

## COURS COMPLET DE MM3

# Sommaire

<b>I</b>	<b>Algèbre</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Groupes et groupes symétriques</b>	<b>3</b>
1	Introduction . . . . .	3
2	Sous-groupe . . . . .	4
3	Morphisme de groupes . . . . .	5
4	Groupe symétrique . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Déterminants et réduction</b>	<b>11</b>
1	Déterminants . . . . .	11
2	Déterminant d'un endomorphisme . . . . .	16
3	Diagonalisation . . . . .	18
4	Polynômes en un endomorphisme de $E$ . . . . .	23
5	Applications . . . . .	28
<b>II</b>	<b>Analyse</b>	<b>31</b>
<b>3</b>	<b>Développements limités</b>	<b>33</b>
1	Fonctions négligeables et équivalentes . . . . .	33
2	Dérivées successives et formules de TAYLOR . . . . .	36
3	Développement limité à l'ordre $n$ d'une fonction de classe $C^n$ . . . . .	39
4	Calculs avec les développements limités . . . . .	45
5	Applications . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Courbes et surfaces paramétrées</b>	<b>63</b>
1	Définitions . . . . .	63
2	Tangentes . . . . .	63
3	Branches infinies . . . . .	65
4	Étude de courbes paramétrées . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>68</b>
1	Définitions . . . . .	68
2	Opérations sur les séries . . . . .	71
3	Critères de convergence . . . . .	73
4	Transformation d'ABEL . . . . .	82

# Première partie

## Algèbre

### Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Groupes et groupes symétriques</b>	<b>3</b>
1	Introduction . . . . .	3
1.1	Groupe abstrait . . . . .	3
1.2	Groupe commutatif . . . . .	3
1.3	Exemples . . . . .	4
2	Sous-groupe . . . . .	4
2.1	Sous-groupe . . . . .	4
2.2	Ordre d'un groupe et d'un élément . . . . .	4
3	Morphisme de groupes . . . . .	5
3.1	Morphisme de groupes . . . . .	5
3.2	Image et noyau . . . . .	5
4	Groupe symétrique . . . . .	6
4.1	Groupe de permutations . . . . .	6
4.2	Transpositions et cycles . . . . .	7
4.3	Décomposition des cycles . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Déterminants et réduction</b>	<b>11</b>
1	Déterminants . . . . .	11
1.1	Différentes définitions . . . . .	11
1.2	Formes $n$ -linéaires alternées . . . . .	13
2	Déterminant d'un endomorphisme . . . . .	16
2.1	Invariance par changement de base . . . . .	16
3	Diagonalisation . . . . .	18
3.1	Valeur propre et vecteur propre . . . . .	18
3.2	Sous-espaces propres . . . . .	19
3.3	Conditions de diagonalisabilité . . . . .	20
4	Polynômes en un endomorphisme de $E$ . . . . .	23
4.1	Polynômes évalué en un endomorphisme . . . . .	23
4.2	Lemme des noyaux . . . . .	25
4.3	Trigonalisation . . . . .	26
4.4	Comment calculer $m_f$ ? (CAYLEY-HAMILTON) . . . . .	27
5	Applications . . . . .	28
5.1	Calculs de puissances . . . . .	28

5.2	Systèmes différentiels . . . . .	28
5.3	Application aux suites récurrentes . . . . .	29

---

# Chapitre 1

## Groupes et groupes symétriques

### 1 INTRODUCTION

#### 1.1 Groupe abstrait

##### DÉFINITION 1.1

Un groupe est la donnée d'un couple  $(G, \cdot)$  où  $G$  est un ensemble et  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  une loi de composition interne, telle que :

1. associativité :

$$\forall a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$

2. existence de l'élément neutre  $e \in G$  :

$$\forall g \in G, g \cdot e = e \cdot g = g;$$

3. existence de l'inverse :

$$\forall x \in G, \exists y \in G, x \cdot y = y \cdot x = e.$$

NOTATIONS. Pour un groupe multiplicatif on note  $ab$  l'élément  $a \cdot b$ , l'élément neutre est noté 1 et l'inverse de  $a$  est noté de  $a^{-1}$ .

##### DÉMONSTRATION (Unicité de l'élément neutre et de l'inverse)

Soient  $e, e'$  deux éléments neutres. Alors

$$e' = e \cdot e' = e.$$

Soient  $b, c$  inverses de  $a$ . Alors :

$$b = b \cdot a \cdot c = c.$$

#### 1.2 Groupe commutatif

##### DÉFINITION 1.2 (Groupe commutatif (ou Abélien))

Un groupe  $G$  est commutatif si la loi de composition l'est :

$$\forall x, y \in G, xy = yx.$$

NOTATIONS. En général la loi de composition d'un tel groupe est notée comme un groupe additif  $(G, +)$ . Le neutre est alors 0 et l'inverse de  $x$  est  $-x$ .

### 1.3 Exemples

- Le couple  $(\mathbf{Z}, +)$  est un groupe abélien où  $+$  est l'addition usuelle des entiers.
- $(\mathbf{R}, +)$  et  $(\mathbf{Q}, +)$  sont également des groupes abéliens.
- $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \times)$  et  $(\mathbf{Q} \setminus \{0\}, \times)$  sont des groupes abéliens.
- $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$  est un groupe pour la composition de matrices en tant que loi de composition. Ce n'est pas un groupe commutatif.

## 2 SOUS-GROUPE

### 2.1 Sous-groupe

DÉFINITION 2.1 (Sous-groupe)

Soit  $G$  un groupe (multiplicatif) et  $H \subset G$  un sous-ensemble de  $G$ .  $H$  est un sous-groupe de  $G$  si c'est un groupe avec la loi de composition et d'inverse astreintes à  $H$  <sup>1§</sup>.

PROPOSITION 2.2

Soit  $G$  un groupe.

Si  $(H_i)_{i \in I}$  est une famille de sous-groupes de  $G$  alors  $\bigcap_{i \in I} H_i$  est un sous-groupe de  $G$ .

DÉFINITION 2.3

Pour tout  $i \in I$ ,  $H_i$  vérifie la propriété de sous-groupe et donc l'intersection aussi.

REMARQUE. Généralement la réunion de sous-groupes n'est pas un sous-groupe. En effet si  $x \in H_1$  et  $y \in H_2$  alors il n'y a aucune raison que  $xy \in \bigcup H_i$ .

Pour une équivalence il faut rajouter une hypothèse. Si  $H, K$  sont deux sous-groupes de  $G$  alors  $H \cup K$  est un sous-groupe si, et seulement si,  $H \subset K$  ou  $K \subset H$ .

En effet supposons  $H \not\subset K$  et que  $H \cup K$  est un sous-groupe. Si  $K \not\subset H$  alors on peut choisir  $x \in K - K \cap H$  et  $y \in H - K \cap H$ . On a  $x, y \in K \cup H$  et donc par hypothèse  $xy \in H \cup K$  et donc il existe des inverses respectifs  $x^{-1}, y^{-1}$ . Supposons  $xy \in H$  :  $H \ni (xy)y^{-1} = xe = x \in H$  absurde.

DÉFINITION 2.4 (Groupe engendré)

Si  $G$  est un groupe et  $X$  une partie de  $G$  alors on appelle sous-groupe de  $G$  engendré par  $X$  le plus petit sous-groupe de  $G$  contenant  $X$ . On le notera ici  $\langle X \rangle$ .

On a de plus si on note  $\mathbb{G}$  l'ensemble des sous-groupes de  $G$  :

$$\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathbb{G} \text{ et } H \supset X} H.$$

EXEMPLE. Soit  $G$  un groupe et  $x \in G$ . Alors :

$$\langle x \rangle = \left\{ x^k \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

En effet c'est un sous-groupe de  $\langle x \rangle$  et le plus petit.

### 2.2 Ordre d'un groupe et d'un élément

---

<sup>1§</sup>. C'est-à-dire si  $H$  est stable par l'application  $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ .

**DÉFINITION 2.5** (Ordre d'un groupe)

Si  $G$  est un groupe fini, on appelle *ordre de  $G$*  son cardinal, on le note généralement  $|G|$  ou  $\sharp G$ .

Si  $G$  est un groupe et  $x \in G$  alors on appelle *ordre de  $x$*  le cardinal de son sous-groupe engendré (s'il est fini).

Dans le cas où le groupe en question ne serait pas fini, on dit que l'ordre est infini.

**EXEMPLES.**

- Dans  $\mathbf{Z}$ , tous les éléments non nuls sont d'ordre infini.
- Dans  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  pour  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  est d'ordre  $n$  puisque toute classe admet un représentant dans  $\{0, \dots, n-1\}$ .
- Ordre des éléments de  $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$  :

$x$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$ x $	1	4	2	4

**THÉORÈME 2.6** (Théorème de LAGRANGE)

Pour tout groupe  $G$  et tout sous-groupe  $H$  de  $G$ , l'ordre (i.e. le cardinal) de  $H$  divise l'ordre de  $G$  :

$$\sharp H \mid \sharp G.$$

**DÉMONSTRATION** (Théorème de LAGRANGE)

Le cardinal de l'ensemble  $G/H$  est appelé *indice* de  $H$  dans  $G$  et est noté  $[G : H]$ . De plus, ses classes forment une partition de  $G$  et chacune d'entre elles a le même cardinal que  $H$ . On a alors :

$$\sharp G = \sharp H \times [G : H].$$

### 3 MORPHISME DE GROUPE

#### 3.1 Morphisme de groupes

**DÉFINITION 3.1**

Soient  $G, H$  deux groupes. Une application  $f : G \rightarrow H$  est un morphisme de groupes si :

$$\forall x, y \in G, f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

**PROPOSITION 3.2**

Soient  $f : G \rightarrow H$  un morphisme de groupes. Alors :

1.  $f(e_G) = e_H$  ;
2.  $\forall x \in G, f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

#### 3.2 Image et noyau

**DÉFINITION 3.3**

Soit  $f : G \rightarrow H$  un morphisme de groupes. On définit :

1.  $\text{Ker}(f) = \{x \in G \mid f(x) = e\}$  ;
2.  $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in G\}$ .

**PROPOSITION 3.4**

Soit  $f : G \rightarrow H$  un morphisme de groupes.

1.  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont des sous-groupes de  $G$  et  $H$  respectivement ;
2.  $f$  est injective si, et seulement si,  $\text{Ker}(f) = \{e\}$  ;
3.  $f$  est surjective si, et seulement si,  $\text{Im}(f) = H$ .

**DÉMONSTRATION**

Point par point :

1. On a bien entendu  $f(e) = e$  et  $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$  pour tout  $x \in G$ . Ainsi  $\text{Im}(f) = f(G)$  est un sous-groupe de  $H$ .  
Soient  $x, y \in G$ , alors  $f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = ee^{-1} = e$  donc  $xy^{-1} \in G$ . De plus  $f(e) = e$  donc  $\text{Ker}(f)$  est un sous-groupe de  $G$ .

2. Soient  $x, y \in G$  :

$$(f(x) = f(y) \iff x = y) \iff (f(xy^{-1}) = e \iff xy^{-1} = e).$$

3. Par définition, si  $\text{Im}(f) = H$  alors  $f$  est surjective et réciproquement.

**4 GROUPE SYMÉTRIQUE****4.1 Groupe de permutations****DÉFINITION 4.1**

Soit  $E$  un ensemble. On définit :

$$S_E = \{\text{bijections } E \rightarrow E\}.$$

La loi étant la composition des applications. Elle est associative, admet un élément neutre (application identité) et toute application admet une application inverse par définition.

**PROPOSITION 4.2**

Si  $\#E = n$  alors  $S_E$  est isomorphe (au sens de groupes) à  $S_{\{1,2,\dots,n\}} := S_n$ .

**DÉMONSTRATION**

Puisque  $\#E = n$  il existe une bijection  $\phi : E \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ . On considère alors l'application de  $\theta : S_E \rightarrow S_n$  définie par :  $\omega \mapsto \phi \circ \omega \circ \phi^{-1}$ . Comme  $\omega, \phi$  sont des bijections, l'application  $\phi \circ \omega \circ \phi^{-1}$  est une bijection. L'application  $\theta$  est bien définie.

On a :

$$\begin{aligned} \theta(\omega' \circ \omega) &= \phi \circ (\omega' \circ \omega) \circ \phi^{-1} \\ \theta(\omega' \circ \omega) &= \phi \circ \omega' \circ \text{id} \circ \omega \circ \phi^{-1} \\ \theta(\omega' \circ \omega) &= \theta(\omega') \circ \theta(\omega). \end{aligned}$$

$\theta$  est bien un morphisme de groupes. On a  $\theta^{-1}(\omega) = \phi^{-1} \circ \omega \circ \phi$  qui fait de  $\theta$  une bijection.

**DÉFINITION 4.3 (Groupe symétrique)**

On appelle  $S_n$  le *groupe symétrique*.

**REMARQUE.** On omet la notation  $\circ$ . Si  $\omega \in S_n$  on décrit son action sur  $\{1, 2, \dots, n\}$  par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \omega(1) & \omega(2) & \dots & \omega(n) \end{pmatrix}.$$



EXEMPLE DE COMPOSITION. Dans  $S_4$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

## 4.2 Transpositions et cycles

DÉFINITION 4.4 (Transposition)

Une *transposition* de  $S_n$  est une permutation qui échange deux éléments et laisse invariants les  $n - 2$  autres.

NOTATION. Pour tous  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  avec  $i \neq j$  on note  $(ij)$  la transposition :

$$(ij) : \begin{cases} i \mapsto j \\ j \mapsto i \\ k \mapsto k, \forall k \neq i, j \end{cases}.$$

REMARQUE. Une transposition est une involution. C'est à dire que l'ordre d'une transposition est 2.

PROPOSITION 4.5

$\#S_n = n!$ .

DÉFINITION 4.6 (Cycle)

On appelle *cycle* de longueur  $r > 1$  (noté  $r$ -cycle) (dans  $S_n$ ) une permutation  $\omega$  telle qu'il existe  $x_1, x_2, \dots, x_r \in \{1, 2, \dots, n\}$  vérifiant :

1.  $\omega(x_1) = x_2, \omega^n(x_1) = x_{1+n}$  avec  $n < r$  ;
2.  $\omega(x_r) = x_1$  ;
3.  $\omega(x) = x$  si  $x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ .

NOTATION. On note un tel cycle :  $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r)$ .

REMARQUE. Les 2-cycles sont exactement les transpositions.

EXEMPLE. Dans  $S_3$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3) = \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases}.$$

## 4.3 Décomposition des cycles

DÉFINITION 4.7 (Support)

On appelle *support* du cycle  $\omega$  le sous-ensemble :

$$\{x_1, x_2, \dots, x_r\} \subset \{1, 2, \dots, n\}.$$

## LEMME 4.8

Deux cycles de supports disjoints commutent.

## DÉMONSTRATION

Soient :

$$\begin{cases} v = (x_1, x_2, \dots, x_r) \\ w = (y_1, y_2, \dots, y_s) \end{cases}$$

avec  $\{x_1, x_2, \dots, x_r\} \cap \{y_1, y_2, \dots, y_s\} = \emptyset$ .

Sur un élément extérieur du support la permutation agit comme l'identité donc deux supports disjoints impliquent que les permutations associées permutent (puisque que l'identité permute).

## LEMME 4.9

Un  $r$ -cycle est d'ordre  $r$ .

## DÉMONSTRATION

Soit  $w = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r)$  un  $r$ -cycle. Il est clair qu'un élément du support est d'ordre  $r$ . Les autres restent fixés par  $w$  et donc  $w$  est d'ordre  $r$ .

## PROPOSITION 4.10

Toute permutation de  $S_n$  est décomposable en produit de cycles de supports disjoints. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

EXEMPLES. Soit :

$$S_5 \ni \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = w.$$

On peut décomposer  $w$  :

$$(1 \ 3 \ 5)(2)(4) = (1 \ 3 \ 5).$$

$$S_8 \ni w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 7 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 5 \ 3)(2 \ 6 \ 8)(4 \ 7).$$

## THÉORÈME 4.11

Le groupe symétrique est engendré par les transpositions.

## DÉMONSTRATION

On procède par récurrence sur  $n$ .

1.  $S_2 = \{1, (1 \ 2)\}$  est engendré par  $(1 \ 2)$ .
2. Soit  $n > 2$ , supposons que  $S_{n-1}$  est engendré par les transpositions de  $S_{n-1}$ . Soit  $w \in S_n$  :
  - (a) Soit  $w(n) = n$  et alors on décompose  $w$  en cycles de tailles inférieures ou égales à  $S_{n-1}$  et c'est démontré.
  - (b) Soit  $w(n) \neq n$ . On pose  $m = w(n)$  et soit  $t = (n \ m)$ . On pose  $v = tw$  et alors  $v(n) = n$  et on lui applique le cas précédent. On a alors par unicité de la décomposition que  $w$  est elle-même engendrée par des transpositions et c'est démontré.

## THÉORÈME 4.12

On a les propositions suivantes :

1. Si  $w \in S_n$  est une permutation qui s'écrit de deux façons différentes comme produit de transpositions :

$$w = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_{r'},$$

alors  $(-1)^r = (-1)^{r'}$ .

On appelle  $(-1)^r$  la *signature* de  $w$ .

2. La signature est un morphisme de groupes de  $S_n \rightarrow \{1, -1\} \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ .

#### DÉMONSTRATION

Soit  $w \in S_n$ . On pose :

$$\begin{aligned}\varepsilon(w) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{w(i) - w(j)}{i - j} \\ \varepsilon(w) &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (w(i) - w(j))}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (i - j)} \\ \varepsilon(w) &= \frac{N}{D}.\end{aligned}$$

Avec

$$N = \prod_{1 \leq i, j \leq n ; w^{-1}(i) < w^{-1}(j)} (i - j) = \pm D.$$

D'où :

$$\varepsilon(w) = \pm 1.$$

EXEMPLE.  $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ . On a :

$$\varepsilon(w) = \frac{(w(1) - w(2))(w(1) - w(3))(w(2) - w(3))}{(1 - 2)(1 - 3)(2 - 3)} = \frac{(2 - 3)(2 - 1)(3 - 1)}{(1 - 2)(1 - 3)(2 - 3)} = 1.$$

#### LEMME 4.13

On a :

1.  $\varepsilon : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$  est un morphisme de groupes ;
2.  $\varepsilon(ij) = -1$  pour tout  $i \neq j$ .

#### DÉMONSTRATION (Théorème)

Si

$$w = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_{r'}$$

alors par le lemme :

$$\varepsilon(w) = (-1)^r = (-1)^{r'}.$$

#### DÉMONSTRATION (Lemme)

Soit  $E = \{(ij) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ . On pose :

$$f_w : \begin{cases} E \rightarrow E \\ (i \ j) \mapsto (w(i) \ w(j)) \text{ si } w(i) < w(j) . \\ (i \ j) \mapsto (w(j) \ w(i)) \text{ si } w(i) > w(j) \end{cases}$$

$f$  est une bijection car elle est injective et l'ensemble de départ et d'arrivée ont le même cardinal qui est fini.

Donc on a :

$$\begin{aligned}\varepsilon(w) &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (w(i) - w(j))}{\prod_{(i,j) \in E} (w(i) - w(j))} \\ \varepsilon(w) &= \pm 1.\end{aligned}$$

Pour vérifier que  $\varepsilon$  est un morphisme, on calcul  $\varepsilon(wv)$  :

$$\begin{aligned}\varepsilon(wv) &= \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{i - j} \\ \varepsilon(wv) &= \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \prod_{(i,j) \in E} \frac{v(i) - v(j)}{i - j} \\ \varepsilon(wv) &= \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \varepsilon(v).\end{aligned}$$

On calcule :

$$\begin{aligned}\varepsilon(w) &\stackrel{?}{=} \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \\ \varepsilon(w) &= \prod_{(i,j) \in E_1} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \prod_{(i,j) \in E_2} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)}\end{aligned}$$

Où  $E_1 = \{(i, j) \in E \mid v(i) < v(j)\}$  et  $E_2 = \{(i, j) \in E \mid v(j) < v(i)\}$ ;  $E = E_1 \amalg E_2$ .

$$\begin{aligned}\varepsilon(w) &= \prod_{(i,j) \in E_2} \frac{wv(j) - wv(i)}{v(j) - v(i)} \prod_{(i,j) \in E_1} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \\ \varepsilon(w) &= \prod_{i < j ; v^{-1}(j) < v^{-1}(i)} \frac{w(i) - w(j)}{i - j} \prod_{i < j ; v^{-1}(i) < v^{-1}(j)} \frac{w(i) - w(j)}{i - j} \\ \varepsilon(w) &= \prod_{i < j} \frac{w(i) - w(j)}{i - j}\end{aligned}$$

## Chapitre 2

# Déterminants et réduction

## 1 DÉTERMINANTS

### 1.1 Différentes définitions

Soit  $A \in M_n(\mathbf{R})$  avec  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

DÉFINITION 1.1 (Déterminant)

On définit en premier lieu :

$$\det A = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) a_{w(1),1} \cdot a_{w(2),2} \cdot \dots \cdot a_{w(n),n}.$$

C'est la formule de CRAMER.

DÉFINITION 1.2

Une seconde définition possible :

Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $A_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbf{R})$  la matrice (extraite) obtenue en enlevant la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne de  $A$ .

On a alors :

$$\det' A = a_{1,1} \cdot \det'(A_{1,1}) - a_{1,2} \cdot \det'(A_{1,2}) + \dots + (-1)^{n-1} a_{1,n} \cdot \det'(A_{1,n}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{1,i} \cdot \det'(A_{1,i})$$

EXEMPLE. Prenons :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; A_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne avec la seconde définition :

$$\det A = 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 2. On vérifie que les deux définitions coïncident :

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} - a_{2,1} a_{1,2}.$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}\det(a_{2,2}) - a_{1,2}\det(a_{2,1}) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.$$

REMARQUE. Soient  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$  un  $n$ -uplet de vecteurs de  $E$ . Pour tout  $j$ , on pose :

$$u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \cdot e_i \quad a_{i,j} \in \mathbf{R}.$$

On appelle *déterminant* dans la base  $B$  de  $(u_1, \dots, u_n)$  le réel :

$$\det_B(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det(a_{i,j}).$$

EXEMPLE. Pour  $n = 2$ . On prend :

$$\begin{aligned} u_1 &= 2e_1 + 3e_2, \\ u_2 &= -e_1 + 6e_2. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\det_B(u_1, u_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 15.$$

REMARQUE. Si  $u_j = e_j$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  alors  $\det_B(e_1, \dots, e_n) = \det(I_d) = 1$ .

#### PROPOSITION 1.3

On a les énoncés :

1. pour tout  $w \in S_n$  :

$$\det_B(u_{w(1)}, u_{w(2)}, \dots, u_{w(n)}) = \varepsilon(w) \det_B(u_1, u_2, \dots, u_n);$$

2. on en déduit que le déterminant change de signe si on échange deux colonnes ;
3. si pour  $i \neq j$  on a  $u_i = u_j$  alors le déterminant est nul (puisque négatif et positif simultanément).

#### DÉMONSTRATION

Il suffit de montrer le premier point.

On sait que  $S_n$  est engendré par les transpositions. On suppose donc que  $w \in S_n$  est une transposition.

En fait,  $S_n$  est engendré par les transpositions simples, i.e. les transpositions de la forme  $(k, k+1)$  avec  $1 \leq k < n$ . <sup>1§</sup>

On suppose donc que  $w$  est de la forme  $(k, k+1)$ . Soit  $A$  la matrice  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  de ces  $n$  vecteurs dans les coordonnées de la base  $B$ . Soit  $A'$  la matrice obtenue en permutant les colonnes  $k$  et  $k+1$  de  $A$ . Il faut donc vérifier que :

$$\det A' = \varepsilon(w) \det A = -\det A.$$

On calcule à gauche et à droite :

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{1,j}), \\ \det A' &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a'_{1,j} \det(A'_{1,j}). \end{aligned}$$

- Pour  $j \neq k, k+1$  on a  $a'_{1,j} = a_{1,j}$  et  $A'_{1,j}$  est obtenue en échangeant les colonnes  $k$  et  $k+1$  de  $A_{1,j}$
- Pour  $j = k$  on a  $a'_{1,k} = a_{1,k+1}$  et donc  $A'_{1,k} = A_{1,k+1}$ .
- Pour  $j = k+1$  on a  $a'_{1,k+1} = a_{1,k}$  et donc  $A'_{1,k+1} = A_{1,k}$ .

On en déduit :

$$\begin{aligned}\det A' &= \sum_{j \neq k, k+1} (-1)^{j+1} \det(A'_{i,j}) \textcolor{red}{2}\S + (-1)^{k+1} a'_{1,k} \det(A'_{1,k}) + (-1)^k a'_{1,k+1} \det(A'_{1,k+1}), \\ \det A' &= \sum_{j \neq k, k+1} (-1)^{j+1} (-\det(A_{i,j})) + (-1)^{k+1} a_{1,k+1} (-\det(A_{1,k+1})) + (-1)^k a_{1,k} (-\det(A_{1,k})), \\ \det A' &= -\det A.\end{aligned}$$

## 1.2 Formes $n$ -linéaires alternées

DÉFINITION 1.4 (Forme  $n$ -linéaire)

Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ . Une forme  $n$ -linéaire sur  $E$  est une application  $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{R}$  qui est linéaire sur chaque composante.

PROPOSITION 1.5

Soit  $B$  une base de  $E$  avec  $\dim E = n$ .

$$\det_B : \begin{cases} E^n \rightarrow \mathbf{R} \\ (u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_B(u_1, \dots, u_n) \end{cases}$$

est une forme  $n$ -linéaire.

DÉMONSTRATION

On pose :

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & aa'_{1,k} + ba''_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & aa'_{2,k} + ba''_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \\ A' &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a'_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a'_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \\ A'' &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a''_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a''_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On veut montrer :

$$\det A = a \det A' + b \det A''.$$

On calcule :

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{i,j}) + (-1)^{k+1} (aa'_{1,k} + ba''_{1,k}) \det(A_{1,k}), \\ \det A' &= \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A'_{i,j}) + (-1)^{k+1} a'_{1,k} \det(A_{1,k}), \\ \det A'' &= \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A''_{i,j}) + (-1)^{k+1} a''_{1,k} \det(A_{1,k})\end{aligned}$$

1§. En effet, toute transposition est un produit de transpositions simples par une conjugaison adaptée : on « renomme » les éléments.

2§. Par récurrence sur  $n$  on a  $\det(A'_{i,j}) = -\det(A_{i,j})$ .

On doit alors montrer :

$$\forall j \neq k, \det A_{i,j} = \text{adet}(A'_{i,j}) + \text{bdet}(A''_{i,j})$$

ce qui est démontré par hypothèse de récurrence.

**DÉFINITION 1.6** (Forme  $n$ -linéaire alternée)

Soit  $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{R}$  une forme  $n$ -linéaire alternée avec  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

$\varphi$  est une forme  $n$ -linéaire alternée si on a :

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$$

dès que deux composantes  $u_i, u_j$  avec  $i \neq j$  coïncident.

**REMARQUE.** On en déduit que le déterminant dans une base donnée est une forme  $n$ -linéaire alternée.

**PROPOSITION 1.7**

Soit  $\varphi$  une forme  $n$ -linéaire alternée. Alors pour tout  $w \in S_n$ ,  $\varphi(u_{w(1)}, \dots, u_{w(n)}) = \varepsilon(w)\varphi(u_1, \dots, u_n)$ .

**DÉMONSTRATION**

On peut supposer que  $w$  est une transposition simple :  $w = (k, k+1)$  avec  $1 \leq k < n$ .

On veut montrer :

$$\varphi(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, u_k, u_{k+2}, \dots, u_n) = -\varphi(u_1, \dots, u_n).$$

Pour simplifier les notations, on oublie les indices  $u_i$  avec  $i \neq k, k+1$ . On a :

$$\varphi(u_k + u_{k+1}, u_k + u_{k+1}) = 0$$

et donc par linéarité :

$$\varphi(u_k, u_k) + \varphi(u_k, u_{k+1}) + \varphi(u_{k+1}, u_k) + \varphi(u_{k+1}, u_{k+1}) = 0 \iff \varphi(u_k, u_{k+1}) = -\varphi(u_{k+1}, u_k).$$

**PROPOSITION 1.8**

Soient  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Soit  $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{R}$  une forme  $n$ -linéaire alternée. Alors :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(u_1, \dots, u_n)\varphi(e_1, \dots, e_n)$$

où les  $u_i$  sont exprimés dans la base  $B$ .

**REMARQUE.** Toutes les formes  $n$ -linéaires alternées sont proportionnelles au déterminant.

**DÉMONSTRATION**

Soit  $u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i$ , les  $a_{i,j}$  sont les coordonnées des  $u_j$  dans la base  $B$ .

On a :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n a_{i,1}e_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,n}e_i\right).$$



Comme  $\varphi$  est  $n$ -linéaire alternée :

$$\begin{aligned}\varphi(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{w \in S_n} a_{w(1),1} a_{w(2),2} \dots a_{w(n),n} \varphi(e_{w(1)}, \dots, e_{w(n)}) \\ \varphi(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{w \in S_n} a_{w(1),1} a_{w(2),2} \dots a_{w(n),n} \varepsilon(w) \varphi(e_1, \dots, e_n) \\ \varphi(u_1, \dots, u_n) &= \det_B(u_1, \dots, u_n) \varphi(e_1, \dots, e_n)\end{aligned}$$

REMARQUES. On a démontré :

1. Pour une base  $B$  choisie, le déterminant  $\det_B$  est une forme  $n$ -linéaire alternée ;
2. pour toute forme  $n$ -linéaire alternée,  $\varphi$ , on a :  $\varphi(\cdot) = \det_B(\cdot) \varphi(B)$  ;
3. en particulier, les deux déterminants coïncident.

PROPOSITION 1.9

Pour tout  $A \in M_n(\mathbf{R})$  on a :

$$\det(A) = \det(A^t).$$

DÉMONSTRATION

On a :

$$\begin{aligned}A &= (a_{i,j}) \\ A^t &= (b_{i,j}), \quad b_{i,j} = a_{j,i}\end{aligned}$$

On calcule par la formule de CRAMER :

$$\begin{aligned}\det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^n b_{w(i),i}, \\ \det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^n a_{i,w(i)}.\end{aligned}$$

Pour  $w$  fixé, dans  $i$  décrit 1 à  $n$  alors  $w(i)$  décrit également 1 à  $n$ . On effectue un changement de variable  $j = w(i)$  et alors  $i = w^{-1}(j)$  et on a :

$$\begin{aligned}\det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{j=1}^n a_{w^{-1}(j),j}, \\ \det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w^{-1}) \prod_{j=1}^n a_{w(j),j}, \\ \det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{j=1}^n a_{w(j),j}, \\ \det(A^t) &= \det(A).\end{aligned}$$

REMARQUE. On peut calculer  $\det(A)$  en développant par rapport à la première ligne ou la première colonne (au choix). On a alors :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^n a_{i,1} \det(A_{i,1}).$$

## PROPOSITION 1.10

Si  $A \in M_n(\mathbf{R})$  est triangulaire alors :

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

## DÉMONSTRATION

Supposons  $A$  triangulaire supérieure, c'est-à-dire  $a_{i,j} = 0$  si  $i > j$ .

Par la formule de CRAMER :

$$\det(A) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^n a_{i,w(i)}.$$

Or les seuls  $w$  qui contribuent à cette somme sont ceux tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, i \leq w(i),$$

c'est-à-dire :  $w = \text{id}$  <sup>3§</sup>.

En développant par rapport à une ligne (ou une colonne quelconque) :

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{j,i} \det(A_{j,i}).$$

Si  $A'$  désigne la matrice obtenue en permutant les lignes de  $A$  par  $w = (1 \ 2 \ \dots \ j)$  :

$$\det(A') = \varepsilon(w) \det(A) = (-1)^{j+1} \det(A).$$

On note  $A' = (a'_{k,l})_{k,l \in \{1, \dots, n\}}$ .

En choisissant  $j > 1$  :

$$\begin{aligned} \det(A') & \stackrel{4§}{=} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a'_{1,i} \det(A'_{1,i}), \\ \det(A') &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{j,i} \det(A_{j,i}); \\ \det(A) &= (-1)^{j+1} \det(A'), \\ \det(A) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{j+i} a_{j,i} \det(A_{j,i}). \end{aligned}$$

## 2 DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

### 2.1 Invariance par changement de base

## PROPOSITION 2.1

Soient  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et

<sup>3§</sup>. Soit  $w \in S_n$ ,  $w : \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \dots, n\}$ .

Si  $i \leq w(i)$  pour tout  $i$  alors  $w(k) = k$  pour tout  $k$  par récurrence descendante sur  $k$  :

- $n \leq w(n)$  et donc  $w(n) = n$ ;
- $k-1 \leq w(k-1)$  et donc  $w(k-1) = w(k)$ .

<sup>4§</sup>. En développant par rapport à la première ligne.

$C = (u_1, \dots, u_n)$  un système de  $n$  vecteurs de  $E$ . Alors  $C$  est une base de  $E$  si, et seulement si :

$$\det_B(C) \neq 0.$$

#### DÉMONSTRATION

Supposons que  $C$  est une base de  $E$ .

On a vu que si  $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{K}$  est une forme  $n$ -linéaire alternée alors :

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n, \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det_B(u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \varphi(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

On applique cette formule avec  $\varphi = \det_C$  et on a :

$$\begin{aligned} \det_C(u_1, u_2, \dots, u_n) &= \det_B(C) \det_C(B), \\ 1 &= \det_C(C) = \det_B(C) \det_C(B), \end{aligned}$$

et donc  $\det_B(C) \neq 0$ .

Supposons maintenant que  $C$  est liée. Il existe alors  $i$  tel que  $u_i$  est combinaison linéaire des  $u_j$  avec  $j \neq i$ . Par exemple :

$$u_i = \sum_{j \neq i} a_j \cdot u_j, \quad (a_j \in \mathbf{R})$$

$$\det_B(C) = \det_B(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, \sum_{j \neq i} a_j \cdot u_j, u_{i+1}, \dots, u_n),$$

$$\det_B(C) = \sum_{j \neq i} a_j \det_B(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_n),$$

or  $\det_B$  est alternée et comme  $u_j$  apparaît deux fois dans la dernière expression, on a

$$\det_B(C) = 0.$$

#### PROPOSITION 2.2

Soient  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $B = (e_1, \dots, e_n)$ ,  $C = (u_1, \dots, u_n)$  deux bases de  $E$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Alors :

$$\det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_C(f(u_1), \dots, f(u_n)).$$

REMARQUE. En d'autres termes,  $\det_B(f(B))$  ne dépend pas du choix de la base  $B$ . On l'appelle  $\det(f)$ .

#### DÉMONSTRATION

On utilise la formule :

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n, \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det_B(u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \varphi(e_1, e_2, \dots, e_n),$$

où  $\varphi$  est une forme  $n$ -linéaire alternée.

On pose :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$$

et on a alors :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det_C(f(u_1), \dots, f(u_n)) \det_B(C).$$

De même :

$$\det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det_B(C) \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Et donc :

$$\det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) \det_B(C) = \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)) \det_B(C)$$

et  $\det_B(C) \neq 0$ . Donc l'égalité voulue est obtenue.

### PROPOSITION 2.3

Soient  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$ .

Alors :

$$\det(fg) = \det(f)\det(g).$$

### DÉMONSTRATION

Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ,

$$\det(fg) = \det_B(fg(e_1), \dots, fg(e_n)).$$

Considérons la forme  $n$ -linéaire alternée  $\varphi$  telle que :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(g(u_1), \dots, g(u_n)),$$

alors on a :

$$\begin{aligned} \varphi(f(u_1), \dots, f(u_n)) &= \det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) \varphi(e_1, \dots, e_n), \\ \det_B(gf(e_1), \dots, gf(e_n)) &= \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)) \det_B(g(e_1), \dots, g(e_n)), \\ \det(gf) &= \det(g) \det(f). \end{aligned}$$

REMARQUE. Si  $A, B \in M_n(\mathbf{R})$  alors

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

## 3 DIAGONALISATION

### DÉFINITION 3.1

Une matrice  $A$  est *diagonalisable* si elle est conjugué par un isomorphisme à une matrice diagonale.

### 3.1 Valeur propre et vecteur propre

Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

### DÉFINITION 3.2

On appelle *valeur propre* de  $f$  un réel  $\lambda$  tel qu'il existe un  $v \in E - \{0\}$  tel que  $f(v) = \lambda \cdot v$ .

On dit que  $v$  est un *vecteur propre* de valeur propre  $\lambda$ .

Quitte à prendre la matrice  $A$  de  $f$  dans une base  $(e_1, \dots, e_n)$  fixée de  $E$ ,  $\lambda$  est une valeur de  $f$  (ou de  $A$ ) si, et seulement si

$$\det(A - \lambda I_d) = 0.$$

REMARQUE. Soient  $A \in M_n(\mathbf{R})$ ,  $B$  la base canonique et  $C = AB$ .  $\det(A)$  est non nul si, et seulement si,  $A$  est inversible. D'autre part s'il existe un vecteur propre  $v$  de valeur propre  $\lambda$  alors

$$\ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\}.$$

Or  $f - \lambda I_d$  est un endomorphisme de  $E$  et  $E$  est de dimension finie. Donc il y a équivalence :

$$\ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I_d) = 0.$$

#### DÉFINITION 3.3

On appelle polynôme caractéristique de  $f$  (ou de  $A$ ) le polynôme :

$$\chi_f(t) = \chi_A(t) = \det(A - tI_d).$$

EXEMPLE. En dimension 2 :  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  on a

$$\chi_A(t) = t^2 - (a + d)t + ad - bc = t^2 - \operatorname{tr}(A)t + \det(A).$$

REMARQUE.  $\chi_A(t)$  est un polynôme de degré  $n$  de coefficient dominant  $(-1)^n$  et de terme constant  $\chi_A(0) = \det(A)$ .

### 3.2 Sous-espaces propres

#### DÉFINITION 3.4

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  et de matrice  $A$ . Soit  $\lambda \in \mathbf{R}$ . On appelle *sous-espace propre* de  $f$  (ou de  $A$ ) de valeur propre  $\lambda$  le sous-espace vectoriel  $\ker(f - \lambda I_d)$ .

#### PROPOSITION 3.5

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ . Alors si  $\lambda \neq \mu$  on a

$$\ker(f - \lambda I_d) \cap \ker(f - \mu I_d) = \{0\}.$$

Plus généralement si,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$  distincts alors on a :

$$\sum_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i I_d) = \bigoplus_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i I_d)$$

#### DÉMONSTRATION

Il s'agit de vérifier que pour tout  $i \neq j$  on a :

$$\ker(f - \lambda_i I_d) \cap \ker(f - \lambda_j I_d) = \{0\}.$$

Si  $v \in \ker(f - \lambda_i I_d) \cap \ker(f - \lambda_j I_d)$  alors :

$$f(v) = \lambda_i v = \lambda_j v \implies v = 0.$$

#### COROLLAIRE 3.6

Soient  $\dim E = n$ ,  $f$  est un endomorphisme de  $E$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  valeurs propres de  $f$  et  $E_i$  le sous-espace associé à la valeur propre  $\lambda_i$ . Alors si

$$E = \bigoplus_{i=1}^k E_i,$$

l'endomorphisme  $f$  est diagonalisable.

**DÉMONSTRATION**

Si on fait la réunion :

$$B = \bigcup_{i=1}^k B_i,$$

où  $B_i$  est une base de  $E_i$  on obtient une base de  $E$ . Dans cette base la matrice de  $f$  est diagonale où l'élément diagonal  $\lambda_i$  est la valeur propre correspondante. La matrice de passage de la base canonique à la base  $B$  donne la diagonalisabilité.

Donc pour diagonaliser  $A$  il faut vérifier si  $E = \bigoplus_{i=1}^k E_i$  où les  $E_i$  sont les sous-espaces propres.

EXEMPLE. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 1 & 4-\lambda & -5 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)((4-\lambda)(-2-\lambda) + 10) - (2(-2-\lambda) + 6),$$

$$\chi_A(t) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2).$$

Les trois valeurs propres sont 0, 1, 2 et sont de multiplicité 1.

$$E_0 = \ker(A) = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \mid Ax = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_1 = \ker(A - I_d) = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_2 = \ker(A - 2I_d) = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

On a l'égalité :

$$E_0 \oplus E_1 \oplus E_2 = \mathbf{R}^3.$$

On en déduit les matrices de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

### 3.3 Conditions de diagonalisabilité

**PROPOSITION 3.7**

Soient  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $f$  un endomorphisme de  $E$ ,  $\chi_f(t) \in \mathbf{R}[t]$ ,  $\deg \chi_f = n$ .

Si  $\chi_f$  admet  $n$  racines distinctes alors  $f$  est diagonalisable.

**DÉMONSTRATION**

Si :

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - t)$$

avec  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  racines distinctes. On a alors que pour tout  $i$  :

$$E_i = \ker(f - \lambda_i \text{id}) \neq \{0\}$$

et donc  $\dim E_i \geq 1$ . On a alors que

$$\sum_{i=1}^n \dim E_i = \dim \bigoplus_{i=1}^n E_i$$

est de dimension supérieure à  $n$  ce qui implique  $\bigoplus E_i = \mathbf{R}^n$ .

**REMARQUE.** La condition donnée est nécessaire mais non suffisante. On cherche donc une condition nécessaire et suffisante.

**PROPOSITION 3.8**

Soient  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $f$  un endomorphisme de  $E$ ,  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ ,  $m_\lambda$  la multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine de  $\chi_f(t)$  et  $E_\lambda$  le sous-espace propre associé à  $\lambda$ .

Alors  $\dim E_\lambda \leq m_\lambda$ .

**DÉMONSTRATION**

Soit  $k = \dim E_\lambda$  et  $(e_1, e_2, \dots, e_k)$  une base de  $E_\lambda$ . On peut compléter  $(e_1, \dots, e_k)$  en une base  $(e_1, \dots, e_n) = B$  de  $E$ .

$$\text{Mat}_B(f) = \left( \begin{array}{c|c} \lambda I_d & X \\ \hline 0 & A \end{array} \right).$$

Or le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des matrices diagonales. <sup>5§</sup>

Ainsi :

$$\chi_f(t) = \det \left( \begin{array}{c|c} (\lambda - t)I_d & X \\ \hline 0 & A - tI_d \end{array} \right) = (\lambda - t)^k \chi_A(t)$$

et donc  $m_\lambda \geq k$ .

**COROLLAIRE 3.9**

On a les propositions suivantes :

1. Si  $\chi_f(t)$  n'est pas scindé sur  $\mathbf{R}$  alors  $f$  n'est pas diagonalisable.
2. S'il existe une valeur propre  $\lambda$  de  $f$  telle que  $\dim E_\lambda < m_\lambda$  alors  $f$  n'est pas diagonalisable.

**DÉMONSTRATION**

On démontre :

---

<sup>5§</sup>. En effet, en utilisant la règle de CRAMER la preuve est assez aisée.

2. Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  les valeurs propres de  $\chi_f(t)$ ,  $m_i$  la multiplicité de  $\lambda_i$  et  $E_i$  l'espace propre associé à  $\lambda_i$ . Alors la proposition nous dit que  $\dim E_i \leq m_i$ .

Or  $\deg \chi_f(t) = n$  et donc

$$\sum_{i=1}^k m_i \leq n$$

$$\sum_{i=1}^k \dim E_i \leq \sum_{i=1}^k m_i \leq n$$

S'il existe  $i_0$  tel que  $\dim E_{i_0} < m_{i_0}$  alors cela implique

$$\sum_{i=1}^k \dim E_i < \sum_{i=1}^k m_i \leq n.$$

Et donc

$$\bigoplus_{i=1}^n E_i < n.$$

1. Idem.

### THÉORÈME 3.10

Soient  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

$f$  est diagonalisable si, et seulement si, on a les conditions suivantes :

1.  $\chi_f(t)$  est scindé sur  $\mathbf{R}$  ;
2. pour tout  $\lambda \in \chi_f^{-1}(0)$ , la dimension du  $\ker(f - \lambda \text{id})$  est égal à la multiplicité de  $\lambda$  dans  $\chi_f(t)$ .

### DÉMONSTRATION

Le corollaire nous dit que ces conditions sont nécessaires.

Remarquons que :

$$\sum_{i=1}^r E_i = \bigoplus_{i=1}^r E_i$$

où  $E_i$  est le sous-espace propre de  $\lambda_i$  et  $r$  le nombre de racines deux à deux distinctes. Or la dimension de la somme est la somme des dimensions, c'est-à-dire la somme des multiplicité qui est égale à  $n$ . Donc  $f$  est diagonalisable.

EXEMPLE. On prend

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & -1 \\ -1 & 2-t & -1 \\ -1 & 1 & -t \end{pmatrix},$$

$$\chi_A(t) = -t(t-1)^2.$$



Les racines sont 0, 1 de multiplicités respectives 1 et 2. On a :

$$E_0 = \ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_1 = \ker A - \text{id} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

On a

$$\dim E_0 = 1 \text{ et } \dim E_1 = 2$$

et donc  $f$  est diagonalisable.

CONTRE-EXEMPLE DE MINIMALITÉ. On a que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'a comme valeurs propres que 0, elle n'est pas diagonalisable parce que si elle est nulle dans une base elle l'est dans toutes.

## 4 POLYNÔMES EN UN ENDOMORPHISME DE $E$

### 4.1 Polynômes évalué en un endomorphisme

DÉFINITION 4.1

Soit  $P \in \mathbf{R}[t]$  un polynôme :

$$P(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^k.$$

On note pour  $f$  un endomorphisme de  $E$  :

$$P(f) = \sum_{k=0}^d a_k f^k \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E).$$

Avec la convention  $f^0 = \text{id}$  et la notation  $f^{k+1} = f \circ f^k$ .

DÉFINITION 4.2

On dit qu'un polynôme  $P \in \mathbf{R}[t]$  annule  $f$  si  $P(f) = 0_{\text{End}_{\mathbf{R}}}$ .

PROPOSITION 4.3

On a que :

$$\phi: \begin{cases} \mathbf{R}[t] \rightarrow \text{End}_{\mathbf{R}}(E) \\ P(t) \mapsto P(f) \end{cases}$$

est un morphisme d'anneaux.

C'est-à-dire :

$$\forall P, Q \in \mathbf{R}[t], \phi(P + Q) = \phi(P) + \phi(Q) ; \phi(PQ) = \phi(P)\phi(Q).$$

REMARQUE. Ainsi l'ensemble des polynômes annulateurs de  $f$  est un idéal de  $\mathbf{R}[t]$ . Or  $\mathbf{R}[t]$  est un anneau principal donc l'ensemble des polynômes annulateurs de  $f$  est principal. Il existe donc un polynôme  $Q \in \mathbf{R}[t]$  tel que tout polynôme annulateur de  $f$  s'écrit  $RQ$  avec  $R \in \mathbf{R}[t]$ .

#### DÉFINITION 4.4

On appelle polynôme minimal de  $f$  le polynôme unitaire de plus petit degré,  $m_f$  annulant  $f$ .

On a évidemment que tout polynôme annulateur de  $f$  est de la forme  $P \cdot m_f$ ,  $P \in \mathbf{R}[t]$ .

EXEMPLE. Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice nilpotente, c'est-à-dire  $A^3 = 0$ . On a

$$m_A(t) \mid t^3 \implies m_A = 1, t, t^2 \text{ ou } t^3.$$

Or  $(t \mapsto 1)(A) = \text{id} \neq 0$ ,  $(t \mapsto t)(A) = A \neq 0$  et  $(t \mapsto t^2)(A) = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$  et donc  $m_A(t) = t^3$ .

#### PROPOSITION 4.5

Soit  $f \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E)$ . Alors :

1. si  $f$  est diagonalisable, alors il existe un polynôme scindé  $P \in \mathbf{R}[t]$  annulant  $f$  ayant que des racines simples ;
2. si  $P \in \mathbf{R}[t]$  annule  $f$  alors toute valeur propre de  $f$  est racine de  $P$ .

#### DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de vecteurs propres. Soient  $\mu_1, \dots, \mu_r$  des scalaires deux à deux distinctes tels que

$$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

avec  $r \leq n$ .

On pose :

$$P(t) = \prod_{i=1}^r (t - \mu_i).$$

On cherche à savoir si  $P(f) = 0$ .

$$P(f) = 0 \iff P(f)(e_j) = 0, \forall j,$$

$$P(f)(e_j) = \left( \prod_{i=1}^r (f - \mu_i \text{id}) \right) (e_j),$$

$$f(e_j) = \lambda_j e_j \implies \exists i, \mu_i = \lambda_j.$$

Or pour tous  $k, l$  :

$$(f - \mu_k \text{id})(f - \mu_l \text{id}) = (f - \mu_l \text{id})(f - \mu_k \text{id})$$

et donc :

$$P(f)(e_j) = \left( \prod_{k \neq i} (f - \mu_k \text{id}) \right) (f - \mu_i \text{id})(e_j),$$

$$P(f)(e_j) = \left( \prod_{k \neq i} (f - \mu_k \text{id}) \right) (f(e_j) - \mu_i e_j) = 0.$$

2. On suppose que  $P(f) = 0$  et  $\chi_f(\lambda) = 0$  avec  $P \in \mathbf{R}[t]$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ .  
Soit  $v \in \ker(f - \lambda \text{id})$ ,  $v \neq 0$ , alors :

$$P(f)(v) = \sum_{k=1}^d a_k f^k(v),$$

$$P(f)(v) = \sum_{k=1}^d a_k \lambda^k v.$$

Donc  $P(\lambda) \cdot v = 0$  et comme  $v \neq 0$  :  $P(\lambda) = 0$ .

## 4.2 Lemme des noyaux

PROPOSITION 4.6 (Théorème des noyaux)

Soit  $f \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E)$ .

1. Soit  $P \in \mathbf{R}[t]$  de la forme  $P = ST$  avec  $S, T \in \mathbf{R}[t]$  avec  $S$  et  $T$  premiers entre eux.

Alors si  $P(f) = 0$  alors

$$E = \ker(S(f)) \oplus \ker(T(f)).$$

2. Soit  $P \in \mathbf{R}[t]$ ,  $P = P_1 P_2 \dots P_k$  avec  $P_i \in \mathbf{R}[t]$  premiers entre eux deux à deux.

Alors si  $P(f) = 0$  alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^k \ker P_i(f).$$

THÉORÈME 4.7

$f \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E)$  avec  $\dim E = n$ .

Supposons qu'il existe  $P \in \mathbf{R}[X]$  est un polynôme scindé avec des racines simples. Alors  $P(f) = 0$  implique que  $f$  est diagonalisable.

REMARQUE. C'est équivalent à  $m_f(t)$  scindé avec des racines simples. En effet si  $P$  est scindé avec des racines simples et qui annulent  $f$  alors  $m_f$  divise  $P$  et donc  $m_f$  est scindé avec des racines simples.

DÉMONSTRATION

Soit :

$$P(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_k)$$

avec  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  réels distincts. Ainsi  $X - \lambda_i$  et  $X - \lambda_j$  sont premiers entre eux pour tous  $i \neq j$ .

Ainsi d'après le théorème des noyaux :

$$E = \bigoplus_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i \text{id}).$$

| Donc  $f$  est diagonalisable.

#### COROLLAIRE 4.8

| Soit  $f \in \text{End}(E)$ .  $f$  est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal  $m_f$  est scindé avec des racines simples.

#### DÉMONSTRATION

| Le sens d'implication a déjà été fait, l'autre sens est donné par le théorème précédent.

### 4.3 Trigonalisation

#### DÉFINITION 4.9

| On dit que  $f \in \text{End}(E)$  est *trigonalisable* s'il existe une base  $B$  de  $E$  telle que la matrice en base  $B$  de  $f$  est triangulaire supérieure.

| De même, une matrice  $A \in M_n(\mathbf{R})$  est trigonalisable si elle est conjuguée à une matrice triangulaire supérieure, i.e. s'il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$  telle que  $P^{-1}AP$  est trigonalisable.

#### PROPOSITION 4.10

| Soit  $f \in \text{End}(E)$ .

|  $\chi_f$  est scindé dans  $\mathbf{R}[X]$  si, et seulement si,  $f$  trigonalisable.

REMARQUE. On peut remplacer partout  $\mathbf{R}$  par  $\mathbf{K} = \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$  et  $E$  par un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Si  $E$  est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et si  $f \in \text{End}_{\mathbf{C}}(E)$  alors la proposition assure la trigonalisation de  $f$  (et ainsi de tout endomorphisme).

#### DÉMONSTRATION

| Si  $f$  est trigonalisable, alors il existe une base  $B$  telle que la matrice,  $(a_{i,j})$  de  $f$  soit trigonale supérieure dans cette base. Alors le polynôme caractéristique (qui est indépendant de la base) est exactement :  $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - t)$ . Ce polynôme est bien scindé.

| Pour la réciproque on effectue une récurrence sur  $n = \dim E$ . On suppose que c'est vrai pour tout espace vectoriel de dimension strictement inférieure à  $n$  :

$$\chi_f(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \dots (\lambda_n - t)$$

avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ .

$\lambda_1$  est une valeur propre. Il existe par hypothèse  $v_1 \in E$  un vecteur propre tel que  $v_1 \neq 0$  et  $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ . Par le théorème de la base incomplète, il existe une base  $B$  de la forme  $B = (v_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ . Soit  $A$  la matrice de  $f$  dans la base  $B$ . On a :

$$A = \left( \begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & \star & \star & \dots \\ 0 & & & \\ 0 & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Avec  $B \in M_{n-1}(\mathbf{R})$  qui peut être la matrice d'un endomorphisme de  $\mathbf{R}^{n-1}$ .

$$\chi_A(t) = \det \left( \begin{array}{c|c} \lambda_1 - t & \star \\ 0 & B - tI_d \end{array} \right),$$

$$\chi_A(t) = (\lambda_1 - t)\chi_B(t),$$

$$\chi_A(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \dots (\lambda_n - t).$$

et donc  $\chi_B(t) = (\lambda_2 - t) \dots (\lambda_n - t)$  est scindé.

Par récurrence, il existe  $Q \in \text{GL}_{n-1}(\mathbf{R})$  tel que  $Q^{-1}BQ$  soit triangulaire supérieure. Posons :

$$P = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{array} \right), \quad P^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{array} \right).$$

| On a alors que  $P^{-1}AP$  est triangulaire.

#### 4.4 Comment calculer $m_f$ ? (CAYLEY-HAMILTON)

THÉORÈME 4.11 (CAYLEY-HAMILTON)

Soit  $f \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E)$ . On a que  $m_f$  divise  $\chi_f$ , c'est-à-dire :  $\chi_f(f) = 0$ .

DÉMONSTRATION

On veut montrer que  $\chi_A(A) = 0$  où  $A \in M_n(\mathbf{R})$ . Puisque  $M_n(\mathbf{R}) \subset M_n(\mathbf{C})$  on peut se placer dans se dernier.

On sait alors que  $A$  est trigonalisable dans  $M_n(\mathbf{C})$ , c'est-à-dire qu'il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$  tel que  $P^{-1}AP$  est triangulaire supérieure.

Or pour tout  $k$  :  $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ . Donc :

$$\chi_A(P^{-1}AP) = P^{-1}\chi_A(A)P.$$

Comme  $P$  est inversible,  $\chi_A(0)$  si, et seulement si,  $\chi_A(P^{-1}AP) = 0$ . Posons  $A' = P^{-1}AP$ . On a  $\chi_{A'} = \chi_A$ .

$$\begin{aligned} T &= (\lambda_n I_d - A')(\lambda_{n-1} I_d - A') \dots (\lambda_1 I_d - A') \\ T(v_1) &= \left( \prod_{i=2}^n (\lambda_i I_d - A') \right) (\lambda_1 I_d - A')(v_1) = 0 \\ T(v_2) &= \left( \prod_{i=3}^n (\lambda_i I_d - A') \right) (\lambda_2 I_d - A')(\lambda_1 I_d - A')(v_2) \\ &= (\lambda_2 I_d - A')(\lambda_1 I_d - A')(v_2) = (\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) \\ &= (\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) = (\lambda_1 I_d - A')(-a'_{1,2} v_1) \\ &= (\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) = -a'_{1,2} (\lambda_1 I_d - A')(v_1) \\ &= (\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) = -a'_{1,2} (\lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_1) = 0 \end{aligned}$$

Par récurrence on trouve  $T(v_i) = 0$  pour tout  $i$ .

EXERCICE. Calculer  $T(v_3)$ .

REMARQUE. À noter :

1. Étant donné  $f \in \text{End}(E)$ , pour calculer  $m_f$  on cherche le plus petit diviseur de  $\chi_f$  qui annule  $f$ .
2. Soit  $f \in \text{End}(E)$ . Supposons que  $f$  est inversible, alors  $\det(f) \neq 0$ , i.e.  $\chi_f(0) \neq 0$ . Soit  $\chi_f(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ ,  $a_0$  est donc non nul. On a :

$$0 = a_0^{-1} \chi_f(f) = (-1)^n a_0^{-1} f^n + \dots + a_1 a_0^{-1} f + I_d$$

ce qui donne :

$$I_d = f \left( (-1)^{n+1} a_0^{-1} f^{n-1} + \dots + (-1) a_1 a_0^{-1} I_d \right).$$

EXEMPLE. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\chi_A(t) = -t(t-1)^2$$

on en déduit :

$$t(t-1) \mid m_A(t) \mid t(t-1)^2.$$

Donc soit  $m_A(t) = t(t-1)$  soit  $m_A(t) = t(t-1)^2$ . Dans le premier cas si  $m_A(A) = 0$  alors  $A$  est diagonalisable. Dans le second,  $A$  est non diagonalisable.

$$A(A - I_d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 5 APPLICATIONS

### 5.1 Calculs de puissances

Soit  $A \in M_n(\mathbf{R})$ , si  $A$  est diagonalisable alors :

$$A = PA'P^{-1}$$

où  $P$  est inversible et  $A'$  diagonale. Et donc pour tout  $k$  :

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \lambda_2^k & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

De même, si

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

alors

$$\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & e^{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

### 5.2 Systèmes différentiels

Soient  $x_1, x_2, x_3 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  et le système différentiel :

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ x'_2 = x_1 + 4x_2 - 5x_3 \\ x'_3 = 2x_2 - 2x_3 \end{cases}.$$

On pose  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ . On a :

$$X' = AX.$$

$A$  a pour vecteurs propres :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de valeurs propres respectives :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2.$$

De matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose  $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ . Ainsi :

$$X' = AX \iff P^{-1}X' = P^{-1}APP^{-1}X \iff Y' = BY$$

$$Y' = BY \iff \begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = 2y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = c_1 \\ y_2 = c_2 e^t \\ y_3 = c_3 e^{2t} \end{cases}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} X &= PY, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 e^t \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t} \\ c_1 + 3c_2 e^t + 2c_3 e^{2t} \\ c_1 + 2c_2 e^t + c_3 e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 5.3 Application aux suites récurrentes

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de réels telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On introduit une seconde suite  $v_n$  telle que  $v_n = u_{n+1}$  pour tout  $n$ . La relation de récurrence s'écrit alors :

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

si on pose  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  on a alors que la relation de récurrence est

$$X_{n+1} = AX_n.$$

On diagonalise  $A$  :

$$\chi_A(t) = t^2 - t - 1 \iff t \in \left\{ r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

On a :

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

avec  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}$ . On pose  $Y_n = P_1 X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$  :

$$X_{n+1} = AX_n \iff Y_{n+1} = A'Y_n.$$

On en déduit :

$$Y_n = \begin{pmatrix} c_1 r_1^n \\ c_2 r_2^n \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 r_1^n \\ c_2 r_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 r_1^n \\ c_2 r_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \\ c_1 r_1^{n+1} + c_2 r_2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $u_n$  est de la forme :

$$u_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$



# Deuxième partie

## Analyse

### Table des matières

---

<b>3</b>	<b>Développements limités</b>	<b>33</b>
1	Fonctions négligeables et équivalentes . . . . .	33
1.1	Négligeable . . . . .	33
1.2	Équivalence . . . . .	34
2	Dérivées successives et formules de TAYLOR . . . . .	36
2.1	Formules de TAYLOR . . . . .	37
2.2	Fonctions usuelles . . . . .	38
3	Développement limité à l'ordre $n$ d'une fonction de classe $C^n$ . . . . .	39
3.1	Développements limités . . . . .	39
3.2	Développements limités et primitives . . . . .	41
3.3	Développement limités usuels . . . . .	43
4	Calculs avec les développements limités . . . . .	45
4.1	Règles de calcul des développements limités . . . . .	45
4.2	Développement limité d'une fonction composée . . . . .	47
5	Applications . . . . .	50
5.1	Calculs de limites . . . . .	50
5.2	Courbes paramétrées . . . . .	52
5.3	Étude de fonctions . . . . .	56
5.3.1	Étude locale . . . . .	56
5.3.2	Branches infinies . . . . .	59
5.3.3	Étude de fonction . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Courbes et surfaces paramétrées</b>	<b>63</b>
1	Définitions . . . . .	63
2	Tangentes . . . . .	63
3	Branches infinies . . . . .	65
4	Étude de courbes paramétrées . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>68</b>
1	Définitions . . . . .	68
2	Opérations sur les séries . . . . .	71
3	Critères de convergence . . . . .	73
3.1	Convergence des séries à terme positif . . . . .	73
3.2	Séries de RIEMANN . . . . .	74

3.3	Convergence absolue . . . . .	75
3.4	Comparaison avec des séries géométriques . . . . .	77
3.5	Règle de CAUCHY . . . . .	77
3.6	Comparaison avec des intégrales . . . . .	79
3.7	Séries alternées . . . . .	80
3.8	Application des développements limités à la convergence . . . . .	81
4	Transformation d'ABEL . . . . .	82

---

## Chapitre 3

# Développements limités

### 1 FONCTIONS NÉGLIGEABLES ET ÉQUIVALENTES

On considère des fonctions  $f, g$  de  $V$  dans  $\mathbf{R}$  où  $V$  est un voisinage épointé dans  $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ . C'est-à-dire que  $V$  est de la forme  $U - \{a\}$  où  $U$  est un voisinage de  $a$  dans  $\overline{\mathbf{R}}$  et  $a \in \overline{\mathbf{R}}$ .

- si  $a = \infty$  alors  $V \supset \{k, \infty\}$  ;
  - si  $a \in \mathbf{R}$  alors  $V \supset ]k, a[ \cup ]a, l[$  avec  $k < a < l$  et  $k, l \in \mathbf{R}$ .
- $f, g$  sont définies au voisinage de  $a \in \overline{\mathbf{R}}$ .

#### 1.1 Négligeable

##### DÉFINITION 1.1

On dit que  $f$  est *négligeable* devant  $g$  au voisinage de  $a$  s'il existe un voisinage  $V$  tel qu'il existe une fonction  $\varepsilon : V \rightarrow \mathbf{R}$  telle que :

- $f = \varepsilon \cdot g$  ;
- $\lim_a \varepsilon = 0$ .

On note  $f \underset{(a)}{=} o(g)$ .

REMARQUE. On note :

$$\varepsilon f : \begin{cases} V \rightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \varepsilon(t)f(t) \end{cases}.$$

EXEMPLES. Par exemple :

1. Si  $g = 1$  alors  $f = o(1)$  si, et seulement si,  $\lim_a f = 0$ .
2. Si  $f = 0$  au voisinage de  $a$  alors pour toute fonction  $g : f = o(g)$ .
3. Si  $f$  est bornée et  $\lim_a(g) = \infty$  alors  $f = o(g)$  (on prend alors  $\varepsilon = f/g$ ).
4. On a  $x^m \underset{(\infty)}{=} o(x^n)$  si, et seulement si,  $m < n$ .
5. Pour tous  $\alpha, \beta > 0$  :

$$\begin{cases} x^\alpha \underset{\infty}{=} o(e^{\beta x}) \\ (\ln x)^\alpha \underset{(\infty)}{=} o(x^\beta) \end{cases},$$

car  $\lim_{\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$ .

## PROPOSITION 1.2

Si  $f/g$  est définie dans un voisinage de  $a$ , alors :

$$f \underset{(a)}{=} o(g) \iff \lim_a (f/g) = 0.$$

## DÉMONSTRATION

On prend  $\varepsilon = f/g$ .

REMARQUE. Il peut arriver que  $f/g$  n'est pas défini dans aucun voisinage de  $a$ .

EXEMPLES. Contre-exemples :

1. Avec  $g(t) = \sin(1/[t - a])$ , pour tout voisinage de  $V$  de  $a$ ,  $g(t)$  s'annule en un point de  $V$ .
2. Même si le quotient n'est pas définit :  $t \underset{(0)}{=} o(\sin(1/t))$ .

## PROPOSITION 1.3

On a au voisinage de  $a$  :

1. la propriété  $o$  est transitive ;
2. la propriété  $o$  est compatible avec la multiplication, i.e. : si  $f = o(g)$  alors  $fh = o(gh)$  ;
3. si  $f = o(g)$  et si  $h = o(k)$  alors  $fh = o(gk)$ .

## DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. Pour  $f = \varepsilon_1 g$  et  $g = \varepsilon_2 h$  avec  $\lim_a \varepsilon_i = 0$  alors :  $f = \varepsilon_1 \varepsilon_2 h$  et  $\lim_a \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0$ .
2. Si  $f = \varepsilon g$ ,  $\lim_a \varepsilon = 0$ , alors  $fh = \varepsilon gh$ .
3. De même.

CONTRE-EXEMPLE.  $o$  n'est pas compatible avec l'addition. Par exemple :  $x \underset{(\infty)}{=} o(x^3)$  et  $x^2 \underset{(\infty)}{=} o(-x^3)$  n'entraîne pas  $x + x^2 \underset{(\infty)}{=} o(0)$ .

## 1.2 Équivalence

## DÉFINITION 1.4

On dit que  $f$  est *équivalence* à  $g$  au voisinage de  $a$  si :  $f - g \underset{(a)}{=} o(g)$ . On note  $f \underset{(a)}{\sim} g$ .

## PROPOSITION 1.5

Si  $f/g$  est définie dans un voisinage de  $a$  alors :

$$f \underset{(a)}{\sim} g \iff \lim_a f/g = 1.$$

## PROPOSITION 1.6

$\underset{(a)}{\sim}$  est une relation d'équivalence.

## DÉMONSTRATION

Par définition :

1. elle est réflexive :  $f \underset{(a)}{\sim} f$  puisque  $0 \underset{(a)}{=} o(f)$  ;
2. elle est symétrique si  $f \underset{(a)}{\sim} g$  alors il existe  $\varepsilon$  telle que  $\lim_a \varepsilon = 0$  et  $f = (1 + \varepsilon)g$ , or  $1/(1 + \varepsilon)$  est aussi définie au voisinage de  $a$  et puisque  $g = (1/[1 + \varepsilon])f$  on a

$$g = (1 + (1/[1 + \varepsilon] - 1))f$$

or en posant  $\varepsilon' = [1 + \varepsilon] - 1$  on a  $\lim_a \varepsilon' = 0$  ;

3. elle est transitive :  $f \underset{(a)}{\sim} g$  et  $g \underset{(a)}{\sim} h$  implique qu'il existe  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  telles que  $f = (1 + \varepsilon_1)g$ ,  $g = (1 + \varepsilon_2)h$  et donc  $f = (1 + \varepsilon)h$  avec  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$  et  $\lim_a \varepsilon = 0$ .

## PROPOSITION 1.7

Si  $f \underset{(a)}{\sim} g$  et si  $\lim_a f$  existe alors  $\lim_a g$  existe et  $\lim_a g = \lim_a f$ .

## DÉMONSTRATION

Soit  $\varepsilon$  telle que  $\lim_a \varepsilon = 0$  alors puisque  $f = (1 + \varepsilon)g$  on a

$$\lim_a f = \lim_a (1 + \varepsilon)g = \lim_a g.$$

## PROPOSITION 1.8

Le produit et le quotient (quand il est défini) d'équivalences est une équivalence.

Une puissance entière d'équivalences est une équivalence.

## DÉMONSTRATION

Si  $f = (1 + \varepsilon_1)g$  et  $h = (1 + \varepsilon_2)k$  alors  $fh = (1 + \varepsilon)gk$  avec  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$ .

## PROPOSITION 1.9

Si  $f \underset{(a)}{\sim} g$  et si  $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $\lim_b \varphi = a$ ,  $b \in I$ . Alors

$$f \circ \varphi \underset{(a)}{\sim} g \circ \varphi.$$

## DÉMONSTRATION

Si  $f = (1 + \varepsilon)g$  avec  $\lim_a \varepsilon = 0$ . Alors

$$f \circ \varphi = (1 + \varepsilon') \cdot g \circ \varphi$$

avec  $\varepsilon' = \varepsilon \circ \varphi$  et  $\lim_a \varepsilon' = 0$ .

## PROPOSITION 1.10

On a :

1. Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors si  $f'(a) \neq 0$  on a  $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a)$ .
2. Si  $g$  est continue dans un voisinage épointé de  $a$ , alors si  $f \underset{(a)}{\sim} g > 0$  alors

$$\int_a^x f(t) dt \underset{(a)}{\sim} \int_a^x g(t) dt.$$

**DÉMONSTRATION**

Dans l'ordre :

1. Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{(a)}{\sim} f'(a)$$

puisque si  $\lim_a g = b \in \mathbf{R}^*$  alors  $g \underset{(a)}{\sim} b$ .

2. On sait que  $f - g \underset{(a)}{=} o(g)$  et on veut :

$$\int_x^a (f - g)(t) dt \underset{(a)}{=} o \left( \int_x^a g(t) dt \right).$$

En posant  $h = f - g$  on se ramène au problème :

$$h = o(g) \implies \int_a^x h = o \int_a^x g.$$

Si  $h = \varepsilon g$  et  $\lim_a \varepsilon = 0$  alors

$$\int_a^x g = \int_a^x \varepsilon g$$

Or

$$\frac{\left| \int_a^x \varepsilon g \right|}{\left| \int_a^x g \right|} \leq \max_{[a,x]} |\varepsilon| \frac{\int_a^x g}{\int_a^x g} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

Donc

$$\frac{\left| \int_a^x \varepsilon g = h \right|}{\left| \int_a^x g \right|} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

## 2 DÉRIVÉES SUCCESSIVES ET FORMULES DE TAYLOR

Soit  $p \geq 0$  un entier.

**DÉFINITION 2.1**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbf{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ .

1.  $f \in C^0$  si  $f$  est continue ;
2.  $f \in C^p$  ( $p \geq 1$ ) si  $f$  est dérivable et  $f' \in C^{p-1}$ .

**REMARQUE.** Si  $f \in C^p$  alors les  $p$ -ièmes dérivées successives et  $f$  sont toutes continues sur  $I$ .  $f \in C^\infty$  si  $f^{(p)}$  existe et est continue pour tout  $p \geq 1$ .

**PROPOSITION 2.2**

Si  $f, g \in C^p$  alors  $f + g$ ,  $fg$ ,  $f/g$  et  $f \circ g$  (si définie) sont  $C^p$ .

**DÉMONSTRATION**

Dans l'ordre :

1.  $(f + g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$  par récurrence sur  $p$  ;
2.  $(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}$  ;
3. par récurrence sur  $p$  pour  $(f \circ g)^{(p)}$  en utilisant :  $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$ .

RAPPELS SUR LES PRIMITIVES. Si  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  est de classe  $C^1$  avec  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle ouvert. Alors si  $f'$  est continue  $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$ .

## 2.1 Formules de TAYLOR

Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle ouvert.

THÉORÈME 2.3 (Formule de TAYLOR avec reste intégral)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^k$ . Alors pour tous  $a, b \in I$  on a :

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

DÉMONSTRATION

Par récurrence sur  $n$ , on note

$$(T_n) : f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

Supposons que  $(T_k)$  soit vraie pour tout  $k < n$ . Alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{(b-t)^k}{k!}, \\ v(t) &= f^{(k)}(t), \\ R_k &= \int_a^b \frac{(b-s)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(s) ds, \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} R_k &= \int_a^b u'(s)v(s) ds \\ R_k &= [u(s)v(s)]_a^b - \int_a^b u(s)v'(s) ds \\ R_k &= u(b)v(b) - u(a)v(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s) ds \\ R_k &= \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s) ds \end{aligned}$$

On applique  $(T_{n-1})$  :

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_{n-1} \\ f(b) &= f(a) + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n \end{aligned}$$

donc  $(T_n)$  vraie.

THÉORÈME 2.4 (Formule de TAYLOR avec reste en  $f^{(n+1)}(\theta)$ )

Soit  $n > 0$ ,  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^{n+1}$ . Pour tous  $a, b \in I$  avec  $a \neq b$ , il existe  $\theta$  strictement compris en  $a$  et  $b$  tel que :

$$f(b) = \sum_{i=0}^n \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta).$$

## DÉMONSTRATION

On pose  $A$  telle que

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot A = \int_a^b \frac{(b-s)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(s) \, ds - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Soit  $F : I \rightarrow \mathbf{R}$  telle que :

$$F(x) = \int_x^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) \, dt - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A.$$

On calcule  $F'(x)$  :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} A \\ F'(x) &= \frac{(b-x)^n}{n!} (A - f^{(n+1)}(x)). \end{aligned}$$

$F$  est dérivable donc continue sur  $I$  :

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) \, dt - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A = 0, \\ F(b) &= 0. \end{aligned}$$

Par le théorème de ROLLE, il existe  $\theta$  strictement entre  $a$  et  $b$  tel que  $F'(\theta) = 0$ . C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{(b-\theta)^n}{n!} (A - f^{(n+1)}(\theta)) &= 0 \\ A &= f^{(n+1)}(\theta). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta) = \int_a^b \frac{(b-s)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(s) \, ds - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

On a alors le résultat en remplaçant dans  $(T_n)$ .

REMARQUE. Si  $|f^{(n+1)}(s)| \leq M$  pour tout  $s \in I$  alors

$$\left| f(b) - \sum_{i=0}^n \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

## 2.2 Fonctions usuelles

### PROPOSITION 2.5 (Exponentielle)

Soit  $n \in \mathbf{N}$ , on regarde le développement de TAYLOR en 0 à l'ordre  $n+1$ ,  $\forall i$ ,  $\exp^{(i)}(0) = 1$ . On prend  $b = x, a = 0$  :

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(\theta) \\ \theta &\in ]0, x[. \end{aligned}$$



PROPOSITION 2.6 (Cosinus, sinus)

La dérivée  $n$ -ième de  $\cos(t)$  est  $\cos(t + n\pi/2)$ .

$$\left| \cos(x) - \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

car  $|\cos \theta| \leq 1$ .

### 3 DÉVELOPPEMENT LIMITÉ À L'ORDRE $n$ D'UNE FONCTION DE CLASSE $C^n$

#### 3.1 Développements limités

DÉFINITION 3.1

Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle ouvert tel que  $0 \in I, n \in \mathbf{N}$ . On dit qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  admet un *développement limité* à l'ordre  $n$  en 0 si, et seulement si, il existe un polynôme  $P$  de degré  $n$  à coefficients réels tel que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^n} = 0.$$

Notons

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - P(x)}{x^n}$$

alors

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x) \text{ }^{1§}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0. \end{cases}$$

DÉFINITION 3.2

Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle ouvert et soit  $n \in \mathbf{N}$ . On dit qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  admet un *développement limité* à l'ordre  $n$  en  $a$  si, et seulement si, la fonction  $t \mapsto f(t + a)$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0. C'est-à-dire si, et seulement si, il existe un polynôme de degré  $n$ ,  $P$  à coefficients réels tel que :

$$f(x) = P(x - a) + o((x - a)^n)$$

au voisinage de  $a$ .

THÉORÈME 3.3

Si  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en un point  $a$ , alors ce développement limité est unique.

DÉMONSTRATION

On peut supposer  $a = 0$ . Supposons que

$$f(x) = P_1(x) + x^n \varepsilon_1(x) = P_2(x) + x^n \varepsilon_2(x)$$

où  $\lim_0 \varepsilon_i = 0$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . On a que

$$(P_1 - P_2)(x) = x^n (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x)$$

<sup>1§</sup>. C'est-à-dire,  $f(x) - P(x) = o(x^n)$ .

et  $(P_1 - P_2)(x)$  est de la forme  $r_0 + r_1x + \dots + r_nx^n$  avec  $r_0, r_1, \dots, r_n \in \mathbf{R}$ .  
On montre par récurrence que les  $r_k$  sont tous nuls. Quand  $x \rightarrow 0$  on trouve :

$$r_0 = 0$$

et donc

$$r_1x + \dots + r_nx^n = x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x).$$

Supposons que  $r_0 = r_1 = \dots = r_{k-1} = 0$ ,  $k > 0$ . Alors

$$\begin{aligned} r_kx^k + \dots + r_nx^n &= x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x), \\ r_k + r_{k+1}x + \dots + r_nx^{n-k} &= x^{n-k}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x), \end{aligned}$$

$n - k \geq 0$  et donc  $r_k = 0$  en passant à la limite.

#### COROLLAIRE 3.4

Soit  $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$  le développement limité d'une fonction  $f$  à l'ordre  $n$  en 0.  
Alors :

1. si  $f$  est paire alors  $P$  est paire ;
2. si  $f$  est impaire alors  $P$  est impaire.

#### DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x) + x^n\varepsilon(x), \\ f(-x) &= P(-x) + x^n(-1)^n\varepsilon(-x) = P(-x) + x^n\varepsilon_1(x), \end{aligned}$$

Or comme  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0$  alors  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  aussi.

1. si  $f$  est impaire alors on a :

$$f(x) = -P(-x) - x^n\varepsilon_1(x)$$

et comme la première et cette expression sont des développements limités de  $f$  à l'ordre  $n$  en 0, par unicité on a  $-P(-x) = P(x)$ , c'est-à-dire  $P$  impaire ;

2. si  $f$  est paire, on a :

$$f(x) = P(-x) + x^n\varepsilon_1(x)$$

alors de même, l'unicité nous dit que  $P$  est alors paire.

#### PROPOSITION 3.5

Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue en  $a \in I$ .

1. le développement limité de  $f$  en  $a$  à l'ordre 0 est

$$f(x) = f(a) + \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 ;$$

2. la fonction  $f$  est dérivable en  $a$  si, et seulement si, elle possède un développement limité à l'ordre 1 en  $a$ , alors dans ce cas le développement limité est donné par :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x)(x - a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

#### DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. On pose  $\varepsilon(x) = f(x) - f(a)$ . Comme  $f$  est continue en 0,  $\varepsilon(x)$  aussi et  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ .

2. Supposons que  $f$  soit dérivable en  $a$ , c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

On pose

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

On a bien  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$  et

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x).$$

Réciproquement, supposons que  $f$  admette un développement limité :

$$f(x) = a_0 + (x - a)a_1 + (x - a)\varepsilon(x),$$

avec  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ . Alors, par continuité  $a_0 = f(a)$  et

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} a_1 + \varepsilon(x) = a_1 = f'(a).$$

### 3.2 Développements limités et primitives

#### THÉORÈME 3.6

Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une application continue. Soit  $F$  une primitive de  $f$ . Soit  $a \in I$  et supposons que  $f$  admette un développement limité en  $a$  à l'ordre  $n$  :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \frac{a_2}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{a_n}{n!}(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors  $F$  admet le développement limité suivant à l'ordre  $n + 1$  en  $a$  :

$$F(x) = F(a) + a_0(x - a) + \frac{a_1}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{a_n}{(n + 1)!}x^{n+1} + (x - a)^{n+1} \varepsilon_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0.$$

#### DÉMONSTRATION

Soit

$$P(t) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} (t - a)^k.$$

Pour tout  $x \neq a$  :

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n}.$$

Par hypothèse,  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ . En posant  $\varepsilon(a) = 0$ , on obtient que  $\varepsilon$  est continue sur  $I$ . Donc  $\varepsilon$  admet une primitive et dans l'identité

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \frac{a_2}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{a_n}{n!}(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

tous les termes admettent des primitives. Donc

$$\begin{aligned} F(x) - F(a) &= \int_a^x f(t) dt \\ F(x) - F(a) &= \int_a^x \left( \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} (t-a)^k + (t-a)^n \varepsilon(t) \right) dt \\ F(x) - F(a) &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + u(x), \\ u(x) &= \int_a^x (t-a)^n \varepsilon(t) dt. \end{aligned}$$

Par le théorème de ROLLE :

$$u(x) = (x-a)(\theta-a)^n \varepsilon(\theta)$$

pour un  $\theta$  compris entre  $a$  et  $x$ . Donc

$$|u(x)| = |x-a| |\theta-a|^n |\varepsilon(\theta)| \leq |x-a|^{n+1} |\varepsilon(\theta)|$$

et  $\varepsilon(\theta)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $a$  puisque  $\theta$  est compris entre  $a$  et  $x$ . Donc :

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + (x-a)^{n+1} \varepsilon_1(x)$$

où

$$\varepsilon_1(x) = \frac{u(x)}{(x-a)^{n+1}} \rightarrow 0.$$

### THÉORÈME 3.7

Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^n$ ,  $a \in I$ . Alors  $f$  admet pour développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$  :

$$f(x) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

### DÉMONSTRATION

Pour  $n = 0, 1$  ça a été déjà vu. Supposons alors  $n \geq 2$ . Soit  $f \in C^n$ , posons  $g = f'$  avec  $g \in C^{n-1}(I)$ .

Par récurrence :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^{n-1} \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

$f$  est une primitive de  $g$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0 \\ f(x) &= f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x) \\ f(x) &= f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon_1(x). \end{aligned}$$

EXEMPLE. Soit :

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

son développement limité en 0 d'ordre  $n$  est :

$$f(x) = x^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

### 3.3 Développement limités usuels

Développements limités en 0 :

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\alpha \in \mathbf{R} : (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{i=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-i)}{(i+1)!} x^{i+1} + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^n x^i + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^n (-1)^i x^i + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

$$\log(1-x) = - \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{i!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\log(1+x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{Arctan}(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{x^{2i-1}}{2i-1} + x^{2n} \varepsilon(x)$$

DÉMONSTRATION (ch)

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} (= \operatorname{sh}(x))$$

$$\operatorname{ch}''(x) = \operatorname{ch}(x)$$

$$\operatorname{ch}^{(2i)}(0) = 1$$

$$\operatorname{sh}^{(2i)}(0) = 0$$

DÉMONSTRATION (cos)

$$\begin{aligned}\cos^{(k)}(x) &= \cos(x + k\pi/2) \\ \cos^{(k)}(0) &= \cos(k\pi/2) \\ \cos^{(2k)}(0) &= (-1)^k \\ \cos^{(2k+1)}(0) &= 0\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION (sin)

$$\begin{aligned}\sin^{(k)}(x) &= \sin(x + k\pi/2) \\ \sin^{(2k)}(0) &= 0 \\ \sin^{(2k+1)}(0) &= (-1)^k\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION  $((1+x)^\alpha = f(x))$

Par récurrence :

$$\begin{aligned}f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \\ f^{(k)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION  $(1/(1-x))$

$$\begin{aligned}\frac{1-x^n}{1-x} &= 1+x+x^2+\dots+x^n \\ \frac{1}{1-x} &= 1+x+\dots+x^n+x^n \cdot \frac{x}{1-x}\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION  $(\log(1-x))$

Utiliser le théorème sur le développement limité d'une primitive avec le développement limité de  $1/(1-x)$ .

DÉMONSTRATION  $(\text{Arctan}(x))$

$$\begin{aligned}\text{Arctan}'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{i=1}^n (-1)^i x^{2i} + x^{2n} \varepsilon(x)\end{aligned}$$

et on conclut avec le théorème du développement limité d'une primitive.

REMARQUE. On a vu que si

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

alors le développement limité de  $f(x)$  en 0 à l'ordre  $n$  est

$$f(x) = x^n \varepsilon(x).$$

Or le développement limité de 0 en 0 à l'ordre  $n$  est identique.

EXEMPLE. Soit :

$$f: \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}.$$

La fonction  $f$  est continue en 0.

On regarde le développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = x^2 \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \sin(1/x) & \text{sinon} \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Donc le développement limité de  $f(x)$  en 0 à l'ordre 2 est :

$$f(x) = x^2 \varepsilon(x).$$

Dérivabilité de  $f$  en 0 (puisque'elle est lisse sur  $\mathbf{R}^*$ ) :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2 \sin(1/x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

donc  $f$  est dérivable et  $f'(0) = 0$ .

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x)}{x} = 3x \sin(1/x) - \cos(1/x)$$

donc  $f$  n'est pas dérivable à l'ordre 2 en 0 (même si elle a un développement limité à l'ordre 2).

## 4 CALCULS AVEC LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

### 4.1 Règles de calcul des développements limités

#### PROPOSITION 4.1

Soit  $f, g$  ayant des développements limités à l'ordre  $n$  en 0 :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_f(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_g(x)$$

avec  $P, Q$  des polynômes de degré au plus  $n$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$  (non forcément identiques). Alors

1. le développement limité à l'ordre  $n$  en 0 de  $f + g$  est

$$(f + g)(x) = (P + Q)(x) + x^n \varepsilon(x);$$

2. pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ , le développement  $\lambda f$  à l'ordre  $n$  en 0 est :

$$(\lambda f)(x) = \lambda P(x) + x^n \varepsilon(x).$$

#### DÉMONSTRATION

Écrivons  $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_f(x)$  et  $g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_g(x)$ .

1.  $(f + g)(x) = P(x) + Q(x) + x^n (\varepsilon_f + \varepsilon_g)(x)$  et on note  $\varepsilon = \varepsilon_f + \varepsilon_g$  qui tend bien en 0.
2. De même.

## PROPOSITION 4.2

Soit  $f$  qui admet le développement limité en 0 à l'ordre  $n$  :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors pour tout  $p \in \{0, \dots, n\}$ ,  $f$  admet le développement limité en 0 à l'ordre  $p$  :

$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p \varepsilon(x)$$

avec  $T_p(P)$  le polynôme tronqué de  $P$  :

$$T_p(P) = \sum_{k=0}^p a_k x^k, \quad P = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

## DÉMONSTRATION

On a

$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p \left( \sum_{k=p+1}^n a_k x^{k-p} + x^{n-p} \varepsilon(x) \right).$$

Et on pose

$$\varepsilon_1(x) = \sum_{k=p+1}^n a_k x^{k-p} + x^{n-p} \varepsilon(x).$$

On a bien  $\varepsilon_1(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0$ .

## PROPOSITION 4.3

Soient  $f, g$  admettant les développements limités :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x).$$

Alors  $fg$  admet le développement limité à l'ordre  $n$  en 0 suivant :

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x) + x^n \varepsilon(x).$$

REMARQUE. Si  $f, g$  admettent les développements limités à l'ordre  $n$  en  $a$  :

$$f(x) = P(x - a) + (x - a)^n \varepsilon_1(x), \quad g(x) = Q(x - a) + (x - a)^n \varepsilon_2(x)$$

alors le développement limité :

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x - a) \text{ 2§ } + (x - a)^n \varepsilon(x).$$

## DÉMONSTRATION

$$(fg)(x) = (PQ)(x) + x^n (Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x))$$

$$PQ(x) = T_n(PQ)(x) + x^{n+1} R(x), \quad R \in \mathbf{R}[x]$$

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x) + x^n (xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x))$$

2§. On tronque avant d'évaluer en  $x - a$ .



On pose :

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0} xR(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} Q\varepsilon_1(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} P\varepsilon_2(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) &= 0\end{aligned}$$

EXEMPLE. On veut le développement limité de :

$$\text{Arctan}(x-1)\exp(x)$$

en 1 d'ordre 3.

$$\begin{aligned}\text{Arctan}(y) &= y - \frac{y^3}{3} + y^3\varepsilon(y) \\ \text{Arctan}(x-1) &= (x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3\varepsilon(x) \\ \exp(x) &= \exp(x-1+1) = e \exp(x-1) \\ \exp(x) &= e \left( 1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3\varepsilon(x) \right)\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}f(x) &= e \left( (x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3\varepsilon(x) \right) \times \left( 1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3\varepsilon(x) \right) \\ f(x) &= e \left( (x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} \right) + (x-1)^3\varepsilon(x)\end{aligned}$$

## 4.2 Développement limité d'une fonction composée

Puisque la composition de deux fonctions polynômiales est encore un polynôme :

### PROPOSITION 4.4

Soient  $f, g$  admettant un développement limité en 0 à l'ordre  $n$  :

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon(x)$$

avec  $P, Q$  deux polynômes de degré inférieur à  $n$ .

Supposons que  $g(0) = 0$  alors  $f \circ g$  admet le développement limité suivant à l'ordre  $n$  en 0 :

$$(f \circ g)(x) = T_n(P \circ Q)(x) + x^n\varepsilon(x).$$

### DÉMONSTRATION

Supposons  $n = 0$ , alors  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes constants donc  $f(x) = P(0) + \varepsilon(x)$  et  $g(x) = Q(0) + \varepsilon(x)$ . Comme  $Q(0) = 0$  on a bien  $f(g(x)) = (P \circ Q)(x) + \varepsilon(x)$  par continuité.

Supposons que  $n \geq 1$ . On note  $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_1(x)$  et  $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_2(x)$ . Posons

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

$$(f \circ g)(x) = P(g(x)) + g(x)^n \varepsilon_1(g(x))$$

$$P(g(x)) = \sum_{i=0}^n a_i g(x)^i$$

$$P(g(x)) = \textcolor{red}{3}\S T_n \left( \sum_{i=0}^n a_i Q(x)^i \right) + x^n \varepsilon_3(x)$$

Puisque  $Q(0) = 0$ , on a  $Q(x) = b_1x + \dots + b_nx^n$  et donc :

$$g(x) = b_1x + \dots + b_nx^n + x^n \varepsilon_2(x)$$

$$g(x) = x(b_1 + \dots + b_nx^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon_2(x))$$

$$g(x) = xh(x)$$

$$(f \circ g)(x) = P(xh(x)) + x^n h(x)^n \varepsilon_1(xh(x))$$

$$(f \circ g)(x) = T_n(P \circ Q)(x) + x^n (h(x)^n \varepsilon_1(xh(x)) + \varepsilon_3(x))$$

On pose  $\varepsilon_4(x) = h(x)^n \varepsilon_1(xh(x)) + \varepsilon_3(x)$  et :

$$\lim_{x \rightarrow 0} xh(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x)^n = b_1^n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_4(x) = 0.$$

EXEMPLE. Développement limité de  $\cos(\sin(x))$  à l'ordre 5 en 0 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6 \varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x)$$

$$\cos(\sin(x)) = T_5 \left( 1 - \frac{\left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right)^2}{2!} + \frac{\left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right)^4}{4!} \right) + x^5 \varepsilon(x)$$

$$\cos(\sin(x)) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x)$$

$$\cos(\sin(x)) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^5 \varepsilon(x)$$

#### PROPOSITION 4.5

Soient  $f, g$  admettant des développements limités à l'ordre  $n$  en 0. Alors si  $g(0) \neq 0$  alors la fonction  $f/g$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0.

#### DÉMONSTRATION

Puisque  $g(0) \neq 0$ ,  $f/g$  est définie et continue en 0. Comme  $f/g = f \times 1/g$ , il suffit de vérifier que  $1/g$  admet un développement limité en 0 (puis on applique la règle de produit).

Posons  $a = g(0) \neq 0$ . On a :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a + (g(x) - a)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{g(x)}{a} - 1 \right)}$$

3§. D'après les formules de développements limités d'une somme et d'un produit.

Il suffit de vérifier que :

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)}$$

admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0. Posons

$$h(x) = \frac{1}{1 + x}$$

on a alors

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)} = h\left(\frac{g(x)}{a} - 1\right) = (h \circ k)(x)$$

où  $k(x) = g(x)/a - 1$ . Or  $k(x)$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 et  $h(x)$  admet également un développement limité à l'ordre  $\infty$  en 0. Enfin,  $k(0) = 0$  et donc on conclut avec le résultat précédent.

EXEMPLE. Développement limité de  $f : f(x) = 1/(a - x)$  en 0 à l'ordre  $n$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{a} \frac{1}{1 - x/a} \\ \frac{1}{1 - t} &= 1 + t + t^2 + \dots + t^n + t^n \varepsilon(t) \\ f(x) &= \frac{1}{a} \left( 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \dots + \frac{x^n}{a^n} \right) + x^n \varepsilon(x) \\ \frac{1}{a - x} &= \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \dots + \frac{x^n}{a^{n+1}} + x^n \varepsilon(x). \end{aligned}$$

La méthode précédente ne donne pas de formule générale pour le développement limité de  $f/g$ .

RAPPEL. Si  $P, Q \in \mathbf{R}[x]$ ,  $n \in \mathbf{N}$  et si  $Q(0) \neq 0$ . Alors la division de  $P$  par  $Q$  suivant les puissances croissantes à l'ordre  $n$  est l'unique polynôme  $A$  tel que :

- $P - AQ$  est divisible par  $X^{n+1}$  ;
- soit  $A = 0$ , soit  $\deg A \leq n$ .

#### PROPOSITION 4.6

Soient  $f, g$  avec les développements limités suivants à l'ordre  $n$  en 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x) + x^n \varepsilon_1(x), \\ g(x) &= B(x) + x^n \varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

Supposons que  $g(0) = B(0) \neq 0$ . Le développement limité à l'ordre  $n$  de  $f/g$  en 0 est :

$$\frac{f}{g}(x) = Q(x) + x^n \varepsilon(x)$$

où  $Q$  est la division de  $A$  par  $B$  à l'ordre  $n$  suivant les puissances croissantes.

#### DÉMONSTRATION

On a  $A(x) = Q(x)B(x) + x^{n+1}R(x)$  où  $R$  est un polynôme et  $Q = 0$  ou  $\deg Q \leq n$ . Ainsi

$$\begin{aligned} f(x) &= Q(x)B(x) + x^{n+1}R(x) + x^n\varepsilon_1(x) \\ f(x) - Q(x)g(x) &= x^{n+1}R(x) + x^n\varepsilon_1(x) - Q(x)x^n\varepsilon_2(x) \\ f(x) - Q(x)g(x) &= x^n(\varepsilon_1(x) - Q(x)\varepsilon_2(x) + xR(x)) \\ \frac{f}{g}(x) &= Q(x) + x^n\varepsilon_3(x) \\ \varepsilon_3(x) &= \frac{1}{g(x)}(\varepsilon_1(x) - Q(x) \cdot \varepsilon_2(x) + xR(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

EXEMPLE. Développement limité de  $\tan(x)$  à l'ordre 5 en 0.

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x) \\ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) + x^6R(x) \\ \frac{f(x)}{g(x)} &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x) \end{aligned}$$

## 5 APPLICATIONS

APPLICATIONS. Les développements limités peuvent être utiles pour :

1. les calculs de limites (pour des « formes indéterminées ») ;
2. études de fonctions ou courbes paramétrées.

### 5.1 Calculs de limites

EXEMPLE. On veut calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x) \\ \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \\ \log \operatorname{ch} x &= \log(1 + (\operatorname{ch} x - 1)) \\ \log \operatorname{ch} x &= T_2 \left( \frac{x^2}{2} - \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2} \right) + x^2\varepsilon(x) \\ \log \operatorname{ch} x &= \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \\ x \log \operatorname{ch} x &= \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \\
x\sqrt{1+x} &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + x^3\varepsilon(x) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \\
\exp(\sin x) &= T_3 \left( \left( x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) \left( x - \frac{x^3}{6} \right) \right) + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(\sin x) &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(\sin x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) ;
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \frac{\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)}{1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)} \\
\frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \frac{\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)}{-\frac{x^3}{8} + x^3\varepsilon(x)} \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/2 + \varepsilon(x)}{-1/8 + \varepsilon(x)} = -4.
\end{aligned}$$

REMARQUE. Un calcul de dérivée s'obtient par un calcul de limite et donc parfois par développements limités.

EXEMPLE. On prend

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + x + x^2}$$

et on cherche  $f^{(i)}(0)$  pour  $i \in \{0, \dots, 4\}$ , c'est-à-dire que l'on cherche le développement limité de  $f$  en 0 à l'ordre 4.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x).$$

On cherche le développement limité de

$$g(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}$$

que l'on peut voir comme

$$g(x) = (a \circ b)(x) ; a(x) = \frac{1}{1+x} ; b(x) = x + x^2.$$

$$\begin{aligned}
a(x) &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
g(x) &= T_4((x \mapsto 1 - x + x^2 - x^3 + x^4)(x + x^2)) + x^4\varepsilon(x) \\
g(x) &= 1 - x - x^2 + x^2 + x^4 + 2x^3 + x^4 - x^3 - 3x^4 + x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
g(x) &= 1 - x + x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
f(x) &= T_4\left((1 - x + x^3 - x^4)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\right) + x^4\varepsilon(x) \\
f(x) &= 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{2} - \frac{23x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Comme  $f$  admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, elle est dérivable quatre fois. De plus

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(0) &= -1 \\
f^{(2)}(0) &= -1 \\
f^{(3)}(0) &= 9 \\
f^{(4)}(0) &= -23.
\end{aligned}$$

## 5.2 Courbes paramétrées

RAPPELS SUR LES FONCTIONS CLASSIQUES. Quelques rappels :

— on définit le logarithme népérien par :

$$\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Ainsi  $\log : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$  est croissante,  $C^\infty$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \log x &= \frac{1}{x} \\
\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \log x &= -\infty \\
\lim_{x \rightarrow \infty} \log x &= +\infty \\
\log(ab) &= \log a + \log b.
\end{aligned}$$

— on définit l'exponentielle,  $\exp : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , qui est croissante, lisse et stable par dérivation.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) &= 0 \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) &= \infty \\
\exp(a + b) &= \exp(a) \exp(b).
\end{aligned}$$

— soient  $a \in \mathbf{R}_+^*, b \in \mathbf{R}$  alors on définit :

$$a^b = \exp(b \log a).$$

$$a^{b+b'} = a^b a^{b'}$$

$$(aa')^b = a^b (a')^b$$

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

$$a^0 = 1 = 1^b$$

$$\frac{d}{dx} x^b = b x^{b-1}$$

$$\frac{d}{dx} a^x = \log(a) a^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^a (\log x)^n = 0, \quad a > 0 \text{ et } n \in \mathbf{Z}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^a e^x = 0.$$

— trigonométrie :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\sin(x+t) = \cos(t) \sin(x) + \cos(x) \sin(t)$$

$$\cos(x+t) = \cos(x) \cos(t) - \sin(x) \sin(t)$$

$$\tan(x+t) = \frac{\tan(t) + \tan(x)}{1 - \tan(x) \tan(t)}.$$

—  $\text{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$  est lisse sur  $] -1, 1[$  et :

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\text{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  est la réciproque de  $\cos$  et on a la relation :

$$\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

$\text{Arctan} : \mathbf{R} \rightarrow ] -\pi/2, \pi/2[$  est lisse et :

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

— trigonométrie hyperbolique :

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$$

leurs réciproques  $\text{Arcsh} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\text{Arcch} : [-1, \infty] \rightarrow \mathbf{R}_+$  et  $\text{Arcth} : ] -1, +1[ \rightarrow \mathbf{R}$  sont lisses sur l'intérieur de leur domaine de définition.

$$\text{Arcsh}'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\text{Arcch}'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$\text{Arcsh}(t) = \log(t + \sqrt{t^2+1})$$

$$\text{Arcch}(t) = \log(t + \sqrt{t^2-1}).$$

## DÉFINITION 5.1

Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  avec  $I$  un intervalle ou une union finie d'intervalles dans  $\mathbf{R}$ . Soient  $u, v$  telles que

$$\forall t, f(t) = (u(t), v(t)).$$

1. On dit que  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$  où  $l = (l_1, l_2)$  si  $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = l_1$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = l_2$ .
2. On dit que  $f$  est continue en  $t_0$  si les fonctions  $u$  et  $v$  sont continues en 0.  $f$  est continue sur  $I$  si elle est continue en tout point de  $I$ .
3. On dit que  $f$  est dérivable en  $t_0$  si  $u$  et  $v$  le sont et on note  $f'(t_0) = (u'(t_0), v'(t_0))$ .

## PROPOSITION 5.2

Si  $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  et si  $t_0 \in I$  alors :

1. si  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = m$  alors  $\lim_{t \rightarrow t_0} (f + g)(t) = l + m$  ;
2. si  $f, g$  sont dérivables en  $t_0$  alors  $f + g$  aussi et on a  $(f + \lambda g)'(t_0) = f'(t_0) + \lambda g'(t_0)$ .

## PROPOSITION 5.3

Soit  $(r, s)$  une base de  $\mathbf{R}^2$  et soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  telle que  $f(t) = (u(t), v(t))$ . Soit  $(a(t), b(t))$  les coordonnées de  $f(t)$  dans la base  $(r, s)$ .

1. On a :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l \iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \alpha \\ \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = \beta \end{cases}$$

où  $(\alpha, \beta)$  sont les coordonnées de  $l$  dans la base  $(r, s)$ .

2. Idem pour la dérivée.

## DÉMONSTRATION

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  et  $r, s \in \mathbf{R}^2$ . On a  $l = \alpha \cdot r + \beta \cdot s$ ,

$$f(t) = (u(t), v(t)) = a(t) \cdot r + b(t) \cdot s$$

avec  $a(t), b(t) \in \mathbf{R}$ .

1. On a que  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$  c'est par définition :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = l_1 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = l_2 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \alpha \\ \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = \beta \end{cases} &\iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} (a(t)r_1 + b(t)s_1) = \alpha r_1 + \beta s_1 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} (a(t)r_2 + b(t)s_2) = \alpha r_2 + \beta s_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} a(t)r_1 + b(t)s_1 = l_1 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} a(t)r_2 + b(t)s_2 = l_2 \end{cases} \end{aligned}$$

2. De même ...

## DÉFINITION 5.4

On dit que  $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2, f(t) = (u(t), v(t))$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $t_0$  si  $u(t)$  et  $v(t)$  admettent un développement limité à l'ordre  $n$  en  $t_0$ .



Si  $u(t) = u_0 + u_1(t - t_0) + \dots + u_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon_1(t)$  et  $v(t) = v_0 + v_1(t - t_0) + \dots + v_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon_2(t)$  alors on appelle

$$f(t) = (u_0, v_0) + (t - t_0)(u_1, v_1) + \dots + (t - t_0)^n(u_n, v_n) + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

le développement limité de  $f$  à l'ordre  $n$  en  $t_0$  avec  $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0)$ .

EXEMPLE. Le développement limité de  $f : t \mapsto (2t^3 - t \sin t, t^3 + \cos t)$  à l'ordre 4 en 0 :

$$2t^3 - t \sin t = -t^2 + 2t^3 + \frac{t^4}{6} + t^4 \varepsilon(t)$$

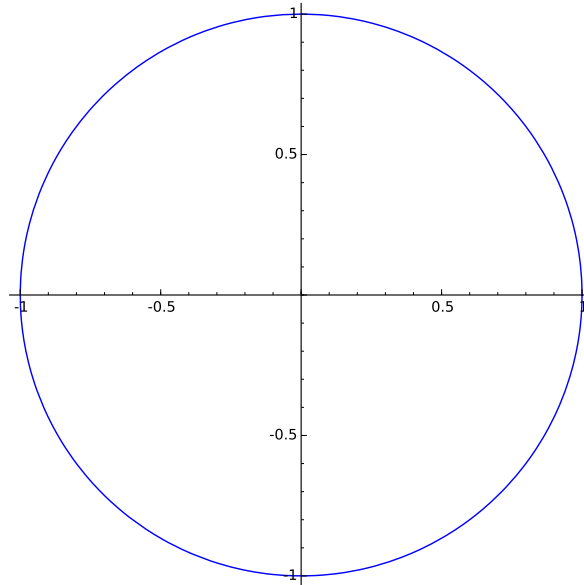
$$t^3 + \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + t^3 + \frac{t^4}{24} + t^4 \varepsilon(t)$$

$$f(t) = (0, 1) - t^2(1, 1/2) + t^3(2, 1) + t^4(1/6, 1/24) + t^4 \varepsilon(t).$$

DÉFINITION 5.5

On appelle *courbe paramétrée* de  $\mathbf{R}^2$  une fonction  $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ .

EXEMPLE.  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$ .



REMARQUE. Supposons que  $f$  soit dérivable en  $t \in I$ . Alors  $u(t), v(t)$  admettent des développements limités à l'ordre 1 en  $t_0$  et donc  $f$  admet aussi un développement limité à l'ordre 1 en  $t_0$ . Or si

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t)$$

alors

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0)) = f'(t_0).$$

DÉFINITION 5.6

On appelle  $f'(t_0)$  *vecteur tangent* de  $f$  en  $t_0$ . La droite affine passant par  $f(t_0)$  et de vecteur directeur  $f'(t_0)$  s'appelle la *tangente* à  $f$  en  $t_0$ .

REMARQUE. Le vecteur tangent dépend du paramétrage de la courbe et non seulement de sa représentation.

EXEMPLE. Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$  et soit  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$ . Remarquons que  $f$  et  $g$  ont même représentation graphique. Cependant les vecteurs tangents en 0 à  $f$  et  $g$  sont :

$$\begin{aligned} f'(0) &= (0, 1) \\ g'(0) &= (0, 2). \end{aligned}$$

La tangente à  $f$  en  $t_0$  est la droite d'équation :

$$\det \begin{pmatrix} y - v(t_0) & v'(t_0) \\ x - u(t_0) & u'(t_0) \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire :

$$(y - v(t_0))u'(t_0) - (x - u(t_0))v'(t_0) = 0.$$

### 5.3 Étude de fonctions

Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbf{R}$ . On procède à l'étude de  $f$  au voisinage de  $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ . En particulier, on s'intéresse notamment au graphe de  $f$ .

#### 5.3.1 ÉTUDE LOCALE

##### PROPOSITION 5.7

Soit  $x_0 \in I, f : I \rightarrow \mathbf{R}$ . On suppose que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $x_0$  :

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

où  $P \in \mathbf{R}[x], P(x) = a_p x^p + \dots + a_n x^n$  avec  $0 \leq p \leq n$  et  $a_p \neq 0$ .

Alors il existe  $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$  tel que pour tout  $x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$  et  $x \neq x_0$ ,  $f(x)$  est non nul et a le signe de  $a_p(x - x_0)^p$ .

##### DÉMONSTRATION

Puisque  $p \leq n$ , le développement limité de  $f$  en  $x_0$  à l'ordre  $p$  est :

$$f(x) = (T_p(P))(x - x_0) + (x - x_0)^p \varepsilon(x).$$

C'est-à-dire :

$$f(x) = a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p \varepsilon(x).$$

Pour tout  $x \neq x_0$ , on a :

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^p} = a_p + \varepsilon(x)$$

et  $a_p \neq 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ . Ainsi il existe  $\alpha$  tel que pour tout  $x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$  et  $x \neq x_0$ ,  $|\varepsilon(x)| < \frac{1}{2}(a_p)$ . C'est-à-dire que pour un tel  $x$ ,  $f(x) \neq 0$  et est du même signe que  $a_p(x - x_0)$ .

##### DÉFINITION 5.8

Si  $I \subset \mathbf{R}$  est un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  est une fonction numérique et si  $x_0 \in \bar{I}$ <sup>4§</sup>, on dit que  $f$  est *positive au voisinage de  $x_0$*  s'il existe un voisinage  $J \subset I$  de  $x_0$  tel que pour tout  $x \in J$  et  $x \neq x_0$ ,  $f(x) > 0$ .

EXEMPLE. Prenons :

$$f(x) = e \cdot \sqrt{x} - e^x.$$

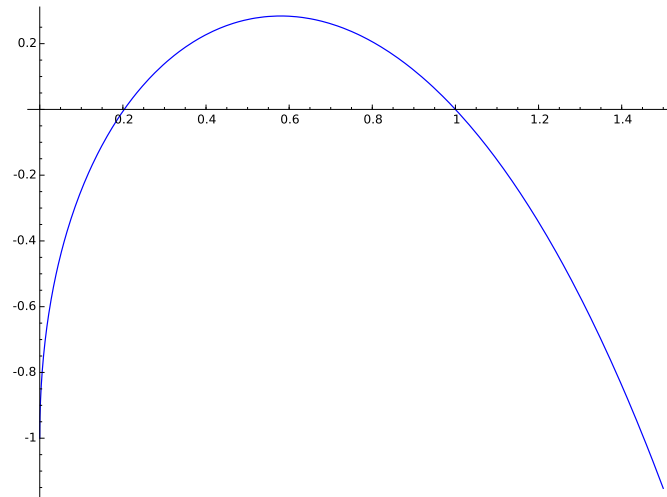
---

<sup>4§</sup>. Dans  $I$  ou l'une de ses bornes.

On cherche le signe de  $f$  quand  $x$  tend vers 1.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e \left[ (1 + (x-1))^{1/2} - e^{x-1} \right] \\
 &\begin{cases} (1 + (x-1))^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \\ e^{x-1} = 1 + (x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \end{cases} \\
 f(x) &= e \left( -\frac{1}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \right) \\
 f(x) &= \frac{-e}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x).
 \end{aligned}$$

Ainsi au voisinage de 1, le signe de  $f$  est le même que celui de  $1-x$ .



#### DÉFINITION 5.9

Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction dérivable en  $x_0 \in I$ . La *tangente* en  $(x_0, f(x_0))$  au graphe de  $f$  est la droite affine d'équation :

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

#### DÉFINITION 5.10

Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction dérivable en  $x_0 \in I$ .

On dit que  $f$  admet une *inflexion* au point  $(x_0, f(x_0))$  si la fonction

$$x \mapsto f(x) - (f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0))$$

s'annule en  $x_0$  en changeant de signe.

#### PROPOSITION 5.11

Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction dérivable en  $x_0 \in I$ . On a :

1. si  $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$  est le développement limité de  $f$  à l'ordre 1 en  $x_0$ , alors la tangente au graphe de  $f$  en  $(x_0, f(x_0))$  est donnée par :

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) ;$$

2. si  $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\varepsilon(x)$  est le développement limité de  $f$  à l'ordre 2 en  $x_0$ , alors

- si  $a_2 > 0$  alors pour tout  $x \neq x_0$  dans un voisinage suffisamment petit de  $x_0$ , le point  $(x, f(x))$  est au-dessus de la tangente ;
- si  $a_2 < 0$  alors pour tout  $x \neq x_0$  dans un voisinage suffisamment petit de  $x_0$ , le point  $(x, f(x))$  est en-dessous de la tangente ;
- 3. si  $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_3(x - x_0)^3 + (x - x_0)^3\varepsilon(x)$  est le développement limité de  $f$  à l'ordre 3 en  $x_0$ , alors si  $a_3 \neq 0$ ,  $f$  admet un point d'inflexion en  $(x_0, f(x_0))$ .

## DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. Comme  $f$  est dérivable en  $x_0$ , on a  $a_1 = f'(x_0)$  et  $a_0 = f(x_0)$ , l'équation de la tangente est

$$y = a_1(x - x_0) + a_0.$$

2. Posons

$$u(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)).$$

On a alors :

$$u(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 - a_1(x - x_0) - a_0 + (x - x_0)^2\varepsilon(x) = a_2(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\varepsilon(x).$$

Comme  $a_2 \neq 0$  (par hypothèse) alors la proposition précédente entraîne que le signe de  $u(x)$  au voisinage de 0 est celui de  $a_2(x - x_0)^2$ , c'est-à-dire le signe de  $a_2$ .

3. Posons de même

$$u(x) = a_3(x - x_0)^3 + (x - x_0)^3\varepsilon(x).$$

D'après la proposition précédente, le signe de  $u(x)$  au voisinage de  $x_0$  est celui de  $a_3(x - x_0)$  puisque  $a_3 \neq 0$ . Comme  $(x - x_0)^3$  n'est pas de signe constant, c'est un point d'inflexion.

REMARQUE. Si  $a_2 \neq 0$ , alors :

- si  $a_2 > 0$ ,  $f(x)$  admet un minimum local en  $x_0$  ;
- sinon,  $f(x)$  admet un maximum local en  $x_0$ .

REMARQUE, GÉNÉRALISATION DU RÉSULTAT. Supposons que le développement limité de  $f$  en  $x_0$  est de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p\varepsilon(x),$$

avec  $p \geq 2$ . De plus on suppose  $a_p \neq 0$ . Alors en posant

$$u(x) = f(x) - (f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0))$$

est du signe de  $a_p(x - x_0)^p$  au voisinage de  $x_0$ .

- Si  $p$  est pair alors  $a_p > 0$  implique que  $x_0$  est un minimum local,  $a_p < 0$  implique que  $x_0$  est un maximum local.
- Si  $p$  est impair alors  $x_0$  est un point d'inflexion.

EXEMPLE. Prenons :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 5}$$

définie sur  $\mathbf{R}$  et étudions  $f$  au voisinage de  $x_0 = 2$ . On a :

$$f(x+2) = \left((x+2)^3 + 6x^2 - 5\right)^{1/3}$$

$$f(x+2) = \left(27 + 36x + 12x^2 + x^3\right)^{1/3}$$

$$f(x+2) = 3 \cdot \left(1 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{27}x^3\right)^{1/3}$$

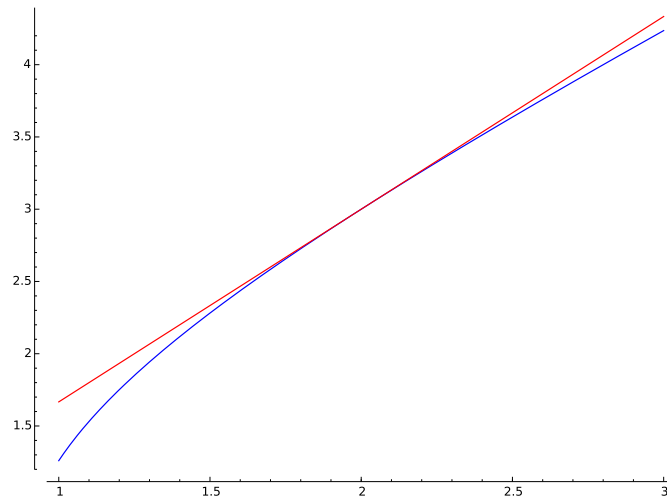
$$f(x+2) = 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2\right) + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{-2}{3}\right)}{2} \left(\frac{16}{9}x^2\right)\right) + x^2\varepsilon(x)$$

$$f(x+2) = 3 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{27}x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

L'équation de la tangente est :

$$y = 3 + \frac{4}{3}(x-2).$$

Comme le terme en  $x^2$  est non nul et négatif, la courbe est en-dessous de la tangente.



### 5.3.2 BRANCHES INFINIES

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction numérique.

#### DÉFINITION 5.12

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ , avec  $a \in \mathbf{R}$  alors la droite  $x = a$  est une *asymptote verticale* de  $f$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ou si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  alors  $f$  admet une *branche infinie* en  $+\infty$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  ou si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  alors  $f$  admet une *branche infinie* en  $-\infty$ .

Soit  $a, b \in \mathbf{R}$ . La droite  $y = ax + b$  est *asymptote* à  $f$  quand  $x$  tend vers  $\pm\infty$  si :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax - b = 0.$$

Si  $a = 0$  on dit que l'asymptote est *horizontale*.

Soit  $a \in \mathbf{R}$ , si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

alors on dit que  $f$  a une *direction asymptotique de pente  $a$  en  $\pm\infty$* .

Si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

alors on dit que  $f$  a une *direction asymptotique verticale* en  $\pm\infty$ .

PROPOSITION 5.13

Soient  $a, b \in \mathbf{R}$ . La droite  $y = ax + b$  est asymptote à  $f$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  (resp. en  $-\infty$ ) si, et seulement si :

— on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a ;$$

— et de plus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b.$$

EXEMPLE. Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par :

$$f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x^2 + 1}.$$

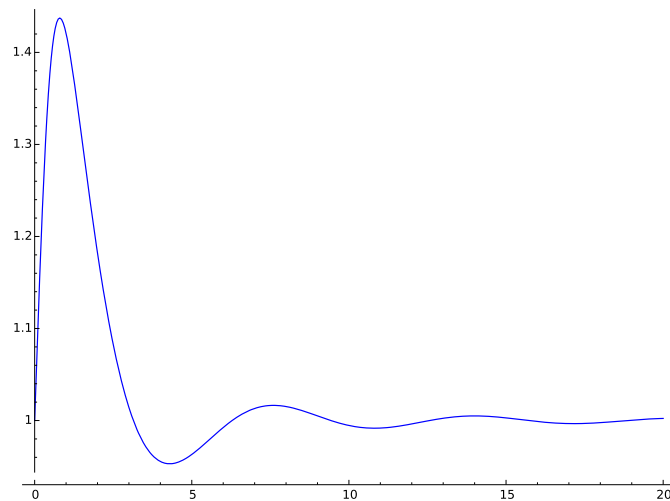
On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - 1| = 0$$

et donc  $y = 1$  est asymptote à  $f$  en  $+\infty$ . La différence

$$f(x) - 1 = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$$

est du signe de  $\sin x$  qui oscille.



EXEMPLE. Avec

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 5}$$

on regarde s'il y a une asymptote quand  $x$  tend vers  $\pm\infty$  et la position par rapport à la possible asymptote. On écrit  $f$  sous la forme :

$$f(x) = xu(1/x)$$

avec

$$u(x) = \sqrt[3]{1 + 6x - 5x^3}.$$

Le développement limité de  $u$  en 0 à l'ordre 2 est :

$$\begin{aligned}u(x) &= (1 + 6x - 5x^3)^{1/3} \\u(x) &= 1 + \frac{1}{3}(6x) + \frac{1}{3} \left( \frac{-2}{3} \right) \frac{1}{2}(36x^2) + x^2\varepsilon(x) \\u(x) &= 1 + 2x - 4x^2 + x^2\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Ainsi pour  $x$  au voisinage de  $\infty$  en valeur absolue :

$$f(x) = x \left( 1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{\varepsilon(1/x)}{x^2} \right) = x + 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(1/x),$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) - (x + 2) = 0.$$

On regarde maintenant la position de  $f$  par rapport à  $y = x + 2$ . On a

$$f(x) - (x + 2) = \frac{-4}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(1/x).$$

Ainsi quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f$  est en-dessous de l'asymptote, quand  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f$  est au-dessus de l'asymptote.

### 5.3.3 ÉTUDE DE FONCTION

Par exemple avec

$$f(x) = x \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right|$$

de domaine de définition  $\mathbf{R} \setminus \{0, -1/2\}$ .

DÉRIVÉE. On calcule la dérivée de  $f$  :

$$\begin{aligned}f(x) &= x(\log |2x + 1| - \log |x|) \\f'(x) &= \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right| + x \left( \frac{2}{2x + 1} - \frac{1}{x} \right) \\f'(x) &= \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right| - \frac{1}{2x + 1} \\f''(x) &= \frac{2}{2x + 1} - \frac{1}{x} - \frac{2}{(2x + 1)^2} \\f''(x) &= \frac{-1}{x(2x + 1)^2}\end{aligned}$$

Une étude des signes montre qu'il existe un unique  $\alpha$  entre  $-1/2$  et 0 (strictement) tel que  $f'(\alpha) = 0$ . En conclusion,  $f$  est croissante partout sauf sur  $] -1/2, \alpha[$  où elle est décroissante.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty\end{aligned}$$

ce qui nous donne deux branches infinies.

$$\lim_{x \rightarrow -1/2} f(x) = +\infty$$

et donc il y a une asymptote verticale en  $x = -1/2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$$

$$f(x) = x \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right|$$

$$f(x) = x \log |2x + 1| - x \log x$$

or les deux termes tendent vers 0 en 0 et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

et donc  $f$  admet un prolongement par continuité à 0 en 0.

Il reste à regarder les branches infinies :

— Quand  $x \rightarrow \infty$ , on cherche un développement limité de  $f$  en  $+\infty$ .

$$f(x) = x \log(2 + 1/x)$$

$$f(x) = x \log 2 + x \log \left( 1 + \frac{1}{2x} \right)$$

$$f(x) = x \log 2 + x \left( \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o(1/x^2) \right)$$

$$f(x) = (\log 2)x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o(1/x)$$

On en déduit que la droite d'équation

$$y = (\log 2)x + \frac{1}{2}$$

est asymptote oblique à  $f$  en  $+\infty$  et la courbe est en-dessous de l'asymptote.

— En  $-\infty$  la droite d'équation

$$y = (\log 2)x + \frac{1}{2}$$

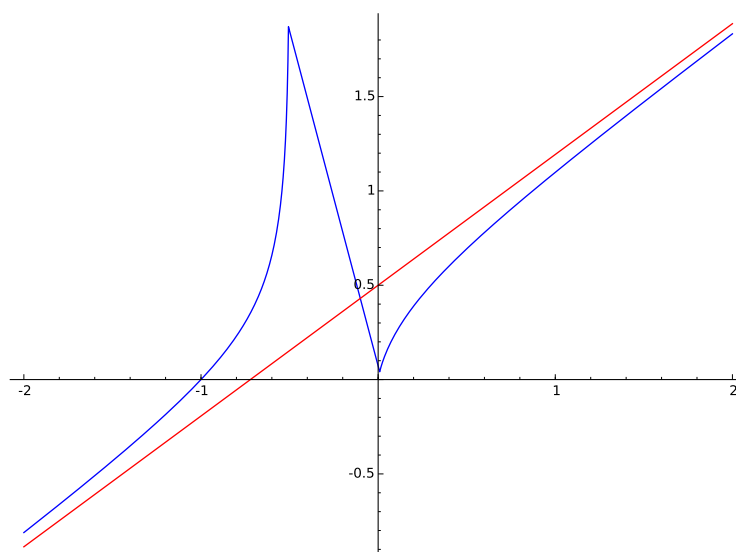
est également asymptote oblique à  $f$  en  $-\infty$  et la courbe est au-dessus de l'asymptote.

— Pour ce qui est de la tangente en 0 :

$$f'(x) = \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right| - \frac{1}{2x+1}$$

et alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right| = +\infty.$$





## Chapitre 4

# Courbes et surfaces paramétrées

### 1 DÉFINITIONS

Soit  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  telle que  $f(t) = (u(t), v(t))$ .

DÉFINITION 1.1

Supposons que  $u, v$  sont continues.

Si  $u$  et  $v$  admettent un développement limité à l'ordre  $n$  au point  $t_0$  :

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + u_1(t - t_0) + \dots + u_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon(t) \\ v(t) &= v_0 + v_1(t - t_0) + \dots + v_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon(t) \end{aligned}$$

alors  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $t_0$  :

$$\begin{aligned} f(t) &= f_0 + (t - t_0)f_1 + \dots + (t - t_0)^n f_n + (t - t_0)^n \varepsilon(t) \\ \forall i \in \{0, \dots, n\}, f_i &= (u_i, v_i). \end{aligned}$$

L'égalité précédente s'appelle le *développement limité de  $f$  en  $t_0$  à l'ordre  $n$* .

REMARQUE. On a bien

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0).$$

DÉFINITION 1.2

Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  s'appelle *courbe paramétrée de  $\mathbf{R}^2$* .

Supposons que  $f$  est dérivable en  $t_0 \in I$ .  $f$  admet le développement limité en  $t_0$  à l'ordre 1 suivant :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t).$$

### 2 TANGENTES

DÉFINITION 2.1

Si  $f'(t_0) \neq 0$  alors la tangente à la courbe au point  $f(t_0)$  est la droite affine passant par  $f(t_0)$  et de vecteur directeur  $f'(t_0)$ . L'équation est

$$\det \begin{pmatrix} x - u(t_0) & u'(t_0) \\ y - v(t_0) & v'(t_0) \end{pmatrix} = 0.$$

En d'autres termes, c'est l'équation :

$$(y - v(t_0)) \cdot u'(t_0) - (x - u(t_0)) \cdot v'(t_0) = 0.$$

On se demande quelles sont les conditions à l'existence de la tangente en un point ainsi que la position de la tangente par rapport à la courbe.

REMARQUE. On retrouve l'étude des fonctions à valeurs dans  $\mathbf{R}$  si on a

$$f(t) = (t, v(t)).$$

Supposons que  $u, v$  admettent des développements limités en  $t_0$  à l'ordre  $n \geq 2$ . On a

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)^2 w_2 + \dots + (t - t_0)^n w_n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

où  $w_2, \dots, w_n \in \mathbf{R}^2$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = 0_{\mathbf{R}^2}$ .

1. Supposons que  $f'(t_0) \neq 0$  et  $f'(t_0)$  est non colinéaire à  $w_2$ . On tronque le développement limité à l'ordre 2 :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)^2 w_2 + (t - t_0)^2 \varepsilon(t).$$

Soient  $(a(t), b(t))$  les coordonnées de  $\varepsilon(t)$  dans la base  $(f'(t_0), w_2)$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} f(t) - f(t_0) &= \left( t - t_0 + (t - t_0)^2 a(t) \right) f'(t_0) + (t - t_0)^2 (b(t) + 1) w_2 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} a(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = 0. \end{aligned}$$

Selon la coordonnée de  $f'(t_0)$  on a que  $(t - t_0)^2 a(t)$  tend vers 0 et alors  $t - t_0$  détermine le signe. Selon la coordonnée  $w_2$ , dans un voisinage suffisamment petit de  $t_0$  on a que la coordonnée est de signe positif.

2. Supposons que  $f'(t_0) \neq 0$ ,  $w_2 = \lambda f'(t_0)$  et enfin  $w_3$  et  $f'(t_0)$  non colinéaires. On a alors dans la base  $(f'(t_0), w_3)$  :

$$f(t) - f(t_0) = \left( t - t_0 + \lambda(t - t_0)^2 \right) f'(t_0) + (t - t_0)^3 w_3 + (t - t_0)^3 \varepsilon(t).$$

On décompose  $\varepsilon(t)$  dans cette base :

$$\varepsilon(t) = a(t)f'(t_0) + b(t)w_3.$$

On sait que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = 0.$$

Dans cette base, on a :

$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} t - t_0 + \lambda(t - t_0)^2 + (t - t_0)^3 a(t) \\ (t - t_0)^3 + (t - t_0)^3 b(t) \end{pmatrix}$$

Sur chaque coordonnée, le signe est celui de  $t - t_0$ .

REMARQUE. Supposons  $f'(t_0) \neq 0$ ,  $n \geq 3$  et il existe un entier  $p \in \{3, \dots, n\}$  tel que les vecteurs  $w_2, w_3, \dots, w_{p-1}$  sont colinéaires à  $f'(t_0)$  et tel que  $w_p$  n'est pas colinéaire à  $f'(t_0)$ . Ainsi,  $(f'(t_0), w_p)$  est une base de  $\mathbf{R}^2$ .

On écrit le développement limité de  $f(t) - f(t_0)$  dans cette base. On étudie le signe des coordonnées de  $f(t) - f(t_0)$  quand  $t \rightarrow t_0$ . Si  $p$  est pair alors la courbe est comme dans le cas  $p = 2$  (la courbe est du côté de  $w_p$  par rapport à la tangente), sinon comme dans le cas  $p = 3$  (elle traverse la tangente).

3. Supposons que  $f'(t_0) = 0$  et que  $w_2, w_3$  forme une base de  $\mathbf{R}^2$ . On a

$$f(t) - f(t_0) = (t - t_0)^2 w_2 + (t - t_0)^3 w_3 + (t - t_0)^3 \varepsilon(t).$$

On décompose  $\varepsilon(t)$  dans la base  $(w_2, w_3) : \varepsilon(t) = a(t)w_2 + b(t)w_3$  avec  $\lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = 0$ . Les coordonnées dans cette base de  $f(t) - f(t_0)$  sont alors :

$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} (t - t_0)^2 + (t - t_0)^3 a(t) \\ (t - t_0)^3 + (t - t_0)^3 b(t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la première coordonnée est positive et la seconde est du signe de  $t - t_0$ . Une telle situation est un *point de rebroussement*.

4. Supposons que  $f'(t_0) = 0$ ,  $w_3 = \lambda w_2$  et  $w_2, w_4$  forme une base. On pose  $\varepsilon(t) = a(t)w_2 + b(t)w_4$ . Dans ces coordonnées :

$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} (t - t_0)^2 + \lambda(t - t_0)^3 + (t - t_0)^4 a(t) \\ (t - t_0)^4 (1 + b(t)) \end{pmatrix}.$$

Les deux coordonnées sont positives quand  $t \rightarrow t_0$ . C'est aussi un point de rebroussement

### 3 BRANCHES INFINIES

#### DÉFINITION 3.1

Soit  $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  une courbe paramétrée avec  $f = (u, v)$ . Soit  $t_0 \in \bar{I} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ .

- On a une *branche infinie* quand  $t \rightarrow t_0$  si soit  $u$  ou soit  $v$  n'est pas bornée.
- Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = a \in \mathbf{R}$  et si  $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = \pm\infty$  alors la droite  $x = a$  est une *asymptote verticale*.
- Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = \pm\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = a \in \mathbf{R}$  alors la droite  $y = a$  est *asymptote horizontale*.
- Si  $u$  et  $v$  tendent vers  $\pm\infty$  en  $t_0$  :
  - Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t)/u(t) = a \in \mathbf{R}$  alors la droite  $y = ax$  est direction asymptotique.
  - Si de plus  $\lim_{t \rightarrow t_0} (v(t) - au(t)) = b$  alors la droite  $y = ax + b$  est asymptote.

EXEMPLE. Soit  $f$  :

$$f : \begin{cases} \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ t \mapsto (\tan(t), 2t - 1/\cos(t)) \end{cases}.$$

On étudie l'asymptote en  $t_0 = \pi/2$ .

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = -\infty.$$

On étudie le rapport  $v/u$  en  $t \rightarrow t_0$ . On pose  $t = \pi/2 + h$ .

$$\begin{aligned} u(t) &= \tan(\pi/2 - h) = \frac{\sin(\pi/2 - h)}{\cos(\pi/2 - h)} \\ u(t) &= \frac{\cos(h)}{\sin(h)} = \frac{1 - h^2/2 + h^2\varepsilon(h)}{h - h^3/6 + h^3\varepsilon(h)} \\ u(t) &= \frac{1}{h} \left( 1 - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h) \right) \frac{1}{1 - \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon(h)} \\ u(t) &= \frac{1}{h} \left( 1 - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h) \right) \left( 1 + \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon(h) \right) \\ u(t) &= \frac{1}{h} \left( 1 - \frac{h^2}{3} + h^2\varepsilon(h) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \pi - 2h - \frac{1}{\cos(\pi/2 - h)} = \pi - 2h - \frac{1}{\sin(h)} \\ v(t) &= \pi - 2h - \frac{1}{h - \frac{h^3}{6} + h^3\varepsilon(h)} \\ v(t) &= \pi - 2h - \frac{1}{h} \left( \frac{1}{1 - \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon(h)} \right) \\ v(t) &= -\frac{1}{h} + \pi - \frac{13}{6}h + h\varepsilon(h) \\ \frac{v(t)}{u(t)} &= \frac{-\frac{1}{h} + \pi - \frac{13}{6}h + h\varepsilon(h)}{\frac{1}{h} - \frac{1}{3}h + h\varepsilon(h)} \\ \frac{v(t)}{u(t)} &= \frac{-1 + \pi h - \frac{13}{6}h^2 + h^2\varepsilon(h)}{1 - \frac{1}{3}h^2 + h^2\varepsilon(h)} \\ \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} v(t)/u(t) &= -1. \end{aligned}$$

Et donc  $y = -x$  est direction asymptotique.

$$\begin{aligned} v(t) + u(t) &= -\frac{1}{h} + \pi - \frac{13}{6}h - \frac{1}{h} + \frac{1}{3}h + h\varepsilon(h) \\ \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} v(t) + u(t) &= \pi. \end{aligned}$$

Et donc la droite d'équation  $y = -x + \pi$  est asymptote en  $t_0$ .

## 4 ÉTUDE DE COURBES PARAMÉTRÉES

Soit :

$$f: \begin{cases} \mathbf{R} \setminus \{-1, +1\} \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ t \mapsto \left( \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, \frac{t^2}{t - 1} \right) \end{cases}.$$

On a :

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} \\ v'(t) &= \frac{t(t - 2)}{(t - 1)^2}. \end{aligned}$$

Au voisinage  $t = 0$  :

$$u(t) = -1 - 2t^2 + t^3\varepsilon(t)$$

$$v(t) = -t^2 - t^3 + t^3\varepsilon(t)$$

$$f(t) = (-1, 0) + t^2(-2, -1) + t^3(0, -1) + t^3\varepsilon(t)$$

$$f(0) = (-1, 0), \quad f'(0) = (0, 0).$$

Les vecteurs  $(-2, -1)$  et  $(0, -1)$  sont linéairement indépendants.

$t = 0$  est un point singulier car  $f'(0) = (0, 0)$ .

BRANCHES INFINIES. On a :

— Une asymptote horizontale  $y = -1/2$  quand  $t \rightarrow -1$ .

— Quand  $t \rightarrow 1$  :

$$\frac{v(t)}{u(t)} \frac{t^2(t+1)}{t^2+1} \xrightarrow{t \rightarrow 1} 1$$

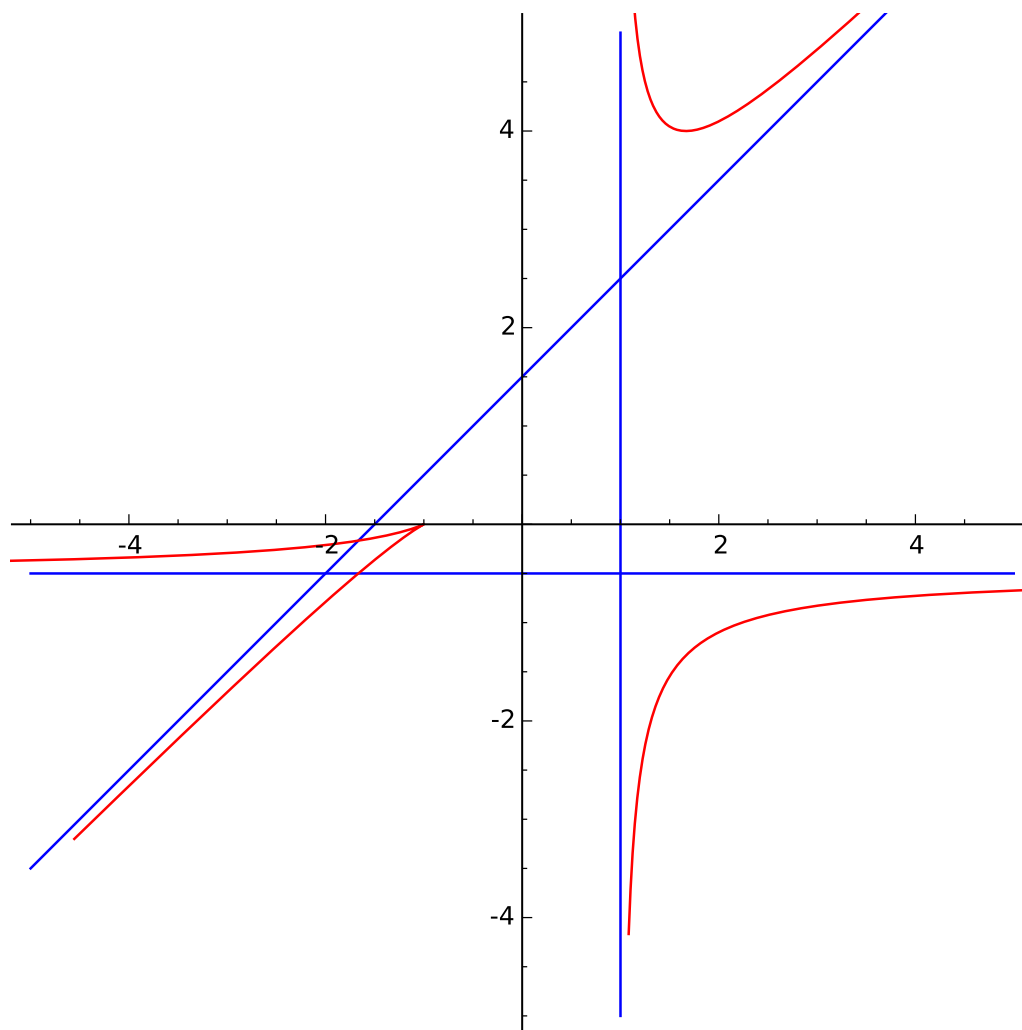
donc une direction asymptotique  $y = x$ .

$$v(t) - 1 \times u(t) = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1} \rightarrow \frac{3}{2}$$

et donc l'asymptote est  $y = x + 3/2$ .

— Quand  $t \rightarrow -\infty$  alors  $u \rightarrow 1$  et  $v \rightarrow -\infty$ . On a une branche infinie et  $x = 1$  est asymptote verticale.

— Quand  $t \rightarrow +\infty$  alors  $u \rightarrow 1$  et  $v \rightarrow \infty$ .  $x = 1$  est asymptote verticale.



# Chapitre 5

## Séries numériques

### 1 DÉFINITIONS

On considère des séries numériques, c'est-à-dire à valeurs dans  $\mathbf{R}$ .

#### DÉFINITION 1.1

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite numérique.

On dit que la série  $\sum u_n$  de terme général  $u_n$  converge si la suite de terme général

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

converge.

Si la suite  $s_n$  diverge, alors on dit que la série  $\sum u_n$  de terme général  $u_n$  diverge.

Les  $s_n$  s'appellent les *sommes partielles*.

#### DÉFINITION 1.2

On note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

(quand elle est définie).

On l'appelle la *somme* de la série  $(\sum u_n)$ .

REMARQUE. La suite de terme général

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

converge si, et seulement si, la suite de terme général (pour  $n_0$  fixé)

$$S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$$

converge.

#### PROPOSITION 1.3

Si la série  $\sum u_n$  converge alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers 0.

## DÉMONSTRATION

Avec

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

et  $l$  la limite de  $s_n$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par convergence de  $s_n$ , il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|l - s_n| < \varepsilon$ . Et donc

$$|s_{n+1} - s_n| = |s_n + 1 - l + l - s_n| \leq |s_{n+1} - l| + |s_n - l| < 2\varepsilon.$$

Or

$$|s_{n+1} - s_n| = |u_{n+1}| < 2\varepsilon.$$

EXEMPLE – SÉRIES GÉOMÉTRIQUES. Soit  $x \in \mathbf{R}$ . On pose

$$u_n = a \cdot x^n.$$

On a

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^n u_k \\ s_n &= a \sum_{k=0}^n x^k \\ s_n &= a \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{a}{1 - x} (1 - x^{n+1}). \end{aligned}$$

- Si  $|x| < 1$  alors  $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $a/(1 - x)$ .
- Si  $|x| \geq 1$  alors la série  $\sum ax^n$  diverge.

EXEMPLE – SÉRIE EXPONENTIELLE. Soit  $x \in \mathbf{R}$ . On regarde la série de terme général  $x^n/n!$ . Alors cette série a pour somme partielle :

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

et la formule de TAYLOR nous assure que  $s_n$  tend vers  $\exp(x)$ . La série est convergente pour tout  $x$  et de somme  $\exp(x)$ .

EXEMPLE. Soit  $x \in \mathbf{R}$ . On considère la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

- Si  $|x| > 1$  alors la suite de terme général  $x^n/n$  ne converge pas et donc la série ne converge pas.
- Si  $x = 1$  alors les sommes partielles sont

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Cependant

$$s_{2n} - s_n \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la série  $\sum 1/n$  diverge.

— Si  $-1 \leq x < 1$  alors pour tout  $n \geq 1$ , on pose

$$f_n: \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto 1 + t^2 + \dots + t^{n-1} \end{cases}$$

et pour tout  $t \neq 1$  :

$$f_n(t) = \frac{1 - t^n}{1 - t}$$

et alors

$$\frac{1}{1 - t} = f_n(t) + \frac{t^n}{1 - t}.$$

On peut intégrer, pour tout  $x \in [-1, 1[$  :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{1 - t} &= \int_0^x f_n(t) dt + \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt \\ -\log(1 - x) &= x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt \\ -\log(1 - x) &= s_n + \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt. \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'examiner la convergence du dernier terme.

1. Pour  $0 \leq x < 1$ , on a  $0 \leq t \leq x < 1$  :

$$\begin{aligned} \frac{t^n}{1 - t} &\leq \frac{t^n}{1 - x} \\ \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt &\leq \frac{1}{1 - x} \int_0^x t^n dt \\ &\leq \frac{1}{1 - x} \frac{1}{n + 1} x^{n+1} \leq \frac{1}{1 - x} \frac{1}{n + 1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt = 0.$$

2. Pour  $-1 \leq x < 0$ , on a  $1 \leq x \leq t \leq 0$  :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt \right| &\leq \int_x^0 \frac{|t|^n}{1 - t} dt \\ &\leq \int_x^0 |t|^n dt \int_x^0 |t|^n dt = (-1)^n \int_x^0 t^n dt \\ &= \frac{(-1)^n}{n + 1} [0 - x^{n+1}] \\ &= \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n + 1} \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{n + 1} \leq \frac{1}{n + 1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Et donc on a aussi une limite nulle.

Finalement, on peut conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt.$$

Ainsi, les sommes partielles  $\sum_{k=1}^n x^k/k$  ont pour limite  $-\log(1 - x)$ . La série converge donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1 - x).$$



REMARQUE. Posons une suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ . On considère la série  $\sum u_n$  de terme général  $u_n = a_n - a_{n+1}$ . On a

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}.$$

Ainsi  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$  existe, c'est-à-dire si, et seulement si,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  existe.

EXEMPLE. On regarde la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

On a

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

EXEMPLE – NOMBRES DÉCIMAUX. On peut écrire un nombre réel comme  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \cdot 10^{-n}$  où  $n_0 \in \mathbf{Z}$  et  $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ .

## 2 OPÉRATIONS SUR LES SÉRIES

### DÉFINITION 2.1

Soient  $\sum u_n$ ,  $\sum v_n$  deux séries.

- La somme des séries est la série  $\sum (u_n + v_n)$  de terme général  $u_n + v_n$ .
- Soit  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Le produit de  $\sum u_n$  par  $\lambda$  est la série  $\sum \lambda u_n$  de terme général  $\lambda u_n$ .

### PROPOSITION 2.2

On a :

1. Si les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent alors leur somme converge aussi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

2. Si la série  $\sum u_n$  converge alors  $\sum \lambda u_n$  aussi et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

### DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. Notons

$$U_n = \sum_{k=0}^n u_k ; V_n = \sum_{k=0}^n v_k.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n ; \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + V_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Par définition,  $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$  converge si, et seulement si,  $\sum_{k=0}^n (u_k + v_k) = U_n + V_n$  converge. Donc on a bien, si  $U_n + V_n$  converge :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

2. De même, en remarquant que  $\sum \lambda u_n = \lambda \sum u_n$ .

EXEMPLE. Soit  $x \in \mathbf{R}$  et soit  $P(X) = aX^2 + bX + c$  un polynôme. Il s'agit de montrer que la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{P(n)}{n!} x^n$$

est convergente et de donner sa somme. On se ramène à une combinaison linéaire de séries exponentielles :

$$\frac{P(n)}{n!} x^n = au_n + (a+b)v_n + cw_n$$

où

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n(n-1)}{n!} x^n \\ v_n &= \frac{n}{n!} x^n \\ w_n &= \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{P(k)}{k!} x^k &= P(0) + P(1)x + \sum_{k=2}^n \frac{P(k)}{k!} x^k \\ \sum_{k=0}^n \frac{P(k)}{k!} x^k &= c + (a+b+c)x + \sum_{k=2}^n \left( (ax^2) \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} + (a+b)x \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + c \frac{x^k}{k!} \right) \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n &= c + (a+b+c)x + ax^2 e^x + (a+b)x(e^x - 1) + c(e^x - 2) \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n &= ax^2 e^x + (a+b)x e^x + c e^x \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n &= (ax^2 + (a+b)x + c) e^x. \end{aligned}$$

REMARQUE. On a vu qu'une somme de deux séries convergentes est convergente. On a aussi vu qu'une somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente. En effet, supposons que  $\sum u_n$  converge et que  $\sum v_n$  diverge. Considérons la série  $\sum w_n = \sum (u_n + v_n)$ . Supposons que  $\sum_{k=0}^n w_k$  converge alors  $\sum u_n$  et  $\sum w_k$  convergent. Or,  $\sum v_n = \sum (u_n - w_n)$  et ne peut converger. D'où :

#### PROPOSITION 2.3

Si  $\sum u_n$  converge et  $\sum v_n$  diverge alors  $\sum u_n + v_n$  diverge.

REMARQUE. Une somme de deux séries divergentes peut converger ou diverger. En effet, considérons  $\sum 1/n = \sum u_n$ , c'est une série divergente. Cependant,  $\sum u_n + \sum u_n$  diverge aussi, mais  $\sum u_n - \sum u_n$  converge.

#### DÉFINITION 2.4

Soient  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  des séries numériques. Considérons la série  $\sum u_n$  de terme général  $u_n = a_n + ib_n \in \mathbf{C}$ . On définit la convergence de  $\sum u_n$  en disant qu'elle converge si, et seulement si,  $(\sum_{k=0}^n u_k)$  converge, i.e. si, et seulement si,  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  convergent.

### 3 CRITÈRES DE CONVERGENCE

#### 3.1 Convergence des séries à terme positif

Soit  $\sum u_n$  telle que  $u_n \in \mathbf{R}_+$  pour tout  $n$ . On se demande à quelle condition la série  $\sum u_n$  converge. Posons

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

La suite  $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$  ainsi définie est croissante. Ainsi,  $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est convergente à l'unique condition qu'elle soit majorée. On a ainsi :

#### PROPOSITION 3.1

Une série de terme général positif converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles est majorée.

#### THÉORÈME 3.2 (De comparaison)

Soient  $\sum u_n, \sum v_n$  des séries telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq u_n \leq v_n.$$

- Si la série  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  aussi.
- Si la série  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  aussi et sa somme est majorée par celle de  $\sum v_n$ .

#### DÉMONSTRATION

Notons

$$U_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

$$V_n = \sum_{k=0}^n v_k.$$

La proposition nous dit que  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est majorée et de même pour  $\sum v_n$ . Ainsi, si  $\sum u_n$  diverge alors  $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est non bornée et donc  $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$  non plus et donc  $\sum v_n$  diverge.

Si  $\sum v_n$  converge alors  $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$  étant majorée par  $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$  qui est majorée par un réel, donc  $\sum u_n$  converge.

D'autre part, dans le second cas, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n. \end{aligned}$$

**COROLLAIRE 3.3**

Soient  $\sum u_n, \sum v_n$  des séries de termes généraux  $u_n$  et  $v_n$  strictement positifs. Alors si la suite  $(u_n/v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  a une limite finie non nulle alors on a  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $\sum v_n$  converge.

**DÉMONSTRATION**

Soit  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n/v_n$  avec  $l \in \mathbf{R}^*$ . Comme pour tout  $n$ ,  $u_n/v_n > 0$ , on sait que  $l > 0$ . Fixons  $a, b$  tels que  $0 < a < l < b$ . Par convergence, il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on ait  $a < u_n/v_n < b$ , c'est-à-dire  $av_n < u_n < bv_n$ . Par le théorème de comparaison des séries,  $u_n$  converge si, et seulement si,  $v_n$  converge.

**EXEMPLE 1.** On considère la série de terme général

$$\forall n > 0, u_n = \frac{1}{n^2}.$$

On a vu que la série de terme général  $v_n = 1/[n(n+1)]$  pour tout  $n > 0$ , converge. En effet  $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  et  $\lim a_n = 0$  donc par le théorème de comparaison,  $\sum v_n$  converge. On sait que

$$\forall n > 1, v_{n-1} > u_n$$

et

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi par le corollaire,  $\sum u_n$  converge.

**EXEMPLE 2.** Considérons la série de terme général

$$u_n = \sin \left( \frac{\pi}{2^n} \right).$$

$$\forall n \geq 1, 0 < \frac{\pi}{2^n} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\forall n \geq 1, u_n \geq 0.$$

De plus

$$\forall x \in \mathbf{R}, |\sin x| \leq |x|$$

et donc

$$u_n = |u_n| \leq \frac{\pi}{2^n}.$$

La série de terme général  $v_n$  est une série géométrique de raison  $1/2$ . Donc elle converge et donc  $\sum u_n$  converge.

**EXEMPLE 3.** Soit  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite d'entiers tels que  $0 \leq x_n \leq 0$  pour tout  $n \geq 0$ . Considérons la série  $\sum_{n \geq 0} x_n 10^{-n}$ . Le terme général est positif et

$$0 \leq \frac{x_n}{10^n} \leq 10^{1-n}$$

et  $10^{1-n}$  est le terme général d'une série géométrique de raison  $1/10$ . Cette série converge donc et donc  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  aussi.

**3.2 Séries de RIEMANN**

Soit  $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ . On considère la série de terme général  $1/n^\alpha$ .

**PROPOSITION 3.4**

La série de terme général  $1/n^\alpha$  avec  $\alpha > 1$  converge. Elle diverge si  $\alpha \leq 1$ .

**DÉMONSTRATION**

Si  $\alpha \leq 1$  alors pour tout  $n \geq 1$ ,  $n^\alpha \leq n$  et donc

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$$

or la série de terme général  $1/n$  diverge.

Si  $\alpha > 1$ , on considère l'application

$$f : x \mapsto -\frac{1}{x^{\alpha-1}}.$$

De plus,  $\alpha - 1 > 0$ . On a :

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

Par le théorème des accroissements finis sur l'intervalle  $[n, n+1]$  :

$$f(n+1) - f(n) = f'(c)$$

avec  $c \in ]n, n+1[$ . Comme

$$f'(x) = \frac{\alpha-1}{x^\alpha}$$

on a

$$f'(c) \geq \frac{\alpha-1}{(n+1)^\alpha}$$

et donc

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \geq \frac{\alpha-1}{(n+1)^\alpha}.$$

On pose

$$v_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

Les sommes partielles de  $\sum v_n$  sont

$$\sum_{n=1}^k v_k = \frac{1}{1^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1.$$

Donc la série  $\sum_{n \geq 1} v_n$  converge, de somme 1.

On applique le théorème de comparaison, la série  $\sum_{n \geq 1} 1/n^\alpha$  converge.

**3.3 Convergence absolue****DÉFINITION 3.5**

Soit  $\sum u_n$  une série de terme général  $u_n$ . Si la série de terme général  $|u_n|$  est convergente, on dit que  $\sum u_n$  est *absolument convergente*.

**REMARQUE.** Dans la définition, on peut prendre  $u_n \in \mathbf{R}$  avec la valeur absolue ou  $u_n \in \mathbf{C}$  avec le module.

**THÉORÈME 3.6**

Toute série absolument convergente est convergente.

## DÉMONSTRATION

Soit  $u_n \in \mathbf{R}$ . On considère  $v_n = |u_n| - u_n$ . Par l'inégalité triangulaire :

$$0 \leq v_n \leq 2|u_n|.$$

Par hypothèse  $\sum 2|u_n| = 2\sum |u_n|$  converge. Donc  $\sum v_n$  converge par le théorème de comparaison. Comme  $u_n = |u_n| - v_n$  on a que  $\sum u_n$  converge.

Si  $u_n \in \mathbf{C}$  alors en posant  $u_n = a_n + ib_n$  avec  $a_n, b_n \in \mathbf{R}$  on a

$$0 \leq |a_n|, |b_n| \leq |u_n|.$$

Comme  $\sum |u_n|$  converge,  $\sum |a_n|$  et  $\sum |b_n|$  aussi. Donc  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  converge et donc  $\sum u_n$  aussi.

## PROPOSITION 3.7

Soit  $\sum u_n$  une série absolument convergente. Alors

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

## DÉMONSTRATION

Pour tout  $k \geq 0$  :

$$\left| \sum_{n=0}^k u_n \right| \leq \sum_{n=0}^k |u_n|$$

or  $\sum |u_n|$  et  $\sum u_n$  convergent et donc l'égalité tient pour  $k = +\infty$ .

REMARQUE. Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont absolument convergentes alors elles sont convergentes et donc leur  $\sum u_n + v_n$  aussi. Mieux,  $\sum u_n + v_n$  est absolument convergente. En effet  $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$  et comme  $\sum |u_n| + |v_n|$  est convergente,  $\sum |u_n + v_n|$  est convergente.

EXEMPLE. Considérons la série de terme général

$$\frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$$

avec  $\alpha \in \mathbf{R}$  et  $x \in \mathbf{R}$ .

$$\forall n \geq 1, \left| \frac{\cos nx}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

- si  $\alpha > 1$  alors le théorème de comparaison conclut ;
- si  $\alpha = 1$  et  $x = 0$  alors le terme général est  $1/n$  et la série diverge ;
- si  $\alpha = 1$  et  $x = \pi$  alors le terme général est  $(-1)^n/n$  et alors la série converge (mais pas en valeur absolue).

EXEMPLE. Soit

$$u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n}, \quad |u_n| = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n} = \frac{2}{n\sqrt{n+2} + n\sqrt{n}}.$$

On a donc

$$|u_n| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

C'est une série de RIEMANN avec  $\alpha = 3/2$  et donc la série  $\sum u_n$  converge absolument.

### 3.4 Comparaison avec des séries géométriques

**THÉORÈME 3.8 (Règle de D'ALEMBERT)**

Soit  $\sum u_n$  une série de terme général  $u_n > 0$ . S'il existe  $K \in \mathbf{R}$  tel que  $K < 1$  et pour tout  $n$ ,  $u_{n+1}/u_n \leq K$  alors  $\sum u_n$  converge.

**DÉMONSTRATION**

On a :

$$u_n \leq K^n u_0$$

et donc comme  $\sum K^n u_0$  converge, par le théorème de comparaison,  $\sum u_n$  converge.

**COROLLAIRE 3.9**

Soit  $\sum u_n$  la série dont le terme général,  $u_n$ , est strictement positif.

Supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}/u_n = l$ .

- Si  $l > 1$  alors  $\sum u_n$  diverge ;
- Si  $l < 1$  alors  $\sum u_n$  converge.

**DÉMONSTRATION**

Supposons  $l < 1$ . Par définition, il existe  $n_0$  et  $K$  entiers tels que  $l < K < 1$  et pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_{n+1}/u_n \leq K$ . Donc  $\sum u_{n+n_0}$  converge et donc  $\sum u_n$  aussi.

Supposons  $l > 1$ . Il existe  $n_0$  et  $K > 1$  tels que pour tout  $n \geq n_0$  on a  $u_{n+1}/u_n \geq K$ . Donc  $u_{n+1} \geq K u_n > u_n$  et donc  $\sum u_n$  est grossièrement divergente.

**EXEMPLE.** Soit  $x \in \mathbf{R}$ . On pose

$$u_n = n^2 x^n.$$

Si  $x = 0$  alors  $\sum u_n$  converge. Pour  $x \neq 0$  on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} x.$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| > 0.$$

- Si  $|x| < 1$  alors  $\sum u_n$  est absolument convergente ;
- si  $|x| > 1$  alors  $\sum u_n$  n'est pas convergente ;
- si  $|x| = 1$  alors la règle de D'ALEMBERT ne permet pas de conclure.

### 3.5 Règle de CAUCHY

**THÉORÈME 3.10 (Règle de CAUCHY)**

Soit  $\sum u_n$  une série numérique à termes positifs. S'il existe  $K < 1$  tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \sqrt[n]{u_n} \leq K$$

alors la série  $\sum u_n$  converge.

**DÉMONSTRATION**

On a que :

$$\forall n \geq 1, u_n \leq K^n.$$

D'autre part,  $0 < K < 1$  donc la série de terme général  $K^n$  converge et donc  $\sum u_n$  converge.

**COROLLAIRE 3.11**

Soit  $\sum u_n$  de terme général positif. Supposons  $\lim \sqrt[n]{u_n} = l$ .

1. Si  $l < 1$  alors  $\sum u_n$  converge.
2. Si  $l > 1$  alors  $\sum u_n$  diverge.

**DÉMONSTRATION**

Dans l'ordre :

1. Supposons  $l < 1$ . Fixons  $0 < l < K < 1$ . Il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\sqrt[n]{u_n} \leq K$ .  
On a alors  $0 \leq u_n \leq K^n$  et donc on conclut.
2. Supposons  $l > 1$ . Fixons  $0 < 1 < K < l$ . Il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\sqrt[n]{u_n} \geq K$ .  
Ainsi,  $u_n \geq K^n$  et donc comme  $\sum K^n$  diverge,  $\sum u_n$  aussi.

EXEMPLE. Si  $u_n = x^n/n^n$  pour tout  $n \geq 1$ . Ainsi,

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi,  $\sum x^n/n^n$  converge.

**Règle de Riemann** On a que  $\sum 1/n^\alpha$  converge pour  $\alpha > 1$ . Ainsi :

**THÉORÈME 3.12 (Règle de RIEMANN)**

Soit  $\sum u_n$  de terme général positif et soit  $\alpha$  un réel strictement positif.

1. Si  $\lim n^\alpha u_n$  existe et est non nulle alors la série de terme général  $u_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 1$ .
2. Si  $\lim n^\alpha u_n = 0$  et si  $\alpha > 1$  alors la série de terme général  $u_n$  converge.
3. Si  $\lim n u_n = +\infty$  alors la série  $\sum u_n$  diverge.

**DÉMONSTRATION**

Posons

$$v_n = \frac{1}{n^\alpha}.$$

On a

$$\frac{u_n}{v_n} = n^\alpha u_n.$$

1. Le théorème de comparaison entraîne que si  $\sum u_n$  et si  $\sum v_n$  sont à termes généraux strictement positifs telles que la suite  $u_n/v_n$  a une limite non nulle, alors  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $\sum v_n$  converge.
2. On a alors pour  $n$  assez grand  $u_n \leq 1/n^\alpha$  et donc  $\sum u_n$  converge si  $\alpha > 1$ .
3. Pour  $n$  assez grand,  $n u_n \geq 1$  et donc  $u_n \geq 1/n$  et donc  $\sum u_n$  diverge puisque  $\sum 1/n$  diverge.

EXEMPLE. Avec

$$u_n = \frac{\log n}{n^2}$$

alors, comme

$$\lim n^{\frac{3}{2}} u_n = 0$$

et comme  $3/2 > 1$ ,  $u_n \geq 0$  on a bien que  $\sum u_n$  converge.



REMARQUE. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\log n + 1}{\log n} \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

et cela tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini. Le critère de D'ALEMBERT ne permettait pas de conclure.

REMARQUE. Les critères de D'ALEMBERT, CAUCHY ou RIEMANN ne sont pas valables pour les séries à termes négatifs. Si  $u_n$  est à valeurs négatives, on peut appliquer ces critères à  $|u_n|$ .

### 3.6 Comparaison avec des intégrales

Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction numérique. Supposons que  $f(x) \geq x$  pour tout  $x$  et supposons que  $f$  est décroissante. Pour tous entiers  $p < q$  supérieurs à  $a$  on a

$$\sum_{n=p}^q f(n) \leq \int_p^q f(t) dt.$$

LEMME 3.13

Pour tous  $a \leq p < q$  entiers. On a

$$f(q) + \int_p^q f(t) dt \leq \sum_{n=p}^q f(n) \leq f(p) + \int_p^q f(t) dt.$$

DÉMONSTRATION

Soit  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $p < n < q$ . Comme  $f$  est décroissante,  $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$  pour tout  $t \in [p, q]$ .

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \int_n^{n+1} f(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \int_n^{n+1} f(n) dt = f(n) \\ f(n+1) &\leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n). \end{aligned}$$

On somme alors sur  $n \in [p, q[$  :

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^{q-1} f(n+1) &\leq \int_p^q f(t) dt \leq \sum_{n=p}^{q-1} f(n) \\ f(q) + \int_p^q f(t) dt &\leq \sum_{n=p}^q f(n) \leq f(p) + \int_p^q f(t) dt. \end{aligned}$$

EXEMPLE. Soit  $\alpha > 0$ . On pose

$$u_n = \frac{1}{n(\log n)^\alpha}.$$

On a  $\lim u_{n+1}/u_n = 1$ .  $n^\beta u_n$  ne converge pas pour  $\beta > 1$ . Si  $\beta \leq 1$  alors  $n^\beta u_n$  converge vers 0. Cependant :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x(\log x)^\alpha}$$

est décroissante sur  $[2, +\infty[$ . De plus,  $f(x) > 0$  pour tout  $x$  dans cet intervalle. Ainsi, considérons l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int f(t) dt &= \int \frac{1}{t(\log t)^\alpha} dt. \\ \int f(t) dt &= \int (\log t)^{-\alpha} \frac{dt}{t} \\ \int f(t) dt &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (\log t)^{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \log(\log t) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \\ \int_2^x f(t) dt &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} ((\log x)^{1-\alpha} - (\log 2)^{1-\alpha}) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \log(\log x) - \log(\log 2) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

— Si  $\alpha = 1$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x f(t) dt = +\infty.$$

Le lemme précédent nous dit que :

$$\sum_{2 \leq n \leq x} f(n) \geq f(x) + \int_2^x f(t) dt$$

et donc  $\sum u_n$  est divergente.

— Si  $\alpha < 1$  alors  $1 - \alpha > 0$  et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x f(t) dt = +\infty.$$

De même, la série  $\sum u_n$  diverge.

— Si  $\alpha > 1$  alors  $1 - \alpha < 0$  et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x f(t) dt = \frac{1}{\alpha - 1} (\log 2)^{1-\alpha}.$$

Le lemme dit que

$$\sum_{n=2}^x u_n \leq f(2) + \int_2^x f(t) dt$$

et donc  $\sum u_n$  converge.

Ainsi,  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 1$ .

### 3.7 Séries alternées

#### DÉFINITION 3.14

Une *série alternée* est une série  $\sum u_n$  telle que  $u_n$  et  $-u_{n+1}$  ont le même signe pour  $n$  assez grand.

#### THÉORÈME 3.15 (Critère des séries alternées)

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de termes réels strictement positifs. Si la suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est décroissante et a pour limite 0 alors la série de terme général  $(-1)^n a_n$  converge.

D'autre part, si  $\sum (-1)^n a_n = S$  alors pour tout  $n$  on a

$$s_n \leq S \leq s_{n+1}$$

et

$$|S - s_n| \leq a_{n+1}.$$

**DÉMONSTRATION**

On considère les sous-suites :

$$\begin{aligned}s_{2p} &= a_0 - a_1 + \dots + a_{2p} \\ s_{2p+1} &= a_0 - a_1 + \dots + a_{2p} - a_{2p+1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_{2p+2} - s_{2p} &= a_{2p+2} - a_{2p+1} \leq 0 \\ s_{2p+3} - s_{2p+1} &= a_{2p+2} - a_{2p+3} \geq 0.\end{aligned}$$

Ainsi, les sous-suites  $(s_{2p})_{p \in \mathbf{N}}$  et  $(s_{2p+1})_{p \in \mathbf{N}}$  sont respectivement décroissante et croissante. D'autre part,

$$\lim s_{2p+1} - s_{2p} = \lim -a_{2p+1} = 0.$$

Ces suites sont adjacentes et leurs différences tendent vers 0. Ainsi,  $(s_p)$  est convergente et donc  $\sum u_n$  converge.

EXEMPLE. Prenons

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

avec  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Elle n'est pas absolument convergente pour tout  $\alpha$ .

- $\alpha = 1$  : on a vu que  $\sum u_n = -\log(2)$  ;
- $\alpha > 1$  :  $\sum u_n$  est absolument convergente ;
- pour  $0 < \alpha < 1$  : on a  $a_n = 1/n^\alpha \geq 0$  est décroissante et de limite nulle, donc  $\sum u_n$  est convergente (mais pas absolument).

### 3.8 Application des développements limités à la convergence

EXEMPLE 1. Soit

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

On considère la fonction

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(x).$$

On a  $u_n = f(1/n)$  et on regarde le développement limité de  $f$  au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \\ f(x) &= \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \left( x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \right) \\ &= \frac{x^{5/2}}{6} + x^{5/2} \varepsilon(x) \\ u_n &= \frac{n^{-5/2}}{6} + n^{-5/2} \varepsilon(1/n),\end{aligned}$$

et donc il existe  $n_0$  tel que  $u_n$  est du signe de  $n^{-5/2}/6$  pour  $n \geq n_0$ . Donc on peut considérer  $u_n$  comme une série de terme général positif telle que  $n^{5/2}u_n$  tend vers  $1/6$ . Par le critère de RIEMANN, cette série converge et donc  $\sum u_n$  aussi.

EXEMPLE 2. Soit  $a \in \mathbf{R}$  et soit

$$u_n = (n^2 + 1)^a - (n^2 - 1)^a.$$

- Si  $a = 0$  alors  $u_n = 0$  et  $\sum u_n$  converge.

— Si  $a \neq 0$ , on calcule :

$$\begin{aligned} u_n &= n^{2a} \left( \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^a - \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)^a \right) \\ u_n &= f(1/n), \\ f(x) &= \frac{1}{x^{2a}} \left( (1+x^2)^a - (1-x^2)^a \right). \end{aligned}$$

On fait un développement limité de  $f$  en 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{-2a} (1 + ax^2 - (1 - ax^2) + x^3 \varepsilon(x)) \\ f(x) &= x^{-2a} (2ax^2 + x^3 \varepsilon(x)) \\ f(x) &= 2ax^{2(1-a)} + x^{3-2a} \varepsilon(x). \end{aligned}$$

Ainsi

$$u_n = \frac{2a}{n^{2(1-a)}} + \frac{\varepsilon(1/n)}{n^{2(1-a)+1}}$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2(1-a)} u_n = 2a$$

et  $u_n$  est une suite de terme général du signe de  $a$  au moins à partir d'un certain rang. Par le critère de RIEMANN :

- Si  $a > 0$ , alors  $u_n$  est à terme général positif ;
- si  $a \geq 1/2$  alors  $2(1-a) \leq 1$  et donc la série  $\sum u_n$  est divergente ;
- si  $a < 1/2$  alors  $2(1-a) > 1$  donc la série  $\sum u_n$  est convergente.
- Si  $a < 0$  alors  $u_n$  est négatif. On applique le critère à  $\sum -u_n$ . On a  $2(1-a) > 2$  et donc  $\sum -u_n$  est convergente et donc  $\sum u_n$  est convergente.

## 4 TRANSFORMATION D'ABEL

Soient  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$  deux suites à valeurs complexes. Soit  $p \in \mathbf{N}$ . On pose

$$\forall n \geq p, B_n = \sum_{k=p}^n b_k.$$

Dans la somme (avec  $q \geq p$ ) :

$$\sum_{n=p}^q a_n b_n$$

on remplace les  $b_n$  par  $B_n - B_{n-1}$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^q a_n b_n &= \sum_{n=p}^q a_n (B_n - B_{n-1}) \\ &= \sum_{n=p}^q [a_n B_n] - \sum_{n=p}^q [a_n B_{n-1}]. \end{aligned}$$

### LEMME 4.1

Supposons que les  $a_n$  sont des réels positifs et que  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est décroissante. Supposons également que les  $B_n$  avec  $n \geq p$  sont majorés en valeur absolue par  $B$ . Alors on a :

$$\forall q > p, \left| \sum_{n=p}^q a_n b_n \right| \leq a_p B.$$

## DÉMONSTRATION

On a  $a_n - a_{n+1} \geq 0$  puisque  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est décroissante. Ainsi  $|(a_n - a_{n+1})B_n| = (a_n - a_{n+1})B_n$ . Ainsi,

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n b_n \right| = \left| \sum_{n=p}^{q-1} [(a_k - a_{k+1})B_k] + a_q B_q \right|$$

et donc

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n b_n \right| \leq \sum_{k=p}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) |B_k| + a_q |B_q|$$

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n b_n \right| \leq \left( \sum_{n=p}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) + a_q \right) B$$

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n b_n \right| \leq a_p B.$$

## COROLLAIRE 4.2

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite à termes réels positifs décroissante. Soit  $x \in ]0, 2\pi[$ , posons  $z = \cos x + i \sin x$ . Pour tous  $p, q \in \mathbf{R}$  tels que  $p < q$  :

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n z^n \right| \leq \frac{a_p}{\sin(x/2)}.$$

## PROPOSITION 4.3

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite décroissante de réels tels que  $\lim a_n = 0$ . Alors la série de terme général  $a_n \cos(nx)$  est convergente pour tout  $x \in \mathbf{R} - 2\pi\mathbf{Z}$ . De plus, la série de terme général  $a_n \sin(nx)$  converge pour tout  $x \in \mathbf{R}$ .

## DÉMONSTRATION (Corollaire)

On considère la somme partielle :

$$\sum_{n=p}^q a_n z^n.$$

On applique le lemme avec  $b_n = z^n$ . Il faut vérifier que pour tout  $n$ ,  $|B_n| \leq B$  avec  $B = 1/\sin(x/2)$  et  $B_n = \sum z^n$  pour  $p \leq n \leq q$ .

$$B_n = z^p \frac{1 - z^{n-p+1}}{1 - z},$$

$$1 - z = 1 - \cos x - i \sin x$$

$$1 - z = 2 \sin^2(x/2) - 2i \sin(x/2) \cos(x/2)$$

$$1 - z = 2 \sin(x/2) (\sin(x/2) - i \cos(x/2))$$

$$|1 - z| = 2 \sin(x/2),$$

$$\left| z^p \frac{1 - z^{n-p+1}}{1 - z} \right| = \frac{1}{2 \sin(x/2)} |z^p| |(1 - z^{n-p+1})|$$

$$\left| z^p \frac{1 - z^{n-p+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{1}{2 \sin(x/2)} |z^p| (1 + |z|^{n-p+1})$$

$$\left| z^p \frac{1 - z^{n-p+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{2}{\sin(x/2)}.$$