

DÉTERMINANTS, VALEURS PROPRES ET DIAGONALISATION

1. DÉTERMINANTS

1.1. Différentes définitions

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ avec $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

DÉFINITION 1.1.0.1 (Déterminant). —

On définit en premier lieu :

$$\det A = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) a_{w(1),1} \cdot a_{w(2),2} \cdot \dots \cdot a_{w(n),n}.$$

C'est la formule de CRAMER.

DÉFINITION 1.1.0.2. —

Une seconde définition possible :

Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, soit $A_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ la matrice (extraite) obtenue en enlevant la i -ième ligne et la j -ième colonne de A .

On a alors :

$$\det' A = a_{1,1} \cdot \det'(A_{1,1}) - a_{1,2} \cdot \det'(A_{1,2}) + \dots + (-1)^{n-1} a_{1,n} \cdot \det'(A_{1,n}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{1,i} \cdot \det'(A_{1,i})$$

Exemple. — Prenons :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; A_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne avec la seconde définition :

$$\det A = 2\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2. — On vérifie que les deux définitions coïncident :

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}\det(a_{2,2}) - a_{1,2}\det(a_{2,1}) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.$$

Remarque. — Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$ un n -uplet de vecteurs de E . Pour tout j , on pose :

$$u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \cdot e_i \quad a_{i,j} \in \mathbf{R}.$$

On appelle *déterminant* dans la base B de (u_1, \dots, u_n) le réel :

$$\det_B(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det(a_{i,j}).$$

Exemple. — Pour $n = 2$. On prend :

$$\begin{aligned} u_1 &= 2e_1 + 3e_2, \\ u_2 &= -e_1 + 6e_2. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\det_B(u_1, u_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 15.$$

Remarque. — Si $u_j = e_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ alors $\det_B(e_1, \dots, e_n) = \det(I_d) = 1$.

PROPOSITION 1.1.0.1. —

On a les énoncés :

1. pour tout $w \in S_n$:

$$\det_B(u_{w(1)}, u_{w(2)}, \dots, u_{w(n)}) = \varepsilon(w) \det_B(u_1, u_2, \dots, u_n);$$

2. on en déduit que le déterminant change de signe si on échange deux colonnes ;

3. si pour $i \neq j$ on a $u_i = u_j$ alors le déterminant est nul (puisque négatif et positif simultanément).

DÉMONSTRATION 1.1.0.1. —

Il suffit de montrer le premier point.

On sait que S_n est engendré par les transpositions. On suppose donc que $w \in S_n$ est une transposition.

En fait, S_n est engendré par les transpositions simples, i.e. les transpositions de la forme $(k, k+1)$ avec $1 \leq k < n$. ⁽¹⁸⁾

On suppose donc que w est de la forme $(k, k+1)$. Soit A la matrice (u_1, u_2, \dots, u_n) de ces n vecteurs dans les coordonnées de la base B . Soit A' la matrice obtenue en permutant les colonnes k et $k+1$ de A . Il faut donc vérifier que :

$$\det A' = \varepsilon(w) \det A = -\det A.$$

On calcule à gauche et à droite :

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{1,j}),$$

$$\det A' = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a'_{1,j} \det(A'_{1,j}).$$

- Pour $j \neq k, k+1$ on a $a'_{1,j} = a_{1,j}$ et $A'_{1,j}$ est obtenue en échangeant les colonnes k et $k+1$ de $A_{1,j}$
- Pour $j = k$ on a $a'_{1,k} = a_{1,k+1}$ et donc $A'_{1,k} = A_{1,k+1}$.
- Pour $j = k+1$ on a $a'_{1,k+1} = a_{1,k}$ et donc $A'_{1,k+1} = A_{1,k}$.

On en déduit :

$$\det A' = \sum_{j \neq k, k+1} (-1)^{j+1} \det(A'_{1,j}) \stackrel{(2\S)}{=} + (-1)^{k+1} a'_{1,k} \det(A'_{1,k}) + (-1)^k a'_{1,k+1} \det(A'_{1,k+1}),$$

$$\det A' = \sum_{j \neq k, k+1} (-1)^{j+1} (-\det(A_{1,j})) + (-1)^{k+1} a_{1,k+1} (-\det(A_{1,k+1})) + (-1)^k a_{1,k} (-\det(A_{1,k})),$$

$$\det A' = -\det A.$$

1.2. Formes n -linéaires alternées

DÉFINITION 1.2.0.3 (Forme n -linéaire). —

Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Une forme n -linéaire sur E est une application $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{R}$ qui est linéaire sur chaque composante.

PROPOSITION 1.2.0.2. —

Soit B une base de E avec $\dim E = n$.

$$\det_B : \begin{cases} E^n \rightarrow \mathbf{R} \\ (u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_B(u_1, \dots, u_n) \end{cases}$$

est une forme n -linéaire.

1§. En effet, toute transposition est un produit de transpositions simples par une conjugaison adaptée : on « renomme » les éléments.

2§. Par récurrence sur n on a $\det(A'_{i,j}) = -\det(A_{i,j})$.

DÉMONSTRATION 1.2.0.2. —

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & aa'_{1,k} + ba''_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & aa'_{2,k} + ba''_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a'_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a'_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a''_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a''_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

On veut montrer :

$$\det A = a \det A' + b \det A''.$$

On calcule :

$$\det A = \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{i,j}) + (-1)^{k+1} (aa'_{1,k} + ba''_{1,k}) \det(A_{1,k}),$$

$$\det A' = \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A'_{i,j}) + (-1)^{k+1} a'_{1,k} \det(A_{1,k}),$$

$$\det A'' = \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A''_{i,j}) + (-1)^{k+1} a''_{1,k} \det(A_{1,k})$$

On doit alors montrer :

$$\forall j \neq k, \det A_{i,j} = a \det(A'_{i,j}) + b \det(A''_{i,j})$$

ce qui est démontré par hypothèse de récurrence.

DÉFINITION 1.2.0.4 (Forme n -linéaire alternée). —

Soit $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{R}$ une forme n -linéaire alternée avec E un \mathbf{R} -espace vectoriel.

φ est une forme n -linéaire alternée si on a :

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$$

dès que deux composantes u_i, u_j avec $i \neq j$ coïncident.

Remarque. — On en déduit que le déterminant dans une base donnée est une forme n -linéaire alternée.

PROPOSITION 1.2.0.3. —

Soit φ une forme n -linéaire alternée. Alors pour tout $w \in S_n$, $\varphi(u_{w(1)}, \dots, u_{w(n)}) = \varepsilon(w) \varphi(u_1, \dots, u_n)$.

DÉMONSTRATION 1.2.0.3. —

On peut supposer que w est une transposition simple : $w = (k, k+1)$ avec $1 \leq k < n$.

On veut montrer :

$$\varphi(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, u_k, u_{k+2}, \dots, u_n) = -\varphi(u_1, \dots, u_n).$$

Pour simplifier les notations, on oublie les indices u_i avec $i \neq k, k+1$. On a :

$$\varphi(u_k + u_{k+1}, u_k + u_{k+1}) = 0$$

et donc par linéarité :

$$\varphi(u_k, u_k) + \varphi(u_k, u_{k+1}) + \varphi(u_{k+1}, u_k) + \varphi(u_{k+1}, u_{k+1}) = 0 \iff \varphi(u_k, u_{k+1}) = -\varphi(u_{k+1}, u_k).$$

PROPOSITION 1.2.0.4. —

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{R}$ une forme n -linéaire alternée. Alors :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(u_1, \dots, u_n) \varphi(e_1, \dots, e_n)$$

où les u_i sont exprimés dans la base B .

Remarque. — Toutes les formes n -linéaires alternées sont proportionnelles au déterminant.

DÉMONSTRATION 1.2.0.4. —

Soit $u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$, les $a_{i,j}$ sont les coordonnées des u_j dans la base B .

On a :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n a_{i,1} e_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,n} e_i\right).$$

Comme φ est n -linéaire alternée :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \sum_{w \in S_n} a_{w(1),1} a_{w(2),2} \dots a_{w(n),n} \varphi(e_{w(1)}, \dots, e_{w(n)})$$

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \sum_{w \in S_n} a_{w(1),1} a_{w(2),2} \dots a_{w(n),n} \varepsilon(w) \varphi(e_1, \dots, e_n)$$

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(u_1, \dots, u_n) \varphi(e_1, \dots, e_n)$$

Remarques. — On a démontré :

1. Pour une base B choisie, le déterminant \det_B est une forme n -linéaire alternée ;
2. pour toute forme n -linéaire alternée, φ , on a : $\varphi(\cdot) = \det_B(\cdot) \varphi(B)$;
3. en particulier, les deux déterminants coïncident.

PROPOSITION 1.2.0.5. —

Pour tout $A \in M_n(\mathbf{R})$ on a :

$$\det(A) = \det(A^t).$$

DÉMONSTRATION 1.2.0.5. —

On a :

$$A = (a_{i,j})$$

$$A^t = (b_{i,j}), \quad b_{i,j} = a_{j,i}$$

On calcule par la formule de CRAMER :

$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^n b_{w(i),i},$$

$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^n a_{i,w(i)}.$$

Pour w fixé, dans i décrit 1 à n alors $w(i)$ décrit également 1 à n . On effectue un changement de variable $j = w(i)$ et alors $i = w^{-1}(j)$ et on a :

$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{j=1}^n a_{w^{-1}(j),j},$$

$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w^{-1}) \prod_{j=1}^n a_{w(j),j},$$

$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{j=1}^n a_{w(j),j},$$

$$\det(A^t) = \det(A).$$

Remarque. — On peut calculer $\det(A)$ en développant par rapport à la première ligne ou la première colonne (au choix). On a alors :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^n a_{i,1} \det(A_{i,1}).$$

PROPOSITION 1.2.0.6. —

Si $A \in M_n(\mathbf{R})$ est triangulaire alors :

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

DÉMONSTRATION 1.2.0.6. —

Supposons A triangulaire supérieure, c'est-à-dire $a_{i,j} = 0$ si $i > j$.

Par la formule de CRAMER :

$$\det(A) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^n a_{i,w(i)}.$$

Or les seuls w qui contribuent à cette somme sont ceux tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, i \leq w(i),$$

c'est-à-dire : $w = \text{id}$ ^(3§).

En développant par rapport à une ligne (ou une colonne quelconque) :

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{j,i} \det(A_{j,i}).$$

Si A' désigne la matrice obtenue en permutant les lignes de A par $w = (1 \ 2 \ \dots \ j)$:

$$\det(A') = \varepsilon(w) \det(A) = (-1)^{j+1} \det(A).$$

On note $A' = (a'_{k,l})_{k,l \in \{1, \dots, n\}}$.

En choisissant $j > 1$:

$$\det(A') \stackrel{(4§)}{=} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a'_{1,i} \det(A'_{1,i}),$$

$$\det(A') = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{j,i} \det(A_{j,i});$$

$$\det(A) = (-1)^{j+1} \det(A'),$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{j+i} a_{j,i} \det(A_{j,i}).$$

2. DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

2.1. Invariance par changement de base

PROPOSITION 2.1.0.7. —

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $C = (u_1, \dots, u_n)$ un système de n vecteurs de E . Alors C est une base de E si, et seulement si :

$$\det_B(C) \neq 0.$$

^{3§}. Soit $w \in S_n$, $w : \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \dots, n\}$.

Si $i \leq w(i)$ pour tout i alors $w(k) = k$ pour tout k par récurrence descendante sur k :

— $n \leq w(n)$ et donc $w(n) = n$;

— $k-1 \leq w(k-1)$ et donc $w(k-1) = w(k)$.

^{4§}. En développant par rapport à la première ligne.

DÉMONSTRATION 2.1.0.7. —

Supposons que C est une base de E .

On a vu que si $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{K}$ est une forme n -linéaire alternée alors :

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n, \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det_B(u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \varphi(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

On applique cette formule avec $\varphi = \det_C$ et on a :

$$\begin{aligned} \det_C(u_1, u_2, \dots, u_n) &= \det_B(C) \det_C(B), \\ 1 &= \det_C(C) = \det_B(C) \det_C(B), \end{aligned}$$

et donc $\det_B(C) \neq 0$.

Supposons maintenant que C est liée. Il existe alors i tel que u_i est combinaison linéaire des u_j avec $j \neq i$. Par exemple :

$$u_i = \sum_{j \neq i} a_j \cdot u_j, \quad (a_j \in \mathbf{R})$$

$$\det_B(C) = \det_B(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, \sum_{j \neq i} a_j \cdot u_j, u_{i+1}, \dots, u_n),$$

$$\det_B(C) = \sum_{j \neq i} a_j \det_B(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_n),$$

or \det_B est alternée et comme u_j apparaît deux fois dans la dernière expression, on a

$$\det_B(C) = 0.$$

PROPOSITION 2.1.0.8. —

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , $B = (e_1, \dots, e_n)$, $C = (u_1, \dots, u_n)$ deux bases de E et f un endomorphisme de E . Alors :

$$\det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_C(f(u_1), \dots, f(u_n)).$$

Remarque. — En d'autres termes, $\det_B(f(B))$ ne dépend pas du choix de la base B . On l'appelle $\det(f)$.

DÉMONSTRATION 2.1.0.8. —

On utilise la formule :

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n, \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det_B(u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \varphi(e_1, e_2, \dots, e_n),$$

où φ est une forme n -linéaire alternée.

On pose :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$$

et on a alors :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det_C(f(u_1), \dots, f(u_n)) \det_B(C).$$

De même :

$$\det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det_B(C) \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Et donc :

$$\det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) \det_B(C) = \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)) \det_B(C)$$

et $\det_B(C) \neq 0$. Donc l'égalité voulue est obtenue.

PROPOSITION 2.1.0.9. —

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , f et g deux endomorphismes de E .

Alors :

$$\det(fg) = \det(f) \det(g).$$

DÉMONSTRATION 2.1.0.9. —

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ,

$$\det(fg) = \det_B(fg(e_1), \dots, fg(e_n)).$$

Considérons la forme n -linéaire alternée φ telle que :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(g(u_1), \dots, g(u_n)),$$

alors on a :

$$\varphi(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) \varphi(e_1, \dots, e_n),$$

$$\det_B(gf(e_1), \dots, gf(e_n)) = \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)) \det_B(g(e_1), \dots, g(e_n)),$$

$$\det(gf) = \det(g) \det(f).$$

Remarque. — Si $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ alors

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

3. DIAGONALISATION

DÉMONSTRATION 3.0.0.10. —

Une matrice A est *diagonalisable* si elle est conjugué par un isomorphisme à une matrice diagonale.

3.1. Valeur propre et vecteur propre

Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n . Soit f un endomorphisme de E .

DÉFINITION 3.1.0.5. —

On appelle *valeur propre* de f un réel λ tel qu'il existe un $v \in E - \{0\}$ tel que $f(v) = \lambda \cdot v$.

On dit que v est un *vecteur propre* de valeur propre λ .

Quitte à prendre la matrice A de f dans une base (e_1, \dots, e_n) fixée de E , λ est une valeur de f (ou de A) si, et seulement si

$$\det(A - \lambda I_d) = 0.$$

Remarque. — Soient $A \in M_n(\mathbf{R})$, B la base canonique et $C = AB$. $\det(A)$ est non nul si, et seulement si, A est inversible. D'autre part s'il existe un vecteur propre v de valeur propre λ alors

$$\ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\}.$$

Or $f - \lambda I_d$ est un endomorphisme de E et E est de dimension finie. Donc il y a équivalence :

$$\ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I_d) = 0.$$

DÉFINITION 3.1.0.6. —

On appelle polynôme caractéristique de f (ou de A) le polynôme :

$$\chi_f(t) = \chi_A(t) = \det(A - tI_d).$$

Exemple. — En dimension 2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a

$$\chi_A(t) = t^2 - (a + d)t + ad - bc = t^2 - \operatorname{tr}(A)t + \det(A).$$

Remarque. — $\chi_A(t)$ est un polynôme de degré n de coefficient dominant $(-1)^n$ et de terme constant $\chi_A(0) = \det(A)$.

3.2. Sous-espaces propres

DÉFINITION 3.2.0.7. —

Soit f un endomorphisme de E et de matrice A . Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On appelle *sous-espace propre* de f (ou de A) de valeur propre λ le sous-espace vectoriel $\ker(f - \lambda I_d)$.

PROPOSITION 3.2.0.10. —

Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors si $\lambda \neq \mu$ on a

$$\ker(f - \lambda I_d) \cap \ker(f - \mu I_d) = \{0\}.$$

Plus généralement si, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$ distincts alors on a :

$$\sum_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i I_d) = \bigoplus_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i I_d)$$

DÉMONSTRATION 3.2.0.11. —

Il s'agit de vérifier que pour tout $i \neq j$ on a :

$$\ker(f - \lambda_i I_d) \cap \ker(f - \lambda_j I_d) = \{0\}.$$

Si $v \in \ker(f - \lambda_i I_d) \cap \ker(f - \lambda_j I_d)$ alors :

$$f(v) = \lambda_i v = \lambda_j v \implies v = 0.$$

COROLLAIRE 3.2.0.1. —

Soient $\dim E = n$, f est un endomorphisme de E , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ valeurs propres de f et E_i le sous-espace associé à la valeur propre λ_i . Alors si

$$E = \bigoplus_{i=1}^k E_i,$$

l'endomorphisme f est diagonalisable.

DÉMONSTRATION 3.2.0.12. —

Si on fait la réunion :

$$B = \bigcup_{i=1}^k B_i,$$

où B_i est une base de E_i on obtient une base de E . Dans cette base la matrice de f est diagonale où l'élément diagonal λ_i est la valeur propre correspondante. La matrice de passage de la base canonique à la base B donne la diagonalisation.

Donc pour diagonaliser A il faut vérifier si $E = \bigoplus_{i=1}^k E_i$ où les E_i sont les sous-espaces propres.

Exemple. — Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & -3 \\ 1 & 4 - \lambda & -5 \\ 0 & 2 & -2 - \lambda \end{pmatrix},$$

$$\chi_A(\lambda) = (1 - \lambda)((4 - \lambda)(-2 - \lambda) + 10) - (2(-2 - \lambda) + 6),$$

$$\chi_A(t) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Les trois valeurs propres sont 0, 1, 2 et sont de multiplicité 1.

$$E_0 = \ker(A) = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \mid Ax = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_1 = \ker(A - I_d) = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_2 = \ker(A - 2I_d) = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

On a l'égalité :

$$E_0 \oplus E_1 \oplus E_2 = \mathbf{R}^3.$$

On en déduit les matrices de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.3. Conditions de diagonalisabilité

PROPOSITION 3.3.0.11. —

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E , $\chi_f(t) \in \mathbf{R}[t]$, $\deg \chi_f = n$.

Si χ_f admet n racines distinctes alors f est diagonalisable.

DÉMONSTRATION 3.3.0.13. —

Si :

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - t)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ racines distinctes. On a alors que pour tout i :

$$E_i = \ker(f - \lambda_i \text{id}) \neq \{0\}$$

et donc $\dim E_i \geq 1$. On a alors que

$$\sum_{i=1}^n E_i = \bigoplus_{i=1}^n E_i$$

est de dimension supérieure à n ce qui implique $\bigoplus E_i = \mathbf{R}^n$.

Remarque. — La condition donnée est nécessaire mais non suffisante. On cherche donc une condition nécessaire et suffisante.

PROPOSITION 3.3.0.12. —

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E , λ une valeur propre de f , m_λ la multiplicité de λ en tant que racine de $\chi_f(t)$ et E_λ le sous-espace propre associé à λ .

Alors $\dim E_\lambda \leq m_\lambda$.

DÉMONSTRATION 3.3.0.14. —

Soit $k = \dim E_\lambda$ et (e_1, e_2, \dots, e_k) une base de E_λ . On peut compléter (e_1, \dots, e_k) en une base $(e_1, \dots, e_n) = B$ de E .

$$\text{Mat}_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_d & X \\ \hline 0 & A \end{array} \right).$$

Or le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des matrices diagonales. (5§)

Ainsi :

$$\chi_f(t) = \det \left(\begin{array}{c|c} (\lambda - t)I_d & X \\ \hline 0 & A - tI_d \end{array} \right) = (\lambda - t)^k \chi_A(t)$$

et donc $m_\lambda \geq k$.

COROLLAIRE 3.3.0.2. —

On a les propositions suivantes :

1. Si $\chi_f(t)$ n'est pas scindé sur \mathbf{R} alors f n'est pas diagonalisable.
2. S'il existe une valeur propre λ de f telle que $\dim E_\lambda < m_\lambda$ alors f n'est pas diagonalisable.

DÉMONSTRATION 3.3.0.15. —

On démontre :

2. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de $\chi_f(t)$, m_i la multiplicité de λ_i et E_i l'espace propre associé à λ_i . Alors la proposition nous dit que $\dim E_i \leq m_i$.

Or $\deg \chi_f(t) = n$ et donc

$$\sum_{i=1}^k m_i \leq n$$

$$\sum_{i=1}^k \dim E_i \leq \sum_{i=1}^k m_i \leq n$$

5§. En effet, en utilisant la règle de CRAMER la preuve est assez aisée.

S'il existe i_0 tel que $\dim E_{i_0} < m_{i_0}$ alors cela implique

$$\sum_{i=1}^k \dim E_i < \sum_{i=1}^k m_i \leq n.$$

Et donc

$$\bigoplus_{i=1}^n E_i < n.$$

1. Idem.

THÉORÈME 3.3.0.1. —

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E .

f est diagonalisable si, et seulement si, on a les conditions suivantes :

1. $\chi_f(t)$ est scindé sur \mathbf{R} ;
2. pour tout $\lambda \in \chi_f^{-1}(0)$, la dimension du $\ker(f - \lambda \text{id})$ est égal à la multiplicité de λ dans $\chi_f(t)$.

DÉMONSTRATION 3.3.0.16. —

Le corollaire nous dit que ces conditions sont nécessaires.

Remarquons que :

$$\sum_{i=1}^r E_i = \bigoplus_{i=1}^r E_i$$

où E_i est le sous-espace propre de λ_i et r le nombre de racines deux à deux distinctes.

Or la dimension de la somme est la somme des dimensions, c'est-à-dire la somme des multiplicité qui est égale à n . Donc f est diagonalisable.

Exemple. — On prend

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & -1 \\ -1 & 2-t & -1 \\ -1 & 1 & -t \end{pmatrix},$$

$$\chi_A(t) = -t(t-1)^2.$$

Les racines sont 0, 1 de multiplicités respectives 1 et 2. On a :

$$E_0 = \ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_1 = \ker A - \text{id} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

On a

$$\dim E_0 = 1 \text{ et } \dim E_1 = 2$$

et donc f est diagonalisable.

Contre-exemple de minimalité. — On a que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'a comme valeurs propres que 0, elle n'est pas diagonalisable parce que si elle est nulle dans une base elle l'est dans toutes.

4. POLYNÔMES EN UN ENDOMORPHISME DE E

4.1. Polynômes évalué en un endomorphisme

DÉFINITION 4.1.0.8. —

Soit $P \in \mathbf{R}[t]$ un polynôme :

$$P(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^k.$$

On note pour f un endomorphisme de E :

$$P(f) = \sum_{k=0}^d a_k f^k \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E).$$

Avec la convention $f^0 = \text{id}$ et la notation $f^{k+1} = f \circ f^k$.

DÉFINITION 4.1.0.9. —

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbf{R}[t]$ annule f si $P(f) = 0_{\text{End}_{\mathbf{R}}}$.

PROPOSITION 4.1.0.13. —

On a que :

$$\phi: \begin{cases} \mathbf{R}[t] \rightarrow \text{End}_{\mathbf{R}}(E) \\ P(t) \mapsto P(f) \end{cases}$$

est un morphisme d'anneaux.

C'est-à-dire :

$$\forall P, Q \in \mathbf{R}[t], \phi(P + Q) = \phi(P) + \phi(Q) ; \phi(PQ) = \phi(P)\phi(Q).$$

Remarque. — Ainsi l'ensemble des polynômes annulateurs de f est un idéal de $\mathbf{R}[t]$. Or $\mathbf{R}[t]$ est un anneau principal donc l'ensemble des polynômes annulateurs de f est principal. Il existe donc un polynôme $Q \in \mathbf{R}[t]$ tel que tout polynôme annulateur de f s'écrit RQ avec $R \in \mathbf{R}[t]$.

DÉFINITION 4.1.0.10. —

On appelle polynôme minimal de f le polynôme unitaire de plus petit degré, m_f annulant f .

On a évidemment que tout polynôme annulateur de f est de la forme $P \cdot m_f$, $P \in \mathbf{R}[t]$.

Exemple. — Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice nilpotente, c'est-à-dire $A^3 = 0$. On a

$$m_A(t) \mid t^3 \implies m_A = 1, t, t^2 \text{ ou } t^3.$$

Or $(t \mapsto 1)(A) = \text{id} \neq 0$, $(t \mapsto t)(A) = A \neq 0$ et $(t \mapsto t^2)(A) = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et

donc $m_A(t) = t^3$.

PROPOSITION 4.1.0.14. —

Soit $f \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E)$. Alors :

1. si f est diagonalisable, alors il existe un polynôme scindé $P \in \mathbf{R}[t]$ annulant f ayant que des racines simples ;
2. si $P \in \mathbf{R}[t]$ annule f alors toute valeur propre de f est racine de P .

DÉMONSTRATION 4.1.0.17. —

Dans l'ordre :

1. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres. Soient μ_1, \dots, μ_r des scalaires deux à deux distinctes tels que

$$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

avec $r \leq n$.

On pose :

$$P(t) = \prod_{i=1}^r (t - \mu_i).$$

On cherche à savoir si $P(f) = 0$.

$$P(f) = 0 \iff P(f)(e_j) = 0, \forall j,$$

$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{i=1}^r (f - \mu_i \text{id}) \right) (e_j),$$

$$f(e_j) = \lambda_j e_j \implies \exists i, \mu_i = \lambda_i.$$

Or pour tous k, l :

$$(f - \mu_k \text{id})(f - \mu_l \text{id}) = (f - \mu_l \text{id})(f - \mu_k \text{id})$$

et donc :

$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{k \neq i} (f - \mu_k \text{id}) \right) (f - \mu_i \text{id})(e_j),$$

$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{k \neq i} (f - \mu_k \text{id}) \right) (f(e_j) - \mu_i e_j) = 0.$$

2. On suppose que $P(f) = 0$ et $\chi_f(\lambda) = 0$ avec $P \in \mathbf{R}[t]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

Soit $v \in \ker(f - \lambda \text{id}), v \neq 0$, alors :

$$P(f)(v) = \sum_{k=1}^d a_k f^k(v),$$

$$P(f)(v) = \sum_{k=1}^d a_k \lambda^k v.$$

Donc $P(\lambda) \cdot v = 0$ et comme $v \neq 0$: $P(\lambda) = 0$.

4.2. Lemme des noyaux

PROPOSITION 4.2.0.15 (Théorème des noyaux). —

Soit $f \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E)$.

1. Soit $P \in \mathbf{R}[t]$ de la forme $P = ST$ avec $S, T \in \mathbf{R}[t]$ avec S et T premiers entre eux.

Alors si $P(f) = 0$ alors

$$E = \ker(S(f)) \oplus \ker(T(f)).$$

2. Soit $P \in \mathbf{R}[t]$, $P = P_1 P_2 \dots P_k$ avec $P_i \in \mathbf{R}[t]$ premiers entre eux deux à deux.

Alors si $P(f) = 0$ alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^k \ker P_i(f).$$

THÉORÈME 4.2.0.2. —

$f \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E)$ avec $\dim E = n$.

f est diagonalisable si, et seulement si, il existe un polynôme scindé avec des racines simples qui annulent f .

Remarque. — C'est équivalent à $m_f(t)$ scindé avec des racines simples. En effet si P est scindé avec des racines simples et qui annulent f alors m_f divise P et donc m_f est scindé avec des racines simples.