SÉRIES NUMÉRIQUES

Table des matières

1. Définitions

On considère des séries numériques, c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Définition 1.1
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite numérique.
On dit que la série Σu_n de terme général u_n converge si la suite de terme général

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

converge.
Si la suite s_n diverge, alors on dit que la série Σu_n de terme général u_n diverge.
Les s_n s'appellent les *sommes partielles*.

Définition 1.2
On note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

(quand elle est définie).
On l'appelle la *somme* de la série (Σu_n).

Remarque. — La suite de terme général

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

converge si, et seulement si, la suite de terme général (pour n_0 fixé)

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

converge.

Proposition 1.1
Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Démonstration 1.1
Avec

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

et l la limite de s_n. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de s_n, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n$, $|l - s_n| < \varepsilon$. Et donc

$$|s_{n+1} - s_n| = |s_n + 1 - l + l - s_n| \leq |s_{n+1} - l| + |s_n - l| < 2\varepsilon.$$

Or

$$|s_{n+1} - s_n| = |u_{n+1}| < 2\varepsilon.$$

Exemple – Séries géométriques. — Soit $x \in \mathbf{R}$. On pose

$$u_n = a \cdot x^n.$$

On a

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ s_n &= a \sum_{k=0}^{n} x^n \\ s_n &= a \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{a}{1 - x}(1 - x^{n+1}). \end{aligned}$$

— Si $|x| < 1$ alors $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $a/(1 - x)$.
— Si $|x| \geq 1$ alors la série $\sum ax^n$ diverge.

Exemple – Série exponentielle. — Soit $x \in \mathbf{R}$. On regarde la série de terme général $x^n/n!$. Alors cette série a pour somme partielle :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

et la formule de Taylor nous assure que s_n tend vers $\exp(x)$. La série est convergente pour tout x et de somme $\exp(x)$.

Exemple. — Soit $x \in \mathbf{R}$. On considère la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

- Si $|x| > 1$ alors la suite de terme général x^n/n ne converge pas et donc la série ne converge pas.
- Si $x = 1$ alors les sommes partielles sont

  $$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

  Cependant

  $$s_{2n} - s_n \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

  Ainsi, la série $\sum 1/n$ diverge.
- Si $-1 \leq x < 1$ alors pour tout $n \geq 1$, on pose

  $$f_n \colon \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ t \mapsto 1 + t^2 + \ldots + t^{n-1} \end{cases}$$

  et pour tout $t \neq 1$:

  $$f_n(t) = \frac{1 - t^n}{1 - t}$$

  et alors

  $$\frac{1}{1-t} = f_n(t) + \frac{t^n}{1-t}.$$

  On peut intégrer, pour tout $x \in [-1, 1[$:

  $$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} &= \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \\ -\log(1-x) &= x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ -\log(1-x) &= s_n + \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

  Il s'agit donc d'examiner la convergence du dernier terme.

1. Pour $0 \leq x < 1$, on a $0 \leq t \leq x < 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{t^n}{1-t} &\leq \frac{t^n}{1-x} \\
\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t &\leq \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{1-x}\frac{1}{n+1}x^{n+1} \leq \frac{1}{1-x}\frac{1}{n+1} \to 0
\end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

2. Pour $1 \leq x < 0$, on a $1 \leq x \leq t \leq 0$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_x^0 \frac{|t|^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_x^0 |t|^n\,\mathrm{d}t \int_x^0 |t|^n\,\mathrm{d}t \qquad\qquad = (-1)^n\int_x^0 t^n\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1}[0-x^{n+1}] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{|x|^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0.
\end{aligned}$$

Et donc on a aussi une limite nulle.

Finalement, on peut conclure que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, les sommes partielles $\sum_{k=1}^n x^k/k$ ont pour limite $-\log(1-x)$. La série converge donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\log(1-x).$$

Remarque. — Posons une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On considère la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = a_n - a_{n+1}$. On a

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}.$$

Ainsi $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n u_k$ existe, c'est-à-dire si, et seulement si, $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.

Exemple. — On regarde la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

On a

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Exemple – nombres décimaux. — On peut écrire un nombre réel comme $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}$ où $n_0 \in \mathbf{Z}$ et $a_n \in \{0, 1, \ldots, 0\}$.

2. Opérations sur les séries

Définition 2.1

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries.

— La somme des séries est la série $\sum(u_n + v_n)$ de terme général $u_n + v_n$.

— Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Le produit de $\sum u_n$ par λ est la série $\sum \lambda u_n$ de terme général λu_n.

Proposition 2.1

On a :

1. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors leur somme converge aussi
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$
2. Si la série $\sum u_n$ converge alors $\sum \lambda u_n$ aussi et
$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$