微积分(II)总结复习

数学科学学院　卢兴江

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

第7章 级 数

收敛性定义： 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛. $(S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$

收敛性判别： *（**收敛必要条件**）若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 即若 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

*（**柯西收敛准则**） $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ 为柯西列.

两个常用级数： *（**几何级数**） $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \Rightarrow$ 当 $|q|<1$ 时，收敛于 $\frac{1}{1-q}$; 当 $|q|\geq 1$ 时发散.

*（p-**级数**） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \Rightarrow$ 当 $p>1$ 时收敛; 当 $p\leq 1$ 时发散.

正项级数的收敛性判别： 由部分和数列$\{S_n\}$严格单调增加得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$有界.

正项级数

* 比较判别法及其极限形式
* 达朗贝尔比值判别法及其极限形式
* 柯西根值判别法及其极限形式
* 柯西积分判别法

一般项级数的收敛性判别：

* 交错级数的莱布尼兹判别法.
* 绝对收敛级数必收敛.

（绝对收敛级数与条件收敛级数及其性质）

幂级数的收敛性、收敛域及和函数

* 以 x_0 为中心的幂级数：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$，阿贝尔定理，收敛半径与收敛域.

* 收敛半径 R： 当 $|x-x_0|<R$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 绝对收敛；

  当 $|x-x_0|>R$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 发散.

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$$ （若极限存在）或 $$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$$ （若极限存在）

* 幂级数的和函数性质：连续性、逐项可积性、逐项可导性.

* 求幂级数的和函数；函数的幂级数展开（间接展开）.

* 幂级数的应用.*

函数的傅里叶级数展开

* 三角函数系 $1, \cos\omega x, \sin\omega x, \ \cos 2\omega x, \sin 3\omega x, \cdots \cos n\omega x, \sin n\omega x, \cdots$ 及其正交性.

* 傅里叶系数：$f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x), \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega}.$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos n\omega x \mathrm{d}x, \ \ n = 0,1,2,3\cdots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin n\omega x \mathrm{d}x, \ \ n = 1,2,3,\cdots.$$

* 狄利克雷收敛定理.

* 将函数展开成正弦级数（奇延拓）和余弦级数（偶延拓).

* Bessel不等式和Parseval等式及其应用.*

(1) 矢量及其运算：$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$.

* $\boldsymbol{a}\,//\,\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

* $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

* $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$.

(2) 矢量的应用：$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$.

* 三角形 ΔABC 的面积 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$.

* 以 A, B, C, D 为顶点的四面体体积 $V=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|$.

• A, B, C, D 四点共面 $\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

平面方程

(1) 平面方程：法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$, 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

* 点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

* 一般式 $Ax+By+Cz+D=0$.

* 截距式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, 平面不过原点，与三个坐标轴皆相交.

(2) 点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离.

$$d=\left|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\boldsymbol{n}^0\right|=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

直线方程

(1) 直线方程：直线方向 $\boldsymbol{u}=(a,b,c)$，过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

* 点向式（对称式） $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$.

* 一般式 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$. (两个平面的交线)

* 参数式 $x=x_0+at,\ y=y_0+bt,\ z=z_0+ct,\quad t\in(-\infty,+\infty)$.

(2) 点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 到直线 $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ 的距离.

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\times\boldsymbol{u}\right|}{|\boldsymbol{u}|}.\qquad \overrightarrow{P_0P_1}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0),\ \boldsymbol{u}=(a,b,c).$$

平面和直线之间的位置关系等

(1) 两条异面直线之间的距离：$\dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{b_1}=\dfrac{z-z_1}{c_1}$， $\dfrac{x-x_2}{a_2}=\dfrac{y-y_2}{b_2}=\dfrac{z-z_2}{c_2}$

$$d=\frac{\left|(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\cdot\overrightarrow{P_1P_2}\right|}{\left|\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2\right|},\quad \boldsymbol{u}_i=(a_i,b_i,c_i),\ i=1,2.\quad \overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

(2) 平面束方程：过直线方向$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$的所有平面为

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.\quad(\lambda^2+\mu^2\neq 0)$$

(3) 平面之间、直线之间、平面与直线之间的位置关系

曲面方程和曲线方程

(1) 曲面方程：

* 显式方程 $z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathrm{R}^2.$

* 隐式方程 $F(x, y, z) = 0.$

* 参数方程 $x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in T \subset \mathrm{R}^2.$

(2) 曲线方程：

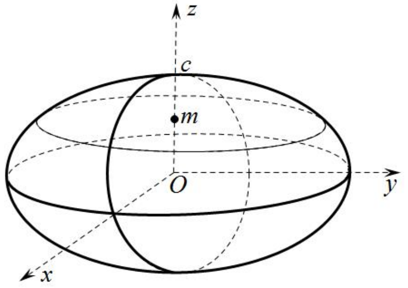
* 隐式方程 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$

* 参数方程 $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b].$

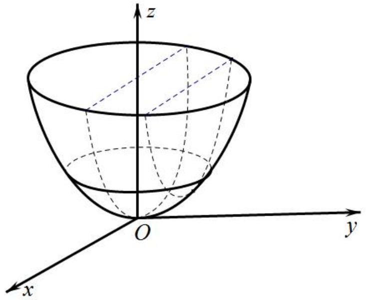
(3) 旋转曲面方程、柱面方程、锥面方程；投影柱面、投影曲线.

常见的二次曲面

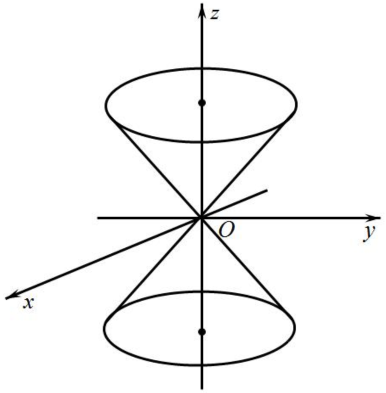
(1) 椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$



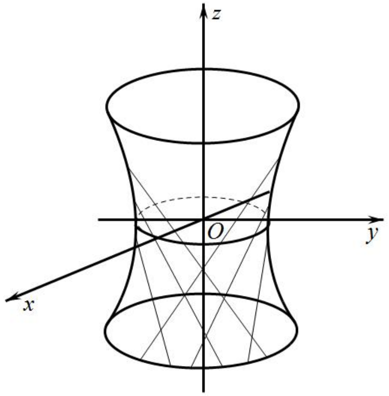
(2) 椭圆抛物面：$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}.$



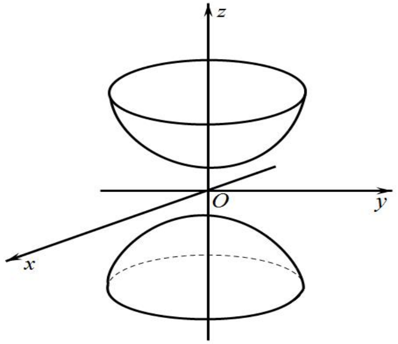
(3) 椭圆锥面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}.$



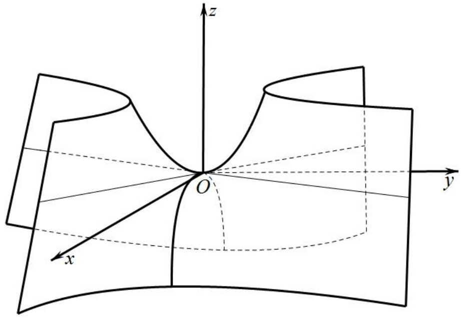
(4) 单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1.$ (直纹面)



(5) 双叶双曲面：$-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$



(6) 双曲抛物面（马鞍面）：$z=-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}.$ (直纹面)



第9章　多元函数微分学

(1) **多元函数（数量场）的概念：** 定义、图像（二元）等

* 多元函数的极限，特别是 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$.　* 多元函数的连续及连续函数的性质等.

(2) **偏导数和全微分：** 偏导数、全微分的定义 及意义.

*（二元函数）连续，可 偏导，可微及偏导数连 续的关系

偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微 $\Rightarrow$ 可偏导

可微 $\Rightarrow$ 连续

(3) 高阶偏导数的定义及计算（莱布尼兹公式）.

(4) 复合函数求偏导的链式法则；隐函数存在定理* 及求偏导数和全微分方法.

(5) 多元函数的泰勒定理（二元函数的泰勒公式）

偏导数的应用

(1) **多元函数**的极值与最大最小值 （驻点、极值判定定理等）

$*$ 多元函数条件极值（拉格朗日乘数法）

(2) 方向导数：定义，意义 及计算方法

$*$ 数量场（多元函数）的 梯度

函数沿梯度方向的方向 导数最大，最大值为梯 度的模.

(3) 向量函数的定义及其极限、连续和导数等.

$*$ 空间曲线的切线与法平面方程； 曲面的切平面与法线方程.

(4) 向量场的概念；向量场的极限、连续和导数（雅可比矩阵*）.

(1) 二重积分的定义、意义、可积性*和性质

(2) 二重积分的计算方法

* 直角坐标系下的计算（ 累次积分）和交换积分 次序

* 极坐标系下的计算： $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r$

* 二重积分的一般变量替 换*： $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_T f[x(u,v), y(u,v)]\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

(3) 利用对称性和积分变量的轮换性简化二重积分的计算

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\ ,\quad \forall\text{分割 } P,\ \forall\text{介点 }(\xi_i,\eta_i).$$

第10章　重积分

三重积分

(1) 三重积分的定义、意义、可积性*和性质

(2) 三重积分的计算方法

* 直角坐标系下的计算（累次积分：投影法、截面法）和交换积分次序
* 柱面坐标系下的计算：　$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z.$
* 球面坐标系下的计算：　$x = \rho\sin\varphi\cos\theta,\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ z = \rho\cos\varphi.$
* 三重积分的一般变量替换*：

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_V f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

(3) 利用对称性和积分变量的轮换性简化三重积分的计算

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i\,,\quad \forall\text{分割 } P,\ \forall\text{介点 } (\xi_i,\eta_i,\zeta_i).$$

重积分的应用

几何应用 求平面图形面积，立体体积：$A(D)=\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $V(\Omega)=\iiint\limits_\Omega 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

$V(\Sigma)=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 为立体的顶面 Σ：$z=f(x,y)$ 在 xoy 平面上的投影区域.

物理应用 求质量、重心（形心）、转动惯量及物体间的 万有引力等

* **质量：** 平面薄片 $M_D=\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$； 立体 $M_V=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

* **重心：** 平面薄片 $x^*=\dfrac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{M_D}$, $y^*=\dfrac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{M_D}.$

  空间物体 $x^*=\dfrac{\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{M_V}$, $y^*=\dfrac{\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{M_V}$, $z^*=\dfrac{\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{M_V}.$

* **转动惯量：** 平面薄片 $I_l=\iint\limits_D \rho(x,y)\cdot d^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 空间物体 $I_l=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)d^2(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

（其中 $d(x,y)$, $d(x,y,z)$ 为点到转动轴的距离）

第11章　曲线积分

(1) 曲线的表示

* 参数方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$; * 一般方程 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$

(2) 弧长微分与弧长的计算

* $\mathrm{d}s = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, \mathrm{d}t.$ * $s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, \mathrm{d}t.$

平面曲线弧长微分： $x = x(t),\ y = y(t) \quad \to \quad \mathrm{d}s = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, \mathrm{d}t.$

• 显式方程 $y = f(x) \quad \to \quad \mathrm{d}s = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x.$

• 极坐标方程 $r = r(\theta) \quad \to \quad \mathrm{d}s = \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2}\, \mathrm{d}\theta.$

第一类曲线积分（弧长积分）

(1) 定义及性质： $\int_C f(x,y,z)\mathrm{d}s$　　意义： 线密度为 $f(x,y,z)$ 的曲线 C 的质量.

(2)第一类曲线积分的计算（**积分下限小于积分上 限**）

$$* \int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

平面曲线： $\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t),y(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$； C 为 $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[t_1,t_2]$.

$\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f[x,\varphi(x)]\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$； C 为 $y=\varphi(x),\ x\in[a,b]$.

$\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta]\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$； C 为 $r=r(\theta),\ \theta\in[\alpha,\beta]$.

(3) 第一类曲线积分的应用： 质线的质量、重心、转动惯量等.

第二类曲线积分

(1) 定义： $\int_C \left(\vec{f}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{\tau}^0\right)\mathrm{d}s=\int_C \vec{f}(x,y,z)\mathrm{d}\vec{s}=\int_C P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z.$

意义： 力场 $\vec{f}(x,y,z)$ 沿曲线 C 移动质点所作的功． 其中 C 为 $x=x(t),y=y(t),z=z(t).$

(2) 第二类曲线积分的计 算（**积分下限为起点参数 值，积分上限为终点参 数值**）

$$*\ \int_C P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_a^b\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}\mathrm{d}t.$$

*化作第一类曲线积分计 算： $\int_C P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z=\int_C\left(\vec{f}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{\tau}^0\right)\mathrm{d}s.$

*利用 Stokes 公式化作曲面积分计算（闭曲线 C）：

$$\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S\left(\mathrm{rot}\,\vec{f}\cdot\boldsymbol{n}^0\right)\mathrm{d}S=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

平面曲线： 参数方程代入直接计算； 利用格林公式计算 $\oint_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

曲线积分与道路无关性

(1) 有势场（保守场）的概 念，积分与路径无关的 概念，势函数的计算 .

（曲线积分的第一基本 定理；曲线积分的第二基本定 理）

(2) **四个等价条件：** 设 $D\subset \mathrm{R}^2$ 为单连通区域，P,Q 偏导数连续，则以下命 题等价.

- $\vec{f}=(P(x,y),Q(x,y))$ 在 D 内为有势场；
- $\vec{f}$ 在 D 内的曲线积分与路径无 关；
- $\vec{f}$ 在 D 内沿任意分段光滑曲线 的曲线积分为零；
- $\vec{f}$ 在 D 内恒有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

第12章　曲面积分

(1) 曲面的表示

* 参数方程 $\sigma(u,v)=(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\,),\ (u,v)\in T\subset \mathrm{R}^2 \Rightarrow$ 基本法向量 $\vec{N}=\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\times\dfrac{\partial\sigma}{\partial v}.$

* 显式方程 $z=f(x,y),\ (x,y)\in D\subset \mathrm{R}^2 \Rightarrow$ 基本法向量 $\vec{N}=\left(-f_x'(x,y),-f_y'(x,y),1\right).$

* 隐式方程 $F(x,y,z)=0,\ \Rightarrow$ 基本法向量 $\vec{N}=\dfrac{1}{F_z'}(F_x', F_y', F_z').$

(2) 曲面面积的计算

* $$S=\iint_T\left|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_D\sqrt{1+[f_x']^2+[f_y']^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{[F_x']^2+[F_y']^2+[F_z']^2}}{\left|F_z'\right|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

第一类曲面积分

(1) 定义及性质：$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$　　意义：面密度为 $f(x,y,z)$ 的曲面 S 的质量.

(2) 第一类曲面积分的计算

$$* \iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_T f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\left|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,;$$

$$* \iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad \text{其中 } S: z = z(x,y),\ (x,y)\in D.$$

$$* \iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\frac{\sqrt{(F_x')^2+(F_y')^2+(F_z')^2}}{\left|F_z'\right|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(3) 第一类曲面积分的应用：曲面的质量、重心、转动惯量等.

第二类曲面积分

(1) 定义及性质：

$$\iint_S \left(\vec{f}(x,y,z)\cdot \boldsymbol{n}^0\right)\mathrm{d}S=\iint_S \vec{f}(x,y,z)\,\mathrm{d}\vec{S}=\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

意义： 向量场 $\vec{f}(x,y,z)$ 通过曲面 S 指定侧的通量（流量）.

(2) 第二类曲面积分的计算:

* 直接计算（投影到各坐标平面，注意曲面的方向）

$$\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{yz}} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x\pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

* 化作第一类曲面积分计算 $\iint_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S \left(\vec{f}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}^0\right)\mathrm{d}S,\ \vec{f}(x,y,z)=(P,Q,R).$

* 利用高斯公式化作三重积分计算（闭曲面 S） $\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

三个重要定理（公式）

格林定理： 设 D 为平面有界闭区域，其 边界 C 是分段光滑曲线， $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 上具有连续偏导数，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

高斯定理： 设 V 是空间有界闭区域，其 边界 S 为分片光滑闭曲面， $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 V 上具有连续偏导数，则 有

$$\oiint_{S_{\text{外侧}}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

斯托克斯定理： 设 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在空间区域 K 内具有连续偏导数，曲 面 S 是 K 内的分片光滑曲面，其边 界 L 为分段光滑曲线，S 的法向与的 L 方向符合右手法则，则 有

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

场论初步

向量场 $\vec{f}(x,y,z)=\big(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\big)$.

- $\vec{f}$ 为**有势场** $\Leftrightarrow$ $\exists\varphi(x,y,z)$, 使得 $\nabla\varphi=\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},\dfrac{\partial\varphi}{\partial y},\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=\vec{f}$.

  $\nabla\varphi$ 为 φ 的**梯度场**； 并称 φ 为 $\vec{f}$ 的**势函数**,有势场亦称 **保守场** .

- $\operatorname{div}\vec{f}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$ 称为 $\vec{f}$ 的**散度场** . 若 $\operatorname{div}\vec{f}\equiv 0$, 则称 $\vec{f}$ 为**无源场** .

- $\operatorname{rot}\vec{f}=\left(\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z},\ \dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x},\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$ 称为 $\vec{f}$ 的**旋度场**. 若 $\operatorname{rot}\vec{f}\equiv 0$, 则称 $\vec{f}$ 为**无旋场**.

有势场* $\Leftrightarrow$ *保守场* $\Leftrightarrow$ *无旋场.

- 若 $\vec{f}$ 既是无旋场又是无源场 ，则称 $\vec{f}$ 为**调和场** . 此时其势函数 $\varphi(x,y,z)$ 满足

  $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$, 此方程称为 **调和方程** (Laplace 方程), φ 称为 **调和函数** .


祝大家考试顺利，
暑假快乐！
谢谢！
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY