DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Table des matières

1.	Fonctions négligeables et équivalentes	1
	1.1. Négligeable	2
	1.2. Équivalence	3
2.	Dérivées successives et formules de TAYLOR	5
	2.1. Formules de Taylor	6
	2.2. Fonctions usuelles	8
3.	Développement limité à l'ordre n d'une fonction de classe C^n	8
	3.1. Développements limités	8
	3.2. Développements limités et primitives	11
	3.3. Développement limités usuels	13
4.	Calculs avec les développements limités	15
	4.1. Règles de calcul des développements limités	15
	4.2. Développement limité d'une fonction composée	18
5.	Applications	21
	5.1. Calculs de limites	21
	5.2. Courbes paramétrées	23
	5.3. Étude de fonctions	28
	5.4. Courbes paramétrées	36

1. FONCTIONS NÉGLIGEABLES ET ÉQUIVALENTES

On considère des fonctions f,g de V dans \mathbf{R} où V est un voisinage épointé dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. C'est-à-dire que V est de la forme $U - \{a\}$ où U est un voisinage de a dans $\overline{\mathbf{R}}$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

- si $a = \infty$ alors $V \supset \{k, \infty\}$;
- si $a \in \mathbf{R}$ alors $V \supset]k, a[\cup]a, l[$ avec k < a < l et $k, l \in \mathbf{R}.$

f, g sont définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

1.1. Négligeable

Définition 1.1.0.1. —

On dit que f est $n\acute{e}gligeable$ devant g au voisinage de a s'il existe un voisinage V tel qu'il existe une fonction $\varepsilon: V \to \mathbf{R}$ telle que : $-f = \varepsilon \cdot g; \\ -\lim_a \varepsilon = 0.$ On note $f = \mathrm{o}(g)$.

$$--f=\varepsilon\cdot g\,;$$

$$-\lim_{a} \varepsilon = 0$$

Remarque. — On note:

$$\varepsilon f \colon \left\{ egin{aligned} V &\to \mathbf{R} \\ t &\mapsto \varepsilon(t) f(t) \end{aligned} \right.$$

Exemples. — Par exemple :

1. Si g = 1 alors f = o(1) si, et seulement si, $\lim_a f = 0$.

2. Si f = 0 au voisinage de a alors pour toute fonction g : f = o(g).

3. Si f est bornée et $\lim_{a}(g) = \infty$ alors f = o(g) (on prend alors $\varepsilon = f/g$).

4. On a $x^m = o(x^n)$ si, et seulement si, m < n.

5. Pour tous $\alpha, \beta > 0$:

$$\begin{cases} x^{\alpha} = o(e^{\beta x}) \\ (\ln x)^{\alpha} = o(x^{\beta}) \end{cases},$$

car $\lim_{\infty} x^{\alpha} e^{-\beta x} = 0$.

Proposition 1.1.0.1. —

Si f/g est définie dans un voisinage de a, alors :

$$f \underset{(a)}{=} o(g) \iff \lim_{a} (f/g) = 0.$$

Démonstration 1.1.0.1. —

On prend $\varepsilon = f/g$.

Remarque. — Il peut arriver que f/g n'est pas défini dans aucun voisinage de a.

Exemples. — Contre-exemples :

1. Avec $g(t) = \sin(1/[t-a])$, pour tout voisinage de V de a, g(t) s'annule en un point de V.

2

2. Même si le quotient n'est pas définit : $t = o(\sin(1/t))$.

Proposition 1.1.0.2. —

On a au voisinage de a:

- 1. la propriété o est transitive ; 2. la propriété o est compatible avec la multiplication, i.e. : si $f={\rm o}(g)$ alors $fh={\rm o}(gh)$;
- 3. si f = o(g) et si h = o(k) alors fh = o(gk).

DÉMONSTRATION 1.1.0.2. —

Dans l'ordre:

- 1. Pour $f = \varepsilon_1 g$ et $g = \varepsilon_2 h$ avec $\lim_a \varepsilon_i = 0$ alors : $f = \varepsilon_1 \varepsilon_2 h$ et $\lim_a \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0$. 2. Si $f = \varepsilon g$, $\lim_a \varepsilon = 0$, alors $fh = \varepsilon gh$.

Contre-exemple. — o n'est pas compatible avec l'addition. Par exemple : $x = o(x^3)$ et $x^2 = o(-x^3)$ n'entraine pas $x + x^2 = o(0)$.

1.2. Équivalence

Définition 1.2.0.2. —

On dit que f est équivalence à g au voisinage de a si : f - g = o(g). On note $f \sim g$.

Proposition 1.2.0.3. —

Si f/g est définie dans un voisinage de a alors :

$$f \underset{(a)}{\sim} g \iff \lim_{a} f/g = 1.$$

Proposition 1.2.0.4. —

 $\sim_{(a)}$ est une relation d'équivalence.

DÉMONSTRATION 1.2.0.3. —

Par définition:

- 1. elle est réflexive : $f \sim_{(a)} f$ puisque 0 = o(f); 2. elle est symétrique si $f \sim_{(a)} g$ alors il existe ε telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ et $f = (1+\varepsilon)g$, or $1/(1+\varepsilon)$ est aussi définie au voisinage de a et puisque $g=(1/[1+\varepsilon])f$ on a

$$g = (1 + (1/[1 + \varepsilon] - 1))f$$

3

or en posant $\varepsilon' = [1 + \varepsilon] - 1$ on a $\lim_a \varepsilon' = 0$;

3. elle est transitive : $f \sim g$ et $g \sim h$ implique qu'il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ telles que $f = (1+\varepsilon_1)g$, $g = (1+\varepsilon_2)h$ et donc $f = (1+\varepsilon)h$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$ et $\lim_a \varepsilon = 0$.

Proposition 1.2.0.5. —

Si $f \sim g$ et si $\lim_a f$ existe alors $\lim_a g$ existe et $\lim_a g = \lim_a f$.

DÉMONSTRATION 1.2.0.4. —

Soit ε telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ alors puisque $f = (1 + \varepsilon)g$ on a

$$\lim_{a} f = \lim_{a} (1 + \varepsilon)g = \lim_{a} g.$$

Proposition 1.2.0.6. —

Le produit et le quotient (quand il est défini) d'équivalences est une équivalence. Une puissance entière d'équivalences est une équivalence.

DÉMONSTRATION 1.2.0.5. —

Si
$$f = (1 + \varepsilon_1)get h = (1 + \varepsilon_2)k$$
 alors $fh = (1 + \varepsilon)gk$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$.

Proposition 1.2.0.7. —

Si $f \underset{(a)}{\sim} g$ et si $\varphi: I \to \mathbf{R}$ telle que $\lim_b \varphi = a, b \in I$. Alors $f \circ \varphi \sim g \circ \varphi.$

$$f \circ \varphi \sim_{(a)} g \circ \varphi.$$

DÉMONSTRATION 1.2.0.6. —

Si $f = (1 + \varepsilon)g$ avec $\lim_a \varepsilon = 0$. Alors $f \circ \varphi = (1 + \varepsilon') \cdot g \circ \varphi$ avec $\varepsilon' = \varepsilon \circ \varphi$ et $\lim_a \varepsilon' = 0$.

$$f \circ \varphi = (1 + \varepsilon') \cdot g \circ \varphi$$

Proposition 1.2.0.8. —

- 1. Si f est dérivable en a alors si $f'(a) \neq 0$ on a $f(x) f(a) \sim f'(a)(x a)$.
- 2. Si g est continue dans un voisinage épointé de a, alors si $f \sim g > 0$ alors

$$\int_{a}^{x} f(t) dt \sim \int_{a}^{x} g(t) dt.$$

DÉMONSTRATION 1.2.0.7. —

Dans l'ordre:

1. Si f est dérivable en a alors :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{(a)}{\sim} f'(a)$$

puisque si $\lim_a g = b \in \mathbf{R}^*$ alors $g \sim b$.

2. On sait que f - g = o(g) et on veut :

$$\int_{x}^{a} (f - g)(t) dt = o\left(\int_{x}^{a} g(t) dt\right).$$

En posant h = f - g on se ramène au problème :

$$h = o(g) \implies \int_{a}^{x} h = o \int_{a}^{x} g.$$

Si $h = \varepsilon g$ et $\lim_a \varepsilon = 0$ alors

$$\int_{a}^{x} g = \int_{a}^{x} \varepsilon g$$

Or

$$\frac{\left|\int_{x}^{a} \varepsilon g\right|}{\int_{a}^{x} g} \le \max_{[a,x]} \left|\varepsilon\right| \frac{\int_{a}^{x} g}{\int_{a}^{x} g} \xrightarrow[x \to a]{} 0.$$

Donc

$$\frac{\left|\int_{a}^{x} \varepsilon g = h\right|}{\left|\int_{a}^{x} g\right|} \xrightarrow[x \to a]{} 0.$$

2. DÉRIVÉES SUCCESSIVES ET FORMULES DE TAYLOR

Soit $p \ge 0$ un entier.

Définition 2.0.0.3. —

- Soit I un intervalle de \mathbf{R} et $f: I \to \mathbf{R}$. 1. $f \in C^0$ si f est continue; 2. $f \in C^p$ $(p \ge 1)$ si f est dérivable et $f' \in C^{p-1}$.

Remarque. — Si $f \in \mathbb{C}^p$ alors les p-ièmes dérivées successives et f sont toutes continues sur $I. f \in C^{\infty}$ si $f^{(p)}$ existe et est continue pour tout $p \ge 1$.

Proposition 2.0.0.9. —

Si $f, g \in C^p$ alors f + g, fg, f/g et $f \circ g$ (si définie) sont C^p .

DÉMONSTRATION 2.0.0.8. —

Dans l'ordre :

1. $(f+g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$ par récurrence sur p;

2.
$$(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} {p \choose k} f^{(k)} g^{(p-k)};$$

3. par récurrence sur p pour $(f \circ g)^{(p)}$ en utilisant : $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.

Rappels sur les primitives. — Si $f: I \to \mathbf{R}$ est de classe C^1 avec $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert. Alors si f' est continue $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$.

2.1. Formules de Taylor

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert.

Théorème 2.1.0.1 (Formule de Taylor avec reste intégral) Soit $f:I\to {\bf R}$ de classe C^k . Alors pour tous $a,b\in I$ on a :

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

DÉMONSTRATION 2.1.0.9. —

Par récurrence sur n, on note

$$(T_n): f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

Supposons que (T_k) soit vraie pour tout k < n. Alors par intégration par parties :

$$u(t) = -\frac{(b-t)^k}{k!},$$

$$v(t) = f^{(k)}(t),$$

$$R_k = \int_a^b \frac{(b-s)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(s) \, ds,$$

on a:

$$R_{k} = \int_{a}^{b} u'(s)v(s) ds$$

$$R_{k} = [u(s)v(s)]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} u(s)v'(s) ds$$

$$R_{k} = u(b)v(b) - u(a)v(a) + \int_{a}^{b} \frac{(b-s)^{k}}{k!} f^{(k+1)}(s) ds$$

$$R_{k} = \frac{(b-a)^{k}}{k!} f^{(k)}(a) + \int_{a}^{b} \frac{(b-s)^{k}}{k!} f^{(k+1)}(s) ds$$

On applique (T_{n-1}) :

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_{n-1}$$
$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n$$

donc (T_n) vraie.

Théorème 2.1.0.2 (Formule de Taylor avec reste en $f^{(n+1)}(\theta)$) Soit n > 0, $f: I \to \mathbf{R}$ de classe C^{n+1} . Pour tous $a, b \in I$ avec $a \neq b$, il existe θ strictement compris en a et b tel que :

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-a)^{i}}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta).$$

DÉMONSTRATION 2.1.0.10. —

On pose A telle que

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot A = \int_a^b \frac{(b-s)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(s) \, \mathrm{d}s - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Soit
$$F: I \to \mathbf{R}$$
 telle que:

$$F(x) = \int_x^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A.$$

On calcule
$$F'(x)$$
:
$$F'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} A$$

$$F'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} \left(A - f^{(n+1)}(x) \right).$$

$$F \text{ est dérivable donc continue sur } I:$$

$$F(a) = \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A = 0,$$

$$F(b) = 0$$

$$F(a) = \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A = 0,$$

$$F(b) = 0.$$

Par le théorème de Rolle, il existe θ strictement entre a et b tel que $F'(\theta) = 0$.

$$\frac{(b-\theta)^n}{n!} \left(A - f^{(n+1)}(\theta) \right) = 0$$
$$A = f^{(n+1)}(\theta).$$

On en déduit :
$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta) = \int_a^b \frac{(b-s)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(s) ds - \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

On a alors le résultat en remplaçant dans (T_n) .

Remarque. — Si $|f^{(n+1)}(s)| \leq M$ pour tout $s \in I$ alors

$$\left| f(b) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-a)^{i}}{i!} f^{(i)}(a) \right| \le M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2.2. Fonctions usuelles

Proposition 2.2.0.10 (Exponentialle). —

Soit $n \in \mathbb{N}$, on regarde le développement de Taylor en 0 à l'ordre n+1, $\forall i, \exp^{(i)}(0)=1$. On prend b=x, a=0:

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{n}}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(\theta)$$
$$\theta \in]0, x[.$$

Proposition 2.2.0.11 (Cosinus, sinus). —

La dérivée n-ième de $\cos(t)$ est $\cos(t + n\pi/2)$.

$$\left|\cos(x) - \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x^{2i}}{(2i)!}\right| \le \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

 $|\cos \theta| \le 1$.

3. DÉVELOPPEMENT LIMITÉ À L'ORDRE N D'UNE FONCTION DE CLASSE \mathbb{C}^N

3.1. Développements limités

Définition 3.1.0.4. —

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert tel que $0 \in I, n \in \mathbf{N}$. On dit qu'une fonction $f: I \to \mathbf{R}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 si, et seulement s'il existe un polynôme P de degré n à coefficients réels tel que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^n} = 0.$$

Notons

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - P(x)}{x^n}$$

alors

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)^{(1\S)}, \\ \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0. \end{cases}$$

Définition 3.1.0.5. —

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert et soit $n \in \mathbf{N}$. On dit qu'une fonction $f: I \to \mathbf{R}$ admet un développement limité à l'ordre n en a si, et seulement si, la fonction $t \mapsto$ f(t+a) admet un développement limité à l'ordre n en 0. C'est-à-dire si, et seulement s'il existe un polynôme de degré n, P à coefficients réels tel que :

$$f(x) = P(x - a) + o((x - a)^n)$$

au voisinage de a.

Тне́опѐме 3.1.0.3. —

Si f admet un développement limité à l'ordre n en un point a, alors ce développement limité est unique.

DÉMONSTRATION 3.1.0.11. —

On peut supposer a = 0. Supposons que

$$f(x) = P_1(x) + x^n \varepsilon_1(x) = P_2(x) + x^n \varepsilon_2(x)$$

 $f(x) = P_1(x) + x^n \varepsilon$ où $\lim_0 \varepsilon_i = 0$ pour $i \in \{1,2\}.$ On a que

2}. On a que
$$(P_1 - P_2)(x) = x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x)$$

et $(P_1 - P_2)(x)$ est de la forme $r_0 + r_1x + \ldots + r_nx^n$ avec $r_0, r_1, \ldots, r_n \in \mathbf{R}$. On montre par récurrence que les r_k sont tous nuls. Quand $x \to 0$ on trouve :

$$r_0 = 0$$

et donc

$$r_1x + \ldots + r_nx^n = x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x)$$

$$r_k x^k + \ldots + r_n x^n = x^n (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x),$$

$$r_1x + \ldots + r_nx^n = x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x).$$
 Supposons que $r_0 = r_1 = r_{k-1} = 0, \ k > 0$. Alors
$$r_kx^k + \ldots + r_nx^n = x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x),$$

$$r_k + r_{k+1}x + \ldots + r_nx^{n-k} = x^{n-k}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x),$$

 $n-k \ge 0$ et donc $r_k = 0$ en passant à la limite.

Corollaire 3.1.0.1. —

Soit $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$ le développement limité d'une fonction f à l'ordre n en

- 1. si f est paire alors P est paire;
- 2. si f est impaire alors P est impaire.

^{1§}. C'est-à-dire, $f(x) - P(x) = o(x^n)$.

DÉMONSTRATION 3.1.0.12. —

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x),$$

$$f(-x) = P(-x) + x^n (-1)^n \varepsilon(-x) = P(-x) + x^n \varepsilon_1(x),$$

Or comme $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$ alors $\varepsilon_1 \to 0$ aussi.

1. si f est impaire alors on a :

$$f(x) = -P(-x) - x^n \varepsilon_1(x)$$

et comme la première et cette expression sont des développements limits de f à l'ordre n en 0, par unicité on a -P(-x) = P(x), c'est-à-dire P impaire;

2. si f est paire, on a :

$$f(x) = P(-x) + x^n \varepsilon_1(x)$$

alors de même, l'unicité nous dit que P est alors paire.

Proposition 3.1.0.12. —

Soit $f: I \to \mathbf{R}$ une fonction continue en $a \in I$.

1. le développement limité de f en a à l'ordre 0 est

$$f(x) = f(a) + \varepsilon(x), \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0;$$

2. la fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle possède un développement limité à l'ordre 1 en a, alors dans ce cas le développement limité est donné par :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x)(x - a), \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION 3.1.0.13. —

Dans l'ordre:

- 1. On pose $\varepsilon(x)=f(x)-f(a)$. Comme f est continue en $0,\ \varepsilon(x)$ aussi et $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$.
- 2. Supposons que f soit dérivable en a, c'est-à-dire :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

On pose

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

On a bien $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x).$$

Réciproquement, supposons que f admette un développement limité :

$$f(x) = a_0 + (x - a)a_1 + (x - a)\varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Alors, par continuité $a_0 = f(a)$ et

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} a_1 + \varepsilon(x) = a_1 = f'(a).$$

3.2. Développements limités et primitives

Théorème 3.2.0.4. —

Soit $f:I\to \mathbf{R}$ une application continue. Soit F une primitive de f. Soit $a\in I$ et supposons que f admette un développement limité en a à l'ordre n:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \frac{a_2}{2}(x - a)^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x), \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors F admet le développement limité suivant à l'ordre n+1 en a :

$$F(x) = F(a) + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{a_n}{(n+1)!}x^{n+1} + (x-a)^{n+1}\varepsilon_1(x), \lim_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION 3.2.0.14. —

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} (t - a)^k.$$

Pour tout $x \neq a$:

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n}.$$

Par hypothèse, $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. En posant $\varepsilon(a) = 0$, on obtient que ε est continue sur I. Donc ε admet une primitive et dans l'identité

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \frac{a_2}{2}(x - a)^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x), \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

tous les termes admettent des primitives. Donc

$$F(x) - F(a) = \int_{a}^{x} f(t) dt$$

$$F(x) - F(a) = \int_{a}^{x} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k}}{k!} (t - a)^{k} + (t - a)^{n} \varepsilon(t) \right) dt$$

$$F(x) - F(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k}}{(k+1)!} (x - a)^{k+1} + u(x),$$

$$u(x) = \int_{a}^{x} (t - a)^{n} \varepsilon(t) dt.$$

Par le théorème de ROLLE :

$$u(x) = (x - a)(\theta - a)^n \varepsilon(\theta)$$

pour un θ compris entre a et x. Donc

$$|u(x)| = |x - a| |\theta - a|^n |\varepsilon(\theta)| \le |x - a|^{n+1} |\varepsilon(\theta)|$$

et $\varepsilon(\theta)$ tend vers 0 quand x tend vers a puisque θ est compris entre a et x. Donc :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + (x-a)^{n+1} \varepsilon_1(x)$$

$$\varepsilon_1(x) = \frac{u(x)}{(x-a)^{n+1}} \to 0.$$

Тне́огѐме 3.2.0.5. —

Soit $f:I\to \mathbf{R}$ de classe $C^n,\ a\in I.$ Alors f admet pour développement limité à l'ordre n en a :

$$f(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x), \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Démonstration 3.2.0.15. —

Pour n=0,1 ça a été déjà vu. Supposons alors $n\geq 2$. Soit $f\in C^n,$ posons g=f'

Par récurrence :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^{n-1} \varepsilon(x), \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

f est une primitive de g:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x), \lim_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x)$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon_1(x).$$

Exemple. — Soit:

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

son développement limité en 0 d'ordre n est :

$$f(x) = x^n \varepsilon(x), \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

3.3. Développement limités usuels

Développements limités en 0 :

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{i}}{i!} + x^{n} \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{cos}(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\alpha \in \mathbf{R} : (1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-i)}{(i+1)!} x^{i+1} + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{n} x^{i} + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} x^{i} + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

$$\log(1-x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{x^{i}}{i!} + x^{n} \varepsilon(x)$$

$$\log(1+x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x^{i}}{i} x^{n} \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{Arctan}(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x^{2i-1}}{2i-1} + x^{2n} \varepsilon(x)$$

DÉMONSTRATION 3.3.0.16 (ch). —

$$ch(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$ch'(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} (= sh(x))$$

$$ch''(x) = ch(x)$$

$$ch^{(2i)}(0) = 1$$

$$sh^{(2i)}(0) = 0$$

DÉMONSTRATION 3.3.0.17 (cos). —

$$\cos^{(k)}(x) = \cos(x + k\pi/2)$$
$$\cos^{(k)}(0) = \cos(k\pi/2)$$
$$\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k$$
$$\cos^{(2k+1)}(0) = 0$$

DÉMONSTRATION 3.3.0.18 (sin). —

$$\sin^{(k)}(x) = \sin(x + k\pi/2)$$
$$\sin^{(2k)}(0) = 0$$
$$\sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$$

Démonstration 3.3.0.19 $((1+x)^{\alpha} = f(x))$. —

Par récurrence :

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)(1 + x)^{\alpha - k}$$

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)$$

DÉMONSTRATION 3.3.0.20 (1/1 - x). —

$$\frac{1 - x^n}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$
$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + \dots + x^n + x^n \cdot \frac{x}{1 - x}$$

DÉMONSTRATION 3.3.0.21 $(\log(1-x))$.

Utiliser le théorème sur le développement limité d'une primitive avec le développement limité de 1/1-x.

DÉMONSTRATION 3.3.0.22 (Arctan(x)). —

Arctan'(x) =
$$\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x^{2i} + x^{2n} \varepsilon(x)$$

et on conclut avec le théorème du développement limité d'une primitive.

Remarque. — On a vu que si

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

alors le développement limité de f(x) en 0 à l'ordre n est

$$f(x) = x^n \varepsilon(x).$$

Or le développement limité de 0 en 0 à l'ordre n est identique.

Exemple. — Soit:

$$f \colon \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x^3 \sin(1/x) \text{ si } x \neq 0 \end{cases}.$$

La fonction f est continue en 0.

On regarde le développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = x^2 \varepsilon(x), \ \varepsilon(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x \sin(1/x) \text{ sinon} \end{cases}, \lim_{x \to 0} \varepsilon(x)0.$$

Donc le développement limité de f(x) en 0 à l'ordre 2 est

$$f(x) = x^2 \varepsilon(x).$$

Dérivabilité de f en 0 (puisqu'elle est lisse sur \mathbf{R}^*) :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2 \sin(1/x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

donc f est dérivable et f'(0) = 0.

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x)}{x} = 3x \sin(1/x) - \cos(1/x)$$

donc f n'est pas dérivable à l'ordre 2 en 0 (même si elle a un développement limité à l'ordre 2).

4. CALCULS AVEC LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

4.1. Règles de calcul des développements limités

Proposition 4.1.0.13. —

Soit f,g ayant des développements limités à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x), \ g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon(x)$$

 $f(x)=P(x)+x^n\varepsilon(x),\ g(x)=Q(x)+x^n\varepsilon(x)$ avec P,Q des polynômes de degré au plus n et $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$ (non forcément

1. le développement limité à l'ordre n en 0 de f+g est

$$(f+g)(x) = (P+Q)(x) + x^n \varepsilon(x);$$

2. pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, le développement λf à l'ordre n en 0 est :

$$(\lambda f)(x) = \lambda P(x) + x^n \varepsilon(x).$$

Démonstration 4.1.0.23. —

Écrivons $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_f(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_g(x)$.

- 1. $(f+g)(x) = P(x) + Q(x) + x^n(\varepsilon_f + \varepsilon_g)(x)$ et on note $\varepsilon = \varepsilon_f + \varepsilon_g$ qui tend bien en 0.
- 2. De même.

Proposition 4.1.0.14. —

Soit f qui admet le développement limité en 0 à l'ordre n:

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x), \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors pour tout $p \in \{0, \dots, n\}, \, f$ admet le développement limité en 0 à l'ordre p :

$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p \varepsilon(x)$$

avec $T_p(P)$ le polynôme tronqué de P:

$$T_p(P) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k, \ P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Démonstration 4.1.0.24. —

On a

ON 4.1.0.24. —
$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p \left(\sum_{k=p+1}^n a_k x^{k-p} + x^{n-p} \varepsilon(x) \right).$$

Et on pose

$$\varepsilon_1(x) = \sum_{k=p+1}^n a_k x^{k-p} + x^{n-p} \varepsilon(x).$$

On a bien $\varepsilon_1(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

Proposition 4.1.0.15. —

Soient f, g admettant les développements limités :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x), \ g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x).$$

Alors fg admet le développement limité à l'ordre n en 0 suivant :

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x) + x^n \varepsilon(x).$$

Remarque. — Si f, g admettent les développements limités à l'ordre n en a:

$$f(x) = P(x-a) + (x-a)^n \varepsilon_1(x), \ g(x) = Q(x-a) + (x-a)^n \varepsilon_2(x)$$

alors le développement limité:

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x-a)^{(2\S)} + (x-a)^n \varepsilon(x).$$

Démonstration 4.1.0.25. —

$$(fg)(x) = (PQ)(x) + x^n(Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x))$$

$$PQ(x) = T_n(PQ)(x) + x^{n+1}R(x), \ R \in \mathbf{R}[x]$$

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x) + x^n(xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x))$$
On pose:
$$\varepsilon(x) = xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x)$$

$$\varepsilon(x) = xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x)$$

$$\lim_{x \to 0} xR(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} Q\varepsilon_1(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} P\varepsilon_2(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Exemple. — On veut le développement limité de :

$$Arctan(x-1) \exp(x)$$

en 1 d'ordre 3.

$$Arctan(y) = y - \frac{y^3}{3} + y^3 \varepsilon(y)$$

$$Arctan(x-1) = (x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3 \varepsilon(x)$$

$$\exp(x) = \exp(x-1+1) = e \exp(x-1)$$

$$\exp(x) = e \left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3 \varepsilon(x)\right)$$

Et donc

$$f(x) = e\left((x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3 \varepsilon(x)\right) \times \left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3 \varepsilon(x)\right)$$
$$f(x) = e\left((x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} - \frac{(x-1)^3}{3}\right) + (x-1)^3 \varepsilon(x)$$

^{2§.} On tronque avant d'évaluer en x - a.

4.2. Développement limité d'une fonction composée

Puisque la composition de deux fonctions polynômiales est encore un polynôme :

Proposition 4.2.0.16. —

Soient f, g admettant un développement limité en 0 à l'ordre n:

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x), \ g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon(x)$$

avec P,Q deux polynômes de degré inférieur à n.

Supposons que g(0)=0 alors $f\circ g$ admet le développement limité suivant à l'ordre n en 0 :

$$(f \circ g)(x) = T_n(P \circ Q)(x) + x^n \varepsilon(x).$$

DÉMONSTRATION 4.2.0.26. —

Supposons n=0, alors P et Q sont deux polynômes constants donc $f(x)=P(0)+\varepsilon(x)$ et $g(x)=Q(0)+\varepsilon(x)$. Comme Q(0)=0 on a bien $f(g(x))=(P\circ Q)(x)+\varepsilon(x)$ par continuité.

Supposons que $n \ge 1$. On note $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x)$. Posons $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.

$$(f \circ g)(x) = P(g(x)) + g(x)^n \varepsilon_1(g(x))$$

$$P(g(x)) = \sum_{i=0}^n a_i g(x)^i$$

$$P(g(x)) = {}^{(3\S)}T_n \left(\sum_{i=0}^n a_i Q(x)^i\right) + x^n \varepsilon_3(x)$$

Puisque Q(0) = 0, on a $Q(x) = b_1 x + \ldots + b_n x^n$ et donc :

$$g(x) = b_1 x + \ldots + b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x)$$

$$g(x) = x(b_1 + \ldots + b_n x^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon_2(x))$$

$$g(x) = xh(x)$$

$$(f \circ g)(x) = P(xh(x)) + x^n h(x)^n \varepsilon_1(xh(x))$$

$$(f \circ g)(x) = T_n(P \circ Q)(x) + x^n (h(x)^n \varepsilon_1(xh(x)) + \varepsilon_3(x))$$

On pose $\varepsilon_4(x) = h(x)^n \varepsilon_1(xh(x)) + \varepsilon_3(x)$ et :

$$\lim_{x \to 0} xh(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon_3(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} h(x)^n = b_1^n$$

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon_4(x) = 0.$$

^{3§.} D'après les formules de développements limités d'une somme et d'un produit.

Exemple. — Développement limité de cos(sin(x)) à l'ordre 5 en 0 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6 \varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x)$$

$$\cos(\sin(x)) = T_5 \left(1 - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^4}{4!} \right) + x^5 \varepsilon(x)$$

$$\cos(\sin(x)) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x)$$

$$\cos(\sin(x)) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^5 \varepsilon(x)$$

Proposition 4.2.0.17. —

Soient f,g admettant des développements limités à l'ordre n en 0. Alors si $g(0) \neq 0$ alors la fonction f/g admet un développement limité à l'ordre n en 0.

DÉMONSTRATION 4.2.0.27.

Puisque $g(0) \neq 0$, f/g est définie et continue en 0. Comme $f/g = f \times 1/g$, il suffit de vérifier que 1/g admet un développement limité en 0 (puis on applique la règle de produit).

Posons $a = g(0) \neq 0$. On a :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a + (g(x) - a)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)}$$

Il suffit de vérifier que :

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)}$$

admet un développement limité à l'ordre n en 0. Posons

$$h(x) = \frac{1}{1+x}$$

on a alors

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)} = h\left(\frac{g(x)}{a} - 1\right) = (h \circ k)(x)$$

où k(x) = g(x)/a - 1. Or k(x) admet un développement limité à l'ordre n en 0 et h(x) admet également un développement limité à l'ordre ∞ en 0. Enfin, k(0) = 0 et donc on conclut avec le résultat précédent.

Exemple. — Développement limité de f: f(x) = 1/(a-x) en 0 à l'ordre n.

$$f(x) = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - x/a}$$

$$\frac{1}{1 - t} = 1 + t + t^2 + \dots + t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$f(x) = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \dots + \frac{x^n}{a^n} \right) + x^n \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{a - x} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \dots + \frac{x^n}{a^{n+1}} + x^n \varepsilon(x).$$

La méthode précédente ne donne pas de formule générale pour le développement limité de f/g.

Rappel. — Si $P,Q \in \mathbf{R}[x], n \in \mathbf{N}$ et si $Q(0) \neq 0$. Alors la division de P par Q suivant les puissances croissantes à l'ordre n est l'unique polynôme A tel que :

- P AQ est divisible par X^{n+1} ;
- soit A = 0, soit deg $A \le n$.

Proposition 4.2.0.18. —

Soient f,g avec les développements limités suivants à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = A(x) + x^n \varepsilon_1(x),$$

$$g(x) = B(x) + x^n \varepsilon_2(x).$$

 $g(x)=B(x)+x^n\varepsilon_2(x).$ Supposons que $g(0)=B(0)\neq 0.$ Le développement limité à l'ordre n de f/g en 0

$$\frac{f}{g}(x) = Q(x) + x^n \varepsilon(x)$$

où Q est la division de A par B à l'ordre n suivant les puissances croissantes.

DÉMONSTRATION 4.2.0.28. —

On a $A(x) = Q(x)B(x) + x^{n+1}R(x)$ où R est un polynôme et Q = 0 ou deg $Q \le n$. Ainsi

insi
$$f(x) = Q(x)B(x) + x^{n+1}R(x) + x^n\varepsilon_1(x)$$
$$f(x) - Q(x)g(x) = x^{n+1}R(x) + x^n\varepsilon_1(x) - Q(x)x^n\varepsilon_2(x)$$
$$f(x) - Q(x)g(x) = x^n(\varepsilon_1(x) - Q(x)\varepsilon_2(x) + xR(x))$$
$$\frac{f}{g}(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_3(x)$$
$$\varepsilon_3(x) = \frac{1}{g(x)}(\varepsilon_1(x) - Q(x) \cdot \varepsilon_2(x) + xR(x)) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Exemple. — Développement limité de tan(x) à l'ordre 5 en 0.

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x)$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) + x^6 R(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5 \varepsilon(x)$$

5. APPLICATIONS

Applications. — Les développements limités peuvent être utiles pour :

- 1. les calculs de limites (pour des « formes indéterminées »);
- 2. études de fonctions ou courbes paramétrées.

5.1. Calculs de limites

Exemple. — On veut calculer :

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + x^2 \varepsilon(x)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x),$$

$$\log \operatorname{ch} x = \log(1 + (\operatorname{ch} x - 1))$$

$$\log \operatorname{ch} x = T_2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2}\right) + x^2 \varepsilon(x)$$

$$\log \operatorname{ch} x = \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$$

$$x \log \operatorname{ch} x = \frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon(x);$$

 $\lim_{x \to 0} \frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1 + x} - \exp(\sin x)}.$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)x^{2}}{2!} + x^{2}\varepsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^{2}}{8} + x^{2}\varepsilon(x)$$

$$x\sqrt{1+x} = x + \frac{x^{2}}{2} - \frac{x^{3}}{8} + x^{3}\varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^{3}}{6} + x^{3}\varepsilon(x)$$

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{3}}{6} + x^{3}\varepsilon(x),$$

$$\exp(\sin x)) = T_{3}\left(\left(x \mapsto 1 + x + \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{3}}{6}\right)\left(x - \frac{x^{3}}{6}\right)\right) + x^{3}\varepsilon(x)$$

$$\exp(\sin x)) = 1 + x - \frac{x^{3}}{6} + \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{3}}{6} + x^{3}\varepsilon(x)$$

$$\exp(\sin x)) = 1 + x + \frac{x^{2}}{2} + x^{3}\varepsilon(x);$$

Ainsi

$$\frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1 + x} - \exp(\sin x)} = \frac{\frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon(x)}{1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x)}$$
$$\frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1 + x} - \exp(\sin x)} = \frac{\frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon(x)}{-\frac{x^3}{8} + x^3 \varepsilon(x)}$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1 + x} - \exp(\sin x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1/2 + \varepsilon(x)}{-1/8 + \varepsilon(x)} = -4.$$

Remarque. — Un calcul de dérivée s'obtient par un calcul de limite et donc parfois par développements limités.

Exemple. — On prend

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + x + x^2}$$

et on cherche $f^{(i)}(0)$ pour $i \in \{0, \dots, 4\}$, c'est-à-dire que l'on cherche le développement limité de f en 0 à l'ordre 4.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon(x).$$

On cherche le développement limité de

$$g(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

que l'on peut voir comme

$$g(x) = (a \circ b)(x) \; ; \; a(x) = \frac{1}{1+x} \; ; \; b(x) = x + x^2.$$

$$a(x) = 1 - x + x^{2} - x^{3} + x^{4} + x^{4} \varepsilon(x)$$

$$g(x) = T_{4}((x \mapsto 1 - x + x^{2} - x^{3} + x^{4})(x + x^{2})) + x^{4} \varepsilon(x)$$

$$g(x) = 1 - x - x^{2} + x^{2} + x^{4} + 2x^{3} + x^{4} - x^{3} - 3x^{4} + x^{4} + x^{4} \varepsilon(x)$$

$$g(x) = 1 - x + x^{3} - x^{4} + x^{4} \varepsilon(x)$$

$$f(x) = T_{4}\left((1 - x + x^{3} - x^{4})\left(1 - \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{4}}{24}\right)\right) + x^{4} \varepsilon(x)$$

$$f(x) = 1 - x - \frac{x^{2}}{2} + \frac{3x^{3}}{2} - \frac{23x^{4}}{24} + x^{4} \varepsilon(x)$$

Comme f admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, elle est dérivable quatre fois. De plus

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = -1$$

$$f^{(2)}(0) = -1$$

$$f^{(3)}(0) = 9$$

$$f^{(4)}(0) = -23.$$

5.2. Courbes paramétrées

Rappels sur les fonctions classiques. — Quelques rappels :

— on définit le logarithme népérien par :

$$\log(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Ainsi $\log : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ est croissante, C^{∞} ,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log x = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0, x > 0} \log x = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \log x = +\infty$$

$$\log(ab) = \log a + \log b.$$

— on définit l'exponentielle, exp : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, qui est croissante, lisse et stable par dérivation.

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = \infty$$
$$\exp(a+b) = \exp(a) \exp(b).$$

— soient $a \in \mathbf{R}_+^*, b \in \mathbf{R}$ alors on définit :

$$a^{b} = \exp(b \log a).$$

$$a^{b+b'} = a^{b}a^{b'}$$

$$(aa')^{b} = a^{b}(a')^{b}$$

$$(a^{b})^{c} = a^{bc}$$

$$a^{0} = 1 = 1^{b}$$

$$\frac{d}{dx}x^{b} = bx^{b-1}$$

$$\frac{d}{dx}a^{x} = \log(a)a^{x}$$

$$\lim_{x \to 0, x > 0} x^{a}(\log x)^{n} = 0 , a > 0 \text{ et } n \in \mathbf{Z}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{a}e^{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^{a}e^{x} = 0.$$

— trigonométrie :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\sin(x+t) = \cos(t)\sin(x) + \cos(x)\sin(t)$$

$$\cos(x+t) = \cos(x)\cos(t) - \sin(x)\sin(t)$$

$$\tan(x+t) = \frac{\tan(t) + \tan(x)}{1 - \tan(x)\tan(t)}.$$

— Arcsin : $[-1,1] \rightarrow [-\pi/2,\pi/2]$ est lisse sur] -1,1[et :

$$Arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

 $\operatorname{Arccos}: [-1,1] \to [0,\pi]$ est la réciproque de cos et on a la relation :

$$\operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

 $Arctan : \mathbf{R} \rightarrow] - \pi/2, \pi/2[$ est lisse et :

$$Arctan'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

— trigonométrie hyperbolique :

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$$

leurs réciproques Arcsh: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, Arcch: $[-1, \infty] \to \mathbf{R}_+$ et Arcth: $]-1, +1[\to \mathbf{R}]$ sont lisses sur l'intérieur de leur domaine de définition.

$$Arcsh'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$Arcch'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

$$Arcsh(t) = \log(t + \sqrt{t^2 + 1})$$

$$Arcch(t) = \log(t + \sqrt{t^2 - 1})$$

Définition 5.2.0.6. —

Soit $f: I \to \mathbb{R}^2$ avec I un intervalle ou une union finie d'intervalles dans R. Soient

$$\forall t, \ f(t) = (u(t), v(t)).$$

- $\forall t, \ f(t) = (u(t), v(t)).$ 1. On dit que $\lim_{t \to t_0} f(t) = l$ où $l = (l_1, l_2)$ si $\lim_{t \to t_0} u(t) = l_1$ et $\lim_{t \to t_0} v(t) = l_2$.
- 2. On dit que f est continue en t_0 si les fonctions u et v sont continues en 0. f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.
- 3. On dit que f est dérivable en t_0 si u et v le sont et on note $f'(t_0) = (u'(t_0), v'(t_0))$.

Proposition 5.2.0.19. —

- Si $f, g: I \to \mathbf{R}^2$ et si $t_0 \in I$ alors : 1. si $\lim_{t \to t_0} f(t) = l$ et $\lim_{t \to t_0} g(t) = m$ alors $\lim_{t \to t_0} (f+g)(t) = l + m$; 2. si f, g sont dérivables en t_0 alors f+g aussi et on a $(f+\lambda g)'(t_0) = f'(t_0) + \lambda g'(t_0)$.

Proposition 5.2.0.20. —

Soit (r,s) une base de \mathbf{R}^2 et soit $f:I\to\mathbf{R}^2$ telle que f(t)=(u(t),v(t)). Soit (a(t),b(t)) les coordonnées de f(t) dans la base (r,s).

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = l \iff \begin{cases} \lim_{t \to t_0} a(t) = \alpha \\ \lim_{t \to t_0} b(t) = \beta \end{cases}$$

où (α, β) sont les coordonnées de l dans la base (r, s)

2. Idem pour la dérivée.

DÉMONSTRATION 5.2.0.29. —

Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ et $r, s \in \mathbf{R}^2$. On a $l = \alpha \cdot r + \beta \cdot s$, $f(t) = (u(t), v(t)) = a(t) \cdot r + b(t) \cdot s$ avec $a(t), b(t) \in \mathbf{R}$.

$$f(t) = (u(t), v(t)) = a(t) \cdot r + b(t) \cdot s$$

1. On a que $\lim_{t\to t_0} f(t) = l$ c'est par définition :

$$\begin{cases} \lim_{t \to t_0} u(t) = l_1 \\ \lim_{t \to t_0} v(t) = l_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{t \to t_0} a(t) = \alpha \\ \lim_{t \to t_0} b(t) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \lim_{t \to t_0} (a(t)r_1 + b(t)s_1) = \alpha r_1 + \beta s_1 \\ \lim_{t \to t_0} (a(t)r_2 + b(t)s_2) = \alpha r_2 + \beta s_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lim_{t \to t_0} a(t)r_1 + b(t)s_1 = l_1 \\ \lim_{t \to t_0} a(t)r_2 + b(t)s_2 = l_2 \end{cases}$$

2. De même ...

Définition 5.2.0.7. —

On dit que $f: I \to \mathbf{R}^2$, f(t) = (u(t), v(t)) admet un développement limité à l'ordre

n en
$$t_0$$
 si $u(t)$ et $v(t)$ admettent un développement limité à l'ordre n en t_0 .
Si $u(t) = u_0 + u_1(t - t_0) + \ldots + u_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon_1(t)$ et $v(t) = v_0 + v_1(t - t_0) + \ldots + v_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon_2(t)$ alors on appelle
$$f(t) = (u_0, v_0) + (t - t_0)(u_1, v_1) + \ldots + (t - t_0)^n (u_n, v_n) + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

$$f(t) = (u_0, v_0) + (t - t_0)(u_1, v_1) + \ldots + (t - t_0)^n (u_n, v_n) + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

le développement limité de f à l'ordre n en t_0 avec $\lim_{t\to t_0} \varepsilon(t) = (0,0)$.

Exemple. — Le développement limité de $f: t \mapsto (2t^3 - t \sin t, t^3 + \cos t)$ à l'ordre 4 en 0:

$$2t^{3} - t\sin t = -t^{2} + 2t^{3} + \frac{t^{4}}{6} + t^{4}\varepsilon(t)$$

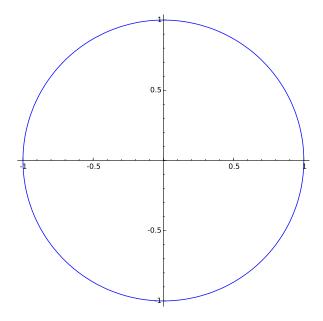
$$t^{3} + \cos t = 1 - \frac{t^{2}}{2} + t^{3} + \frac{t^{4}}{24} + t^{4}\varepsilon(t)$$

$$f(t) = (0, 1) - t^{2}(1, 1/2) + t^{3}(2, 1) + t^{4}(1/6, 1/24) + t^{4}\varepsilon(t)$$

Définition 5.2.0.8. —

On appelle courbe paramétrée de \mathbb{R}^2 une fonction $f: I \to \mathbb{R}^2$.

Exemple. — $f: R \to \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$.



Remarque. — Supposons que f soit dérivable en $t \in I$. Alors u(t), v(t) admettent des développements limités à l'ordre 1 en t_0 et donc f admet aussi un développement limité à l'ordre 1 en t_0 . Or si

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t)$$

alors

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0)) = f'(t_0).$$

DÉFINITION 5.2.0.9. —

On appelle $f'(t_0)$ vecteur tangent de f en t_0 . La droite affine passant par $f(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$ s'appelle la tangente à f en t_0 .

Remarque. — Le vecteur tangent dépend du paramétrage de la courbe et non seulement de sa représentation.

Exemple. — Soit $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ et soit $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$. Remarquons que f et g on même représentation graphique. Cependant les vecteurs tangents en 0 à f et g sont :

$$f'(0) = (0,1)$$

$$g'(0) = (0, 2).$$

La tangente à f en t_0 est la droite d'équation :

$$\det \begin{pmatrix} y - v(t_0) & v'(t_0) \\ x - u(t_0) & u'(t_0) \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire :

$$(y - v(t_0))u'(t_0) - (x - u(t_0))v'(t_0) = 0.$$

5.3. Étude de fonctions

Soit $f: I \to \mathbf{R}$, où I est un intervalle de \mathbf{R} . On procède à l'étude de f au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. En particulier, on s'intéresse notamment au graphe de f.

Proposition 5.3.1.1. —

Soit $x_0 \in I, f: I \to \mathbf{R}$. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x), \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

 $f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x), \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ où $P \in \mathbf{R}[x], P(x) = a_p x^p + \ldots + a_n x^n \text{ avec } 0 \le p \le n \text{ et } a_p \ne 0.$ Alors il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $x \ne x_0, f(x)$ est non nul et a le signe de $a_p(x-x_0)^p$.

DÉMONSTRATION 5.3.1.1. —

Puisque $p \leq n$, le développement limité de f en x_0 à l'ordre p est :

$$f(x) = (T_p(P))(x - x_0) + (x - x_0)^p \varepsilon(x).$$

$$f(x) = a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p \varepsilon(x)$$

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^p} = a_p + \varepsilon(x)$$

Tunsque $p \le n$, le developpement infinite de f chi x_0 à Fordre p est : $f(x) = (T_p(P))(x - x_0) + (x - x_0)^p \varepsilon(x).$ C'est-à-dire : $f(x) = a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p \varepsilon(x).$ Pour tout $x \ne x_0$, on a : $\frac{f(x)}{(x - x_0)^p} = a_p + \varepsilon(x)$ et $a_p \ne 0$, $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi il existe α tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $x \ne x_0$, $|\varepsilon(x)| < \frac{1}{2}(a_p)$. C'est-à-dire que pour un tel x, $f(x) \ne 0$ et est du même signe que $a_p(x - x_0)$

Définition 5.3.1.1. —

Si $I \subset \mathbf{R}$ est un intervalle et $f: I \to \mathbf{R}$ est une fonction numérique et si $x_0 \in \overline{I}^{(4\S)}$, on dit que f est positive au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage $J\subset I$ de x_0 tel que pour tout $x \in J$ et $x \neq x_0, f(x) > 0$.

5.3.1. Étude locale. —

Exemple. — Prenons:

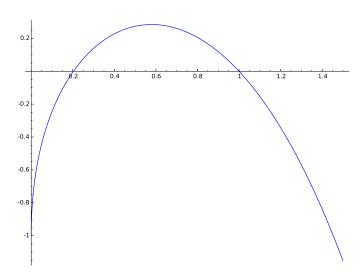
$$f(x) = e \cdot \sqrt{x} - e^x.$$

 $[\]overline{4}$ §. Dans \overline{I} ou l'une de ses bornes.

On cherche le signe de f quand x tend vers 1.

$$\begin{split} f(x) &= e \left[(1 + (x-1))^{1/2} - e^{x-1} \right] \\ & \left\{ (1 + (x-1))^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \\ e^{x-1} &= 1 + (x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \right. \\ f(x) &= e \left(-\frac{1}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \right) \\ f(x) &= \frac{-e}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x). \end{split}$$

Ainsi au voisinage de 1, le signe de f est le même que celui de 1-x.



Définition 5.3.1.2. —

Soit $f: I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. La tangente en $(x_0, f(x_0))$ au graphe de f est la droite affine d'équation :

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Définition 5.3.1.3. —

Soit $f: I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$.

On dit que f admet une inflexion au point $(x_0, f(x_0))$ si la fonction

$$x \mapsto f(x) - (f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0))$$

s'annule en x_0 en changeant de signe.

Proposition 5.3.1.2. —

Soit $f: I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. On a :

1. si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ est le développement limité de f à l'ordre 1 en x_0 , alors la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ est donnée par :

$$y = a_0 + a_1(x - x_0)$$
;

- 2. si $f(x) = a_0 + a_1(x x_0) + a_2(x x_0)^2 + (x x_0)^2 \varepsilon(x)$ est le développement limité de f à l'ordre 2 en x_0 , alors
 - si $a_2 > 0$ alors pour tout $x \neq x_0$ dans un voisinage suffisamment petit de x_0 , le point (x, f(x)) est au-dessus de la tangente;
 - si $a_2 < 0$ alors pour tout $x \neq x_0$ dans un voisinage suffisamment petit de x_0 , le point (x, f(x)) est en-dessous de la tangente;
- 3. si $f(x) = a_0 + a_1(x x_0) + a_3(x x_0)^3 + (x x_0)^3 \varepsilon(x)$ est le développement limité de f à l'ordre 3 en x_0 , alors si $a_3 \neq 0$, f admet un point d'inflexion en $(x_0, f(x_0))$.

DÉMONSTRATION 5.3.1.2. —

Dans l'ordre:

1. Comme f est dérivable en x_0 , on a $a_1 = f'(x_0)$ et $a_0 = f(x_0)$, l'équation de la tangente est

$$y = a_1(x - x_0) + a_0.$$

2. Posons

$$u(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)).$$

On a alors

 $u(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 - a_1(x - x_0) - a_0 + (x - x_0)^2 \varepsilon(x) = a_2(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2 \varepsilon(x).$

Comme $a_2 \neq 0$ (par hypothèse) alors la proposition précédente entraine que le signe de u(x) au voisinage de 0 est celui de $a_2(x-x_0)^2$, c'est-à-dire le signe de a_2 .

3. Posons de même

$$u(x) = a_3(x - x_0)^3 + (x - x_0)^3 \varepsilon(x).$$

D'après la proposition précédente, le signe de u(x) au voisinage de x_0 est celui de $a_3(x-x_0)$ puisque $a_3 \neq 0$. Comme $(x-x_0)^3$ n'est pas de signe constant, c'est un point d'inflexion.

Remarque. — Si $a_2 \neq 0$, alors:

- si $a_2 > 0$, f(x) admet un minimum local en x_0 ;
- sinon, f(x) admet un maximum local en x_0 .

Remarque, généralisation du résultat. — Supposons que le développement limité de f en x_0 est de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p \varepsilon(x),$$

avec $p \geq 2$. De plus on suppose $a_p \neq 0$. Alors en posant

$$u(x) = f(x) - (f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0))$$

est du signe de $a_p(x-x_0)^p$ au voisinage de x_0 .

- Si p est pair alors $a_p > 0$ implique que x_0 est un minimum local, $a_p < 0$ implique que x_0 est un maximum local.
- Si p est impair alors x_0 est un point d'inflexion.

Exemple. — Prenons:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 5}$$

définie sur \mathbf{R} et étudions f au voisinage de $x_0=2$. On a :

$$f(x+2) = \left((x+2)^3 + 6x^2 - 5\right)^{1/3}$$

$$f(x+2) = \left(27 + 36x + 12x^2 + x^3\right)^{1/3}$$

$$f(x+2) = 3 \cdot \left(1 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{27}x^3\right)^{1/3}$$

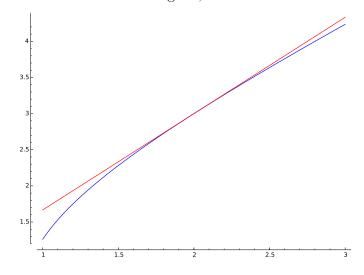
$$f(x+2) = 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2\right) + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)}{2}\left(\frac{16}{9}x^2\right)\right) + x^2\varepsilon(x)$$

$$f(x+2) = 3 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{27}x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

L'équation de la tangente est :

$$y = 3 + \frac{4}{3}(x - 2).$$

Comme le terme en x^2 est non nul et négatif, la courbe est en-dessous de la tangente.



5.3.2. Branches infinies. — Soit $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction numérique.

Définition 5.3.2.1. —

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm \infty$, avec $a \in \mathbf{R}$ alors la droite x = a est une asymptote verticale de f.

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ alors f admet une branche infinie en $+\infty$.

Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ou si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ alors f admet une branche infinie en $-\infty$.

Soit $a, b \in \mathbf{R}$. La droite y = ax + b est asymptote à f quand x tend vers $\pm \infty$ si :

$$\lim_{x \to \pm \infty} f(x) - ax - b = 0.$$

Si a = 0 on dit que l'asymptote est horizontale.

Soit $a \in \mathbf{R}$, si

$$\lim_{x \to \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

alors on dit que f a une direction asymptotique de pente a en $\pm \infty$.

$$\lim_{x \to \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \infty$$

alors on dit que f a une direction asymptotique verticale en $\pm \infty$.

Proposition 5.3.2.1. —

Soient $a,b\in\mathbf{R}$. La droite y=ax+b est asymptote à f quand x tend vers $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si, et seulement si :

— on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a ;$$

— et de plus

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - ax = b.$$

Exemple. — Soit $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par :

$$f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x^2 + 1}.$$

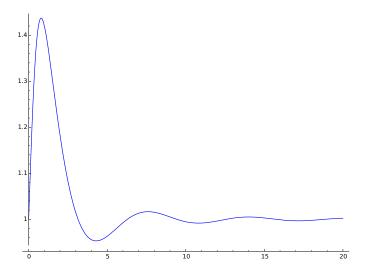
On a

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x) - 1| = 0$$

et donc y = 1 est asymptote à f en $+\infty$. La différence

$$f(x) - 1 = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$$

est du signe de $\sin x$ qui oscille.



Exemple. — Avec

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 5}$$

on regarde s'il y a une asymptote quand x tend vers $\pm \infty$ et la position par rapport à la possible asymptote. On écrit f sous la forme :

$$f(x) = xu(1/x)$$

avec

$$u(x) = \sqrt[3]{1 + 6x - 5x^3}.$$

Le développement limité de u en 0 à l'ordre 2 est :

$$u(x) = (1 + 6x - 5x^3)^{1/3}$$

$$u(x) = 1 + \frac{1}{3}(6x) + \frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)\frac{1}{2}(36x^2) + x^2\varepsilon(x)$$

$$u(x) = 1 + 2x - 4x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

Ainsi pour x au voisinage de ∞ en valeur absolue :

$$f(x) = x\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{\varepsilon(1/x)}{x^2}\right) = x + 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(1/x),$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) - (x+2) = 0.$$

On regarde maintenant la position de f par rapport à y = x + 2. On a

$$f(x) - (x+2) = \frac{-4}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(1/x).$$

Ainsi quand $x \to +\infty$, f est en-dessous de l'asymptote, quand $x \to -\infty$, f est au-dessus de l'asymptote.

5.3.3. Étude de fonction. — Par exemple avec

$$f(x) = x \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right|$$

de domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{0, -1/2\}$.

 $D\'{e}riv\'{e}e$. — On calcule la dériv\'e de f :

$$f(x) = x(\log|2x+1| - \log|x|)$$

$$f'(x) = \log\left|2 + \frac{1}{x}\right| + x\left(\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \log\left|2 + \frac{1}{x}\right| - \frac{1}{2x+1}$$

$$f''(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x} - \frac{2}{(2x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x(2x+1)^2}$$

Une étude des signes montre qu'il existe un unique α entre -1/2 et 0 (strictement) tel que $f'(\alpha) = 0$. En conclusion, f est croissante partout sauf sur $]-1/2, \alpha[$ où elle est décroissante.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

ce qui nous donne deux branches infinies.

$$\lim_{x \to -1/2} f(x) = +\infty$$

et donc il y a une asymptote verticale en x = -1/2.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = ?$$

$$f(x) = x \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right|$$

$$f(x) = x \log |2x + 1| - x \log x$$

or les deux termes tendent vers 0 en 0 et donc

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

et donc f admet un prolongement par continuité à 0 en 0.

Il reste à regarder les branches infinies :

— Quand $x \to \infty$, on cherche un développement limité de f en $+\infty$.

$$f(x) = x \log(2 + 1/x)$$

$$f(x) = x \log 2 + x \log\left(1 + \frac{1}{2x}\right)$$

$$f(x) = x \log 2 + x \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o(1/x^2)\right)$$

$$f(x) = (\log 2)x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o(1/x)$$

On en déduit que la droite d'équation

$$y = (\log 2)x + \frac{1}{2}$$

est asymptote oblique à f en $+\infty$ et la courbe est en-dessous de l'asymptote.

— En $-\infty$ la droite d'équation

$$y = (\log 2)x + \frac{1}{2}$$

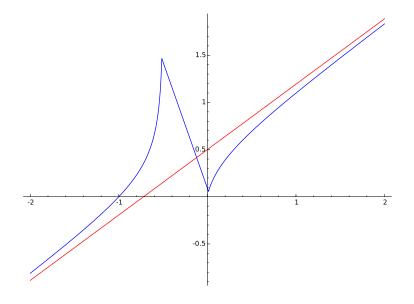
est également asymptote oblique à f en $-\infty$ et la courbe est au-dessus de l'asymptote.

— Pour ce qui est de la tangente en 0:

$$f'(x) = \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right| - \frac{1}{2x+1}$$

et alors

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right| = +\infty.$$



5.4. Courbes paramétrées

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle et $f: I \to \mathbf{R}^2$ telle que f(t) = (u(t), v(t)).

Définition 5.4.0.1. —

Supposons que u, v sont continues.

Si u et v admettent un développement limité à l'ordre n au point t_0 :

$$u(t) = u_0 + u_1(t - t_0) + \ldots + u_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

$$v(t) = v_0 + v_1(t - t_0) + \ldots + v_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

$$f(t) = f_0 + (t - t_0)f_1 + \ldots + (t - t_0)^n f_n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \ f_i = (u_i, v_i)$$

 $u(t) = u_0 + u_1(t - t_0) + \ldots + u_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$ $v(t) = v_0 + v_1(t - t_0) + \ldots + v_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$ alors f admet un développement limité à l'ordre n en t_0 : $f(t) = f_0 + (t - t_0)f_1 + \ldots + (t - t_0)^n f_n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$ $\forall i \in \{0, \ldots, n\}, \ f_i = (u_i, v_i).$ L'égalité précédente s'appelle le développement limité de f en t_0 à l'ordre n.

Remarque. — On a bien

$$\lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = (0, 0).$$

Définition 5.4.0.2. —

Une fonction $f: I \to \mathbf{R}^2$ s'appelle courbe paramétrée de \mathbf{R}^2 .

Supposons que f est dérivable en $t_0 \in I$. f admet le développement limité en t_0 à l'ordre 1 suivant :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t).$$

Définition 5.4.0.3. —

Si $f'(t_0) \neq 0$ alors la tangente à la courbe au point $f(t_0)$ est la droite affine passant par $f(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$. L'équation est

$$\det \begin{pmatrix} x - u(t_0) & u'(t_0) \\ y - v(t_0) & v'(t_0) \end{pmatrix} = 0.$$

En d'autres termes, c'est l'équation :

$$(y - v(t_0)) \cdot u'(t_0) - (x - u(t_0)) \cdot v'(t_0) = 0.$$

On se demande quelles sont les conditions à l'existence de la tangente en un point ainsi que la position de la tangente par rapport à la courbe.

Remarque. — On retrouve l'étude des fonctions à valeurs dans ${f R}$ si on a

$$f(t) = (t, v(t)).$$

Supposons que u, v admettent des développements limités en t_0 à l'ordre $n \geq 2$. On a

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)^2 w_2 + \dots + (t - t_0)^n w_n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

où $w_2, \dots, w_n \in \mathbf{R}^2$ et $\lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0_{\mathbf{R}^2}$.

1. Supposons que $f'(t_0) \neq 0$ et $f'(t_0)$ est non colinéaire à w_2 . On tronque le développement limité à l'ordre 2 :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)^2 w_2 + (t - t_0)^2 \varepsilon(t).$$

Soient (a(t), b(t)) les coordonnées de $\varepsilon(t)$ dans la base $(f'(t_0), w_2)$. Ainsi :

$$f(t) - f(t_0) = \left(t - t_0 + (t - t_0)^2 a(t)\right) f'(t_0) + (t - t_0)^2 (b(t) + 1) w_2$$

$$\lim_{t \to t_0} a(t) = \lim_{t \to t_0} b(t) = 0.$$

Selon la coordonnée de $f'(t_0)$ on a que $(t-t_0)^2 a(t)$ tend vers 0 et alors $t-t_0$ détermine le signe. Selon la coordonnée w_2 , dans un voisinage suffisamment petit de t_0 on a que la coordonnée est de signe positif.

2. Supposons que $f'(t_0) \neq 0$, $w_2 = \lambda f'(t_0)$ et enfin w_3 et $f'(t_0)$ non colinéaires. On a alors dans la base $(f'(t_0), w_3)$:

$$f(t) - f(t_0) = \left(t - t_0 + \lambda(t - t_0)^2\right) f'(t_0) + (t - t_0)^3 w_3 + (t - t_0)^3 \varepsilon(t).$$

On décompose $\varepsilon(t)$ dans cette base :

$$\varepsilon(t) = a(t)f'(t_0) + b(t)w_3.$$

On sait que

$$\lim_{t \to t_0} a(t) = \lim_{t \to t_0} b(t) = 0.$$

Dans cette base, on a:

$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} t - t_0 + \lambda(t - t_0)^2 + (t - t_0)^3 a(t) \\ (t - t_0)^3 + (t - t_0)^3 b(t) \end{pmatrix}$$

Sur chaque coordonnée, le signe est celui de $t-t_0$.

Remarque. — Supposons $f'(t_0) \neq 0, n \geq 3$ et il existe un entier $p \in \{3, \ldots, n\}$ tel que les vecteurs $w_2, w_3, \ldots, w_{p-1}$ sont colinéaires à $f'(t_0)$ et tel que w_p n'est pas colinéaire à $f'(t_0)$. Ainsi, $(f'(t_0), w_p)$ est une base de \mathbf{R}^2 .

On écrit le développement limité de $f(t) - f(t_0)$ dans cette base. On étudie le signe des coordonnées de $f(t) - f(t_0)$ quand $t \to t_0$. Si p est pair alors la courbe est comme dans le cas p = 2 (la courbe est du côté de w_p par rapport à la tangente), sinon comme dans le cas p = 3 (elle traverse la tangente).

3. Supposons que $f'(t_0) = 0$ et que w_2, w_3 forme une base de \mathbf{R}^2 . On a

$$f(t) - f(t_0) = (t - t_0)^2 w_2 + (t - t_0)^3 w_3 + (t - t_0)^3 \varepsilon(t).$$

On décompose $\varepsilon(t)$ dans la base (w_2, w_3) : $\varepsilon(t) = a(t)w_2 + b(t)w_3$ avec $\lim_{t \to t_0} a(t) = \lim_{t \to t_0} b(t) = 0$. Les coordonnées dans cette base de $f(t) - f(t_0)$ sont alors :

$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} (t - t_0)^2 + (t - t_0)^3 a(t) \\ (t - t_0)^3 + (t - t_0)^3 b(t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la première coordonnée est positive et la seconde est du signe de $t-t_0$. Une telle situation est un point de rebroussement.

4. Supposons que $f'(t_0) = 0$, $w_3 = \lambda w_2$ et w_2, w_4 forme une base. On pose $\varepsilon(t) = a(t)w_2 + b(t)w_4$. Dans ces coordonnées :

$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} (t - t_0)^2 + \lambda (t - t_0)^3 + (t - t_0)^4 a(t) \\ (t - t_0)^4 (1 + b(t)) \end{pmatrix}.$$

Les deux coordonnées sont positives quand $t \to t_0$. C'est aussi un point de rebroussement