电信班 2020 秋季学期概率论与数理统计期中考试（2020.12.07）

1.

设随机变量（X，Y）的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases} cxe^{-y}, & 0<x<y\le+\infty \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

（1）求常数 c；

（2）求 (X, Y) 的联合分布函数；

（3）求 P（Y−X ≤ 2）。

(1) ① $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1.$

$\int_0^{\infty}dy\int_0^{y} cxe^{-y}dx=\frac{c}{2}\int_0^{+\infty}y^2e^{-y}dy=c=1$

$c=1$

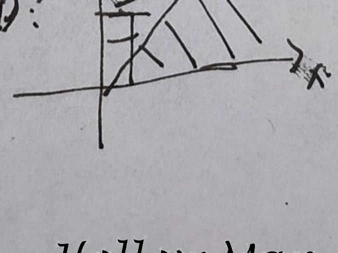
② $F(x,Y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dy\,dx.$

$$=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} xe^{-y}\,dy\,dx, & 0<x<y<+\infty \\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$=\cancel{\int_{-\infty}^{x} x\,dx\int_{-\infty}^{y} e^{-y}\,dy}$$

$$=\begin{cases}\iint_D xe^{-y}\,dx\,dy, & x,y\in D. \\ 0, & 其它.\end{cases}$$

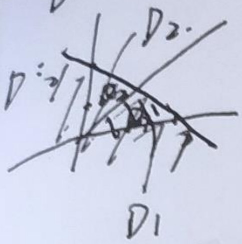
D:



$$=\frac{x^2}{2}e^{-y}-(x+1)e^{-x}+1$$

③ $P(Y-X\le 2)$

$= \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} x e^{-y}\,dx\,dy$



$= (e^{-2}-1)\cdot(x+1)e^{-x}\Big|_0^{+\infty}$

$= 1-\dfrac{1}{e^2}$

2.

设 X 与 Y 都服从参数为θ的指数分布，且相互独立，求 X+Y 的密度函数。

$$P\{X=x\}=\lambda e^{-\lambda x}, P\{Y=y\}=\lambda e^{-\lambda y},$$

$$P\{Z=z\}=\int_0^z P\{X=x\}\cdot P\{Y=z-x\}dx$$

$$=\int_0^z \lambda e^{-\lambda x}\cdot\lambda e^{-\lambda(z-x)}dx=\lambda^2\int_0^z e^{-\lambda z}dx=\lambda^2 z e^{-\lambda z}.$$

(将其中的 λ 换成$\frac{1}{\theta}$即可)

3.

设随机变量（X，Y）的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases} 8xy, & 0\le x\le y\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

求 D（X+Y）。

$\therefore D(X+Y) = D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y).$

$D(X) = E(X^2)-[E(X)]^2.$ $\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY)-E(X)\cdot E(Y).$

$D(Y) = E(Y^2)-[E(Y)]^2.$

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)\,dxdy = \frac{8}{15}.$ $\therefore D(X) = \cancel{\frac{16\times}{450}}\ \frac{11}{150}$

$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y)\,dxdy = \frac{4}{5}.$ $D(Y) = \frac{2}{75}.$

$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x,y)\,dxdy = \frac{4}{9}.$ $\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{4}{225}$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{3}.$ $\therefore D(X+Y) = \frac{61}{450}$

$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x,y)\,dxdy = \frac{2}{3}.$

（注：答案应该为$\frac{1}{9}$，上述答案有误）

4.

五、（10 分）某仪器由 n 个电子元件组成，每个电子元件的寿命服从$[0,1000]$上的均匀分布（单位：h），当有 20% 的元件烧坏时，仪器便报废。求为使该仪器的寿命超过 100 h 的概率不低于 0. 95，n 至少为多大？

解 X_i表示第i个电子元件的寿命，$A_i=\{X_i\ge 100\}$

$P(A_i)=\int_{100}^{\infty} f(x)dx=\int_{100}^{1000}\frac{1}{1000}dx=0.9$。

设Y表示 n 个事件$A_i\,(i=1,2,\cdots,n)$中发生的个数，则

$Y\sim b(n,0.9)$。----------5 分

令 $P\{Y\ge 0.8n\}=P\left\{\frac{Y-0.9n}{\sqrt{n\times 0.9\times 0.1}}\ge\frac{0.8n}{\sqrt{n\times 0.9\times 0.1}}\right\}$

$$\approx 1-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\ge 0.95$$

查表得$\frac{\sqrt{n}}{3}\ge 1.645$， $\Rightarrow n\ge 25$ –5 分