DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Table des matières

1. Fonctions négligeables et équivalentes

On considère des fonctions f, g de V dans $\mathbf{R}$ où V est un voisinage épointé dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. C'est-à-dire que V est de la forme $U - \{a\}$ où U est un voisinage de a dans $\overline{\mathbf{R}}$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

— si $a = \infty$ alors $V \supset \{k, \infty\}$;

— si $a \in \mathbf{R}$ alors $V \supset]k, a[\cup]a, l[$ avec $k < a < l$ et $k, l \in \mathbf{R}$.

f, g sont définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

1.1. Négligeable

Définition 1.1. —
On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a s'il existe un voisinage V tel qu'il existe une fonction $\varepsilon : V \to \mathbf{R}$ telle que :
— $f = \varepsilon \cdot g$;
— $\lim_a \varepsilon = 0$.
On note $f \underset{(a)}{=} \mathrm{o}(g)$.

Remarque. — On note :

$$\varepsilon f : \begin{cases} V \to \mathbf{R} \\ t \mapsto \varepsilon(t) f(t) \end{cases}.$$

Exemples. — Par exemple :

1. Si $g = 1$ alors $f = \mathrm{o}(1)$ si, et seulement si, $\lim_a f = 0$.
2. Si $f = 0$ au voisinage de a alors pour toute fonction g : $f = \mathrm{o}(g)$.
3. Si f est bornée et $\lim_a(g) = \infty$ alors $f = \mathrm{o}(g)$ (on prend alors $\varepsilon = f/g$).
4. On a $x^m \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(x^n)$ si, et seulement si, $m < n$.
5. Pour tous $\alpha, \beta > 0$:
$$\begin{cases} x^\alpha \underset{\infty}{=} \mathrm{o}(e^{\beta x}) \\ (\ln x)^\alpha \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(x^\beta) \end{cases},$$
car $\lim_\infty x^\alpha e^{-\beta x} = 0$.

Proposition 1.1. —
Si f/g est définie dans un voisinage de a, alors :

$$f \underset{(a)}{=} \mathrm{o}(g) \iff \lim_a (f/g) = 0.$$

Démonstration 1.1. —
On prend $\varepsilon = f/g$.

Remarque. — Il peut arriver que f/g n'est pas défini dans aucun voisinage de a.

EXEMPLES. — Contre-exemples :

1. Avec $g(t) = \sin(1/[t-a])$, pour tout voisinage de V de a, $g(t)$ s'annule en un point de V.
2. Même si le quotient n'est pas définit : $t \underset{(0)}{=} \mathrm{o}(\sin(1/t))$.

PROPOSITION 1.2. —
On a au voisinage de a :

1. la propriété o est transitive ;
2. la propriété o est compatible avec la multiplication, i.e. : si $f = \mathrm{o}(g)$ alors $fh = \mathrm{o}(gh)$;
3. si $f = \mathrm{o}(g)$ et si $h = \mathrm{o}(k)$ alors $fh = \mathrm{o}(gk)$.

DÉMONSTRATION 1.2. —
Dans l'ordre :

1. Pour $f = \varepsilon_1 g$ et $g = \varepsilon_2 h$ avec $\lim_a \varepsilon_i = 0$ alors : $f = \varepsilon_1\varepsilon_2 h$ et $\lim_a \varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$.
2. Si $f = \varepsilon g$, $\lim_a \varepsilon = 0$, alors $fh = \varepsilon gh$.
3. De même.

CONTRE-EXEMPLE. — o n'est pas compatible avec l'addition. Par exemple : $x \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(x^3)$ et $x^2 \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(-x^3)$ n'entraine pas $x + x^2 \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(0)$.

1.2. Équivalence

DÉFINITION 1.2. —
On dit que f est *équivalence* à g au voisinage de a si : $f - g \underset{(a)}{=} \mathrm{o}(g)$. On note $f \underset{(a)}{\sim} g$.

PROPOSITION 1.3. —
Si f/g est définie dans un voisinage de a alors :

$$f \underset{(a)}{\sim} g \iff \lim_a f/g = 1.$$

PROPOSITION 1.4. —
$\underset{(a)}{\sim}$ est une relation d'équivalence.

DÉMONSTRATION 1.3. —
Par définition :

1. elle est réflexive : $f \underset{(a)}{\sim} f$ puisque $0 \underset{(a)}{=} \mathrm{o}(f)$;

2. elle est symétrique si $f \underset{(a)}{\sim} g$ alors il existe ε telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ et $f = (1+\varepsilon)g$, or $1/(1+\varepsilon)$ est aussi définie au voisinage de a et puisque $g = (1/[1+\varepsilon])f$ on a
$$g = (1 + (1/[1+\varepsilon] - 1))f$$
or en posant $\varepsilon' = [1+\varepsilon] - 1$ on a $\lim_a \varepsilon' = 0$;
3. elle est transitive : $f \underset{(a)}{\sim} g$ et $g \underset{(a)}{\sim} h$ implique qu'il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ telles que $f = (1+\varepsilon_1)g$, $g = (1+\varepsilon_2)h$ et donc $f = (1+\varepsilon)h$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$ et $\lim_a \varepsilon = 0$.

Proposition 1.5. —
Si $f \underset{(a)}{\sim} g$ et si $\lim_a f$ existe alors $\lim_a g$ existe et $\lim_a g = \lim_a f$.

Démonstration 1.4. —
Soit ε telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ alors puisque $f = (1+\varepsilon)g$ on a
$$\lim_a f = \lim_a (1+\varepsilon)g = \lim_a g.$$

Proposition 1.6. —
Le produit et le quotient (quand il est défini) d'équivalences est une équivalence.
Une puissance entière d'équivalences est une équivalence.

Démonstration 1.5. —
Si $f = (1+\varepsilon_1)g$et $h = (1+\varepsilon_2)k$ alors $fh = (1+\varepsilon)gk$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$.

Proposition 1.7. —
Si $f \underset{(a)}{\sim} g$ et si $\varphi : I \to \mathbf{R}$ telle que $\lim_b \varphi = a$, $b \in I$. Alors
$$f \circ \varphi \underset{(a)}{\sim} g \circ \varphi.$$

Démonstration 1.6. —
Si $f = (1+\varepsilon)g$ avec $\lim_a \varepsilon = 0$. Alors
$$f \circ \varphi = (1+\varepsilon') \cdot g \circ \varphi$$
avec $\varepsilon' = \varepsilon \circ \varphi$ et $\lim_a \varepsilon' = 0$.

Proposition 1.8. —
On a :
1. Si f est dérivable en a alors si $f'(a) \neq 0$ on a $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x-a)$.

2. Si g est continue dans un voisinage épointé de a, alors si $f \underset{(a)}{\sim} g > 0$ alors
$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{(a)}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration 1.7. —
Dans l'ordre :

1. Si f est dérivable en a alors :
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{(a)}{\sim} f'(a)$$
puisque si $\lim_a g = b \in \mathbf{R}^*$ alors $g \underset{(a)}{\sim} b$.
2. On sait que $f - g \underset{(a)}{=} \mathrm{o}(g)$ et on veut :
$$\int_x^a (f-g)(t)\,\mathrm{d}t \underset{(a)}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^a g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$
En posant $h = f - g$ on se ramène au problème :
$$h = \mathrm{o}(g) \implies \int_a^x h = \mathrm{o}\int_a^x g.$$
Si $h = \varepsilon g$ et $\lim_a \varepsilon = 0$ alors
$$\int_a^x g = \int_a^x \varepsilon g$$
Or
$$\frac{|\int_x^a \varepsilon g|}{\int_a^x g} \leq \max_{[a,x]} |\varepsilon| \frac{\int_a^x g}{\int_a^x g} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$
Donc
$$\frac{|\int_a^x \varepsilon g = h|}{|\int_a^x g|} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

2. Dérivées successives et formules de Taylor

Soit $p \geq 0$ un entier.

Définition 2.1. —
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$.

1. $f \in C^0$ si f est continue ;
2. $f \in C^p$ ($p \geq 1$) si f est dérivable et $f' \in C^{p-1}$.

Remarque. — Si $f \in C^p$ alors les p-ièmes dérivées successives et f sont toutes continues sur I. $f \in C^\infty$ si $f^{(p)}$ existe et est continue pour tout $p \geq 1$.

Proposition 2.1. —
Si $f, g \in C^p$ alors $f+g$, fg, f/g et $f \circ g$ (si définie) sont C^p.

Démonstration 2.1. —
Dans l'ordre :

1. $(f+g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$ par récurrence sur p ;
2. $(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}$;
3. par récurrence sur p pour $(f \circ g)^{(p)}$ en utilisant : $(f \circ g)' = (f' \circ g) g'$.

Rappels sur les primitives. — Si $f : I \to \mathbf{R}$ est de classe C^1 avec $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert. Alors si f' est continue $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) \, \mathrm{d}t$.

2.1. Formules de Taylor

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert.

Théorème 2.1 (Formule de Taylor avec reste intégral). —
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ de classe C^k. Alors pour tous $a, b \in I$ on a :

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) \, \mathrm{d}t.$$

Démonstration 2.2. —
Par récurrence sur n, on note

$$(T_n) : f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) \, \mathrm{d}t.$$

Supposons que (T_k) soit vraie pour tout $k < n$. Alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{(b-t)^k}{k!}, \\ v(t) &= f^{(k)}(t), \\ R_k &= \int_a^b \frac{(b-s)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(s) \, \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

on a :

$$R_k = \int_a^b u'(s)v(s)\,\mathrm{d}s$$
$$R_k = [u(s)v(s)]_a^b - \int_a^b u(s)v'(s)\,\mathrm{d}s$$
$$R_k = u(b)v(b) - u(a)v(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s)\,\mathrm{d}s$$
$$R_k = \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s)\,\mathrm{d}s$$

On applique (T_{n-1}) :

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_{n-1}$$
$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n$$

donc (T_n) vraie.

Théorème 2.2 (Formule de Taylor avec reste en $f^{(n+1)}(\theta)$)
Soit $n > 0$, $f : I \to \mathbf{R}$ de classe C^{n+1}. Pour tous $a, b \in I$ avec $a \neq b$, il existe θ strictement compris en a et b tel que :

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta).$$

Démonstration 2.3. —
On pose A telle que

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot A = \int_a^b \frac{(b-s)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(s)\,\mathrm{d}s - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Soit $F : I \to \mathbf{R}$ telle que :

$$F(x) = \int_x^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A.$$

On calcule $F'(x)$:

$$F'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} A$$
$$F'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} \left(A - f^{(n+1)}(x)\right).$$

F est dérivable donc continue sur I :

$$F(a) = \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A = 0,$$
$$F(b) = 0.$$

Par le théorème de Rolle, il existe θ strictement entre a et b tel que $F'(\theta) = 0$. C'est-à-dire :

$$\frac{(b-\theta)^n}{n!}\left(A - f^{(n+1)}(\theta)\right) = 0$$
$$A = f^{(n+1)}(\theta).$$

On en déduit :

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta) = \int_a^b \frac{(b-s)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(s)\,\mathrm{d}s - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

On a alors le résultat en remplaçant dans (T_n).

Remarque. — Si $\left|f^{(n+1)}(s)\right| \leq M$ pour tout $s \in I$ alors

$$\left|f(b) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)\right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2.2. Fonctions usuelles

Proposition 2.2 (Exponentielle). —
Soit $n \in \mathbf{N}$, on regarde le développement de Taylor en 0 à l'ordre $n+1$, $\forall i,\ \exp^{(i)}(0) = 1$. On prend $b = x, a = 0$:

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(\theta)$$
$$\theta \in]0, x[.$$

Proposition 2.3 (Cosinus, sinus). —
La dérivée n-ième de $\cos(t)$ est $\cos(t + n\pi/2)$.

$$\left|\cos(x) - \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x^{2i}}{(2i)!}\right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

car $|\cos\theta| \leq 1$.

3. Développement limité à l'ordre n d'une fonction de classe C^n

3.1. Développements limités

Définition 3.1. —
Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert tel que $0 \in I, n \in \mathbf{N}$. On dit qu'une fonction

$f : I \to \mathbf{R}$ admet un *développement limité* à l'ordre n en 0 si, et seulement s'il existe un polynôme P de degré n à coefficients réels tel que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-P(x)}{x^n} = 0.$$

Notons

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x)-P(x)}{x^n}$$

alors

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)\ ^{(1\S)}, \\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0. \end{cases}$$

DÉFINITION 3.2. —
Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert et soit $n \in \mathbf{N}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ admet un *développement limité* à l'ordre n en a si, et seulement si, la fonction $t \mapsto f(t+a)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. C'est-à-dire si, et seulement s'il existe un polynôme de degré n, P à coefficients réels tel que :

$$f(x) = P(x-a) + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

au voisinage de a.

THÉORÈME 3.1. —
Si f admet un développement limité à l'ordre n en un point a, alors ce développement limité est unique.

DÉMONSTRATION 3.1. —
On peut supposer $a = 0$. Supposons que

$$f(x) = P_1(x) + x^n\varepsilon_1(x) = P_2(x) + x^n\varepsilon_2(x)$$

où $\lim_0 \varepsilon_i = 0$ pour $i \in \{1,2\}$. On a que

$$(P_1 - P_2)(x) = x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x)$$

et $(P_1 - P_2)(x)$ est de la forme $r_0 + r_1x + \ldots + r_nx^n$ avec $r_0, r_1, \ldots, r_n \in \mathbf{R}$.
On montre par récurrence que les r_k sont tous nuls. Quand $x \to 0$ on trouve :

$$r_0 = 0$$

et donc

$$r_1x + \ldots + r_nx^n = x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x).$$

Supposons que $r_0 = r_1 = r_{k-1} = 0$, $k > 0$. Alors

$$r_kx^k + \ldots + r_nx^n = x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x),$$

$$r_k + r_{k+1}x + \ldots + r_nx^{n-k} = x^{n-k}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x),$$

1§. C'est-à-dire, $f(x) - P(x) = \mathrm{o}(x^n)$.

$n-k \geq 0$ et donc $r_k = 0$ en passant à la limite.

Corollaire 3.1. —
Soit $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$ le développement limité d'une fonction f à l'ordre n en 0. Alors :

1. si f est paire alors P est paire ;
2. si f est impaire alors P est impaire.

Démonstration 3.2. —

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x) + x^n \varepsilon(x), \\ f(-x) &= P(-x) + x^n(-1)^n \varepsilon(-x) = P(-x) + x^n \varepsilon_1(x), \end{aligned}$$

Or comme $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$ alors $\varepsilon_1 \to 0$ aussi.

1. si f est impaire alors on a :
$$f(x) = -P(-x) - x^n \varepsilon_1(x)$$
et comme la première et cette expression sont des développements limits de f à l'ordre n en 0, par unicité on a $-P(-x) = P(x)$, c'est-à-dire P impaire ;
2. si f est paire, on a :
$$f(x) = P(-x) + x^n \varepsilon_1(x)$$
alors de même, l'unicité nous dit que P est alors paire.

Proposition 3.1. —
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue en $a \in I$.

1. le développement limité de f en a à l'ordre 0 est
$$f(x) = f(a) + \varepsilon(x), \ \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \ ;$$
2. la fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle possède un développement limité à l'ordre 1 en a, alors dans ce cas le développement limité est donné par :
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a), \ \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Démonstration 3.3. —
Dans l'ordre :

1. On pose $\varepsilon(x) = f(x) - f(a)$. Comme f est continue en 0, $\varepsilon(x)$ aussi et $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.
2. Supposons que f soit dérivable en a, c'est-à-dire :
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

On pose
$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$
On a bien $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et
$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x).$$

Réciproquement, supposons que f admette un développement limité :
$$f(x) = a_0 + (x - a)a_1 + (x - a)\varepsilon(x),$$
avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Alors, par continuité $a_0 = f(a)$ et
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} a_1 + \varepsilon(x) = a_1 = f'(a).$$

3.2. Développements limités et primitives

Théorème 3.2. —
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une application continue. Soit F une primitive de f. Soit $a \in I$ et supposons que f admette un développement limité en a à l'ordre n :
$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \frac{a_2}{2}(x - a)^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}(x - a)^n + (x - a)^n\varepsilon(x), \ \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$
Alors F admet le développement limité suivant à l'ordre $n + 1$ en a :
$$F(x) = F(a)+a_0(x-a)+\frac{a_1}{2}(x-a)^2+\ldots+\frac{a_n}{(n + 1)!}x^{n+1}+(x-a)^{n+1}\varepsilon_1(x), \ \lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0.$$

Démonstration 3.4. —
Soit
$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}(t - a)^k.$$
Pour tout $x \neq a$:
$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n}.$$
Par hypothèse, $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. En posant $\varepsilon(a) = 0$, on obtient que ε est continue sur I. Donc ε admet une primitive et dans l'identité
$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \frac{a_2}{2}(x - a)^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}(x - a)^n + (x - a)^n\varepsilon(x), \ \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$$

tous les termes admettent des primitives. Donc

$$\begin{aligned}
F(x) - F(a) &= \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
F(x) - F(a) &= \int_a^x \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}(t-a)^k + (t-a)^n \varepsilon(t) \right) \mathrm{d}t \\
F(x) - F(a) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + u(x), \\
u(x) &= \int_a^x (t-a)^n \varepsilon(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Par le théorème de Rolle :

$$u(x) = (x-a)(\theta - a)^n \varepsilon(\theta)$$

pour un θ compris entre a et x. Donc

$$|u(x)| = |x-a|\,|\theta - a|^n\,|\varepsilon(\theta)| \leq |x-a|^{n+1}\,|\varepsilon(\theta)|$$

et $\varepsilon(\theta)$ tend vers 0 quand x tend vers a puisque θ est compris entre a et x. Donc :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + (x-a)^{n+1}\varepsilon_1(x)$$

où

$$\varepsilon_1(x) = \frac{u(x)}{(x-a)^{n+1}} \to 0.$$

Théorème 3.3. —
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ de classe C^n, $a \in I$. Alors f admet pour développement limité à l'ordre n en a :

$$f(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x),\ \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Démonstration 3.5. —
Pour $n = 0, 1$ ça a été déjà vu. Supposons alors $n \geq 2$. Soit $f \in C^n$, posons $g = f'$ avec $g \in C^{n-1}(I)$.
Par récurrence :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^{n-1}\varepsilon(x),\ \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

f est une primitive de g :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x), \ \lim_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x)$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k} + (x-a)^n \varepsilon_1(x).$$

EXEMPLE. — Soit :

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), \text{ si } x > 0 \\ 0, , \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

son développement limité en 0 d'ordre n est :

$$f(x) = x^n \varepsilon(x), \ \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

3.3. Développement limités usuels

Développements limités en 0 :

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + x^n \varepsilon(x) \\
\operatorname{ch}(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x) \\
\operatorname{sh}(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x) \\
\cos(x) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x) \\
\sin(x) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x) \\
\alpha \in \mathbf{R} : \ (1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-i)}{(i+1)!} x^{i+1} + x^{n+1} \varepsilon(x) \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{i=0}^{n} x^i + x^{n+1} \varepsilon(x) \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^i + x^{n+1} \varepsilon(x) \\
\log(1-x) &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i!} + x^n \varepsilon(x) \\
\log(1+x) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} x^n \varepsilon(x) \\
\operatorname{Arctan}(x) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x^{2i-1}}{2i-1} + x^{2n} \varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Démonstration 3.6 (ch). —

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\operatorname{ch}'(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} (= \operatorname{sh}(x)) \\
\operatorname{ch}''(x) &= \operatorname{ch}(x) \\
\operatorname{ch}^{(2i)}(0) &= 1 \\
\operatorname{sh}^{(2i)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

Démonstration 3.7 (cos). —

$$\begin{aligned}\cos^{(k)}(x) &= \cos(x + k\pi/2)\\ \cos^{(k)}(0) &= \cos(k\pi/2)\\ \cos^{(2k)}(0) &= (-1)^k\\ \cos^{(2k+1)}(0) &= 0\end{aligned}$$

Démonstration 3.8 (sin). —

$$\begin{aligned}\sin^{(k)}(x) &= \sin(x + k\pi/2)\\ \sin^{(2k)}(0) &= 0\\ \sin^{(2k+1)}(0) &= (-1)^k\end{aligned}$$

Démonstration 3.9 ($(1+x)^\alpha = f(x)$). —
Par récurrence :

$$\begin{aligned}f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}\\ f^{(k)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)\end{aligned}$$

Démonstration 3.10 ($1/1-x$). —

$$\begin{aligned}\frac{1-x^n}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n\\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + \ldots + x^n + x^n \cdot \frac{x}{1-x}\end{aligned}$$

Démonstration 3.11 ($\log(1-x)$). —
Utiliser le théorème sur le développement limité d'une primitive avec le développement limité de $1/1-x$.

Démonstration 3.12 ($\mathrm{Arctan}(x)$). —

$$\begin{aligned}\mathrm{Arctan}'(x) &= \frac{1}{1+x^2}\\ \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i x^{2i} + x^{2n}\varepsilon(x)\end{aligned}$$

et on conclut avec le théorème du développement limité d'une primitive.

Remarque. — On a vu que si

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), \text{ si } x > 0 \\ 0, \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

alors le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre n est

$$f(x) = x^n \varepsilon(x).$$

Or le développement limité de 0 en 0 à l'ordre n est identique.

Exemple. — Soit :

$$f\colon \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x^3 \sin(1/x) \text{ si } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}.$$

La fonction f est continue en 0.

On regarde le développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = x^2 \varepsilon(x),\ \varepsilon(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x \sin(1/x) \text{ sinon} \end{cases}, \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) 0.$$

Donc le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre 2 est :

$$f(x) = x^2 \varepsilon(x).$$

Dérivabilité de f en 0 (puisqu'elle est lisse sur $\mathbf{R}^*$) :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2 \sin(1/x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc f est dérivable et $f'(0) = 0$.

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x)}{x} = 3x \sin(1/x) - \cos(1/x)$$

donc f n'est pas dérivable à l'ordre 2 en 0 (même si elle a un développement limité à l'ordre 2).

4. Calculs avec les développements limités

4.1. Règles de calcul des développements limités

Proposition 4.1. —
Soit f, g ayant des développements limités à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x),\ g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon(x)$$

avec P, Q des polynômes de degré au plus n et $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ (non forcément identiques). Alors

1. le développement limité à l'ordre n en 0 de $f+g$ est
$$(f+g)(x) = (P+Q)(x) + x^n\varepsilon(x);$$
2. pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, le développement λf à l'ordre n en 0 est :
$$(\lambda f)(x) = \lambda P(x) + x^n\varepsilon(x).$$

DÉMONSTRATION 4.1. —
Écrivons $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_f(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_g(x)$.
1. $(f+g)(x) = P(x) + Q(x) + x^n(\varepsilon_f + \varepsilon_g)(x)$ et on note $\varepsilon = \varepsilon_f + \varepsilon_g$ qui tend bien en 0.
2. De même.

PROPOSITION 4.2. —
Soit f qui admet le développement limité en 0 à l'ordre n :
$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x),\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$
Alors pour tout $p \in \{0,\dots,n\}$, f admet le développement limité en 0 à l'ordre p :
$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p\varepsilon(x)$$
avec $T_p(P)$ le polynôme tronqué de P :
$$T_p(P) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k,\ P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

DÉMONSTRATION 4.2. —
On a
$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p\left(\sum_{k=p+1}^{n} a_k x^{k-p} + x^{n-p}\varepsilon(x)\right).$$
Et on pose
$$\varepsilon_1(x) = \sum_{k=p+1}^{n} a_k x^{k-p} + x^{n-p}\varepsilon(x).$$
On a bien$\varepsilon_1(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

PROPOSITION 4.3. —
Soient f, g admettant les développements limités :
$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_1(x),\ g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_2(x).$$
Alors fg admet le développement limité à l'ordre n en 0 suivant :
$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x) + x^n\varepsilon(x).$$

Remarque. — Si f, g admettent les développements limités à l'ordre n en a :

$$f(x) = P(x-a) + (x-a)^n \varepsilon_1(x),\ g(x) = Q(x-a) + (x-a)^n \varepsilon_2(x)$$

alors le développement limité :

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x-a)\ ^{(2\S)} + (x-a)^n \varepsilon(x).$$

Démonstration 4.3. —

$$\begin{aligned}
(fg)(x) &= (PQ)(x) + x^n(Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x)) \\
PQ(x) &= T_n(PQ)(x) + x^{n+1}R(x),\ R \in \mathbf{R}[x] \\
(fg)(x) &= T_n(PQ)(x) + x^n(xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x))
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(x) = xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x) \\
&\lim_{x\to 0} xR(x) = 0 \\
&\lim_{x\to 0} Q\varepsilon_1(x) = 0 \\
&\lim_{x\to 0} P\varepsilon_2(x) = 0 \\
&\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0
\end{aligned}$$

Exemple. — On veut le développement limité de :

$$\operatorname{Arctan}(x-1)\exp(x)$$

en 1 d'ordre 3.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arctan}(y) &= y - \frac{y^3}{3} + y^3\varepsilon(y) \\
\operatorname{Arctan}(x-1) &= (x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3\varepsilon(x) \\
\exp(x) &= \exp(x-1+1) = e\exp(x-1) \\
\exp(x) &= e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3\varepsilon(x)\right)
\end{aligned}$$

Et donc

$$f(x) = e\left((x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3\varepsilon(x)\right) \times \left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3\varepsilon(x)\right)$$

$$f(x) = e\left((x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} - \frac{(x-1)^3}{3}\right) + (x-1)^3\varepsilon(x)$$

2§. On tronque avant d'évaluer en $x - a$.

4.2. Développement limité d'une fonction composée

Puisque la composition de deux fonctions polynômiales est encore un polynôme :

PROPOSITION 4.4. —
Soient f, g admettant un développement limité en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x), \; g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon(x)$$

avec P, Q deux polynômes de degré inférieur à n.
Supposons que $g(0) = 0$ alors $f \circ g$ admet le développement limité suivant à l'ordre n en 0 :

$$(f \circ g)(x) = T_n(P \circ Q)(x) + x^n\varepsilon(x).$$

DÉMONSTRATION 4.4. —
Supposons $n = 0$, alors P et Q sont deux polynômes constants donc $f(x) = P(0) + \varepsilon(x)$ et $g(x) = Q(0) + \varepsilon(x)$. Comme $Q(0) = 0$ on a bien $f(g(x)) = (P \circ Q)(x) + \varepsilon(x)$ par continuité.
Supposons que $n \geq 1$. On note $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_2(x)$. Posons $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$.

$$(f \circ g)(x) = P(g(x)) + g(x)^n\varepsilon_1(g(x))$$
$$P(g(x)) = \sum_{i=0}^{n} a_i g(x)^i$$
$$P(g(x)) \overset{(3§)}{=} T_n\left(\sum_{i=0}^{n} a_i Q(x)^i\right) + x^n\varepsilon_3(x)$$

Puisque $Q(0) = 0$, on a $Q(x) = b_1x + \ldots + b_nx^n$ et donc :

$$g(x) = b_1x + \ldots + b_nx^n + x^n\varepsilon_2(x)$$
$$g(x) = x(b_1 + \ldots + b_nx^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon_2(x))$$
$$g(x) = xh(x)$$
$$(f \circ g)(x) = P(xh(x)) + x^nh(x)^n\varepsilon_1(xh(x))$$
$$(f \circ g)(x) = T_n(P \circ Q)(x) + x^n(h(x)^n\varepsilon_1(xh(x)) + \varepsilon_3(x))$$

On pose $\varepsilon_4(x) = h(x)^n\varepsilon_1(xh(x)) + \varepsilon_3(x)$ et :

$$\lim_{x\to 0} xh(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} h(x)^n = b_1^n$$
$$\lim_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0.$$

3§. D'après les formules de développements limités d'une somme et d'un produit.

Exemple. — Développement limité de $\cos(\sin(x))$ à l'ordre 5 en 0 :

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6\varepsilon(x) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x) \\
\cos(\sin(x)) &= T_5\left(1 - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^4}{4!}\right) + x^5\varepsilon(x) \\
\cos(\sin(x)) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x) \\
\cos(\sin(x)) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^5\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Proposition 4.5. —
Soient f, g admettant des développements limités à l'ordre n en 0. Alors si $g(0) \neq 0$ alors la fonction f/g admet un développement limité à l'ordre n en 0.

Démonstration 4.5. —
Puisque $g(0) \neq 0$, f/g est définie et continue en 0. Comme $f/g = f \times 1/g$, il suffit de vérifier que $1/g$ admet un développement limité en 0 (puis on applique la règle de produit).
Posons $a = g(0) \neq 0$. On a :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a + (g(x) - a)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)}$$

Il suffit de vérifier que :

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)}$$

admet un développement limité à l'ordre n en 0. Posons

$$h(x) = \frac{1}{1 + x}$$

on a alors

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)} = h\left(\frac{g(x)}{a} - 1\right) = (h \circ k)(x)$$

où $k(x) = g(x)/a - 1$. Or $k(x)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et $h(x)$ admet également un développement limité à l'ordre ∞ en 0. Enfin, $k(0) = 0$ et donc on conclut avec le résultat précédent.

Exemple. — Développement limité de f : $f(x) = 1/(a-x)$ en 0 à l'ordre n.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{a}\frac{1}{1-x/a} \\
\frac{1}{1-t} &= 1 + t + t^2 + \ldots + t^n + t^n\varepsilon(t) \\
f(x) &= \frac{1}{a}\left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \ldots + \frac{x^n}{a^n}\right) + x^n\varepsilon(x) \\
\frac{1}{a-x} &= \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \ldots + \frac{x^n}{a^{n+1}} + x^n\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

La méthode précédente ne donne pas de formule générale pour le développement limité de f/g.

Rappel. — Si $P, Q \in \mathbf{R}[x]$, $n \in \mathbf{N}$ et si $Q(0) \neq 0$. Alors la division de P par Q suivant les puissances croissantes à l'ordre n est l'unique polynôme A tel que :

— $P - AQ$ est divisible par X^{n+1} ;
— soit $A = 0$, soit $\deg A \leq n$.

Proposition 4.6. —
Soient f, g avec les développements limités suivants à l'ordre n en 0 :

$$\begin{aligned}
f(x) &= A(x) + x^n\varepsilon_1(x), \\
g(x) &= B(x) + x^n\varepsilon_2(x).
\end{aligned}$$

Supposons que $g(0) = B(0) \neq 0$. Le développement limité à l'ordre n de f/g en 0 est :

$$\frac{f}{g}(x) = Q(x) + x^n\varepsilon(x)$$

où Q est la division de A par B à l'ordre n suivant les puissances croissantes.

Démonstration 4.6. —
On a $A(x) = Q(x)B(x) + x^{n+1}R(x)$ où R est un polynôme et $Q = 0$ ou $\deg Q \leq n$. Ainsi

$$\begin{aligned}
f(x) &= Q(x)B(x) + x^{n+1}R(x) + x^n\varepsilon_1(x) \\
f(x) - Q(x)g(x) &= x^{n+1}R(x) + x^n\varepsilon_1(x) - Q(x)x^n\varepsilon_2(x) \\
f(x) - Q(x)g(x) &= x^n(\varepsilon_1(x) - Q(x)\varepsilon_2(x) + xR(x)) \\
\frac{f}{g}(x) &= Q(x) + x^n\varepsilon_3(x) \\
\varepsilon_3(x) &= \frac{1}{g(x)}(\varepsilon_1(x) - Q(x)\cdot\varepsilon_2(x) + xR(x)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Exemple. — Développement limité de $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0.

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x) \\
x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) + x^6R(x) \\
\frac{f(x)}{g(x)} &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

5. Applications

Applications. — Les développements limités peuvent être utiles pour :

1. les calculs de limites (pour des « formes indéterminées ») ;
2. études de fonctions ou courbes paramétrées.

5.1. Calculs de limites

Exemple. — On veut calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \log \mathrm{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)}.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \\
\log \mathrm{ch} x &= \log(1 + (\mathrm{ch} x - 1)) \\
\log \mathrm{ch} x &= T_2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2}\right) + x^2\varepsilon(x) \\
\log \mathrm{ch} x &= \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \\
x \log \mathrm{ch} x &= \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x) \ ;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2}{2!}+x^2\varepsilon(x)\\
\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+x^2\varepsilon(x)\\
x\sqrt{1+x} &= x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{8}+x^3\varepsilon(x)\\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)\\
\exp(x) &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x),\\
\exp(\sin x)) &= T_3\left(\left(x\mapsto 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\right)+x^3\varepsilon(x)\\
\exp(\sin x)) &= 1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)\\
\exp(\sin x)) &= 1+x+\frac{x^2}{2}+x^3\varepsilon(x)\ ;
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\frac{x\log \mathrm{ch}x}{1+x\sqrt{1+x}-\exp(\sin x)} &= \frac{\frac{x^3}{2}+x^3\varepsilon(x)}{1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{8}-1-x-\frac{x^2}{2}+x^3\varepsilon(x)}\\
\frac{x\log \mathrm{ch}x}{1+x\sqrt{1+x}-\exp(\sin x)} &= \frac{\frac{x^3}{2}+x^3\varepsilon(x)}{-\frac{x^3}{8}+x^3\varepsilon(x)}\\
\lim_{x\to 0}\frac{x\log \mathrm{ch}x}{1+x\sqrt{1+x}-\exp(\sin x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{1/2+\varepsilon(x)}{-1/8+\varepsilon(x)}=-4.
\end{aligned}
$$

Remarque. — Un calcul de dérivée s'obtient par un calcul de limite et donc parfois par développements limités.

Exemple. — On prend

$$f(x)=\frac{\cos x}{1+x+x^2}$$

et on cherche $f^{(i)}(0)$ pour $i\in\{0,\dots,4\}$, c'est-à-dire que l'on cherche le développement limité de f en 0 à l'ordre 4.

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon(x).$$

On cherche le développement limité de

$$g(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$$

que l'on peut voir comme

$$g(x)=(a\circ b)(x)\ ;\ a(x)=\frac{1}{1+x}\ ;\ b(x)=x+x^2.$$

$$
\begin{aligned}
a(x) &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x)\\
g(x) &= T_4((x \mapsto 1 - x + x^2 - x^3 + x^4)(x + x^2)) + x^4\varepsilon(x)\\
g(x) &= 1 - x - x^2 + x^2 + x^4 + 2x^3 + x^4 - x^3 - 3x^4 + x^4 + x^4\varepsilon(x)\\
g(x) &= 1 - x + x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x)\\
f(x) &= T_4\left((1 - x + x^3 - x^4)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\right) + x^4\varepsilon(x)\\
f(x) &= 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{2} - \frac{23x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)
\end{aligned}
$$

Comme f admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, elle est dérivable quatre fois. De plus

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 1\\
f'(0) &= -1\\
f^{(2)}(0) &= -1\\
f^{(3)}(0) &= 9\\
f^{(4)}(0) &= -23.
\end{aligned}
$$

5.2. Courbes paramétrées

Rappels sur les fonctions classiques. — Quelques rappels :

— on définit le logarithme népérien par :

$$\log(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Ainsi $\log : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ est croissante, C^∞,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log x &= \frac{1}{x}\\
\lim_{x\to 0, x>0} \log x &= -\infty\\
\lim_{x\to\infty} \log x &= +\infty\\
\log(ab) &= \log a + \log b.
\end{aligned}
$$

— on définit l'exponentielle, $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, qui est croissante, lisse et stable par dérivation.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \exp(x) &= 0\\
\lim_{x\to+\infty} \exp(x) &= \infty\\
\exp(a+b) &= \exp(a)\exp(b).
\end{aligned}
$$

— soient $a \in \mathbf{R}_+^*, b \in \mathbf{R}$ alors on définit :

$$a^b = \exp(b \log a).$$

$$\begin{aligned}
a^{b+b'} &= a^b a^{b'} \\
(aa')^b &= a^b (a')^b \\
\left(a^b\right)^c &= a^{bc} \\
a^0 &= 1 = 1^b \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^b &= b x^{b-1} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x &= \log(a) a^x \\
\lim_{x\to 0, x>0} x^a (\log x)^n &= 0 \ \ , \ a > 0 \text{ et } n \in \mathbf{Z} \\
\lim_{x\to +\infty} x^a e^x &= +\infty \\
\lim_{x\to -\infty} x^a e^x &= 0.
\end{aligned}$$

— trigonométrie :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \\
\sin(x+t) &= \cos(t)\sin(x) + \cos(x)\sin(t) \\
\cos(x+t) &= \cos(x)\cos(t) - \sin(x)\sin(t) \\
\tan(x+t) &= \frac{\tan(t) + \tan(x)}{1 - \tan(x)\tan(t)}.
\end{aligned}$$

— Arcsin : $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est lisse sur $]-1, 1[$ et :

$$\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ est la réciproque de cos et on a la relation :

$$\mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Arctan : $\mathbf{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ est lisse et :

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

— trigonométrie hyperbolique :

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\mathrm{ch}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\mathrm{th}(x) &= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}
\end{aligned}$$

leurs réciproques Arcsh : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, Arcch : $[-1, \infty] \to \mathbf{R}_+$ et Arcth $:]-1,+1[\to \mathbf{R}$ sont lisses sur l'intérieur de leur domaine de définition.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arcsh}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\
\mathrm{Arcch}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \\
\mathrm{Arcsh}(t) &= \log(t + \sqrt{t^2+1}) \\
\mathrm{Arcch}(t) &= \log(t + \sqrt{t^2-1}).
\end{aligned}$$

DÉFINITION 5.1. —
Soit $f : I \to \mathbf{R}^2$ avec I un intervalle ou une union finie d'intervalles dans $\mathbf{R}$. Soient u, v telles que

$$\forall t,\ f(t) = (u(t), v(t)).$$

1. On dit que $\lim_{t\to t_0} f(t) = l$ où $l = (l_1, l_2)$ si $\lim_{t\to t_0} u(t) = l_1$ et $\lim_{t\to t_0} v(t) = l_2$.
2. On dit que f est continue en t_0 si les fonctions u et v sont continues en 0. f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.
3. On dit que f est dérivable en t_0 si u et v le sont et on note $f'(t_0) = (u'(t_0), v'(t_0))$.

PROPOSITION 5.1. —
Si $f, g : I \to \mathbf{R}^2$ et si $t_0 \in I$ alors :

1. si $\lim_{t\to t_0} f(t) = l$ et $\lim_{t\to t_0} g(t) = m$ alors $\lim_{t\to t_0}(f+g)(t) = l + m$;
2. si f, g sont dérivables en t_0 alors $f+g$ aussi et on a $(f+\lambda g)'(t_0) = f'(t_0)+\lambda g'(t_0)$.

PROPOSITION 5.2. —
Soit (r, s) une base de $\mathbf{R}^2$ et soit $f : I \to \mathbf{R}^2$ telle que $f(t) = (u(t), v(t))$. Soit $(a(t), b(t))$ les coordonnées de $f(t)$ dans la base (r, s).

1. On a :
$$\lim_{t\to t_0} f(t) = l \iff \begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} a(t) = \alpha \\ \lim\limits_{t\to t_0} b(t) = \beta \end{cases}$$
où (α, β) sont les coordonnées de l dans la base (r, s).
2. Idem pour la dérivée.

DÉMONSTRATION 5.1. —
Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ et $r, s \in \mathbf{R}^2$. On a $l = \alpha \cdot r + \beta \cdot s$,

$$f(t) = (u(t), v(t)) = a(t) \cdot r + b(t) \cdot s$$

avec $a(t), b(t) \in \mathbf{R}$.

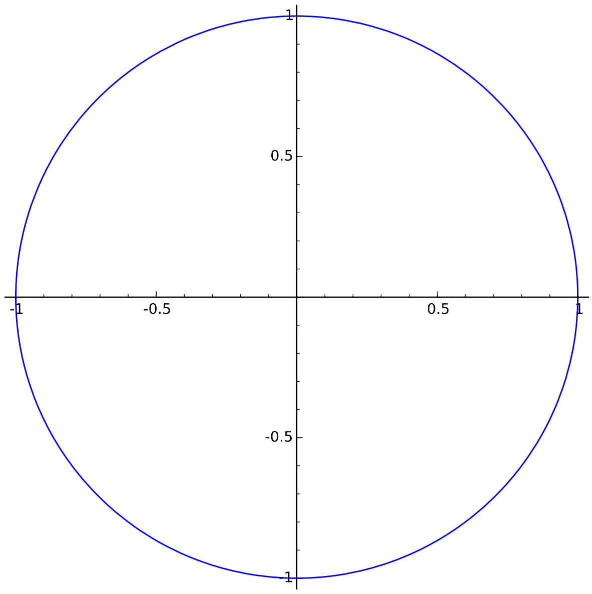
1. On a que $\lim_{t\to t_0} f(t) = l$ c'est par définition :
$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} u(t) = l_1 \\ \lim\limits_{t\to t_0} v(t) = l_2 \end{cases}.$$
$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} a(t) = \alpha \\ \lim\limits_{t\to t_0} b(t) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} (a(t)r_1 + b(t)s_1) = \alpha r_1 + \beta s_1 \\ \lim\limits_{t\to t_0} (a(t)r_2 + b(t)s_2) = \alpha r_2 + \beta s_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} a(t)r_1 + b(t)s_1 = l_1 \\ \lim\limits_{t\to t_0} a(t)r_2 + b(t)s_2 = l_2 \end{cases}$$
2. De même ...

Définition 5.2. —
On dit que $f : I \to \mathbf{R}^2, f(t) = (u(t), v(t))$ admet un développement limité à l'ordre n en t_0 si $u(t)$ et $v(t)$ admettent un développement limité à l'ordre n en t_0.
Si $u(t) = u_0 + u_1(t-t_0) + \ldots + u_n(t-t_0)^n + (t-t_0)^n\varepsilon_1(t)$ et $v(t) = v_0 + v_1(t-t_0) + \ldots + v_n(t-t_0)^n + (t-t_0)^n\varepsilon_2(t)$ alors on appelle
$$f(t) = (u_0, v_0) + (t-t_0)(u_1, v_1) + \ldots + (t-t_0)^n(u_n, v_n) + (t-t_0)^n\varepsilon(t)$$
le développement limité de f à l'ordre n en t_0 avec $\lim_{t\to t_0} \varepsilon(t) = (0,0)$.

Exemple. — Le développement limité de $f : t \mapsto (2t^3 - t\sin t, t^3 + \cos t)$ à l'ordre 4 en 0 :
$$\begin{aligned} 2t^3 - t\sin t &= -t^2 + 2t^3 + \frac{t^4}{6} + t^4\varepsilon(t) \\ t^3 + \cos t &= 1 - \frac{t^2}{2} + t^3 + \frac{t^4}{24} + t^4\varepsilon(t) \\ f(t) &= (0,1) - t^2(1, 1/2) + t^3(2,1) + t^4(1/6, 1/24) + t^4\varepsilon(t). \end{aligned}$$

Définition 5.3. —
On appelle *courbe paramétrée* de $\mathbf{R}^2$ une fonction $f : I \to \mathbf{R}^2$.

Exemple. — $f : R \to \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$.



Remarque. — Supposons que f soit dérivable en $t \in I$. Alors $u(t), v(t)$ admettent des développements limités à l'ordre 1 en t_0 et donc f admet aussi un développement limité à l'ordre 1 en t_0. Or si

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t)$$

alors

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}(f(t) - f(t_0)) = f'(t_0).$$

> Définition 5.4. —
> On appelle $f'(t_0)$ *vecteur tangent* de f en t_0. La droite affine passant par $f(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$ s'appelle la *tangente* à f en t_0.

Remarque. — Le vecteur tangent dépend du paramétrage de la courbe et non seulement de sa représentation.

Exemple. — Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ et soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$. Remarquons que f et g on même représentation graphique. Cependant les vecteurs tangents en 0 à f et g sont :

$$f'(0) = (0, 1)$$
$$g'(0) = (0, 2).$$

La tangente à f en t_0 est la droite d'équation :

$$\det \begin{pmatrix} y - v(t_0) & v'(t_0) \\ x - u(t_0) & u'(t_0) \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire :

$$(y - v(t_0))u'(t_0) - (x - u(t_0))v'(t_0) = 0.$$

5.3. Étude de fonctions

Soit $f : I \to \mathbf{R}$, où I est un intervalle de $\mathbf{R}$. On procède à l'étude de f au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. En particulier, on s'intéresse notamment au graphe de f.

5.3.1. Étude locale

Proposition 5.3. —
Soit $x_0 \in I, f : I \to \mathbf{R}$. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 :

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x), \ \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

où $P \in \mathbf{R}[x], P(x) = a_p x^p + \ldots + a_n x^n$ avec $0 \leq p \leq n$ et $a_p \neq 0$.
Alors il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $x \neq x_0$, $f(x)$ est non nul et a le signe de $a_p(x - x_0)^p$.

Démonstration 5.2. —
Puisque $p \leq n$, le développement limité de f en x_0 à l'ordre p est :

$$f(x) = (T_p(P))(x - x_0) + (x - x_0)^p \varepsilon(x).$$

C'est-à-dire :

$$f(x) = a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p \varepsilon(x).$$

Pour tout $x \neq x_0$, on a :

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^p} = a_p + \varepsilon(x)$$

et $a_p \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi il existe α tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $x \neq x_0$, $|\varepsilon(x)| < \frac{1}{2}(a_p)$. C'est-à-dire que pour un tel x, $f(x) \neq 0$ et est du même signe que $a_p(x - x_0)$.

Définition 5.5. —
Si $I \subset \mathbf{R}$ est un intervalle et $f : I \to \mathbf{R}$ est une fonction numérique et si $x_0 \in \overline{I}$ [4§], on dit que f est *positive au voisinage de* x_0 s'il existe un voisinage $J \subset I$ de x_0 tel que pour tout $x \in J$ et $x \neq x_0$, $f(x) > 0$.

Exemple. — Prenons :

$$f(x) = e \cdot \sqrt{x} - e^x.$$

4§. Dans I ou l'une de ses bornes.

On cherche le signe de f quand x tend vers 1.

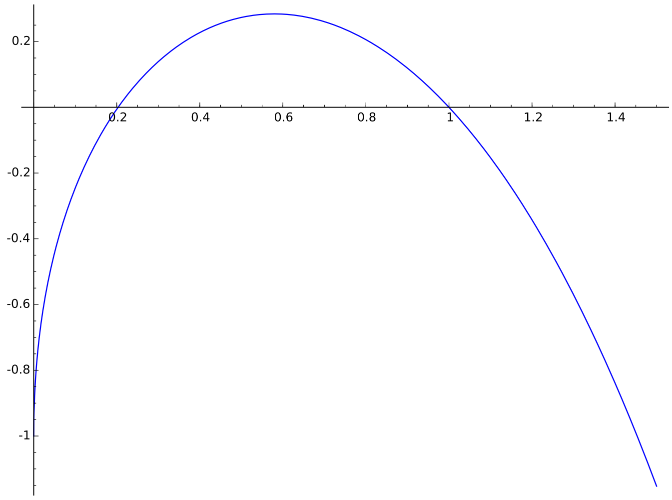
$$f(x) = e\left[(1+(x-1))^{1/2} - e^{x-1}\right]$$

$$\begin{cases} (1+(x-1))^{1/2} = 1 + \dfrac{1}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \\ e^{x-1} = 1 + (x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \end{cases}$$

$$f(x) = e\left(-\frac{1}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x)\right)$$

$$f(x) = \frac{-e}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x).$$

Ainsi au voisinage de 1, le signe de f est le même que celui de $1-x$.



Définition 5.6. —
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. La *tangente* en $(x_0, f(x_0))$ au graphe de f est la droite affine d'équation :

$$y = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0).$$

Définition 5.7. —
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$.
On dit que f admet une *inflexion* au point $(x_0, f(x_0))$ si la fonction

$$x \mapsto f(x) - (f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0))$$

s'annule en x_0 en changeant de signe.

Proposition 5.4. —
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. On a :

1. si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ est le développement limité de f à l'ordre 1 en x_0, alors la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ est donnée par :
$$y = a_0 + a_1(x - x_0) \ ;$$
2. si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\varepsilon(x)$ est le développement limité de f à l'ordre 2 en x_0, alors
   — si $a_2 > 0$ alors pour tout $x \neq x_0$ dans un voisinage suffisamment petit de x_0, le point $(x, f(x))$ est au-dessus de la tangente ;
   — si $a_2 < 0$ alors pour tout $x \neq x_0$ dans un voisinage suffisamment petit de x_0, le point $(x, f(x))$ est en-dessous de la tangente ;
3. si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_3(x - x_0)^3 + (x - x_0)^3\varepsilon(x)$ est le développement limité de f à l'ordre 3 en x_0, alors si $a_3 \neq 0$, f admet un point d'inflexion en $(x_0, f(x_0))$.

Démonstration 5.3. —
Dans l'ordre :
1. Comme f est dérivable en x_0, on a $a_1 = f'(x_0)$ et $a_0 = f(x_0)$, l'équation de la tangente est
$$y = a_1(x - x_0) + a_0.$$
2. Posons
$$u(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)).$$
On a alors :
$$u(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 - a_1(x - x_0) - a_0 + (x - x_0)^2\varepsilon(x) = a_2(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\varepsilon(x).$$
Comme $a_2 \neq 0$ (par hypothèse) alors la proposition précédente entraine que le signe de $u(x)$ au voisinage de 0 est celui de $a_2(x - x_0)^2$, c'est-à-dire le signe de a_2.
3. Posons de même
$$u(x) = a_3(x - x_0)^3 + (x - x_0)^3\varepsilon(x).$$
D'après la proposition précédente, le signe de $u(x)$ au voisinage de x_0 est celui de $a_3(x - x_0)$ puisque $a_3 \neq 0$. Comme $(x - x_0)^3$ n'est pas de signe constant, c'est un point d'inflexion.

Remarque. — Si $a_2 \neq 0$, alors :
— si $a_2 > 0$, $f(x)$ admet un minimum local en x_0 ;
— sinon, $f(x)$ admet un maximum local en x_0.

Remarque, généralisation du résultat. — Supposons que le développement limité de f en x_0 est de la forme
$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p\varepsilon(x),$$

avec $p \geq 2$. De plus on suppose $a_p \neq 0$. Alors en posant

$$u(x) = f(x) - (f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0))$$

est du signe de $a_p(x-x_0)^p$ au voisinage de x_0.

- Si p est pair alors $a_p > 0$ implique que x_0 est un minimum local, $a_p < 0$ implique que x_0 est un maximum local.
- Si p est impair alors x_0 est un point d'inflexion.

Exemple. — Prenons :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 5}$$

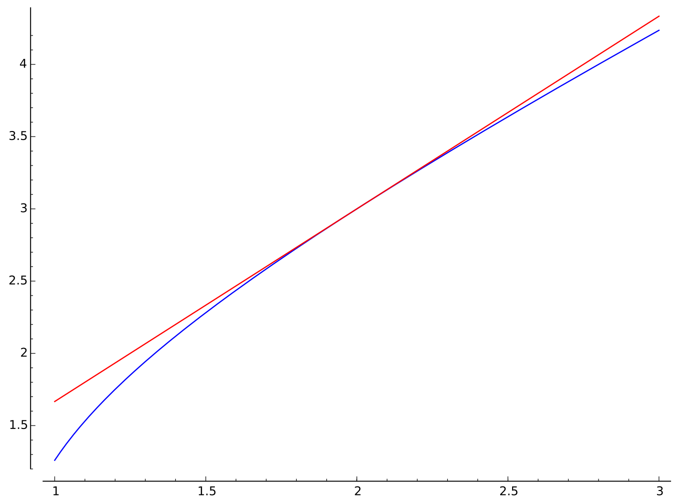
définie sur $\mathbf{R}$ et étudions f au voisinage de $x_0 = 2$. On a :

$$\begin{aligned}
f(x+2) &= \left((x+2)^3 + 6x^2 - 5\right)^{1/3} \\
f(x+2) &= \left(27 + 36x + 12x^2 + x^3\right)^{1/3} \\
f(x+2) &= 3 \cdot \left(1 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{27}x^3\right)^{1/3} \\
f(x+2) &= 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2\right) + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)}{2}\left(\frac{16}{9}x^2\right)\right) + x^2\varepsilon(x) \\
f(x+2) &= 3 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{27}x^2 + x^2\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

L'équation de la tangente est :

$$y = 3 + \frac{4}{3}(x-2).$$

Comme le terme en x^2 est non nul et négatif, la courbe est en-dessous de la tangente.



5.3.2. Branches infinies

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction numérique.

Définition 5.8. —
Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, avec $a \in \mathbf{R}$ alors la droite $x = a$ est une *asymptote verticale* de f.
Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ alors f admet une *branche infinie* en $+\infty$.
Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ou si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ alors f admet une *branche infinie* en $-\infty$.
Soit $a, b \in \mathbf{R}$. La droite $y = ax + b$ est *asymptote* à f quand x tend vers $\pm\infty$ si :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax - b = 0.$$

Si $a = 0$ on dit que l'asymptote est *horizontale*.
Soit $a \in \mathbf{R}$, si

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

alors on dit que f a une *direction asymptotique de pente a en* $\pm\infty$.
Si

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

alors on dit que f a une *direction asymptotique verticale* en $\pm\infty$.

Proposition 5.5. —
Soient $a, b \in \mathbf{R}$. La droite $y = ax + b$ est asymptote à f quand x tend vers $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si, et seulement si :

— on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a\ ;$$

— et de plus

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = b.$$

Exemple. — Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par :

$$f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x^2+1}.$$

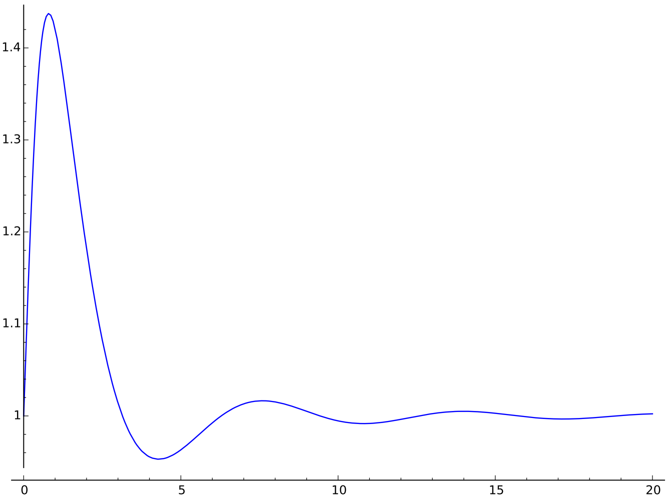
On a

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - 1| = 0$$

et donc $y = 1$ est asymptote à f en $+\infty$. La différence

$$f(x) - 1 = \frac{\sin x}{x^2+1}$$

est du signe de $\sin x$ qui oscille.



EXEMPLE. — Avec

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 5}$$

on regarde s'il y a une asymptote quand x tend vers $\pm\infty$ et la position par rapport à la possible asymptote. On écrit f sous la forme :

$$f(x) = xu(1/x)$$

avec

$$u(x) = \sqrt[3]{1 + 6x - 5x^3}.$$

Le développement limité de u en 0 à l'ordre 2 est :

$$\begin{aligned}
u(x) &= (1 + 6x - 5x^3)^{1/3} \\
u(x) &= 1 + \frac{1}{3}(6x) + \frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)\frac{1}{2}(36x^2) + x^2\varepsilon(x) \\
u(x) &= 1 + 2x - 4x^2 + x^2\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Ainsi pour x au voisinage de ∞ en valeur absolue :

$$f(x) = x\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{\varepsilon(1/x)}{x^2}\right) = x + 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(1/x),$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) - (x+2) = 0.$$

On regarde maintenant la position de f par rapport à $y = x + 2$. On a

$$f(x) - (x+2) = \frac{-4}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(1/x).$$

Ainsi quand $x \to +\infty$, f est en-dessous de l'asymptote, quand $x \to -\infty$, f est au-dessus de l'asymptote.

5.3.3. Étude de fonction

Par exemple avec
$$f(x) = x\log\left|2+\frac{1}{x}\right|$$
de domaine de définition $\mathbf{R}\setminus\{0,-1/2\}$.

Dérivée. — On calcule la dérivée de f :
$$\begin{aligned}
f(x) &= x(\log|2x+1| - \log|x|)\\
f'(x) &= \log\left|2+\frac{1}{x}\right| + x\left(\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x}\right)\\
f'(x) &= \log\left|2+\frac{1}{x}\right| - \frac{1}{2x+1}\\
f''(x) &= \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x} - \frac{2}{(2x+1)^2}\\
f''(x) &= \frac{-1}{x(2x+1)^2}
\end{aligned}$$

Une étude des signes montre qu'il existe un unique α entre $-1/2$ et 0 (strictement) tel que $f'(\alpha)=0$. En conclusion, f est croissante partout sauf sur $]-1/2,\alpha[$ où elle est décroissante.
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
ce qui nous donne deux branches infinies.
$$\lim_{x\to-1/2} f(x) = +\infty$$
et donc il y a une asymptote verticale en $x=-1/2$.
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0} f(x) &=?\\
f(x) &= x\log\left|2+\frac{1}{x}\right|\\
f(x) &= x\log|2x+1| - x\log x
\end{aligned}$$
or les deux termes tendent vers 0 en 0 et donc
$$\lim_{x\to0} f(x) = 0$$
et donc f admet un prolongement par continuité à 0 en 0.

Il reste à regarder les branches infinies :

— Quand $x \to \infty$, on cherche un développement limité de f en $+\infty$.

$$f(x) = x\log(2+1/x)$$
$$f(x) = x\log 2 + x\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)$$
$$f(x) = x\log 2 + x\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \mathrm{o}(1/x^2)\right)$$
$$f(x) = (\log 2)x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \mathrm{o}(1/x)$$

On en déduit que la droite d'équation

$$y = (\log 2)x + \frac{1}{2}$$

est asymptote oblique à f en $+\infty$ et la courbe est en-dessous de l'asymptote.

— En $-\infty$ la droite d'équation

$$y = (\log 2)x + \frac{1}{2}$$

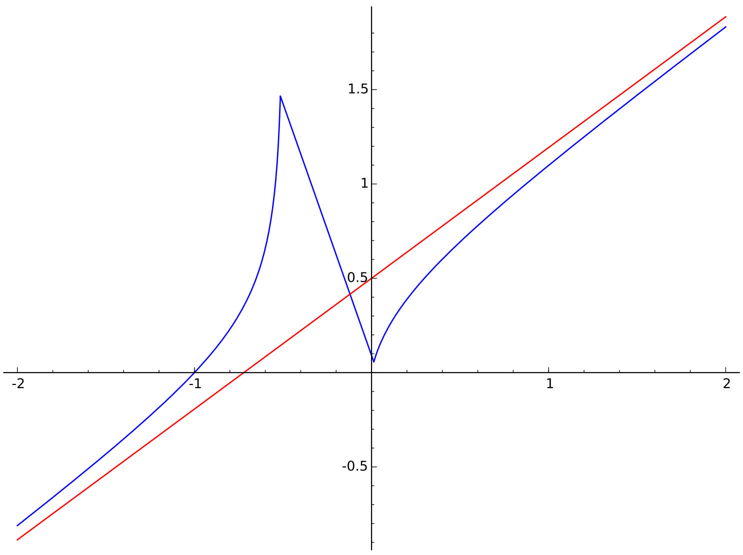
est également asymptote oblique à f en $-\infty$ et la courbe est au-dessus de l'asymptote.

— Pour ce qui est de la tangente en 0 :

$$f'(x) = \log\left|2+\frac{1}{x}\right| - \frac{1}{2x+1}$$

et alors

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log\left|2+\frac{1}{x}\right| = +\infty.$$



5.4. Courbes paramétrées

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbf{R}^2$ telle que $f(t) = (u(t), v(t))$.

Définition 5.9. —
Supposons que u, v sont continues.
Si u et v admettent un développement limité à l'ordre n au point t_0 :

$$u(t) = u_0 + u_1(t - t_0) + \ldots + u_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$
$$v(t) = v_0 + v_1(t - t_0) + \ldots + v_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

alors f admet un développement limité à l'ordre n en t_0 :

$$f(t) = f_0 + (t - t_0)f_1 + \ldots + (t - t_0)^n f_n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$
$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}\,,\ f_i = (u_i, v_i).$$

L'égalité précédente s'appelle le *développement limité de f en t_0 à l'ordre n.*

Remarque. — On a bien

$$\lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = (0, 0).$$

Définition 5.10. —
Une fonction $f : I \to \mathbf{R}^2$ s'appelle *courbe paramétrée de $\mathbf{R}^2$*.

Supposons que f est dérivable en $t_0 \in I$. f admet le développement limité en t_0 à l'ordre 1 suivant :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t).$$

Définition 5.11. —
Si $f'(t_0) \neq 0$ alors la tangente à la courbe au point $f(t_0)$ est la droite affine passant par $f(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$. L'équation est

$$\det \begin{pmatrix} x - u(t_0) & u'(t_0) \\ y - v(t_0) & v'(t_0) \end{pmatrix} = 0.$$

En d'autres termes, c'est l'équation :

$$(y - v(t_0)) \cdot u'(t_0) - (x - u(t_0)) \cdot v'(t_0) = 0.$$

On se demande quelles sont les conditions à l'existence de la tangente en un point ainsi que la position de la tangente par rapport à la courbe.

Remarque. — On retrouve l'étude des fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}$ si on a

$$f(t) = (t, v(t)).$$

Supposons que u, v admettent des développements limités en t_0 à l'ordre $n \geq 2$. On a

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)^2 w_2 + \ldots + (t - t_0)^n w_n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

où $w_2, \ldots, w_n \in \mathbf{R}^2$ et $\lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0_{\mathbf{R}^2}$.

1. Supposons que $f'(t_0) \neq 0$ et $f'(t_0)$ est non colinéaire à w_2. On tronque le développement limité à l'ordre 2 :

   $$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)^2 w_2 + (t - t_0)^2 \varepsilon(t).$$

   Soient $(a(t), b(t))$ les coordonnées de $\varepsilon(t)$ dans la base $(f'(t_0), w_2)$. Ainsi :

   $$f(t) - f(t_0) = \left(t - t_0 + (t - t_0)^2 a(t)\right) f'(t_0) + (t - t_0)^2 (b(t) + 1) w_2$$
   $$\lim_{t \to t_0} a(t) = \lim_{t \to t_0} b(t) = 0.$$

   Selon la coordonnée de $f'(t_0)$ on a que $(t - t_0)^2 a(t)$ tend vers 0 et alors $t - t_0$ détermine le signe. Selon la coordonnée w_2, dans un voisinage suffisamment petit de t_0 on a que la coordonnée est de signe positif.

2. Supposons que $f'(t_0) \neq 0$, $w_2 = \lambda f'(t_0)$ et enfin w_3 et $f'(t_0)$ non colinéaires. On a alors dans la base $(f'(t_0), w_3)$:

   $$f(t) - f(t_0) = \left(t - t_0 + \lambda(t - t_0)^2\right) f'(t_0) + (t - t_0)^3 w_3 + (t - t_0)^3 \varepsilon(t).$$

   On décompose $\varepsilon(t)$ dans cette base :

   $$\varepsilon(t) = a(t) f'(t_0) + b(t) w_3.$$

   On sait que

   $$\lim_{t \to t_0} a(t) = \lim_{t \to t_0} b(t) = 0.$$

   Dans cette base, on a :

   $$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} t - t_0 + \lambda(t - t_0)^2 + (t - t_0)^3 a(t) \\ (t - t_0)^3 + (t - t_0)^3 b(t) \end{pmatrix}$$

   Sur chaque coordonnée, le signe est celui de $t - t_0$.

Remarque. — Supposons $f'(t_0) \neq 0, n \geq 3$ et il existe un entier $p \in \{3, \ldots, n\}$ tel que les vecteurs $w_2, w_3, \ldots, w_{p-1}$ sont colinéaires à $f'(t_0)$ et tel que w_p n'est pas colinéaire à $f'(t_0)$. Ainsi, $(f'(t_0), w_p)$ est une base de $\mathbf{R}^2$.

On écrit le développement limité de $f(t) - f(t_0)$ dans cette base. On étudie le signe des coordonnées de $f(t) - f(t_0)$ quand $t \to t_0$. Si p est pair alors la courbe est comme dans le cas $p = 2$ (la courbe est du côté de w_p par rapport à la tangente), sinon comme dans le cas $p = 3$(elle traverse la tangente).

3. Supposons que $f'(t_0) = 0$ et que w_2, w_3 forme une base de $\mathbf{R}^2$. On a
$$f(t) - f(t_0) = (t - t_0)^2 w_2 + (t - t_0)^3 w_3 + (t - t_0)^3 \varepsilon(t).$$
On décompose $\varepsilon(t)$ dans la base (w_2, w_3) : $\varepsilon(t) = a(t)w_2 + b(t)w_3$ avec $\lim_{t\to t_0} a(t) = \lim_{t\to t_0} b(t) = 0$. Les coordonnées dans cette base de $f(t) - f(t_0)$ sont alors :
$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} (t - t_0)^2 + (t - t_0)^3 a(t) \\ (t - t_0)^3 + (t - t_0)^3 b(t) \end{pmatrix}.$$
Ainsi, la première coordonnée est positive et la seconde est du signe de $t - t_0$. Une telle situation est un *point de rebroussement*.

4. Supposons que $f'(t_0) = 0$, $w_3 = \lambda w_2$ et w_2, w_4 forme une base. On pose $\varepsilon(t) = a(t)w_2 + b(t)w_4$. Dans ces coordonnées :
$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} (t - t_0)^2 + \lambda(t - t_0)^3 + (t - t_0)^4 a(t) \\ (t - t_0)^4 (1 + b(t)) \end{pmatrix}.$$
Les deux coordonnées sont positives quand $t \to t_0$. C'est aussi un point de rebroussement