DÉTERMINANTS, VALEURS PROPRES ET DIAGONALISATION

Table des matières

1. DÉTERMINANTS

1.1. Différentes définitions

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ avec $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

Définition 1.1.0.1 (Déterminant). —
On définit en premier lieu :

$$\det A = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) a_{w(i),1} \cdot a_{w(2),2} \cdot \dots \cdot a_{w(n),n}.$$

C'est la formule de Cramer.

DÉFINITION 1.1.0.2. —
Une seconde définition possible :
Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, soit $A_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ la matrice (extraite) obtenue en enlevant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A.
On a alors :

$$\det{}' A = a_{1,1} \cdot \det{}'(A_{1,1}) - a_{1,2} \cdot \det{}'(A_{1,2}) + \ldots + (-1)^{n-1} a_{1,n} \cdot \det{}'(A_{1,n}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1,i} \cdot \det{}'(A_{1,i})$$

Exemple. — Prenons :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; A_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne avec la seconde définition :

$$\det A = 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2. — On vérifie que les deux définitions coïncident :

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} - a_{2,1} a_{1,2}.$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1} \det(a_{2,2}) - a_{1,2} \det(a_{2,1}) = a_{1,1} a_{2,2} - a_{2,1} a_{1,2}.$$

Remarque. — Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$ un n-uplet de vecteurs de E. Pour tout j, on pose :

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot e_i \quad a_{i,j} \in \mathbf{R}.$$

On appelle *déterminant* dans la base B de $(u_1, \ldots, u_n)$ le réel :

$$\det{}_B(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det(a_{i,j}).$$

Exemple. — Pour $n = 2$. On prend :

$$u_1 = 2e_1 + 3e_2,$$
$$u_2 = -e_1 + 6e_2.$$

On a alors :

$$\det{}_B(u_1, u_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 15.$$

Remarque. — Si $u_j = e_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ alors $\det_B(e_1, \ldots, e_n) = \det(I_d) = 1$.

PROPOSITION 1.1.0.1. —
On a les énoncés :

1. pour tout $w \in S_n$:
$$\det_B(u_{w(1)}, u_{w(2)}, \ldots, u_{w(n)}) = \varepsilon(w)\det_B(u_1, u_2, \ldots, u_n);$$
2. on en déduit que le déterminant change de signe si on échange deux colonnes ;
3. si pour $i \neq j$ on a $u_i = u_j$ alors le déterminant est nul (puisque négatif et positif simultanément).

DÉMONSTRATION 1.1.0.1. —
Il suffit de montrer le premier point.
On sait que S_n est engendré par les transpositions. On suppose donc que $w \in S_n$ est une transposition.
En fait, S_n est engendré par les transpositions simples, i.e. les transpositions de la forme $(k, k+1)$ avec $1 \leq k < n$. [1§]
On suppose donc que w est de la forme $(k, k+1)$. Soit A la matrice $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de ces n vecteurs dans les coordonnées de la base B. Soit A' la matrice obtenue en permutant les colonnes k et $k+1$ de A. Il faut donc vérifier que :
$$\det A' = \varepsilon(w)\det A = -\det A.$$
On calcule à gauche et à droite :
$$\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(A_{1,j}),$$
$$\det A' = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a'_{1,j}\det(A'_{1,j}).$$

- Pour $j \neq k, k+1$ on a $a'_{1,j} = a_{1,j}$ et $A'_{1,j}$ est obtenue en échangeant les colonnes k et $k+1$ de $A_{1,j}$
- Pour $j = k$ on a $a'_{1,k} = a_{1,k+1}$ et donc $A'_{1,k} = A_{1,k+1}$.
- Pour $j = k+1$ on a $a'_{1,k+1} = a_{1,k}$ et donc $A'_{1,k+1} = A_{1,k}$.

On en déduit :
$$\det A' = \sum_{j \neq k, k+1}(-1)^{j+1}\det(A'_{i,j})\ ^{(2\S)} + (-1)^{k+1}a'_{1,k}\det(A'_{1,k}) + (-1)^{k}a'_{1,k+1}\det(A'_{1,k+1}),$$
$$\det A' = \sum_{j \neq k, k+1}(-1)^{j+1}(-\det(A_{i,j})) + (-1)^{k+1}a_{1,k+1}(-\det(A_{1,k+1})) + (-1)^{k}a_{1,k}(-\det(A_{1,k})),$$
$$\det A' = -\det A.$$

1.2. Formes n-linéaires alternées

DÉFINITION 1.2.0.3 (Forme n-linéaire). —
Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Une forme n-linéaire sur E est une application $\varphi : E^n \to \mathbf{R}$ qui est linéaire sur chaque composante.

PROPOSITION 1.2.0.2. —
Soit B une base de E avec $\dim E = n$.

$$\det_B : \begin{cases} E^n \to \mathbf{R} \\ (u_1, \ldots, u_n) \mapsto \det_B(u_1, \ldots, u_n) \end{cases}$$

est une forme n-linéaire.

DÉMONSTRATION 1.2.0.2. —
On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,k-1} & aa'_{1,k} + ba''_{1,k} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,k-1} & aa'_{2,k} + ba''_{2,k} & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,k-1} & a'_{1,k} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,k-1} & a'_{2,k} & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,k-1} & a''_{1,k} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,k-1} & a''_{2,k} & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

On veut montrer :

$$\det A = a\det A' + b\det A''.$$

On calcule :

$$\det A = \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{i,j}) + (-1)^{k+1}(aa'_{1,k} + ba''_{1,k})\det(A_{1,k}),$$
$$\det A' = \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A'_{i,j}) + (-1)^{k+1} a'_{1,k}\det(A_{1,k}),$$
$$\det A'' = \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A''_{i,j}) + (-1)^{k+1} a''_{1,k}\det(A_{1,k})$$

On doit alors montrer :

$$\forall j \neq k,\ \det A_{i,j} = a\det(A'_{i,j}) + b\det(A''_{i,j})$$

ce qui est démontré par hypothèse de récurrence.

1§. En effet, toute transposition est un produit de transpositions simples par une conjugaison adaptée : on « renomme » les éléments.
2§. Par récurrence sur n on a $\det(A'_{i,j}) = -\det(A_{i,j})$.

Définition 1.2.0.4 (Forme n-linéaire alternée). —
Soit $\varphi : E^n \to \mathbf{R}$ une forme n-linéaire alternée avec E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
φ est une forme n-linéaire alternée si on a :

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$$

dès que deux composantes u_i, u_j avec $i \neq j$ coïncident.

Remarque. — On en déduit que le déterminant dans une base donnée est une forme n-linéaire alternée.

Proposition 1.2.0.3. —
Soit φ une forme n-linéaire alternée. Alors pour tout $w \in S_n$, $\varphi(u_{w(1)}, \ldots, u_{w(n)}) = \varepsilon(w)\varphi(u_1, \ldots, u_n)$.

Démonstration 1.2.0.3. —
On peut supposer que w est une transposition simple : $w = (k, k+1)$ avec $1 \leq k < n$.
On veut montrer :

$$\varphi(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, u_k, u_{k+2}, \ldots, u_n) = -\varphi(u_1, \ldots, u_n).$$

Pour simplifier les notations, on oublie les indices u_i avec $i \neq k, k+1$. On a :

$$\varphi(u_k + u_{k+1}, u_k + u_{k+1}) = 0$$

et donc par linéarité :

$$\varphi(u_k, u_k) + \varphi(u_k, u_{k+1}) + \varphi(u_{k+1}, u_k) + \varphi(u_{k+1}, u_{k+1}) = 0 \iff \varphi(u_k, u_{k+1}) = -\varphi(u_{k+1}, u_k).$$

Proposition 1.2.0.4. —
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit $\varphi : E^n \to \mathbf{R}$ une forme n-linéaire alternée. Alors :

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = \det_B(u_1, \ldots, u_n)\varphi(e_1, \ldots, e_n)$$

où les u_i sont exprimés dans la base B.

Remarque. — Toutes les formes n-linéaires alternées sont proportionnelles au déterminant.

Démonstration 1.2.0.4. —
Soit $u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$, les $a_{i,j}$ sont les coordonnées des u_j dans la base B.
On a :

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n a_{i,1} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^n a_{i,n} e_i\right).$$

Comme φ est n-linéaire alternée :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \sum_{w \in S_n} a_{w(1),1} a_{w(2),2} \dots a_{w(n),n} \varphi(e_{w(1)}, \dots, e_{w(n)})$$
$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \sum_{w \in S_n} a_{w(1),1} a_{w(2),2} \dots a_{w(n),n} \varepsilon(w) \varphi(e_1, \dots, e_n)$$
$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(u_1, \dots, u_n) \varphi(e_1, \dots, e_n)$$

Remarques. — On a démontré :

1. Pour une base B choisie, le déterminant $\det_B$ est une forme n-linéaire alternée ;
2. pour toute forme n-linéaire alternée, φ, on a : $\varphi(\cdot) = \det_B(\cdot)\varphi(B)$;
3. en particulier, les deux déterminants coïncident.

Proposition 1.2.0.5. —
Pour tout $A \in M_n(\mathbf{R})$ on a :

$$\det(A) = \det(A^t).$$

Démonstration 1.2.0.5. —
On a :

$$A = (a_{i,j})$$
$$A^t = (b_{i,j}),\ b_{i,j} = a_{j,i}$$

On calcule par la formule de Cramer :

$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^{n} b_{w(i),i},$$
$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^{n} a_{i,w(i)}.$$

Pour w fixé, dans i décrit 1 à n alors $w(i)$ décrit également 1 à n. On effectue un changement de variable $j = w(i)$ et alors $i = w^{-1}(j)$ et on a :

$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{j=1}^{n} a_{w^{-1}(j),j},$$
$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{w(j),j},$$
$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{j=1}^{n} a_{w(j),j},$$
$$\det(A^t) = \det(A).$$

Remarque. — On peut calculer det(A) en développant par rapport à la première ligne ou la première colonne (au choix). On a alors :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^n a_{i,1} \det(A_{i,1}).$$

PROPOSITION 1.2.0.6. —
Si $A \in M_n(\mathbf{R})$ est triangulaire alors :

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

DÉMONSTRATION 1.2.0.6. —
Supposons A triangulaire supérieure, c'est-à-dire $a_{i,j} = 0$ si $i > j$.
Par la formule de CRAMER :

$$\det(A) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^{n} a_{i,w(i)}.$$

Or les seuls w qui contribuent à cette somme sont ceux tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, i \leq w(i),$$

c'est-à-dire : $w = \mathrm{id}$ (3§).
En développant par rapport à une ligne (ou une colonne quelconque) :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{j,i} \det(A_{j,i}).$$

Si A' désigne la matrice obtenue en permutant les lignes de A par $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j \end{pmatrix}$:

$$\det(A') = \varepsilon(w)\det(A) = (-1)^{j+1}\det(A).$$

On note $A' = (a'_{k,l})_{k,l \in \{1,\dots,n\}}$.
En choisissant $j > 1$:

$$\det(A') \overset{(4§)}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a'_{1,i} \det(A'_{1,i}),$$

$$\det(A') = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{j,i} \det(A_{j,i});$$

$$\det(A) = (-1)^{j+1} \det(A'),$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{j,i} \det(A_{j,i}).$$

2. DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

2.1. Invariance par changement de base

PROPOSITION 2.1.0.7. —
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $C = (u_1, \ldots, u_n)$ un système de n vecteurs de E. Alors C est une base de E si, et seulement si :

$$\det_B(C) \neq 0.$$

DÉMONSTRATION 2.1.0.7. —
Supposons que C est une base de E.
On a vu que si $\varphi : E^n \to \mathbf{K}$ est une forme n-linéaire alternée alors :

$$\forall (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n,\ \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det_B(u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot \varphi(e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

On applique cette formule avec $\varphi = \det_C$ et on a :

$$\begin{aligned} \det_C(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= \det_B(C)\det_C(B), \\ 1 = \det_C(C) &= \det_B(C)\det_C(B), \end{aligned}$$

et donc $\det_B(C) \neq 0$.
Supposons maintenant que C est liée. Il existe alors i tel que u_i est combinaison linéaire des u_j avec $j \neq i$. Par exemple :

$$u_i = \sum_{j \neq i} a_j \cdot u_j,\ (a_j \in \mathbf{R})$$

$$\det_B(C) = \det_B(u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, \sum_{j \neq i} a_j \cdot u_j, u_{i+1}, \ldots, u_n),$$

$$\det_B(C) = \sum_{j \neq i} a_j \det_B(u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, \underset{j \neq i}{u_j}, u_{i+1}, \ldots, u_n),$$

or $\det_B$ est alternée et comme u_j apparaît deux fois dans la dernière expression, on a

$$\det_B(C) = 0.$$

3§. Soit $w \in S_n$, $w : \{1, 2, \ldots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \ldots, n\}$.
Si $i \leq w(i)$ pour tout i alors $w(k) = k$ pour tout k par récurrence descendante sur k :
— $n \leq w(n)$ et donc $w(n) = n$;
— $k - 1 \leq w(k-1)$ et donc $w(k-1) = w(k)$.

4§. En développant par rapport à la première ligne.

PROPOSITION 2.1.0.8. —
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, $B = (e_1, \ldots, e_n)$, $C = (u_1, \ldots, u_n)$ deux bases de E et f un endomorphisme de E. Alors :

$$\det_B(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \det_C(f(u_1), \ldots, f(u_n)).$$

Remarque. — En d'autres termes, $\det_B(f(B))$ ne dépend pas du choix de la base B. On l'appelle $\det(f)$.

DÉMONSTRATION 2.1.0.8. —
On utilise la formule :

$$\forall (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n,\ \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det_B(u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot \varphi(e_1, e_2, \ldots, e_n),$$

où φ est une forme n-linéaire alternée.
On pose :

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = \det_B(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n))$$

et on a alors :

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = \det_B(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \det_C(f(u_1), \ldots, f(u_n))\det_B(C).$$

De même :

$$\det_B(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \det_B(C)\det_B(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

Et donc :

$$\det_B(f(u_1), \ldots, f(u_n))\det_B(C) = \det_B(f(e_1), \ldots, f(e_n))\det_B(C)$$

et $\det_B(C) \neq 0$. Donc l'égalité voulue est obtenue.

PROPOSITION 2.1.0.9. —
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, f et g deux endomorphismes de E. Alors :

$$\det(fg) = \det(f)\det(g).$$

DÉMONSTRATION 2.1.0.9. —
Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E,

$$\det(fg) = \det_B(fg(e_1), \ldots, fg(e_n)).$$

Considérons la forme n-linéaire alternée φ telle que :

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = \det_B(g(u_1), \ldots, g(u_n)),$$

alors on a :

$$\varphi(f(u_1),\ldots,f(u_n)) = \det_B(f(u_1),\ldots,f(u_n))\varphi(e_1,\ldots,e_n),$$
$$\det_B(gf(e_1),\ldots,gf(e_n)) = \det_B(f(e_1),\ldots,f(e_n))\det_B(g(e_1),\ldots,g(e_n)),$$
$$\det(gf) = \det(g)\det(f).$$

Remarque. — Si $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ alors

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

3. DIAGONALISATION

DÉMONSTRATION 3.0.0.10. —
Une matrice A est *diagonalisable* si elle est conjugué par un isomorphisme à une matrice diagonale.

3.1. Valeur propre et vecteur propre

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E.

DÉFINITION 3.1.0.5. —
On appelle *valeur propre* de f un réel λ tel qu'il existe un $v \in E - \{0\}$ tel que $f(v) = \lambda \cdot v$.
On dit que v est un *vecteur propre* de valeur propre λ.

Quitte à prendre la matrice A de f dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$ fixée de E, λ est une valeur de f (ou de A) si, et seulement si

$$\det(A - \lambda I_d) = 0.$$

Remarque. — Soient $A \in M_n(\mathbf{R})$, B la base canonique et $C = AB$. $\det(A)$ est non nul si, et seulement si, A est inversible. D'autre part s'il existe un vecteur propre v de valeur propre λ alors

$$\ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\}\,.$$

Or $f - \lambda I_d$ est un endomorphisme de E et E est de dimension finie. Donc il y a équivalence :

$$\ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I_d) = 0.$$

DÉFINITION 3.1.0.6. —
On appelle polynôme caractéristique de f (ou de A) le polynôme :

$$\chi_f(t) = \chi_A(t) = \det(A - tI_d).$$

Exemple. — En dimension 2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a

$$\chi_A(t) = t^2 - (a+d)t + ad - bc = t^2 - \operatorname{tr}(A)t + \det(A).$$

Remarque. — $\chi_A(t)$ est un polynôme de degré n de coefficient dominant $(-1)^n$ et de terme constant $\chi_A(0) = \det(A)$.

3.2. Sous-espaces propres

DÉFINITION 3.2.0.7. —
Soit f un endomorphisme de E et de matrice A. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On appelle *sous-espace propre* de f (ou de A) de valeur propre λ le sous-espace vectoriel $\ker(f - \lambda I_d)$.

PROPOSITION 3.2.0.10. —
Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors si $\lambda \neq \mu$ on a

$$\ker(f - \lambda I_d) \ker(f - \mu I_d) = \{0\}.$$

Plus généralement si, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}$ distincts alors on a :

$$\sum_{i=1}^{k} \ker(f - \lambda_i I_d) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(f - \lambda_i I_d)$$

DÉMONSTRATION 3.2.0.11. —
Il s'agit de vérifier que pour tout $i \neq j$ on a :

$$\ker(f - \lambda_i I_d) \cap \ker(f - \lambda_j I_d) = \{0\}.$$

Si $v \in \ker(f - \lambda_i I_d) \cap \ker(f - \lambda_j I_d)$ alors :

$$f(v) = \lambda_i v = \lambda_j v \implies v = 0.$$

COROLLAIRE 3.2.0.1. —
Soient $\dim E = n$, f est un endomorphisme de E, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ valeurs propres de f et E_i le sous-espace associé à la valeur propre λ_i. Alors si

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i,$$

l'endomorphisme f est diagonalisable.

DÉMONSTRATION 3.2.0.12. —
Si on fait la réunion :

$$B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i,$$

où B_i est une base de E_i on obtient une base de E. Dans cette base la matrice de f est diagonale où l'élément diagonal λ_i est la valeur propre correspondante. La matrice de passage de la base canonique à la base B donne la diagonalisablisation.

Donc pour diagonaliser A il faut vérifier si $E = \bigoplus_{i=1}^k E_i$ où les E_i sous les sous-espaces propres.

Exemple. — Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 1 & 4-\lambda & -5 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}, \\ \chi_A(\lambda) &= (1-\lambda)((4-\lambda)(-2-\lambda)+10) - (2(-2-\lambda)+6), \\ \chi_A(t) &= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2). \end{aligned}$$

Les trois valeurs propres sont $0, 1, 2$ et sont de multiplicité 1.

$$\begin{aligned} E_0 = \ker(A) &= \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, Ax = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \\ E_1 = \ker(A - I_d) &= \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \\ E_2 = \ker(A - 2I_d) &= \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

On a l'égalité :

$$E_0 \oplus E_1 \oplus E_2 = \mathbf{R}^3.$$

On en déduit les matrices de passage :

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.3. Conditions de diagonalisabilité

PROPOSITION 3.3.0.11. —
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E, $\chi_f(t) \in \mathbf{R}[t]$, $\deg \chi_f = n$.
Si χ_f admet n racines distinctes alors f est diagonalisable.

DÉMONSTRATION 3.3.0.13. —
Si :

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - t)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ racines distinctes. On a alors que pour tout i :

$$E_i = \ker(f - \lambda_i \mathrm{id}) \neq \{0\}$$

et donc $\dim E_i \geq 1$. On a alors que

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$$

est de dimension supérieure à n ce qui implique $\bigoplus E_i = \mathbf{R}^n$.

Remarque. — La condition donnée est nécessaire mais non suffisante. On cherche donc une condition nécessaire et suffisante.

PROPOSITION 3.3.0.12. —
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E, λ une valeur propre de f, m_λ la multiplicité de λ en tant que racine de $\chi_f(t)$ et E_λ le sous-espace propre associé à λ.
Alors $\dim E_\lambda \leq m_\lambda$.

DÉMONSTRATION 3.3.0.14. —
Soit $k = \dim E_\lambda$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ une base de E_λ. On peut compléter $(e_1, \ldots, e_k)$ en une base $(e_1, \ldots, e_n) = B$ de E.

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_d & X \\ \hline 0 & A \end{array}\right).$$

Or le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des matrices diagonales. [5§]
Ainsi :

$$\chi_f(t) = \det \left(\begin{array}{c|c} (\lambda - t) I_d & X \\ \hline 0 & A - tI_d \end{array}\right) = (\lambda - t)^k \chi_A(t)$$

et donc $m_\lambda \geq k$.

5§. En effet, en utilisant la règle de CRAMER la preuve est assez aisée.

Corollaire 3.3.0.2. —
On a les propositions suivantes :

1. Si $\chi_f(t)$ n'est pas scindé sur $\mathbf{R}$ alors f n'est pas diagonalisable.
2. S'il existe une valeur propre λ de f telle que $\dim E_\lambda < m_\lambda$ alors f n'est pas diagonalisable.

Démonstration 3.3.0.15. —
On démontre :

2. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres de $\chi_f(t)$, m_i la multiplicité de λ_i et E_i l'espace propre associé à λ_i. Alors la proposition nous dit que $\dim E_i \leq m_i$.

   Or $\deg \chi_f(t)$ =n et donc

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \leq n$$

$$\sum_{i=1}^{k} \dim E_i \leq \sum_{i=1}^{k} m_i \leq n$$

   S'il existe i_0 tel que $\dim E_{i_0} < m_{i_0}$ alors cela implique

$$\sum_{i=1}^{k} \dim E_i < \sum_{i=1}^{k} m_i \leq n.$$

   Et donc

$$\bigoplus_{i=1}^{n} E_i < n.$$

1. Idem.

Théorème 3.3.0.1. —
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E.
f est diagonalisable si, et seulement si, on a les conditions suivantes :

1. $\chi_f(t)$ est scindé sur $\mathbf{R}$;
2. pour tout $\lambda \in \chi_f^{-1}(0)$, la dimension du $\ker(f - \lambda \mathrm{id})$ est égal à la multiplicité de λ dans $\chi_f(t)$.

Démonstration 3.3.0.16. —
Le corollaire nous dit que ces conditions sont nécessaires.
Remarquons que :

$$\sum_{i=1}^{r} E_i = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$$

où E_i est le sous-espace propre de λ_i et r le nombre de racines deux à deux distinctes. Or la dimension de la somme est la somme des dimensions, c'est-à-dire la somme des multiplicité qui est égale à n. Donc f est diagonalisable.

Exemple. — On prend

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & -1 \\ -1 & 2-t & -1 \\ -1 & 1 & -t \end{pmatrix},$$

$$\chi_A(t) = -t(t-1)^2.$$

Les racines sont $0, 1$ de multiplicités respectives 1 et 2. On a :

$$E_0 = \ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_1 = \ker A - \mathrm{id} \qquad = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

On a

$$\dim E_0 = 1 \text{ et } \dim E_1 = 2$$

et donc f est diagonalisable.

Contre-exemple de minimalité. — On a que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'a comme valeurs propres que 0, elle n'est pas diagonalisable parce que si elle est nulle dans une base elle l'est dans toutes.

4. POLYNÔMES EN UN ENDOMORPHISME DE *E*

4.1. Polynômes évalué en un endomorphisme

Définition 4.1.0.8. —
Soit $P \in \mathbf{R}[t]$ un polynôme :
$$P(t) = \sum_{k=0}^{d} a_k t^k.$$
On note pour f un endomorphisme de E :
$$P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(E).$$
Avec la convention $f^0 = \mathrm{id}$ et la notation $f^{k+1} = f \circ f^k$.

Définition 4.1.0.9. —
On dit qu'un polynôme $P \in \mathbf{R}[t]$ annule f si $P(f) = 0_{\mathrm{End}_{\mathbf{R}}}$.

Proposition 4.1.0.13. —
On a que :
$$\phi\colon \begin{cases} \mathbf{R}[t] \to \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(E) \\ P(t) \mapsto P(f) \end{cases}$$
est un morphisme d'anneaux.
C'est-à-dire :
$$\forall P, Q \in \mathbf{R}[t],\ \phi(P+Q) = \phi(P) + \phi(Q)\ ;\ \phi(PQ) = \phi(P)\phi(Q).$$

Remarque. — Ainsi l'ensemble des polynômes annulateurs de f est un idéal de $\mathbf{R}[t]$. Or $\mathbf{R}[t]$ est un anneau principal donc l'ensemble des polynômes annulateurs de f est principal. Il existe donc un polynôme $Q \in \mathbf{R}[t]$ tel que tout polynôme annulateur de f s'écrit RQ avec $R \in \mathbf{R}[t]$.

Définition 4.1.0.10. —
On appelle polynôme minimal de f le polynôme unitaire de plus petit degré, m_f annulant f.

On a évidemment que tout polynôme annulateur de f est de la forme $P \cdot m_f, P \in \mathbf{R}[t]$.

Exemple. — Avec
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
qui est une matrice nilpotente, c'est-à-dire $A^3 = 0$. On a
$$m_A(t) \mid t^3 \implies m_A = 1, t, t^2 \text{ ou } t^3.$$

Or $(t \mapsto 1)(A) = \mathrm{id} \neq 0$, $(t \mapsto t)(A) = A \neq 0$ et $(t \mapsto t^2)(A) = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et donc $m_A(t) = t^3$.

Proposition 4.1.0.14. —
Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(E)$. Alors :

1. si f est diagonalisable, alors il existe un polynôme scindé $P \in \mathbf{R}[t]$ annulant f ayant que des racines simples ;
2. si $P \in \mathbf{R}[t]$ annule f alors toute valeur propre de f est racine de P.

Démonstration 4.1.0.17. —
Dans l'ordre :

1. Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres. Soient $\mu_1, \ldots, \mu_r$ des scalaires deux à deux distinctes tels que
$$\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$
avec $r \leq n$.
   On pose :
$$P(t) = \prod_{i=1}^{r}(t - \mu_i).$$
On cherche à savoir si $P(f) = 0$.
$$P(f) = 0 \iff P(f)(e_j) = 0,\ \forall j,$$
$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{i=1}^{r}(f - \mu_i \mathrm{id})\right)(e_j),$$
$$f(e_j) = \lambda_j e_j \implies \exists i, \mu_i = \lambda_i.$$
Or pour tous k, l :
$$(f - \mu_k \mathrm{id})(f - \mu_l \mathrm{id}) = (f - \mu_l \mathrm{id})(f - \mu_k \mathrm{id})$$
et donc :
$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{k \neq i}(f - \mu_k \mathrm{id})\right)(f - \mu_i \mathrm{id})(e_j),$$
$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{k \neq i}(f - \mu_k \mathrm{id})\right)(f(e_j) - \mu_i e_j) = 0.$$
2. On suppose que $P(f) = 0$ et $\chi_f(\lambda) = 0$ avec $P \in \mathbf{R}[t]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

Soit $v \in \ker(f - \lambda \mathrm{id}), v \neq 0$, alors :

$$P(f)(v) = \sum_{k=1}^{d} a_k f^k(v),$$

$$P(f)(v) = \sum_{k=1}^{d} a_k \lambda^k v.$$

Donc $P(\lambda) \cdot v = 0$ et comme $v \neq 0$: $P(\lambda) = 0$.

4.2. Lemme des noyaux

Proposition 4.2.0.15 (Théorème des noyaux). —
Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(E)$.

1. Soit $P \in \mathbf{R}[t]$ de la forme $P = ST$ avec $S, T \in \mathbf{R}[t]$ avec S et T premiers entre eux.
   Alors si $P(f) = 0$ alors
   $$E = \ker(S(f)) \oplus \ker(T(f)).$$
2. Soit $P \in \mathbf{R}[t]$, $P = P_1 P_2 \ldots P_k$ avec $P_i \in \mathbf{R}[t]$ premiers entre eux deux à deux.
   Alors si $P(f) = 0$ alors
   $$E = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(f).$$

Théorème 4.2.0.2. —
$f \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(E)$ avec $\dim E = n$.
Supposons qu'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ est un polynôme scindé avec des racines simples.
Alors $P(f) = 0$ implique que f est diagonalisable.

Remarque. — C'est équivalent à $m_f(t)$ scindé avec des racines simples. En effet si P est scindé avec des racines simples et qui annulent f alors m_f divise P et donc m_f est scindé avec des racines simples.

Démonstration 4.2.0.18. —
Soit :

$$P(X) = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_k)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ réels distincts. Ainsi $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$ sont premiers entre eux pour tous $i \neq j$.
Ainsi d'après le théorème des noyaux :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(f - \lambda_i \mathrm{id}).$$

Donc f est diagonalisable.

Corollaire 4.2.0.3. —
Soit $f \in \mathrm{End}(E)$. f est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal m_f est scindé avec des racines simples.

Démonstration 4.2.0.19. —
Le sens d'implication a déjà été fait, l'autre sens est donné par le théorème précédent.

4.3. Trigonalisation

Définition 4.3.0.11. —
On dit que $f \in \mathrm{End}(E)$ est *trigonalisable* s'il existe une base B de E telle que la matrice en base B de f est triangulaire supérieure.
De même, une matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ est trigonalisable si elle est conjuguée à une matrice triangulaire supérieure, i.e. s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est trigonalisable.

Proposition 4.3.0.16. —
Soit $f \in \mathrm{End}(E)$.
χ_f est scindé dans $\mathbf{R}[X]$ si, et seulement si, f trigonalisable.

Remarque. — On peut remplacer partout $\mathbf{R}$ par $\mathbf{K} = \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ et E par un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Si E est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et si $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(E)$ alors la proposition assure la trigonalisation de f (et ainsi de tout endomorphisme).

Démonstration 4.3.0.20. —
Si f est trigonalisable, alors il existe une base B telle que la matrice, $(a_{i,j})$ de f soit trigonale supérieure dans cette base. Alors le polynôme caractéristique (qui est indépendant de la base) est exactement : $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - t)$. Ce polynôme est bien scindé.
Pour la réciproque on effectue une récurrence sur $n = \dim E$. On suppose que c'est vrai pour tout espace vectoriel de dimension strictement inférieure à n :

$$\chi_f(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \dots (\lambda_n - t)$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$.
λ_1 est une valeur propre. Il existe par hypothèse $v_1 \in E$ un vecteur propre tel que $v_1 \neq 0$ et $f(v_1) = \lambda_1 v_1$. Par le théorème de la base incomplète, il existe une base B de la forme $B = (v_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$. Soit A la matrice de f dans la base B. On a :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda_1 & \star & \star & \dots \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Avec $B \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ qui peut être la matrice d'un endomorphisme de $\mathbf{R}^{n-1}$.

$$\chi_A(t) = \det \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 - t & \star \\ \hline 0 & B - tI_d \end{array}\right),$$
$$\chi_A(t) = (\lambda_1 - t)\chi_B(t),$$
$$\chi_A(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)\ldots(\lambda_n - t).$$

et donc $\chi_B(t) = (\lambda_2 - t)\ldots(\lambda_n - t)$ est scindé.
Par récurrence, il existe $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{R})$ tel que $Q^{-1}BQ$ soit triangulaire supérieure.
Posons :

$$P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right), \; P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right).$$

On a alors que $P^{-1}AP$ est triangulaire.

4.4. Comment calculer m_f ? (Cayley-Hamilton)

Théorème 4.4.0.3 (Cayley-Hamilton). —
Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(E)$. On a que m_f divise χ_f, c'est-à-dire : $\chi_f(f) = 0$.

Démonstration 4.4.0.21. —
On veut montrer que $\chi_A(A) = 0$ où $A \in M_n(\mathbf{R})$. Puisque $M_n(\mathbf{R}) \subset M_n(\mathbf{C})$ on peut se placer dans se dernier.
On sait alors que A est trigonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ tel que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.
Or pour tout k : $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$. Donc :

$$\chi_A(P^{-1}AP) = P^{-1}\chi_A(A)P.$$

Comme P est inversible, $\chi_A(0)$ si, et seulement si, $\chi_A(P^{-1}AP) = 0$. Posons $A' = P^{-1}AP$. On a $\chi_{A'} = \chi_A$.

$$T = (\lambda_n I_d - A')(\lambda_{n-1} I_d - A')\ldots(\lambda_1 I_d - A')$$
$$T(v_1) = \left(\prod_{i=2}^{n}(\lambda_i I_d - A')\right)(\lambda_1 I_d - A')(v_1) = 0$$
$$T(v_2) = \left(\prod_{i=3}^{n}(\lambda_i I_d - A')\right)(\lambda_2 I_d - A')(\lambda_1 I_d - A')(v_2)$$
$$(\lambda_2 I_d - A')(\lambda_1 I_d - A')(v_2) = (\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2)$$
$$(\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) = (\lambda_1 I_d - A')(-a'_{1,2}v_1)$$
$$(\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) = -a'_{1,2}(\lambda_1 I_d - A')(v_1)$$
$$(\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) = -a'_{1,2}(\lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_1) = 0$$

Par récurrence on trouve $T(v_i) = 0$ pour tout i.

Exercice. — Calculer $T(v_3)$.

Remarque. — À noter :

1. Étant donné $f \in \mathrm{End}(E)$, pour calculer m_f on cherche le plus petit diviseur de χ_f qui annule f.
2. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$. Supposons que f est inversible, alors $\det(f) \neq 0$, i.e. $\chi_f(0) \neq 0$. Soit $\chi_f(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$, a_0 est donc non nul. On a :
$$0 = a_0^{-1}\chi_f(f) = (-1)^n a_0^{-1} f^n + \ldots + a_1 a_0^{-1} f + I_d$$
ce qui donne :
$$I_d = f\left((-1)^{n+1} a_0^{-1} f^{n-1} + \ldots + (-1) a_1 a_0^{-1} I_d\right).$$

Exemple. — Soit :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
On a :
$$\chi_A(t) = -t(t-1)^2$$
on en déduit :
$$t(t-1) \mid m_A(t) \mid t(t-1)^2.$$
Donc soit $m_A(t) = t(t-1)$ soit $m_A(t) = t(t-1)^2$. Dans le premier cas si $m_A(A) = 0$ alors A est diagonalisable. Dans le second, A est non diagonalisable.
$$A(A - I_d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. APPLICATIONS

5.1. Calculs de puissances

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$, si A est diagonalisable alors :
$$A = PA'P^{-1}$$
où P est inversible et A' diagonale. Et donc pour tout k :
$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

De même, si
$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

alors

$$\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & e\lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

5.2. Systèmes différentiels

Soient $x_1, x_2, x_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ x_2' = x_1 + 4x_2 - 5x_3 \\ x_3' = 2x_2 - 2x_3 \end{cases}.$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. On a :

$$X' = AX.$$

A a pour vecteurs propres :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de valeurs propres respectives :

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2.$$

De matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$X' = AX \iff P^{-1}X' = P^{-1}APP^{-1}X \iff Y' = BY$$

$$Y' = BY \iff \begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = 2y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = c_1 \\ y_2 = c_2e^t \\ y_3 = c_3e^{2t} \end{cases},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

On a alors :

$$X = PY,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2e^t \\ c_3e^{2t} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2e^t + c_3e^{2t} \\ c_1 + 3c_2e^t + 2c_3e^{2t} \\ c_1 + 2c_2e^t + c_3e^{2t} \end{pmatrix}.$$

5.3. Application aux suites récurrentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels telle que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On introduit une seconde suite v_n telle que $v_n = u_{n+1}$ pour tout n. La relation de récurrence s'écrit alors :

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

si on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a alors que la relation de récurrence est

$$X_{n+1} = AX_n.$$

On diagonalise A :

$$\chi_A(t) = t^2 - t - 1 \iff t \in \left\{ r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

On a :

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}$. On pose $Y_n = P_1X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$:

$$X_{n+1} = AX_n \iff Y_{n+1} = A'Y_n.$$

On en déduit :

$$Y_n = \begin{pmatrix} c_1r_1^n \\ c_2r_2^n \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1r_1^n \\ c_2r_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1r_1^n \\ c_2r_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1r_1^n + c_2r_2^n \\ c_1r_1^{n+1} + c_2r_2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi u_n est de la forme :

$$u_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n,\ c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$