Hollow Man

概率论要点提要

1.

常用离散型分布：

1、0-1分布

X	0	1
P	$1-p$	p

$(0<p<1)$

（伯努利分布、两点分布）

2. 二项分布：有放回，n重伯努利试验.

$X\sim B(n,p)$ $(0<p<1)$

$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$

3. 几何分布：$P(A)=p$，X表示事件A首次出现时的试验次数

$P(X=n)=q^{n-1}\cdot p$，$n=1,2,\cdots$ $q=1-p$.

4. 泊松分布：记为$P(\lambda)$.

$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $(k=0,1,2,\cdots)$. $\lambda>0$.

当n很大，p很小，且np适中时，二项分布$B(n,p)$可以近似计算，它的逼近分布是泊松分布$P(\lambda)$，其中$\lambda\approx np$.

2.

1. 均匀分布

X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

其中a,b为两个参数，且$a<b$，并记为$X\sim R(a,b)$.

2. 指数分布

X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

其中$\lambda>0$为常数，记为$X\sim E(\lambda)$.

3. 正态分布

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ （μ,σ都是常数，$\sigma>0$），记为$N(\mu,\sigma^2)$

可加性：

1. 泊松分布：$X \sim P(\lambda_1)$，$Y \sim P(\lambda_2)$ 且 X, Y 相互独立，

则 $X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

2. 二项分布：$X \sim B(m,p)$，$Y \sim B(n,p)$，且 X, Y 相互独立，

则 $X+Y \sim B(m+n, p)$

3. 正态分布：$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 且 X, Y 相互独立，

则 $X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

$X-Y \sim N(\mu_1-\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

3.

2. 二项分布：$X \sim B(n,p)$

$EX = np$，$DX = np(1-p)$

3. 泊松分布：$X \sim P(\lambda)$

$EX = \lambda$，$DX = \lambda$

4. 指数分布：$X \sim E(\lambda)$

$EX = \frac{1}{\lambda}$，$DX = \frac{1}{\lambda^2}$

5. 正态分布：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$EX = \mu$，$DX = \sigma^2$

4.

数学期望：

1. $E(c)=c$，c为常数

2. $E(aX+bY)=aEX+bEY$，a,b为常数

3. 如X,Y独立，则 $EXY=EX\cdot EY$.

方差和协方差：

1. $D(c)=0$，c为常数

2. $D(aX)=a^2DX$，a为常数

3. $D(X\pm Y)=DX\pm 2cov(X,Y)+DY$

当X,Y相互独立时，$cov(X,Y)=0$

4. $cov(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=E[(X-EX)(Y-EY)]$

$DX=EX^2-(EX)^2=E[(X-EX)^2]$（二阶中心矩）.

称$E(X^k)$为X的k阶原点矩，称$E[(X-EX)^k]$为X的k阶中心矩

相关系数：

$$\rho_{X,Y}=\frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

1. $|\rho_{X,Y}|\leq 1$

2. $\rho_{X,Y}=0$，称之为X与Y不相关

3. $|\rho_{X,Y}|=1$，称之为X与Y完全相关

$\Leftrightarrow$ 存在常数a,b，使得 $P(Y=aX+b)=1$

5.

1. 样本均值：$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

2. 样本方差：$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

$$S_*^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

6. 全概率公式，贝叶斯公式，古典概型的计算，抽象计算

全概率公式：

设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，且 $P(A_i)>0,1\leq i\leq n$. 又事件 B 满足

$$B=\bigcup_{i=1}^{n}BA_i, \tag{7}$$

则有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i). \tag{8}$$

贝叶斯公式:

设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互斥,且 $P(A_i)>0,i=1,\cdots,n$,事件 B 满足条件

$$B=\bigcup_{i=1}^{n}BA_i,$$

且 $P(B)>0$,则对任一 $1\leqslant i\leqslant n$,有

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B\mid A_k)}. \tag{9}$$

抽象计算

1. 已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$,随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$ 及条件概率 $P(B\mid A)=0.8$,试求 $P(AB)$ 及 $P(\overline{A}\overline{B})$.

解 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=0.5\times0.8=0.4$,

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$
$$=1-0.5-0.6+0.4=0.3.$$

7.

已知二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}k(1-x)y, & 0<x<1,0<y<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$,求:

(1) 常数 k;

(2) 分别求关于 X 及关于 Y 的边缘密度函数;

(3) X 与 Y 是否独立, 为什么.

5. (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$

$\int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx=1$

$k\int_0^1\int_0^x (1-x)y\,dy\,dx=1$

$k\int_0^1 \frac{(1-x)x^2}{2}\,dx=1$

$\frac{k}{2}\times\frac{1}{12}=1 \Rightarrow k=24$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^x 24(1-x)y\,dy$
$=24(1-x)\times(\frac{1}{2}x^2)$
$=12x^2(1-x)$ $(0<x<1)$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$
$=\int_y^1 24(1-x)y\,dx=12y(y^2-2y+1)$
$=12y(y-1)^2$ $(0<y<1)$

(3) 不独立，当在连续点$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$时，

$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=6$

$f_X(x)=\frac{3}{2}$

$f_Y(y)=\frac{3}{2}$

$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=6\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)=\frac{9}{4}$

$\therefore$ 不独立

8. 压缩映像原理（解题例题）

设随机变量 X 服从 $(1,2)$ 上的均匀分布，写出 $Y=e^{2X}$ 的分布函数和密度函数。

1. $X\sim U(1,2)$

$\Rightarrow P\{Y\le y\}=P\{e^{2X}\le y\}=P\{X\le \frac{1}{2}\ln y\}$

当 $\frac{1}{2}\ln y<1$，即 $0<y<e^2$ 时，$F_Y(y)=0$

当 $\frac{1}{2}\ln y\ge 2$ 即 $y>e^4$ 时，$F_Y(y)=1$

当 $e^2\le y\le e^4$ 时，$F_Y(y)=\int_1^{\frac{1}{2}\ln y} 1\,dy=\frac{1}{2}\ln y-1$

$$\therefore F_Y(y)=\begin{cases}0 & 0<y<e^2\\ \frac{1}{2}\ln y-1 & e^2<y<e^4\\ 1 & y>e^4\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2y} & e^2<y<e^4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

9.

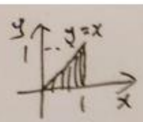
设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2,\ 0\le y\le x\le 1,\\ 0,\qquad 其他.\end{cases},$$

求 $EX, EXY, E(X^2+Y^2), DX.$

(要写出具体解题过程)

3.



$EX=\int_0^1 dx\int_0^x x\,12y^2 dy=\frac{4}{5}$

$EXY=\int_0^1 dx\int_0^x x\,12y^3 dy=\frac{1}{2}$

$E(X^2+Y^2)=EX^2+EY^2=\int_0^1 dx\int_0^x x^2\,12y^2 dy+\int_0^1 dx\int_0^x y^2\,12y^2 dy$

$=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{16}{15}$

$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{2}{3}-\frac{16}{25}=\frac{2}{25}$

10.

(1) 设 $(X_1,X_2\ X_3,X_4)$ 是取自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的样本, 则统计量 $Y=\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_3-X_4)^2}$ 的分布为? 自由度为?

(2) 设 $(X_1,X_2\ X_3,X_4)$ 是取自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本, 则统计量 $Y=\frac{(X_3-X_4)^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(X_i-\mu)^2}}$ 的分布为? 自由度为?

(写出具体推导过程)

5.(1) $Y=\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_3-X_1)^2}$ $\quad E(X_1+X_2)=0 \quad D(X_1+X_2)=2\sigma^2$

$E(X_3-X_4)=0 \quad D(X_3-X_4)=2\sigma^2$

$$\therefore 原式=\frac{\left(\frac{X_1+X_2-0}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^2/1}{\left(\frac{X_3-X_4-0}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^2/1} \Rightarrow Y\sim F(1,1)$$

自由度为1, 1

(2) $$X'=\frac{(X_3-X_4)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(X_i-\mu)}}=\frac{\frac{(X_3-X_4)^2}{\sqrt{2\sigma^2}}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{2}(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}}=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{2}}}$$

$X\sim N(0,1) \quad Y\sim \chi^2(2)$

$\therefore X'=t(2)$ 自由度为2

11.

1. χ^2分布：设$X_1,\cdots,X_n$为独立标准正态变量，称随机变量$U=X_1^2+\cdots+X_n^2$的分布为自由度为n的χ^2分布，记为$U\sim\chi^2(n)$，且$EU=n$，$DU=2n$.

2. t分布：若随机变量X与Y相互独立，且$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，则称$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$的分布为自由度为n的t分布，记为$T\sim t(n)$

3. F分布：若随机变量U与V相互独立，且$U\sim\chi^2(n)$，$V\sim\chi^2(m)$，称$F=\frac{U/n}{V/m}$的分布为自由度(n,m)的F分布，记为$F\sim F(n,m)$.

12.

问 6.1 对于连续型随机变量 $X \sim f_X(x)$，$Y = g(X)$ 的密度函数为什么是 $f_Y(y) = f_X(h(y))\,|h'(y)|$？这里 $y = g(x)$ 是一单调可导函数，$x = h(y)$ 是 $y = g(x)$ 的反函数.

答 为了说明这个结果，我们先给出 Y 的分布函数

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(g(X) \leqslant y).$$

当 $g(x)$ 为单调增加函数时，可得 $h'(y) > 0$，且

$$F_Y(y) = P(g(X) \leqslant y) = P(X \leqslant h(y)) = \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)\,\mathrm{d}x,$$

此时 $f_Y(y) = F'_Y(y) = f_X(h(y))h'(y)$.

当 $g(x)$ 为单调递减函数时，可得 $h'(y) < 0$，且

$$F_Y(y) = P(g(X) \leqslant y) = P(X \geqslant h(y)) = \int_{h(y)}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x,$$

此时 $f_Y(y) = F'_Y(y) = f_X(h(y))(-h'(y))$，即 $f_Y(y) = f_X(h(y))\,|h'(y)|$.

在使用这条性质时，一定要注意 $y = g(x)$ 为单调函数且可导.

问 6.2 什么是卷积公式？在使用卷积公式中要注意些什么？

答 随机变量 X 与 Y 独立，且 $X \sim f_X(x)$，$Y \sim f_Y(y)$，称随机变量 $Z = X + Y$ 的密度函数的表达式 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x)\,\mathrm{d}x$ 为卷积公式. 此公式给出了 $X + Y$ 这 种简单随机变量函数的分布.

在卷积公式中，往往 $f_X(x)$，$f_Y(y)$ 是分段函数，因此，须分段求积分，且分段积分的上、下限可能会与 z 有关，必须小心处理.

13.

五、(10 分) 某仪器由 n 个电子元件组成，每个电子元件的寿命服从 $[0, 1000]$ 上的均匀分布（单位：h），当有 20% 的元件烧坏时，仪器便报废。求为使该仪器的寿命超过 100 h 的概率不低于 0.95，n 至少为多大？

解 X_i 表示第 i 个电子元件的寿命，$A_i = \{X_i \geq 100\}$

$P(A_i) = \int_{100}^{\infty} f(x)dx = \int_{100}^{1000} \frac{1}{1000}dx = 0.9$。

设 Y 表示 n 个事件 $A_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 中发生的个数，则

$Y \sim b(n, 0.9)$。----------5 分

令 $P\{Y \geq 0.8n\} = P\left\{\frac{Y - 0.9n}{\sqrt{n \times 0.9 \times 0.1}} \geq \frac{0.8n}{\sqrt{n \times 0.9 \times 0.1}}\right\}$

$$\approx 1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \geq 0.95$$

查表得 $\frac{\sqrt{n}}{3} \geq 1.645$，$\Rightarrow n \geq 25$ –5 分

14.

$f(x)$	$\int_0^{+\infty} f(x)dx$	备注	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$
$x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}$	$\sqrt{\pi}$	$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	\
e^{-x}	1	$\Gamma(1)$	\
$x^{\frac{1}{2}}e^{-x}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$	\
xe^{-x}	1	$\Gamma(2)$	\
e^{-x^2}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	$\sqrt{\pi}$
xe^{-x^2}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\Gamma(1)$	\
$x^2e^{-x^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{4}$	$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
$e^{-\frac{1}{2}x^2}$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$	$\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$	$\sqrt{2\pi}$
$xe^{-\frac{1}{2}x^2}$	1	$\Gamma(1)$	\
$x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$	$\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$	$\sqrt{2\pi}$

15.

		条件	置信区间（左、右端点）
单正态总体	均值 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间	σ^2 已知	$\overline{X}-u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}+u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
		σ^2 未知	$\overline{X}-t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}, \overline{X}+t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}$，其中 $S^*=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$
	方差 σ^2 的 $1-\alpha$ 置信区间	μ 已知	$\frac{n\widehat{\sigma^2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{n\widehat{\sigma^2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}$，其中 $\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$
		μ 未知	$\frac{nS^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{nS^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$

16.

表 11.2　正态总体均值假设检验表

	H_0	H_1	条件	拒绝域
单正态总体	$\mu=\mu_0$	$\mu>\mu_0$	σ^2 已知	$\left\{\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma}>u_{1-\alpha}\right\}$
			σ^2 未知	$\left\{\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{s^*}>t_{1-\alpha}(n-1)\right\}$
		$\mu<\mu_0$	σ^2 已知	$\left\{\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma}<-u_{1-\alpha}\right\}$
			σ^2 未知	$\left\{\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{s^*}<-t_{1-\alpha}(n-1)\right\}$
		$\mu\neq\mu_0$	σ^2 已知	$\left\{\dfrac{\sqrt{n}\lvert\bar{x}-\mu_0\rvert}{\sigma}>u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$
			σ^2 未知	$\left\{\dfrac{\sqrt{n}\lvert\bar{x}-\mu_0\rvert}{s^*}>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$

H_0	H_1	条件	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$ (σ_0^2 已知)	$\sigma^2>\sigma_0^2$	μ 已知	$\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n)\right\}$
		μ 未知	$\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}$
	$\sigma^2<\sigma_0^2$	μ 已知	$\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{\alpha}(n)\right\}$
		μ 未知	$\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{\alpha}(n-1)\right\}$
	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	μ 已知	$\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\ 或\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right\}$
		μ 未知	$\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\ 或\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$

17.

3. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的一个样本，其中 X 服从区间 $(0, \theta)$ 上的均匀分布，其中 $\theta > 0$ 未知，求 θ 的矩估计量.

解 $E(X) = \frac{\theta}{2}$，令 $\frac{\theta}{2} = \overline{X}$，故 θ 的矩估计量 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$.

4. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的一个样本，X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 未知，求 θ 的矩估计量与最大似然估计量.

解 $E(X) = \int_0^\theta x \cdot \frac{2x}{\theta^2} dx = \frac{2}{3}\theta$，令 $\frac{2}{3}\theta = \overline{X}$，故 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \frac{3}{2}\overline{X}$.

另，似然函数为

$$L(\theta) = \begin{cases} \frac{2^n}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^n X_i, & 0 < X_i \leqslant \theta, i = 1, \cdots, n, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2^n}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^n X_i, & \theta \geqslant \max_i X_i, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$L(\theta)$ 作为 θ 的函数不连续. 当 $\theta \geqslant \max_i X_i$ 时，$L(\theta)$ 是 θ 的递减函数. 故当 $\theta =$

$\max_i X_i$ 时，$L(\theta)$ 达到最大值. 即 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \max_i X_i$.

18.

2. 假定某商店中一种商品的月销售量服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，σ 未知. 为了合理地确定商店对该商品的进货量，需对 μ 和 σ 作估计，为此随机抽取七个月，其销售量分别为

64，57，49，81，76，70，59，

试求 μ 的双侧 0.95 置信区间和方差 σ^2 的双侧 0.90 置信区间.

解 由于 μ 和 σ 都未知，故 μ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}\right],$$

σ^2 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\frac{nS^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{nS^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right].$$

代入数据得

$$\bar{x} = 65.14, \quad s^2 = 108.41, \quad s^* = 11.25, \quad t_{0.975}(6) = 2.45, \quad n = 7,$$

$$\chi^2_{0.95}(6) = 12.592, \chi^2_{0.05}(6) = 1.635.$$

μ 的双侧 0.95 置信区间观测值为 $\left[65.14 - 2.45 \times \frac{11.25}{\sqrt{7}}, 65.14 + 2.45 \times \frac{11.25}{\sqrt{7}}\right]$，即为[54.73，75.56].

19.

11. 随机地从一批外径为 1 cm 的钢珠中抽取 10 只,测试其屈服强度(单位:kg),得数据 $x_1,\cdots,x_{10}$,并由此算得 $\bar{x}=2200$,$s^*=220$,已知钢珠的屈服强度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下分别检验:

(1) $H_0:\mu=2000\ (H_1:\mu>2000)$;

(2) $H_0:\sigma^2=200^2(H_1:\sigma^2>200^2)$.

解 (1) 拒绝域 $R=\{T>c\}$,其中 $c=t_{0.95}(n-1)=1.8331$. T 的观测值为

$$t=\sqrt{10}\,\frac{(\bar{x}-2000)}{s^*}=\sqrt{10}\,\frac{(2200-2000)}{220}\approx 2.875>c,$$

所以拒绝 H_0.

(2) 拒绝域 $R=\{\chi^2>c\}$,其中

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^{*2}}{200^2},\quad c=\chi^2_{1-\alpha}(n-1)=\chi^2_{0.95}(9)=16.919.$$

今 χ^2 的观测值为 $\chi^2=\frac{9\times 220^2}{200^2}=\frac{435600}{200^2}=10.89<c$,因而不能拒绝 H_0.