# COURS COMPLET DE MM3

# Sommaire

# Première partie

# Algèbre

## Table des matières

# Chapitre 1

# Groupes et groupes symétriques

## 1 Introduction

### 1.1 Groupe abstrait

Définition 1.1
Un groupe est la donnée d'un couple $(G,\cdot)$ où $G$ est un ensemble et $\cdot : G\times G \to G$ une loi de composition interne, telle que :

1. associativité :
$$\forall a,b,c\in G,\ (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c);$$
2. existence de l'élément neutre $e\in G$ :
$$\forall g\in G,\ g\cdot e = e\cdot g = g;$$
3. existence de l'inverse :
$$\forall x\in G, \exists y\in G,\ x\cdot y = y\cdot x = e.$$

Notations. Pour un groupe multiplicatif on note $ab$ l'élément $a\cdot b$, l'élément neutre est noté 1 et l'inverse de $a$ est noté de $a^{-1}$.

Démonstration (Unicité de l'élément neutre et de l'inverse)
Soient $e,e'$ deux éléments neutres. Alors
$$e' = e\cdot e' = e.$$
Soient $b,c$ inverses de $a$. Alors :
$$b = b\cdot a\cdot c = c.$$

### 1.2 Groupe commutatif

Définition 1.2 (Groupe commutatif (ou Abélien))
Un groupe $G$ est commutatif si la loi de composition l'est :
$$\forall x,y\in G,\ xy = yx.$$

Notations. En général la loi de composition d'un tel groupe est notée comme un groupe additif $(G,+)$. Le neutre est alors 0 et l'inverse de $x$ est $-x$.

### 1.3 Exemples

— Le couple $(\mathbf{Z}, +)$ est un groupe abélien où $+$ est l'addition usuelle des entiers.
— $(\mathbf{R}, +)$ et $(\mathbf{Q}, +)$ sont également des groupes abéliens.
— $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \times)$ et $(\mathbf{Q} \setminus \{0\}, \times)$ sont des groupes abéliens.
— $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ est un groupe pour la composition de matrices en tant que loi de composition. Ce n'est pas un groupe commutatif.

## 2 Sous-groupe

### 2.1 Sous-groupe

Définition 2.1 (Sous-groupe)
Soit $G$ un groupe (multiplicatif) et $H \subset G$ un sous-ensemble de $G$. $H$ est un sous-groupe de $G$ si c'est un groupe avec la loi de composition et d'inverse astreintes à $H$ [1§].

Proposition 2.2
Soit $G$ un groupe.
Si $(H_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-groupes de $G$ alors $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de $G$.

Définition 2.3
Pour tout $i \in I$, $H_i$ vérifie la propriété de sous-groupe et donc l'intersection aussi.

Remarque. Généralement la réunion de sous-groupes n'est pas un sous-groupe. En effet si $x \in H_1$ et $y \in H_2$ alors il n'y a aucune raison que $xy \in \bigcup H_i$.

Pour une équivalence il faut rajouter une hypothèse. Si $H, K$ sont deux sous-groupes de $G$ alors $H \cup K$ est un sous-groupe si, et seulement si, $H \subset K$ ou $K \subset H$.

En effet supposons $H \not\subset K$ et que $H \cup K$ est un sous-groupe. Si $K \not\subset H$ alors on peut choisir $x \in K - K \cap H$ et $y \in H - K \cap H$. On a $x, y \in K \cup H$ et donc par hypothèse $xy \in H \cup K$ et donc il existe des inverses respectifs $x^{-1}, y^{-1}$. Supposons $xy \in H$ : $H \ni (xy)y^{-1} = xe = x \in H$ absurde.

Définition 2.4 (Groupe engendré)
Si $G$ est un groupe et $X$ une partie de $G$ alors on appelle sous-groupe de $G$ engendré par $X$ le plus petit sous-groupe de $G$ contenant $X$. On le notera ici $\langle X \rangle$.
On a de plus si on note $\mathbb{G}$ l'ensemble des sous-groupes de $G$ :

$$\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathbb{G} \text{ et } H \supset X} H.$$

Exemple. Soit $G$ un groupe et $x \in G$. Alors :

$$\langle x \rangle = \left\{ x^k \,\middle|\, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

En effet c'est un sous-groupe de $\langle x \rangle$ et le plus petit.

### 2.2 Ordre d'un groupe et d'un élément

1§. C'est-à-dire si $H$ est stable par l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$.

DÉFINITION 2.5 (Ordre d'un groupe)
Si $G$ est un groupe fini, on appelle *ordre de $G$* son cardinal, on le note généralement $|G|$ ou $\sharp G$.
Si $G$ est un groupe et $x \in G$ alors on appelle *ordre de $x$* le cardinal de son sous-groupe engendré (s'il est fini).
Dans le cas où le groupe en question ne serait pas fini, on dit que l'ordre est infini.

EXEMPLES.
— Dans $\mathbf{Z}$, tous les éléments non nuls sont d'ordre infini.
— Dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est d'ordre $n$ puisque toute classe admet un représentant dans $\{0, \ldots, n-1\}$.
— Ordre des éléments de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ :

| $x$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert x \rvert$ | 1 | 4 | 2 | 4 |

THÉORÈME 2.6 (Théorème de LAGRANGE)
Pour tout groupe $G$ et tout sous-groupe $H$ de $G$, l'ordre (i.e. le cardinal) de $H$ divise l'ordre de $G$ :

$$\sharp H \mid \sharp G.$$

DÉMONSTRATION (Théorème de LAGRANGE)
Le cardinal de l'ensemble $G/H$ est appelé *indice* de $H$ dans $G$ et est noté $[G : H]$. De plus, ses classes forment une partition de $G$ et chacune d'entre elles a le même cardinal que $H$. On a alors :

$$\sharp G = \sharp H \times [G : H].$$

# 3 Morphisme de groupes

## 3.1 Morphisme de groupes

DÉFINITION 3.1
Soient $G, H$ deux groupes. Une application $f : G \to H$ est un morphisme de groupes si :

$$\forall x, y \in G,\ f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

PROPOSITION 3.2
Soient $f : G \to H$ un morphisme de groupes. Alors :

1. $f(e_G) = e_H$ ;
2. $\forall x \in G,\ f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

## 3.2 Image et noyau

DÉFINITION 3.3
Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes. On définit :

1. $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G \mid f(x) = e\}$ ;
2. $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in G\}$.

Proposition 3.4
Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes.

1. $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-groupes de $G$ et $H$ respectivement ;
2. $f$ est injective si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f) = \{e\}$ ;
3. $f$ est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) = H$.

Démonstration
Point par point :

1. On a bien entendu $f(e) = e$ et $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$ pour tout $x \in G$. Ainsi $\mathrm{Im}(f) = f(G)$ est un sous-groupe de $H$.
   Soient $x, y \in G$, alors $f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = ee^{-1} = e$ donc $xy^{-1} \in G$. De plus $f(e) = e$ donc $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-groupe de $G$.
2. Soient $x, y \in G$ :
$$(f(x) = f(y) \iff x = y) \iff \left(f(xy^{-1}) = e \iff xy^{-1} = e\right).$$
3. Par définition, si $\mathrm{Im}(f) = H$ alors $f$ est surjective et réciproquement.

# 4 Groupe symétrique

## 4.1 Groupe de permutations

Définition 4.1
Soit $E$ un ensemble. On définit :
$$S_E = \{\text{bijections } E \to E\}.$$
La loi étant la composition des applications. Elle est associative, admet un élément neutre (application identité) et toute application admet une application inverse par définition.

Proposition 4.2
Si $\sharp E = n$ alors $S_E$ est isomorphe (au sens de groupes) à $S_{\{1,2,\dots,n\}} := S_n$.

Démonstration
Puisque $\sharp E = n$ il existe une bijection $\phi = E \to \{1, 2, \dots, n\}$. On considère alors l'application de $\theta : S_E \to S_n$ définie par : $\omega \mapsto \phi \circ \omega \circ \phi^{-1}$. Comme $\omega, \phi$ sont des bijections, l'application $\phi \circ \omega \circ \phi^{-1}$ est une bijection. L'application $\theta$ est bien définie.
On a :
$$\begin{aligned}\theta(\omega' \circ \omega) &= \phi \circ (\omega' \circ \omega) \circ \phi^{-1}\\ \theta(\omega' \circ \omega) &= \phi \circ \omega' \circ \mathrm{id} \circ \ \omega \circ \phi^{-1}\\ \theta(\omega' \circ \omega) &= \theta(\omega') \circ \theta(\omega).\end{aligned}$$
$\theta$ est bien un morphisme de groupes. On a $\theta^{-1}(\omega) = \phi^{-1} \circ \omega \circ \phi$ qui fait de $\theta$ une bijection.

Définition 4.3 (Groupe symétrique)
On appelle $S_n$ le *groupe symétrique*.

Remarque. On omet la notation $\circ$. Si $\omega \in S_n$ on décrit son action sur $\{1, 2, \dots, n\}$ par :
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \omega(1) & \omega(2) & \dots & \omega(n) \end{pmatrix}.$$

Exemple de composition. Dans $S_4$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

## 4.2 Transpositions et cycles

Définition 4.4 (Transposition)
Une *transposition* de $S_n$ est une permutation qui échange deux éléments et laisse invariants les $n-2$ autres.

Notation. Pour tous $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ avec $i \neq j$ on note $(ij)$ la transposition :

$$(ij) : \begin{cases} i \mapsto j \\ j \mapsto i \\ k \mapsto k, \ \forall k \neq i, j \end{cases}.$$

Remarque. Une transposition est une involution. C'est à dire que l'ordre d'une transposition est 2.

Proposition 4.5
$\sharp S_n = n!$.

Définition 4.6 (Cycle)
On appelle *cycle* de longueur $r > 1$ (noté $r$-cycle) (dans $S_n$) une permutation $\omega$ telle qu'il existe $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vérifiant :

1. $\omega(x_1) = x_2, \omega^n(x_1) = x_{1+n}$ avec $n < r$ ;
2. $\omega(x_r) = x_1$ ;
3. $\omega(x) = x$ si $x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$.

Notation. On note un tel cycle : $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_r \end{pmatrix}$.

Remarque. Les 2-cycles sont exactement les transpositions.

Exemple. Dans $S_3$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases}.$$

## 4.3 Décomposition des cycles

Définition 4.7 (Support)
On appelle *support* du cycle $\omega$ le sous-ensemble :

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}.$$

LEMME 4.8
Deux cycles de supports disjoints commutent.

DÉMONSTRATION
Soient :

$$\begin{cases} v = (x_1, x_2, \dots, x_r) \\ w = (y_1, y_2, \dots, y_s) \end{cases}$$

avec $\{x_1, x_2, \dots, x_r\} \cap \{y_1, y_2, \dots, y_s\} = \emptyset$.
Sur un élément extérieur du support la permutation agit comme l'identité donc deux supports disjoints impliquent que les permutations associées permutent (puisque que l'identité permute).

LEMME 4.9
Un $r$-cycle est d'ordre $r$.

DÉMONSTRATION
Soit $w = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_r \end{pmatrix}$ un $r$-cycle. Il est clair qu'un élément du support est d'ordre $r$. Les autres restent fixés par $w$ et donc $w$ est d'ordre $r$.

PROPOSITION 4.10
Toute permutation de $S_n$ est décomposable en produit de cycles de supports disjoints. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

EXEMPLES. Soit :

$$S_5 \ni \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = w.$$

On peut décomposer $w$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$S_8 \ni w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 7 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

THÉORÈME 4.11
Le groupe symétrique est engendré par les transpositions.

DÉMONSTRATION
On procède par récurrence sur $n$.

1. $S_2 = \{1, \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\}$ est engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Soit $n > 2$, supposons que $S_{n-1}$ est engendré par les transpositions de $S_{n-1}$. Soit $w \in S_n$ :
   (a) Soit $w(n) = n$ et alors on décompose $w$ en cycles de tailles inférieures ou égales à $S_{n-1}$ et c'est démontré.
   (b) Soit $w(n) \neq n$. On pose $m = w(n)$ et soit $t = \begin{pmatrix} n & m \end{pmatrix}$. On pose $v = tw$ et alors $v(n) = n$ et on lui applique le cas précédent. On a alors par unicité de la décomposition que $w$ est elle-même engendrée par des transpositions et c'est démontré.

THÉORÈME 4.12
On a les propositions suivantes :

1. Si $w \in S_n$ est une permutation qui s'écrit de deux façons différentes comme produit de transpositions :

$$w = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_{r'},$$

alors $(-1)^r = (-1)^{r'}$.
On appelle $(-1)^r$ la *signature* de $w$.

2. La signature est un morphisme de groupes de $S_n \to \{1, -1\} \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

DÉMONSTRATION
Soit $w \in S_n$. On pose :

$$\begin{aligned} \varepsilon(w) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{w(i) - w(j)}{i - j} \\ \varepsilon(w) &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (w(i) - w(j))}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (i - j)} \\ \varepsilon(w) &= \frac{N}{D}. \end{aligned}$$

Avec

$$N = \prod_{1 \leq i, j \leq n \; ; \; w^{-1}(i) < w^{-1}(j)} (i - j) = \pm D.$$

D'où :

$$\varepsilon(w) = \pm 1.$$

EXEMPLE. $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. On a :

$$\varepsilon(w) = \frac{(w(1) - w(2))(w(1) - w(3))(w(2) - w(3))}{(1-2)(1-3)(2-3)} = \frac{(2-3)(2-1)(3-1)}{(1-2)(1-3)(2-3)} = 1.$$

LEMME 4.13
On a :

1. $\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ est un morphisme de groupes ;
2. $\varepsilon(ij) = -1$ pour tout $i \neq j$.

DÉMONSTRATION (Théorème)
Si

$$w = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_{r'}$$

alors par le lemme :

$$\varepsilon(w) = (-1)^r = (-1)^{r'}.$$

DÉMONSTRATION (Lemme)
Soit $E = \{(ij) \,|\, 1 \leq i < j \leq n\}$. On pose :

$$f_w : \begin{cases} E \to E \\ \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w(i) & w(j) \end{pmatrix} \text{ si } w(i) < w(j) \\ \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w(j) & w(i) \end{pmatrix} \text{ si } w(i) > w(j) \end{cases}.$$

$f$ est une bijection car elle est injective et l'ensemble de départ et d'arrivée ont le même cardinal qui est fini.
Donc on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon(w) &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (w(i) - w(j))}{\prod_{(i,j) \in E} (w(i) - w(j))} \\ \varepsilon(w) &= \pm 1. \end{aligned}$$

Pour vérifier que $\varepsilon$ est un morphisme, on calcul $\varepsilon(wv)$ :

$$\varepsilon(wv) = \prod_{(i,j)\in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{i - j}$$
$$\varepsilon(wv) = \prod_{(i,j)\in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \prod_{(i,j)\in E} \frac{v(i) - v(j)}{i - j}$$
$$\varepsilon(wv) = \prod_{(i,j)\in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \varepsilon(v).$$

On calcule :

$$\varepsilon(w) \stackrel{?}{=} \prod_{(i,j)\in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)}$$
$$\varepsilon(w) = \prod_{(i,j)\in E_1} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \prod_{(i,j)\in E_2} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)}$$

Où $E_1 = \{(i,j) \in E \,|\, v(i) < v(j)\}$ et $E_2 = \{(i,j) \in E \,|\, v(j) < v(i)\}$ ; $E = E_1 \coprod E_2$.

$$\varepsilon(w) = \prod_{(i,j)\in E_2} \frac{wv(j) - wv(i)}{v(j) - v(i)} \prod_{(i,j)\in E_1} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)}$$
$$\varepsilon(w) = \prod_{i<j \;;\; v^{-1}(j)<v^{-1}(i)} \frac{w(i) - w(j)}{i - j} \prod_{i<j \;;\; v^{-1}(i)<v^{-1}(j)} \frac{w(i) - w(j)}{i - j}$$
$$\varepsilon(w) = \prod_{i<j} \frac{w(i) - w(j)}{i - j}$$

# Chapitre 2

# Déterminants et réduction

## 1 Déterminants

### 1.1 Différentes définitions

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ avec $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

Définition 1.1 (Déterminant)
On définit en premier lieu :

$$\det A = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) a_{w(i),1} \cdot a_{w(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{w(n),n}.$$

C'est la formule de Cramer.

Définition 1.2
Une seconde définition possible :
Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, soit $A_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ la matrice (extraite) obtenue en enlevant la $i$-ième ligne et la $j$-ième colonne de $A$.
On a alors :

$$\det' A = a_{1,1} \cdot \det'(A_{1,1}) - a_{1,2} \cdot \det'(A_{1,2}) + \ldots + (-1)^{n-1} a_{1,n} \cdot \det'(A_{1,n}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1,i} \cdot \det'(A_{1,i})$$

Exemple. Prenons :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ A_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne avec la seconde définition :

$$\det A = 2\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2. On vérifie que les deux définitions coïncident :

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} - a_{2,1} a_{1,2}.$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}\det(a_{2,2}) - a_{1,2}\det(a_{2,1}) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.$$

Remarque. Soient $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$ un $n$-uplet de vecteurs de $E$. Pour tout $j$, on pose :

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot e_i \quad a_{i,j} \in \mathbf{R}.$$

On appelle *déterminant* dans la base $B$ de $(u_1, \dots, u_n)$ le réel :

$$\det{}_B(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det(a_{i,j}).$$

Exemple. Pour $n = 2$. On prend :

$$u_1 = 2e_1 + 3e_2,$$
$$u_2 = -e_1 + 6e_2.$$

On a alors :

$$\det{}_B(u_1, u_2) = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 15.$$

Remarque. Si $u_j = e_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ alors $\det_B(e_1, \dots, e_n) = \det(I_d) = 1$.

Proposition 1.3
On a les énoncés :

1. pour tout $w \in S_n$ :

$$\det{}_B(u_{w(1)}, u_{w(2)}, \dots, u_{w(n)}) = \varepsilon(w)\det{}_B(u_1, u_2, \dots, u_n);$$

2. on en déduit que le déterminant change de signe si on échange deux colonnes ;
3. si pour $i \neq j$ on a $u_i = u_j$ alors le déterminant est nul (puisque négatif et positif simultanément).

Démonstration
Il suffit de montrer le premier point.
On sait que $S_n$ est engendré par les transpositions. On suppose donc que $w \in S_n$ est une transposition.
En fait, $S_n$ est engendré par les transpositions simples, i.e. les transpositions de la forme $(k, k+1)$ avec $1 \leq k < n$.[1§]
On suppose donc que $w$ est de la forme $(k, k+1)$. Soit $A$ la matrice $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de ces $n$ vecteurs dans les coordonnées de la base $B$. Soit $A'$ la matrice obtenue en permutant les colonnes $k$ et $k+1$ de $A$. Il faut donc vérifier que :

$$\det A' = \varepsilon(w)\det A = -\det A.$$

On calcule à gauche et à droite :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{1,j}),$$
$$\det A' = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a'_{1,j} \det(A'_{1,j}).$$

— Pour $j \neq k, k+1$ on a $a'_{1,j} = a_{1,j}$ et $A'_{1,j}$ est obtenue en échangeant les colonnes $k$ et $k+1$ de $A_{1,j}$
— Pour $j = k$ on a $a'_{1,k} = a_{1,k+1}$ et donc $A'_{1,k} = A_{1,k+1}$.
— Pour $j = k+1$ on a $a'_{1,k+1} = a_{1,k}$ et donc $A'_{1,k+1} = A_{1,k}$.

On en déduit :

$$\det A' = \sum_{j\neq k,k+1} (-1)^{j+1}\det(A'_{i,j})\,^{2\S} + (-1)^{k+1}a'_{1,k}\det(A'_{1,k}) + (-1)^{k}a'_{1,k+1}\det(A'_{1,k+1}),$$
$$\det A' = \sum_{j\neq k,k+1} (-1)^{j+1}(-\det(A_{i,j})) + (-1)^{k+1}a_{1,k+1}(-\det(A_{1,k+1})) + (-1)^{k}a_{1,k}(-\det(A_{1,k})),$$
$$\det A' = -\det A.$$

## 1.2 Formes $n$-linéaires alternées

Définition 1.4 (Forme $n$-linéaire)
Soit $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Une forme $n$-linéaire sur $E$ est une application $\varphi : E^n \to \mathbf{R}$ qui est linéaire sur chaque composante.

Proposition 1.5
Soit $B$ une base de $E$ avec $\dim E = n$.

$$\det_B : \begin{cases} E^n \to \mathbf{R} \\ (u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_B(u_1, \dots, u_n) \end{cases}$$

est une forme $n$-linéaire.

Démonstration
On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & aa'_{1,k} + ba''_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & aa'_{2,k} + ba''_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a'_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a'_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a''_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a''_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

On veut montrer :

$$\det A = a\det A' + b\det A''.$$

On calcule :

$$\det A = \sum_{j\neq k}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(A_{i,j}) + (-1)^{k+1}(aa'_{1,k} + ba''_{1,k})\det(A_{1,k}),$$
$$\det A' = \sum_{j\neq k}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(A'_{i,j}) + (-1)^{k+1}a'_{1,k}\det(A_{1,k}),$$
$$\det A'' = \sum_{j\neq k}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(A''_{i,j}) + (-1)^{k+1}a''_{1,k}\det(A_{1,k})$$

1§. En effet, toute transposition est un produit de transpositions simples par une conjugaison adaptée : on « renomme » les éléments.

2§. Par récurrence sur $n$ on a $\det(A'_{i,j}) = -\det(A_{i,j})$.

On doit alors montrer :

$$\forall j \neq k,\ \det A_{i,j} = a\det(A'_{i,j}) + b\det(A''_{i,j})$$

ce qui est démontré par hypothèse de récurrence.

Définition 1.6 (Forme $n$-linéaire alternée)
Soit $\varphi : E^n \to \mathbf{R}$ une forme $n$-linéaire alternée avec $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
$\varphi$ est une forme $n$-linéaire alternée si on a :

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$$

dès que deux composantes $u_i, u_j$ avec $i \neq j$ coïncident.

Remarque. On en déduit que le déterminant dans une base donnée est une forme $n$-linéaire alternée.

Proposition 1.7
Soit $\varphi$ une forme $n$-linéaire alternée. Alors pour tout $w \in S_n$, $\varphi(u_{w(1)}, \dots, u_{w(n)}) = \varepsilon(w)\varphi(u_1, \dots, u_n)$.

Démonstration
On peut supposer que $w$ est une transposition simple : $w = (k, k+1)$ avec $1 \leq k < n$.
On veut montrer :

$$\varphi(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, u_k, u_{k+2}, \dots, u_n) = -\varphi(u_1, \dots, u_n).$$

Pour simplifier les notations, on oublie les indices $u_i$ avec $i \neq k, k+1$. On a :

$$\varphi(u_k + u_{k+1}, u_k + u_{k+1}) = 0$$

et donc par linéarité :

$$\varphi(u_k, u_k) + \varphi(u_k, u_{k+1}) + \varphi(u_{k+1}, u_k) + \varphi(u_{k+1}, u_{k+1}) = 0 \iff \varphi(u_k, u_{k+1}) = -\varphi(u_{k+1}, u_k).$$

Proposition 1.8
Soient $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$.
Soit $\varphi : E^n \to \mathbf{R}$ une forme $n$-linéaire alternée. Alors :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(u_1, \dots, u_n)\varphi(e_1, \dots, e_n)$$

où les $u_i$ sont exprimés dans la base $B$.

Remarque. Toutes les formes $n$-linéaires alternées sont proportionnelles au déterminant.

Démonstration
Soit $u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$, les $a_{i,j}$ sont les coordonnées des $u_j$ dans la base $B$.
On a :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n a_{i,1} e_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,n} e_i\right).$$

Comme $\varphi$ est $n$-linéaire alternée :

$$\begin{aligned}
\varphi(u_1,\dots,u_n) &= \sum_{w\in S_n} a_{w(1),1}a_{w(2),2}\dots a_{w(n),n}\varphi(e_{w(1)},\dots,e_{w(n)})\\
\varphi(u_1,\dots,u_n) &= \sum_{w\in S_n} a_{w(1),1}a_{w(2),2}\dots a_{w(n),n}\varepsilon(w)\varphi(e_1,\dots,e_n)\\
\varphi(u_1,\dots,u_n) &= \det_B(u_1,\dots,u_n)\varphi(e_1,\dots,e_n)
\end{aligned}$$

Remarques. On a démontré :

1. Pour une base $B$ choisie, le déterminant $\det_B$ est une forme $n$-linéaire alternée ;
2. pour toute forme $n$-linéaire alternée, $\varphi$, on a : $\varphi(\cdot) = \det_B(\cdot)\varphi(B)$ ;
3. en particulier, les deux déterminants coïncident.

Proposition 1.9
Pour tout $A \in M_n(\mathbf{R})$ on a :

$$\det(A) = \det(A^t).$$

Démonstration
On a :

$$\begin{aligned}
A &= (a_{i,j})\\
A^t &= (b_{i,j}),\ b_{i,j} = a_{j,i}
\end{aligned}$$

On calcule par la formule de Cramer :

$$\begin{aligned}
\det(A^t) &= \sum_{w\in S_n}\varepsilon(w)\prod_{i=1}^n b_{w(i),i},\\
\det(A^t) &= \sum_{w\in S_n}\varepsilon(w)\prod_{i=1}^n a_{i,w(i)}.
\end{aligned}$$

Pour $w$ fixé, dans $i$ décrit 1 à $n$ alors $w(i)$ décrit également 1 à $n$. On effectue un changement de variable $j = w(i)$ et alors $i = w^{-1}(j)$ et on a :

$$\begin{aligned}
\det(A^t) &= \sum_{w\in S_n}\varepsilon(w)\prod_{j=1}^n a_{w^{-1}(j),j},\\
\det(A^t) &= \sum_{w\in S_n}\varepsilon(w^{-1})\prod_{j=1}^n a_{w(j),j},\\
\det(A^t) &= \sum_{w\in S_n}\varepsilon(w)\prod_{j=1}^n a_{w(j),j},\\
\det(A^t) &= \det(A).
\end{aligned}$$

Remarque. On peut calculer $\det(A)$ en développant par rapport à la première ligne ou la première colonne (au choix). On a alors :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^n a_{i,1}\det(A_{i,1}).$$

Proposition 1.10

Si $A \in M_n(\mathbf{R})$ est triangulaire alors :

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Démonstration

Supposons $A$ triangulaire supérieure, c'est-à-dire $a_{i,j} = 0$ si $i > j$.
Par la formule de Cramer :

$$\det(A) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^{n} a_{i,w(i)}.$$

Or les seuls $w$ qui contribuent à cette somme sont ceux tels que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, i \leq w(i),$$

c'est-à-dire : $w = \mathrm{id}$ [3§].
En développant par rapport à une ligne (ou une colonne quelconque) :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{j,i} \det(A_{j,i}).$$

Si $A'$ désigne la matrice obtenue en permutant les lignes de $A$ par $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & j \end{pmatrix}$ :

$$\det(A') = \varepsilon(w)\det(A) = (-1)^{j+1}\det(A).$$

On note $A' = (a'_{k,l})_{k,l \in \{1,\ldots,n\}}$.
En choisissant $j > 1$ :

$$\begin{aligned} \det(A') &\overset{4§}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a'_{1,i} \det(A'_{1,i}), \\ \det(A') &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{j,i} \det(A_{j,i}); \\ \det(A) &= (-1)^{j+1} \det(A'), \\ \det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{j,i} \det(A_{j,i}). \end{aligned}$$

# 2 Déterminant d'un endomorphisme

## 2.1 Invariance par changement de base

Proposition 2.1

Soient $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n$, $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et

3§. Soit $w \in S_n$, $w : \{1, 2, \ldots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \ldots, n\}$.
Si $i \leq w(i)$ pour tout $i$ alors $w(k) = k$ pour tout $k$ par récurrence descendante sur $k$ :
- $n \leq w(n)$ et donc $w(n) = n$ ;
- $k - 1 \leq w(k-1)$ et donc $w(k-1) = w(k)$.

4§. En développant par rapport à la première ligne.

$C = (u_1, \ldots, u_n)$ un système de $n$ vecteurs de $E$. Alors $C$ est une base de $E$ si, et seulement si :

$$\det_B(C) \neq 0.$$

DÉMONSTRATION
Supposons que $C$ est une base de $E$.
On a vu que si $\varphi : E^n \to \mathbf{K}$ est une forme $n$-linéaire alternée alors :

$$\forall (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n,\ \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det_B(u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot \varphi(e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

On applique cette formule avec $\varphi = \det_C$ et on a :

$$\begin{aligned} \det_C(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= \det_B(C)\det_C(B), \\ 1 = \det_C(C) &= \det_B(C)\det_C(B), \end{aligned}$$

et donc $\det_B(C) \neq 0$.
Supposons maintenant que $C$ est liée. Il existe alors $i$ tel que $u_i$ est combinaison linéaire des $u_j$ avec $j \neq i$. Par exemple :

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{j \neq i} a_j \cdot u_j,\ (a_j \in \mathbf{R}) \\ \det_B(C) &= \det_B(u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, \sum_{j \neq i} a_j \cdot u_j, u_{i+1}, \ldots, u_n), \\ \det_B(C) &= \sum_{j \neq i} a_j \det_B(u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, \underset{j \neq i}{u_j}, u_{i+1}, \ldots, u_n), \end{aligned}$$

or $\det_B$ est alternée et comme $u_j$ apparaît deux fois dans la dernière expression, on a

$$\det_B(C) = 0.$$

PROPOSITION 2.2
Soient $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n$, $B = (e_1, \ldots, e_n)$, $C = (u_1, \ldots, u_n)$ deux bases de $E$ et $f$ un endomorphisme de $E$. Alors :

$$\det_B(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \det_C(f(u_1), \ldots, f(u_n)).$$

REMARQUE. En d'autres termes, $\det_B(f(B))$ ne dépend pas du choix de la base $B$. On l'appelle $\det(f)$.

DÉMONSTRATION
On utilise la formule :

$$\forall (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n,\ \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det_B(u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot \varphi(e_1, e_2, \ldots, e_n),$$

où $\varphi$ est une forme $n$-linéaire alternée.
On pose :

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = \det_B(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n))$$

et on a alors :

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = \det_B(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \det_C(f(u_1), \ldots, f(u_n))\det_B(C).$$

De même :

$$\det_B(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \det_B(C)\det_B(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

Et donc :

$$\det_B(f(u_1), \dots, f(u_n))\det_B(C) = \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n))\det_B(C)$$

et $\det_B(C) \neq 0$. Donc l'égalité voulue est obtenue.

Proposition 2.3

Soient $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n$, $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$. Alors :

$$\det(fg) = \det(f)\det(g).$$

Démonstration

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$,

$$\det(fg) = \det_B(fg(e_1), \dots, fg(e_n)).$$

Considérons la forme $n$-linéaire alternée $\varphi$ telle que :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(g(u_1), \dots, g(u_n)),$$

alors on a :

$$\begin{aligned} \varphi(f(u_1), \dots, f(u_n)) &= \det_B(f(u_1), \dots, f(u_n))\varphi(e_1, \dots, e_n), \\ \det_B(gf(e_1), \dots, gf(e_n)) &= \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n))\det_B(g(e_1), \dots, g(e_n)), \\ \det(gf) &= \det(g)\det(f). \end{aligned}$$

Remarque. Si $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ alors

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

# 3 Diagonalisation

Définition 3.1

Une matrice $A$ est *diagonalisable* si elle est conjugué par un isomorphisme à une matrice diagonale.

## 3.1 Valeur propre et vecteur propre

Soit $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n$. Soit $f$ un endomorphisme de $E$.

Définition 3.2

On appelle *valeur propre* de $f$ un réel $\lambda$ tel qu'il existe un $v \in E - \{0\}$ tel que $f(v) = \lambda \cdot v$. On dit que $v$ est un *vecteur propre* de valeur propre $\lambda$.

Quitte à prendre la matrice $A$ de $f$ dans une base $(e_1, \dots, e_n)$ fixée de $E$, $\lambda$ est une valeur de $f$ (ou de $A$) si, et seulement si

$$\det(A - \lambda I_d) = 0.$$

Remarque. Soient $A \in M_n(\mathbf{R})$, $B$ la base canonique et $C = AB$. $\det(A)$ est non nul si, et seulement si, $A$ est inversible. D'autre part s'il existe un vecteur propre $v$ de valeur propre $\lambda$ alors

$$\ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\}.$$

Or $f - \lambda I_d$ est un endomorphisme de $E$ et $E$ est de dimension finie. Donc il y a équivalence :

$$\ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I_d) = 0.$$

Définition 3.3
On appelle polynôme caractéristique de $f$ (ou de $A$) le polynôme :

$$\chi_f(t) = \chi_A(t) = \det(A - tI_d).$$

Exemple. En dimension 2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a

$$\chi_A(t) = t^2 - (a+d)t + ad - bc = t^2 - \mathrm{tr}(A)t + \det(A).$$

Remarque. $\chi_A(t)$ est un polynôme de degré $n$ de coefficient dominant $(-1)^n$ et de terme constant $\chi_A(0) = \det(A)$.

## 3.2 Sous-espaces propres

Définition 3.4
Soit $f$ un endomorphisme de $E$ et de matrice $A$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On appelle *sous-espace propre* de $f$ (ou de $A$) de valeur propre $\lambda$ le sous-espace vectoriel $\ker(f - \lambda I_d)$.

Proposition 3.5
Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors si $\lambda \neq \mu$ on a

$$\ker(f - \lambda I_d) \ker(f - \mu I_d) = \{0\}.$$

Plus généralement si, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}$ distincts alors on a :

$$\sum_{i=1}^{k} \ker(f - \lambda_i I_d) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(f - \lambda_i I_d)$$

Démonstration
Il s'agit de vérifier que pour tout $i \neq j$ on a :

$$\ker(f - \lambda_i I_d) \cap \ker(f - \lambda_j I_d) = \{0\}.$$

Si $v \in \ker(f - \lambda_i I_d) \cap \ker(f - \lambda_j I_d)$ alors :

$$f(v) = \lambda_i v = \lambda_j v \implies v = 0.$$

Corollaire 3.6
Soient $\dim E = n$, $f$ est un endomorphisme de $E$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ valeurs propres de $f$ et $E_i$ le sous-espace associé à la valeur propre $\lambda_i$. Alors si

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i,$$

l'endomorphisme $f$ est diagonalisable.

Démonstration
Si on fait la réunion :

$$B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i,$$

où $B_i$ est une base de $E_i$ on obtient une base de $E$. Dans cette base la matrice de $f$ est diagonale où l'élément diagonal $\lambda_i$ est la valeur propre correspondante. La matrice de passage de la base canonique à la base $B$ donne la diagonalisablisation.

Donc pour diagonaliser $A$ il faut vérifier si $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$ où les $E_i$ sous les sous-espaces propres.

Exemple. Soit :

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}. \\
\chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 1 & 4-\lambda & -5 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}, \\
\chi_A(\lambda) &= (1-\lambda)((4-\lambda)(-2-\lambda)+10) - (2(-2-\lambda)+6), \\
\chi_A(t) &= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2).
\end{aligned}$$

Les trois valeurs propres sont $0, 1, 2$ et sont de multiplicité 1.

$$\begin{aligned}
E_0 = \ker(A) &= \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, Ax = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \\
E_1 = \ker(A - I_d) &= \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \\
E_2 = \ker(A - 2I_d) &= \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.
\end{aligned}$$

On a l'égalité :

$$E_0 \oplus E_1 \oplus E_2 = \mathbf{R}^3.$$

On en déduit les matrices de passage :

$$\begin{aligned}
P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

## 3.3 Conditions de diagonalisabilité

Proposition 3.7
Soient $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n$, $f$ un endomorphisme de $E$, $\chi_f(t) \in \mathbf{R}[t]$, $\deg \chi_f = n$.
Si $\chi_f$ admet $n$ racines distinctes alors $f$ est diagonalisable.

Démonstration
Si :

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - t)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ racines distinctes. On a alors que pour tout $i$ :

$$E_i = \ker(f - \lambda_i \mathrm{id}) \neq \{0\}$$

et donc $\dim E_i \geq 1$. On a alors que

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$$

est de dimension supérieure à $n$ ce qui implique $\bigoplus E_i = \mathbf{R}^n$.

Remarque. La condition donnée est nécessaire mais non suffisante. On cherche donc une condition nécessaire et suffisante.

Proposition 3.8
Soient $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n$, $f$ un endomorphisme de $E$, $\lambda$ une valeur propre de $f$, $m_\lambda$ la multiplicité de $\lambda$ en tant que racine de $\chi_f(t)$ et $E_\lambda$ le sous-espace propre associé à $\lambda$.
Alors $\dim E_\lambda \leq m_\lambda$.

Démonstration
Soit $k = \dim E_\lambda$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ une base de $E_\lambda$. On peut compléter $(e_1, \ldots, e_k)$ en une base $(e_1, \ldots, e_n) = B$ de $E$.

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_d & X \\ \hline 0 & A \end{array}\right).$$

Or le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des matrices diagonales. [5§]
Ainsi :

$$\chi_f(t) = \det \left(\begin{array}{c|c} (\lambda - t) I_d & X \\ \hline 0 & A - t I_d \end{array}\right) = (\lambda - t)^k \chi_A(t)$$

et donc $m_\lambda \geq k$.

Corollaire 3.9
On a les propositions suivantes :

1. Si $\chi_f(t)$ n'est pas scindé sur $\mathbf{R}$ alors $f$ n'est pas diagonalisable.
2. S'il existe une valeur propre $\lambda$ de $f$ telle que $\dim E_\lambda < m_\lambda$ alors $f$ n'est pas diagonalisable.

Démonstration
On démontre :

5§. En effet, en utilisant la règle de Cramer la preuve est assez aisée.

2. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de $\chi_f(t)$, $m_i$ la multiplicité de $\lambda_i$ et $E_i$ l'espace propre associé à $\lambda_i$. Alors la proposition nous dit que $\dim E_i \leq m_i$.
   Or $\deg \chi_f(t)$ =n et donc
$$\sum_{i=1}^{k} m_i \leq n$$
$$\sum_{i=1}^{k} \dim E_i \leq \sum_{i=1}^{k} m_i \leq n$$
   S'il existe $i_0$ tel que $\dim E_{i_0} < m_{i_0}$ alors cela implique
$$\sum_{i=1}^{k} \dim E_i < \sum_{i=1}^{k} m_i \leq n.$$
   Et donc
$$\bigoplus_{i=1}^{n} E_i < n.$$
1. Idem.

Théorème 3.10
Soient $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n$, $f$ un endomorphisme de $E$.
$f$ est diagonalisable si, et seulement si, on a les conditions suivantes :
1. $\chi_f(t)$ est scindé sur $\mathbf{R}$ ;
2. pour tout $\lambda \in \chi_f^{-1}(0)$, la dimension du $\ker(f - \lambda \mathrm{id})$ est égal à la multiplicité de $\lambda$ dans $\chi_f(t)$.

Démonstration
Le corollaire nous dit que ces conditions sont nécessaires.
Remarquons que :
$$\sum_{i=1}^{r} E_i = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$$
où $E_i$ est le sous-espace propre de $\lambda_i$ et $r$ le nombre de racines deux à deux distinctes. Or la dimension de la somme est la somme des dimensions, c'est-à-dire la somme des multiplicité qui est égale à $n$. Donc $f$ est diagonalisable.

Exemple. On prend
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & -1 \\ -1 & 2-t & -1 \\ -1 & 1 & -t \end{pmatrix},$$
$$\chi_A(t) = -t(t-1)^2.$$

Les racines sont $0, 1$ de multiplicités respectives 1 et 2. On a :

$$E_0 = \ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_1 = \ker A - \mathrm{id} \qquad = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

On a

$$\dim E_0 = 1 \text{ et } \dim E_1 = 2$$

et donc $f$ est diagonalisable.

Contre-exemple de minimalité. On a que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'a comme valeurs propres que 0, elle n'est pas diagonalisable parce que si elle est nulle dans une base elle l'est dans toutes.

# 4 Polynômes en un endomorphisme de $E$

## 4.1 Polynômes évalué en un endomorphisme

Définition 4.1
Soit $P \in \mathbf{R}[t]$ un polynôme :

$$P(t) = \sum_{k=0}^{d} a_k t^k.$$

On note pour $f$ un endomorphisme de $E$ :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(E).$$

Avec la convention $f^0 = \mathrm{id}$ et la notation $f^{k+1} = f \circ f^k$.

Définition 4.2
On dit qu'un polynôme $P \in \mathbf{R}[t]$ annule $f$ si $P(f) = 0_{\mathrm{End}_{\mathbf{R}}}$.

Proposition 4.3
On a que :

$$\phi \colon \begin{cases} \mathbf{R}[t] \to \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(E) \\ P(t) \mapsto P(f) \end{cases}$$

est un morphisme d'anneaux.
C'est-à-dire :

$$\forall P, Q \in \mathbf{R}[t],\ \phi(P+Q) = \phi(P) + \phi(Q)\ ;\ \phi(PQ) = \phi(P)\phi(Q).$$

Remarque. Ainsi l'ensemble des polynômes annulateurs de $f$ est un idéal de $\mathbf{R}[t]$. Or $\mathbf{R}[t]$ est un anneau principal donc l'ensemble des polynômes annulateurs de $f$ est principal. Il existe donc un polynôme $Q \in \mathbf{R}[t]$ tel que tout polynôme annulateur de $f$ s'écrit $RQ$ avec $R \in \mathbf{R}[t]$.

Définition 4.4
On appelle polynôme minimal de $f$ le polynôme unitaire de plus petit degré, $m_f$ annulant $f$.

On a évidemment que tout polynôme annulateur de $f$ est de la forme $P \cdot m_f, P \in \mathbf{R}[t]$.

Exemple. Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice nilpotente, c'est-à-dire $A^3 = 0$. On a

$$m_A(t) \mid t^3 \implies m_A = 1, t, t^2 \text{ ou } t^3.$$

Or $(t \mapsto 1)(A) = \mathrm{id} \neq 0$, $(t \mapsto t)(A) = A \neq 0$ et $(t \mapsto t^2)(A) = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et donc $m_A(t) = t^3$.

Proposition 4.5
Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(E)$. Alors :

1. si $f$ est diagonalisable, alors il existe un polynôme scindé $P \in \mathbf{R}[t]$ annulant $f$ ayant que des racines simples ;
2. si $P \in \mathbf{R}[t]$ annule $f$ alors toute valeur propre de $f$ est racine de $P$.

Démonstration
Dans l'ordre :

1. Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres. Soient $\mu_1, \ldots, \mu_r$ des scalaires deux à deux distinctes tels que
$$\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$
avec $r \leq n$.
On pose :
$$P(t) = \prod_{i=1}^{r} (t - \mu_i).$$
On cherche à savoir si $P(f) = 0$.
$$P(f) = 0 \iff P(f)(e_j) = 0, \ \forall j,$$
$$P(f)(e_j) = \left( \prod_{i=1}^{r} (f - \mu_i \mathrm{id}) \right) (e_j),$$
$$f(e_j) = \lambda_j e_j \implies \exists i, \mu_i = \lambda_i.$$
Or pour tous $k, l$ :
$$(f - \mu_k \mathrm{id})(f - \mu_l \mathrm{id}) = (f - \mu_l \mathrm{id})(f - \mu_k \mathrm{id})$$

et donc :

$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{k\neq i}(f-\mu_k\mathrm{id})\right)(f-\mu_i\mathrm{id})(e_j),$$

$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{k\neq i}(f-\mu_k\mathrm{id})\right)(f(e_j)-\mu_i e_j) = 0.$$

2. On suppose que $P(f)=0$ et $\chi_f(\lambda)=0$ avec $P\in\mathbf{R}[t]$ et $\lambda\in\mathbf{R}$.
   Soit $v\in\ker(f-\lambda\mathrm{id}), v\neq 0$, alors :

$$P(f)(v) = \sum_{k=1}^{d} a_k f^k(v),$$

$$P(f)(v) = \sum_{k=1}^{d} a_k \lambda^k v.$$

Donc $P(\lambda)\cdot v = 0$ et comme $v\neq 0$ : $P(\lambda)=0$.

## 4.2 Lemme des noyaux

Proposition 4.6 (Théorème des noyaux)
Soit $f\in\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(E)$.

1. Soit $P\in\mathbf{R}[t]$ de la forme $P=ST$ avec $S,T\in\mathbf{R}[t]$ avec $S$ et $T$ premiers entre eux.
   Alors si $P(f)=0$ alors
$$E = \ker(S(f))\oplus\ker(T(f)).$$
2. Soit $P\in\mathbf{R}[t]$, $P=P_1P_2\dots P_k$ avec $P_i\in\mathbf{R}[t]$ premiers entre eux deux à deux.
   Alors si $P(f)=0$ alors
$$E = \bigoplus_{i=1}^{k}\ker P_i(f).$$

Théorème 4.7
$f\in\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(E)$ avec $\dim E = n$.
Supposons qu'il existe $P\in\mathbf{R}[X]$ est un polynôme scindé avec des racines simples. Alors $P(f)=0$ implique que $f$ est diagonalisable.

Remarque. C'est équivalent à $m_f(t)$ scindé avec des racines simples. En effet si $P$ est scindé avec des racines simples et qui annulent $f$ alors $m_f$ divise $P$ et donc $m_f$ est scindé avec des racines simples.

Démonstration
Soit :
$$P(X) = (X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_k)$$
avec $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ réels distincts. Ainsi $X-\lambda_i$ et $X-\lambda_j$ sont premiers entre eux pour tous $i\neq j$.
Ainsi d'après le théorème des noyaux :
$$E = \bigoplus_{i=1}^{k}\ker(f-\lambda_i\mathrm{id}).$$

Donc $f$ est diagonalisable.

COROLLAIRE 4.8
Soit $f \in \mathrm{End}(E)$. $f$ est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal $m_f$ est scindé avec des racines simples.

DÉMONSTRATION
Le sens d'implication a déjà été fait, l'autre sens est donné par le théorème précédent.

## 4.3 Trigonalisation

DÉFINITION 4.9
On dit que $f \in \mathrm{End}(E)$ est *trigonalisable* s'il existe une base $B$ de $E$ telle que la matrice en base $B$ de $f$ est triangulaire supérieure.
De même, une matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ est trigonalisable si elle est conjuguée à une matrice triangulaire supérieure, i.e. s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est trigonalisable.

PROPOSITION 4.10
Soit $f \in \mathrm{End}(E)$.
$\chi_f$ est scindé dans $\mathbf{R}[X]$ si, et seulement si, $f$ trigonalisable.

REMARQUE. On peut remplacer partout $\mathbf{R}$ par $\mathbf{K} = \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ et $E$ par un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Si $E$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et si $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(E)$ alors la proposition assure la trigonalisation de $f$ (et ainsi de tout endomorphisme).

DÉMONSTRATION
Si $f$ est trigonalisable, alors il existe une base $B$ telle que la matrice, $(a_{i,j})$ de $f$ soit trigonale supérieure dans cette base. Alors le polynôme caractéristique (qui est indépendant de la base) est exactement : $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - t)$. Ce polynôme est bien scindé.
Pour la réciproque on effectue une récurrence sur $n = \dim E$. On suppose que c'est vrai pour tout espace vectoriel de dimension strictement inférieure à $n$ :

$$\chi_f(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)\dots(\lambda_n - t)$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$.
$\lambda_1$ est une valeur propre. Il existe par hypothèse $v_1 \in E$ un vecteur propre tel que $v_1 \neq 0$ et $f(v_1) = \lambda_1 v_1$. Par le théorème de la base incomplète, il existe une base $B$ de la forme $B = (v_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$. Soit $A$ la matrice de $f$ dans la base $B$. On a :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda_1 & \star & \star & \dots \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Avec $B \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ qui peut être la matrice d'un endomorphisme de $\mathbf{R}^{n-1}$.

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= \det \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 - t & \star \\ \hline 0 & B - tI_d \end{array}\right), \\ \chi_A(t) &= (\lambda_1 - t)\chi_B(t), \\ \chi_A(t) &= (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)\dots(\lambda_n - t). \end{aligned}$$

et donc $\chi_B(t) = (\lambda_2 - t)\dots(\lambda_n - t)$ est scindé.
Par récurrence, il existe $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{R})$ tel que $Q^{-1}BQ$ soit triangulaire supérieure. Posons :

$$P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right), \ P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right).$$

On a alors que $P^{-1}AP$ est triangulaire.

## 4.4 Comment calculer $m_f$ ? (Cayley-Hamilton)

Théorème 4.11 (Cayley-Hamilton)
Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(E)$. On a que $m_f$ divise $\chi_f$, c'est-à-dire : $\chi_f(f) = 0$.

Démonstration
On veut montrer que $\chi_A(A) = 0$ où $A \in M_n(\mathbf{R})$. Puisque $M_n(\mathbf{R}) \subset M_n(\mathbf{C})$ on peut se placer dans se dernier.
On sait alors que $A$ est trigonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ tel que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.
Or pour tout $k$ : $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$. Donc :

$$\chi_A(P^{-1}AP) = P^{-1}\chi_A(A)P.$$

Comme $P$ est inversible, $\chi_A(0)$ si, et seulement si, $\chi_A(P^{-1}AP) = 0$. Posons $A' = P^{-1}AP$. On a $\chi_{A'} = \chi_A$.

$$\begin{aligned}
T &= (\lambda_n I_d - A')(\lambda_{n-1} I_d - A') \dots (\lambda_1 I_d - A') \\
T(v_1) &= \left(\prod_{i=2}^{n} (\lambda_i I_d - A')\right)(\lambda_1 I_d - A')(v_1) = 0 \\
T(v_2) &= \left(\prod_{i=3}^{n} (\lambda_i I_d - A')\right)(\lambda_2 I_d - A')(\lambda_1 I_d - A')(v_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda_2 I_d - A')(\lambda_1 I_d - A')(v_2) &= (\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) \\
(\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) &= (\lambda_1 I_d - A')(-a'_{1,2} v_1) \\
(\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) &= -a'_{1,2}(\lambda_1 I_d - A')(v_1) \\
(\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) &= -a'_{1,2}(\lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_1) = 0
\end{aligned}$$

Par récurrence on trouve $T(v_i) = 0$ pour tout $i$.

Exercice. Calculer $T(v_3)$.

Remarque. À noter :

1. Étant donné $f \in \mathrm{End}(E)$, pour calculer $m_f$ on cherche le plus petit diviseur de $\chi_f$ qui annule $f$.
2. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$. Supposons que $f$ est inversible, alors $\det(f) \neq 0$, i.e. $\chi_f(0) \neq 0$. Soit $\chi_f(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$, $a_0$ est donc non nul. On a :

$$0 = a_0^{-1}\chi_f(f) = (-1)^n a_0^{-1} f^n + \dots + a_1 a_0^{-1} f + I_d$$

ce qui donne :

$$I_d = f\left((-1)^{n+1} a_0^{-1} f^{n-1} + \dots + (-1) a_1 a_0^{-1} I_d\right).$$

Exemple. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\chi_A(t) = -t(t-1)^2$$

on en déduit :

$$t(t-1) \mid m_A(t) \mid t(t-1)^2.$$

Donc soit $m_A(t) = t(t-1)$ soit $m_A(t) = t(t-1)^2$. Dans le premier cas si $m_A(A) = 0$ alors $A$ est diagonalisable. Dans le second, $A$ est non diagonalisable.

$$A(A - I_d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

# 5 Applications

## 5.1 Calculs de puissances

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$, si $A$ est diagonalisable alors :

$$A = PA'P^{-1}$$

où $P$ est inversible et $A'$ diagonale. Et donc pour tout $k$ :

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

De même, si

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

alors

$$\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & e\lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

## 5.2 Systèmes différentiels

Soient $x_1, x_2, x_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ x_2' = x_1 + 4x_2 - 5x_3 \\ x_3' = 2x_2 - 2x_3 \end{cases}.$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. On a :

$$X' = AX.$$

$A$ a pour vecteurs propres :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de valeurs propres respectives :

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2.$$

De matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$X' = AX \iff P^{-1}X' = P^{-1}APP^{-1}X \iff Y' = BY$$

$$Y' = BY \iff \begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = 2y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = c_1 \\ y_2 = c_2 e^t \\ y_3 = c_3 e^{2t} \end{cases},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} X &= PY, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 e^t \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t} \\ c_1 + 3c_2 e^t + 2c_3 e^{2t} \\ c_1 + 2c_2 e^t + c_3 e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 5.3 Application aux suites récurrentes

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels telle que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On introduit une seconde suite $v_n$ telle que $v_n = u_{n+1}$ pour tout $n$. La relation de récurrence s'écrit alors :

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

si on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a alors que la relation de récurrence est

$$X_{n+1} = AX_n.$$

On diagonalise $A$ :

$$\chi_A(t) = t^2 - t - 1 \iff t \in \left\{ r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

On a :

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}$. On pose $Y_n = P_1 X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ :

$$X_{n+1} = AX_n \iff Y_{n+1} = A'Y_n.$$

On en déduit :

$$Y_n = \begin{pmatrix} c_1 r_1^n \\ c_2 r_2^n \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 r_1^n \\ c_2 r_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 r_1^n \\ c_2 r_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \\ c_1 r_1^{n+1} + c_2 r_2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi $u_n$ est de la forme :

$$u_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n,\ c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

# Deuxième partie

# Analyse

## Table des matières

# Chapitre 3

# Développements limités

## 1 Fonctions négligeables et équivalentes

On considère des fonctions $f, g$ de $V$ dans $\mathbf{R}$ où $V$ est un voisinage épointé dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. C'est-à-dire que $V$ est de la forme $U - \{a\}$ où $U$ est un voisinage de $a$ dans $\overline{\mathbf{R}}$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

— si $a = \infty$ alors $V \supset \{k, \infty\}$ ;

— si $a \in \mathbf{R}$ alors $V \supset ]k, a[ \cup ]a, l[$ avec $k < a < l$ et $k, l \in \mathbf{R}$.

$f, g$ sont définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

### 1.1 Négligeable

Définition 1.1

On dit que $f$ est *négligeable* devant $g$ au voisinage de $a$ s'il existe un voisinage $V$ tel qu'il existe une fonction $\varepsilon : V \to \mathbf{R}$ telle que :

— $f = \varepsilon \cdot g$ ;

— $\lim_a \varepsilon = 0$.

On note $f \underset{(a)}{=} \mathrm{o}(g)$.

Remarque. On note :

$$\varepsilon f : \begin{cases} V \to \mathbf{R} \\ t \mapsto \varepsilon(t) f(t) \end{cases}.$$

Exemples. Par exemple :

1. Si $g = 1$ alors $f = \mathrm{o}(1)$ si, et seulement si, $\lim_a f = 0$.
2. Si $f = 0$ au voisinage de $a$ alors pour toute fonction $g$ : $f = \mathrm{o}(g)$.
3. Si $f$ est bornée et $\lim_a(g) = \infty$ alors $f = \mathrm{o}(g)$ (on prend alors $\varepsilon = f/g$).
4. On a $x^m \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(x^n)$ si, et seulement si, $m < n$.
5. Pour tous $\alpha, \beta > 0$ :
$$\begin{cases} x^\alpha \underset{\infty}{=} \mathrm{o}(e^{\beta x}) \\ (\ln x)^\alpha \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(x^\beta) \end{cases},$$
car $\lim_\infty x^\alpha e^{-\beta x} = 0$.

Proposition 1.2
Si $f/g$ est définie dans un voisinage de $a$, alors :

$$f \underset{(a)}{=} \mathrm{o}(g) \iff \lim_a (f/g) = 0.$$

Démonstration
On prend $\varepsilon = f/g$.

Remarque. Il peut arriver que $f/g$ n'est pas défini dans aucun voisinage de $a$.

Exemples. Contre-exemples :

1. Avec $g(t) = \sin(1/[t-a])$, pour tout voisinage de $V$ de $a$, $g(t)$ s'annule en un point de $V$.
2. Même si le quotient n'est pas définit : $t \underset{(0)}{=} \mathrm{o}(\sin(1/t))$.

Proposition 1.3
On a au voisinage de $a$ :

1. la propriété o est transitive ;
2. la propriété o est compatible avec la multiplication, i.e. : si $f = \mathrm{o}(g)$ alors $fh = \mathrm{o}(gh)$ ;
3. si $f = \mathrm{o}(g)$ et si $h = \mathrm{o}(k)$ alors $fh = \mathrm{o}(gk)$.

Démonstration
Dans l'ordre :

1. Pour $f = \varepsilon_1 g$ et $g = \varepsilon_2 h$ avec $\lim_a \varepsilon_i = 0$ alors : $f = \varepsilon_1\varepsilon_2 h$ et $\lim_a \varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$.
2. Si $f = \varepsilon g$, $\lim_a \varepsilon = 0$, alors $fh = \varepsilon gh$.
3. De même.

Contre-exemple. o n'est pas compatible avec l'addition. Par exemple : $x \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(x^3)$ et $x^2 \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(-x^3)$ n'entraine pas $x + x^2 \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(0)$.

## 1.2 Équivalence

Définition 1.4
On dit que $f$ est *équivalence* à $g$ au voisinage de $a$ si : $f - g \underset{(a)}{=} \mathrm{o}(g)$. On note $f \underset{(a)}{\sim} g$.

Proposition 1.5
Si $f/g$ est définie dans un voisinage de $a$ alors :

$$f \underset{(a)}{\sim} g \iff \lim_a f/g = 1.$$

Proposition 1.6
$\underset{(a)}{\sim}$ est une relation d'équivalence.

DÉMONSTRATION
Par définition :

1. elle est réflexive : $f \underset{(a)}{\sim} f$ puisque $0 \underset{(a)}{=} \mathrm{o}(f)$ ;
2. elle est symétrique si $f \underset{(a)}{\sim} g$ alors il existe $\varepsilon$ telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ et $f = (1+\varepsilon)g$, or $1/(1+\varepsilon)$ est aussi définie au voisinage de $a$ et puisque $g = (1/[1+\varepsilon])f$ on a
$$g = (1 + (1/[1+\varepsilon] - 1))f$$
or en posant $\varepsilon' = [1+\varepsilon] - 1$ on a $\lim_a \varepsilon' = 0$ ;
3. elle est transitive : $f \underset{(a)}{\sim} g$ et $g \underset{(a)}{\sim} h$ implique qu'il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ telles que $f = (1+\varepsilon_1)g$, $g = (1+\varepsilon_2)h$ et donc $f = (1+\varepsilon)h$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$ et $\lim_a \varepsilon = 0$.

PROPOSITION 1.7
Si $f \underset{(a)}{\sim} g$ et si $\lim_a f$ existe alors $\lim_a g$ existe et $\lim_a g = \lim_a f$.

DÉMONSTRATION
Soit $\varepsilon$ telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ alors puisque $f = (1+\varepsilon)g$ on a
$$\lim_a f = \lim_a (1+\varepsilon)g = \lim_a g.$$

PROPOSITION 1.8
Le produit et le quotient (quand il est défini) d'équivalences est une équivalence.
Une puissance entière d'équivalences est une équivalence.

DÉMONSTRATION
Si $f = (1+\varepsilon_1)g$et $h = (1+\varepsilon_2)k$ alors $fh = (1+\varepsilon)gk$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$.

PROPOSITION 1.9
Si $f \underset{(a)}{\sim} g$ et si $\varphi : I \to \mathbf{R}$ telle que $\lim_b \varphi = a$, $b \in I$. Alors
$$f \circ \varphi \underset{(a)}{\sim} g \circ \varphi.$$

DÉMONSTRATION
Si $f = (1+\varepsilon)g$ avec $\lim_a \varepsilon = 0$. Alors
$$f \circ \varphi = (1+\varepsilon') \cdot g \circ \varphi$$
avec $\varepsilon' = \varepsilon \circ \varphi$ et $\lim_a \varepsilon' = 0$.

PROPOSITION 1.10
On a :

1. Si $f$ est dérivable en $a$ alors si $f'(a) \neq 0$ on a $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x-a)$.
2. Si $g$ est continue dans un voisinage épointé de $a$, alors si $f \underset{(a)}{\sim} g > 0$ alors
$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{(a)}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration
Dans l'ordre :

1. Si $f$ est dérivable en $a$ alors :
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{(a)}{\sim} f'(a)$$
puisque si $\lim_a g = b \in \mathbf{R}^*$ alors $g \underset{(a)}{\sim} b$.
2. On sait que $f - g \underset{(a)}{=} \mathrm{o}(g)$ et on veut :
$$\int_x^a (f-g)(t)\,\mathrm{d}t \underset{(a)}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^a g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$
En posant $h = f - g$ on se ramène au problème :
$$h = \mathrm{o}(g) \implies \int_a^x h = \mathrm{o} \int_a^x g.$$
Si $h = \varepsilon g$ et $\lim_a \varepsilon = 0$ alors
$$\int_a^x g = \int_a^x \varepsilon g$$
Or
$$\frac{\left|\int_x^a \varepsilon g\right|}{\int_a^x g} \leq \max_{[a,x]} |\varepsilon| \frac{\int_a^x g}{\int_a^x g} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$
Donc
$$\frac{\left|\int_a^x \varepsilon g = h\right|}{\left|\int_a^x g\right|} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

## 2 Dérivées successives et formules de Taylor

Soit $p \geq 0$ un entier.

Définition 2.1
Soit $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$.

1. $f \in C^0$ si $f$ est continue ;
2. $f \in C^p$ $(p \geq 1)$ si $f$ est dérivable et $f' \in C^{p-1}$.

Remarque. Si $f \in C^p$ alors les $p$-ièmes dérivées successives et $f$ sont toutes continues sur $I$. $f \in C^\infty$ si $f^{(p)}$ existe et est continue pour tout $p \geq 1$.

Proposition 2.2
Si $f, g \in C^p$ alors $f+g$, $fg$, $f/g$ et $f \circ g$ (si définie) sont $C^p$.

Démonstration
Dans l'ordre :

1. $(f+g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$ par récurrence sur $p$ ;
2. $(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}$ ;
3. par récurrence sur $p$ pour $(f \circ g)^{(p)}$ en utilisant : $(f \circ g)' = (f' \circ g) g'$.

Rappels sur les primitives. Si $f : I \to \mathbf{R}$ est de classe $C^1$ avec $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert. Alors si $f'$ est continue $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

## 2.1 Formules de Taylor

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert.

Théorème 2.3 (Formule de Taylor avec reste intégral)
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ de classe $C^k$. Alors pour tous $a, b \in I$ on a :

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration
Par récurrence sur $n$, on note

$$(T_n) : f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Supposons que $(T_k)$ soit vraie pour tout $k < n$. Alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{(b-t)^k}{k!}, \\ v(t) &= f^{(k)}(t), \\ R_k &= \int_a^b \frac{(b-s)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(s)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} R_k &= \int_a^b u'(s)v(s)\,\mathrm{d}s \\ R_k &= [u(s)v(s)]_a^b - \int_a^b u(s)v'(s)\,\mathrm{d}s \\ R_k &= u(b)v(b) - u(a)v(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s)\,\mathrm{d}s \\ R_k &= \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

On applique $(T_{n-1})$ :

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_{n-1} \\ f(b) &= f(a) + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n \end{aligned}$$

donc $(T_n)$ vraie.

Théorème 2.4 (Formule de Taylor avec reste en $f^{(n+1)}(\theta)$)
Soit $n > 0$, $f : I \to \mathbf{R}$ de classe $C^{n+1}$. Pour tous $a, b \in I$ avec $a \neq b$, il existe $\theta$ strictement compris en $a$ et $b$ tel que :

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta).$$

DÉMONSTRATION
On pose $A$ telle que

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot A = \int_a^b \frac{(b-s)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(s)\,\mathrm{d}s - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Soit $F : I \to \mathbf{R}$ telle que :

$$F(x) = \int_x^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A.$$

On calcule $F'(x)$ :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} A \\ F'(x) &= \frac{(b-x)^n}{n!} \left(A - f^{(n+1)}(x)\right). \end{aligned}$$

$F$ est dérivable donc continue sur $I$ :

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A = 0, \\ F(b) &= 0. \end{aligned}$$

Par le théorème de ROLLE, il existe $\theta$ strictement entre $a$ et $b$ tel que $F'(\theta) = 0$. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{(b-\theta)^n}{n!} \left(A - f^{(n+1)}(\theta)\right) &= 0 \\ A &= f^{(n+1)}(\theta). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta) = \int_a^b \frac{(b-s)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(s)\,\mathrm{d}s - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

On a alors le résultat en remplaçant dans $(T_n)$.

REMARQUE. Si $\left|f^{(n+1)}(s)\right| \leq M$ pour tout $s \in I$ alors

$$\left| f(b) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

## 2.2 Fonctions usuelles

PROPOSITION 2.5 (Exponentielle)
Soit $n \in \mathbf{N}$, on regarde le développement de TAYLOR en 0 à l'ordre $n+1$, $\forall i,\ \exp^{(i)}(0) = 1$. On prend $b = x, a = 0$ :

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(\theta) \\ \theta &\in ]0, x[. \end{aligned}$$

Proposition 2.6 (Cosinus, sinus)
La dérivée $n$-ième de $\cos(t)$ est $\cos(t+n\pi/2)$.

$$\left|\cos(x)-\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}\frac{x^{2i}}{(2i)!}\right|\leq\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

car $|\cos\theta|\leq 1$.

# 3 Développement limité à l'ordre $n$ d'une fonction de classe $C^n$

## 3.1 Développements limités

Définition 3.1
Soit $I\subset\mathbf{R}$ un intervalle ouvert tel que $0\in I, n\in\mathbf{N}$. On dit qu'une fonction $f:I\to\mathbf{R}$ admet un *développement limité* à l'ordre $n$ en 0 si, et seulement s'il existe un polynôme $P$ de degré $n$ à coefficients réels tel que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-P(x)}{x^n}=0.$$

Notons

$$\varepsilon(x)=\frac{f(x)-P(x)}{x^n}$$

alors

$$\begin{cases} f(x)=P(x)+x^n\varepsilon(x)\ {}^{1\S}, \\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0. \end{cases}$$

Définition 3.2
Soit $I\subset\mathbf{R}$ un intervalle ouvert et soit $n\in\mathbf{N}$. On dit qu'une fonction $f:I\to\mathbf{R}$ admet un *développement limité* à l'ordre $n$ en $a$ si, et seulement si, la fonction $t\mapsto f(t+a)$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en 0. C'est-à-dire si, et seulement s'il existe un polynôme de degré $n$, $P$ à coefficients réels tel que :

$$f(x)=P(x-a)+\mathrm{o}((x-a)^n)$$

au voisinage de $a$.

Théorème 3.3
Si $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en un point $a$, alors ce développement limité est unique.

Démonstration
On peut supposer $a=0$. Supposons que

$$f(x)=P_1(x)+x^n\varepsilon_1(x)=P_2(x)+x^n\varepsilon_2(x)$$

où $\lim_0\varepsilon_i=0$ pour $i\in\{1,2\}$. On a que

$$(P_1-P_2)(x)=x^n(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(x)$$

1§. C'est-à-dire, $f(x)-P(x)=\mathrm{o}(x^n)$.

et $(P_1 - P_2)(x)$ est de la forme $r_0 + r_1 x + \ldots + r_n x^n$ avec $r_0, r_1, \ldots, r_n \in \mathbf{R}$.
On montre par récurrence que les $r_k$ sont tous nuls. Quand $x \to 0$ on trouve :

$$r_0 = 0$$

et donc

$$r_1 x + \ldots + r_n x^n = x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x).$$

Supposons que $r_0 = r_1 = r_{k-1} = 0$, $k > 0$. Alors

$$\begin{aligned} r_k x^k + \ldots + r_n x^n &= x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x), \\ r_k + r_{k+1} x + \ldots + r_n x^{n-k} &= x^{n-k}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x), \end{aligned}$$

$n - k \geq 0$ et donc $r_k = 0$ en passant à la limite.

Corollaire 3.4
Soit $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$ le développement limité d'une fonction $f$ à l'ordre $n$ en 0. Alors :

1. si $f$ est paire alors $P$ est paire ;
2. si $f$ est impaire alors $P$ est impaire.

Démonstration

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x) + x^n \varepsilon(x), \\ f(-x) &= P(-x) + x^n(-1)^n \varepsilon(-x) = P(-x) + x^n \varepsilon_1(x), \end{aligned}$$

Or comme $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$ alors $\varepsilon_1 \to 0$ aussi.

1. si $f$ est impaire alors on a :
$$f(x) = -P(-x) - x^n \varepsilon_1(x)$$
et comme la première et cette expression sont des développements limits de $f$ à l'ordre $n$ en 0, par unicité on a $-P(-x) = P(x)$, c'est-à-dire $P$ impaire ;
2. si $f$ est paire, on a :
$$f(x) = P(-x) + x^n \varepsilon_1(x)$$
alors de même, l'unicité nous dit que $P$ est alors paire.

Proposition 3.5
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue en $a \in I$.

1. le développement limité de $f$ en $a$ à l'ordre 0 est
$$f(x) = f(a) + \varepsilon(x), \ \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \ ;$$
2. la fonction $f$ est dérivable en $a$ si, et seulement si, elle possède un développement limité à l'ordre 1 en $a$, alors dans ce cas le développement limité est donné par :
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x)(x - a), \ \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Démonstration
Dans l'ordre :

1. On pose $\varepsilon(x) = f(x) - f(a)$. Comme $f$ est continue en 0, $\varepsilon(x)$ aussi et $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

2. Supposons que $f$ soit dérivable en $a$, c'est-à-dire :
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$
On pose
$$\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a).$$
On a bien $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x).$$
Réciproquement, supposons que $f$ admette un développement limité :
$$f(x) = a_0 + (x-a)a_1 + (x-a)\varepsilon(x),$$
avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Alors, par continuité $a_0 = f(a)$ et
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} a_1 + \varepsilon(x) = a_1 = f'(a).$$

## 3.2 Développements limités et primitives

Théorème 3.6
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une application continue. Soit $F$ une primitive de $f$. Soit $a \in I$ et supposons que $f$ admette un développement limité en $a$ à l'ordre $n$ :
$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \frac{a_2}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x),\ \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$
Alors $F$ admet le développement limité suivant à l'ordre $n+1$ en $a$ :
$$F(x) = F(a)+a_0(x-a)+\frac{a_1}{2}(x-a)^2+\ldots+\frac{a_n}{(n+1)!}x^{n+1}+(x-a)^{n+1}\varepsilon_1(x),\ \lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0.$$

Démonstration
Soit
$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}(t-a)^k.$$
Pour tout $x \neq a$ :
$$\varepsilon(x) = \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}.$$
Par hypothèse, $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. En posant $\varepsilon(a) = 0$, on obtient que $\varepsilon$ est continue sur $I$. Donc $\varepsilon$ admet une primitive et dans l'identité
$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \frac{a_2}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x),\ \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$$

tous les termes admettent des primitives. Donc

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$F(x) - F(a) = \int_a^x \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}(t-a)^k + (t-a)^n \varepsilon(t)\right) \mathrm{d}t$$

$$F(x) - F(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + u(x),$$

$$u(x) = \int_a^x (t-a)^n \varepsilon(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par le théorème de Rolle :

$$u(x) = (x-a)(\theta-a)^n \varepsilon(\theta)$$

pour un $\theta$ compris entre $a$ et $x$. Donc

$$|u(x)| = |x-a|\,|\theta-a|^n\,|\varepsilon(\theta)| \leq |x-a|^{n+1}\,|\varepsilon(\theta)|$$

et $\varepsilon(\theta)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $a$ puisque $\theta$ est compris entre $a$ et $x$. Donc :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + (x-a)^{n+1}\varepsilon_1(x)$$

où

$$\varepsilon_1(x) = \frac{u(x)}{(x-a)^{n+1}} \to 0.$$

Théorème 3.7
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ de classe $C^n$, $a \in I$. Alors $f$ admet pour développement limité à l'ordre $n$ en $a$ :

$$f(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x),\ \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Démonstration
Pour $n = 0, 1$ ça a été déjà vu. Supposons alors $n \geq 2$. Soit $f \in C^n$, posons $g = f'$ avec $g \in C^{n-1}(I)$.
Par récurrence :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^{n-1}\varepsilon(x),\ \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

$f$ est une primitive de $g$ :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x),\ \lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x)$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon_1(x).$$

Exemple. Soit :

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), \text{ si } x > 0 \\ 0, \text{, si } x \leq 0 \end{cases}$$

son développement limité en 0 d'ordre $n$ est :

$$f(x) = x^n \varepsilon(x), \ \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

### 3.3 Développement limités usuels

Développements limités en 0 :

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + x^n \varepsilon(x) \\
\mathrm{ch}(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \\
\mathrm{sh}(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
\cos(x) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \\
\sin(x) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
\alpha \in \mathbf{R} : \ (1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-i)}{(i+1)!} x^{i+1} + x^{n+1}\varepsilon(x) \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{i=0}^{n} x^i + x^{n+1}\varepsilon(x) \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^i + x^{n+1}\varepsilon(x) \\
\log(1-x) &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i!} + x^n \varepsilon(x) \\
\log(1+x) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} x^n \varepsilon(x) \\
\mathrm{Arctan}(x) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x^{2i-1}}{2i-1} + x^{2n}\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Démonstration (ch)

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\mathrm{ch}'(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} (= \mathrm{sh}(x)) \\
\mathrm{ch}''(x) &= \mathrm{ch}(x) \\
\mathrm{ch}^{(2i)}(0) &= 1 \\
\mathrm{sh}^{(2i)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

Démonstration (cos)

$$\begin{aligned}
\cos^{(k)}(x) &= \cos(x + k\pi/2)\\
\cos^{(k)}(0) &= \cos(k\pi/2)\\
\cos^{(2k)}(0) &= (-1)^k\\
\cos^{(2k+1)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION (sin)

$$\begin{aligned}
\sin^{(k)}(x) &= \sin(x + k\pi/2)\\
\sin^{(2k)}(0) &= 0\\
\sin^{(2k+1)}(0) &= (-1)^k
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION ($(1+x)^\alpha = f(x)$)
Par récurrence :

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}\\
f^{(k)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION ($1/1-x$)

$$\begin{aligned}
\frac{1-x^n}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n\\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + \dots + x^n + x^n \cdot \frac{x}{1-x}
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION ($\log(1-x)$)
Utiliser le théorème sur le développement limité d'une primitive avec le développement limité de $1/1-x$.

DÉMONSTRATION ($\mathrm{Arctan}(x)$)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arctan}'(x) &= \frac{1}{1+x^2}\\
\frac{1}{1+x^2} &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i x^{2i} + x^{2n}\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

et on conclut avec le théorème du développement limité d'une primitive.

REMARQUE. On a vu que si

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), \text{ si } x > 0\\ 0, \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

alors le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre $n$ est

$$f(x) = x^n\varepsilon(x).$$

Or le développement limité de 0 en 0 à l'ordre $n$ est identique.

Exemple. Soit :

$$f\colon \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x^3 \sin(1/x) \text{ si } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}.$$

La fonction $f$ est continue en 0.

On regarde le développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = x^2\varepsilon(x),\ \varepsilon(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x\sin(1/x) \text{ sinon} \end{cases}, \lim_{x\to 0} \varepsilon(x)0.$$

Donc le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre 2 est :

$$f(x) = x^2\varepsilon(x).$$

Dérivabilité de $f$ en 0 (puisqu'elle est lisse sur $\mathbf{R}^*$) :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2 \sin(1/x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc $f$ est dérivable et $f'(0) = 0$.

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{3x^2 \sin(1/x) - x\cos(1/x)}{x} = 3x\sin(1/x) - \cos(1/x)$$

donc $f$ n'est pas dérivable à l'ordre 2 en 0 (même si elle a un développement limité à l'ordre 2).

# 4 Calculs avec les développements limités

## 4.1 Règles de calcul des développements limités

Proposition 4.1

Soit $f, g$ ayant des développements limités à l'ordre $n$ en 0 :

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x),\ g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon(x)$$

avec $P, Q$ des polynômes de degré au plus $n$ et $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ (non forcément identiques). Alors

1. le développement limité à l'ordre $n$ en 0 de $f + g$ est

$$(f + g)(x) = (P + Q)(x) + x^n\varepsilon(x);$$

2. pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, le développement $\lambda f$ à l'ordre $n$ en 0 est :

$$(\lambda f)(x) = \lambda P(x) + x^n\varepsilon(x).$$

Démonstration

Écrivons $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_f(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_g(x)$.

1. $(f + g)(x) = P(x) + Q(x) + x^n(\varepsilon_f + \varepsilon_g)(x)$ et on note $\varepsilon = \varepsilon_f + \varepsilon_g$ qui tend bien en 0.
2. De même.

PROPOSITION 4.2
Soit $f$ qui admet le développement limité en 0 à l'ordre $n$ :

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x),\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Alors pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, $f$ admet le développement limité en 0 à l'ordre $p$ :

$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p\varepsilon(x)$$

avec $T_p(P)$ le polynôme tronqué de $P$ :

$$T_p(P) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k,\ P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

DÉMONSTRATION
On a

$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p\left(\sum_{k=p+1}^{n} a_k x^{k-p} + x^{n-p}\varepsilon(x)\right).$$

Et on pose

$$\varepsilon_1(x) = \sum_{k=p+1}^{n} a_k x^{k-p} + x^{n-p}\varepsilon(x).$$

On a bien$\varepsilon_1(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

PROPOSITION 4.3
Soient $f, g$ admettant les développements limités :

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_1(x),\ g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_2(x).$$

Alors $fg$ admet le développement limité à l'ordre $n$ en 0 suivant :

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x) + x^n\varepsilon(x).$$

REMARQUE. Si $f, g$ admettent les développements limités à l'ordre $n$ en $a$ :

$$f(x) = P(x-a) + (x-a)^n\varepsilon_1(x),\ g(x) = Q(x-a) + (x-a)^n\varepsilon_2(x)$$

alors le développement limité :

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x-a)\ [2§] + (x-a)^n\varepsilon(x).$$

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= (PQ)(x) + x^n(Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x))\\ PQ(x) &= T_n(PQ)(x) + x^{n+1}R(x),\ R \in \mathbf{R}[x]\\ (fg)(x) &= T_n(PQ)(x) + x^n(xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x))\end{aligned}$$

2§. On tronque avant d'évaluer en $x - a$.

On pose :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(x) = xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x)\\
&\lim_{x\to 0} xR(x) = 0\\
&\lim_{x\to 0} Q\varepsilon_1(x) = 0\\
&\lim_{x\to 0} P\varepsilon_2(x) = 0\\
&\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0
\end{aligned}$$

Exemple. On veut le développement limité de :

$$\mathrm{Arctan}(x-1)\exp(x)$$

en 1 d'ordre 3.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arctan}(y) &= y - \frac{y^3}{3} + y^3\varepsilon(y)\\
\mathrm{Arctan}(x-1) &= (x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3\varepsilon(x)\\
\exp(x) &= \exp(x-1+1) = e\exp(x-1)\\
\exp(x) &= e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3\varepsilon(x)\right)
\end{aligned}$$

Et donc

$$f(x) = e\left((x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3\varepsilon(x)\right) \times \left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3\varepsilon(x)\right)$$

$$f(x) = e\left((x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} - \frac{(x-1)^3}{3}\right) + (x-1)^3\varepsilon(x)$$

## 4.2 Développement limité d'une fonction composée

Puisque la composition de deux fonctions polynômiales est encore un polynôme :

Proposition 4.4
Soient $f, g$ admettant un développement limité en 0 à l'ordre $n$ :

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x),\ g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon(x)$$

avec $P, Q$ deux polynômes de degré inférieur à $n$.
Supposons que $g(0) = 0$ alors $f \circ g$ admet le développement limité suivant à l'ordre $n$ en 0 :

$$(f \circ g)(x) = T_n(P \circ Q)(x) + x^n\varepsilon(x).$$

Démonstration
Supposons $n = 0$, alors $P$ et $Q$ sont deux polynômes constants donc $f(x) = P(0) + \varepsilon(x)$ et $g(x) = Q(0) + \varepsilon(x)$. Comme $Q(0) = 0$ on a bien $f(g(x)) = (P \circ Q)(x) + \varepsilon(x)$ par continuité.
Supposons que $n \geq 1$. On note $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_2(x)$. Posons

$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.

$$(f \circ g)(x) = P(g(x)) + g(x)^n \varepsilon_1(g(x))$$
$$P(g(x)) = \sum_{i=0}^{n} a_i g(x)^i$$
$$P(g(x)) \overset{3\S}{=} T_n\left(\sum_{i=0}^{n} a_i Q(x)^i\right) + x^n \varepsilon_3(x)$$

Puisque $Q(0) = 0$, on a $Q(x) = b_1 x + \ldots + b_n x^n$ et donc :

$$\begin{aligned} g(x) &= b_1 x + \ldots + b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x) \\ g(x) &= x(b_1 + \ldots + b_n x^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon_2(x)) \\ g(x) &= xh(x) \\ (f \circ g)(x) &= P(xh(x)) + x^n h(x)^n \varepsilon_1(xh(x)) \\ (f \circ g)(x) &= T_n(P \circ Q)(x) + x^n (h(x)^n \varepsilon_1(xh(x)) + \varepsilon_3(x)) \end{aligned}$$

On pose $\varepsilon_4(x) = h(x)^n \varepsilon_1(xh(x)) + \varepsilon_3(x)$ et :

$$\lim_{x \to 0} xh(x) = 0$$
$$\lim_{x \to 0} \varepsilon_3(x) = 0$$
$$\lim_{x \to 0} h(x)^n = b_1^n$$
$$\lim_{x \to 0} \varepsilon_4(x) = 0.$$

Exemple. Développement limité de $\cos(\sin(x))$ à l'ordre 5 en 0 :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6 \varepsilon(x) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x) \\ \cos(\sin(x)) &= T_5\left(1 - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^4}{4!}\right) + x^5 \varepsilon(x) \\ \cos(\sin(x)) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x) \\ \cos(\sin(x)) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^5 \varepsilon(x) \end{aligned}$$

Proposition 4.5
Soient $f, g$ admettant des développements limités à l'ordre $n$ en 0. Alors si $g(0) \neq 0$ alors la fonction $f/g$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en 0.

Démonstration
Puisque $g(0) \neq 0$, $f/g$ est définie et continue en 0. Comme $f/g = f \times 1/g$, il suffit de vérifier que $1/g$ admet un développement limité en 0 (puis on applique la règle de produit).
Posons $a = g(0) \neq 0$. On a :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a + (g(x) - a)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)}$$

3§. D'après les formules de développements limités d'une somme et d'un produit.

Il suffit de vérifier que :

$$\frac{1}{1+\left(\frac{g(x)}{a}-1\right)}$$

admet un développement limité à l'ordre $n$ en 0. Posons

$$h(x)=\frac{1}{1+x}$$

on a alors

$$\frac{1}{1+\left(\frac{g(x)}{a}-1\right)}=h\left(\frac{g(x)}{a}-1\right)=(h\circ k)(x)$$

où $k(x)=g(x)/a-1$. Or $k(x)$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en 0 et $h(x)$ admet également un développement limité à l'ordre $\infty$ en 0. Enfin, $k(0)=0$ et donc on conclut avec le résultat précédent.

Exemple. Développement limité de $f$ : $f(x)=1/(a-x)$ en 0 à l'ordre $n$.

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{a}\frac{1}{1-x/a}\\
\frac{1}{1-t}&=1+t+t^2+\ldots+t^n+t^n\varepsilon(t)\\
f(x)&=\frac{1}{a}\left(1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\ldots+\frac{x^n}{a^n}\right)+x^n\varepsilon(x)\\
\frac{1}{a-x}&=\frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\ldots+\frac{x^n}{a^{n+1}}+x^n\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

La méthode précédente ne donne pas de formule générale pour le développement limité de $f/g$.

Rappel. Si $P,Q\in\mathbf{R}[x]$, $n\in\mathbf{N}$ et si $Q(0)\neq 0$. Alors la division de $P$ par $Q$ suivant les puissances croissantes à l'ordre $n$ est l'unique polynôme $A$ tel que :

— $P-AQ$ est divisible par $X^{n+1}$ ;

— soit $A=0$, soit $\deg A\leq n$.

Proposition 4.6

Soient $f,g$ avec les développements limités suivants à l'ordre $n$ en 0 :

$$\begin{aligned}
f(x)&=A(x)+x^n\varepsilon_1(x),\\
g(x)&=B(x)+x^n\varepsilon_2(x).
\end{aligned}$$

Supposons que $g(0)=B(0)\neq 0$. Le développement limité à l'ordre $n$ de $f/g$ en 0 est :

$$\frac{f}{g}(x)=Q(x)+x^n\varepsilon(x)$$

où $Q$ est la division de $A$ par $B$ à l'ordre $n$ suivant les puissances croissantes.

Démonstration

On a $A(x) = Q(x)B(x) + x^{n+1}R(x)$ où $R$ est un polynôme et $Q = 0$ ou $\deg Q \leq n$. Ainsi

$$\begin{aligned}
f(x) &= Q(x)B(x) + x^{n+1}R(x) + x^n\varepsilon_1(x) \\
f(x) - Q(x)g(x) &= x^{n+1}R(x) + x^n\varepsilon_1(x) - Q(x)x^n\varepsilon_2(x) \\
f(x) - Q(x)g(x) &= x^n(\varepsilon_1(x) - Q(x)\varepsilon_2(x) + xR(x)) \\
\frac{f}{g}(x) &= Q(x) + x^n\varepsilon_3(x) \\
\varepsilon_3(x) &= \frac{1}{g(x)}(\varepsilon_1(x) - Q(x)\cdot\varepsilon_2(x) + xR(x)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Exemple. Développement limité de $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0.

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x) \\
x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) + x^6R(x) \\
\frac{f(x)}{g(x)} &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

# 5 Applications

Applications. Les développements limités peuvent être utiles pour :

1. les calculs de limites (pour des « formes indéterminées ») ;
2. études de fonctions ou courbes paramétrées.

## 5.1 Calculs de limites

Exemple. On veut calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\log \mathrm{ch}x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)}.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \\
\log \mathrm{ch}x &= \log(1 + (\mathrm{ch}x - 1)) \\
\log \mathrm{ch}x &= T_2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2}\right) + x^2\varepsilon(x) \\
\log \mathrm{ch}x &= \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \\
x\log \mathrm{ch}x &= \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)\ ;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \\
x\sqrt{1+x} &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + x^3\varepsilon(x) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \\
\exp(\sin x)) &= T_3\left(\left(x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right) + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(\sin x)) &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(\sin x)) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)\ ;
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\frac{x \log \mathrm{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \frac{\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)}{1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)} \\
\frac{x \log \mathrm{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \frac{\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)}{-\frac{x^3}{8} + x^3\varepsilon(x)} \\
\lim_{x\to 0} \frac{x \log \mathrm{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1/2 + \varepsilon(x)}{-1/8 + \varepsilon(x)} = -4.
\end{aligned}
$$

Remarque. Un calcul de dérivée s'obtient par un calcul de limite et donc parfois par développements limités.

Exemple. On prend

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + x + x^2}$$

et on cherche $f^{(i)}(0)$ pour $i \in \{0, \ldots, 4\}$, c'est-à-dire que l'on cherche le développement limité de $f$ en 0 à l'ordre 4.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x).$$

On cherche le développement limité de

$$g(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}$$

que l'on peut voir comme

$$g(x) = (a \circ b)(x)\ ;\ a(x) = \frac{1}{1+x}\ ;\ b(x) = x + x^2.$$

$$\begin{aligned}
a(x) &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
g(x) &= T_4((x \mapsto 1 - x + x^2 - x^3 + x^4)(x + x^2)) + x^4\varepsilon(x) \\
g(x) &= 1 - x - x^2 + x^2 + x^4 + 2x^3 + x^4 - x^3 - 3x^4 + x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
g(x) &= 1 - x + x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
f(x) &= T_4\left((1 - x + x^3 - x^4)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\right) + x^4\varepsilon(x) \\
f(x) &= 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{2} - \frac{23x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Comme $f$ admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, elle est dérivable quatre fois. De plus

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(0) &= -1 \\
f^{(2)}(0) &= -1 \\
f^{(3)}(0) &= 9 \\
f^{(4)}(0) &= -23.
\end{aligned}$$

## 5.2 Courbes paramétrées

Rappels sur les fonctions classiques. Quelques rappels :

— on définit le logarithme népérien par :

$$\log(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Ainsi $\log : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ est croissante, $C^\infty$,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log x &= \frac{1}{x} \\
\lim_{x\to 0, x>0} \log x &= -\infty \\
\lim_{x\to\infty} \log x &= +\infty \\
\log(ab) &= \log a + \log b.
\end{aligned}$$

— on définit l'exponentielle, $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, qui est croissante, lisse et stable par dérivation.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \exp(x) &= 0 \\
\lim_{x\to+\infty} \exp(x) &= \infty \\
\exp(a+b) &= \exp(a)\exp(b).
\end{aligned}$$

— soient $a \in \mathbf{R}_+^*, b \in \mathbf{R}$ alors on définit :

$$a^b = \exp(b\log a).$$

$$\begin{aligned}
a^{b+b'} &= a^b a^{b'} \\
(aa')^b &= a^b (a')^b \\
\left(a^b\right)^c &= a^{bc} \\
a^0 &= 1 = 1^b \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^b &= b x^{b-1} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x &= \log(a) a^x \\
\lim_{x\to 0, x>0} x^a (\log x)^n &= 0 \ \ , \ a > 0 \text{ et } n \in \mathbf{Z} \\
\lim_{x\to +\infty} x^a e^x &= +\infty \\
\lim_{x\to -\infty} x^a e^x &= 0.
\end{aligned}$$

— trigonométrie :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \\
\sin(x+t) &= \cos(t)\sin(x) + \cos(x)\sin(t) \\
\cos(x+t) &= \cos(x)\cos(t) - \sin(x)\sin(t) \\
\tan(x+t) &= \frac{\tan(t)+\tan(x)}{1-\tan(x)\tan(t)}.
\end{aligned}$$

— Arcsin : $[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est lisse sur $]-1,1[$ et :

$$\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$ est la réciproque de cos et on a la relation :

$$\mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Arctan : $\mathbf{R} \to ]-\pi/2, \pi/2[$ est lisse et :

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

— trigonométrie hyperbolique :

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\mathrm{ch}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\mathrm{th}(x) &= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}
\end{aligned}$$

leurs réciproques Arcsh : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, Arcch : $[-1, \infty] \to \mathbf{R}_+$ et Arcth :$]-1,+1[\to \mathbf{R}$ sont lisses sur l'intérieur de leur domaine de définition.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arcsh}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\
\mathrm{Arcch}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \\
\mathrm{Arcsh}(t) &= \log(t + \sqrt{t^2+1}) \\
\mathrm{Arcch}(t) &= \log(t + \sqrt{t^2-1}).
\end{aligned}$$

Définition 5.1
Soit $f : I \to \mathbf{R}^2$ avec $I$ un intervalle ou une union finie d'intervalles dans $\mathbf{R}$. Soient $u, v$ telles que
$$\forall t,\ f(t) = (u(t), v(t)).$$

1. On dit que $\lim_{t\to t_0} f(t) = l$ où $l = (l_1, l_2)$ si $\lim_{t\to t_0} u(t) = l_1$ et $\lim_{t\to t_0} v(t) = l_2$.
2. On dit que $f$ est continue en $t_0$ si les fonctions $u$ et $v$ sont continues en 0. $f$ est continue sur $I$ si elle est continue en tout point de $I$.
3. On dit que $f$ est dérivable en $t_0$ si $u$ et $v$ le sont et on note $f'(t_0) = (u'(t_0), v'(t_0))$.

Proposition 5.2
Si $f, g : I \to \mathbf{R}^2$ et si $t_0 \in I$ alors :

1. si $\lim_{t\to t_0} f(t) = l$ et $\lim_{t\to t_0} g(t) = m$ alors $\lim_{t\to t_0}(f+g)(t) = l + m$ ;
2. si $f, g$ sont dérivables en $t_0$ alors $f+g$ aussi et on a $(f+\lambda g)'(t_0) = f'(t_0)+\lambda g'(t_0)$.

Proposition 5.3
Soit $(r, s)$ une base de $\mathbf{R}^2$ et soit $f : I \to \mathbf{R}^2$ telle que $f(t) = (u(t), v(t))$. Soit $(a(t), b(t))$ les coordonnées de $f(t)$ dans la base $(r, s)$.

1. On a :
$$\lim_{t\to t_0} f(t) = l \iff \begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} a(t) = \alpha \\ \lim\limits_{t\to t_0} b(t) = \beta \end{cases}$$
où $(\alpha, \beta)$ sont les coordonnées de $l$ dans la base $(r, s)$.
2. Idem pour la dérivée.

Démonstration
Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ et $r, s \in \mathbf{R}^2$. On a $l = \alpha \cdot r + \beta \cdot s$,
$$f(t) = (u(t), v(t)) = a(t) \cdot r + b(t) \cdot s$$
avec $a(t), b(t) \in \mathbf{R}$.

1. On a que $\lim_{t\to t_0} f(t) = l$ c'est par définition :
$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} u(t) = l_1 \\ \lim\limits_{t\to t_0} v(t) = l_2 \end{cases}.$$
$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} a(t) = \alpha \\ \lim\limits_{t\to t_0} b(t) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} (a(t)r_1 + b(t)s_1) = \alpha r_1 + \beta s_1 \\ \lim\limits_{t\to t_0} (a(t)r_2 + b(t)s_2) = \alpha r_2 + \beta s_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} a(t)r_1 + b(t)s_1 = l_1 \\ \lim\limits_{t\to t_0} a(t)r_2 + b(t)s_2 = l_2 \end{cases}$$
2. De même ...

Définition 5.4
On dit que $f : I \to \mathbf{R}^2, f(t) = (u(t), v(t))$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $t_0$ si $u(t)$ et $v(t)$ admettent un développement limité à l'ordre $n$ en $t_0$.

Si $u(t) = u_0 + u_1(t-t_0) + \ldots + u_n(t-t_0)^n + (t-t_0)^n\varepsilon_1(t)$ et $v(t) = v_0 + v_1(t-t_0) + \ldots + v_n(t-t_0)^n + (t-t_0)^n\varepsilon_2(t)$ alors on appelle

$$f(t) = (u_0, v_0) + (t-t_0)(u_1, v_1) + \ldots + (t-t_0)^n(u_n, v_n) + (t-t_0)^n\varepsilon(t)$$

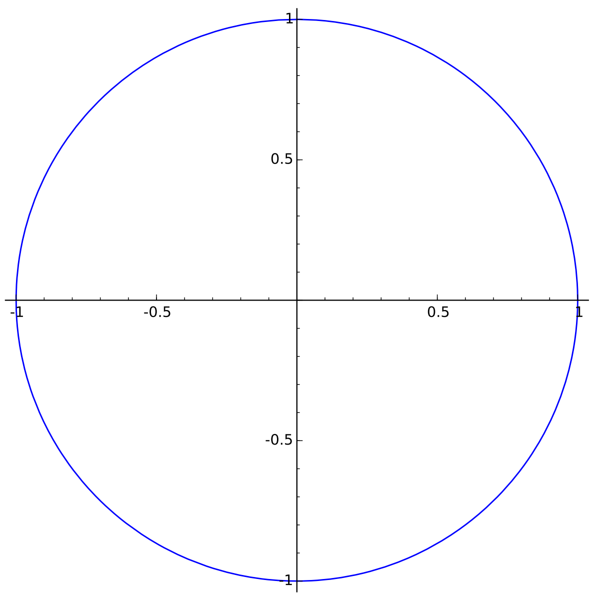
le développement limité de $f$ à l'ordre $n$ en $t_0$ avec $\lim_{t\to t_0}\varepsilon(t) = (0,0)$.

Exemple. Le développement limité de $f : t \mapsto (2t^3 - t\sin t, t^3 + \cos t)$ à l'ordre 4 en 0 :

$$\begin{aligned} 2t^3 - t\sin t &= -t^2 + 2t^3 + \frac{t^4}{6} + t^4\varepsilon(t) \\ t^3 + \cos t &= 1 - \frac{t^2}{2} + t^3 + \frac{t^4}{24} + t^4\varepsilon(t) \\ f(t) &= (0,1) - t^2(1, 1/2) + t^3(2,1) + t^4(1/6, 1/24) + t^4\varepsilon(t). \end{aligned}$$

Définition 5.5
On appelle *courbe paramétrée* de $\mathbf{R}^2$ une fonction $f : I \to \mathbf{R}^2$.

Exemple. $f : R \to \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$.




Remarque. Supposons que $f$ soit dérivable en $t \in I$. Alors $u(t), v(t)$ admettent des développements limités à l'ordre 1 en $t_0$ et donc $f$ admet aussi un développement limité à l'ordre 1 en $t_0$. Or si

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0) + (t-t_0)\varepsilon(t)$$

alors

$$\lim_{t\to t_0} \frac{1}{t-t_0}(f(t) - f(t_0)) = f'(t_0).$$

Définition 5.6
On appelle $f'(t_0)$ *vecteur tangent* de $f$ en $t_0$. La droite affine passant par $f(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$ s'appelle la *tangente* à $f$ en $t_0$.

Remarque. Le vecteur tangent dépend du paramétrage de la courbe et non seulement de sa représentation.

Exemple. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ et soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$. Remarquons que $f$ et $g$ on même représentation graphique. Cependant les vecteurs tangents en 0 à $f$ et $g$ sont :

$$f'(0) = (0,1)$$
$$g'(0) = (0,2).$$

La tangente à $f$ en $t_0$ est la droite d'équation :

$$\det\begin{pmatrix} y - v(t_0) & v'(t_0) \\ x - u(t_0) & u'(t_0) \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire :

$$(y - v(t_0))u'(t_0) - (x - u(t_0))v'(t_0) = 0.$$

## 5.3 Étude de fonctions

Soit $f : I \to \mathbf{R}$, où $I$ est un intervalle de $\mathbf{R}$. On procède à l'étude de $f$ au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. En particulier, on s'intéresse notamment au graphe de $f$.

### 5.3.1 Étude locale

Proposition 5.7
Soit $x_0 \in I, f : I \to \mathbf{R}$. On suppose que $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $x_0$ :

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x), \ \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

où $P \in \mathbf{R}[x], P(x) = a_p x^p + \ldots + a_n x^n$ avec $0 \leq p \leq n$ et $a_p \neq 0$.
Alors il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $x \neq x_0$, $f(x)$ est non nul et a le signe de $a_p(x - x_0)^p$.

Démonstration
Puisque $p \leq n$, le développement limité de $f$ en $x_0$ à l'ordre $p$ est :

$$f(x) = (T_p(P))(x - x_0) + (x - x_0)^p \varepsilon(x).$$

C'est-à-dire :

$$f(x) = a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p \varepsilon(x).$$

Pour tout $x \neq x_0$, on a :

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^p} = a_p + \varepsilon(x)$$

et $a_p \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi il existe $\alpha$ tel que pour tout $x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $x \neq x_0$, $|\varepsilon(x)| < \frac{1}{2}(a_p)$. C'est-à-dire que pour un tel $x$, $f(x) \neq 0$ et est du même signe que $a_p(x - x_0)$.

Définition 5.8
Si $I \subset \mathbf{R}$ est un intervalle et $f : I \to \mathbf{R}$ est une fonction numérique et si $x_0 \in \overline{I}$ [4§], on dit que $f$ est *positive au voisinage de* $x_0$ s'il existe un voisinage $J \subset I$ de $x_0$ tel que pour tout $x \in J$ et $x \neq x_0$, $f(x) > 0$.

Exemple. Prenons :

$$f(x) = e \cdot \sqrt{x} - e^x.$$

4§. Dans $I$ ou l'une de ses bornes.

On cherche le signe de $f$ quand $x$ tend vers 1.

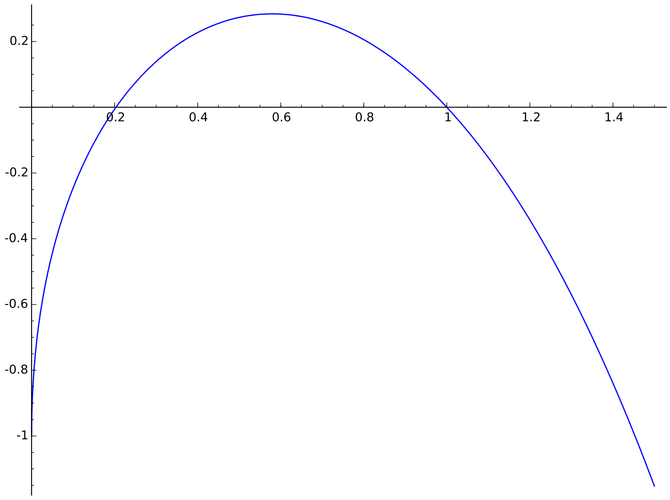
$$f(x) = e\left[(1+(x-1))^{1/2} - e^{x-1}\right]$$

$$\begin{cases} (1+(x-1))^{1/2} = 1 + \dfrac{1}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \\ e^{x-1} = 1 + (x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \end{cases}$$

$$f(x) = e\left(-\frac{1}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x)\right)$$

$$f(x) = \frac{-e}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x).$$

Ainsi au voisinage de 1, le signe de $f$ est le même que celui de $1-x$.




Définition 5.9
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. La *tangente* en $(x_0, f(x_0))$ au graphe de $f$ est la droite affine d'équation :

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Définition 5.10
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$.
On dit que $f$ admet une *inflexion* au point $(x_0, f(x_0))$ si la fonction

$$x \mapsto f(x) - (f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0))$$

s'annule en $x_0$ en changeant de signe.

Proposition 5.11
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. On a :

1. si $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x)$ est le développement limité de $f$ à l'ordre 1 en $x_0$, alors la tangente au graphe de $f$ en $(x_0, f(x_0))$ est donnée par :

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) \ ;$$

2. si $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2\varepsilon(x)$ est le développement limité de $f$ à l'ordre 2 en $x_0$, alors

— si $a_2 > 0$ alors pour tout $x \neq x_0$ dans un voisinage suffisamment petit de $x_0$, le point $(x, f(x))$ est au-dessus de la tangente ;
— si $a_2 < 0$ alors pour tout $x \neq x_0$ dans un voisinage suffisamment petit de $x_0$, le point $(x, f(x))$ est en-dessous de la tangente ;

3. si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_3(x - x_0)^3 + (x - x_0)^3\varepsilon(x)$ est le développement limité de $f$ à l'ordre 3 en $x_0$, alors si $a_3 \neq 0$, $f$ admet un point d'inflexion en $(x_0, f(x_0))$.

Démonstration
Dans l'ordre :

1. Comme $f$ est dérivable en $x_0$, on a $a_1 = f'(x_0)$ et $a_0 = f(x_0)$, l'équation de la tangente est
$$y = a_1(x - x_0) + a_0.$$
2. Posons
$$u(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)).$$
On a alors :
$$u(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 - a_1(x-x_0) - a_0 + (x-x_0)^2\varepsilon(x) = a_2(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2\varepsilon(x).$$
Comme $a_2 \neq 0$ (par hypothèse) alors la proposition précédente entraine que le signe de $u(x)$ au voisinage de 0 est celui de $a_2(x - x_0)^2$, c'est-à-dire le signe de $a_2$.
3. Posons de même
$$u(x) = a_3(x - x_0)^3 + (x - x_0)^3\varepsilon(x).$$
D'après la proposition précédente, le signe de $u(x)$ au voisinage de $x_0$ est celui de $a_3(x - x_0)$ puisque $a_3 \neq 0$. Comme $(x - x_0)^3$ n'est pas de signe constant, c'est un point d'inflexion.

Remarque. Si $a_2 \neq 0$, alors :
— si $a_2 > 0$, $f(x)$ admet un minimum local en $x_0$ ;
— sinon, $f(x)$ admet un maximum local en $x_0$.

Remarque, généralisation du résultat. Supposons que le développement limité de $f$ en $x_0$ est de la forme
$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p\varepsilon(x),$$
avec $p \geq 2$. De plus on suppose $a_p \neq 0$. Alors en posant
$$u(x) = f(x) - (f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0))$$
est du signe de $a_p(x - x_0)^p$ au voisinage de $x_0$.
— Si $p$ est pair alors $a_p > 0$ implique que $x_0$ est un minimum local, $a_p < 0$ implique que $x_0$ est un maximum local.
— Si $p$ est impair alors $x_0$ est un point d'inflexion.

Exemple. Prenons :
$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 5}$$

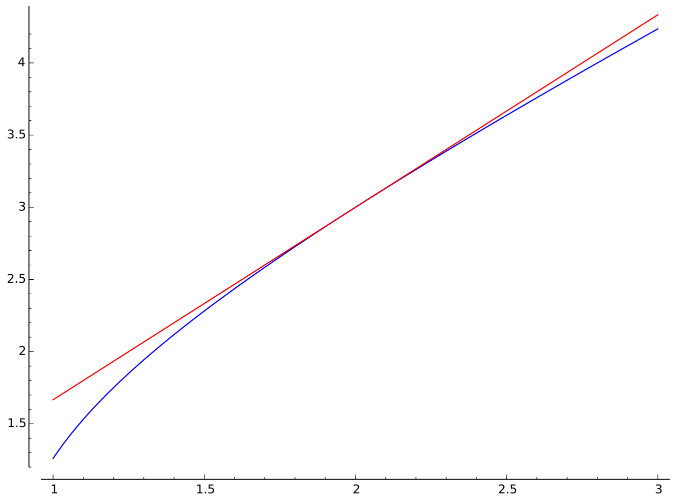
définie sur $\mathbf{R}$ et étudions $f$ au voisinage de $x_0 = 2$. On a :

$$f(x+2) = \Big((x+2)^3 + 6x^2 - 5\Big)^{1/3}$$
$$f(x+2) = \Big(27 + 36x + 12x^2 + x^3\Big)^{1/3}$$
$$f(x+2) = 3 \cdot \left(1 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{27}x^3\right)^{1/3}$$
$$f(x+2) = 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2\right) + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)}{2}\left(\frac{16}{9}x^2\right)\right) + x^2\varepsilon(x)$$
$$f(x+2) = 3 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{27}x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

L'équation de la tangente est :

$$y = 3 + \frac{4}{3}(x-2).$$

Comme le terme en $x^2$ est non nul et négatif, la courbe est en-dessous de la tangente.




### 5.3.2 Branches infinies

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction numérique.

Définition 5.12
Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, avec $a \in \mathbf{R}$ alors la droite $x = a$ est une *asymptote verticale* de $f$.
Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ alors $f$ admet une *branche infinie* en $+\infty$.
Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ou si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ alors $f$ admet une *branche infinie* en $-\infty$.
Soit $a, b \in \mathbf{R}$. La droite $y = ax + b$ est *asymptote* à $f$ quand $x$ tend vers $\pm\infty$ si :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax - b = 0.$$

Si $a = 0$ on dit que l'asymptote est *horizontale*.
Soit $a \in \mathbf{R}$, si

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

alors on dit que $f$ a une *direction asymptotique de pente $a$ en $\pm\infty$*.

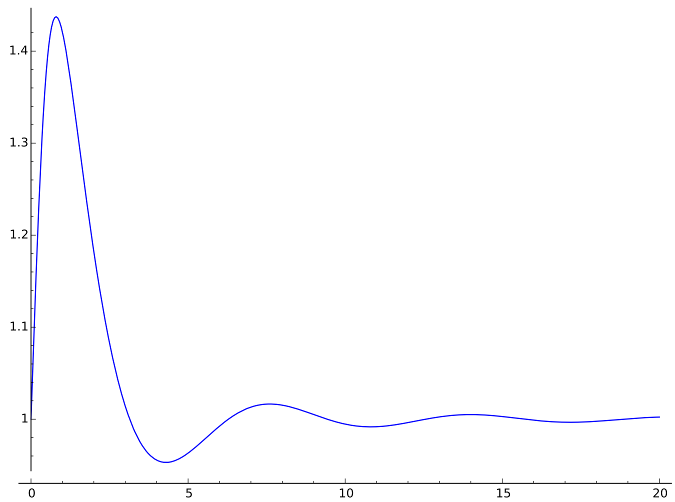
Si
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$
alors on dit que $f$ a une *direction asymptotique verticale* en $\pm\infty$.

PROPOSITION 5.13
Soient $a, b \in \mathbf{R}$. La droite $y = ax + b$ est asymptote à $f$ quand $x$ tend vers $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si, et seulement si :

— on a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a\ ;$$

— et de plus
$$\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = b.$$

EXEMPLE. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par :
$$f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x^2+1}.$$
On a
$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - 1| = 0$$
et donc $y = 1$ est asymptote à $f$ en $+\infty$. La différence
$$f(x) - 1 = \frac{\sin x}{x^2+1}$$
est du signe de $\sin x$ qui oscille.




EXEMPLE. Avec
$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 5}$$
on regarde s'il y a une asymptote quand $x$ tend vers $\pm\infty$ et la position par rapport à la possible asymptote. On écrit $f$ sous la forme :
$$f(x) = xu(1/x)$$
avec
$$u(x) = \sqrt[3]{1 + 6x - 5x^3}.$$

Le développement limité de $u$ en 0 à l'ordre 2 est :

$$\begin{aligned}
u(x) &= (1+6x-5x^3)^{1/3}\\
u(x) &= 1+\frac{1}{3}(6x)+\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)\frac{1}{2}(36x^2)+x^2\varepsilon(x)\\
u(x) &= 1+2x-4x^2+x^2\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Ainsi pour $x$ au voisinage de $\infty$ en valeur absolue :

$$f(x) = x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{\varepsilon(1/x)}{x^2}\right) = x+2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon(1/x),$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x)-(x+2)=0.$$

On regarde maintenant la position de $f$ par rapport à $y=x+2$. On a

$$f(x)-(x+2)=\frac{-4}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon(1/x).$$

Ainsi quand $x\to+\infty$, $f$ est en-dessous de l'asymptote, quand $x\to-\infty$, $f$ est au-dessus de l'asymptote.

### 5.3.3 Étude de fonction

Par exemple avec

$$f(x) = x\log\left|2+\frac{1}{x}\right|$$

de domaine de définition $\mathbf{R}\setminus\{0,-1/2\}$.

Dérivée. On calcule la dérivée de $f$ :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x(\log|2x+1|-\log|x|)\\
f'(x) &= \log\left|2+\frac{1}{x}\right|+x\left(\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x}\right)\\
f'(x) &= \log\left|2+\frac{1}{x}\right|-\frac{1}{2x+1}\\
f''(x) &= \frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x}-\frac{2}{(2x+1)^2}\\
f''(x) &= \frac{-1}{x(2x+1)^2}
\end{aligned}$$

Une étude des signes montre qu'il existe un unique $\alpha$ entre $-1/2$ et 0 (strictement) tel que $f'(\alpha)=0$. En conclusion, $f$ est croissante partout sauf sur $]-1/2,\alpha[$ où elle est décroissante.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

ce qui nous donne deux branches infinies.

$$\lim_{x\to-1/2} f(x) = +\infty$$

et donc il y a une asymptote verticale en $x = -1/2$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = ?$$

$$f(x) = x \log \left|2 + \frac{1}{x}\right|$$

$$f(x) = x \log |2x+1| - x \log x$$

or les deux termes tendent vers 0 en 0 et donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

et donc $f$ admet un prolongement par continuité à 0 en 0.

Il reste à regarder les branches infinies :

— Quand $x \to \infty$, on cherche un développement limité de $f$ en $+\infty$.

$$f(x) = x \log(2 + 1/x)$$

$$f(x) = x \log 2 + x \log \left(1 + \frac{1}{2x}\right)$$

$$f(x) = x \log 2 + x \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o(1/x^2)\right)$$

$$f(x) = (\log 2)x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o(1/x)$$

On en déduit que la droite d'équation

$$y = (\log 2)x + \frac{1}{2}$$

est asymptote oblique à $f$ en $+\infty$ et la courbe est en-dessous de l'asymptote.

— En $-\infty$ la droite d'équation

$$y = (\log 2)x + \frac{1}{2}$$

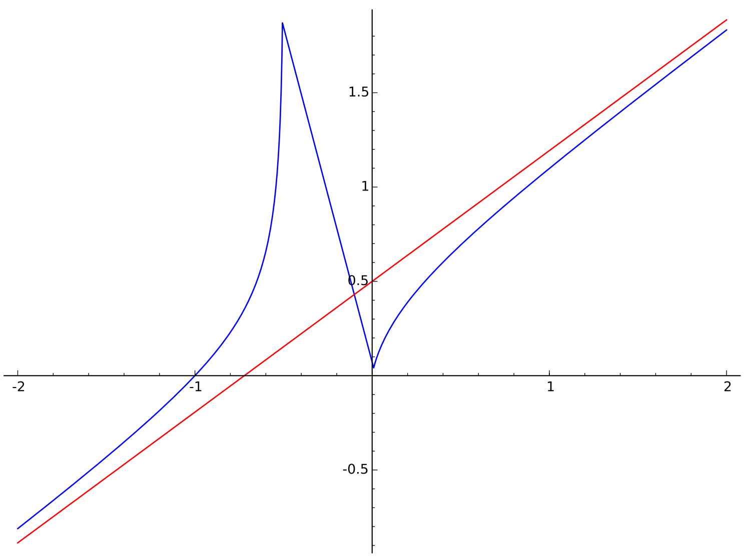
est également asymptote oblique à $f$ en $-\infty$ et la courbe est au-dessus de l'asymptote.

— Pour ce qui est de la tangente en 0 :

$$f'(x) = \log \left|2 + \frac{1}{x}\right| - \frac{1}{2x+1}$$

et alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \log \left|2 + \frac{1}{x}\right| = +\infty.$$



# Chapitre 4

# Courbes et surfaces paramétrées

## 1 Définitions

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbf{R}^2$ telle que $f(t) = (u(t), v(t))$.

Définition 1.1
Supposons que $u, v$ sont continues.
Si $u$ et $v$ admettent un développement limité à l'ordre $n$ au point $t_0$ :

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + u_1(t-t_0) + \ldots + u_n(t-t_0)^n + (t-t_0)^n \varepsilon(t) \\ v(t) &= v_0 + v_1(t-t_0) + \ldots + v_n(t-t_0)^n + (t-t_0)^n \varepsilon(t) \end{aligned}$$

alors $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $t_0$ :

$$f(t) = f_0 + (t-t_0)f_1 + \ldots + (t-t_0)^n f_n + (t-t_0)^n \varepsilon(t)$$
$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}\,,\ f_i = (u_i, v_i).$$

L'égalité précédente s'appelle le *développement limité de $f$ en $t_0$ à l'ordre $n$.*

Remarque. On a bien
$$\lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = (0,0).$$

Définition 1.2
Une fonction $f : I \to \mathbf{R}^2$ s'appelle *courbe paramétrée de* $\mathbf{R}^2$.

Supposons que $f$ est dérivable en $t_0 \in I$. $f$ admet le développement limité en $t_0$ à l'ordre 1 suivant :
$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0) + (t-t_0)\varepsilon(t).$$

## 2 Tangentes

Définition 2.1
Si $f'(t_0) \neq 0$ alors la tangente à la courbe au point $f(t_0)$ est la droite affine passant par $f(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$. L'équation est
$$\det \begin{pmatrix} x - u(t_0) & u'(t_0) \\ y - v(t_0) & v'(t_0) \end{pmatrix} = 0.$$

En d'autres termes, c'est l'équation :
$$(y - v(t_0)) \cdot u'(t_0) - (x - u(t_0)) \cdot v'(t_0) = 0.$$

On se demande quelles sont les conditions à l'existence de la tangente en un point ainsi que la position de la tangente par rapport à la courbe.

Remarque. On retrouve l'étude des fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}$ si on a

$$f(t) = (t, v(t)).$$

Supposons que $u, v$ admettent des développements limités en $t_0$ à l'ordre $n \geq 2$. On a

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0) + (t-t_0)^2 w_2 + \ldots + (t-t_0)^n w_n + (t-t_0)^n \varepsilon(t)$$

où $w_2, \ldots, w_n \in \mathbf{R}^2$ et $\lim_{t\to t_0} \varepsilon(t) = 0_{\mathbf{R}^2}$.

1. Supposons que $f'(t_0) \neq 0$ et $f'(t_0)$ est non colinéaire à $w_2$. On tronque le développement limité à l'ordre 2 :

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0) + (t-t_0)^2 w_2 + (t-t_0)^2 \varepsilon(t).$$

   Soient $(a(t), b(t))$ les coordonnées de $\varepsilon(t)$ dans la base $(f'(t_0), w_2)$. Ainsi :

$$f(t) - f(t_0) = \left(t - t_0 + (t-t_0)^2 a(t)\right) f'(t_0) + (t-t_0)^2 (b(t)+1) w_2$$
$$\lim_{t\to t_0} a(t) = \lim_{t\to t_0} b(t) = 0.$$

   Selon la coordonnée de $f'(t_0)$ on a que $(t-t_0)^2 a(t)$ tend vers 0 et alors $t - t_0$ détermine le signe. Selon la coordonnée $w_2$, dans un voisinage suffisamment petit de $t_0$ on a que la coordonnée est de signe positif.

2. Supposons que $f'(t_0) \neq 0$, $w_2 = \lambda f'(t_0)$ et enfin $w_3$ et $f'(t_0)$ non colinéaires. On a alors dans la base $(f'(t_0), w_3)$ :

$$f(t) - f(t_0) = \left(t - t_0 + \lambda(t-t_0)^2\right) f'(t_0) + (t-t_0)^3 w_3 + (t-t_0)^3 \varepsilon(t).$$

   On décompose $\varepsilon(t)$ dans cette base :

$$\varepsilon(t) = a(t) f'(t_0) + b(t) w_3.$$

   On sait que

$$\lim_{t\to t_0} a(t) = \lim_{t\to t_0} b(t) = 0.$$

   Dans cette base, on a :

$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} t - t_0 + \lambda(t-t_0)^2 + (t-t_0)^3 a(t) \\ (t-t_0)^3 + (t-t_0)^3 b(t) \end{pmatrix}$$

   Sur chaque coordonnée, le signe est celui de $t - t_0$.

   Remarque. Supposons $f'(t_0) \neq 0, n \geq 3$ et il existe un entier $p \in \{3, \ldots, n\}$ tel que les vecteurs $w_2, w_3, \ldots, w_{p-1}$ sont colinéaires à $f'(t_0)$ et tel que $w_p$ n'est pas colinéaire à $f'(t_0)$. Ainsi, $(f'(t_0), w_p)$ est une base de $\mathbf{R}^2$.
   On écrit le développement limité de $f(t) - f(t_0)$ dans cette base. On étudie le signe des coordonnées de $f(t) - f(t_0)$ quand $t \to t_0$. Si $p$ est pair alors la courbe est comme dans le cas $p = 2$ (la courbe est du côté de $w_p$ par rapport à la tangente), sinon comme dans le cas $p = 3$(elle traverse la tangente).

3. Supposons que $f'(t_0) = 0$ et que $w_2, w_3$ forme une base de $\mathbf{R}^2$. On a
$$f(t) - f(t_0) = (t-t_0)^2 w_2 + (t-t_0)^3 w_3 + (t-t_0)^3 \varepsilon(t).$$
On décompose $\varepsilon(t)$ dans la base $(w_2, w_3)$ : $\varepsilon(t) = a(t)w_2 + b(t)w_3$ avec $\lim_{t\to t_0} a(t) = \lim_{t\to t_0} b(t) = 0$. Les coordonnées dans cette base de $f(t) - f(t_0)$ sont alors :
$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} (t-t_0)^2 + (t-t_0)^3 a(t) \\ (t-t_0)^3 + (t-t_0)^3 b(t) \end{pmatrix}.$$
Ainsi, la première coordonnée est positive et la seconde est du signe de $t - t_0$. Une telle situation est un *point de rebroussement*.
4. Supposons que $f'(t_0) = 0$, $w_3 = \lambda w_2$ et $w_2, w_4$ forme une base. On pose $\varepsilon(t) = a(t)w_2 + b(t)w_4$. Dans ces coordonnées :
$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} (t-t_0)^2 + \lambda(t-t_0)^3 + (t-t_0)^4 a(t) \\ (t-t_0)^4(1 + b(t)) \end{pmatrix}.$$
Les deux coordonnées sont positives quand $t \to t_0$. C'est aussi un point de rebroussement

# 3 Branches infinies

Définition 3.1
Soit $f : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée avec $f = (u, v)$. Soit $t_0 \in \overline{I} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$.
- On a une *branche infinie* quand $t \to t_0$ si soit $u$ ou soit $v$ n'est pas bornée.
- Si $\lim_{t\to t_0} u(t) = a \in \mathbf{R}$ et si $\lim_{t\to t_0} v(t) = \pm\infty$ alors la droite $x = a$ est une *asymptote verticale*.
- Si $\lim_{t\to t_0} u(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t\to t_0} v(t) = a \in \mathbf{R}$ alors la droite $y = a$ est *asymptote horizontale*.
- Si $u$ et $v$ tendent vers $\pm\infty$ en $t_0$ :
  - Si $\lim_{t\to t_0} v(t)/u(t) = a \in \mathbf{R}$ alors la droite $y = ax$ est direction asymptotique.
  - Si de plus $\lim_{t\to t_0}(v(t) - au(t)) = b$ alors la droite $y = ax + b$ est asymptote.

Exemple. Soit $f$ :
$$f\colon \begin{cases} \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[ \to \mathbf{R}^2 \\ \qquad t \mapsto (\tan(t), 2t - 1/\cos(t)) \end{cases}.$$
On étudie l'asymptote en $t_0 = \pi/2$.
$$\lim_{t\to t_0} u(t) = +\infty, \ \lim_{t\to t_0} v(t) = -\infty.$$

On étudie le rapport $v/u$ en $t \to t_0$. On pose $t = \pi/2 + h$.

$$\begin{aligned}
u(t) &= \tan(\pi/2 - h) = \frac{\sin(\pi/2 - h)}{\cos(\pi/2 - h)} \\
u(t) &= \frac{\cos(h)}{\sin(h)} = \frac{1 - h^2/2 + h^2\varepsilon(h)}{h - h^3/6 + h^3\varepsilon(h)} \\
u(t) &= \frac{1}{h}\left(1 - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)\right)\frac{1}{1 - \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon(h)} \\
u(t) &= \frac{1}{h}\left(1 - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)\right)\left(1 + \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon(h)\right) \\
u(t) &= \frac{1}{h}\left(1 - \frac{h^2}{3} + h^2\varepsilon(h)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(t) &= \pi - 2h - \frac{1}{\cos(\pi/2 - h)} = \pi - 2h - \frac{1}{\sin(h)} \\
v(t) &= \pi - 2h - \frac{1}{h - \frac{h^3}{6} + h^3\varepsilon(h)} \\
v(t) &= \pi - 2h - \frac{1}{h}\left(\frac{1}{1 - \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon(h)}\right) \\
v(t) &= -\frac{1}{h} + \pi - \frac{13}{6}h + h\varepsilon(h) \\
\frac{v(t)}{u(t)} &= \frac{-\frac{1}{h} + \pi - \frac{13}{6}h + h\varepsilon(h)}{\frac{1}{h} - \frac{1}{3}h + h\varepsilon(h)} \\
\frac{v(t)}{u(t)} &= \frac{-1 + \pi h - \frac{13}{6}h^2 + h^2\varepsilon(h)}{1 - \frac{1}{3}h^2 + h^2\varepsilon(h)}
\end{aligned}$$

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} v(t)/u(t) = -1.$$

Et donc $y = -x$ est direction asymptotique.

$$v(t) + u(t) = -\frac{1}{h} + \pi - \frac{13}{6}h - \frac{1}{h} + \frac{1}{3}h + h\varepsilon(h)$$

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} v(t) + u(t) = \pi.$$

Et donc la droite d'équation $y = -x + \pi$ est asymptote en $t_0$.

## 4 Étude de courbes paramétrées

Soit :

$$f\colon \begin{cases} \mathbf{R} \setminus \{-1, +1\} \to \mathbf{R}^2 \\ \qquad t \mapsto \left(\dfrac{t^2+1}{t^2-1}, \dfrac{t^2}{t-1}\right) \end{cases}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
u'(t) &= \frac{-4t}{(t^2-1)^2} \\
v'(t) &= \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}.
\end{aligned}$$

Au voisinage $t = 0$ :

$$u(t) = -1 - 2t^2 + t^3\varepsilon(t)$$
$$v(t) = -t^2 - t^3 + t^3\varepsilon(t)$$
$$f(t) = (-1,0) + t^2(-2,-1) + t^3(0,-1) + t^3\varepsilon(t)$$
$$f(0) = (-1,0),\ f'(0) = (0,0).$$

Les vecteurs $(-2,-1)$ et $(0,-1)$ sont linéairement indépendants.

$t = 0$ est un point singulier car $f'(0) = (0,0)$.

Branches infinies. On a :

— Une asymptote horizontale $y = -1/2$ quand $t \to -1$.

— Quand $t \to 1$ :

$$\frac{v(t)}{u(t)}\frac{t^2(t+1)}{t^2+1} \xrightarrow[t\to 1]{} 1$$

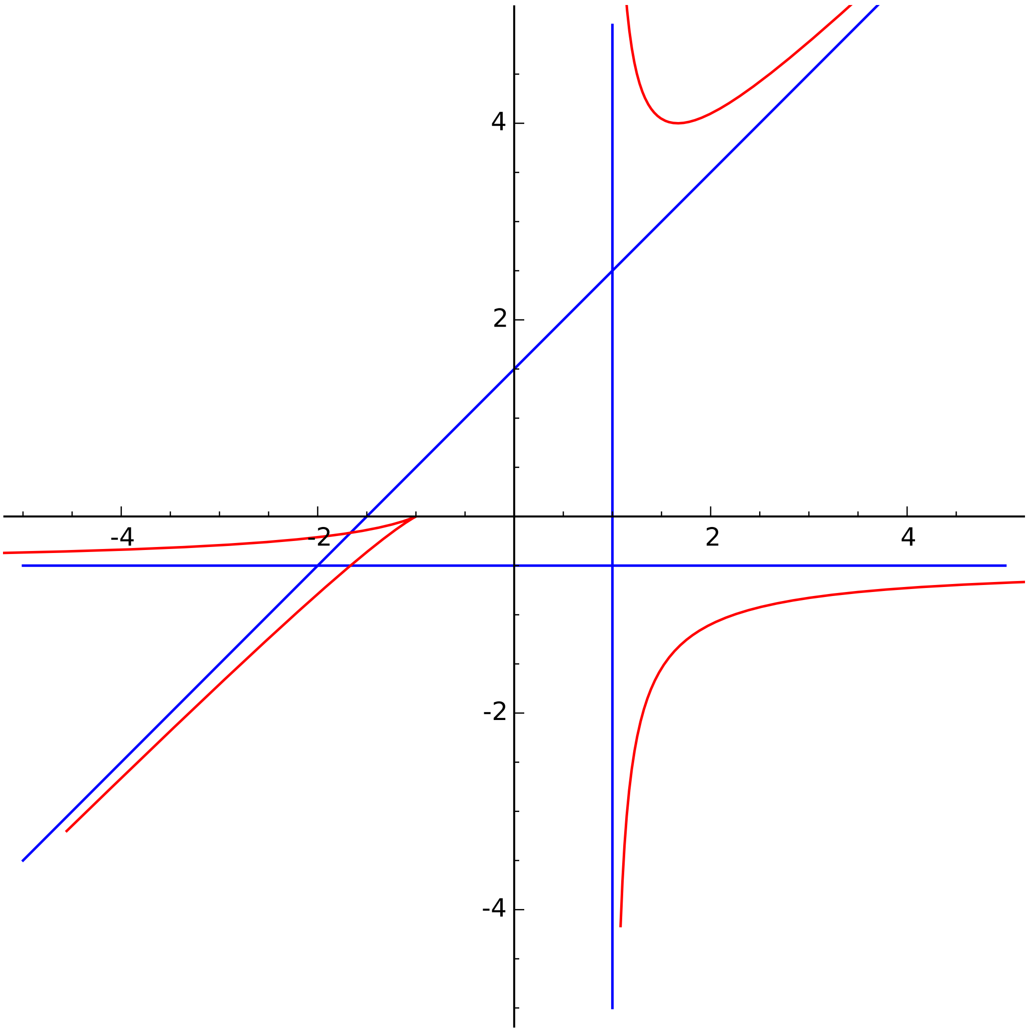
donc une direction asymptotique $y = x$.

$$v(t) - 1 \times u(t) = \frac{t^2+t+1}{t+1} \to \frac{3}{2}$$

et donc l'asymptote est $y = x + 3/2$.

— Quand $t \to -\infty$ alors $u \to 1$ et $v \to -\infty$. On a une branche infinie et $x = 1$ est asymptote verticale.

— Quand $t \to +\infty$ alors $u \to 1$ et $v \to \infty$. $x = 1$ est asymptote verticale.



# Chapitre 5

# Séries numériques

## 1 Définitions

On considère des séries numériques, c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Définition 1.1
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite numérique.
On dit que la série $\Sigma u_n$ de terme général $u_n$ converge si la suite de terme général

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

converge.
Si la suite $s_n$ diverge, alors on dit que la série $\Sigma u_n$ de terme général $u_n$ diverge.
Les $s_n$ s'appellent les *sommes partielles*.

Définition 1.2
On note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} s_n$$

(quand elle est définie).
On l'appelle la *somme* de la série $(\Sigma u_n)$.

Remarque. La suite de terme général

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

converge si, et seulement si, la suite de terme général (pour $n_0$ fixé)

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

converge.

Proposition 1.3
Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Démonstration
Avec

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

et $l$ la limite de $s_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de $s_n$, il existe $n_0$ tel que pour tout $n \geq n$, $|l - s_n| < \varepsilon$. Et donc

$$|s_{n+1} - s_n| = |s_n + 1 - l + l - s_n| \leq |s_{n+1} - l| + |s_n - l| < 2\varepsilon.$$

Or

$$|s_{n+1} - s_n| = |u_{n+1}| < 2\varepsilon.$$

Exemple – Séries géométriques. Soit $x \in \mathbf{R}$. On pose

$$u_n = a \cdot x^n.$$

On a

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ s_n &= a \sum_{k=0}^{n} x^n \\ s_n &= a \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{a}{1 - x}(1 - x^{n+1}). \end{aligned}$$

— Si $|x| < 1$ alors $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $a/(1 - x)$.
— Si $|x| \geq 1$ alors la série $\sum a x^n$ diverge.

Exemple – Série exponentielle. Soit $x \in \mathbf{R}$. On regarde la série de terme général $x^n/n!$. Alors cette série a pour somme partielle :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

et la formule de Taylor nous assure que $s_n$ tend vers $\exp(x)$. La série est convergente pour tout $x$ et de somme $\exp(x)$.

Exemple. Soit $x \in \mathbf{R}$. On considère la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

— Si $|x| > 1$ alors la suite de terme général $x^n/n$ ne converge pas et donc la série ne converge pas.
— Si $x = 1$ alors les sommes partielles sont

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Cependant

$$s_{2n} - s_n \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la série $\sum 1/n$ diverge.

— Si $-1 \leq x < 1$ alors pour tout $n \geq 1$, on pose

$$f_n \colon \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ t \mapsto 1 + t^2 + \ldots + t^{n-1} \end{cases}$$

et pour tout $t \neq 1$ :

$$f_n(t) = \frac{1 - t^n}{1 - t}$$

et alors

$$\frac{1}{1-t} = f_n(t) + \frac{t^n}{1-t}.$$

On peut intégrer, pour tout $x \in [-1, 1[$ :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} &= \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \\ -\log(1-x) &= x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ -\log(1-x) &= s_n + \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'examiner la convergence du dernier terme.

1. Pour $0 \leq x < 1$, on a $0 \leq t \leq x < 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{t^n}{1-t} &\leq \frac{t^n}{1-x} \\ \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t &\leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{1-x}\frac{1}{n+1} x^{n+1} \leq \frac{1}{1-x}\frac{1}{n+1} \to 0 \end{aligned}$$

   et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

2. Pour $1 \leq x < 0$, on a $1 \leq x \leq t \leq 0$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \right| &\leq \int_x^0 \frac{|t|^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_x^0 |t|^n\,\mathrm{d}t \int_x^0 |t|^n\,\mathrm{d}t \qquad = (-1)^n \int_x^0 t^n\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(-1)^n}{n+1}[0 - x^{n+1}] \\ &= \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{|x|^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0. \end{aligned}$$

   Et donc on a aussi une limite nulle.

Finalement, on peut conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, les sommes partielles $\sum_{k=1}^n x^k/k$ ont pour limite $-\log(1-x)$. La série converge donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x).$$

Remarque. Posons une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On considère la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = a_n - a_{n+1}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}.$$

Ainsi $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k$ existe, c'est-à-dire si, et seulement si, $\lim_{n\to+\infty} a_n$ existe.

Exemple. On regarde la série

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}.$$

On a

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Exemple – nombres décimaux. On peut écrire un nombre réel comme $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \cdot 10^{-n}$ où $n_0 \in \mathbf{Z}$ et $a_n \in \{0, 1, \ldots, 0\}$.

## 2 Opérations sur les séries

Définition 2.1

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries.

— La somme des séries est la série $\sum(u_n + v_n)$ de terme général $u_n + v_n$.

— Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Le produit de $\sum u_n$ par $\lambda$ est la série $\sum \lambda u_n$ de terme général $\lambda u_n$.

Proposition 2.2

On a :

1. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors leur somme converge aussi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

2. Si la série $\sum u_n$ converge alors $\sum \lambda u_n$ aussi et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Démonstration

Dans l'ordre :

1. Notons

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \; ; \; V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \; ; \; \lim_{n\to+\infty} V_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}(U_n+V_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=0}^{+\infty}v_n.$$

Par définition, $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ converge si, et seulement si, $\sum_{k=0}^{n}(u_k+v_k)=U_n+V_n$ converge. Donc on a bien, si $U_n+V_n$ converge :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+v_n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=0}^{+\infty}v_n.$$

2. De même, en remarquant que $\sum\lambda u_n=\lambda\sum u_n$.

Exemple. Soit $x\in\mathbf{R}$ et soit $P(X)=aX^2+bX+c$ un polynôme. Il s'agit de montrer que la série

$$\sum_{n\geq 0}\frac{P(n)}{n!}x^n$$

et convergente et de donner sa somme. On se ramène à une combinaison linéaire de séries exponentielles :

$$\frac{P(n)}{n!}x^n=au_n+(a+b)v_n+cw_n$$

où

$$\begin{aligned}u_n&=\frac{n(n-1)}{n!}x^n\\ v_n&=\frac{n}{n!}x^n\\ w_n&=\frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{P(k)}{k!}x^k&=P(0)+P(1)a+\sum_{k=2}^{n}\frac{P(k)}{k!}x^k\\ \sum_{k=0}^{n}\frac{P(k)}{k!}x^k&=c+(a+b+c)x+\sum_{k=2}^{n}\left((ax^2)\frac{x^{k-2}}{(k-2)!}+(a+b)x\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}+c\frac{x^k}{k!}\right)\\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n&=c+(a+b+c)x+ax^2e^x+(a+b)x(e^x-1)+c(e^x-2)\\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n&=ax^2e^x+(a+b)xe^x+ce^x\\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n&=(ax^2+(a+b)x+c)e^x.\end{aligned}$$

Remarque. On a vu qu'une somme de deux séries convergentes est convergente. On a aussi qu'une somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente. En effet, supposons que $\sum u_n$ converge et que $\sum v_n$ diverge. Considérons la série $\sum w_n=\sum(u_n+v_n)$. Supposons que $\sum_{k=0}^{n}w_k$ converge alors $\sum u_n$ et $\sum w_k$ convergent. Or, $\sum v_n=\sum(u_n-w_n)$ et ne peut converger. D'où :

Proposition 2.3
Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n+v_n$ diverge.

Remarque. Une somme de deux séries divergentes peut converger ou diverger. En effet, considérons $\sum 1/n = \sum u_n$, c'est une série divergente. Cependant, $\sum u_n + \sum u_n$ diverge aussi, mais $\sum u_n - \sum u_n$ converge.

Définition 2.4
Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries numériques. Considérons la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = a_n + ib_n \in \mathbf{C}$. On définit la convergence de $\sum u_n$ en disant qu'elle converge si, et seulement si, $(\sum_{k=0}^n u_k)$ converge, i.e. si, et seulement si, $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent.

# 3 Critères de convergence

## 3.1 Convergence des séries à terme positif

Soit $\sum u_n$ telle que $u_n \in \mathbf{R}_+$ pour tout $n$. On se demande à quelle condition la série $\sum u_n$ converge. Posons

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_n.$$

La suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ainsi définie est croissante. Ainsi, $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente à l'unique condition qu'elle soit majorée. On a ainsi :

Proposition 3.1
Une série de terme général positif converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles est majorée.

Théorème 3.2 (De comparaison)
Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ des séries telles que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n.$$

— Si la série $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ aussi.
— Si la série $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ aussi et sa somme est majorée par celle de $\sum v_n$.

Démonstration
Notons

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
$$V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

La proposition nous dit que $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée et de même pour $\sum v_n$. Ainsi, si $\sum u_n$ diverge alors $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est non bornée et donc $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ non plus et donc $\sum v_n$ diverge.
Si $\sum v_n$ converge alors $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant majorée par $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui est majorée par un réel, donc $\sum u_n$ converge.
D'autre part, dans le second cas, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} U_n \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} V_n \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.\end{aligned}$$

Corollaire 3.3
Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ des séries de termes généraux $u_n$ et $v_n$ strictement positifs. Alors si la suite $(u_n/v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite finie non nulle alors on a $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum v_n$ converge.

Démonstration
Soit $l = \lim_{n\to+\infty} u_n/v_n$ avec $l \in \mathbf{R}^*$. Comme pour tout $n$, $u_n/v_n > 0$, on sait que $l > 0$. Fixons $a, b$ tels que $0 < a < l < b$. Par convergence, il existe $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $a < u_n/v_n < b$, c'est-à-dire $av_n < u_n < bv_n$. Par le théorème de comparaison des séries, $u_n$ converge si, et seulement si, $v_n$ converge.

Exemple 1. On considère la série de terme général

$$\forall n > 0,\ u_n = \frac{1}{n^2}.$$

On a vu que la série de terme général $v_n = 1/[n(n+1)]$ pour tout $n > 0$, converge. En effet $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et $\lim a_n = 0$ donc par le théorème de comparaison, $\sum v_n$ converge. On sait que

$$\forall n > 1,\ v_{n-1} > u_n$$

et

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi par le corollaire, $\sum u_n$ converge.

Exemple 2. Considérons la série de terme général

$$u_n = \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

$$\forall n \geq 1,\ 0 < \frac{\pi}{2^n} \leq \frac{\pi}{2}$$
$$\forall n \geq 1,\ u_n \geq 0.$$

De plus

$$\forall x \in \mathbf{R},\ |\sin x| \leq |x|$$

et donc

$$u_n = |u_n| \leq \frac{\pi}{2^n}.$$

La série de terme général $v_n$ est une série géométrique de raison $1/2$. Donc elle converge et donc $\sum u_n$ converge.

Exemple 3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'entiers tels que $0 \leq x_n \leq 0$ pour tout $n \geq 0$. Considérons la série $\sum_{n\geq 0} x_n 10^{-n}$. Le terme général est positif et

$$0 \leq \frac{x_n}{10^n} \leq 10^{1-n}$$

et $10^{1-n}$ est le terme général d'une série géométrique de raison $1/10$. Cette série converge donc et donc $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ aussi.

## 3.2 Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$. On considère la série de terme général $1/n^\alpha$.

Proposition 3.4
La série de terme général $1/n^\alpha$ avec $\alpha > 1$ converge. Elle diverge si $\alpha \leq 1$.

Démonstration
Si $\alpha \leq 1$ alors pour tout $n \geq 1$, $n^\alpha \leq n$ et donc

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$$

or la série de terme général $1/n$ diverge.
Si $\alpha > 1$, on considère l'application

$$f : x \mapsto -\frac{1}{x^{\alpha-1}}.$$

De plus, $\alpha - 1 > 0$. On a :

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

Par le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[n, n+1]$ :

$$f(n+1) - f(n) = f'(c)$$

avec $c \in ]n, n+1[$. Comme

$$f'(x) = \frac{\alpha-1}{x^\alpha}$$

on a

$$f'(c) \geq \frac{\alpha-1}{(n+1)^\alpha}$$

et donc

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \geq \frac{\alpha-1}{(n+1)^\alpha}.$$

On pose

$$v_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

Les sommes partielles de $\sum v_n$ sont

$$\sum_{n=1}^{k} v_k = \frac{1}{1^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge, de somme 1.
On applique le théorème de comparaison, la série $\sum_{n\geq 1} 1/n^\alpha$ converge.

## 3.3 Convergence absolue

Définition 3.5
Soit $\sum u_n$ une série de terme général $u_n$. Si la série de terme général $|u_n|$ est convergente, on dit que $\sum u_n$ est *absolument convergente.*

Remarque. Dans la définition, on peut prendre $u_n \in \mathbf{R}$ avec la valeur absolue ou $u_n \in \mathbf{C}$ avec le module.

Théorème 3.6
Toute série absolument convergente est convergente.

DÉMONSTRATION
Soit $u_n \in \mathbf{R}$. On considère $v_n = |u_n| - u_n$. Par l'inégalité triangulaire :

$$0 \leq v_n \leq 2\,|u_n|\,.$$

Par hypothèse $\sum 2\,|u_n| = 2\sum |u_n|$ converge. Donc $\sum v_n$ converge par le théorème de comparaison. Comme $u_n = |u_n| - v_n$ on a que $\sum u_n$ converge.
Si $u_n \in \mathbf{C}$ alors en posant $u_n = a_n + ib_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbf{R}$ on a

$$0 \leq |a_n|\,, |b_n| \leq |u_n|\,.$$

Comme $\sum |u_n|$ converge, $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ aussi. Donc $\sum a_n$ et $\sum b_n$ converge et donc $\sum u_n$ aussi.

PROPOSITION 3.7
Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\,.$$

DÉMONSTRATION
Pour tout $k \geq 0$ :

$$\left|\sum_{n=0}^{k} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{k} |u_n|$$

or $|\sum u_n|$ et $\sum |u_n|$ convergent et donc l'égalité tient pour $k = +\infty$.

REMARQUE. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors elles sont convergentes et donc leur $\sum u_n + v_n$ aussi. Mieux, $\sum u_n + v_n$ est absolument convergente. En effet $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$ et comme $\sum |u_n| + |v_n|$ est convergente, $\sum |u_n + v_n|$ est convergente.

EXEMPLE. Considérons la série de terme général

$$\frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$$

avec $\alpha \in \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}$.

$$\forall n \geq 1, \ \left|\frac{\cos nx}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

— si $\alpha > 1$ alors le théorème de comparaison conclut ;
— si $\alpha = 1$ et $x = 0$ alors le terme général est $1/n$ et la série diverge ;
— si $\alpha = 1$ et $x = \pi$ alors le terme général est $(-1)^n/n$ et alors la série converge (mais pas en valeur absolue).

EXEMPLE. Soit

$$u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n}, \ |u_n| = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n} = \frac{2}{n\sqrt{n+2} + n\sqrt{n}}.$$

On a donc

$$|u_n| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

C'est une série de RIEMANN avec $\alpha = 3/2$ et donc la série $\sum u_n$ converge absolument.

## 3.4 Comparaison avec des séries géométriques

THÉORÈME 3.8 (Règle de D'ALEMBERT)
Soit $\sum u_n$ une série de terme général $u_n > 0$. S'il existe $K \in \mathbf{R}$ tel que $K < 1$ et pour tout $n$, $u_{n+1}/u_n \leq K$ alors $\sum u_n$ converge.

DÉMONSTRATION
On a :

$$u_n \leq K^n u_0$$

et donc comme $\sum K^n u_0$ converge, par le théorème de comparaison, $\sum u_n$ converge.

COROLLAIRE 3.9
Soit $\sum u_n$ la série dont le terme général, $u_n$, est strictement positif.
Supposons que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n = l$.

- Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge ;
- Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge.

DÉMONSTRATION
Supposons $l < 1$. Par définition, il existe $n_0$ et $K$ entiers tels que $l < K < 1$ et pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1}/u_n \leq K$. Donc $\sum u_{n+n_0}$ converge et donc $\sum u_n$ aussi.
Supposons $l > 1$. Il existe $n_0$ et $K > 1$ tels que pour tout $n \geq n_0$ on a $u_{n+1}/u_n \geq K$. Donc $u_{n+1} \geq K u_n > u_n$ et donc $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

EXEMPLE. Soit $x \in \mathbf{R}$. On pose

$$u_n = n^2 x^n.$$

Si $x = 0$ alors $\sum u_n$ converge. Pour $x \neq 0$ on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} x.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| > 0.$$

- Si $|x| < 1$ alors $\sum u_n$ est absolument convergente ;
- si $|x| > 1$ alors $\sum u_n$ n'est pas convergente ;
- si $|x| = 1$ alors la règle de D'ALEMBERT ne permet pas de conclure.

## 3.5 Régle de CAUCHY

THÉORÈME 3.10 (Règle de CAUCHY)
Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes positifs. S'il existe $K < 1$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \ \sqrt[n]{u_n} \leq K$$

alors la série $\sum u_n$ converge.

DÉMONSTRATION
On a que :

$$\forall n \geq 1, \ u_n \leq K^n.$$

D'autre part, $0 < K < 1$ donc la série de terme général $K^n$ converge et donc $\sum u_n$ converge.

Corollaire 3.11
Soit $\sum u_n$ de terme général positif. Supposons $\lim \sqrt[n]{u_n} = l$.

1. Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration
Dans l'ordre :

1. Supposons $l < 1$. Fixons $0 < l < K < 1$. Il existe $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\sqrt[n]{u_n} \leq K$. On a alors $0 \leq u_n \leq K^n$ et donc on conclut.
2. Supposons $l > 1$. Fixons $0 < 1 < K < l$. Il existe $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\sqrt[n]{u_n} \geq K$. Ainsi, $u_n \geq K^n$ et donc comme $\sum K^n$ diverge, $\sum u_n$ aussi.

Exemple. Si $u_n = x^n/n^n$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi,

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $\sum x^n/n^n$ converge.

### 3.6 Règle de Riemann

On a que $\sum 1/n^\alpha$ converge pour $\alpha > 1$. Ainsi :

Théorème 3.12 (Règle de Riemann)
Soit $\sum u_n$ de terme général positif et soit $\alpha$ un réel strictement positif.

1. Si $\lim n^\alpha u_n$ existe et est non nulle alors la série de terme général $u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
2. Si $\lim n^\alpha u_n = 0$ et si $\alpha > 1$ alors la série de terme général $u_n$ converge.
3. Si $\lim n u_n = +\infty$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Démonstration
Posons

$$v_n = \frac{1}{n^\alpha}.$$

On a

$$\frac{u_n}{v_n} = n^\alpha u_n.$$

1. Le théorème de comparaison entraine que si $\sum u_n$ et si $\sum v_n$ sont à termes généraux strictement positifs telles que la suite $u_n/v_n$ a une limite non nulle, alors $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum v_n$ converge.
2. On a alors pour $n$ assez grand $u_n \leq 1/n^\alpha$ et donc $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$.
3. Pour $n$ assez grand, $n u_n \geq 1$ et donc $u_n \geq 1/n$ et donc $\sum u_n$ diverge puisque $\sum 1/n$ diverge.

Exemple. Avec

$$u_n = \frac{\log n}{n^2}$$

alors, comme

$$\lim n^{\frac{3}{2}} u_n = 0$$

et comme $3/2 > 1$, $u_n \geq 0$ on a bien que $\sum u_n$ converge.

Remarque. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\log n + 1}{\log n} \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

et cela tend vers 1 quand $n$ tend vers l'infini. Le critère de d'Alembert ne permettait pas de conclure.

Remarque. Les critères de d'Alembert, Cauchy ou Riemann ne sont pas valables pour les séries à termes négatifs. Si $u_n$ est à valeurs négatives, on peut appliquer ces critères à $|u_n|$.

## 3.7 Comparaison avec des intégrales

Soit $f : [a, +\infty[ \to \mathbf{R}$ une fonction numérique. Supposons que $f(x) \geq x$ pour tout $x$ et supposons que $f$ est décroissante. Pour tous entiers $p < q$ supérieurs à $a$ on a

$$\sum_{n=p}^{q} f(n) \leq \int_p^q f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Lemme 3.13
Pour tous $a \leq p < q$ entiers. On a

$$f(q) + \int_p^q f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=p}^{q} f(n) \leq f(p) + \int_p^q f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $p < n < q$. Comme $f$ est décroissante, $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ pour tout $t \in [p, q]$.

$$f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}t = f(n)$$
$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n).$$

On somme alors sur $n \in [p, q[$ :

$$\sum_{n=p}^{q-1} f(n+1) \leq \int_p^q f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=p}^{q-1} f(n)$$
$$f(q) + \int_p^q f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=p}^{q} f(n) \leq f(n) + \int_p^q f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple. Soit $\alpha > 0$. On pose

$$u_n = \frac{1}{n(\log n)^\alpha}.$$

On a $\lim u_{n+1}/u_n = 1$. $n^\beta u_n$ ne converge pas pour $\beta > 1$. Si $\beta \leq 1$ alors $n^\beta u_n$ converge vers 0. Cependant :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x(\log x)^\alpha}$$

est décroissante sur $[2,+\infty[$. De plus, $f(x) > 0$ pour tout $x$ dans cet intervalle. Ainsi, considérons l'intégrale :

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t(\log t)^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$
$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \int (\log t)^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(\log t)^{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \log(\log t) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}.$$
$$\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}((\log x)^{1-\alpha} - (\log 2)^{1-\alpha}) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \log(\log x) - \log(\log 2) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

— Si $\alpha = 1$ :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

Le lemme précédent nous dit que :

$$\sum_{2\leq n\leq x} f(n) \geq f(x) + \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc $\sum u_n$ est divergente.

— Si $\alpha < 1$ alors $1-\alpha > 0$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty} \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

De même, la série $\sum u_n$ diverge.

— Si $\alpha > 1$ alors $1-\alpha < 0$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty} \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}(\log 2)^{1-\alpha}.$$

Le lemme dit que

$$\sum_{n=2}^{x} u_n \leq f(2) + \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc $\sum u_n$ converge.

Ainsi, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

## 3.8 Séries alternées

Définition 3.14

Une *série alternée* est une série $\sum u_n$ telle que $u_n$ et $-u_{n+1}$ ont le même signe pour $n$ assez grand.

Théorème 3.15 (Critère des séries alternées)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de termes réels strictement positifs. Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et a pour limite 0 alors la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge.

D'autre part, si $\sum(-1)^n a_n = S$ alors pour tout $n$ on a

$$s_n \leq S \leq s_{n+1}$$

et

$$|S - s_n| \leq a_{n+1}.$$

Démonstration
On considère les sous-suites :

$$\begin{aligned} s_{2p} &= a_0 - a_1 + \ldots + a_{2p} \\ s_{2p+1} &= a_0 - a_1 + \ldots + a_{2p} - a_{2p+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{2p+2} - s_{2p} &= a_{2p+2} - a_{2p+1} \leq 0 \\ s_{2p+3} - s_{2p+1} &= a_{2p+2} - a_{2p+3} \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, les sous-suites $(s_{2p})_{p\in\mathbf{N}}$ et $(s_{2p+1})_{p\in\mathbf{N}}$ sont respectivement décroissante et croissante. D'autre part,

$$\lim s_{2p+1} - s_{2p} = \lim -a_{2p+1} = 0.$$

Ces suites sont adjacentes et leurs différences tendent vers 0. Ainsi, $(s_p)$ est convergente et donc $\sum u_n$ converge.

Exemple. Prenons

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

avec $\alpha \in \mathbf{R}$. Elle n'est pas absolument convergente pour tout $\alpha$.

— $\alpha = 1$ : on a vu que $\sum u_n = -\log(2)$ ;
— $\alpha > 1$ : $\sum u_n$ est absolument convergente ;
— pour $0 < \alpha < 1$ : on a $a_n = 1/n^\alpha \geq 0$ est décroissante et de limite nulle, donc $\sum u_n$ est convergente (mais pas absolument).

## 3.9 Application des développements limités à la convergence

Exemple 1. Soit

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

On considère la fonction

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(x).$$

On a $u_n = f(1/n)$ et on regarde le développement limité de $f$ au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\ f(x) &= \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right) \\ &= \frac{x^{5/2}}{6} + x^{5/2}\varepsilon(x) \end{aligned}$$

$$u_n = \frac{n^{-5/2}}{6} + n^{-5/2}\varepsilon(1/n),$$

et donc il existe $n_0$ tel que $u_n$ est du signe de $n^{-5/2}/6$ pour $n \geq n_0$. Donc on peut considérer $u_n$ comme une série de terme général positif telle que $n^{5/2}u_n$ tend vers 1/6. Par le critère de Riemann, cette série converge et donc $\sum u_n$ aussi.

Exemple 2. Soit $a \in \mathbf{R}$ et soit

$$u_n = (n^2+1)^a - (n^2-1)^a.$$

— Si $a = 0$ alors $u_n = 0$ et $\sum u_n$ converge.

— Si $a \neq 0$, on calcule :

$$\begin{aligned} u_n &= n^{2a}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^a - \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^a\right) \\ u_n &= f(1/n), \\ f(x) &= \frac{1}{x^{2a}}\left((1+x^2)^a - (1-x^2)^a\right). \end{aligned}$$

On fait un développement limité de $f$ en 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{-2a}(1+ax^2-(1-ax^2)+x^3\varepsilon(x)) \\ f(x) &= x^{-2a}(2ax^2+x^3\varepsilon(x)) \\ f(x) &= 2ax^{2(1-a)}+x^{3-2a}\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Ainsi

$$u_n = \frac{2a}{n^{2(1-a)}} + \frac{\varepsilon(1/n)}{n^{2(1-a)+1}}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} n^{2(1-a)}u_n = 2a$$

et $u_n$ est une suite de terme général du signe de $a$ au moins à partir d'un certain rang. Par le critère de Riemann :

— Si $a > 0$, alors $u_n$ est à terme général positif ;
— si $a \geq 1/2$ alors $2(1-a) \leq 1$ et donc la série $\sum u_n$ est divergente ;
— si $a < 1/2$ alors $2(1-a) > 1$ donc la série $\sum u_n$ est convergente.
— Si $a < 0$ alors $u_n$ est négatif. On applique le critère à $\sum -u_n$. On a $2(1-a) > 2$ et donc $\sum -u_n$ est convergente et donc $\sum u_n$ est convergente.

## 4 Transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à valeurs complexes. Soit $p \in \mathbf{N}$. On pose

$$\forall n \geq p,\ B_n = \sum_{k=p}^{n} b_p.$$

Dans la somme (avec $q \geq p$) :

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n$$

on remplace les $b_n$ par $B_n - B_{n-1}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^{q} a_n b_n &= \sum_{n=p}^{q} a_n(B_n - B_{n-1}) \\ &= \sum_{n=p}^{q}[a_n B_n] - \sum_{n=p}^{q}[a_n B_{n-1}]. \end{aligned}$$

Lemme 4.1
Supposons que les $a_n$ sont des réels positifs et que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante. Supposons également que les $B_n$ avec $n \geq p$ sont majorés en valeur absolue par $B$. Alors on a :

$$\forall q > p,\ \left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| \leq a_p B.$$

DÉMONSTRATION
On a $a_n - a_{n+1} \geq 0$ puisque $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante. Ainsi $|(a_n - a_{n+1})B_n| = (a_n - a_{n+1})B_n$. Ainsi,

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| = \left|\sum_{n=p}^{q-1}[(a_k - a_{k+1})B_k] + a_q B_q\right|$$

et donc

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| \leq \sum_{k=p}^{q-1}(a_k - a_{k+1})\,|B_k| + a_q\,|B_q|$$
$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| \leq (\sum_{n=p}^{q-1}(a_k - a_{k+1}) + a_q)B$$
$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| \leq a_p B.$$

COROLLAIRE 4.2
Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à termes réels positifs décroissante. Soit $x \in ]0, 2\pi[$, posons $z = \cos x + i \sin x$. Pour tous $p, q \in \mathbf{R}$ tels que $p < q$ :

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n z^n\right| \leq \frac{a_p}{\sin(x/2)}.$$

PROPOSITION 4.3
Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante de réels tels que $\lim a_n = 0$. Alors la série de terme général $a_n \cos(n_x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbf{R} - 2\pi\mathbf{Z}$. De plus, la série de terme général $a_n \sin(nx)$ converge pour tout $x \in \mathbf{R}$.

DÉMONSTRATION (Corollaire)
On considère la somme partielle :

$$\sum_{n=p}^{q} a_n z^n.$$

On applique le lemme avec $b_n = z_n$. Il faut vérifier que pour tout $n$, $|B_n| \leq B$ avec $B = 1/\sin(x/2)$ et $B_n = \sum z^n$ pour $p \leq n \leq q$.

$$B_n = z^p \frac{1 - z^{n-p+1}}{1 - z},$$
$$1 - z = 1 - \cos x - i \sin x$$
$$1 - z = 2\sin^2(x/2) - 2i \sin(x/2)\cos(x/2)$$
$$1 - z = 2\sin(x/2)(\sin(x/2) - i\cos(x/2))$$
$$|1 - z| = 2\sin(x/2),$$
$$\left|z^p \frac{1 - z^{n-p+1}}{1 - z}\right| = \frac{1}{2\sin(x/2)}\,|z^p|\,\left|(1 - z^{n-p+1})\right|$$
$$\left|z^p \frac{1 - z^{n-p+1}}{1 - z}\right| \leq \frac{1}{2\sin(x/2)}\,|z^p|\,(1 + |z|^{n-p+1})$$
$$\left|z^p \frac{1 - z^{n-p+1}}{1 - z}\right| \leq \frac{2}{\sin(x/2)}.$$

# Chapitre 6

# Intégrales

## 1 Fonctions étagées

Soit $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$ un intervalle.

Définition 1.1
Une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est *étagée* s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que $f$ est constante sur $]x_{i-1}, x_i[$. Un telle subdivision est dite *adaptée* à $f$.

Lemme 1.2
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction étagée. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ une subdivision de $I$ adaptée à $f$. Posons $m_i = f(x)$ pour tout $x \in ]x_{i-1}, x_i[$ avec $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Alors le nombre $(x_1 - x_0)m_1 + (x_2 - x_1)m_2 + \ldots + (x_n - x_{n-1})m_n$ ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie.

Définition 1.3
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ étagée et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ une subdivision adaptée à $f$. Posons $m_i$ la valeur de $f$ sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$. La somme

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i$$

s'appelle *l'intégrale* de $f$ sur $I$ et se note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque. Si $f$ est à valeurs positives et étagée, alors son intégrale est l'aire délimitée par le graphe de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Si $f$ est constante alors son intégrale est égale à $(b - a)f(x)$ pour n'importe quel $x \in I$.

Proposition 1.4
Soient $f, g$ deux fonctions étagées sur $I$.

1. si $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda f + g$ est étagée et

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \ ;$$

2. si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in I$ alors
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\ ;$$
3. si $f$ et $g$ diffèrent en un nombre fini de points de $I$ alors leurs intégrales sont identiques ;
4. pour tout $c \in I$ :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration

Soient $\{x_i\}$ et $\{y_j\}$ des subdivisions adaptées respectives à $f$ et $g$. Soit $\{z_k\} = \{x_i\} \cup \{y_j\}$, c'est une subdivision adaptée à $\lambda f + g$. Ainsi :
$$\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{k} (z_{p-1} - z_p) \cdot (\lambda f + g)_p$$
$$\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{k} (z_{p-1} - z_p) \cdot (\lambda f_p + g_p)$$
$$\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{k} \lambda(z_{p-1} - z_p) f_p + \sum_{p=1}^{k} (z_{p-1} - z_p) g_p$$
$$\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$
Remarquons enfin qu'une application nulle sauf en un nombre fini de points est d'intégrale nulle.

## 2 Fonctions intégrables

Soit $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$ un intervalle.

### 2.1 Critère d'intégrabilité

Définition 2.1

Soit $f : I \to \mathbf{R}$. On dit que $f$ est *intégrable* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions étagées $u, U : I \to \mathbf{R}$ telles que
$$\forall x \in I,\ u(x) \leq f(x) \leq U(x)$$
et
$$\int_a^b (U - u)(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

Remarque. Une fonction étagée est intégrable avec $u = U = f$.

On considère $E_-$ l'ensemble des fonctions étagées inférieures à $f$ en tout point. On considère de même $E_+$ celles qui sont supérieures à $f$ en tout point. On pose
$$A = \left\{ \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t \,\middle|\, u \in E_- \right\} \subset \mathbf{R}\ ;\ B = \left\{ \int_a^b U(t)\,\mathrm{d}t \,\middle|\, U \in E_+ \right\} \subset \mathbf{R}.$$

On remarque que pour tout $\alpha \in A$ et tout $\beta \in B$, on a $\alpha \leq \beta$. D'autre part, comme $f$ est intégrable :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in A, \exists \beta \in B, \forall x \in I,\ 0 \leq \beta(x) - \alpha(x) < \varepsilon.$$

$A$ est majorée donc $\sup A \in \mathbf{R}$ et de même, $\inf B \in \mathbf{R}$. Par la propriété ci-dessus :

$$\sup A = \inf B.$$

DÉFINITION 2.2
On appelle le réel $\sup A = \inf B$ l'intégrale de $f$ sur $[a, b]$ et on le note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

## 2.2 Propriétés de l'intégrale

PROPOSITION 2.3
Soient $f, g : I \to \mathbf{R}$ intégrables.

1. si $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda f + g$ intégrable et
$$\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\ ;$$
2. si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in I$
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\ ;$$
3. si $f, g$ diffèrent en un nombre fini de points, leurs intégrales sont identiques ;
4. pour tout $c \in I$ :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

DÉMONSTRATION
Soient $u, U, v, V$ étagées telles que pour tout $x \in I$ :

$$u(x) \leq f(x) \leq U(x)$$

et

$$v(x) \leq f(x) \leq V(x).$$

Par définition, si

$$0 \leq \int_a^b U(t) - u(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon$$

et de même pour $v, V$ alors

$$\lambda u + v \leq \lambda f + g \leq \lambda U + v$$

et

$$0 \leq \left| \int_a^b (\lambda U + v)(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b (\lambda u + v)(t)\,\mathrm{d}t \right| < |\lambda + 1|\,\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon$ peut être choisi arbitrairement petit, on en déduit que $\lambda f + g$ est intégrable et on a l'égalité voulue.

Corollaire 2.4
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ intégrable. Si $M, m \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall x \in I,\ m \leq f(x) \leq M$$

alors

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq (b-a)M.$$

Théorème 2.5
Si $f : I \to \mathbf{R}$ est continue, alors elle est intégrable.

Proposition 2.6
Si $f : I \to \mathbf{R}$ est continue alors il existe $c \in I = [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)f(c).$$

Démonstration
Puisque $f$ est continue sur $[a, b]$, il existe $m \leq M$ tel que $f(I) = [m, M]$. Par le corollaire,

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq M.$$

Donc il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = c.$$

Théorème 2.7
Si $f$ est monotone alors elle est intégrable.

Démonstration
On suppose $f$ croissante. Fixons $n \in \mathbf{N}^*$ et posons la subdivision :

$$\left\{ x_i = a + i\frac{b-a}{n} \;\middle|\; i \in \{0, \ldots, n\} \right\}.$$

On définit les fonctions étagées $u, U$ telles que

$$u(x) = \begin{cases} f(x_i) \text{ si } x \in [x_i, x_{i+1}[ \text{ et } i \in \{0, \ldots, n-1\} \\ f(b) \text{ si } x = b \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} f(a) \text{ si } x = a \\ f(x_{i+1}) \text{ si } x \in ]x_i, x_{i+1}] \text{ et } i \in \{0, \ldots, n-1\} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\int_a^b U(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{b-a}{n}f(x_0) + \frac{b-a}{n}f(x_n) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

Donc pour $n$ assez grand, on a bien une majoration par $\varepsilon$ et donc $f$ est intégrable.