SÉRIES NUMÉRIQUES

Table des matières

1. Définitions 1

1. Définitions

On considère des séries numériques, c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Définition 1.1
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite numérique.
On dit que la série Σu_n de terme général u_n converge si la suite de terme général

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

converge.
Si la suite s_n diverge, alors on dit que la série Σu_n de terme général u_n diverge.
Les s_n s'appellent les *sommes partielles.*

Définition 1.2
On note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

(quand elle est définie).
On l'appelle la *somme* de la série (Σu_n).

Remarque. — La suite de terme général

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

converge si, et seulement si, la suite de terme général (pour n_0 fixé)

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

converge.

> **Proposition 1.1**
> Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

> **Démonstration 1.1**
> Avec
> $$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
> et l la limite de s_n. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de s_n, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n$, $|l - s_n| < \varepsilon$. Et donc
> $$|s_{n+1} - s_n| = |s_n + 1 - l + l - s_n| \leq |s_{n+1} - l| + |s_n - l| < 2\varepsilon.$$
> Or
> $$|s_{n+1} - s_n| = |u_{n+1}| < 2\varepsilon.$$

Exemple – Séries géométriques. — Soit $x \in \mathbf{R}$. On pose

$$u_n = a \cdot x^n.$$

On a

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ s_n &= a \sum_{k=0}^{n} x^n \\ s_n &= a \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{a}{1 - x}(1 - x^{n+1}). \end{aligned}$$

- Si $|x| < 1$ alors $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $a/(1-x)$.
- Si $|x| \geq 1$ alors la série $\sum ax^n$ diverge.

Exemple – Série exponentielle. — Soit $x \in \mathbf{R}$. On regarde la série de terme général $x^n/n!$. Alors cette série a pour somme partielle :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

et la formule de Taylor nous assure que s_n tend vers $\exp(x)$. La série est convergente pour tout x et de somme $\exp(x)$.

Exemple. — Soit $x \in \mathbf{R}$. On considère la série
$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

- Si $|x| > 1$ alors la suite de terme général x^n/n ne converge pas et donc la série ne converge pas.
- Si $x = 1$ alors les sommes partielles sont
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
  Cependant
$$s_{2n} - s_n \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$
  Ainsi, la série $\sum 1/n$ diverge.