车充电设施规划方法研究[D]. 北京: 华北电力大学, 2012.
WU Li. A research on layout approach of electric vehicle charging facilities [D]. Beijing: North Electric Power University, 2012.
- [5] LIU Zifa, ZHANG Wei, JI Xing, et al. Optimal planning of charging station for electric vehicle based on particle swarm optimization [C] // Proceedings of IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies. Tianjin: IEEE, 2012: 1-5.
- [6] ZHANG Hongcai, TANG Wenzuo, HU Zechun, et al. A method for forecasting the spatial and temporal distribution of PEV charging load [C] // Proceedings of Power and Energy Society General Meeting, National Harbor, MD, USA, 2014: 1-5.
- [7] 我国充电桩发展状况及潜在难题 [EB/OL]. (2016-2-23) [2016-12-49]. <http://www.esn.com.cn/news/show-302312.html>.
- [8] 杨俊,廖斌杰,王小蕾,等. 基于分区需求系数的电动汽车充电设施规划[J]. 电力建设, 2015, 36(7): 52-60.
YANG Jun, LIAO Binjie, WANG Xiaolei, et al. Planning of charging facilities of electric vehicles based on geographical zonal charging demand coefficients [J]. Electric Power Construction, 2015, 36(7): 52-60.
- [9] 郭春林,肖湘宁. 电动汽车充电基础设施规划方法与模型[J]. 电力系统自动化, 2013, 37(13): 71-75.
GUO Chunlin, XIAO Xiangning. Planning method and model of electric vehicle charging infrastructure [J]. Automation of Electric Power Systems, 2013, 37(13): 71-75.
- [10] 刘志鹏,文福栓,薛禹胜,等. 电动汽车充电站的最优选址和定容[J]. 电力系统自动化, 2012, 36(3): 54-59.
LIU Zhipeng, WEN Fushuan, XUE Yusheng, et al. Optimal siting and sizing of electric vehicle charging stations [J]. Automation of Electric Power Systems, 2012, 36(3): 54-59.
- [11] SADEGHI-BARZANI P, RAJABI-GHAHNAVIEH A, KAZEMI-KAREGAR H. Optimal fast charging station placing and sizing [J]. Applied Energy, 2014, 125(1): 289-299.
- [12] 唐现刚,刘俊勇,刘友波,等. 基于计算几何方法的电动汽车充电站规划[J]. 电力系统自动化, 2012, 36(8): 24-30.
TANG Xiangang, LIU Junyong, LIU Youbo, et al. Electric vehicle charging station planning based on computational geometry method [J]. Automation of Electric Power Systems, 2012, 36(8): 24-30.
- [13] 王辉,王贵斌,赵俊华,等. 考虑交通网络流量的电动汽车充电站规划[J]. 电力系统自动化, 2013, 37(13): 63-69.
WANG hui, WANG Guibin, ZHAO Junhua, et al. Electric vehicle charging station planning considering traffic network flows [J]. Automation of Electric Power Systems, 2013, 37(13): 63-69.
- [14] 熊虎,向铁元,祝勇刚,等. 电动汽车公共充电站布局的最优规划[J]. 电力系统自动化, 2013, 37(23): 65-70.
XIONG Hu, XIANG Tiejuan, ZHU Yonggang, et al. Electric vehicle public charging station location optimal planning [J]. Automation of Electric Power Systems, 2013, 37(23): 65-70.
- [15] 葛少云,冯亮,刘洪,等. 电动汽车充电站规划布局与选址方案的优化方法[J]. 中国电力, 2012, 45(11): 96-101.
GE Shaoyun, FENG Liang, LIU Hong, et al. An optimization approach for the layout and location of electric vehicle charging stations [J]. Electric Power, 2012, 45(11): 96-101.
- [16] 赵明宇,吴俊,张卫国,等. 基于时空约束的城市交流充电桩优化布局[J]. 电力系统自动化, 2016, 40(4): 66-71.
ZHAO Mingyu, WU Jun, ZHANG Weiguo, et al. Optimal

planning of AC charging piles based on constraints of time and space [J]. Automation of Electric Power Systems, 2016, 40(4): 66-71.

- [17] 陈光 毛召磊 李济沅 等. 计及碳排放的电动汽车充电站多目标规划[J]. 电力系统自动化 2014 38(17):49-53.

CHEN Guang, MAO Zhao lei, LI Jiyuan, et al. Multi-objective optimal planning of electric vehicle charging stations considering carbon emission [J]. Automation of Electric Power Systems, 2014, 38(17): 49-53.

- [18] GE Shaoyun, FENG Liang, LIU Hong. The planning of electric vehicle charging station based on Grid partition method [C]// Proceedings of Electrical and Control Engineering (ICECE), 2011 International Conference. Yichang: IEEE, 2011: 2726-2730.

- [19] LIU Zhipeng, WEN Fushuan, LEDWICH G. Optimal planning of electric-vehicle charging stations in distribution systems [J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2013, 28(1): 102-110.

- [20] 任玉珑 史乐蜂 张谦 等. 电动汽车充电站最优分布和规模研究[J]. 电力系统自动化 2011 35(14):53-57.

REN Yubin, SHI Lefeng, ZHANG Qian, et al. Optimal distribution and scale of charging stations for electric vehicles [J]. Automation of Electric Power Systems, 2011, 35(14): 53-57.

收稿日期: 2016-10-17

作者简介:

李嘉逸(1974) 男 工学硕士 高级工程师 主要从事智能电网领域研究和设计工作;

张宏刚(1979) 男 工学硕士 高级工程师 主要从事智能电网领域研究和设计工作;

夏雪(1980) 男 工学硕士 高级工程师 主要从事智能电网领域研究和设计工作。

(编辑 张媛媛)

附录 A 算例候选区块设置

表 A1 各情景候选点数量及分布
Table A1 Number and distribution of candidates for different scenarios

情景	数量/个	候选点的网格坐标
情景一	33	(1,4)(1,8)(2,2)(2,6)(2,9)(2,11)(3,1)(4,2)(4,4)(4,7)(4,9)(5,11)(6,2)(6,5)(6,8)(6,10)(8,2)(8,4)(8,6)(8,7)(8,9)(8,11)(8,12)(10,3)(10,6)(10,8)(10,10)(10,12)(11,2)(11,4)(12,4)(12,7)(12,10)
情景二	43	(1,4)(1,8)(2,2)(2,6)(2,9)(2,11)(3,1)(3,10)(4,2)(4,4)(4,7)(4,9)(4,12)(5,1)(5,4)(5,11)(6,2)(6,5)(6,8)(6,9)(6,10)(7,1)(7,3)(8,2)(8,4)(8,6)(8,7)(8,9)(8,11)(8,12)(9,5)(10,2)(10,3)(10,6)(10,8)(10,10)(10,12)(11,2)(11,4)(11,7)(12,4)(12,7)(12,10)
情景三	53	(1,1)(1,4)(1,8)(1,12)(2,2)(2,6)(2,9)(2,11)(3,1)(3,10)(4,2)(4,4)(4,7)(4,8)(4,9)(4,12)(5,1)(5,3)(5,4)(5,11)(6,2)(6,5)(6,8)(6,9)(6,10)(7,1)(7,3)(7,6)(8,2)(8,4)(8,6)(8,7)(8,8)(8,9)(8,11)(8,12)(9,4)(9,5)(9,9)(10,2)(10,3)(10,6)(10,8)(10,10)(10,12)(11,2)(11,4)(11,7)(12,1)(12,4)(12,7)(12,10)(12,12)