Seb's collection of Mathematical procedures

01001

Mathematics 1a (Polytechnical Foundation)

Date: 03 December 2025 **Semester:** 2025 Fall

Sebastian Faber Steffensen (s255609)

Contents

Definitioner

Notation og Symboler

Definition (Spor (Trace))

Sporet af en kvadratisk matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ er summen af diagonalelementerne:

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} \tag{1}$$

For 2×2: $\mathrm{tr}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + d$

Definition (Legemer (Fields))

$\mathbb{F}$ betegner et **legeme** (field) — typisk $\mathbb{R}$ (reelle tal) eller $\mathbb{C}$ (komplekse tal).

$\mathbb{Z}$ betegner de hele tal, $\mathbb{N}$ betegner de naturlige tal (på DTU: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, altså **uden** 0).

Udsagnslogik

Definition (Udsagn (Proposition/Statement))

Et **udsagn** er en påstand der enten er sand (S/T) eller falsk (F).

Definition (Negation)

Negationen af P, skrevet $\neg P$ eller $\overline{P}$, er sand præcis når P er falsk.

Definition (Konjunktion (Conjunction))

Konjunktionen $P \wedge Q$ ("P og Q") er sand præcis når **både** P og Q er sande.

Definition (Disjunktion (Disjunction))

Disjunktionen $P \vee Q$ ("P eller Q") er sand præcis når **mindst én** af P eller Q er sand.

Definition (Implikation (Implication))

Implikationen $P \Rightarrow Q$ ("P medfører Q") er falsk **kun** når P er sand og Q er falsk.

Ækvivalent: $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

Definition (Biimplikation / Ækvivalens (Biconditional))

Biimplikationen $P \Leftrightarrow Q$ ("P hvis og kun hvis Q") er sand præcis når P og Q har samme sandhedsværdi.

Definition (Tautologi (Tautology))

En **tautologi** er et sammensat udsagn der **altid** er sandt, uanset sandhedsværdierne af de atomare udsagn.

Definition (Kontradiktion (Contradiction))

En **kontradiktion** er et sammensat udsagn der **altid** er falsk.

Mængder

Definition (Mængde (Set))

En **mængde** er en samling af distinkte objekter kaldet **elementer**.

$x \in A$ betyder "x er element i A". $x \notin A$ betyder "x er ikke element i A".

Definition (Delmængde (Subset))

$A \subseteq B$ betyder at **alle** elementer i A også er i B.

$A \subset B$ betyder $A \subseteq B$ og $A \neq B$ (ægte delmængde).

Definition (Fællesmængde / Snit (Intersection))

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ og } x \in B\} \tag{2}$$

Elementer der er i **både** A og B.

Definition (Foreningsmængde (Union))

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ eller } x \in B\} \tag{3}$$

Elementer der er i **mindst én** af mængderne.

Definition (Differensmængde (Set Difference))

$$A \setminus B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ og } x \notin B\} \tag{4}$$

Elementer i A som **ikke** er i B.

Definition (Tom mængde (Empty Set))

Den **tomme mængde** $\emptyset = \{\}$ indeholder ingen elementer.

Funktioner

Definition (Funktion (Function))

En **funktion** $f : A \to B$ er en regel der til hvert element $a \in A$ tildeler præcis ét element $f(a) \in B$.

Definition (Definitionsmængde / Domæne (Domain))

Definitionsmængden (domænet) er mængden A af input-værdier for funktionen $f : A \to B$.

Definition (Dispositionsmængde / Kodomæne (Codomain))

Dispositionsmængden (kodomænet) er mængden B af **mulige** output-værdier for $f : A \to B$.

Bemærk: På dansk bruges også “værdimængde” for kodomæne, men dette kan forveksles med billedmængden.

Definition (Billedmængde (Image/Range))

Billedmængden af $f : A \to B$ er mængden af **faktiske** output-værdier:

$$f(A) = \mathrm{im}(f) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B \tag{5}$$

Definition (Injektiv (Injective / One-to-One))

$f : A \to B$ er **injektiv** hvis forskellige input giver forskellige output:

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \tag{6}$$

Ækvivalent: Hver værdi i B rammes af **højst** ét element fra A.

Definition (Surjektiv (Surjective / Onto))

$f : A \to B$ er **surjektiv** hvis $f(A) = B$, dvs. **alle** elementer i B rammes.

Ækvivalent: Hver værdi i B rammes af **mindst** ét element fra A.

Definition (Bijektiv (Bijective))

$f : A \to B$ er **bijektiv** hvis f er både injektiv og surjektiv.

Ækvivalent: Hver værdi i B rammes af **præcis** ét element fra A.

Definition (Invers funktion (Inverse Function))

Hvis $f : A \to B$ er bijektiv, eksisterer den **inverse funktion** $f^{-1} : B \to A$ hvor:

$$f^{-1}(f(a)) = a \quad \text{og} \quad f(f^{-1}(b)) = b \tag{7}$$

Komplekse Tal

Definition (Komplekst tal (Complex Number))

Et **komplekst tal** har formen $z = a + bi$ hvor $a, b \in \mathbb{R}$ og $i^2 = -1$.

Mængden af komplekse tal betegnes $\mathbb{C}$.

Definition (Reel og imaginær del (Real and Imaginary Part))

For $z = a + bi$:
- **Realdelen**: $\mathrm{Re}(z) = a$
- **Imaginærdelen**: $\mathrm{Im}(z) = b$ (bemærk: b, ikke bi)

Definition (Kompleks konjugeret (Complex Conjugate))

Den **kompleks konjugerede** af $z = a + bi$ er:

$$\overline{z} = a - bi \tag{8}$$

Spejling i den reelle akse.

Definition (Modulus / Absolut værdi (Modulus))

Modulus af $z = a + bi$ er afstanden fra 0:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \tag{9}$$

Definition (Argument (Argument))

Argumentet af $z \neq 0$ er vinklen fra den positive reelle akse:

$$\arg(z) = \theta \quad \text{hvor} \quad z = |z|\, e^{i\theta} \tag{10}$$

Argumentet er **ikke** entydigt — det er bestemt modulo 2π.

Definition (Hovedargument (Principal Argument))

Hovedargumentet $\mathrm{Arg}(z)$ er det unikke argument i intervallet $]-\pi, \pi]$.

Definition (Polær form (Polar Form))

Et komplekst tal på **polær form**:

$$z = re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \tag{11}$$

hvor $r = |z|$ og $\theta = \arg(z)$.

Definition (Rektangulær form (Rectangular/Cartesian Form))

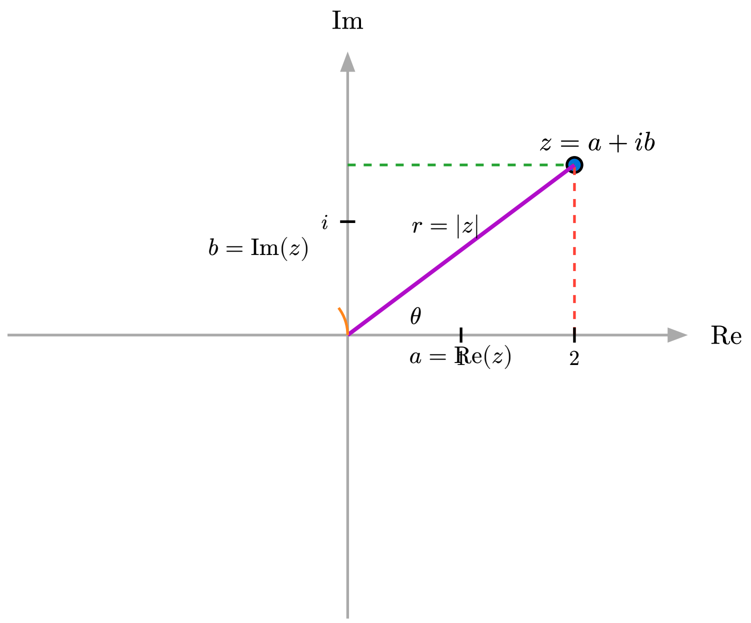
Et komplekst tal på **rektangulær form**: $z = a + bi$ hvor $a, b \in \mathbb{R}$.

Komplekse Tal - Visualisering og Beregning

Important

De tre vigtigste ting at huske om komplekse tal:
1. $i^2 = -1$ (definition af den imaginære enhed)
2. $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ (Eulers formel)
3. Argumentet $\arg(z)$ er vinklen fra den positive reelle akse

Det komplekse plan



Konvertering mellem former

Rektangulær → Polær	Polær → Rektangulær
$\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\theta = \arg(z)$ (se formel nedenfor)	$a = \|z\|\cos(\theta)$ $b = \|z\|\sin(\theta)$

Table 1: Konverteringsformler

Argumentet $\arg(z)$ — VIGTIG FORMEL

Important

Sætning 4.3.1 — Beregning af argumentet:

For $z = a + bi \neq 0$:

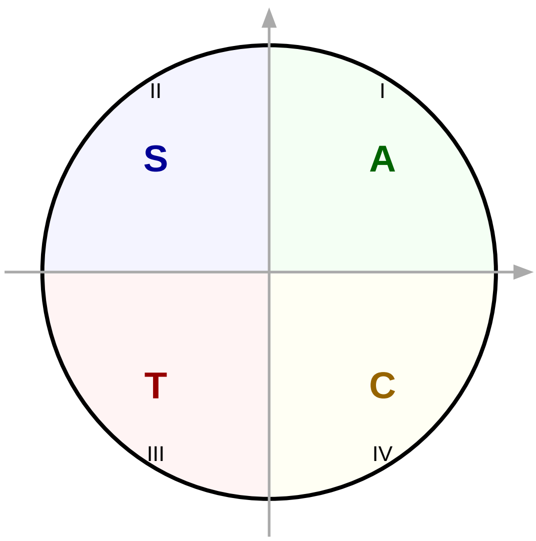
$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{hvis } a > 0 \text{ (I. eller IV. kvadrant)} \\ \frac{\pi}{2} & \text{hvis } a = 0 \text{ og } b > 0 \text{ (positiv Im-akse)} \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{hvis } a < 0 \text{ (II. eller III. kvadrant)} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{hvis } a = 0 \text{ og } b < 0 \text{ (negativ Im-akse)} \end{cases} \tag{12}$$

Note

Trin-for-trin til at finde $\arg(z)$:

1. Tegn punktet (a, b) i det komplekse plan
2. Bestem hvilken kvadrant punktet ligger i
3. Beregn $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
4. Juster baseret på kvadrant:
   - Kvadrant I eller IV ($a > 0$): Brug $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ direkte
   - Kvadrant II eller III ($a < 0$): Læg π til
   - På Im-aksen: $\pm\frac{\pi}{2}$

CAST-reglen — Fortegn i kvadranter



Note

CAST-reglen (læses mod uret fra IV. kvadrant):

- **Kvadrant I** (0° – 90°): **A**lle positive ($\sin$, $\cos$, $\tan$ alle > 0)
- **Kvadrant II** (90° – 180°): Kun **S**in positiv
- **Kvadrant III** (180° – 270°): Kun **T**an positiv
- **Kvadrant IV** (270° – 360°): Kun **C**os positiv

Huskeregel: “All Students Take Calculus” — læs mod uret fra I. kvadrant.

Eksponentialligninger: $e^z = w$

Lemma (4.6.1 — Løsning af eksponentialligninger)

For $e^z = w$ med $w \in \mathbb{C}$ givet og $z \in \mathbb{C}$ søgt:

$$z = \ln|w| + i(\arg(w) + 2\pi p), \quad p \in \mathbb{Z} \tag{13}$$

Important

Husk altid at angive $p \in \mathbb{Z}$ for at få fuld point! Der er uendeligt mange løsninger.

Example (Løs eksponentialligning)

Løs $e^z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Solution:

Vi har $w = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Trin 1 — Find modulus:

$$|w| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 \tag{14}$$

Trin 2 — Find argument:

Begge dele positive → I. kvadrant, så:

$$\arg(w) = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \tag{15}$$

Trin 3 — Anvend formlen:

$$z = \ln(2) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi p\right), \quad p \in \mathbb{Z} \tag{16}$$

Binomialligninger: $z^n = w$

Note

Fremgangsmåde for $z^n = w$:

1. Skriv w på polær form: $w = |w|\ e^{i\arg(w)}$
2. Brug formlen:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \cdot e^{i\left(\frac{\arg(w)}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1 \tag{17}$$

3. Der er præcis n forskellige løsninger (rødderne ligger jævnt fordelt på en cirkel)

Example (Løs binomialligning)

Løs $z^3 = -i$.

Solution:

Trin 1 — Find modulus og argument af $w = -i$:

$$|-i| = 1, \quad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \tag{18}$$

(Punktet $(0, -1)$ ligger på den negative imaginære akse)

Trin 2 — Anvend formlen med $n = 3$:

$$z_k = \sqrt[3]{1} \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2 \tag{19}$$

Trin 3 — Beregn de tre løsninger:

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \\ z_1 &= e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + 2\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\ z_2 &= e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + 4\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i7\frac{\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \end{aligned} \tag{20}$$

Verifikation: $(i)^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$ ✓

Hint: Hurtige checks for komplekse tal:

- $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$ (altid reelt og ikke-negativt)
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (modulus multipliceres)
- $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ (argumenter adderes)
- Kompleks konjugering: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- Kompleks konjugering: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

MC-gæt: Rødder til $z^n = w$ ligger altid på en cirkel med radius $\sqrt[n]{|w|}$, jævnt fordelt med vinkelafstand $2\frac{\pi}{n}$.

Polynomier

Definition (Polynomium (Polynomial))

Et **polynomium** i Z over $\mathbb{F}$ er et udtryk:

$$p(Z) = a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \ldots + a_1 Z + a_0 \tag{21}$$

hvor $a_i \in \mathbb{F}$ er **koefficienter**.

Definition (Grad (Degree))

Graden af et polynomium er den højeste potens med ikke-nul koefficient.

$$\deg(a_n Z^n + \ldots + a_0) = n \quad \text{hvis } a_n \neq 0 \tag{22}$$

Definition (Rod / Nulpunkt (Root/Zero))

z_0 er en **rod** i $p(Z)$ hvis $p(z_0) = 0$.

Definition (Multiplicitet (Multiplicity))

Multipliciteten af en rod z_0 er det største m så $(Z - z_0)^m$ er en faktor i $p(Z)$.

Definition (Diskriminant (Discriminant))

For $aZ^2 + bZ + c$: **Diskriminanten** er $D = b^2 - 4ac$.
- $D > 0$: To forskellige reelle rødder
- $D = 0$: Én dobbeltrod (reel)
- $D < 0$: To komplekse rødder (konjugerede)

Matricer — Grundlæggende

Definition (Matrix)

En **matrix** $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ er et rektangulært array med m rækker og n søjler.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Definition (Kvadratisk matrix (Square Matrix))

En matrix er **kvadratisk** hvis antal rækker = antal søjler ($m = n$).

Definition (Transponeret matrix (Transpose))

Den **transponerede** $\boldsymbol{A}^T$ fås ved at bytte rækker og søjler:

$$\left(\boldsymbol{A}^T\right)_{ij} = A_{ji} \tag{24}$$

Definition (Identitetsmatrix (Identity Matrix))

Identitetsmatricen $\boldsymbol{I}_n$ er $n \times n$ matricen med 1-taller på diagonalen og 0 ellers.

Definition (Determinant)

Determinanten $\det(\boldsymbol{A})$ er et tal associeret med en kvadratisk matrix.

For 2×2: $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$

For $n \times n$: Beregnes via cofaktorudvidelse eller rækkeoperationer.

Definition (Invertibel / Regulær matrix (Invertible/Nonsingular))

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ er **invertibel** hvis der findes $\boldsymbol{A}^{-1}$ så:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n \tag{25}$$

Ækvivalent: $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$

Definition (Singulær matrix (Singular))

En kvadratisk matrix er **singulær** hvis den **ikke** er invertibel, dvs. $\det(\boldsymbol{A}) = 0$.

Lineære Ligningssystemer

Definition (Lineært ligningssystem (System of Linear Equations))

Et **lineært ligningssystem** er en samling af ligninger:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{26}$$

Kan skrives som $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Definition (Homogent system (Homogeneous System))

Et system er **homogent** hvis $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, dvs. alle højresider er 0.

Homogene systemer har altid mindst løsningen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (den trivielle løsning).

Definition (Inhomogent system (Inhomogeneous System))

Et system er **inhomogent** hvis $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$.

Definition (Totalmatrix / Udvidet matrix (Augmented Matrix))

Totalmatricen er matricen $[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}]$ der kombinerer koefficienter og højresider.

Definition (Rækkeechelonform / Trappeform (Row Echelon Form))

En matrix er i **rækkeechelonform** hvis:
1. Alle nulrækker er nederst
2. Første ikke-nul element i hver række (pivot) er til højre for pivoten i rækken over

Definition (Reduceret rækkeechelonform / RREF (Reduced Row Echelon Form))

En matrix er i **RREF** hvis den er i rækkeechelonform og:
1. Alle pivoter er 1
2. Pivoterne er de eneste ikke-nul elementer i deres søjle

Definition (Pivot)

En **pivot** er det ledende (første ikke-nul) element i en række i echelonform.

Pivotsøjler er søjler der indeholder en pivot.

Definition (Fri variabel (Free Variable))

En **fri variabel** svarer til en søjle uden pivot i RREF. Kan vælges frit.

Definition (Rang (Rank))

Rangen af en matrix er antallet af pivoter i dens RREF.

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \text{antal pivoter} \tag{27}$$

Definition (Nulitet (Nullity))

Nuliteten af $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ er:

$$\operatorname{null}(\boldsymbol{A}) = n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \text{antal frie variable} = \dim(\ker(\boldsymbol{A})) \tag{28}$$

Vektorrum

Definition (Vektorrum (Vector Space))

Et **vektorrum** V over $\mathbb{F}$ er en mængde med addition og skalarmultiplikation der opfylder visse aksiomer (lukkethed, associativitet, kommutativitet, etc.).

Eksempler: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^{m \times n}$, polynomier $\mathbb{P}_n$.

Definition (Underrum (Subspace))

$W \subseteq V$ er et **underrum** hvis W selv er et vektorrum, dvs.:

$$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W, c \in \mathbb{F} \Rightarrow \boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v} \in W \tag{29}$$

(lukket under addition og skalarmultiplikation, indeholder $\mathbf{0}$)

Definition (Linearkombination (Linear Combination))

En **linearkombination** af vektorer $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ er:

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + c_k\boldsymbol{v}_k \quad \text{hvor } c_i \in \mathbb{F} \tag{30}$$

Definition (Span / Udspænding (Span))

Spannet af vektorer er mængden af alle linearkombinationer:

$$\operatorname{span}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) = \{c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_k\boldsymbol{v}_k \mid c_i \in \mathbb{F}\} \tag{31}$$

Definition (Lineært uafhængig (Linearly Independent))

Vektorer $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ er **lineært uafhængige** hvis:

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_k\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \ldots = c_k = 0 \tag{32}$$

Den eneste måde at få $\mathbf{0}$ er med alle koefficienter = 0.

Definition (Lineært afhængig (Linearly Dependent))

Vektorer er **lineært afhængige** hvis de **ikke** er lineært uafhængige, dvs. mindst én vektor kan skrives som linearkombination af de andre.

Definition (Basis)

En **basis** for V er en mængde vektorer der er:
1. Lineært uafhængige
2. Udspænder V

Definition (Ordnet basis (Ordered Basis))

En **ordnet basis** er en basis hvor rækkefølgen er specificeret: $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n)$.

Koordinater afhænger af rækkefølgen!

Definition (Standardbasis (Standard Basis))

Standardbasen for $\mathbb{R}^n$ er $(\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n)$ hvor $\boldsymbol{e}_i$ har 1 i position i og 0 ellers.

Definition (Dimension)

Dimensionen $\dim(V)$ er antallet af vektorer i en basis for V.

Alle baser for samme vektorrum har samme antal elementer.

Definition (Koordinater (Coordinates))

Koordinaterne af $\boldsymbol{v}$ mht. ordnet basis $\beta = (\boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_n)$ er koefficienterne $(c_1, ..., c_n)$ så:

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b}_1 + ... + c_n\boldsymbol{b}_n \tag{33}$$

Skrives $[\boldsymbol{v}]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

Lineære Afbildninger

Definition (Lineær afbildning (Linear Map/Transformation))

$L : V \to W$ er en **lineær afbildning** hvis:

1. $L(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{u}) + L(\boldsymbol{v})$
2. $L(c\boldsymbol{v}) = cL(\boldsymbol{v})$

for alle $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ og $c \in \mathbb{F}$.

Definition (Kerne / Nulrum (Kernel/Null Space))

Kernen af $L : V \to W$ er:

$$\ker(L) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid L(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\} \tag{34}$$

Mængden af vektorer der afbildes til nulvektoren. Altid et underrum af V.

Definition (Billedrum (Image/Range))

Billedrummet af $L : V \to W$ er:

$$\mathrm{im}(L) = \{L(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in V\} \tag{35}$$

Mængden af alle output-vektorer. Altid et underrum af W.

Definition (Søjlerum (Column Space))

Søjlerummet af $\boldsymbol{A}$ er spannet af søjlerne i $\boldsymbol{A}$:

$$\mathrm{colsp}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{span}\{\text{søjler i } \boldsymbol{A}\} = \mathrm{im}(L_{\boldsymbol{A}}) \tag{36}$$

Definition (Rækkerum (Row Space))

Rækkerummet af $\boldsymbol{A}$ er spannet af rækkerne i $\boldsymbol{A}$:

$$\mathrm{row}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{span}\{\text{rækker i } \boldsymbol{A}\} = \mathrm{colsp}(\boldsymbol{A}^T) \tag{37}$$

Definition (Afbildningsmatrix (Transformation Matrix))

Afbildningsmatricen ${}_{\gamma}[L]_{\beta}$ repræsenterer $L : V \to W$ mht. baser β for V og γ for W:

$$[L(\boldsymbol{v})]_{\gamma} = {}_{\gamma}[L]_{\beta} \cdot [\boldsymbol{v}]_{\beta} \tag{38}$$

Søjlerne er koordinaterne af $L(\boldsymbol{b}_i)$ i basis γ.

Definition (Basisskiftematrix (Change of Basis Matrix))

Basisskiftematricen ${}_{\gamma}[\mathrm{id}]_{\beta}$ konverterer koordinater fra basis β til basis γ:

$$[\boldsymbol{v}]_{\gamma} = {}_{\gamma}[\mathrm{id}]_{\beta} \cdot [\boldsymbol{v}]_{\beta} \tag{39}$$

Egenværdier og Diagonalisering

Definition (Egenværdi (Eigenvalue))

$\lambda \in \mathbb{F}$ er en **egenværdi** for $\boldsymbol{A}$ hvis der findes $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ så:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \tag{40}$$

Definition (Egenvektor (Eigenvector))

$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ er en **egenvektor** for $\boldsymbol{A}$ med egenværdi λ hvis:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \tag{41}$$

Vektoren skaleres (ikke roteres) af $\boldsymbol{A}$.

Definition (Egenrum (Eigenspace))

Egenrummet for egenværdi λ er:

$$E_\lambda = \ker(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}\} \tag{42}$$

Indeholder alle egenvektorer til λ plus nulvektoren.

Definition (Karakteristisk polynomium (Characteristic Polynomial))

Det **karakteristiske polynomium** for $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ er:

$$p_{\boldsymbol{A}}(Z) = \det(\boldsymbol{A} - Z\boldsymbol{I}) \tag{43}$$

Egenværdierne er rødderne i $p_{\boldsymbol{A}}(Z) = 0$.

Definition (Algebraisk multiplicitet (Algebraic Multiplicity))

Den **algebraiske multiplicitet** $\mathrm{am}(\lambda)$ er multipliciteten af λ som rod i det karakteristiske polynomium.

Definition (Geometrisk multiplicitet (Geometric Multiplicity))

Den **geometriske multiplicitet** $\mathrm{gm}(\lambda)$ er dimensionen af egenrummet:

$$\mathrm{gm}(\lambda) = \dim(E_\lambda) = \dim(\ker(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})) \tag{44}$$

Altid: $1 \leq \mathrm{gm}(\lambda) \leq \mathrm{am}(\lambda)$

Definition (Diagonaliserbar (Diagonalizable))

$\boldsymbol{A}$ er **diagonaliserbar** hvis der findes invertibel $\boldsymbol{P}$ og diagonal $\boldsymbol{D}$ så:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1} \quad \text{eller ækvivalent} \quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} \tag{45}$$

Ækvivalent: $\mathrm{gm}(\lambda) = \mathrm{am}(\lambda)$ for alle egenværdier.

Definition (Similære matricer (Similar Matrices))

$\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$ er **similære** hvis der findes invertibel $\boldsymbol{P}$ så:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \tag{46}$$

Similære matricer har samme egenværdier, determinant, rang og spor.

Differentialligninger

Definition (Differentialligning (Differential Equation))

En **differentialligning** er en ligning der involverer en ukendt funktion og dens afledede.

Definition (Orden (Order))

Ordenen af en differentialligning er den højeste afledede der optræder.

$f''(t) + f'(t) = 0$ har orden 2.

Definition (Lineær differentialligning (Linear ODE))

En differentialligning er **lineær** hvis den ukendte funktion og dens afledede kun optræder i første potens og ikke multipliceres med hinanden.

Lineær: $f''(t) + 3f'(t) + 2f(t) = g(t)$

Ikke-lineær: $f'(t) \cdot f(t) = 1$ eller $(f'(t))^2 = f(t)$

Definition (Homogen differentialligning (Homogeneous ODE))

En lineær differentialligning er **homogen** hvis højresiden er 0:

$$a_n f^{(n)}(t) + \ldots + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = 0 \tag{47}$$

Definition (Inhomogen differentialligning (Inhomogeneous ODE))

En lineær differentialligning er **inhomogen** hvis højresiden $g(t) \neq 0$:

$$a_n f^{(n)}(t) + \ldots + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = g(t) \tag{48}$$

Definition (Begyndelsesværdiproblem / IVP (Initial Value Problem))

Et **begyndelsesværdiproblem** er en differentialligning sammen med betingelser ved et bestemt punkt:

$$f'(t) = g(t, f(t)), \quad f(t_0) = y_0 \tag{49}$$

Definition (Fuldstændig løsning (General Solution))

Den **fuldstændige løsning** indeholder alle løsninger, typisk med frie konstanter $c_1, c_2, \ldots$.

Definition (Partikulær løsning (Particular Solution))

En **partikulær løsning** er én specifik løsning (ofte uden frie konstanter, eller med bestemte værdier fra begyndelsesbetingelser).

Definition (Karakteristisk ligning (Characteristic Equation))

For en lineær ODE med konstante koefficienter er den **karakteristiske ligning** den polynomielle ligning man får ved at substituere $f(t) = e^{\lambda t}$.

For $f''(t) + af'(t) + bf(t) = 0$: Karakteristisk ligning er $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

Sætninger — Hurtig Reference

Definition (Rang-Nulitets-sætningen (Rank-Nullity Theorem))

For $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$:

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{null}(\boldsymbol{A}) = n \tag{50}$$

Antal pivoter + antal frie variable = antal søjler.

Definition (De Moivres formel (De Moivre's Formula))

For $z = re^{i\theta}$ og $n \in \mathbb{Z}$:

$$z^n = r^n e^{in\theta} \tag{51}$$

For n-te rødder af $w = re^{i\theta}$:

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, ..., n-1 \tag{52}$$

Definition (Eulers formel (Euler's Formula))

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \tag{53}$$

Fundamentale Metoder og Referencetabeller

FOIL - Multiplikation af parenteser

Note

FOIL står for: **F**irst, **O**uter, **I**nner, **L**ast

For $(a+b)(c+d)$:

- **F**irst: $a \cdot c$
  - **O**uter: $a \cdot d$
    - **I**nner: $b \cdot c$
      - **L**ast: $b \cdot d$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd \tag{54}$$

Example (FOIL med tal)

Beregn $(3+2)(5-4)$

Solution:

- F: $3 \cdot 5 = 15$
- O: $3 \cdot (-4) = -12$
- I: $2 \cdot 5 = 10$
- L: $2 \cdot (-4) = -8$

$$(3+2)(5-4) = 15 - 12 + 10 - 8 = 5 \tag{55}$$

Example (FOIL med komplekse tal)

Beregn $(2+3i)(4-i)$

Solution:

- F: $2 \cdot 4 = 8$
- O: $2 \cdot (-i) = -2i$
- I: $3i \cdot 4 = 12i$
- L: $3i \cdot (-i) = -3i^2 = -3(-1) = 3$

$$(2+3i)(4-i) = 8 - 2i + 12i + 3 = 11 + 10i \tag{56}$$

Example (FOIL i karakteristiske polynomier)

Givet $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Beregn det karakteristiske polynomium $p_{\boldsymbol{A}}(Z) = \det(\boldsymbol{A} - Z\boldsymbol{I})$.

Solution:

Trin 1: Opstil $\boldsymbol{A} - Z\boldsymbol{I}_n$:

$$\boldsymbol{A} - Z\boldsymbol{I}_2 = \begin{bmatrix} 2-Z & -5 \\ 1 & -2-Z \end{bmatrix} \tag{57}$$

Trin 2: Beregn determinanten:

$$\det = (2-Z)(-2-Z) - (-5)(1) \tag{58}$$

Trin 3: Anvend FOIL på $(2-Z)(-2-Z)$:

- **F**irst: $2 \cdot (-2) = -4$
- **O**uter: $2 \cdot (-Z) = -2Z$
- **I**nner: $(-Z) \cdot (-2) = 2Z$
- **L**ast: $(-Z) \cdot (-Z) = Z^2$

$$(2-Z)(-2-Z) = -4 - 2Z + 2Z + Z^2 = Z^2 - 4 \tag{59}$$

Trin 4: Færdiggør:

$$p_{\boldsymbol{A}}(Z) = (Z^2 - 4) - (-5) = Z^2 - 4 + 5 = Z^2 + 1 \tag{60}$$

Rødder: $Z^2 = -1 \Rightarrow Z = \pm i$

Egenværdier: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$

Note

Typiske fejl ved karakteristiske polynomier:

1. **Fortegnsfejl i FOIL:** Vær særlig opmærksom på $(a-Z)(d-Z)$ — alle fire led!
2. **Glemmer at trække bc fra:** $\det \begin{bmatrix} a-Z & b \\ c & d-Z \end{bmatrix} = (a-Z)(d-Z) - \boldsymbol{bc}$
3. **Hurtig formel for $\mathbf{2 \times 2}$:** Brug i stedet:

$$p_{\boldsymbol{A}}(Z) = Z^2 - \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) \cdot Z + \det(\boldsymbol{A}) \tag{61}$$

   hvor $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = a + d$ og $\det(\boldsymbol{A}) = ad - bc$

Verificér med hurtig formel:

- $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = 2 + (-2) = 0$
- $\det(\boldsymbol{A}) = 2 \cdot (-2) - (-5) \cdot 1 = -4 + 5 = 1$
- $p_{\boldsymbol{A}}(Z) = Z^2 - 0 \cdot Z + 1 = Z^2 + 1$

Example (Konjugerede komplekse tal)

Beregn $(a + bi)(a - bi)$

Solution:

- F: $a \cdot a = a^2$
- O: $a \cdot (-bi) = -abi$
- I: $bi \cdot a = abi$
- L: $bi \cdot (-bi) = -b^2 i^2 = b^2$

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = a^2 + b^2 \tag{62}$$

Huskeregel: $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

Hint: Genveje:
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ — ingen mellemled!
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Kompleks konjugat: $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ — altid reelt og positivt

MC-gæt: Hvis svarmuligheder indeholder $a^2 - b^2$ eller $a^2 + b^2$, er det sandsynligvis konjugat/differens af kvadrater.

Radianer og Grader - Konverteringstabel

Note

Konverteringsformler:

$$\text{radianer} = \text{grader} \times \frac{\pi}{180} \tag{63}$$

$$\text{grader} = \text{radianer} \times \frac{180}{\pi} \tag{64}$$

Huskeregel: $180° = \pi$ radianer

Grader	Radianer	Brøk af π	Decimal
$0°$	0	0	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{6}\pi$	≈ 0.52
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{4}\pi$	≈ 0.79
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{3}\pi$	≈ 1.05
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\pi$	≈ 1.57
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$	≈ 2.09
$135°$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$	≈ 2.36
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5}{6}\pi$	≈ 2.62
$180°$	π	π	≈ 3.14
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3}{2}\pi$	≈ 4.71
$360°$	2π	2π	≈ 6.28

Hint: Du behøver kun at huske:
- $30° = \frac{\pi}{6}$, $45° = \frac{\pi}{4}$, $60° = \frac{\pi}{3}$, $90° = \frac{\pi}{2}$
- Alt andet er multipla af disse

Hurtig konvertering: $\pi \approx 3.14$, så $\frac{\pi}{6} \approx 0.5$, $\frac{\pi}{4} \approx 0.8$, $\frac{\pi}{3} \approx 1$

MC-gæt: Vinkler i eksamensopgaver er næsten altid multipla af $\frac{\pi}{6}$ eller $\frac{\pi}{4}$.

Trigonometriske Værdier - Referencetabel

Vinkel θ	Grader	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$	$\tan(\theta)$
0	$0°$	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	0	1	udef.
$\frac{2\pi}{3}$	$120°$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	$135°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$150°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
π	$180°$	-1	0	0
$\frac{7\pi}{6}$	$210°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{5\pi}{4}$	$225°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{4\pi}{3}$	$240°$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	$270°$	0	-1	udef.
$\frac{5\pi}{3}$	$300°$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7\pi}{4}$	$315°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{11\pi}{6}$	$330°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Hint: Mønster at huske:
- $\sin$ og $\cos$ bytter værdier ved komplementære vinkler: $\sin(30°) = \cos(60°)$
- Ved $45°$: $\sin = \cos = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$
- $\sin(0°) = 0$, $\sin(90°) = 1$ — starter fra 0, vokser til 1
- $\cos(0°) = 1$, $\cos(90°) = 0$ — starter fra 1, falder til 0

Talværdier: $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$

CAST-reglen (Fortegn i kvadranter)

Note

Hvilke trigonometriske funktioner er **positive** i hver kvadrant:

Kvadrant II $\sin > 0$ $(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi)$	**Kvadrant I** **Alle** > 0 $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$
Kvadrant III $\tan > 0$ $(\pi < \theta < 3\frac{\pi}{2})$	**Kvadrant IV** $\cos > 0$ $(3\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi)$

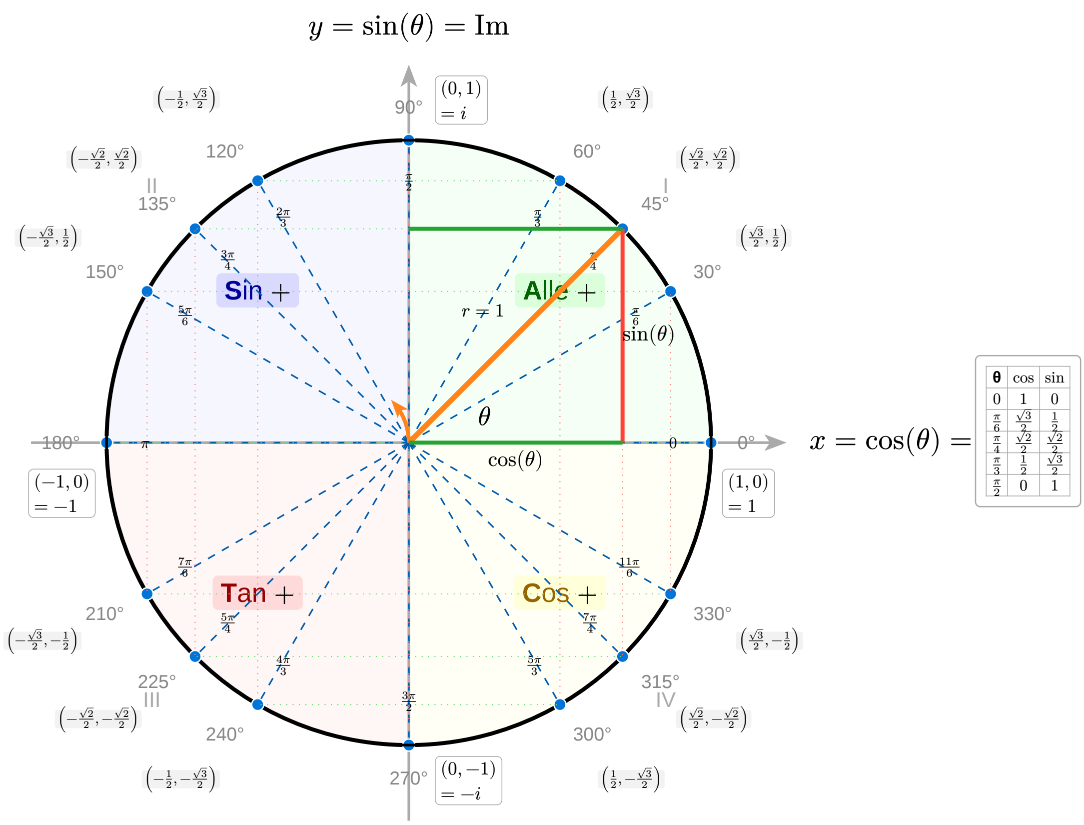
Læs mod uret fra kvadrant IV: **C*os,** A*lle, **S*in,** T*an = **CAST**

Hint: **Huskeregel:** “All Students Take Calculus” — læs mod uret fra kvadrant I.

Hurtig check: Hvis du får en negativ $\cos$-værdi, er du i kvadrant II eller III.

MC-gæt: Hvis en opgave spørger om fortegn, er svaret ofte det “uventede” — dvs. den funktion der skifter fortegn i den givne kvadrant.

Enhedscirklen - Komplet Figur



Eulers formel:	Koordinat:	Kompleks tal:
$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$	$(\cos(\theta), \sin(\theta))$	$z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

Figure 1: Den Komplette Enhedscirkel - Trigonometri, Komplekse Tal og Koordinater

Note

Sådan læser du enhedscirklen:

1. **Vinklen θ** måles fra den positive x-akse (mod uret er positiv)
2. **Koordinaterne** (x, y) på cirklen er $(\cos(\theta), \sin(\theta))$
3. **Komplekst tal**: Punktet svarer til $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
4. **CAST-reglen** fortæller hvilke funktioner er positive:
   - **Kvadrant I** ($0° - 90°$): **A**lle positive
   - **Kvadrant II** ($90° - 180°$): Kun **S**in positiv
   - **Kvadrant III** ($180° - 270°$): Kun **T**an positiv
   - **Kvadrant IV** ($270° - 360°$): Kun **C**os positiv
5. **Huske-værdier**: $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$, $\frac{1}{2} = 0.5$

Vigtige komplekse tal på polær form

Note

De fire "akseværdier":

$$1 = e^{i\cdot 0} = \cos(0) + i\sin(0) \tag{65}$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{66}$$

$$-1 = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) \tag{67}$$

$$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i3\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \tag{68}$$

Det Karakteristiske Polynomium - Formler

Note

For 2×2 matricer:

Givet $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$:

$$\boldsymbol{A} - Z\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} a - Z & b \\ c & d - Z \end{bmatrix} \tag{69}$$

$$\det(\boldsymbol{A} - Z\boldsymbol{I}) = (a - Z)(d - Z) - bc \tag{70}$$

VIGTIGT - udvid $(a - Z)(d - Z)$ korrekt:

Brug FOIL:

$$(a - Z)(d - Z) = ad - aZ - dZ + Z^2 = Z^2 - (a + d)Z + ad \tag{71}$$

Så det karakteristiske polynomium er:

$$p_{\boldsymbol{A}}(Z) = Z^2 - (a + d)Z + (ad - bc) \tag{72}$$

Huskeregel: For 2×2: $p_{\boldsymbol{A}}(Z) = Z^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})Z + \det(\boldsymbol{A})$

hvor $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = a + d$ (sporet) og $\det(\boldsymbol{A}) = ad - bc$

Note

Faktorer polynomiet: Tre metoder

Metode 1: Kvadratisk formel (altid sikker)

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{73}$$

For $Z^2 + pZ + q = 0$ (hvor $a = 1$):

$$Z = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \tag{74}$$

Metode 2: Faktorisering via gæt (hurtig når det virker)

Søg tal r, s så:
- $r + s = -p$ (summen af rødderne)
- $r \cdot s = q$ (produktet af rødderne)

Så: $Z^2 + pZ + q = (Z - r)(Z - s)$

Metode 3: Genkend specielle former
- $Z^2 - k^2 = (Z - k)(Z + k)$ (differens af kvadrater)
- $Z^2 - 2kZ + k^2 = (Z - k)^2$ (perfekt kvadrat)

Hint: **2×2 shortcut:** Brug ALTID formlen $p_{\boldsymbol{A}}(Z) = Z^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})Z + \det(\boldsymbol{A})$
- Hurtigere end FOIL
- Færre fortegnsfejl

Instant egenværdier for specielle matricer:
- Triangulær matrix: Egenværdier = diagonalelementerne
- Diagonal matrix: Egenværdier = diagonalelementerne
- $\det(\boldsymbol{A}) = 0$: Mindst én egenværdi er 0

Tjek dit svar:
- $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$
- $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(\boldsymbol{A})$

Uge 1: Udsagnslogik (Propositional Logic)

Vurdér om et logisk udtryk er en tautologi

Note

En **tautologi** er et udtryk, der altid er sandt. To ækvivalente udsagn udgør en tautologi.

Metode 1: Sandhedstabeller (den sikre vej)

1. Referér til eksempel 1.3.1 og 1.3.2
2. Opstil en stor tabel med plads til mange rækker og kolonner
3. Tilføj alle standardudsagn (P, Q, R, osv.) og udfyld alle kombinationer (2^n rækker, hvor n = antal udsagn)
4. Tilføj sandhedsværdier for alle dele af begge udsagn i nye kolonner
5. Tilføj en kolonne for logisk ækvivalens - er output altid T, er det en tautologi

Metode 2: Uden sandhedstabeller

1. Referér til sætning 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4 efter behov
2. Brug at ækvivalente udtryk kan substitueres
3. Når du når simple udtryk på begge sider, lav en sandhedstabel for disse

Hint: **Implikation $P \Rightarrow Q$:**

- Kun falsk når P er sand og Q er falsk
- "Falsk implicerer alt" — hvis P er falsk, er $P \Rightarrow Q$ altid sand

Tautologi-tjek: Find ÉN kombination hvor udtrykket er falsk — så er det IKKE en tautologi.

MC-gæt: Hvis der spørges "er dette en tautologi?", prøv $P = T, Q = F$ først — det afslører ofte svaret.

Uge 2: Mængder og Funktioner

Alle løsninger til ligning med absolutværdi

Note

Fremgangsmåde: (Ingen sætninger at referere til - forklar hvert trin)

1. **Udvid absolutværdier** ved at opstille grænseværdier for alle dele med |...|
2. **Opdel i intervaller** baseret på hvor udtrykkene skifter fortegn
3. **Håndtér hvert interval:**
   - Fjern absolutværdier baseret på intervallet
   - Simplificér og løs for x
   - Tjek om løsningen ligger inden for intervallet
4. **Saml løsninger** fra alle intervaller i én løsningsmængde

Hint: **Absolutværdi-ligninger $|f(x)| = k$:**

- $k < 0$: Ingen løsninger
- $k = 0$: Løs $f(x) = 0$
- $k > 0$: Løs $f(x) = k$ OG $f(x) = -k$

Antal løsninger: Typisk 0, 1, eller 2 — sjældent mere i eksamensopgaver.

MC-gæt: Hvis én svarmulighed er $\emptyset$ (tom mængde), overvej om $k < 0$ eller ligningen er umulig.

Uge 3-4: Komplekse Tal

Trigonometri og Komplekse Tal

Note

Eulers formel:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \tag{75}$$

Konvertering mellem former:

Rektangulær til polær:

$$z = a + bi \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \tag{76}$$

Polær til rektangulær:

$$z = re^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad a = r\cos(\theta), \quad b = r\sin(\theta) \tag{77}$$

Argument-tjekliste (hvilken kvadrant?)

Note

Givet $z = a + bi$, bestem $\theta = \arg(z)$:

Betingelse	Kvadrant	Argument θ
$a > 0, b \geq 0$	I	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
$a < 0$	II eller III	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$
$a > 0, b < 0$	IV	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ eller $\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi$
$a = 0, b > 0$	Pos. im. akse	$\frac{\pi}{2}$
$a = 0, b < 0$	Neg. im. akse	$-\frac{\pi}{2}$ eller $3\frac{\pi}{2}$

Komplekse tal på polær form i n’te potens

Note

Fremgangsmåde:
1. Referér til definition 4.6.1 og opskriv på polær form
2. Referér til sætning 4.6.2 (De Moivre) for at opløfte til n'te potens:

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} \tag{78}$$

Omdannelse mellem polær og rektangulær form

Note

Polær til rektangulær:

Bemærk at sætning 4.4.1 sat op mod sætning 4.6.1 medfører:

$$z(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))) = z \cdot e^{i\cdot\arg(z)} \tag{79}$$

Udregn $\cos$ og $\sin$ via Appendix A.1

Rektangulær til polær:

Aflæs modulus og argument efter sætning 4.3.1:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \tag{80}$$

Example (Konvertér $z = 1 + i$ til polær form)

Solution:

Trin 1: Find modulus

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \tag{81}$$

Trin 2: Find argument (vinkel)

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \tag{82}$$

(Punktet ligger i 1. kvadrant, så $\theta = \frac{\pi}{4}$ er korrekt)

Trin 3: Skriv på polær form

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \tag{83}$$

Verifikation:

$$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i \tag{84}$$

Example (Konvertér $z = -1 + \sqrt{3}i$ til polær form)

Solution:

Trin 1: Find modulus

$$r = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2 \tag{85}$$

Trin 2: Find argument

Basis: $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \arctan\left(-\sqrt{3}\right)$

Men pas på! Punktet ligger i **2. kvadrant** (negativ reel del, positiv imaginær del).

Referencevinkel: $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

I 2. kvadrant: $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Trin 3: Polær form

$$z = 2e^{i2\frac{\pi}{3}} \tag{86}$$

Samtlige komplekse løsninger til eksponentialligning

Note

Fremgangsmåde for $e^z = w$:

1. Referér til lemma 4.6.1 og udtryk z som $\ln(|w|) + \arg(w)i$
2. Referér til sætning 4.3.1 for at finde $|w|$ og $\arg(w)$
3. Indsæt og forkort
4. Angiv samtlige løsninger som $\ln(|w|) + \arg(w)i$ hvor $\arg(w) = \mathrm{Arg}(w) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Forklaring: Enhver løsning udgjort af hovedargumentet adderet med et multiplum af 2π skyldes at vi for hver 2π er nået en hel tur rundt i enhedscirklen.

Omregning med modulus og argumenter

Note

Fremgangsmåde:

1. Alle regneregler findes via sætning 4.6.2:
   - $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
   - $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
   - $|z^n| = |z|^n$
   - $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$
2. Referér til sætning 4.3.1 for $|w|$ og $\arg(w)$
3. Find hovedargumentet i $]-\pi;\pi]$ ved at addere/subtrahere 2π

Multiplikation og division på polær form

Note

Multiplikation: Gang moduli, læg argumenter sammen

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{87}$$

Division: Divider moduli, træk argumenter fra hinanden

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{88}$$

Potens (De Moivre):

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} \tag{89}$$

Example (Beregn $(1+i)^8$)

Solution:

Trin 1: Konvertér til polær form

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \tag{90}$$

Trin 2: Anvend De Moivre

$$(1+i)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 e^{i\cdot 8\cdot\frac{\pi}{4}} = 2^4 e^{i2\pi} = 16e^{i2\pi} = 16 \cdot 1 = 16 \tag{91}$$

Svar: $(1+i)^8 = 16$

Konjugering på polær form

Note

Hvis $z = re^{i\theta}$, så er

$$\overline{z} = re^{-i\theta} \tag{92}$$

(Samme modulus, negativ vinkel - spejling i den reelle akse)

Hint: **Modulus-genveje:**

- $|e^{i\theta}| = 1$ for ALLE θ
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $|z^n| = |z|^n$
- $|\overline{z}| = |z|$

Polær form instant:

- $1 = e^{i\cdot 0}$, $-1 = e^{i\pi}$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Komplekse rødder: Hvis koefficienterne er reelle, kommer komplekse rødder ALTID i konjugerede par.

MC-gæt for "hvilken ligger længst fra 0": Beregn $|z|$ — ofte er $|re^{i\theta}| = r$ det hurtigste tjek.

Hint: **n-te rødder:** Der er PRÆCIS n forskellige rødder, jævnt fordelt på en cirkel.

Vinkelafstand mellem rødder: $\frac{2\pi}{n}$

Hurtig tjek: Hvis $z^n = w$ og $|w| = 1$, så har alle rødder $|z| = 1$ (ligger på enhedscirklen).

MC-gæt: Rødder til $z^n = 1$ er altid $e^{i2\pi\frac{k}{n}}$ for $k = 0, 1, ..., n-1$.

Uge 5: Polynomier og Induktion

Rødder i komplekst andengradspolynomium

Note

Fremgangsmåde:
1. Henvis til sætning 5.2.1
2. Udregn diskriminanten (evt. henvis til definition 5.2.1):

$$D = b^2 - 4ac \tag{93}$$

3. Følg fremgangsmetoden fra sætning 5.2.1:

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \tag{94}$$

Bemærk: Diskriminanten har dualitet - den afgør om rødder er reelle eller komplekse.

Divisionsalgoritmen til at undersøge rod

Important

Polynomiumsdivision og Rødder — EKSAMENSKLASSIKER!

Opgavetype: Givet $p(Z)$ og én rod λ, find faktorisering og alle rødder.

Strategi:
1. Hvis λ er rod → $(Z - \lambda)$ er faktor
2. Divider $p(Z)$ med $(Z - \lambda)$ → får $q(Z)$ af grad én lavere
3. Løs $q(Z) = 0$ (ofte 2. gradsligning → brug diskriminant)

Note

Fremgangsmåde: Polynomiumsdivision i hånden

Givet: Polynomium $p(Z)$ og oplyst at $Z = r$ er rod.

Find: Faktorisering og samtlige rødder i $\mathbb{C}$.

Trin 1 — Verificér roden (valgfrit men godt at tjekke):

$$p(r) = 0 \quad \checkmark \tag{95}$$

Trin 2 — Udfør polynomiumsdivision:

Da $Z = r$ er rod, er $(Z - r)$ en faktor. Udfør lang division:

1. Tag det **ledende led** i dividenden, divider med Z
   - Eksempel: $2Z^3 \div Z = 2Z^2 \rightarrow$ første led i kvotienten
2. **Gang** divisoren $(Z - r)$ med dette led
   - Eksempel: $2Z^2 \cdot (Z - 3) = 2Z^3 - 6Z^2$
3. **Træk fra** dividenden og få en ny rest
   - Eksempel: $(2Z^3 - 2Z^2) - (2Z^3 - 6Z^2) = 4Z^2$
4. **Gentag** med resten indtil graden er lavere end divisorens

Trin 3 — Løs kvotienten:
- Hvis $q(Z)$ er 2. grad: Brug diskriminantformlen
- Hvis $q(Z)$ er højere grad: Gentag polynomiumsdivision med andre rødder

Trin 4 — Skriv komplet faktorisering:

$$p(Z) = a_n(Z - r_1)(Z - r_2) \cdots (Z - r_n) \tag{96}$$

hvor a_n er den ledende koefficient.

Lemma (2. Gradsformel (Diskriminant))

For $aZ^2 + bZ + c = 0$:

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \tag{97}$$

- $D > 0$: To reelle rødder
- $D = 0$: Én dobbeltrod
- $D < 0$: To komplekse rødder $Z = \frac{-b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{|D|}}{2a}$

Bemærk: Komplekse rødder kommer altid i konjugerede par når koefficienterne er reelle!

Example (Polynomiumsdivision — E24 Opgave 2 (Komplet løsning))

Givet: $p(Z) = 2Z^3 - 2Z^2 - 8Z - 12$, og $Z = 3$ er rod.

a) Skriv $p(Z)$ som produkt af et 1.-grads og et 2.-gradspolynomium.

b) Find samtlige rødder i $\mathbb{C}$.

Solution:

Del a) — Faktorisering via polynomiumsdivision:

Siden $Z = 3$ er rod, er $(Z-3)$ en faktor. Vi dividerer:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2Z^2 & +4Z & +4 & \\ \hline Z-3 & 2Z^3 & -2Z^2 & -8Z & -12 \\ & -(2Z^3 & -6Z^2 & &) \\ \hline & & 4Z^2 & -8Z & -12 \\ & & -(4Z^2 & -12Z &) \\ \hline & & & 4Z & -12 \\ & & & -(4Z & -12) \\ \hline \end{array} \tag{98}$$

Resultat:

$$p(Z) = (Z-3)(2Z^2+4Z+4) = 2(Z-3)(Z^2+2Z+2) \tag{99}$$

Del b) — Find alle rødder:

Rod 1: $Z = 3$ (givet)

Rod 2 og 3: Løs $Z^2 + 2Z + 2 = 0$

Diskriminant: $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0 \to$ komplekse rødder

$$Z = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i \tag{100}$$

Important

Alle rødder: $Z_1 = 3$, $Z_2 = -1 + i$, $Z_3 = -1 - i$

Komplet faktorisering: $p(Z) = 2(Z-3)(Z-(-1+i))(Z-(-1-i))$

Example (Undersøg om $Z = 2$ er rod i $Z^3 - 5Z^2 - 4Z + 20$)

$$\begin{array}{r|rrrr} & Z^2 & -3Z & -10 & \\ \hline Z-2 & Z^3 & -5Z^2 & -4Z & +20 \\ & -(Z^3 & -2Z^2 & &) \\ \hline & & -3Z^2 & -4Z & +20 \\ & & -(-3Z^2 & +6Z &) \\ \hline & & & -10Z & +20 \\ & & & -(-10Z & +20) \\ \hline \end{array} \tag{101}$$

Rest = 0, så $Z = 2$ **er** rod. Kvotienten er $Z^2 - 3Z - 10$.

Videre faktorisering: $Z^2 - 3Z - 10 = (Z-5)(Z+2)$

Alle rødder: $Z = 2, 5, -2$

Divisionsalgoritmen til at undersøge faktor

Note

Fremgangsmåde: (Referér til korollar 5.6.4)

For at undersøge om $u(Z)$ (af grad $>$ 1) er faktor i $q(Z)$:

1. Opskriv $u(Z)$ i venstre side, $q(Z)$ i midten
2. Find faktor $a_1 Z^n$ så $u(Z) \cdot a_1 Z^n$ fjerner førsteleddet i $q(Z)$
3. Gentag processen
4. **Konklusion:**
   - Rest = 0: $u(Z)$ er faktor
   - Rest = polynomium med grad $\geq$ grad af $u(Z)$: Undersøg videre
   - Rest = polynomium med grad $<$ grad af $u(Z)$: Ikke faktor

Hint: **Hurtig faktor-tjek:** Hvis $p(a) = 0$, så er $(Z - a)$ en faktor.

Test standard rødder først: Prøv $Z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ — eksamensspørgsmål har ofte “pæne” rødder!

Komplekse rødder: Hvis koefficienterne er **reelle** og du finder én kompleks rod $\alpha + \beta i$, er $\alpha - \beta i$ **også** rod.

MC-gæt: Hvis opgaven giver én rod, er de resterende ofte “pæne” tal eller konjugerede par.

Algebraens fundamentalsætning: Et polynomium af grad n har præcis n rødder (talt med multiplicitet) i $\mathbb{C}$.

Multiplicitet af rod i polynomium

Note

Fremgangsmåde: (Referér til definition 5.6.1 og sætning 5.6.3)

1. Undersøg om $(Z - \lambda)$ nemt kan faktoriseres ud
2. Foretag divisionsalgoritmen
3. Gentag indtil $(Z - \lambda)$ ikke længere er faktor
4. Antallet af gange $(Z - \lambda)$ var faktor = multipliciteten

Induktion over de naturlige tal

Note

Bemærk: $\mathbb{N}$ inkluderer **ikke** 0 på DTU. Basisskridtet er typisk $P(1)$ eller $P(n_0)$.

Fremgangsmåde: (Referér til korollar 3.4.2)

1. **Basisskridtet:** Verificér $P(n_0)$ (ofte $n_0 = 1$)
2. **Induktionshypotesen (I.H.):** Antag $P(n-1)$ gælder for et vilkårligt $n \geq n_0 + 1$
3. **Induktionsskridtet (I.S.):** Vis at $P(n)$ følger af $P(n-1)$
4. **Konklusion:** Dermed gælder $P(n)$ for alle $n \geq n_0$ ved induktionsprincippet. □

Important

Typiske fejl at undgå:

- Glem ikke at **eksplicit skrive** "Induktionshypotese" og "Induktionsskridt"
- Husk at **bruge** I.H. i beviset — marker hvor du bruger den!
- Afslut med en **klar konklusion** der refererer til induktionsprincippet

Eksempel 1: Sum af de første n naturlige tal

Example (Bevis ved induktion — Sum)

Vis at $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Solution:

Basisskridt ($n = 1$):

$$\text{V.S.:} \quad \sum_{k=1}^{1} k = 1, \quad \text{H.S.:} \quad \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \quad \checkmark \tag{102}$$

Induktionshypotese (I.H.):

Antag at $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$ gælder for et vilkårligt $n \geq 2$.

Induktionskridt (I.S.):

Vi skal vise at $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} k}_{=\frac{(n-1)n}{2} \text{ af I.H.}} + n \\
&= \frac{(n-1)n}{2} + n \\
&= \frac{(n-1)n}{2} + \frac{2n}{2} \\
&= \frac{(n-1)n + 2n}{2} \\
&= \frac{n^2 - n + 2n}{2} \\
&= \frac{n^2 + n}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \quad \checkmark
\end{aligned} \tag{103}$$

Konklusion: Ved induktionsprincippet gælder formlen for alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Eksempel 2: Rekursiv følge

Example (Bevis ved induktion — Rekursiv følge)

Lad s_n være defineret rekursivt ved:

$$s_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2s_{n-1} + 1n > 1 \end{cases} \tag{104}$$

Vis at $s_n = 2^n - 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Solution:

Basisskridt ($n = 1$):

$$s_1 = 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark \tag{105}$$

Induktionshypotese (I.H.):

Antag at $s_{n-1} = 2^{n-1} - 1$ for et vilkårligt $n \geq 2$.

Induktionsskridt (I.S.):

Vi skal vise at $s_n = 2^n - 1$.

$$\begin{aligned}
s_n &= 2s_{n-1} + 1 \quad \text{(definition)} \\
&= 2(2^{n-1} - 1) + 1 \quad \text{(I.H.)} \\
&= 2 \cdot 2^{n-1} - 2 + 1 \\
&= 2^n - 1 \quad \checkmark
\end{aligned} \tag{106}$$

Konklusion: Ved induktionsprincippet gælder $s_n = 2^n - 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Eksempel 3: Matrixpotenser

Example (Bevis ved induktion — Matrixpotens)

Lad $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Vis at $\boldsymbol{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Solution:

Basisskridt $(n = 1)$:

$$\boldsymbol{A}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \checkmark \tag{107}$$

Induktionshypotese (I.H.):

Antag at $\boldsymbol{A}^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2(n-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ for et vilkårligt $n \geq 2$.

Induktionsskridt (I.S.):

Vi skal vise at $\boldsymbol{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^n &= \boldsymbol{A}^{n-1} \cdot \boldsymbol{A} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2(n-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(I.H.)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2(n-1) \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2(n-1) \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 + 2(n-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 + 2n - 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \checkmark \end{aligned} \tag{108}$$

Konklusion: Ved induktionsprincippet gælder formlen for alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Induktion over andre tallegemer

Note

Fremgangsmåde: (Referér til sætning 3.5.1)

Hvis påstanden skal gælde for $n \geq n_0$ (hvor $n_0 \neq 1$):

1. **Basisskridtet:** Verificér $P(n_0)$
2. **Induktionshypotesen:** Antag $P(n-1)$ for $n \geq n_0 + 1$
3. **Induktionsskridtet:** Vis $P(n)$

Hint: **Polynomium-rødder:**
- Reelle koefficienter $\Rightarrow$ komplekse rødder kommer i par
- Grad $n \Rightarrow$ præcis n rødder (med multiplicitet)
- Summen af rødder $= -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- Produktet af rødder $= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

Test simple rødder først: Prøv $Z = 0, \pm 1, \pm 2$ før du bruger formler.

Induktion — Strategi:
- Basisskridtet er ofte trivielt — brug det til at forstå mønstret
- I induktionsskridtet: Skriv $P(n)$ som $P(n-1) +$ “noget ekstra”
- For summer: $\sum_{k=1}^{n} = \sum_{k=1}^{n-1} + \text{sidste led}$
- For rekursive følger: Brug definitionen direkte
- For matrixpotenser: $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}^{n-1} \cdot \boldsymbol{A}$

Uge 6: Lineære Ligningssystemer og Gauss Elimination

Frie variable

Note

$$\text{Antal frie variable} = \text{Antal søjler} - \text{Antal pivoter} \tag{109}$$

For $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$.

Sætninger: Sætning 9.2.1, lemma 11.1.2, sætning 9.4.2

Da rangen af $\boldsymbol{A}$ er lig med antallet af pivoter i RREF, og antallet af vektorer i søjlerummet også er lig med antallet af pivoter, gælder:

$$\text{colsp}(\boldsymbol{A}) = \rho(\boldsymbol{A}) \tag{110}$$

Invertibel matrix

Note

Fremgangsmåde:

1. Referér til definition 7.3.1: $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ er invertibel hvis der findes $\boldsymbol{B} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ så:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n \tag{111}$$

2. Referér til korollar 7.3.5: Invers eksisterer kun hvis rang = antal søjler
3. Sørg for at søjlerne i $\boldsymbol{P}$ ikke er proportionale
4. Kontrollér at $\det(\boldsymbol{P}) \neq 0$

Bemærk: $\boldsymbol{P}^{-1}$ eksisterer $\Leftrightarrow \det(\boldsymbol{P}) \neq 0$

Vurdér om system er homogent eller inhomogent

Note

Fremgangsmåde: (Sætning 6.1.2)

1. Undersøg højresiden i den udvidede matrix
2. Hvis alle elementer = 0: **Homogent**
3. Ellers: **Inhomogent**

Vurdér om vektorer er lineært uafhængige

Note

Fremgangsmåde: (Sætning 7.1.3)

1. Omskriv matricen til RREF (definition 6.3.2, rækkeoperationer fra kapitel 6.2)
2. Undersøg om rang = antal søjler
   - Ja: Lineært **uafhængige**
   - Nej: Lineært **afhængige**

Hint: **Hurtige observationer:**
- Nulrække $\Rightarrow$ fri variabel $\Rightarrow$ uendeligt mange løsninger
- Nulrække med ikke-nul på højresiden $\Rightarrow$ ingen løsning
- Antal pivoter = rang
- Frie variable = søjler - pivoter

Invertibel matrix: $n \times n$ matrix er invertibel $\Leftrightarrow$ n pivoter $\Leftrightarrow$ $\det \neq 0$

MC-gæt: Hvis systemet har parameter (f.eks. a), er “specielle værdier” ofte dem der giver $\det = 0$.

Uge 7: Matrixalgebra og Determinanter

Determinant af kvadratisk matrix

Note

For 2×2: Kun definition 8.1.2

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc \tag{112}$$

For $n \times n$, $n > 2$:

Metode 1: Uden rækkeoperationer
- Henvis til sætning 8.2.1 (cofaktorudvidelse langs række med flest nuller)
- Henvis til definition 8.1.2

Metode 2: Med rækkeoperationer
- Forkort med elementære operationer, hold styr på effekt på determinant:
  - $R_i \leftarrow c \cdot R_i$: Multiplicér $\det$ med c (korollar 8.3.2)
  - $R_i \leftrightarrow R_j$: Skift fortegn på $\det$ (sætning 8.3.6)
  - $R_i \leftarrow R_i + c \cdot R_j$: Ingen effekt (sætning 8.3.7)

For triangulær matrix: $\det =$ produkt af diagonalelementer (proposition 8.1.1, sætning 8.1.2, 8.1.4)

Specielle tilfælde:
- Nulrække $\Rightarrow \det = 0$ (lemma 8.1.3)
- To identiske rækker $\Rightarrow \det = 0$ (proposition 8.2.5)

Rang af matrix

Note

Fremgangsmåde:
1. Omskriv til RREF (definition 6.3.2)
2. Rang = antal pivoter (definition 6.3.3)

Rang og Nulitet

Note

Rang-Nulitets-sætningen:

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{null}(\boldsymbol{A}) = n \tag{113}$$

hvor n er antal søjler i $\boldsymbol{A}$.

Rang: Antal pivoter i RREF **Nulitet:** $n - \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ = dimension af kernen

Example (Find egenværdier for $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$)

Solution:

Metode 1: Direkte beregning

Trin 1: Opstil $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}$:

$$\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} \tag{114}$$

Trin 2: Beregn determinanten (FOIL på diagonalen):

$$\det = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 8 \cdot 1 \tag{115}$$

Trin 3: udvid $(1-\lambda)(-1-\lambda)$ **omhyggeligt**:

$$(1-\lambda)(-1-\lambda) \tag{116}$$

- F: $1 \cdot (-1) = -1$
- O: $1 \cdot (-\lambda) = -\lambda$
- I: $(-\lambda) \cdot (-1) = \lambda$
- L: $(-\lambda) \cdot (-\lambda) = \lambda^2$

$$= -1 - Z + Z + Z^2 = Z^2 - 1 \tag{117}$$

Trin 4: Det karakteristiske polynomium:

$$p_{\boldsymbol{A}}(Z) = (Z^2 - 1) - 8 = Z^2 - 9 \tag{118}$$

Trin 5: Find rødderne:

$$\lambda^2 - 9 = 0 \tag{119}$$

$$\lambda^2 = 9 \tag{120}$$

$$\lambda = \pm 3 \tag{121}$$

Egenværdier: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$

—

Metode 2: Brug formlen (hurtigere, færre fejl)

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = 1 + (-1) = 0 \tag{122}$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = 1 \cdot (-1) - 8 \cdot 1 = -1 - 8 = -9 \tag{123}$$

$$p_{\boldsymbol{A}}(Z) = Z^2 - 0 \cdot Z + (-9) = Z^2 - 9 \tag{124}$$

Samme resultat!

Example (Faktorisér $\lambda^2 - 9$)

Solution:

Genkend: Dette er en **differens af kvadrater**: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$\lambda^2 - 9 = \lambda^2 - 3^2 = (\lambda - 3)(\lambda + 3) \tag{125}$$

Rødder: $\lambda = 3$ eller $\lambda = -3$

Example (Faktorisér $\lambda^2 - 5\lambda + 6$)

Solution:

Metode: Gæt og tjek

Søg r, s så:
- $r + s = 5$ (bemærk: $-p = -(-5) = 5$)
- $r \cdot s = 6$

Prøv: $r = 2$, $s = 3$ (da $2 + 3 = 5$ og $2 \cdot 3 = 6$)

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) \tag{126}$$

Rødder: $\lambda = 2$ eller $\lambda = 3$

Example (Faktorisér $\lambda^2 + 2\lambda - 8$)

Solution:

Metode: Gæt og tjek

Søg r, s så:
- $r + s = -2$
- $r \cdot s = -8$

Prøv: $r = -4$, $s = 2$ (da $-4 + 2 = -2$ og $(-4) \cdot 2 = -8$)

$$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = (\lambda + 4)(\lambda - 2) \tag{127}$$

Rødder: $\lambda = -4$ eller $\lambda = 2$

Example (Faktorisér $\lambda^2 - 4\lambda + 5$ (komplekse rødder))

Solution:

Metode: Kvadratisk formel (ingen nemme heltalsrødder)

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i \tag{128}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - (2+i))(\lambda - (2-i)) \tag{129}$$

Rødder: $\lambda = 2 + i$ eller $\lambda = 2 - i$

Note

Almindelige fejl at undgå:

1. **Fortegnsfejl i FOIL:** $(a-\lambda)(b-\lambda) \neq ab - \lambda^2$

   Korrekt: $(a-\lambda)(b-\lambda) = ab - a\lambda - b\lambda + \lambda^2$
2. **Glemmer $-bc$ leddet:** $\det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - \boldsymbol{bc}$
3. **Forkert fortegn i faktorer:** Hvis $\lambda = 3$ er rod, er faktoren $(\lambda - 3)$, **ikke** $(\lambda + 3)$
4. **Blander spor og determinant:**
   - Spor = diagonal**sum**: $a + d$
     - Determinant = diagonal**produkt** minus anti-diagonal: $ad - bc$

Hint: Instant $\det = 0$:
- Nulrække eller nulsøjle
- To identiske rækker/søjler
- Proportionale rækker/søjler
- Række/søjle er linearkombination af andre

Triangulær matrix: $\det =$ produkt af diagonalelementer — ingen udregning nødvendig!

Rækkeoperationer:
- Byt rækker: $\det$ skifter fortegn
- Gang række med k: $\det$ ganges med k
- Læg række til anden: $\det$ uændret

MC-gæt: $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$ — men $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \neq \det(\boldsymbol{A}) + \det(\boldsymbol{B})$!

Uge 8-9: Vektorrum, Basis og Koordinater

Span (udspænding)

Note

Definition 9.1.1: Span af vektorer er mængden af alle lineære kombinationer:

$$\text{span}(\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k) = \{c_1\boldsymbol{v}_1 + ... + c_k\boldsymbol{v}_k \mid c_i \in \mathbb{F}\} \tag{130}$$

Hvis vektorerne udgør en basis for et vektorrum, er deres span hele vektorrummet.

Dimension

Note

Flere metoder:

1. **Sætning 10.2.7:** $\dim(V)$ = antal lineært uafhængige vektorer i basis
2. For V med basis af $n \times m$ matricer: $\dim(V) = n \cdot m$
3. **Rang-Nulitets-sætningen (9.4.2):** $\rho(\boldsymbol{A}) + \text{null}(\boldsymbol{A}) = n$
4. **Korollar 11.4.3:** $\dim(V) = \dim(\ker L) + \dim(\text{image } L)$

Forskellige typer basis

Note

Generel basis: Et sæt af lineært uafhængige vektorer $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ der udspænder hele V.

Ordnet basis (definition 10.2.4, 9.2.1): En basis hvor rækkefølgen er vigtig - koordinater afhænger af rækkefølgen.

Ordnet standardbasis (eksempel 9.2.1): I $\mathbb{R}^n$: $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n)$ hvor $\boldsymbol{e}_i$ har 1 i position i, 0 ellers.

Underrum

Note

Fremgangsmåde: (Lemma 10.4.2)

$W \subseteq V$ er et underrum hvis:

$$\boldsymbol{u} + c \cdot \boldsymbol{v} \in W \quad \forall c \in \mathbb{F}, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W \tag{131}$$

Basis for underrum udspændt af vektorer

Note

Fremgangsmåde: (Definition 9.2.3, 9.2.4, sætning 9.2.1)

1. Saml vektorerne i en matrix
2. Reducér til RREF (definition 6.3.2)

3. Søjlerne med pivoter udgør en ordnet basis for udspændingen

Hint: Dimension:
- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
- $\dim(\mathbb{R}^{m \times n}) = m \cdot n$
- $\dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$ (polynomier af grad $\leq n$)

Lineær uafhængighed: n vektorer i $\mathbb{R}^n$ er lineært uafhængige $\Leftrightarrow \det \neq 0$

Span: Hvis vektorerne har "tydelige" ledende indgange i forskellige positioner, er de sandsynligvis uafhængige.

MC-gæt: Standardbasis-vektorer er altid lineært uafhængige.

Uge 10: Lineære Afbildninger

Undersøg om afbildning er lineær

Note

Fremgangsmåde: (Definition 11.0.1)

Undersøg om L opfylder:
1. $L(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{u}) + L(\boldsymbol{v})$, $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V_1$
2. $L(c \cdot \boldsymbol{u}) = c \cdot L(\boldsymbol{u})$, $\forall c \in \mathbb{F}$, $\forall \boldsymbol{u} \in V_1$

Angiv vilkårlige vektorer og undersøg begge krav.

Kernel (kernen)

Note

Definition 11.2.1:

$$\ker(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{F}^n \mid \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\} \tag{132}$$

Fremgangsmåde:
1. Sæt $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
2. Reducér til RREF
3. Find frie variable, skriv løsning som linearkombination

$$\ker(\boldsymbol{A}) = \operatorname{span}\{(\text{basisvektorer})\} \tag{133}$$

Image (billedrum)

Note

Definition: (Side 22 i lærebogen)

$$\text{image}(f) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \tag{134}$$

Fremgangsmåde:
1. Reducér til RREF
2. Pivotsøjlerne i den **originale** matrix danner basis for billedrummet

Dimension af billedrum og kerne

Note

Billedrum: (Sætning 10.4.4, lemma 11.1.2, sætning 9.4.1)

$$\dim(\text{Im}(\boldsymbol{A})) = \dim(\text{colsp}(\boldsymbol{A})) = \rho(\boldsymbol{A}) \tag{135}$$

Kerne: (Sætning 9.4.2)

$$\text{null}(\boldsymbol{A}) = n - \rho(\boldsymbol{A}) \tag{136}$$

$$\dim(\ker(\boldsymbol{A})) = n - \dim(\text{im}(\boldsymbol{A})) \tag{137}$$

Afbildningsmatrix

Note

Definition: (Lemma 11.3.3)

Afbildningsmatricen ${}_{\gamma}[L]_{\beta}$ beskriver hvordan L transformerer fra basis β til γ:

$${}_{\gamma}[L]_{\beta} = \left[[L(\boldsymbol{v}_1)]_{\gamma} ... [L(\boldsymbol{v}_n)]_{\gamma}\right], \quad \beta = (\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n) \tag{138}$$

Beregning:
1. Anvend L på hver basisvektor i β
2. Udtryk resultaterne som linearkombinationer af γ-basisvektorer
3. Koefficienterne udgør søjlerne i matricen

Basisskifte

Note

Definition:

Basisskiftematrix ${}_{\gamma}[\text{id}]_{\beta}$ konverterer koordinater fra β til γ:

$$_{\gamma}[\mathrm{id}]_{\beta} \cdot [\boldsymbol{v}]_{\beta} = [\boldsymbol{v}]_{\gamma}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V \tag{139}$$

Der gælder: $_{\gamma}[\mathrm{id}]_{\beta} = \left(_{\beta}[\mathrm{id}]_{\gamma}\right)^{-1}$

Sammensætning:

$$_{\beta}[L]_{\beta} = {}_{\beta}[\mathrm{id}]_{\gamma} \cdot {}_{\gamma}[L]_{\gamma} \cdot {}_{\gamma}[\mathrm{id}]_{\beta} \tag{140}$$

Hint: Injektiv/Surjektiv hurtig-tjek:

- Injektiv ⇔ $\ker = \{\mathbf{0}\}$ ⇔ ingen frie variable
- Surjektiv ⇔ rang = $\dim(\text{codomain})$
- Kvadratisk matrix: Injektiv ⇔ Surjektiv ⇔ $\det \neq 0$

Rang-Nulitet: $\dim(\ker) + \dim(\mathrm{im}) = \dim(\text{domæne})$

MC-gæt: Hvis matricen er kvadratisk og $\det \neq 0$, er afbildningen BÅDE injektiv OG surjektiv.

Uge 11: Egenværdiproblemet og Diagonalisering

Egenværdier

Note

Fremgangsmåde:

1. Opskriv egenværdiproblemet (definition 12.1.2): $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \cdot \boldsymbol{v}$
2. Omskriv til $p_{\boldsymbol{A}}(Z) = \det(\boldsymbol{A} - Z\boldsymbol{I}_n) = 0$
3. Løs det karakteristiske polynomium:
   - **2. grad:** Faktoriser eller brug diskriminantformlen (definition 5.2.1)
   - **3. grad:** Test simple rødder $\{-1, 0, 1\}$, divider, løs rest
   - **Højere grad:** Kombinér strategier

Egenvektorer

Note

Fremgangsmåde:

1. Find egenværdierne λ_i
2. For hver λ_i: Løs $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$
3. Egenvektorerne er ikke-trivielle løsninger ($\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$)

Egenrum

Note

Definition: (Lemma 12.2.3)

Egenrummet for λ er mængden af alle egenvektorer (plus nulvektoren):

$$E_\lambda = \ker(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n) \tag{141}$$

Example (Komplet eksempel — Find egenværdier, egenvektorer og egenrum)

Givet $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Find egenværdierne, egenvektorerne og egenrummene.

Solution:

Trin 1 — Find det karakteristiske polynomium:

$$\begin{aligned} p_{\boldsymbol{A}}(Z) &= \det(\boldsymbol{A} - Z\boldsymbol{I}_2) = \det\begin{bmatrix} 1-Z & 2 \\ 2 & 1-Z \end{bmatrix} \\ &= (1-Z)(1-Z) - 2\cdot 2 \\ &= (1-Z)^2 - 4 \end{aligned} \tag{142}$$

Trin 2 — Find egenværdierne (løs $p_{\boldsymbol{A}}(Z) = 0$):

$$\begin{aligned} (1-Z)^2 - 4 &= 0 \\ (1-Z)^2 &= 4 \\ 1 - Z &= \pm 2 \\ Z &= 1 \mp 2 \end{aligned} \tag{143}$$

Egenværdier: $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 3$

Trin 3 — Find egenrummet E_{-1}:

$$E_{-1} = \ker(\boldsymbol{A} - (-1)\boldsymbol{I}_2) = \ker\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{144}$$

Reducér til RREF:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{145}$$

Fra RREF: $v_1 + v_2 = 0$, så $v_1 = -v_2 = -t$ hvor $v_2 = t$ er fri.

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad E_{-1} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \tag{146}$$

Trin 4 — Find egenrummet E_3:

$$E_3 = \ker(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I}_2) = \ker\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \tag{147}$$

Reducér til RREF:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{148}$$

Fra RREF: $v_1 - v_2 = 0$, så $v_1 = v_2 = t$ hvor $v_2 = t$ er fri.

$$\boldsymbol{v} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad E_3 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \tag{149}$$

Opsummering:

- $\lambda_1 = -1$: $E_{-1} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, $\operatorname{gm}(-1) = 1$, $\operatorname{am}(-1) = 1$
- $\lambda_2 = 3$: $E_3 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, $\operatorname{gm}(3) = 1$, $\operatorname{am}(3) = 1$

Da $\operatorname{gm} = \operatorname{am}$ for begge egenværdier, er $\boldsymbol{A}$ **diagonaliserbar**.

Important

Vigtig sammenhæng:

$$1 \leq \operatorname{gm}(\lambda) \leq \operatorname{am}(\lambda) \tag{150}$$

En matrix er diagonaliserbar $\Leftrightarrow$ $\operatorname{gm}(\lambda) = \operatorname{am}(\lambda)$ for alle egenværdier.

Basis for egenrum

Note

Fremgangsmåde:

1. Find egenrummene
2. Følg fremgangsmetoden “Basis for underrum udspændt af vektorer”
3. Se evt. eksempel 12.2.1

Geometrisk multiplicitet

Note

Definition 12.2.1: $\operatorname{gm}(\lambda) = \dim(E_\lambda)$

Fremgangsmåde:

1. Opskriv $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}_n)$ og reducér til RREF
2. $\operatorname{gm}(\lambda)$ = antal frie variable = antal uafhængige løsninger

Algebraisk multiplicitet

Note

Definition 12.2.1: $\mathrm{am}(\lambda)$ = multiplicitet i det karakteristiske polynomium

Fremgangsmåde:
1. Find egenværdierne via $p_{\boldsymbol{A}}(Z) = 0$
2. Faktorisér polynomiet på formen $(Z - \lambda_i)^{m_i}$
3. $\mathrm{am}(\lambda_i) = m_i$

Diagonalisering

Note

Fremgangsmåde:

1. **Tjek om diagonaliserbar:**
   - Korollar 12.3.4, 12.3.5: $\mathrm{am}(\lambda_i) = \mathrm{gm}(\lambda_i)$ for alle λ_i
   - Definition 12.3.1: $\boldsymbol{A}$ similær med diagonalmatrix
2. Find egenværdier
3. Lemma 12.3.1: Egenvektorer til forskellige egenværdier er lineært uafhængige
4. Find egenvektorer, referér til Lemma 12.3.2
5. Opstil $\boldsymbol{X}$ med egenvektorer som søjler
6. Verificér: $\boldsymbol{X}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{D}$

Similære matricer

Note

Definition 12.3.1:

$\boldsymbol{A}$ er similær med $\boldsymbol{B}$ hvis der findes invertibel $\boldsymbol{Q}$ så:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{Q} \tag{151}$$

Matricer er similære hvis de er similære med samme diagonalmatrix.

Kvadratrod af matrix

Note

Fremgangsmåde: (Fra undervisning)

1. Konstatér at matricen kan diagonaliseres
2. Brug:

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = D \tag{152}$$

$$B = M \cdot \sqrt{D} \cdot M^{-1} \tag{153}$$

hvor $\sqrt{D}$ har kvadratrødder af diagonalelementerne

Example (Komplet eksempel: ODE-system med egenværdier)

Givet $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Find egenværdier og den fuldstændige løsning til $f'(t) = Af(t)$.

Solution:

Trin 1: Karakteristisk polynomium via formlen:

$$\operatorname{tr}(A) = 3 + 3 = 6 \tag{154}$$

$$\det(A) = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 9 - 4 = 5 \tag{155}$$

$$p_A(Z) = Z^2 - 6Z + 5 \tag{156}$$

Trin 2: Faktorisér:

Søg r, s så $r + s = 6$ og $r \cdot s = 5$.

Prøv: $r = 1$, $s = 5$

$$p_A(Z) = (Z - 1)(Z - 5) \tag{157}$$

Egenværdier: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$

Trin 3: Find egenvektorer:

For $\lambda_1 = 1$:

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{158}$$

$$2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{159}$$

For $\lambda_2 = 5$:

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{160}$$

$$-2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{161}$$

Trin 4: Fuldstændig løsning:

$$f(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{162}$$

Note

For 3×3 matricer:

Brug **co-faktorudvidelse** langs en række/søjle med flest nuller.

Typisk struktur hvis blokdiagonal eller trekantsform:
- Øvre/nedre trekantsmatrix: Egenværdier = diagonalelementerne
- Blokdiagonal: Find egenværdier for hver blok separat

Hint: Instant egenværdier:
- Triangulær/diagonal matrix: Aflæs fra diagonalen
- 2×2: Brug $\lambda^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\lambda + \det(\boldsymbol{A}) = 0$

Tjek egenvektor: Beregn $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$ — er det $\lambda\boldsymbol{v}$?

Diagonaliserbar:
- n forskellige egenværdier $\Rightarrow$ ALTID diagonaliserbar
- Symmetrisk matrix $\Rightarrow$ ALTID diagonaliserbar (og reelle egenværdier)

MC-gæt: Hvis $\mathrm{am}(\lambda) > \mathrm{gm}(\lambda)$ for nogen λ, er matricen IKKE diagonaliserbar.

Uge 12: Systemer af Lineære Differential-ligninger

Vurdér om differentialligning er lineær og homogen

Note

Fremgangsmåde: (Definition 13.0.2)

For $\boldsymbol{f}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(t) + \boldsymbol{g}(t)$:

1. Undersøg om venstresiden er en lineær afbildning
2. Undersøg højresiden:
   - $\boldsymbol{g}(t) = 0$: **Homogen**
   - $\boldsymbol{g}(t) \neq 0$: **Inhomogen**

Løsning til førsteordens differentialligning

Note

Gættemetoden (bedste strategi):
1. Find løsning til homogen ligning

2. Gæt partikulær løsning til inhomogen
3. Fuldstændig løsning = homogen + partikulær

Alternativ: Panserformlen (sætning 13.1.1, korollar 13.1.2, lemma 13.1.3)

Homogent system med reelle egenværdier

Note

For $f'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(t)$:

1. Find egenværdier: $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n) = 0$
2. Find egenvektorer via RREF af $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I}_n)$
3. Fuldstændig løsning:

$$\boldsymbol{f}(t) = c_1 \boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots \tag{163}$$

4. For begyndelsesværdiproblem $\boldsymbol{f}(0) = \boldsymbol{w}$:
   - Opstil $\boldsymbol{Q}$ med egenvektorer som søjler
   - Find $\boldsymbol{Q}^{-1}$
   - Substituér c_i med elementer i $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{w}$

Inhomogent system med reelle egenværdier

Note

For $f'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(t) + \boldsymbol{q}(t)$:

1. Find fuldstændig løsning til homogent system
2. Gæt partikulær løsning baseret på $\boldsymbol{q}(t)$:
   - Førstegradspolynomium $\Rightarrow$ gæt førstegradspolynomium
   - Eksponentialfunktion $\Rightarrow$ gæt eksponentialfunktion
   - $\cos/\sin \Rightarrow$ gæt kombination af $\cos$ og $\sin$
3. Isolér variable
4. Fuldstændig løsning = homogen + partikulær

Homogent system med komplekse egenværdier

Note

Fremgangsmåde: (Korollar 13.2.6)

1. Find komplekse egenværdier og egenvektorer
2. For komplekst par $\mu = \alpha \pm \beta i$:

$$\boldsymbol{f}(t) = e^{\alpha t}\left(c_1 \operatorname{Re}\left(\boldsymbol{w}e^{i\beta t}\right) + c_2 \operatorname{Im}\left(\boldsymbol{w}e^{i\beta t}\right)\right) \tag{164}$$

3. Omregn via Eulers formel (ligninger 3.7 og 3.8)
4. Anvend begyndelsesbetingelser som før

Hint: Homogen vs. Inhomogen:
- Højreside $= \mathbf{0} \Rightarrow$ homogen
- Alt andet $\Rightarrow$ inhomogen

Løsningsform (homogen):
- Reelle egenværdier: $c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2$
- Komplekse egenværdier $\alpha \pm \beta i$: $e^{\alpha t}(\cos(\beta t), \sin(\beta t))$-kombination

Begyndelsesværdi: Sæt $t = 0$, løs for c_1, c_2.

MC-gæt: Hvis egenværdierne er rent imaginære ($\alpha = 0$), oscillerer løsningen (ingen eksponentiel vækst/fald).

Uge 13: Differentialligninger af n'te Orden

Homogen andenordens differentialligning

Note

For $\boldsymbol{f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = 0}$:

1. Opstil karakteristisk polynomium (definition 13.3.2): $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$
2. Udregn diskriminant: $D = a_1^2 - 4a_0$
3. Løsning afhænger af D:
   - $D > 0$: To reelle rødder $\Rightarrow f(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ (formel 13.15)
   - $D < 0$: Komplekse rødder $\alpha \pm \beta i \Rightarrow f(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t))$ (formel 13.16)
   - $D = 0$: Dobbeltrod $\Rightarrow f(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}$ (formel 13.17)

Inhomogen andenordens differentialligning

Note

Fremgangsmåde: (Korollar 13.3.2)

1. Find løsning til den homogene version
2. Find partikulær løsning ved gæt
3. Fuldstændig løsning = homogen + partikulær

Begyndelsesværdier

Note

Ved to begyndelsesbetingelser til andenordens differentialligning:

Indsæt IKKE betingelserne én efter én!

Kendes $f(t_0)$ og $f'(t_0)$, findes én unik partikulær løsning der opfylder begge betingelser. Løs ligningssystemet for c_1 og c_2 samtidigt.

Hint: **2. ordens karakteristisk ligning $\boldsymbol{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$:**
- $D > 0$: To reelle $\Rightarrow c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
- $D = 0$: Dobbeltrod $\Rightarrow (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}$
- $D < 0$: Komplekse $\alpha \pm \beta i \Rightarrow e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t))$

Partikulær løsning gæt:
- Højreside polynomium $\Rightarrow$ gæt polynomium af samme grad
- Højreside $e^{kt} \Rightarrow$ gæt Ae^{kt} (medmindre k er egenværdi)
- Højreside $\sin/\cos \Rightarrow$ gæt $A\cos + B\sin$

MC-gæt: Løsninger til homogene ligninger indeholder ALDRIG konstante led alene (undtagen hvis $\lambda = 0$).

Eksamensopgaver - Løste Eksempler

Hints

Hint: **Generelle MC-strategier:**

1. **Eliminér først:** Fjern åbenlyst forkerte svar
2. **Indsæt tal:** Prøv $x = 0, 1, -1$ i abstrakte udtryk
3. **Dimensionstjek:** Passer dimensionerne i svaret?
4. **Ekstremer:** Hvad sker ved $t \to 0$, $t \to \infty$?

Typiske fælder:
- Fortegnsfejl (check fortegn i alle led)
- $\det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \neq \det(\boldsymbol{A}) + \det(\boldsymbol{B})$
- Glemmer kompleks konjugat-rod

Når tiden er knap:
- Triangulær matrix? Egenværdier = diagonal
- $\det = 0$? Ikke invertibel, $\lambda = 0$ er egenværdi
- Reelle koefficienter + kompleks rod? Den konjugerede er også rod

Opgave 1: Logik og Mængdelære

Note

Fremgangsmåde: Sandhedstabeller

1. Identificér alle atomare udsagn (P, Q, R, …)
2. Opret en tabel med 2^n rækker (hvor n = antal atomare udsagn)
3. Udfyld alle kombinationer af 0/1 for de atomare udsagn
4. Beregn mellemresultater (f.eks. $P \vee Q$) fra inderst til yderst
5. Anvend definitionen af implikation: $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ (falsk kun når A er sand og B er falsk)
6. Udfyld den endelige søjle

Fremgangsmåde: Mængdeoperationer

1. Skriv elementerne i hver mængde eksplicit op
2. Beregn indefra og ud:
   - $A \cup B$: Alle elementer der er i A **eller** B (eller begge)
   - $A \cap B$: Alle elementer der er i **både** A og B
   - $A \setminus B$: Elementer i A som **ikke** er i B
3. Skriv det endelige resultat som en mængde

Example (1a - Sandhedstabel for $(P \vee Q \vee R) \Rightarrow Q$)

Opstil sandhedstabellen for det logiske udsagn $(P \vee Q \vee R) \Rightarrow Q$.

Solution:

Sætning: Implikation: $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

Implikationen $(P \vee Q \vee R) \Rightarrow Q$ er kun falsk når antecedenten er sand og konklusionen er falsk.

P	Q	R	$P \vee Q \vee R$	$(P \vee Q \vee R) \Rightarrow Q$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Nøgleindsigt: Implikationen er falsk præcis når $Q = 0$ og mindst én af P, R er 1.

Example (1b - Mængdeoperationer)

Givet $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{3, 4, 5\}$. Bestem $(A \cup B) \cap C$.

Solution:

Trin 1: Beregn $A \cup B$ (alle elementer i A eller B):

$$A \cup B = \{0, 1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} = \{0, 1, 2, 3\} \tag{165}$$

Trin 2: Beregn $(A \cup B) \cap C$ (elementer i begge mængder):

$$(A \cup B) \cap C = \{0, 1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\} \tag{166}$$

Svar: $(A \cup B) \cap C = \{3\}$

Opgave 2: Komplekse Tal - Rødder

Note

Fremgangsmåde: Løs $z^n = w$ (De Moivres formel)

1. Udtryk w på polær form: $w = re^{i\theta}$
   - Find modulus: $r = |w| = \sqrt{a^2 + b^2}$ hvis $w = a + bi$
   - Find argument: $\theta = \arg(w)$ (vinklen fra den positive reelle akse)
2. Anvend De Moivres formel:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i(\theta + 2\pi k)}{n}}, \quad k = 0, 1, ..., n-1 \tag{167}$$

3. Beregn de n forskellige rødder ved at indsætte $k = 0, 1, ..., n-1$
4. Verificér at vinklerne er forskellige og korrekt fordelt (de ligger jævnt fordelt på en cirkel)

Huskeregel for polær form:

- $1 = e^{i \cdot 0}$
- $-1 = e^{i\pi}$
- $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$
- $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Example (2 - Løs $z^3 = -i$ på polær form)

Find alle løsninger til $z^3 = -i$ og angiv dem på polær form.

Solution:

Sætning: De Moivres formel - For $z^n = w$, hvis $w = re^{i\theta}$, så:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i(\theta + 2\pi k)}{n}}, \quad k = 0, 1, ..., n-1 \tag{168}$$

Trin 1: Udtryk $-i$ på polær form.

$$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}} \tag{169}$$

(Da $-i$ ligger på den negative imaginære akse: vinkel $= -\frac{\pi}{2}$, modulus $= 1$)

Trin 2: Anvend De Moivres formel med $n = 3$, $r = 1$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

$$z = r^{\frac{1}{3}} e^{iv} \text{ hvor } r^3 = 1 \Rightarrow r = 1 \tag{170}$$

$$3v = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{171}$$

$$v = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \tag{172}$$

Trin 3: Find de tre forskellige rødder ($k = 0, 1, 2$):

k	Vinkel v	Løsning
0	$-\frac{\pi}{6}$	$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{6}}$
1	$-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$	$z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$
2	$-\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6}$	$z_3 = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

Endelige svar:

$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{6}}, \quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_3 = e^{-i\frac{5\pi}{6}} \tag{173}$$

Opgave 3: Matrixpotenser og Induktion

Note

Fremgangsmåde: Matrixmultiplikation (i hånden)

1. For $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$: element (i, j) i $\boldsymbol{C}$ er prikproduktet af række i i $\boldsymbol{A}$ med søjle j i $\boldsymbol{B}$
2. $(\boldsymbol{AB})_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$
3. Beregn systematisk: tag én indgang ad gangen

Fremgangsmåde: Induktionsbevis

1. **Basistilfælde:** Verificér at formlen gælder for den mindste værdi (f.eks. $n = 1$ eller $n = 2$)
2. **Induktionshypotese:** Antag at formlen gælder for $n - 1$ (eller $n = k$)
3. **Induktionsskridt:** Vis at formlen så også gælder for n (eller $n = k + 1$)
   - Brug induktionshypotesen til at omskrive et udtryk
   - Manipulér algebraisk til det ønskede resultat
4. **Konklusion:** Formlen gælder for alle $n \geq n_0$ ved induktionsprincippet

Example (3a - Beregn $\boldsymbol{A}^2$)

Givet $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 2a \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, beregn $\boldsymbol{A}^2$.

Solution:

Matrixmultiplikation: $(\boldsymbol{AB})_{ij} = \sum_k A_{ik}B_{kj}$

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 2a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 2a \end{bmatrix} \tag{174}$$

Beregn hver indgang:

- $(1,1)$: $a \cdot a + 1 \cdot 0 = a^2$
- $(1,2)$: $a \cdot 1 + 1 \cdot 2a = a + 2a = 3a$
- $(2,1)$: $0 \cdot a + 2a \cdot 0 = 0$
- $(2,2)$: $0 \cdot 1 + 2a \cdot 2a = 4a^2$

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 3a \\ 0 & 4a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & (2^2-1)a^{2-1} \\ 0 & (2a)^2 \end{bmatrix} \tag{175}$$

Example (3b - Bevis ved induktion)

Vis ved induktion at $\boldsymbol{A}^n = \begin{bmatrix} a^n & (2^n-1)a^{n-1} \\ 0 & (2a)^n \end{bmatrix}$ for alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

Solution:

Induktionsprincippet:

1. Basistilfælde: Vis $P(2)$
2. Induktionsskridt: Antag $P(n-1)$, vis $P(n)$

Basistilfælde ($n = 2$): Fra del (a) har vi verificeret:

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 3a \\ 0 & 4a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & (2^2-1)a^1 \\ 0 & (2a)^2 \end{bmatrix} \tag{176}$$

Induktionshypotese: Antag sand for $n-1$:

$$\boldsymbol{A}^{n-1} = \begin{bmatrix} a^{n-1} & (2^{n-1}-1)a^{n-2} \\ 0 & (2a)^{n-1} \end{bmatrix} \tag{177}$$

Induktionsskridt:

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}^{n-1} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a^{n-1} & (2^{n-1}-1)a^{n-2} \\ 0 & (2a)^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 2a \end{bmatrix} \tag{178}$$

Beregn hver indgang:

- $(1,1)$: $a^{n-1} \cdot a + (2^{n-1}-1)a^{n-2} \cdot 0 = a^n$
- $(1,2)$: $a^{n-1} \cdot 1 + (2^{n-1}-1)a^{n-2} \cdot 2a$

$$= a^{n-1} + 2(2^{n-1}-1)a^{n-1} = a^{n-1}[1 + 2^n - 2] = (2^n - 1)a^{n-1} \tag{179}$$

- $(2,1)$: $0 \cdot a + (2a)^{n-1} \cdot 0 = 0$
- $(2,2)$: $0 \cdot 1 + (2a)^{n-1} \cdot 2a = (2a)^n$

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{bmatrix} a^n & (2^n-1)a^{n-1} \\ 0 & (2a)^n \end{bmatrix} \tag{180}$$

Konklusion: Ved induktionsprincippet gælder formlen for alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. $\square$

Opgave 4: Rang og Nulitet

Note

Fremgangsmåde: Find rang af en matrix

1. Skriv matricen op
2. Udfør rækkeoperationer til reduceret trappeform (RREF):
   - Byt rækker
   - Gang en række med en skalar $\neq 0$
   - Læg et multiplum af én række til en anden
3. Tæl antal pivoter (ledende 1-taller)
4. $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$ = antal pivoter

Fremgangsmåde: Find nulitet (dimension af kernen)

Brug Rang-Nulitets-sætningen:

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{null}(\boldsymbol{A}) = n \tag{181}$$

hvor n er antal søjler i $\boldsymbol{A}$.

Altså: $\operatorname{null}(\boldsymbol{A}) = n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$

Example (4a - Rang af matrix $\boldsymbol{B}$)

Givet $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, bestem $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.

Solution:

Definition: Rang = antal pivoter i RREF (reduceret række-echelon form).

Trin 1: Rækkeréducer til RREF.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 + R_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{182}$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \tag{183}$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{184}$$

$$\xrightarrow[R_2 \leftarrow \frac{1}{4}R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{185}$$

Trin 2: Tæl pivoter.

RREF: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Pivoter i søjle 1 og 2 $\Rightarrow$ **2 pivoter**

$$\mathbf{rank}(\boldsymbol{B}) = \mathbf{2} \tag{186}$$

Example (4b - Nulitet af matrix $\boldsymbol{B}$)

Bestem kernens dimension for matricen $\boldsymbol{B}$.

Solution:

Rang-Nulitets-sætningen: For $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{null}(\boldsymbol{A}) = n \tag{187}$$

hvor n er antal søjler.

For $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:
- $n = 3$ (søjler)
- $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = 2$ (fra del a)

$$\operatorname{null}(\boldsymbol{B}) = n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = 3 - 2 = 1 \tag{188}$$

$$\mathbf{null}(\boldsymbol{B}) = \mathbf{1} \tag{189}$$

Opgave 5: Systemer af ODE'er

Note

Fremgangsmåde: Homogent system via egenvektormetoden

Givet system $\boldsymbol{f}'(t) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{f}(t)$ hvor $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

1. Find det karakteristiske polynomium: $p_{\boldsymbol{A}}(Z) = \det(\boldsymbol{A} - Z\boldsymbol{I}_n)$
2. Find egenværdierne $\lambda_1, ..., \lambda_r$ (rødderne i $p_{\boldsymbol{A}}(Z) = 0$)
3. For hver egenværdi λ_i: Find en basis for egenrummet $E_{\lambda_i} = \ker(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I}_n)$
4. Tjek at $\boldsymbol{A}$ er diagonalisérbar: $\sum_i \operatorname{gm}(\lambda_i) = n$
5. Den fuldstændige løsning er:

$$\boldsymbol{f}(t) = c_1 \boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n \boldsymbol{v}_n e^{\lambda_n t} \tag{190}$$

hvor $\boldsymbol{v}_i$ er egenvektorer og $c_i \in \mathbb{R}$.

Fremgangsmåde: Begyndelsesværdiproblem for systemer

1. Find den fuldstændige løsning med parametre $c_1, ..., c_n$
2. Indsæt $t = t_0$ i den fuldstændige løsning
3. Sæt $\boldsymbol{f}(t_0) = \boldsymbol{y}_0$ og løs det lineære ligningssystem for $c_1, ..., c_n$
4. Indsæt værdierne af $c_1, ..., c_n$ i den fuldstændige løsning

Givet systemet:

$$\begin{cases} f_1'(t) = f_1(t) + f_2(t) \\ f_2'(t) = 2f_2(t) \end{cases} \tag{191}$$

Example (5a - Homogent eller inhomogent?)

Er systemet homogent eller inhomogent?

Solution:

Definition: Et lineært ODE-system $\boldsymbol{f}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(t) + \boldsymbol{g}(t)$ er:
- **Homogent** hvis $\boldsymbol{g}(t) = \boldsymbol{0}$
- **Inhomogent** hvis $\boldsymbol{g}(t) \neq \boldsymbol{0}$

Omskriv på matrixform:

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{192}$$

Da $\boldsymbol{g}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, er systemet **homogent**.

Example (5b - Verificér løsning)

Er $(f_1(t), f_2(t)) = (e^t, e^{2t})$ en løsning til systemet?

Solution:

Metode: Indsæt og tjek om begge ligninger er opfyldt.

Tjek ligning 1: $f_1'(t) = f_1(t) + f_2(t)$
- VL: $f_1'(t) = \frac{d}{dt}(e^t) = e^t$
- HL: $f_1(t) + f_2(t) = e^t + e^{2t}$

$e^t \neq e^t + e^{2t}$ (da $e^{2t} \neq 0$)

Konklusion: (e^t, e^{2t}) er **IKKE en løsning** da første ligning ikke er opfyldt.

Example (5c - Fuldstændig løsning)

Bestem den fuldstændige reelle løsning til systemet.

Solution:

Metode: Find egenværdier og egenvektorer for koefficientmatricen.

Trin 1: Skriv på matrixform $\boldsymbol{f}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(t)$ hvor:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{193}$$

Trin 2: Find egenværdier via $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \tag{194}$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 \tag{195}$$

Trin 3: Find egenvektorer.

For $\lambda_1 = 1$: Løs $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = 0 \tag{196}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{197}$$

For $\lambda_2 = 2$: Løs $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = v_2 \tag{198}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{199}$$

Trin 4: Fuldstændig løsning:

$$\boldsymbol{f}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \boldsymbol{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \boldsymbol{v}_2 \tag{200}$$

$$\boldsymbol{f}(t) = c_1 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{201}$$

På komponentform:

$$f_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}, \quad f_2(t) = c_2 e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{202}$$

Example (5d - Begyndelsesværdiproblem)

Bestem løsningen der opfylder $f_1(0) = 0$ og $f_2(0) = 1$.

Solution:

Fra den fuldstændige løsning:

$$f_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}, \quad f_2(t) = c_2 e^{2t} \tag{203}$$

Anvend begyndelsesbetingelser ved $t = 0$:

Fra $f_2(0) = 1$:

$$c_2 e^0 = 1 \Rightarrow c_2 = 1 \tag{204}$$

Fra $f_1(0) = 0$:

$$c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0 \Rightarrow c_1 + 1 = 0 \Rightarrow c_1 = -1 \tag{205}$$

Partikulær løsning:

$$f_1(t) = -e^t + e^{2t}, \quad f_2(t) = e^{2t} \tag{206}$$

Opgave 6: Lineære Afbildninger og Vektorrum

Note

Fremgangsmåde: Beregn $L(v)$ via afbildningsmatrix

1. Find koordinaterne $[v]_\beta$ i basen β ved at løse:

$$\boldsymbol{v} = x_1 \boldsymbol{b}_1 + x_2 \boldsymbol{b}_2 + \ldots + x_n \boldsymbol{b}_n \tag{207}$$

2. Anvend afbildningsmatricen:

$$[L(\boldsymbol{v})]_\gamma = {}_\gamma[L]_\beta \cdot [\boldsymbol{v}]_\beta \tag{208}$$

3. Konvertér tilbage fra koordinater til vektorer:

$$L(\boldsymbol{v}) = y_1 \boldsymbol{c}_1 + y_2 \boldsymbol{c}_2 + \ldots + y_m \boldsymbol{c}_m \tag{209}$$

hvor $(y_1, \ldots, y_m)^T = [L(\boldsymbol{v})]_\gamma$

Fremgangsmåde: Tjek injektivitet/surjektivitet

- **Injektiv** $\Leftrightarrow \ker(L) = \{\boldsymbol{0}\} \Leftrightarrow$ afbildningsmatricen har fuld søjlerang
- **Surjektiv** $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(L) = \dim(\mathrm{codomæne}) \Leftrightarrow$ afbildningsmatricen har fuld rækkerang
- For kvadratisk matrix: Injektiv $\Leftrightarrow$ Surjektiv $\Leftrightarrow \det \neq 0$

Lad $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ med ordnet basis:

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \tag{210}$$

Afbildningsmatrix: ${}_\beta[L]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Example (6a - Dimension af V)

Angiv dimensionen af $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Solution:

Definition: $\dim(V)$ = antal elementer i en basis for V.

Standardbasen for $\mathbb{R}^{2\times 2}$ er:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \tag{211}$$

Dette har 4 elementer (én for hver indgang i en 2×2 matrix).

Alternativt: $\mathbb{R}^{2\times 2} \simeq \mathbb{R}^4$, så $\dim(V) = 4$.

$$\mathbf{dim}(\boldsymbol{V}) = \mathbf{4} \tag{212}$$

Example (6b - Beregn $L\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\right)$)

Beregn $L\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\right)$.

Solution:

Strategi:
1. Udtryk inputmatrix som linearkombination af basisvektorer
2. Anvend afbildningsmatricen
3. Konvertér tilbage til matrixform

Trin 1: Find koordinater $[M]_\beta$ hvor $M = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Løs: $x_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

Indgangsvis ligninger:
- $(1,1)$: $0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 3$
- $(1,2)$: $1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 3$
- $(2,1)$: $1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 3$
- $(2,2)$: $1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 3$

Læg alle fire ligninger sammen: $3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 12 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$

Fra ligning 1: $x_2 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow x_1 = 1$

Tilsvarende: $x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$

$$[M]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{213}$$

Trin 2: Anvend afbildningsmatrix:

$$[L(\boldsymbol{M})]_\beta = {}_\beta[L]_\beta \cdot [\boldsymbol{M}]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{214}$$

Trin 3: Konvertér tilbage:

$$L(\boldsymbol{M}) = 4\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{215}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \tag{216}$$

Example (6c - Er L injektiv?)

Er den lineære afbildning L injektiv?

Solution:

Sætning: En lineær afbildning $L : V \to W$ er injektiv $\Leftrightarrow \ker(L) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow$ afbildningsmatricen har fuld søjlerang.

Metode - Tjek om afbildningsmatricen er invertibel:

${}_\beta[L]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Dette er en **øvre trekantsmatrix**. Dens determinant er produktet af diagonalelementerne:

$$\det\left({}_\beta[L]_\beta\right) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0 \tag{217}$$

Konklusion: Da afbildningsmatricen er invertibel (det $\neq 0$), har afbildningen triviel kerne, derfor:

$$\boldsymbol{L \text{ er injektiv}} \tag{218}$$

Bemærk: Da $L : V \to V$ med $\dim(V) = 4$ og L er injektiv, er L også **surjektiv** (rang-nulitets-sætningen), altså **bijektiv**.

Multiple Choice - Opgavetyper

MC1: Rødder i polynomium

Note

Fremgangsmåde: Find rødder i et polynomium

1. Identificér faktorer på formen $(Z - a)$ - disse giver umiddelbart rod $Z = a$
2. For 2.-gradspolynomier $aZ^2 + bZ + c$: Brug kvadratisk formel

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{219}$$

3. Husk: Hvis diskriminanten $b^2 - 4ac < 0$, er rødderne komplekse
4. Komplekse rødder til polynomier med reelle koefficienter kommer i konjugerede par

Example (Hvilke tal er rødder i polynomiet?)

Lad $a \in \mathbb{R}$, og betragt 3.-gradspolynomiet:

$$p(Z) = (Z - a)(Z^2 - 2Z + 5) \tag{220}$$

Hvilke af følgende tal er en rod i polynomiet?

Solution:

Metode: Polynomiet har rødder ved $Z = a$ og rødderne af $Z^2 - 2Z + 5 = 0$.

Løs $Z^2 - 2Z + 5 = 0$ med kvadratisk formel:

$$Z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i \tag{221}$$

Rødderne er: $Z = a$, $Z = 1 + 2i$, $Z = 1 - 2i$

Svar: $\mathbf{1 - 2i}$

MC2: Afstand i det komplekse plan

Note

Fremgangsmåde: Find afstand fra 0 i det komplekse plan

1. Afstanden fra 0 til z er modulus $|z|$
2. For $z = a + bi$: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
3. For $z = re^{i\theta}$: $|z| = r$

4. Særlige tilfælde:
   - $|e^{i\theta}| = 1$ for alle θ
   - $|re^{i\theta}| = |r|$
   - $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Example (Hvilket komplekst tal ligger længst fra 0?)

Hvilket af følgende komplekse tal ligger længst fra 0 i det komplekse plan?

Valgmuligheder: i, e^{6i}, $2+i$, πi, $1+i$, $1-i$, $4e^{i}$

Solution:

Metode: Afstanden fra 0 er modulus $|z|$.

Beregn $|z|$ for hver:
- $|i| = 1$
- $|e^{6i}| = 1$ (enhver $e^{i\theta}$ har modulus 1)
- $|2+i| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \approx 2.24$
- $|\pi i| = \pi \approx 3.14$
- $|1+i| = \sqrt{2} \approx 1.41$
- $|1-i| = \sqrt{2} \approx 1.41$
- $|4e^{i}| = 4$ (da $|re^{i\theta}| = r$)

Svar: $\mathbf{4e^{i}}$ med $|4e^{i}| = 4$

MC3: Funktionssammensætning

Note

Fremgangsmåde: Beregn $g(f^{-1}(y))$

1. Find $f^{-1}(y)$: Bestem hvilken x opfylder $f(x) = y$
   - For diskrete funktioner: Slå op i tabellen “baglæns”
   - For kontinuerte funktioner: Løs ligningen $f(x) = y$ for x
2. Beregn $g(f^{-1}(y))$ ved at indsætte resultatet i g

Example (Beregn $g(f^{-1}(3))$)

En diskret funktion $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ er givet ved tabellen:

n	$f(n)$
1	2
2	3
3	1

Desuden er $g : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{N}$ givet ved $g(n) = 4 + n$.

Bestem $g(f^{-1}(3))$.

Solution:

Trin 1: Find $f^{-1}(3)$ - dvs. hvilket n opfylder $f(n) = 3$?

Fra tabellen: $f(2) = 3$, så $f^{-1}(3) = 2$

Trin 2: Beregn $g(2)$:

$$g(2) = 4 + 2 = 6 \tag{222}$$

Svar: 6

MC4: Løsninger til 2.-ordens ODE

Note

Fremgangsmåde: Find generel løsning til homogen 2.-ordens ODE

Givet $af''(t) + bf'(t) + cf(t) = 0$:

1. Opstil karakteristisk ligning: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$
2. Løs for λ med kvadratisk formel
3. Tre tilfælde:
   - **To forskellige reelle rødder** λ_1, λ_2: $f(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
   - **Én dobbeltrod** λ: $f(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}$
   - **Komplekse rødder** $\alpha \pm \beta i$: $f(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t))$

Fremgangsmåde: Verificér om en funktion er løsning

1. Beregn $f'(t)$ og $f''(t)$
2. Indsæt i ODE'en
3. Tjek om udtrykket forenkler til 0

Example (Hvilken funktion er IKKE en løsning?)

Givet den homogene lineære 2.-ordens differentialligning:

$$f''(t) - 2f'(t) + 5f(t) = 0 \tag{223}$$

Hvilken af følgende er **ikke** en løsning?

Solution:

Trin 1: Find den generelle løsning via karakteristisk ligning.

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \tag{224}$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i \tag{225}$$

Generel løsning: $f(t) = e^t(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t))$

Trin 2: Tjek hver mulighed - en gyldig løsning skal have formen $e^t \cdot (\text{linearkombination af} \cos(2t), \sin(2t))$.

Problemet med $f(t) = e^t \cos(2t) + \sin(2t)$:

Leddet $\sin(2t)$ mangler faktoren e^t. Det er **ikke** på formen $e^{t(\dots)}$.

Svar: $\boldsymbol{f(t) = e^t \cos(2t) + \sin(2t)}$

MC5: Algebraisk multiplicitet

Note

Fremgangsmåde: Find algebraisk multiplicitet > 1

1. Opstil det karakteristiske polynomium $p_{\boldsymbol{A}}(Z) = \det(\boldsymbol{A} - Z\boldsymbol{I})$
2. For at få $\mathrm{am}(\lambda_0) > 1$ skal $(\lambda - \lambda_0)^2$ være en faktor
3. To måder dette kan ske:
   - En kendt egenværdi er også rod i en anden faktor
   - En faktor har diskriminant = 0 (dobbeltrod)
4. Løs for den ukendte parameter

Example (For hvilken værdi af a har matricen en egenværdi med algebraisk multiplicitet > 1?)

Givet $a \in \mathbb{R}$ og matricen:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{226}$$

Solution:

Trin 1: Find det karakteristiske polynomium.

$\boldsymbol{A}$ er blok-diagonal: øverste 1×1 blok giver $\lambda = 2$, nederste 2×2 blok:

$$\det \begin{bmatrix} a-Z & 1 \\ -1 & 1-Z \end{bmatrix} = (a-Z)(1-Z) + 1 = Z^2 - (a+1)Z + (a+1) \tag{227}$$

Karakteristisk polynomium:

$$p_{\boldsymbol{A}}(Z) = (Z-2)(Z^2 - (a+1)Z + (a+1)) \tag{228}$$

Trin 2: For algebraisk multiplicitet > 1 skal enten:
- $Z = 2$ også være rod i $Z^2 - (a+1)Z + (a+1) = 0$, eller
- $Z^2 - (a+1)Z + (a+1)$ have en dobbeltrod (diskriminant $= 0$)

Mulighed A: $Z = 2$ er rod i den kvadratiske:

$$4 - 2(a+1) + (a+1) = 0 \Rightarrow 4 - (a+1) = 0 \Rightarrow a = 3 \tag{229}$$

Verificér: Når $a = 3$, bliver polynomiet $(Z-2)(Z^2 - 4Z + 4) = (Z-2)(Z-2)^2 = (Z-2)^3$

Svar: $\boldsymbol{a = 3}$

MC6: Rekursiv matrixligning

Note

Fremgangsmåde: Beregn rekursiv matrixligning

Givet $\boldsymbol{c}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}_{k-1} + \boldsymbol{b}$:

1. Start med $\boldsymbol{c}_0$ (givet)
2. Beregn iterativt:
   - $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}_0 + \boldsymbol{b}$
   - $\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{b}$
   - osv.
3. Husk: Matrixmultiplikation først, så vektoraddition

Example (Bestem $\boldsymbol{c}_3$)

Givet:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{230}$$

og $\boldsymbol{c}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}_{k-1} + \boldsymbol{b}$ for $k = 1, 2, 3, \ldots$

Solution:

Beregn iterativt:

$\boldsymbol{k = 1}$**:**

$$\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}_0 + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{231}$$

$\boldsymbol{k = 2}$**:**

$$c_2 = Ac_1 + b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{232}$$

$k = 3$:

$$c_3 = Ac_2 + b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{233}$$

Svar: $c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

MC7: Determinant af matrixprodukt

Note

Fremgangsmåde: Beregn determinant af matrixprodukt

1. Beregn først matrixproduktet $A \cdot B$
2. Beregn determinanten af resultatet
3. For 2×2: $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$

Alternativ (kun for kvadratiske matricer af samme størrelse):

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \tag{234}$$

Tip: Hvis søjlerne (eller rækkerne) er lineært afhængige, er $\det = 0$

Example (Bestem $\det(A \cdot B)$)

Givet:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2} \tag{235}$$

Solution:

Trin 1: Beregn $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot 2 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{236}$$

Trin 2: Beregn determinanten:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 2 = 4 - 4 = 0 \tag{237}$$

Alternativ indsigt: Søjlerne er lineært afhængige (søjle 2 = 2 $\times$ søjle 1), så $\det = 0$.

Svar: $\det(A \cdot B) = 0$

MC8: Underrum og span

Note

Fremgangsmåde: Tjek om vektor/polynomium tilhører et span

For at tjekke om $\boldsymbol{v} \in \text{span}(\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_k)$:

1. Opstil ligningen: $\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + ... + \alpha_k \boldsymbol{u}_k$
2. Dette giver et ligningssystem for $\alpha_1, ..., \alpha_k$
3. Hvis systemet har løsning: $\boldsymbol{v}$ tilhører span
4. Hvis systemet ikke har løsning: $\boldsymbol{v}$ tilhører **ikke** span

For polynomier: Sammenlign koefficienter for hver potens af Z

Example (Hvilket polynomium tilhører IKKE underrummet?)

Betragt underrummet $\text{span}_{\mathbb{R}}(1 + Z^2, 1 + Z) \subseteq \mathbb{R}[Z]$ (polynomier af grad ≤ 2).

Hvilket polynomium tilhører **ikke** dette underrum?

Solution:

Metode: Et polynomium $p(Z) = aZ^2 + bZ + c$ tilhører $\text{span}(1 + Z^2, 1 + Z)$ hvis:

$$p(Z) = \alpha(1 + Z^2) + \beta(1 + Z) = \alpha Z^2 + \beta Z + (\alpha + \beta) \tag{238}$$

Dette giver betingelserne:
- Koefficient for Z^2: $a = \alpha$
- Koefficient for Z: $b = \beta$
- Konstant led: $c = \alpha + \beta = a + b$

Test: For at tilhøre underrummet skal $c = a + b$ (konstantleddet = summen af de andre koefficienter).

Tjek $-2Z^2 + 3Z + 2$:
- $a = -2$, $b = 3$, $c = 2$
- $a + b = -2 + 3 = 1 \neq 2 = c$

Svar: $\boldsymbol{-2Z^2 + 3Z + 2}$ tilhører ikke underrummet.

Polynomium fra rødder (med reelle koefficienter)

Note

Fremgangsmåde: Konstruér polynomium fra rødder

1. **Identificér alle rødder:**
   - Rødder der er givet direkte
   - Husk: Komplekse rødder kommer i konjugerede par (hvis koefficienterne er reelle)

2. **Opskriv polynomiet som produkt af faktorer:**

$$p(Z) = c(Z - r_1)^{m_1}(Z - r_2)^{m_2}\dots \tag{239}$$

hvor m_i er multipliciteten

3. **Forenkl komplekse par:** $(Z - (a + bi))(Z - (a - bi)) = Z^2 - 2aZ + (a^2 + b^2)$
4. **Find den ledende koefficient c:** Brug en given værdi $p(x_0) = y_0$ til at bestemme c
5. **Udvid polynomiet** for at finde specifikke koefficienter

Example (Konstruér polynomium fra rødder)

Lad $p(Z)$ være et polynomium af grad 4 med reelle koefficienter.
- 2 er rod med multiplicitet 2
- $1 + i$ er rod
- $p(1) = 7$

Find a_0 og a_3.

Solution:

Sætning: Hvis et polynomium har reelle koefficienter og z_0 er en kompleks rod, så er $\overline{z_0}$ også rod.

Trin 1: Identificér alle rødder.
- $Z = 2$ (multiplicitet 2)
- $Z = 1 + i$ (givet)
- $Z = 1 - i$ (kompleks konjugeret, da koefficienterne er reelle)

Trin 2: Opskriv polynomiet.

$$p(Z) = c(Z - 2)^2(Z - (1 + i))(Z - (1 - i)) \tag{240}$$

Udregn $(Z - (1 + i))(Z - (1 - i))$:

$$= Z^2 - Z(1 - i) - Z(1 + i) + (1 + i)(1 - i) = Z^2 - 2Z + 2 \tag{241}$$

Så: $p(Z) = c(Z - 2)^2(Z^2 - 2Z + 2)$

Trin 3: Brug $p(1) = 7$ til at finde c.

$$p(1) = c(1 - 2)^2(1 - 2 + 2) = c \cdot 1 \cdot 1 = c = 7 \tag{242}$$

Trin 4: Udvid polynomiet.

$$p(Z) = 7(Z^2 - 4Z + 4)(Z^2 - 2Z + 2) \tag{243}$$

Multiplicér ud:

$$(Z^2 - 4Z + 4)(Z^2 - 2Z + 2) = Z^4 - 6Z^3 + 14Z^2 - 16Z + 8 \tag{244}$$

$$p(Z) = 7Z^4 - 42Z^3 + 98Z^2 - 112Z + 56 \tag{245}$$

Svar: $a_0 = 56$, $a_3 = -42$

Polynomiumsdivision (givet én rod)

Note

Fremgangsmåde: Polynomiumsdivision i hånden

Givet $p(Z)$ hvor $Z = r$ er rod, så er $(Z - r)$ en faktor.

1. **Opstil divisionen:** Skriv $p(Z)$ til højre og $(Z - r)$ til venstre
2. **Find første led i kvotienten:**
   - Tag det ledende led i $p(Z)$ og divider med Z
   - Eksempel: $2Z^3 \div Z = 2Z^2$
3. **Gang og træk fra:**
   - Gang kvotientleddet med hele divisoren $(Z - r)$
   - Træk resultatet fra dividenden
   - Eksempel: $2Z^2 \cdot (Z - 3) = 2Z^3 - 6Z^2$
4. **Gentag processen:**
   - Brug resten som ny dividend
   - Fortsæt indtil graden af resten er lavere end divisorens grad
5. **Tjek:** Resten skal være 0 (ellers var r ikke en rod)
6. **Faktorisér videre:** Løs den resulterende kvotient for resterende rødder

Example (Faktorisér polynomium givet én rod)

Givet $p(Z) = 2Z^3 - 2Z^2 - 8Z - 12$ hvor $Z = 3$ er rod.

a) Skriv $p(Z)$ som produkt af et 1.-grads og et 2.-gradspolynomium.

b) Find samtlige rødder i $\mathbb{C}$.

Solution:

Del a) - Polynomiumsdivision:

Da $Z = 3$ er rod, er $(Z - 3)$ en faktor. Udfør division:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2Z^2 & +4Z & +4 & \\ \hline Z-3 & 2Z^3 & -2Z^2 & -8Z & -12 \\ & -(2Z^3 & -6Z^2 & &) \\ \hline & & 4Z^2 & -8Z & -12 \\ & & -(4Z^2 & -12Z &) \\ \hline & & & 4Z & -12 \\ & & & -(4Z & -12) \\ \hline \end{array} \tag{246}$$

$$p(Z) = (Z - 3)(2Z^2 + 4Z + 4) = 2(Z - 3)(Z^2 + 2Z + 2) \tag{247}$$

Del b) - Find alle rødder:

Fra $(Z-3)$: $Z=3$

Fra $Z^2+2Z+2=0$:

$$Z=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i \tag{248}$$

Svar: $Z=3$, $Z=-1+i$, $Z=-1-i$

Example (Polynomiumsdivision - Generelt eksempel)

Divider $x^3-5x^2-4x+20$ med $(x-2)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & & x^2 & -3x & -10 \\ \hline x-2 & x^3 & -5x^2 & -4x & +20 \\ & -(x^3 & -2x^2 & &) \\ \cline{2-5} & & -3x^2 & -4x & +20 \\ & & -(-3x^2 & +6x &) \\ \cline{3-5} & & & -10x & +20 \\ & & & -(-10x & +20) \\ \cline{4-5} \end{array} \tag{249}$$

Altså: $x^3-5x^2-4x+20=(x-2)(x^2-3x-10)$

Determinantegenskaber

Note

Fremgangsmåde: Beregn determinant via egenskaber

Nøglesætninger:
- $\det(\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{A})\cdot\det(\boldsymbol{B})$
- $\det(\boldsymbol{A}^T)=\det(\boldsymbol{A})$
- $\det(\boldsymbol{A}^{-1})=\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}$
- $\det(c\boldsymbol{A})=c^n\det(\boldsymbol{A})$ for $n\times n$ matrix
- $\det(\boldsymbol{A}^k)=(\det(\boldsymbol{A}))^k$

VIGTIGT: $\det(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\neq\det(\boldsymbol{X})+\det(\boldsymbol{Y})$ generelt!

Strategi:
1. Brug egenskaberne til at forenkle hvis muligt
2. Hvis en sum optræder, må man ofte beregne eksplicit

Example (Beregn $\det((\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{A}^2)\cdot\boldsymbol{A}^{-1})$)

Givet $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ med $\det(\boldsymbol{A}) = d$. Beregn $D = \det((\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{A}^2) \cdot \boldsymbol{A}^{-1})$.

Solution:

Nøglesætninger:
- $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \det(\boldsymbol{B})$
- $\det(\boldsymbol{A}^T) = \det(\boldsymbol{A})$
- $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}$
- $\det(c\boldsymbol{A}) = c^n \det(\boldsymbol{A})$ for $n \times n$ matrix

Metode: Kan IKKE bruge $\det(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) = \det(\boldsymbol{X}) + \det(\boldsymbol{Y})$ (dette er FORKERT!)

For konkret beregning skal man typisk:
1. Beregne $\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{A}^2$ eksplicit
2. Gange med $\boldsymbol{A}^{-1}$
3. Beregne determinanten

Alternativ (hvis muligt): Brug at $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$:

$$D = \det((\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{A}^2) \cdot \boldsymbol{A}^{-1}) \tag{250}$$

Hvis $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$ (symmetrisk): $\det(\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{A}^2) \cdot \det(\boldsymbol{A}^{-1})$

For den konkrete matrix i opgaven må man regne eksplicit.

Tjek om vektor er egenvektor

Note

Fremgangsmåde: Tjek om en vektor er en egenvektor

1. Beregn $\boldsymbol{Av}$
2. Tjek om resultatet er et skalarmultiplum af $\boldsymbol{v}$, dvs. om der findes $\lambda \in \mathbb{F}$ så $\boldsymbol{Av} = \lambda\boldsymbol{v}$
3. Hvis ja: $\boldsymbol{v}$ er en egenvektor med egenværdi λ
4. Hvis nej (komponenterne giver forskellige λ-værdier): $\boldsymbol{v}$ er ikke en egenvektor

Example (Er $\boldsymbol{v}$ en egenvektor for $\boldsymbol{A}$?)

Givet $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix}$.

Er $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en egenvektor?

Solution:

Definition: $\boldsymbol{v}$ er egenvektor for $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{Av} = \lambda\boldsymbol{v}$ for et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Metode: Beregn $\boldsymbol{Av}$ og tjek om resultatet er en skalar multiplikation af $\boldsymbol{v}$.

$$Av = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-4+4 \\ 0-7+8 \\ 0+4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{251}$$

Tjek: Er $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$?

Hvis ja, så $\lambda = -1$ (da $-3 = -1 \cdot 3$, $1 = -1 \cdot (-1)$, $-1 = -1 \cdot 1$)

Svar: Ja, $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er egenvektor med egenværdi $\lambda = -1$.

Hvis NEJ: Komponenterne ville give forskellige λ-værdier.

Basis for kerne og søjlerum

Note

Fremgangsmåde: Find basis for kernen

1. Løs $Bx = 0$
2. Rækkeréducér B til RREF
3. Identificér frie variable (søjler uden pivot)
4. Udtryk løsningen parametrisk
5. Basisvektorerne for kernen aflæses fra de parametriske udtryk

Fremgangsmåde: Find basis for søjlerummet

1. Rækkeréducér B til RREF
2. Identificér pivotsøjlerne (søjler med pivot)
3. De tilsvarende søjler i den **originale** matrix danner basis for søjlerummet

Tjek surjektivitet: L er surjektiv $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(B) = m$ (antal rækker i B)

Example (Find basis for $\ker(B)$ og $\operatorname{colsp}(B)$)

Givet $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$.

a) Find en basis for kernen. b) Find en basis for søjlerummet. c) Er $L(v) = Bv$ surjektiv?

Solution:

Del a) - Basis for kernen:

Løs $Bx = 0$. Rækkeréducér:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -7 & 14 \end{bmatrix} \tag{252}$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - (\frac{7}{5})R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftarrow (-\frac{1}{5})R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{253}$$

$$\xrightarrow[R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{254}$$

Fra RREF: $x_1 = -3t$, $x_2 = 2t$, $x_3 = t$ (fri variabel)

$$\ker(\boldsymbol{B}) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \tag{255}$$

Basis for kernen: $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Del b) - Basis for søjlerummet:

Sætning: Pivotsøjlerne i den **originale** matrix danner basis for søjlerummet.

Fra RREF har vi pivoter i søjle 1 og 2.

Basis for søjlerummet: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

Del c) - Er L surjektiv?

Sætning: $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er surjektiv $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = m$ (antal rækker).

Her: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = 2$ (2 pivoter), men $m = 3$ (3 rækker).

$2 \neq 3$, så **L er IKKE surjektiv**.

Alternativ: Søjlerummet har dimension 2, men codomænet er $\mathbb{R}^3$, så L rammer ikke hele $\mathbb{R}^3$.

Basisskiftematricer

Note

Fremgangsmåde: Beregn basisskiftematricer

Notation: ${}_\beta[\mathrm{id}]_\gamma$ er matricen der konverterer koordinater fra γ til β. (Læses fra højre mod venstre: "fra γ til β")

Metode 1: Når β er standardbasen

${}_\beta[\mathrm{id}]_\gamma$ har γ-basisvektorerne som søjler (i standardkoordinater).

Metode 2: Beregn den inverse

${}_{\gamma}[\mathrm{id}]_{\beta} = \left({}_{\beta}[\mathrm{id}]_{\gamma}\right)^{-1}$

Verifikation: ${}_{\beta}[\mathrm{id}]_{\gamma} \cdot {}_{\gamma}[\mathrm{id}]_{\beta} = \boldsymbol{I}$

Example (Beregn basisskiftematricer)

Lad $V = \mathbb{R}^3$ med standardbasis $\beta = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ og basis:

$$\gamma = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \tag{256}$$

a) Angiv ${}_{\beta}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\gamma}$ b) Beregn ${}_{\gamma}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\beta}$

Solution:

Notation: ${}_{\beta}[\mathrm{id}]_{\gamma}$ konverterer koordinater fra γ til β.

Del a) - ${}_{\beta}[\mathrm{id}]_{\gamma}$:

Denne matrix har γ-basisvektorerne som søjler (udtrykt i β-koordinater).

Da β er standardbasen, er β-koordinaterne bare de sædvanlige koordinater:

$${}_{\beta}[\mathrm{id}]_{\gamma} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{257}$$

Del b) - ${}_{\gamma}[\mathrm{id}]_{\beta}$:

Sætning: ${}_{\gamma}[\mathrm{id}]_{\beta} = \left({}_{\beta}[\mathrm{id}]_{\gamma}\right)^{-1}$

Beregn inversen af $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$:

Brug kofaktormetode eller rækkeoperationer. Da matricen er blokdiagonal:

Øverste 2×2 blok: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Nederste blok: $\frac{1}{2}$

$${}_{\gamma}[\mathrm{id}]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{258}$$

Verifikation: ${}_{\beta}[\mathrm{id}]_{\gamma} \cdot {}_{\gamma}[\mathrm{id}]_{\beta} = \boldsymbol{I}$

2.-ordens inhomogen ODE

Note

Fremgangsmåde: Løs inhomogen 2.-ordens ODE

Givet $af''(t) + bf'(t) + cf(t) = g(t)$:

1. **Find den homogene løsning $f_{h(t)}$:**
   - Løs karakteristisk ligning $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$
   - Konstruér $f_{h(t)}$ baseret på rødderne
2. **Find én partikulær løsning $f_{p(t)}$:**
   - Gæt en ansatz baseret på $g(t)$:
     - $g(t) =$ konstant $\Rightarrow$ prøv $f_p = A$
     - $g(t) =$ polynomium $\Rightarrow$ prøv polynomium af samme grad
     - $g(t) = e^{kt} \Rightarrow$ prøv $f_p = Ae^{kt}$
   - Indsæt i ODE'en og bestem koefficienterne
3. **Fuldstændig løsning:**

$$f(t) = f_{h(t)} + f_{p(t)} \tag{259}$$

Example (Find partikulær løsning til $f''(t) + 2f'(t) - 8f(t) = p(t)$)

Givet $f''(t) + 2f'(t) - 8f(t) = at + b$ hvor $f_0(t) = -t + 5$ er partikulær løsning.

Find $f_{p(t)}$, a og b.

Solution:

Trin 1: Find den homogene løsning.

Karakteristisk ligning: $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$

$$(\lambda + 4)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 2 \tag{260}$$

Homogen løsning: $f_{h(t)} = c_1e^{-4t} + c_2e^{2t}$

Trin 2: Bestem a og b fra den partikulære løsning.

Hvis $f_0(t) = -t + 5$ er partikulær løsning, så:

$$f_{0'}(t) = -1, \quad f_{0''}(t) = 0 \tag{261}$$

Indsæt i ODE'en:

$$0 + 2(-1) - 8(-t + 5) = at + b \tag{262}$$

$$-2 + 8t - 40 = at + b \tag{263}$$

$$8t - 42 = at + b \tag{264}$$

Sammenlign koefficienter:

- t-led: $a = 8$

- Konstant: $b = -42$

Trin 3: Fuldstændig løsning.

$$f_{p(t)} = f_{h(t)} + f_0(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{2t} - t + 5 \tag{265}$$

Svar: $a = 8$, $b = -42$, $f_{p(t)} = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{2t} - t + 5$

Rekursiv funktion

Note

Fremgangsmåde: Beregn rekursiv funktion

1. Skriv startværdierne op (basistilfælde)
2. Beregn iterativt fra de kendte værdier:
   - $f(3) =$ ... (brug $f(1), f(2)$)
   - $f(4) =$ ... (brug $f(2), f(3)$)
   - osv.
3. Fortsæt indtil du når den ønskede værdi

Tip: Lav en tabel for at holde styr på beregningerne

Example (Beregn $f(5)$ for rekursiv funktion)

$$f(n) = \begin{cases} 1 \text{ for } n = 1 \\ 2 \text{ for } n = 2 \\ 3f(n-1) - f(n-2) \text{ for } n \geq 3 \end{cases} \tag{266}$$

Solution:

Beregn iterativt:
- $f(1) = 1$
- $f(2) = 2$
- $f(3) = 3 \cdot f(2) - f(1) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$
- $f(4) = 3 \cdot f(3) - f(2) = 3 \cdot 5 - 2 = 13$
- $f(5) = 3 \cdot f(4) - f(3) = 3 \cdot 13 - 5 = 34$

Svar: $f(5) = 34$

Løsning af 2.-gradsligning (kompleks, polær form)

Note

Fremgangsmåde: Løs 2.-gradsligning og angiv på polær form

1. Brug kvadratisk formel: $z = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
2. Hvis diskriminanten er negativ, får du komplekse løsninger
3. Konvertér til polær form:
   - Find modulus: $|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}$
   - Find argument: $\arg(z) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$ (juster for kvadrant)
4. Skriv: $z = |z|\, e^{i\arg(z)}$

Example (Løs $3z^2 - 6z + 12 = 0$, angiv på polær form)

Solution:

Brug kvadratisk formel:

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 144}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{-108}}{6} = \frac{6 \pm 6\sqrt{3}i}{6} = 1 \pm \sqrt{3}i \tag{267}$$

Konvertér $z = 1 + \sqrt{3}i$ til polær form:

- $|z| = \sqrt{1+3} = 2$
- $\arg(z) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \tag{268}$$

Den anden løsning: $z = 1 - \sqrt{3}i = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Svar: $z = 2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$

Hurtig Reference: Nøglesætninger

Logik

- **Implikation:** $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ (kun falsk når P sand, Q falsk)

Komplekse Tal

- **De Moivre:** $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$
- **n-te rødder:** $z_k = \sqrt[n]{r}e^{\frac{i(\theta+2\pi k)}{n}}$, $k = 0, ..., n-1$

Lineær Algebra

- **Rang-Nulitet:** $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{null}(\boldsymbol{A}) = n$ (antal søjler)
- **Injektivitet:** L injektiv $\Leftrightarrow \ker(L) = \{\boldsymbol{0}\} \Leftrightarrow \det \neq 0$ (for kvadratisk)

ODE'er

- **Homogen:** $\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$ (ingen tvangsfunktion)
- **Løsning:** $\boldsymbol{f}(t) = \sum_i c_i e^{\lambda_i t} \boldsymbol{v}_i$ hvor $\lambda_i, \boldsymbol{v}_i$ er egenværdi/egenvektor-par

Induktion

1. Basistilfælde: Verificér $P(n_0)$
2. Induktionsskridt: Antag $P(k)$, vis $P(k+1)$