Instituto Superior Politécnico De Songo

Manual de Álgebra Linear e Geometria Analítica

Autor: Coutinho João Mataca

Direitos Do Autor

Elaborado por:
Coutinho João Mataca

Instituto Superior Politécnico De Songo
Tel: 252 82336
Moçambique
Fax: 252 82338
E-mail: ispsongo@gmail.com

Agradecimentos

A realização deste Módulo contou com a colaboração de diversas pessoas as quais gostaria de expressar os meus sinceros agradecimentos.

Agradeço Prof. Doutor Yuriy Nepomnyashchikh, pela supervisão desta módulo.

Agradeço ao dr. Domingos Celso Djinja, pela confecção de uma parte de figuras e organizaçao do Módulo.

Agradeço ao dr. Nabote António Magaia por ter desponibilizado o seu material para a elaboração do Módulo.

Agradeço ao dr. Justino Buanali e ao estudante Nélio Barros, pela confecção de uma parte de figuras.

Finalmente, agradeço aos meus amigos, familiares e todos os que directa ou indirectamente contribuíram para a realização do presente trabalho, em especial à Isaltina Da Flora Víctor.

Conteúdo

Visão Geral 1

Métodos de trabalho 1

Objectivo do Módulo 2

Quem deveria estudar este módulo 2

Como está estruturado este módulo 3

Páginas introdutórias 3

Conteúdos do curso/módulo 3

Outros recursos 3

Tarefas de avaliação e/ou Auto-avaliação 3

Comentários e sugestões 4

Habilidades de estudo 4

Precisa de apoio? 4

Tarefas (avaliação e auto-avaliação) 5

Avaliação 5

I Álgebra Linear **6**

Introdução 7

0.1 **Unidade 01. Noção de matrizes e operações com matrizes** 8

Introdução 8

0.1.1 Noção de matrizes 9

0.1.2 Tipos de matrizes 9

0.1.3 Igualdade de Matrizes 12

0.1.4 Operações com matrizes 12

0.1.5 Operações elementares sobre as linhas de uma matriz 17

0.1.6 **Exercícios Resolvidos** 21

0.1.7 **Exercícios Propostos** 28

0.2 **Unidade 03. Determinantes** 31

Introdução 31

0.2.1 Generalidades 32

0.2.2 Regra de Sarrus 34

0.2.3 Resumo das propriedades dos determinantes 35

0.2.4 Desenvolvimento de Laplace 52

0.2.5 **Exercícios Resolvidos** 55

0.2.6 **Exercícios Propostos** 58

0.3 **Unidade 03.**Matriz Inversa 63

Introdução 63

0.3.1 O algorítmo de Gauss-Jordan para inversão de Matrizes 64

0.3.2 Cálculo da matriz inversa, usando determinantes 67

0.3.3 Matriz adjunta 67

0.3.4 **Exercícios Resolvidos** 73

0.3.5 **Exercícios Propostos** 79

0.4 **Unidade 04.**Sistemas de equações lineares 81

Introdução 81

0.4.1 Generalidades 82

0.4.2 Compatibilidade de sistemas lineares 83

0.4.3 Métodos de resolução de sistemas de equações lineares 85

0.4.4 SISTEMAS HOMOGÊNEO DE EQUACOES LINEARES 94

0.4.5 **Exercícios Resolvidos** 97

0.4.6 **Exercícios Propostos** 103

0.5 **Unidade 04. Autovalores e Autovectores** 108
Introdução 108
0.5.1 Autovalores e Autovectores 109
0.5.2 Polinómio Característico 111
0.5.3 **Exercícios Resolvidos** 113
0.5.4 **Exercícios Propostos** 116
0.5.5 **Ficha Suplementar** 117

II Álgebra Vectorial **125**

Introdução 126
0.6 **Unidade 05. Noçãode vector e Operações sobre vectores** 128
Introdução 128
0.6.1 Noçãode vector 129
0.6.2 Grandezas escalares 129
0.6.3 Operações sobre vectores 132
0.6.4 **Exercícios Resolvidos** 137
0.6.5 **Exercícios Propostos** 139
0.7 **Unidade 06. Os podutos de vectores** 141
Introdução 141
0.7.1 Produto interno (ou produto escalar) 142
0.7.2 Norma (ou módulo dum vector). Desigualdade de Cauchy-Schawarz. Desigualdade triangular. 145
0.7.3 Produto Externo (ou Produto Vectorial) 147
0.7.4 Triedro Positivo (ou Triedro "Direito") 147
0.7.5 Anulamento do produto externo (Ou Vectorial) 149
0.7.6 Sentido Geométrico do produto externo 150
0.7.7 Aplicações do produto vectorial 150
0.7.8 Produto misto de vectores 151

0.7.9 Sentido Geométrico do produto misto . . . 152
0.7.10 Aplicações do produto misto . . . 152
0.7.11 **Exercícios Resolvidos** . . . 154
0.7.12 **Exercícios Propostos** . . . 157
0.8 **Unidade 07. Espaços e subespaços lineares** . . . 158
Introdução . . . 158
0.8.1 Espaço vectorial (ou espaço linear) . . . 159
0.8.2 Subespaço Vectorial. Combinação linear. Subespaç Gerado . . . 160
0.8.3 Dependência e independência linear . . . 161
0.8.4 Bases e dimensão . . . 163
0.8.5 **Exercícios resolvidos** . . . 164
0.8.6 **Exercícios Propostos** . . . 169
0.8.7 **Ficha Suplementar** . . . 171

III Geometria Analítica 176

Introdução . . . 177
0.9 **Unidade 08. Estudo da recta no plano** . . . 178
Introdução . . . 178
0.9.1 Definição duma recta no plano . . . 179
0.9.2 Equação paramétrica da recta . . . 180
0.9.3 Equação canónica da recta . . . 181
0.9.4 Equação da recta que passa por dois pontos . . . 181
0.9.5 Equação axial da recta . . . 182
0.9.6 Equação duma recta que passa por um ponto e é perpendicular a um vector . . . 182
0.9.7 Equação geral da recta . . . 182
0.9.8 Equação da recta que passa pelo ponto $M_1(x_1; y_1)$ e tem coeficiente angular a . . . 183

0.9.9 O ângulo entre duas rectas 184

0.9.10 Posição relativa de duas rectas 184

0.9.11 Distância dum ponto a uma recta 185

0.9.12 Bissectrizes dos ângulos formados por duas rectas 187

0.9.13 **Exercícios resolvidos** 188

0.9.14 **Exercícios Propostos** 190

0.10 **Unidade 09. Estudo do plano** 193

Introdução 193

0.10.1 Equação do plano que passa por um ponto e é perpendicular a um vector 194

0.10.2 Equação geral do plano 194

0.10.3 Casos particulares de planos 195

0.10.4 Plano mediador (mediatriz) 196

0.10.5 Equação do plano que passa por três pontos 196

0.10.6 Equção do plano que passa por um ponto e é paralelo a dois vectores . . 197

0.10.7 Equação axial do plano 198

0.10.8 Ângulo entre planos 198

0.10.9 Condições de paralelismo e de perpendicularidade entre planos 198

0.10.10 Distância de um ponto a um plano 199

0.10.11 **Exercícios Resolvidos** 200

0.10.12 **Exercícios Propostos** 202

0.11 **Unidade 010. Estudo da recta no espaço** 204

Introdução 204

0.11.1 Equação geral da recta 205

0.11.2 Equação paramétrica da recta 205

0.11.3 Equação canćônica da recta 205

0.11.4 Transformação da equação geral em equação paramétrica 206

0.11.5 Posição relativa de duas rectas 207

0.11.6 Distância de um ponto á uma recta 208

0.11.7 Distância entre duas rectas reversas 209

0.11.8 Ângulo entre duas rectas 209

0.11.9 Condições de paralelismo e perpendicularidade
entre duas rectas 209

0.11.10 **Exercícios Resolvidos** 211

0.11.11 **Exercícios Propostos** 213

0.12 **Unidade 011. Curvas e superfícies de segunda ordem** 216

Introdução 216

0.12.1 Cônicas 217

0.12.2 Formas quadráticas e canonização delas 219

0.12.3 Classificação das cônicas através de formas quadráticas 220

0.12.4 Quádricas 222

0.12.5 **Exercícios Resolvidos** 227

0.12.6 **Exercícios Propostos** 230

Bibliografia 231

Visão Geral

Este módulo foi concebido para servir de texto básico para alunos de Álgebra linear e Geometria Analítica do cursos de Engenharia do Instituto Superior Politecnico De Songo, e também para preconizar um ambiente de aprendizagem e ensaio de técnicas, estratégias e procedimentos diversos de ensino nas suas várias formas alternativas. Este módulo é constituido por três partes (contendo 11 unidades temáticas).
A disciplina Álgebra Linear e Geometria Analítica, tem como objectivo, proporcionar ao aluno a utilização rigorosa da notação na comunicação oral/escrita de matemática. Compreender e aplicar conceitos de Álgebra Linear e de Geometria Analítica que serão ferramentas essenciais para apoio a disciplinas específicas do curso.

Métodos de trabalho

A reflexão e a discussão são componentes fundamentais do trabalho que se realiza na disciplina de Álgebra Linear e Geometria Analítica.
As aulas teóricas-práticas realizam-se segundo o horario da instituicao, sendo leccionadas a alunos agrupados em turmas da sua especialidade. Nestas aulas a actividade dos cursistas/alunos desempenha um papel central e pode assumir diversas formas como, por exemplo, trabalho prático, participação em discussões, e preparação e realização de apresentações, incluindo momentos de dinamização das próprias aulas.
Ao longo do semestre, os alunos serão solicitados a realizar trabalho individual(actividades propostas ao longo do módulo), em pequenos grupos ou ao nível de toda a turma, sendo a organização em pequenos grupos o modo mais habitual de trabalho. A participação nas actividades propostas na disciplina inclui frequentemente a utilização de material de apoio, nomeadamente textos e outros escritos, materiais manipuláveis e recursos tecnológicos, por exemplo a calculadora.

Objectivos Módulo

No fim deste módulo, o aluno deve ser capaz de:

- Operar com matrizes;
- Resolver sistemas de equações usando vários métodos;
- Calcular determinantes, usando vários métodos;
- Achar os autovalores e autovectores;
- Operar com vectores;
- Conhecer e aplicar os espaços e sub-espaços Lineares: Axiomas; proriedades; dependência e independência linear; base de um sistema linear;
- Estudar a recta no plano, estudar o plano e estudar a recta no espaço;
- Achar os produtos de vectores;
- Conhecer e classificar as curvas de segunda ordem.

Quem deve estudar este módulo

Este módulo ou manual destina-se aos estudantes do nivel superior, particularmente aos do Instituto Superior Politecnico de Songo.

Como está estruturado este módulo

Este módulo esta estruturado da seguinte maneira:

Páginas introdutórias

. Um **índice** completo.

. Uma **visão geral detalhada** do curso/módulo, resumindo os aspectos-chave que você precisa conhecer para completar o estudo. Recomendamos vivamente que leia esta secção com a atenção antes de começar o seu estudo.

Conteúdo do curso/módulo

O módulo está estruturado em partes(capítulo) e estas por sua vez divididas em unidades. Cada unidade incluirá uma **introdução**, **objectivos** da unidade, **conteúdo** da unidade incluindo **exercícios resolvidos** . Para complementar a aprendizagem dos alunos são propostos no fim de cada unidade **tarefas** e uma ficha suplementar no fim de cada parte.

Outros recursos

Para quem esteja interessado em aprender mais, apresentamos uma lista de recursos adicionais para você explorar. Estes recursos podem incluir livros, artigos ou sitíos na internet.

Tarefas de avaliação e/ou Auto-avaliação

Tarefas de avaliação para este módulo encontram-se no final de cada unidade e cada parte.

Comentários e sugestões

Esta é a sua oportunidade para nos dar sugestões e fazer comentários sobre a estrutura e o conteúdo do curso/módulo. Os seus comentários serão úteis para nos ajudar a avaliar e melhorar este curso/módulo.
Pode enviae as suas sugestões e comentários para **dertinho@yahoo.com.br**

Habilidades de estudo

Caro estudante!
Para frequentar com sucessos este módulo recomendamo-lo a programar sessões de estudo diárias que podem variar de 1hora e 30 minutos a 2 horas de tempo.
Evite acumular a matéria. Estude com frequência, discutindo os assuntos com os teus colegas do curso ou de outros cursos.
Procure um lugar calmo, na sua casa, ou na escola desde que tenha uma iluminação suficiente.
Tente estudar uma lição de cada vez. De seguida procure implementar na sala de aula.
Aconselhamo-lo a observar as aulas de colegas e argumentar em torno do que se viu na prática.
Produza um relatório das observações e, a partir deste compara a evolução da sua prática diária.
Adquira já um caderno para anotar as suas observações.
A base para o sucesso neste módulo é a observação de aulas. Por isso, procure observar uma boa parte de aulas e produza os respectivos relatórios.

Precisa de apoio?

Em caso de dúvidas ou mesmo dificuldades na percepção dos conteúdos ou resolução das tarefas procure contactar o seu professor da cadeira .
Não se esqueça de consultar os colegas da escola que tenham feito a cadeira de Álgebra Linear e Geometria Analítica.

Tarefas (avaliação e auto-avaliação)

Ao longo deste módulo irá encontrar várias tarefas que acompanham o seu estudo. Tente sempre resolver as tarefas, discutindo com os colegas do curso ou da escola.
Primeiro, resolva as actividades propostas sozinho e, de seguida compare-as com as do teu colega mais perto. Se houver divergência de ideias, procure encontrar uma plataforma.
No caso em que recorre a um manual ou artigo para a elaboração de algum trabalho, é obrigatório referenciá-lo, sob pena de ser considerado plágio.
Como deves saber, o plágio dá direito á reprovação.

Avaliação

A avaliação visa não só informar-nos sobre o seu desempenho nas lições propostas, mas também estimular-lhe a rever conteúdos que ainda precisa de saber e caminhar para frente.

Parte I

Álgebra Linear

Introdução

Álgebra Linear

A álgebra linear é uma parte da Álgebra que, por sua vez, é um ramo da matemática na qual estudamos matrizes, espaços vectoriais e transformações lineares. Todos itens servem para um estudo detalhado de sistemas lineares de equações. É um facto histórico que a invenção da álgebra linear tenha origem nos estudos de sistemas lineares de equações. Não obstante o facto de a Álgebra linear ser um campo abstracto da matemática, ela tem um grande número de aplicações dentro e fora da Matemática.

De seguida, veremos algumas aplicações da Álgebra linear:

As matrizes são muito utilizadas na computação para representar a translação, rotação, escala de objectos em computação gráfica, para resolver sistemas de equações, etc. Na engenharia eléctrica, é muito difícil resolver problemas de circuitos eléctricos e linhas de transmissão de energia eléctrica sem matrizes. Trabalhar com uma malha de linha de transmissão e passar esse circuito para forma matricial, mais fácil. Na mecânica também é muito importante, pois os tensores (grandeza) só são fornecidos em forma de matriz. Os determinantes simplificam a resolução de sistemas de equações lineares, isto é, os determinantes ajudam a resolver alguns tipos de sistemas de equações assim como o cálculo da área de um triângulo situado no plano cartesiano, quando são conhecidas as coordenadas dos seus vértices.

São várias as aplicações da Álgebra Linear, daí a importância do estudo e conhecimento deste tema.

Matrizes

0.1 Unidade 01. Noção de matrizes e operações com matrizes

Introdução

Nesta unidade, faz-se uma abordagem em relação à noção de matriz, as suas operações das matrizes, as operações elementeraes, bem como do algorítmo de Jordan[1]-Gauss[2]para a inversão de matrizes.
No fim desta unidade, o aluno deve:

- Conhecer a noção e os tipos de matrizes;
- Operar com matrizes;
- Conhecer as operações elementares das linhas de matrizes;

[1]Camille Jordan (1838–1922) — matemático francês
[2]Carl Friedrich Gauss (1777–1855) — matemático alemão

0.1.1 Noção de matrizes

Definição 0.1.1. *Chama-se* **matriz** *do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) a todo o quadro que se obtém dispondo mn números segundo m linhas e n colunas.*

$$A_{m\times n} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Os números a_{ij} dizem-se os elementos da matriz. Para cada i e j, a_{ij} é o elemento de A situado na linha i e coluna j. Tal elemento é também referido como o elemento de A na posição (i,j), ou apenas por elemento (i,j) de A. Uma matriz diz-se *real ou complexa* consoante os seus elementos forem números reais ou complexos. O conjunto de todas as matrizes do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ representa-se por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
usemos a notação $\mathbb{R}^m$ para $M_{m\times 1}(\mathbb{R})$.

é costume usarem-se letras maiúsculas para designar matrizes. Exceptua-se o caso das **matrizes-coluna**, isto é, matrizes só com uma coluna, para as quais, frequentemente, se utilizam letras minúsculas.

Nota 0.1.1. *1) Durante a abordagem das matrizes, iremos considerar as matrizes reais, exceptuando os casos em que for escrito explicitamente que a matriz é complexa.*

2) Para designar matrizes reais iremos usar a notação $M_{m\times n}$ ao invés da notação $M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Exemplo 0.1.1. *Sejam* $A_{2\times 3}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $B_{3\times 3}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ $u_{3\times 1}=\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$
A matriz A é uma matriz real do tipo 2×3. Dizemos, portanto que $A \in M_{2\times 3}$.
O elemento de A na posição $(2,1)$ é 5. B é uma matriz real 3×3 e u é uma matriz-coluna que pertence $\mathbb{R}^3$.

0.1.2 Tipos de matrizes

Matriz quadrada

Definição 0.1.2. *Matriz quadrada, é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas, isto é, se $A_{m\times n}$ é uma matriz do tipo $m \times n$, então $m = n$, onde $m = n$ chama-se ordem da matriz quadrada.*

Exemplo 0.1.2. $A_{2\times2}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_{3\times3}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$

A matriz A é de ordem 2 e a matriz B é de ordem 3.

Matriz nula

Definição 0.1.3. *Matriz Nula, é a aquela que $a_{ij}=0$ para todo i e j.*

beginex1 $\mathrm{A}_{2\times1}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B}_{2\times2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Matriz coluna

Definição 0.1.4. *Matriz Coluna é aquela que possui uma única coluna.*

Exemplo 0.1.3. $a_{2\times1}=\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b_{3\times1}=\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$

Matriz linha

Definição 0.1.5. *Matriz linha, é aquela que possui uma única linha.*

Exemplo 0.1.4. $a_{1\times2}=\begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b_{1\times3}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$

Matriz diagonal

Definição 0.1.6. *Matriz Diagonal, é uma matriz quadrada $(m=n)$, onde $a_{ij}=0$, para $(i\neq j)$, isto é, os elementos que não estão na diagonal são nulos.*

Exemplo 0.1.5. $A_{2\times2}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_{3\times3}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

Matriz identidade ou matriz unidade

Definição 0.1.7. *Matriz identidade ou matriz Unidade, é uma matriz quadrada em que $a_{ij}=1$ para $(i=j)$ e $a_{ij}=0$ para $(i\neq j)$.*

Exemplo 0.1.6. $A_{2\times2}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{3\times3}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Matriz triangular superior

Definição 0.1.8. *Matriz Triangular Superior, é uma matriz qudrada* $(m = n)$*, onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, isto é, onde* $a_{ij} = 0 \ (i > j)$.

Exemplo 0.1.7. $A_{2\times 2}= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_{3\times 3}= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Matriz triangular inferior

Definição 0.1.9. Matriz Triangular Inferior*, é uma matriz qudrada* $(m = n)$*, onde todos os elementos acima da diagonal são nulos, isto é, onde* $a_{ij} = 0 \ (i < j)$.

Exemplo 0.1.8. $A_{2\times 2}= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_{3\times 3}= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$

Matriz simétrica

Definição 0.1.10. *Matriz simétrica, é uma matriz quadrada, em que* $a_{ij} = a_{ji}$ *para todos* i *e* j.

Exemplo 0.1.9. $B_{3\times 3}= \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_{4\times 4}= \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & h \end{bmatrix}.$

Matriz anti-simétrica

Definição 0.1.11. *Matriz Anti-simétrica, é uma matriz quadrada, em que* $a_{ij} = -a_{ji}$ *para todos* i *e* j*. Desta definição implica que os elementos da diagonal principal são nulos.*

Exemplo 0.1.10.

$$B_{3\times 3}= \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz oposta

Definição 0.1.12. *Oposta de uma matriz, é uma matriz em que somada com a matriz* A*, resulta na matriz nula.* **(ver.** 0.1.4 **Adição de Matrizes)**

Exemplo 0.1.11. $A_{2\times 2}= \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ *A sua oposta é* $-A_{2\times 2}= \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

0.1.3 Igualdade de Matrizes

Definição 0.1.13. *Duas matrizes são iguais, se e só, se os elementos que estão nas posições (i,j) (das duas matrizes) são iguais.*

Exemplo 0.1.12. *Determine os valores de a, b, e c de modo que $A = B$.*

$$A_{3\times3}=\begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & b+c & 0 \end{bmatrix} \quad e\ B_{3\times3}=\begin{bmatrix} b-c & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ a & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Para que A e B sejam iguais, é necessário que

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b-c &= c \\ b+c &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= 1+c \\ b+c &= 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= 2 \\ c &= 1 \end{cases}.$$

R: *para que $A = B$, $a = 1$, $b = 2$ e $c = 1$.*

0.1.4 Operações com matrizes

Adição de matrizes

Definição 0.1.14. *Sendo $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}] \in M_{m\times n}$ define-se, $A+B$ como sendo a matriz do tipo $m \times n$ cujo elemento (i,j) é $a_{ij} + b_{ij}$, tem-se então*
$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$.

Nota 0.1.2. *Na adição de matrizes, so podemos adicionar matrizes do mesmo tipo.*

Exemplo 0.1.13. *1) Sendo* $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ *e* $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ *Então,*

$$A+B=\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4+1 & 3+2 & -1+3 \\ 3-2 & 2+5 & 0+4 \\ -1+0 & 0-2 & 5-3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

2) A soma $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ *não possível porque A e B são matrizes de tipos diferentes.*

Teorema 0.1.1. *Sejam 0, A, B e C matrizes em $M_{m\times n}$. Então verifica-se:*

1) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Associativa da adição).

2) $A + B = B + A$ (comutativa da adição).

3) $A + 0 = 0 + A = A$ (0 elemento neuto da adição).

4) $A + (-A) = (-A) + A = 0$ ($-A$ é o elemento oposto de A).

Multiplicação de uma matriz por uma constante

Definição 0.1.15. *Sendo $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}, \alpha \in \mathbb{R}$, define-se:*
$\alpha \cdot A$ como sendo a matriz do tipo $m \times n$ cujo elemento (i, j) é $\alpha \cdot A$. Tem-se então
$\alpha \cdot A = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m\times n}$

Exemplo 0.1.14. *Sendo $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, Calcule $\frac{1}{2}A$*

$\frac{1}{2}A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

Teorema 0.1.2. *Sejam A e B matrizes em $M_{m\times n}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então verifica-se:*

1) $\alpha(A + B) = \alpha.A + \alpha B$.

2) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

3) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

4) $1 \cdot A = A$.

Multiplicação de matrizes

Definição 0.1.16. *Sendo $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}] \in M_{n\times p}$, define-se o produto $A \cdot B$ da matriz A pela matriz B como sendo a matriz do tipo $m \times p$ cujo o elmento (i, j) é $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{im}b_{nj}$.*
Assim

$$A \cdot B=\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right]_{m\times p}$$

Nota 0.1.3. *A Multiplicação de matrizes é possível se e só se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz.*

Exemplo 0.1.15. *1) Sejam*

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 9 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 8 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$. *Então:*

$A \cdot B=\begin{bmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 8+7\cdot 1 & 1\cdot 4+2\cdot 0+7\cdot 2 & 1\cdot 3+2\cdot 6+7\cdot 9 \\ 9\cdot 5+3\cdot 8+8\cdot 1 & 9\cdot 4+3\cdot 0+8\cdot 2 & 9\cdot 3+3\cdot 6+8\cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 18 & 78 \\ 77 & 52 & 117 \end{bmatrix}$

Nota 0.1.4. *O produto $B \cdot A$ não é possível, porque o número de colunas do B três é diferente do número de linhas de A dois .*

2) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Então:*

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \end{bmatrix}$

3) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$. *Então:*

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ *e* $B \cdot A = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Teorema 0.1.3. *Sejam $A,\ A' \in M_{m\times n},\ B,\ B' \in M_{n\times p},\ C \in M_{p\times q},\ \alpha \in IR,\ I_n$ e I_m matriz identidades de ordem n e m respectivamenete e 0 matriz nula. Então tem-se:*

1) $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0, A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$.

2) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (Associativa da multiplicação).

3) $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$ e $(A + A') \cdot B = A \cdot B + A' \cdot B$ (distribuitiva do produto em relação á adição).

4) $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$

Nota 0.1.5. *Sejam $A,\ A' \in M_{m\times n},\ B,\ B'$ e 0 matriz nula, então verifica-se.*

1) $A \cdot B = 0 \nRightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$.

Exemplo 0.1.16. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. *O produto*

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, *mas* $A \neq 0$ *e* $B \neq 0$.

2) $(A \cdot B = A \cdot B' \text{ e } A \neq 0) \nRightarrow B = B'$, *e também* $(A \cdot B = A' \cdot B \text{ e } B \neq 0) \nRightarrow A = A'$.

Exemplo 0.1.17. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $B' = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e*

$A \cdot B' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$(A \cdot B = A \cdot B' \text{ e } A \neq 0)$ *mas* $B \neq B'$

3) A multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Exemplo 0.1.18. *(a) Calcule* $A \cdot B$ *e* $B \cdot A$, *se:* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Resolução:

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Logo $A \cdot B \neq B \cdot A$.

(b) Calcule $A \cdot B$ *e* $B \cdot A$, *se:* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Resolução:

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$B \cdot A =$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

O produto $B \cdot A$, *não é possível, porque o número de linhas da matriz* B *é diferente com o número de coluna da matriz* A.
Logo $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Transposta de uma matriz

Definição 0.1.17. *Dada a matriz* $A = [a_{ij}]$ *do tipo* $m \times n$, *define-se a transposta de* A *como sendo a matriz* $A^T = [b_{ij}]$, *do tipo* $n \times m$, *onde* $b_{ij} = a_{ji}$, *para* $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$.

Exemplo 0.1.19. *A transposta da matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ *é* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Nota 0.1.6. *1) Os elementos da coluna* i *de* A^T *são precisamente os da linha* i *de* A, *para* $i = 1, \dots, m$.

2) Uma matriz é simétrica *se e só se for quadrada e forem iguais os elementos situados em posições simétricas relativamente á diagonal principal.*

Definição 0.1.18. *A matriz* A *diz-se simétrica se* $A = A^T$. *Se* $A^T = -A$, *diremos que* A *é anti-simétrica.*

A matriz $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ *é simétrica, mas a matriz* $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$*, não é.*

Proposição 0.1.1. *A transposição de matrizes goza das seguintes propriedades:*

1) $(A^T)^T = A$;

2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$*, sendo* α *um número;*

4) $(AB)^T = B^T A^T$

5) $(A^k)^T = (A^T)^k$*, sendo* k *um número natural;*

6) Se A *é invertível,* A^T *também é, e* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$*. já o não é, uma vez que os elementos nas posições* $(1;2)$ *e* $(2;1)$ *não são iguais.*

Definição 0.1.19. *Uma matriz quadrada diz-se* ortogonal *se for invertível e a sua inversa coincidir com a sua transposta.*

Exemplo 0.1.20. *A matriz* $A^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ *é ortogonal.*

Definição 0.1.20. *Uma matriz* $n \times n$ *diz-se matriz de permutação se tiver as mesmas linhas que a matriz identidade* I_n *mas não necessariamente pela mesma ordem.*

Exemplo 0.1.21. *As matrizes* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *são matrizes de permutação.*

Definição 0.1.21. *Sendo* $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ *uma matriz complexa, define-se a* conjugada *de* A *como sendo* $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]_{m \times n}$*,* $\overline{a_{ij}}$ *do número complexo* a_{ij}*. Escrevemos* $A^* = \overline{A^T}$*. A matriz* A *diz-se* hermítica *se* $A = A^*$*.*

Nota 0.1.7. *1) Os elementos da coluna* i *de* A^* *são precisamente os conjugados dos da linha* i *de* A*, para* $i = 1, \ldots, m$*.*

2) Uma matriz é hermítica se e só se for quadrada e forem conjugados os elementos situados em posições simétricas relativamente á diagonal principal.

Exemplo 0.1.22. *A conjugada de* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 5+3i & 4i \end{bmatrix}$ *é a matriz* $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2-i \\ 5-3i & -4i \end{bmatrix}$*.*
Tem-se $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 5-3i \\ 2-i & -4i \end{bmatrix}$*. Esta matriz não é hermítica, mas a matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 3-i \\ 3+i & 7 \end{bmatrix}$ *é.*

Proposição 0.1.2. *As matrizes complexas gozam das seguintes propriedades:*

1) $(A^*)^* = A$;

2) $(A+B)^* = A^* + B^*$*;*

3) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$*, sendo* α *um número complexo do número* α*;*

4) $(AB)^* = B^* A^*$*;*

5) $(A^k)^* = (A^*)^k$*, sendo* k *um número natural;*

6) Se A *for invertível, então* A^* *também é, tendo-se* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$*;*

0.1.5 Operações elementares sobre as linhas de uma matriz

Através de operações equivalentes as efectuadas nas equações dos sistemas podemos definir as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

1) Permuta das $i-$ésima e $j-$ésima linhas $(L_i \longrightarrow L_j)$.

Exemplo 0.1.23. $L_2 \longrightarrow L_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

2) Multiplicação da $i-$ésima linha por um escalar não nulo k, $(L_i \longrightarrow kL_i)$.

Exemplo 0.1.24. $L_2 \longrightarrow -5L_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -25 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

3) Substituição da $i-$ésima linha pela $i-$ésima linha mais k vezes a $j-$ésima linha $(L_i \longrightarrow L_i + kL_j)$.

Exemplo 0.1.25. $L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$

Matriz elementar

Definição 0.1.22. *Chama-se* matriz elementar *de ordem* n *a toda matriz que se obtém de* I_n *por aplicação de uma operação elementar ás suas linhas.*

Exemplo 0.1.26. *As matrizes seguintes são exemplos de matrizes elementares de ordem* 3*.*

$$P_{13}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D_2(8)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_{21}(5)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação 0.1.1. *Na primeira matriz aplicamos a primeira operação elementar (trocar a primeira linha pela terceira linha), na segunda matriz a segunda operação elementar (multiplicar a segunda linha por 9) e na terceira matriz a terceira operação elementar (multiplicar a primeira linha por 5 e depois adicionar a segunda linha).*

Definição 0.1.23. *Uma Matriz diz-se* **Matriz escada** *se satisfazer as seguintes condições :*

(a) Se o primeiro elemento não nulo numa linha está na coluna j, então a linha seguinte começa com pelo menos j elementos nulos.

(b) Se houver linhas totalmente constituídas por zeros, elas aparecem depois das outras.

Exemplo 0.1.27. *Exemplos de aspectos de uma matriz em escada.*

$$\begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bullet & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad C=\begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *são matrizes em escada.*

Comentários:

Todas as matrizes obedecem as condições (a) e (b), isto é, a matriz A obedece a condição (a) e as matrizes B e C obedece as condições (a) e (b).

As matrizes $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *não são matrizes em escada.*

Comentários:

As matrizes D e E não são matrizes em forma de escada porque não obedecem a condição (a), isto é, a terceira linha de ambas devia começar com pelomenos três zeros e a matrizes F não é matriz em escada porque não obedece a condição (b), isto é, tem uma uma linha constituída por zeros que não depois das outras (aparece na segunda linha).

Definição 0.1.24. *Ao primeiro elemento não nulo duma matriz em forma de escada, chama-se* **Pivot**.

Exemplo 0.1.28. *A matriz A tem pivots 2 e 6, os pivots de B são 1 e 2 e os de C são $3, 1$ e 6.*

Nota 0.1.8. *(i) Numa linha nula, não há nenhum pivot.*

(ii) Em cada coluna, há no máximo um pivot.

Proposição 0.1.3. *Uma matriz A diz-se que está na forma* **escalonada (forma de echelon)**, *se:*

(i) Todas as linhas não nulas estão acima das linhas nulas.

(ii) Cada elemento pivot a partir da segunda linha está a direita do pivot da linha precedente.

(iii) Todos os elementos da coluna abaixo do pivot são nulos.

Forma escalonada reduzida é forma escalonada em que todos os elementos da coluna acima dos pivots são nulos.

Definição 0.1.25. *Uma matriz A diz-se que está na forma* **condensada**, *se:*

(i) Todos os pivots são iguais a 1.

(ii) Se a_{ij} é o pivot da linha i, todos os elementos da coluna j acima de a_{ij} são nulos.

Exemplo 0.1.29. $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Definição 0.1.26. *A caracteristica de A, abreviamente $car(A)$, é o número de pivots da matriz na forma de escada.*
O número de Pivots da matriz na forma de escada não depende de sucessão das operações elementares que transforma a matriz dada para forma em escada.

Exemplo 0.1.30.

As matrizes A, B, e C do **exemplo 2**, *têm-se $car(A) = 2$, $car(B) = 2$ e $car(C) = 3$.*

Nota 0.1.9. *$car(A)$ é independente da sucessão concreta do método de eliminação isto é, uma invariante da matriz dada.*

Uma matriz quadrada $A_{n\times n}$, diz-se **não-singular** se tiver característica n. Se $car(A) < n$, a matriz A diz-se **singular**.

Exemplo 0.1.31. *1) Considere a matriz* $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 12 \end{bmatrix}$.

Calcule $car(A)$, e diga se ela é ou não é singular.

Resolução :

Apliquemos a A as operações elementares sobre as linhas de uma matriz, de modo a transformar a matriz na forma escada. Começamos por adicionar á segunda e terceira linhas de A a primeira linha multiplicando por -1 e -2, respectivamente. A matriz resultante será $A'=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$. *Esta matriz não é ainda uma matriz em escada. Prosseguimos adicionando á terceira linha de A' a segunda linha multiplicando por -3. A matriz que obtemos é a matriz em escada* $U=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Tem-se $car(A)=3$ (pois há três pivots: 1, 2, e 5) e A não é singular (pois $car(A)=3$).

2) *Considere a matriz* $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Calcule $car(B)$, e diga se ela é ou não é singular.

Resolução

Apliquemos a B as operações elementares sobre as linhas de uma matriz, de modo a transformar a matriz na forma escada. Começamos por adicionar á segunda e terceira linhas de B a primeira linha multiplicando por -2, obtemos a matriz em escada $U=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Tem-se $car(B)=2$ (pois há dois pivots: 1 e 4) e B é singular (pois $car(B)=2$).

0.1.6 Exercícios Resolvidos

1) Seja M= $\begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 9 & 3 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

(a) Qual é a ordem de M?

Resolução :

A ordem da matriz é número de $(linhas \times colunas)$ daqui, a ordem de M é 4×4. Como a matriz é quadrada, podemos dizer que a matriz é de ordem 4, ou matriz de quarta ordem.

(b) Escreva os elementos da segunda linha.
Os elementos da segunda linha são : segunda linha= $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) Escreva a quarta coluna.

A quarta coluna é: quarta coluna= $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

(d) Escreva os elementos $(3,4)$, $(2,3)$ e $(4,2)$.

Os elementos $(3,4)$, $(2,3)$ e $(4,2)$, são $0, 1$ e 3, respectivamente.

2) Sendo as matrizes A= $\begin{bmatrix} x + y & m - n \\ x - 2y & 3m + n \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$. Ache os valores x, y, m e n para que $A = B$.

Resolução .

Para que $A = B$, teremos $\begin{cases} x + y = 8 \\ m - n = 6 \\ x - 2y = -1 \\ 3m + n = 10 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, teremos $x = 5,\ y = 3,\ m = 4$ e $n = -2$.

Sugestão: Para achar os valores $x,\ y,\ m$ e n, do sistema acima é cómodo dividi-lo em dois sistemas de duas equações , um dependendo das variáveis x e y e o outro dependendo de m e n, isto é,

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} m - n = 6 \\ 3m + n = 10 \end{cases}$$

3) Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ e D$=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Calcule:

(a) $A + B$

Resolução .

$$A + B=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 & 4+3 \\ 1+1 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) $3 \cdot A$

Resolução

$$3 \cdot A=3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 & 4 \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 & 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

(c) $3 \cdot A + 2 \cdot B - 2 \cdot C + D$

Resolução

$$3 \cdot A + 2 \cdot B - 2 \cdot C + D=$$
$$= 3\cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} + 2\cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + (-2)\cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 13 \\ -6 & -13 \end{bmatrix}$$

(d) $A \cdot B$

Resolução :

$$A \cdot B=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+4 & 6-8 \\ -2+2 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(e) $C \cdot (A \cdot B)$

Resolução :

$$C \cdot (A \cdot B) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0+0 & -4-3 \\ 0+0 & -12-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 0 & -21 \end{bmatrix}$$

4) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 13 & 4 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -12 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Calcule:

(a) $A + B$

Resolução :

$$A+B = \begin{bmatrix} 13 & 4 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13-12 & 4+5 & 3+1 \\ 8+2 & 3+1 & 2+6 \\ 5+2 & 1-1 & 1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 10 & 4 & 8 \\ 7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(b) A^T, a matriz transposta de A.

Resolução :

A matriz transposta de A será: $A^T = \begin{bmatrix} 13 & 8 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A \cdot B$

Resolução :

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 13 & 4 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -12 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 13\cdot(-12)+4\cdot 2+3\cdot 2 & 13\cdot 5+4\cdot 1+3\cdot(-1) & 13\cdot 1+4\cdot 6+3\cdot 4 \\ 8\cdot(-12)+3\cdot 2+2\cdot 2 & 8\cdot 5+3\cdot 1+2\cdot(-1) & 8\cdot 1+3\cdot 6+2\cdot 4 \\ 5\cdot(-12)+1\cdot 2+1\cdot 2 & 5\cdot 5+1\cdot 1+1\cdot(-1) & 5\cdot 1+1\cdot 6+1\cdot 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -142 & 66 & 49 \\ -86 & 41 & 34 \\ -56 & 25 & 15 \end{bmatrix}$$

5) Dada a função $f(x) = x^2 - 2x$, calcule $f(A)$, onde A$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Resolução :

Se $f(x) = x^2 - 2x$, então $f(A) = A^2 - 2\cdot A$, onde $A^2 = A\cdot A$;

$$f(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6) Dada a função $f(x) = x^2 - 2x$, calcule $f(A)$, onde A$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Resolução :

Se $f(x) = x^2 - 2x$, então $f(A) = A^2 - 2A$, onde $A^2 = A\cdot A$;

$$f(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} -2\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7) Seja A uma matriz de dimensão 3×5 e B uma matriz de dimensão 5×2. Quais dos produtos estãoo definidos: $A\cdot B$ ou $B\cdot A$ e porquê?

Resolução :

O produto que está definido é $A\cdot B$, porque o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, a matriz produto será portanto 3×2.

O produto $B \cdot A$ não é definido, pois o número de colunas de B é diferente ao número de linhas de B.

8) Seja A uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$ tal que $A^2 = A + I_n$, onde I_n é uma matriz unitária de dimensão n. Ache as constantes a e b de modo que $A^3 = aA + bI_n$.

Resolução :

Temos $A^3 = a \cdot A + b \cdot I_n$, mas por sua vez $A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot (A + I_n) = A^2 + A \cdot I_n = A + I_n + A = 2 \cdot A + I_n$;

Resolvendo a igualdade $a \cdot A + b \cdot I_n = 2 \cdot A + I_n$, teremos $a = 2$ e $b = 1$.

9) Dada a matriz A= $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

Calcule $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2)$, onde I_3 é matriz unitária de ordem 3.

Resolução :

Aplicando as propriedades das matrizes, teremos:

$(I_3 - A)(I_3 + A + A^2) = I_3 \cdot I_3 + I_3 \cdot A + I_3 \cdot A^2 - A \cdot I_3 - A^2 - A^3 = I_3 + A - A + A^2 - A^2 - A^3 = I_3 - A^3$;

$I_3 - A^3 = I_3$ (mostre que $A^3 = 0$).

Onde I_3= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10) Considere as matrizes A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ -2 & -3 & -6 & -8 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 15 & 21 \end{bmatrix}$

(a) Reduza-as á forma escada;

(b) Indique os pivots;

(c) Calcule $Car\ (A)$ e $Car\ (B)$;

(d) Diga se são ou não singulares.

Resolução :

(a) $$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Esta é forma escada da matriz A

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ -2 & -3 & -6 & -8 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 15 & 21 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 22 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}$$ Esta é a forma escada da matriz B.

(b) Os pivots da matriz A são: 1, -4 e 3 e da matriz B são: 1, -1, -2, $-\frac{1}{2}$, -20.

(c) $Car\ (A) = 3$ e $Car\ (B) = 5$.

(d) A matriz A é singular porque a matriz é de ordem 4 e $Car\ (A) = 3$. e a matriz B não é singular, porque a matriz é de ordem 5 e $Car\ (A) = 5$.

11) Considere a matriz A$=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. Reduza-a á forma condensada.

Resolução :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

0.1.7 Exercícios Propostos

1) Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & -5 & -10 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & -6 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

   (a) Qual é o tipo da matriz e quantos elementos tem.

   (b) Escreva os elementos da Terceira coluna;

   (c) Escreva os elementos da quinta linha;

   (d) Escreva os elementos $(3,5)$, $(5,5)$, $(1,3)$ e $(2,1)$.

2) Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix} 1 & x \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} x & y-z \\ 3 & z \end{bmatrix}$.
   Deremine x, y e z de modo que $A = B$.

3) Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.
   Calcule:

   (a) $A+B$;

   (b) $3\cdot A$;

   (c) $3\cdot A+2\cdot B-2\cdot C+D$.

4) Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   Calcule:

   (a) A transposta de B;

   (b) $A+B$;

   (c) $(A+B)^T$;

   (d) $B-A$;

(e) $B^T - A^T$.

5) Sejam $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Calcule se possível:

(a) $A \cdot B$;

(b) $A^T \cdot B$;

(c) $B \cdot A$;

(d) $A \cdot A^T$;

(e) $B \cdot B^T$;

(f) $B^T \cdot A$.

6) Determine os valores de a, b e c, para que as matrizes A e B sejam simétricas:
$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & b \\ a & 3 & 2 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & b \\ -1 & a & 1 \\ 3 & c & 0 \end{bmatrix}$.

7) Demonstre que uma matriz simétrica é matriz quadrada.

8) Prove que o produto de uma matriz pela sua transposta é uma matriz simétrica.

9) Demonstre que a soma de duas matrizes simétricas da mesma ordem é também simétrica.

10) Demonstre que se A é matriz quadrada, então $B = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$ é simétrica, onde A^T é matriz transposta de A.

11) Determine quais das matrizes têm forma escalonada reduzida e quais têm forma escalonada.

$a)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $d)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$e)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $f)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $g)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $h)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

12) Achar a característica das matrizes, e diga se são ou não singulares.

(a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$;

(b) $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(c) $C=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{bmatrix}$

Determinantes

0.2 Unidade 03. Determinantes

Introdução

Nesta unidade, faz-se uma abordagem em relação ao cálculo de determinantes usando vários métodos.

No fim desta unidade, o aluno deve:

- Usar a regra de Sarrus[3], para calcular o valor dos determinante;
- Conhecer propriedades assim como usa-lás para o cálculo do valor dos determinantes;
- Usar o desenvolvimento de Laplace[4], para calcular o valor dos determinantes.

[3] Pierre Frederic Sarrus (1798–1861)— matemático francês
[4] Pierre Simon de Laplace (1749–1857) — matemático francês

0.2.1 Generalidades

Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, onde a_{11} e a_{22} elementos da diagonal principal e a_{12} e a_{21} elementos da diagonal secundária, transformemos A usando as operações elementares, teremos:

$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}} \end{bmatrix}$. Concluimos assim que A é invertível se e só se o número $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ for diferente de 0.

Facilmente se vê que a mesma conclusão é válida no caso de a_{11} for diferente de zero.

Consideremos de novo a mesma matriz A e transformemos-a usando as operações elementares anulando a_{11}, teremos:

$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}{a_{21}} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Concluimos assim que A é invertível se e só se o número $a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ for diferente de 0. O sinal negativo aparece porque estamos a trabalhar com os elementos da diagonal secundária.

Facilmente se vê que a mesma conclusão é válida no caso de a_{21} for diferente de zero.

Conclusão: Existe assim um número, construído a partir dos elementos da matriz, que nos diz se ela é ou não invertível. A este número chamamos o determinante de A e escrevemos $\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, ou por outras palavras, determinante de uma matriz de segunda ordem, é o produto entre os elementos da diagonal principal menos produto dos elementos da diagonal secundária.

Propriedades imediatas desta função são as seguintes:

1) $\det \begin{bmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (e analogamente para a segunda linha);

2) Sendo $\alpha \in IR$, $\det \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (analogamente a segunda linha);

3) Se as duas linhas ou colunas de A forem iguais, $\det(A) = 0$;

4) $\det(I_n) = 1$.

Usamos estas propriedades como motivação para a definição no caso geral.

Definição 0.2.1. (Determinante). *Chama-se determinante de uma matriz quadrada a todo número que corresponde a uma matriz quadrada que goza de algumas propriedades, e este número não depende da terceira operação elementar.*

O determinante de A, designaremos por qualquer dos símbolos: $\det A$, $|A|$.

Exemplo 0.2.1. *Calcule os determinantes das matrizes abaixos:*

1) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$;

2) $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 2 = 13$ *(Calculo directo).*

Ou

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+3 & 1+1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 + 8 = 13 \ \textit{(Propriedade1)}$$

2) $\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 1 \cdot 4 = 24 - 4 = 20$ *(Cálculo directo).*

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(12 - 2) = 20 \ \textit{(Propriedade2).}$$

3) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$ *(Propriedade3).*

4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. *(Propriedade4).*

0.2.2 Regra de Sarrus

Para facilitar o cálculo do determinante de terceira ordem podemos formar um dispositivo prático, denominado de regra de Sarrus:

Seja $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ uma matriz da terceira ordem.

A regra de Sarrus consiste em :

1) Repetir ao lado do determinante as duas primeiras colunas;

2) obter o produto como mostra o esquema;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & a_{31} & a_{32} \\ \end{bmatrix}$$

$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$

Exemplo 0.2.2. *Usando a regra de Sarrus, calcule determinante de A, onde* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Resolução :

Usando a regra de Sarrus, faremos o seguinte:

Primeiro: Repetir as duas primeiras colunas, isto é: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & | & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & | & 3 & -2 \end{vmatrix}$

Segundo, usaremos o segundo passo do algoritmo de Sarrus, isto é:

$= 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1(-2) \cdot 3 + (-1) \cdot 2(-2) - (-1) \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot (-2) - 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

Então

$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4.$

Proposição 0.2.1. *Seja A uma matriz triangular superior ou inferior. Então o determinante de A é igual ao produto dos seus elementos diagonais.*

Exemplo 0.2.3. *1) Mostre que* $\begin{vmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = acf$

Resolução :

Usando a regra de Sarrus, teremos:
$$\begin{vmatrix} a & b & d & | & a & b \\ 0 & c & e & | & 0 & c \\ 0 & 0 & f & | & 0 & 0 \end{vmatrix} = a \cdot c \cdot f + b \cdot e \cdot 0 + d \cdot 0 \cdot 0 - (0 \cdot c \cdot d + 0 \cdot e \cdot a + f \cdot 0 \cdot b) = a \cdot c \cdot f$$

2) Mostre que $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{vmatrix} = adf$

Resolução :
$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & | & a & 0 \\ b & d & 0 & | & b & d \\ c & e & f & | & c & e \end{vmatrix} = a \cdot d \cdot f + 0 \cdot 0 \cdot c + 0 \cdot b \cdot e - (c \cdot d \cdot o + e \cdot 0 \cdot a + f \cdot b \cdot 0) = a \cdot d \cdot f$$

Do exemplo anterior, podemos concluir o seguinte:
O determinante de uma matriz triangular (superior ou inferior) é dado pelo produto dos elementos seu termo principal $(det\ (A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn})$, visto que todos os outros termos são nulos;

0.2.3 Resumo das propriedades dos determinantes

1) O determinante de uma matriz, quando existe, é único;

2) O determinante da matriz identidade é um $|I| = 1$;

Exemplo 0.2.4. *Caclcule os determinantes das matrizes abaixos:*

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 = 1$

Então $det\ A = 1$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$det\ B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ *usando a desenvolvimento segundo a primeira linha, teremos:*

$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 + 0 = 1;$

Então det $B = 1$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

det $C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ *usando o desenvolvimento segundo a primeira coluna, teremos:*

$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ *(determinante da matriz identidade de ordem calculado na alínea anterior).*

Então det $C = 1$.

3) O determinante de uma matriz triangular (superior, inferior ou diagonal) é dado pelo produto dos elemento do seu termo principal ($|A| = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$);

Exemplo 0.2.5. *Caclcule os determinantes das matrizes abaixos:*

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

det $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 0 = 2 \cdot 4 = 8$

Então det $A = 2 \cdot 4 = 8$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(c) *det* $B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ *usando desenvolvimento segundo a primeira coluna, teremos:*

$1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 3 - 0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Então det $B = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

(d) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

det $C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$ *usando desenvolvimento segundo a primeira coluna, teremos:*

$1\cdot = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0 = 1\cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$ *Usando o desenvolvimento segundo a primeira coluna, teremos:*

$$1 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot (8 \cdot 10 - 0) = 1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 = 400$$

Então det $C = 1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 = 400$

4) Não se altera o valor de um determinante quando:

(a) Aos elementos de uma linha ou coluna se adiciona os elementos correspondentes de outra ou outras linha ou coluna paralela, multiplicada por constantes;

(b) Se junta a uma linha ou coluna uma combinação linear de outras linhas ou colunas paralelas;

Exemplo 0.2.6. *Caclcule os determinantes das matrizes abaixos:*

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Então det $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 \cdot 3 = -2.$

Agora, aplicando a terceira operação elementar das matrizes, isto é, multiplicando a segunda linha por -2 e adicionar a segunda linha, teremos:

det $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 1 \cdot (-2) = -2$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$det\ B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$. *usando o desenvolvimento segundo a primeira coluna, teremos*

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 5 - 3 \cdot 4) = -7$$

Agora, aplicando a terceira operação elementar das matrizes, isto é, multiplicando a segunda linha por -3 e adicionar a terceira linha, teremos:

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-7) = -7$ *(determinante duma matriz triangular superior).*

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = -220$

$det\ C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$ *usando o desenvolvimento segundo a primeira coluna, teremos:*

$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$ *usando o desenvolvimento segundo a terceira linha, teremos:*

$$10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 10 \cdot (8 - 30) = -220$$

Agora, aplicando a terceira operação elementar das matrizes, isto é, multiplicando a segunda linha por -5 e adicionar a terceira linha, teremos:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -22 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-22) \cdot 10 = -220$ *(determinante duma matriz triangular superior).*

5) O valor dos determinantes de uma matriz e da sua transposição são iguais, $|A| = |A^T|$

Exemplo 0.2.7. *Caclcule os determinantes das matrizes abaixos:*

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. *Então* $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5$

$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. *Então* $\det A^T = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5$

Então $\det A = \det A^T = 5$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Então $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ *Transformemos o determinante acima, em triangular superior, isto é,*

multiplicando a primeira linha por -3 e -4, e adicionemos a segunda e terceira linha respectivamente, teremos:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -3 \end{vmatrix}$ *multiplicando a segunda linha por -7 e adicionemos a terceira linha, teremos:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 4 = -4.$$

Agora achemos $\det B^T$, *isto é:*

Se $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, *então,* $\det B^T = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ *Transformemos o determinante acima, em triangular superior, isto é:*

multiplicando a primeira linha por -2 e -1, e adicionemos a segunda e terceira linha respectivamente, teremos:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ *multiplicando a segunda linha por -1 e adicionemos a terceira linha, teremos:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (4) = -4$$

Então $\det B = \det B^T = -4$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

Então $det\ C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 = 400$ *(determinante duma matriz triangular superior).*

Agora achemos o det C^T*, isto é:*

$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$ *então*

$det\ C^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 = 400$ *(Determinante duma matriz triangular inferior).*

6) Um determinante muda de sinal sempre que se trocam entre si duas linhas ou colunas paralelas.

Exemplo 0.2.8. *Calcule o valor dos determinantes das matrizes abaixo.*

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$det\ A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 0 \cdot 3 = 8$

Trocando previamente a primeira e a segunda linha, teremos: $A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

então $det\ A' = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 8 = -8.$

Então $det\ A = -det\ A'.$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Então $det\ B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$

Trocando previamente a primeira e a segunda coluna, teremos: $B' = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

det $B' = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ *usando o desenvolvimento segundo a terceira linha, teremos:*

$3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(0-2) = -6$.

Então det $B = -$*det* B'.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ *Transformemos o determinante acima, em triangular superior, isto é:*

multiplicando a primeira linha por -2 e -1, e adicionemos a segunda e terceira linha respectivamente, teremos:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ *multiplicando a segunda linha por -1 e adicionemos a terceira linha, teremos:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (4) = -4$$

Trocando previamente a primeira e a terceira linha, teremos: $C' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

det $C' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ *Transformemos o determinante acima, em triangular superior, isto é:*

multiplicando a primeira linha por -2 e -1, e adicionemos a segunda e terceira linha respectivamente, teremos:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ *multipliquemos a segunda linha por -1 e adicionemos a terceira linha, teremos:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (4) = 4$$

det $C = -$*det* C'.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ *então det* $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 = 400$ *(determinante duma matriz triangular superior).*

Trocar previamente a primeira e a quarta coluna, teremos: $D' = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 6 & 0 \\ 9 & 0 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Calculemos determinante de D'*, isto é,*

det $D' = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 6 & 0 \\ 9 & 0 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ *usando o desenvolvimento segundo a quarta linha, teremos:*

$10 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$ *usando desenvolvimento segundo a terceira linha, teremos:*

$10 \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 10 \cdot 8 \cdot (0 - 5) = -400.$

Então det $D = -$*det* D'.

7) Se numa matriz as linhas ou colunas forem linearmente dependentes, então o seu determinante é nulo. Em particular, quando a matriz tiver:

(a) Uma linha ou coluna de zeros (todos seus termos são nulos);

(b) Duas linhas ou colunas iguais;

(c) Uma linha ou coluna for combinação linear de outras linhas ou colunas;

(d) Característica inferior á sua ordem ($\text{Car}(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0,\ A$ singular);

Exemplo 0.2.9. *Calcule o valor dos determinantes das matrizes abaixo.*

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Observe que a segunda linha é constituida somente por zeros. Achemos det A*, isto é,*

$$det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$ *usando o desenvolvimento segundo a segundo linha, teremos:*

$$-0\cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} +0 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} -0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0\,.$$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 0 & -3 \\ 4 & 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Observe que a terceira coluna constituida somente por zeros. Achemos o $\det B$, *isto é,* $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 0 & -3 \\ 4 & 8 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ *usando o desenvolvimento segundo a terceira coluna, teremos:*

$$0\cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & -3 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} -0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & -3 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} +0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} -0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Observe que temos duas linhas paralelas iguais(a primeira e a segunda). Calculemos $\det C$, *isto é,*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$ *usando o desenvolvimento segundo a terceira linha, teremos:*

$$4\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} -5\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} +6\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(6-6) - 5(3-3) + 6(2-2) = 0\,.$$

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Observe que temos duas linhas paralelas iguais(a primeira e a quarta). Calculemos $\det D$, *isto é,*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$ *usando o desenvolvimento segundo a terceira linha, teremos:*

$$0\cdot\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}=1-1=0\,.$$

$\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=1$ *(usando o desenvolvimento segundo a terceira coluna).*

$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}=1$ *(usando o desenvolvimento segundo a segunda linha).*

(e) $E=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-1&2\\1&1&3\end{bmatrix}.$

Observe que temos duas colunas paralelas (a primeira e a segunda). Calculemos det E.

$\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&-1&2\\1&1&3\end{vmatrix}$ *usando o desenvolvimento segundo a terceira coluna, teremos:*

$$1\cdot\begin{vmatrix}-1&-1\\1&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1&1\\-1&-1\end{vmatrix}=(-1+1)-2\cdot(1-1)+3\cdot(-1+1)=0\,.$$

(f) $F=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&0\\0&2&0&1\end{bmatrix}$

Observe que temos duas colunas paralelas (a primeira e a terceira). Calculemos det F.

$\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&0\\0&2&0&1\end{vmatrix}$ *Usando o desenvolvimento segundo a segunda coluna, teremos:*

$$=-1\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=0\,.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \textit{ (usando o desenvolvimento segundo a terceira linha).}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \textit{ (usando o desenvolvimento segundo a terceira linha).}$$

8) Se multiplicarmos uma linha ou coluna de uma matriz por um número o seu determinante vem multiplicado por esse número (todos os termos do determinante são multiplicados por esse factor). Esta propriedade, diz que:

 (a) Multiplica-se um determinante por um factor, multiplicando esse número pelos elementos de uma linha ou coluna. E ainda que, se dividirmos uma linha ou coluna de uma matriz por um número diferente de zero, o seu determinante vem dividido por esse número;

 (b) Se todos os elementos de uma matriz quadrada A forem multiplicados por uma constante k, então verifica-se a relação $|kA| = k^n|A|$, onde n é a ordem da matriz;

Exemplo 0.2.10. *Caclcule os determinantes das matrizes abaixos:*

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Calculemos det A, isto é,

$$det\ A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5.$$

i. *Agora calculemos det A', onde A' resultante A, cuja segunda linha é multiplicada por 2 , isto é,*

$$det\ A' = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 10 = 10.$$

Temos det $A' = 2 \cdot det\ A$.

ii. *Agora achemos det A'', onde $A'' = 2 \cdot A$, isto é,*

$$det\ A'' = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 12 = 2^2 \cdot 5 = 20.$$

Temos det $A' = 2 \cdot det\ A$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Agora calculemos* $\det B$, *isto é,*

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-4) = -4 \text{ (calculado na propriedade 5b).}$$

i. *Agora calculemos* $\det B'$, *onde* B' *é a matriz resultante* B, *cuja terceira linha é multiplicada por 3, isto é,*

$$\det B' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 12 & 3 & 3 \end{vmatrix},$$ *Aplicando a terceira operação elementar duma matriz, onde multipliquemos por -3 e -12 a segunda e a terceira linha respectivamente, teremos:*

$$\det B' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -33 & -9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -21 & -9 \end{vmatrix} = 9 - 21 = -12.$$

Temos $\det B' = 3 \cdot \det B$.

ii. *Agora achemos* $\det B''$, *onde* $B'' = 3 \cdot B$, *isto é,*

$$\det B'' = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 9 & 15 & 6 \\ 12 & 3 & 3 \end{vmatrix},$$ *Aplicando a terceira operação elementar duma matriz, onde multipliquemos por -3 e -4 a segunda e a terceira linha respectivamente, teremos:*

$$\det B' = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -21 & -9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -21 & -9 \end{vmatrix} = 3 \cdot (27 - 63) = -3^3 \cdot 4 = -108.$$

Temos $\det B' = 3^4 \cdot \det B$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

Agora calculemos $\det C$, *isto é,* $C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 = 400$ *(determinante duma matriz triangular superior).*

i. *Agora calculemos* $\det C'$, *onde* C' *é a matriz resultante* C, *cuja primeira linha é multiplicada por* $\dfrac{1}{2}$, *isto é,*

$$det\ C' = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\cdot 5 \cdot 8 \cdot 10) = 200$$

ii. Agora achemos $det\ C''$, *onde* $C'' = \frac{1}{2} \cdot B$, *isto é,*

$$det\ C'' = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{8}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{8}{2} \cdot \frac{10}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 400 = 25$$

Temos $det\ C'' = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot det\ C$

Nota 0.2.1. *O mesmo se verifica, se multiplicarmos uma coluna por uma constante.*

9) Se os elementos de uma linha ou coluna são somas agébricas de n parcelas, o determinante decompõem-se na soma dos n determinantes que se obtém substituindo os elementos dessa linha ou coluna sucessivamente pela primeira, segunda, . . . , parcelas e deixando as restante linhas ou colunas inalterdas.

(a) Por exemplo, se cada elemento de uma linha ou coluna é a soma de duas parcelas, então o determinante é igual á soma dos determinantes que dele se obtém substituindo os elementos dessa linha ou coluna, num caso pelas primeiras parcelas e noutro pelas segundas parcelas;

Exemplo 0.2.11. *Calcule o valor dos determinantes das matrizes abaixo.*

(a) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+3 & 1+1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 + 8 = 13$

(b) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 12$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+2 & 5+0 & 3+3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$= -18 + 30 = 12$

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 12$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+1 & 3 \\ 6 & 3+2 & 6 \\ 7 & 5+3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$
$$= 12 + 0 = 12$$

10) O determinante de um produto de matrizes quadradas da mesma ordem é igual ao produto dos determinates das matrizes, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$;

Exemplo 0.2.12. *Seja:*

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

mostre que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Resolução:

(a) $det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$ *e* $det\ B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 11 \end{bmatrix}.$$

então $|A \cdot B| = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 11 \end{vmatrix} = -22 + 20 = -2$

Logo $|A| \cdot |B| = |A \cdot B| = -2$.

(b) $det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$ *(determinante duma matriz triangular superior).*

e

$det\ B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ *(determinante duma matriz triangular inferior).*

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 16 & 20 & 9 \\ 20 & 24 & 12 \end{bmatrix}.$$

Então $det\ A \cdot B = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 16 & 20 & 9 \\ 20 & 24 & 12 \end{vmatrix}$ *Usando o desenvolvimento segundo a primeira linha, teremos:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 16 & 20 & 9 \\ 20 & 24 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 20 & 9 \\ 24 & 12 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 16 & 9 \\ 20 & 12 \end{vmatrix} = 2(24-12) = 24.$$

Logo $|A| \cdot |B| = |A \cdot B| = 24$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 1 = -2.$$

Achemos o determinante de B, *isto é,*

$det\ B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ *(Multiplicando a primeira linha por -1 e adicionar a terceira), isto é,*

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ *(Multiplicando a primeira linha por -1 e adicionar a terceira linha), isto é,*

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ *(Multiplicando a segunda linha por -2 e adicionar a quarta linha), isto é,*

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ *(Matriz triangular superior).*

Agora achemos $A \cdot B$ *e* $|A \cdot B|$*, isto é,*

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 15 & 8 \end{bmatrix},$$

$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 15 & 8 \end{vmatrix}$ *multipliquemos a primeira linha por -2,-2 e -5 e adicionemos a segunda, terceira e quarta linha respectivamente, isto é,*

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 3 \end{vmatrix}$ *usando o desenvolvimento, segundo a primeira coluna, teremos:*

$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 10 & 3 \end{vmatrix}$ *multipliquemos a terceira coluna por -2, e adicionemos a primeira coluna, isto é,*

$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 10 & 3 \end{vmatrix}$ *aplicando o desenvolvimento, segundo a primeira coluna, teremos:*

$(-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2(4-0) = -8.$

Logo $|A| \cdot |B| = |A \cdot B| = -8.$

11) A característica de uma matriz (não nula) pode ser indicada pela mais alta ordem dos determinantes não nulos das suas submatrizes quadradas;

Exemplo 0.2.13. *Transformando previamente a matriz triangular superior ou inferior, calcule* $det\ (A)$*, onde* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Resolução :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$
$= (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3) = 3.$

Exemplo 0.2.14. *Calcule o determinante da matriz quadrada* $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Resolução :

Vamos aplicar algumas propriedades acima enunciadas e transformar o determinante em triangular.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 17 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 7 & -1 \\ 4 & 4 & 3 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

Por exemplo, como na quinta linha figuravam 3 zeros, começamos por reduzir o elemento $a_{54}=3$ *a zero (somámos a terceira coluna á quarta multiplicada por 3), no último passo, trocamos a terceira coluna pela quinta, o determinante trocou de sinal. Vamos, agora pôr em evidência o valor* (-1) *da quinta linha,*

$$A = -(-1)\times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

não multiplicámos os elementos da quinta coluna por (-1) *porque esta operação foi feita em termos da quinta linha onde o resto dos elementos são nulos. Vamos, agora, anular todos os elementos abaixo de* $a_{11}=1$*, comecemos por reduzir a zero* $a_{21}=2$*, (somamos a primeira linha á segunda multiplicada por* -2*), e asssim sucessivamente, resulta*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 0 & -6 & -7 & -31 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 0 & -6 & -7 & -31 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & -22 & -53 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

Como o nosso objectivo é transformar o determinante em triângular, vamos anular os elementos abaixo de $a_{22}=-6$*, troquemos a segunda linha pela terceira, ficando* $a_{22}=2$

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & -7 & -31 & -8 \\ 0 & -8 & -22 & -53 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -10 & -5 \\ 0 & -8 & -22 & -53 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & -26 & -25 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

multiplicámos a segunda linha por 3 *e* 4 *respectivamente e somámos esta linha ás terceira e quarta respectivamente. Visando anular o elemento* $a_{43} = -26$, *vamos pôr em evidência o* -5 *na terceira linha,*

$$|A| = 5\times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -26 & -25 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Finalmente, multiplicando a terceira linha por 13 *e somando á quarta linha, obtemos*

$$|A| = 5\times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} 5(1\times 2\times 2\times 1\times 1\times 1) = 20.$$

Nota 0.2.2. *O determinante da soma de matrizes quadradas da mesma ordem, de uma maneira geral, não é igual á soma dos determinantes da matrizes,* $|A+B| \neq |A| + |B|$.

Teorema 0.2.1. *Sejam* $A_{n\times n}$ *e* $B_{n\times n}$. *Então* $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$.

Lema 0.2.1. *Seja* P *uma matriz de permutação . Então* $(P^T = |P|)$, *definição de matriz de permutação ver definição* 0.1.19.

Teorema 0.2.2. *Seja* A *quadrada. Então* $det(A^T) = |A|$.

0.2.4 Desenvolvimento de Laplace

Vamos agora estudar uma fórmula que nos permite reduzir o cálculo de um determinante de ordem n para determinantes de ordem $n-1$. Esta fórmula pode ser mais cómoda do que o método de eliminação se uma das linhas ou colunas da matriz tiver muitos zeros.

Comecemos com o caso $n = 3$. Dada $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$, tem-se pela definição ,

$det\ (A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Agrupemos as parcelas que contém a_{11}, a_{12} e a_{13}:

$det\ A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) - a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$, ou seja

$$det\ (A) = a_{11}det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Definição 0.2.2. *Seja* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. *Chama-se* **complemento algébrico** *de um elemento* a_{ij} *de* A *a* $(-1)^{i+j}det(A_{ij})$, *onde* A_{ij} *designa a submatriz de* A *obtida por supressão da linha* i *e da coluna* j.

Exemplo 0.2.15. *Seja* $\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{3} & 6 \\ -2 & 2 & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{5} & 0 & \boldsymbol{4} \end{bmatrix}$.

O complemento algébrico do elemento 3 é: $(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

O complemento algébrico do elemento -1 é: $(-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

O complemento algébrico do elemento 5 é: $(-1)^{3+1}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

O complemento algébrico do elemento 4 é: $(-1)^{3+3}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

No caso 3×3, acabamos de provar que $det\ (A)$ se obtém multiplicando os elementos da primeira linha de A pelos respectivos complementos algébricos. é fácil de ver que um resultado análogo seria obtido ao invéz da primeira linha tivessemos utilizado uma das outras duas, ou mesmo uma qualquer coluna de A.

Esta fórmula pode ser generalizada para matrizes $n \times n$ obtendo-se o seguinte teorema:

Teorema 0.2.3. *(Teorema de Laplace). O determinante de uma matriz quadrada é igual á soma dos produtos dos elementos de uma linha pelos respectivos complementos álgebricos, isto é, sendo* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, *tem-se:*

$$det\ (A) = \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{i+j} a_{ij} det\ (A_{ij})\right)$$

, para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$.

O mesmo vale para colunas, ou seja,

$$det\ (A) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ij}(-1)^{i+j} det\ (A_{ij})\right)$$

, para qualquer $j \in \{1, .., n\}$.

Exemplo 0.2.16. *Usando o teorema de Laplace, calcule det* A, *onde* $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Resolução :

$$det\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 5(-1)^{1+1} det\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} + 0(-1)^{1+2} det\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} +$$

$$0(-1)^{1+3}\, det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + 2(-1)^{1+4}\, det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

(Desenvolvendo o primeiro e o quarto destes determinantes pela primeira linha e primeira coluna, respectivamente)

$$= 5\left[1(-1)^{1+1} det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right] - 3\left[(-1)^{1+2} det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right] + (-2)\left[2(-1)^{1+1} det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right] +$$

$$2\left[(-1)^{3+1} det \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right] = 10$$

0.2.5 Exercícios Resolvidos

1) Dadas as matrizes A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ B= $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule:

(a) $det\ A + det\ B$;

(b) $det\ (A+B)$.

Resolução :

(a) $det\ A + det\ B$; Achemos $det\ A$ e $det\ B$, isto é,
det A= $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 - 1\cdot 2 = -2$ e det B= $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 - 0\cdot(-1) = 3$, então $det\ A + det\ B = -2 + 3 = 1$.

(b) $det(A+B)$.

Resolução :
Primeiro, achemos $A+B$, isto é, $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
Segundo, achemos $det\ (A+B)$, isto é, $det\ (A+B) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot 1 - 1\cdot 1 = 3$.
Assim, mostramos mais uma vez que no geral $det\ A + det\ B \neq dat\ (A+B)$.

2) Calcule os seguintes determinantes, aplicando a regra de Sarrus:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

Resolução :

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$
Aplicando a regra de Sarrus, teremos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & | & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & | & 3 & -2 \end{vmatrix} = \{[(1\cdot 3\cdot 1)+(1\cdot(-2)\cdot 3)+((-1)\cdot (2\cdot(-2))] - [(3\cdot 3(-1))+((-2)(-2)\cdot 1)+(1\cdot 2\cdot 1)]\} = 4$$

Resolução :

(b) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

Aplicando a regra de Sarrus, teremos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & |3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & |0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & |0 & 0 \end{vmatrix} = \{[(3\cdot 3\cdot(-3))+(0\cdot 0\cdot 0)+(0\cdot 0\cdot 0)] - [(0\cdot 3\cdot 0)+(0\cdot 0\cdot 3)+((-3)\cdot 0\cdot 0)]\} = -27$$

3) Aplicando o teorema de Laplace, calcule os determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

Resolução :

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 6\cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 0\cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 4\cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \{6\cdot(3\cdot 5 - 0\cdot 2) - 1\cdot 0(5\cdot 5 - 6\cdot 2) + 4\cdot(5\cdot 0 - 6\cdot 3) = 90 - 72 = 18.$$

Resolução :

(b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \\ 8 & 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 8 & 1 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \\ 8 & 1 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot 5 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -5 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5[(-1)^{1+1} \cdot 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -5[(3 \cdot (3 \cdot 1 - 1 \cdot 2)) + (4 \cdot 1 - 3 \cdot 8)] = 85 \ .$$

Podemos resolver os mesmos exercícios, aplicando as propriedades; Exemplo, usando as propriedades, vamos resolver o exercício 2.

Apliquemos as propriedades, de modo a tranformar o determinante, num determinante triangular, isto é,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \\ 8 & 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ -20 & -20 & -1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -26 & -17 & 0 & 0 \\ -20 & -20 & -1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Note que o determinante, ja está na forma triangular, usando a propriedade sobre os determinantes triangulares (o determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal), teremos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \\ 8 & 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-17) \cdot (-1) \cdot 1 = 85.$$

0.2.6 Exercícios Propostos

1) calcule os seguintes determinantes, transformando-os previamente em um determinante triangular:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 8 \\ -2 & -2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

2) Calcule os determinantes usando o desenvolvimento segundo a primeira linha. Calcule também os determinantes (a)-(d) usando o desenvolvimento segundo a 2^a coluna:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

3) Calcule os determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & -7 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 \\ 5 & -8 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

4) Determine t de modo que o determinante $\begin{vmatrix} t-2 & 1 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{vmatrix}$ seja nulo.

5) Examine o efeito de aplicações das transformações elementares da matriz para o valor do seu determinante. Em cada caso indique as operações elementares aplicadas e explique como estas operações afectam o valor de determinante:

(a) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & b \\ kc & kd \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5+3k & 6+4k \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{bmatrix}$

6) Demonstre que $\begin{vmatrix} a & b & ax+by+c \\ d & e & dx+ey+f \\ g & h & gx+hy+i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

7) Verifique que $det(A\,E) = (det\ A)(det\ B)$, se $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e E é a matriz elementar seguinte:

(a) $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

(c) $E = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

8) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. escreva a matriz $5A$. Será que $det(5A) = 5detA$?

9) Calcule determinantes seguintes pela transformação á forma escalonada:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ -2 & -7 & 9 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 13 & -7 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -3 & -7 & -5 & 2 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

10) Calcule determinantes seguintes usando combinação de transformações elementares das linhas e de desenvolvimento segundo linha ou coluna:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 4 & 10 & -4 & -1 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

11) Calcule determinantes das matrizes:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Matriz Inversa

0.3 Unidade 03.Matriz Inversa

Introdução

Nesta unidade iremos definir matriz inversa, abordar as condições para que uma matriz seja invertível, bem como os métodos para achar a inversa de uma matriz quadrada. Em relação aos métodos, iremos usar o algorítmo de Gauss, bem como o conhecimento de cálculo de determinantes para achar as matrizes inversas.
No fim desta unidade, o aluno deve:

- Conhecer e aplicar as propriedades das matrizes inversas;
- Conhecer e aplicar o algirítmo de Gauss, para a inversão de matrizes, isto é, achar a inversa de matrizes usando o algorítmo de Gauss;
- Cálculo da matriz inversa, usando determinantes.

0.3.1 O algorítmo de Gauss-Jordan para inversão de Matrizes

Inversa de uma matriz

Definição 0.3.1. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Diremos que A é invertível se existir uma matriz X, quadrada de ordem n, tal que $AX = XA = I_n$.*

Exemplo 0.3.1. *A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível, sendo a sua inversa a matriz $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.*
Provemos que a matriz $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ é a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
Usando a fórmula $A \cdot X = X \cdot A = I_n$, teremos:
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$ *e* $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

Teorema 0.3.1. *Uma matriz quadrada A é invertível se e só se for não-singular.*

> **Proposição 0.3.1.** *Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem. Se o produto AB for invertível, então A e B são ambos invertíveis. Em particular, se $A \cdot B = I_n$ e $B \cdot A = I_n$, então $B = A^{-1}$.*

1) *Uma matriz A admite inversa se e só se o seu determinante for diferente de zero. Consequentemente:*
   (a) *A regular $\Leftrightarrow |A| \neq 0$;*
   (b) *A regular $\Leftrightarrow Car(A) = n$;*
   (c) *$Car(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$;*
2) *Se a matriz A é regular, então o seu determinante é o inverso do determinante da sua inversa. Ou seja:*
   (a) *$|A| = \dfrac{1}{|A^{-1}|}$, A regular;*
   (b) *$\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$, A^{-1} regular;*

Corolário 0.3.1. *Seja A quadrada. Então A é invertível se e só se $|A| \neq 0$.*

Corolário 0.3.2. *Seja A quadrada invertível. Então $(A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \overline{A})$.*

Algorítmo. Cálculo da inversa de uma matriz: seja dada $A_{n\times n}$. Para calcular a inversa de A (se existir) leva-se a cabo com a matriz $n \times 2n$ $[A|I_n]$ a parte descendente do método de eliminação de Gauss-Jordan aplicando a A. Se houver menos de n pivots, A não é invertível. Se houver n pivots, logo a matriz é invertível.

Como achar a matriz inversa?

Para achar a matriz inversa, anulamos todos os elementos por cima e por baixo da diagonal da matriz á esquerda usando as operações elementares. Finalmente divide-se cada linha pelo respectivo pivot. No fim deste processo, a matriz obtida é $[I_n|A^{-1}]$.
Logo a matriz da direita A^{-1} é a matriz inversa de A.

Exemplo 0.3.2. *Determine a matriz inversa de:*

(a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

(b) $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

(c) $C=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Resolução :

(a) Coloquemos a matriz junto com a identidade e apliquemos as operações com linhas, para reduzir a parte esquerda (que corresponde a A) á forma escada linha reduzida (ou matriz identidade) e efectuando simultaneamente cada operação na parte direita.

$\begin{bmatrix} 2 & 3| & 1 & 0 \\ 1 & 4| & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Troquemos a primeira linha com a segunda linha, isto é,*

$\begin{bmatrix} 1 & 4| & 0 & 1 \\ 2 & 3| & 1 & 0 \end{bmatrix}$. *Multipliquemos a primeira linha por -2, e adicionemos a segunda linha, isto é,*

$\begin{bmatrix} 1 & 4| & 0 & 1 \\ 0 & -5| & 1 & -2 \end{bmatrix}$. *Multipliquemos a segunda linha por $-\dfrac{1}{5}$, isto é,*

$\begin{bmatrix} 1 & 4| & 0 & 1 \\ 0 & 1| & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$. *Multipliquemos a segunda linha por -4, e adicionemos a primeira linha, isto é,*

$\begin{bmatrix} 1 & 0| & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1| & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$. *Logo* $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

(b) Coloquemos a matriz junto com a identidade e apliquemos as operações com linhas, para reduzir a parte esquerda (que corresponde a B) á forma escada linha reduzida (ou matriz identidade) e efectuando simultaneamente cada operação na parte direita.

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0| & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4| & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 5| & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Troquemos a primeira linha com a terceira linha, isto é,*

$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 5| & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4| & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0| & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Multipliquemos a primeira linha por 3 e -2, e adicionemos a segunda e terceira linha, respectivamente, isto é,*

$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 5| & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 19 & 19| & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -11 & -10| & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. *Multipliquemos a segunda linha por* $\dfrac{1}{19}$*, isto é,*

$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 5| & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1| & 0 & \frac{1}{19} & \frac{3}{19} \\ 0 & -11 & -10| & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. *Multipliquemos a segunda linha por 11 e adicionemos a terceira, isto é,*

$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 5| & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1| & 0 & \frac{1}{19} & \frac{3}{19} \\ 0 & 0 & 1| & 1 & \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} \end{bmatrix}$. *Multipliquemos a terceira linha por -5 e -1, e adicionemos a primeira e segunda linha, respectivamente, isto é,*

$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0| & -5 & -\frac{55}{19} & \frac{44}{19} \\ 0 & 1 & 0| & -1 & -\frac{10}{19} & \frac{8}{19} \\ 0 & 0 & 1| & 1 & \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} \end{bmatrix}$. *Multipliquemos a segunda linha por -6 e adicionemos a segunda linha, isto é,*

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0| & 1 & \frac{5}{19} & -\frac{4}{19} \\ 0 & 1 & 0| & -1 & -\frac{10}{19} & \frac{8}{19} \\ 0 & 0 & 1| & 1 & \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} \end{bmatrix}$. *Logo* $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{19} & -\frac{4}{19} \\ -1 & -\frac{10}{19} & \frac{8}{19} \\ 1 & \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} \end{bmatrix}$.

(c) *Coloquemos a matriz junto com a identidade e apliquemos as operações com linhas, para reduzir a parte esquerda (que corresponde a* C *) á forma escada linha reduzida (ou matriz identidade) e efectuando simultaneamente cada operação na parte direita.*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

trocando a primeira linha e a segunda linha, obtemos $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Agora somando á quarta a primeira, e á segunda, a primeira multiplicada por -2*, obtemos*

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ *subtraindo a segunda linha da terceira linha, obtemos*

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ *trocando o sinal da terceira linha e, subsequentemente, anulamos o resto da terceira coluna* $$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$ *Finalmente, obtemos a identidade á esquerda e a inversa de A á direita.*

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

portanto $C^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & 4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

0.3.2 Cálculo da matriz inversa, usando determinantes

0.3.3 Matriz adjunta

Matriz dos cofactores

Dada a matriz A, com os cofactores $\Delta_{ij} = (-1)^{ij} det\ A_{ij}$ dos elementos a_{ij} da matriz A, podemos formar uma nova matriz $\overline{A}$, denominada matriz dos cofactores de A, $\overline{A} = [\Delta_{ij}]$.

$$\overline{A} = [\Delta_{ij}] = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & ... & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & ... & \Delta_{2n} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & ... & \Delta_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \Delta_{n3} & ... & \Delta_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemplo 0.3.3. *Determine a matriz dos cofactores da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

Resolução :

Formemos a matriz dos cofactores;
A matriz dos cofactores, é dada por:

$\overline{A} = [\Delta_{33}] = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix}$, *onde:*

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = 2 \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 8 \quad \Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$
$= -11$
$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = -1 \quad \Delta_{22} = (-1)^{2+2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -5 \quad \Delta_{23} = (-1)^{2+3} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$
$= 7$
$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = 1 \quad \Delta_{32} = (-1)^{3+2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 2 \quad \Delta_{33} = (-1)^{3+3} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = -3$
Então a matriz dos cofactores, será:
$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -11 \\ -1 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

Definição 0.3.2. *Dada a matriz quadrada A, chamamos de matriz adjunta de A á transposta da matriz dos cofactores de A, isto é, adj $A = \overline{A^T}$.*

$$\text{No exemplo anterior } adj\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Teorema 0.3.2. $A \cdot \overline{A^T} = (det\ A) \cdot I$.

Vamos verificar este teorema a partir do exemplo anterior.

$A \cdot \overline{A^T} = (det\ A) \cdot I$
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição 0.3.3. *Dada uma matriz quadrada A de ordem n, chamamos de inversa de A a uma matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$, onde I é a matriz identidade. Denominamos A^{-1} para a inversa de A.*

Suponhamos agora que $A_{n \times n}$ tenha inversa, isto é, existe A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I$. Usando o determinante temos, $det\ (A \cdot A^{-1}) = det\ I \Leftrightarrow det\ A \cdot detA^{-1} = 1$.

Da última relação , concluimos que se A tem inversa, então:

1) $det\ A \neq 0$.

2) $det\ A^{-1} = \dfrac{1}{det\ A}$

Ou seja $det\ A \neq 0$, é condição necessária para que A tenha inversa.

Vamos de seguida que esta condição é também suficienete:

Sabemos que $A \cdot \overline{A^T} = (det\ A) \cdot I$. Considerando $det\ A \neq 0$, podemos afirmar que

$A \cdot \dfrac{1}{det\ A} \cdot \overline{A^T} = I$, então $A^{-1} = \dfrac{1}{det\ A}(adj\ \overline{A})$.

Teorema 0.3.3. *Uma matriz quadrada A admite uma inversa, se e somente se $det\ A \neq 0$.*

Exemplo 0.3.4. *Determine a matriz inversa de:*

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Resolução :

(a) Para calcular a inversa da matriz, primeiro calcula-se o determinante dessa matriz. E calculando o determinante da matriz, teremos:

$$det\,A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$

Segundo, trocar os elementos da diagonal principal da matriz dada em A e trocar os sinais dos elementos na outra diagonal, obtendo a matriz transformada $\overline{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Terceiro, dividir a matriz transformada pelo valor $det\ A$ e assim obtemos a matriz inversa, isto é,

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Ou

Sabe-se que a matriz inversa de A é dada por $A^{-1} = \dfrac{1}{det\ A}(adj\ A)$, *então:*

Primeiro, calculemos a matriz dos cofactores;

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}|4| = 4$ $\Delta_{12} = (-1)^{1+2}|1| = -1$ $\Delta_{21} = (-1)^{2+1}|3| = -3$
$\Delta_{22} = (-1)^{2+}|2| = 2.$

Daqui teremos, $\Delta = \ \Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, *então* $\overline{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$

Logo $A^{-1} = \dfrac{1}{det\ A} \cdot \overline{A} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

(b) *Sabe-se que a matriz inversa de B é dada por* $B^{-1} = \dfrac{1}{det\ B}(adj\ B)$, *então:*

Primeiro, calculemos a matriz dos cofactores;

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = -19$ $\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 19$ $\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$
$= -19$
$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = -5$ $\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 10$ $\Delta_{23} = (-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$
$= -11$
$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 4$ $\Delta_{32} = (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = -8$ $\Delta_{33} = (-1)^{3+3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$
$= 5$

Então, a matriz dos cofactores é $\overline{B} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}.$

Segundo, achemos a matriz adjunta de $\overline{B} =;$

A adjunta é $adj\ B = \overline{B^T} = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}$

Terceiro, calculemos $det\ B$; $det\ B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -19$

Por fim, usando a fórmula $B^{-1} = \frac{1}{det\ B}(adj\ B)$, *teremos:*

$$B^{-1} = \frac{1}{-19}\begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{19} & -\frac{4}{19} \\ -1 & -\frac{10}{19} & \frac{8}{19} \\ 1 & \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} \end{bmatrix}.$$

(c) *Sabe-se que a matriz inversa de* C *é dada por* $C^{-1} = \dfrac{1}{det\ C}(adj\ C)$*, então:*

Primeiro, calculemos a matriz dos cofactores;

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3$ $\quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = -5$

$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 4$ $\quad \Delta_{14} = (-1)^{1+4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$

$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = -3$ $\quad \Delta_{22} = (-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 6$

$\Delta_{23} = (-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = -5$ $\quad \Delta_{24} = (-1)^{2+4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -1$

$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = -3$ $\quad \Delta_{32} = (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 6$

$\Delta_{33} = (-1)^{3+3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = -4$ $\quad \Delta_{34} = (-1)^{3+4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -1$

$\Delta_{41} = (-1)^{4+1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$ $\quad \Delta_{42} = (-1)^{4+2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -4$

$\Delta_{43} = (-1)^{4+3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3$ $\quad \Delta_{44} = (-1)^{4+4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$

Então, a matriz dos cofactores é $\overline{C} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 4 & 1 \\ -3 & 6 & -5 & -1 \\ -3 & 6 & -4 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Segundo, achemos a matriz adjunta de $\overline{C}$*;*

A adjunta é $adj\ C = \overline{C^T} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & 4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Terceiro, calculemos det C*; det* $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 1$

Por fim, usando a fórmula $C^{-1} = \frac{1}{det\ C}(adj\ C)$, *teremos:*

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & 4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

0.3.4 Exercícios Resolvidos

1) Usando o método de Jordan-Gauss, calcule a inversa das matrizes abaixos:

(a) $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

Resolução:

(a) Coloquemos a matriz junto com a identidade e apliquemos as operações com linhas, para reduzir a parte esquerda (correspondente a A), a uma matriz identidade, isto é,

$\begin{bmatrix} -3 & 5 & | & 1 & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Multiplicando a primeira linha por $-\dfrac{1}{3}$, teremos:

$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{3} & | & -\frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Multiplicando a primeira linha por 2 e adicionar a segunda, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{3} & | & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{13}{3} & | & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a segunda linha por $\dfrac{3}{13}$, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -\frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ 0 & 1 & | & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

Reparando para a matriz, podemos observar que a matriz do lado esquerdo ficou reduzida a uma matriz linha. Então a matriz do lado direito será a inversa, isto é, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$

(b) Usando o racíocinio da alíne anterior, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Multiplicando a primeira linha po -4 e -7, adicionar a segunda e terceira linha respectivamente, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & | & -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$ Mulplicando a segunda linha por -2 e adicionar a terceira linha, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos observar que a característica da matriz à esquerda é 2 e é menor que a ordem. Então B, não admite inversa.

(c) Usando o racíocinio da alíne anterior, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Multiplicando a terceira linha por -1, e adicionar a segunda linha, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Multiplicar a segunda linha por -1, e adicionar a primeira linha, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reparemos que a matriz a esquerda, é uma matriz identidade.

Então, a matriz inversa da matriz C será:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Usando o racíocinio das alíneas anteriores, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -4 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Multiplicando a primeira linha por -2, 1 e -3, e adicionar a segunda, terceira e quarta linha respectivamente, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$ Multiplicando a segunda linha por -2 e -1, e adicionar a terceira e quarta linha respectivamente, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & | & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Multiplicando a quarta linha por 3, -1 e 2, e adicionar a terceira, segunda e primeira linha, respectivamente, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Multiplicando a terceira linha por -1 e adicionar a primeira, teremos:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Reparemos que a matriz à esquerda, é uma matriz identidade, logo

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Dadas as matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$:

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

i. Obtenha a matriz dos cofactores.

ii. Calcule a adjunta.

iii. Calcule determinante.

iv. Calcule a inversa.

v. Calcule $A \cdot A^{-1}$.

Resolução :

(a) Obtenha a matriz C dos cofactores.

A matriz dos cofactores, é dada por:
$\begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix}$, onde:

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = 12$

$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = -36 \qquad \Delta_{21} = (-1)^{2+1}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = -4$

$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 12 \qquad \Delta_{23} = (-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = -28$

$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} = 6 \qquad \Delta_{32} = (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -24$

$\Delta_{33} = (-1)^{3+3}\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = 72$

Então a matriz dos cofactores será:
$C = \begin{bmatrix} 0 & 12 & -36 \\ -4 & 12 & -28 \\ 6 & -24 & 72 \end{bmatrix}$

(b) Calcule $adj\ A$.

A matriz adjunta de A, será igual a matriz transposta da matriz dos cofactores $(adj\ A = C^T)$, istoé,
$\text{adj A} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 6 \\ 12 & 12 & -24 \\ -36 & -28 & 72 \end{bmatrix}$

(c) Calcule $det\ A$.

$\det \text{A} = \begin{vmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 8\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = 8 \cdot (18-18) - 5 \cdot (-12) - 36 = 24.$

(d) Calcule A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot (adj\ A)\ \frac{1}{24} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -4 & 6 \\ 12 & 12 & -24 \\ -36 & -28 & 72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{6}{4} & -\frac{7}{6} & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{6}{4} & -\frac{7}{6} & 3 \end{bmatrix}$$

(e) Calcule $A \cdot A^{-1}$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{6}{4} & -\frac{7}{6} & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{1}{2} - \frac{6}{4} & -\frac{8}{6} + \frac{5}{2} & \frac{8}{4} \\ 0 \cdot 0 + \frac{9}{2} - \frac{18}{4} & 0 \cdot -\frac{1}{6} + \frac{9}{2} - \frac{21}{6} & 0 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot 9 + 3 \cdot 3 \\ 4 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{6}{4} & -4(-\frac{1}{6}) + 6 \cdot \frac{1}{2} + 2(-\frac{1}{6}) & 4 \cdot \frac{1}{4} + 6(-1) + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mais uma vez, mostramos que $A \cdot A^{-1} = I$.

0.3.5 Exercícios Propostos

1) Verifique se as matrizes abaixos são invertiveis:

(a) A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

(b) B= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ para $\forall\ x \in \mathbb{R}$;

(c) C= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$.

2) Verifique se a matriz:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ é inversa da matriz $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

3) Usando o método de Jordan-Gauss, calcule a matriz inversa e verifique o resultado a partir de $A \cdot A^{-1}$ de :

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

4) Dada as matrizes $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, calcule:

(a) Adjunta;

(b) O determinante;

(c) A inversa(Usando o método dos cofactores).

5) Achar a inversa de:

(a) $A= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $B= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $\mathrm{C}= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Sistemas de equações lineares

0.4 Unidade 04.Sistemas de equações lineares

Introdução

Nesta unidade iremos abordar os sistemas de equações lineares, a compatibilidade de sistemas de equações assim como resolução de sistemas de equações lineares usando os métodos de Gauss, recorrendo à matriz inversa.
No fim desta unidade, o aluno deve:

- Determinar a matriz do sistema, coluna das incógnitas e do segundo membro;
- Determinar um determinado valor num sistema de equações lineares, usando as condições de compatibilidade de sistemas de equações lineares;
- Resolver sistemas de equações lineares, usando o método de Gauss[5];
- Resolver sistemas de equações lineares, usando a matriz inversa;
- Resolver sistemas de equações lineares usando determinantes (método de Cramer[6]).

[5] Carl Friedrich Gauss (1777–1855) — matemático alemão
[6] Gabriel Cramer (1704–1752)—matemático su??o

0.4.1 Generalidades

Definição 0.4.1. *Uma equação* **linear** *nas incógnitas* $x_1, \ldots, x_n$ *é uma equação do tipo* $a_1x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n = b$*, onde* $a_1 \ldots a_n$ *e* **b** *são números. A* **b** *costuma chamar-se* **segundo membro** *ou termo independente da equação .*

Exemplo 0.4.1. *1)* $2x_1 + 3x_2 = 0$*;*

2) $2x_1 - x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 1$

Um sistema de equações lineares é um conjunto composto por duas ou mais equações lineares ou é um conjunto finito de equações lineares (todas nas mesmas incógnitas). Um sistema genérico com m equações e n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Este sistema, pode ser apresentada na forma abreviada $Ax = b$, onde

$$A= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ x= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } b= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A é a matriz do sistema, x é a matriz-coluna das incógnitas e b é a matriz-coluna do segundo membro ou, abreviamente, o segundo membro do sistema.

Uma outra matriz que podemos associar ao sistema é $[Ab]= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ que se chama **matriz ampliada**.

Exemplo 0.4.2. $\begin{cases} 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 9x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{cases}$

A matriz do sistema é $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ *, enquanto que* $x= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ *e* $b= \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$ *são, respectivamente, as matrizes-coluna das incógnitas e do segundo membro.*

$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & 9 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ *é a matriz ampliada.*

Definição 0.4.2. *Uma* **solução** *de um sistema de equações lineares nas incógnitas* $x_1, \ldots, x_n$ *é uma sequência ordenada* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *de números tais que as substituições* $x_i = \alpha_i\,,\ i = 1, \ldots, n$ *transformam todas as equações do sistema em igualdades verdadeiras. Uma solução também se pode apresentar na forma de uma matriz-coluna* $n \times 1$.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Resolver um sistema de equações lineares é determinar todas as suas soluções ou provar que não existe nenhuma .

Definição 0.4.3. *Dois sistemas com o mesmo número de equações e de incógnitas dizem-se* **equivalentes** *se tiver os mesmos conjuntos de soluções .*

Exemplo 0.4.3. *Os sistemas* $\left\{\begin{array}{ccccc} 3x_1 & + & 6x_2 & = & 42 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & = & 12 \end{array}\right.$ *e* $\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & = & 14 \\ x_1 & - & 2x_2 & = & 6 \end{array}\right.$ *são equivalentes, pois admitem a mesma solução* $x_1 = 10$ *e* $x_2 = 2$.

Definição 0.4.4. *Chamam-se variáveis livres as incógnitas* x_i *que não aparecem no começo de nenhuma equação do sistema na forma escalonada.*

Exemplo 0.4.4. *Dados os sistemas (i)* $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ 0x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & - & 10x_3 & + & 7x_4 & = & -11 \end{array}\right.$ *e*

(ii) $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ 0x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & = & 0 \end{array}\right.$ *na forma escalonada. Indique as variáveis livres em cada sistema.*

Resolução:

(i) a variável livre é x_4 *(porque não aparece no começo de nenhuma equação do sistema na forma escalonada).*

(ii) as variáveis livres são x_3 *e* x_4 *(porque não aparecem no começo de nenhuma equação do sistema na forma escalonada).*

0.4.2 Compatibilidade de sistemas lineares

Sistema possível ou compatível

Definição 0.4.5. *Um sistema de equações lineares que tenha pelo menos uma solução diz-se* **possível ou compatível**

Teorema 0.4.1. *O sistema é compatível se a característica da matriz dos coeficientes coincide com a característica da matriz ampliada.*

Um sistema possível ou compatível, pode ser:

1) Determinado (se e só, se tiver uma única solução).

   Teorema 0.4.2. *O sistema compatível é determinado se a característica da matriz dos coeficientes coincide com o número de incógnitas do sistema* $(Car\ (A) = n)$, *onde* A *é matriz do sistema.*

2) Indeterminado (se tiver mais do que uma solução).

   Teorema 0.4.3. *O sistema compatível é indeterminado se a característica da matriz dos coeficientes for menor que o número das incógnitas do sistema* $car\ (A) < n$ *(*A *matriz do sitema), isto é, há menos equações do que incógnitas. Então, podemos arbitrariamente atribuir valores às* $n - car\ (A)$ *variáveis livres e obter uma solução do sistema.*

   Nota 0.4.1. *Se ocorre uma equação* $0x_1 + \ldots + 0x_n = 0$, *então o sistema é compatível e indeterminado, isto é, o sistema têm mais do que uma solução.*

Sistema impossível ou incompatível

Definição 0.4.6. *Um sistema de equações lineares que não tenha nenhuma solução diz-se* **impossível ou Incompatível**.

Teorema 0.4.4. *O sistema é incompatível se a característica da matriz ampliada for maior que a característica da matriz dos coeficientes.*

Nota 0.4.2. *Se ocorre uma equação* $0x_1 + \ldots + 0x_n = b$, $b \neq 0$, *então o sistema é imcompatível, isto é, o sistema não tem solução.*

Exemplo 0.4.5. *1) O sistema* $\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 5x_2 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 9x_2 & = & 7 \end{array}\right.$ *é determinado, sendo que tem única solução* $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

2) O sistema $\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & = & 12 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & = & 24 \end{array}\right.$ *é possível e indeterminado, com solução* $\begin{bmatrix} 6 - 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$ *, para qualquer* $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) O sistema $\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & = & 5 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & = & 7 \end{array}\right.$ *é impossível.*

0.4.3 Métodos de resolução de sistemas de equações lineares

1) **O algorítmo de eliminação de Gauss**

Um método geral de resolução de sistemas de equações lineares é o chamado *algorítmo de eliminação de Gauss*. Este algorítmo consiste numa sequência de passos elementares que transformam o sistema dado num sistema muito fácil de resolver.
Um passo elementar do método de eliminação de Gauss consiste na *adição membro a membro a uma equação de um múltiplo de outra*, de forma que , na equação obtida, seja nulo o coeficiente de certa incógnita. Com isto dizemos que se eliminou essa incógnita da equação .

Os passos do método do Gauss são:

(a) Usando transformações elementares das linhas, transformar a matriz correspondente ao sistema dado para forma escalonada.

(b) Se a última linha não nula tem pivot na última coluna, então o sistema é incompatível.

(c) Se cada coluna, excepto a última tem pivot, então tem única solução ˙
Neste caso para obter solução é preciso transformar matriz á forma escalonada reduzida e secrever o sistema correspondente.

(d) Se a última coluna não tem pivot e existe pelo menos uma outra coluna que também não contém pivot, então o sistema tem infinidades de soluções.
Para obter a solução geral, é preciso transformar a matriz á forma escalonada reduzida e escrever o sistema correspondente. Depois atribuir os valores paramétricos para incógnitas cujas colunas respectivas não têm pivots e expressar as outras incógnitas atravéz destes paramétros.

Expliquemos o método de eliminação de Gauss, como sequência dos passos elementares por meio de um exemplo concreto.

Exemplo 0.4.6. *Consideremos o sistema os sistemas*

$$(a)\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

Resolva usando o método de Gauss.

Resolução:

$$(a)\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases} \text{ a matriz ampliada será: } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \ (\mathbf{1})$$

Primeiro passo: *Eliminemos a variável x_1 das equações 2 e 3. Para o efeito, multiplicamos a equação 1 por -2 e adicionamos a equação a equação 2, e de seguida multiplicaremos a equação por -1 e adicionamos a equação 3. Daqui resulta a equação (2).*

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 0 - 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 0 - 7x_2 - 5x_3 = 4 \end{cases} \text{ a matriz ampliada será: } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix} \ (\mathbf{2})$$

Segundo Passso: *Tornemos a equação do sistema 2 igual a 1. Para tal vamos multiplicar a equação 2 por $-\dfrac{1}{3}$. Daqui resulta a equação (3).*

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 0 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} \\ 0 - 7x_2 - 5x_3 = 4 \end{cases} \text{ a matriz ampliada será: } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix} \ (\mathbf{3})$$

Terceiro Passo: *Eliminemos a variável x_2 das equações 1 e 3 do sistema (3). Para tal vamos multiplicar a equação2 por -4 e adicionarmos a equação 1, e de seguida multipliquemos a equação por 2 por 7 e adicionemos a equação 3. Daqui resulta o sistema (4).*

$$\begin{cases} x_1 + 0 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{3} \\ 0 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} \\ 0 + 0 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ a matriz ampliada será: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \ (\mathbf{4})$$

Quarto: *Tornemos o coeficiente x_3 do sistema equação 1 do sistema 4 igual a 1. Para tal multipliquemos a equação 3 por -3. Daqui resulta o sistema (5).*

$$\begin{cases} x_1 + 0 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{3} \\ 0 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} \\ 0 + 0 + x_3 = 2 \end{cases} \text{ a matriz ampliada será: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \ (\mathbf{5})$$

Quinto Passo: *Eliminemos x_3 das duas primeiras equações do sistema (5). Para tal multipliquemos a equação 3 por $-\dfrac{1}{3}$ e adicionamos a primeira equação e de seguida multipliquemos a equação 3 por $-\dfrac{2}{3}$. Daqui resulta o sistema (6)*

$$\begin{cases} x_1 + 0 + 0 = 3 \\ 0 + x_2 + 0 = -2 \\ 0 + 0 + x_3 = 2 \end{cases} \text{ a matriz ampliada será: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \ (\mathbf{6})$$

Ou seja: $\begin{cases} x_1 &= 3 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 2 \end{cases}$

Assim, cada sistema foi obtido a partir do sistema anterior, por operação es que preservam as igualdades. O ponto fundamental deste procedimento é que as etapas todas reversíveis. Por exemplo partindo do sistema (ii) podemos obter o sistema (i).

$$(b)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}$$

A matriz ampliada do sistema será: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$.

Apliquemos o algorítmo de Gauss, isto é,

Multiplicando a primeira linha por -2 e -1, e adicionando a segunda e terceira linha respectivamente, teremos:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, *Multiplicando a segunda linha por 1 e adionando a terceira linha, teremos:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Daqui, concluimos que o sistema é compatível e indeterminado, porque a característica da matriz dos coeficientes (2) é menor que o número das incógnitas do sistema(4) , isto é, há menos equações do que incógnitas.

Para achar a solução primeiro reescrevemos o sistema obtido, e de seguida identifiquemos a(s) variáveis livre(s) e atribuemos valores arbitrários a elas, substituemos na(s) outra(s) equações para achar o(s) valor(es) da(s) outra(s) incógnita(s), isto é,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ \quad\; - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

x_3 *e* x_4 *são as variáveis livres (Porque não aparecem no inicio de cada equação).*

Seja $x_3 = a \in \mathbb{R}$ *e* $x_4 = b \in \mathbb{R}$. *Daqui teremos:*

$$-x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -3x_3 + x_4 \Rightarrow x_2 = -3a + b$$

$$x_1 = x_4 + 3 - 2x_2 - 2x_3, \Rightarrow x_1 = 4a - b + 3.$$

$$Sol : X = \begin{bmatrix} 4a-b+3 \\ -3a+b \\ a \\ b \end{bmatrix} \quad a,\ b \in \mathbb{R}.$$

(c) $\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{cases}.$

A matriz ampliada do sistema será: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Apliquemos o algorítmo de Gauss, isto é,

Multiplicando a primeira linha por -2 e -1, e adicionando a segunda e terceira linha respectivamente, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a segunda linha por -1 e adicionar a tecreira linha, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Daqui, concluimos que o sistema é incompatível se a característica da matriz ampliada (3) é maior que a característica da matriz do sistema (2).

O sistema não tem solução.

2) **Resolução de sistemas de equações lineares recorrendo á matriz inversa**

O cálculo da inversa de uma matriz fornece um outro método de resolução de sistemas de equações lineares. Que se aplica a sistemas em que o número de equações é igual ao número de incógnitas.

Resolver o sistema de equações lineares recorrendo á matriz inversa consiste em determinar a matriz x.

PROCEDIMENTO:

Consideremos as matrizes A, b e I de ordem n, matriz do sistema, matriz do segundo membro e a matriz identidade respectivamente.

Primeiro Passo: Multipliquemos em ambos os membros da equação $A \cdot x = b$ por A^{-1}, isto é, $A^{-1} \cdot (A \cdot x) = A^{-1} \cdot b$, onde A^{-1} é a matriz inversa da A e b é a matriz coluna do segundo membro.

Segundo Passo: Apliquemos a propriedade associativa da multiplicação das matrizes, isto é $(A^{-1} \cdot A)b = A^{-1} \cdot b$. sabe-se que $A \cdot A^{-1} = I$, daqui teremos $\Longleftrightarrow I \cdot x = A^{-1} \cdot b \Longrightarrow$ $x = A^{-1} \cdot b$.

Nota 0.4.3. *O método de resolução de sistemas de equações lineares usando o método da matriz inversa, não tem carácter universal como o método de Gauss, isto é, só válido para sistemas em que a matriz do sistema for quadrado e invertível.*

Vamos explicar este método usando o exemplo:

Exemplo 0.4.7. *Consideremos o seguinte sistema:*
Dado os sistemas:

$$(a) \left\{ \begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & 5x_2 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 9x_2 & = & 7 \end{array} \right.$$

$$(b) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \end{array} \right.$$

Resolução:

(a) *Escrevemos este sistema na forma matricial $A \cdot x = b$, onde:*
$A= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$, $x= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ *e* $b= \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

A resolução do sistema usando a matriz inversa, consite em determinar a matriz x, usando o procedimento acima. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & | & 1 & 0 \\ 4 & 9 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *Multiplicando a primeira linha por $\frac{1}{2}$, teremos:*

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 9 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a primeira linha por -4 e adicionar a segunda linha, teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & | & -2 & 1 \end{bmatrix}$$ *Multiplicando a segunda linha por -1, teremos:*

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & | & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a segunda linha por $-\dfrac{5}{2}$ *e adicionar a primeira, teremos:*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{9}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Daqui, temos: $A^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Como $x = A^{-1} \cdot b$, *então* $x=\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

Portanto, a solução é $x_1 = 4$; *e* $x_2 = -1$.

(b) *Escrevemos este sistema na forma matricial* $A \cdot x = b$, *onde:*
$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ *e* $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

A resolução do sistema usando a matriz inversa, consite em determinar a matriz x, *usando o procedimento acima.* $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ *Multiplicando a primeira linha por -2 e -1 e adicionar a segunda e terceira linha respectivamente, teremos:*

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ *Multiplicando a segunda linha por* $-\dfrac{1}{3}$, *teremos:*

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -7 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ *Multiplicando a segunda linha por 7 e adicionar a terceira linha, teremos:*

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{7}{3} & 1 \end{array}\right]$ *Multiplicando a terceira linha por -3, teremos:*

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 7 & -3 \end{array}\right]$ *Multiplicando a terceira linha por* $-\dfrac{2}{3}$ *e* $-\dfrac{1}{3}$ *e adicionar a segunda e primeira linha, respectivamente, teremos:*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 7 & -3 \end{array}\right]$$

Daqui, temos: $A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{bmatrix}$

Como $x = A^{-1} \cdot b$, *então* $x = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Portanto, a solução é $x_1 = 3$; $x_2 = -2$ *e* $x_3 = 2$.

3) **Regra de Cramer**

O cálculo dos determinantes de uma matriz fornece um outro método de resolução de sistemas de equações lineares, que se aplica a sistema em que o número de equações é igual ao número de incógnitas.

Consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Podemos escrever este sistema na forma matricial:

Este sistema, pode ser apresentada na forma abreviada $Ax = b$, onde

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ ou } A \cdot X = B.$$

Onde é a matriz dos coeficientes e $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ é a matriz das incógnitas, e $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$ a matriz dos termos independentes.

Suponhamos que $detA \neq 0$ e portanto, a matriz A tenha a inversa A^{-1}. $A \cdot X = B \Leftrightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Na forma matricial $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$

Usando a relação $A^{-1} = \frac{1}{detA}(AdjA)$, para a matriz inversa, temos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{detA} \begin{bmatrix} \triangle_{11} & \triangle_{12} & \dots & \triangle_{1n} \\ \triangle_{21} & \triangle_{22} & \dots & \triangle_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \triangle_{n1} & \triangle_{n2} & \dots & \triangle_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Assim, $x_1 = \frac{b_1\triangle_{11}+b_2\triangle_{21}+\dots+b_n\triangle_{n1}}{det\ A}$

Observe que o numerador desta fracção é igual ao determinante da matriz que obtemos de A, substituindo a primeira coluna pela matriz dos termos independentes. Isto é, usando o desenvolvimento de Laplace, obtemos:

$$det \begin{bmatrix} b_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = b_1\triangle_{11} + b_2\triangle_{21} + \dots + b_n\triangle_{n1} \text{ ou seja}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}}$$

Fazendo deduções análogas, obtemos $x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & a_{1n} \\ a_{22} & \dots & b_2 & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & b_n & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}}$ Para $i = 1, 2, 3, \dots n$.

Note que no denominador temos o determinante da matriz dos coeficientes e no numerador aparece o determinante da matriz A, substituindo a i-é$sima$ coluna pela coluna dos termos independentes.

Este método é chamado **regra de Cramer**.

Exemplo 0.4.8. *Resolva os sistemas abaixos, aplicando a regra de Cramer:*

(a) $\begin{cases} 2x_1 & + & 5x_2 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 9x_2 & = & 7 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \end{cases}$

Resolução :

(a) Achemos o determinante do sistema, isto é,

$det = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 4 \cdot 5 = -2$

Para achar, x_1 e x_2 faremos o seguinte:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{3 \cdot 9 - 7 \cdot 5}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4 \Longrightarrow x_1 = 4\,.$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2 \cdot 7 - 4 \cdot 3}{-2} = \frac{2}{-2} = 4 \Longrightarrow x_2 = -1\,.$$

(b) Achemos o determinante do sistema, isto é,

$det = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot (5 \cdot (-2) - 4 \cdot (-3)) - 4(2 \cdot (-2) - 4 \cdot 1) + 3(2 \cdot (-3) - 1 \cdot 5) = 2 + 32 - 33 = 1\,.$

Para achar x_1, x_2 e x_3, faremos:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{1 \cdot (5 \cdot (-2) + (-3) \cdot 4) - 4 \cdot (4 \cdot (-2) - 5 \cdot 4) + 3 \cdot (4 \cdot (-3) - 5 \cdot 5)}{1} = 3 \Longrightarrow x_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{1 \cdot (4 \cdot (-2) - 5 \cdot 4) - 1 \cdot (2 \cdot (-2) - 1 \cdot 4) + 3 \cdot (2 \cdot (-2) - 1 \cdot 4)}{1} = -2 \Longrightarrow x_2 = -2\,.$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}}{1} = \frac{1 \cdot (5 \cdot 5 - (-3) \cdot 4) - 4 \cdot (2 \cdot 5 - 1 \cdot 4) 1 \cdot (2 \cdot (-3) - 1 \cdot 5)}{1} = 2 \Longrightarrow x_3 = 2\,.$$

Observando atentamente o algorítmo da regra de Cramer podemos concluir:

⋆ Se $det\ A \neq 0$ o sistema é **possível** (compatível) e determinado.

⋆ Se $det\ A \neq 0$, o sistema é **possível** (compatível) e indeterminado se todos os determinantes que aparecem no numerador são nulos, isto é, $det\ (A_{xi}) = 0$.

$\star$ Se $det\ A = 0$, o sistema é impossível (incompatível) se existe pelo menos um dos determinantes que aparecem no numerador diferentes de zero, isto é, existe $det\ (A_{xi} \neq 0)$.

0.4.4 SISTEMAS HOMOGÊNEO DE EQUACOES LINEARES

Definição 0.4.7. *Um sistema em que os segundos membros das equações são todos iguais a zero, diz-se* **homogéneo**.
um sistema homogéneo, tem a forma matricial seguinte $Ax = 0$.

Exemplo 0.4.9. *(a)* $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$.

Nota 0.4.4. *Um sistema homogéneo é sempre possível (possui sempre, pelo menos uma solução , a chamada* **solução nula***).*

SOLUCAO DE UM SISTEMA HOMOGÊNEO DE EQUACOES LINEARES

Se partirmos de um sistema homogêneo de equações lineraes, então ele é claramente consistente, pois, por exemplo, ele tem a solucao zero $0 = (0, 0, \ldots, 0)$. Assim, ele pode sempre ser reduzido a um sistema homogêneo equivalente na forma escalonada

Portanto, temos duas possibilidades

(i) $r = n$. Então, o sistema tem somente a solução zero.

(ii) $r < n$. Então, o sistema tem uma solução não nula.

Se partirmos de menos equações do que incógnitas, então, na forma escalonada, $r < n$ e, portanto, o sistema tem uma solução não nula. Isto é,

Teorema 0.4.5. *Um sistema homogêneo de equações lineares com mais incógnitas do que equações tem uma solução não nula.*

Exemplo 0.4.10. *Resolva os sistemas abaixos:*

(a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$.

Resolução:

(a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$ *A matriz ampliada do sistema será:* $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

Apliquemos o algorítmo de Gauss, isto é,

Multiplicando a primeira linha por 2 e adicionar a segunda linha, teremos:

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. *Daqui, podemos ver que a característica da matriz do sistema (2) é igual ao número de incógnitas (2), logo o sistema tem somente solução nula, isto é,* $x_1 = 0$ *e* $x_2 = 0$.

(b) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

A matriz ampliada do sistema será: $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Apliquemos o algorítmo de Gauss, isto é,

Multiplicando a primeira linha por -4 e -1, e adicionar a segunda e terceira linha respectivamente, teremos:

$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -19 & 5 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ *Multiplicando a segunda linha por* $-\dfrac{1}{19}$*, teremos:*

$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{19} & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ *Multiplicando a segunda linha por 7 e adicionar a terceira linha, teremos:*

$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{19} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{19} & 0 \end{bmatrix}$. *Daqui, podemos ver que a característica da matriz do sistema (3) é igual ao número de incógnitas (3), logo o sistema tem somente solução nula, isto é,* $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ *e* $x_3 = 0$.

(c) $\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{cases}$

Segundo o teorema, se um sistema homogêneo de equações lineares, têm mais incógnitas do que equações então ela tem uma solução não nula. Mostremos isso.

A matriz ampliada do sistema será: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Apliquemos o algorítmo de Gauss, isto é,

Multiplicando a primeira linha por -2 e -1, e adicionar a segunda e terceira linha respectivamente, teremos:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ *Multiplicando a segunda linha por 1 e adicionar a terceira linha, teremos:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para achar a solução do sistema, primeiro reescevemos o sistema, de segida, identifiquemos as variáveis livres e atribuemos valores arbitrários, isto é,

$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & - & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{cases}$ *.x_3 e x_4 são as variáveis livres (porque não aparecem no início de cada equação).*

Seja $x_3 = a \in \mathbb{R}$ e $x_4 = b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & - & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & -2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 \\ x_2 & = & -3x_3 & + & x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & = & 4a - b \\ x_2 & = & -3a + b \end{cases}.$$

$$Sol : X = \begin{bmatrix} 4a - b \\ -3a + b \\ a \\ b \end{bmatrix} \quad a,\ b \in \mathbb{R}.$$

0.4.5 Exercícios Resolvidos

1) Dada o sistema de equações : $\left\{\begin{array}{ccccccccc} -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array}\right.$

Determine:

(a) A matriz do sistema;

Resolução :

A matriz do sistema é : $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) A matriz coluna das incógnitas;

Resolução :

A matriz coluna das incógnitas é: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

(c) A matriz coluna do segundo membro;

Resolução :

A matriz coluna do segundo membro é: $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) A matriz ampliada.

Resolução :

A matriz ampliada é: $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

2) Usando o método de Gauss, Resolva:

(a) $\left\{\begin{array}{ccccc} x & - & 3y & = & 2 \\ 2x & + & 3y & = & 5 \end{array}\right.$;

(b) $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 3z & = & 10 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & -7 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right.$.

Resolução:

(a) **Primeiro:** Vamos achar a matriz ampliada do sistema, isto é,

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \quad \text{A matriz ampliada do sistema será} \begin{bmatrix} 1 & -3 & | & 2 \\ 2 & 3 & | & -5 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Segundo Vamos eliminar a variável x_1 da segunda equação do sistema (1). Para tal vamos multiplicar a primeira equação do sistema (1) por -2 e adicionamos a segunda equaçãodo sistema (1), donde resulta

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 0x + 9y = -9 \end{cases} \quad \text{A matriz ampliada do sistema será} \begin{bmatrix} 1 & -3 & | & 2 \\ 0 & 9 & | & -9 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Se repararmos, veremos que o sistema (2), é fácil de resolver.

Resolvendo o sitema (2), teremos:

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 0x + 9y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Então, a solução do sistema será $(-1, -1)$.

(b) **Primeiro**. Vamos achar a matriz ampliada do sistema, isto é,

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 2x + 3y - 4z = -7 \\ -x + y + 2z = 1 \end{cases} \quad \text{A matriz ampliada será} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 10 \\ 2 & 3 & -4 & | & -7 \\ -1 & 1 & 2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

(1)

Segundo. Vamos eliminar a variável x_1 das equações 2 e 3 do sistema (1). Para tal vamos multiplicar a primeira equação por -2 e 1 e adicionamos a primeira e segunda equação do sistema (1), respectivamente. Daqui resulta:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 0x + 7y - 10z = -27 \\ 0x - y + 5z = 11 \end{cases} \quad \text{A matriz ampliada será} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 10 \\ 0 & 7 & -10 & | & -27 \\ 0 & -1 & 5 & | & 11 \end{bmatrix}$$

(2)

Terceiro. Trocamos a segunda e a terceira linha do sistema. Daqui resulta.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 0x - y + 5z = 11 \\ 0x + 7y - 10z = -27 \end{cases} \quad \text{A matriz ampliada será} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 10 \\ 0 & -1 & 5 & | & 11 \\ 0 & 7 & -10 & | & -27 \end{bmatrix}$$

(3)

Quarto. Eliminamos a variável x_2 da terceira equação do sistema (3). Para tal multiplicamos a equação 2 do sistema (3) e adicionamos à terceira equação. Daqui teremos:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 0x - y + 5z = 11 \\ 0x + 0y + 25z = 50 \end{cases} \text{ A matriz ampliada será } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 10 \\ 0 & -1 & 5 & | & 11 \\ 0 & 0 & 25 & | & 50 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Se repararmos, veremos que o sistema (4), é fácil de resolver.

Resolvendo o sistema (4), teremos:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 0x - y + 5z = 11 \\ 0x + 0y + 25z = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Então a solução do sistema será $(2, -1, 2)$.

3) Recorrendo a matriz inversa, resolva os sistemas abaixos:

(a) $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Resolução:

(a) Resolver os sistema de equações lineares recorrendo à matriz inversa consiste em determinar a matriz $x = A^{-1}b$ onde x será a solução do sistema, A matriz do sistema e b matriz coluna do segundo membro. Daqui teremos:

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Achemos a matriz inversa de A, isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 2 & -3 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -7 & | & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & | & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Então a matriz inversa será:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema de equação teremos:

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Então a solução do sistema será: $(5, 2)$.

(b) Usando os procedimentos da alínea anterior, onde a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, teremos:

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Então a solução do sistema sera $(1, 1, -1)$.

4) Determine α de modo que o sistema $\begin{cases} x + \alpha y - 2z = 0 \\ x + y + z7 = 1 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$ não admita solução .

Resolução :

Para que o sistema não admita solução , o determinante do sistema deve ser nulo, isto é, $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Resolvendo a equação , teremos:

$$(-1)^{1+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot \alpha \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1+1) - \alpha(-1-1) - 2(-1-1) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + 4 = 0 \Rightarrow \alpha = -2.$$

5) Usando o método de Cramer, resolva os sistemas Abaixos:

(a) $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + y + z - w = 1 \\ x + y - z + w = -4 \\ x - y + z + w \quad 2 \end{cases}$

Resolução :

(a) $\begin{cases} 3x & - & 4y & = & -6 \\ x & + & 2y & = & 8 \end{cases}$

Usando o método de Cramer, teremos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{20}{10} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{30}{10} = 3$$

Assim, a solução do sistema será: $(2,3)$.

(b) $\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & & & = & 4 \end{cases}$

Usando o método de Cramer, teremos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{6}{1} = 6 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2}{1} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-7}{1} = -7$$

Assim, a solução do sistema será: $(6,2,-7)$.

(c) $\begin{cases} x & + & y & + & z & + & w & = & 0 \\ x & + & y & + & z & - & w & = & 4 \\ x & + & y & - & z & + & w & = & -4 \\ x & - & y & + & z & + & w & = & 2 \end{cases}$

Usando o método de Cramer, teremos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{8}{8} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{8} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{16}{8} = 2 \quad w = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \frac{-16}{8} = -2$$

Assim, a solução do sistema será: $(1, -1, 2, -2)$.

0.4.6 Exercícios Propostos

1) Considere os sistemas, ache:

(a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

i. A matriz ampliada;

ii. A matriz coluna das incógnitas;

iii. A matriz coluna do segundo membro;

iv. A matriz ampliada.

2) Usando o método de eliminação de Gauss, resolva o sistema:

(a) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ x - y + z = 5 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y + z + w = 6 \\ x + 2y + 2z + 2w = 11 \\ x + 2y + 3z + 3w = 15 \\ x + 2y + 3z + 4w = 17 \end{cases}$

3) Determine o valor de k, de modo que o sistema $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$ seja:

(a) compatível e determinado;

(b) imcompatível;

(c) compatível e indeterminado.

4) Resolva os seguintes sistemas recorrendo à matriz inversa:

(a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ x + 3z = 5 \\ -x + 4y = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x - y + z - w = 0 \\ x + 2y - 2z + 2w = 3 \\ x + 2y + 3z - 3w = 3 \\ x - 2y + 3z - 4w = -2 \end{cases}$

5) Determine α de modo que o sistema $\begin{cases} x + \alpha y - 2z = 0 \\ x + y + z - w = 4 \\ x + y + z = 1 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$ não admita solução.

6) Usando a regra de Cramer, determine a solução dos sistemas:

(a) $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} x - y + z - w = 1 \\ 2x + y = 3 \\ y - 5z = 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x + 5y - 3z - 2w = 2 \\ -2x - 3y + 2z - 5w = 8 \\ x + 3y - 2z + 2w = 4 \\ -x - 6y + 4z + 3w = 0 \end{cases}$

SISTEMAS CONSISTENTES/INCONSISTENTES

7) Usando o método de eliminação de Gauss resolva o sistema $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

8) Dado o sistema $\begin{cases} 5x + 8y + 6z = 7 \\ 3x + 5y + 4z = 5 \\ 7x + 9y + 4z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$ verifique se ele é consistente e ache as soluções caso sua resposta seja afirmativa.

9) Dado o sistema $\begin{cases} x + 3y + 5z + 7u + 9w = 1 \\ x - 2y + 3z - 4u + 5w = 2 \\ 2x + 11y + 12z + 25u + 22w = 4 \\ 5y + 2z + 11u + 4w = -1 \end{cases}$ verifique se ele é consistente e ache as soluções caso sua resposta seja afirmativa.

10) Resolva

(a) $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 2y - 3z + 2w = 7 \\ 2x + 5y - 8z + 6w = 5 \\ 2x - 5y + 3z + 2w = 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + 2y - z + 3w = 3 \\ 2x + 4y + 4z + 3w = 9 \\ 3x + 6y - z + 8w = 10 \end{cases}$

11) Resolva

(a) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 5y + 4z - 13w = 3 \\ 3x - y + 2z + 5w = 2 \\ 2x + 2y + 3z - 4w = 1 \end{cases}$

12) Determine os valores de k tais que o sistema nas incógnitas x, y e z tenha: (i) solução única, (ii) nenhuma solução (iii) mais de uma solução.

(a) $\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x - 3z = -3 \\ 2x + ky - z = -2 \\ x + 2y + kz = 1 \end{cases}$

13) Determine as condições em a, b e c para que o sistema de incógnitas x, y e z tenha solução:

(a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x - y + 2z = b \\ x - 5y + 8z = c \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 2y + 4z = a \\ 2x + 3y - z = b \\ 3x + y + 2z = c \end{cases}$

SISTEMAS HOMOGÊNEOS

14) Determine se cada sistema tem solução única:

(a) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ x - 8y + 8z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + 2y - 5z + 4w = 0 \\ 2x - 3y + 2z + 3w = 0 \\ 4x - 7y + z - 6w = 0 \end{cases}$

15) Determine se cada sistema, tem solução não nula:

(a) $\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ 3x + 4y - 6z = 0 \\ 3x - 11y + 12z = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x - 4y + 7z + 4v - 5w = 0 \\ 9x + 3y + 2z - 7v + w = 0 \\ 5x + 2y - 3z + v + 3w = 0 \\ 6x - 5y + 4z - 3v - 2w = 0 \end{cases}$

0.5 Unidade 04. Autovalores e Autovectores

Introdução

Nesta unidade, faz-se uma abordagem em relação aos autovalores, autovectores usando a definição bem como o uso do polinómio característico para determinar o valor dos autovalores e autovectores. Fala-se também dos auto-espaços, assim como a determinação das suas bases. No fim desta unidade, o aluno deve:

- Achar os autovalores e autovectores usando a definição;
- Usar o polinômio característico para achar os autovalores e autovectores;
- Determinar os auto-espaços;
- Determinar as bases dos auto-espaços.

0.5.1 Autovalores e Autovectores

Seja A uma matriz quadrada de ordem n sobre o corpo $\mathbb{K}$. Se existe um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ e um vector $v \neq 0$ tal que:

$Av = \lambda v$

Este escalar λ e denominado de autovalor de A e v autovector associado a este escalar λ.

Exemplo 0.5.1. *1) Seja a matriz A e um vector $v \in \mathbb{R}^3$ tal que:*

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad V=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Observamos que: $Av=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x \\ 2y \\ 3z \end{bmatrix}$

Procuramos escalares λ tal que $Av = \lambda v$, isto e, $\begin{bmatrix} 1x \\ 2y \\ 3z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Devemos resolver o sistema com as três equações $(1-\lambda)x = 0$, $(2-\lambda)y = 0$, $(3-\lambda)z = 0$.

Com a condição que $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Temos três possibilidades para os autovalores:

(a) *Se $x \neq 0$, então $\lambda = 1$. Com três valores nas outras equações segue que $y = 0$ e $z = 0$. Um vector com estas propriedades e*

$$u=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) *Se $y \neq 0$ obtemos $\lambda = 2$, o que implica que $x = 0$ e $z = 0$. Um vector com estas propriedades e:*

$$v=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) *Se $z \neq 0$ então $\lambda = 3$, garantindo que $x = 0$ e $y = 0$. Um vector com estas propriedades e:*

$$w=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Neste caso específico, concluimos que para cada autovalor existe um autovector associado.

2) Seja a matriz A e um vector $v \in \mathbb{R}^3$ tal que:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad V=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Observamos que: $Av=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$

Procuramos escalares λ tal que $Av = \lambda v$, isto é, $\begin{bmatrix} 1x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Devemos resolver o sistema com as três equações $(1-\lambda)x = 0$, $(2-\lambda)y = 0$, $(2-\lambda)z = 0$.

Com a condição que $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Existem duas possibilidades para os outovalores:

(a) Se $x \neq 0$ então $\lambda = 1$, $y = 0$ e $z = 0$. Um autovector com estas propriedades é:

$$u=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Se $y \neq 0$ então $\lambda = 2$ e $x = 0$, mas existe infinitos valores para z, inclusive $z = 0$. Um vector com estas propriedades é:

$$v=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) Se $z \neq 0$ então $\lambda = 2$ e $x = 0$, mas existem infinitos valores para y, inclusive $y = 0$. Um vector com estas propriedades é:

$$w=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Neste caso observamos que para os autovalores $\lambda = 1$ existe apenas um autovector, mas para o autovalor $\lambda = 2$ existem dois autovectores.

3) Seja a matriz A é um vector $v \in \mathbb{R}^3$ tal que:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad V=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Observamos que: $Av=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$

Procuramos escalares λ *tal que* $Av = \lambda v$, *isto é,* $\begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$
Devemos resolver o sistema com as três equações $(2-\lambda)x = 0$, $(2-\lambda)y = 0$, $(2-\lambda)z = 0$.
Com a condição que $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Aqui temos único autovalor $\lambda = 2$. *Realmente se* $x \neq 0$ *ou* $y \neq 0$ *ou* $z \neq 0$ *ou* $xyz \neq 0$ *então* $\lambda = 2$. *Garantido que existem infinitos valores para* x, y *e* z, *mas escolhemos três simples:*

(a) *Com* $x = 1$, $y = 0$ *e* $z = 0$, *obtemos* ,
$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

(b) *Com* $x = 0$, $y = 1$ *e* $z = 0$, *obtemos*
$v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$;

(c) *Com* $x = 0$, $y = 0$ *e* $z = 1$, *obtemos*
$w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Observamos que o mesmo autovalor $\lambda = 2$ *gerou três autovectores.*

0.5.2 Polinómio Característico

Ao invés de trabalhar directamente com a resolução de sistemas como nos exemplos apresentsdos, existe um processo mais simples para obter os autovalores de A.
Se A e uma matriz $n_{\times}n$ sobre k e I e a matriz identidade de mesma ordem que A, definimos o polinómio característico de A como: $f(\lambda) = det(\lambda I - A)$.

Exemplo 0.5.2. *Seja a matriz definida por:*
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$
Assim $f(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 9 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 1$.

Lema 0.5.1. *Seja* M *uma matriz quadrada de ordem* n. *Um sistema* $\lambda v = 0$ *tem solução não trivial se, e somente se,* $det(M) = 0$.

Teorema 0.5.1. *Os autovalores de uma matriz quadrada A de ordem n são os zeros de polinómio característico de A, isto é, escalares λ para os quais $f(\lambda)=0$.*

Exemplo 0.5.3. *Seja a matriz dada por*

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

O polinómio característico associado a matriz A e $f(\lambda)=\lambda^3-4\lambda+5\lambda-2$.
Agora achamos os autovalores, isto é, $f(u)=0 \Leftrightarrow f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2)=0$.
Significando que os autovalores de $\lambda=1$, $\lambda=1$ e $\lambda=2$.
Em geral, o sistema $(\lambda I-A)v=0$ fica na forma

$$(\lambda I-A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda=1$, o sistema fica na forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

E este sistema se reduz a apenas uma equação $x-y-z=0$. Como temos duas variáveis livres, podemos escrever $x=y+z$, para obter v em forma de y e de z. Se $y=1$ e $z=0$, então $x=1$ e $u=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um autovector.

Se $y=0$ e $z=1$ então $x=1$ e

$v=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *é outro autovector.*

Para $\lambda=2$, o sistema tem a forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

E este sistema se reduz a apenas uma relação $x=y=z$. Tomando $x=y=z=1$, obtemos o terceiro autovector da matriz A:

$$w=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Definição 0.5.1. *O conjunto de todos os autovectores duma matriz A, pertecente ao autovalor, chama-se auto-espaço correspondente ao autovector λ.*

0.5.3 Exercícios Resolvidos

1) Ache os autovalores e os autovalores correspondentes das matrizes

(a) A$=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

Resolução:

Achemos os autovalores:

Resolvendo a equação característica $det(A-\lambda I)=0$.

$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow (4-\lambda)(1-\lambda)-10=0 \Leftrightarrow \lambda^2-5\lambda-6=0.$

$\Rightarrow \lambda_1=-1$ e $\lambda_2=6$. Que são os autovalores de A. Agora achemos os autovalores associados aos autovectores

Para cada autovalor λ encontrado, resolvemos o sistema linear $(A-\lambda I)v=0$.

Para $\lambda_1=-1 \quad v=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$(A-\lambda_1 I)v=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4-(-1) & 5 \\ 2 & 1-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x=-y.$

Então $v_{\lambda_1}=(-y,y)$ sendo um dos seus representantes o vector $v_1=(-1,1)$.

Para $\lambda_2=6$; $u \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $(A-\lambda_1 I)v=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4-(6) & 5 \\ 2 & 1-(6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 5y = 0 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{5}{2}y.$

Então $v_{\lambda_2}=(\frac{5}{2}y,y)$ sendo um dos representantes o vector $v_2=\left(\frac{5}{2},1\right)$.

$v_{\lambda_1}=(-y,y)$ e $v_{\lambda_2}=(\frac{5}{2}y,y)$ são todos os autovectores de A

(b) B$=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Achemos os autovalores

O polinômio característico $det(A-\lambda I)=0$

$$(B-\lambda I)=\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$=0 \Leftrightarrow (3-\lambda)^2(-1-\lambda)=0$

Então os autovalores são $\lambda_1=3,\ \lambda_2=3$ e $\lambda_3=-1$.

Os autovalores de B.

$$\lambda_1=\lambda_2=3,\ v=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$(B-\lambda I)v=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-3 & 0 & -4 \\ 0 & 3-3 & 5 \\ 0 & 0 & -1-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4z &= 0 \\ 5z &= 0 \\ -4z &= 0 \end{cases} \text{ daqui } x=x,\ y=y \text{ e } z=0.$$

$\Rightarrow (x,y,0)$ e daqui tiramos dois representantes $u=(1,0,0)$ e $v=(0,1,0)$.

Para o autovalor $\lambda_3=-1$, origina o autovector $v_{\lambda_3}=\left(z,\dfrac{5}{4}z,z\right)$, sendo um dos representantes $v_3=\left(1,\dfrac{5}{4},1\right)$. Os autovectores da matriz B são $v_{\lambda_3}=\left(z,\dfrac{5}{4}z,z\right)$

2) Para a matriz dada encontre todos os autovalores e base dos auto-espaçoc correspondentes, se

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Inicialmente vamos calcular polinómio característico da matriz A.

$$|A-\lambda|=\begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix}\underline{(2acoluna+3acoluna)}=\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 6 & -2-\lambda & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$(-2-\lambda)\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 4-\lambda \end{bmatrix} \underline{(2alinha - 3alinha)} = (-2-\lambda)\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ -3 & 0 & \lambda-1 \\ 6 & 1 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$(-2-\lambda)(-1)\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -3 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (2+\lambda)(-\lambda^2+2\lambda+8)$$

Formemos a equação característica: $(2+\lambda)(-\lambda^2+2\lambda+8)=0$

Achemos as suas raízes: $\lambda_1=-2$ e $\lambda_2=4$.

O auto-espaço correspondente ao autovalor $\lambda=2$ coincide com o subespaço de todas soluções do sistema homogêneo $(A-\lambda I)=0$.

Vamos resolver este sistema:

$$\begin{cases} (1+2)v_1 & - & 3v_2 & + & 3v_3 & = & 0 \\ 3v_1 & + & (-5+2)v_2 & + & 3v_3 & = & 0 \\ 6v_1 & - & 6v_2 & + & (4+2)v_3 & = & 0 \end{cases}$$

Utilizando método de Gauss, teremos:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A dimensção do subespaço de todas soluçõesdo sistema homogénio é igual a $3-1=2$, onde 3 é a ordem da matriz A é a característica da última matriz. A base do auto-espaço correspondente ao autovalor 2 tem dois vectores. Sejam $v_3=1,\ v_2=0$, receberemos $v_1-v_2+v_3=0$ ou $v_2=-1$. Sejam $v_3=0,\ v_2=1$ receberemos $v_1=1$. Então dois vectores $(-1,0,1)$ e $(1,1,0)$ formam base do auto-espaço correspondente ao autovalor 2.

Vamos achar a base do auto-espaço que corresponde ao autovalor $\lambda=4$.

$$\begin{bmatrix} 1-4 & -3 & 3 \\ 3 & -5-4 & 3 \\ 6 & -6 & 4-4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A dimensão do subespaço de todas as soluções do sistema é igual a $3-2=1$. Seja $v_3=2$, receberemos $2v_2=2$ ou $v_2=1$, $-v_1-1+2=0$ ou $v_1=1$. Então o vector $(1,1,2)$ é a base do auto espaço correspondente ao autovalor $\lambda=4$.

0.5.4 Exercícios Propostos

1) Ache todos os autovalores e os autovectores correspondentes das matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

2) Para cada uma das matrizes, encontre todos os autovalores e bases dos auto-espaços correspondentes.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

0.5.5 Ficha Suplementar

NOCAO E OPERACOES COM MATRIZES

1) Achar x e y, se $A=\begin{bmatrix} 3x & y \\ y & x \end{bmatrix} = 2\cdot \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & -x \\ 3 & -y \end{bmatrix}$ $\quad Sol: x=1,\ y=-1.$

2) Calcular $A-2B+3C$, se:

(a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad Sol: \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$;

(b) $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad Sol: \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$;

(c) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad Sol:$ não existe.

(d) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

$Sol: \begin{bmatrix} 6 & 5 & 9 \\ 7 & 1 & 15 \\ 4 & -1 & -21 \end{bmatrix}$

(e) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$Sol: \begin{bmatrix} 11 & 17 & 8 & 14 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ -3 & 3 & -4 & 11 \end{bmatrix}$

3) Achar $A\cdot B$, se:

(a) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\quad Sol: \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}$;

(b) $A=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad Sol: \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 4 & -4 & 8 \end{bmatrix}$;

(c) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $Sol: \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$;

(d) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $Sol: \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$;

(e) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ $Sol: \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$;

(f) $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ $Sol: \begin{bmatrix} 14 & -5 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$;

(g) $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ $Sol: \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -9 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$;

(h) $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ $Sol: \begin{bmatrix} 29 & 4 & 27 \\ 17 & 14 & 19 \\ 14 & -5 & 11 \end{bmatrix}$;

(i) $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $Sol: \begin{bmatrix} 11 & 2 & 12 \\ -1 & -4 & -3 \\ 7 & -2 & -2 \end{bmatrix}$;

(j) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ $Sol: \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

Matriz escalonada reduzida

4) Transforme as matrizes abaixos para forma escalonada reduzida:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 7 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

Característica duma matriz

5) Achar a característica das matrizes abaixos:

(a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ $Sol: 2;$

(b) $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 8 & 4 & 7 & -3 \end{bmatrix}$ $Sol: 3;$

(c) $C=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ $Sol: 3.$

Matriz Inversa

6) Usando o algorítimo de Jordan[7]- Gauss[8], achar a matriz inversa de A, sendo:

[7]Camille Jordan (1838–1922) — matemático francês
[8]Carl Friedrich Gauss (1777–1855) — matemático alemão

(a) $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad Sol:\ A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$;

(b) $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad Sol:\ A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$;

(c) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad Sol:\ A^{-1}=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$;

(d) $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad Sol:\ A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$;

(e) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad Sol:\ A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(f) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad Sol:\ A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$;

(g) $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad Sol:\ A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(h) $A=\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad Sol:\ A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

(i) $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad Sol:\ A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

(j) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad Sol:\ A^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$;

(k) $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad Sol:\ A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$;

(l) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad Sol:\ A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7) Resolva o exercício anterior usando o método dos determinantes.

Sistemas de Equações

8) Resolva os sistemas usando transformação á forma escalonada:

(a) $\begin{cases} x + 7y = 4 \\ -2x - 9y = 2 \end{cases}$ $\qquad Sol:$;

(b) $\begin{cases} 2x + 6y = -6 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases}$ $\qquad Sol:$;

(c) $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -3x + 9y = 8 \end{cases}$ $\qquad Sol:$;

(d) $\begin{cases} 4y = 6 \\ x - 6y = 3 \end{cases}$ $\qquad Sol:$.

9) Usando o método de eliminação de Gauss[9]- Jordan[10], resolva os sistemas abaixo:

(a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x + 3y - 4z = 6 \\ -x + y + 2z = 1 \end{cases}$ $\qquad Sol: (2, -1, 2)$;

(b) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 4z = 8 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$ $\qquad Sol: (3, 2, 1)$;

[9]Carl Friedrich Gauss (1777–1855) — matemático alemão
[10]Camille Jordan (1838–1922) — matemático francês

(c) $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ y + 2z - x = 7 \\ 2z - 3x + y = 5 \end{cases}$ $\quad Sol : (1,2,3);$

(d) $\begin{cases} 7x - 5y - 2z = 8 \\ 9x + 3y + 5z = 16 \\ 4x + 7y + 3z = 3 \end{cases}$ $\quad Sol : (1,-1,2);$

(e) $\begin{cases} x + y + z + w = 6 \\ x + 2y + 2z + 2w = 11 \\ x + 2y + 3z + 3w = 1 \\ x + 2y + 3z + 4w = 17 \end{cases}$ $\quad Sol : (1,1,2,2);$

(f) $\begin{cases} x - y + z - w = 0 \\ x + 2y - 2z + 2w = 3 \\ x + 2y + 3z - 3w = 3 \\ x - 2y + 3z - 4w = -2 \end{cases}$ $\quad Sol : (1,1,1,1);$

(g) $\begin{cases} 2x + 5y - 2w = 5 \\ -2x - 3y + 2z - 5w = -8 \\ x + 3y - 2z + 2w = 4 \\ -x - 6y + 4z + 3w = 0 \end{cases}$ $\quad Sol : (1,1,1,1);$

(h) $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + y + z - w = 4 \\ x + y - z + w = -4 \\ x - y + z + w = 2 \end{cases}$ $\quad (1,-1,2,-2).$

10) Resolva o exercício anterior, recorrendo à matriz inversa e regra de Cramer[11].

11) Ache as soluções gerais dos sistemas cujas matrizes têm forma:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 7 & 6 \end{bmatrix};$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 0 & 10 \end{bmatrix};$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -2 & 2 \end{bmatrix};$

[11]Gabriel Cramer (1704–1752)—matemático su??o

(d) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$;

(f) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -6 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

12) Seja que as matrizes correspondem aos sistemas lineares $\bullet$ representa o número não nulo e $*$ é qualquer número real. Determine se sistemas são compatíveis. Caso *sim* determine se a solução é única.

(a) $\begin{bmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & 0 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 0 & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * \end{bmatrix}$.

Determine os valores de h para que o sistema correspondente seja compatível:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & h & -6 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & h & -2 \\ -4 & 2 & 10 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 2 & -6 & -3 \\ -4 & 12 & h \end{bmatrix}$.

13) Determine os valores de h, k para que os sistemas abaixos sejam incompatíveis, tenham uma única solução tenha várias soluções:

(a) $\begin{cases} x + hy = 1 \\ 2x + 3y = k \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + hy = k \end{cases}$

Parte II

Álgebra Vectorial

Introdução

Álgebra Vectorial

Álgebra vectorial – É a área da matemática que trata da operações e transformações de vectores; as definições usadas na álgebra numérica são extensíveis á álgebra vectorial.

A lei do paralelogramo para a adição de vectores é tão intuitiva que sua origem é desconhecida. Pode ter aparecido em um trabalho, agora perdido, de Aristóteles $(384 - 322 A.C.)$, e está na Mecânica de Herão (primeiro século d.C.) de Alexandria. Também era o primeiro corolário no Principia Mathematica (1687) de Isaac Newton $(1642 - 1727)$. No Principia, Newton lidou extensivamente com o que agora são consideradas entidades vectoriais (por exemplo, velocidade, força), mas nunca com o conceito de um vector. O estudo sistemático e o uso de vectores foram fenómenos do século 19 e início do século 20.

Vectores nasceram nas primeiras duas décadas do século XIX com as representações geométricas de números complexos. Caspar Wessel $(1745-1818)$, Jean Robert Argand $(1768-1822)$, Carl Friedrich Gauss $(1777-1855)$ e pelo menos um ou dois outros, conceberam números complexos como pontos no plano bidimensional, isto é, como vetores bidimensionais. Matemáticos e cientistas trabalharam com estes novos números e os aplicaram de várias maneiras; por exemplo, Gauss fez um uso crucial de números complexos para provar o Teorema Fundamental da álgebra (1799). Em 1837, William Rowan Hamilton $(1805 - 1865)$ mostrou que os números complexos poderiam ser considerados abstratamente como pares ordenados (x, y) de números reais. Esta ideia era parte de uma campanha de muitos matemáticos, incluindo Hamilton, para procurar uma maneira de estender os "números"bidimensionais para três dimensões; mas ninguém conseguiu isto preservando as propriedades algébricas básicas dos números reais e complexos.

Os vectores desempenham um papel importante na física: velocidade e aceleração de um objeto e as forças que agem sobre ele são descritas por vectores. É importante ressaltar, no entanto, que os componentes de um vetor físico dependem do sistema de coordenadas usado para descrevê-lo. Outros objetos usados para descrever quantidades físicas são os pseudo-vetores e tensores. Os vectores têm aplicação em várias áreas do conhecimento, tanto técnico quanto científico, como física, engenharia e economia, por exemplo, sendo os elementos a partir dos quais se constrói o Cálculo Vectorial.

São várias as aplicações da Álgebra vectorial, daí a importância do estudo e conhecimento deste tema.

0.6 Unidade 05. Noçãode vector e Operações sobre vectores

Introdução

Nesta unidade, faz-se uma abordagem em relação à noção de matriz, característica, notação módulo, expressão cartesiana do vector bem como as suas operações analíticas e geométricas dos vectores.
No fim desta unidade, o aluno deve:

- Conhecer a noção de vectores;
- Conhecer a fórmula do módulo dum vector em $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e aplica-lo;
- Conhecer a expressão cartesiana dum vector em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$;
- Operar com vectores, usando o método analítico e geométrico.

0.6.1 Noçãode vector

0.6.2 Grandezas escalares

São determinadas por um número real acompanhada da unidade correspondente.

Exemplo 0.6.1. $5m, 200Km, 10kg$, *etc;*

Grandezas vectoriais

São aquelas que para além de um número real, necessitam de uma direcção e sentido.

Exemplo 0.6.2. *Velocidade, Acelaração , Campo Magnético, etc;*

Definição 0.6.1. *Chama-se vector a um segmento orientado, isto é, um segmento, para qual foi indicado seu ponto inicial (origem) e ponto terminal.*

Característica dum vector

1) Direcção ;

2) Sentido;

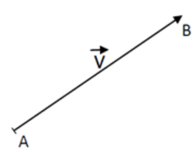
3) Comprimento.

Notação dum vector

(a) $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, ...;$

(b) $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{u}, \overline{v}, ...;$

(c) Dois pontos (Origem e Extremidade);



$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{v} = B - A$;

(d) Um par (no plano) ou terno ordenado (no espa?o) de números reais. $\overrightarrow{v} = (x_1, y_1; z_1)$, onde $(x_1, y_1; z_1)-$ são coordenadas de extremidade do vector sendo a origem o ponto $O(0; 0; 0)$.

Exemplo 0.6.3. *Em $\mathbb{R}^2$, o vector tem a representação $\overrightarrow{a} = (x, y)$ e $\mathbb{R}^3$ tem a reprentação $\overrightarrow{b} = (x, y, z)$.*

Módulo dum vector

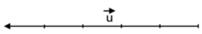
É um número não negativo que indica o comprimento do vector.

O comprimento do vector $\overrightarrow{a} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, calcula-se pela fórmula $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e do vector $\overrightarrow{b} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pela fórmula $\overrightarrow{b} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

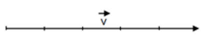
Exemplo 0.6.4. *1) O módulo do vector $\overrightarrow{a} = (3; 4)$ é $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.*

2) O módulo do vector $\overrightarrow{b} = (2; 3; 0)$ é $|\overrightarrow{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{13}$.

Exemplo 0.6.5.



$|\vec{u}| = 5$



$|\vec{v}| = 5$

Vector nulo

É o vector de direcção e sentido arbitrário e módulo igual a zero.

$\overrightarrow{o} = (0; 0; 0)$ $|\overrightarrow{o}| = 0$.

Vector Unitário

É o vector de módulo igual a 1.

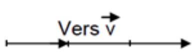
Exemplo 0.6.6. $|\overrightarrow{u}| = 1$.

Versor de um vector nulo

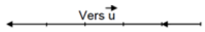
É um vector unitário que tem a direcção e o sentido do vector dado é tal que

$Vers\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}$

Exemplo 0.6.7. *a)*

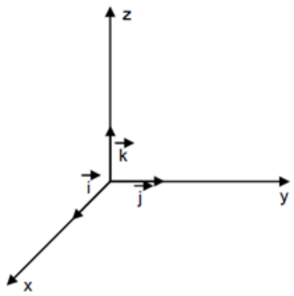


$$Vers\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{v}$$

b) 

$$Vers\vec{u} = \frac{1}{5}\vec{u}$$

Expressão cartesiana dum vector



Seja X, Y, Z, um sistema cartesiano ortogonal.
Convencionou-se representar por $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$. Os versores dos eixos cartesianos ortogonais X, Y, Z respectivamente.
Então $\overrightarrow{i} = (1; 0; 0), \overrightarrow{j} = (0; 1; 0), \overrightarrow{k} = (0; 0; 1)$.
$|\overrightarrow{i}| = |\overrightarrow{j}| = |\overrightarrow{k}| = 1$
A expressão cartesiana do vector $\overrightarrow{v} = (x; y; z)$ em $\mathbb{R}^3$ é $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, e do vector $\overrightarrow{v} = (x; y)$ em $\mathbb{R}^2$ é $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.

Exemplo 0.6.8. *Escreva as expressões cartesianas dos seguintes vectores:*

(a) $\overrightarrow{u} = (2; -3; 4)$*;*

(b) $\overrightarrow{v} = (0; 1; -1)$*;*

c $\overrightarrow{a} = (0; 3)$

(d) $\overrightarrow{b} = (-1; 2)$

Resolução :

(a) $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$

(b) $\overrightarrow{v} = 0\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} = \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$

(c) $\overrightarrow{a} = 0\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} = 3\overrightarrow{j}$

(d) $\overrightarrow{b} = -1\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$

0.6.3 Operações sobre vectores

Multiplicação por um escalar

Seja k um escalar e $\overrightarrow{v}$ um vector.

O produto do vector $\overrightarrow{v}$ pelo número real k é um vector representado por $k\overrightarrow{v}$ tal que:

a) Se $k > 0$, $\overrightarrow{v}$ e $k\overrightarrow{v}$ têm a mesma direcção , mesmo sentido e $|k\overrightarrow{v}| = k.|\overrightarrow{v}|$;

b) Se $k < 0$, $\overrightarrow{v}$ e $k\overrightarrow{v}$ têm a mesma direção e sentido oposto e $|k\overrightarrow{v}| = |k|.|\overrightarrow{v}|$.

Exemplo 0.6.9.

Considere o vector $\overrightarrow{u}$ e $|\overrightarrow{u}| = 2$.

Determine o módulo, direcção e sentido de $k\overrightarrow{v}$, sabendo que :

1) $k = 3$;

2) $k = -3$.

Resolução :

1) $k = 3 > 0$, assim, a direcção e o sentido de $k\overrightarrow{u}$ coincide com a direcção e o sentido de $\overrightarrow{u}$ $|k\overrightarrow{u}| = k.|\overrightarrow{u}| = 3.2 = 6$

2) $k = -3 < 0$, assim $\overrightarrow{u}$ e $k\overrightarrow{u}$ t?m a mesma direcção e sentidos opostos. $|k\overrightarrow{u}| = |k|.|\overrightarrow{u}| =$

$|-3|.2 = 6$

Adição de vectores

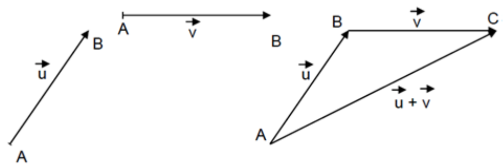
Dados dois vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Pode-se obter a soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ (que é também um vector) seguindo uma das seguintes métodos:

Método geométrico

1) Regra De triângulo Fixa-se um ponto A do plano.

   Considera-se o ponto $B = A + \overrightarrow{u}$.

   Considera-se o ponto $C = B + \overrightarrow{v}$.



$\overrightarrow{AC}$ é o vector resultante, ou seja $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

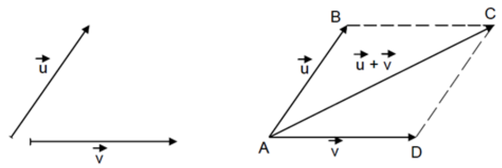
2) Regra do paralelogramo

   Fixa-se um ponto A do plano, e considera-se $B = A + \overrightarrow{u}$.

   Considera-se $D = A + \overrightarrow{v}$.

   Completa-se o paralelogramo $ABCD$.

   O vector $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ coincide com a diagonal $\overrightarrow{AC}$.



Método Analítico

1) Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1; y_1; z_1) \in \mathbb{R}^3$ e $\overrightarrow{v} = (x_2; y_2; z_2) \in \mathbb{R}^3$, então:

   $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_1; y_1; z_1) + (x_2; y_2; z_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$

   $\Rightarrow \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$.

2) Sejam $\overrightarrow{a} = (x_1; y_1) \in \mathbb{R}^2$ e $\overrightarrow{b} = (x_2; y_2) \in \mathbb{R}^2$, então:

   $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$

   $\Rightarrow \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.

Exemplo 0.6.10.

Se $\overrightarrow{a} = (2;3)$ *e* $\overrightarrow{b} = (-2;-3)$, *então* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (2+(-2); 3-3) = (0;0)$.

Se $\overrightarrow{c} = (1;2;3)$ *e* $\overrightarrow{d} = (-1;2;1)$, *então* $\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d} = (1+(-1); (2+2); (3+1)) = (0;4;4)$

Proposição 0.6.1. *A adição dos vectores, goza das seguintes propriedades:*

1) *Comutativa:* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$;

2) *Associativa:* $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$;

3) *Elemento neutro:* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$;

4) *Oposto:* $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$;

5) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} \Rightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.

Subtracção de vectores

Definição 0.6.2. *Dados os vectores* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$.
Define-se a diferença $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ *como sendo o vector que se obtém adicionando a* $\overrightarrow{u}$ *o oposto de* $\overrightarrow{v}$.

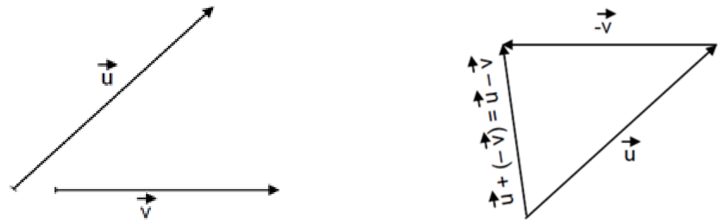
$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$$

Regra de subtracção de vectores

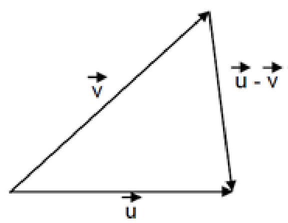
1) Método Geométrico

Regra do Triângulo:

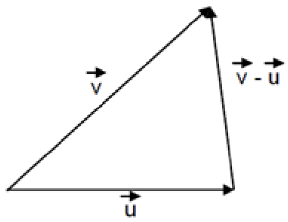
(a)



(b)

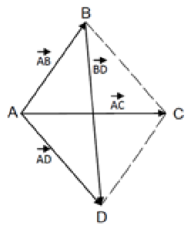


(c)



Observação sobre a regra do paralelogramo

$\star\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$;



$\star\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$;

2) Método Analítico

(a) Se $\overrightarrow{u} = (x_1; y_1; z_1) \in \mathbb{R}^3$ e $\overrightarrow{v} = (x_2; y_2; z_2) \in \mathbb{R}^3$, então:

$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = (x_1; y_1; z_1) - (x_2; y_2; z_2) = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$.

(b) Se $\overrightarrow{a} = (x_1; y_1) \in \mathbb{R}^2$ e $\overrightarrow{b} = (x_2; y_2) \in \mathbb{R}^2$, então:

$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (x_1; y_1) - (x_2; y_2) = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$.

Exemplo 0.6.11.

Se $\overrightarrow{a} = (2; 3)$ *e* $\overrightarrow{b} = (-2; -3)$, *então* $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (2 - (-2); 3 - (-3)) = (4; 6)$.

Se $\overrightarrow{c} = (1; 2; 3)$ *e* $\overrightarrow{d} = (-1; 2; 1)$, *então* $\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d} = (1 - (-1); (2 - 2); (3 - 1)) = (2; 0; 2)$

Casos particulares

1) $0.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$;

2) $k.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow k = 0 \vee \overrightarrow{v} = 0$;

3) $(-1).\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}$ (Oposto de $\overrightarrow{v}$).

Proposição 0.6.2. *Sejam m e n escalares e $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vectores arbitrários:*

1) Associativa: $m.(n.\overrightarrow{v}) = n.(m.\overrightarrow{v}) = (m.n).\overrightarrow{v}$;

2) Distribuitiva1: $(m+n).\overrightarrow{v} = m\overrightarrow{v} + n\overrightarrow{v}$ *;*

3) Distribuitiva2: $m(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = m\overrightarrow{v} + m\overrightarrow{w}$ *;*

4) Se $\overrightarrow{v} = (x_1; y_1; z_1) \Rightarrow m\overrightarrow{v} = (mx_1; my_1; mz_1)$.

0.6.4 Exercícios Resolvidos

1) Determine x e y, se $(2x, 2) = (x + y, y)$.

Resolução:

$(2x, 2) = (x + y, y)$ se $\begin{cases} 2x &= x + y \\ 2 &= y \end{cases}$

Resolvendo sistema, teremos $x = 2$ e $y = 2$.

2) Determinar os vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ sendo $\overrightarrow{a} = (x, 1, z)$, $\overrightarrow{b} = (y, z, 3)$, $\overrightarrow{c} = (2, 0, y)$ e $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c} = (6, 0, -5)$.

Resolução:

Primeiro vamos resolver $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c}$, isto é,

$2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c} = 2(x, 1, z) - (y, z, 3) - 3(2, 0, y) = (2x - y - 6, 2 - z, 2z - 3 - 3y)$;

De seguida, vamos resolver $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c} = (6, 0, -5)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 6 = 6 \\ 2 - z = 0 \\ 2z - 3 - 3y = -5 \end{cases} \Rightarrow x = 1,\ y = 2 \text{ e } z = 2.$$

Então $\overrightarrow{a} = (x, 1, z) = (1, 1, 2)$;

$\overrightarrow{b} = (y, z, 3) = (2, 2, 3)$;

$\overrightarrow{c} = (2, 0, y) = (2, 0, 2)$.

3) Calcule o comprimento dos seguintes vectores:

(a) $\overrightarrow{a} = (-2, 2)$;

(b) $\overrightarrow{b} = (0, 3, 4)$.

Resolução:

(a) O comprimento do vector $\overrightarrow{a}$, $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}$.

(b) O comprimento do vector $\overrightarrow{b}$, $|b| = \sqrt{0^2 + (3)^2 + (4)^2} = 5$.

Nota 0.6.1. *Ver a fórmula de comprimento (ou módulo) do vector em* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$.

4) Calcule as coordenadas dos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$, sabendo que:

$A(1,0,-1)$ e $B(0,1,3)$.

Resolução:

Sabe-se que $\overrightarrow{AB} = B - A$, então $\overrightarrow{AB} = (0,1,3) - (1,0,-1) = (-1,1,4)$ e $\overrightarrow{BA} = A - B$, então $\overrightarrow{BA} = (1,0,-1) - (0,1,3) = (1,-1,-4) = -(-1,1,4)$.

Nota 0.6.2. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

5) Determine o ponto A, sabendo que $\overrightarrow{AB} = (2,3,4)$ e $B(0,0,1)$.

Resolução:

Sabe-se que $\overrightarrow{AB} = B - A \Rightarrow A = B - \overrightarrow{AB} = (0,0,1) - (2,3,4) = (-2,-3,-3)$.

6) Se $\overrightarrow{a} = (2,4)$ e $\overrightarrow{b} = (1,3)$, calcule:

(a) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$;

(b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$.

Resolução:

(a) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (2,4) + (1,3) = (3,7)$;

(b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \frac{1}{2}(2,4) - (1,3) = (0,-1)$.

7) Sabendo que $\overrightarrow{a} = (0,1,2)$, $\overrightarrow{b} = (3,2,-2)$ e $\overrightarrow{c} = (2,2,0)$, determine $5\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{c}$.

Resolução:

$5\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{c} = 5(0,1,2) + (3,2,-2) - \frac{1}{2}(2,2,0) = (2,6,8)$.

0.6.5 Exercícios Propostos

1) Se $3(x,y,z)+5(-1,2,3)=(4,1,3)$, ache x, y e z.

2) Determinar os vectores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, sendo
$\overrightarrow{a}=(x+y,3x-y)$, $\overrightarrow{b}=(2x,y-2x)$, $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(5,1)$.

3) Calcular o comprimento dos vectores:

(a) $\overrightarrow{a}=(-1,1)$;

(b) $\overrightarrow{b}=(2,-4,3)$.

4) Calcular as coordenadas dos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ sabendo que:

(a) $A(0,2)$ e $B(2,0)$;

(b) $A(3,-1,2)$ e $B(-1,2,1)$

5) Determinar o ponto B, sabendo que:

(a) $\overrightarrow{AB}=(2,3)$ e $A(0,1)$;

(b) $\overrightarrow{AB}=(3,-1,4)$ e $A(1,2,-3)$.

6) Calcule $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$, $2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$, $-5\overrightarrow{a}+\frac{3}{2}\overrightarrow{b}$, se $\overrightarrow{a}=(2,-1)$ e $\overrightarrow{b}=(3,4)$.

7) Sejam $\overrightarrow{a}=(1,2,2)$, $\overrightarrow{b}=(0,0,-3)$, $\overrightarrow{c}=(-2,4,-3)$, ache:

(a) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$;

(b) $\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{c}$;

(c) $3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}-3\overrightarrow{c}$;

(d) $-\overrightarrow{a}-\frac{1}{3}\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$.

8) Sejam $\overrightarrow{a}=(5,-1)$ e $\overrightarrow{b}=(-2,4)$. Efectue as operações $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ e $-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}$, ilustrando com vectores cujos iniciais se encontram na origem.

9) Dado o triângulo ABC e sabendo que $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{CB}$, os pontos M e N dividem o lado AB em três partes iguais.

10) Conhecendo três vértices do paralelogramo A, B, C, achar as coordenadas do vértice D, sendo $A(1,-2,3)$, $B(3,2,1)$, $C(6,4,4)$.

11) Demonstrar que $ABCD$ é um paralelogramo, sendo $A(2,1,0)$, $B(5,3,3)$, $C(3,-1,5)$ e $D(0,-3,2)$.

0.7 Unidade 06. Os podutos de vectores

Introdução

Nesta unidade, são abordados os produtos vectores, com especial atenção as aplicações do produto vectorial (cálculo da área de quadriláteros, particularmente da área do triângulo) e do produto interno (volume do paralelepípedo e do tetraedro).
No fim desta unidade, o aluno deve:

- Conhecer as fórmulas do produto interno.
- Aplicar o conhecimento do produto interno para determinar a norma e o ângulo entre vectores.
- Conhecer e aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz e triangular. vectorial e misto;
- Usar as fórmulas dos produtos de vectores para o cálculo de ângulos entre vectores, áreas de quadrilátero, volumes de paralelepípedos e tetraedros.

0.7.1 Produto interno (ou produto escalar)

Ângulo de dois vectores

Definição 0.7.1. *Chamamos ângulo de dois vectores não nulos, α, ao menor ângulo formado por dois segmentos orientados, com a mesma origem, que representem os vectores, $0 \leq \alpha \leq \pi$.*

Quando o ângulo entre os dois vectores é recto, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, dizemos que os dois vectores são vectores ortogonais (ou vectores perpendiculares entre si).

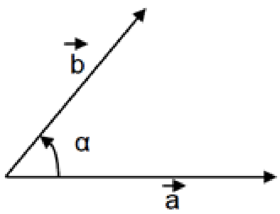
COMO DETERMINAR O ÂNGULO ENTRE VECTORES?

Para obter o ângulo α de dois vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, convém reduzi-los a origem comum escolher o ângulo menor não negativo.

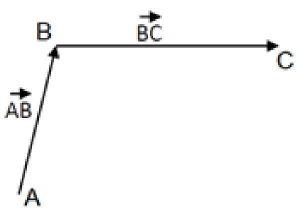
Portanto $0 \leq \alpha \leq 180^o$;

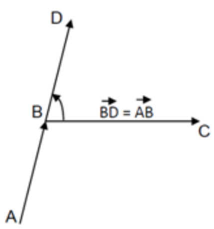
Exemplo 0.7.1.

1) $\alpha = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$;



2) Determine $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \Rightarrow$ Reduzimos a origem comum os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$;



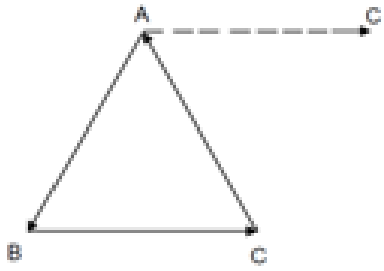


3) Seja o ΔABC equilátero;

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^o$;

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^o$;

Exemplo 0.7.2.



Produto interno (ou produto escalar)

Definição 0.7.2. *O produto interno (ou escalar) de dois vectore* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *é o número tal que:* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|.\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, *onde* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *é o ângulo formado entre os vectores* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$.

Notação

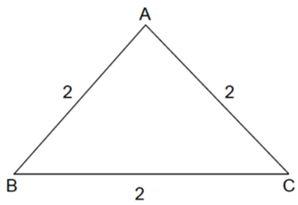
A notação do produto interno é: $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ ou $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$.

Nota 0.7.1. *O resultado do produto interno, é um escalar.*

Exemplo 0.7.3.

No triângulo equilátero de lado igual a 2 determine:

(a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$;



(b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

Resolução :

(a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|AC|.\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2.2.\cos 60 = 4.\frac{1}{2} = 2$;

(b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{BC}|.\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 2.2\cos(120) = 2.2(-\frac{1}{2}) = -2$.

Anulamento do produto escalar

O produto interno $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ se:

1) Um dos vectores for nulo;

2) Os dois vectores forem perpendiculares entre si.

Proposição 0.7.1. *1) Comutativa:* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$ *;*

2) Associativa em relação a multiplicação por um escalar: $k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = (k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v})$ *;*

3) Distribuitiva em relação á adição de vectores:
$\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ *;*
$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$ *.*

Expressão cartesiana do produto interno

1) Em $\mathbb{R}^2$ (plano). Seja $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j}$, o que é o mesmo $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2)$ e $\overrightarrow{b} = (b_1; b_2)$.
$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = (a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j}).(b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j}) = a_1.b_1\overrightarrow{i}\overrightarrow{i} + a_1.b_2\overrightarrow{i}\overrightarrow{j} + a_2.b_1\overrightarrow{j}\overrightarrow{i} + a_2.b_2\overrightarrow{j}\overrightarrow{j} =$
$= a_1.b_1.|\overrightarrow{i}|^2 + 0 + 0 + a_2.b_2|j|^2 = a_1.b_1 + a_2.b_2$;
$\Rightarrow \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2$; onde $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2)$ e $\overrightarrow{b} = (b_1; b_2)$.
Sabe-se também que $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|.\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \Rightarrow \cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|} = \frac{a_1.b_1+a_2.b_2}{|\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|}$
Do mesmo modo, se $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, então:
$a_1.b_1 + a_2.b_2 = 0$.

2) Em $\mathbb{R}^3$ (Espaço). Seja $\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{i} + u_2\overrightarrow{j} + u_3\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{i} + v_2\overrightarrow{j} + v_3\overrightarrow{k}$.
$\Rightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$;
Sabe-se também que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|.\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \Rightarrow \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|} = \frac{u_1.v_1+u_2.v_2+u_3.v_3}{|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|}$
Do mesmo modo, se $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, então:
$u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3 = 0$.

No geral $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dois vectores em $\mathbb{R}^n$, o produto interno canónico (ou usual) entre os dois vectores é a soma do produto ordenado das coordenadas desses vectores

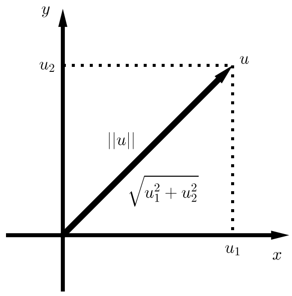
$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i\,.$$

Exemplo 0.7.4. *1) Se* $\overrightarrow{a} = (1; 2)$ *e* $\overrightarrow{b} = (3; 4)$*, então* $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = (1.3 + 2.4) = 11$*.*

2) Se $\overrightarrow{u} = (-2; 3; 1)$ *e* $\overrightarrow{v} = (1; 2; 3)$*, então* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = (-2.1 + 3.2 + 1.3) = 7$*.*

0.7.2 Norma (ou módulo dum vector). Desigualdade de Cauchy-Schawarz. Desigualdade triangular.

Definição 0.7.3. *Define-se a norma euclidiana do vector* $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, *como* $|u| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$.



Sendo u e v vectores de $\mathbb{R}^n$ e α um escalar real, demostra-se que a norma verifica as propriedades:

1) $|u| \geq 0$ e $|u| = 0$ sse u.

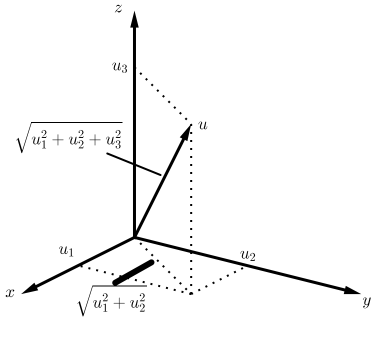
2) $\alpha u = |\alpha||u|$.

3) $u \cdot v \leq |u||v|$ (Desigualdade de Cauchy-Schwarz).

4) $|u + v| \leq |u| + |v|$ (Desigualdade triangular).

Seja dado o vector $\overrightarrow{u} = (u_1; u_2) \in \mathbb{R}^2$.
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{u}|.\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{u}) = |\overrightarrow{u}|^2.1 \Leftrightarrow \overrightarrow{a}.\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{u}| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}}$
Logo, em $\mathbb{R}^2$ a norma é dada por $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{u_1.u_1 + u_2.u_2} \Leftrightarrow |\overrightarrow{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

e em $\mathbb{R}^3$, $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$, onde $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$.



Exemplo 0.7.5. *Seja* $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ *e* $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$.
Calcule:

(a) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$*;*

(b) $|\overrightarrow{u}|$ *(usando o produto interno);*

(c) $|\overrightarrow{v}|$*;*

(d) $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *o ângulo entre os vectores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$.

Resolução :

$\overrightarrow{u} = (3;1;0)$ *e* $\overrightarrow{v} = (2;2;-2)$*;*

(a) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$*;*
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 3.2 + 1.2 + 0.(-2) = 8$*;*

(b) $|\overrightarrow{u}|$
$|\overrightarrow{u}|^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = 3.3 + 1.1 + 0.0 = 10 \Rightarrow |\overrightarrow{u}| = \sqrt{10}$*;*

(c) $|\overrightarrow{v}|$*;*
$|\overrightarrow{v}|^2 = 2.2 + 2.2 + (-2).(-2) = 12 \Rightarrow |\overrightarrow{v}| = 2\sqrt{3}$*;*

(d) $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
$\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{8}{\sqrt{10}.2\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{30}} \Rightarrow (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \arccos(\frac{4}{30})$.

(a) *Seja* $A = (-4;5), B = (1;1)$ *e* $C = (1;0)$
Calcule:

(a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$*;*

(b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$*;*

Resolução :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$*;*
$\overrightarrow{AB} = B - A =$*(5;-4);*
$\overrightarrow{BC} = C - B = (0;-1)$*;*
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = (5.0) + ((-1).(-4)) = 4$*;*
b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$*;*
$\cos\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{BC}|} = \frac{4}{\sqrt{5^2+(-4)^2}.\sqrt{0^2+(-1)^2}} = \frac{4}{41}$
$\Rightarrow \alpha = \arccos(\frac{4}{41})$

Interpretação Geométrica do produto escalar

Na figura $A'B'$ é a medida algébrica da projeção do vector $\overrightarrow{v}$ sobre a direcção do vector $\overrightarrow{u}$.

Em simbolos $A'B' = Proj_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}$.

Do triângulo rectângulo $AB'B$:

$A'B' = AB \cdot \cos\theta = |\overrightarrow{v}| \cdot \cos\theta$.

Seja $Vers\overrightarrow{u}$ o versor do vector $\overrightarrow{u}$. A última igualdade não se altera se multiplicarmos por $|Vers\overrightarrow{u}|$.

$A'B' = |Vers\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\theta$.

A igualdade acima mantém-se, se substituírmos por $Vers\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}$, isto é,

$Proj_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v} = \left|\dfrac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}\right| \cdot |\overrightarrow{v}|\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}$ ou $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|Proj_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}$.

Se o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ for agudo, a medida algébrica da projecção positiva. Se obtuso, negativa.

Exemplo 0.7.6. *Determine a projecção do vector* $\overrightarrow{u}$ *sobre* $\overrightarrow{v}$, *se* $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{3}$, $|\overrightarrow{v}| = 2$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 30^o$.

Resolução:

$Proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 30^o}{2} = \dfrac{3}{2}$.

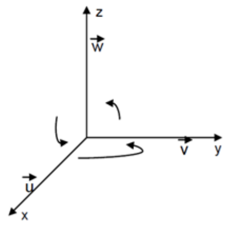
0.7.3 Produto Externo (ou Produto Vectorial)

Notação

A notação do produto externo é: $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

0.7.4 Triedro Positivo (ou Triedro "Direito")

Os vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$, nesta ordem, formam um triedro positivo se um observador colocado em $\overrightarrow{w}$ de frente pois tem a sua direita o vector $\overrightarrow{u}$ e á sua esquerda o vector $\overrightarrow{v}$.



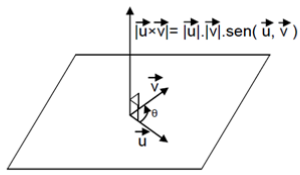
Definição 0.7.4. *O produto vectorial (ou externo) de dois vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não paralelo entre si e um terceiro vector $\overrightarrow{w}$, com as seguintes características quanto:*

1) Á direcção : o vector $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ é perpendicular aos vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

2) Ao sentido: Os vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ nesta ordem formam triedro positivo;

3) Ao módulo: $|\overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|.\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$;

Nota 0.7.2. *O resultado do produto vectorial, é um vector.*



Expressão cartesiana do produto externo (Ou Vectorial)

I Produto Externo dos vectores unitários $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{k}$

$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = 0$ $\qquad$ $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$;

$\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = 0$ $\qquad$ $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$;

$\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = 0$ $\qquad$ $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}$;

II Expressão Cartesiana Do Produto Externo Ou Vectorial

(a) Em $\mathbb{R}^3$.Seja $\overrightarrow{u} = (x_1; y_1; z_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2; y_2; z_2)$:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & y_2 & y_1 \\ x_2 & v_2 & y_2 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$\overrightarrow{i}(y_1 z_2 - y_2 z_1) - \overrightarrow{j}(x_1 z_2 - x_2 z_1) + \overrightarrow{k}(x_1 y_2 - x_2 y_1);$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (y_1 z_2 - y_2 z_1; x_1 z_2 - x_2 z_1; x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

(b) Em $\mathbb{R}^2$.Seja $\vec{u} = (x_1; y_1; 0)$ e $\vec{v} = (x_2; y_2; 0)$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(y_1.0 - y_2.0) - \vec{j}(x_1.0 - x_2.0) + \vec{k}(x_1y_2 - x_2y_1);$$

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = (0; 0; x_1y_2 - x_2y_1)$$

Exemplo 0.7.7. *Sejam dados os vectores* $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ *e* $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$. *Determine* $\vec{u} \times \vec{v}$.

Resolução :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1-0) - \vec{j}(3-1) + \vec{k}(0+1) = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k};$$

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = (-1; -2; 1).$$

0.7.5 Anulamento do produto externo (Ou Vectorial)

$\vec{u} \times \vec{v} = 0$ se:

1) Um dos vectores for nulo;

2) Os dois vectores forem paralelos, pois $\sin\theta = 0$ se $\theta = 0^o \vee \theta = 180^o$.

Proposição 0.7.2.

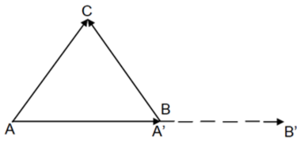
1) $\vec{a} \times \vec{b}$ e $\vec{b} \times \vec{a}$ têm sentidos opostos: $\vec{a} \times \vec{b}$ =- $\vec{b} \times \vec{a}$;

2) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} + \vec{c})$;
$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$;

3) $k(\vec{a} \times \vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b})$;

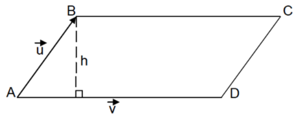
Exemplo 0.7.8. *Seja dado o triângulo equilátero* ABC *de lado* 3. *Determine* $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ *e* $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$.

Resolução :



$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |AB|.|AC|.\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 3.3.\sin 60^o = \frac{9\sqrt{3}}{2};$
$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = |AB|.|BC|.\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 3.3.\sin 120^o = \frac{9\sqrt{3}}{2};$

0.7.6 Sentido Geométrico do produto externo



Sabemos que $S_{ABCD} = |AD|.h$ e $h = |AB|.\sin\theta \Rightarrow S_{ABCD} = |AD|.|AB|.\sin\theta$, mas sabe-se que $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|.\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, logo
$S_{ABCD} = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|$.

0.7.7 Aplicações do produto vectorial

Área do paralelogramo: Se tomarmos dois vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ com um mesmo ponto inicial, de modo a formar um ângulo diferente de zero e também diferente de π radianos, o módulo vectorial entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ pode ser interpretada como a área do paralelogramo que tem $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ como lados.
$A_{Paralelogramo} = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|$

Nota 0.7.3. *Os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ tem origem comum.*

Área do triângulo: A metade do módulo do produto vectorial entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ pode ser interpretada como sendo a área do triângulo que tem dois lados como os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, com origens no mesmo ponto, isto é:
$A_{Tringulo} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|$

Exemplo 0.7.9. *Calcue a área do triângulo com vértices $A(0;0)$, $B(2;0)$ e $C(0;1)$.*

Resolução:

O módulo do produto geométrico tem sentido geométrico de área do paralelograo, daqui, a área do rectângulo será igual a metade da área do paralelogramo.

Para calcular a área do paralegramo, temos que considerar a origem comum.
Para este exercício, consideremos o vértice comum A.
Achemos os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AB} = B - A = (2;0)$ *e* $\overrightarrow{AC} = C - A = (0;1)$.

Área$= \left\| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right\| = |2\overrightarrow{k}| = 2.$

Pode verificar este resultado, calculando a área, usando o método geométrico.

0.7.8 Produto misto de vectores

Notação

A notação do produto interno é: $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, sendo $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ três vectores no espa?o.

Definição 0.7.5. *Chama-se produto interno a* $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}).\overrightarrow{c}$.

O resultado do produto misto, é um escalar.

Expressão cartesiana

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}).\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Sendo $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$ $\quad \overrightarrow{b} = (b_1; b_2; b_3)$ $\quad \overrightarrow{c} = (c_1; c_2; c_3)$

Exemplo 0.7.10. *Sendo* $\overrightarrow{a} = (1;2;-1)$, $\overrightarrow{b} = (0;1;4))$ *e* $\overrightarrow{c} = (1;3;-2)$. *Determine* $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

Resolução :

Primeiro Método:Usando a definição :

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(8+1) - \overrightarrow{j}(4-0) + \overrightarrow{k}(1-0) = 9\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k};$$

$\Rightarrow \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (9;-4;1) \Rightarrow (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}).\overrightarrow{c} = (9;-4;1).(1;3;-2) = 9 - 12 - 2 = -5.$

Segundo Método: Usando a expressão cartesiana:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2-12) - 2(0-4) - 1(0-1) = -14 + 8 + 1 = -5$$

Anulamento do produto misto

$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0$ se:

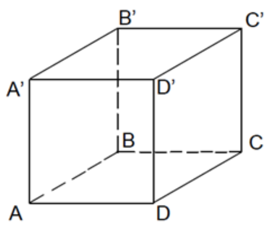
1) Pelo menos um dos três vectores for nulo;

2) $\overrightarrow{a}$ for paralelo a $\overrightarrow{b}$ (pois neste caso, $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$).

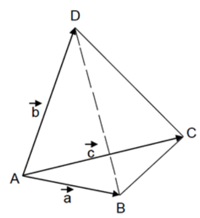
3) Os vectores forem coplanares (o recíproco também é verdadeiro).

0.7.9 Sentido Geométrico do produto misto

$V = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|.\overrightarrow{c}$ – Volume do Paralelopípedo.



$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}).\overrightarrow{c}|$ – Volume do Tetraedro.



0.7.10 Aplicações do produto misto

Volune do paralelepípedo: O módulo produto misto entre $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ representa o volume do paralelepípedo que tem as arestas próximas dadas pelos vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$, sendo que estes vectores têm a mesma origem. Isto é
$V_{Paraleleppedo} = |(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})|$.
Volume do tetraedro: Um sexto do produto misto entre $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$, representa o volume do tetraedro (pirâmide com base triangular) que tem as três arestas próximas dadas pelos vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$, sendo que estes têm a mesma origem.
$V_{Tetraedro} = \dfrac{1}{6}|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})|$

Exemplo 0.7.11. *Calcule o volume do tetraedro $ABCD$, sabendo que $A(1;0;2), B(3;-2;2), C(4;2;6)$ e $D(3;5;-2)$.*

Resolução :

$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD})|$;
$\overrightarrow{AB} = B - A = (2;-2;0)$;
$\overrightarrow{AC} = B - C = (3;2;4)$;
$\overrightarrow{AD} = D - A = (2;5;-4)$
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 2(-8-20) + 2(-12-8) = -56 - 40 = -96$, então
$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|-96| = 16$.

0.7.11 Exercícios Resolvidos

1) Calcule $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$, sabendo que:

   (a) $\overrightarrow{a} = (1,2)$ e $\overrightarrow{b} = (3,-4)$;

   (b) $\overrightarrow{a} = (1,-1,2)$ e $\overrightarrow{b} = (3,-1,-2)$.

   Resolução:

   (a) Usando a a fórmula do produto interno, teremos:
   $\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} = (1,2).(3,-4) = 1.3 + 2.(-4) = -5$;

   (b) Usando o racíocinio da alínea anterior, teremos:
   $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = (1,-1,2).(3,-1,-2) = 1.3 + (-1).(-1) + 2.(-2) = 0$.

2) Calcule o ângulo entre os vectores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, se:

   (a) $\overrightarrow{a} = (1,0)$ e $\overrightarrow{b} = (2,0)$;

   (b) $\overrightarrow{a} = (1,2,2)$ e $\overrightarrow{b} = (0,3,4)$.

   Resolução:

   (a) Sabe-se que $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|\cos(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$, teremos
   $\cos(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}) = \dfrac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|} = \dfrac{(1,0).(2,0)}{\sqrt{1^2+0^2}.\sqrt{2^2+0^2}} = 1$
   $\Leftrightarrow (\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}) = \arcsin 1 \Rightarrow (\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}) = 0$.

   (b) $\cos(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}) = \dfrac{(1,2,2).(0,3,4)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\sqrt{0^2+3^2+4^2}} = \dfrac{14}{3.5} = \dfrac{14}{15}$
   $\Rightarrow (\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}) = \arcsin\dfrac{14}{15}$.
   $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$ é o ângulo entre $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$.

3) Calcule o produto escalar $(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}).(3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$, sendo $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{b}| = 3$ e o ângulo $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}) = \dfrac{3}{4}\pi$.

   Resolução:

   Usando as propriedades, teremos:
   $(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}).(3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = 3\overrightarrow{a}.\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} - 6\overrightarrow{b}.\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} - 6\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{b}^2 =$
   $3|\overrightarrow{a}|^2 - 5\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} - 2|\overrightarrow{b}|^2 = 2|\overrightarrow{a}|^2 - 5(|\overrightarrow{a}|.\overrightarrow{b}.\cos(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})) - 5|\overrightarrow{b}|^2 =$
   $= 3(\sqrt{2})^2 - 5\sqrt{2}.3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2.3^2 = 3$.

4) Calcule $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, se:

(a) $\overrightarrow{a} = (1, 2)$ e $\overrightarrow{b} = (2, -1)$;

(b) $\overrightarrow{a} = (1, 2, 3)$ e $\overrightarrow{b} = (2, 3, -1)$.

Resolução:

(a) Usando a fórmula do produto externo, teremos:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{k}(1.(-1) - 2.2) = -5\overrightarrow{k} = (0, 0, -5);$$

(b) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(-2-9) - \overrightarrow{j}(-1-6) + \overrightarrow{k}(3-4) = -11\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} =$ $(-11, 7, -1)$.

5) Calcule a área do paralelopípedo construído pelos vectores
$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{k} + 0\overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{b} = 0\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.

Resolução:

A área do paralelopípedo é dado por, então:

$$A = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = \left\| \begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix} \right\| = |\overrightarrow{i}(0-0) - \overrightarrow{j}(-1) + \overrightarrow{k}(1)| = |\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}|$$
$$= |(0, 1, 1)| = \sqrt{2}.$$

Então a área do paralelopípedo é $\sqrt{2}$.

6) Determine o ângulo entre $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ se :
$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 9$ e $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

Resolução:

Para achar o ângulo entre os vectores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, vamos partir pelas fórmulas:

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \Rightarrow |\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}| = \frac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})} \tag{1}$$

$$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|\sin(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \Rightarrow |\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}| = \frac{|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|}{\sin(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})} \tag{2}$$

Igualando (1) e (2), teremos

$\dfrac{\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}}{\cos(\overrightarrow{a}\,,\,\overrightarrow{b}\,)} = \dfrac{|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\,|}{\sin(\overrightarrow{a}\,,\,\overrightarrow{b}\,)} \Leftrightarrow \tan(\overrightarrow{a}\,,\,\overrightarrow{b}\,) = \dfrac{|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\,|}{\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}} = \dfrac{\sqrt{3^2+(-6)^2+1^2}}{9} = 1$, então o ângulo formado entre $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ será de $45^0 = \dfrac{\pi}{4}$.

7) Sejam $\overrightarrow{a} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{b} = (0,1,0)$ e $\overrightarrow{c} = (0,0,1)$, calcule $(\overrightarrow{a}\,,\,\overrightarrow{b}\,,\overrightarrow{c}\,)$.

Resolução:

Usando a fórmula de produto interno, teremos:

$$(\overrightarrow{a}\,,\,\overrightarrow{b}\,,\overrightarrow{c}\,) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2.0 + 3.0 = 1\,.$$

8) Calcule o volume do paralelopípedo cujos lados são os vectores $\overrightarrow{a} = (1,-3,1)$, $\overrightarrow{b} = (2,1,-3)$, $\overrightarrow{c} = (1,2,1)$.

Resolução:

Usando a fórmula para o cálculo de volumes de paralelopípedos, teremos:

$$V = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}\right\| \frac{1}{6}|(7-15+3)| = \frac{5}{6}\,.$$

0.7.12 Exercícios Propostos

1) Sejam dados $|\overrightarrow{a}| = 11$, $|\overrightarrow{b}| = 23$ e $|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}| = 20$, determine $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|$.

2) calcule $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})$ e $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, se:

   (a) $\overrightarrow{a} = (2, -1)$ e $\overrightarrow{b} = (3, 4)$;

   (b) $\overrightarrow{a} = (2, 2, 0)$ e $\overrightarrow{b} = (-1, 1, 0)$.

3) Calcule o produto escalar dos vectores $3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$, se os vectores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ formam um ângulo de $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

4) Dados os vértices do triângulo $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, -0)$ e $C(3, -2, 1)$. Determine:

   (a) O ângulo ABC;

   (b) O perímetro Do triângulo ABC.

5) Ache as coordenadas do vector $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{b}$, se $\overrightarrow{a} = (3, -1, -2)$ e $\overrightarrow{b} = (1, 2, -1)$.

6) Calcule a área do quadrilátero com os vértices: $A(-5, 0)$, $B(-3, 2)$, $C(1, 2)$ e $D(4, -4)$.

7) Sejam $\overrightarrow{a} = (1, 2, 2)$, $\overrightarrow{b} = (0, 0, -3)$ e $\overrightarrow{c} = (-2, 4, -3)$.
   Calcule $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

8) Calcular a área do paralelogramo construido por vectores $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ e $3\overrightarrow{a} + b$, sendo $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 1$ e o ângulo entre $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ é de 30^0.

9) Calcular a área do triângulo ABC, se $A(2, 2, 2)$, $B(4, 0, 3)$ e $C(0, 1, 0)$.

10) Dados os pontos $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$ e $C(2, -1, 3)$. O volume do tetraedro $ABCD$ é igual a 5. O vértice D está no eixo OY. Achar as coordenadas do vértice D.

11) Mostrar que os vectores $\overrightarrow{a} = 7\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} - 7\overrightarrow{j} + 8\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ são complanares.

12) Calcule o volume da pirâmide triangular que tem vértices $A(0, 0, 1)$, $B(2, 3, 5)$, $C(6, 2, 3)$ e $D(3, 7, 2)$.

0.8 Unidade 07. Espaços e subespaços lineares

Introdução

Nesta unidade, faz-se uma abordagem em relação subespaço vectorial, combinação linear, subespaços gerado. Faz-se também uma abordagem acerca da dependência e independência linear de vectores, bem como as bases e dimensões de espaços e subespaços lineares.
No fim desta unidade, o aluno deve:

- Determinar a dependência e a independência linear de vectores, matrizes, e polinómios;
- Determinar se um determinado conjunto (vectores, matrizes, polinômios) determinam uma base;
- Encontrar a base e dimensão dum espaço e subespaço gerado por vectores, matrizes e polinômios.

0.8.1 Espaço vectorial (ou espaço linear)

Definição 0.8.1. *Diz-se que $\mathbb{E}$ é um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ sempre que tenha um conjunto $\mathbb{E}$ de elementos $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ e um corpo $\mathbb{K}$ dos elementos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$, e $\mathbb{E}$ é definida em relação a adição (+), isto é, $\forall u, v, w \in \mathbb{E}$, verifica os seguintes axiomas:*

1) $[a_1]$. $u + v = v + u$ *(+ é associativa)*

2) $[a_2]$. $(u + v) + w = u + (v + w)$ *(+ é comutativa)*

3) $[a_3]$. $\exists 0 \in \mathbb{E} : (u + 0) = 0 + u = u$ *(elemento neutro de +)*

4) $[a_4]$. $\forall u, \exists - u \in \mathbb{E} : u + (-u) = 0$ *(elemento oposto de +)*

e também estiver definida em relação ao produto $\times$, isto é, $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in \mathbb{E}$, associa o elemento $\alpha \times u \in \mathbb{E}$ (ou simplesmente αu), verifica os seguintes axiomas:

1) $[m_1]$. $\alpha(u + v) = \alpha v + \alpha u$ *($\times$ é distribuitiva em relação a +)*

2) $[m_2]$. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta v$ *($\times$ é distribuitiva em relação à adição +)*

3) $[m_3]$. $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$ *($\times$ é associativa)*

4) $[m_4]$. $1.u = u$ *(elemento neutro de $\times$)*

Os elementos de$\mathbb{E}$ designam-se por vectores, e os elementos de $\mathbb{K}$ por escalares.
A operação binária + de $\mathbb{E}^2$ em $\mathbb{E}$ designa-se por soma vectorial, a operação$\times$ de $\mathbb{E}\mathbb{K}$ em $\mathbb{E}$ designa-se por produto escalar. Salienta-se que um espaço vectorial é fechado relativamente à soma vectorial e ao produto escalar.

Exemplo 0.8.1. *Exemplos de espaços vectoriais:*

- *O conjunto $\mathbb{R}^n$;*

- *O conjunto dos segmentos orientados;*

- *O conjunto $\mathbb{C}^n$;*

- *O conjunto da funções de variável real num intervalo $\mathbb{I} \subset \mathbb{C}$ (com as definições) habituais de adição de funções e de multiplicação de uma função por uma constante $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$. Sendo a função $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

0.8.2 Subespaço Vectorial. Combinação linear. Subespaç Gerado

Definição 0.8.2. *Sendo $\mathbb{E}$ um espaço vectorial, qualquer conjunto não vazio $\mathbb{S} \subset \mathbb{E}$ que esja fechado relativamente à soma vectorial e ao produto escalar designa-se por subespaço vectorial de $\mathbb{E}$.*

Salienta-se que o fecho relativamente à soma vectorial e ao produto escalar implica que todos os subespaços contêm o vector nulo.

Definição 0.8.3. *Dado um conjunto de vectores $\mathbb{V} = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\} \subset \mathbb{E}$, e um conjunto de escalares $k_1, k_2, k_3, ..., k_n \in \mathbb{K}$ o vector*
$$u = k_1u_1 + k_2u_2 + ... + k_nu_n = \sum_{i=1}^{n} k_iu_i,$$
designa-se por combinação linear dos vectores de $\mathbb{V}$.

Definição 0.8.4. *O conjunto de todas as combinações lineares de um conjunto de vectores $\mathbb{V}$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{E}$, e designa-se por subespaço gerado por $\mathbb{V}$.*

Exemplo 0.8.2.

- *O conjunto dos polinómios de grau igual ou inferior a n, $\mathcal{P}_n$, é um subespaço vectorial do conjunto de todos os polinómios sem restrição de grau $\mathcal{P}_\infty$;*

- *O conjunto dos polinómios sem restrição de grau $\mathcal{P}_\infty$, dado que todas as funções polinomiais são diferenciáveis, é um subespaço vectorial do conjunto das funções infinitamente diferenciáveis $\mathcal{C}^\infty$;*

- *O conjunto das funções infinitamente diferenciáveis, $\mathcal{C}^\infty$, é um subespaço vectorial do conjunto de funções continuamente diferenciáveis até à ordem n, $\mathcal{C}^\infty$;*

- *O conjunto de funções continuamente diferenciáveis até à ordem n, $\mathcal{C}^n$, é um subespaço vectorial do conjunto de funções com primeira derivada de ordem $\mathcal{C}^1$;*

- *O conjunto de funções com primeira derivada contínua, $\mathcal{C}^1$, dado que todas as funções diferenciáveis são contínuas, é um subespaço vectorial do conjunto de funções contínuas $\mathcal{C}$;*

- *O conjunto das funções contínuas em $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}$, é um subespaço vectorial do conjunto de funções definidas para todos valores reais $\mathcal{F}(\mathbb{R})$;*

- *O conjunto dos inteiros, $\mathbb{Z}$, não é um espaço vectorial, dado que não é fechado para a multiplicação escalar: o produto de qualquer escalar não inteiro por um inteiro não é um inteiro.*

Exemplo 0.8.3. - *O polinómio* $p(x) = x + 2x^3$ *pode ser descrito como uma combinação linear dos polinómios* $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$ *e* $p_3(x) = x^3$:
$p(x) = 0p_0(x) + 1p_1(x) + 0p_2(x) + 2p_3(x)$
ou simplesmente $p(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- *O espaço dos polinómios de grau* 3, $\mathcal{P}_3$, *é gerado pelo conjuntos de vectores* $\mathbb{P} = \{1, x, x^2, x^3\}$, *dado que, por definição,* $\mathcal{P}$, *é o conjunto dos polinómios da forma* $p(x) = a+bx+cx^2+dx^3$, *ou seja, o conjunto de todas as possíveis combinações lineares dos vectores do conjunto* $\mathbb{P}$.

0.8.3 Dependência e independência linear

Definição 0.8.5. *Seja* $\mathbb{V}$ *um espaço vectorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$. *Diz-se que os vectores* $v_1, v_2, ..., v_m \in \mathbb{V}$ *são linearmente dependente sobre* $\mathbb{K}$, *ou simplesmente dependentes, se existem escalares* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_m \in \mathbb{K}$, *nem todos nulos, tais que* $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m = 0$.
O conjunto de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{V}$ *são linearmente independente se a equação*
$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = 0$, *só possui a solução trivial*
$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$,
Ou seja, nenhum vector pode ser expresso como combinação linear dos restantes.

Lema 0.8.1. *Os vectores não nulos* $v_1, ..., v_m$ *são linearmente dependentes se, e somente se, um deles é combinação linear dos vectores precedentes:*
$v_i = k_1 v_1 + k_2 v_2 + ... + k_{i-1} v_{i-1}$ $(i \geq 2)$.

Proposição 0.8.1. *Sobre a dependência de vectores, temos as seguintes propriedades:*

1) *Se um vector* v *pode se escrever como combinação linear dos vectores* u_1, u_2, u_3 *de duas formas diferentes, então* u_1, u_2, u_3 *são linearmente dependentes;*

2) *Um conjunto de vectores de* $\mathbb{R}^3$ *com quatro ou mais vectores é linearmente dependente;*

3) *Um conjunto de vectores de* $\mathbb{R}^2$ *com três ou mais vectores é linearmente dependente.*

Exemplo 0.8.4. 1) *Os vectores* $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *são linearmente independentes, enquanto que os vectores* $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ *são linermente dependentes.*

2) *Qualquer conjunto de vectores que contenha o vector nulo é linermente dependente;*

3) *Subconjunto de conjuntos linearmente independentes são linearmente independentes, e portanto um conjunto que contenha um subconjunto linearmente dependente é também dependente.*

4) *O conjunto de vectores* $\mathbb{V} = \{3x^2, 1 - x + 2x^2, 2 - 2x + x^2\} \subset \mathcal{P}_2$ *é linermente dependente, dado que* $3x^2 = 2(1 - x + 2x^2) - (2 - 2x + x^2)$;

5) *O conjunto de vectores* $\mathbb{P} = \{1, x, x^2, x^3\}$ *é linearmente independente.*
Nenhum dos seus vectores pode ser expresso como combinação linear dos outros.

6) *O conjunto de vectores* $\mathbb{V} = \{\sin^2(x), \cos^2(x), \cos(2x)\}$ *é linermente dependente, dado que,* $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

7) *O conjunto de vectores* $\mathbb{P} = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$ *é linermente independente. Para que a combinação linear de 3 vectores se anule*
$k_1(1+x) + k_2(x+x^2) + k_3(1+x^2) = 0 \Leftrightarrow k_1 + k_1x + k_2x + k_2x^2 + k_3 + k_3x^2 = 0$
$$\Leftrightarrow (k_1+k_3) + (k_1+k_2)x + (k_2+k_3)x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$
ou seja na forma matricial
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
Daqui teremos
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
O sistema só possui solução trivial, $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, *pelo que os vectores* $1+x, x+x^2, 1+x^2$, *são linearmente independentes.*

Nota 0.8.1. *Não existe nenhum método geral para demonstrar que um conjunto que um conjunto de* n *vectores do espaço de funções é linearmente independente. No caso de* n *vectores pertencerem a* $\mathcal{C}^{n-1}$, *a independência linear pode ser demonstrada verificando que o determinante*
$$W(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix},$$
designado por **Wronskiano** *dos* n *vectores, é nulo pelo menos para um valor de* $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 0.8.5. 1) *Para o conjunto de vectores* $\mathbb{P} = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$, *temos*
$$det \begin{bmatrix} 1+x & x+x^2 & 1+x^2 \\ 1 & 1+2x & 2x \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = (1+x)(2+4x-4x) - (2x+2x^2-2-2x^2) =$$
$= 2 + 2x - 2x + 2 = 4$;
O determinante nunca é nulo (bastaria que não fosse nulo para apenas um valor de x), pelo que os vectores são linearmente independentes.

2) *Para o conjunto de vectores* $\mathbb{V} = \{3x^2, 1-x, 2-2x+x^2\}$, *temos que*
$$det \begin{bmatrix} x^2 & 1-x+2x^2 & 2-2x+x^2 \\ 6x & -1+4x & -2+2x \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} = 0;$$
Não existe um único valor de x *para o qual o determinante não se anule, ou seja, o determinante é identicamente nulo. Os vectores são linearmente dependentes.*

0.8.4 Bases e dimensão

Definição 0.8.6. *Diz-se que um espaço vectorial $\mathbb{V}$ é de dimensão finita ou é $n-$ dimensional, e secreve-se $dim\mathbb{V} = n$, se existem vectores linearmente independentes $e_1, e_2, ..., e_n$ que geram V. A sequência $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ é então chamada de base de $\mathbb{V}$*

Teorema 0.8.1. *Seja $\mathbb{V}$ um espaço vectorial de dimensão finita. Então, todas as bases de $\mathbb{V}$ tem o mesmo número de elementos.*

Um espaço vectorial pode ter um número infinito de vectores linearmente independentes, como é o caso da maioria dos espaços de funções dizendo-se então um espaço de dimensão infinita.

Proposição 0.8.2. *Sobre as bases, verificam-se as seguintes propriedades:*

1) *Uma base de $\mathbb{R}^2$ sempre têm dois vectores;*
2) *Uma base de $\mathbb{R}^4$ sempre têm três vectores;*
3) *Uma base de um plano de $\mathbb{R}^3$ (contenha a origem) sempre têm dois vectores;*
4) *Uma base de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$ (contenha a origem) sempre tem um vector;*
5) *Dois vectores linearmente independentes de $\mathbb{R}^2$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$;*
6) *Três vectores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$;*
7) *Dois vectores linearmente independentes de um plano π de $\mathbb{R}^3$ contendo a origem formam uma base de π.*

Exemplo 0.8.6. 1) *Os quatro vectores em $\mathbb{K}^4$:*
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
São linearmente independente, pois formam uma matriz escalonada. Além disso, como $dim\mathbb{K}^4 = 4$, eles formam uma base de K^4.

2) *Os quatros vectores em $\mathbb{R}^3$,*
$\begin{bmatrix} 257 & -132 & 58 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 43 & 0 & -17 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 521 & -317 & 94 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 328 & -512 & -731 \end{bmatrix}$,
são linearmente dependentes, pois pertencem a um espaço vectorial de dimensão 3.

3) *O conjunto $\mathbb{P} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ constitui a base canónica do conjunto dos polinómios de grau n, e é um exemplo de um espaço de funções de dimensão finita. O conjunto dos polinómios de grau n tem dimensão $n+1$. Por exemplo, os vectores $1, x, x^2, x^3$ constituem uma base dos polinómios de grau 3, $\mathcal{P}_3$;*

4) *O espaço de funções dos polinómios sem restrição de grau, $\mathcal{P}_\infty$, é um espaço de dimensão infinita. O espaço de funções contínuas tem dimensão infinita. Não há nenhum conjunto finito de vectores que seja base desse espaço.*

5) *O conjunto de vectores $\mathcal{P} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ sendo, como vimos, linearmente independente, e em um número igual à dimensão do espaço de polinómios de grau 2, constitui uma base $\mathcal{P}_2$.*

0.8.5 Exercícios resolvidos

1) Determine se u v são linearmente dependentes uo não;

(a) $u = [3, 4]\,,\; v = [1, -3]\,;$

(b) $u = [2. - 3]\,,\; v = [6, -9]\,;$

(c) $u = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix};$

(d) $u = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

(e) $u = 2 - 5t + 6t^2\,,\; v = 3 + 2t - 4t^2 + 5t^3\,;$

(f) $u = 1 - 3t + 2t^2 - 3t^3\,,\; v = -3 + 9t - 6t^2 + 9t^3\,.$

Resolução:

Dois vectores u v são dependentes se, e somente se, um é múltiplo do outro.

(a) Não.

(b) Sim, pois $v = 3u\,;$

(c) Sim, pois $v = 2u\,;$

(d) Não;

(e) Não;

(f) Sim, pois $v = -3u\,.$

2) Determine se os seguintes vectores em $\mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes ou não:

(a) $[1, -2, 1]\,,\; [2, 1, -1]\,,\; [7, -4, 1]\,;$

(b) $[1, -3, 7]\,,\; [2, 0, -6]\,,\; [3, -1, -1]\,,\; [2, 4, -5]\,;$

(c) $[1, 2, -3]\,,\; [1, -3, 2]\,,\; [2, -1, 5]\,;$

(d) $[2, -3, 7]\,,\; [0, 0, 0]\,,\; [3, -1, -4]\,.$

Resolução:

(a) **Método 1**. Faça uma combinação linear dos vectores igual ao vector nulo, usando incógnitas escalares x, y e z:

$x(1,-2,1)+y(2,1,-1)+z(7,-4,1)=(0,0,0)$

$(x,-2x,x)+(2y,y,-y)+(7z,-4z,z)=(0,0,0)$

$(x+2y+7z,-2x+y-4z,x-y+z)=(0,0,0)$

Usando o a igualidade de vectores, iremos obter um sistema homogêneo equivalente e reduziremos à forma escalonada:

$$\begin{cases} x + 2y + 7z = 0 \\ -2x + y - 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 7z = 0 \\ 5y + 10z = 0 \\ -3y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 7z = 0 \\ \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

O sistema, na forma escalonada, tem só duas equações não nulas nas três incógnitas; Portanto, o sistema tem solução não nula. Assim, os vectores dados são linearmente dependentes.

Método 2. Formemos a matriz cujas linhas são os vectores dados e reduzemos à forma escalonada, usando as operações elementares com linhas:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix} \text{ para } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 10 & 6 \end{bmatrix} \text{ para } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a matriz escalonada tem uma linha nula, os vectores são dependentes. (Os três vectores dados geram um sub-espaço de dimensão 2).

(b) Sim, pois quaisquer quatro (ou mais) vectores em $\mathbb{R}^3$ são dependentes.

(c) Forme a matriz, cujas linhas são os vectores dados, e reduza a matriz por linhas à forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \text{ para } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 11 \end{bmatrix} \text{ para } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Como a matriz escalonada nao tem linhas nulas, os vectores são independentes. (Os três vectores dados gerem um sub-espaço de dimensão 3).

(d) Como $0=[0,0,0]$ é um dos vectores, os vectores são dependentes.

3) Seja $\mathbb{V}$ o espaço vectorial das matrizes 2×2 sobre $\mathbb{R}$. Determine se as matrizes A, B, $C\in\mathbb{V}$ são dependentes onde:

(a) $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$, $\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\quad C=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$;

(b) $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}$, $\quad B=\begin{bmatrix}3&-1\\2&2\end{bmatrix}$, $\quad C=\begin{bmatrix}1&-5\\-4&0\end{bmatrix}$.

Resolução:

(a) $x\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

ou $\begin{bmatrix}x&x\\x&x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y&0\\0&y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}z&z\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

ou $\begin{bmatrix}x+y+z&x+z\\x&x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

Fazendo os elementos correspondentes iguais entre si para obtermos o sistema homogêneo de equações lineares:

$$\begin{cases}x+y+z=0\\x+z=0\\x=0\\x+y=0\end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima obteremos somente a solução nula $x=y=z=0$. Mostramos que $xA+yB+zC=0$ implica $x=y=z=0$; Portanto as matrizes A, B, C são linearmente independentes.

(b) Faremos uma combinação linear das matrizes A, B e C igual ao vector nulo usando incógnitas escalares x, y e z, isto é, $xA+yB+zC=0$. Assim

$x\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}3&-1\\2&2\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}1&-5\\-4&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

ou $\begin{bmatrix}x&2x\\3x&x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3y&-y\\2y&2y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}z&-5z\\-4z&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

ou $\begin{bmatrix}x+3y+z&2x-y-5z\\3x+2y-4z&x+2y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

Faremos os elementos correspondentes iguais entre si para obtermos o sistema homogêneo equivalente de equações lineares e reduzirmos à forma escalonada:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & - & 5z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & 4z & = & 0 \\ x & + & 2y & & & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ & - & 7y & - & 7z & = & 0 \\ & - & 7y & - & 7z & = & 0 \\ & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

ou finalmente, $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$

O sistema na forma escalonada tem uma variável livre e, portanto, tem solução não nula, por exemplo, $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$. Mostramos que $xA + yB + zC = 0$ não implica que $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; Portanto, as matrizes são linearmente dependentes.

4) Seja $\mathbb{V}$ espaço vectorial dos polinômios de grau ≤ 3 sobre $\mathbb{R}$. Determine se u, v, $w \in \mathbb{V}$ são independentes ou dependentes:

(a) $u = t^3 - 3t^2 + 5t + 1$, $v = t^3 - t^2 + 8t + 2$, $w = 2t^3 - 4t^2 + 9t + 5$;

(b) $u = t^3 + 4t^2 - 2t + 3$, $v = t^3 + 6t^2 - t + 4$, $w = 3t^3 + 8t^2 - 8t + 7$

Resolução:

(a) Faremos uma combinação linear dos polinômios u, v, w igual ao polinômio nulo, usando incógnitas escalares x, y e z, isto é, $xu + yv + zw = 0$. Assim,
$x(t^3 - 3t^2 + 5t + 1) + y(t^3 - t^2 + 8t + 2) + z(2t^3 - 4t^2 + 9t + 5) = 0$;
ou $xt^3 - 3xt^2 + 5xt + x + yt^3 - yt^2 + 8yt + 2 + 2zt^3 - 4zt^2 + 9zt + 5z = 0$;
ou $(x + y + 2z)t^3 + (-3x - y - 4z)t^2 + (5x + 8y + 9z)t + (x + 2y + 5z) = 0$;
Os coeficientes das potências de t devem ser iguais a zero (0):

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -3x & - & y & - & 4z & = & 0 \\ 5x & + & 8y & + & 9z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

Resolvendo o sistema homogêneo acima, obteremos somente a solução nula $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$; Portanto u, v e w são independentes.

(b) Faremos a combinação linear dos polinômios u, v e w igual ao poolinômio nulo,
$x(t^3 + 4t^2 - 2t + 3) + y(t^3 + 6t^2 - t + 4) + z(3t^3 + 8t^2 - 8t + 7) = 0$
ou $(x + y + 3z)t^3 + (4x + 6y + 8z)t^2 + (-2x - y - 8z)t + (3x + 4y + 7z) = 0$.
Faremos os coeficientes das potências de t iguais a zero (0) reduzir à forma escalonada:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 4x + 6y + 8z = 0 \\ -2x - y - 8z = 0 \\ 3x + 4y + 7z = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

ou finalmente $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

O sistema na forma escalonada tem variável livre e portanto tem solução não nula. Mostramos que $xu + yv + zw = 0$ não implica $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$; portanto os polinômios são linearmente dependentes.

5) Seja $\mathbb{V}$ o espaço vectorial das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Mostre que $f,\ g$ e $h \in \mathbb{V}$ são independentes, onde $f(t) = e^{2t},\ g(t) = t^2,\ h(t) = t$.

Resolução:

Vamos fazer uma combinação linear das funções igual à função nula (0) usando incógnitas escalares $x,\ y$ e z: $xf + yg + zh = 0$, e mostrar que $x = 0,\ y = 0$ e $z = 0$. Realçamos que $xf + yg + zh = 0$ quer dizer que, para cada valor de t, $xf(t) + yg(t) + zh(t) = 0$

Na equação $xe^{2t} + yt^2 + zt = 0$, substituimos:

$t = 0$ para obter $x = 0$

$t = 1$ para obter $xe^2 + y + z = 0$

$t = 2$ para obter $xe^4 + 4y + 2z = 0$

Resolvendo o sistema, teremos:

$$\begin{cases} x = 0 \\ xe^2 + y + z = 0 \\ xe^4 + 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

Obtemos somente solução nula, isto é, $x = 0,\ y = 0$ e $z = 0$.

Portanto $f,\ g$ e h são independentes.

0.8.6 Exercícios Propostos

1) Determine se u e v são linearmente dependentes, onde:

(a) $u = [1,2,3,4]\,,\ v = [4,3,2,1]\,;$

(b) $u = [-1,6,-12]\,,\ v = \left[\dfrac{1}{2},-3,6\right];$

(c) $u = [0,1]\,,\ v = [0,-3]\,;$

(d) $u = [1,0,0]\,,\ v = [0,0,-3]\,;$

(e) $u = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix};$

(f) $u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};$

(g) $u = -t^3 + \dfrac{1}{2}t^2 - 16\,;$

(h) $v = \dfrac{1}{2}t^3 - \dfrac{1}{4}t^2 + 8\,;$

(i) $u = t^3 + 3t + 4\,,\ v = t^3 + 4t + 3$

2) Determine se os seguintes vectores em $\mathbb{R}^4$ são linearmente dependentes ou independentes:

(a) $[1,3,-1,4]\,,\ [3,8,-5,7]\,,\ [2,9,4,23]\,;$

(b) $[1,-2,4,1]\,,\ [2,1,0,-3]\,,\ [3,-6,1,4]\,.$

3) Seja $\mathbb{V}$ o espaço das matrizes 2×3 sobre $\mathbb{R}$. Determine se as matrizes $A,\ B,\ C\ \in \mathbb{V}$ são linearmente dependentes ou independente onde:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 7 \\ 2 & 10 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

4) Seja $\mathbb{V}$ o espaço vectorial dos polinômios de grau≤ 3 sobre $\mathbb{R}$. Determine se $u,\ v,\ w$ $\in V$ são linearmente dependentes ou independentes onde:

(a) $u = t^3 - 4t^2 + 2t + 3\,,\ v = t^3 + 2t^2 + 4t - 1\,,\ w = 2t^3 - t^2 - 3t + 5\,;$

(b) $u = t^3 - 5t^2 - 2t + 3\,,\ v = t^3 - 4t^2 - 3t + 4\,,\ w = 2t^3 - 7t^2 - 7t + 9\,.$

5) Seja $\mathbb{V}$ o espaço vectorial das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Mostre que $f,\ g,\ h \in \mathbb{V}$ são linearmente independentes onde:

(a) $f(t) = e^t,\ g(t) = \sin t,\ h(t) = t^2;$

(b) $f(t) = e^t,\ g(t) = e^{2t},\ h(t) = t;$

(c) $f(t) = e^t,\ g(t) = \sin t,\ h(t) = \cos t.$

6) Determine se cada um dos seguintes conjuntos forma uma base de $\mathbb{R}^2$:

(a) $[1,1]$ e $[3,1]$;

(b) $[2,1],\ [1,-1]$ e $[0,2]$;

(c) $[0,1]$ e $[0,-3]$;

(d) $[2,1]$ e $[-3,87]$.

7) Determine se cada um dos seguintes conjuntos forma uma base de $\mathbb{R}^3$:

(a) $[1,2,-1]$ e $[0,3,1]$;

(b) $[2,4,-3],\ [0,1,1]$ e $[0,1,-1]$;

(c) $[1,5,-6],\ [2,1,8],\ [3,-1,4]$ e $[2,1,1]$;

(d) $[1,3,-4],\ [1,4,-3]$ e $[2,3,-11]$.

8) Encontre uma base e a dimensão do subespaço $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^4$ gerado por:

(a) $[1,4,-1,3],\ [2,1,-3,-1]$ e $[0,2,1,-5]$;

(b) $[1,-4,-2,1],\ [1,-3,-1,2]$ e $[3,-8,-2,7]$.

9) Seja 2×2 sobre $\mathbb{R}$ e seja $\mathbb{W}$ o subespaço gerado por

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre uma base e a dimensão de $\mathbb{W}$.

10) Seja $\mathbb{W}$ o subespaço gerado pelos polinômios

$u = t^3 + 2t^2 - 2t + 1,\ v = t^3 + 3t^2 - t + 4,\ w = 2t^3 + t^2 - 7t - 7$

Encontre uma base e a dimensão de $\mathbb{W}$.

11) Encontre uma base e a dimensão do espaço das soluções $\mathbb{W}$ de cada sistema homogêneo:

(a) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ x + 5y + z = 0 \\ 3x + 5y + 8z = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - 2y + 7z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases}$

12) Seja $\mathbb{V}$ o espaço vectorial dos polinômios em t de grau$\leq n$. Determine se cada um dos seguintes conjuntos é base de $\mathbb{V}$:

(a) $\{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3, \ldots, 1+t+t^2+\ldots+t^{n-1}+t^n\}$;

(b) $\{1+t, t+t^2, t^2+t^3, \ldots, t^{n-2}+t^{n-1}, t^{n-1}+t^n\}$.

0.8.7 Ficha Suplementar

Operações elementares sobre vectores

1) Considere os vectores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$.
Represente geometricamente os vectores $2\overrightarrow{a}$, $-3\overrightarrow{b}$, $2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$, $2\overrightarrow{b}-\overrightarrow{b}$ e $\frac{1}{2}\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$.

2) Determine a origem do segmento que representa o vector $\overrightarrow{a}=(2,3,-1)$, sendo que a extremidade é o ponto $B(0,4,2)$.

3) Sendo $\overrightarrow{a}=(2,3,4)$ e $\overrightarrow{b}=(-2,x,z)$. Determine x e z, sabendo que:

(a) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(0,3,-2)$;

(b) $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(6,0,0)$;

(c) $-\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}=(-8,-5,2)$.

4) Sendo A, B, C, D e O pontos quaisquer no espaço, simplifique as seguintes expressões:

(a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}$;

(b) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$;

(c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{BA}$.

5) Sejam A e B dois pontos quaisquer e P o ponto médio do segmento AB.
Demonstre que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MP}$, para qualquer ponto M.

6) Sejam AM, BN, e CP as medianas do triângulo ABC. Exprima os vectores $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ e $\overrightarrow{CP}$ em função dos vectores $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{CA}$.

7) Sejam A, B, C e D pontos quaisquer. E e F os pontos médios dos segmentos AB e CD.Demonstre que $\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})$.

8) Dado o triângulo ABC, e sendo $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{b}=AB$, I e J os pontos médios de BC e AC.
Determine os seguintes vectores em função de $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$:

(a) $\overrightarrow{AI}$;

(b) $\overrightarrow{BI}$;

(c) $\overrightarrow{IC}$;

(d) $\overrightarrow{IJ}$;

(e) $\overrightarrow{BJ}$.

9) Dados os pontos $A(-1,2)$, $B(4,-2)$, $C(1,3)$, determine:

(a) As coordenadas do ponto M de tal modo que $2\overrightarrow{M}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}=0$;

(b) As coordenadas do ponto M de tal modo que $ABCM$ seja um paralelogramo;

(c) O comprimento de cada um dos lados do triângulo ABC.

10) Sendo A, B, C, D v?rtices consecutivos de umparalelogramo, calcular as coordenadas do vértice D se, $A(1,3)$, $B(5,11)$ e $C(6,15)$.

11) Seja $ABDC$ um paralelogramo de vértices consecutivos na ordem escrita
Achar o vértice A, sabendo-se que $B(0,1,3)$, $C(2,3,5)$ e $D(-1,0,2)$.

Ângulo de dois vectores. Produto Interno (ou Escalar)

1) Designando a e b os comprimentos dos vectores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, respectivamente, calcule $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ nos seguintes casos:

(a) $a=2$, $b=4$, $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})=45^\circ$;

(b) $a = 1,5,\ b = 4,\ (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 60°$;

(c) $a = 3,\ b = 2,\ \overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ têm sentidos opostos;

(d) $a = 3,\ b = 2,\ \overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ têm mesmo sentido.

2) Designando $a,\ b$ os comprimentos dos vectores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, respectivamente, determine o ângulo formado por $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, sabendo que:

(a) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a \cdot b$;

(b) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -a \cdot b$;

(c) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \frac{1}{2} a \cdot b$.

3) Sendo $|\overrightarrow{u}| = 4,\ |\overrightarrow{v}| = 5$ e $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 120°$, calcule $|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|$.

4) Usando a definição de produto interno, demonstre que num triângulo rectângulo, a altura relativa á hipotenusa é média geométrica entre as projecções dos catetos sobre a hipotenusa.

5) Seja ABC um triângulo equilátero de lado igual a $2cm$. M é o ponto médio de BC. Calcule:

(a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;

(b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$;

(c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$.

6) Seja $ABCD$ um rectângulo em que $|AB| = 2$ e $|AD| = 3$. M é o ponto médio de BC. Calcule:

(a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$;

(b) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$;

(c) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DC}$.

7) Determine $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ e o ângulo entre $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, sabendo que :

(a) $\overrightarrow{a} = (5, 2),\ \overrightarrow{b} = (-3, 6)$;

(b) $\overrightarrow{a} = (4, 3),\ \overrightarrow{b} = (1, 7)$;

(c) $\overrightarrow{a} = (6, -8),\ \overrightarrow{b} = (12, 9)$;

(d) $\vec{a} = (3,-5)$, $\vec{b} = (7,4)$.

8) Sejam $A(1,1)$, $B(4,2)$ e $C(3,x)$. Determine x de modo que o triângulo ABC seja rectângulo.

9) No triângulo ABC, $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$. Demonstre que $\vec{a} \cdot \vec{b} + \rightarrow \cdot \rightarrow + \rightarrow \cdot \rightarrow = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

10) Demonstre que se $a = b$, então $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ são perpendiculares entre si.

Produto Externo (ou Vectorial)

1) Calcule $|\vec{a} \times \vec{b}|$ se:

   (a) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ e $(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$;

   (b) $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ e $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$.

2) Calcule $|(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})|$ e $|(\vec{a} - 3\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})|$, sabendo que $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ e $(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$.

3) Calcule $\vec{a} \cdot \vec{b}$, se $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ e $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$.

4) Sejam $\vec{a} = (3,-1,-2)$ e $\vec{b} = (1,2,-1)$. Determine $\vec{a} \times \vec{b}$.

5) Sejam $\vec{a} = (2,-3,1)$, $\vec{b} = (-3,1,2)$ e $\vec{c} = (-1,-2,2)$. Determine:

   (a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$;

   (b) $\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b})$;

   (c) $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.

6) Demonstre que $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2$.

7) Se $\vec{a} \perp \vec{b}$ e $\vec{a} \perp \vec{c}$, mostre que $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{0}$.

8) Calcule a área do paralelogramo construido pelos vectores:

   (a) $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$;

   (b) $\vec{a} = \vec{i}$ e $\vec{b} = \vec{j} - \vec{k}$.

9) Determine a área e as alturas do triângulo ABC, se:

(a) $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$ e $C(1,3,-1)$;

(b) $A(1,2,0)$, $B(3,0,-3)$ e $C(5,2,6)$.

10) Determine o ângulo entre $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, se $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=9$ e $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=3\overrightarrow{i}-6\overrightarrow{j}+6\overrightarrow{k}$.

Produto misto

1) Sabendo que $\overrightarrow{c}$ é perpendicular aos vectores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})=30^\circ$, $|\overrightarrow{a}|=6$, $|\overrightarrow{b}|=3$ e $|\overrightarrow{c}|=3$. Calcule $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$.

2) $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ são perpendiculares dois a dois e formam um triedro direito, $|\overrightarrow{a}|=4$, $|\overrightarrow{b}|=2$ e $|\overrightarrow{c}|=3$. Calcule $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$.

3) sejam $\overrightarrow{a}=(1,-1,3)$, $\overrightarrow{b}=(-2,2,1)$ e $\overrightarrow{c}=(3,-2,5)$, calcule:

(a) $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$;

(b) $(\overrightarrow{b},\overrightarrow{a},\overrightarrow{c})$;

(c) $(\overrightarrow{c},\overrightarrow{b},\overrightarrow{a})$.

4) Prove que:

(a) $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})=-(\overrightarrow{a},\overrightarrow{c},\overrightarrow{b})$;

(b) $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c},\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a})=2(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$.

5) Calcule o volume do paralelopípedo cujos lados são os vectores: $\overrightarrow{a}=(1,-3,1)$, $\overrightarrow{b}=(2,1,-3)$ e $\overrightarrow{c}=(1,2,1)$.

6) calcule o volume do tetraedro $ABCD$ onde:

(a) $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$.

(b) $A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$, $D(4,1,1)$.

7) Verifique se são coplanares os seguintes vectores:

(a) $\overrightarrow{a}=(2,3,-1)$, $\overrightarrow{b}=(1,-1,3)$ e $\overrightarrow{c}=(1,9,-11)$;

(b) $\overrightarrow{a}=(3,-2,1)$, $\overrightarrow{b}=(2,1,2)$ e $\overrightarrow{c}=(3,-2,-1)$;

(c) $\overrightarrow{a}=(2,-1,2)$, $\overrightarrow{b}=(1,2,-3)$ e $\overrightarrow{c}=(3,-4,7)$.

8) Determine o(s) valor(es) de x para que os pontos $A(5,x,2)$, $B(3,1,-1)$, $C(9,4,-4)$ e $D(1,5,0)$ sejam coplanares.

Parte III

Geometria Analítica

Introdução

Geometria Analítica

A geometria analítica, também chamada geometria de coordenadas e que antigamente recebia o nome de geometria cartesiana, é o estudo da geometria através dos princípios da álgebra. Em geral, é usado o sistema de coordenadas cartesianas para manipular equações para planos, retas, curvas e círculos, geralmente em duas dimensões, mas por vezes também em trés ou mais dimensões. Alguns pensam que a introdução da geometria analítica constituiu o início da matemática moderna. Os estudos iniciais da Geometria Analítica se deram no século $XVII$, e devem-se ao filósofo matemático francês René Descartes $(1596 - 1650)$, o inventor das coordenadas cartesianas (assim chamadas em sua homenagem), que permitaram a representação númerica de propriedades geométricas. No seu livro sobre o Método, escrito em 1637, aparece a célebre frase latim "Cogito ergo sum", ou seja: "Penso, logo existo".
O estudo da geometria contribui não só para o conhecimento dos matemáticos, mas também para profissionais de outras áreas como os da construção civil, mecatrônica, robótica, física, astronomia, economia, dentre outras. Por exemplo, o conceito de coordenadas e, em particular, de coordenadas cartesianas, invadiu todos os domínios da matemática e das ciências aplicadas por meio da noção de gráficos de uma função Ȧctualmente, tais gráficos são modificados, corrigidos ou ampliados nas telas dos modernos computadores, tornando automática a análise de um tipo qualquer de função que admita representação gráfica. A Geometria Analítica também permite verificar as condições de paralelismo, perpendicularismo e intersecção de duas rectas, cálculo da distância entre dois pontos.
O interesse pelo estudo das cônicas remota a épocas muito recuadas. De facto, estas curvas desempenham um papel importante em vários domínios da física, incluindo a astronomia, na economia, na engenharia e em outras áreas.
São várias as aplicações daí a necessidade e a importância do estudo e conhecimento deste tema.

0.9 Unidade 08. Estudo da recta no plano

Introdução

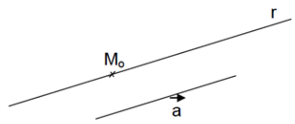
Nesta unidade, faz-se um estudo da recta no plano, com a especial atenção na sua aplicação no cálculo de distâncias, ângulos e assim como no cálculo de algumas figuras.
No fim desta unidade, o aluno deve:

- Definir a recta no plano;
- Conhecer e aplicar as equações abaixos em várias situações:
    1) Equação paramétrica da recta;
    2) Equação canónica da recta;
    3) Equação da recta que passa por dois pontos;
    4) Equação axial da recta;
    5) Equação da recta que passa por um ponto e é perpendicular a um vector;
    6) Equação geral da recta;
    7) Equação da recta que passa por um ponto dado e tem um coeficiente angular;
- Determinar o ângulo entre duas rectas;
- Conhecer e indicar a posição relativa entre duas rectas no plano através das suas rectas;
- Conhecer e aplicar a equação da distância dum ponto a uma recta;
- Conhecer e aplicar as equações das bissectrizes dos ângulos formados por duas rectas.

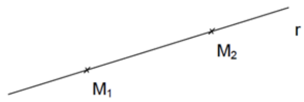
0.9.1 Definição duma recta no plano

Uma recta no plano pode ser definida do seguinte modo:

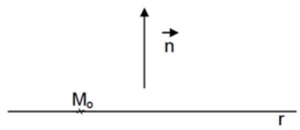
1) A recta r passa pelo ponto M_0 e é paralelo a $\overrightarrow{a}$.



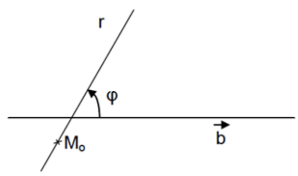
2) A recta r passa pelos pontos M_1 e M_2.



3) A recta r passa pelo ponto M_0 e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{n}$.

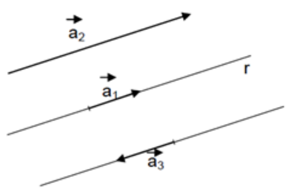


4) A recta r passa por M_0 e forma com o vector $\overrightarrow{b}$ um ângulo φ.



Definição 0.9.1. *(Vector Director Ou Vector Direcção)*
Qualquer vector $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ *paralelo a uma recta* r, *denomina-se vector director ou vector direcção da recta* r.

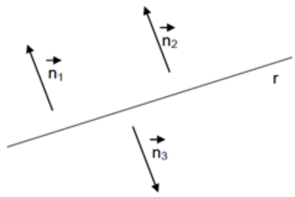
Observação 0.9.1. *Cada recta tem uma infinidade de representantes do vector director, todos eles com a mesma direcção .*



$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \ldots$ *são vectores directores da recta* r.

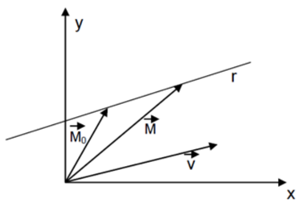
Vector normal

Qualquer vector $\overrightarrow{n} \neq 0$ perpendicular ? recta r, denomina-se vector normal da recta r.



$\overrightarrow{n_1} \perp r, \overrightarrow{n_2} \perp r, \overrightarrow{n_3} \perp r, \Rightarrow \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}, ...$ são vectores normais da recta r.

0.9.2 Equação paramétrica da recta



Seja r uma recta definida por um ponto M_0 e um vector $\overrightarrow{v} = (a; b)$, (director).
Seja M um ponto qualquer da recta r. O vector $\overrightarrow{M_0M} = M - M_0$ é paralelo ao vector $\overrightarrow{v}$, então $\overrightarrow{M_0M} = t.\overrightarrow{v}$, onde $t-$chama-se parâmetro $\overrightarrow{M_0M} = M - M_0 \Rightarrow \overrightarrow{\mu} - \overrightarrow{\mu_0} = t.\overrightarrow{v}$.

$$\overrightarrow{\mu} - \overrightarrow{\mu_0} = t.\overrightarrow{v} \qquad (1)$$

Definição 0.9.2. *A equação (1) chama-se equação vectorial parámetrica da recta r.*

Sendo $M(x; y)$ e $M_0(x_0; y_0)$, a equação (1) fica:
$\overrightarrow{\mu} = \overrightarrow{\mu_0} + t.\overrightarrow{v} \Rightarrow \overrightarrow{xi + y\, j} = (x_0 \overrightarrow{i} + y_0 \overrightarrow{j}) + t(a \overrightarrow{i} + b \overrightarrow{j})$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + a.t \\ y = y_0 + b.t \end{cases} \qquad (2)$$

Definição 0.9.3. *A equação (2), chama-se equação paramétrica da recta r.*

Exemplo 0.9.1. *Escreva a equação paramétrica da recta r que passa pelo ponto $M(1; 0)$ e é paralela ao vector $\overrightarrow{v} = (2; 1)$.*

Resolução :

A equação paramétrica da recta é dada pela fórmula: $\begin{cases} x = x_0 + a.t \\ y = y_0 + b.t \end{cases}$, onde $\overrightarrow{v} = (a, b)$ é o vector director.

Substituindo com $M(1; 0)$ e $\overrightarrow{v} = (2; 1)$ teremos: (r): $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 + 1.t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \end{cases}$

0.9.3 Equação canónica da recta

Da equação (2) vem:

$$\begin{cases} x = x_0 + a.t \\ y = y_0 + b.t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-x_0}{a} = t \\ \frac{y-y_0}{b} = t \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$ onde $\overrightarrow{v} = (a,b)$ é o vector director. (3)

Definição 0.9.4. *A equação (3) Chama-se equação cancônica da recta que passa pelo ponto $M_0(x_0;y_0)$ e ? paralelo ao vector $\overrightarrow{v} = (a;b)$.*

Exemplo 0.9.2. *Escreva a equação cancônica da recta r que passa pelo ponto $M(1;0)$ e é paralela ao vector $\overrightarrow{v} = (2;1)$.*

Resolução :

$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$, onde $\overrightarrow{v} = (a,b)$ é o vector director.

Substituindo com $M(1;0)$ e $\overrightarrow{v} = (2;1)$ teremos: $(r): \frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1}$.

0.9.4 Equação da recta que passa por dois pontos

Sejam dados dois pontos $M_1(x_1;y_1)$ e $M_2(x_2;y_2)$.

$\overrightarrow{M_1M_2}$ é o vector director da recta r que passa por M_1 e M_2.

$\overrightarrow{M_1M_2} = M_2 - M_1 = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$

Substituindo em (3) o vector $\overrightarrow{v}$ por $\overrightarrow{M_1M_2}$, e $M_0(x_0;y_0)$ por $M_1(x_1;y_1)$ teremos:

$\frac{x-x_0}{x_2-x_1} = \frac{y-y_0}{y_2-y_1}$

$\Rightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (4)

A equação (4) também pode ser dada por:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo 0.9.3. *Determine a equação da recta que passa pelos pontos $A(1;3)$ e $B(-2;5)$.*

Resolução :

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 3 \\ -1 - 1 & 5 - 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1).2-(-3).(y-3) = 0 \Leftrightarrow 2x-2+3y-9 = 0 \Leftrightarrow 2x+3y-11 = 0.$$

0.9.5 Equação axial da recta

Sejam $A(a;0)$ e $B(0;b)$, pontos da recta , então a equação (4) fica:

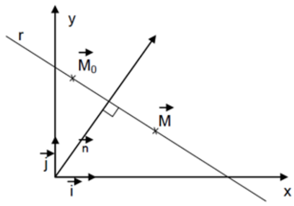
$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \Leftrightarrow bx - ab = -ay \Leftrightarrow bx + ay = ab \Leftrightarrow \frac{bx+ay}{ab} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (5)$$

Definição 0.9.5. *A equação (5), chama-se equação axial da recta.*

0.9.6 Equação duma recta que passa por um ponto e é perpendicular a um vector

Sejam $M_0(x_0;y_0)$ e $M(x;y)$ pontos da recta r:



Seja o vector normal $\overrightarrow{n} = (A;B), \overrightarrow{n} \perp r \Rightarrow \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$, logo:

$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow \overrightarrow{n}.(x-x_0; y-y_0) = 0$

$$\Leftrightarrow A(x-x_0) + B.(y-y_0) = 0 \qquad (6)$$

Definição 0.9.6. *A equação (6), chama-se equação da recta que passa pelo ponto $M_0(x_0;y_0)$ e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{n} = (A;B)$.*

Exemplo 0.9.4. *Escreva a equação da recta que passa pelo ponto $M(-1,2)$ e é perpendicular ao vecto $\overrightarrow{n} = (2;3)$.*

Resolução :

A equação da recta que passa por um ponto e é perpendicular a um vector, é dado por $A(x-x_0) + B.(y-y_0) = 0$, daqui teremos:

$2(x+1) + 3(y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 4 = 0$.

0.9.7 Equação geral da recta

Da equação (6) temos: $A(x-x_0) + B.(y-y_0) = 0 \Leftrightarrow Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0 \Leftrightarrow$ $Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0$;

Seja $C = -(Ax_0 + By_0)$, então:

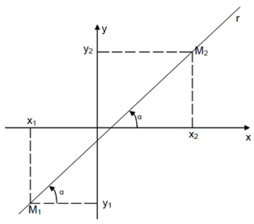
$Ax + By + C = 0$, onde $\overrightarrow{n} = (A;B)$ é o vector normal da recta r (7).

Definição 0.9.7. *A equção (7), chama-se equação geral da recta.*

Equação Reduzida Da Recta

0.9.8 Equação da recta que passa pelo ponto $M_1(x_1; y_1)$ e tem coeficiente angular a

.



Sejam $M_1(x_1; y_1)$ e $M_2(x_2; y_2)$ pontos da recta r.

$\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$–coeficiente angular da recta r.

Sendo $M_2(x; y)$ ponto qualquer da recta, vem: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = a$

$\Leftrightarrow y - y_1 = a(x - x_1)$, onde a é o coeficiente angular da recta (8) Se a recta r cortar o eixo OY num certo ponto $A(0; b)$, a equação 8 fica na forma $y - b = a(x - 0)$

$$\Rightarrow y = ax + b \qquad (9)$$

Definição 0.9.8. *A equação (9) chama-se equação reduzida da recta.*

Exemplo 0.9.5. *Encontre as equações : geral e reduzida da recta r que passa pelo ponto $M(-1; 3)$ e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{a} = (2; -4)$.*

Resolução :

Partindo da equação $A(x - x_0) + B.(y - y_0) = 0$, teremos: $2(x - 2) - 4(y + 4) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 4 - 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y - 20;$

$\Rightarrow x - 2y - 10 = 0-$ é a equação geral da recta.

De $x - 2y - 10 = 0$, teremos $y = \frac{1}{2}x - 5-$ que é a equação reduzida da recta.

0.9.9 O ângulo entre duas rectas

Equação dada na forma reduzida: O ângulo α entre duas rectas $r : y = a_1x + b_1$ e $s : y = a_2x + b_2$ é dado pela fórmula
$\tan\alpha = \dfrac{a_2 - a_1}{1 + a_1.a_2}$.
Se $a_1 = a_2$, as duas rectas são paralelas;
Se $a_1 = -\dfrac{1}{a_2}$, ou $k_1k_2 = -1$ as duas rectas são perpendiculares.
Equação dada na forma geral: O ângulo entre duas rectas dadas por suas equações pode ser calculado como o ângulo entre vectores directores ou entre vectores normais.
Sejam dadas as equações das rectas $r : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, onde $\overrightarrow{n}_1 = (A_1, B_1)$ vector normal da recta r e $s : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ $\overrightarrow{n}_2 = (A_2, B_2)$ vector normal da recta s, então o ângulo entre r e s é:
$\cos(\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2) = \dfrac{\overrightarrow{n}_1.\overrightarrow{n}_2}{|\overrightarrow{n}_1|.|\overrightarrow{n}_2|} = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$,

Nota 0.9.1. *O ângulo considerado entre duas rectas, é aquele que tem menor amplitude.*

Exemplo 0.9.6. *Determine o ângulo entre as rectas* $r : y = x$ *e* $s : y = 0$.
Resolução:
As equaçõesda rectas, estão dadas na forma reduzida, logo usaremos a fórmula $\tan\alpha = \dfrac{a_2 - a_1}{1 + a_1.a_2}$.
Então, usando a fòrmula, teremos
$\tan\alpha = \dfrac{a_2 - a_1}{1 + a_1.a_2} = \dfrac{1 - 0}{1 + 1.0} = 0$, *então*
$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, *isto é, o ângulo formado entre as rectas* r *e* s *é igual a* $\dfrac{\pi}{4}$.

0.9.10 Posição relativa de duas rectas

Sejam

$r : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n} = (A_1; B_1)$;

$s : A_2x + B_2y + C_2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n} = (A_2; B_2)$;

1) Se $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Então o sistema é indeterminado.
As rectas intersectam-se num ponto.

2) Se $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \wedge \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Então o sistema é impossível.
As rectas são paralelas.

3) Se $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$ Então o sistema é indeterminado.
As rectas são coincidentes.

4) Se $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow A_1.A_2 + B_1.B_2 = 0$. Então as rectas r e s são perpendiculares.

Exemplo 0.9.7. *Indique a posição relativa das rectas* $r: x - 2y + 1 = 0$ *e* $s: -2x + 4y - 3 = 0$.

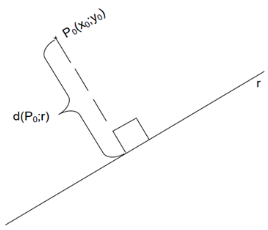
Resolução : Das rectas r e s, temos $\overrightarrow{n_r} = (1; -2)$ e $\overrightarrow{n_s} = (-2; 4)$;
Achemos os determinantes $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$, daqui teremos:

$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0;$

$\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \neq 0;$

$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 2$. Daqui, concluímos que as rectas r e s são paralelas.

0.9.11 Distância dum ponto a uma recta

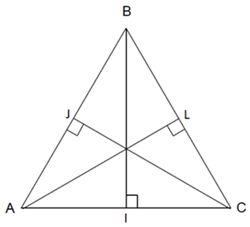


Seja r uma recta definida por $Ax + By + C = 0$ e um ponto $P_0(x_0; y_0)$ qualquer.

Então a distância de $P_0(x_0; y_0)$ á recta r é dada por:

$d(P_0; r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Exemplo 0.9.8. *Determine o comprimento das alturas do* $\triangle ABC$ *se* $A(1;-2), B(0;3)$ *e* $C(2;-3)$.



Resolução:

As alturas do triângulo são: $|AL|, |BI|$ e $|JC|$.

Primeiro, Determinemos a altura $|BI|$.

Achemos a recta (AC): Para determinar a recta (AC), vamos usar a equação da recta que passa por dois pontos, isto é, $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 \\ 2-1 & 2+2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)-(y+2) = 0$ Então a recta (AC), será: $4x - y - 6 = 0$.

Por fim, iremos determinar a altura $|BI|$, usando a equação da distância de um ponto a uma recta, em que o nosso ponto será $B(0;3)$ e a recta $(AC): 4x - y - 6 = 0$.

$|BI| = d(B;(AC)) = \frac{|4.0-3-6|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}} = \frac{9\sqrt{17}}{17}$.

Segundo, Determinemos a altura $|AL|$.

Achemos a recta (AC): Para determinar a recta (AC), vamos usar a equação da recta que passa por dois pontos, isto é, $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-0 & y-3 \\ 2-0 & -3-3 \end{vmatrix} = 0$ $\Leftrightarrow -6(x-0) - 2(y-3) = 0$ Então a recta (BC), será: $-6x - 2y + 6 = 0$.

Por fim, iremos determinar a altura $|AL|$, usando a equação da distância de um ponto a uma recta, em que o nosso ponto será $A(1;-2)$ e a recta $BC: -6x - 2y + 6 = 0$.

$|AL| = d(A;(BC)) = \frac{|-6.1-2.(-2)+6|}{\sqrt{(-6)^2+(-2)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Terceiro, Determinemos a altura $|JC|$.

Achemos a recta (AB): Para determinar a recta (AB), vamos usar a equação da recta que passa por dois pontos, isto é,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 \\ 0-1 & 3+2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5(x-1) + (y+2) = 0$$

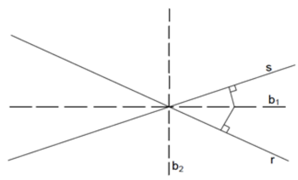
Então a recta (BC), será: $5x + y - 3 = 0$.

Por fim, iremos determinar a altura $|JC|$, usando a equação da distância de um ponto a uma recta, em que o nosso ponto será $C(2;-3)$ e a recta $5x + y - 3$.

$|JC| = d(C;(AB)) = \frac{|5.2+(-3)-3|}{\sqrt{5^2+1^2}} = \frac{2\sqrt{26}}{3}$.

Nota 0.9.2. *Para achar a distância entre duas rectas paralelas, escolhemos um ponto qualquer que pertecente a uma das rectas e de seguida, aplicamos a fórmula da distância entre um ponto e uma recta.*

0.9.12 Bissectrizes dos ângulos formados por duas rectas



Sejam b_1 e b_2 as bissectrizes dos ângulos formados por r e s, onde:

$r : A_1x + B_1y + C_1 = 0$;

$s : A_2x + B_2y + C_2 = 0$;

Seja $M \in b_1$ qualquer $M(x;y)$.

Sabe-se que $d(M;r) = d(M;s)$ ou seja $\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$;

Mas é sabido que $|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$, então:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \qquad (10);$$

As equações (10), são chamadas de equações das bissectrizes dos ângulos de duas rectas.

Exemplo 0.9.9. *Ache as equações das bissectrizes dos ângulos formados pelas rectas:*
$r : 3x + 4y - 5 = 0$ *e* $s : 4x - 3y + 5 = 0$.

Resolução :

As equações das bissectrizes, são dadas por $\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$,

então daqui teremos: $\frac{3x+4y-5}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm\frac{4x-3y+5}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \Leftrightarrow 3x + 4y - 5 = \pm(4x - 3y + 5)$;

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 : 3x + 4y - 5 = 4x - 3y + 5 \\ b_2 : 3x + 4y - 5 = -4x + 3y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 : -x + 7y - 10 = 0 \\ b_2 : 7x + y = 0 \end{cases}$$

0.9.13 Exercícios resolvidos

1) Escreva a equação da recta r que passa pelo ponto $P(1,-1)$ e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{n}=(1,-1)$.

Resolução:

Usando fórmula da equação da recta que passa por um ponto e é perpendicular a uma dado vector. Daqui teremos:

$r: 1(x-1)-1(y+1)=0 \Rightarrow r: x+y-2=0$.

2) Escreva a equação recta s que passa pelo ponto $P(3,1)$ e é paralelo ao vector $\overrightarrow{v}=(0,2)$.

Resolução:

Usando fórmula da equação da recta que passa por um ponto e é paralelo a um dado vector, teremos:

$s: \dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y-1}{2}$.

3) Escreva a equação da recta t que passa pelos pontos $P(0,1)$, $Q(0,-5)$.

Resolução:

Usando a fórmula da equação da recta que passa por dois pontos, teremos:

$t: \begin{vmatrix} x-0 & y-1 \\ 0-0 & -5-1 \end{vmatrix} = -6x-0(y-1)=0 \Rightarrow t: x=0$.

4) Escreva a equação da recta que passa pelo ponto $P(2,-1)$ e é paralelo à recta $r: x=3$.

Resolução:

Seja s, recta por determinar.

Se a recta s passa pelo ponto P e é paralelo a recta r, então o vector normal da recta r, será também o vector normal da recta s.

A normal da recta r é $\overrightarrow{n}=(0,1)$, então

$s: 1(x-2)+0(y+1)=0, \Rightarrow s: x=2$.

5) Determine a distância do ponto $A(2,3)$ à recta $r: y=4$.

Resolução:

A distância de um ponto A à recta r será dada por $d(A,r)=\dfrac{|0.2+3.1-4|}{\sqrt{0^2+1^2}}=1$.

6) Determine a distância entre as rectas paralelas $r: y=x+3$ e $s: 3x-3y+4=0$.

Resolução:

Para determinar o ângulo formado formado entre as duas rectas, escolhemos um ponto

que pertence a uma das rectas, e depois achamos a distância relativamente a outra recta, isto é, Seja $P(0,3)$ um ponto que pertence a recta s, será a distância que separa as duas rectas. Sendo assim, teremos:
$d(P,s) = \dfrac{|3.0 - 3.3 + 4|}{\sqrt{3^2 + (-3)^2}} = \dfrac{5}{3\sqrt{2}}$.

0.9.14 Exercícios Propostos

1) Escreva a equação da recta que passa pelo ponto P e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{n}$, onde:

   (a) $P(3,-1)$, $\overrightarrow{n}=(1,2)$;

   (b) $P(3,1)$, $\overrightarrow{n}=(0,2)$; $P(-2,1)$, $\overrightarrow{n}=(1,0)$.

2) Escreva a equação da recta que passa pelo ponto P e é paralelo ao vector $\overrightarrow{v}$, onde:

   (a) $P(3,-1)$, $\overrightarrow{v}=(1,2)$;

   (b) $P(1,-1)$, $\overrightarrow{v}=(1,-1)$;

   (c) $P(-2,2)$, $\overrightarrow{v}=(1,0)$.

3) Escreva a equação da recta que passa por dois pontos P e Q, onde:

   (a) $P(-1,5)$ e $Q(2,0)$;

   (b) $P(1,0)$ e $Q(0,3)$;

   (c) $P(2,3)$ e $Q(-5,3)$

4) Escreva a equação da recta que passa pelo ponto P e é paralelo à recta r:

   (a) $P(2,3)$, $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 73-t \end{cases}$;

   (b) $P(1,-5)$, $r: 2x-y=3$;

   (c) $P(0,1)$ $\dfrac{1-x}{2}=\dfrac{y+3}{3}$

5) Determine o ponto da recta $r: \begin{cases} x = 3+t \\ y = 1+t \end{cases}$ que tem:

   (a) Ordenada igual 5;

   (b) Abcissa igual a -8.

6) O ponto $A(0,y)$ pertence á recta determinada pelos pontos $P(1,2)$ e $Q(2,3)$. Determine o ponto A.

7) Determine o vector direcção, o vector normal, a equação geral, a equação paramétrica, a equação canónica e a equação axial da recta que passa por dois pontos A e B, sendo:

(a) $A(-6,8)$ e $B(-1,2)$;

(b) $A(4,0)$ e $B(0,3)$.

8) Os lados dum triângulo são dados pelas equaões: $4x+3y-5=0$, $x=2$ e $x-3y+10=0$.

(a) Determine coordenadas dos seus vértices;

(b) Calcule as medidas das alturas deste triângulo.

9) Calcule a área do paralelogramo $ABCD$ sabendo que: $D(6,4)$, a equação dum lado é: $x-2y=0$ e a equação do lado BC é $x-y-1=0$.

10) Ache as coordenadas dos vértices do losango $ABCD$ sabendo que: a equação do lado AB é $x+2y=4$, a equação do lado CD é $x+2y=10$ e que a equação de uma diagonal é $y=x+2$.

11) Determine os valores m e n para os quais as rectas $r: mx+8y+n=0$ e $s: 2x+my-1=0$ são:

(a) Paralelas;

(b) Perpendiculares;

(c) Secantes no ponto $A(1,-2)$;

(d) Coincidentes.

12) Determine a distância do ponto $A(2,3)$ ás rectas seguintes:

(a) $3x+4y=-2$;

(b) $\begin{cases} x = 2-t \\ y = -3+3t \end{cases}$;

(c) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{4}$

13) Determine a distância entre duas rectas r e s, onde:

(a) $r: 2x - y = 0;\ s: 2x - y = 5;$

(b) $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 - t \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \end{cases};$

(c) $r: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y}{-3}$ e $s: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-3}.$

14) Determine as coordenadas do ponto Q é simétrico ao ponto $P(-8, 12)$, em relação:

(a) Ao eixo OX;

(b) Ao eixo OY;

(c) Á recta $x - y = 0$;

(d) Á recta $2x + y - 1 = 0$.

15) Ache as coordenadas do ponto $P(-8, 12)$ sobre:

(a) O eixo OX;

(b) O eixo OY;

(c) A recta que passa pelos pontos $A(2, -3)$ e $B(-5, 1)$;

(d) A recta que passa pelo ponto $A(-3, 4)$ e é paralela à recta $4x - 3y + 1 = 0$;

(e) A recta que passa pelo ponto $A(-3, 4)$ e é perpendicular à recat $4x - 3y + 1 = 0$.

16) Ache as equações das bissectrizes das recta $r: x - 2y + 1 = 0$ e $s: -2x + y = 0$.

17) Ache as equações das bissectrizes e as coordenadas do centro da circunferência inscrita no triângulo ABC, se:

(a) $A(1, -2)$, $B(-2, -2)$ e $C(-2, 2)$;

(b) $A(1, 1)$, $B(1, 4)$ e $C(4, 1)$.

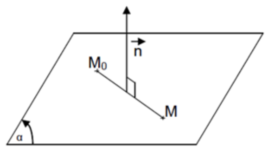
0.10 Unidade 09. Estudo do plano

Introdução

Nesta unidade, faz-se um estudo do plano, considerando as suas equações ângulo e a distância (entre dois planos ou entre um um plano e ponto).
No fim desta unidade, o aluno deve:

- Definir o plano;
- Conhecer e aplicar as equações abaixos em várias situações:
    1) Equação do plano que passa por três pontos;
    2) Equação do plano mediador;
    3) Equação do plano que passa por um ponto e é paralelo a dois vectores;
    4) Equação da recta que passa por dois pontos;
    5) Equação axial do plano;
    6) Equação da recta que passa por um ponto e é perpendicular a um vector;
    7) Equação geral da recta;
    8) Equação da recta que passa por um ponto dado e tem um coeficiente angular;
- Achar o ângulo entre planos ou entre um plano e um ponto;
- Conhecer e aplicar a equação da distância dum ponto a um plano.

0.10.1 Equação do plano que passa por um ponto e é perpendicular a um vector



Seja o plano (α); $M_0(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha); \overrightarrow{n} = (A; B; C) \perp (\alpha)$. Seja $M(x; y; z)$ um ponto qualquer do plano (α), assim temos:

1) $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0) \subset (\alpha)$;

2) $\overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{n} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M}.\overrightarrow{n}. \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (11).$

Definição 0.10.1. *A equação (11), chama-se equação do plano que passa por $M_0(x_0; y_0; z_0)$ e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$*

0.10.2 Equação geral do plano

De (1) vem: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 + Cz_0)$;

Seja $D = -Ax_0 - By_0 + Cz_0$

$Ax + By + Cz + D$, onde $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$ é o vector normal. (12).

Definição 0.10.2. *A equação (12), chama-se equação geral da recta.*

Exemplo 0.10.1. *Determine a equação do plano que passa pelo ponto $M(1; 2; 3)$ e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{n} = (1; -1; 2)$.*

Resolução :

A equação do plano que passa por um ponto e é perpendicular a um vector é

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$; Daqui teremos:

$1.(x - 1) - 1(y - 2) + 2(z - 3) = 0$ então a equação do plano será: $x - y + 2z - 5 = 0$.

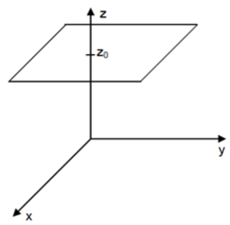
0.10.3 Casos particulares de planos

Seja $M_0(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha); \overrightarrow{n} = (A; B; C) \perp (\alpha)$.

a equação do Plano (α) é:

1) Se $A = B = 0 \wedge C \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{n} = (0;;0;C)$, a equação do plano será:

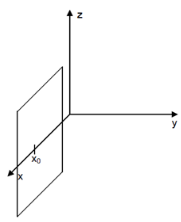
   $C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow z - z_0 = 0 \Rightarrow z = z_0$.



$(\alpha) \parallel (XOY)$

2) Se $B = C = 0 \wedge A \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{n} = (A;;0;0)$, a equação do plano será:

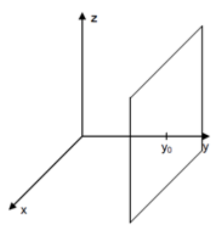
   $A(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow x - x_0 = 0 \Rightarrow x = x_0$.



$(\alpha) \parallel (YOZ)$

3) Se $A = C = 0 \wedge B \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{n} = (0; B; 0)$, a equação do plano será:

   $B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow y - y_0 = 0 \Rightarrow y = y_0$.



$(\alpha) \parallel (XOZ)$

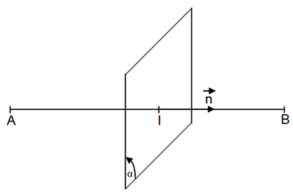
0.10.4 Plano mediador (mediatriz)

Definição 0.10.3. *Sejam A e B dois pontos no espa?o e I o ponto médio $\overline{AB}$. O plano que passa por I e é perpendicular a $\overline{AB}$, chama-se plano mediador (ou plano mediatriz) de $\overline{AB}$.*

Exemplo 0.10.2. *Escreva a equação do plano mediador de $\overline{AB}$, sendo $A(2;1;3)$ e $B(4;-3;5)$.*

Resolução :

Determinemos o ponto médio I, isto é, $I = \frac{A+B}{2} = (\frac{2+4}{2}; \frac{1-3}{2}; \frac{3+5}{2}) = (3;-1;4)$;

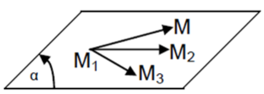


$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} = B - A \Rightarrow \overrightarrow{n} = (2;-4;2)$. Então o plano mediador será

$(\alpha) : 2(x-3) - 4(y+1) + 2(z-4) = 0 \Rightarrow x - 2y + z - 9 = 0$.

0.10.5 Equação do plano que passa por três pontos

Sejam $M(x;y;z)$ um ponto qualquer do plano (α) e sejam $M_1(x_1;y_1;z_1); M_2(x_2;y_2;z_2)$ e $(M_3(x_3;y_3;z_3)$, pontos n?o colineares do plano (α);



Se $M \in (\alpha), M_1 \in (\alpha), M_2 \in (\alpha)$ e $M_3 \in (\alpha)$, então $\overrightarrow{M_1M} \subset (\alpha), \overrightarrow{M_1M_2} \subset (\alpha)$, e $\overrightarrow{M_1M_3} \subset (\alpha)$.
$\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$–são coplanares logo $(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$.

$$\Rightarrow (\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (13)$$

Definição 0.10.4. *A equação (13), chama-se equação do plano que passa por tr?s pontos.*

Exemplo 0.10.3. *Escreva a equação do plano que passa por $M(0;0;0), N(1;0;1)$ e $O(-1;2;0)$.*

Resolução :

A equação do plano que passa por tr?s pontos, é dada por: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0,$

daqui teremos: $\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 1-0 \\ -1-0 & 2-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = x\cdot(-2) - y(1) + z(2) = 0,$
então a equação do plano será, $-2x - y + 2z = 0$.

0.10.6 Equção do plano que passa por um ponto e é paralelo a dois vectores

Sejam dados $\overrightarrow{v} = (a_1; b_1; c_1)$, $\overrightarrow{u} = (a_2; b_2; c_2)$, e $M_0(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha)$, onde $\overrightarrow{v} \parallel (\alpha)$ e $\overrightarrow{u} \parallel (\alpha)$, então a equação do plano que passa por M_0 e é paralelo a $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$ é dado por:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (14)$$

Definição 0.10.5. *A equação* (14)*, chama-se equação do plano que passa por um ponto e é paralelo a dois vectores.*

Exemplo 0.10.4. *Escreva a equação do plano que passa pelo ponto* $M(1;1;1)$ *e é paralelo aos vectores* $\overrightarrow{v} = (1;0;0)$ *e* $\overrightarrow{u} = (-1;2;0)$.

Resolução :

A equação do plano que passa por um ponto e é paralelo a dois vectores, é dado por:
$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$. Daqui teremos,
$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$
$= (x-1)\cdot(-2) - (y-1)\cdot(1) + (z-1)\cdot(2) = 0$, então a equação do plano será, $-2x - y + 2z + 1 = 0$.

0.10.7 Equação axial do plano

Da equação geral do plno $Ax+By+Cz+D=0$, vem que $Ax+By+Cz=-D$. Dividindo tudo por $-D$, teremos:
$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1$. Fazendo a substituição $a=-\frac{D}{A}, b=-\frac{D}{B}$ e $c=-\frac{D}{C}$, teremos $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (15).

Definição 0.10.6. *A equação* (15), *chama-se equação axial do plano.*

Exemplo 0.10.5. *Determine a equação axial do plano* $(\alpha): 3x-2y+2=0$.

Resolução :

Dividindo a equção $3x-2y=-2$, por -2, teremos $\frac{x}{-\frac{2}{3}}+\frac{y}{1}+0=1$ que é a equação axial do plano.

0.10.8 Ângulo entre planos

Sejam dados dois planos (α) e (β) tais que:
$(\alpha): Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow \overrightarrow{n}=(A;B;C)$;
$(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0 \Rightarrow \overrightarrow{n'}=(A';B';C')$;
O ângulo formado por (α) e (β) é o ângulo formado pelos vectores normais de (α) e (β), neste caso $\overrightarrow{n}$ e $\overrightarrow{n'}$ respectivamente.
Seja $\varphi=(\overrightarrow{n};\overrightarrow{n'})$ ângulo entre as normais, então: $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'}=|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{n'}|.\cos(\varphi)$.
$\Rightarrow \cos(\varphi)=\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$

0.10.9 Condições de paralelismo e de perpendicularidade entre planos

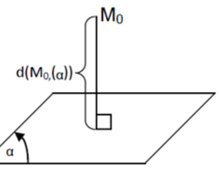
Sejam os planos:
$(\alpha): Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow \overrightarrow{n}=(A;B;C)$;
$(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0 \Rightarrow \overrightarrow{n'}=(A';B';C')$.

1) Se $(\alpha)\perp(\beta) \Rightarrow \overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{n'} \Rightarrow AA'+BB'+CC'=0$.

2) Se $(\alpha)\parallel(\beta) \Rightarrow \overrightarrow{n}\parallel\overrightarrow{n'} \Rightarrow \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$;

3) Se $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$, então os planos são coincidentes.

0.10.10 Distância de um ponto a um plano



Sejam o plano $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n} = (A; B; C)$ e $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Definição 0.10.7. *A distância de $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ao plano (α) é dada por :*
$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Exemplo 0.10.6. *Sejam $M(1; 1; 0)$ e $(\alpha): 3x + 2y + 5z - 1 = 0$. Determine a distânci de M ao plano (α).*

Resolução :

A distância de um ponto a um plano é dado por $d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, daqui teremos:
$d(M, (\alpha)) = \frac{|3.1+2.1+5.0-1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+5^2}} = \frac{2\sqrt{38}}{19}$.

Nota 0.10.1. *Para achar a distância entre dois planos, escolhemos um ponto qualquer que pertece a um dos planos e de seguida, aplicamos a fórmula da distância entre um ponto e uma recta para achar a sua distância.*

0.10.11 Exercícios Resolvidos

1) Escreva a equação da recta que passa pelo ponto $P(0,0,0)$ e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{n}=(1,2,3)$.

Resolução:

Seja (α), o plano por determinar.

Usando a fórmula da equação geral do plano (ou equação do plano que passa por um ponto e é perpendicular a um vector), teremos:

$(\alpha): 1(x-0)+2(y-0)+3(z-0)=0 \Rightarrow x+2y+3z=0$.

2) Escreva a equaçãodo plano que passa pelos pontos $A(1,1,0)$, $B(2,-1,0)$ e $C(3,2,0$.

Resolução:

Seja (β), o plano por determinar.

Usando a fórmula da equação do plano que passa por três pontos, teremos:

$$\beta \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2-1 & -1-1 & 0-0 \\ 3-1 & 2-1 & 0-0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (\beta): z=0$.

3) Determine o ângulo entre os planos $(\alpha): x-\sqrt{2}y+z-1=0$ e $(\beta): x+\sqrt{2}y-z+3=0$.

Resolução:

O ângulo entre dois planos é dado pela fórmula

$\cos(\overrightarrow{n},\overrightarrow{n'}) = \dfrac{|AA'+BB'+CC'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$, onde $\overrightarrow{n}$ e $\overrightarrow{n'}$ são os vectores directores dos planos e $(\overrightarrow{n},\overrightarrow{n'})$ é o ângulo formado entre os planos.

$\cos(\overrightarrow{n},\overrightarrow{n'}) = \frac{|1.1-\sqrt{2}\sqrt{2}+1.(-1)|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{2})^2+(1)^2}\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+(-1)^2}} = \frac{1}{2}$

Resolvedo a equação $\cos(\overrightarrow{n},\overrightarrow{n'}) = \dfrac{1}{2}$, teremos $(\overrightarrow{n},\overrightarrow{n'}) = 60^0$.

4) Ache a distância do ponto $A(3,1,-1)$ ao plano (α) , onde (α) é o plano XOZ.

Resolução:

O plano XOZ é o plano $y=0$.

Usando a equaçãoda distância de um ponto a um plano, teremos:
$d(A_0,(\alpha))=\dfrac{|3.0+1.1+0.(-1)|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}}=1$.

5) Determine a distância entre os planos paralelos:

$(\alpha):2x-3y+6z-12=0$ e $(\beta):4x-6y+12z+21=0$.

Resolução:

Para determinar a distância entre os planos paralelos,primeiro vamos escolher um ponto que pertence ao plano (α) ou (β), e de seguida achamos a distância do ponto a um plano.

Usando este raciocíno teremos:

Seja $P(0,0,2)$ um ponto que pertence ao plano (α), e de seguida, achemos a distância deste ponto ao plano (β).
$d(P,(\beta))=\dfrac{|4.0-6.0+12.2+21|}{\sqrt{4^2+(-6)^{+}(12)^2}}=\dfrac{45}{\sqrt{196}}$

0.10.12 Exercícios Propostos

1) Escreva a equação do plano que passa pelo ponto P e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{n}$, onde:

    (a) $P(-3,4,7)$, $\overrightarrow{n}=(1,-2,6)$;

    (b) $P(1,-2,3)$, $\overrightarrow{n}=(4,2,-1)$;

    (c) $P(1,0,-3)$, $\overrightarrow{n}=(0,2,0)$.

2) Escreva a equação do plano que passa pelo ponto $B(4,5,0)$ e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{AB}$, sendo $A(2,-1,3)$.

3) Determine o vector normal e construa o plano (α) dado por:

    (a) $3x+2y+6z-12=0$;

    (b) $2y+3=0$;

    (c) $3z-4=0$.

4) No triângulo de vértices $P(-5,2,7)$, $Q(5,0,6)$ e $R(0,-1,2)$, traçou-se a mediana PM (M está situado no lado QR).
    Escreva a equação do plano que passa por M e é perpendicular à mediana PM.

5) Escreva a equação do plano mediador (mediatriz) do segmento AB, sendo:

    (a) $A(1,-2,4)$, $B(3,-6,0)$;

    (b) $A(0,1,3)$, $B(2,3,7)$.

6) Escreva a equação do plano que passa pelos pontos $A(1,2,-3)$, $B(4,0,1)$, $C(2,1,1)$.

7) Escreva a equação do plano que passa pelo ponto A e é paralelo a (α):

    (a) $A(0,1,1)$, (α) passa por $B(7,0,0)$ e $D(9,2,0)$;

    (b) $A(1,1,1)$, (α) é o plano XOZ;

    (c) $A(-2,1,4)$ (α) é o plano XOZ.

8) Escreva a equação do plano que passa por dois pontos A e B e é perpendicular ao plano (α):

   (a) $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$, (α) é o plano XOZ;

   (b) $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$, (α) é o plano que passa por $M(1,0,1)$, $N(2,1,1)$ e $P(-1,-1,1)$.

9) Escreva a equação do plano β, que passa pelo ponto A, é paralelo ao vector $\overrightarrow{v}$ e é perpendicular ao plano (α):

   (a) $A(1,2,1)$, $\overrightarrow{v}=(1,2,4)$, $(\alpha): x-y+3=0$;

   (b) $A(2,-1,3)$, $\overrightarrow{v}=(1,0,2)$, $(\alpha): 2x-y+z=0$.

10) Ache os valores de m e n para que os planos α e β sejam paralelos entre si:

   (a) $(\alpha): 2x+my+3z-5=0$ e $(\beta): nx-6y-6z+2=0$;

   (b) $(\alpha): mx+2y+z-1=0$ e $(\beta): 2x+my+nz+1=0$.

11) Ache os valores de m e n para que os planos α e β sejam perpendiculares entre si:

   (a) $(\alpha): mx+2y-3z+1=0$ e $(\beta): nx-6y-6z+2=0$;

   (b) $(\alpha): x+m^2y-z+3=0$ e $(\beta): mx+y+20z+3=0$.

12) Determine o ângulo entre os planos:

   (a) $(\alpha): 3x-z=0$ e $(\beta): 2y+z=0$;

   (b) $(\alpha): x+2y+2z-3=0$ e $(\beta): 16x+12y-15z+4=0$.

13) Ache a distância do ponto A ao plano (α) :

   (a) $A(3,1,-1)$, $(\alpha): 22x+4y-20z-45=0$;

   (b) $a(1,1,1)$, $(\alpha): 4x+3y-12=0$

14) Determine a distância entre os planos paralelos $(\alpha): x-2y-2z-12=0$ e $(\beta): x-2y-2z-6=0$.

15) No eixo OY ache os pontos cuja distância até ao plano $x+2y-2z=2$ seja igual a 4.

16) Escreva as equações dos planos que são paralelos $(\alpha): 2x-2y-z-3=0$ e cuja distância até o plano (α) é igual a 5.

0.11 Unidade 010. Estudo da recta no espaço

Introdução

Nesta unidade, faz-se um estudo da recta no espaço, com uma abordagem em relação às suas equações que os definem, a distância, o ângulo, posição relativa e as condições de paralelismo e perpendicularidade entre duas rectas.
No fim desta unidade, o aluno deve:

- Definir a recta no plano;
- Conhecer e aplicar as equações abaixos em várias situações:
  1) Equação geral da recta;
  2) Equação paramétrica da recta;
  3) Equação canónica da recta;
- Transformar a equação geral da recta em equação paramétrica;
- Determinar o ângulo entre duas rectas;
- Conhecer e indicar a posição relativa entre duas rectas no espaço;
- Conhecer e aplicar a equação da distância dum ponto a uma recta;
- Conhecer e indicar as condições de paralelismo e perpendicularidade entre duas rectas.

0.11.1 Equação geral da recta

Toda recta no espaço é considerada como intersecção de dois planos:

Sejam dados dois planos:

$(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0;$

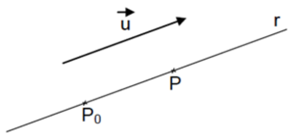
$(\alpha) : A'x + B'y + C'z + D' = 0;$

$$r = (\alpha) \cap (\beta) \;\Rightarrow\; r : \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \qquad (16).$$

Definição 0.11.1. *A equação* (16)*, chama-se equação geral da recta.*

0.11.2 Equação paramétrica da recta

Seja r uma recta que passa pelo ponto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ e é paralelo ao vector $\overrightarrow{v} = (a; b; c)$.



Seja $P(x; y; z)$ um ponto qualquer de r $(P \in r \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \subset r)$.

Como $\overrightarrow{v} \parallel r \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \parallel \overrightarrow{v}$, logo $\exists t \in \mathbb{R}$:

$\overrightarrow{v} = t.\overrightarrow{P_0P}$ ou $t.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_0P}$

Mas $\overrightarrow{P_0P} = (y - y_0; y - y_0; z - z_0)$.

Sendo $\overrightarrow{v} = (a; b; c)$, então teremos:

$$(ta; tb; tc) = (x - x_0; y - y_0; z - z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad (17)$$

Definição 0.11.2. *A equação* (17) *chama-se equação paramétrica da recta.*

0.11.3 Equação cancônica da recta

De (16) e nas condições de que $a \neq 0, b \neq 0$ e $c \neq 0$ vem que:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{a} = t \\ \frac{y-y_0}{b} = t \\ \frac{z-z_0}{c} = t \end{cases} \Rightarrow \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{6} \qquad (18)$$

Definição 0.11.3. *A equação* (18)*, chama-se equação cancônica da recta com vector director* $\overrightarrow{v} = (a; b; c)$

A equação (18), também pode ser escrita na forma:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \\ \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \end{cases}$$

0.11.4 Transformação da equação geral em equação paramétrica

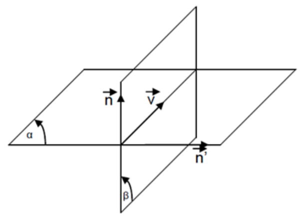
Seja $r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$

Primeiro Passo:

Achar um vector director de r:

$\overrightarrow{n} = (A; B; C)$ e $\overrightarrow{n'} = (A'; B'; C')$.

Seja $\overrightarrow{v} = (a; b; c)$ vector director da recta $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{n}$ e $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{n'}$;



$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n} \times \overrightarrow{n'} = (A; B; C) \times (A'; B'; C') \Leftrightarrow = \overrightarrow{v} \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}$$

Segundo Passo:

Achar um ponto de r.

Escolhe-se um valor para z_0, por exemplo, $z_0 = 0$.

Substitui-se no sistema dado (equação geral da recta) e resolve-se o sistema, onde se obtém o ponto x_0 e y_0. O ponto procurado será $P_0(x_0; y_0; z_0)$.

Exemplo 0.11.1. *Escreva a equação paramétrica e cancônica da recta r.*

$r: \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$

Resolução :

Primeiro Passo:

Achenos o vector director, isto é,

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(3-1) - \overrightarrow{j}(-3+2) + \overrightarrow{k}(1-2) = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}.$$

$\Rightarrow \overrightarrow{v} = (2;1;-1)$.

Segundo Passo:

Seja $z = 0 \Rightarrow P_0(x_0; y_0; z_0)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow P_0(-2;-2;0).$$

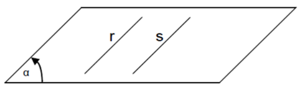
A equação paramétrica da recta será: $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-2+t \\ z=0-t \end{cases}$

A equação cancônica da recta será: $\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-0}{-1}$.

0.11.5 Posição relativa de duas rectas

Duas rectas r e s, no espaço podem ser:

1) Coplanares e paralelas:

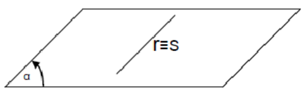


$r \subset (\alpha), s \subset (\alpha), r \cap s = $.

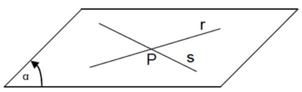
$\overrightarrow{v_1}$ é o vector director de r.

$\overrightarrow{v_2}$ é o vector director de s.

2) Coincidentes: $r \equiv s$.

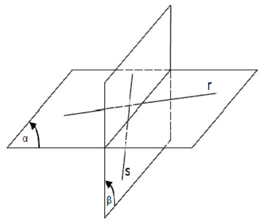


3) Coplanares e concorentes:



$r \subset (\alpha), s \subset (\alpha), r \cap s = \{P\}$.

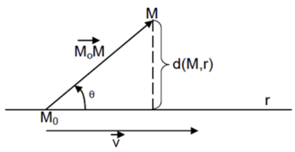
4) Cruzadas:



$r \subset (\alpha) \wedge r \not\subseteq (\beta)$.

$s \subset (\beta) \wedge s \not\subseteq (\alpha)$.

0.11.6 Distância de um ponto á uma recta



$\sin(\theta) = \frac{d(M,r)}{|\overrightarrow{M_0M}|} \Leftrightarrow \frac{d(M,r)}{=}|\overrightarrow{M_0M}|.\sin(\theta) \Leftrightarrow \frac{d(M,r)}{=}|\overrightarrow{M_0M}|.\sin(\theta).\frac{|\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|} = \frac{|\overrightarrow{M_0M}|.|\overrightarrow{v}|\sin(\theta)}{|\overrightarrow{v}|} = \frac{|\overrightarrow{M_0M}|\times|\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|}$.

Exemplo 0.11.2. *Determine a distância de* $M(1;-1;2)$ *á recta* $\begin{cases} -x = t \\ y = 1+2t \\ z = 3t \end{cases}$

Resolução :

$\begin{cases} -x = t \\ y = 1+2t \\ z = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 1+2t \\ z = 3t \end{cases}$

$\overrightarrow{v} = (-1;2;3), M_0(0;1;0)$ e $\overrightarrow{M_0M} = (1;-2;2)$.

$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$.

$\overrightarrow{M_0M} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(-6-10) - \overrightarrow{j}(3+2) + \overrightarrow{k}(2-2) = (-10;-5;0)$.

$|\overrightarrow{M_0M} \times \overrightarrow{v}| = \sqrt{100+25} = 5\sqrt{5}$.

$d(M;r) = \frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|} = \frac{5\sqrt{70}}{14}$.

Nota 0.11.1. *Para achar a distância entre duas rectas paralelas, escolhemos um ponto qualquer que pertecente a uma das rectas e de seguida, aplicamos a fórmula da distância entre um ponto e uma recta para achar a sua distância.*

0.11.7 Distância entre duas rectas reversas

0.11.8 Ângulo entre duas rectas

Sejam:

$r: \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \Rightarrow \overrightarrow{v} = (a; b; c)$;

$s: \frac{x-x_2}{a'} = \frac{y-y_2}{b'} = \frac{z-z_2}{c'} \Rightarrow \overrightarrow{v'} = (a'; b'; c')$;

duas rectas espaços.

O ângulo entre as rectas r e s, será

$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v'}}{|\overrightarrow{v}|.|\overrightarrow{v'}|}$, onde $\theta = (r; s)$ é o ângulo entre as rectas r e s.

Exemplo 0.11.3. *Ache o ângulo entre as rectas*

$r: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z}{1}$ *e* $s: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{-2}$

Resolução:

O ângulo dado entre as rectas será $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v'}}{|\overrightarrow{v}|.|\overrightarrow{v'}|}$, *onde* $\theta = (r; s)$ *ângulo entre as rectas* r *e* s *e* $\overrightarrow{v} = (2, -2, 1)$, $\overrightarrow{v'} = (2, 1, -2)$ *são respectivamente os vectores directores das rectas* r *e* s, *daqui teremos:*

$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v'}}{|\overrightarrow{v}|.|\overrightarrow{v'}|} = \frac{(2,-2,1).(2,1,-2)}{|(2,-2,1)|.|(2,1,-2)|} = \frac{4-2-2}{3.3} = 0$

Resolvendo a equação $\cos(r, s) = 0$, *teremos* $(r, s) = 90^0$.

0.11.9 Condições de paralelismo e perpendicularidade entre duas rectas

Sejam:

$r: \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \Rightarrow \overrightarrow{v} = (a; b; c)$;

$s: \frac{x-x_2}{a'} = \frac{y-y_2}{b'} = \frac{z-z_2}{c'} \Rightarrow \overrightarrow{v'} = (a'; b'; c')$;

1) Condição de Paralelismo:

   $r \parallel s \overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{v'} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$, ou seja $\exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{v} = k.\overrightarrow{v'}$.

2) Condição de perpendicularidade:

   $r \perp s \Rightarrow \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{v'} \Rightarrow aa' + bb' + cc' = 0$.

3) Condição de coplanaridade de duas rectas:

   Seja $P_1(x_1; y_1; z_1) \in r, P_2(x_2; y_2; z_2) \in s$.

r e s são coplanares se e só se os vectores $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$ também forem coplanares ou seja: $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0.$

0.11.10 Exercícios Resolvidos

1) Dados os planos $(\alpha): 2x+y+z=0$ e $(\beta): 4x-5y+1=0$, determine:

(a) A equação da recta r (recta de intersecção dos planos);

(b) A equaçãoparamétrica e canónica da recta r que passa pelo ponto $(1,2,3)$.

Resolução:

(a) A equaçãoda recta da intersecção dos planos (α) e (β) será:
$$r: \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 4x - 5y + 1 = 0 \end{cases}.$$

(b) Para determinar a equação paramétrica e canónica da recta, vamos primeiro determinar o vector director da recta e de seguida, vamos substituir nas formulas da equação da recta canónica e paramétrica que passa por um ponto:

O vector director será: $\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(5) - \vec{j}(-4) + \vec{k}(-10-4) =$
$5\vec{i} + 4\vec{j} - 14\vec{k} = (5,4,-14)$.

Então o vector director é $\vec{v} = (5,4,-14)$.

Usando a fórmula da equação paramétrica e canónica teremos:
$r: \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-1}{-14}$ e
$$r: \begin{cases} x = 1+5t \\ y = 2+4t \\ z = 3-14t \end{cases}$$

2) Escreva a equação da recta s que passa pelo ponto $M(2,0,-3)$ e é paralelo ao vector $\vec{v} = (2,-3,5)$.

Resolução:

Usando a a fórmula da equação da recta que passa por um ponto e é paralelo ao vector (vector director), teremos:
$s: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-0}{-3} = \dfrac{z+3}{5}$.

3) Escreva a equação da recta r que passa pelo ponto $A(2,3,-5)$ e é paralela à recta s :
$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

Resolução:

Neste caso já temos o ponto e falta determinar o vector director. Para determinarmos o vector director da recta usemos a fórmula:

$$\overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(2-6) - \overrightarrow{j}(-6-2) + \overrightarrow{k}(9+1)$$

$= -4\overrightarrow{i} + 8\overrightarrow{j} + 10\overrightarrow{k} = (-4, 8, 10);$

Tendo o ponto e o vector director, então a equação da recta será:

$$r : \frac{x-2}{-4} = \frac{y-3}{8} = \frac{z+5}{10}$$

4) Determine o ângulo entre as rectas:

$$r : \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-1} \quad \text{e} \quad s : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}.$$

Resolução:

O ângulo formado entre oa rectas é dado pela fórmula:

$\cos(r, s) = \dfrac{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v'}}{|\overrightarrow{v}|.|\overrightarrow{v'}|}$ onde $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v'}$ são as normais dos palnos que formam a recta. Daqui teremos,

O vector director da recta r : é $\overrightarrow{v} = (2, 2, -1)$ e da recta s é $\overrightarrow{s} = (2, 2, 2)$. Agora achemos o ângulo, isto é, Substituindo na fórmula teremos:

$\cos(r, s) = \dfrac{(2, 2, -1).(2, 2, 2)}{|(2, 2, -1)|.|(2, 2, 2)|} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, então

$\theta = (r, s) = \arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

5) Determine a distância entre o ponto $A(2, 1, -2)$ e a recta $s : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+2}{0}$.

Resolução:

A distância de um ponto à uma recta será dada pela equação $d(A, s) = \frac{|\overrightarrow{A_0A} \times \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|}$, onde $\overrightarrow{v} = (3, 2, 0)$ é o vector director da recta e $A_0 = (1, 2, -2)$ é um ponto que pertence a recta.

Agora vamos determinar $\overrightarrow{A_0A} = A - A_0 = (2, 1, -2) - (1, 2, -2) = (1, -1, 0)$, de seguida vamos determinar $|\overrightarrow{A_0A} \times \overrightarrow{v}| = \left\| \begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{matrix} \right\| = |5\overrightarrow{k}| = 5.$

Substituindo na fórmula $d(A, s) = \frac{|\overrightarrow{A_0A} \times \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|}$, teremos

$d(A, s) = \dfrac{5\sqrt{13}}{13}$ (que é a distância entre o ponto A e a recta s).

0.11.11 Exercícios Propostos

1) Escreva a equação paramétrica da recta que passa pelo ponto $P(-3,2,4)$ e cujo vector directo é $\overrightarrow{v}=(2,-5,3)$.

2) Escreva a equação da recta de intersecção de dois planos (α) e (β):

   (a) $(\alpha)\ :\ 3x+y-z+1=0$ e (β) : é o plano que passa pelo ponto $A(1,1,1)$ e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{n}=(-2,1,3)$;

   (b) (α) : é o plano que passa pelo eixo OX e pelo ponto $B(4,-3,-1)$ e (β) é o plano que passa pelo ponto $C(3,2,-7)$ e é paralelo ao plano XOZ.

3) Escreva a equação da recta que:

   (a) Passa por $B(2,1,4)$ e é paralelo ao eixo OY;

   (b) Passa por $P(2,1,1)$ e é paralela à recta $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{4}=5-z$;

   (c) Passa por $A(1,2,3)$ e $B(2,1,5)$;

   (d) Passa por $P(2,3,5)$ e é perpendicular ao plano $2x-y+z-1=0$

4) Escreva a equação da recta que passa pelos pontos $P(-4,1,-3)$ e $Q(-5,0,3)$.

5) Sejam dados os vértices do triângulo $A(3,6,-7)$, $B(-5,2,3)$ e $C(4,-7,-2)$. Escreva:

   (a) A equação da mediana partindo de A, do triângulo ABC;

   (b) A equação da linha média que é paralela ao lado BC.

6) Escreva a equação da recta r que passa pelo ponto A e é paralela à recta s, onde:

   (a) $A(0,1,4)$ e $s:\begin{cases}3x-y+2z-7=0\\3x-5y+2z+1=0\end{cases}$;

   (b) $A(1,1,1)$ e $s:\begin{cases}x-2y+3z-4=0\\3x+2y-5z-4=0\end{cases}$.

7) Mostre que as rectas r e s são paralelas:

(a) $r: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = z$ e $s: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 5z - 8 = 0 \end{cases}$;

(b) $r: \begin{cases} x = 5+2t \\ y = 2-t \\ z = -7+t \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$.

8) Ache m para que a recta $r: \begin{cases} 2x + 3y - z + 7 = 0 \\ 3x - 5y + mz - 1 = 0 \end{cases}$ seja perpendicular à recta $s: \begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$.

9) Demonstre que a s rectas r e s se intersectam. Ache o ponto de intersecção:

(a) $r: \begin{cases} x = 2t-3 \\ y = 3t-2 \\ z = -4t+6 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 5+t \\ y = -1-4t \\ z = t-4 \end{cases}$;

(b) $r: \begin{cases} 5x + 3y - 11z + 72 = 0 \\ 4x - 5y + 7z + 26 = 0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x + y + 10 = 0 \\ 6x + 11y - 3z + 66 = 0 \end{cases}$.

10) Determine o ângulo entre as rectas:

(a) $r: x-3 = -(y+2) = \dfrac{z}{\sqrt{2}}$ e $s: x+2 = y-3 = \dfrac{z+5}{\sqrt{2}}$;

(b) $r: \begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0 \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0 \end{cases}$.

11) Escreva a equação da recta que passa pelo ponto $A(-1,2,-3)$ e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{n} = (6,-2,-3)$ e intersecta a recta $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-5}$.

12) Demonstre que $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-3}{4}$ e $s: \begin{cases} x = 3t+7 \\ y = 2t+2 \\ z = 1-2t \end{cases}$.

13) Escreva a equação do plano que passa pelas rectas paralelas $r: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-2}$ e $s: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{-2}$

14) Escreva a equação do plano que passa pelo ponto $M(1,-2,1)$ e é perpendicular à recta $s:\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$.

15) Escreva a equação do plano que passa por dois pontos $A(3,5,1)$ e $B(3,3,3)$ e é paralela à recta $s:\begin{cases} 2x + 2y + z - 1 = 0 \\ 3x + 4y - z + 4 = 0 \end{cases}$

16) Ache a distância do ponto P à recta r:

(a) $P(2,-1,3)$ e $r:\begin{cases} x = 3t \\ y = 5t-7 \\ z = 2t+2 \end{cases}$;

(b) $P(1,-1,2)$ e $r:\begin{cases} 2x + 2y + z - 1 = 0 \\ 3x + 4y - z - 10 = 0 \end{cases}$

17) Dadas as rectas $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-1}{1}$ e $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$, calcular:

(a) a ditância entre as rectas r_1 e r_2.

(b) a recta n, perpendicular comum ás rectas r_1 e r_2.

18) Sendo $r_1:\begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$ e $r_2:\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ z - 10 = 0 \end{cases}$ calcular:

(a) a distância entre as rectas r_1 e r_2.

(b) os pés da normal comum.

(c) a normal comum ás rectas r_1 e r_2.

19) Analise as seguintes rectas, quanto à sua posição relativa:

(a) $r:\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-4}{1}$ e $s:\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{3}$;

(b) $r:\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-8}{2}$ e $s:\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 5z - 8 = 0 \end{cases}$;

(c) $r:\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 3-8t \\ z = 7+4t \end{cases}$ e $s:\begin{cases} x = 2-t \\ y = 5+t \\ z = 7+t \end{cases}$.

Curvas de segunda ordem

0.12 Unidade 011. Curvas e superfícies de segunda ordem

Introdução

Nesta unidade, faz-se um estudo em relação as curvas e superfícies da segunda ordem, concretamente das cônicas e quádricas. Definem-se as cônicas, quádricas bem como as suas classificações através das suas formas quadráticas.
No fim desta unidade, o aluno deve:

- Definir e classificar as cônicas;
- Conhecer e aplicar as formas quadráticas e a canonização das cônicas;
- Achar as formas canónicas das cônicas;
- Definir e classificar as quádricas;
- Conhecer e aplicar as formas quadráticas e a canonização das quádricas;
- Achar as formas canónicas das quádricas.

0.12.1 Cônicas

Definição 0.12.1. *Uma cônica em* $\mathbb{R}^2$ *é um conjunto de pontos cujas cordenadas em relação a base canônica satisfazem a equação :*
$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, *onde* $a_{11\neq 0}$ *ou* $a_{12} \neq 0$ *ou* $a_{22} \neq 0$.

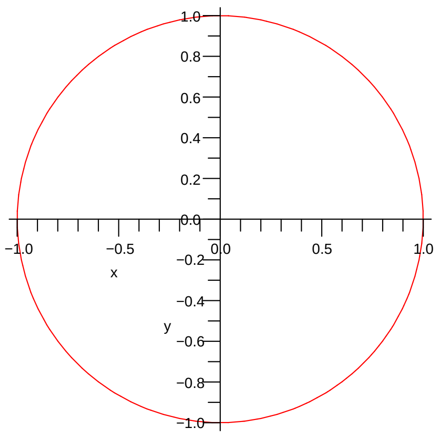
Obseve que a equação da cônica envolve uma forma quadratica,
$Q(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, uma forma linear $L(x, y) = 2a_{13}x + 2a_{23}y$, e um termo constante a_{33}, isto é, a equação que define a cônica é: $Q(x, y) + L(x, y) + F = 0$.

Classificação de cônicas

Circunferência

Definição 0.12.2. *Chama-se circunferência a uma curva dada pela equação :*
$x^2 + y^2 = a^2$.

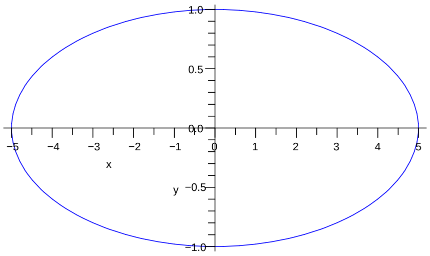
Exemplo 0.12.1.



Elipse

Definição 0.12.3. *Chama-se elipse a uma curva dada pela equação :*
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

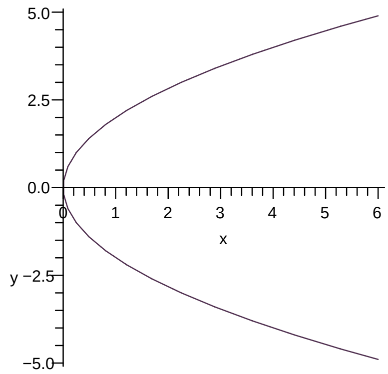
Exemplo 0.12.2.



Parábola

Definição 0.12.4. *Chama-se parábola a uma curva dada pela equação :*
$y^2 - Dx = 0\,,\; D \neq 0\,.$

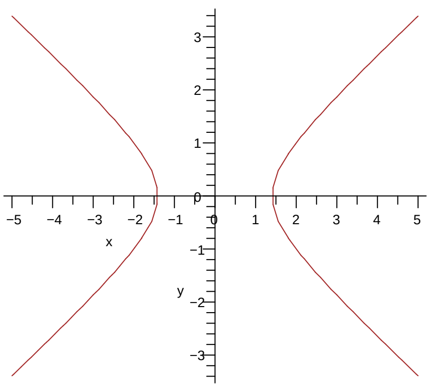
Exemplo 0.12.3.



Hipérbole

Definição 0.12.5. *Chama-se hipérbole a uma curva dada pela equação :*
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,.$

Exemplo 0.12.4.



0.12.2 Formas quadráticas e canonização delas

Definição 0.12.6. *As expressões do tipo*
$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{23}y + a_{33}$ *(1)*
e $f(x,y,z) = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz$ *(2)*
chamam-se formas quadráticas de duas (equação(1)) ou três variáveis (equação (3)) variáveis. As matrizes (simétricas, pois, pela definição $a_{ij} = a_{ji}$*).*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

chamam-se matrizes destas formas quadráticas. Por meio de transformação linear das variáveis novas, não têm produtos destas
$f(x_1,y_1) = \lambda_1(x_1)^2 + \lambda_2(y_1)^2$ *(1')*
$f(x_1,y_1,z_1) = \tau_1(x_1)^2 + \tau_2(y_1)^2 + \tau_3(z_1)^2$ *(2')*
onde λ_1*,* λ_2 *e* τ_1*,* τ_2*,* τ_3 *são autovalores das matrizes* A *e* B *respectivamente. As formas* $(1')$ *e* $(2')$ *chamam-se canónicas.*

Para obter a forma canónica da forma quadrática é necessário:

1) Achar a matriz da forma quadrática;

2) Achar o polinómio característico desta matriz;

3) Achar raízes deste polinómio;

4) Usar as raízes para formular o resultado $(1')$ $(2')$.

Exemplo 0.12.5. *Ache a forma canónica da forma quadrática*
$f(x,y,z) = 3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz$.

Resolução:

1) Achemos a matriz da forma quadrática:
A matriz da forma quadrática será a seguinte:

$$A \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

2) $$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \underline{1acoluna + 2aculana + 3acoluna} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} (3-\lambda)$$

$$\left[\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right]$$
$$= (3-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) - 1 + (3-\lambda) - 1 + 1 - 5 + \lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12).$$

3) Achemos as raízes deste polinómio:
Achemos as raízes deste polinómio
$(3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 6.$

4) Formemos o resultado $f(x_1, y_1, z_1) = \lambda_1(x_1)^2 + \lambda_2(y_1)^2 + \lambda_3(z_1)^2$
Usando as raízes, teremos:
$f(x_1, y_1, z_1) = 3(x_1)^2 + 2(y_1)^2 + 6(z_1)^2.$

0.12.3 Classificação das cônicas através de formas quadráticas

Teorema 0.12.1. *Dada uma cônica definida pela equação* $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$. *Sejam* λ_1 *e* λ_2 *os autovalores associados a forma quadrática, então:*

1) Se $\lambda_1.\lambda_2 > 0$ esta equação representa uma elipse, ou sua degeneração (um ponto ou o vazio).

2) Se $\lambda_1.\lambda_2 > 0$ esta equação representa uma hiperbole ou sua degeneração (par de rectas concorrentes).

3) Se $\lambda_1.\lambda_2 = 0$ esta equação representa uma parabola ou suas degenerações (par de rectas paralelas, uma recta ou vazio).

Podemos afirmar que o determinante associado a forma quadrática $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ é igual ao produto de seus autovalores $\lambda_1.\lambda_2$. Assim o sinal de $\lambda_1.\lambda_2 = 0$ e o mesmo de $-\left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)$, que por sua vez tem o mesmo sinal de $(a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22})$. Podemos assim escrever o teorema anterior em função do descriminante $a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22}$.

Teorema 0.12.2. *Dada a equação :* $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, *esta equação no plano representará:*

1) Uma elipse ou suas degenerações , se $a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} < 0$;

2) Uma parábola ou suas degenerações , se $a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} = 0$;

3) Uma hipérbole, se $a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} > 0$;

Cônicas são equações definidas pelas equações

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (3)$$

ou simplesmente $F(x,y) = 0$. designemos por δ a expressão $a_{11}a_{22} - (a_{12})^2$, isto é, $\delta = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2$. Curvas planares para os quais $\delta \neq 0$ chamam-se *centrais.* A curva definida pela equação (3) é do tipo elíptico se $\delta > 0$ e é do tipo hiperbólico, se $\delta < 0$ e do tipo parabólico se $\delta = 0$.

Para achar as coordenadas do centro $O_1(x_0, y_0)$ duma curva central é necessário resolver o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Seja (x_0, y_0) solução do sistema (4). A equação (3) transforma-se na equação

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + F(x_0, y_0) = 0 \qquad (5)$$

Por meio duma deslocação paralela do sistema das coordenadas. A equação transforma-se a equação canónica da curva dada:

$$\lambda_1(x_1)^2 + \lambda_2(y_1)^2 + F(x_0, y_0) = 0 \qquad (6)$$

Por meio da rotação do sistema das coordenadas em torno do ponto (centro) $O_1(x_0, y_0)$, se λ_1, λ_2 são autovalores da matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Exemplo 0.12.6. *Ache a equação canónica da curva* $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + y = 0$.
Resolução:
Calculemos δ*, isto é,* $\delta = 5.5 - 4.4 = 9 > 0$.
Então a nossa curva é do tipo elíptico. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 5x + 4y - 9 = 0 \\ 4x + 5y - 9 = 0 \end{cases}$$

achamos o centro da curva $O_1(1,1)$. *Calculemos agora*
$F(1,1) = 5.1^2 + 8.1.1 + 5.1^2 - 18.1 - 18.1 + 9 = -9$
Depois da deslocação paralela do sistema das coordenadas da curva terá a equação
$5X^2 + 8XY + 5Y^2 - 9 = 0$
Formemos a equação característica da matriz $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo esta equação teremos:
$(5-\lambda)^2 - 16 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 9$.
Depois da rotação do sistema das coordenadas em torno do ponto $O_1(1,1)$*, obtemos a equação canónica da curva dada:* $\dfrac{(X_1)^2}{9} + \dfrac{(Y_1)^2}{1} = 1$

0.12.4 Quádricas

Definição 0.12.7. *Uma quádrica em* $\mathbb{R}^3$ *e um conjunto de pontos cujas coordenadas em relação a base canônica satisfazem a equação :*
$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ *com* $a_{11} \neq 0$ *ou* $a_{22} \neq 0$ *ou* $a_{33} \neq 0$ *ou* $a_{12} \neq 0$ *ou* $a_{13} \neq 0$ $a_{14} \neq 0$.

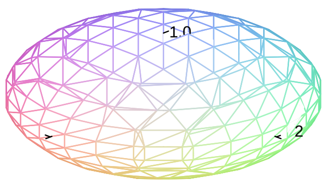
Classificação de quádricas

Elipsóide

Definição 0.12.8. *Chama-se elipsóide a uma superfície dada pela equação :*
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

Observação 0.12.1. *O elipsóide obtém-se pela rotação de uma elipse em torno dos seus eixos coordenados.*

Exemplo 0.12.7.



Hiperbolóide

Hiperbolóide de uma folha

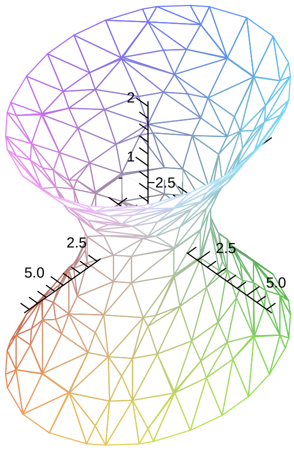
Definição 0.12.9. *Chama-se hiperbolóide de uma folha a superfície curvilínea dada pela equação :*
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

Observação 0.12.2.

1) O hiperbolóide de uma folha obtém-se pela rotação de uma hipérbole em torno do seu eixo imaginário.

2) Esta superfície é simétrica em relação aos planos coordenadas e a origem.

Exemplo 0.12.8.



Hiperbolóide de duas folhas

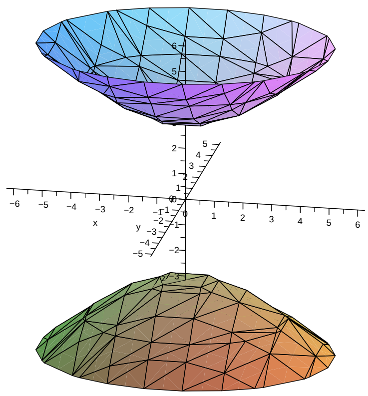
Definição 0.12.10. *Chama-se hiperbolóide de duas folha a superfície curvilínea dada pela equação :*
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1\,;$

Observação 0.12.3.

1) O hiperbolóide de duas folhas obtém-se pela rotação de uma hipérbole em torno do seu eixo real.

2) Esta superfície e simétrica em relação aos planos coordenados e a origem.

Exemplo 0.12.9.



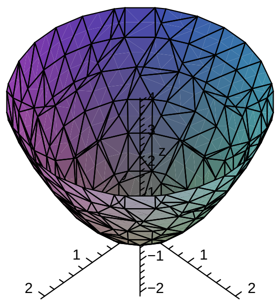
Parabolóide

Parabolóide elíptico

Definição 0.12.11. *Chama-se Parabolóide Elíptico a superfície curvilínea dada pela equação :*
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = pz\,,\; p \neq 0\,,\; p > 0$

Observação 0.12.4. *Esta superfície obtém-se pela rotação duma parábola em torno do seu eixo de simetria.*

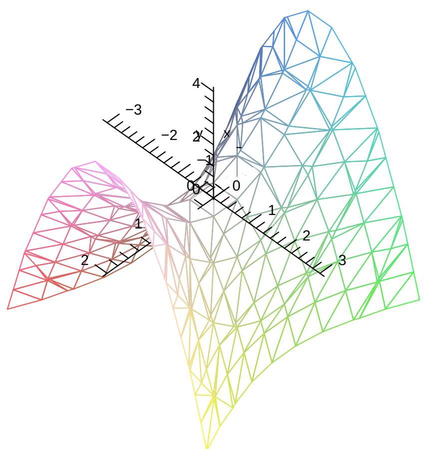
Exemplo 0.12.10.



Parabolóide hiperbólico

Definição 0.12.12. *Chama-se Parabolóide Hiperbólico a superfície curvilínea dada pela equação:*
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = pz\,,\; p \neq 0\,,\; p > 0$

Exemplo 0.12.11.



subsubsectionElipsóide

Definição 0.12.13. *Chama-se elipsóide a uma superfície dada pela equação :*
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

Observação 0.12.5. *O elipsóide obtém-se pela rotação de uma elipse em torno dos seus eixos coordenados.*

Exemplo 0.12.12.

Classificação das quádricas através das formas qudráticas

A equação

$$a_{11}x^2 + a_22y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (7)$$

Equação (7) é superfície de segunda ordem ou simplesmente $F(x, y, z) = 0$. Designemos por δ o determinante

$\delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ Superfícies de segunda ordem para as quais $\delta \neq 0$ chamam-se centrais.

Para achar as cordenadas do centro $O(x_0, y_0, z_0)$ da superfície central é necessário resolver o sistema (2).

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Seja (x_0, y_0, z_0) solução do sistema (8). A equação transforma-se em equação

$$a_{11}x^2 + a_22y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Por meio da deslocação paralela do sistema das coordenadas. A última equação transforma-se em equação canónica da curva:

$$\lambda_1(x_1)^2 + \lambda_2(y_1)^2 + \lambda_3(z)^2 + F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Por meio da rotação do sistema das coordenadas em torno do ponto (centro) $O_1(x_0, y_0, z_0)$, se λ_1, λ_2, λ_3 sejam autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Exemplo 0.12.13. *Ache a equação canónica da superfície*
$3x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 2x - 8y - 13 = 0\,.$

Resolução:

Vamos resolver o sistema :
$$\begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0 \\ 2x + 2y + 2z - 4 = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$
achemos o centro da superfície O_1. *Para acharmos o centro da superfície, vamos resolver o sistema acima, onde teremos* $x = 1\,,\ y = -1$ *e* $z = 2$. *Então o centro da superfície será* $O_1(1, -1, 2)$. *Agora calculemo* $F(1, -1, 2)$, *isto é,*
$F(1, -1, 2) = 3.(1)^2 + 2(-1)^2 + 2^2 + 4.1.(-1) + 4(-1).2 - 2 + 8 - 13 = -10$
Depois da deslocação paralela do sistema das coordenadas a superfície terá a seguinte equação:
$3x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10 = 0$
Formemos a equação característica da matriz:
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow\ = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0$$
Então $\lambda_1 = -1\,,\ \lambda_2 = 2\,,\ \lambda_3 = 5$
Depois da rotação do sistema das coordenadas em torno do ponto,obtemos a equaçãocanónica da superfície dada:
$-1(x_1)^2 + 2(y_1)^2 + 5(z_1)^2 - 10 = 0 \ \Leftrightarrow -\frac{(x_1)^2}{10} + \frac{(y_1)^2}{5} + \frac{(z_1)^2}{2} = 1$

0.12.5 Exercícios Resolvidos

1) Classifique as cônicas:

(a) $2x^2 - 5y^2 - 7 = 0$.

Resolução :

$2x^2 - 5y^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5y2 = 7 \Leftrightarrow \dfrac{2}{7} - \dfrac{5}{7} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{7}{2}} - \dfrac{y^2}{\frac{7}{5}} = 1 \Leftrightarrow$
$\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^2} = 1$.
A cônica dada é uma hipérbole.

(b) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$.

Resolução :

$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 2$

Fazendo $x_1 = x - 3$ e $y_1 = y - 1$, teremos $x_1^2 + y_1^2 = 2$.

A cônica dada é uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ e centro $(3;1)$.

(c) $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$.

Resolução:

Calculemos δ, isto é, $\delta = 7.(-23) - 8.8 = -225 < 0$; Então a curva é do tipo hiperbólico.

Vamos resolver o sistema:
$$\begin{cases} 7x + 8y - 7 = 0 \\ 8x - 23y - 8 = 0 \end{cases}$$
Resolvendo a equação teremos $x = 1$ e $y = 0$;

Então o centro seá $O(1,0)$;

Agora vamos calcular $F(1,0)$, isto é, $F(0,1) = 7.1^2 + 16.0.1 - 23.0^2 - 14.1 - 16.0 - 218 = -225$;

Depois da deslocação paralela do sistema das coordenadas, a curva terá a equação: $7X^2 + 16XY - 23Y^2 - 225 = 0$;

Agora formemos a equação característica da matriz $\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 8 & -23 \end{bmatrix}$, isto é,

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 8 \\ 8 & 23-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+25)(\lambda-9) = 0$$

Resolvendo esta equação , teremos:

$\lambda_1 = -25$ e $\lambda_2 = 9$.

Por meio duma deslocação paralela do sistema das coordenadas. A equação transforma-se em $-25X_1^2 + 9Y_1^2 = 225 \Leftrightarrow -\frac{X_1^2}{9} + \frac{Y_1^2}{25} = 1$;

A curva obtida é uma hipérbole.

2) Determine o tipo de superfície e ache as equações canónicas:

(a) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 81$

Resolução :

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$

Resolvendo o sistema teremos $x = y = z = 0$, então o centro da superfície será $O(0,0,0)$.

Agora, calculemos $F(0,0,0)$, isto é, $F(0,0,0) = 2.0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 2.0.0 + 2.0.0 + 2.0.0 - 81 = -81 \Rightarrow F(0,0,0) = -81$.

A superfície terá a seguinte equação:

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 81$.

Formemos a equação característica da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, isto é,

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(-\lambda^2 + 5\lambda - 4) = 0$$

Então $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$.

Depois da rotação do sistema das coordenadas em torno do ponto, obtemos a equação canónica da superfície dada :

$X_1^2 + Y_1^2 + 4Z_1^2 = 81$ A superfície obtida é um elipsóide.

(b) $-x^2 + 2yz + z - y = 100$.

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} -x & + & 0y & + & 0z & & & = & 0 \\ 0x & + & 0y & + & z & - \frac{1}{2} & = & 0 \\ 0x & + & y & + & 0z & + & \frac{1}{2} & = & 0 \end{cases}$

Resolvendo o sistema teremos $x = 0\,,\ y = -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}$, então o centro da superfície será $O\left(0, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Agora, calculemos $F\left(0, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, isto é, $F\left(0, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = 0^2 + 2\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2}\right) + \left(-\dfrac{1}{2}\right) - 100 = -\dfrac{199}{2} \Rightarrow F(0,0,0) = -\frac{199}{2}$.

A superfície terá a seguinte equação:

$-x^2 + 2yz = -\dfrac{199}{2}$.

Formemos a equação característica da matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, isto é,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = 0$$

Então $\lambda_1 = -1\,,\ \lambda_{23} = 1\,.$

Depois da rotação do sistema das coordenadas em torno do ponto, obtemos a equação canónica da superfície dada :

$-X_1^2 + Y_1^2 + 4Z_1^2 = \dfrac{199}{2} \ \Leftrightarrow\ -\dfrac{X_1^2}{\frac{199}{2}} + \dfrac{Y_1^2}{\frac{199}{2}} + \dfrac{Z_1^2}{\frac{199}{2}} = 1$ A superfície obtida é um hiperbóloide de uma folha.

0.12.6 Exercícios Propostos

1) Ache a equação canónica e classifique as cónicas dadas pelas equações :

   (a) $f(x, y) = 27x^2 - 10xy + 3y^2$;

   (b) $f(x, y) = 2x^2 + 8xy + 8y^2$;

   (c) $f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz$;

   (d) $f(x, y, z) = x^2 - 2xy + y^2 - z^2$.

2) Classifique as cônicas dadas pelas curvas:

   (a) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - \sqrt{2}x = 0$

   (b) $4x^2 + 4xy + y^2 = 0$

   (c) $xy + x + y = 0$

   (d) $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$.

   (e) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$

   (f) $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$.

   (g) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 225 = 0$.

3) Determine o tipo de superfície:

   (a) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = z$;

   (b) $x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$;

   (c) $x^2 + y + z^2 = 0$;

   (d) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$;

   (e) $x^2 - y^2 + z = 1$

4) Ache o tipo de superfícies e ache as equações canónicas respectivas:

   (a) $-5y2 + 2xy - 8xy - 8xz + 2yz = 0$;

   (b) $y^2 + 2z^2 + 2\sqrt{3}yz = 0$;

   (c) $9x^2 + 16y^2 + 25z^2 + 24xy - 40x + 30y = 0$.

   (d) $x^2 + z^2 - 4z + 4x + 4 = 0$;

   (e) $4x^2 + y^2 - z^2 - 24x - 4y + 3z + 35 = 0$;

   (f) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2z = 0$.

Bibliografia

[1] Boldrini, Jose Luiz ... [et al.], Álgebra Linear- 3.ed- São Paulo: Harper and Row do brasil, 1980

[2] Lipschutz, seymour, Álgebra Linear- 2. ed- são Paulo: Mcgraw-Hill do Brasil, 1972

[3] Spiegel, M.S Análise Vectorial, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill, São Paulo-Brasil, 1959

[4] Efimov, N., Elementos de Geometria Analítica, Editora Mir., 1972

[5] Reyes, Alfredo González, Álgebra Linear e Introdução
Ànalise Vectorial, UEM, Maputo-Moçambique-1988

[6] Cabral, Isabel, Álgebra Linear- Teoria, Exercícios Resolvidos e Exercícios Propostos Com Soluções , Escolar Editora, 2009

[7] Poole, David, Álgrbra Linear, São Paulo-Brasil

[8] T. Taguirov...[et al.]. Exercícios e Problemas de Álgebra Linear e Geometria Analítica, Núcleo Editorial da UEM, Maputo-Moçambique, 1985