第一届兰州大学数学协会数学建模竞赛

- 队伍编号：2019008

队员：　蒋嵩林　肖锦恒　白舒睿

Hollow Man

做答题目：A　　　SARS 的传播

目录

摘要：

本文针对 SARS 的传播以及对经济的影响分别建立了数学模型。

首先，分析了附件 1 提供的早期模型，指出了其的不足。

对于第二问， 在分析常用传染病模型的局限性后， 文中把人群所处的状态明确分类为病人、健康人和治愈者，根据各阶段的转化关系建立了数学模型。同时通过对 5 月 10 日以前数据的拟合，经过 500 次模拟，对北京的疫情进行了预测，预测结果与实际情况符合得很好。根据这些预测，文中对卫生部门采取控制措施提出了相关建议。

对第三个问题，本文研究 SARS 对入境旅游人数的影响，建立了数学模型。通过数据拟合的方法确定日增长病例数对旅游人数的影响，预测 9-12 月份入境旅游人数。

对于第四个问题，我们写了一篇通俗短文，说明了建立传染病数学模型的重要性。

关键词：SARS、传染病、数学模型

一、 给出的模型评价

1.1 问题背景

SARS（Severe Acute Respiratory Syndrome，严重急性呼吸道综合症，俗称：非典型肺炎）是 21 世纪第一个在世界范围内传播的传染病。SARS 的爆发和蔓延给我国的经济发展和人民生活带来了很大影响，在病例数比较多的地区，用数理模型作分析，可以定量地研究传染病的传播规律、为预测和控制传染病蔓延创造条件。

1.2 模型概述

给出的模型用解析公式分析了北京 SARS 疫情前期的走势。在此基础上，模型加入了每个病人可以传染他人的期限（由于被严格隔离、治愈、死亡等），并考虑在不同阶段社会条件下传染概率的变化，然后先分析香港和广东的情况以获得比较合理的参数，最后初步预测北京的疫情走势。

该模型假定初始时刻的病例数为 N_0，平均每病人每天可传染 K 个人(K 一般为小数)，平均每个病人可以直接感染他人的时间为 L 天。则在 L 天之内，病例数目的增长随时间 t(单位为天)的关系是：

$$N(t)=N_0(1+K)^t$$

该模型考虑了传染期限 L 的作用，采用半模拟循环计算的办法，把到达 L 天的病例从可以引发直接传染的基数中去掉。为了简化模型把它固定在 20（天）上这个值，使其具有一定统计上的意义。

参数 L 理解为平均每个病人在被发现前后可以造成直接传染的期限，在此期限后他失去传染作用，可能的原因是被严格隔离、病愈不再传染或死去等等。

参数 K 显然代表某种社会环境下一个病人传染他人的平均概率，与全社会的警觉程度、政府和公众采取的各种措施有关。为了简单起见，模型从开始至到高峰期间均采用同样的 K 值（从拟合这一阶段的

数据定出),即假定这阶段社会的防范程度都比较低,感染率比较高。到达高峰期后，我们在 10 天的范围内逐步调整 K 值到比较小，然后保持不变，拟合其后在控制阶段的全部数据，即认为社会在经过短期的剧烈调整之后，进入一个对疫情控制较好的常态。

1.3 模型评价

该模型符合一般传染病学的传播规律和传染病基本模型，模型简单，具有科学性。

该模型同时又存在较大缺陷。

从原理上讲，模型中的参数 L 主要与医疗机构隔离病人的时机和隔离的严格程度有关，只有医疗机构能有效缩短这个参数。传染期限 L 的确定缺乏医学上的支持，使模型的说服力降低。且随着疫情的发展，一定会出现医疗机构的治疗手段提高和确诊病例效率的提升，届时这里的 L 值将会变得不再适用。新的 L 值的确定具有很高的困难性。

对于模型中的 K 值，在疾病初发期，社会来不及防备，此时 K 值比较大。此后 K 值随着疫情的控制，会逐渐降低。显然，如果疫情出现失控或反复的状态，则 K 值需要做更多的调整。模型中借鉴广东香港的参数来预测北京的疫情走势，不失为一种方法，但在不同地区因政策，地域的不同，病毒的传播和控制呈现不同的特点，使不同城市之间的可比性降低。故借鉴法存在一定的适用范围，且不能对首发城市进行预测。故 K 值的确定又具有很高的困难性。

总之，该模型无法针对特定的某一阶段和地区，做出准确预测，存在局限性。

用一句话概括：模型简单，可以解决当时的问题，但不能解决今天的问题。

二、 SARS 传播模型的建立

2.1 问题分析

对于一个优良的 SARS 传播模型，它必须要能够描述传染病的传播过程，通过分析受感染人数的变化规律，能够预报传染病高潮到来的时刻，指示出预防传染病蔓延的手段。因此，我们将按照传播过程的一般规律，即 SARS 传染病具有免疫性——病人治愈后即移出感染系统，采用机理分析方法建立模型。

2.2 假设与符号说明

1. 总人数 N 不变，病人、健康人和治愈者（治愈后移出感染系统）人数的比例分别为 $i(t),s(t),r(t)$。

2. 病人的日接触率为 λ，日治愈率为 μ，接触数 $\sigma=\lambda/\mu$。

2.3 建模与问题求解

考察整个群体对于 SARS 的情况，可分类为病人、健康人和治愈者。

∴ 由假设知：

$$i(t)+s(t)+r(t)=1 \tag{1}$$

要求解此方程，我们还需要建立关于 $i(t),s(t),r(t)$的两个方程。

在 Δt 的时间里，病人增加的人数为 $N\,[i(t+\Delta t)-i(t)]$。这段时间增加的病人是由已经患病的病人接触健康人产生的，减去已经治愈的病人数，得到以下方程：

$$N\,[i(t+\Delta t)-i(t)] = \lambda N s(t)i(t)\Delta t - \mu N i(t)\Delta t \tag{2}$$

同样地，在 Δt 的时间里，减少的健康人数是由已经患病的病人接触健康人产生的，所以得到以下方程：

$$N\,[s(t+\Delta t)-s(t)] = -\lambda N s(t)i(t)\Delta t \tag{3}$$

由(1)(2)(3)可得出以下方程：

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ s(0) = s_0 \\ i(0) = i_0 \end{cases} \qquad (4)$$

其中$i_0 + s_0 \approx 1$(因为传染一开始通常还没有治愈者，所以$r(0) = r_0$很小)

此方程无法求出 $s(t)$, $i(t)$的解析解，所以我们只有在相平面 s-i 上研究解的性质。

将**(4)**消去 **dt**,用 $\sigma=\lambda/\mu$ 替换得:

$$\begin{cases} \frac{di}{ds} = \frac{1}{\sigma s} - 1 \\ i|_{s=s_0} = i \end{cases} \qquad (5)$$

由**(5)**得到相轨线:

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma} ln \frac{s}{s_0}$$

相轨线 $i(s)$的定义域为:

$$D = \{(s, i)|s \geq 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

采用 Matlab，在 D 内作相轨线 $i(s)$的图形，采用数据如下:

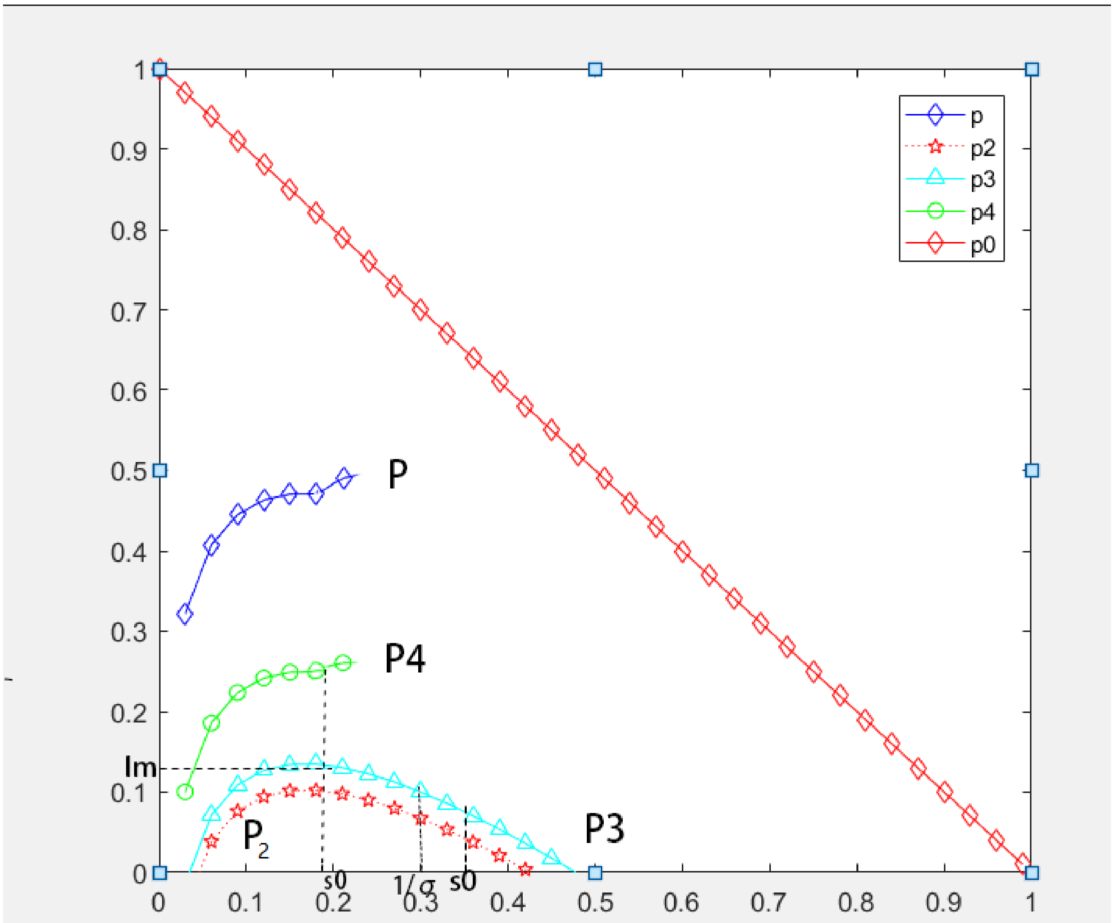
曲线	S0	i0	Δ	1/Δ
P	0.8	0.1	6	0.167
P_2	0.14	0.1	6	0.167
P_3	0.3	0.1	6	0.167
P_4	0.5	0.1	6	0.167

源代码如下:

```
s=0:0.03:0.5;i=(0.9)-s+0.167*log(s/0.8);
s2=0:0.03:1;i2=(0.24)-s2+0.167*log(s2/0.14);
s3=0:0.03:1;i3=(0.4)-s3+0.167*log(s3/0.3);
s4=0:0.03:0.5;i4=(0.6)-s4+0.167*log(s4/0.5);
```

```
s0=0:0.03:1;i0=-s0+1;
plot(s,i,'bd-',s2,i2,'rp:',s3,i3,'c^-',s4,i4,'go-',s0,i0,'rd-');
legend('p','p2','p3','p4','p0');
axis([0,1,0,1])
```

对图片进行处理后，如下：



图形中 $s(t)$ 单调减的方向就是相轨线的方向。

对图形进行分析，得：

$$s=\frac{\lambda}{\mu},\ i=i_m\quad t\to\infty,i\to 0$$

s_∞满足$s_0+i_0-s_\infty+\frac{1}{\sigma}ln\frac{s_\infty}{s_0}=0$

P_1：$s_0>1/\sigma$ → $i(t)$ 先升后降至0 → 传染病蔓延

P2：$s_0<1/\sigma$ → $i(t)$ 单调降至0 → 传染病不蔓延

由此可得阈值为 $1/\sigma$。

∴为了预防传染病蔓延，我们应该采取

1. 提高阈值 $1/\sigma$，即降低 σ。又∵$\boldsymbol{\sigma=\lambda/\mu}$ ∴即 $\boldsymbol{\lambda}$↓，$\boldsymbol{\mu}$↑，提升卫生水平，降低感染率，同时提高医疗水平。

2. 降低$\boldsymbol{s_0}$。又∵$i(t)+s(t)+r(t)=1$ ∴即提高$\boldsymbol{r_0}$，加紧研发疫苗，同时使群体免疫。

对于参数 σ，下面我们将对其进行估值：

对于

$$\boldsymbol{s_0+i_0-s_\infty+\frac{1}{\sigma}ln\frac{s_\infty}{s_0}=0}$$

忽略$\boldsymbol{i_0}$得：

$$\boldsymbol{\sigma=(lns_0-\ln s_\infty)/(s_0-s_\infty)}$$

下面我们对被传染人数进行估算：

记被传染人数比例 x=$\boldsymbol{s_0-s_\infty}$，由：

$$\begin{cases}\boldsymbol{s_0+i_0-s_\infty+\frac{1}{\sigma}ln\frac{s_\infty}{s_0}=0}\\ \boldsymbol{i_0\cong 0,\ s_0\cong 0}\end{cases}$$

得：

$$\boldsymbol{x+\frac{1}{\sigma}\ln(1+\frac{x}{s_0})\cong 0}$$

又∵当$\boldsymbol{x} \ll \boldsymbol{s_0}$时，有：

$$\left(1-\frac{1}{s_0\sigma}-\frac{x}{2{s_0}^2\sigma}\right) \cong 0$$

得：

$$x \approx 2s_0\sigma(s_0-\frac{1}{\sigma})$$

又∵$s_0-\frac{1}{\sigma}=\delta$，$\delta$小，$s_0\,\sigma \cong 1$

∴$x \cong 2\delta$

∴为提高阈值 *1/σ*，我们应该降低被传染人数比例 *x*。

用上述方法采用 2003 年 4 月 29 日至 5 月 20 日北京公布的发病人数得出北京这一时期作为疫情降落期的疫情演化函数为：(取 4 月 29 日为 $t=0$)：

N(t) =2579. 9 - 1217e- 0. 1000 t(±40)

2.4 模型优势

本模型继承了示例模型中的优点，同时通过将整个样本群体分类为病人、健康人和治愈者，有效地解决和回避了示例模型中的 K 和 L 取值问题，适用于不同阶段的疫情情况分析。

2.5 对卫生部门所采取的措施的评论

由 2.3 中的模型与问题求解可知，为了预防传染病蔓延，我们应该采取提高阈值 *1/σ*，即 $\lambda\downarrow$，$\mu\uparrow$，提升卫生水平，降低感染率，及时采取严格的隔离措施，同时提高医疗水平，加紧研发疫苗，使群体免疫。

将附件二中所示数据带入模型中得,提前 5 天采取严格的隔离措施， 将使疫情解除的时间提前约 10 天，累计人数降至 1958 人；若延迟 5 天采取措施，疫情将推迟 11 天，累计人数达 4487 人。可知提前 5 天采取严格的隔离措施,将会比延后 5 天采取措施产生更好的预防传染病蔓延效果。

三、 SARS 对经济影响模型的建立

3.1 问题分析

从题中数据可以看出 SARS 对旅游行业造成了严重的影响，影响最大的是五月，海外旅游人数下降到了 1.78 万人，比去年下降了 27.22 万人，占 99.34%。SARS 过后海外旅游人数有了较快的回升，在近期有望达到疫前水平。

从历年各月旅游人数的数据可以看出， 近年来旅游行业保持着良好势头， 中国旅游业的进步是有目共睹的。如果没有 SARS， 2003 年旅游业仍然会保持持续增长。 SARS 只是一个突发事件， 不会对旅游业造成长期的影响， 不过在近几个月还有一个恢复的过程。

因此认为对 2003 年今后几个月旅游人数的影响因素有：

1、 旅游业内在的发展动力。 如不断增加旅游业投资， 为 2008 年奥运会做的建设等。

2、 SARS 流行期间对旅游业的影响。

两种因素的影响特点有：

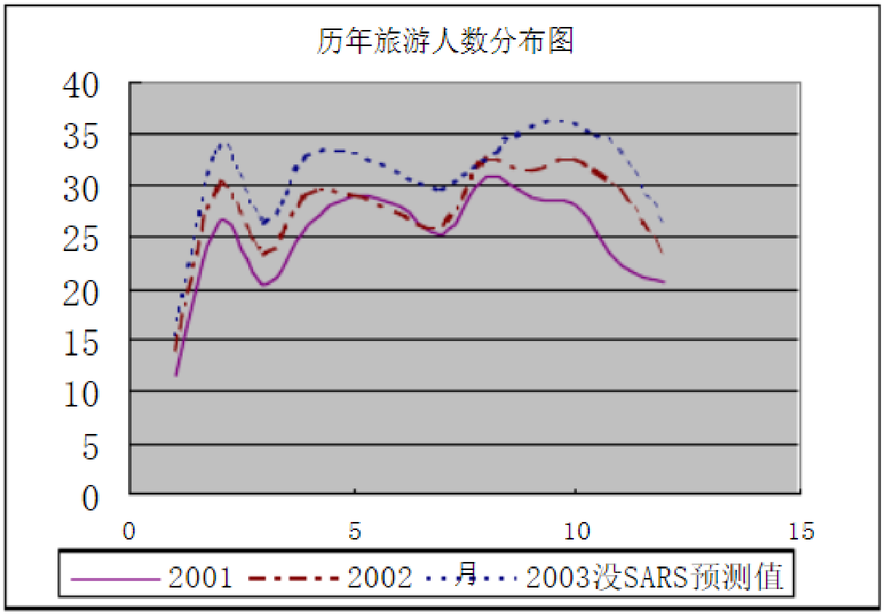
第一种是旅游业进步的内在本质因素，具有根本性、长期性。第二种是突发事件，是偶然因素，具有暂时性，作用效果看有突出重要性。

分别分析两种力量对 2003 年旅游业的作用，两种力量的效果是独立影响的，最后把两种效果叠加起来。

3.2 模型求解

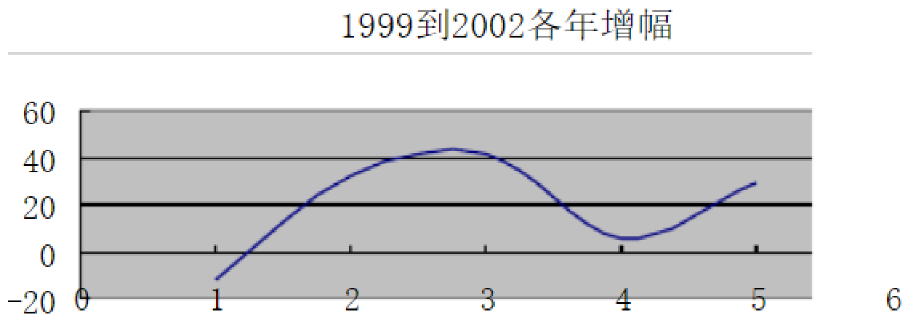
1、不考虑 SARS 对 2003 年各月旅游人数的预测

从 1997—2002 年的数据可以看出，各月人数的分布有明显的规律性：



规律一： 历年各月都在不断增长， 从 1999 年到 2002 年 4 年的平均增幅为 27.2 万人。

增长过程见下图。我们做了每月与历年该月的相关性检验，发现各月与前两年的该月份显著相关。



规律二： 每年中各月的大小关系基本不变，表现为人数同时上升，同时下降，且各月的增幅比例大致相同。 我们也用 MatLab 做了 12 个月中每个月与相邻几个月的相关性检验，发现有一定相关性。如果有足够的数据，我们希望得出这样的相关关系：

$$\mathrm{F(i,j)} = \sum r_k F(i-k,j) + \sum \theta_l F(i,j-l)$$

$\mathbf{F(i,j)}$表示第$\boldsymbol{i}$年，$\boldsymbol{j}$月的人数；$\boldsymbol{r_k}$反映历年该月的影响；$\boldsymbol{\theta_l}$反映相邻月份的影响。但是目前得到的数据太少，不能统计出相关系数。下面从数据的特点预测没有 SARS 影响的各月旅游人数。

近几年来，旅游业的不断进步，必然吸引越来越多的国外游客。不过各年的增幅有一些波动，其实有点波动是很正常的，因为事物都是在曲折中前进，螺旋式上升的。

由上图可见，2001 到 2002 年（4 点到 5 点）的增长轨迹与 1998-1999-2000 年（ 1-2-3 点）的增长轨迹很相似。从 1998 年开始经过两年快速增长期后，进入一个低速增长期，两个时期的总长约为 3 年。2001 年开始的快速增长，很可能又要进入下一个快速增长期，可推测 2003 年在 2002 年的基础上会增长 40 万人。这 40 万总增量分配到 12 个月中，分配比例按表 1 中的统计比例。得到 2003 年各月的预计值并比较：

表1：各月份增幅比较

月份	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月
平均增幅	1.025	2.17	1.825	2.25	2.375	2.4
增幅比例	0.041214	0.087254	0.073382	0.09047	0.095497	0.096502
月份	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
平均增幅	2.05	2.225	2.5	2.025	2.275	1.75
增幅比例	0.082429	0.089465	0.100523	0.081423	0.091476	0.070366

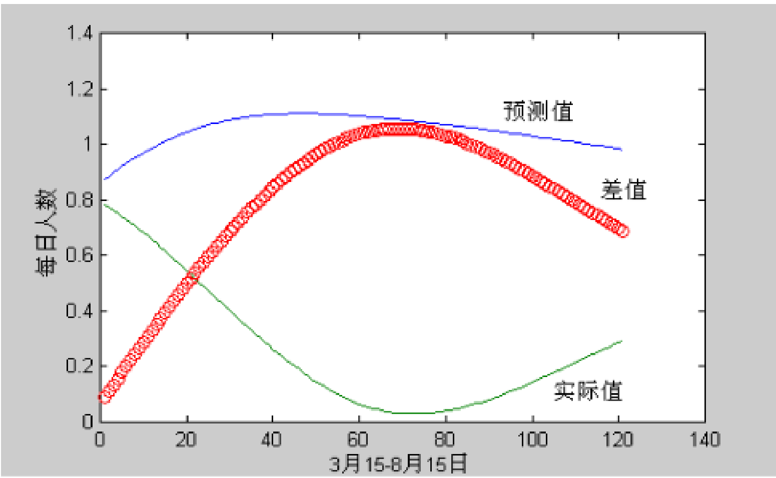
表2：2003 年预测值

1 月,	2 月,	3 月,	4 月,	5 月,	6 月
15.431,	33.36466,	26.18203,	32.69976,	33.01086,	31.45308
7 月,	8 月,	9 月,	10 月,	11 月,	12 月
29.462,	32.2,	35.62195,	36.01978,	33.04198,	25.85537

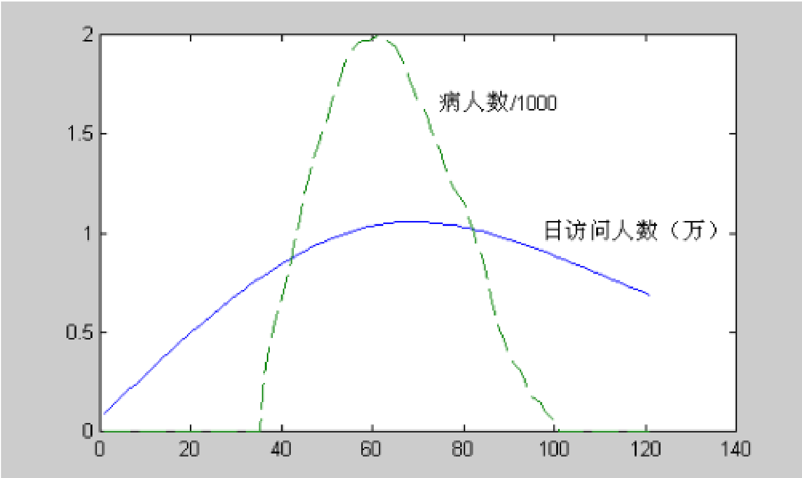
2、考虑 SARS 对旅游人数的影响

用 2003 年的预测值减去 2003 年 8 月以前的实际值，可看出 SARS 减少的旅游人数，如下图。其中对 2003 年 2 月作了处理， 2 月时北京没有 SARS,而且 1 月、3 月的人数比 2002 年都有增加，符合增长规律。则 2 月份旅游人数的降低（近一半），由其他突发因素引起。用 2002 年 2 月的数据替换。

考虑到 SARS 的蔓延是每天变化的， 把每月的旅游人数离散到每天。 把每月人数作平均，作三次样条插值，得到光滑的曲线，曲线上的点反映每天访问人数。如下图，差值曲线反映了 SARS 没天减少的访问人数。



我们发现每天减少的访问人数有个峰值， 这个峰值出现在 5 月，6 月之间，到 8 月时已经过。说明 SARS 对 5、6 月影响最大，到 8 月已逐渐减弱。关于 SARS 的指标有多个，如果有个指标能反映对旅游者心理的影响，则 SARS 对旅游业影响减弱时这个指标也下降。经过对众多指标（死亡率，死亡人数，治愈人数，治愈率，疑似患者数，累计患者数）的筛选，选出能较好地反映对旅游人数的影响的指标——每日现有患者数，并和旅游人数变化曲线画在一起观察，如下图。

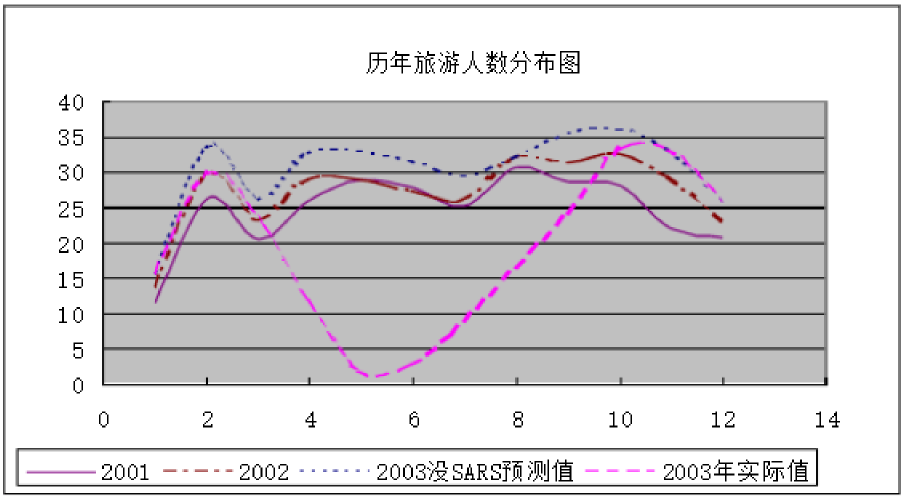


分别选取两条曲线中的两个序列作相关分析，得到每日现有患者数对旅游人数的影响有个时延，这个值为 8 天，也正反映了两条曲线的峰值相差 10 天左右。到 2003 年 6 月 23 日， 患者还有 53 个， 2 个疑似患者， 可以确信 SARS 即将消失，因为已经没有疑似患者，一段时期内多个危险指标没有增长。那么 SARS 对旅游的影响也即将过去。目前患者数和日访问人数都一直保持恒定的下降速度。可从数据得出日访问人数以 0.00976159133019 的斜率降低， 10 月 25 日以后 SARS 已没有影响了。

累加 SARS 对每天访问人数的减少量， 得出 9 月比预计值减少 11.5944 万， 10 月比预计值减少 2.95 万。

最后我们综合两种因素后得到预测值见下表和图。

1月	2月	3月	4月	5月	6月
15.4	29.7	23.5	11.6	1.78	2.61
7月	8月	9月	10月	11月	12月
8.8	16.2	24.02755	33.06888	33.04198	25.85537



以上只分析了旅游业的内在增长因素和 SARS 的打击作用。在 SARS 时期没有旅游的人，可能累积到 SARS 以后旅游，这会使实际旅游人数比预测值大。可见以上只是保守的预测，不过都是很乐观的预测。

四、 建立传染病数学模型的重要性

数学模型是通过大量的实际数据，根据已有的数学知识建立，可以很好的体现数据变化。所以，建立一个传染病数学模型是非常重要的。他可以根据已有的传染数据对现有情况进行分析，从而可以从中

总结经验教训，对以后的传染病的控制采取一系列的有效措施，因而减少感染人数。另外，利用传染病数学模型还可以对未来的疫情进行预测，进而可以未雨绸缪，更好的控制疫情。

建立科学的传染病数学模型模型，进而未雨绸缪，更好的控制疫情，需要我们从以下几个角度入手：

1、 **科学预测，合理分析**

在疫情忽然爆发引起公众普遍关注后，人们最关心的问题有："SARS 疫情将如何发展？何时才能得到有效控制？有没有办法对它进行科学预测？" 以上问题均可以通过建立数学模型来解决。作为中国的首都，同时又是重灾区的北京，正是众人关注的焦点。之前已有模型预测北京在实施严格的隔离政策之后， 4 月底高峰期过后将呈现下降趋势，直至 7 月将实现零增长，届时累计患者数将达 2800 多人。事实证明这一预测虽不全中亦不远矣。

2、 **理智对待，减小恐慌**

在疫情爆发初期，未知病毒的神秘性容易对人造成心理干扰，导致大片人群的恐慌。但根据传染病模型， 我们知道当一个传染期内每个病人有效接触易感者的平均人数小于一个人时，病人的比例将逐渐变小，最终实现零增长。也就是说一旦采用严格控制隔离的方法有效地切断了病源和易感人群的联系，将病人的有效接触人数减少到一个以下，必然可以达到有效控制或消除疾病的目的。

3、**模拟预测，指导控制措施**

一些模型对政府控制的力度和时机作了相应的模拟，为各地区SARS疫情发展前景预测及政府控制疫情政策的制订给出了科学依据，并提出了一些实用的建议。如：及早采取果断控制措施；即使防范措施晚了一些，出现了高峰，但只要控制严格，降低感染率（即严格进行人群隔离，切断传染途径），前景还是乐观的，因为疫期长度与感染人数峰值并不呈正比例关系等。

4、吸取经验教训，预防疫情反弹

即使在疫情已接结束的今天，对传染病模型的研究仍在继续。在此次 SARS 战役中，我们获得了宝贵的数据，也吸取了不少的经验教训。通过模型预测，我们得知，疫情后期绝对不能松懈大意，哪怕是几个病人逃脱控制，也可能造成疫情的反弹，不仅会造成总感染人数的增加，更为严重的是导致疫期的显著延长，由此对我国的国际形象、社会心理、经济增长造成重大损失。

随着对 SARS 的传染病学机理和传播机制越来越了解，我们还可以考虑疫情的空间分布和时间发生的概率，结合计算机进行大量模拟，得出更为全面和准确的模型。

参考文献

[1]姜启源 谢金星 叶俊，《数学模型》，北京：高等教育出版社，2004 年；