DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Table des matières

1. FONCTIONS NÉGLIGEABLES ET ÉQUIVALENTES

On considère des fonctions f, g de V dans $\mathbf{R}$ où V est un voisinage épointé dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. C'est-à-dire que V est de la forme $U - \{a\}$ où U est un voisinage de a dans $\overline{\mathbf{R}}$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

— si $a = \infty$ alors $V \supset \{k, \infty\}$;

— si $a \in \mathbf{R}$ alors $V \supset]k, a[\cup]a, l[$ avec $k < a < l$ et $k, l \in \mathbf{R}$.

f, g sont définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

1.1. Négligeable

Définition 1.1.0.1. —
On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a s'il existe un voisinage V tel qu'il existe une fonction $\varepsilon : V \to \mathbf{R}$ telle que :

— $f = \varepsilon \cdot g$;

— $\lim_a \varepsilon = 0$.

On note $f \underset{(a)}{=} \mathrm{o}(g)$.

Remarque. — On note :

$$\varepsilon f \colon \begin{cases} V \to \mathbf{R} \\ t \mapsto \varepsilon(t) f(t) \end{cases}.$$

Exemples. — Par exemple :

1. Si $g = 1$ alors $f = \mathrm{o}(1)$ si, et seulement si, $\lim_a f = 0$.
2. Si $f = 0$ au voisinage de a alors pour toute fonction g : $f = \mathrm{o}(g)$.
3. Si f est bornée et $\lim_a(g) = \infty$ alors $f = \mathrm{o}(g)$ (on prend alors $\varepsilon = f/g$).
4. On a $x^m \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(x^n)$ si, et seulement si, $m < n$.
5. Pour tous $\alpha, \beta > 0$:
$$\begin{cases} x^\alpha \underset{\infty}{=} \mathrm{o}(e^{\beta x}) \\ (\ln x)^\alpha \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(x^\beta) \end{cases},$$
car $\lim_\infty x^\alpha e^{-\beta x} = 0$.

Proposition 1.1.0.1. —
Si f/g est définie dans un voisinage de a, alors :

$$f \underset{(a)}{=} \mathrm{o}(g) \iff \lim_a (f/g) = 0.$$

Démonstration 1.1.0.1. —
On prend $\varepsilon = f/g$.

Remarque. — Il peut arriver que f/g n'est pas défini dans aucun voisinage de a.

Exemples. — Contre-exemples :

1. Avec $g(t) = \sin(1/[t-a])$, pour tout voisinage de V de a, $g(t)$ s'annule en un point de V.
2. Même si le quotient n'est pas définit : $t \underset{(0)}{=} \mathrm{o}(\sin(1/t))$.

Proposition 1.1.0.2. —
On a au voisinage de a :

1. la propriété o est transitive ;
2. la propriété o est compatible avec la multiplication, i.e. : si $f = \mathrm{o}(g)$ alors $fh = \mathrm{o}(gh)$;
3. si $f = \mathrm{o}(g)$ et si $h = \mathrm{o}(k)$ alors $fh = \mathrm{o}(gk)$.

Démonstration 1.1.0.2. —
Dans l'ordre :

1. Pour $f = \varepsilon_1 g$ et $g = \varepsilon_2 h$ avec $\lim_a \varepsilon_i = 0$ alors : $f = \varepsilon_1\varepsilon_2 h$ et $\lim_a \varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$.
2. Si $f = \varepsilon g$, $\lim_a \varepsilon = 0$, alors $fh = \varepsilon gh$.
3. De même.

Contre-exemple. — o n'est pas compatible avec l'addition. Par exemple : $x \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(x^3)$ et $x^2 \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(-x^3)$ n'entraine pas $x + x^2 \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(0)$.

1.2. Équivalence

Définition 1.2.0.2. —
On dit que f est *équivalence* à g au voisinage de a si : $f - g \underset{(a)}{=} \mathrm{o}(g)$. On note $f \underset{(a)}{\sim} g$.

Proposition 1.2.0.3. —
Si f/g est définie dans un voisinage de a alors :

$$f \underset{(a)}{\sim} g \iff \lim_a f/g = 1.$$

Proposition 1.2.0.4. —
$\underset{(a)}{\sim}$ est une relation d'équivalence.

Démonstration 1.2.0.3. —
Par définition :

1. elle est réflexive : $f \underset{(a)}{\sim} f$ puisque $0 \underset{(a)}{=} \mathrm{o}(f)$;
2. elle est symétrique si $f \underset{(a)}{\sim} g$ alors il existe ε telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ et $f = (1+\varepsilon)g$, or $1/(1+\varepsilon)$ est aussi définie au voisinage de a et puisque $g = (1/[1+\varepsilon])f$ on a
$$g = (1 + (1/[1+\varepsilon] - 1))f$$
or en posant $\varepsilon' = [1+\varepsilon] - 1$ on a $\lim_a \varepsilon' = 0$;
3. elle est transitive : $f \underset{(a)}{\sim} g$ et $g \underset{(a)}{\sim} h$ implique qu'il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ telles que $f = (1+\varepsilon_1)g$, $g = (1+\varepsilon_2)h$ et donc $f = (1+\varepsilon)h$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$ et $\lim_a \varepsilon = 0$.

Proposition 1.2.0.5. —
Si $f \underset{(a)}{\sim} g$ et si $\lim_a f$ existe alors $\lim_a g$ existe et $\lim_a g = \lim_a f$.

Démonstration 1.2.0.4. —
Soit ε telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ alors puisque $f = (1+\varepsilon)g$ on a

$$\lim_a f = \lim_a (1+\varepsilon)g = \lim_a g.$$

Proposition 1.2.0.6. —
Le produit et le quotient (quand il est défini) d'équivalences est une équivalence.
Une puissance entière d'équivalences est une équivalence.

Démonstration 1.2.0.5. —
Si $f = (1+\varepsilon_1)g$et $h = (1+\varepsilon_2)k$ alors $fh = (1+\varepsilon)gk$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$.

Proposition 1.2.0.7. —
Si $f \underset{(a)}{\sim} g$ et si $\varphi : I \to \mathbf{R}$ telle que $\lim_b \varphi = a$, $b \in I$. Alors

$$f \circ \varphi \underset{(a)}{\sim} g \circ \varphi.$$

Démonstration 1.2.0.6. —
Si $f = (1+\varepsilon)g$ avec $\lim_a \varepsilon = 0$. Alors

$$f \circ \varphi = (1+\varepsilon') \cdot g \circ \varphi$$

avec $\varepsilon' = \varepsilon \circ \varphi$ et $\lim_a \varepsilon' = 0$.

Proposition 1.2.0.8. —
On a :

1. Si f est dérivable en a alors si $f'(a) \neq 0$ on a $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x-a)$.
2. Si g est continue dans un voisinage épointé de a, alors si $f \underset{(a)}{\sim} g > 0$ alors

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{(a)}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration 1.2.0.7. —
Dans l'ordre :

1. Si f est dérivable en a alors :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{(a)}{\sim} f'(a)$$

puisque si $\lim_a g = b \in \mathbf{R}^*$ alors $g \underset{(a)}{\sim} b$.

2. On sait que $f - g \underset{(a)}{=} \mathrm{o}(g)$ et on veut :

$$\int_x^a (f-g)(t)\,\mathrm{d}t \underset{(a)}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^a g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

En posant $h = f - g$ on se ramène au problème :

$$h = \mathrm{o}(g) \implies \int_a^x h = \mathrm{o}\int_a^x g.$$

Si $h = \varepsilon g$ et $\lim_a \varepsilon = 0$ alors

$$\int_a^x g = \int_a^x \varepsilon g$$

Or

$$\frac{|\int_x^a \varepsilon g|}{\int_a^x g} \leq \max_{[a,x]} |\varepsilon| \frac{\int_a^x g}{\int_a^x g} \xrightarrow[x\to a]{} 0.$$

Donc

$$\frac{|\int_a^x \varepsilon g = h|}{|\int_a^x g|} \xrightarrow[x\to a]{} 0.$$

2. DÉRIVÉES SUCCESSIVES ET FORMULES DE TAYLOR

Soit $p \geq 0$ un entier.

Définition 2.0.0.3. —
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$.

1. $f \in C^0$ si f est continue ;
2. $f \in C^p$ $(p \geq 1)$ si f est dérivable et $f' \in C^{p-1}$.

Remarque. — Si $f \in C^p$ alors les p-ièmes dérivées successives et f sont toutes continues sur I. $f \in C^\infty$ si $f^{(p)}$ existe et est continue pour tout $p \geq 1$.

Proposition 2.0.0.9. —
Si $f, g \in C^p$ alors $f+g$, fg, f/g et $f \circ g$ (si définie) sont C^p.

Démonstration 2.0.0.8. —
Dans l'ordre :

1. $(f+g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$ par récurrence sur p ;
2. $(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^p \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} g^{(p-k)}$;
3. par récurrence sur p pour $(f \circ g)^{(p)}$ en utilisant : $(f \circ g)' = (f' \circ g) g'$.

Rappels sur les primitives. — Si $f : I \to \mathbf{R}$ est de classe C^1 avec $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert. Alors si f' est continue $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

2.1. Formules de Taylor

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert.

THÉORÈME 2.1.0.1 (Formule de TAYLOR avec reste intégral)
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ de classe C^k. Alors pour tous $a, b \in I$ on a :

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

DÉMONSTRATION 2.1.0.9. —
Par récurrence sur n, on note

$$(T_n) : f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Supposons que (T_k) soit vraie pour tout $k < n$. Alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{(b-t)^k}{k!}, \\ v(t) &= f^{(k)}(t), \\ R_k &= \int_a^b \frac{(b-s)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(s)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} R_k &= \int_a^b u'(s)v(s)\,\mathrm{d}s \\ R_k &= [u(s)v(s)]_a^b - \int_a^b u(s)v'(s)\,\mathrm{d}s \\ R_k &= u(b)v(b) - u(a)v(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s)\,\mathrm{d}s \\ R_k &= \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

On applique (T_{n-1}) :

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_{n-1} \\ f(b) &= f(a) + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n \end{aligned}$$

donc (T_n) vraie.

Théorème 2.1.0.2 (Formule de Taylor avec reste en $f^{(n+1)}(\theta)$)
Soit $n > 0$, $f : I \to \mathbf{R}$ de classe C^{n+1}. Pour tous $a, b \in I$ avec $a \neq b$, il existe θ strictement compris en a et b tel que :

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta).$$

Démonstration 2.1.0.10. —
On pose A telle que

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot A = \int_a^b \frac{(b-s)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(s)\,\mathrm{d}s - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Soit $F : I \to \mathbf{R}$ telle que :

$$F(x) = \int_x^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A.$$

On calcule $F'(x)$:

$$F'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} A$$

$$F'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} \left(A - f^{(n+1)}(x)\right).$$

F est dérivable donc continue sur I :

$$F(a) = \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A = 0,$$

$$F(b) = 0.$$

Par le théorème de Rolle, il existe θ strictement entre a et b tel que $F'(\theta) = 0$. C'est-à-dire :

$$\frac{(b-\theta)^n}{n!} \left(A - f^{(n+1)}(\theta)\right) = 0$$

$$A = f^{(n+1)}(\theta).$$

On en déduit :

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta) = \int_a^b \frac{(b-s)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(s)\,\mathrm{d}s - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

On a alors le résultat en remplaçant dans (T_n).

Remarque. — Si $\left|f^{(n+1)}(s)\right| \leq M$ pour tout $s \in I$ alors

$$\left| f(b) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2.2. Fonctions usuelles

PROPOSITION 2.2.0.10 (Exponentielle). —
Soit $n \in \mathbf{N}$, on regarde le développement de TAYLOR en 0 à l'ordre $n+1$, $\forall i,\ \exp^{(i)}(0) = 1$. On prend $b = x, a = 0$:

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(\theta)$$

$$\theta \in]0, x[.$$

PROPOSITION 2.2.0.11 (Cosinus, sinus). —
La dérivée n-ième de $\cos(t)$ est $\cos(t + n\pi/2)$.

$$\left|\cos(x) - \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}\frac{x^{2i}}{(2i)!}\right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

car $|\cos\theta| \leq 1$.

3. DÉVELOPPEMENT LIMITÉ À L'ORDRE N D'UNE FONCTION DE CLASSE C^N

3.1. Développements limités

DÉFINITION 3.1.0.4. —
Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert tel que $0 \in I, n \in \mathbf{N}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ admet un *développement limité* à l'ordre n en 0 si, et seulement s'il existe un polynôme P de degré n à coefficients réels tel que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^n} = 0.$$

Notons

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - P(x)}{x^n}$$

alors

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)\ ^{(1\S)}, \\ \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0. \end{cases}$$

DÉFINITION 3.1.0.5. —
Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert et soit $n \in \mathbf{N}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ admet un *développement limité* à l'ordre n en a si, et seulement si, la fonction $t \mapsto$

1§. C'est-à-dire, $f(x) - P(x) = \mathrm{o}(x^n)$.

$f(t+a)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. C'est-à-dire si, et seulement s'il existe un polynôme de degré n, P à coefficients réels tel que :

$$f(x) = P(x-a) + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

au voisinage de a.

Théorème 3.1.0.3. —
Si f admet un développement limité à l'ordre n en un point a, alors ce développement limité est unique.

Démonstration 3.1.0.11. —
On peut supposer $a = 0$. Supposons que

$$f(x) = P_1(x) + x^n\varepsilon_1(x) = P_2(x) + x^n\varepsilon_2(x)$$

où $\lim_0 \varepsilon_i = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. On a que

$$(P_1 - P_2)(x) = x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x)$$

et $(P_1 - P_2)(x)$ est de la forme $r_0 + r_1x + \ldots + r_nx^n$ avec $r_0, r_1, \ldots, r_n \in \mathbf{R}$.
On montre par récurrence que les r_k sont tous nuls. Quand $x \to 0$ on trouve :

$$r_0 = 0$$

et donc

$$r_1x + \ldots + r_nx^n = x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x).$$

Supposons que $r_0 = r_1 = r_{k-1} = 0$, $k > 0$. Alors

$$r_kx^k + \ldots + r_nx^n = x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x),$$
$$r_k + r_{k+1}x + \ldots + r_nx^{n-k} = x^{n-k}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x),$$

$n - k \geq 0$ et donc $r_k = 0$ en passant à la limite.

Corollaire 3.1.0.1. —
Soit $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ le développement limité d'une fonction f à l'ordre n en 0. Alors :

1. si f est paire alors P est pair ;
2. si f est impaire alors P est impaire.

Démonstration 3.1.0.12. —

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x),$$
$$f(-x) = P(-x) + x^n(-1)^n\varepsilon(-x) = P(-x) + x^n\varepsilon_1(x),$$

Or comme $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$ alors $\varepsilon_1 \to 0$ aussi.

1. si f est impaire alors on a :
$$f(x) = -P(-x) - x^n\varepsilon_1(x)$$
et comme la première et cette expression sont des développements limits de f à l'ordre n en 0, par unicité on a $-P(-x) = P(x)$, c'est-à-dire P impaire ;
2. si f est paire, on a :
$$f(x) = P(-x) + x^n\varepsilon_1(x)$$
alors de même, l'unicité nous dit que P est alors paire.

Proposition 3.1.0.12. —
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue en $a \in I$.

1. le développement limité de f en a à l'ordre 0 est
$$f(x) = f(a) + \varepsilon(x),\ \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0\ ;$$
2. la fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle possède un développement limité à l'ordre 1 en a, alors dans ce cas le développement limité est donné par :
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a),\ \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Démonstration 3.1.0.13. —
Dans l'ordre :

1. On pose $\varepsilon(x) = f(x) - f(a)$. Comme f est continue en 0, $\varepsilon(x)$ aussi et $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.
2. Supposons que f soit dérivable en a, c'est-à-dire :
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a).$$
On pose
$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a).$$
On a bien $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x).$$
Réciproquement, supposons que f admette un développement limité :
$$f(x) = a_0 + (x-a)a_1 + (x-a)\varepsilon(x),$$
avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Alors, par continuité $a_0 = f(a)$ et
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} a_1 + \varepsilon(x) = a_1 = f'(a).$$

3.2. Développements limités et primitives

Théorème 3.2.0.4. —
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une application continue. Soit F une primitive de f. Soit $a \in I$ et supposons que f admette un développement limité en a à l'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \frac{a_2}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x), \ \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0.$$

Alors F admet le développement limité suivant à l'ordre $n+1$ en a :

$$F(x) = F(a)+a_0(x-a)+\frac{a_1}{2}(x-a)^2+\ldots+\frac{a_n}{(n+1)!}x^{n+1}+(x-a)^{n+1}\varepsilon_1(x), \ \lim_{x\to a}\varepsilon_1(x) = 0.$$

Démonstration 3.2.0.14. —
Soit

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}(t-a)^k.$$

Pour tout $x \neq a$:

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n}.$$

Par hypothèse, $\lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$. En posant $\varepsilon(a) = 0$, on obtient que ε est continue sur I. Donc ε admet une primitive et dans l'identité

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \frac{a_2}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x), \ \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$$

tous les termes admettent des primitives. Donc

$$\begin{aligned}
F(x) - F(a) &= \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
F(x) - F(a) &= \int_a^x \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}(t-a)^k + (t-a)^n\varepsilon(t)\right)\mathrm{d}t \\
F(x) - F(a) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + u(x), \\
u(x) &= \int_a^x (t-a)^n\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Par le théorème de Rolle :

$$u(x) = (x-a)(\theta-a)^n\varepsilon(\theta)$$

pour un θ compris entre a et x. Donc

$$|u(x)| = |x-a|\,|\theta-a|^n\,|\varepsilon(\theta)| \leq |x-a|^{n+1}\,|\varepsilon(\theta)|$$

et $\varepsilon(\theta)$ tend vers 0 quand x tend vers a puisque θ est compris entre a et x. Donc :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + (x-a)^{n+1}\varepsilon_1(x)$$

où
$$\varepsilon_1(x) = \frac{u(x)}{(x-a)^{n+1}} \to 0.$$

Théorème 3.2.0.5. —
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ de classe C^n, $a \in I$. Alors f admet pour développement limité à l'ordre n en a :
$$f(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x),\ \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Démonstration 3.2.0.15. —
Pour $n = 0, 1$ ça a été déjà vu. Supposons alors $n \geq 2$. Soit $f \in C^n$, posons $g = f'$ avec $g \in C^{n-1}(I)$.
Par récurrence :
$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^{n-1}\varepsilon(x),\ \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$
f est une primitive de g :
$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x),\ \lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0$$
$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x)$$
$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon_1(x).$$

Exemple. — Soit :
$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), \text{ si } x > 0 \\ 0, , \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$
son développement limité en 0 d'ordre n est :
$$f(x) = x^n \varepsilon(x),\ \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

3.3. Développement limités usuels

Développements limités en 0 :

$$\begin{aligned}
\exp(x) =& \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + x^n\varepsilon(x)\\
\mathrm{ch}(x) =& \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)\\
\mathrm{sh}(x) =& \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)\\
\cos(x) =& \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)\\
\sin(x) =& \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)\\
\alpha \in \mathbf{R} : \ (1+x)^\alpha =& 1 + \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-i)}{(i+1)!} x^{i+1} + x^{n+1}\varepsilon(x)\\
\frac{1}{1-x} =& \sum_{i=0}^{n} x^i + x^{n+1}\varepsilon(x)\\
\frac{1}{1+x} =& \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^i + x^{n+1}\varepsilon(x)\\
\log(1-x) =& -\sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i!} + x^n\varepsilon(x)\\
\log(1+x) =& \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} x^n\varepsilon(x)\\
\mathrm{Arctan}(x) =& \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x^{2i-1}}{2i-1} + x^{2n}\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Démonstration 3.3.0.16 (ch). —

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\\
\mathrm{ch}'(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} (= \mathrm{sh}(x))\\
\mathrm{ch}''(x) &= \mathrm{ch}(x)\\
\mathrm{ch}^{(2i)}(0) &= 1\\
\mathrm{sh}^{(2i)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

Démonstration 3.3.0.17 (cos). —

$$\begin{aligned}
\cos^{(k)}(x) &= \cos(x + k\pi/2) \\
\cos^{(k)}(0) &= \cos(k\pi/2) \\
\cos^{(2k)}(0) &= (-1)^k \\
\cos^{(2k+1)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

Démonstration 3.3.0.18 (sin). —

$$\begin{aligned}
\sin^{(k)}(x) &= \sin(x + k\pi/2) \\
\sin^{(2k)}(0) &= 0 \\
\sin^{(2k+1)}(0) &= (-1)^k
\end{aligned}$$

Démonstration 3.3.0.19 ($(1+x)^\alpha = f(x)$). —
Par récurrence :

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \\
f^{(k)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)
\end{aligned}$$

Démonstration 3.3.0.20 ($1/1-x$). —

$$\begin{aligned}
\frac{1-x^n}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + \ldots + x^n + x^n \cdot \frac{x}{1-x}
\end{aligned}$$

Démonstration 3.3.0.21 ($\log(1-x)$). —
Utiliser le théorème sur le développement limité d'une primitive avec le développement limité de $1/1-x$.

Démonstration 3.3.0.22 ($\mathrm{Arctan}(x)$). —

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arctan}'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\
\frac{1}{1+x^2} &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x^{2i} + x^{2n}\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

et on conclut avec le théorème du développement limité d'une primitive.

Remarque. — On a vu que si
$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), \text{ si } x > 0 \\ 0, \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$
alors le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre n est
$$f(x) = x^n \varepsilon(x).$$
Or le développement limité de 0 en 0 à l'ordre n est identique.

Exemple. — Soit :
$$f\colon \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x^3 \sin(1/x) \text{ si } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}.$$
La fonction f est continue en 0.

On regarde le développement limité à l'ordre 2 en 0 :
$$f(x) = x^2 \varepsilon(x),\ \varepsilon(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x \sin(1/x) \text{ sinon} \end{cases}, \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) 0.$$
Donc le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre 2 est :
$$f(x) = x^2 \varepsilon(x).$$
Dérivabilité de f en 0 (puisqu'elle est lisse sur $\mathbf{R}^*$) :
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2 \sin(1/x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$
donc f est dérivable et $f'(0) = 0$.
$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x)}{x} = 3x \sin(1/x) - \cos(1/x)$$
donc f n'est pas dérivable à l'ordre 2 en 0 (même si elle a un développement limité à l'ordre 2).

3.4. Règles de calcul des développements limités

> Proposition 3.4.0.13. —
> Soit f, g ayant des développements limités à l'ordre n en 0 :
> $$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x),\ g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon(x)$$
> avec P, Q des polynômes de degré au plus n et $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ (non forcément identiques). Alors
> 1. le développement limité à l'ordre n en 0 de $f + g$ est
> $$(f + g)(x) = (P + Q)(x) + x^n \varepsilon(x);$$

2. pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, le développement λf à l'ordre n en 0 est :
$$(\lambda f)(x) = \lambda P(x) + x^n \varepsilon(x).$$

Démonstration 3.4.0.23. —
Écrivons $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_f(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_g(x)$.

1. $(f+g)(x) = P(x) + Q(x) + x^n(\varepsilon_f + \varepsilon_g)(x)$ et on note $\varepsilon = \varepsilon_f + \varepsilon_g$ qui tend bien en 0.
2. De même.

Proposition 3.4.0.14. —
Soit f qui admet le développement limité en 0 à l'ordre n :
$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x),\ \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$
Alors pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, f admet le développement limité en 0 à l'ordre p :
$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p \varepsilon(x)$$
avec $T_p(P)$ le polynôme tronqué de P :
$$T_p(P) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k,\ P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Démonstration 3.4.0.24. —
On a
$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p \left(\sum_{k=p+1}^{n} a_k x^{k-p} + x^{n-p} \varepsilon(x) \right).$$
Et on pose
$$\varepsilon_1(x) = \sum_{k=p+1}^{n} a_k x^{k-p} + x^{n-p} \varepsilon(x).$$
On a bien$\varepsilon_1(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

Proposition 3.4.0.15. —
Soient f, g admettant les développements limités :
$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x),\ g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x).$$
Alors fg admet le développement limité à l'ordre n en 0 suivant :
$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x) + x^n \varepsilon(x).$$

Remarque. — Si f, g admettent les développements limités à l'ordre n en a :
$$f(x) = P(x-a) + (x-a)^n \varepsilon_1(x),\ g(x) = Q(x-a) + (x-a)^n \varepsilon_2(x)$$

alors le développement limité :

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x-a)\,^{(2\S)} + (x-a)^n\varepsilon(x).$$

Démonstration 3.4.0.25. —

$$\begin{aligned}
(fg)(x) &= (PQ)(x) + x^n(Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x)) \\
PQ(x) &= T_n(PQ)(x) + x^{n+1}R(x),\ R \in \mathbf{R}[x] \\
(fg)(x) &= T_n(PQ)(x) + x^n(xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x))
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(x) = xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x) \\
&\lim_{x\to 0} xR(x) = 0 \\
&\lim_{x\to 0} Q\varepsilon_1(x) = 0 \\
&\lim_{x\to 0} P\varepsilon_2(x) = 0 \\
&\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0
\end{aligned}$$

Exemple. — On veut le développement limité de :

$$\mathrm{Arctan}(x-1)\exp(x)$$

en 1 d'ordre 3.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arctan}(y) &= y - \frac{y^3}{3} + y^3\varepsilon(y) \\
\mathrm{Arctan}(x-1) &= (x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3\varepsilon(x) \\
\exp(x) &= \exp(x-1+1) = e\exp(x-1) \\
\exp(x) &= e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3\varepsilon(x)\right)
\end{aligned}$$

Et donc

$$f(x) = e\left((x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3\varepsilon(x)\right) \times \left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3\varepsilon(x)\right)$$

$$f(x) = e\left((x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} - \frac{(x-1)^3}{3}\right) + (x-1)^3\varepsilon(x)$$

2§. On tronque avant d'évaluer en $x-a$.