

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

1. FONCTIONS NÉGLIGEABLES ET ÉQUIVALENTES

On considère des fonctions f, g de V dans \mathbf{R} où V est un voisinage épointé dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. C'est-à-dire que V est de la forme $U - \{a\}$ où U est un voisinage de a dans $\overline{\mathbf{R}}$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

— si $a = \infty$ alors $V \supset \{k, \infty\}$;

— si $a \in \mathbf{R}$ alors $V \supset]k, a[\cup]a, l[$ avec $k < a < l$ et $k, l \in \mathbf{R}$.

f, g sont définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

1.1. Négligeable

DÉFINITION 1.1.0.1. —

On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a s'il existe un voisinage V tel qu'il existe une fonction $\varepsilon : V \rightarrow \mathbf{R}$ telle que :

— $f = \varepsilon \cdot g$;

— $\lim_a \varepsilon = 0$.

On note $f \underset{(a)}{=} o(g)$.

Remarque. — On note :

$$\varepsilon f : \begin{cases} V \rightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \varepsilon(t)f(t) \end{cases}.$$

Exemples. — Par exemple :

1. Si $g = 1$ alors $f = o(1)$ si, et seulement si, $\lim_a f = 0$.
2. Si $f = 0$ au voisinage de a alors pour toute fonction $g : f = o(g)$.
3. Si f est bornée et $\lim_a(g) = \infty$ alors $f = o(g)$ (on prend alors $\varepsilon = f/g$).
4. On a $x^m \underset{(\infty)}{=} o(x^n)$ si, et seulement si, $m < n$.

5. Pour tous $\alpha, \beta > 0$:

$$\begin{cases} x^\alpha \underset{\infty}{=} o(e^{\beta x}) \\ (\ln x)^\alpha \underset{(\infty)}{=} o(x^\beta) \end{cases},$$

car $\lim_{\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$.

PROPOSITION 1.1.0.1. —

Si f/g est définie dans un voisinage de a , alors :

$$f \underset{(a)}{=} o(g) \iff \lim_a (f/g) = 0.$$

DÉMONSTRATION 1.1.0.1. —

On prend $\varepsilon = f/g$.

Remarque. — Il peut arriver que f/g n'est pas défini dans aucun voisinage de a .

Exemples. — Contre-exemples :

1. Avec $g(t) = \sin(1/[t-a])$, pour tout voisinage de V de a , $g(t)$ s'annule en un point de V .
2. Même si le quotient n'est pas défini : $t \underset{(0)}{=} o(\sin(1/t))$.

PROPOSITION 1.1.0.2. —

On a au voisinage de a :

1. la propriété o est transitive ;
2. la propriété o est compatible avec la multiplication, i.e. : si $f = o(g)$ alors $fh = o(gh)$;
3. si $f = o(g)$ et si $h = o(k)$ alors $fh = o(gk)$.

DÉMONSTRATION 1.1.0.2. —

Dans l'ordre :

1. Pour $f = \varepsilon_1 g$ et $g = \varepsilon_2 h$ avec $\lim_a \varepsilon_i = 0$ alors : $f = \varepsilon_1 \varepsilon_2 h$ et $\lim_a \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0$.
2. Si $f = \varepsilon g$, $\lim_a \varepsilon = 0$, alors $fh = \varepsilon gh$.
3. De même.

Contre-exemple. — o n'est pas compatible avec l'addition. Par exemple : $x \underset{(\infty)}{=} o(x^3)$ et

$x^2 \underset{(\infty)}{=} o(-x^3)$ n'entraîne pas $x + x^2 \underset{(\infty)}{=} o(0)$.

1.2. Équivalence

DÉFINITION 1.2.0.2. —

On dit que f est *équivalence* à g au voisinage de a si : $f - g = o(g)$. On note $f \underset{(a)}{\sim} g$.

PROPOSITION 1.2.0.3. —

Si f/g est définie dans un voisinage de a alors :

$$f \underset{(a)}{\sim} g \iff \lim_a f/g = 1.$$

PROPOSITION 1.2.0.4. —

$\underset{(a)}{\sim}$ est une relation d'équivalence.

DÉMONSTRATION 1.2.0.3. —

Par définition :

1. elle est réflexive : $f \underset{(a)}{\sim} f$ puisque $0 = o(f)$;
2. elle est symétrique si $f \underset{(a)}{\sim} g$ alors il existe ε telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ et $f = (1 + \varepsilon)g$,
or $1/(1 + \varepsilon)$ est aussi définie au voisinage de a et puisque $g = (1/[1 + \varepsilon])f$ on a
$$g = (1 + (1/[1 + \varepsilon] - 1))f$$

or en posant $\varepsilon' = [1 + \varepsilon] - 1$ on a $\lim_a \varepsilon' = 0$;
3. elle est transitive : $f \underset{(a)}{\sim} g$ et $g \underset{(a)}{\sim} h$ implique qu'il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ telles que $f = (1 + \varepsilon_1)g$, $g = (1 + \varepsilon_2)h$ et donc $f = (1 + \varepsilon)h$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$ et $\lim_a \varepsilon = 0$.

PROPOSITION 1.2.0.5. —

Si $f \underset{(a)}{\sim} g$ et si $\lim_a f$ existe alors $\lim_a g$ existe et $\lim_a g = \lim_a f$.

DÉMONSTRATION 1.2.0.4. —

Soit ε telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ alors puisque $f = (1 + \varepsilon)g$ on a

$$\lim_a f = \lim_a (1 + \varepsilon)g = \lim_a g.$$

PROPOSITION 1.2.0.6. —

Le produit et le quotient (quand il est défini) d'équivalences est une équivalence.

Une puissance entière d'équivalences est une équivalence.

DÉMONSTRATION 1.2.0.5. —

Si $f = (1 + \varepsilon_1)g$ et $h = (1 + \varepsilon_2)k$ alors $fh = (1 + \varepsilon)gk$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$.

PROPOSITION 1.2.0.7. —

Si $f \underset{(a)}{\sim} g$ et si $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\lim_b \varphi = a$, $b \in I$. Alors

$$f \circ \varphi \underset{(a)}{\sim} g \circ \varphi.$$

DÉMONSTRATION 1.2.0.6. —

Si $f = (1 + \varepsilon)g$ avec $\lim_a \varepsilon = 0$. Alors

$$f \circ \varphi = (1 + \varepsilon') \cdot g \circ \varphi$$

avec $\varepsilon' = \varepsilon \circ \varphi$ et $\lim_a \varepsilon' = 0$.

PROPOSITION 1.2.0.8. —

On a :

1. Si f est dérivable en a alors si $f'(a) \neq 0$ on a $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a)$.
2. Si g est continue dans un voisinage épointé de a , alors si $f \underset{(a)}{\sim} g > 0$ alors

$$\int_a^x f(t) dt \underset{(a)}{\sim} \int_a^x g(t) dt.$$

DÉMONSTRATION 1.2.0.7. —

Dans l'ordre :

1. Si f est dérivable en a alors :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{(a)}{\sim} f'(a)$$

puisque si $\lim_a g = b \in \mathbf{R}^*$ alors $g \underset{(a)}{\sim} b$.

2. On sait que $f - g \underset{(a)}{=} o(g)$ et on veut :

$$\int_x^a (f - g)(t) dt \underset{(a)}{=} o \left(\int_x^a g(t) dt \right).$$

En posant $h = f - g$ on se ramène au problème :

$$h = o(g) \implies \int_a^x h = o \int_a^x g.$$

Si $h = \varepsilon g$ et $\lim_a \varepsilon = 0$ alors

$$\int_a^x g = \int_a^x \varepsilon g$$

Or

$$\frac{|\int_a^x \varepsilon g|}{\int_a^x g} \leq \max_{[a,x]} |\varepsilon| \frac{\int_a^x g}{\int_a^x g} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

Donc

$$\frac{|\int_a^x \varepsilon g = h|}{|\int_a^x g|} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

2. DÉRIVÉES SUCCESSIVES ET FORMULES DE TAYLOR

Soit $p \geq 0$ un entier.

DÉFINITION 2.0.0.3. —

Soit I un intervalle de \mathbf{R} et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$.

1. $f \in C^0$ si f est continue ;
2. $f \in C^p$ ($p \geq 1$) si f est dérivable et $f' \in C^{p-1}$.

Remarque. — Si $f \in C^p$ alors les p -ièmes dérivées successives et f sont toutes continues sur I . $f \in C^\infty$ si $f^{(p)}$ existe et est continue pour tout $p \geq 1$.

PROPOSITION 2.0.0.9. —

Si $f, g \in C^p$ alors $f + g$, fg , f/g et $f \circ g$ (si définie) sont C^p .

DÉMONSTRATION 2.0.0.8. —

Dans l'ordre :

1. $(f + g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$ par récurrence sur p ;
2. $(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}$;
3. par récurrence sur p pour $(f \circ g)^{(p)}$ en utilisant : $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.