

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Table des matières

1. Fonctions négligeables et équivalentes.....	1
1.1. Négligeable.....	2
1.2. Équivalence.....	3
2. Dérivées successives et formules de TAYLOR.....	5
2.1. Formules de TAYLOR.....	6
2.2. Fonctions usuelles.....	8
3. Développement limité à l'ordre n d'une fonction de classe C^n	8
3.1. Développements limités.....	8
3.2. Développements limités et primitives.....	11
3.3. Développement limités usuels.....	13
4. Calculs avec les développements limités.....	15
4.1. Règles de calcul des développements limités.....	15
4.2. Développement limité d'une fonction composée.....	18
5. Applications.....	21
5.1. Calculs de limites.....	21
5.2. Courbes paramétrées.....	23

1. FONCTIONS NÉGLIGEABLES ET ÉQUIVALENTES

On considère des fonctions f, g de V dans \mathbf{R} où V est un voisinage épointé dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. C'est-à-dire que V est de la forme $U - \{a\}$ où U est un voisinage de a dans $\overline{\mathbf{R}}$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

- si $a = \infty$ alors $V \supset \{k, \infty\}$;
- si $a \in \mathbf{R}$ alors $V \supset]k, a[\cup]a, l[$ avec $k < a < l$ et $k, l \in \mathbf{R}$.

f, g sont définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

1.1. Négligeable

DÉFINITION 1.1.0.1. —

On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a s'il existe un voisinage V tel qu'il existe une fonction $\varepsilon : V \rightarrow \mathbf{R}$ telle que :

- $f = \varepsilon \cdot g$;
- $\lim_a \varepsilon = 0$.

On note $f \underset{(a)}{=} o(g)$.

Remarque. — On note :

$$\varepsilon f : \begin{cases} V \rightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \varepsilon(t)f(t) \end{cases}.$$

Exemples. — Par exemple :

1. Si $g = 1$ alors $f = o(1)$ si, et seulement si, $\lim_a f = 0$.
2. Si $f = 0$ au voisinage de a alors pour toute fonction $g : f = o(g)$.
3. Si f est bornée et $\lim_a(g) = \infty$ alors $f = o(g)$ (on prend alors $\varepsilon = f/g$).
4. On a $x^m \underset{(\infty)}{=} o(x^n)$ si, et seulement si, $m < n$.
5. Pour tous $\alpha, \beta > 0$:

$$\begin{cases} x^\alpha \underset{\infty}{=} o(e^{\beta x}) \\ (\ln x)^\alpha \underset{(\infty)}{=} o(x^\beta) \end{cases},$$

car $\lim_{\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$.

PROPOSITION 1.1.0.1. —

Si f/g est définie dans un voisinage de a , alors :

$$f \underset{(a)}{=} o(g) \iff \lim_a (f/g) = 0.$$

DÉMONSTRATION 1.1.0.1. —

On prend $\varepsilon = f/g$.

Remarque. — Il peut arriver que f/g n'est pas défini dans aucun voisinage de a .

Exemples. — Contre-exemples :

1. Avec $g(t) = \sin(1/[t-a])$, pour tout voisinage de V de a , $g(t)$ s'annule en un point de V .
2. Même si le quotient n'est pas défini : $t \underset{(0)}{=} o(\sin(1/t))$.

PROPOSITION 1.1.0.2. —

On a au voisinage de a :

1. la propriété o est transitive ;
2. la propriété o est compatible avec la multiplication, i.e. : si $f = o(g)$ alors $fh = o(gh)$;
3. si $f = o(g)$ et si $h = o(k)$ alors $fh = o(gk)$.

DÉMONSTRATION 1.1.0.2. —

Dans l'ordre :

1. Pour $f = \varepsilon_1 g$ et $g = \varepsilon_2 h$ avec $\lim_a \varepsilon_i = 0$ alors : $f = \varepsilon_1 \varepsilon_2 h$ et $\lim_a \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0$.
2. Si $f = \varepsilon g$, $\lim_a \varepsilon = 0$, alors $fh = \varepsilon gh$.
3. De même.

Contre-exemple. — o n'est pas compatible avec l'addition. Par exemple : $x \underset{(\infty)}{=} o(x^3)$ et $x^2 \underset{(\infty)}{=} o(-x^3)$ n'entraîne pas $x + x^2 \underset{(\infty)}{=} o(0)$.

1.2. Équivalence

DÉFINITION 1.2.0.2. —

On dit que f est *équivalence* à g au voisinage de a si : $f - g \underset{(a)}{=} o(g)$. On note $f \underset{(a)}{\sim} g$.

PROPOSITION 1.2.0.3. —

Si f/g est définie dans un voisinage de a alors :

$$f \underset{(a)}{\sim} g \iff \lim_a f/g = 1.$$

PROPOSITION 1.2.0.4. —

$\underset{(a)}{\sim}$ est une relation d'équivalence.

DÉMONSTRATION 1.2.0.3. —

Par définition :

1. elle est réflexive : $f \underset{(a)}{\sim} f$ puisque $0 \underset{(a)}{=} o(f)$;
2. elle est symétrique si $f \underset{(a)}{\sim} g$ alors il existe ε telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ et $f = (1 + \varepsilon)g$,
or $1/(1 + \varepsilon)$ est aussi définie au voisinage de a et puisque $g = (1/[1 + \varepsilon])f$ on a

$$g = (1 + (1/[1 + \varepsilon] - 1))f$$

or en posant $\varepsilon' = [1 + \varepsilon] - 1$ on a $\lim_a \varepsilon' = 0$;

3. elle est transitive : $f \underset{(a)}{\sim} g$ et $g \underset{(a)}{\sim} h$ implique qu'il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ telles que $f = (1 + \varepsilon_1)g$, $g = (1 + \varepsilon_2)h$ et donc $f = (1 + \varepsilon)h$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$ et $\lim_a \varepsilon = 0$.

PROPOSITION 1.2.0.5. —

Si $f \underset{(a)}{\sim} g$ et si $\lim_a f$ existe alors $\lim_a g$ existe et $\lim_a g = \lim_a f$.

DÉMONSTRATION 1.2.0.4. —

Soit ε telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ alors puisque $f = (1 + \varepsilon)g$ on a

$$\lim_a f = \lim_a (1 + \varepsilon)g = \lim_a g.$$

PROPOSITION 1.2.0.6. —

Le produit et le quotient (quand il est défini) d'équivalences est une équivalence.

Une puissance entière d'équivalences est une équivalence.

DÉMONSTRATION 1.2.0.5. —

Si $f = (1 + \varepsilon_1)g$ et $h = (1 + \varepsilon_2)k$ alors $fh = (1 + \varepsilon)gk$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$.

PROPOSITION 1.2.0.7. —

Si $f \underset{(a)}{\sim} g$ et si $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\lim_b \varphi = a$, $b \in I$. Alors

$$f \circ \varphi \underset{(a)}{\sim} g \circ \varphi.$$

DÉMONSTRATION 1.2.0.6. —

Si $f = (1 + \varepsilon)g$ avec $\lim_a \varepsilon = 0$. Alors

$$f \circ \varphi = (1 + \varepsilon') \cdot g \circ \varphi$$

avec $\varepsilon' = \varepsilon \circ \varphi$ et $\lim_a \varepsilon' = 0$.

PROPOSITION 1.2.0.8. —

On a :

1. Si f est dérivable en a alors si $f'(a) \neq 0$ on a $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a)$.
2. Si g est continue dans un voisinage épointé de a , alors si $f \underset{(a)}{\sim} g > 0$ alors

$$\int_a^x f(t) dt \underset{(a)}{\sim} \int_a^x g(t) dt.$$

DÉMONSTRATION 1.2.0.7. —

Dans l'ordre :

1. Si f est dérivable en a alors :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{(a)}{\sim} f'(a)$$

puisque si $\lim_a g = b \in \mathbf{R}^*$ alors $g \underset{(a)}{\sim} b$.

2. On sait que $f - g \underset{(a)}{=} o(g)$ et on veut :

$$\int_x^a (f - g)(t) dt \underset{(a)}{=} o\left(\int_x^a g(t) dt\right).$$

En posant $h = f - g$ on se ramène au problème :

$$h = o(g) \implies \int_a^x h = o \int_a^x g.$$

Si $h = \varepsilon g$ et $\lim_a \varepsilon = 0$ alors

$$\int_a^x g = \int_a^x \varepsilon g$$

Or

$$\frac{|\int_a^x \varepsilon g|}{\int_a^x g} \leq \max_{[a,x]} |\varepsilon| \frac{\int_a^x g}{\int_a^x g} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

Donc

$$\frac{|\int_a^x \varepsilon g = h|}{|\int_a^x g|} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

2. DÉRIVÉES SUCCESSIVES ET FORMULES DE TAYLOR

Soit $p \geq 0$ un entier.

DÉFINITION 2.0.0.3. —

Soit I un intervalle de \mathbf{R} et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$.

1. $f \in C^0$ si f est continue ;
2. $f \in C^p$ ($p \geq 1$) si f est dérivable et $f' \in C^{p-1}$.

Remarque. — Si $f \in C^p$ alors les p -ièmes dérivées successives et f sont toutes continues sur I . $f \in C^\infty$ si $f^{(p)}$ existe et est continue pour tout $p \geq 1$.

PROPOSITION 2.0.0.9. —

Si $f, g \in C^p$ alors $f + g$, fg , f/g et $f \circ g$ (si définie) sont C^p .

DÉMONSTRATION 2.0.0.8. —

Dans l'ordre :

1. $(f + g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$ par récurrence sur p ;

2. $(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}$;
3. par récurrence sur p pour $(f \circ g)^{(p)}$ en utilisant : $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.

Rappels sur les primitives. — Si $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est de classe C^1 avec $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert. Alors si f' est continue $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$.

2.1. Formules de Taylor

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert.

THÉORÈME 2.1.0.1 (Formule de TAYLOR avec reste intégral)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^k . Alors pour tous $a, b \in I$ on a :

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

DÉMONSTRATION 2.1.0.9. —

Par récurrence sur n , on note

$$(T_n) : f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

Supposons que (T_k) soit vraie pour tout $k < n$. Alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{(b-t)^k}{k!}, \\ v(t) &= f^{(k)}(t), \\ R_k &= \int_a^b \frac{(b-s)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(s) ds, \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} R_k &= \int_a^b u'(s)v(s) ds \\ R_k &= [u(s)v(s)]_a^b - \int_a^b u(s)v'(s) ds \\ R_k &= u(b)v(b) - u(a)v(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s) ds \\ R_k &= \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s) ds \end{aligned}$$

On applique (T_{n-1}) :

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_{n-1}$$

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n$$

donc (T_n) vraie.

THÉORÈME 2.1.0.2 (Formule de TAYLOR avec reste en $f^{(n+1)}(\theta)$)

Soit $n > 0$, $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^{n+1} . Pour tous $a, b \in I$ avec $a \neq b$, il existe θ strictement compris en a et b tel que :

$$f(b) = \sum_{i=0}^n \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta).$$

DÉMONSTRATION 2.1.0.10. —

On pose A telle que

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot A = \int_a^b \frac{(b-s)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(s) \, ds - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Soit $F : I \rightarrow \mathbf{R}$ telle que :

$$F(x) = \int_x^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) \, dt - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A.$$

On calcule $F'(x)$:

$$F'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} A$$

$$F'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} (A - f^{(n+1)}(x)).$$

F est dérivable donc continue sur I :

$$F(a) = \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) \, dt - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A = 0,$$

$$F(b) = 0.$$

Par le théorème de ROLLE, il existe θ strictement entre a et b tel que $F'(\theta) = 0$.

C'est-à-dire :

$$\frac{(b-\theta)^n}{n!} (A - f^{(n+1)}(\theta)) = 0$$

$$A = f^{(n+1)}(\theta).$$

On en déduit :

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta) = \int_a^b \frac{(b-s)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(s) \, ds - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

■ On a alors le résultat en remplaçant dans (T_n) .

Remarque. — Si $|f^{(n+1)}(s)| \leq M$ pour tout $s \in I$ alors

$$\left| f(b) - \sum_{i=0}^n \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2.2. Fonctions usuelles

PROPOSITION 2.2.0.10 (Exponentielle). —

Soit $n \in \mathbf{N}$, on regarde le développement de TAYLOR en 0 à l'ordre $n+1$, $\forall i, \exp^{(i)}(0) = 1$. On prend $b = x, a = 0$:

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(\theta)$$

$$\theta \in]0, x[.$$

PROPOSITION 2.2.0.11 (Cosinus, sinus). —

La dérivée n -ième de $\cos(t)$ est $\cos(t + n\pi/2)$.

$$\left| \cos(x) - \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

car $|\cos \theta| \leq 1$.

3. DÉVELOPPEMENT LIMITÉ À L'ORDRE N D'UNE FONCTION DE CLASSE C^N

3.1. Développements limités

DÉFINITION 3.1.0.4. —

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert tel que $0 \in I, n \in \mathbf{N}$. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ admet un *développement limité* à l'ordre n en 0 si, et seulement s'il existe un polynôme P de degré n à coefficients réels tel que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^n} = 0.$$

Notons

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - P(x)}{x^n}$$

alors

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x) \text{ (18)}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0. \end{cases}$$

DÉFINITION 3.1.0.5. —

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert et soit $n \in \mathbf{N}$. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ admet un *développement limité* à l'ordre n en a si, et seulement si, la fonction $t \mapsto f(t+a)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. C'est-à-dire si, et seulement s'il existe un polynôme de degré n , P à coefficients réels tel que :

$$f(x) = P(x - a) + o((x - a)^n)$$

au voisinage de a .

THÉORÈME 3.1.0.3. —

Si f admet un développement limité à l'ordre n en un point a , alors ce développement limité est unique.

DÉMONSTRATION 3.1.0.11. —

On peut supposer $a = 0$. Supposons que

$$f(x) = P_1(x) + x^n \varepsilon_1(x) = P_2(x) + x^n \varepsilon_2(x)$$

où $\lim_0 \varepsilon_i = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. On a que

$$(P_1 - P_2)(x) = x^n (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x)$$

et $(P_1 - P_2)(x)$ est de la forme $r_0 + r_1 x + \dots + r_n x^n$ avec $r_0, r_1, \dots, r_n \in \mathbf{R}$.

On montre par récurrence que les r_k sont tous nuls. Quand $x \rightarrow 0$ on trouve :

$$r_0 = 0$$

et donc

$$r_1 x + \dots + r_n x^n = x^n (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x).$$

Supposons que $r_0 = r_1 = \dots = r_{k-1} = 0$, $k > 0$. Alors

$$r_k x^k + \dots + r_n x^n = x^n (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x),$$

$$r_k + r_{k+1} x + \dots + r_n x^{n-k} = x^{n-k} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x),$$

$n - k \geq 0$ et donc $r_k = 0$ en passant à la limite.

COROLLAIRE 3.1.0.1. —

Soit $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$ le développement limité d'une fonction f à l'ordre n en 0. Alors :

1. si f est paire alors P est pair ;
2. si f est impaire alors P est impaire.

1§. C'est-à-dire, $f(x) - P(x) = o(x^n)$.

DÉMONSTRATION 3.1.0.12. —

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x) + x^n \varepsilon(x), \\ f(-x) &= P(-x) + x^n (-1)^n \varepsilon(-x) = P(-x) + x^n \varepsilon_1(x), \end{aligned}$$

Or comme $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ alors $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ aussi.

1. si f est impaire alors on a :

$$f(x) = -P(-x) - x^n \varepsilon_1(x)$$

et comme la première et cette expression sont des développements limits de f à l'ordre n en 0, par unicité on a $-P(-x) = P(x)$, c'est-à-dire P impaire ;

2. si f est paire, on a :

$$f(x) = P(-x) + x^n \varepsilon_1(x)$$

alors de même, l'unicité nous dit que P est alors paire.

PROPOSITION 3.1.0.12. —

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue en $a \in I$.

1. le développement limité de f en a à l'ordre 0 est

$$f(x) = f(a) + \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 ;$$

2. la fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle possède un développement limité à l'ordre 1 en a , alors dans ce cas le développement limité est donné par :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x)(x - a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION 3.1.0.13. —

Dans l'ordre :

1. On pose $\varepsilon(x) = f(x) - f(a)$. Comme f est continue en 0, $\varepsilon(x)$ aussi et $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.
2. Supposons que f soit dérivable en a , c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

On pose

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

On a bien $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ et

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x).$$

Réciproquement, supposons que f admette un développement limité :

$$f(x) = a_0 + (x - a)a_1 + (x - a)\varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. Alors, par continuité $a_0 = f(a)$ et

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} a_1 + \varepsilon(x) = a_1 = f'(a).$$

3.2. Développements limités et primitives

THÉORÈME 3.2.0.4. —

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue. Soit F une primitive de f . Soit $a \in I$ et supposons que f admette un développement limité en a à l'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \frac{a_2}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{a_n}{n!}(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors F admet le développement limité suivant à l'ordre $n + 1$ en a :

$$F(x) = F(a) + a_0(x - a) + \frac{a_1}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{a_n}{(n + 1)!}x^{n+1} + (x - a)^{n+1} \varepsilon_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION 3.2.0.14. —

Soit

$$P(t) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} (t - a)^k.$$

Pour tout $x \neq a$:

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n}.$$

Par hypothèse, $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. En posant $\varepsilon(a) = 0$, on obtient que ε est continue sur I . Donc ε admet une primitive et dans l'identité

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \frac{a_2}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{a_n}{n!}(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

tous les termes admettent des primitives. Donc

$$\begin{aligned} F(x) - F(a) &= \int_a^x f(t) \, dt \\ F(x) - F(a) &= \int_a^x \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} (t - a)^k + (t - a)^n \varepsilon(t) \right) dt \\ F(x) - F(a) &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(k + 1)!} (x - a)^{k+1} + u(x), \\ u(x) &= \int_a^x (t - a)^n \varepsilon(t) \, dt. \end{aligned}$$

Par le théorème de ROLLE :

$$u(x) = (x - a)(\theta - a)^n \varepsilon(\theta)$$

pour un θ compris entre a et x . Donc

$$|u(x)| = |x - a| |\theta - a|^n |\varepsilon(\theta)| \leq |x - a|^{n+1} |\varepsilon(\theta)|$$

et $\varepsilon(\theta)$ tend vers 0 quand x tend vers a puisque θ est compris entre a et x . Donc :

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + (x-a)^{n+1} \varepsilon_1(x)$$

où

$$\varepsilon_1(x) = \frac{u(x)}{(x-a)^{n+1}} \rightarrow 0.$$

THÉORÈME 3.2.0.5. —

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^n , $a \in I$. Alors f admet pour développement limité à l'ordre n en a :

$$f(x) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x), \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION 3.2.0.15. —

Pour $n = 0, 1$ ça a été déjà vu. Supposons alors $n \geq 2$. Soit $f \in C^n$, posons $g = f'$ avec $g \in C^{n-1}(I)$.

Par récurrence :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^{n-1} \varepsilon(x), \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

f est une primitive de g :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x), \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x)$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon_1(x).$$

Exemple. — Soit :

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

son développement limité en 0 d'ordre n est :

$$f(x) = x^n \varepsilon(x), \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

3.3. Développement limités usuels

Développements limités en 0 :

$$\begin{aligned}
 \exp(x) &= \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} + x^n \varepsilon(x) \\
 \operatorname{ch}(x) &= \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x) \\
 \operatorname{sh}(x) &= \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x) \\
 \cos(x) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x) \\
 \sin(x) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x) \\
 \alpha \in \mathbf{R} : (1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{i=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-i)}{(i+1)!} x^{i+1} + x^{n+1} \varepsilon(x) \\
 \frac{1}{1-x} &= \sum_{i=0}^n x^i + x^{n+1} \varepsilon(x) \\
 \frac{1}{1+x} &= \sum_{i=0}^n (-1)^i x^i + x^{n+1} \varepsilon(x) \\
 \log(1-x) &= - \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{i!} + x^n \varepsilon(x) \\
 \log(1+x) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} + x^n \varepsilon(x) \\
 \operatorname{Arctan}(x) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{x^{2i-1}}{2i-1} + x^{2n} \varepsilon(x)
 \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION 3.3.0.16 (ch). —

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ch}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
 \operatorname{ch}'(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} (= \operatorname{sh}(x)) \\
 \operatorname{ch}''(x) &= \operatorname{ch}(x) \\
 \operatorname{ch}^{(2i)}(0) &= 1 \\
 \operatorname{sh}^{(2i)}(0) &= 0
 \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION 3.3.0.17 (cos). —

$$\begin{aligned}\cos^{(k)}(x) &= \cos(x + k\pi/2) \\ \cos^{(k)}(0) &= \cos(k\pi/2) \\ \cos^{(2k)}(0) &= (-1)^k \\ \cos^{(2k+1)}(0) &= 0\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION 3.3.0.18 (sin). —

$$\begin{aligned}\sin^{(k)}(x) &= \sin(x + k\pi/2) \\ \sin^{(2k)}(0) &= 0 \\ \sin^{(2k+1)}(0) &= (-1)^k\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION 3.3.0.19 $((1+x)^\alpha = f(x))$. —

Par récurrence :

$$\begin{aligned}f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \\ f^{(k)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION 3.3.0.20 $(1/(1-x))$. —

$$\begin{aligned}\frac{1-x^n}{1-x} &= 1+x+x^2+\dots+x^n \\ \frac{1}{1-x} &= 1+x+\dots+x^n+x^n\cdot\frac{x}{1-x}\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION 3.3.0.21 $(\log(1-x))$. —

Utiliser le théorème sur le développement limité d'une primitive avec le développement limité de $1/(1-x)$.

DÉMONSTRATION 3.3.0.22 $(\text{Arctan}(x))$. —

$$\begin{aligned}\text{Arctan}'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{i=1}^n (-1)^i x^{2i} + x^{2n} \varepsilon(x)\end{aligned}$$

et on conclut avec le théorème du développement limité d'une primitive.

Remarque. — On a vu que si

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

alors le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre n est

$$f(x) = x^n \varepsilon(x).$$

Or le développement limité de 0 en 0 à l'ordre n est identique.

Exemple. — Soit :

$$f: \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}.$$

La fonction f est continue en 0.

On regarde le développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = x^2 \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \sin(1/x) & \text{sinon} \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Donc le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre 2 est :

$$f(x) = x^2 \varepsilon(x).$$

Dérivabilité de f en 0 (puisqu'elle est lisse sur \mathbf{R}^*) :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2 \sin(1/x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

donc f est dérivable et $f'(0) = 0$.

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x)}{x} = 3x \sin(1/x) - \cos(1/x)$$

donc f n'est pas dérivable à l'ordre 2 en 0 (même si elle a un développement limité à l'ordre 2).

4. CALCULS AVEC LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

4.1. Règles de calcul des développements limités

PROPOSITION 4.1.0.13. —

Soit f, g ayant des développements limités à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon(x)$$

avec P, Q des polynômes de degré au plus n et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ (non forcément identiques). Alors

1. le développement limité à l'ordre n en 0 de $f + g$ est

$$(f + g)(x) = (P + Q)(x) + x^n \varepsilon(x);$$

2. pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, le développement λf à l'ordre n en 0 est :

$$(\lambda f)(x) = \lambda P(x) + x^n \varepsilon(x).$$

DÉMONSTRATION 4.1.0.23. —

Écrivons $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_f(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_g(x)$.

1. $(f + g)(x) = P(x) + Q(x) + x^n(\varepsilon_f + \varepsilon_g)(x)$ et on note $\varepsilon = \varepsilon_f + \varepsilon_g$ qui tend bien en 0.
2. De même.

PROPOSITION 4.1.0.14. —

Soit f qui admet le développement limité en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x), \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, f admet le développement limité en 0 à l'ordre p :

$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p \varepsilon(x)$$

avec $T_p(P)$ le polynôme tronqué de P :

$$T_p(P) = \sum_{k=0}^p a_k x^k, \quad P = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

DÉMONSTRATION 4.1.0.24. —

On a

$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p \left(\sum_{k=p+1}^n a_k x^{k-p} + x^{n-p} \varepsilon(x) \right).$$

Et on pose

$$\varepsilon_1(x) = \sum_{k=p+1}^n a_k x^{k-p} + x^{n-p} \varepsilon(x).$$

On a bien $\varepsilon_1(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.

PROPOSITION 4.1.0.15. —

Soient f, g admettant les développements limités :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x).$$

Alors fg admet le développement limité à l'ordre n en 0 suivant :

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x) + x^n \varepsilon(x).$$

Remarque. — Si f, g admettent les développements limités à l'ordre n en a :

$$f(x) = P(x - a) + (x - a)^n \varepsilon_1(x), \quad g(x) = Q(x - a) + (x - a)^n \varepsilon_2(x)$$

alors le développement limité :

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x - a) \text{ (2§)} + (x - a)^n \varepsilon(x).$$

DÉMONSTRATION 4.1.0.25. —

$$(fg)(x) = (PQ)(x) + x^n(Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x))$$

$$PQ(x) = T_n(PQ)(x) + x^{n+1}R(x), \quad R \in \mathbf{R}[x]$$

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x) + x^n(xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x))$$

On pose :

$$\varepsilon(x) = xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} xR(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} Q\varepsilon_1(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} P\varepsilon_2(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Exemple. — On veut le développement limité de :

$$\text{Arctan}(x - 1) \exp(x)$$

en 1 d'ordre 3.

$$\text{Arctan}(y) = y - \frac{y^3}{3} + y^3 \varepsilon(y)$$

$$\text{Arctan}(x - 1) = (x - 1) - \frac{(x - 1)^3}{3} + (x - 1)^3 \varepsilon(x)$$

$$\exp(x) = \exp(x - 1 + 1) = e \exp(x - 1)$$

$$\exp(x) = e \left(1 + (x - 1) + \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{6} + (x - 1)^3 \varepsilon(x) \right)$$

Et donc

$$f(x) = e \left((x - 1) - \frac{(x - 1)^3}{3} + (x - 1)^3 \varepsilon(x) \right) \times \left(1 + (x - 1) + \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{6} + (x - 1)^3 \varepsilon(x) \right)$$

$$f(x) = e \left((x - 1) + (x - 1)^2 + \frac{(x - 1)^3}{2} - \frac{(x - 1)^3}{3} \right) + (x - 1)^3 \varepsilon(x)$$

2§. On tronque avant d'évaluer en $x - a$.

4.2. Développement limité d'une fonction composée

Puisque la composition de deux fonctions polynômiales est encore un polynôme :

PROPOSITION 4.2.0.16. —

Soient f, g admettant un développement limité en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon(x)$$

avec P, Q deux polynômes de degré inférieur à n .

Supposons que $g(0) = 0$ alors $f \circ g$ admet le développement limité suivant à l'ordre n en 0 :

$$(f \circ g)(x) = T_n(P \circ Q)(x) + x^n \varepsilon(x).$$

DÉMONSTRATION 4.2.0.26. —

Supposons $n = 0$, alors P et Q sont deux polynômes constants donc $f(x) = P(0) + \varepsilon(x)$ et $g(x) = Q(0) + \varepsilon(x)$. Comme $Q(0) = 0$ on a bien $f(g(x)) = (P \circ Q)(x) + \varepsilon(x)$ par continuité.

Supposons que $n \geq 1$. On note $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x)$. Posons $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$.

$$(f \circ g)(x) = P(g(x)) + g(x)^n \varepsilon_1(g(x))$$

$$P(g(x)) = \sum_{i=0}^n a_i g(x)^i$$

$$P(g(x)) = \textcolor{red}{(3§)} T_n \left(\sum_{i=0}^n a_i Q(x)^i \right) + x^n \varepsilon_3(x)$$

Puisque $Q(0) = 0$, on a $Q(x) = b_1x + \dots + b_nx^n$ et donc :

$$g(x) = b_1x + \dots + b_nx^n + x^n \varepsilon_2(x)$$

$$g(x) = x(b_1 + \dots + b_nx^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon_2(x))$$

$$g(x) = xh(x)$$

$$(f \circ g)(x) = P(xh(x)) + x^n h(x)^n \varepsilon_1(xh(x))$$

$$(f \circ g)(x) = T_n(P \circ Q)(x) + x^n (h(x)^n \varepsilon_1(xh(x)) + \varepsilon_3(x))$$

On pose $\varepsilon_4(x) = h(x)^n \varepsilon_1(xh(x)) + \varepsilon_3(x)$ et :

$$\lim_{x \rightarrow 0} xh(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x)^n = b_1^n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_4(x) = 0.$$

3§. D'après les formules de développements limités d'une somme et d'un produit.

Exemple. — Développement limité de $\cos(\sin(x))$ à l'ordre 5 en 0 :

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6\varepsilon(x) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x) \\ \cos(\sin(x)) &= T_5 \left(1 - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^4}{4!} \right) + x^5\varepsilon(x) \\ \cos(\sin(x)) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x) \\ \cos(\sin(x)) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^5\varepsilon(x)\end{aligned}$$

PROPOSITION 4.2.0.17. —

Soient f, g admettant des développements limités à l'ordre n en 0. Alors si $g(0) \neq 0$ alors la fonction f/g admet un développement limité à l'ordre n en 0.

DÉMONSTRATION 4.2.0.27. —

Puisque $g(0) \neq 0$, f/g est définie et continue en 0. Comme $f/g = f \times 1/g$, il suffit de vérifier que $1/g$ admet un développement limité en 0 (puis on applique la règle de produit).

Posons $a = g(0) \neq 0$. On a :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a + (g(x) - a)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)}$$

Il suffit de vérifier que :

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)}$$

admet un développement limité à l'ordre n en 0. Posons

$$h(x) = \frac{1}{1 + x}$$

on a alors

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)} = h\left(\frac{g(x)}{a} - 1\right) = (h \circ k)(x)$$

où $k(x) = g(x)/a - 1$. Or $k(x)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et $h(x)$ admet également un développement limité à l'ordre ∞ en 0. Enfin, $k(0) = 0$ et donc on conclut avec le résultat précédent.

Exemple. — Développement limité de $f : f(x) = 1/(a - x)$ en 0 à l'ordre n .

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{a} \frac{1}{1 - x/a} \\ \frac{1}{1 - t} &= 1 + t + t^2 + \dots + t^n + t^n \varepsilon(t) \\ f(x) &= \frac{1}{a} \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \dots + \frac{x^n}{a^n} \right) + x^n \varepsilon(x) \\ \frac{1}{a - x} &= \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \dots + \frac{x^n}{a^{n+1}} + x^n \varepsilon(x). \end{aligned}$$

La méthode précédente ne donne pas de formule générale pour le développement limité de f/g .

Rappel. — Si $P, Q \in \mathbf{R}[x]$, $n \in \mathbf{N}$ et si $Q(0) \neq 0$. Alors la division de P par Q suivant les puissances croissantes à l'ordre n est l'unique polynôme A tel que :

- $P - AQ$ est divisible par X^{n+1} ;
- soit $A = 0$, soit $\deg A \leq n$.

PROPOSITION 4.2.0.18. —

Soient f, g avec les développements limités suivants à l'ordre n en 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x) + x^n \varepsilon_1(x), \\ g(x) &= B(x) + x^n \varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

Supposons que $g(0) = B(0) \neq 0$. Le développement limité à l'ordre n de f/g en 0 est :

$$\frac{f}{g}(x) = Q(x) + x^n \varepsilon(x)$$

où Q est la division de A par B à l'ordre n suivant les puissances croissantes.

DÉMONSTRATION 4.2.0.28. —

On a $A(x) = Q(x)B(x) + x^{n+1}R(x)$ où R est un polynôme et $Q = 0$ ou $\deg Q \leq n$. Ainsi

$$\begin{aligned} f(x) &= Q(x)B(x) + x^{n+1}R(x) + x^n \varepsilon_1(x) \\ f(x) - Q(x)g(x) &= x^{n+1}R(x) + x^n \varepsilon_1(x) - Q(x)x^n \varepsilon_2(x) \\ f(x) - Q(x)g(x) &= x^n(\varepsilon_1(x) - Q(x)\varepsilon_2(x) + xR(x)) \\ \frac{f}{g}(x) &= Q(x) + x^n \varepsilon_3(x) \\ \varepsilon_3(x) &= \frac{1}{g(x)}(\varepsilon_1(x) - Q(x) \cdot \varepsilon_2(x) + xR(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Exemple. — Développement limité de $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0.

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x) \\ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) + x^6R(x) \\ \frac{f(x)}{g(x)} &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x)\end{aligned}$$

5. APPLICATIONS

Applications. — Les développements limités peuvent être utiles pour :

1. les calculs de limites (pour des « formes indéterminées ») ;
2. études de fonctions ou courbes paramétrées.

5.1. Calculs de limites

Exemple. — On veut calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)}.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x) \\ \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \\ \log \operatorname{ch} x &= \log(1 + (\operatorname{ch} x - 1)) \\ \log \operatorname{ch} x &= T_2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2} \right) + x^2\varepsilon(x) \\ \log \operatorname{ch} x &= \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \\ x \log \operatorname{ch} x &= \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x) ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \\
x\sqrt{1+x} &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + x^3\varepsilon(x) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \\
\exp(\sin x) &= T_3\left(\left(x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right) + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(\sin x) &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(\sin x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) ;
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \frac{\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)}{1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)} \\
\frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \frac{\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)}{-\frac{x^3}{8} + x^3\varepsilon(x)} \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/2 + \varepsilon(x)}{-1/8 + \varepsilon(x)} = -4.
\end{aligned}$$

Remarque. — Un calcul de dérivée s'obtient par un calcul de limite et donc parfois par développements limités.

Exemple. — On prend

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + x + x^2}$$

et on cherche $f^{(i)}(0)$ pour $i \in \{0, \dots, 4\}$, c'est-à-dire que l'on cherche le développement limité de f en 0 à l'ordre 4.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x).$$

On cherche le développement limité de

$$g(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}$$

que l'on peut voir comme

$$g(x) = (a \circ b)(x) ; a(x) = \frac{1}{1+x} ; b(x) = x + x^2.$$

$$\begin{aligned}
a(x) &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4 \varepsilon(x) \\
g(x) &= T_4((x \mapsto 1 - x + x^2 - x^3 + x^4)(x + x^2)) + x^4 \varepsilon(x) \\
g(x) &= 1 - x - x^2 + x^2 + x^4 + 2x^3 + x^4 - x^3 - 3x^4 + x^4 + x^4 \varepsilon(x) \\
g(x) &= 1 - x + x^3 - x^4 + x^4 \varepsilon(x) \\
f(x) &= T_4\left((1 - x + x^3 - x^4)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\right) + x^4 \varepsilon(x) \\
f(x) &= 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{2} - \frac{23x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Comme f admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, elle est dérivable quatre fois. De plus

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(0) &= -1 \\
f^{(2)}(0) &= -1 \\
f^{(3)}(0) &= 9 \\
f^{(4)}(0) &= -23.
\end{aligned}$$

5.2. Courbes paramétrées

Rappels sur les fonctions classiques. — Quelques rappels :

— on définit le logarithme népérien par :

$$\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Ainsi $\log : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ est croissante, C^∞ ,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \log x &= \frac{1}{x} \\
\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \log x &= -\infty \\
\lim_{x \rightarrow \infty} \log x &= +\infty
\end{aligned}$$

$$\log(ab) = \log a + \log b.$$

— on définit l'exponentielle, $\exp : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, qui est croissante, lisse et stable par dérivation.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) &= 0 \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) &= \infty \\
\exp(a + b) &= \exp(a) \exp(b).
\end{aligned}$$

— soient $a \in \mathbf{R}_+^*$, $b \in \mathbf{R}$ alors on définit :

$$a^b = \exp(b \log a).$$

$$a^{b+b'} = a^b a^{b'}$$

$$(aa')^b = a^b (a')^b$$

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

$$a^0 = 1 = 1^b$$

$$\frac{d}{dx} x^b = b x^{b-1}$$

$$\frac{d}{dx} a^x = \log(a) a^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^a (\log x)^n = 0 \quad , \quad a > 0 \text{ et } n \in \mathbf{Z}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^a e^x = 0.$$

— trigonométrie :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\sin(x+t) = \cos(t) \sin(x) + \cos(x) \sin(t)$$

$$\cos(x+t) = \cos(x) \cos(t) - \sin(x) \sin(t)$$

$$\tan(x+t) = \frac{\tan(t) + \tan(x)}{1 - \tan(x) \tan(t)}.$$

— Arcsin : $[-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ est lisse sur $] -1, 1[$ et :

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Arccos : $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ est la réciproque de cos et on a la relation :

$$\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Arctan : $\mathbf{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$ est lisse et :

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

— trigonométrie hyperbolique :

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$$

leurs réciproques $\text{Arcsh} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\text{Arcch} : [-1, \infty] \rightarrow \mathbf{R}_+$ et $\text{Arcth} :]-1, +1[\rightarrow \mathbf{R}$ sont lisses sur l'intérieur de leur domaine de définition.

$$\text{Arcsh}'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\text{Arcch}'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$\text{Arcsh}(t) = \log(t + \sqrt{t^2+1})$$

$$\text{Arcch}(t) = \log(t + \sqrt{t^2-1}).$$

DÉFINITION 5.2.0.6. —

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ avec I un intervalle ou une union finie d'intervalles dans \mathbf{R} . Soient u, v telles que

$$\forall t, f(t) = (u(t), v(t)).$$

1. On dit que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$ où $l = (l_1, l_2)$ si $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = l_1$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = l_2$.
2. On dit que f est continue en t_0 si les fonctions u et v sont continues en 0. f est continue sur I si elle est continue en tout point de I .
3. On dit que f est dérivable en t_0 si u et v le sont et on note $f'(t_0) = (u'(t_0), v'(t_0))$.

PROPOSITION 5.2.0.19. —

Si $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ et si $t_0 \in I$ alors :

1. si $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = m$ alors $\lim_{t \rightarrow t_0} (f + g)(t) = l + m$;
2. si f, g sont dérivables en t_0 alors $f + g$ aussi et on a $(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$.

PROPOSITION 5.2.0.20. —

Soit (r, s) une base de \mathbf{R}^2 et soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ telle que $f(t) = (u(t), v(t))$. Soit $(a(t), b(t))$ les coordonnées de $f(t)$ dans la base (r, s) .

1. On a :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l \iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \alpha \\ \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = \beta \end{cases}$$

où (α, β) sont les coordonnées de l dans la base (r, s) .

2. Idem pour la dérivée.

DÉMONSTRATION 5.2.0.29. —

Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ et $r, s \in \mathbf{R}^2$. On a $l = \alpha \cdot r + \beta \cdot s$,

$$f(t) = (u(t), v(t)) = a(t) \cdot r + b(t) \cdot s$$

avec $a(t), b(t) \in \mathbf{R}$.

1. On a que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$ c'est par définition :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = l_1 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = l_2 \end{cases} \\ & \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \alpha \\ \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} (a(t)r_1 + b(t)s_1) = \alpha r_1 + \beta s_1 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} (a(t)r_2 + b(t)s_2) = \alpha r_2 + \beta s_2 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} a(t)r_1 + b(t)s_1 = l_1 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} a(t)r_2 + b(t)s_2 = l_2 \end{cases} \end{aligned}$$

2. De même ...

DÉFINITION 5.2.0.7. —

On dit que $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$, $f(t) = (u(t), v(t))$ admet un développement limité à l'ordre n en t_0 si $u(t)$ et $v(t)$ admettent un développement limité à l'ordre n en t_0 .

Si $u(t) = u_0 + u_1(t - t_0) + \dots + u_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon_1(t)$ et $v(t) = v_0 + v_1(t - t_0) + \dots + v_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon_2(t)$ alors on appelle

$$f(t) = (u_0, v_0) + (t - t_0)(u_1, v_1) + \dots + (t - t_0)^n(u_n, v_n) + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

le développement limité de f à l'ordre n en t_0 avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0)$.

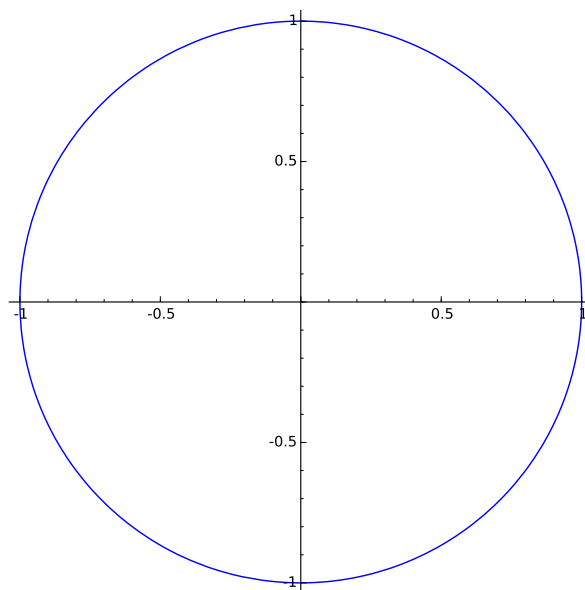
Exemple. — Le développement limité de $f : t \mapsto (2t^3 - t \sin t, t^3 + \cos t)$ à l'ordre 4 en 0 :

$$\begin{aligned} 2t^3 - t \sin t &= -t^2 + 2t^3 + \frac{t^4}{6} + t^4 \varepsilon(t) \\ t^3 + \cos t &= 1 - \frac{t^2}{2} + t^3 + \frac{t^4}{24} + t^4 \varepsilon(t) \\ f(t) &= (0, 1) - t^2(1, 1/2) + t^3(2, 1) + t^4(1/6, 1/24) + t^4 \varepsilon(t). \end{aligned}$$

DÉFINITION 5.2.0.8. —

On appelle *courbe paramétrée* de \mathbf{R}^2 une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$.

Exemple. — $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$.



Remarque. — Supposons que f soit dérivable en $t \in I$. Alors $u(t), v(t)$ admettent des développements limités à l'ordre 1 en t_0 et donc f admet aussi un développement limité à l'ordre 1 en t_0 . Or si

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t)$$

alors

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0)) = f'(t_0).$$

DÉFINITION 5.2.0.9. —

On appelle $f'(t_0)$ *vecteur tangent* de f en t_0 . La droite affine passant par $f(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$ s'appelle la *tangente* à f en t_0 .

Remarque. — Le vecteur tangent dépend du paramétrage de la courbe et non seulement de sa représentation.

Exemple. — Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ et soit $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$. Remarquons que f et g ont même représentation graphique. Cependant les vecteurs tangents en 0 à f et g sont :

$$f'(0) = (0, 1)$$

$$g'(0) = (0, 2).$$

La tangente à f en t_0 est la droite d'équation :

$$\det \begin{pmatrix} y - v(t_0) & v'(t_0) \\ x - u(t_0) & u'(t_0) \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire :

$$(y - v(t_0))u'(t_0) - (x - u(t_0))v'(t_0) = 0.$$