1 对于任意一个 $m*n$ 阶的矩阵 A, 若定义

$$||A|| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \tag{1}$$

证明它是矩阵 A 的范数。

解:

证明：需要证明此定义满足矩阵范数的四条性质即可。

非负性：$||A||$ 大于等于 0，仅当 $A=0$ 时，$||A||=0$, 所以非负性成立。

齐次性：k 为任意复数，

$$\begin{aligned} ||kA|| &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|k\cdot a_{ij}| \\ &= k\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \\ &= k||A|| \end{aligned} \tag{2}$$

三角不等式：

$$\begin{aligned} ||A|| + ||B|| &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}| \\ &\geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}+b_{ij}| \\ &= ||A+B|| \end{aligned} \tag{3}$$

相容性：设 A 是 $m*p$ 阶矩阵，B 是 $p*n$ 阶矩阵，

$$\begin{aligned} ||AB|| &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{p}a(i,k)\cdot b(k,j)\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}|a(i,k)||b(k,j)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{p}|a(i,k)|\right)\left(\sum_{k=1}^{p}|b(k,j)|\right)\right] \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}|a(i,k)|\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}|b(k,j)|\right) \\ &= |A||B| \end{aligned} \tag{4}$$

所以此定义是矩阵 A 的范数。

2 用列主元高斯消去法求解方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -1 \\ 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \tag{5}$$

解:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{交换第一行和第三行}} \\
&\begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{r2-3/5*r1, r3-4/5*r1}} \\
&\begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 0 & 4/5 & 11/5 \\ 0 & -8/5 & -2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -11/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{交换第二行和第三行}} \\
&\begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 0 & -8/5 & -2/5 \\ 0 & 4/5 & 11/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2/5 \\ -11/5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{r3+1/2*r2}} \\
&\begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 0 & -8/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2/5 \\ -2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6}$$

回代可求得 x1=1,x2=0,x3=-1。