

COURS COMPLET DE MM3

Sommaire

I	Algèbre	1
1	Groupes et groupes symétriques	3
1	Introduction	3
2	Sous-groupe	4
3	Morphisme de groupes	5
4	Groupe symétrique	6
2	Déterminants et réduction	11
1	Déterminants	11
2	Déterminant d'un endomorphisme	16
3	Diagonalisation	18
4	Polynômes en un endomorphisme de E	23
5	Applications	28
II	Analyse	31
3	Développements limités	33
1	Fonctions négligeables et équivalentes	33
2	Dérivées successives et formules de TAYLOR	36
3	Développement limité à l'ordre n d'une fonction de classe C^n	39
4	Calculs avec les développements limités	45
5	Applications	50
4	Courbes et surfaces paramétrées	63
1	Définitions	63
2	Tangentes	63
3	Branches infinies	65
4	Étude de courbes paramétrées	66
5	Séries numériques	68
1	Définitions	68
2	Opérations sur les séries	71
3	Critères de convergence	73
4	Transformation d'ABEL	82
6	Intégrales	84
1	Fonctions étagées	84
2	Fonctions intégrables	85

Première partie

Algèbre

Table des matières

1	Groupes et groupes symétriques	3
1	Introduction	3
1.1	Groupe abstrait	3
1.2	Groupe commutatif	3
1.3	Exemples	4
2	Sous-groupe	4
2.1	Sous-groupe	4
2.2	Ordre d'un groupe et d'un élément	4
3	Morphisme de groupes	5
3.1	Morphisme de groupes	5
3.2	Image et noyau	5
4	Groupe symétrique	6
4.1	Groupe de permutations	6
4.2	Transpositions et cycles	7
4.3	Décomposition des cycles	7
2	Déterminants et réduction	11
1	Déterminants	11
1.1	Différentes définitions	11
1.2	Formes n -linéaires alternées	13
2	Déterminant d'un endomorphisme	16
2.1	Invariance par changement de base	16
3	Diagonalisation	18
3.1	Valeur propre et vecteur propre	18
3.2	Sous-espaces propres	19
3.3	Conditions de diagonalisabilité	20
4	Polynômes en un endomorphisme de E	23
4.1	Polynômes évalué en un endomorphisme	23
4.2	Lemme des noyaux	25
4.3	Trigonalisation	26
4.4	Comment calculer m_f ? (CAYLEY-HAMILTON)	27
5	Applications	28
5.1	Calculs de puissances	28

5.2	Systèmes différentiels	28
5.3	Application aux suites récurrentes	29

Chapitre 1

Groupes et groupes symétriques

1 INTRODUCTION

1.1 Groupe abstrait

DÉFINITION 1.1

Un groupe est la donnée d'un couple (G, \cdot) où G est un ensemble et $\cdot : G \times G \rightarrow G$ une loi de composition interne, telle que :

1. associativité :

$$\forall a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$

2. existence de l'élément neutre $e \in G$:

$$\forall g \in G, g \cdot e = e \cdot g = g;$$

3. existence de l'inverse :

$$\forall x \in G, \exists y \in G, x \cdot y = y \cdot x = e.$$

NOTATIONS. Pour un groupe multiplicatif on note ab l'élément $a \cdot b$, l'élément neutre est noté 1 et l'inverse de a est noté de a^{-1} .

DÉMONSTRATION (Unicité de l'élément neutre et de l'inverse)

Soient e, e' deux éléments neutres. Alors

$$e' = e \cdot e' = e.$$

Soient b, c inverses de a . Alors :

$$b = b \cdot a \cdot c = c.$$

1.2 Groupe commutatif

DÉFINITION 1.2 (Groupe commutatif (ou Abélien))

Un groupe G est commutatif si la loi de composition l'est :

$$\forall x, y \in G, xy = yx.$$

NOTATIONS. En général la loi de composition d'un tel groupe est notée comme un groupe additif $(G, +)$. Le neutre est alors 0 et l'inverse de x est $-x$.

1.3 Exemples

- Le couple $(\mathbf{Z}, +)$ est un groupe abélien où $+$ est l'addition usuelle des entiers.
- $(\mathbf{R}, +)$ et $(\mathbf{Q}, +)$ sont également des groupes abéliens.
- $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \times)$ et $(\mathbf{Q} \setminus \{0\}, \times)$ sont des groupes abéliens.
- $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ est un groupe pour la composition de matrices en tant que loi de composition. Ce n'est pas un groupe commutatif.

2 SOUS-GROUPE

2.1 Sous-groupe

DÉFINITION 2.1 (Sous-groupe)

Soit G un groupe (multiplicatif) et $H \subset G$ un sous-ensemble de G . H est un sous-groupe de G si c'est un groupe avec la loi de composition et d'inverse astreintes à H ^{1§}.

PROPOSITION 2.2

Soit G un groupe.

Si $(H_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-groupes de G alors $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de G .

DÉFINITION 2.3

Pour tout $i \in I$, H_i vérifie la propriété de sous-groupe et donc l'intersection aussi.

REMARQUE. Généralement la réunion de sous-groupes n'est pas un sous-groupe. En effet si $x \in H_1$ et $y \in H_2$ alors il n'y a aucune raison que $xy \in \bigcup H_i$.

Pour une équivalence il faut rajouter une hypothèse. Si H, K sont deux sous-groupes de G alors $H \cup K$ est un sous-groupe si, et seulement si, $H \subset K$ ou $K \subset H$.

En effet supposons $H \not\subset K$ et que $H \cup K$ est un sous-groupe. Si $K \not\subset H$ alors on peut choisir $x \in K - K \cap H$ et $y \in H - K \cap H$. On a $x, y \in K \cup H$ et donc par hypothèse $xy \in H \cup K$ et donc il existe des inverses respectifs x^{-1}, y^{-1} . Supposons $xy \in H$: $H \ni (xy)y^{-1} = xe = x \in H$ absurde.

DÉFINITION 2.4 (Groupe engendré)

Si G est un groupe et X une partie de G alors on appelle sous-groupe de G engendré par X le plus petit sous-groupe de G contenant X . On le notera ici $\langle X \rangle$.

On a de plus si on note \mathbb{G} l'ensemble des sous-groupes de G :

$$\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathbb{G} \text{ et } H \supset X} H.$$

EXEMPLE. Soit G un groupe et $x \in G$. Alors :

$$\langle x \rangle = \{x^k \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

En effet c'est un sous-groupe de $\langle x \rangle$ et le plus petit.

2.2 Ordre d'un groupe et d'un élément

^{1§}. C'est-à-dire si H est stable par l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$.

DÉFINITION 2.5 (Ordre d'un groupe)

Si G est un groupe fini, on appelle *ordre de G* son cardinal, on le note généralement $|G|$ ou $\sharp G$.

Si G est un groupe et $x \in G$ alors on appelle *ordre de x* le cardinal de son sous-groupe engendré (s'il est fini).

Dans le cas où le groupe en question ne serait pas fini, on dit que l'ordre est infini.

EXEMPLES.

- Dans \mathbf{Z} , tous les éléments non nuls sont d'ordre infini.
- Dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est d'ordre n puisque toute classe admet un représentant dans $\{0, \dots, n-1\}$.
- Ordre des éléments de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$:

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$ x $	1	4	2	4

THÉORÈME 2.6 (Théorème de LAGRANGE)

Pour tout groupe G et tout sous-groupe H de G , l'ordre (i.e. le cardinal) de H divise l'ordre de G :

$$\sharp H \mid \sharp G.$$

DÉMONSTRATION (Théorème de LAGRANGE)

Le cardinal de l'ensemble G/H est appelé *indice* de H dans G et est noté $[G : H]$. De plus, ses classes forment une partition de G et chacune d'entre elles a le même cardinal que H . On a alors :

$$\sharp G = \sharp H \times [G : H].$$

3 MORPHISME DE GROUPE

3.1 Morphisme de groupes

DÉFINITION 3.1

Soient G, H deux groupes. Une application $f : G \rightarrow H$ est un morphisme de groupes si :

$$\forall x, y \in G, f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

PROPOSITION 3.2

Soient $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes. Alors :

1. $f(e_G) = e_H$;
2. $\forall x \in G, f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

3.2 Image et noyau

DÉFINITION 3.3

Soit $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes. On définit :

1. $\text{Ker}(f) = \{x \in G \mid f(x) = e\}$;
2. $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in G\}$.

PROPOSITION 3.4

Soit $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes.

1. $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des sous-groupes de G et H respectivement ;
2. f est injective si, et seulement si, $\text{Ker}(f) = \{e\}$;
3. f est surjective si, et seulement si, $\text{Im}(f) = H$.

DÉMONSTRATION

Point par point :

1. On a bien entendu $f(e) = e$ et $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$ pour tout $x \in G$. Ainsi $\text{Im}(f) = f(G)$ est un sous-groupe de H .
Soient $x, y \in G$, alors $f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = ee^{-1} = e$ donc $xy^{-1} \in G$. De plus $f(e) = e$ donc $\text{Ker}(f)$ est un sous-groupe de G .

2. Soient $x, y \in G$:

$$(f(x) = f(y) \iff x = y) \iff (f(xy^{-1}) = e \iff xy^{-1} = e).$$

3. Par définition, si $\text{Im}(f) = H$ alors f est surjective et réciproquement.

4 GROUPE SYMÉTRIQUE

4.1 Groupe de permutations

DÉFINITION 4.1

Soit E un ensemble. On définit :

$$S_E = \{\text{bijections } E \rightarrow E\}.$$

La loi étant la composition des applications. Elle est associative, admet un élément neutre (application identité) et toute application admet une application inverse par définition.

PROPOSITION 4.2

Si $\#E = n$ alors S_E est isomorphe (au sens de groupes) à $S_{\{1,2,\dots,n\}} := S_n$.

DÉMONSTRATION

Puisque $\#E = n$ il existe une bijection $\phi : E \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. On considère alors l'application de $\theta : S_E \rightarrow S_n$ définie par : $\omega \mapsto \phi \circ \omega \circ \phi^{-1}$. Comme ω, ϕ sont des bijections, l'application $\phi \circ \omega \circ \phi^{-1}$ est une bijection. L'application θ est bien définie.

On a :

$$\begin{aligned} \theta(\omega' \circ \omega) &= \phi \circ (\omega' \circ \omega) \circ \phi^{-1} \\ \theta(\omega' \circ \omega) &= \phi \circ \omega' \circ \text{id} \circ \omega \circ \phi^{-1} \\ \theta(\omega' \circ \omega) &= \theta(\omega') \circ \theta(\omega). \end{aligned}$$

θ est bien un morphisme de groupes. On a $\theta^{-1}(\omega) = \phi^{-1} \circ \omega \circ \phi$ qui fait de θ une bijection.

DÉFINITION 4.3 (Groupe symétrique)

On appelle S_n le *groupe symétrique*.

REMARQUE. On omet la notation \circ . Si $\omega \in S_n$ on décrit son action sur $\{1, 2, \dots, n\}$ par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \omega(1) & \omega(2) & \dots & \omega(n) \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE DE COMPOSITION. Dans S_4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.2 Transpositions et cycles

DÉFINITION 4.4 (Transposition)

Une *transposition* de S_n est une permutation qui échange deux éléments et laisse invariants les $n - 2$ autres.

NOTATION. Pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ avec $i \neq j$ on note (ij) la transposition :

$$(ij) : \begin{cases} i \mapsto j \\ j \mapsto i \\ k \mapsto k, \forall k \neq i, j \end{cases}.$$

REMARQUE. Une transposition est une involution. C'est à dire que l'ordre d'une transposition est 2.

PROPOSITION 4.5

$\#S_n = n!$.

DÉFINITION 4.6 (Cycle)

On appelle *cycle* de longueur $r > 1$ (noté r -cycle) (dans S_n) une permutation ω telle qu'il existe $x_1, x_2, \dots, x_r \in \{1, 2, \dots, n\}$ vérifiant :

1. $\omega(x_1) = x_2, \omega^n(x_1) = x_{1+n}$ avec $n < r$;
2. $\omega(x_r) = x_1$;
3. $\omega(x) = x$ si $x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$.

NOTATION. On note un tel cycle : $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r)$.

REMARQUE. Les 2-cycles sont exactement les transpositions.

EXEMPLE. Dans S_3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3) = \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases}.$$

4.3 Décomposition des cycles

DÉFINITION 4.7 (Support)

On appelle *support* du cycle ω le sous-ensemble :

$$\{x_1, x_2, \dots, x_r\} \subset \{1, 2, \dots, n\}.$$

LEMME 4.8

Deux cycles de supports disjoints commutent.

DÉMONSTRATION

Soient :

$$\begin{cases} v = (x_1, x_2, \dots, x_r) \\ w = (y_1, y_2, \dots, y_s) \end{cases}$$

avec $\{x_1, x_2, \dots, x_r\} \cap \{y_1, y_2, \dots, y_s\} = \emptyset$.

Sur un élément extérieur du support la permutation agit comme l'identité donc deux supports disjoints impliquent que les permutations associées permutent (puisque que l'identité permute).

LEMME 4.9

Un r -cycle est d'ordre r .

DÉMONSTRATION

Soit $w = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r)$ un r -cycle. Il est clair qu'un élément du support est d'ordre r . Les autres restent fixés par w et donc w est d'ordre r .

PROPOSITION 4.10

Toute permutation de S_n est décomposable en produit de cycles de supports disjoints. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

EXEMPLES. Soit :

$$S_5 \ni \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = w.$$

On peut décomposer w :

$$(1 \ 3 \ 5)(2)(4) = (1 \ 3 \ 5).$$

$$S_8 \ni w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 7 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 5 \ 3)(2 \ 6 \ 8)(4 \ 7).$$

THÉORÈME 4.11

Le groupe symétrique est engendré par les transpositions.

DÉMONSTRATION

On procède par récurrence sur n .

1. $S_2 = \{1, (1 \ 2)\}$ est engendré par $(1 \ 2)$.
2. Soit $n > 2$, supposons que S_{n-1} est engendré par les transpositions de S_{n-1} . Soit $w \in S_n$:
 - (a) Soit $w(n) = n$ et alors on décompose w en cycles de tailles inférieures ou égales à S_{n-1} et c'est démontré.
 - (b) Soit $w(n) \neq n$. On pose $m = w(n)$ et soit $t = (n \ m)$. On pose $v = tw$ et alors $v(n) = n$ et on lui applique le cas précédent. On a alors par unicité de la décomposition que w est elle-même engendrée par des transpositions et c'est démontré.

THÉORÈME 4.12

On a les propositions suivantes :

1. Si $w \in S_n$ est une permutation qui s'écrit de deux façons différentes comme produit de transpositions :

$$w = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_{r'},$$

alors $(-1)^r = (-1)^{r'}$.

On appelle $(-1)^r$ la *signature* de w .

2. La signature est un morphisme de groupes de $S_n \rightarrow \{1, -1\} \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

DÉMONSTRATION

Soit $w \in S_n$. On pose :

$$\begin{aligned}\varepsilon(w) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{w(i) - w(j)}{i - j} \\ \varepsilon(w) &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (w(i) - w(j))}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (i - j)} \\ \varepsilon(w) &= \frac{N}{D}.\end{aligned}$$

Avec

$$N = \prod_{1 \leq i, j \leq n ; w^{-1}(i) < w^{-1}(j)} (i - j) = \pm D.$$

D'où :

$$\varepsilon(w) = \pm 1.$$

EXEMPLE. $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. On a :

$$\varepsilon(w) = \frac{(w(1) - w(2))(w(1) - w(3))(w(2) - w(3))}{(1 - 2)(1 - 3)(2 - 3)} = \frac{(2 - 3)(2 - 1)(3 - 1)}{(1 - 2)(1 - 3)(2 - 3)} = 1.$$

LEMME 4.13

On a :

1. $\varepsilon : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ est un morphisme de groupes ;
2. $\varepsilon(ij) = -1$ pour tout $i \neq j$.

DÉMONSTRATION (Théorème)

Si

$$w = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_{r'}$$

alors par le lemme :

$$\varepsilon(w) = (-1)^r = (-1)^{r'}.$$

DÉMONSTRATION (Lemme)

Soit $E = \{(ij) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. On pose :

$$f_w : \begin{cases} E \rightarrow E \\ (i \ j) \mapsto (w(i) \ w(j)) \text{ si } w(i) < w(j) . \\ (i \ j) \mapsto (w(j) \ w(i)) \text{ si } w(i) > w(j) \end{cases}$$

f est une bijection car elle est injective et l'ensemble de départ et d'arrivée ont le même cardinal qui est fini.

Donc on a :

$$\begin{aligned}\varepsilon(w) &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (w(i) - w(j))}{\prod_{(i,j) \in E} (w(i) - w(j))} \\ \varepsilon(w) &= \pm 1.\end{aligned}$$

Pour vérifier que ε est un morphisme, on calcul $\varepsilon(wv)$:

$$\begin{aligned}\varepsilon(wv) &= \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{i - j} \\ \varepsilon(wv) &= \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \prod_{(i,j) \in E} \frac{v(i) - v(j)}{i - j} \\ \varepsilon(wv) &= \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \varepsilon(v).\end{aligned}$$

On calcule :

$$\begin{aligned}\varepsilon(w) &\stackrel{?}{=} \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \\ \varepsilon(w) &= \prod_{(i,j) \in E_1} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \prod_{(i,j) \in E_2} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)}\end{aligned}$$

Où $E_1 = \{(i, j) \in E \mid v(i) < v(j)\}$ et $E_2 = \{(i, j) \in E \mid v(j) < v(i)\}$; $E = E_1 \amalg E_2$.

$$\begin{aligned}\varepsilon(w) &= \prod_{(i,j) \in E_2} \frac{wv(j) - wv(i)}{v(j) - v(i)} \prod_{(i,j) \in E_1} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \\ \varepsilon(w) &= \prod_{i < j ; v^{-1}(j) < v^{-1}(i)} \frac{w(i) - w(j)}{i - j} \prod_{i < j ; v^{-1}(i) < v^{-1}(j)} \frac{w(i) - w(j)}{i - j} \\ \varepsilon(w) &= \prod_{i < j} \frac{w(i) - w(j)}{i - j}\end{aligned}$$

Chapitre 2

Déterminants et réduction

1 DÉTERMINANTS

1.1 Différentes définitions

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ avec $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

DÉFINITION 1.1 (Déterminant)

On définit en premier lieu :

$$\det A = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) a_{w(1),1} \cdot a_{w(2),2} \cdot \dots \cdot a_{w(n),n}.$$

C'est la formule de CRAMER.

DÉFINITION 1.2

Une seconde définition possible :

Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, soit $A_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ la matrice (extraite) obtenue en enlevant la i -ième ligne et la j -ième colonne de A .

On a alors :

$$\det' A = a_{1,1} \cdot \det'(A_{1,1}) - a_{1,2} \cdot \det'(A_{1,2}) + \dots + (-1)^{n-1} a_{1,n} \cdot \det'(A_{1,n}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{1,i} \cdot \det'(A_{1,i})$$

EXEMPLE. Prenons :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; A_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne avec la seconde définition :

$$\det A = 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 2. On vérifie que les deux définitions coïncident :

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} - a_{2,1} a_{1,2}.$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}\det(a_{2,2}) - a_{1,2}\det(a_{2,1}) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.$$

REMARQUE. Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$ un n -uplet de vecteurs de E . Pour tout j , on pose :

$$u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \cdot e_i \quad a_{i,j} \in \mathbf{R}.$$

On appelle *déterminant* dans la base B de (u_1, \dots, u_n) le réel :

$$\det_B(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det(a_{i,j}).$$

EXEMPLE. Pour $n = 2$. On prend :

$$\begin{aligned} u_1 &= 2e_1 + 3e_2, \\ u_2 &= -e_1 + 6e_2. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\det_B(u_1, u_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 15.$$

REMARQUE. Si $u_j = e_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ alors $\det_B(e_1, \dots, e_n) = \det(I_d) = 1$.

PROPOSITION 1.3

On a les énoncés :

1. pour tout $w \in S_n$:

$$\det_B(u_{w(1)}, u_{w(2)}, \dots, u_{w(n)}) = \varepsilon(w) \det_B(u_1, u_2, \dots, u_n);$$

2. on en déduit que le déterminant change de signe si on échange deux colonnes ;
3. si pour $i \neq j$ on a $u_i = u_j$ alors le déterminant est nul (puisque négatif et positif simultanément).

DÉMONSTRATION

Il suffit de montrer le premier point.

On sait que S_n est engendré par les transpositions. On suppose donc que $w \in S_n$ est une transposition.

En fait, S_n est engendré par les transpositions simples, i.e. les transpositions de la forme $(k, k+1)$ avec $1 \leq k < n$. ^{1§}

On suppose donc que w est de la forme $(k, k+1)$. Soit A la matrice (u_1, u_2, \dots, u_n) de ces n vecteurs dans les coordonnées de la base B . Soit A' la matrice obtenue en permutant les colonnes k et $k+1$ de A . Il faut donc vérifier que :

$$\det A' = \varepsilon(w) \det A = -\det A.$$

On calcule à gauche et à droite :

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{1,j}), \\ \det A' &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a'_{1,j} \det(A'_{1,j}). \end{aligned}$$

- Pour $j \neq k, k+1$ on a $a'_{1,j} = a_{1,j}$ et $A'_{1,j}$ est obtenue en échangeant les colonnes k et $k+1$ de $A_{1,j}$
- Pour $j = k$ on a $a'_{1,k} = a_{1,k+1}$ et donc $A'_{1,k} = A_{1,k+1}$.
- Pour $j = k+1$ on a $a'_{1,k+1} = a_{1,k}$ et donc $A'_{1,k+1} = A_{1,k}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}\det A' &= \sum_{j \neq k, k+1} (-1)^{j+1} \det(A'_{i,j}) \textcolor{red}{2}\S + (-1)^{k+1} a'_{1,k} \det(A'_{1,k}) + (-1)^k a'_{1,k+1} \det(A'_{1,k+1}), \\ \det A' &= \sum_{j \neq k, k+1} (-1)^{j+1} (-\det(A_{i,j})) + (-1)^{k+1} a_{1,k+1} (-\det(A_{1,k+1})) + (-1)^k a_{1,k} (-\det(A_{1,k})), \\ \det A' &= -\det A.\end{aligned}$$

1.2 Formes n -linéaires alternées

DÉFINITION 1.4 (Forme n -linéaire)

Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Une forme n -linéaire sur E est une application $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{R}$ qui est linéaire sur chaque composante.

PROPOSITION 1.5

Soit B une base de E avec $\dim E = n$.

$$\det_B : \begin{cases} E^n \rightarrow \mathbf{R} \\ (u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_B(u_1, \dots, u_n) \end{cases}$$

est une forme n -linéaire.

DÉMONSTRATION

On pose :

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & aa'_{1,k} + ba''_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & aa'_{2,k} + ba''_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \\ A' &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a'_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a'_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \\ A'' &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a''_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a''_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On veut montrer :

$$\det A = a \det A' + b \det A''.$$

On calcule :

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{i,j}) + (-1)^{k+1} (aa'_{1,k} + ba''_{1,k}) \det(A_{1,k}), \\ \det A' &= \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A'_{i,j}) + (-1)^{k+1} a'_{1,k} \det(A_{1,k}), \\ \det A'' &= \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A''_{i,j}) + (-1)^{k+1} a''_{1,k} \det(A_{1,k})\end{aligned}$$

1§. En effet, toute transposition est un produit de transpositions simples par une conjugaison adaptée : on « renomme » les éléments.

2§. Par récurrence sur n on a $\det(A'_{i,j}) = -\det(A_{i,j})$.

On doit alors montrer :

$$\forall j \neq k, \det A_{i,j} = \text{adet}(A'_{i,j}) + \text{bdet}(A''_{i,j})$$

ce qui est démontré par hypothèse de récurrence.

DÉFINITION 1.6 (Forme n -linéaire alternée)

Soit $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{R}$ une forme n -linéaire alternée avec E un \mathbf{R} -espace vectoriel.

φ est une forme n -linéaire alternée si on a :

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$$

dès que deux composantes u_i, u_j avec $i \neq j$ coïncident.

REMARQUE. On en déduit que le déterminant dans une base donnée est une forme n -linéaire alternée.

PROPOSITION 1.7

Soit φ une forme n -linéaire alternée. Alors pour tout $w \in S_n$, $\varphi(u_{w(1)}, \dots, u_{w(n)}) = \varepsilon(w)\varphi(u_1, \dots, u_n)$.

DÉMONSTRATION

On peut supposer que w est une transposition simple : $w = (k, k+1)$ avec $1 \leq k < n$.

On veut montrer :

$$\varphi(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, u_k, u_{k+2}, \dots, u_n) = -\varphi(u_1, \dots, u_n).$$

Pour simplifier les notations, on oublie les indices u_i avec $i \neq k, k+1$. On a :

$$\varphi(u_k + u_{k+1}, u_k + u_{k+1}) = 0$$

et donc par linéarité :

$$\varphi(u_k, u_k) + \varphi(u_k, u_{k+1}) + \varphi(u_{k+1}, u_k) + \varphi(u_{k+1}, u_{k+1}) = 0 \iff \varphi(u_k, u_{k+1}) = -\varphi(u_{k+1}, u_k).$$

PROPOSITION 1.8

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{R}$ une forme n -linéaire alternée. Alors :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(u_1, \dots, u_n)\varphi(e_1, \dots, e_n)$$

où les u_i sont exprimés dans la base B .

REMARQUE. Toutes les formes n -linéaires alternées sont proportionnelles au déterminant.

DÉMONSTRATION

Soit $u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i$, les $a_{i,j}$ sont les coordonnées des u_j dans la base B .

On a :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n a_{i,1}e_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,n}e_i\right).$$

Comme φ est n -linéaire alternée :

$$\begin{aligned}\varphi(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{w \in S_n} a_{w(1),1} a_{w(2),2} \dots a_{w(n),n} \varphi(e_{w(1)}, \dots, e_{w(n)}) \\ \varphi(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{w \in S_n} a_{w(1),1} a_{w(2),2} \dots a_{w(n),n} \varepsilon(w) \varphi(e_1, \dots, e_n) \\ \varphi(u_1, \dots, u_n) &= \det_B(u_1, \dots, u_n) \varphi(e_1, \dots, e_n)\end{aligned}$$

REMARQUES. On a démontré :

1. Pour une base B choisie, le déterminant \det_B est une forme n -linéaire alternée ;
2. pour toute forme n -linéaire alternée, φ , on a : $\varphi(\cdot) = \det_B(\cdot) \varphi(B)$;
3. en particulier, les deux déterminants coïncident.

PROPOSITION 1.9

Pour tout $A \in M_n(\mathbf{R})$ on a :

$$\det(A) = \det(A^t).$$

DÉMONSTRATION

On a :

$$\begin{aligned}A &= (a_{i,j}) \\ A^t &= (b_{i,j}), \quad b_{i,j} = a_{j,i}\end{aligned}$$

On calcule par la formule de CRAMER :

$$\begin{aligned}\det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^n b_{w(i),i}, \\ \det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^n a_{i,w(i)}.\end{aligned}$$

Pour w fixé, dans i décrit 1 à n alors $w(i)$ décrit également 1 à n . On effectue un changement de variable $j = w(i)$ et alors $i = w^{-1}(j)$ et on a :

$$\begin{aligned}\det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{j=1}^n a_{w^{-1}(j),j}, \\ \det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w^{-1}) \prod_{j=1}^n a_{w(j),j}, \\ \det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{j=1}^n a_{w(j),j}, \\ \det(A^t) &= \det(A).\end{aligned}$$

REMARQUE. On peut calculer $\det(A)$ en développant par rapport à la première ligne ou la première colonne (au choix). On a alors :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^n a_{i,1} \det(A_{i,1}).$$

PROPOSITION 1.10

Si $A \in M_n(\mathbf{R})$ est triangulaire alors :

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

DÉMONSTRATION

Supposons A triangulaire supérieure, c'est-à-dire $a_{i,j} = 0$ si $i > j$.

Par la formule de CRAMER :

$$\det(A) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^n a_{i,w(i)}.$$

Or les seuls w qui contribuent à cette somme sont ceux tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, i \leq w(i),$$

c'est-à-dire : $w = \text{id}$ ^{3§}.

En développant par rapport à une ligne (ou une colonne quelconque) :

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{j,i} \det(A_{j,i}).$$

Si A' désigne la matrice obtenue en permutant les lignes de A par $w = (1 \ 2 \ \dots \ j)$:

$$\det(A') = \varepsilon(w) \det(A) = (-1)^{j+1} \det(A).$$

On note $A' = (a'_{k,l})_{k,l \in \{1, \dots, n\}}$.

En choisissant $j > 1$:

$$\begin{aligned} \det(A') &\stackrel{4§}{=} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a'_{1,i} \det(A'_{1,i}), \\ \det(A') &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{j,i} \det(A_{j,i}); \\ \det(A) &= (-1)^{j+1} \det(A'), \\ \det(A) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{j+i} a_{j,i} \det(A_{j,i}). \end{aligned}$$

2 DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

2.1 Invariance par changement de base

PROPOSITION 2.1

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et

^{3§}. Soit $w \in S_n$, $w : \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \dots, n\}$.

Si $i \leq w(i)$ pour tout i alors $w(k) = k$ pour tout k par récurrence descendante sur k :

- $n \leq w(n)$ et donc $w(n) = n$;
- $k-1 \leq w(k-1)$ et donc $w(k-1) = w(k)$.

^{4§}. En développant par rapport à la première ligne.

$C = (u_1, \dots, u_n)$ un système de n vecteurs de E . Alors C est une base de E si, et seulement si :

$$\det_B(C) \neq 0.$$

DÉMONSTRATION

Supposons que C est une base de E .

On a vu que si $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{K}$ est une forme n -linéaire alternée alors :

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n, \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det_B(u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \varphi(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

On applique cette formule avec $\varphi = \det_C$ et on a :

$$\begin{aligned} \det_C(u_1, u_2, \dots, u_n) &= \det_B(C) \det_C(B), \\ 1 &= \det_C(C) = \det_B(C) \det_C(B), \end{aligned}$$

et donc $\det_B(C) \neq 0$.

Supposons maintenant que C est liée. Il existe alors i tel que u_i est combinaison linéaire des u_j avec $j \neq i$. Par exemple :

$$u_i = \sum_{j \neq i} a_j \cdot u_j, \quad (a_j \in \mathbf{R})$$

$$\det_B(C) = \det_B(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, \sum_{j \neq i} a_j \cdot u_j, u_{i+1}, \dots, u_n),$$

$$\det_B(C) = \sum_{j \neq i} a_j \det_B(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_n),$$

or \det_B est alternée et comme u_j apparaît deux fois dans la dernière expression, on a

$$\det_B(C) = 0.$$

PROPOSITION 2.2

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , $B = (e_1, \dots, e_n)$, $C = (u_1, \dots, u_n)$ deux bases de E et f un endomorphisme de E . Alors :

$$\det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_C(f(u_1), \dots, f(u_n)).$$

REMARQUE. En d'autres termes, $\det_B(f(B))$ ne dépend pas du choix de la base B . On l'appelle $\det(f)$.

DÉMONSTRATION

On utilise la formule :

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n, \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det_B(u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \varphi(e_1, e_2, \dots, e_n),$$

où φ est une forme n -linéaire alternée.

On pose :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$$

et on a alors :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det_C(f(u_1), \dots, f(u_n)) \det_B(C).$$

De même :

$$\det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det_B(C) \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Et donc :

$$\det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) \det_B(C) = \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)) \det_B(C)$$

et $\det_B(C) \neq 0$. Donc l'égalité voulue est obtenue.

PROPOSITION 2.3

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , f et g deux endomorphismes de E .

Alors :

$$\det(fg) = \det(f)\det(g).$$

DÉMONSTRATION

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ,

$$\det(fg) = \det_B(fg(e_1), \dots, fg(e_n)).$$

Considérons la forme n -linéaire alternée φ telle que :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(g(u_1), \dots, g(u_n)),$$

alors on a :

$$\begin{aligned} \varphi(f(u_1), \dots, f(u_n)) &= \det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) \varphi(e_1, \dots, e_n), \\ \det_B(gf(e_1), \dots, gf(e_n)) &= \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)) \det_B(g(e_1), \dots, g(e_n)), \\ \det(gf) &= \det(g) \det(f). \end{aligned}$$

REMARQUE. Si $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ alors

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

3 DIAGONALISATION

DÉFINITION 3.1

Une matrice A est *diagonalisable* si elle est conjugué par un isomorphisme à une matrice diagonale.

3.1 Valeur propre et vecteur propre

Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n . Soit f un endomorphisme de E .

DÉFINITION 3.2

On appelle *valeur propre* de f un réel λ tel qu'il existe un $v \in E - \{0\}$ tel que $f(v) = \lambda \cdot v$.

On dit que v est un *vecteur propre* de valeur propre λ .

Quitte à prendre la matrice A de f dans une base (e_1, \dots, e_n) fixée de E , λ est une valeur de f (ou de A) si, et seulement si

$$\det(A - \lambda I_d) = 0.$$

REMARQUE. Soient $A \in M_n(\mathbf{R})$, B la base canonique et $C = AB$. $\det(A)$ est non nul si, et seulement si, A est inversible. D'autre part s'il existe un vecteur propre v de valeur propre λ alors

$$\ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\}.$$

Or $f - \lambda I_d$ est un endomorphisme de E et E est de dimension finie. Donc il y a équivalence :

$$\ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I_d) = 0.$$

DÉFINITION 3.3

On appelle polynôme caractéristique de f (ou de A) le polynôme :

$$\chi_f(t) = \chi_A(t) = \det(A - tI_d).$$

EXEMPLE. En dimension 2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a

$$\chi_A(t) = t^2 - (a + d)t + ad - bc = t^2 - \operatorname{tr}(A)t + \det(A).$$

REMARQUE. $\chi_A(t)$ est un polynôme de degré n de coefficient dominant $(-1)^n$ et de terme constant $\chi_A(0) = \det(A)$.

3.2 Sous-espaces propres

DÉFINITION 3.4

Soit f un endomorphisme de E et de matrice A . Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On appelle *sous-espace propre* de f (ou de A) de valeur propre λ le sous-espace vectoriel $\ker(f - \lambda I_d)$.

PROPOSITION 3.5

Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors si $\lambda \neq \mu$ on a

$$\ker(f - \lambda I_d) \cap \ker(f - \mu I_d) = \{0\}.$$

Plus généralement si, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$ distincts alors on a :

$$\sum_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i I_d) = \bigoplus_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i I_d)$$

DÉMONSTRATION

Il s'agit de vérifier que pour tout $i \neq j$ on a :

$$\ker(f - \lambda_i I_d) \cap \ker(f - \lambda_j I_d) = \{0\}.$$

Si $v \in \ker(f - \lambda_i I_d) \cap \ker(f - \lambda_j I_d)$ alors :

$$f(v) = \lambda_i v = \lambda_j v \implies v = 0.$$

COROLLAIRE 3.6

Soient $\dim E = n$, f est un endomorphisme de E , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ valeurs propres de f et E_i le sous-espace associé à la valeur propre λ_i . Alors si

$$E = \bigoplus_{i=1}^k E_i,$$

l'endomorphisme f est diagonalisable.

DÉMONSTRATION

Si on fait la réunion :

$$B = \bigcup_{i=1}^k B_i,$$

où B_i est une base de E_i on obtient une base de E . Dans cette base la matrice de f est diagonale où l'élément diagonal λ_i est la valeur propre correspondante. La matrice de passage de la base canonique à la base B donne la diagonalisabilité.

Donc pour diagonaliser A il faut vérifier si $E = \bigoplus_{i=1}^k E_i$ où les E_i sont les sous-espaces propres.

EXEMPLE. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 1 & 4-\lambda & -5 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)((4-\lambda)(-2-\lambda) + 10) - (2(-2-\lambda) + 6),$$

$$\chi_A(t) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2).$$

Les trois valeurs propres sont 0, 1, 2 et sont de multiplicité 1.

$$E_0 = \ker(A) = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \mid Ax = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_1 = \ker(A - I_d) = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_2 = \ker(A - 2I_d) = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

On a l'égalité :

$$E_0 \oplus E_1 \oplus E_2 = \mathbf{R}^3.$$

On en déduit les matrices de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.3 Conditions de diagonalisabilité

PROPOSITION 3.7

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E , $\chi_f(t) \in \mathbf{R}[t]$, $\deg \chi_f = n$.

Si χ_f admet n racines distinctes alors f est diagonalisable.

DÉMONSTRATION

Si :

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - t)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ racines distinctes. On a alors que pour tout i :

$$E_i = \ker(f - \lambda_i \text{id}) \neq \{0\}$$

et donc $\dim E_i \geq 1$. On a alors que

$$\sum_{i=1}^n \dim E_i = \dim \bigoplus_{i=1}^n E_i$$

est de dimension supérieure à n ce qui implique $\bigoplus E_i = \mathbf{R}^n$.

REMARQUE. La condition donnée est nécessaire mais non suffisante. On cherche donc une condition nécessaire et suffisante.

PROPOSITION 3.8

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E , λ une valeur propre de f , m_λ la multiplicité de λ en tant que racine de $\chi_f(t)$ et E_λ le sous-espace propre associé à λ .

Alors $\dim E_\lambda \leq m_\lambda$.

DÉMONSTRATION

Soit $k = \dim E_\lambda$ et (e_1, e_2, \dots, e_k) une base de E_λ . On peut compléter (e_1, \dots, e_k) en une base $(e_1, \dots, e_n) = B$ de E .

$$\text{Mat}_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_d & X \\ \hline 0 & A \end{array} \right).$$

Or le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des matrices diagonales. ^{5§}

Ainsi :

$$\chi_f(t) = \det \left(\begin{array}{c|c} (\lambda - t)I_d & X \\ \hline 0 & A - tI_d \end{array} \right) = (\lambda - t)^k \chi_A(t)$$

et donc $m_\lambda \geq k$.

COROLLAIRE 3.9

On a les propositions suivantes :

1. Si $\chi_f(t)$ n'est pas scindé sur \mathbf{R} alors f n'est pas diagonalisable.
2. S'il existe une valeur propre λ de f telle que $\dim E_\lambda < m_\lambda$ alors f n'est pas diagonalisable.

DÉMONSTRATION

On démontre :

^{5§}. En effet, en utilisant la règle de CRAMER la preuve est assez aisée.

2. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de $\chi_f(t)$, m_i la multiplicité de λ_i et E_i l'espace propre associé à λ_i . Alors la proposition nous dit que $\dim E_i \leq m_i$.

Or $\deg \chi_f(t) = n$ et donc

$$\sum_{i=1}^k m_i \leq n$$

$$\sum_{i=1}^k \dim E_i \leq \sum_{i=1}^k m_i \leq n$$

S'il existe i_0 tel que $\dim E_{i_0} < m_{i_0}$ alors cela implique

$$\sum_{i=1}^k \dim E_i < \sum_{i=1}^k m_i \leq n.$$

Et donc

$$\bigoplus_{i=1}^n E_i < n.$$

1. Idem.

THÉORÈME 3.10

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E .

f est diagonalisable si, et seulement si, on a les conditions suivantes :

1. $\chi_f(t)$ est scindé sur \mathbf{R} ;
2. pour tout $\lambda \in \chi_f^{-1}(0)$, la dimension du $\ker(f - \lambda \text{id})$ est égal à la multiplicité de λ dans $\chi_f(t)$.

DÉMONSTRATION

Le corollaire nous dit que ces conditions sont nécessaires.

Remarquons que :

$$\sum_{i=1}^r E_i = \bigoplus_{i=1}^r E_i$$

où E_i est le sous-espace propre de λ_i et r le nombre de racines deux à deux distinctes. Or la dimension de la somme est la somme des dimensions, c'est-à-dire la somme des multiplicité qui est égale à n . Donc f est diagonalisable.

EXEMPLE. On prend

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & -1 \\ -1 & 2-t & -1 \\ -1 & 1 & -t \end{pmatrix},$$

$$\chi_A(t) = -t(t-1)^2.$$

Les racines sont 0, 1 de multiplicités respectives 1 et 2. On a :

$$E_0 = \ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_1 = \ker A - \text{id} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

On a

$$\dim E_0 = 1 \text{ et } \dim E_1 = 2$$

et donc f est diagonalisable.

CONTRE-EXEMPLE DE MINIMALITÉ. On a que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'a comme valeurs propres que 0, elle n'est pas diagonalisable parce que si elle est nulle dans une base elle l'est dans toutes.

4 POLYNÔMES EN UN ENDOMORPHISME DE E

4.1 Polynômes évalué en un endomorphisme

DÉFINITION 4.1

Soit $P \in \mathbf{R}[t]$ un polynôme :

$$P(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^k.$$

On note pour f un endomorphisme de E :

$$P(f) = \sum_{k=0}^d a_k f^k \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E).$$

Avec la convention $f^0 = \text{id}$ et la notation $f^{k+1} = f \circ f^k$.

DÉFINITION 4.2

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbf{R}[t]$ annule f si $P(f) = 0_{\text{End}_{\mathbf{R}}}$.

PROPOSITION 4.3

On a que :

$$\phi: \begin{cases} \mathbf{R}[t] \rightarrow \text{End}_{\mathbf{R}}(E) \\ P(t) \mapsto P(f) \end{cases}$$

est un morphisme d'anneaux.

C'est-à-dire :

$$\forall P, Q \in \mathbf{R}[t], \phi(P + Q) = \phi(P) + \phi(Q) ; \phi(PQ) = \phi(P)\phi(Q).$$

REMARQUE. Ainsi l'ensemble des polynômes annulateurs de f est un idéal de $\mathbf{R}[t]$. Or $\mathbf{R}[t]$ est un anneau principal donc l'ensemble des polynômes annulateurs de f est principal. Il existe donc un polynôme $Q \in \mathbf{R}[t]$ tel que tout polynôme annulateur de f s'écrit RQ avec $R \in \mathbf{R}[t]$.

DÉFINITION 4.4

On appelle polynôme minimal de f le polynôme unitaire de plus petit degré, m_f annulant f .

On a évidemment que tout polynôme annulateur de f est de la forme $P \cdot m_f$, $P \in \mathbf{R}[t]$.

EXEMPLE. Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice nilpotente, c'est-à-dire $A^3 = 0$. On a

$$m_A(t) \mid t^3 \implies m_A = 1, t, t^2 \text{ ou } t^3.$$

Or $(t \mapsto 1)(A) = \text{id} \neq 0$, $(t \mapsto t)(A) = A \neq 0$ et $(t \mapsto t^2)(A) = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et donc $m_A(t) = t^3$.

PROPOSITION 4.5

Soit $f \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E)$. Alors :

1. si f est diagonalisable, alors il existe un polynôme scindé $P \in \mathbf{R}[t]$ annulant f ayant que des racines simples ;
2. si $P \in \mathbf{R}[t]$ annule f alors toute valeur propre de f est racine de P .

DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres. Soient μ_1, \dots, μ_r des scalaires deux à deux distinctes tels que

$$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

avec $r \leq n$.

On pose :

$$P(t) = \prod_{i=1}^r (t - \mu_i).$$

On cherche à savoir si $P(f) = 0$.

$$P(f) = 0 \iff P(f)(e_j) = 0, \forall j,$$

$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{i=1}^r (f - \mu_i \text{id}) \right) (e_j),$$

$$f(e_j) = \lambda_j e_j \implies \exists i, \mu_i = \lambda_i.$$

Or pour tous k, l :

$$(f - \mu_k \text{id})(f - \mu_l \text{id}) = (f - \mu_l \text{id})(f - \mu_k \text{id})$$

et donc :

$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{k \neq i} (f - \mu_k \text{id}) \right) (f - \mu_i \text{id})(e_j),$$

$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{k \neq i} (f - \mu_k \text{id}) \right) (f(e_j) - \mu_i e_j) = 0.$$

2. On suppose que $P(f) = 0$ et $\chi_f(\lambda) = 0$ avec $P \in \mathbf{R}[t]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.
Soit $v \in \ker(f - \lambda \text{id})$, $v \neq 0$, alors :

$$P(f)(v) = \sum_{k=1}^d a_k f^k(v),$$

$$P(f)(v) = \sum_{k=1}^d a_k \lambda^k v.$$

Donc $P(\lambda) \cdot v = 0$ et comme $v \neq 0$: $P(\lambda) = 0$.

4.2 Lemme des noyaux

PROPOSITION 4.6 (Théorème des noyaux)

Soit $f \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E)$.

1. Soit $P \in \mathbf{R}[t]$ de la forme $P = ST$ avec $S, T \in \mathbf{R}[t]$ avec S et T premiers entre eux.

Alors si $P(f) = 0$ alors

$$E = \ker(S(f)) \oplus \ker(T(f)).$$

2. Soit $P \in \mathbf{R}[t]$, $P = P_1 P_2 \dots P_k$ avec $P_i \in \mathbf{R}[t]$ premiers entre eux deux à deux.

Alors si $P(f) = 0$ alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^k \ker P_i(f).$$

THÉORÈME 4.7

$f \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E)$ avec $\dim E = n$.

Supposons qu'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ est un polynôme scindé avec des racines simples. Alors $P(f) = 0$ implique que f est diagonalisable.

REMARQUE. C'est équivalent à $m_f(t)$ scindé avec des racines simples. En effet si P est scindé avec des racines simples et qui annulent f alors m_f divise P et donc m_f est scindé avec des racines simples.

DÉMONSTRATION

Soit :

$$P(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_k)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ réels distincts. Ainsi $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$ sont premiers entre eux pour tous $i \neq j$.

Ainsi d'après le théorème des noyaux :

$$E = \bigoplus_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i \text{id}).$$

| Donc f est diagonalisable.

COROLLAIRE 4.8

| Soit $f \in \text{End}(E)$. f est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal m_f est scindé avec des racines simples.

DÉMONSTRATION

| Le sens d'implication a déjà été fait, l'autre sens est donné par le théorème précédent.

4.3 Trigonalisation

DÉFINITION 4.9

| On dit que $f \in \text{End}(E)$ est *trigonalisable* s'il existe une base B de E telle que la matrice en base B de f est triangulaire supérieure.

| De même, une matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ est trigonalisable si elle est conjuguée à une matrice triangulaire supérieure, i.e. s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est trigonalisable.

PROPOSITION 4.10

| Soit $f \in \text{End}(E)$.

| χ_f est scindé dans $\mathbf{R}[X]$ si, et seulement si, f trigonalisable.

REMARQUE. On peut remplacer partout \mathbf{R} par $\mathbf{K} = \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ et E par un \mathbf{K} -espace vectoriel. Si E est un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension finie et si $f \in \text{End}_{\mathbf{C}}(E)$ alors la proposition assure la trigonalisation de f (et ainsi de tout endomorphisme).

DÉMONSTRATION

| Si f est trigonalisable, alors il existe une base B telle que la matrice, $(a_{i,j})$ de f soit trigonale supérieure dans cette base. Alors le polynôme caractéristique (qui est indépendant de la base) est exactement : $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - t)$. Ce polynôme est bien scindé.

| Pour la réciproque on effectue une récurrence sur $n = \dim E$. On suppose que c'est vrai pour tout espace vectoriel de dimension strictement inférieure à n :

$$\chi_f(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \dots (\lambda_n - t)$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$.

λ_1 est une valeur propre. Il existe par hypothèse $v_1 \in E$ un vecteur propre tel que $v_1 \neq 0$ et $f(v_1) = \lambda_1 v_1$. Par le théorème de la base incomplète, il existe une base B de la forme $B = (v_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$. Soit A la matrice de f dans la base B . On a :

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & \star & \star & \dots \\ 0 & & & \\ 0 & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Avec $B \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ qui peut être la matrice d'un endomorphisme de \mathbf{R}^{n-1} .

$$\chi_A(t) = \det \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 - t & \star \\ 0 & B - tI_d \end{array} \right),$$

$$\chi_A(t) = (\lambda_1 - t)\chi_B(t),$$

$$\chi_A(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \dots (\lambda_n - t).$$

et donc $\chi_B(t) = (\lambda_2 - t) \dots (\lambda_n - t)$ est scindé.

Par récurrence, il existe $Q \in \text{GL}_{n-1}(\mathbf{R})$ tel que $Q^{-1}BQ$ soit triangulaire supérieure. Posons :

$$P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{array} \right), \quad P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{array} \right).$$

| On a alors que $P^{-1}AP$ est triangulaire.

4.4 Comment calculer m_f ? (CAYLEY-HAMILTON)

THÉORÈME 4.11 (CAYLEY-HAMILTON)

Soit $f \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E)$. On a que m_f divise χ_f , c'est-à-dire : $\chi_f(f) = 0$.

DÉMONSTRATION

On veut montrer que $\chi_A(A) = 0$ où $A \in M_n(\mathbf{R})$. Puisque $M_n(\mathbf{R}) \subset M_n(\mathbf{C})$ on peut se placer dans se dernier.

On sait alors que A est trigonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ tel que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.

Or pour tout k : $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$. Donc :

$$\chi_A(P^{-1}AP) = P^{-1}\chi_A(A)P.$$

Comme P est inversible, $\chi_A(0)$ si, et seulement si, $\chi_A(P^{-1}AP) = 0$. Posons $A' = P^{-1}AP$. On a $\chi_{A'} = \chi_A$.

$$\begin{aligned} T &= (\lambda_n I_d - A')(\lambda_{n-1} I_d - A') \dots (\lambda_1 I_d - A') \\ T(v_1) &= \left(\prod_{i=2}^n (\lambda_i I_d - A') \right) (\lambda_1 I_d - A')(v_1) = 0 \\ T(v_2) &= \left(\prod_{i=3}^n (\lambda_i I_d - A') \right) (\lambda_2 I_d - A')(\lambda_1 I_d - A')(v_2) \\ &= (\lambda_2 I_d - A')(\lambda_1 I_d - A')(v_2) = (\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) \\ &= (\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) = (\lambda_1 I_d - A')(-a'_{1,2} v_1) \\ &= (\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) = -a'_{1,2} (\lambda_1 I_d - A')(v_1) \\ &= (\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) = -a'_{1,2} (\lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_1) = 0 \end{aligned}$$

Par récurrence on trouve $T(v_i) = 0$ pour tout i .

EXERCICE. Calculer $T(v_3)$.

REMARQUE. À noter :

1. Étant donné $f \in \text{End}(E)$, pour calculer m_f on cherche le plus petit diviseur de χ_f qui annule f .
2. Soit $f \in \text{End}(E)$. Supposons que f est inversible, alors $\det(f) \neq 0$, i.e. $\chi_f(0) \neq 0$. Soit $\chi_f(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$, a_0 est donc non nul. On a :

$$0 = a_0^{-1} \chi_f(f) = (-1)^n a_0^{-1} f^n + \dots + a_1 a_0^{-1} f + I_d$$

ce qui donne :

$$I_d = f \left((-1)^{n+1} a_0^{-1} f^{n-1} + \dots + (-1) a_1 a_0^{-1} I_d \right).$$

EXEMPLE. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\chi_A(t) = -t(t-1)^2$$

on en déduit :

$$t(t-1) \mid m_A(t) \mid t(t-1)^2.$$

Donc soit $m_A(t) = t(t-1)$ soit $m_A(t) = t(t-1)^2$. Dans le premier cas si $m_A(A) = 0$ alors A est diagonalisable. Dans le second, A est non diagonalisable.

$$A(A - I_d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5 APPLICATIONS

5.1 Calculs de puissances

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$, si A est diagonalisable alors :

$$A = PA'P^{-1}$$

où P est inversible et A' diagonale. Et donc pour tout k :

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \lambda_2^k & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

De même, si

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

alors

$$\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & e^{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

5.2 Systèmes différentiels

Soient $x_1, x_2, x_3 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et le système différentiel :

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ x'_2 = x_1 + 4x_2 - 5x_3 \\ x'_3 = 2x_2 - 2x_3 \end{cases}.$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. On a :

$$X' = AX.$$

A a pour vecteurs propres :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de valeurs propres respectives :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2.$$

De matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$X' = AX \iff P^{-1}X' = P^{-1}APP^{-1}X \iff Y' = BY$$

$$Y' = BY \iff \begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = 2y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = c_1 \\ y_2 = c_2 e^t \\ y_3 = c_3 e^{2t} \end{cases}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} X &= PY, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 e^t \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t} \\ c_1 + 3c_2 e^t + 2c_3 e^{2t} \\ c_1 + 2c_2 e^t + c_3 e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.3 Application aux suites récurrentes

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On introduit une seconde suite v_n telle que $v_n = u_{n+1}$ pour tout n . La relation de récurrence s'écrit alors :

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

si on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a alors que la relation de récurrence est

$$X_{n+1} = AX_n.$$

On diagonalise A :

$$\chi_A(t) = t^2 - t - 1 \iff t \in \left\{ r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

On a :

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}$. On pose $Y_n = P_1 X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$:

$$X_{n+1} = AX_n \iff Y_{n+1} = A'Y_n.$$

On en déduit :

$$Y_n = \begin{pmatrix} c_1 r_1^n \\ c_2 r_2^n \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 r_1^n \\ c_2 r_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 r_1^n \\ c_2 r_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \\ c_1 r_1^{n+1} + c_2 r_2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi u_n est de la forme :

$$u_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Deuxième partie

Analyse

Table des matières

3	Développements limités	33
1	Fonctions négligeables et équivalentes	33
1.1	Négligeable	33
1.2	Équivalence	34
2	Dérivées successives et formules de TAYLOR	36
2.1	Formules de TAYLOR	37
2.2	Fonctions usuelles	38
3	Développement limité à l'ordre n d'une fonction de classe C^n	39
3.1	Développements limités	39
3.2	Développements limités et primitives	41
3.3	Développement limités usuels	43
4	Calculs avec les développements limités	45
4.1	Règles de calcul des développements limités	45
4.2	Développement limité d'une fonction composée	47
5	Applications	50
5.1	Calculs de limites	50
5.2	Courbes paramétrées	52
5.3	Étude de fonctions	56
5.3.1	Étude locale	56
5.3.2	Branches infinies	59
5.3.3	Étude de fonction	61
4	Courbes et surfaces paramétrées	63
1	Définitions	63
2	Tangentes	63
3	Branches infinies	65
4	Étude de courbes paramétrées	66
5	Séries numériques	68
1	Définitions	68
2	Opérations sur les séries	71
3	Critères de convergence	73
3.1	Convergence des séries à terme positif	73
3.2	Séries de RIEMANN	74

3.3	Convergence absolue	75
3.4	Comparaison avec des séries géométriques	77
3.5	Règle de CAUCHY	77
3.6	Comparaison avec des intégrales	79
3.7	Séries alternées	80
3.8	Application des développements limités à la convergence	81
4	Transformation d'ABEL	82
6	Intégrales	84
1	Fonctions étagées	84
2	Fonctions intégrables	85
2.1	Critère d'intégrabilité	85
2.2	Propriétés de l'intégrale	86

Chapitre 3

Développements limités

1 FONCTIONS NÉGLIGEABLES ET ÉQUIVALENTES

On considère des fonctions f, g de V dans \mathbf{R} où V est un voisinage épointé dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. C'est-à-dire que V est de la forme $U - \{a\}$ où U est un voisinage de a dans $\overline{\mathbf{R}}$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

- si $a = \infty$ alors $V \supset \{k, \infty\}$;
 - si $a \in \mathbf{R}$ alors $V \supset]k, a[\cup]a, l[$ avec $k < a < l$ et $k, l \in \mathbf{R}$.
- f, g sont définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

1.1 Négligeable

DÉFINITION 1.1

On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a s'il existe un voisinage V tel qu'il existe une fonction $\varepsilon : V \rightarrow \mathbf{R}$ telle que :

- $f = \varepsilon \cdot g$;
- $\lim_a \varepsilon = 0$.

On note $f \underset{(a)}{=} o(g)$.

REMARQUE. On note :

$$\varepsilon f : \begin{cases} V \rightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \varepsilon(t)f(t) \end{cases}.$$

EXEMPLES. Par exemple :

1. Si $g = 1$ alors $f = o(1)$ si, et seulement si, $\lim_a f = 0$.
2. Si $f = 0$ au voisinage de a alors pour toute fonction $g : f = o(g)$.
3. Si f est bornée et $\lim_a(g) = \infty$ alors $f = o(g)$ (on prend alors $\varepsilon = f/g$).
4. On a $x^m \underset{(\infty)}{=} o(x^n)$ si, et seulement si, $m < n$.
5. Pour tous $\alpha, \beta > 0$:

$$\begin{cases} x^\alpha \underset{\infty}{=} o(e^{\beta x}) \\ (\ln x)^\alpha \underset{(\infty)}{=} o(x^\beta) \end{cases},$$

car $\lim_{\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$.

PROPOSITION 1.2

Si f/g est définie dans un voisinage de a , alors :

$$f \underset{(a)}{=} o(g) \iff \lim_a (f/g) = 0.$$

DÉMONSTRATION

On prend $\varepsilon = f/g$.

REMARQUE. Il peut arriver que f/g n'est pas défini dans aucun voisinage de a .

EXEMPLES. Contre-exemples :

1. Avec $g(t) = \sin(1/[t - a])$, pour tout voisinage de V de a , $g(t)$ s'annule en un point de V .
2. Même si le quotient n'est pas définit : $t \underset{(0)}{=} o(\sin(1/t))$.

PROPOSITION 1.3

On a au voisinage de a :

1. la propriété o est transitive ;
2. la propriété o est compatible avec la multiplication, i.e. : si $f = o(g)$ alors $fh = o(gh)$;
3. si $f = o(g)$ et si $h = o(k)$ alors $fh = o(gk)$.

DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. Pour $f = \varepsilon_1 g$ et $g = \varepsilon_2 h$ avec $\lim_a \varepsilon_i = 0$ alors : $f = \varepsilon_1 \varepsilon_2 h$ et $\lim_a \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0$.
2. Si $f = \varepsilon g$, $\lim_a \varepsilon = 0$, alors $fh = \varepsilon gh$.
3. De même.

CONTRE-EXEMPLE. o n'est pas compatible avec l'addition. Par exemple : $x \underset{(\infty)}{=} o(x^3)$ et $x^2 \underset{(\infty)}{=} o(-x^3)$ n'entraîne pas $x + x^2 \underset{(\infty)}{=} o(0)$.

1.2 Équivalence

DÉFINITION 1.4

On dit que f est *équivalence* à g au voisinage de a si : $f - g \underset{(a)}{=} o(g)$. On note $f \underset{(a)}{\sim} g$.

PROPOSITION 1.5

Si f/g est définie dans un voisinage de a alors :

$$f \underset{(a)}{\sim} g \iff \lim_a f/g = 1.$$

PROPOSITION 1.6

$\underset{(a)}{\sim}$ est une relation d'équivalence.

DÉMONSTRATION

Par définition :

1. elle est réflexive : $f \underset{(a)}{\sim} f$ puisque $0 \underset{(a)}{=} o(f)$;
2. elle est symétrique si $f \underset{(a)}{\sim} g$ alors il existe ε telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ et $f = (1 + \varepsilon)g$, or $1/(1 + \varepsilon)$ est aussi définie au voisinage de a et puisque $g = (1/[1 + \varepsilon])f$ on a

$$g = (1 + (1/[1 + \varepsilon] - 1))f$$

or en posant $\varepsilon' = [1 + \varepsilon] - 1$ on a $\lim_a \varepsilon' = 0$;

3. elle est transitive : $f \underset{(a)}{\sim} g$ et $g \underset{(a)}{\sim} h$ implique qu'il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ telles que $f = (1 + \varepsilon_1)g$, $g = (1 + \varepsilon_2)h$ et donc $f = (1 + \varepsilon)h$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$ et $\lim_a \varepsilon = 0$.

PROPOSITION 1.7

Si $f \underset{(a)}{\sim} g$ et si $\lim_a f$ existe alors $\lim_a g$ existe et $\lim_a g = \lim_a f$.

DÉMONSTRATION

Soit ε telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ alors puisque $f = (1 + \varepsilon)g$ on a

$$\lim_a f = \lim_a (1 + \varepsilon)g = \lim_a g.$$

PROPOSITION 1.8

Le produit et le quotient (quand il est défini) d'équivalences est une équivalence.

Une puissance entière d'équivalences est une équivalence.

DÉMONSTRATION

Si $f = (1 + \varepsilon_1)g$ et $h = (1 + \varepsilon_2)k$ alors $fh = (1 + \varepsilon)gk$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$.

PROPOSITION 1.9

Si $f \underset{(a)}{\sim} g$ et si $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\lim_b \varphi = a$, $b \in I$. Alors

$$f \circ \varphi \underset{(a)}{\sim} g \circ \varphi.$$

DÉMONSTRATION

Si $f = (1 + \varepsilon)g$ avec $\lim_a \varepsilon = 0$. Alors

$$f \circ \varphi = (1 + \varepsilon') \cdot g \circ \varphi$$

avec $\varepsilon' = \varepsilon \circ \varphi$ et $\lim_a \varepsilon' = 0$.

PROPOSITION 1.10

On a :

1. Si f est dérivable en a alors si $f'(a) \neq 0$ on a $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a)$.
2. Si g est continue dans un voisinage épointé de a , alors si $f \underset{(a)}{\sim} g > 0$ alors

$$\int_a^x f(t) dt \underset{(a)}{\sim} \int_a^x g(t) dt.$$

DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. Si f est dérivable en a alors :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{(a)}{\sim} f'(a)$$

puisque si $\lim_a g = b \in \mathbf{R}^*$ alors $g \underset{(a)}{\sim} b$.

2. On sait que $f - g \underset{(a)}{=} o(g)$ et on veut :

$$\int_x^a (f - g)(t) dt \underset{(a)}{=} o \left(\int_x^a g(t) dt \right).$$

En posant $h = f - g$ on se ramène au problème :

$$h = o(g) \implies \int_a^x h = o \int_a^x g.$$

Si $h = \varepsilon g$ et $\lim_a \varepsilon = 0$ alors

$$\int_a^x g = \int_a^x \varepsilon g$$

Or

$$\frac{\left| \int_a^x \varepsilon g \right|}{\left| \int_a^x g \right|} \leq \max_{[a,x]} |\varepsilon| \frac{\int_a^x g}{\int_a^x g} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

Donc

$$\frac{\left| \int_a^x \varepsilon g = h \right|}{\left| \int_a^x g \right|} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

2 DÉRIVÉES SUCCESSIVES ET FORMULES DE TAYLOR

Soit $p \geq 0$ un entier.

DÉFINITION 2.1

Soit I un intervalle de \mathbf{R} et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$.

1. $f \in C^0$ si f est continue ;
2. $f \in C^p$ ($p \geq 1$) si f est dérivable et $f' \in C^{p-1}$.

REMARQUE. Si $f \in C^p$ alors les p -ièmes dérivées successives et f sont toutes continues sur I . $f \in C^\infty$ si $f^{(p)}$ existe et est continue pour tout $p \geq 1$.

PROPOSITION 2.2

Si $f, g \in C^p$ alors $f + g$, fg , f/g et $f \circ g$ (si définie) sont C^p .

DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. $(f + g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$ par récurrence sur p ;
2. $(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}$;
3. par récurrence sur p pour $(f \circ g)^{(p)}$ en utilisant : $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.

RAPPELS SUR LES PRIMITIVES. Si $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est de classe C^1 avec $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert. Alors si f' est continue $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$.

2.1 Formules de TAYLOR

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert.

THÉORÈME 2.3 (Formule de TAYLOR avec reste intégral)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^k . Alors pour tous $a, b \in I$ on a :

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

DÉMONSTRATION

Par récurrence sur n , on note

$$(T_n) : f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

Supposons que (T_k) soit vraie pour tout $k < n$. Alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{(b-t)^k}{k!}, \\ v(t) &= f^{(k)}(t), \\ R_k &= \int_a^b \frac{(b-s)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(s) ds, \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} R_k &= \int_a^b u'(s)v(s) ds \\ R_k &= [u(s)v(s)]_a^b - \int_a^b u(s)v'(s) ds \\ R_k &= u(b)v(b) - u(a)v(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s) ds \\ R_k &= \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s) ds \end{aligned}$$

On applique (T_{n-1}) :

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_{n-1} \\ f(b) &= f(a) + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n \end{aligned}$$

donc (T_n) vraie.

THÉORÈME 2.4 (Formule de TAYLOR avec reste en $f^{(n+1)}(\theta)$)

Soit $n > 0$, $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^{n+1} . Pour tous $a, b \in I$ avec $a \neq b$, il existe θ strictement compris en a et b tel que :

$$f(b) = \sum_{i=0}^n \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta).$$

DÉMONSTRATION

On pose A telle que

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot A = \int_a^b \frac{(b-s)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(s) \, ds - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Soit $F : I \rightarrow \mathbf{R}$ telle que :

$$F(x) = \int_x^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) \, dt - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A.$$

On calcule $F'(x)$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} A \\ F'(x) &= \frac{(b-x)^n}{n!} (A - f^{(n+1)}(x)). \end{aligned}$$

F est dérivable donc continue sur I :

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) \, dt - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A = 0, \\ F(b) &= 0. \end{aligned}$$

Par le théorème de ROLLE, il existe θ strictement entre a et b tel que $F'(\theta) = 0$. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{(b-\theta)^n}{n!} (A - f^{(n+1)}(\theta)) &= 0 \\ A &= f^{(n+1)}(\theta). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta) = \int_a^b \frac{(b-s)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(s) \, ds - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

On a alors le résultat en remplaçant dans (T_n) .

REMARQUE. Si $|f^{(n+1)}(s)| \leq M$ pour tout $s \in I$ alors

$$\left| f(b) - \sum_{i=0}^n \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2.2 Fonctions usuelles

PROPOSITION 2.5 (Exponentielle)

Soit $n \in \mathbf{N}$, on regarde le développement de TAYLOR en 0 à l'ordre $n+1$, $\forall i$, $\exp^{(i)}(0) = 1$. On prend $b = x, a = 0$:

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(\theta) \\ \theta &\in]0, x[. \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.6 (Cosinus, sinus)

La dérivée n -ième de $\cos(t)$ est $\cos(t + n\pi/2)$.

$$\left| \cos(x) - \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

car $|\cos \theta| \leq 1$.

3 DÉVELOPPEMENT LIMITÉ À L'ORDRE n D'UNE FONCTION DE CLASSE C^n

3.1 Développements limités

DÉFINITION 3.1

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert tel que $0 \in I, n \in \mathbf{N}$. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ admet un *développement limité* à l'ordre n en 0 si, et seulement si, il existe un polynôme P de degré n à coefficients réels tel que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^n} = 0.$$

Notons

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - P(x)}{x^n}$$

alors

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x) \text{ }^{1§}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0. \end{cases}$$

DÉFINITION 3.2

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert et soit $n \in \mathbf{N}$. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ admet un *développement limité* à l'ordre n en a si, et seulement si, la fonction $t \mapsto f(t + a)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. C'est-à-dire si, et seulement si, il existe un polynôme de degré n , P à coefficients réels tel que :

$$f(x) = P(x - a) + o((x - a)^n)$$

au voisinage de a .

THÉORÈME 3.3

Si f admet un développement limité à l'ordre n en un point a , alors ce développement limité est unique.

DÉMONSTRATION

On peut supposer $a = 0$. Supposons que

$$f(x) = P_1(x) + x^n \varepsilon_1(x) = P_2(x) + x^n \varepsilon_2(x)$$

où $\lim_0 \varepsilon_i = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. On a que

$$(P_1 - P_2)(x) = x^n (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x)$$

^{1§}. C'est-à-dire, $f(x) - P(x) = o(x^n)$.

et $(P_1 - P_2)(x)$ est de la forme $r_0 + r_1x + \dots + r_nx^n$ avec $r_0, r_1, \dots, r_n \in \mathbf{R}$.
On montre par récurrence que les r_k sont tous nuls. Quand $x \rightarrow 0$ on trouve :

$$r_0 = 0$$

et donc

$$r_1x + \dots + r_nx^n = x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x).$$

Supposons que $r_0 = r_1 = \dots = r_{k-1} = 0$, $k > 0$. Alors

$$\begin{aligned} r_kx^k + \dots + r_nx^n &= x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x), \\ r_k + r_{k+1}x + \dots + r_nx^{n-k} &= x^{n-k}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x), \end{aligned}$$

$n - k \geq 0$ et donc $r_k = 0$ en passant à la limite.

COROLLAIRE 3.4

Soit $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ le développement limité d'une fonction f à l'ordre n en 0.
Alors :

1. si f est paire alors P est paire ;
2. si f est impaire alors P est impaire.

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x) + x^n\varepsilon(x), \\ f(-x) &= P(-x) + x^n(-1)^n\varepsilon(-x) = P(-x) + x^n\varepsilon_1(x), \end{aligned}$$

Or comme $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ alors $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ aussi.

1. si f est impaire alors on a :

$$f(x) = -P(-x) - x^n\varepsilon_1(x)$$

et comme la première et cette expression sont des développements limités de f à l'ordre n en 0, par unicité on a $-P(-x) = P(x)$, c'est-à-dire P impaire ;

2. si f est paire, on a :

$$f(x) = P(-x) + x^n\varepsilon_1(x)$$

alors de même, l'unicité nous dit que P est alors paire.

PROPOSITION 3.5

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue en $a \in I$.

1. le développement limité de f en a à l'ordre 0 est

$$f(x) = f(a) + \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 ;$$

2. la fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle possède un développement limité à l'ordre 1 en a , alors dans ce cas le développement limité est donné par :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x)(x - a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. On pose $\varepsilon(x) = f(x) - f(a)$. Comme f est continue en 0, $\varepsilon(x)$ aussi et $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

2. Supposons que f soit dérivable en a , c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

On pose

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

On a bien $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ et

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x).$$

Réciproquement, supposons que f admette un développement limité :

$$f(x) = a_0 + (x - a)a_1 + (x - a)\varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. Alors, par continuité $a_0 = f(a)$ et

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} a_1 + \varepsilon(x) = a_1 = f'(a).$$

3.2 Développements limités et primitives

THÉORÈME 3.6

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue. Soit F une primitive de f . Soit $a \in I$ et supposons que f admette un développement limité en a à l'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \frac{a_2}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{a_n}{n!}(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors F admet le développement limité suivant à l'ordre $n + 1$ en a :

$$F(x) = F(a) + a_0(x - a) + \frac{a_1}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{a_n}{(n + 1)!}x^{n+1} + (x - a)^{n+1} \varepsilon_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION

Soit

$$P(t) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} (t - a)^k.$$

Pour tout $x \neq a$:

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n}.$$

Par hypothèse, $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. En posant $\varepsilon(a) = 0$, on obtient que ε est continue sur I . Donc ε admet une primitive et dans l'identité

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \frac{a_2}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{a_n}{n!}(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

tous les termes admettent des primitives. Donc

$$\begin{aligned} F(x) - F(a) &= \int_a^x f(t) dt \\ F(x) - F(a) &= \int_a^x \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} (t-a)^k + (t-a)^n \varepsilon(t) \right) dt \\ F(x) - F(a) &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + u(x), \\ u(x) &= \int_a^x (t-a)^n \varepsilon(t) dt. \end{aligned}$$

Par le théorème de ROLLE :

$$u(x) = (x-a)(\theta-a)^n \varepsilon(\theta)$$

pour un θ compris entre a et x . Donc

$$|u(x)| = |x-a| |\theta-a|^n |\varepsilon(\theta)| \leq |x-a|^{n+1} |\varepsilon(\theta)|$$

et $\varepsilon(\theta)$ tend vers 0 quand x tend vers a puisque θ est compris entre a et x . Donc :

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + (x-a)^{n+1} \varepsilon_1(x)$$

où

$$\varepsilon_1(x) = \frac{u(x)}{(x-a)^{n+1}} \rightarrow 0.$$

THÉORÈME 3.7

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^n , $a \in I$. Alors f admet pour développement limité à l'ordre n en a :

$$f(x) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION

Pour $n = 0, 1$ ça a été déjà vu. Supposons alors $n \geq 2$. Soit $f \in C^n$, posons $g = f'$ avec $g \in C^{n-1}(I)$.

Par récurrence :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^{n-1} \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

f est une primitive de g :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0 \\ f(x) &= f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x) \\ f(x) &= f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon_1(x). \end{aligned}$$

EXEMPLE. Soit :

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

son développement limité en 0 d'ordre n est :

$$f(x) = x^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

3.3 Développement limités usuels

Développements limités en 0 :

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\alpha \in \mathbf{R} : (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{i=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-i)}{(i+1)!} x^{i+1} + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^n x^i + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^n (-1)^i x^i + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

$$\log(1-x) = - \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{i!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\log(1+x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{Arctan}(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{x^{2i-1}}{2i-1} + x^{2n} \varepsilon(x)$$

DÉMONSTRATION (ch)

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} (= \operatorname{sh}(x))$$

$$\operatorname{ch}''(x) = \operatorname{ch}(x)$$

$$\operatorname{ch}^{(2i)}(0) = 1$$

$$\operatorname{sh}^{(2i)}(0) = 0$$

DÉMONSTRATION (cos)

$$\begin{aligned}\cos^{(k)}(x) &= \cos(x + k\pi/2) \\ \cos^{(k)}(0) &= \cos(k\pi/2) \\ \cos^{(2k)}(0) &= (-1)^k \\ \cos^{(2k+1)}(0) &= 0\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION (sin)

$$\begin{aligned}\sin^{(k)}(x) &= \sin(x + k\pi/2) \\ \sin^{(2k)}(0) &= 0 \\ \sin^{(2k+1)}(0) &= (-1)^k\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION $((1+x)^\alpha = f(x))$

Par récurrence :

$$\begin{aligned}f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \\ f^{(k)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION $(1/(1-x))$

$$\begin{aligned}\frac{1-x^n}{1-x} &= 1+x+x^2+\dots+x^n \\ \frac{1}{1-x} &= 1+x+\dots+x^n+x^n \cdot \frac{x}{1-x}\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION $(\log(1-x))$

Utiliser le théorème sur le développement limité d'une primitive avec le développement limité de $1/(1-x)$.

DÉMONSTRATION $(\text{Arctan}(x))$

$$\begin{aligned}\text{Arctan}'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{i=1}^n (-1)^i x^{2i} + x^{2n} \varepsilon(x)\end{aligned}$$

et on conclut avec le théorème du développement limité d'une primitive.

REMARQUE. On a vu que si

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

alors le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre n est

$$f(x) = x^n \varepsilon(x).$$

Or le développement limité de 0 en 0 à l'ordre n est identique.

EXEMPLE. Soit :

$$f: \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}.$$

La fonction f est continue en 0.

On regarde le développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = x^2 \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \sin(1/x) & \text{sinon} \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Donc le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre 2 est :

$$f(x) = x^2 \varepsilon(x).$$

Dérivabilité de f en 0 (puisque'elle est lisse sur \mathbf{R}^*) :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2 \sin(1/x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

donc f est dérivable et $f'(0) = 0$.

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x)}{x} = 3x \sin(1/x) - \cos(1/x)$$

donc f n'est pas dérivable à l'ordre 2 en 0 (même si elle a un développement limité à l'ordre 2).

4 CALCULS AVEC LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

4.1 Règles de calcul des développements limités

PROPOSITION 4.1

Soit f, g ayant des développements limités à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_f(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_g(x)$$

avec P, Q des polynômes de degré au plus n et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ (non forcément identiques). Alors

1. le développement limité à l'ordre n en 0 de $f + g$ est

$$(f + g)(x) = (P + Q)(x) + x^n \varepsilon(x);$$

2. pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, le développement λf à l'ordre n en 0 est :

$$(\lambda f)(x) = \lambda P(x) + x^n \varepsilon(x).$$

DÉMONSTRATION

Écrivons $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_f(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_g(x)$.

1. $(f + g)(x) = P(x) + Q(x) + x^n (\varepsilon_f + \varepsilon_g)(x)$ et on note $\varepsilon = \varepsilon_f + \varepsilon_g$ qui tend bien en 0.
2. De même.

PROPOSITION 4.2

Soit f qui admet le développement limité en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, f admet le développement limité en 0 à l'ordre p :

$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p \varepsilon(x)$$

avec $T_p(P)$ le polynôme tronqué de P :

$$T_p(P) = \sum_{k=0}^p a_k x^k, \quad P = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

DÉMONSTRATION

On a

$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p \left(\sum_{k=p+1}^n a_k x^{k-p} + x^{n-p} \varepsilon(x) \right).$$

Et on pose

$$\varepsilon_1(x) = \sum_{k=p+1}^n a_k x^{k-p} + x^{n-p} \varepsilon(x).$$

On a bien $\varepsilon_1(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.

PROPOSITION 4.3

Soient f, g admettant les développements limités :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x).$$

Alors fg admet le développement limité à l'ordre n en 0 suivant :

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x) + x^n \varepsilon(x).$$

REMARQUE. Si f, g admettent les développements limités à l'ordre n en a :

$$f(x) = P(x - a) + (x - a)^n \varepsilon_1(x), \quad g(x) = Q(x - a) + (x - a)^n \varepsilon_2(x)$$

alors le développement limité :

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x - a) \text{ 2§ } + (x - a)^n \varepsilon(x).$$

DÉMONSTRATION

$$(fg)(x) = (PQ)(x) + x^n (Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x))$$

$$PQ(x) = T_n(PQ)(x) + x^{n+1} R(x), \quad R \in \mathbf{R}[x]$$

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x) + x^n (xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x))$$

2§. On tronque avant d'évaluer en $x - a$.

On pose :

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0} xR(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} Q\varepsilon_1(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} P\varepsilon_2(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) &= 0\end{aligned}$$

EXEMPLE. On veut le développement limité de :

$$\text{Arctan}(x-1)\exp(x)$$

en 1 d'ordre 3.

$$\begin{aligned}\text{Arctan}(y) &= y - \frac{y^3}{3} + y^3\varepsilon(y) \\ \text{Arctan}(x-1) &= (x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3\varepsilon(x) \\ \exp(x) &= \exp(x-1+1) = e \exp(x-1) \\ \exp(x) &= e \left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3\varepsilon(x) \right)\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}f(x) &= e \left((x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3\varepsilon(x) \right) \times \left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3\varepsilon(x) \right) \\ f(x) &= e \left((x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} \right) + (x-1)^3\varepsilon(x)\end{aligned}$$

4.2 Développement limité d'une fonction composée

Puisque la composition de deux fonctions polynômiales est encore un polynôme :

PROPOSITION 4.4

Soient f, g admettant un développement limité en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon(x)$$

avec P, Q deux polynômes de degré inférieur à n .

Supposons que $g(0) = 0$ alors $f \circ g$ admet le développement limité suivant à l'ordre n en 0 :

$$(f \circ g)(x) = T_n(P \circ Q)(x) + x^n\varepsilon(x).$$

DÉMONSTRATION

Supposons $n = 0$, alors P et Q sont deux polynômes constants donc $f(x) = P(0) + \varepsilon(x)$ et $g(x) = Q(0) + \varepsilon(x)$. Comme $Q(0) = 0$ on a bien $f(g(x)) = (P \circ Q)(x) + \varepsilon(x)$ par continuité.

Supposons que $n \geq 1$. On note $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_2(x)$. Posons

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

$$(f \circ g)(x) = P(g(x)) + g(x)^n \varepsilon_1(g(x))$$

$$P(g(x)) = \sum_{i=0}^n a_i g(x)^i$$

$$P(g(x)) = \textcolor{red}{3}\S T_n \left(\sum_{i=0}^n a_i Q(x)^i \right) + x^n \varepsilon_3(x)$$

Puisque $Q(0) = 0$, on a $Q(x) = b_1x + \dots + b_nx^n$ et donc :

$$g(x) = b_1x + \dots + b_nx^n + x^n \varepsilon_2(x)$$

$$g(x) = x(b_1 + \dots + b_nx^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon_2(x))$$

$$g(x) = xh(x)$$

$$(f \circ g)(x) = P(xh(x)) + x^n h(x)^n \varepsilon_1(xh(x))$$

$$(f \circ g)(x) = T_n(P \circ Q)(x) + x^n (h(x)^n \varepsilon_1(xh(x)) + \varepsilon_3(x))$$

On pose $\varepsilon_4(x) = h(x)^n \varepsilon_1(xh(x)) + \varepsilon_3(x)$ et :

$$\lim_{x \rightarrow 0} xh(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x)^n = b_1^n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_4(x) = 0.$$

EXEMPLE. Développement limité de $\cos(\sin(x))$ à l'ordre 5 en 0 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6 \varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x)$$

$$\cos(\sin(x)) = T_5 \left(1 - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right)^4}{4!} \right) + x^5 \varepsilon(x)$$

$$\cos(\sin(x)) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x)$$

$$\cos(\sin(x)) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^5 \varepsilon(x)$$

PROPOSITION 4.5

Soient f, g admettant des développements limités à l'ordre n en 0. Alors si $g(0) \neq 0$ alors la fonction f/g admet un développement limité à l'ordre n en 0.

DÉMONSTRATION

Puisque $g(0) \neq 0$, f/g est définie et continue en 0. Comme $f/g = f \times 1/g$, il suffit de vérifier que $1/g$ admet un développement limité en 0 (puis on applique la règle de produit).

Posons $a = g(0) \neq 0$. On a :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a + (g(x) - a)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1 \right)}$$

3§. D'après les formules de développements limités d'une somme et d'un produit.

Il suffit de vérifier que :

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)}$$

admet un développement limité à l'ordre n en 0. Posons

$$h(x) = \frac{1}{1 + x}$$

on a alors

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)} = h\left(\frac{g(x)}{a} - 1\right) = (h \circ k)(x)$$

où $k(x) = g(x)/a - 1$. Or $k(x)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et $h(x)$ admet également un développement limité à l'ordre ∞ en 0. Enfin, $k(0) = 0$ et donc on conclut avec le résultat précédent.

EXEMPLE. Développement limité de $f : f(x) = 1/(a - x)$ en 0 à l'ordre n .

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{a} \frac{1}{1 - x/a} \\ \frac{1}{1 - t} &= 1 + t + t^2 + \dots + t^n + t^n \varepsilon(t) \\ f(x) &= \frac{1}{a} \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \dots + \frac{x^n}{a^n} \right) + x^n \varepsilon(x) \\ \frac{1}{a - x} &= \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \dots + \frac{x^n}{a^{n+1}} + x^n \varepsilon(x). \end{aligned}$$

La méthode précédente ne donne pas de formule générale pour le développement limité de f/g .

RAPPEL. Si $P, Q \in \mathbf{R}[x]$, $n \in \mathbf{N}$ et si $Q(0) \neq 0$. Alors la division de P par Q suivant les puissances croissantes à l'ordre n est l'unique polynôme A tel que :

- $P - AQ$ est divisible par X^{n+1} ;
- soit $A = 0$, soit $\deg A \leq n$.

PROPOSITION 4.6

Soient f, g avec les développements limités suivants à l'ordre n en 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x) + x^n \varepsilon_1(x), \\ g(x) &= B(x) + x^n \varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

Supposons que $g(0) = B(0) \neq 0$. Le développement limité à l'ordre n de f/g en 0 est :

$$\frac{f}{g}(x) = Q(x) + x^n \varepsilon(x)$$

où Q est la division de A par B à l'ordre n suivant les puissances croissantes.

DÉMONSTRATION

On a $A(x) = Q(x)B(x) + x^{n+1}R(x)$ où R est un polynôme et $Q = 0$ ou $\deg Q \leq n$. Ainsi

$$\begin{aligned} f(x) &= Q(x)B(x) + x^{n+1}R(x) + x^n\varepsilon_1(x) \\ f(x) - Q(x)g(x) &= x^{n+1}R(x) + x^n\varepsilon_1(x) - Q(x)x^n\varepsilon_2(x) \\ f(x) - Q(x)g(x) &= x^n(\varepsilon_1(x) - Q(x)\varepsilon_2(x) + xR(x)) \\ \frac{f}{g}(x) &= Q(x) + x^n\varepsilon_3(x) \\ \varepsilon_3(x) &= \frac{1}{g(x)}(\varepsilon_1(x) - Q(x) \cdot \varepsilon_2(x) + xR(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

EXEMPLE. Développement limité de $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0.

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x) \\ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) + x^6R(x) \\ \frac{f(x)}{g(x)} &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x) \end{aligned}$$

5 APPLICATIONS

APPLICATIONS. Les développements limités peuvent être utiles pour :

1. les calculs de limites (pour des « formes indéterminées ») ;
2. études de fonctions ou courbes paramétrées.

5.1 Calculs de limites

EXEMPLE. On veut calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x) \\ \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \\ \log \operatorname{ch} x &= \log(1 + (\operatorname{ch} x - 1)) \\ \log \operatorname{ch} x &= T_2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2} \right) + x^2\varepsilon(x) \\ \log \operatorname{ch} x &= \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \\ x \log \operatorname{ch} x &= \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \\
x\sqrt{1+x} &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + x^3\varepsilon(x) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \\
\exp(\sin x) &= T_3 \left(\left(x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \right) + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(\sin x) &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(\sin x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) ;
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \frac{\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)}{1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)} \\
\frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \frac{\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)}{-\frac{x^3}{8} + x^3\varepsilon(x)} \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/2 + \varepsilon(x)}{-1/8 + \varepsilon(x)} = -4.
\end{aligned}$$

REMARQUE. Un calcul de dérivée s'obtient par un calcul de limite et donc parfois par développements limités.

EXEMPLE. On prend

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + x + x^2}$$

et on cherche $f^{(i)}(0)$ pour $i \in \{0, \dots, 4\}$, c'est-à-dire que l'on cherche le développement limité de f en 0 à l'ordre 4.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x).$$

On cherche le développement limité de

$$g(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}$$

que l'on peut voir comme

$$g(x) = (a \circ b)(x) ; a(x) = \frac{1}{1+x} ; b(x) = x + x^2.$$

$$\begin{aligned}
a(x) &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
g(x) &= T_4((x \mapsto 1 - x + x^2 - x^3 + x^4)(x + x^2)) + x^4\varepsilon(x) \\
g(x) &= 1 - x - x^2 + x^2 + x^4 + 2x^3 + x^4 - x^3 - 3x^4 + x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
g(x) &= 1 - x + x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
f(x) &= T_4\left((1 - x + x^3 - x^4)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\right) + x^4\varepsilon(x) \\
f(x) &= 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{2} - \frac{23x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Comme f admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, elle est dérivable quatre fois. De plus

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(0) &= -1 \\
f^{(2)}(0) &= -1 \\
f^{(3)}(0) &= 9 \\
f^{(4)}(0) &= -23.
\end{aligned}$$

5.2 Courbes paramétrées

RAPPELS SUR LES FONCTIONS CLASSIQUES. Quelques rappels :

— on définit le logarithme népérien par :

$$\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Ainsi $\log : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ est croissante, C^∞ ,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \log x &= \frac{1}{x} \\
\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \log x &= -\infty \\
\lim_{x \rightarrow \infty} \log x &= +\infty \\
\log(ab) &= \log a + \log b.
\end{aligned}$$

— on définit l'exponentielle, $\exp : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, qui est croissante, lisse et stable par dérivation.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) &= 0 \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) &= \infty \\
\exp(a + b) &= \exp(a) \exp(b).
\end{aligned}$$

— soient $a \in \mathbf{R}_+^*$, $b \in \mathbf{R}$ alors on définit :

$$a^b = \exp(b \log a).$$

$$a^{b+b'} = a^b a^{b'}$$

$$(aa')^b = a^b (a')^b$$

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

$$a^0 = 1 = 1^b$$

$$\frac{d}{dx} x^b = b x^{b-1}$$

$$\frac{d}{dx} a^x = \log(a) a^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^a (\log x)^n = 0, \quad a > 0 \text{ et } n \in \mathbf{Z}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^a e^x = 0.$$

— trigonométrie :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\sin(x+t) = \cos(t) \sin(x) + \cos(x) \sin(t)$$

$$\cos(x+t) = \cos(x) \cos(t) - \sin(x) \sin(t)$$

$$\tan(x+t) = \frac{\tan(t) + \tan(x)}{1 - \tan(x) \tan(t)}.$$

— $\text{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ est lisse sur $] -1, 1[$ et :

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\text{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ est la réciproque de \cos et on a la relation :

$$\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

$\text{Arctan} : \mathbf{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$ est lisse et :

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

— trigonométrie hyperbolique :

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$$

leurs réciproques $\text{Arcsh} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\text{Arcch} : [-1, \infty] \rightarrow \mathbf{R}_+$ et $\text{Arcth} :]-1, +1[\rightarrow \mathbf{R}$ sont lisses sur l'intérieur de leur domaine de définition.

$$\text{Arcsh}'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\text{Arcch}'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$\text{Arcsh}(t) = \log(t + \sqrt{t^2+1})$$

$$\text{Arcch}(t) = \log(t + \sqrt{t^2-1}).$$

DÉFINITION 5.1

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ avec I un intervalle ou une union finie d'intervalles dans \mathbf{R} . Soient u, v telles que

$$\forall t, f(t) = (u(t), v(t)).$$

1. On dit que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$ où $l = (l_1, l_2)$ si $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = l_1$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = l_2$.
2. On dit que f est continue en t_0 si les fonctions u et v sont continues en 0. f est continue sur I si elle est continue en tout point de I .
3. On dit que f est dérivable en t_0 si u et v le sont et on note $f'(t_0) = (u'(t_0), v'(t_0))$.

PROPOSITION 5.2

Si $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ et si $t_0 \in I$ alors :

1. si $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = m$ alors $\lim_{t \rightarrow t_0} (f + g)(t) = l + m$;
2. si f, g sont dérivables en t_0 alors $f + g$ aussi et on a $(f + \lambda g)'(t_0) = f'(t_0) + \lambda g'(t_0)$.

PROPOSITION 5.3

Soit (r, s) une base de \mathbf{R}^2 et soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ telle que $f(t) = (u(t), v(t))$. Soit $(a(t), b(t))$ les coordonnées de $f(t)$ dans la base (r, s) .

1. On a :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l \iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \alpha \\ \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = \beta \end{cases}$$

où (α, β) sont les coordonnées de l dans la base (r, s) .

2. Idem pour la dérivée.

DÉMONSTRATION

Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ et $r, s \in \mathbf{R}^2$. On a $l = \alpha \cdot r + \beta \cdot s$,

$$f(t) = (u(t), v(t)) = a(t) \cdot r + b(t) \cdot s$$

avec $a(t), b(t) \in \mathbf{R}$.

1. On a que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$ c'est par définition :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = l_1 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = l_2 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \alpha \\ \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = \beta \end{cases} &\iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} (a(t)r_1 + b(t)s_1) = \alpha r_1 + \beta s_1 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} (a(t)r_2 + b(t)s_2) = \alpha r_2 + \beta s_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} a(t)r_1 + b(t)s_1 = l_1 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} a(t)r_2 + b(t)s_2 = l_2 \end{cases} \end{aligned}$$

2. De même ...

DÉFINITION 5.4

On dit que $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2, f(t) = (u(t), v(t))$ admet un développement limité à l'ordre n en t_0 si $u(t)$ et $v(t)$ admettent un développement limité à l'ordre n en t_0 .

Si $u(t) = u_0 + u_1(t - t_0) + \dots + u_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon_1(t)$ et $v(t) = v_0 + v_1(t - t_0) + \dots + v_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon_2(t)$ alors on appelle

$$f(t) = (u_0, v_0) + (t - t_0)(u_1, v_1) + \dots + (t - t_0)^n(u_n, v_n) + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

le développement limité de f à l'ordre n en t_0 avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0)$.

EXEMPLE. Le développement limité de $f : t \mapsto (2t^3 - t \sin t, t^3 + \cos t)$ à l'ordre 4 en 0 :

$$2t^3 - t \sin t = -t^2 + 2t^3 + \frac{t^4}{6} + t^4 \varepsilon(t)$$

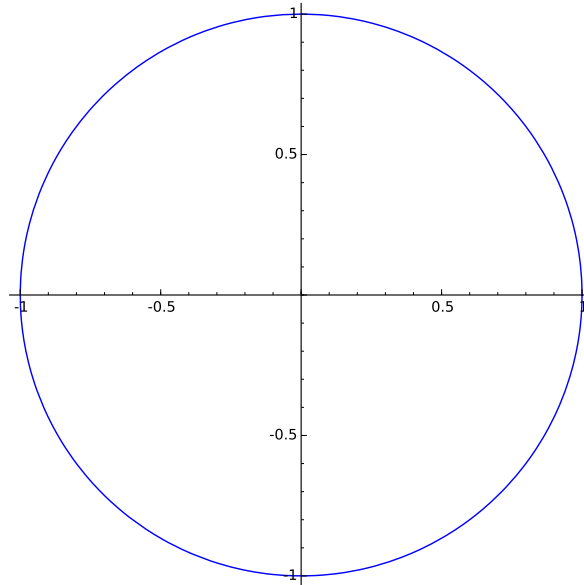
$$t^3 + \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + t^3 + \frac{t^4}{24} + t^4 \varepsilon(t)$$

$$f(t) = (0, 1) - t^2(1, 1/2) + t^3(2, 1) + t^4(1/6, 1/24) + t^4 \varepsilon(t).$$

DÉFINITION 5.5

On appelle *courbe paramétrée* de \mathbf{R}^2 une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$.

EXEMPLE. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$.



REMARQUE. Supposons que f soit dérivable en $t \in I$. Alors $u(t), v(t)$ admettent des développements limités à l'ordre 1 en t_0 et donc f admet aussi un développement limité à l'ordre 1 en t_0 . Or si

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t)$$

alors

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0)) = f'(t_0).$$

DÉFINITION 5.6

On appelle $f'(t_0)$ *vecteur tangent* de f en t_0 . La droite affine passant par $f(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$ s'appelle la *tangente* à f en t_0 .

REMARQUE. Le vecteur tangent dépend du paramétrage de la courbe et non seulement de sa représentation.

EXEMPLE. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ et soit $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$. Remarquons que f et g ont même représentation graphique. Cependant les vecteurs tangents en 0 à f et g sont :

$$\begin{aligned} f'(0) &= (0, 1) \\ g'(0) &= (0, 2). \end{aligned}$$

La tangente à f en t_0 est la droite d'équation :

$$\det \begin{pmatrix} y - v(t_0) & v'(t_0) \\ x - u(t_0) & u'(t_0) \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire :

$$(y - v(t_0))u'(t_0) - (x - u(t_0))v'(t_0) = 0.$$

5.3 Étude de fonctions

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, où I est un intervalle de \mathbf{R} . On procède à l'étude de f au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. En particulier, on s'intéresse notamment au graphe de f .

5.3.1 ÉTUDE LOCALE

PROPOSITION 5.7

Soit $x_0 \in I, f : I \rightarrow \mathbf{R}$. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 :

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

où $P \in \mathbf{R}[x], P(x) = a_p x^p + \dots + a_n x^n$ avec $0 \leq p \leq n$ et $a_p \neq 0$.

Alors il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $x \neq x_0$, $f(x)$ est non nul et a le signe de $a_p(x - x_0)^p$.

DÉMONSTRATION

Puisque $p \leq n$, le développement limité de f en x_0 à l'ordre p est :

$$f(x) = (T_p(P))(x - x_0) + (x - x_0)^p \varepsilon(x).$$

C'est-à-dire :

$$f(x) = a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p \varepsilon(x).$$

Pour tout $x \neq x_0$, on a :

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^p} = a_p + \varepsilon(x)$$

et $a_p \neq 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi il existe α tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $x \neq x_0$, $|\varepsilon(x)| < \frac{1}{2}(a_p)$. C'est-à-dire que pour un tel x , $f(x) \neq 0$ et est du même signe que $a_p(x - x_0)$.

DÉFINITION 5.8

Si $I \subset \mathbf{R}$ est un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction numérique et si $x_0 \in \bar{I}$ ^{4§}, on dit que f est *positive au voisinage de x_0* s'il existe un voisinage $J \subset I$ de x_0 tel que pour tout $x \in J$ et $x \neq x_0$, $f(x) > 0$.

EXEMPLE. Prenons :

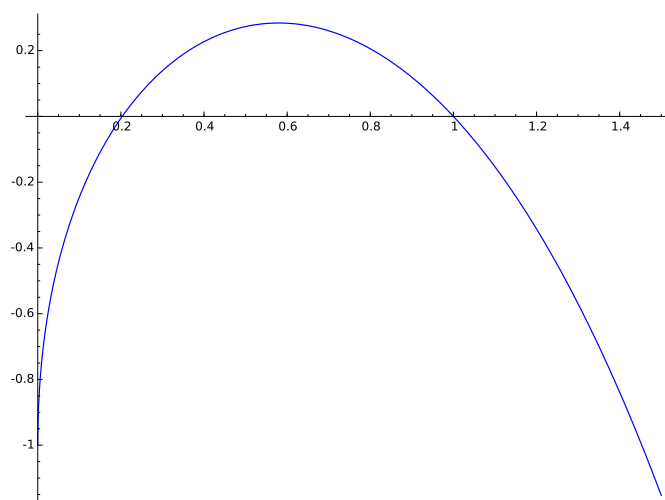
$$f(x) = e \cdot \sqrt{x} - e^x.$$

^{4§}. Dans I ou l'une de ses bornes.

On cherche le signe de f quand x tend vers 1.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e \left[(1 + (x-1))^{1/2} - e^{x-1} \right] \\
 &\begin{cases} (1 + (x-1))^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \\ e^{x-1} = 1 + (x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \end{cases} \\
 f(x) &= e \left(-\frac{1}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \right) \\
 f(x) &= \frac{-e}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x).
 \end{aligned}$$

Ainsi au voisinage de 1, le signe de f est le même que celui de $1-x$.



DÉFINITION 5.9

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. La *tangente* en $(x_0, f(x_0))$ au graphe de f est la droite affine d'équation :

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

DÉFINITION 5.10

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$.

On dit que f admet une *inflexion* au point $(x_0, f(x_0))$ si la fonction

$$x \mapsto f(x) - (f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0))$$

s'annule en x_0 en changeant de signe.

PROPOSITION 5.11

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. On a :

1. si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ est le développement limité de f à l'ordre 1 en x_0 , alors la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ est donnée par :

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) ;$$

2. si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\varepsilon(x)$ est le développement limité de f à l'ordre 2 en x_0 , alors

- si $a_2 > 0$ alors pour tout $x \neq x_0$ dans un voisinage suffisamment petit de x_0 , le point $(x, f(x))$ est au-dessus de la tangente ;
 - si $a_2 < 0$ alors pour tout $x \neq x_0$ dans un voisinage suffisamment petit de x_0 , le point $(x, f(x))$ est en-dessous de la tangente ;
3. si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_3(x - x_0)^3 + (x - x_0)^3\varepsilon(x)$ est le développement limité de f à l'ordre 3 en x_0 , alors si $a_3 \neq 0$, f admet un point d'inflexion en $(x_0, f(x_0))$.

DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. Comme f est dérivable en x_0 , on a $a_1 = f'(x_0)$ et $a_0 = f(x_0)$, l'équation de la tangente est

$$y = a_1(x - x_0) + a_0.$$

2. Posons

$$u(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)).$$

On a alors :

$$u(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 - a_1(x - x_0) - a_0 + (x - x_0)^2\varepsilon(x) = a_2(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\varepsilon(x).$$

Comme $a_2 \neq 0$ (par hypothèse) alors la proposition précédente entraîne que le signe de $u(x)$ au voisinage de 0 est celui de $a_2(x - x_0)^2$, c'est-à-dire le signe de a_2 .

3. Posons de même

$$u(x) = a_3(x - x_0)^3 + (x - x_0)^3\varepsilon(x).$$

D'après la proposition précédente, le signe de $u(x)$ au voisinage de x_0 est celui de $a_3(x - x_0)$ puisque $a_3 \neq 0$. Comme $(x - x_0)^3$ n'est pas de signe constant, c'est un point d'inflexion.

REMARQUE. Si $a_2 \neq 0$, alors :

- si $a_2 > 0$, $f(x)$ admet un minimum local en x_0 ;
- sinon, $f(x)$ admet un maximum local en x_0 .

REMARQUE, GÉNÉRALISATION DU RÉSULTAT. Supposons que le développement limité de f en x_0 est de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p\varepsilon(x),$$

avec $p \geq 2$. De plus on suppose $a_p \neq 0$. Alors en posant

$$u(x) = f(x) - (f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0))$$

est du signe de $a_p(x - x_0)^p$ au voisinage de x_0 .

- Si p est pair alors $a_p > 0$ implique que x_0 est un minimum local, $a_p < 0$ implique que x_0 est un maximum local.
- Si p est impair alors x_0 est un point d'inflexion.

EXEMPLE. Prenons :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 5}$$

définie sur \mathbf{R} et étudions f au voisinage de $x_0 = 2$. On a :

$$f(x+2) = \left((x+2)^3 + 6x^2 - 5\right)^{1/3}$$

$$f(x+2) = \left(27 + 36x + 12x^2 + x^3\right)^{1/3}$$

$$f(x+2) = 3 \cdot \left(1 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{27}x^3\right)^{1/3}$$

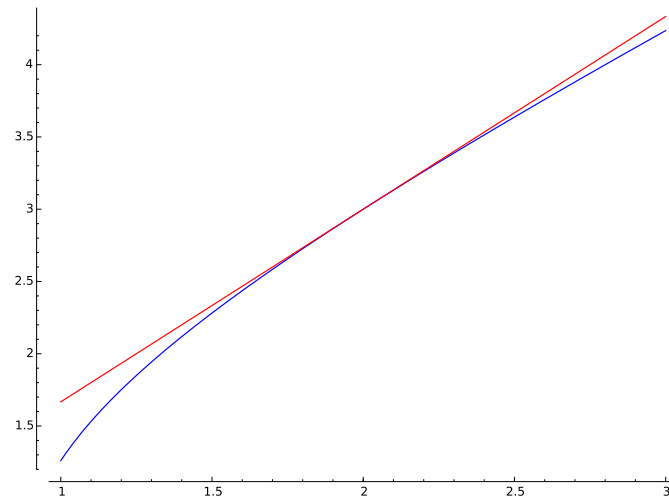
$$f(x+2) = 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2\right) + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{-2}{3}\right)}{2} \left(\frac{16}{9}x^2\right)\right) + x^2\varepsilon(x)$$

$$f(x+2) = 3 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{27}x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

L'équation de la tangente est :

$$y = 3 + \frac{4}{3}(x-2).$$

Comme le terme en x^2 est non nul et négatif, la courbe est en-dessous de la tangente.



5.3.2 BRANCHES INFINIES

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction numérique.

DÉFINITION 5.12

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, avec $a \in \mathbf{R}$ alors la droite $x = a$ est une *asymptote verticale* de f .

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ alors f admet une *branche infinie* en $+\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ alors f admet une *branche infinie* en $-\infty$.

Soit $a, b \in \mathbf{R}$. La droite $y = ax + b$ est *asymptote* à f quand x tend vers $\pm\infty$ si :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax - b = 0.$$

Si $a = 0$ on dit que l'asymptote est *horizontale*.

Soit $a \in \mathbf{R}$, si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

alors on dit que f a une *direction asymptotique de pente a en $\pm\infty$* .

Si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

alors on dit que f a une *direction asymptotique verticale* en $\pm\infty$.

PROPOSITION 5.13

Soient $a, b \in \mathbf{R}$. La droite $y = ax + b$ est asymptote à f quand x tend vers $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si, et seulement si :

— on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a ;$$

— et de plus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b.$$

EXEMPLE. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x^2 + 1}.$$

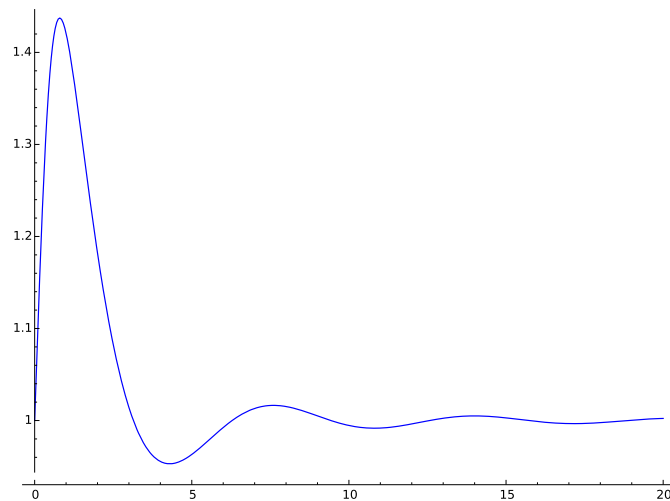
On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - 1| = 0$$

et donc $y = 1$ est asymptote à f en $+\infty$. La différence

$$f(x) - 1 = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$$

est du signe de $\sin x$ qui oscille.



EXEMPLE. Avec

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 5}$$

on regarde s'il y a une asymptote quand x tend vers $\pm\infty$ et la position par rapport à la possible asymptote. On écrit f sous la forme :

$$f(x) = xu(1/x)$$

avec

$$u(x) = \sqrt[3]{1 + 6x - 5x^3}.$$

Le développement limité de u en 0 à l'ordre 2 est :

$$\begin{aligned}u(x) &= (1 + 6x - 5x^3)^{1/3} \\u(x) &= 1 + \frac{1}{3}(6x) + \frac{1}{3} \left(\frac{-2}{3} \right) \frac{1}{2}(36x^2) + x^2\varepsilon(x) \\u(x) &= 1 + 2x - 4x^2 + x^2\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Ainsi pour x au voisinage de ∞ en valeur absolue :

$$f(x) = x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{\varepsilon(1/x)}{x^2} \right) = x + 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(1/x),$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) - (x + 2) = 0.$$

On regarde maintenant la position de f par rapport à $y = x + 2$. On a

$$f(x) - (x + 2) = \frac{-4}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(1/x).$$

Ainsi quand $x \rightarrow +\infty$, f est en-dessous de l'asymptote, quand $x \rightarrow -\infty$, f est au-dessus de l'asymptote.

5.3.3 ÉTUDE DE FONCTION

Par exemple avec

$$f(x) = x \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right|$$

de domaine de définition $\mathbf{R} \setminus \{0, -1/2\}$.

DÉRIVÉE. On calcule la dérivée de f :

$$\begin{aligned}f(x) &= x(\log |2x + 1| - \log |x|) \\f'(x) &= \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right| + x \left(\frac{2}{2x + 1} - \frac{1}{x} \right) \\f'(x) &= \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right| - \frac{1}{2x + 1} \\f''(x) &= \frac{2}{2x + 1} - \frac{1}{x} - \frac{2}{(2x + 1)^2} \\f''(x) &= \frac{-1}{x(2x + 1)^2}\end{aligned}$$

Une étude des signes montre qu'il existe un unique α entre $-1/2$ et 0 (strictement) tel que $f'(\alpha) = 0$. En conclusion, f est croissante partout sauf sur $] -1/2, \alpha[$ où elle est décroissante.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty\end{aligned}$$

ce qui nous donne deux branches infinies.

$$\lim_{x \rightarrow -1/2} f(x) = +\infty$$

et donc il y a une asymptote verticale en $x = -1/2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$$

$$f(x) = x \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right|$$

$$f(x) = x \log |2x + 1| - x \log x$$

or les deux termes tendent vers 0 en 0 et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

et donc f admet un prolongement par continuité à 0 en 0.

Il reste à regarder les branches infinies :

— Quand $x \rightarrow \infty$, on cherche un développement limité de f en $+\infty$.

$$f(x) = x \log(2 + 1/x)$$

$$f(x) = x \log 2 + x \log \left(1 + \frac{1}{2x} \right)$$

$$f(x) = x \log 2 + x \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o(1/x^2) \right)$$

$$f(x) = (\log 2)x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o(1/x)$$

On en déduit que la droite d'équation

$$y = (\log 2)x + \frac{1}{2}$$

est asymptote oblique à f en $+\infty$ et la courbe est en-dessous de l'asymptote.

— En $-\infty$ la droite d'équation

$$y = (\log 2)x + \frac{1}{2}$$

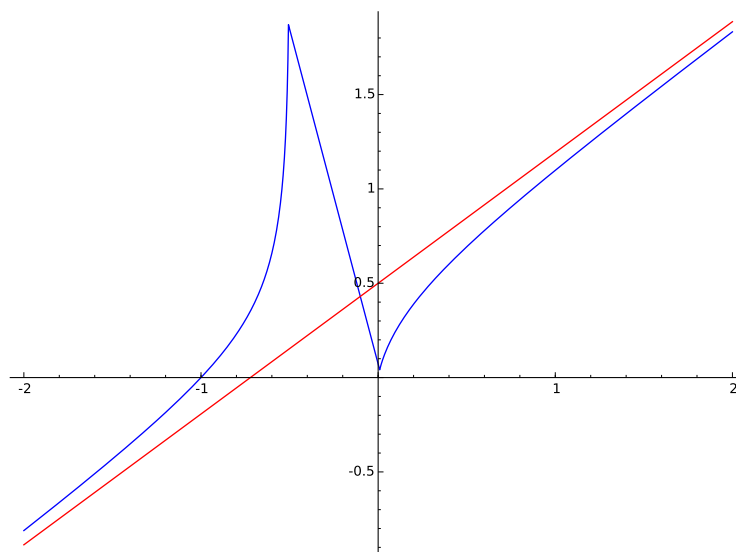
est également asymptote oblique à f en $-\infty$ et la courbe est au-dessus de l'asymptote.

— Pour ce qui est de la tangente en 0 :

$$f'(x) = \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right| - \frac{1}{2x+1}$$

et alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right| = +\infty.$$



Chapitre 4

Courbes et surfaces paramétrées

1 DÉFINITIONS

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ telle que $f(t) = (u(t), v(t))$.

DÉFINITION 1.1

Supposons que u, v sont continues.

Si u et v admettent un développement limité à l'ordre n au point t_0 :

$$u(t) = u_0 + u_1(t - t_0) + \dots + u_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

$$v(t) = v_0 + v_1(t - t_0) + \dots + v_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

alors f admet un développement limité à l'ordre n en t_0 :

$$f(t) = f_0 + (t - t_0)f_1 + \dots + (t - t_0)^n f_n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, f_i = (u_i, v_i).$$

L'égalité précédente s'appelle le *développement limité de f en t_0 à l'ordre n* .

REMARQUE. On a bien

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0).$$

DÉFINITION 1.2

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ s'appelle *courbe paramétrée de \mathbf{R}^2* .

Supposons que f est dérivable en $t_0 \in I$. f admet le développement limité en t_0 à l'ordre 1 suivant :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t).$$

2 TANGENTES

DÉFINITION 2.1

Si $f'(t_0) \neq 0$ alors la tangente à la courbe au point $f(t_0)$ est la droite affine passant par $f(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$. L'équation est

$$\det \begin{pmatrix} x - u(t_0) & u'(t_0) \\ y - v(t_0) & v'(t_0) \end{pmatrix} = 0.$$

En d'autres termes, c'est l'équation :

$$(y - v(t_0)) \cdot u'(t_0) - (x - u(t_0)) \cdot v'(t_0) = 0.$$

On se demande quelles sont les conditions à l'existence de la tangente en un point ainsi que la position de la tangente par rapport à la courbe.

REMARQUE. On retrouve l'étude des fonctions à valeurs dans \mathbf{R} si on a

$$f(t) = (t, v(t)).$$

Supposons que u, v admettent des développements limités en t_0 à l'ordre $n \geq 2$. On a

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)^2 w_2 + \dots + (t - t_0)^n w_n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

où $w_2, \dots, w_n \in \mathbf{R}^2$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = 0_{\mathbf{R}^2}$.

1. Supposons que $f'(t_0) \neq 0$ et $f'(t_0)$ est non colinéaire à w_2 . On tronque le développement limité à l'ordre 2 :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)^2 w_2 + (t - t_0)^2 \varepsilon(t).$$

Soient $(a(t), b(t))$ les coordonnées de $\varepsilon(t)$ dans la base $(f'(t_0), w_2)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(t) - f(t_0) &= \left(t - t_0 + (t - t_0)^2 a(t) \right) f'(t_0) + (t - t_0)^2 (b(t) + 1) w_2 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} a(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = 0. \end{aligned}$$

Selon la coordonnée de $f'(t_0)$ on a que $(t - t_0)^2 a(t)$ tend vers 0 et alors $t - t_0$ détermine le signe. Selon la coordonnée w_2 , dans un voisinage suffisamment petit de t_0 on a que la coordonnée est de signe positif.

2. Supposons que $f'(t_0) \neq 0$, $w_2 = \lambda f'(t_0)$ et enfin w_3 et $f'(t_0)$ non colinéaires. On a alors dans la base $(f'(t_0), w_3)$:

$$f(t) - f(t_0) = \left(t - t_0 + \lambda(t - t_0)^2 \right) f'(t_0) + (t - t_0)^3 w_3 + (t - t_0)^3 \varepsilon(t).$$

On décompose $\varepsilon(t)$ dans cette base :

$$\varepsilon(t) = a(t)f'(t_0) + b(t)w_3.$$

On sait que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = 0.$$

Dans cette base, on a :

$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} t - t_0 + \lambda(t - t_0)^2 + (t - t_0)^3 a(t) \\ (t - t_0)^3 + (t - t_0)^3 b(t) \end{pmatrix}$$

Sur chaque coordonnée, le signe est celui de $t - t_0$.

REMARQUE. Supposons $f'(t_0) \neq 0$, $n \geq 3$ et il existe un entier $p \in \{3, \dots, n\}$ tel que les vecteurs w_2, w_3, \dots, w_{p-1} sont colinéaires à $f'(t_0)$ et tel que w_p n'est pas colinéaire à $f'(t_0)$. Ainsi, $(f'(t_0), w_p)$ est une base de \mathbf{R}^2 .

On écrit le développement limité de $f(t) - f(t_0)$ dans cette base. On étudie le signe des coordonnées de $f(t) - f(t_0)$ quand $t \rightarrow t_0$. Si p est pair alors la courbe est comme dans le cas $p = 2$ (la courbe est du côté de w_p par rapport à la tangente), sinon comme dans le cas $p = 3$ (elle traverse la tangente).

3. Supposons que $f'(t_0) = 0$ et que w_2, w_3 forme une base de \mathbf{R}^2 . On a

$$f(t) - f(t_0) = (t - t_0)^2 w_2 + (t - t_0)^3 w_3 + (t - t_0)^3 \varepsilon(t).$$

On décompose $\varepsilon(t)$ dans la base $(w_2, w_3) : \varepsilon(t) = a(t)w_2 + b(t)w_3$ avec $\lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = 0$. Les coordonnées dans cette base de $f(t) - f(t_0)$ sont alors :

$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} (t - t_0)^2 + (t - t_0)^3 a(t) \\ (t - t_0)^3 + (t - t_0)^3 b(t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la première coordonnée est positive et la seconde est du signe de $t - t_0$. Une telle situation est un *point de rebroussement*.

4. Supposons que $f'(t_0) = 0$, $w_3 = \lambda w_2$ et w_2, w_4 forme une base. On pose $\varepsilon(t) = a(t)w_2 + b(t)w_4$. Dans ces coordonnées :

$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} (t - t_0)^2 + \lambda(t - t_0)^3 + (t - t_0)^4 a(t) \\ (t - t_0)^4 (1 + b(t)) \end{pmatrix}.$$

Les deux coordonnées sont positives quand $t \rightarrow t_0$. C'est aussi un point de rebroussement

3 BRANCHES INFINIES

DÉFINITION 3.1

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée avec $f = (u, v)$. Soit $t_0 \in \bar{I} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$.

- On a une *branche infinie* quand $t \rightarrow t_0$ si soit u ou soit v n'est pas bornée.
- Si $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = a \in \mathbf{R}$ et si $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = \pm\infty$ alors la droite $x = a$ est une *asymptote verticale*.
- Si $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = a \in \mathbf{R}$ alors la droite $y = a$ est *asymptote horizontale*.
- Si u et v tendent vers $\pm\infty$ en t_0 :
 - Si $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t)/u(t) = a \in \mathbf{R}$ alors la droite $y = ax$ est direction asymptotique.
 - Si de plus $\lim_{t \rightarrow t_0} (v(t) - au(t)) = b$ alors la droite $y = ax + b$ est asymptote.

EXEMPLE. Soit f :

$$f : \begin{cases} \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbf{R}^2 \\ t \mapsto (\tan(t), 2t - 1/\cos(t)) \end{cases}.$$

On étudie l'asymptote en $t_0 = \pi/2$.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = -\infty.$$

On étudie le rapport v/u en $t \rightarrow t_0$. On pose $t = \pi/2 + h$.

$$\begin{aligned} u(t) &= \tan(\pi/2 - h) = \frac{\sin(\pi/2 - h)}{\cos(\pi/2 - h)} \\ u(t) &= \frac{\cos(h)}{\sin(h)} = \frac{1 - h^2/2 + h^2\varepsilon(h)}{h - h^3/6 + h^3\varepsilon(h)} \\ u(t) &= \frac{1}{h} \left(1 - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h) \right) \frac{1}{1 - \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon(h)} \\ u(t) &= \frac{1}{h} \left(1 - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h) \right) \left(1 + \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon(h) \right) \\ u(t) &= \frac{1}{h} \left(1 - \frac{h^2}{3} + h^2\varepsilon(h) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \pi - 2h - \frac{1}{\cos(\pi/2 - h)} = \pi - 2h - \frac{1}{\sin(h)} \\ v(t) &= \pi - 2h - \frac{1}{h - \frac{h^3}{6} + h^3\varepsilon(h)} \\ v(t) &= \pi - 2h - \frac{1}{h} \left(\frac{1}{1 - \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon(h)} \right) \\ v(t) &= -\frac{1}{h} + \pi - \frac{13}{6}h + h\varepsilon(h) \\ \frac{v(t)}{u(t)} &= \frac{-\frac{1}{h} + \pi - \frac{13}{6}h + h\varepsilon(h)}{\frac{1}{h} - \frac{1}{3}h + h\varepsilon(h)} \\ \frac{v(t)}{u(t)} &= \frac{-1 + \pi h - \frac{13}{6}h^2 + h^2\varepsilon(h)}{1 - \frac{1}{3}h^2 + h^2\varepsilon(h)} \\ \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} v(t)/u(t) &= -1. \end{aligned}$$

Et donc $y = -x$ est direction asymptotique.

$$\begin{aligned} v(t) + u(t) &= -\frac{1}{h} + \pi - \frac{13}{6}h - \frac{1}{h} + \frac{1}{3}h + h\varepsilon(h) \\ \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} v(t) + u(t) &= \pi. \end{aligned}$$

Et donc la droite d'équation $y = -x + \pi$ est asymptote en t_0 .

4 ÉTUDE DE COURBES PARAMÉTRÉES

Soit :

$$f: \begin{cases} \mathbf{R} \setminus \{-1, +1\} \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ t \mapsto \left(\frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, \frac{t^2}{t - 1} \right) \end{cases}.$$

On a :

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} \\ v'(t) &= \frac{t(t - 2)}{(t - 1)^2}. \end{aligned}$$

Au voisinage $t = 0$:

$$u(t) = -1 - 2t^2 + t^3\varepsilon(t)$$

$$v(t) = -t^2 - t^3 + t^3\varepsilon(t)$$

$$f(t) = (-1, 0) + t^2(-2, -1) + t^3(0, -1) + t^3\varepsilon(t)$$

$$f(0) = (-1, 0), \quad f'(0) = (0, 0).$$

Les vecteurs $(-2, -1)$ et $(0, -1)$ sont linéairement indépendants.

$t = 0$ est un point singulier car $f'(0) = (0, 0)$.

BRANCHES INFINIES. On a :

— Une asymptote horizontale $y = -1/2$ quand $t \rightarrow -1$.

— Quand $t \rightarrow 1$:

$$\frac{v(t)}{u(t)} \frac{t^2(t+1)}{t^2+1} \xrightarrow{t \rightarrow 1} 1$$

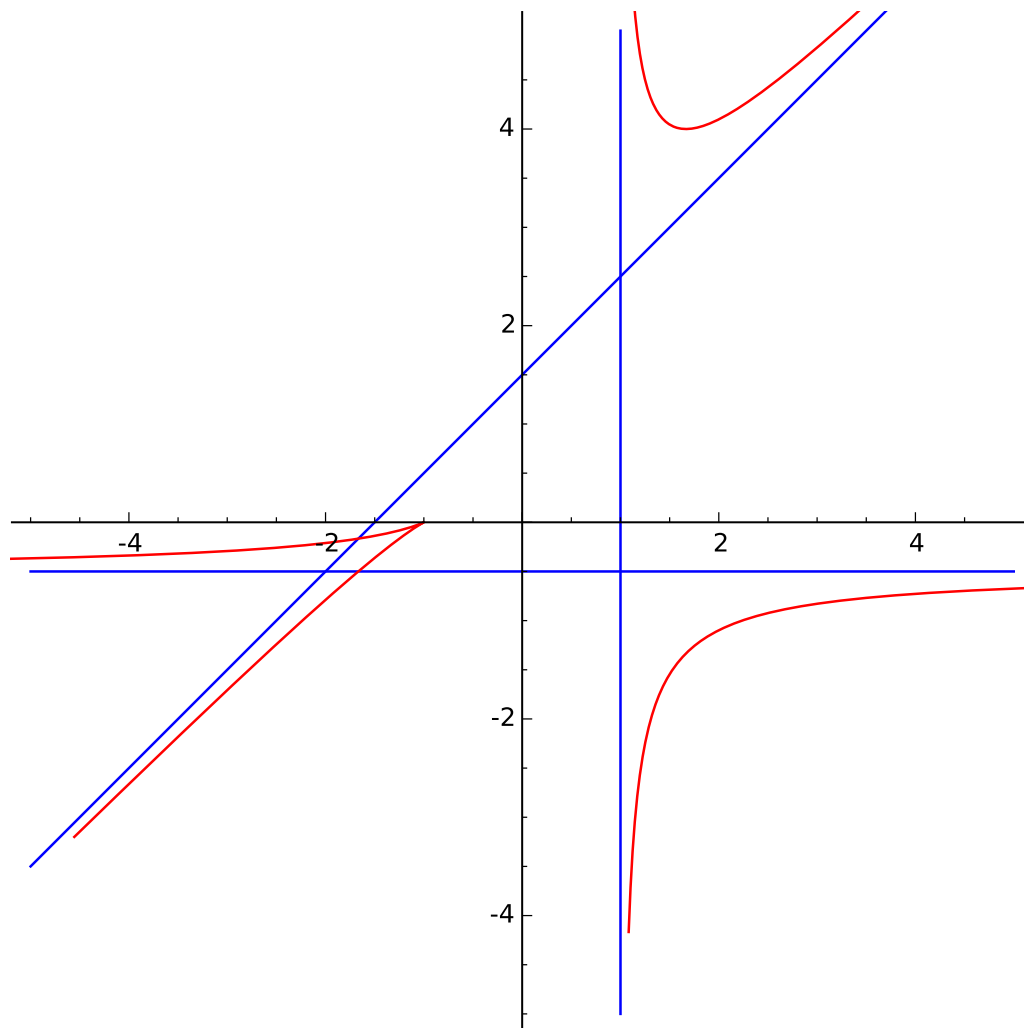
donc une direction asymptotique $y = x$.

$$v(t) - 1 \times u(t) = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1} \rightarrow \frac{3}{2}$$

et donc l'asymptote est $y = x + 3/2$.

— Quand $t \rightarrow -\infty$ alors $u \rightarrow 1$ et $v \rightarrow -\infty$. On a une branche infinie et $x = 1$ est asymptote verticale.

— Quand $t \rightarrow +\infty$ alors $u \rightarrow 1$ et $v \rightarrow \infty$. $x = 1$ est asymptote verticale.



Chapitre 5

Séries numériques

1 DÉFINITIONS

On considère des séries numériques, c'est-à-dire à valeurs dans \mathbf{R} .

DÉFINITION 1.1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite numérique.

On dit que la série $\sum u_n$ de terme général u_n converge si la suite de terme général

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

converge.

Si la suite s_n diverge, alors on dit que la série $\sum u_n$ de terme général u_n diverge.

Les s_n s'appellent les *sommes partielles*.

DÉFINITION 1.2

On note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

(quand elle est définie).

On l'appelle la *somme* de la série $(\sum u_n)$.

REMARQUE. La suite de terme général

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

converge si, et seulement si, la suite de terme général (pour n_0 fixé)

$$S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$$

converge.

PROPOSITION 1.3

Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0.

DÉMONSTRATION

Avec

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

et l la limite de s_n . Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de s_n , il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|l - s_n| < \varepsilon$. Et donc

$$|s_{n+1} - s_n| = |s_n + 1 - l + l - s_n| \leq |s_{n+1} - l| + |s_n - l| < 2\varepsilon.$$

Or

$$|s_{n+1} - s_n| = |u_{n+1}| < 2\varepsilon.$$

EXEMPLE – SÉRIES GÉOMÉTRIQUES. Soit $x \in \mathbf{R}$. On pose

$$u_n = a \cdot x^n.$$

On a

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

$$s_n = a \sum_{k=0}^n x^k$$

$$s_n = a \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{a}{1 - x} (1 - x^{n+1}).$$

- Si $|x| < 1$ alors $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $a/(1 - x)$.
- Si $|x| \geq 1$ alors la série $\sum ax^n$ diverge.

EXEMPLE – SÉRIE EXPONENTIELLE. Soit $x \in \mathbf{R}$. On regarde la série de terme général $x^n/n!$. Alors cette série a pour somme partielle :

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

et la formule de TAYLOR nous assure que s_n tend vers $\exp(x)$. La série est convergente pour tout x et de somme $\exp(x)$.

EXEMPLE. Soit $x \in \mathbf{R}$. On considère la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

- Si $|x| > 1$ alors la suite de terme général x^n/n ne converge pas et donc la série ne converge pas.
- Si $x = 1$ alors les sommes partielles sont

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Cependant

$$s_{2n} - s_n \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la série $\sum 1/n$ diverge.

— Si $-1 \leq x < 1$ alors pour tout $n \geq 1$, on pose

$$f_n: \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto 1 + t^2 + \dots + t^{n-1} \end{cases}$$

et pour tout $t \neq 1$:

$$f_n(t) = \frac{1 - t^n}{1 - t}$$

et alors

$$\frac{1}{1 - t} = f_n(t) + \frac{t^n}{1 - t}.$$

On peut intégrer, pour tout $x \in [-1, 1[$:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{1 - t} &= \int_0^x f_n(t) dt + \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt \\ -\log(1 - x) &= x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt \\ -\log(1 - x) &= s_n + \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt. \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'examiner la convergence du dernier terme.

1. Pour $0 \leq x < 1$, on a $0 \leq t \leq x < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{t^n}{1 - t} &\leq \frac{t^n}{1 - x} \\ \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt &\leq \frac{1}{1 - x} \int_0^x t^n dt \\ &\leq \frac{1}{1 - x} \frac{1}{n + 1} x^{n+1} \leq \frac{1}{1 - x} \frac{1}{n + 1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt = 0.$$

2. Pour $-1 \leq x < 0$, on a $1 \leq x \leq t \leq 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt \right| &\leq \int_x^0 \frac{|t|^n}{1 - t} dt \\ &\leq \int_x^0 |t|^n dt \int_x^0 |t|^n dt = (-1)^n \int_x^0 t^n dt \\ &= \frac{(-1)^n}{n + 1} [0 - x^{n+1}] \\ &= \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n + 1} \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{n + 1} \leq \frac{1}{n + 1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Et donc on a aussi une limite nulle.

Finalement, on peut conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt = 0.$$

Ainsi, les sommes partielles $\sum_{k=1}^n x^k/k$ ont pour limite $-\log(1 - x)$. La série converge donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1 - x).$$

REMARQUE. Posons une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$. On considère la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = a_n - a_{n+1}$. On a

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}.$$

Ainsi $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$ existe, c'est-à-dire si, et seulement si, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ existe.

EXEMPLE. On regarde la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

On a

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

EXEMPLE – NOMBRES DÉCIMAUX. On peut écrire un nombre réel comme $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \cdot 10^{-n}$ où $n_0 \in \mathbf{Z}$ et $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

2 OPÉRATIONS SUR LES SÉRIES

DÉFINITION 2.1

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries.

- La somme des séries est la série $\sum (u_n + v_n)$ de terme général $u_n + v_n$.
- Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Le produit de $\sum u_n$ par λ est la série $\sum \lambda u_n$ de terme général λu_n .

PROPOSITION 2.2

On a :

1. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors leur somme converge aussi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

2. Si la série $\sum u_n$ converge alors $\sum \lambda u_n$ aussi et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. Notons

$$U_n = \sum_{k=0}^n u_k ; V_n = \sum_{k=0}^n v_k.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n ; \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + V_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Par définition, $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ converge si, et seulement si, $\sum_{k=0}^n (u_k + v_k) = U_n + V_n$ converge. Donc on a bien, si $U_n + V_n$ converge :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

2. De même, en remarquant que $\sum \lambda u_n = \lambda \sum u_n$.

EXEMPLE. Soit $x \in \mathbf{R}$ et soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme. Il s'agit de montrer que la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{P(n)}{n!} x^n$$

est convergente et de donner sa somme. On se ramène à une combinaison linéaire de séries exponentielles :

$$\frac{P(n)}{n!} x^n = au_n + (a+b)v_n + cw_n$$

où

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n(n-1)}{n!} x^n \\ v_n &= \frac{n}{n!} x^n \\ w_n &= \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{P(k)}{k!} x^k &= P(0) + P(1)x + \sum_{k=2}^n \frac{P(k)}{k!} x^k \\ \sum_{k=0}^n \frac{P(k)}{k!} x^k &= c + (a+b+c)x + \sum_{k=2}^n \left((ax^2) \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} + (a+b)x \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + c \frac{x^k}{k!} \right) \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n &= c + (a+b+c)x + ax^2 e^x + (a+b)x(e^x - 1) + c(e^x - 2) \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n &= ax^2 e^x + (a+b)x e^x + c e^x \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n &= (ax^2 + (a+b)x + c) e^x. \end{aligned}$$

REMARQUE. On a vu qu'une somme de deux séries convergentes est convergente. On a aussi vu qu'une somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente. En effet, supposons que $\sum u_n$ converge et que $\sum v_n$ diverge. Considérons la série $\sum w_n = \sum (u_n + v_n)$. Supposons que $\sum_{k=0}^n w_k$ converge alors $\sum u_n$ et $\sum w_k$ convergent. Or, $\sum v_n = \sum (u_n - w_n)$ et ne peut converger. D'où :

PROPOSITION 2.3

Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n + v_n$ diverge.

REMARQUE. Une somme de deux séries divergentes peut converger ou diverger. En effet, considérons $\sum 1/n = \sum u_n$, c'est une série divergente. Cependant, $\sum u_n + \sum u_n$ diverge aussi, mais $\sum u_n - \sum u_n$ converge.

DÉFINITION 2.4

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries numériques. Considérons la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = a_n + ib_n \in \mathbf{C}$. On définit la convergence de $\sum u_n$ en disant qu'elle converge si, et seulement si, $(\sum_{k=0}^n u_k)$ converge, i.e. si, et seulement si, $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent.

3 CRITÈRES DE CONVERGENCE

3.1 Convergence des séries à terme positif

Soit $\sum u_n$ telle que $u_n \in \mathbf{R}_+$ pour tout n . On se demande à quelle condition la série $\sum u_n$ converge. Posons

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

La suite $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ainsi définie est croissante. Ainsi, $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente à l'unique condition qu'elle soit majorée. On a ainsi :

PROPOSITION 3.1

Une série de terme général positif converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles est majorée.

THÉORÈME 3.2 (De comparaison)

Soient $\sum u_n, \sum v_n$ des séries telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq u_n \leq v_n.$$

- Si la série $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ aussi.
- Si la série $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ aussi et sa somme est majorée par celle de $\sum v_n$.

DÉMONSTRATION

Notons

$$U_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

$$V_n = \sum_{k=0}^n v_k.$$

La proposition nous dit que $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est majorée et de même pour $\sum v_n$. Ainsi, si $\sum u_n$ diverge alors $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est non bornée et donc $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ non plus et donc $\sum v_n$ diverge.

Si $\sum v_n$ converge alors $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ étant majorée par $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui est majorée par un réel, donc $\sum u_n$ converge.

D'autre part, dans le second cas, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n. \end{aligned}$$

COROLLAIRE 3.3

Soient $\sum u_n, \sum v_n$ des séries de termes généraux u_n et v_n strictement positifs. Alors si la suite $(u_n/v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ a une limite finie non nulle alors on a $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum v_n$ converge.

DÉMONSTRATION

Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n/v_n$ avec $l \in \mathbf{R}^*$. Comme pour tout n , $u_n/v_n > 0$, on sait que $l > 0$. Fixons a, b tels que $0 < a < l < b$. Par convergence, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $a < u_n/v_n < b$, c'est-à-dire $av_n < u_n < bv_n$. Par le théorème de comparaison des séries, u_n converge si, et seulement si, v_n converge.

EXEMPLE 1. On considère la série de terme général

$$\forall n > 0, u_n = \frac{1}{n^2}.$$

On a vu que la série de terme général $v_n = 1/[n(n+1)]$ pour tout $n > 0$, converge. En effet $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et $\lim a_n = 0$ donc par le théorème de comparaison, $\sum v_n$ converge. On sait que

$$\forall n > 1, v_{n-1} > u_n$$

et

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi par le corollaire, $\sum u_n$ converge.

EXEMPLE 2. Considérons la série de terme général

$$u_n = \sin \left(\frac{\pi}{2^n} \right).$$

$$\forall n \geq 1, 0 < \frac{\pi}{2^n} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\forall n \geq 1, u_n \geq 0.$$

De plus

$$\forall x \in \mathbf{R}, |\sin x| \leq |x|$$

et donc

$$u_n = |u_n| \leq \frac{\pi}{2^n}.$$

La série de terme général v_n est une série géométrique de raison $1/2$. Donc elle converge et donc $\sum u_n$ converge.

EXEMPLE 3. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'entiers tels que $0 \leq x_n \leq 0$ pour tout $n \geq 0$. Considérons la série $\sum_{n \geq 0} x_n 10^{-n}$. Le terme général est positif et

$$0 \leq \frac{x_n}{10^n} \leq 10^{1-n}$$

et 10^{1-n} est le terme général d'une série géométrique de raison $1/10$. Cette série converge donc et donc $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ aussi.

3.2 Séries de RIEMANN

Soit $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$. On considère la série de terme général $1/n^\alpha$.

PROPOSITION 3.4

La série de terme général $1/n^\alpha$ avec $\alpha > 1$ converge. Elle diverge si $\alpha \leq 1$.

DÉMONSTRATION

Si $\alpha \leq 1$ alors pour tout $n \geq 1$, $n^\alpha \leq n$ et donc

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$$

or la série de terme général $1/n$ diverge.

Si $\alpha > 1$, on considère l'application

$$f : x \mapsto -\frac{1}{x^{\alpha-1}}.$$

De plus, $\alpha - 1 > 0$. On a :

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

Par le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[n, n+1]$:

$$f(n+1) - f(n) = f'(c)$$

avec $c \in]n, n+1[$. Comme

$$f'(x) = \frac{\alpha-1}{x^\alpha}$$

on a

$$f'(c) \geq \frac{\alpha-1}{(n+1)^\alpha}$$

et donc

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \geq \frac{\alpha-1}{(n+1)^\alpha}.$$

On pose

$$v_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

Les sommes partielles de $\sum v_n$ sont

$$\sum_{n=1}^k v_k = \frac{1}{1^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1.$$

Donc la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge, de somme 1.

On applique le théorème de comparaison, la série $\sum_{n \geq 1} 1/n^\alpha$ converge.

3.3 Convergence absolue**DÉFINITION 3.5**

Soit $\sum u_n$ une série de terme général u_n . Si la série de terme général $|u_n|$ est convergente, on dit que $\sum u_n$ est *absolument convergente*.

REMARQUE. Dans la définition, on peut prendre $u_n \in \mathbf{R}$ avec la valeur absolue ou $u_n \in \mathbf{C}$ avec le module.

THÉORÈME 3.6

Toute série absolument convergente est convergente.

DÉMONSTRATION

Soit $u_n \in \mathbf{R}$. On considère $v_n = |u_n| - u_n$. Par l'inégalité triangulaire :

$$0 \leq v_n \leq 2|u_n|.$$

Par hypothèse $\sum 2|u_n| = 2\sum |u_n|$ converge. Donc $\sum v_n$ converge par le théorème de comparaison. Comme $u_n = |u_n| - v_n$ on a que $\sum u_n$ converge.

Si $u_n \in \mathbf{C}$ alors en posant $u_n = a_n + ib_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbf{R}$ on a

$$0 \leq |a_n|, |b_n| \leq |u_n|.$$

Comme $\sum |u_n|$ converge, $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ aussi. Donc $\sum a_n$ et $\sum b_n$ converge et donc $\sum u_n$ aussi.

PROPOSITION 3.7

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

DÉMONSTRATION

Pour tout $k \geq 0$:

$$\left| \sum_{n=0}^k u_n \right| \leq \sum_{n=0}^k |u_n|$$

or $\sum |u_n|$ et $\sum u_n$ convergent et donc l'égalité tient pour $k = +\infty$.

REMARQUE. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors elles sont convergentes et donc leur $\sum u_n + v_n$ aussi. Mieux, $\sum u_n + v_n$ est absolument convergente. En effet $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$ et comme $\sum |u_n| + |v_n|$ est convergente, $\sum |u_n + v_n|$ est convergente.

EXEMPLE. Considérons la série de terme général

$$\frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$$

avec $\alpha \in \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}$.

$$\forall n \geq 1, \left| \frac{\cos nx}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

- si $\alpha > 1$ alors le théorème de comparaison conclut ;
- si $\alpha = 1$ et $x = 0$ alors le terme général est $1/n$ et la série diverge ;
- si $\alpha = 1$ et $x = \pi$ alors le terme général est $(-1)^n/n$ et alors la série converge (mais pas en valeur absolue).

EXEMPLE. Soit

$$u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n}, \quad |u_n| = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n} = \frac{2}{n\sqrt{n+2} + n\sqrt{n}}.$$

On a donc

$$|u_n| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

C'est une série de RIEMANN avec $\alpha = 3/2$ et donc la série $\sum u_n$ converge absolument.

3.4 Comparaison avec des séries géométriques

THÉORÈME 3.8 (Règle de D'ALEMBERT)

Soit $\sum u_n$ une série de terme général $u_n > 0$. S'il existe $K \in \mathbf{R}$ tel que $K < 1$ et pour tout n , $u_{n+1}/u_n \leq K$ alors $\sum u_n$ converge.

DÉMONSTRATION

On a :

$$u_n \leq K^n u_0$$

et donc comme $\sum K^n u_0$ converge, par le théorème de comparaison, $\sum u_n$ converge.

COROLLAIRE 3.9

Soit $\sum u_n$ la série dont le terme général, u_n , est strictement positif.

Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}/u_n = l$.

- Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge ;
- Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge.

DÉMONSTRATION

Supposons $l < 1$. Par définition, il existe n_0 et K entiers tels que $l < K < 1$ et pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1}/u_n \leq K$. Donc $\sum u_{n+n_0}$ converge et donc $\sum u_n$ aussi.

Supposons $l > 1$. Il existe n_0 et $K > 1$ tels que pour tout $n \geq n_0$ on a $u_{n+1}/u_n \geq K$. Donc $u_{n+1} \geq K u_n > u_n$ et donc $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

EXEMPLE. Soit $x \in \mathbf{R}$. On pose

$$u_n = n^2 x^n.$$

Si $x = 0$ alors $\sum u_n$ converge. Pour $x \neq 0$ on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} x.$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| > 0.$$

- Si $|x| < 1$ alors $\sum u_n$ est absolument convergente ;
- si $|x| > 1$ alors $\sum u_n$ n'est pas convergente ;
- si $|x| = 1$ alors la règle de D'ALEMBERT ne permet pas de conclure.

3.5 Règle de CAUCHY

THÉORÈME 3.10 (Règle de CAUCHY)

Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes positifs. S'il existe $K < 1$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \sqrt[n]{u_n} \leq K$$

alors la série $\sum u_n$ converge.

DÉMONSTRATION

On a que :

$$\forall n \geq 1, u_n \leq K^n.$$

D'autre part, $0 < K < 1$ donc la série de terme général K^n converge et donc $\sum u_n$ converge.

COROLLAIRE 3.11

Soit $\sum u_n$ de terme général positif. Supposons $\lim \sqrt[n]{u_n} = l$.

1. Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. Supposons $l < 1$. Fixons $0 < l < K < 1$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\sqrt[n]{u_n} \leq K$. On a alors $0 \leq u_n \leq K^n$ et donc on conclut.
2. Supposons $l > 1$. Fixons $0 < 1 < K < l$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\sqrt[n]{u_n} \geq K$. Ainsi, $u_n \geq K^n$ et donc comme $\sum K^n$ diverge, $\sum u_n$ aussi.

EXEMPLE. Si $u_n = x^n/n^n$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi,

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, $\sum x^n/n^n$ converge.

Règle de Riemann On a que $\sum 1/n^\alpha$ converge pour $\alpha > 1$. Ainsi :

THÉORÈME 3.12 (Règle de RIEMANN)

Soit $\sum u_n$ de terme général positif et soit α un réel strictement positif.

1. Si $\lim n^\alpha u_n$ existe et est non nulle alors la série de terme général u_n converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
2. Si $\lim n^\alpha u_n = 0$ et si $\alpha > 1$ alors la série de terme général u_n converge.
3. Si $\lim n u_n = +\infty$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

DÉMONSTRATION

Posons

$$v_n = \frac{1}{n^\alpha}.$$

On a

$$\frac{u_n}{v_n} = n^\alpha u_n.$$

1. Le théorème de comparaison entraîne que si $\sum u_n$ et si $\sum v_n$ sont à termes généraux strictement positifs telles que la suite u_n/v_n a une limite non nulle, alors $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum v_n$ converge.
2. On a alors pour n assez grand $u_n \leq 1/n^\alpha$ et donc $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$.
3. Pour n assez grand, $n u_n \geq 1$ et donc $u_n \geq 1/n$ et donc $\sum u_n$ diverge puisque $\sum 1/n$ diverge.

EXEMPLE. Avec

$$u_n = \frac{\log n}{n^2}$$

alors, comme

$$\lim n^{\frac{3}{2}} u_n = 0$$

et comme $3/2 > 1$, $u_n \geq 0$ on a bien que $\sum u_n$ converge.

REMARQUE. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\log n + 1}{\log n} \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

et cela tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Le critère de D'ALEMBERT ne permettait pas de conclure.

REMARQUE. Les critères de D'ALEMBERT, CAUCHY ou RIEMANN ne sont pas valables pour les séries à termes négatifs. Si u_n est à valeurs négatives, on peut appliquer ces critères à $|u_n|$.

3.6 Comparaison avec des intégrales

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ une fonction numérique. Supposons que $f(x) \geq x$ pour tout x et supposons que f est décroissante. Pour tous entiers $p < q$ supérieurs à a on a

$$\sum_{n=p}^q f(n) \leq \int_p^q f(t) dt.$$

LEMME 3.13

Pour tous $a \leq p < q$ entiers. On a

$$f(q) + \int_p^q f(t) dt \leq \sum_{n=p}^q f(n) \leq f(p) + \int_p^q f(t) dt.$$

DÉMONSTRATION

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $p < n < q$. Comme f est décroissante, $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ pour tout $t \in [p, q]$.

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \int_n^{n+1} f(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \int_n^{n+1} f(n) dt = f(n) \\ f(n+1) &\leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n). \end{aligned}$$

On somme alors sur $n \in [p, q[$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^{q-1} f(n+1) &\leq \int_p^q f(t) dt \leq \sum_{n=p}^{q-1} f(n) \\ f(q) + \int_p^q f(t) dt &\leq \sum_{n=p}^q f(n) \leq f(p) + \int_p^q f(t) dt. \end{aligned}$$

EXEMPLE. Soit $\alpha > 0$. On pose

$$u_n = \frac{1}{n(\log n)^\alpha}.$$

On a $\lim u_{n+1}/u_n = 1$. $n^\beta u_n$ ne converge pas pour $\beta > 1$. Si $\beta \leq 1$ alors $n^\beta u_n$ converge vers 0. Cependant :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x(\log x)^\alpha}$$

est décroissante sur $[2, +\infty[$. De plus, $f(x) > 0$ pour tout x dans cet intervalle. Ainsi, considérons l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int f(t) dt &= \int \frac{1}{t(\log t)^\alpha} dt. \\ \int f(t) dt &= \int (\log t)^{-\alpha} \frac{dt}{t} \\ \int f(t) dt &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (\log t)^{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \log(\log t) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \\ \int_2^x f(t) dt &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} ((\log x)^{1-\alpha} - (\log 2)^{1-\alpha}) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \log(\log x) - \log(\log 2) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

— Si $\alpha = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x f(t) dt = +\infty.$$

Le lemme précédent nous dit que :

$$\sum_{2 \leq n \leq x} f(n) \geq f(x) + \int_2^x f(t) dt$$

et donc $\sum u_n$ est divergente.

— Si $\alpha < 1$ alors $1 - \alpha > 0$ et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x f(t) dt = +\infty.$$

De même, la série $\sum u_n$ diverge.

— Si $\alpha > 1$ alors $1 - \alpha < 0$ et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x f(t) dt = \frac{1}{\alpha - 1} (\log 2)^{1-\alpha}.$$

Le lemme dit que

$$\sum_{n=2}^x u_n \leq f(2) + \int_2^x f(t) dt$$

et donc $\sum u_n$ converge.

Ainsi, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

3.7 Séries alternées

DÉFINITION 3.14

Une *série alternée* est une série $\sum u_n$ telle que u_n et $-u_{n+1}$ ont le même signe pour n assez grand.

THÉORÈME 3.15 (Critère des séries alternées)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de termes réels strictement positifs. Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante et a pour limite 0 alors la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge.

D'autre part, si $\sum (-1)^n a_n = S$ alors pour tout n on a

$$s_n \leq S \leq s_{n+1}$$

et

$$|S - s_n| \leq a_{n+1}.$$

DÉMONSTRATION

On considère les sous-suites :

$$\begin{aligned}s_{2p} &= a_0 - a_1 + \dots + a_{2p} \\ s_{2p+1} &= a_0 - a_1 + \dots + a_{2p} - a_{2p+1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_{2p+2} - s_{2p} &= a_{2p+2} - a_{2p+1} \leq 0 \\ s_{2p+3} - s_{2p+1} &= a_{2p+2} - a_{2p+3} \geq 0.\end{aligned}$$

Ainsi, les sous-suites $(s_{2p})_{p \in \mathbf{N}}$ et $(s_{2p+1})_{p \in \mathbf{N}}$ sont respectivement décroissante et croissante. D'autre part,

$$\lim s_{2p+1} - s_{2p} = \lim -a_{2p+1} = 0.$$

Ces suites sont adjacentes et leurs différences tendent vers 0. Ainsi, (s_p) est convergente et donc $\sum u_n$ converge.

EXEMPLE. Prenons

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

avec $\alpha \in \mathbf{R}$. Elle n'est pas absolument convergente pour tout α .

- $\alpha = 1$: on a vu que $\sum u_n = -\log(2)$;
- $\alpha > 1$: $\sum u_n$ est absolument convergente ;
- pour $0 < \alpha < 1$: on a $a_n = 1/n^\alpha \geq 0$ est décroissante et de limite nulle, donc $\sum u_n$ est convergente (mais pas absolument).

3.8 Application des développements limités à la convergence

EXEMPLE 1. Soit

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

On considère la fonction

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(x).$$

On a $u_n = f(1/n)$ et on regarde le développement limité de f au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \\ f(x) &= \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \right) \\ &= \frac{x^{5/2}}{6} + x^{5/2} \varepsilon(x) \\ u_n &= \frac{n^{-5/2}}{6} + n^{-5/2} \varepsilon(1/n),\end{aligned}$$

et donc il existe n_0 tel que u_n est du signe de $n^{-5/2}/6$ pour $n \geq n_0$. Donc on peut considérer u_n comme une série de terme général positif telle que $n^{5/2}u_n$ tend vers $1/6$. Par le critère de RIEMANN, cette série converge et donc $\sum u_n$ aussi.

EXEMPLE 2. Soit $a \in \mathbf{R}$ et soit

$$u_n = (n^2 + 1)^a - (n^2 - 1)^a.$$

- Si $a = 0$ alors $u_n = 0$ et $\sum u_n$ converge.

— Si $a \neq 0$, on calcule :

$$\begin{aligned} u_n &= n^{2a} \left(\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^a - \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^a \right) \\ u_n &= f(1/n), \\ f(x) &= \frac{1}{x^{2a}} \left((1+x^2)^a - (1-x^2)^a \right). \end{aligned}$$

On fait un développement limité de f en 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{-2a} (1 + ax^2 - (1 - ax^2) + x^3 \varepsilon(x)) \\ f(x) &= x^{-2a} (2ax^2 + x^3 \varepsilon(x)) \\ f(x) &= 2ax^{2(1-a)} + x^{3-2a} \varepsilon(x). \end{aligned}$$

Ainsi

$$u_n = \frac{2a}{n^{2(1-a)}} + \frac{\varepsilon(1/n)}{n^{2(1-a)+1}}$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2(1-a)} u_n = 2a$$

et u_n est une suite de terme général du signe de a au moins à partir d'un certain rang. Par le critère de RIEMANN :

- Si $a > 0$, alors u_n est à terme général positif ;
- si $a \geq 1/2$ alors $2(1-a) \leq 1$ et donc la série $\sum u_n$ est divergente ;
- si $a < 1/2$ alors $2(1-a) > 1$ donc la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si $a < 0$ alors u_n est négatif. On applique le critère à $\sum -u_n$. On a $2(1-a) > 2$ et donc $\sum -u_n$ est convergente et donc $\sum u_n$ est convergente.

4 TRANSFORMATION D'ABEL

Soient $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites à valeurs complexes. Soit $p \in \mathbf{N}$. On pose

$$\forall n \geq p, B_n = \sum_{k=p}^n b_k.$$

Dans la somme (avec $q \geq p$) :

$$\sum_{n=p}^q a_n b_n$$

on remplace les b_n par $B_n - B_{n-1}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^q a_n b_n &= \sum_{n=p}^q a_n (B_n - B_{n-1}) \\ &= \sum_{n=p}^q [a_n B_n] - \sum_{n=p}^q [a_n B_{n-1}]. \end{aligned}$$

LEMME 4.1

Supposons que les a_n sont des réels positifs et que $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante. Supposons également que les B_n avec $n \geq p$ sont majorés en valeur absolue par B . Alors on a :

$$\forall q > p, \left| \sum_{n=p}^q a_n b_n \right| \leq a_p B.$$

DÉMONSTRATION

On a $a_n - a_{n+1} \geq 0$ puisque $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante. Ainsi $|(a_n - a_{n+1})B_n| = (a_n - a_{n+1})B_n$. Ainsi,

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n b_n \right| = \left| \sum_{n=p}^{q-1} [(a_k - a_{k+1})B_k] + a_q B_q \right|$$

et donc

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=p}^q a_n b_n \right| &\leq \sum_{k=p}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) |B_k| + a_q |B_q| \\ \left| \sum_{n=p}^q a_n b_n \right| &\leq \left(\sum_{n=p}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) + a_q \right) B \\ \left| \sum_{n=p}^q a_n b_n \right| &\leq a_p B. \end{aligned}$$

COROLLAIRE 4.2

Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite à termes réels positifs décroissante. Soit $x \in]0, 2\pi[$, posons $z = \cos x + i \sin x$. Pour tous $p, q \in \mathbf{R}$ tels que $p < q$:

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n z^n \right| \leq \frac{a_p}{\sin(x/2)}.$$

PROPOSITION 4.3

Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite décroissante de réels tels que $\lim a_n = 0$. Alors la série de terme général $a_n \cos(nx)$ est convergente pour tout $x \in \mathbf{R} - 2\pi\mathbf{Z}$. De plus, la série de terme général $a_n \sin(nx)$ converge pour tout $x \in \mathbf{R}$.

DÉMONSTRATION (Corollaire)

On considère la somme partielle :

$$\sum_{n=p}^q a_n z^n.$$

On applique le lemme avec $b_n = z^n$. Il faut vérifier que pour tout n , $|B_n| \leq B$ avec $B = 1/\sin(x/2)$ et $B_n = \sum z^n$ pour $p \leq n \leq q$.

$$\begin{aligned} B_n &= z^p \frac{1 - z^{n-p+1}}{1 - z}, \\ 1 - z &= 1 - \cos x - i \sin x \\ 1 - z &= 2 \sin^2(x/2) - 2i \sin(x/2) \cos(x/2) \\ 1 - z &= 2 \sin(x/2) (\sin(x/2) - i \cos(x/2)) \\ |1 - z| &= 2 \sin(x/2), \\ \left| z^p \frac{1 - z^{n-p+1}}{1 - z} \right| &= \frac{1}{2 \sin(x/2)} |z^p| |(1 - z^{n-p+1})| \\ \left| z^p \frac{1 - z^{n-p+1}}{1 - z} \right| &\leq \frac{1}{2 \sin(x/2)} |z^p| (1 + |z|^{n-p+1}) \\ \left| z^p \frac{1 - z^{n-p+1}}{1 - z} \right| &\leq \frac{2}{\sin(x/2)}. \end{aligned}$$

Chapitre 6

Intégrales

1 FONCTIONS ÉTAGÉES

Soit $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$ un intervalle.

DÉFINITION 1.1

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est *étagée* s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que f est constante sur $]x_{i-1}, x_i[$. Une telle subdivision est dite *adaptée* à f .

LEMME 1.2

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction étagée. Soit x_0, x_1, \dots, x_n une subdivision de I adaptée à f . Posons $m_i = f(x)$ pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[$ avec $i \in \{1, \dots, n\}$.

Alors le nombre $(x_1 - x_0)m_1 + (x_2 - x_1)m_2 + \dots + (x_n - x_{n-1})m_n$ ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie.

DÉFINITION 1.3

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ étagée et x_0, x_1, \dots, x_n une subdivision adaptée à f . Posons m_i la valeur de f sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$. La somme

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})m_i$$

s'appelle *l'intégrale* de f sur I et se note

$$\int_a^b f(t) dt.$$

REMARQUE. Si f est à valeurs positives et étagée, alors son intégrale est l'aire délimitée par le graphe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Si f est constante alors son intégrale est égale à $(b - a)f(x)$ pour n'importe quel $x \in I$.

PROPOSITION 1.4

Soient f, g deux fonctions étagées sur I .

1. si $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda f + g$ est étagée et

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt ;$$

2. si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in I$ alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt ;$$

3. si f et g diffèrent en un nombre fini de points de I alors leurs intégrales sont identiques ;

4. pour tout $c \in I$:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

DÉMONSTRATION

Soient $\{x_i\}$ et $\{y_j\}$ des subdivisions adaptées respectives à f et g . Soit $\{z_k\} = \{x_i\} \cup \{y_j\}$, c'est une subdivision adaptée à $\lambda f + g$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda f + g)(t) dt &= \sum_{p=1}^k (z_{p-1} - z_p) \cdot (\lambda f + g)_p \\ \int_a^b (\lambda f + g)(t) dt &= \sum_{p=1}^k (z_{p-1} - z_p) \cdot (\lambda f_p + g_p) \\ \int_a^b (\lambda f + g)(t) dt &= \sum_{p=1}^k \lambda (z_{p-1} - z_p) f_p + \sum_{p=1}^k (z_{p-1} - z_p) g_p \\ \int_a^b (\lambda f + g)(t) dt &= \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt. \end{aligned}$$

Remarquons enfin qu'une application nulle sauf en un nombre fini de points est d'intégrale nulle.

2 FONCTIONS INTÉGRABLES

Soit $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$ un intervalle.

2.1 Critère d'intégrabilité

DÉFINITION 2.1

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$. On dit que f est *intégrable* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions étagées $u, U : I \rightarrow \mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in I, u(x) \leq f(x) \leq U(x)$$

et

$$\int_a^b (U - u)(t) dt < \varepsilon.$$

REMARQUE. Une fonction étagée est intégrable avec $u = U = f$.

On considère E_- l'ensemble des fonctions étagées inférieures à f en tout point. On considère de même E_+ celles qui sont supérieures à f en tout point. On pose

$$A = \left\{ \int_a^b u(t) dt \mid u \in E_- \right\} \subset \mathbf{R} ; B = \left\{ \int_a^b U(t) dt \mid U \in E_+ \right\} \subset \mathbf{R}.$$

On remarque que pour tout $\alpha \in A$ et tout $\beta \in B$, on a $\alpha \leq \beta$. D'autre part, comme f est intégrable :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in A, \exists \beta \in B, \forall x \in I, 0 \leq \beta(x) - \alpha(x) < \varepsilon.$$

A est majorée donc $\sup A \in \mathbf{R}$ et de même, $\inf B \in \mathbf{R}$. Par la propriété ci-dessus :

$$\sup A = \inf B.$$

DÉFINITION 2.2

On appelle le réel $\sup A = \inf B$ l'intégrale de f sur $[a, b]$ et on le note

$$\int_a^b f(t) dt.$$

2.2 Propriétés de l'intégrale

PROPOSITION 2.3

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$ intégrables.

1. si $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda f + g$ intégrable et

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt ;$$

2. si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in I$

$$\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt ;$$

3. si f, g diffèrent en un nombre fini de points, leurs intégrales sont identiques ;
4. pour tout $c \in I$:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

DÉMONSTRATION

Soient u, U, v, V étagées telles que pour tout $x \in I$:

$$u(x) \leq f(x) \leq U(x)$$

et

$$v(x) \leq f(x) \leq V(x).$$

Par définition, si

$$0 \leq \int_a^b U(t) - u(t) dt < \varepsilon$$

et de même pour v, V alors

$$\lambda u + v \leq \lambda f + g \leq \lambda U + v$$

et

$$0 \leq \left| \int_a^b (\lambda U + v)(t) dt - \int_a^b (\lambda u + v)(t) dt \right| < |\lambda + 1| \varepsilon.$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on en déduit que $\lambda f + g$ est intégrable et on a l'égalité voulue.

COROLLAIRE 2.4

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ intégrable. Si $M, m \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall x \in I, m \leq f(x) \leq M$$

alors

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a)M.$$

THÉORÈME 2.5

Si $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est continue, alors elle est intégrable.

PROPOSITION 2.6

Si $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est continue alors il existe $c \in I = [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t) dt = (b-a)f(c).$$

DÉMONSTRATION

Puisque f est continue sur $[a, b]$, il existe $m \leq M$ tel que $f(I) = [m, M]$. Par le corollaire,

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq M.$$

Donc il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = c.$$

THÉORÈME 2.7

Si f est monotone alors elle est intégrable.

DÉMONSTRATION

On suppose f croissante. Fixons $n \in \mathbf{N}^*$ et posons la subdivision :

$$\left\{ x_i = a + i \frac{b-a}{n} \mid i \in \{0, \dots, n\} \right\}.$$

On définit les fonctions étagées u, U telles que

$$u(x) = \begin{cases} f(x_i) & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}[\text{ et } i \in \{0, \dots, n-1\} \\ f(b) & \text{si } x = b \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} f(a) & \text{si } x = a \\ f(x_{i+1}) & \text{si } x \in]x_i, x_{i+1}] \text{ et } i \in \{0, \dots, n-1\} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\int_a^b U(t) dt - \int_a^b u(t) dt = -\frac{b-a}{n} f(x_0) + \frac{b-a}{n} f(x_n) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)).$$

Donc pour n assez grand, on a bien une majoration par ε et donc f est intégrable.