6.2.2 LU分解

记原**方程组**为 Ax =b

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

若能将 A分解为**下三角矩阵L**与**上三角矩阵U**之积：

A=LU

则原方程组的求解转化为两个三角形方程组的求解：

Ly=b —— 下三角方程组

Ux=y —— 上三角方程组

6.2.2 LU分解

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} = L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix} \times U=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

- 解方程组Ax=b等价于解方程组LUx=b；
- 可设y=Ux，则Ly=b；
- 因此可先解Ly=b得y，再解Ux=y得x。

6.2.2 LU分解

与Ly=b, Ux=y对应的方程组如下：

$$\begin{cases} y_1 & = 1 \\ 2y_1 + y_2 & = 5 \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_3 = -2 \end{cases}$$

易得：

$(y_1,y_2,y_3)=(1,3,-2)$,

$(x_1,x_2,x_3)=(1,0,-1)$

6.2.2 LU分解

- **LU分解与高斯消元法的联系：**

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r3-(1/2)r1]{r2-2r1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r3-(1/2)r2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \times U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- **问题：LU分解**的**优点在哪里？**