3. 设随机变量的联合概率密度，求条件均值

求**条件期望**需要先求**条件概率密度函数**，先求**边缘概率密度函数**（由**联合概率密度函数**求积分得到）。

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{XY}(x,y)dx$$
$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$
$$f_{X|Y}(x|y=y_0)=\left.\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}\right|_{y=y_0}$$
$$E(X|Y=y_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X|Y}(x|y)dx$$

4. 设随机过程`X(t)`的以为概率密度及其均值和方差

设**随机过程**`X(t) = b + Nt`，b为常量，N为正态随机变量，均值为吗，方差为\sigma^2。t是时间变量，N是正态随机变量，所以X(t)也是正态随机过程。要确定其**一维概率密度函数**，首先需要确定**正态随机过程**的**均值函数**和**方差函数。**

随机过程均值函数

$$\begin{aligned}m_X(t)&=E(X(t))\\&=E(b+Nt)\\&=b+tE(N)\\&=b+mt\end{aligned}$$

随机过程方差函数

$$\begin{aligned}\sigma_X^2&=D(X(t))\\&=D(b+Nt)\\&=t^2D(N)\\&=t^2\sigma^2\end{aligned}$$

由正态随机过程的一维概率密度函数得

$$f_X(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}exp\left\{-\frac{[x-m_X(t)^2)]}{2\sigma_X^2}\right\}$$

5. 随机过程的二维密度函数

随机过程`X(t)`的**自相关函数**

$$\begin{aligned}R_X(t_1,t_2)&=E(X(t_1)X(t_2))\\&=E(A\cos\omega_0t_1+B\sin\omega_0t_1)(A\cos\omega_0t_2+B\sin\omega_0t_2)\\&=\sigma^2\cos\omega_0(t_1-t_2)\end{aligned}$$

当定义`\tau = t_1 - t_2`且`t_1 \neq t_2` 则有

$$R_X(\tau)=\sigma^2\cos\omega_0\tau$$

由于本随机过程的均值函数是**常数**，自相关函数只与**时间间隔**有关，所以X(t)是**平稳随机过程。**

自协方差

$$K_X(\tau)=R_X(\tau)-m_X^2(\tau)$$

因此X(t)也是平稳随机过程的**二维协方差矩阵**，对角线元素为0，非对角线为\tau和-\tau

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_X(0) & K_X(\tau) \\ K_X(-\tau) & K_X(0) \end{bmatrix}$$

求**逆矩阵**，先求矩阵的值，再根据公式

$$|\mathbf{K}| =$$

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{K}|}\mathbf{K}$$

令`\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T`，则**二维概率密度函数**为

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi|\mathbf{K}|^{\frac{1}{2}}} exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{K}^{-1}\mathbf{x}\right\}$$

6. 证明

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E(X(t_1)X(t_2)) \\ &\leq E\left(\frac{X^2(t_1)+X^2(t_2)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}E(X^2(t_1)+X^2(t_2)) \\ &= \frac{1}{2}E(X^2(t_1)) + \frac{1}{2}E(X^2(t_2)) \\ &= \frac{1}{2}R_X(0) + \frac{1}{2}R_X(0) \\ &= R_X(0) \end{aligned}$$

自相关函数的定义,\tau为时间间隔

$$R_X(\tau) = E(X(t)X(t+\tau))$$
$$当\tau = 0时$$
$$R_(0) = E(X(t)X(t+0)) = E(X^2(t))。$$

7. 协方差

设`Y(t) = X(t) + \phi(t)`

$$m_Y(t) = m_X(t) + \phi(t)$$

协方差函数

$$\begin{aligned} C_X(t_1,t_2) &= E[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)] \\ &= E(X(t_1)X(t_2)) - m_X(t_1)m_X(t_2) \\ &= R_X(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) \end{aligned}$$

9. 频谱法公式

功率谱密度为N_0/2的高斯白噪声通过RC电路线性系统，且线性系统的传递函数为

$$H(\omega) = \frac{1}{1+3j\omega}$$

输出Y(t)的自相关函数是什么。由题得高斯白噪声得功率谱密度为G_X(\omega) = N_0/2,由随机过程通过线性系统得频谱法公式可得

$$
\begin{aligned}
G_Y(\omega) &= |H(\omega)|^2 G_X(\omega) \\
&= \frac{N_0}{2}\frac{1}{1+9\omega^2}
\end{aligned}
$$

由维纳-辛钦定理可知，功率谱密度函数和其自相关函数是一对傅里叶变换对

$$
\begin{aligned}
R_Y(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_Y(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega \\
&= \frac{N_0}{12}e^{\frac{1}{3}|\tau|}
\end{aligned}
$$

或根据傅里叶变换对得关系进行如下变换

$$
\begin{aligned}
G_Y(\omega) &= \frac{N_0}{2}\frac{1}{1+9\omega^2} \\
&= \frac{N_0}{12}\frac{2\frac{1}{3}}{(\frac{1}{3})^2+\omega^2}
\end{aligned}
$$

根据傅里叶变换表也可直接得到

$$
R_Y(\tau) = \frac{N_0}{12}e^{-\frac{1}{3}|\tau|}
$$

$$
\begin{aligned}
G_X(\omega) &\to R_X(\tau) \\
2\pi\delta(\omega) &\to 1 \\
1 &\to \delta\tau \\
\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} &\to e^{-\alpha|\tau|}
\end{aligned}
$$

典型随机过程相关函数和功率谱

$$
\begin{aligned}
G_X(\omega) &\to R_X(\tau) \\
2\pi\delta(\omega) &\to 1 \\
1 &\to \delta\tau \\
\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} &\to e^{-\alpha|\tau|}
\end{aligned}
$$

11. 设两个随机变量`X_1`，`X_2`，求和与差的概率密度

$$
f_Y(y) = f_X(x)|J|_{x=g^{-1}(y)},(J=\frac{dx}{dy})
$$

二维随机变量之间的关系

$$
\begin{gathered}
f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1X_2}(x_1,x_2)|\mathbf{J}| \\
\mathbf{J} = \frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} \\
\text{设}Y_1 = X_1+X_2\text{，}Y_2 = X_1-X_2 \\
x_1 = (y_1+y_2)/2 \\
x_2 = (y_1-y_2)/2 \\
\text{令}u = (y_1+y_2)/2
\end{gathered}
$$

两个随机变量之和的概率密度等于两个随机变量的概率密度的**卷积**

$$
f_{Y_1}(y_1) = (f_{X_1} * f_{X_2})(y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1X_2}(u, y_1-u)du
$$

12. 判断是否联合平稳

互协方差函数的计算公式（不是定义式）

$$K_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1,t_2)-m_X m_Y$$

13. 已知功率谱密度求其自相关函数

输入为X(t)是自相关函数为N_0/2 \delta(\tau) 的白噪声，经过RC电路线性系统，其系统传递函数为H(\omega) = \alpha / (\alpha+j\omega)，其中\alpha = 1 / RC, 求解输出的自相关函数、输出的平均功率、输入输出互相关函数、相关系数以及等效通能带。

根据**维纳-辛钦定理**，**功率谱密度**与自相关函数是一对**傅里叶变换**。

$$\begin{aligned}G_X(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N_0}{2}\delta(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\\&=\frac{N_0}{2}\end{aligned}$$

应用频谱法

$$G_Y(\omega)=|H(\omega)|^2G_X(\omega)$$

17. 判断随机过程的平稳性

设两个随机过程，其中Y为随机变量

$$X_1(t)=Y,X_2(t)=tY$$

判断平稳性，首先求出随机过程的**均值函数**和**自相关函数**。