DÉTERMINANTS, VALEURS PROPRES ET DIAGONALISATION

1. DÉTERMINANTS

1.1. Différentes définitions

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ avec $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

Définition 1.1.0.1 (Déterminant). —
On définit en premier lieu :

$$\det A = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) a_{w(i),1} \cdot a_{w(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{w(n),n}.$$

C'est la formule de Cramer.

Définition 1.1.0.2. —
Une seconde définition possible :
Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, soit $A_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ la matrice (extraite) obtenue en enlevant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A.
On a alors :

$$\det' A = a_{1,1} \cdot \det'(A_{1,1}) - a_{1,2} \cdot \det'(A_{1,2}) + \ldots + (-1)^{n-1} a_{1,n} \cdot \det'(A_{1,n}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1,i} \cdot \det'(A_{1,i})$$

Exemple. — Prenons :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; A_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne avec la seconde définition :

$$\det A = 2\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2. — On vérifie que les deux définitions coïncident :

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}\det(a_{2,2}) - a_{1,2}\det(a_{2,1}) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.$$

Remarque. — Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$ un n-uplet de vecteurs de E. Pour tout j, on pose :

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot e_i \quad a_{i,j} \in \mathbf{R}.$$

On appelle *déterminant* dans la base B de $(u_1, \dots, u_n)$ le réel :

$$\det_B(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det(a_{i,j}).$$

Exemple. — Pour $n = 2$. On prend :

$$u_1 = 2e_1 + 3e_2,$$
$$u_2 = -e_1 + 6e_2.$$

On a alors :

$$\det_B(u_1, u_2) = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 15.$$

Remarque. — Si $u_j = e_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ alors $\det_B(e_1, \dots, e_n) = \det(I_d) = 1$.

Proposition 1.1.0.1. —
On a les énoncés :

1. pour tout $w \in S_n$:

$$\det_B(u_{w(1)}, u_{w(2)}, \dots, u_{w(n)}) = \varepsilon(w)\det_B(u_1, u_2, \dots, u_n);$$

2. on en déduit que le déterminant change de signe si on échange deux colonnes ;
3. si pour $i \neq j$ on a $u_i = u_j$ alors le déterminant est nul (puisque négatif et positif simultanément).

Démonstration 1.1.0.1. —
Il suffit de montrer le premier point.
On sait que S_n est engendré par les transpositions. On suppose donc que $w \in S_n$ est une transposition.
En fait, S_n est engendré par les transpositions simples, i.e. les transpositions de la forme $(k, k+1)$ avec $1 \leq k < n$. [1§]

On suppose donc que w est de la forme $(k, k+1)$. Soit A la matrice $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de ces n vecteurs dans les coordonnées de la base B. Soit A' la matrice obtenue en permutant les colonnes k et $k+1$ de A. Il faut donc vérifier que :

$$\det A' = \varepsilon(w)\det A = -\det A.$$

On calcule à gauche et à droite :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(A_{1,j}),$$
$$\det A' = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a'_{1,j}\det(A'_{1,j}).$$

— Pour $j \neq k, k+1$ on a $a'_{1,j} = a_{1,j}$ et $A'_{1,j}$ est obtenue en échangeant les colonnes k et $k+1$ de $A_{1,j}$
— Pour $j = k$ on a $a'_{1,k} = a_{1,k+1}$ et donc $A'_{1,k} = A_{1,k+1}$.
— Pour $j = k+1$ on a $a'_{1,k+1} = a_{1,k}$ et donc $A'_{1,k+1} = A_{1,k}$.

On en déduit :

$$\det A' = \sum_{j\neq k,k+1}(-1)^{j+1}\det(A'_{i,j})\,^{(2\S)} + (-1)^{k+1}a'_{1,k}\det(A'_{1,k}) + (-1)^{k}a'_{1,k+1}\det(A'_{1,k+1}),$$
$$\det A' = \sum_{j\neq k,k+1}(-1)^{j+1}(-\det(A_{i,j})) + (-1)^{k+1}a_{1,k+1}(-\det(A_{1,k+1})) + (-1)^{k}a_{1,k}(-\det(A_{1,k})),$$
$$\det A' = -\det A.$$

1.2. Formes n-linéaires alternées

Définition 1.2.0.3 (Forme n-linéaire). —
Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Une forme n-linéaire sur E est une application $\varphi : E^n \to \mathbf{R}$ qui est linéaire sur chaque composante.

Proposition 1.2.0.2. —
Soit B une base de E avec $\dim E = n$.

$$\det_B : \begin{cases} E^n \to \mathbf{R} \\ (u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_B(u_1, \dots, u_n) \end{cases}$$

est une forme n-linéaire.

1§. En effet, toute transposition est un produit de transpositions simples par une conjugaison adaptée : on « renomme » les éléments.
2§. Par récurrence sur n on a $\det(A'_{i,j}) = -\det(A_{i,j})$.

Démonstration 1.2.0.2. —
On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & aa'_{1,k} + ba''_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & aa'_{2,k} + ba''_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a'_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a'_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a''_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a''_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

On veut montrer :

$$\det A = a\det A' + b\det A''.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j\neq k}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(A_{i,j}) + (-1)^{k+1}(aa'_{1,k} + ba''_{1,k})\det(A_{1,k}), \\ \det A' &= \sum_{j\neq k}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(A'_{i,j}) + (-1)^{k+1}a'_{1,k}\det(A_{1,k}), \\ \det A'' &= \sum_{j\neq k}(-1)^{j+1}a_{1,j}\det(A''_{i,j}) + (-1)^{k+1}a''_{1,k}\det(A_{1,k}) \end{aligned}$$

On doit alors montrer :

$$\forall j \neq k,\ \det A_{i,j} = a\det(A'_{i,j}) + b\det(A''_{i,j})$$

ce qui est démontré par hypothèse de récurrence.

Définition 1.2.0.4 (Forme n-linéaire alternée). —
Soit $\varphi : E^n \to \mathbf{R}$ une forme n-linéaire alternée avec E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
φ est une forme n-linéaire alternée si on a :

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$$

dès que deux composantes u_i, u_j avec $i \neq j$ coïncident.

Remarque. — On en déduit que le déterminant dans une base donnée est une forme n-linéaire alternée.

Proposition 1.2.0.3. —
Soit φ une forme n-linéaire alternée. Alors pour tout $w \in S_n$, $\varphi(u_{w(1)}, \dots, u_{w(n)}) = \varepsilon(w)\varphi(u_1, \dots, u_n)$.

Démonstration 1.2.0.3. —
On peut supposer que w est une transposition simple : $w = (k, k+1)$ avec $1 \leq k < n$.
On veut montrer :

$$\varphi(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, u_k, u_{k+2}, \ldots, u_n) = -\varphi(u_1, \ldots, u_n).$$

Pour simplifier les notations, on oublie les indices u_i avec $i \neq k, k+1$. On a :

$$\varphi(u_k + u_{k+1}, u_k + u_{k+1}) = 0$$

et donc par linéarité :

$$\varphi(u_k, u_k) + \varphi(u_k, u_{k+1}) + \varphi(u_{k+1}, u_k) + \varphi(u_{k+1}, u_{k+1}) = 0 \iff \varphi(u_k, u_{k+1}) = -\varphi(u_{k+1}, u_k).$$

Proposition 1.2.0.4. —
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit $\varphi : E^n \to \mathbf{R}$ une forme n-linéaire alternée. Alors :

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = \det_B(u_1, \ldots, u_n)\varphi(e_1, \ldots, e_n)$$

où les u_i sont exprimés dans la base B.

Remarque. — Toutes les formes n-linéaires alternées sont proportionnelles au déterminant.

Démonstration 1.2.0.4. —
Soit $u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$, les $a_{i,j}$ sont les coordonnées des u_j dans la base B.
On a :

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} e_i\right).$$

Comme φ est n-linéaire alternée :

$$\begin{aligned}
\varphi(u_1, \ldots, u_n) &= \sum_{w \in S_n} a_{w(1),1} a_{w(2),2} \ldots a_{w(n),n} \varphi(e_{w(1)}, \ldots, e_{w(n)}) \\
\varphi(u_1, \ldots, u_n) &= \sum_{w \in S_n} a_{w(1),1} a_{w(2),2} \ldots a_{w(n),n} \varepsilon(w) \varphi(e_1, \ldots, e_n) \\
\varphi(u_1, \ldots, u_n) &= \det_B(u_1, \ldots, u_n)\varphi(e_1, \ldots, e_n)
\end{aligned}$$

Remarques. — On a démontré :

1. Pour une base B choisie, le déterminant $\det_B$ est une forme n-linéaire alternée ;
2. pour toute forme n-linéaire alternée, φ, on a : $\varphi(\cdot) = \det_B(\cdot)\varphi(B)$;
3. en particulier, les deux déterminants coïncident.

Proposition 1.2.0.5. —
Pour tout $A \in M_n(\mathbf{R})$ on a :

$$\det(A) = \det(A^t).$$

Démonstration 1.2.0.5. —
On a :

$$A = (a_{i,j})$$
$$A^t = (b_{i,j}),\ b_{i,j} = a_{j,i}$$

On calcule par la formule de Cramer :

$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^{n} b_{w(i),i},$$
$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^{n} a_{i,w(i)}.$$

Pour w fixé, dans i décrit 1 à n alors $w(i)$ décrit également 1 à n. On effectue un changement de variable $j = w(i)$ et alors $i = w^{-1}(j)$ et on a :

$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{j=1}^{n} a_{w^{-1}(j),j},$$
$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{w(j),j},$$
$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{j=1}^{n} a_{w(j),j},$$
$$\det(A^t) = \det(A).$$

Remarque. — On peut calculer $\det(A)$ en développant par rapport à la première ligne ou la première colonne (au choix). On a alors :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^n a_{i,1} \det(A_{i,1}).$$

Proposition 1.2.0.6. —
Si $A \in M_n(\mathbf{R})$ est triangulaire alors :

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Démonstration 1.2.0.6. —
Supposons A triangulaire supérieure, c'est-à-dire $a_{i,j} = 0$ si $i > j$.

Par la formule de Cramer :

$$\det(A) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^{n} a_{i,w(i)}.$$

Or les seuls w qui contribuent à cette somme sont ceux tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, i \leq w(i),$$

c'est-à-dire : $w = \mathrm{id}$ (3§).
En développant par rapport à une ligne (ou une colonne quelconque) :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{j,i} \det(A_{j,i}).$$

Si A' désigne la matrice obtenue en permutant les lignes de A par $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j \end{pmatrix}$:

$$\det(A') = \varepsilon(w) \det(A) = (-1)^{j+1} \det(A).$$

On note $A' = (a'_{k,l})_{k,l \in \{1,\dots,n\}}$.
En choisissant $j > 1$:

$$\begin{aligned} \det(A') &\overset{(4§)}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a'_{1,i} \det(A'_{1,i}), \\ \det(A') &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{j,i} \det(A_{j,i}); \\ \det(A) &= (-1)^{j+1} \det(A'), \\ \det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{j,i} \det(A_{j,i}). \end{aligned}$$

2. DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

2.1. Invariance par changement de base

Proposition 2.1.0.7. —
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $C = (u_1, \dots, u_n)$ un système de n vecteurs de E. Alors C est une base de E si, et seulement si :

$$\det_B(C) \neq 0.$$

3§. Soit $w \in S_n$, $w : \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \dots, n\}$.
Si $i \leq w(i)$ pour tout i alors $w(k) = k$ pour tout k par récurrence descendante sur k :
— $n \leq w(n)$ et donc $w(n) = n$;
— $k - 1 \leq w(k-1)$ et donc $w(k-1) = w(k)$.

4§. En développant par rapport à la première ligne.

Démonstration 2.1.0.7. —
Supposons que C est une base de E.
On a vu que si $\varphi : E^n \to \mathbf{K}$ est une forme n-linéaire alternée alors :

$$\forall (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n,\ \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det_B(u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot \varphi(e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

On applique cette formule avec $\varphi = \det_C$ et on a :

$$\det_C(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det_B(C)\det_C(B),$$
$$1 = \det_C(C) = \det_B(C)\det_C(B),$$

et donc $\det_B(C) \neq 0$.
Supposons maintenant que C est liée. Il existe alors i tel que u_i est combinaison linéaire des u_j avec $j \neq i$. Par exemple :

$$u_i = \sum_{j \neq i} a_j \cdot u_j,\ (a_j \in \mathbf{R})$$
$$\det_B(C) = \det_B(u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, \sum_{j \neq i} a_j \cdot u_j, u_{i+1}, \ldots, u_n),$$
$$\det_B(C) = \sum_{j \neq i} a_j \det_B(u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, \underset{j \neq i}{u_j}, u_{i+1}, \ldots, u_n),$$

or $\det_B$ est alternée et comme u_j apparaît deux fois dans la dernière expression, on a

$$\det_B(C) = 0.$$

Proposition 2.1.0.8. —
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, $B = (e_1, \ldots, e_n)$, $C = (u_1, \ldots, u_n)$ deux bases de E et f un endomorphisme de E. Alors :

$$\det_B(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \det_C(f(u_1), \ldots, f(u_n)).$$

Remarque. — En d'autres termes, $\det_B(f(B))$ ne dépend pas du choix de la base B. On l'appelle $\det(f)$.

Démonstration 2.1.0.8. —
On utilise la formule :

$$\forall (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n,\ \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det_B(u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot \varphi(e_1, e_2, \ldots, e_n),$$

où φ est une forme n-linéaire alternée.
On pose :

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = \det_B(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n))$$

et on a alors :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det_C(f(u_1), \dots, f(u_n))\det_B(C).$$

De même :

$$\det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det_B(C)\det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Et donc :

$$\det_B(f(u_1), \dots, f(u_n))\det_B(C) = \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n))\det_B(C)$$

et $\det_B(C) \neq 0$. Donc l'égalité voulue est obtenue.

Proposition 2.1.0.9. —
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, f et g deux endomorphismes de E. Alors :

$$\det(fg) = \det(f)\det(g).$$

Démonstration 2.1.0.9. —
Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E,

$$\det(fg) = \det_B(fg(e_1), \dots, fg(e_n)).$$

Considérons la forme n-linéaire alternée φ telle que :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(g(u_1), \dots, g(u_n)),$$

alors on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(f(u_1), \dots, f(u_n)) &= \det_B(f(u_1), \dots, f(u_n))\varphi(e_1, \dots, e_n),\\
\det_B(gf(e_1), \dots, gf(e_n)) &= \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n))\det_B(g(e_1), \dots, g(e_n)),\\
\det(gf) &= \det(g)\det(f).
\end{aligned}$$

Remarque. — Si $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ alors

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

3. DIAGONALISATION

Démonstration 3.0.0.10. —
Une matrice A est *diagonalisable* si elle est conjugué par un isomorphisme à une matrice diagonale.

3.1. Valeur propre et vecteur propre

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E.

Définition 3.1.0.5. —
On appelle *valeur propre* de f un réel λ tel qu'il existe un $v \in E - \{0\}$ tel que $f(v) = \lambda \cdot v$.
On dit que v est un *vecteur propre* de valeur propre λ.

Quitte à prendre la matrice A de f dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$ fixée de E, λ est une valeur de f (ou de A) si, et seulement si

$$\det(A - \lambda I_d) = 0.$$

Remarque. — Soient $A \in M_n(\mathbf{R})$, B la base canonique et $C = AB$. $\det(A)$ est non nul si, et seulement si, A est inversible. D'autre part s'il existe un vecteur propre v de valeur propre λ alors

$$\ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\}.$$

Or $f - \lambda I_d$ est un endomorphisme de E et E est de dimension finie. Donc il y a équivalence :

$$\ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I_d) = 0.$$

Définition 3.1.0.6. —
On appelle polynôme caractéristique de f (ou de A) le polynôme :

$$\chi_f(t) = \chi_A(t) = \det(A - tI_d).$$

Exemple. — En dimension 2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a

$$\chi_A(t) = t^2 - (a+d)t + ad - bc = t^2 - \mathrm{tr}(A)t + \det(A).$$

Remarque. — $\chi_A(t)$ est un polynôme de degré n de coefficient dominant $(-1)^n$ et de terme constant $\chi_A(0) = \det(A)$.

Définition 3.1.0.7. —
Soit f un endomorphisme de E et de matrice A. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On appelle *sous-espace propre* de f (ou de A) de valeur propre λ le sous-espace vectoriel $\ker(f - \lambda I_d)$.

Proposition 3.1.0.10. —
Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors si $\lambda \neq \mu$ on a

$$\ker(f - \lambda I_d) \ker(f - \mu I_d) = \{0\}.$$

Plus généralement si, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}$ distincts alors on a :

$$\sum_{i=1}^{k} \ker(f - \lambda_i I_d) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(f - \lambda_i I_d)$$

Démonstration 3.1.0.11. —
Il s'agit de vérifier que pour tout $i \neq j$ on a :

$$\ker(f - \lambda_i I_d) \cap \ker(f - \lambda_j I_d) = \{0\}\,.$$

Si $v \in \ker(f - \lambda_i I_d) \cap \ker(f - \lambda_j I_d)$ alors :

$$f(v) = \lambda_i v = \lambda_j v \implies v = 0.$$

Corollaire 3.1.0.1. —
Soient $\dim E = n$, f est un endomorphisme de E, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ valeurs propres de f et E_i le sous-espace associé à la valeur propre λ_i. Alors si

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i,$$

l'endomorphisme f est diagonalisable.

Démonstration 3.1.0.12. —
Si on fait la réunion :

$$B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i,$$

où B_i est une base de E_i on obtient une base de E. Dans cette base la matrice de f est diagonale où l'élément diagonal λ_i est la valeur propre correspondante. La matrice de passage de la base canonique à la base B donne la diagonalisablisation.

Donc pour diagonaliser A il faut vérifier si $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$ où les E_i sous les sous-espaces propres.

Exemple. — Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 1 & 4-\lambda & -5 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix},$$
$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)((4-\lambda)(-2-\lambda)+10) - (2(-2-\lambda)+6),$$
$$\chi_A(t) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2).$$

Les trois valeurs propres sont $0, 1, 2$ et sont de multiplicité 1.