SÉRIES NUMÉRIQUES

Table des matières

1. Définitions

On considère des séries numériques, c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Définition 1.1
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite numérique.
On dit que la série Σu_n de terme général u_n converge si la suite de terme général

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

converge.
Si la suite s_n diverge, alors on dit que la série Σu_n de terme général u_n diverge.
Les s_n s'appellent les *sommes partielles*.

Définition 1.2
On note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} s_n$$

(quand elle est définie).
On l'appelle la *somme* de la série (Σu_n).

Remarque. — La suite de terme général

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

converge si, et seulement si, la suite de terme général (pour n_0 fixé)

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

converge.

Proposition 1.3
Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Démonstration
Avec

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

et l la limite de s_n. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de s_n, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n$, $|l - s_n| < \varepsilon$. Et donc

$$|s_{n+1} - s_n| = |s_n + 1 - l + l - s_n| \leq |s_{n+1} - l| + |s_n - l| < 2\varepsilon.$$

Or

$$|s_{n+1} - s_n| = |u_{n+1}| < 2\varepsilon.$$

Exemple – Séries géométriques. — Soit $x \in \mathbf{R}$. On pose

$$u_n = a \cdot x^n.$$

On a

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
$$s_n = a \sum_{k=0}^{n} x^n$$
$$s_n = a\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{a}{1 - x}(1 - x^{n+1}).$$

— Si $|x| < 1$ alors $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $a/(1 - x)$.

— Si $|x| \geq 1$ alors la série $\sum ax^n$ diverge.

Exemple – Série exponentielle. — Soit $x \in \mathbf{R}$. On regarde la série de terme général $x^n/n!$. Alors cette série a pour somme partielle :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

et la formule de Taylor nous assure que s_n tend vers $\exp(x)$. La série est convergente pour tout x et de somme $\exp(x)$.

Exemple. — Soit $x \in \mathbf{R}$. On considère la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

— Si $|x| > 1$ alors la suite de terme général x^n/n ne converge pas et donc la série ne converge pas.

— Si $x = 1$ alors les sommes partielles sont

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Cependant

$$s_{2n} - s_n \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la série $\sum 1/n$ diverge.

— Si $-1 \leq x < 1$ alors pour tout $n \geq 1$, on pose

$$f_n \colon \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ t \mapsto 1 + t^2 + \ldots + t^{n-1} \end{cases}$$

et pour tout $t \neq 1$:

$$f_n(t) = \frac{1 - t^n}{1 - t}$$

et alors

$$\frac{1}{1-t} = f_n(t) + \frac{t^n}{1-t}.$$

On peut intégrer, pour tout $x \in [-1, 1[$:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} &= \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \\ -\log(1-x) &= x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ -\log(1-x) &= s_n + \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'examiner la convergence du dernier terme.

1. Pour $0 \leq x < 1$, on a $0 \leq t \leq x < 1$:
$$\frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$$
$$\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t$$
$$\leq \frac{1}{1-x}\frac{1}{n+1}x^{n+1} \leq \frac{1}{1-x}\frac{1}{n+1} \to 0$$
et donc
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0.$$
2. Pour $1 \leq x < 0$, on a $1 \leq x \leq t \leq 0$:
$$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^0 \frac{|t|^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$$
$$\leq \int_x^0 |t|^n\,\mathrm{d}t \int_x^0 |t|^n\,\mathrm{d}t \qquad = (-1)^n\int_x^0 t^n\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{(-1)^n}{n+1}[0-x^{n+1}]$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n+1}$$
$$= \frac{|x|^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0.$$
Et donc on a aussi une limite nulle.

Finalement, on peut conclure que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$
Ainsi, les sommes partielles $\sum_{k=1}^n x^k/k$ ont pour limite $-\log(1-x)$. La série converge donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\log(1-x).$$

Remarque. — Posons une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On considère la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = a_n - a_{n+1}$. On a
$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}.$$
Ainsi $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n u_k$ existe, c'est-à-dire si, et seulement si, $\lim_{n\to+\infty} a_n$ existe.

Exemple. — On regarde la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

On a

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Exemple – nombres décimaux. — On peut écrire un nombre réel comme $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \cdot 10^{-n}$ où $n_0 \in \mathbf{Z}$ et $a_n \in \{0, 1, \ldots, 0\}$.

2. Opérations sur les séries

Définition 2.1

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries.

— La somme des séries est la série $\sum(u_n + v_n)$ de terme général $u_n + v_n$.

— Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Le produit de $\sum u_n$ par λ est la série $\sum \lambda u_n$ de terme général λu_n.

Proposition 2.2

On a :

1. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors leur somme converge aussi
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
2. Si la série $\sum u_n$ converge alors $\sum \lambda u_n$ aussi et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Démonstration

Dans l'ordre :

1. Notons
$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \ ; \ V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$
Alors
$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \ ; \ \lim_{n\to+\infty} V_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
Donc
$$\lim_{n\to+\infty} (U_n + V_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Par définition, $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ converge si, et seulement si, $\sum_{k=0}^{n}(u_k+v_k)=U_n+V_n$ converge. Donc on a bien, si U_n+V_n converge :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n+v_n=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n+\sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

2. De même, en remarquant que $\sum \lambda u_n=\lambda\sum u_n$.

Exemple. — Soit $x\in\mathbf{R}$ et soit $P(X)=aX^2+bX+c$ un polynôme. Il s'agit de montrer que la série

$$\sum_{n\geq 0}\frac{P(n)}{n!}x^n$$

et convergente et de donner sa somme. On se ramène à une combinaison linéaire de séries exponentielles :

$$\frac{P(n)}{n!}x^n=au_n+(a+b)v_n+cw_n$$

où

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n(n-1)}{n!}x^n\\ v_n &= \frac{n}{n!}x^n\\ w_n &= \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{P(k)}{k!}x^k &= P(0)+P(1)a+\sum_{k=2}^{n}\frac{P(k)}{k!}x^k\\
\sum_{k=0}^{n}\frac{P(k)}{k!}x^k &= c+(a+b+c)x+\sum_{k=2}^{n}\left((ax^2)\frac{x^{k-2}}{(k-2)!}+(a+b)x\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}+c\frac{x^k}{k!}\right)\\
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n &= c+(a+b+c)x+ax^2e^x+(a+b)x(e^x-1)+c(e^x-2)\\
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n &= ax^2e^x+(a+b)xe^x+ce^x\\
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n &= (ax^2+(a+b)x+c)e^x.
\end{aligned}$$

Remarque. — On a vu qu'une somme de deux séries convergentes est convergente. On a aussi qu'une somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente. En effet, supposons que $\sum u_n$ converge et que $\sum v_n$ diverge. Considérons la série $\sum w_n=\sum(u_n+v_n)$. Supposons que $\sum_{k=0}^{n} w_k$ converge alors $\sum u_n$ et $\sum w_k$ convergent. Or, $\sum v_n=\sum(u_n-w_n)$ et ne peut converger. D'où :

Proposition 2.3
Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n + v_n$ diverge.

Remarque. — Une somme de deux séries divergentes peut converger ou diverger. En effet, considérons $\sum 1/n = \sum u_n$, c'est une série divergente. Cependant, $\sum u_n + \sum u_n$ diverge aussi, mais $\sum u_n - \sum u_n$ converge.

Définition 2.4
Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries numériques. Considérons la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = a_n + ib_n \in \mathbf{C}$. On définit la convergence de $\sum u_n$ en disant qu'elle converge si, et seulement si, $(\sum_{k=0}^{n} u_k)$ converge, i.e. si, et seulement si, $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent.

3. Critères de convergence

3.1. Convergence des séries à terme positif

Soit $\sum u_n$ telle que $u_n \in \mathbf{R}_+$ pour tout n. On se demande à quelle condition la série $\sum u_n$ converge. Posons

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_n.$$

La suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ainsi définie est croissante. Ainsi, $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente à l'unique condition qu'elle soit majorée. On a ainsi :

Proposition 3.1
Une série de terme général positif converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles est majorée.

Théorème 3.2 (De comparaison)
Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ des séries telles que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n.$$

— Si la série $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ aussi.
— Si la série $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ aussi et sa somme est majorée par celle de $\sum v_n$.

Démonstration
Notons

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
$$V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

La proposition nous dit que $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée et de même pour $\sum v_n$. Ainsi, si $\sum u_n$ diverge alors $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est non bornée et donc $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ non plus et donc $\sum v_n$ diverge.
Si $\sum v_n$ converge alors $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant majorée par $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui est majorée par un réel, donc $\sum u_n$ converge.
D'autre part, dans le second cas, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} U_n \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} V_n \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.\end{aligned}$$

Corollaire 3.3
Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ des séries de termes généraux u_n et v_n strictement positifs. Alors si la suite $(u_n/v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite finie non nulle alors on a $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum v_n$ converge.

Démonstration
Soit $l = \lim_{n\to+\infty} u_n/v_n$ avec $l \in \mathbf{R}^*$. Comme pour tout n, $u_n/v_n > 0$, on sait que $l > 0$. Fixons a, b tels que $0 < a < l < b$. Par convergence, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $a < u_n/v_n < b$, c'est-à-dire $av_n < u_n < bv_n$. Par le théorème de comparaison des séries, u_n converge si, et seulement si, v_n converge.

Exemple 1. — On considère la série de terme général

$$\forall n > 0,\ u_n = \frac{1}{n^2}.$$

On a vu que la série de terme général $v_n = 1/[n(n+1)]$ pour tout $n > 0$, converge. En effet $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et $\lim a_n = 0$ donc par le théorème de comparaison, $\sum v_n$ converge. On sait que

$$\forall n > 1,\ v_{n-1} > u_n$$

et

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi par le corollaire, $\sum u_n$ converge.

Exemple 2. — Considérons la série de terme général

$$u_n = \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

$$\forall n \geq 1,\ 0 < \frac{\pi}{2^n} \leq \frac{\pi}{2}$$
$$\forall n \geq 1,\ u_n \geq 0.$$

De plus
$$\forall x \in \mathbf{R},\ |\sin x| \leq |x|$$
et donc
$$u_n = |u_n| \leq \frac{\pi}{2^n}.$$
La série de terme général v_n est une série géométrique de raison $1/2$. Donc elle converge et donc $\sum u_n$ converge.

EXEMPLE 3. — Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'entiers tels que $0 \leq x_n \leq 0$ pour tout $n \geq 0$. Considérons la série $\sum_{n\geq 0} x_n 10^{-n}$. Le terme général est positif et
$$0 \leq \frac{x_n}{10^n} \leq 10^{1-n}$$
et 10^{1-n} est le terme général d'une série géométrique de raison $1/10$. Cette série converge donc et donc $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ aussi.

3.2. Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$. On considère la série de terme général $1/n^\alpha$.

PROPOSITION 3.4
La série de terme général $1/n^\alpha$ avec $\alpha > 1$ converge. Elle diverge si $\alpha \leq 1$.

DÉMONSTRATION
Si $\alpha \leq 1$ alors pour tout $n \geq 1$, $n^\alpha \leq n$ et donc
$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$$
or la série de terme général $1/n$ diverge.
Si $\alpha > 1$, on considère l'application
$$f : x \mapsto -\frac{1}{x^{\alpha-1}}.$$
De plus, $\alpha - 1 > 0$. On a :
$$f(n+1) - f(n) = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$
Par le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[n, n+1]$:
$$f(n+1) - f(n) = f'(c)$$
avec $c \in]n, n+1[$. Comme
$$f'(x) = \frac{\alpha-1}{x^\alpha}$$
on a
$$f'(c) \geq \frac{\alpha-1}{(n+1)^\alpha}$$

et donc
$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \geq \frac{\alpha-1}{(n+1)^{\alpha}}.$$
On pose
$$v_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$
Les sommes partielles de $\sum v_n$ sont
$$\sum_{n=1}^{k} v_k = \frac{1}{1^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
Donc la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge, de somme 1.
On applique le théorème de comparaison, la série $\sum_{n\geq 1} 1/n^{\alpha}$ converge.

3.3. Convergence absolue

Définition 3.5
Soit $\sum u_n$ une série de terme général u_n. Si la série de terme général $|u_n|$ est convergente, on dit que $\sum u_n$ est *absolument convergente*.

Remarque. — Dans la définition, on peut prendre $u_n \in \mathbf{R}$ avec la valeur absolue ou $u_n \in \mathbf{C}$ avec le module.

Théorème 3.6
Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration
Soit $u_n \in \mathbf{R}$. On considère $v_n = |u_n| - u_n$. Par l'inégalité triangulaire :
$$0 \leq v_n \leq 2\,|u_n|\,.$$
Par hypothèse $\sum 2\,|u_n| = 2\sum |u_n|$ converge. Donc $\sum v_n$ converge par le théorème de comparaison. Comme $u_n = |u_n| - v_n$ on a que $\sum u_n$ converge.
Si $u_n \in \mathbf{C}$ alors en posant $u_n = a_n + ib_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbf{R}$ on a
$$0 \leq |a_n|\,, |b_n| \leq |u_n|\,.$$
Comme $\sum |u_n|$ converge, $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ aussi. Donc $\sum a_n$ et $\sum b_n$ converge et donc $\sum u_n$ aussi.

Proposition 3.7
Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors
$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\,.$$

Démonstration
Pour tout $k \geq 0$:
$$\left|\sum_{n=0}^{k} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{k} |u_n|$$
or $|\sum u_n|$ et $\sum |u_n|$ convergent et donc l'égalité tient pour $k = +\infty$.

Remarque. — Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors elles sont convergentes et donc leur $\sum u_n + v_n$ aussi. Mieux, $\sum u_n + v_n$ est absolument convergente. En effet $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$ et comme $\sum |u_n| + |v_n|$ est convergente, $\sum |u_n + v_n|$ est convergente.

Exemple. — Considérons la série de terme général
$$\frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$$
avec $\alpha \in \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}$.
$$\forall n \geq 1,\ \left|\frac{\cos nx}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

- si $\alpha > 1$ alors le théorème de comparaison conclut ;
- si $\alpha = 1$ et $x = 0$ alors le terme général est $1/n$ et la série diverge ;
- si $\alpha = 1$ et $x = \pi$ alors le terme général est $(-1)^n/n$ et alors la série converge (mais pas en valeur absolue).

Exemple. — Soit
$$u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n},\ |u_n| = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n} = \frac{2}{n\sqrt{n+2} + n\sqrt{n}}.$$
On a donc
$$|u_n| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$
C'est une série de Riemann avec $\alpha = 3/2$ et donc la série $\sum u_n$ converge absolument.

3.4. Comparaison avec des séries géométriques

Théorème 3.8 (Règle de d'Alembert)
Soit $\sum u_n$ une série de terme général $u_n > 0$. S'il existe $K \in \mathbf{R}$ tel que $K < 1$ et pour tout n, $u_{n+1}/u_n \leq K$ alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration
On a :
$$u_n \leq K^n u_0$$
et donc comme $\sum K^n u_0$ converge, par le théorème de comparaison, $\sum u_n$ converge.

Corollaire 3.9
Soit $\sum u_n$ la série dont le terme général, u_n, est strictement positif.
Supposons que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n = l$.
- Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge ;
- Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration
Supposons $l < 1$. Par définition, il existe n_0 et K entiers tels que $l < K < 1$ et pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1}/u_n \leq K$. Donc $\sum u_{n+n_0}$ converge et donc $\sum u_n$ aussi.
Supposons $l > 1$. Il existe n_0 et $K > 1$ tels que pour tout $n \geq n_0$ on a $u_{n+1}/u_n \geq K$. Donc $u_{n+1} \geq K u_n > u_n$ et donc $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Exemple. — Soit $x \in \mathbf{R}$. On pose

$$u_n = n^2 x^n.$$

Si $x = 0$ alors $\sum u_n$ converge. Pour $x \neq 0$ on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} x.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| > 0.$$

- Si $|x| < 1$ alors $\sum u_n$ est absolument convergente ;
- si $|x| > 1$ alors $\sum u_n$ n'est pas convergente ;
- si $|x| = 1$ alors la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure.

3.5. Régèle de Cauchy

Théorème 3.10 (Règle de Cauchy)
Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes positifs. S'il existe $K < 1$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \ \sqrt[n]{u_n} \leq K$$

alors la série $\sum u_n$ converge.

Démonstration
On a que :

$$\forall n \geq 1, \ u_n \leq K^n.$$

D'autre part, $0 < K < 1$ donc la série de terme général K^n converge et donc $\sum u_n$ converge.

Corollaire 3.11
Soit $\sum u_n$ de terme général positif. Supposons $\lim \sqrt[n]{u_n} = l$.
1. Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration

Dans l'ordre :

1. Supposons $l < 1$. Fixons $0 < l < K < 1$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\sqrt[n]{u_n} \leq K$. On a alors $0 \leq u_n \leq K^n$ et donc on conclut.
2. Supposons $l > 1$. Fixons $0 < 1 < K < l$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\sqrt[n]{u_n} \geq K$. Ainsi, $u_n \geq K^n$ et donc comme $\sum K^n$ diverge, $\sum u_n$ aussi.

Exemple. — Si $u_n = x^n/n^n$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi,

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{x}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $\sum x^n/n^n$ converge.

Règle de Riemann. — On a que $\sum 1/n^\alpha$ converge pour $\alpha > 1$. Ainsi :

Théorème 3.12 (Règle de Riemann)

Soit $\sum u_n$ de terme général positif et soit α un réel strictement positif.

1. Si $\lim n^\alpha u_n$ existe et est non nulle alors la série de terme général u_n converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
2. Si $\lim n^\alpha u_n = 0$ et si $\alpha > 1$ alors la série de terme général u_n converge.
3. Si $\lim n u_n = +\infty$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Démonstration

Posons

$$v_n = \frac{1}{n^\alpha}.$$

On a

$$\frac{u_n}{v_n} = n^\alpha u_n.$$

1. Le théorème de comparaison entraine que si $\sum u_n$ et si $\sum v_n$ sont à termes généraux strictement positifs telles que la suite u_n/v_n a une limite non nulle, alors $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum v_n$ converge.
2. On a alors pour n assez grand $u_n \leq 1/n^\alpha$ et donc $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$.
3. Pour n assez grand, $nu_n \geq 1$ et donc $u_n \geq 1/n$ et donc $\sum u_n$ diverge puisque $\sum 1/n$ diverge.

Exemple. — Avec

$$u_n = \frac{\log n}{n^2}$$

alors, comme

$$\lim n^{\frac{3}{2}} u_n = 0$$

et comme $3/2 > 1$, $u_n \geq 0$ on a bien que $\sum u_n$ converge.

Remarque. — On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\log n + 1}{\log n}\frac{n^2}{(n+1)^2}$$
et cela tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Le critère de d'Alembert ne permettait pas de conclure.

Remarque. — Les critères de d'Alembert, Cauchy ou Riemann ne sont pas valables pour les séries à termes négatifs. Si u_n est à valeurs négatives, on peut appliquer ces critères à $|u_n|$.

3.6. Comparaison avec des intégrales

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction numérique. Supposons que $f(x) \geq x$ pour tout x et supposons que f est décroissante. Pour tous entiers $p < q$ supérieurs à a on a
$$\sum_{n=p}^{q} f(n) \leq \int_p^q f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Lemme 3.13
Pour tous $a \leq p < q$ entiers. On a
$$f(q) + \int_p^q f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=p}^{q} f(n) \leq f(p) + \int_p^q f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $p < n < q$. Comme f est décroissante, $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ pour tout $t \in [p, q]$.
$$f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}t = f(n)$$
$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n).$$
On somme alors sur $n \in [p, q[$:
$$\sum_{n=p}^{q-1} f(n+1) \leq \int_p^q f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=p}^{q-1} f(n)$$
$$f(q) + \int_p^q f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=p}^{q} f(n) \leq f(n) + \int_p^q f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple. — Soit $\alpha > 0$. On pose
$$u_n = \frac{1}{n(\log n)^\alpha}.$$

On a $\lim u_{n+1}/u_n = 1$. $n^\beta u_n$ ne converge pas pour $\beta > 1$. Si $\beta \leq 1$ alors $n^\beta u_n$ converge vers 0. Cependant :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x(\log x)^\alpha}$$

est décroissante sur $[2, +\infty[$. De plus, $f(x) > 0$ pour tout x dans cet intervalle. Ainsi, considérons l'intégrale :

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t(\log t)^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \int (\log t)^{-\alpha} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}(\log t)^{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \log(\log t) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}.$$

$$\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}((\log x)^{1-\alpha} - (\log 2)^{1-\alpha}) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \log(\log x) - \log(\log 2) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

— Si $\alpha = 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

Le lemme précédent nous dit que :

$$\sum_{2 \leq n \leq x} f(n) \geq f(x) + \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc $\sum u_n$ est divergente.

— Si $\alpha < 1$ alors $1 - \alpha > 0$ et donc

$$\lim_{x \to +\infty} \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

De même, la série $\sum u_n$ diverge.

— Si $\alpha > 1$ alors $1 - \alpha < 0$ et donc

$$\lim_{x \to +\infty} \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha - 1}(\log 2)^{1-\alpha}.$$

Le lemme dit que

$$\sum_{n=2}^{x} u_n \leq f(2) + \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc $\sum u_n$ converge.

Ainsi, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

3.7. Séries alternées

DÉFINITION 3.14
Une *série alternée* est une série $\sum u_n$ telle que u_n et $-u_{n+1}$ ont le même signe pour n assez grand.

THÉORÈME 3.15 (Critère des séries alternées)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de termes réels strictement positifs. Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et a pour limite 0 alors la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge.
D'autre part, si $\sum(-1)^n a_n = S$ alors pour tout n on a

$$s_n \leq S \leq s_{n+1}$$

et

$$|S - s_n| \leq a_{n+1}.$$

DÉMONSTRATION
On considère les sous-suites :

$$s_{2p} = a_0 - a_1 + \ldots + a_{2p}$$
$$s_{2p+1} = a_0 - a_1 + \ldots + a_{2p} - a_{2p+1}.$$

$$s_{2p+2} - s_{2p} = a_{2p+2} - a_{2p+1} \leq 0$$
$$s_{2p+3} - s_{2p+1} = a_{2p+2} - a_{2p+3} \geq 0.$$

Ainsi, les sous-suites $(s_{2p})_{p\in\mathbf{N}}$ et $(s_{2p+1})_{p\in\mathbf{N}}$ sont respectivement décroissante et croissante.
D'autre part,

$$\lim s_{2p+1} - s_{2p} = \lim -a_{2p+1} = 0.$$

Ces suites sont adjacentes et leurs différences tendent vers 0. Ainsi, (s_p) est convergente et donc $\sum u_n$ converge.

EXEMPLE. — Prenons

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

avec $\alpha \in \mathbf{R}$. Elle n'est pas absolument convergente pour tout α.

- $\alpha = 1$: on a vu que $\sum u_n = -\log(2)$;
- $\alpha > 1$: $\sum u_n$ est absolument convergente ;
- pour $0 < \alpha < 1$: on a $a_n = 1/n^\alpha \geq 0$ est décroissante et de limite nulle, donc $\sum u_n$ est convergente (mais pas absolument).

3.8. Application des développements limités à la convergence

EXEMPLE 1. — Soit

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

On considère la fonction

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(x).$$

On a $u_n = f(1/n)$ et on regarde le développement limité de f au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\\ f(x) &= \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right)\\ &= \frac{x^{5/2}}{6} + x^{5/2}\varepsilon(x)\end{aligned}$$

$$u_n = \frac{n^{-5/2}}{6} + n^{-5/2}\varepsilon(1/n),$$

et donc il existe n_0 tel que u_n est du signe de $n^{-5/2}/6$ pour $n \geq n_0$. Donc on peut considérer u_n comme une série de terme général positif telle que $n^{5/2}u_n$ tend vers 1/6. Par le critère de Riemann, cette série converge et donc $\sum u_n$ aussi.

Exemple 2. — Soit $a \in \mathbf{R}$ et soit

$$u_n = (n^2+1)^a - (n^2-1)^a.$$

— Si $a = 0$ alors $u_n = 0$ et $\sum u_n$ converge.
— Si $a \neq 0$, on calcule :

$$\begin{aligned}u_n &= n^{2a}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^a - \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^a\right)\\ u_n &= f(1/n),\\ f(x) &= \frac{1}{x^{2a}}\left((1+x^2)^a - (1-x^2)^a\right).\end{aligned}$$

On fait un développement limité de f en 0 :

$$\begin{aligned}f(x) &= x^{-2a}(1+ax^2-(1-ax^2)+x^3\varepsilon(x))\\ f(x) &= x^{-2a}(2ax^2+x^3\varepsilon(x))\\ f(x) &= 2ax^{2(1-a)} + x^{3-2a}\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Ainsi

$$u_n = \frac{2a}{n^{2(1-a)}} + \frac{\varepsilon(1/n)}{n^{2(1-a)+1}}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} n^{2(1-a)}u_n = 2a$$

et u_n est une suite de terme général du signe de a au moins à partir d'un certain rang. Par le critère de Riemann :
— Si $a > 0$, alors u_n est à terme général positif ;
— si $a \geq 1/2$ alors $2(1-a) \leq 1$ et donc la série $\sum u_n$ est divergente ;

— si $a < 1/2$ alors $2(1-a) > 1$ donc la série $\sum u_n$ est convergente.
— Si $a < 0$ alors u_n est négatif. On applique le critère à $\sum -u_n$. On a $2(1-a) > 2$ et donc $\sum -u_n$ est convergente et donc $\sum u_n$ est convergente.

4. Transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à valeurs complexes. Soit $p \in \mathbf{N}$. On pose

$$\forall n \geq p,\ B_n = \sum_{k=p}^{n} b_p.$$

Dans la somme (avec $q \geq p$) :

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n$$

on remplace les b_n par $B_n - B_{n-1}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{q} a_n b_n &= \sum_{n=p}^{q} a_n(B_n - B_{n-1}) \\ &= \sum_{n=p}^{q}[a_n B_n] - \sum_{n=p}^{q}[a_n B_{n-1}].\end{aligned}$$

Lemme 4.1
Supposons que les a_n sont des réels positifs et que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante. Supposons également que les B_n avec $n \geq p$ sont majorés en valeur absolue par B. Alors on a :

$$\forall q > p,\ \left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| \leq a_p B.$$

Démonstration
On a $a_n - a_{n+1} \geq 0$ puisque $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante. Ainsi $|(a_n - a_{n+1})B_n| = (a_n - a_{n+1})B_n$. Ainsi,

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| = \left|\sum_{n=p}^{q-1}[(a_k - a_{k+1})B_k] + a_q B_q\right|$$

et donc

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| \leq \sum_{k=p}^{q-1}(a_k - a_{k+1})\,|B_k| + a_q\,|B_q|$$

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| \leq (\sum_{n=p}^{q-1}(a_k - a_{k+1}) + a_q)B$$

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| \leq a_p B.$$

COROLLAIRE 4.2
Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à termes réels positifs décroissante. Soit $x \in]0, 2\pi[$, posons $z = \cos x + i\sin x$. Pour tous $p, q \in \mathbf{R}$ tels que $p < q$:

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n z^n\right| \leq \frac{a_p}{\sin(x/2)}.$$

PROPOSITION 4.3
Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante de réels tels que $\lim a_n = 0$. Alors la série de terme général $a_n \cos(n_x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbf{R} - 2\pi\mathbf{Z}$. De plus, la série de terme général $a_n \sin(nx)$ converge pour tout $x \in \mathbf{R}$.

DÉMONSTRATION (Corollaire)
On considère la somme partielle :

$$\sum_{n=p}^{q} a_n z^n.$$

On applique le lemme avec $b_n = z_n$. Il faut vérifier que pour tout n, $|B_n| \leq B$ avec $B = 1/\sin(x/2)$ et $B_n = \sum z^n$ pour $p \leq n \leq q$.

$$\begin{aligned}
B_n &= z^p \frac{1 - z^{n-p+1}}{1 - z}, \\
1 - z &= 1 - \cos x - i\sin x \\
1 - z &= 2\sin^2(x/2) - 2i\sin(x/2)\cos(x/2) \\
1 - z &= 2\sin(x/2)(\sin(x/2) - i\cos(x/2)) \\
|1 - z| &= 2\sin(x/2), \\
\left|z^p \frac{1 - z^{n-p+1}}{1 - z}\right| &= \frac{1}{2\sin(x/2)} \left|z^p\right| \left|(1 - z^{n-p+1})\right| \\
\left|z^p \frac{1 - z^{n-p+1}}{1 - z}\right| &\leq \frac{1}{2\sin(x/2)} \left|z^p\right| (1 + |z|^{n-p+1}) \\
\left|z^p \frac{1 - z^{n-p+1}}{1 - z}\right| &\leq \frac{2}{\sin(x/2)}.
\end{aligned}$$