

COURS COMPLET DE MM3

Sommaire

I	Algèbre	1
1	Groupes et groupes symétriques	3
1	Introduction	3
2	Sous-groupe	4
3	Morphisme de groupes	5
4	Groupe symétrique	6
2	Déterminants et réduction	11
1	Déterminants	11
2	Déterminant d'un endomorphisme	16
3	Diagonalisation	18
4	Polynômes en un endomorphisme de E	23
5	Applications	28
II	Analyse	31
3	Développements limités	33
1	Fonctions négligeables et équivalentes	33
2	Dérivées successives et formules de TAYLOR	36
3	Développement limité à l'ordre n d'une fonction de classe C^n	39
4	Calculs avec les développements limités	45
5	Applications	50
4	Courbes et surfaces paramétrées	63
1	Définitions	63
2	Tangentes	63
3	Branches infinies	65
4	Étude de courbes paramétrées	66
5	Séries numériques	68
1	Définitions	68
2	Opérations sur les séries	71
3	Critères de convergence	73

Première partie

Algèbre

Table des matières

1	Groupes et groupes symétriques	3
1	Introduction	3
1.1	Groupe abstrait	3
1.2	Groupe commutatif	3
1.3	Exemples	4
2	Sous-groupe	4
2.1	Sous-groupe	4
2.2	Ordre d'un groupe et d'un élément	4
3	Morphisme de groupes	5
3.1	Morphisme de groupes	5
3.2	Image et noyau	5
4	Groupe symétrique	6
4.1	Groupe de permutations	6
4.2	Transpositions et cycles	7
4.3	Décomposition des cycles	7
2	Déterminants et réduction	11
1	Déterminants	11
1.1	Différentes définitions	11
1.2	Formes n -linéaires alternées	13
2	Déterminant d'un endomorphisme	16
2.1	Invariance par changement de base	16
3	Diagonalisation	18
3.1	Valeur propre et vecteur propre	18
3.2	Sous-espaces propres	19
3.3	Conditions de diagonalisabilité	20
4	Polynômes en un endomorphisme de E	23
4.1	Polynômes évalué en un endomorphisme	23
4.2	Lemme des noyaux	25
4.3	Trigonalisation	26
4.4	Comment calculer m_f ? (CAYLEY-HAMILTON)	27
5	Applications	28
5.1	Calculs de puissances	28

5.2	Systèmes différentiels	28
5.3	Application aux suites récurrentes	29

Chapitre 1

Groupes et groupes symétriques

1 INTRODUCTION

1.1 Groupe abstrait

DÉFINITION 1.1

Un groupe est la donnée d'un couple (G, \cdot) où G est un ensemble et $\cdot : G \times G \rightarrow G$ une loi de composition interne, telle que :

1. associativité :

$$\forall a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$

2. existence de l'élément neutre $e \in G$:

$$\forall g \in G, g \cdot e = e \cdot g = g;$$

3. existence de l'inverse :

$$\forall x \in G, \exists y \in G, x \cdot y = y \cdot x = e.$$

NOTATIONS. Pour un groupe multiplicatif on note ab l'élément $a \cdot b$, l'élément neutre est noté 1 et l'inverse de a est noté de a^{-1} .

DÉMONSTRATION (Unicité de l'élément neutre et de l'inverse)

Soient e, e' deux éléments neutres. Alors

$$e' = e \cdot e' = e.$$

Soient b, c inverses de a . Alors :

$$b = b \cdot a \cdot c = c.$$

1.2 Groupe commutatif

DÉFINITION 1.2 (Groupe commutatif (ou Abélien))

Un groupe G est commutatif si la loi de composition l'est :

$$\forall x, y \in G, xy = yx.$$

NOTATIONS. En général la loi de composition d'un tel groupe est notée comme un groupe additif $(G, +)$. Le neutre est alors 0 et l'inverse de x est $-x$.

1.3 Exemples

- Le couple $(\mathbf{Z}, +)$ est un groupe abélien où $+$ est l'addition usuelle des entiers.
- $(\mathbf{R}, +)$ et $(\mathbf{Q}, +)$ sont également des groupes abéliens.
- $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \times)$ et $(\mathbf{Q} \setminus \{0\}, \times)$ sont des groupes abéliens.
- $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ est un groupe pour la composition de matrices en tant que loi de composition. Ce n'est pas un groupe commutatif.

2 SOUS-GROUPE

2.1 Sous-groupe

DÉFINITION 2.1 (Sous-groupe)

Soit G un groupe (multiplicatif) et $H \subset G$ un sous-ensemble de G . H est un sous-groupe de G si c'est un groupe avec la loi de composition et d'inverse astreintes à H ^{1§}.

PROPOSITION 2.2

Soit G un groupe.

Si $(H_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-groupes de G alors $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de G .

DÉFINITION 2.3

Pour tout $i \in I$, H_i vérifie la propriété de sous-groupe et donc l'intersection aussi.

REMARQUE. Généralement la réunion de sous-groupes n'est pas un sous-groupe. En effet si $x \in H_1$ et $y \in H_2$ alors il n'y a aucune raison que $xy \in \bigcup H_i$.

Pour une équivalence il faut rajouter une hypothèse. Si H, K sont deux sous-groupes de G alors $H \cup K$ est un sous-groupe si, et seulement si, $H \subset K$ ou $K \subset H$.

En effet supposons $H \not\subset K$ et que $H \cup K$ est un sous-groupe. Si $K \not\subset H$ alors on peut choisir $x \in K - K \cap H$ et $y \in H - K \cap H$. On a $x, y \in K \cup H$ et donc par hypothèse $xy \in H \cup K$ et donc il existe des inverses respectifs x^{-1}, y^{-1} . Supposons $xy \in H$: $H \ni (xy)y^{-1} = xe = x \in H$ absurde.

DÉFINITION 2.4 (Groupe engendré)

Si G est un groupe et X une partie de G alors on appelle sous-groupe de G engendré par X le plus petit sous-groupe de G contenant X . On le notera ici $\langle X \rangle$.

On a de plus si on note \mathbb{G} l'ensemble des sous-groupes de G :

$$\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathbb{G} \text{ et } H \supset X} H.$$

EXEMPLE. Soit G un groupe et $x \in G$. Alors :

$$\langle x \rangle = \left\{ x^k \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

En effet c'est un sous-groupe de $\langle x \rangle$ et le plus petit.

2.2 Ordre d'un groupe et d'un élément

^{1§}. C'est-à-dire si H est stable par l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$.

DÉFINITION 2.5 (Ordre d'un groupe)

Si G est un groupe fini, on appelle *ordre de G* son cardinal, on le note généralement $|G|$ ou $\sharp G$.

Si G est un groupe et $x \in G$ alors on appelle *ordre de x* le cardinal de son sous-groupe engendré (s'il est fini).

Dans le cas où le groupe en question ne serait pas fini, on dit que l'ordre est infini.

EXEMPLES.

- Dans \mathbf{Z} , tous les éléments non nuls sont d'ordre infini.
- Dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est d'ordre n puisque toute classe admet un représentant dans $\{0, \dots, n-1\}$.
- Ordre des éléments de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$:

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$ x $	1	4	2	4

THÉORÈME 2.6 (Théorème de LAGRANGE)

Pour tout groupe G et tout sous-groupe H de G , l'ordre (i.e. le cardinal) de H divise l'ordre de G :

$$\sharp H \mid \sharp G.$$

DÉMONSTRATION (Théorème de LAGRANGE)

Le cardinal de l'ensemble G/H est appelé *indice* de H dans G et est noté $[G : H]$. De plus, ses classes forment une partition de G et chacune d'entre elles a le même cardinal que H . On a alors :

$$\sharp G = \sharp H \times [G : H].$$

3 MORPHISME DE GROUPE**3.1 Morphisme de groupes****DÉFINITION 3.1**

Soient G, H deux groupes. Une application $f : G \rightarrow H$ est un morphisme de groupes si :

$$\forall x, y \in G, f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

PROPOSITION 3.2

Soient $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes. Alors :

1. $f(e_G) = e_H$;
2. $\forall x \in G, f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

3.2 Image et noyau**DÉFINITION 3.3**

Soit $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes. On définit :

1. $\text{Ker}(f) = \{x \in G \mid f(x) = e\}$;
2. $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in G\}$.

PROPOSITION 3.4

Soit $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes.

1. $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des sous-groupes de G et H respectivement ;
2. f est injective si, et seulement si, $\text{Ker}(f) = \{e\}$;
3. f est surjective si, et seulement si, $\text{Im}(f) = H$.

DÉMONSTRATION

Point par point :

1. On a bien entendu $f(e) = e$ et $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$ pour tout $x \in G$. Ainsi $\text{Im}(f) = f(G)$ est un sous-groupe de H .
Soient $x, y \in G$, alors $f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = ee^{-1} = e$ donc $xy^{-1} \in G$. De plus $f(e) = e$ donc $\text{Ker}(f)$ est un sous-groupe de G .

2. Soient $x, y \in G$:

$$(f(x) = f(y) \iff x = y) \iff (f(xy^{-1}) = e \iff xy^{-1} = e).$$

3. Par définition, si $\text{Im}(f) = H$ alors f est surjective et réciproquement.

4 GROUPE SYMÉTRIQUE

4.1 Groupe de permutations

DÉFINITION 4.1

Soit E un ensemble. On définit :

$$S_E = \{\text{bijections } E \rightarrow E\}.$$

La loi étant la composition des applications. Elle est associative, admet un élément neutre (application identité) et toute application admet une application inverse par définition.

PROPOSITION 4.2

Si $\#E = n$ alors S_E est isomorphe (au sens de groupes) à $S_{\{1,2,\dots,n\}} := S_n$.

DÉMONSTRATION

Puisque $\#E = n$ il existe une bijection $\phi : E \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. On considère alors l'application de $\theta : S_E \rightarrow S_n$ définie par : $\omega \mapsto \phi \circ \omega \circ \phi^{-1}$. Comme ω, ϕ sont des bijections, l'application $\phi \circ \omega \circ \phi^{-1}$ est une bijection. L'application θ est bien définie.

On a :

$$\begin{aligned}\theta(\omega' \circ \omega) &= \phi \circ (\omega' \circ \omega) \circ \phi^{-1} \\ \theta(\omega' \circ \omega) &= \phi \circ \omega' \circ \text{id} \circ \omega \circ \phi^{-1} \\ \theta(\omega' \circ \omega) &= \theta(\omega') \circ \theta(\omega).\end{aligned}$$

θ est bien un morphisme de groupes. On a $\theta^{-1}(\omega) = \phi^{-1} \circ \omega \circ \phi$ qui fait de θ une bijection.

DÉFINITION 4.3 (Groupe symétrique)

On appelle S_n le *groupe symétrique*.

REMARQUE. On omet la notation \circ . Si $\omega \in S_n$ on décrit son action sur $\{1, 2, \dots, n\}$ par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \omega(1) & \omega(2) & \dots & \omega(n) \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE DE COMPOSITION. Dans S_4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.2 Transpositions et cycles

DÉFINITION 4.4 (Transposition)

Une *transposition* de S_n est une permutation qui échange deux éléments et laisse invariants les $n - 2$ autres.

NOTATION. Pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ avec $i \neq j$ on note (ij) la transposition :

$$(ij) : \begin{cases} i \mapsto j \\ j \mapsto i \\ k \mapsto k, \forall k \neq i, j \end{cases}.$$

REMARQUE. Une transposition est une involution. C'est à dire que l'ordre d'une transposition est 2.

PROPOSITION 4.5

$\#S_n = n!$.

DÉFINITION 4.6 (Cycle)

On appelle *cycle* de longueur $r > 1$ (noté r -cycle) (dans S_n) une permutation ω telle qu'il existe $x_1, x_2, \dots, x_r \in \{1, 2, \dots, n\}$ vérifiant :

1. $\omega(x_1) = x_2, \omega^n(x_1) = x_{1+n}$ avec $n < r$;
2. $\omega(x_r) = x_1$;
3. $\omega(x) = x$ si $x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$.

NOTATION. On note un tel cycle : $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r)$.

REMARQUE. Les 2-cycles sont exactement les transpositions.

EXEMPLE. Dans S_3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3) = \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases}.$$

4.3 Décomposition des cycles

DÉFINITION 4.7 (Support)

On appelle *support* du cycle ω le sous-ensemble :

$$\{x_1, x_2, \dots, x_r\} \subset \{1, 2, \dots, n\}.$$

LEMME 4.8

Deux cycles de supports disjoints commutent.

DÉMONSTRATION

Soient :

$$\begin{cases} v = (x_1, x_2, \dots, x_r) \\ w = (y_1, y_2, \dots, y_s) \end{cases}$$

avec $\{x_1, x_2, \dots, x_r\} \cap \{y_1, y_2, \dots, y_s\} = \emptyset$.

Sur un élément extérieur du support la permutation agit comme l'identité donc deux supports disjoints impliquent que les permutations associées permutent (puisque que l'identité permute).

LEMME 4.9

Un r -cycle est d'ordre r .

DÉMONSTRATION

Soit $w = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r)$ un r -cycle. Il est clair qu'un élément du support est d'ordre r . Les autres restent fixés par w et donc w est d'ordre r .

PROPOSITION 4.10

Toute permutation de S_n est décomposable en produit de cycles de supports disjoints. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

EXEMPLES. Soit :

$$S_5 \ni \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = w.$$

On peut décomposer w :

$$(1 \ 3 \ 5)(2)(4) = (1 \ 3 \ 5).$$

$$S_8 \ni w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 7 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 5 \ 3)(2 \ 6 \ 8)(4 \ 7).$$

THÉORÈME 4.11

Le groupe symétrique est engendré par les transpositions.

DÉMONSTRATION

On procède par récurrence sur n .

1. $S_2 = \{1, (1 \ 2)\}$ est engendré par $(1 \ 2)$.
2. Soit $n > 2$, supposons que S_{n-1} est engendré par les transpositions de S_{n-1} . Soit $w \in S_n$:
 - (a) Soit $w(n) = n$ et alors on décompose w en cycles de tailles inférieures ou égales à S_{n-1} et c'est démontré.
 - (b) Soit $w(n) \neq n$. On pose $m = w(n)$ et soit $t = (n \ m)$. On pose $v = tw$ et alors $v(n) = n$ et on lui applique le cas précédent. On a alors par unicité de la décomposition que w est elle-même engendrée par des transpositions et c'est démontré.

THÉORÈME 4.12

On a les propositions suivantes :

1. Si $w \in S_n$ est une permutation qui s'écrit de deux façons différentes comme produit de transpositions :

$$w = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_{r'},$$

alors $(-1)^r = (-1)^{r'}$.

On appelle $(-1)^r$ la *signature* de w .

2. La signature est un morphisme de groupes de $S_n \rightarrow \{1, -1\} \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

DÉMONSTRATION

Soit $w \in S_n$. On pose :

$$\begin{aligned}\varepsilon(w) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{w(i) - w(j)}{i - j} \\ \varepsilon(w) &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (w(i) - w(j))}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (i - j)} \\ \varepsilon(w) &= \frac{N}{D}.\end{aligned}$$

Avec

$$N = \prod_{1 \leq i, j \leq n ; w^{-1}(i) < w^{-1}(j)} (i - j) = \pm D.$$

D'où :

$$\varepsilon(w) = \pm 1.$$

EXEMPLE. $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. On a :

$$\varepsilon(w) = \frac{(w(1) - w(2))(w(1) - w(3))(w(2) - w(3))}{(1 - 2)(1 - 3)(2 - 3)} = \frac{(2 - 3)(2 - 1)(3 - 1)}{(1 - 2)(1 - 3)(2 - 3)} = 1.$$

LEMME 4.13

On a :

1. $\varepsilon : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ est un morphisme de groupes ;
2. $\varepsilon(ij) = -1$ pour tout $i \neq j$.

DÉMONSTRATION (Théorème)

Si

$$w = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_{r'}$$

alors par le lemme :

$$\varepsilon(w) = (-1)^r = (-1)^{r'}.$$

DÉMONSTRATION (Lemme)

Soit $E = \{(ij) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. On pose :

$$f_w : \begin{cases} E \rightarrow E \\ (i \ j) \mapsto (w(i) \ w(j)) \text{ si } w(i) < w(j) . \\ (i \ j) \mapsto (w(j) \ w(i)) \text{ si } w(i) > w(j) \end{cases}$$

f est une bijection car elle est injective et l'ensemble de départ et d'arrivée ont le même cardinal qui est fini.

Donc on a :

$$\begin{aligned}\varepsilon(w) &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (w(i) - w(j))}{\prod_{(i,j) \in E} (w(i) - w(j))} \\ \varepsilon(w) &= \pm 1.\end{aligned}$$

Pour vérifier que ε est un morphisme, on calcul $\varepsilon(wv)$:

$$\begin{aligned}\varepsilon(wv) &= \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{i - j} \\ \varepsilon(wv) &= \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \prod_{(i,j) \in E} \frac{v(i) - v(j)}{i - j} \\ \varepsilon(wv) &= \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \varepsilon(v).\end{aligned}$$

On calcule :

$$\begin{aligned}\varepsilon(w) &\stackrel{?}{=} \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \\ \varepsilon(w) &= \prod_{(i,j) \in E_1} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \prod_{(i,j) \in E_2} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)}\end{aligned}$$

Où $E_1 = \{(i,j) \in E \mid v(i) < v(j)\}$ et $E_2 = \{(i,j) \in E \mid v(j) < v(i)\}$; $E = E_1 \amalg E_2$.

$$\begin{aligned}\varepsilon(w) &= \prod_{(i,j) \in E_2} \frac{wv(j) - wv(i)}{v(j) - v(i)} \prod_{(i,j) \in E_1} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \\ \varepsilon(w) &= \prod_{i < j ; v^{-1}(j) < v^{-1}(i)} \frac{w(i) - w(j)}{i - j} \prod_{i < j ; v^{-1}(i) < v^{-1}(j)} \frac{w(i) - w(j)}{i - j} \\ \varepsilon(w) &= \prod_{i < j} \frac{w(i) - w(j)}{i - j}\end{aligned}$$

Chapitre 2

Déterminants et réduction

1 DÉTERMINANTS

1.1 Différentes définitions

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ avec $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

DÉFINITION 1.1 (Déterminant)

On définit en premier lieu :

$$\det A = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) a_{w(1),1} \cdot a_{w(2),2} \cdot \dots \cdot a_{w(n),n}.$$

C'est la formule de CRAMER.

DÉFINITION 1.2

Une seconde définition possible :

Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, soit $A_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ la matrice (extraite) obtenue en enlevant la i -ième ligne et la j -ième colonne de A .

On a alors :

$$\det' A = a_{1,1} \cdot \det'(A_{1,1}) - a_{1,2} \cdot \det'(A_{1,2}) + \dots + (-1)^{n-1} a_{1,n} \cdot \det'(A_{1,n}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{1,i} \cdot \det'(A_{1,i})$$

EXEMPLE. Prenons :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; A_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne avec la seconde définition :

$$\det A = 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 2. On vérifie que les deux définitions coïncident :

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} - a_{2,1} a_{1,2}.$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}\det(a_{2,2}) - a_{1,2}\det(a_{2,1}) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.$$

REMARQUE. Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$ un n -uplet de vecteurs de E . Pour tout j , on pose :

$$u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \cdot e_i \quad a_{i,j} \in \mathbf{R}.$$

On appelle *déterminant* dans la base B de (u_1, \dots, u_n) le réel :

$$\det_B(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det(a_{i,j}).$$

EXEMPLE. Pour $n = 2$. On prend :

$$\begin{aligned} u_1 &= 2e_1 + 3e_2, \\ u_2 &= -e_1 + 6e_2. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\det_B(u_1, u_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 15.$$

REMARQUE. Si $u_j = e_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ alors $\det_B(e_1, \dots, e_n) = \det(I_d) = 1$.

PROPOSITION 1.3

On a les énoncés :

1. pour tout $w \in S_n$:

$$\det_B(u_{w(1)}, u_{w(2)}, \dots, u_{w(n)}) = \varepsilon(w) \det_B(u_1, u_2, \dots, u_n);$$

2. on en déduit que le déterminant change de signe si on échange deux colonnes ;
3. si pour $i \neq j$ on a $u_i = u_j$ alors le déterminant est nul (puisque négatif et positif simultanément).

DÉMONSTRATION

Il suffit de montrer le premier point.

On sait que S_n est engendré par les transpositions. On suppose donc que $w \in S_n$ est une transposition.

En fait, S_n est engendré par les transpositions simples, i.e. les transpositions de la forme $(k, k+1)$ avec $1 \leq k < n$. ^{1§}

On suppose donc que w est de la forme $(k, k+1)$. Soit A la matrice (u_1, u_2, \dots, u_n) de ces n vecteurs dans les coordonnées de la base B . Soit A' la matrice obtenue en permutant les colonnes k et $k+1$ de A . Il faut donc vérifier que :

$$\det A' = \varepsilon(w) \det A = -\det A.$$

On calcule à gauche et à droite :

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{1,j}), \\ \det A' &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a'_{1,j} \det(A'_{1,j}). \end{aligned}$$

- Pour $j \neq k, k+1$ on a $a'_{1,j} = a_{1,j}$ et $A'_{1,j}$ est obtenue en échangeant les colonnes k et $k+1$ de $A_{1,j}$
- Pour $j = k$ on a $a'_{1,k} = a_{1,k+1}$ et donc $A'_{1,k} = A_{1,k+1}$.
- Pour $j = k+1$ on a $a'_{1,k+1} = a_{1,k}$ et donc $A'_{1,k+1} = A_{1,k}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}\det A' &= \sum_{j \neq k, k+1} (-1)^{j+1} \det(A'_{i,j}) \textcolor{red}{2}\S + (-1)^{k+1} a'_{1,k} \det(A'_{1,k}) + (-1)^k a'_{1,k+1} \det(A'_{1,k+1}), \\ \det A' &= \sum_{j \neq k, k+1} (-1)^{j+1} (-\det(A_{i,j})) + (-1)^{k+1} a_{1,k+1} (-\det(A_{1,k+1})) + (-1)^k a_{1,k} (-\det(A_{1,k})), \\ \det A' &= -\det A.\end{aligned}$$

1.2 Formes n -linéaires alternées

DÉFINITION 1.4 (Forme n -linéaire)

Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Une forme n -linéaire sur E est une application $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{R}$ qui est linéaire sur chaque composante.

PROPOSITION 1.5

Soit B une base de E avec $\dim E = n$.

$$\det_B : \begin{cases} E^n \rightarrow \mathbf{R} \\ (u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_B(u_1, \dots, u_n) \end{cases}$$

est une forme n -linéaire.

DÉMONSTRATION

On pose :

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & aa'_{1,k} + ba''_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & aa'_{2,k} + ba''_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \\ A' &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a'_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a'_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \\ A'' &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a''_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a''_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On veut montrer :

$$\det A = a \det A' + b \det A''.$$

On calcule :

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{i,j}) + (-1)^{k+1} (aa'_{1,k} + ba''_{1,k}) \det(A_{1,k}), \\ \det A' &= \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A'_{i,j}) + (-1)^{k+1} a'_{1,k} \det(A_{1,k}), \\ \det A'' &= \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A''_{i,j}) + (-1)^{k+1} a''_{1,k} \det(A_{1,k})\end{aligned}$$

1§. En effet, toute transposition est un produit de transpositions simples par une conjugaison adaptée : on « renomme » les éléments.

2§. Par récurrence sur n on a $\det(A'_{i,j}) = -\det(A_{i,j})$.

On doit alors montrer :

$$\forall j \neq k, \det A_{i,j} = \text{adet}(A'_{i,j}) + \text{bdet}(A''_{i,j})$$

ce qui est démontré par hypothèse de récurrence.

DÉFINITION 1.6 (Forme n -linéaire alternée)

Soit $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{R}$ une forme n -linéaire alternée avec E un \mathbf{R} -espace vectoriel.

φ est une forme n -linéaire alternée si on a :

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$$

dès que deux composantes u_i, u_j avec $i \neq j$ coïncident.

REMARQUE. On en déduit que le déterminant dans une base donnée est une forme n -linéaire alternée.

PROPOSITION 1.7

Soit φ une forme n -linéaire alternée. Alors pour tout $w \in S_n$, $\varphi(u_{w(1)}, \dots, u_{w(n)}) = \varepsilon(w)\varphi(u_1, \dots, u_n)$.

DÉMONSTRATION

On peut supposer que w est une transposition simple : $w = (k, k+1)$ avec $1 \leq k < n$.

On veut montrer :

$$\varphi(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, u_k, u_{k+2}, \dots, u_n) = -\varphi(u_1, \dots, u_n).$$

Pour simplifier les notations, on oublie les indices u_i avec $i \neq k, k+1$. On a :

$$\varphi(u_k + u_{k+1}, u_k + u_{k+1}) = 0$$

et donc par linéarité :

$$\varphi(u_k, u_k) + \varphi(u_k, u_{k+1}) + \varphi(u_{k+1}, u_k) + \varphi(u_{k+1}, u_{k+1}) = 0 \iff \varphi(u_k, u_{k+1}) = -\varphi(u_{k+1}, u_k).$$

PROPOSITION 1.8

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{R}$ une forme n -linéaire alternée. Alors :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(u_1, \dots, u_n)\varphi(e_1, \dots, e_n)$$

où les u_i sont exprimés dans la base B .

REMARQUE. Toutes les formes n -linéaires alternées sont proportionnelles au déterminant.

DÉMONSTRATION

Soit $u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i$, les $a_{i,j}$ sont les coordonnées des u_j dans la base B .

On a :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n a_{i,1}e_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,n}e_i\right).$$

Comme φ est n -linéaire alternée :

$$\begin{aligned}\varphi(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{w \in S_n} a_{w(1),1} a_{w(2),2} \dots a_{w(n),n} \varphi(e_{w(1)}, \dots, e_{w(n)}) \\ \varphi(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{w \in S_n} a_{w(1),1} a_{w(2),2} \dots a_{w(n),n} \varepsilon(w) \varphi(e_1, \dots, e_n) \\ \varphi(u_1, \dots, u_n) &= \det_B(u_1, \dots, u_n) \varphi(e_1, \dots, e_n)\end{aligned}$$

REMARQUES. On a démontré :

1. Pour une base B choisie, le déterminant \det_B est une forme n -linéaire alternée ;
2. pour toute forme n -linéaire alternée, φ , on a : $\varphi(\cdot) = \det_B(\cdot) \varphi(B)$;
3. en particulier, les deux déterminants coïncident.

PROPOSITION 1.9

Pour tout $A \in M_n(\mathbf{R})$ on a :

$$\det(A) = \det(A^t).$$

DÉMONSTRATION

On a :

$$\begin{aligned}A &= (a_{i,j}) \\ A^t &= (b_{i,j}), \quad b_{i,j} = a_{j,i}\end{aligned}$$

On calcule par la formule de CRAMER :

$$\begin{aligned}\det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^n b_{w(i),i}, \\ \det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^n a_{i,w(i)}.\end{aligned}$$

Pour w fixé, dans i décrit 1 à n alors $w(i)$ décrit également 1 à n . On effectue un changement de variable $j = w(i)$ et alors $i = w^{-1}(j)$ et on a :

$$\begin{aligned}\det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{j=1}^n a_{w^{-1}(j),j}, \\ \det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w^{-1}) \prod_{j=1}^n a_{w(j),j}, \\ \det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{j=1}^n a_{w(j),j}, \\ \det(A^t) &= \det(A).\end{aligned}$$

REMARQUE. On peut calculer $\det(A)$ en développant par rapport à la première ligne ou la première colonne (au choix). On a alors :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^n a_{i,1} \det(A_{i,1}).$$

PROPOSITION 1.10

Si $A \in M_n(\mathbf{R})$ est triangulaire alors :

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

DÉMONSTRATION

Supposons A triangulaire supérieure, c'est-à-dire $a_{i,j} = 0$ si $i > j$.

Par la formule de CRAMER :

$$\det(A) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^n a_{i,w(i)}.$$

Or les seuls w qui contribuent à cette somme sont ceux tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, i \leq w(i),$$

c'est-à-dire : $w = \text{id}$ ^{3§}.

En développant par rapport à une ligne (ou une colonne quelconque) :

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{j,i} \det(A_{j,i}).$$

Si A' désigne la matrice obtenue en permutant les lignes de A par $w = (1 \ 2 \ \dots \ j)$:

$$\det(A') = \varepsilon(w) \det(A) = (-1)^{j+1} \det(A).$$

On note $A' = (a'_{k,l})_{k,l \in \{1, \dots, n\}}$.

En choisissant $j > 1$:

$$\begin{aligned} \det(A') & \stackrel{4§}{=} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a'_{1,i} \det(A'_{1,i}), \\ \det(A') &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{j,i} \det(A_{j,i}); \\ \det(A) &= (-1)^{j+1} \det(A'), \\ \det(A) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{j+i} a_{j,i} \det(A_{j,i}). \end{aligned}$$

2 DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

2.1 Invariance par changement de base

PROPOSITION 2.1

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et

^{3§}. Soit $w \in S_n$, $w : \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \dots, n\}$.

Si $i \leq w(i)$ pour tout i alors $w(k) = k$ pour tout k par récurrence descendante sur k :

- $n \leq w(n)$ et donc $w(n) = n$;
- $k-1 \leq w(k-1)$ et donc $w(k-1) = w(k)$.

^{4§}. En développant par rapport à la première ligne.

$C = (u_1, \dots, u_n)$ un système de n vecteurs de E . Alors C est une base de E si, et seulement si :

$$\det_B(C) \neq 0.$$

DÉMONSTRATION

Supposons que C est une base de E .

On a vu que si $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{K}$ est une forme n -linéaire alternée alors :

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n, \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det_B(u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \varphi(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

On applique cette formule avec $\varphi = \det_C$ et on a :

$$\begin{aligned} \det_C(u_1, u_2, \dots, u_n) &= \det_B(C) \det_C(B), \\ 1 &= \det_C(C) = \det_B(C) \det_C(B), \end{aligned}$$

et donc $\det_B(C) \neq 0$.

Supposons maintenant que C est liée. Il existe alors i tel que u_i est combinaison linéaire des u_j avec $j \neq i$. Par exemple :

$$u_i = \sum_{j \neq i} a_j \cdot u_j, \quad (a_j \in \mathbf{R})$$

$$\det_B(C) = \det_B(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, \sum_{j \neq i} a_j \cdot u_j, u_{i+1}, \dots, u_n),$$

$$\det_B(C) = \sum_{j \neq i} a_j \det_B(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_n),$$

or \det_B est alternée et comme u_j apparaît deux fois dans la dernière expression, on a

$$\det_B(C) = 0.$$

PROPOSITION 2.2

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , $B = (e_1, \dots, e_n)$, $C = (u_1, \dots, u_n)$ deux bases de E et f un endomorphisme de E . Alors :

$$\det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_C(f(u_1), \dots, f(u_n)).$$

REMARQUE. En d'autres termes, $\det_B(f(B))$ ne dépend pas du choix de la base B . On l'appelle $\det(f)$.

DÉMONSTRATION

On utilise la formule :

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n, \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det_B(u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \varphi(e_1, e_2, \dots, e_n),$$

où φ est une forme n -linéaire alternée.

On pose :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$$

et on a alors :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det_C(f(u_1), \dots, f(u_n)) \det_B(C).$$

De même :

$$\det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det_B(C) \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Et donc :

$$\det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) \det_B(C) = \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)) \det_B(C)$$

et $\det_B(C) \neq 0$. Donc l'égalité voulue est obtenue.

PROPOSITION 2.3

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , f et g deux endomorphismes de E .

Alors :

$$\det(fg) = \det(f)\det(g).$$

DÉMONSTRATION

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ,

$$\det(fg) = \det_B(fg(e_1), \dots, fg(e_n)).$$

Considérons la forme n -linéaire alternée φ telle que :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(g(u_1), \dots, g(u_n)),$$

alors on a :

$$\begin{aligned} \varphi(f(u_1), \dots, f(u_n)) &= \det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) \varphi(e_1, \dots, e_n), \\ \det_B(gf(e_1), \dots, gf(e_n)) &= \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)) \det_B(g(e_1), \dots, g(e_n)), \\ \det(gf) &= \det(g) \det(f). \end{aligned}$$

REMARQUE. Si $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ alors

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

3 DIAGONALISATION

DÉFINITION 3.1

Une matrice A est *diagonalisable* si elle est conjugué par un isomorphisme à une matrice diagonale.

3.1 Valeur propre et vecteur propre

Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n . Soit f un endomorphisme de E .

DÉFINITION 3.2

On appelle *valeur propre* de f un réel λ tel qu'il existe un $v \in E - \{0\}$ tel que $f(v) = \lambda \cdot v$.

On dit que v est un *vecteur propre* de valeur propre λ .

Quitte à prendre la matrice A de f dans une base (e_1, \dots, e_n) fixée de E , λ est une valeur de f (ou de A) si, et seulement si

$$\det(A - \lambda I_d) = 0.$$

REMARQUE. Soient $A \in M_n(\mathbf{R})$, B la base canonique et $C = AB$. $\det(A)$ est non nul si, et seulement si, A est inversible. D'autre part s'il existe un vecteur propre v de valeur propre λ alors

$$\ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\}.$$

Or $f - \lambda I_d$ est un endomorphisme de E et E est de dimension finie. Donc il y a équivalence :

$$\ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I_d) = 0.$$

DÉFINITION 3.3

On appelle polynôme caractéristique de f (ou de A) le polynôme :

$$\chi_f(t) = \chi_A(t) = \det(A - tI_d).$$

EXEMPLE. En dimension 2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a

$$\chi_A(t) = t^2 - (a + d)t + ad - bc = t^2 - \operatorname{tr}(A)t + \det(A).$$

REMARQUE. $\chi_A(t)$ est un polynôme de degré n de coefficient dominant $(-1)^n$ et de terme constant $\chi_A(0) = \det(A)$.

3.2 Sous-espaces propres

DÉFINITION 3.4

Soit f un endomorphisme de E et de matrice A . Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On appelle *sous-espace propre* de f (ou de A) de valeur propre λ le sous-espace vectoriel $\ker(f - \lambda I_d)$.

PROPOSITION 3.5

Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors si $\lambda \neq \mu$ on a

$$\ker(f - \lambda I_d) \cap \ker(f - \mu I_d) = \{0\}.$$

Plus généralement si, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$ distincts alors on a :

$$\sum_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i I_d) = \bigoplus_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i I_d)$$

DÉMONSTRATION

Il s'agit de vérifier que pour tout $i \neq j$ on a :

$$\ker(f - \lambda_i I_d) \cap \ker(f - \lambda_j I_d) = \{0\}.$$

Si $v \in \ker(f - \lambda_i I_d) \cap \ker(f - \lambda_j I_d)$ alors :

$$f(v) = \lambda_i v = \lambda_j v \implies v = 0.$$

COROLLAIRE 3.6

Soient $\dim E = n$, f est un endomorphisme de E , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ valeurs propres de f et E_i le sous-espace associé à la valeur propre λ_i . Alors si

$$E = \bigoplus_{i=1}^k E_i,$$

l'endomorphisme f est diagonalisable.

DÉMONSTRATION

Si on fait la réunion :

$$B = \bigcup_{i=1}^k B_i,$$

où B_i est une base de E_i on obtient une base de E . Dans cette base la matrice de f est diagonale où l'élément diagonal λ_i est la valeur propre correspondante. La matrice de passage de la base canonique à la base B donne la diagonalisabilité.

Donc pour diagonaliser A il faut vérifier si $E = \bigoplus_{i=1}^k E_i$ où les E_i sont les sous-espaces propres.

EXEMPLE. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 1 & 4-\lambda & -5 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)((4-\lambda)(-2-\lambda) + 10) - (2(-2-\lambda) + 6),$$

$$\chi_A(t) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2).$$

Les trois valeurs propres sont 0, 1, 2 et sont de multiplicité 1.

$$E_0 = \ker(A) = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \mid Ax = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_1 = \ker(A - I_d) = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_2 = \ker(A - 2I_d) = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

On a l'égalité :

$$E_0 \oplus E_1 \oplus E_2 = \mathbf{R}^3.$$

On en déduit les matrices de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.3 Conditions de diagonalisabilité

PROPOSITION 3.7

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E , $\chi_f(t) \in \mathbf{R}[t]$, $\deg \chi_f = n$.

Si χ_f admet n racines distinctes alors f est diagonalisable.

DÉMONSTRATION

Si :

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - t)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ racines distinctes. On a alors que pour tout i :

$$E_i = \ker(f - \lambda_i \text{id}) \neq \{0\}$$

et donc $\dim E_i \geq 1$. On a alors que

$$\sum_{i=1}^n \dim E_i = \dim \bigoplus_{i=1}^n E_i$$

est de dimension supérieure à n ce qui implique $\bigoplus E_i = \mathbf{R}^n$.

REMARQUE. La condition donnée est nécessaire mais non suffisante. On cherche donc une condition nécessaire et suffisante.

PROPOSITION 3.8

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E , λ une valeur propre de f , m_λ la multiplicité de λ en tant que racine de $\chi_f(t)$ et E_λ le sous-espace propre associé à λ .

Alors $\dim E_\lambda \leq m_\lambda$.

DÉMONSTRATION

Soit $k = \dim E_\lambda$ et (e_1, e_2, \dots, e_k) une base de E_λ . On peut compléter (e_1, \dots, e_k) en une base $(e_1, \dots, e_n) = B$ de E .

$$\text{Mat}_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_d & X \\ \hline 0 & A \end{array} \right).$$

Or le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des matrices diagonales. ^{5§}

Ainsi :

$$\chi_f(t) = \det \left(\begin{array}{c|c} (\lambda - t)I_d & X \\ \hline 0 & A - tI_d \end{array} \right) = (\lambda - t)^k \chi_A(t)$$

et donc $m_\lambda \geq k$.

COROLLAIRE 3.9

On a les propositions suivantes :

1. Si $\chi_f(t)$ n'est pas scindé sur \mathbf{R} alors f n'est pas diagonalisable.
2. S'il existe une valeur propre λ de f telle que $\dim E_\lambda < m_\lambda$ alors f n'est pas diagonalisable.

DÉMONSTRATION

On démontre :

^{5§}. En effet, en utilisant la règle de CRAMER la preuve est assez aisée.

2. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de $\chi_f(t)$, m_i la multiplicité de λ_i et E_i l'espace propre associé à λ_i . Alors la proposition nous dit que $\dim E_i \leq m_i$.

Or $\deg \chi_f(t) = n$ et donc

$$\sum_{i=1}^k m_i \leq n$$

$$\sum_{i=1}^k \dim E_i \leq \sum_{i=1}^k m_i \leq n$$

S'il existe i_0 tel que $\dim E_{i_0} < m_{i_0}$ alors cela implique

$$\sum_{i=1}^k \dim E_i < \sum_{i=1}^k m_i \leq n.$$

Et donc

$$\bigoplus_{i=1}^n E_i < n.$$

1. Idem.

THÉORÈME 3.10

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E .

f est diagonalisable si, et seulement si, on a les conditions suivantes :

1. $\chi_f(t)$ est scindé sur \mathbf{R} ;
2. pour tout $\lambda \in \chi_f^{-1}(0)$, la dimension du $\ker(f - \lambda \text{id})$ est égal à la multiplicité de λ dans $\chi_f(t)$.

DÉMONSTRATION

Le corollaire nous dit que ces conditions sont nécessaires.

Remarquons que :

$$\sum_{i=1}^r E_i = \bigoplus_{i=1}^r E_i$$

où E_i est le sous-espace propre de λ_i et r le nombre de racines deux à deux distinctes. Or la dimension de la somme est la somme des dimensions, c'est-à-dire la somme des multiplicité qui est égale à n . Donc f est diagonalisable.

EXEMPLE. On prend

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & -1 \\ -1 & 2-t & -1 \\ -1 & 1 & -t \end{pmatrix},$$

$$\chi_A(t) = -t(t-1)^2.$$

Les racines sont 0, 1 de multiplicités respectives 1 et 2. On a :

$$E_0 = \ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_1 = \ker A - \text{id} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

On a

$$\dim E_0 = 1 \text{ et } \dim E_1 = 2$$

et donc f est diagonalisable.

CONTRE-EXEMPLE DE MINIMALITÉ. On a que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'a comme valeurs propres que 0, elle n'est pas diagonalisable parce que si elle est nulle dans une base elle l'est dans toutes.

4 POLYNÔMES EN UN ENDOMORPHISME DE E

4.1 Polynômes évalué en un endomorphisme

DÉFINITION 4.1

Soit $P \in \mathbf{R}[t]$ un polynôme :

$$P(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^k.$$

On note pour f un endomorphisme de E :

$$P(f) = \sum_{k=0}^d a_k f^k \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E).$$

Avec la convention $f^0 = \text{id}$ et la notation $f^{k+1} = f \circ f^k$.

DÉFINITION 4.2

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbf{R}[t]$ annule f si $P(f) = 0_{\text{End}_{\mathbf{R}}}$.

PROPOSITION 4.3

On a que :

$$\phi: \begin{cases} \mathbf{R}[t] \rightarrow \text{End}_{\mathbf{R}}(E) \\ P(t) \mapsto P(f) \end{cases}$$

est un morphisme d'anneaux.

C'est-à-dire :

$$\forall P, Q \in \mathbf{R}[t], \phi(P + Q) = \phi(P) + \phi(Q) ; \phi(PQ) = \phi(P)\phi(Q).$$

REMARQUE. Ainsi l'ensemble des polynômes annulateurs de f est un idéal de $\mathbf{R}[t]$. Or $\mathbf{R}[t]$ est un anneau principal donc l'ensemble des polynômes annulateurs de f est principal. Il existe donc un polynôme $Q \in \mathbf{R}[t]$ tel que tout polynôme annulateur de f s'écrit RQ avec $R \in \mathbf{R}[t]$.

DÉFINITION 4.4

On appelle polynôme minimal de f le polynôme unitaire de plus petit degré, m_f annulant f .

On a évidemment que tout polynôme annulateur de f est de la forme $P \cdot m_f$, $P \in \mathbf{R}[t]$.

EXEMPLE. Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice nilpotente, c'est-à-dire $A^3 = 0$. On a

$$m_A(t) \mid t^3 \implies m_A = 1, t, t^2 \text{ ou } t^3.$$

Or $(t \mapsto 1)(A) = \text{id} \neq 0$, $(t \mapsto t)(A) = A \neq 0$ et $(t \mapsto t^2)(A) = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et donc $m_A(t) = t^3$.

PROPOSITION 4.5

Soit $f \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E)$. Alors :

1. si f est diagonalisable, alors il existe un polynôme scindé $P \in \mathbf{R}[t]$ annulant f ayant que des racines simples ;
2. si $P \in \mathbf{R}[t]$ annule f alors toute valeur propre de f est racine de P .

DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres. Soient μ_1, \dots, μ_r des scalaires deux à deux distinctes tels que

$$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

avec $r \leq n$.

On pose :

$$P(t) = \prod_{i=1}^r (t - \mu_i).$$

On cherche à savoir si $P(f) = 0$.

$$P(f) = 0 \iff P(f)(e_j) = 0, \forall j,$$

$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{i=1}^r (f - \mu_i \text{id}) \right) (e_j),$$

$$f(e_j) = \lambda_j e_j \implies \exists i, \mu_i = \lambda_i.$$

Or pour tous k, l :

$$(f - \mu_k \text{id})(f - \mu_l \text{id}) = (f - \mu_l \text{id})(f - \mu_k \text{id})$$

et donc :

$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{k \neq i} (f - \mu_k \text{id}) \right) (f - \mu_i \text{id})(e_j),$$

$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{k \neq i} (f - \mu_k \text{id}) \right) (f(e_j) - \mu_i e_j) = 0.$$

2. On suppose que $P(f) = 0$ et $\chi_f(\lambda) = 0$ avec $P \in \mathbf{R}[t]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.
Soit $v \in \ker(f - \lambda \text{id})$, $v \neq 0$, alors :

$$P(f)(v) = \sum_{k=1}^d a_k f^k(v),$$

$$P(f)(v) = \sum_{k=1}^d a_k \lambda^k v.$$

Donc $P(\lambda) \cdot v = 0$ et comme $v \neq 0$: $P(\lambda) = 0$.

4.2 Lemme des noyaux

PROPOSITION 4.6 (Théorème des noyaux)

Soit $f \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E)$.

1. Soit $P \in \mathbf{R}[t]$ de la forme $P = ST$ avec $S, T \in \mathbf{R}[t]$ avec S et T premiers entre eux.

Alors si $P(f) = 0$ alors

$$E = \ker(S(f)) \oplus \ker(T(f)).$$

2. Soit $P \in \mathbf{R}[t]$, $P = P_1 P_2 \dots P_k$ avec $P_i \in \mathbf{R}[t]$ premiers entre eux deux à deux.

Alors si $P(f) = 0$ alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^k \ker P_i(f).$$

THÉORÈME 4.7

$f \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E)$ avec $\dim E = n$.

Supposons qu'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ est un polynôme scindé avec des racines simples. Alors $P(f) = 0$ implique que f est diagonalisable.

REMARQUE. C'est équivalent à $m_f(t)$ scindé avec des racines simples. En effet si P est scindé avec des racines simples et qui annulent f alors m_f divise P et donc m_f est scindé avec des racines simples.

DÉMONSTRATION

Soit :

$$P(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_k)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ réels distincts. Ainsi $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$ sont premiers entre eux pour tous $i \neq j$.

Ainsi d'après le théorème des noyaux :

$$E = \bigoplus_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i \text{id}).$$

| Donc f est diagonalisable.

COROLLAIRE 4.8

| Soit $f \in \text{End}(E)$. f est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal m_f est scindé avec des racines simples.

DÉMONSTRATION

| Le sens d'implication a déjà été fait, l'autre sens est donné par le théorème précédent.

4.3 Trigonalisation

DÉFINITION 4.9

| On dit que $f \in \text{End}(E)$ est *trigonalisable* s'il existe une base B de E telle que la matrice en base B de f est triangulaire supérieure.

| De même, une matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ est trigonalisable si elle est conjuguée à une matrice triangulaire supérieure, i.e. s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est trigonalisable.

PROPOSITION 4.10

| Soit $f \in \text{End}(E)$.

| χ_f est scindé dans $\mathbf{R}[X]$ si, et seulement si, f trigonalisable.

REMARQUE. On peut remplacer partout \mathbf{R} par $\mathbf{K} = \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ et E par un \mathbf{K} -espace vectoriel. Si E est un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension finie et si $f \in \text{End}_{\mathbf{C}}(E)$ alors la proposition assure la trigonalisation de f (et ainsi de tout endomorphisme).

DÉMONSTRATION

| Si f est trigonalisable, alors il existe une base B telle que la matrice, $(a_{i,j})$ de f soit trigonale supérieure dans cette base. Alors le polynôme caractéristique (qui est indépendant de la base) est exactement : $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - t)$. Ce polynôme est bien scindé.

| Pour la réciproque on effectue une récurrence sur $n = \dim E$. On suppose que c'est vrai pour tout espace vectoriel de dimension strictement inférieure à n :

$$\chi_f(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \dots (\lambda_n - t)$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$.

λ_1 est une valeur propre. Il existe par hypothèse $v_1 \in E$ un vecteur propre tel que $v_1 \neq 0$ et $f(v_1) = \lambda_1 v_1$. Par le théorème de la base incomplète, il existe une base B de la forme $B = (v_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$. Soit A la matrice de f dans la base B . On a :

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & \star & \star & \dots \\ 0 & & & \\ 0 & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Avec $B \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ qui peut être la matrice d'un endomorphisme de \mathbf{R}^{n-1} .

$$\chi_A(t) = \det \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 - t & \star \\ 0 & B - tI_d \end{array} \right),$$

$$\chi_A(t) = (\lambda_1 - t)\chi_B(t),$$

$$\chi_A(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \dots (\lambda_n - t).$$

et donc $\chi_B(t) = (\lambda_2 - t) \dots (\lambda_n - t)$ est scindé.

Par récurrence, il existe $Q \in \text{GL}_{n-1}(\mathbf{R})$ tel que $Q^{-1}BQ$ soit triangulaire supérieure. Posons :

$$P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{array} \right), \quad P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{array} \right).$$

| On a alors que $P^{-1}AP$ est triangulaire.

4.4 Comment calculer m_f ? (CAYLEY-HAMILTON)

THÉORÈME 4.11 (CAYLEY-HAMILTON)

Soit $f \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E)$. On a que m_f divise χ_f , c'est-à-dire : $\chi_f(f) = 0$.

DÉMONSTRATION

On veut montrer que $\chi_A(A) = 0$ où $A \in M_n(\mathbf{R})$. Puisque $M_n(\mathbf{R}) \subset M_n(\mathbf{C})$ on peut se placer dans se dernier.

On sait alors que A est trigonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ tel que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.

Or pour tout k : $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$. Donc :

$$\chi_A(P^{-1}AP) = P^{-1}\chi_A(A)P.$$

Comme P est inversible, $\chi_A(0)$ si, et seulement si, $\chi_A(P^{-1}AP) = 0$. Posons $A' = P^{-1}AP$. On a $\chi_{A'} = \chi_A$.

$$\begin{aligned} T &= (\lambda_n I_d - A')(\lambda_{n-1} I_d - A') \dots (\lambda_1 I_d - A') \\ T(v_1) &= \left(\prod_{i=2}^n (\lambda_i I_d - A') \right) (\lambda_1 I_d - A')(v_1) = 0 \\ T(v_2) &= \left(\prod_{i=3}^n (\lambda_i I_d - A') \right) (\lambda_2 I_d - A')(\lambda_1 I_d - A')(v_2) \\ &= (\lambda_2 I_d - A')(\lambda_1 I_d - A')(v_2) = (\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) \\ &= (\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) = (\lambda_1 I_d - A')(-a'_{1,2} v_1) \\ &= (\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) = -a'_{1,2} (\lambda_1 I_d - A')(v_1) \\ &= (\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) = -a'_{1,2} (\lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_1) = 0 \end{aligned}$$

Par récurrence on trouve $T(v_i) = 0$ pour tout i .

EXERCICE. Calculer $T(v_3)$.

REMARQUE. À noter :

1. Étant donné $f \in \text{End}(E)$, pour calculer m_f on cherche le plus petit diviseur de χ_f qui annule f .
2. Soit $f \in \text{End}(E)$. Supposons que f est inversible, alors $\det(f) \neq 0$, i.e. $\chi_f(0) \neq 0$. Soit $\chi_f(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$, a_0 est donc non nul. On a :

$$0 = a_0^{-1} \chi_f(f) = (-1)^n a_0^{-1} f^n + \dots + a_1 a_0^{-1} f + I_d$$

ce qui donne :

$$I_d = f \left((-1)^{n+1} a_0^{-1} f^{n-1} + \dots + (-1) a_1 a_0^{-1} I_d \right).$$

EXEMPLE. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\chi_A(t) = -t(t-1)^2$$

on en déduit :

$$t(t-1) \mid m_A(t) \mid t(t-1)^2.$$

Donc soit $m_A(t) = t(t-1)$ soit $m_A(t) = t(t-1)^2$. Dans le premier cas si $m_A(A) = 0$ alors A est diagonalisable. Dans le second, A est non diagonalisable.

$$A(A - I_d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5 APPLICATIONS

5.1 Calculs de puissances

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$, si A est diagonalisable alors :

$$A = PA'P^{-1}$$

où P est inversible et A' diagonale. Et donc pour tout k :

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \lambda_2^k & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

De même, si

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

alors

$$\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & e^{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

5.2 Systèmes différentiels

Soient $x_1, x_2, x_3 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et le système différentiel :

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ x'_2 = x_1 + 4x_2 - 5x_3 \\ x'_3 = 2x_2 - 2x_3 \end{cases}.$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. On a :

$$X' = AX.$$

A a pour vecteurs propres :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de valeurs propres respectives :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2.$$

De matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$X' = AX \iff P^{-1}X' = P^{-1}APP^{-1}X \iff Y' = BY$$

$$Y' = BY \iff \begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = 2y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = c_1 \\ y_2 = c_2 e^t \\ y_3 = c_3 e^{2t} \end{cases}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} X &= PY, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 e^t \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t} \\ c_1 + 3c_2 e^t + 2c_3 e^{2t} \\ c_1 + 2c_2 e^t + c_3 e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.3 Application aux suites récurrentes

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On introduit une seconde suite v_n telle que $v_n = u_{n+1}$ pour tout n . La relation de récurrence s'écrit alors :

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

si on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a alors que la relation de récurrence est

$$X_{n+1} = AX_n.$$

On diagonalise A :

$$\chi_A(t) = t^2 - t - 1 \iff t \in \left\{ r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

On a :

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}$. On pose $Y_n = P_1 X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$:

$$X_{n+1} = AX_n \iff Y_{n+1} = A'Y_n.$$

On en déduit :

$$Y_n = \begin{pmatrix} c_1 r_1^n \\ c_2 r_2^n \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 r_1^n \\ c_2 r_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 r_1^n \\ c_2 r_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \\ c_1 r_1^{n+1} + c_2 r_2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi u_n est de la forme :

$$u_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Deuxième partie

Analyse

Table des matières

3	Développements limités	33
1	Fonctions négligeables et équivalentes	33
1.1	Négligeable	33
1.2	Équivalence	34
2	Dérivées successives et formules de TAYLOR	36
2.1	Formules de TAYLOR	37
2.2	Fonctions usuelles	38
3	Développement limité à l'ordre n d'une fonction de classe C^n	39
3.1	Développements limités	39
3.2	Développements limités et primitives	41
3.3	Développement limités usuels	43
4	Calculs avec les développements limités	45
4.1	Règles de calcul des développements limités	45
4.2	Développement limité d'une fonction composée	47
5	Applications	50
5.1	Calculs de limites	50
5.2	Courbes paramétrées	52
5.3	Étude de fonctions	56
5.3.1	Étude locale	56
5.3.2	Branches infinies	59
5.3.3	Étude de fonction	61
4	Courbes et surfaces paramétrées	63
1	Définitions	63
2	Tangentes	63
3	Branches infinies	65
4	Étude de courbes paramétrées	66
5	Séries numériques	68
1	Définitions	68
2	Opérations sur les séries	71
3	Critères de convergence	73
3.1	Convergence des séries à terme positif	73
3.2	Séries de RIEMANN	74

3.3	Convergence absolue	75
3.4	Comparaison avec des séries géométriques	77

Chapitre 3

Développements limités

1 FONCTIONS NÉGLIGEABLES ET ÉQUIVALENTES

On considère des fonctions f, g de V dans \mathbf{R} où V est un voisinage épointé dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. C'est-à-dire que V est de la forme $U - \{a\}$ où U est un voisinage de a dans $\overline{\mathbf{R}}$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

- si $a = \infty$ alors $V \supset \{k, \infty\}$;
 - si $a \in \mathbf{R}$ alors $V \supset]k, a[\cup]a, l[$ avec $k < a < l$ et $k, l \in \mathbf{R}$.
- f, g sont définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

1.1 Négligeable

DÉFINITION 1.1

On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a s'il existe un voisinage V tel qu'il existe une fonction $\varepsilon : V \rightarrow \mathbf{R}$ telle que :

- $f = \varepsilon \cdot g$;
- $\lim_a \varepsilon = 0$.

On note $f \underset{(a)}{=} o(g)$.

REMARQUE. On note :

$$\varepsilon f : \begin{cases} V \rightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \varepsilon(t)f(t) \end{cases} .$$

EXEMPLES. Par exemple :

1. Si $g = 1$ alors $f = o(1)$ si, et seulement si, $\lim_a f = 0$.
2. Si $f = 0$ au voisinage de a alors pour toute fonction $g : f = o(g)$.
3. Si f est bornée et $\lim_a(g) = \infty$ alors $f = o(g)$ (on prend alors $\varepsilon = f/g$).
4. On a $x^m \underset{(\infty)}{=} o(x^n)$ si, et seulement si, $m < n$.
5. Pour tous $\alpha, \beta > 0$:

$$\begin{cases} x^\alpha \underset{\infty}{=} o(e^{\beta x}) \\ (\ln x)^\alpha \underset{(\infty)}{=} o(x^\beta) \end{cases} ,$$

car $\lim_{\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$.

PROPOSITION 1.2

Si f/g est définie dans un voisinage de a , alors :

$$f \underset{(a)}{=} o(g) \iff \lim_a (f/g) = 0.$$

DÉMONSTRATION

On prend $\varepsilon = f/g$.

REMARQUE. Il peut arriver que f/g n'est pas défini dans aucun voisinage de a .

EXEMPLES. Contre-exemples :

1. Avec $g(t) = \sin(1/[t - a])$, pour tout voisinage de V de a , $g(t)$ s'annule en un point de V .
2. Même si le quotient n'est pas définit : $t \underset{(0)}{=} o(\sin(1/t))$.

PROPOSITION 1.3

On a au voisinage de a :

1. la propriété o est transitive ;
2. la propriété o est compatible avec la multiplication, i.e. : si $f = o(g)$ alors $fh = o(gh)$;
3. si $f = o(g)$ et si $h = o(k)$ alors $fh = o(gk)$.

DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. Pour $f = \varepsilon_1 g$ et $g = \varepsilon_2 h$ avec $\lim_a \varepsilon_i = 0$ alors : $f = \varepsilon_1 \varepsilon_2 h$ et $\lim_a \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0$.
2. Si $f = \varepsilon g$, $\lim_a \varepsilon = 0$, alors $fh = \varepsilon gh$.
3. De même.

CONTRE-EXEMPLE. o n'est pas compatible avec l'addition. Par exemple : $x \underset{(\infty)}{=} o(x^3)$ et $x^2 \underset{(\infty)}{=} o(-x^3)$ n'entraîne pas $x + x^2 \underset{(\infty)}{=} o(0)$.

1.2 Équivalence

DÉFINITION 1.4

On dit que f est *équivalence* à g au voisinage de a si : $f - g \underset{(a)}{=} o(g)$. On note $f \underset{(a)}{\sim} g$.

PROPOSITION 1.5

Si f/g est définie dans un voisinage de a alors :

$$f \underset{(a)}{\sim} g \iff \lim_a f/g = 1.$$

PROPOSITION 1.6

$\underset{(a)}{\sim}$ est une relation d'équivalence.

DÉMONSTRATION

Par définition :

1. elle est réflexive : $f \underset{(a)}{\sim} f$ puisque $0 \underset{(a)}{=} o(f)$;
2. elle est symétrique si $f \underset{(a)}{\sim} g$ alors il existe ε telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ et $f = (1 + \varepsilon)g$, or $1/(1 + \varepsilon)$ est aussi définie au voisinage de a et puisque $g = (1/[1 + \varepsilon])f$ on a

$$g = (1 + (1/[1 + \varepsilon] - 1))f$$

or en posant $\varepsilon' = [1 + \varepsilon] - 1$ on a $\lim_a \varepsilon' = 0$;

3. elle est transitive : $f \underset{(a)}{\sim} g$ et $g \underset{(a)}{\sim} h$ implique qu'il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ telles que $f = (1 + \varepsilon_1)g$, $g = (1 + \varepsilon_2)h$ et donc $f = (1 + \varepsilon)h$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$ et $\lim_a \varepsilon = 0$.

PROPOSITION 1.7

Si $f \underset{(a)}{\sim} g$ et si $\lim_a f$ existe alors $\lim_a g$ existe et $\lim_a g = \lim_a f$.

DÉMONSTRATION

Soit ε telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ alors puisque $f = (1 + \varepsilon)g$ on a

$$\lim_a f = \lim_a (1 + \varepsilon)g = \lim_a g.$$

PROPOSITION 1.8

Le produit et le quotient (quand il est défini) d'équivalences est une équivalence.

Une puissance entière d'équivalences est une équivalence.

DÉMONSTRATION

Si $f = (1 + \varepsilon_1)g$ et $h = (1 + \varepsilon_2)k$ alors $fh = (1 + \varepsilon)gk$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$.

PROPOSITION 1.9

Si $f \underset{(a)}{\sim} g$ et si $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\lim_b \varphi = a$, $b \in I$. Alors

$$f \circ \varphi \underset{(a)}{\sim} g \circ \varphi.$$

DÉMONSTRATION

Si $f = (1 + \varepsilon)g$ avec $\lim_a \varepsilon = 0$. Alors

$$f \circ \varphi = (1 + \varepsilon') \cdot g \circ \varphi$$

avec $\varepsilon' = \varepsilon \circ \varphi$ et $\lim_a \varepsilon' = 0$.

PROPOSITION 1.10

On a :

1. Si f est dérivable en a alors si $f'(a) \neq 0$ on a $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a)$.
2. Si g est continue dans un voisinage épointé de a , alors si $f \underset{(a)}{\sim} g > 0$ alors

$$\int_a^x f(t) dt \underset{(a)}{\sim} \int_a^x g(t) dt.$$

DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. Si f est dérivable en a alors :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{(a)}{\sim} f'(a)$$

puisque si $\lim_a g = b \in \mathbf{R}^*$ alors $g \underset{(a)}{\sim} b$.

2. On sait que $f - g \underset{(a)}{=} o(g)$ et on veut :

$$\int_x^a (f - g)(t) dt \underset{(a)}{=} o \left(\int_x^a g(t) dt \right).$$

En posant $h = f - g$ on se ramène au problème :

$$h = o(g) \implies \int_a^x h = o \int_a^x g.$$

Si $h = \varepsilon g$ et $\lim_a \varepsilon = 0$ alors

$$\int_a^x g = \int_a^x \varepsilon g$$

Or

$$\frac{\left| \int_a^x \varepsilon g \right|}{\left| \int_a^x g \right|} \leq \max_{[a,x]} |\varepsilon| \frac{\int_a^x g}{\int_a^x g} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

Donc

$$\frac{\left| \int_a^x \varepsilon g = h \right|}{\left| \int_a^x g \right|} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

2 DÉRIVÉES SUCCESSIVES ET FORMULES DE TAYLOR

Soit $p \geq 0$ un entier.

DÉFINITION 2.1

Soit I un intervalle de \mathbf{R} et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$.

1. $f \in C^0$ si f est continue ;
2. $f \in C^p$ ($p \geq 1$) si f est dérivable et $f' \in C^{p-1}$.

REMARQUE. Si $f \in C^p$ alors les p -ièmes dérivées successives et f sont toutes continues sur I . $f \in C^\infty$ si $f^{(p)}$ existe et est continue pour tout $p \geq 1$.

PROPOSITION 2.2

Si $f, g \in C^p$ alors $f + g$, fg , f/g et $f \circ g$ (si définie) sont C^p .

DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. $(f + g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$ par récurrence sur p ;
2. $(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}$;
3. par récurrence sur p pour $(f \circ g)^{(p)}$ en utilisant : $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.

RAPPELS SUR LES PRIMITIVES. Si $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est de classe C^1 avec $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert. Alors si f' est continue $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$.

2.1 Formules de TAYLOR

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert.

THÉORÈME 2.3 (Formule de TAYLOR avec reste intégral)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^k . Alors pour tous $a, b \in I$ on a :

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

DÉMONSTRATION

Par récurrence sur n , on note

$$(T_n) : f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

Supposons que (T_k) soit vraie pour tout $k < n$. Alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{(b-t)^k}{k!}, \\ v(t) &= f^{(k)}(t), \\ R_k &= \int_a^b \frac{(b-s)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(s) ds, \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} R_k &= \int_a^b u'(s)v(s) ds \\ R_k &= [u(s)v(s)]_a^b - \int_a^b u(s)v'(s) ds \\ R_k &= u(b)v(b) - u(a)v(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s) ds \\ R_k &= \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s) ds \end{aligned}$$

On applique (T_{n-1}) :

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_{n-1} \\ f(b) &= f(a) + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n \end{aligned}$$

donc (T_n) vraie.

THÉORÈME 2.4 (Formule de TAYLOR avec reste en $f^{(n+1)}(\theta)$)

Soit $n > 0$, $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^{n+1} . Pour tous $a, b \in I$ avec $a \neq b$, il existe θ strictement compris en a et b tel que :

$$f(b) = \sum_{i=0}^n \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta).$$

DÉMONSTRATION

On pose A telle que

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot A = \int_a^b \frac{(b-s)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(s) \, ds - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Soit $F : I \rightarrow \mathbf{R}$ telle que :

$$F(x) = \int_x^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) \, dt - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A.$$

On calcule $F'(x)$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} A \\ F'(x) &= \frac{(b-x)^n}{n!} \left(A - f^{(n+1)}(x) \right). \end{aligned}$$

F est dérivable donc continue sur I :

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) \, dt - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A = 0, \\ F(b) &= 0. \end{aligned}$$

Par le théorème de ROLLE, il existe θ strictement entre a et b tel que $F'(\theta) = 0$. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{(b-\theta)^n}{n!} \left(A - f^{(n+1)}(\theta) \right) &= 0 \\ A &= f^{(n+1)}(\theta). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta) = \int_a^b \frac{(b-s)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(s) \, ds - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

On a alors le résultat en remplaçant dans (T_n) .

REMARQUE. Si $|f^{(n+1)}(s)| \leq M$ pour tout $s \in I$ alors

$$\left| f(b) - \sum_{i=0}^n \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2.2 Fonctions usuelles

PROPOSITION 2.5 (Exponentielle)

Soit $n \in \mathbf{N}$, on regarde le développement de TAYLOR en 0 à l'ordre $n+1$, $\forall i$, $\exp^{(i)}(0) =$

1. On prend $b = x, a = 0$:

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(\theta) \\ \theta &\in]0, x[. \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.6 (Cosinus, sinus)

La dérivée n -ième de $\cos(t)$ est $\cos(t + n\pi/2)$.

$$\left| \cos(x) - \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

car $|\cos \theta| \leq 1$.

3 DÉVELOPPEMENT LIMITÉ À L'ORDRE n D'UNE FONCTION DE CLASSE C^n

3.1 Développements limités

DÉFINITION 3.1

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert tel que $0 \in I, n \in \mathbf{N}$. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ admet un *développement limité* à l'ordre n en 0 si, et seulement si, il existe un polynôme P de degré n à coefficients réels tel que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^n} = 0.$$

Notons

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - P(x)}{x^n}$$

alors

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x) \text{ }^{1§}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0. \end{cases}$$

DÉFINITION 3.2

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert et soit $n \in \mathbf{N}$. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ admet un *développement limité* à l'ordre n en a si, et seulement si, la fonction $t \mapsto f(t + a)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. C'est-à-dire si, et seulement si, il existe un polynôme de degré n , P à coefficients réels tel que :

$$f(x) = P(x - a) + o((x - a)^n)$$

au voisinage de a .

THÉORÈME 3.3

Si f admet un développement limité à l'ordre n en un point a , alors ce développement limité est unique.

DÉMONSTRATION

On peut supposer $a = 0$. Supposons que

$$f(x) = P_1(x) + x^n \varepsilon_1(x) = P_2(x) + x^n \varepsilon_2(x)$$

où $\lim_0 \varepsilon_i = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. On a que

$$(P_1 - P_2)(x) = x^n (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x)$$

^{1§}. C'est-à-dire, $f(x) - P(x) = o(x^n)$.

et $(P_1 - P_2)(x)$ est de la forme $r_0 + r_1x + \dots + r_nx^n$ avec $r_0, r_1, \dots, r_n \in \mathbf{R}$.
On montre par récurrence que les r_k sont tous nuls. Quand $x \rightarrow 0$ on trouve :

$$r_0 = 0$$

et donc

$$r_1x + \dots + r_nx^n = x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x).$$

Supposons que $r_0 = r_1 = r_{k-1} = 0$, $k > 0$. Alors

$$\begin{aligned} r_kx^k + \dots + r_nx^n &= x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x), \\ r_k + r_{k+1}x + \dots + r_nx^{n-k} &= x^{n-k}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x), \end{aligned}$$

$n - k \geq 0$ et donc $r_k = 0$ en passant à la limite.

COROLLAIRE 3.4

Soit $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ le développement limité d'une fonction f à l'ordre n en 0.
Alors :

1. si f est paire alors P est paire ;
2. si f est impaire alors P est impaire.

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x) + x^n\varepsilon(x), \\ f(-x) &= P(-x) + x^n(-1)^n\varepsilon(-x) = P(-x) + x^n\varepsilon_1(x), \end{aligned}$$

Or comme $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ alors $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ aussi.

1. si f est impaire alors on a :

$$f(x) = -P(-x) - x^n\varepsilon_1(x)$$

et comme la première et cette expression sont des développements limités de f à l'ordre n en 0, par unicité on a $-P(-x) = P(x)$, c'est-à-dire P impaire ;

2. si f est paire, on a :

$$f(x) = P(-x) + x^n\varepsilon_1(x)$$

alors de même, l'unicité nous dit que P est alors paire.

PROPOSITION 3.5

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue en $a \in I$.

1. le développement limité de f en a à l'ordre 0 est

$$f(x) = f(a) + \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 ;$$

2. la fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle possède un développement limité à l'ordre 1 en a , alors dans ce cas le développement limité est donné par :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x)(x - a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. On pose $\varepsilon(x) = f(x) - f(a)$. Comme f est continue en 0, $\varepsilon(x)$ aussi et $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

2. Supposons que f soit dérivable en a , c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

On pose

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

On a bien $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ et

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x).$$

Réciproquement, supposons que f admette un développement limité :

$$f(x) = a_0 + (x - a)a_1 + (x - a)\varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. Alors, par continuité $a_0 = f(a)$ et

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} a_1 + \varepsilon(x) = a_1 = f'(a).$$

3.2 Développements limités et primitives

THÉORÈME 3.6

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue. Soit F une primitive de f . Soit $a \in I$ et supposons que f admette un développement limité en a à l'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \frac{a_2}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{a_n}{n!}(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors F admet le développement limité suivant à l'ordre $n + 1$ en a :

$$F(x) = F(a) + a_0(x - a) + \frac{a_1}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{a_n}{(n + 1)!}x^{n+1} + (x - a)^{n+1} \varepsilon_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION

Soit

$$P(t) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} (t - a)^k.$$

Pour tout $x \neq a$:

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n}.$$

Par hypothèse, $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. En posant $\varepsilon(a) = 0$, on obtient que ε est continue sur I . Donc ε admet une primitive et dans l'identité

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \frac{a_2}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{a_n}{n!}(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

tous les termes admettent des primitives. Donc

$$\begin{aligned} F(x) - F(a) &= \int_a^x f(t) dt \\ F(x) - F(a) &= \int_a^x \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} (t-a)^k + (t-a)^n \varepsilon(t) \right) dt \\ F(x) - F(a) &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + u(x), \\ u(x) &= \int_a^x (t-a)^n \varepsilon(t) dt. \end{aligned}$$

Par le théorème de ROLLE :

$$u(x) = (x-a)(\theta-a)^n \varepsilon(\theta)$$

pour un θ compris entre a et x . Donc

$$|u(x)| = |x-a| |\theta-a|^n |\varepsilon(\theta)| \leq |x-a|^{n+1} |\varepsilon(\theta)|$$

et $\varepsilon(\theta)$ tend vers 0 quand x tend vers a puisque θ est compris entre a et x . Donc :

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + (x-a)^{n+1} \varepsilon_1(x)$$

où

$$\varepsilon_1(x) = \frac{u(x)}{(x-a)^{n+1}} \rightarrow 0.$$

THÉORÈME 3.7

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^n , $a \in I$. Alors f admet pour développement limité à l'ordre n en a :

$$f(x) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION

Pour $n = 0, 1$ ça a été déjà vu. Supposons alors $n \geq 2$. Soit $f \in C^n$, posons $g = f'$ avec $g \in C^{n-1}(I)$.

Par récurrence :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^{n-1} \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

f est une primitive de g :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0 \\ f(x) &= f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x) \\ f(x) &= f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon_1(x). \end{aligned}$$

EXEMPLE. Soit :

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

son développement limité en 0 d'ordre n est :

$$f(x) = x^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

3.3 Développement limités usuels

Développements limités en 0 :

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\alpha \in \mathbf{R} : (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{i=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-i)}{(i+1)!} x^{i+1} + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^n x^i + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^n (-1)^i x^i + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

$$\log(1-x) = - \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{i!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\log(1+x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{Arctan}(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{x^{2i-1}}{2i-1} + x^{2n} \varepsilon(x)$$

DÉMONSTRATION (ch)

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} (= \operatorname{sh}(x))$$

$$\operatorname{ch}''(x) = \operatorname{ch}(x)$$

$$\operatorname{ch}^{(2i)}(0) = 1$$

$$\operatorname{sh}^{(2i)}(0) = 0$$

DÉMONSTRATION (cos)

$$\begin{aligned}\cos^{(k)}(x) &= \cos(x + k\pi/2) \\ \cos^{(k)}(0) &= \cos(k\pi/2) \\ \cos^{(2k)}(0) &= (-1)^k \\ \cos^{(2k+1)}(0) &= 0\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION (sin)

$$\begin{aligned}\sin^{(k)}(x) &= \sin(x + k\pi/2) \\ \sin^{(2k)}(0) &= 0 \\ \sin^{(2k+1)}(0) &= (-1)^k\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION $((1+x)^\alpha = f(x))$

Par récurrence :

$$\begin{aligned}f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \\ f^{(k)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION $(1/(1-x))$

$$\begin{aligned}\frac{1-x^n}{1-x} &= 1+x+x^2+\dots+x^n \\ \frac{1}{1-x} &= 1+x+\dots+x^n+x^n \cdot \frac{x}{1-x}\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION $(\log(1-x))$

Utiliser le théorème sur le développement limité d'une primitive avec le développement limité de $1/(1-x)$.

DÉMONSTRATION $(\text{Arctan}(x))$

$$\begin{aligned}\text{Arctan}'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{i=1}^n (-1)^i x^{2i} + x^{2n} \varepsilon(x)\end{aligned}$$

et on conclut avec le théorème du développement limité d'une primitive.

REMARQUE. On a vu que si

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

alors le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre n est

$$f(x) = x^n \varepsilon(x).$$

Or le développement limité de 0 en 0 à l'ordre n est identique.

EXEMPLE. Soit :

$$f: \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}.$$

La fonction f est continue en 0.

On regarde le développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = x^2 \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \sin(1/x) & \text{sinon} \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Donc le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre 2 est :

$$f(x) = x^2 \varepsilon(x).$$

Dérivabilité de f en 0 (puisque'elle est lisse sur \mathbf{R}^*) :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2 \sin(1/x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

donc f est dérivable et $f'(0) = 0$.

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x)}{x} = 3x \sin(1/x) - \cos(1/x)$$

donc f n'est pas dérivable à l'ordre 2 en 0 (même si elle a un développement limité à l'ordre 2).

4 CALCULS AVEC LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

4.1 Règles de calcul des développements limités

PROPOSITION 4.1

Soit f, g ayant des développements limités à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_f(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_g(x)$$

avec P, Q des polynômes de degré au plus n et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ (non forcément identiques). Alors

1. le développement limité à l'ordre n en 0 de $f + g$ est

$$(f + g)(x) = (P + Q)(x) + x^n \varepsilon(x);$$

2. pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, le développement λf à l'ordre n en 0 est :

$$(\lambda f)(x) = \lambda P(x) + x^n \varepsilon(x).$$

DÉMONSTRATION

Écrivons $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_f(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_g(x)$.

1. $(f + g)(x) = P(x) + Q(x) + x^n(\varepsilon_f + \varepsilon_g)(x)$ et on note $\varepsilon = \varepsilon_f + \varepsilon_g$ qui tend bien en 0.
2. De même.

PROPOSITION 4.2

Soit f qui admet le développement limité en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, f admet le développement limité en 0 à l'ordre p :

$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p \varepsilon(x)$$

avec $T_p(P)$ le polynôme tronqué de P :

$$T_p(P) = \sum_{k=0}^p a_k x^k, \quad P = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

DÉMONSTRATION

On a

$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p \left(\sum_{k=p+1}^n a_k x^{k-p} + x^{n-p} \varepsilon(x) \right).$$

Et on pose

$$\varepsilon_1(x) = \sum_{k=p+1}^n a_k x^{k-p} + x^{n-p} \varepsilon(x).$$

On a bien $\varepsilon_1(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.

PROPOSITION 4.3

Soient f, g admettant les développements limités :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x).$$

Alors fg admet le développement limité à l'ordre n en 0 suivant :

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x) + x^n \varepsilon(x).$$

REMARQUE. Si f, g admettent les développements limités à l'ordre n en a :

$$f(x) = P(x - a) + (x - a)^n \varepsilon_1(x), \quad g(x) = Q(x - a) + (x - a)^n \varepsilon_2(x)$$

alors le développement limité :

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x - a) \text{ 2§ } + (x - a)^n \varepsilon(x).$$

DÉMONSTRATION

$$(fg)(x) = (PQ)(x) + x^n (Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x))$$

$$PQ(x) = T_n(PQ)(x) + x^{n+1} R(x), \quad R \in \mathbf{R}[x]$$

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x) + x^n (xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x))$$

2§. On tronque avant d'évaluer en $x - a$.

On pose :

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0} xR(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} Q\varepsilon_1(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} P\varepsilon_2(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) &= 0\end{aligned}$$

EXEMPLE. On veut le développement limité de :

$$\text{Arctan}(x-1)\exp(x)$$

en 1 d'ordre 3.

$$\begin{aligned}\text{Arctan}(y) &= y - \frac{y^3}{3} + y^3\varepsilon(y) \\ \text{Arctan}(x-1) &= (x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3\varepsilon(x) \\ \exp(x) &= \exp(x-1+1) = e \exp(x-1) \\ \exp(x) &= e \left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3\varepsilon(x) \right)\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}f(x) &= e \left((x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3\varepsilon(x) \right) \times \left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3\varepsilon(x) \right) \\ f(x) &= e \left((x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} \right) + (x-1)^3\varepsilon(x)\end{aligned}$$

4.2 Développement limité d'une fonction composée

Puisque la composition de deux fonctions polynômiales est encore un polynôme :

PROPOSITION 4.4

Soient f, g admettant un développement limité en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon(x)$$

avec P, Q deux polynômes de degré inférieur à n .

Supposons que $g(0) = 0$ alors $f \circ g$ admet le développement limité suivant à l'ordre n en 0 :

$$(f \circ g)(x) = T_n(P \circ Q)(x) + x^n\varepsilon(x).$$

DÉMONSTRATION

Supposons $n = 0$, alors P et Q sont deux polynômes constants donc $f(x) = P(0) + \varepsilon(x)$ et $g(x) = Q(0) + \varepsilon(x)$. Comme $Q(0) = 0$ on a bien $f(g(x)) = (P \circ Q)(x) + \varepsilon(x)$ par continuité.

Supposons que $n \geq 1$. On note $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_2(x)$. Posons

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

$$(f \circ g)(x) = P(g(x)) + g(x)^n \varepsilon_1(g(x))$$

$$P(g(x)) = \sum_{i=0}^n a_i g(x)^i$$

$$P(g(x)) = \textcolor{red}{3}\S T_n \left(\sum_{i=0}^n a_i Q(x)^i \right) + x^n \varepsilon_3(x)$$

Puisque $Q(0) = 0$, on a $Q(x) = b_1x + \dots + b_nx^n$ et donc :

$$g(x) = b_1x + \dots + b_nx^n + x^n \varepsilon_2(x)$$

$$g(x) = x(b_1 + \dots + b_nx^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon_2(x))$$

$$g(x) = xh(x)$$

$$(f \circ g)(x) = P(xh(x)) + x^n h(x)^n \varepsilon_1(xh(x))$$

$$(f \circ g)(x) = T_n(P \circ Q)(x) + x^n (h(x)^n \varepsilon_1(xh(x)) + \varepsilon_3(x))$$

On pose $\varepsilon_4(x) = h(x)^n \varepsilon_1(xh(x)) + \varepsilon_3(x)$ et :

$$\lim_{x \rightarrow 0} xh(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x)^n = b_1^n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_4(x) = 0.$$

EXEMPLE. Développement limité de $\cos(\sin(x))$ à l'ordre 5 en 0 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6 \varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x)$$

$$\cos(\sin(x)) = T_5 \left(1 - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right)^4}{4!} \right) + x^5 \varepsilon(x)$$

$$\cos(\sin(x)) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x)$$

$$\cos(\sin(x)) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^5 \varepsilon(x)$$

PROPOSITION 4.5

Soient f, g admettant des développements limités à l'ordre n en 0. Alors si $g(0) \neq 0$ alors la fonction f/g admet un développement limité à l'ordre n en 0.

DÉMONSTRATION

Puisque $g(0) \neq 0$, f/g est définie et continue en 0. Comme $f/g = f \times 1/g$, il suffit de vérifier que $1/g$ admet un développement limité en 0 (puis on applique la règle de produit).

Posons $a = g(0) \neq 0$. On a :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a + (g(x) - a)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1 \right)}$$

3§. D'après les formules de développements limités d'une somme et d'un produit.

Il suffit de vérifier que :

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)}$$

admet un développement limité à l'ordre n en 0. Posons

$$h(x) = \frac{1}{1 + x}$$

on a alors

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)} = h\left(\frac{g(x)}{a} - 1\right) = (h \circ k)(x)$$

où $k(x) = g(x)/a - 1$. Or $k(x)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et $h(x)$ admet également un développement limité à l'ordre ∞ en 0. Enfin, $k(0) = 0$ et donc on conclut avec le résultat précédent.

EXEMPLE. Développement limité de $f : f(x) = 1/(a - x)$ en 0 à l'ordre n .

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{a} \frac{1}{1 - x/a} \\ \frac{1}{1 - t} &= 1 + t + t^2 + \dots + t^n + t^n \varepsilon(t) \\ f(x) &= \frac{1}{a} \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \dots + \frac{x^n}{a^n} \right) + x^n \varepsilon(x) \\ \frac{1}{a - x} &= \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \dots + \frac{x^n}{a^{n+1}} + x^n \varepsilon(x). \end{aligned}$$

La méthode précédente ne donne pas de formule générale pour le développement limité de f/g .

RAPPEL. Si $P, Q \in \mathbf{R}[x]$, $n \in \mathbf{N}$ et si $Q(0) \neq 0$. Alors la division de P par Q suivant les puissances croissantes à l'ordre n est l'unique polynôme A tel que :

- $P - AQ$ est divisible par X^{n+1} ;
- soit $A = 0$, soit $\deg A \leq n$.

PROPOSITION 4.6

Soient f, g avec les développements limités suivants à l'ordre n en 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x) + x^n \varepsilon_1(x), \\ g(x) &= B(x) + x^n \varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

Supposons que $g(0) = B(0) \neq 0$. Le développement limité à l'ordre n de f/g en 0 est :

$$\frac{f}{g}(x) = Q(x) + x^n \varepsilon(x)$$

où Q est la division de A par B à l'ordre n suivant les puissances croissantes.

DÉMONSTRATION

On a $A(x) = Q(x)B(x) + x^{n+1}R(x)$ où R est un polynôme et $Q = 0$ ou $\deg Q \leq n$. Ainsi

$$\begin{aligned} f(x) &= Q(x)B(x) + x^{n+1}R(x) + x^n\varepsilon_1(x) \\ f(x) - Q(x)g(x) &= x^{n+1}R(x) + x^n\varepsilon_1(x) - Q(x)x^n\varepsilon_2(x) \\ f(x) - Q(x)g(x) &= x^n(\varepsilon_1(x) - Q(x)\varepsilon_2(x) + xR(x)) \\ \frac{f}{g}(x) &= Q(x) + x^n\varepsilon_3(x) \\ \varepsilon_3(x) &= \frac{1}{g(x)}(\varepsilon_1(x) - Q(x) \cdot \varepsilon_2(x) + xR(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

EXEMPLE. Développement limité de $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0.

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x) \\ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) + x^6R(x) \\ \frac{f(x)}{g(x)} &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x) \end{aligned}$$

5 APPLICATIONS

APPLICATIONS. Les développements limités peuvent être utiles pour :

1. les calculs de limites (pour des « formes indéterminées ») ;
2. études de fonctions ou courbes paramétrées.

5.1 Calculs de limites

EXEMPLE. On veut calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x) \\ \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \\ \log \operatorname{ch} x &= \log(1 + (\operatorname{ch} x - 1)) \\ \log \operatorname{ch} x &= T_2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2} \right) + x^2\varepsilon(x) \\ \log \operatorname{ch} x &= \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \\ x \log \operatorname{ch} x &= \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \\
x\sqrt{1+x} &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + x^3\varepsilon(x) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \\
\exp(\sin x) &= T_3 \left(\left(x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \right) + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(\sin x) &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(\sin x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) ;
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \frac{\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)}{1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)} \\
\frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \frac{\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)}{-\frac{x^3}{8} + x^3\varepsilon(x)} \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/2 + \varepsilon(x)}{-1/8 + \varepsilon(x)} = -4.
\end{aligned}$$

REMARQUE. Un calcul de dérivée s'obtient par un calcul de limite et donc parfois par développements limités.

EXEMPLE. On prend

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + x + x^2}$$

et on cherche $f^{(i)}(0)$ pour $i \in \{0, \dots, 4\}$, c'est-à-dire que l'on cherche le développement limité de f en 0 à l'ordre 4.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x).$$

On cherche le développement limité de

$$g(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}$$

que l'on peut voir comme

$$g(x) = (a \circ b)(x) ; a(x) = \frac{1}{1+x} ; b(x) = x + x^2.$$

$$\begin{aligned}
a(x) &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
g(x) &= T_4((x \mapsto 1 - x + x^2 - x^3 + x^4)(x + x^2)) + x^4\varepsilon(x) \\
g(x) &= 1 - x - x^2 + x^2 + x^4 + 2x^3 + x^4 - x^3 - 3x^4 + x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
g(x) &= 1 - x + x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
f(x) &= T_4\left((1 - x + x^3 - x^4)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\right) + x^4\varepsilon(x) \\
f(x) &= 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{2} - \frac{23x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Comme f admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, elle est dérivable quatre fois. De plus

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(0) &= -1 \\
f^{(2)}(0) &= -1 \\
f^{(3)}(0) &= 9 \\
f^{(4)}(0) &= -23.
\end{aligned}$$

5.2 Courbes paramétrées

RAPPELS SUR LES FONCTIONS CLASSIQUES. Quelques rappels :

— on définit le logarithme népérien par :

$$\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Ainsi $\log : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ est croissante, C^∞ ,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \log x &= \frac{1}{x} \\
\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \log x &= -\infty \\
\lim_{x \rightarrow \infty} \log x &= +\infty \\
\log(ab) &= \log a + \log b.
\end{aligned}$$

— on définit l'exponentielle, $\exp : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, qui est croissante, lisse et stable par dérivation.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) &= 0 \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) &= \infty \\
\exp(a + b) &= \exp(a) \exp(b).
\end{aligned}$$

— soient $a \in \mathbf{R}_+^*, b \in \mathbf{R}$ alors on définit :

$$a^b = \exp(b \log a).$$

$$a^{b+b'} = a^b a^{b'}$$

$$(aa')^b = a^b (a')^b$$

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

$$a^0 = 1 = 1^b$$

$$\frac{d}{dx} x^b = b x^{b-1}$$

$$\frac{d}{dx} a^x = \log(a) a^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^a (\log x)^n = 0, \quad a > 0 \text{ et } n \in \mathbf{Z}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^a e^x = 0.$$

— trigonométrie :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\sin(x+t) = \cos(t) \sin(x) + \cos(x) \sin(t)$$

$$\cos(x+t) = \cos(x) \cos(t) - \sin(x) \sin(t)$$

$$\tan(x+t) = \frac{\tan(t) + \tan(x)}{1 - \tan(x) \tan(t)}.$$

— $\text{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ est lisse sur $] -1, 1[$ et :

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\text{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ est la réciproque de \cos et on a la relation :

$$\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

$\text{Arctan} : \mathbf{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$ est lisse et :

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

— trigonométrie hyperbolique :

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$$

leurs réciproques $\text{Arcsh} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\text{Arcch} : [-1, \infty] \rightarrow \mathbf{R}_+$ et $\text{Arcth} :]-1, +1[\rightarrow \mathbf{R}$ sont lisses sur l'intérieur de leur domaine de définition.

$$\text{Arcsh}'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\text{Arcch}'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$\text{Arcsh}(t) = \log(t + \sqrt{t^2+1})$$

$$\text{Arcch}(t) = \log(t + \sqrt{t^2-1}).$$

DÉFINITION 5.1

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ avec I un intervalle ou une union finie d'intervalles dans \mathbf{R} . Soient u, v telles que

$$\forall t, f(t) = (u(t), v(t)).$$

1. On dit que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$ où $l = (l_1, l_2)$ si $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = l_1$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = l_2$.
2. On dit que f est continue en t_0 si les fonctions u et v sont continues en 0. f est continue sur I si elle est continue en tout point de I .
3. On dit que f est dérivable en t_0 si u et v le sont et on note $f'(t_0) = (u'(t_0), v'(t_0))$.

PROPOSITION 5.2

Si $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ et si $t_0 \in I$ alors :

1. si $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = m$ alors $\lim_{t \rightarrow t_0} (f + g)(t) = l + m$;
2. si f, g sont dérivables en t_0 alors $f + g$ aussi et on a $(f + \lambda g)'(t_0) = f'(t_0) + \lambda g'(t_0)$.

PROPOSITION 5.3

Soit (r, s) une base de \mathbf{R}^2 et soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ telle que $f(t) = (u(t), v(t))$. Soit $(a(t), b(t))$ les coordonnées de $f(t)$ dans la base (r, s) .

1. On a :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l \iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \alpha \\ \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = \beta \end{cases}$$

où (α, β) sont les coordonnées de l dans la base (r, s) .

2. Idem pour la dérivée.

DÉMONSTRATION

Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ et $r, s \in \mathbf{R}^2$. On a $l = \alpha \cdot r + \beta \cdot s$,

$$f(t) = (u(t), v(t)) = a(t) \cdot r + b(t) \cdot s$$

avec $a(t), b(t) \in \mathbf{R}$.

1. On a que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$ c'est par définition :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = l_1 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = l_2 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \alpha \\ \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = \beta \end{cases} &\iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} (a(t)r_1 + b(t)s_1) = \alpha r_1 + \beta s_1 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} (a(t)r_2 + b(t)s_2) = \alpha r_2 + \beta s_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} a(t)r_1 + b(t)s_1 = l_1 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} a(t)r_2 + b(t)s_2 = l_2 \end{cases} \end{aligned}$$

2. De même ...

DÉFINITION 5.4

On dit que $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2, f(t) = (u(t), v(t))$ admet un développement limité à l'ordre n en t_0 si $u(t)$ et $v(t)$ admettent un développement limité à l'ordre n en t_0 .

Si $u(t) = u_0 + u_1(t - t_0) + \dots + u_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon_1(t)$ et $v(t) = v_0 + v_1(t - t_0) + \dots + v_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon_2(t)$ alors on appelle

$$f(t) = (u_0, v_0) + (t - t_0)(u_1, v_1) + \dots + (t - t_0)^n(u_n, v_n) + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

le développement limité de f à l'ordre n en t_0 avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0)$.

EXEMPLE. Le développement limité de $f : t \mapsto (2t^3 - t \sin t, t^3 + \cos t)$ à l'ordre 4 en 0 :

$$2t^3 - t \sin t = -t^2 + 2t^3 + \frac{t^4}{6} + t^4 \varepsilon(t)$$

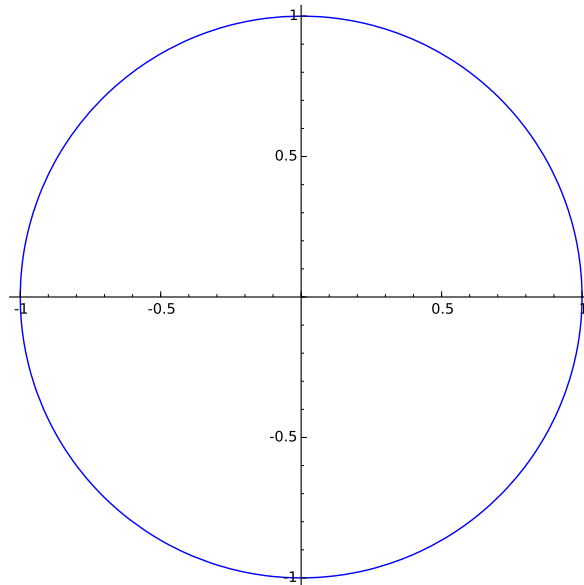
$$t^3 + \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + t^3 + \frac{t^4}{24} + t^4 \varepsilon(t)$$

$$f(t) = (0, 1) - t^2(1, 1/2) + t^3(2, 1) + t^4(1/6, 1/24) + t^4 \varepsilon(t).$$

DÉFINITION 5.5

On appelle *courbe paramétrée* de \mathbf{R}^2 une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$.

EXEMPLE. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$.



REMARQUE. Supposons que f soit dérivable en $t \in I$. Alors $u(t), v(t)$ admettent des développements limités à l'ordre 1 en t_0 et donc f admet aussi un développement limité à l'ordre 1 en t_0 . Or si

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t)$$

alors

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0)) = f'(t_0).$$

DÉFINITION 5.6

On appelle $f'(t_0)$ *vecteur tangent* de f en t_0 . La droite affine passant par $f(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$ s'appelle la *tangente* à f en t_0 .

REMARQUE. Le vecteur tangent dépend du paramétrage de la courbe et non seulement de sa représentation.

EXEMPLE. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ et soit $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$. Remarquons que f et g ont même représentation graphique. Cependant les vecteurs tangents en 0 à f et g sont :

$$\begin{aligned} f'(0) &= (0, 1) \\ g'(0) &= (0, 2). \end{aligned}$$

La tangente à f en t_0 est la droite d'équation :

$$\det \begin{pmatrix} y - v(t_0) & v'(t_0) \\ x - u(t_0) & u'(t_0) \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire :

$$(y - v(t_0))u'(t_0) - (x - u(t_0))v'(t_0) = 0.$$

5.3 Étude de fonctions

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, où I est un intervalle de \mathbf{R} . On procède à l'étude de f au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. En particulier, on s'intéresse notamment au graphe de f .

5.3.1 ÉTUDE LOCALE

PROPOSITION 5.7

Soit $x_0 \in I, f : I \rightarrow \mathbf{R}$. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 :

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

où $P \in \mathbf{R}[x], P(x) = a_p x^p + \dots + a_n x^n$ avec $0 \leq p \leq n$ et $a_p \neq 0$.

Alors il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $x \neq x_0$, $f(x)$ est non nul et a le signe de $a_p(x - x_0)^p$.

DÉMONSTRATION

Puisque $p \leq n$, le développement limité de f en x_0 à l'ordre p est :

$$f(x) = (T_p(P))(x - x_0) + (x - x_0)^p \varepsilon(x).$$

C'est-à-dire :

$$f(x) = a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p \varepsilon(x).$$

Pour tout $x \neq x_0$, on a :

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^p} = a_p + \varepsilon(x)$$

et $a_p \neq 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi il existe α tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $x \neq x_0$, $|\varepsilon(x)| < \frac{1}{2}(a_p)$. C'est-à-dire que pour un tel x , $f(x) \neq 0$ et est du même signe que $a_p(x - x_0)$.

DÉFINITION 5.8

Si $I \subset \mathbf{R}$ est un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction numérique et si $x_0 \in \bar{I}$ ^{4§}, on dit que f est *positive au voisinage de x_0* s'il existe un voisinage $J \subset I$ de x_0 tel que pour tout $x \in J$ et $x \neq x_0$, $f(x) > 0$.

EXEMPLE. Prenons :

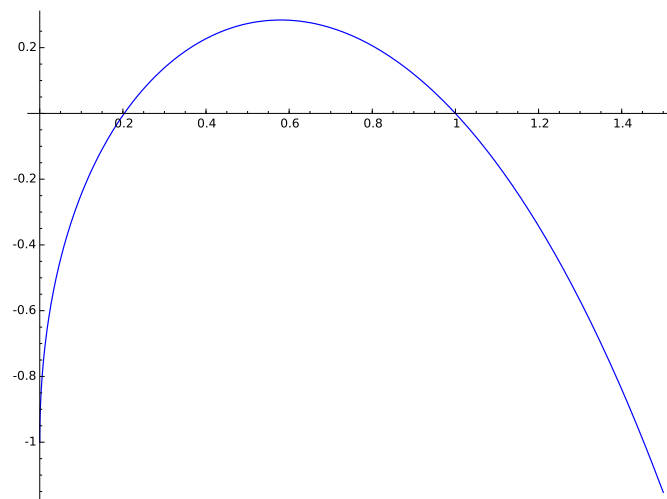
$$f(x) = e \cdot \sqrt{x} - e^x.$$

^{4§}. Dans I ou l'une de ses bornes.

On cherche le signe de f quand x tend vers 1.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e \left[(1 + (x-1))^{1/2} - e^{x-1} \right] \\
 &\begin{cases} (1 + (x-1))^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \\ e^{x-1} = 1 + (x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \end{cases} \\
 f(x) &= e \left(-\frac{1}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \right) \\
 f(x) &= \frac{-e}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x).
 \end{aligned}$$

Ainsi au voisinage de 1, le signe de f est le même que celui de $1-x$.



DÉFINITION 5.9

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. La *tangente* en $(x_0, f(x_0))$ au graphe de f est la droite affine d'équation :

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

DÉFINITION 5.10

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$.

On dit que f admet une *inflexion* au point $(x_0, f(x_0))$ si la fonction

$$x \mapsto f(x) - (f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0))$$

s'annule en x_0 en changeant de signe.

PROPOSITION 5.11

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. On a :

1. si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ est le développement limité de f à l'ordre 1 en x_0 , alors la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ est donnée par :

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) ;$$

2. si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\varepsilon(x)$ est le développement limité de f à l'ordre 2 en x_0 , alors

- si $a_2 > 0$ alors pour tout $x \neq x_0$ dans un voisinage suffisamment petit de x_0 , le point $(x, f(x))$ est au-dessus de la tangente ;
 - si $a_2 < 0$ alors pour tout $x \neq x_0$ dans un voisinage suffisamment petit de x_0 , le point $(x, f(x))$ est en-dessous de la tangente ;
3. si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_3(x - x_0)^3 + (x - x_0)^3\varepsilon(x)$ est le développement limité de f à l'ordre 3 en x_0 , alors si $a_3 \neq 0$, f admet un point d'inflexion en $(x_0, f(x_0))$.

DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. Comme f est dérivable en x_0 , on a $a_1 = f'(x_0)$ et $a_0 = f(x_0)$, l'équation de la tangente est

$$y = a_1(x - x_0) + a_0.$$

2. Posons

$$u(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)).$$

On a alors :

$$u(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 - a_1(x - x_0) - a_0 + (x - x_0)^2\varepsilon(x) = a_2(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\varepsilon(x).$$

Comme $a_2 \neq 0$ (par hypothèse) alors la proposition précédente entraîne que le signe de $u(x)$ au voisinage de 0 est celui de $a_2(x - x_0)^2$, c'est-à-dire le signe de a_2 .

3. Posons de même

$$u(x) = a_3(x - x_0)^3 + (x - x_0)^3\varepsilon(x).$$

D'après la proposition précédente, le signe de $u(x)$ au voisinage de x_0 est celui de $a_3(x - x_0)$ puisque $a_3 \neq 0$. Comme $(x - x_0)^3$ n'est pas de signe constant, c'est un point d'inflexion.

REMARQUE. Si $a_2 \neq 0$, alors :

- si $a_2 > 0$, $f(x)$ admet un minimum local en x_0 ;
- sinon, $f(x)$ admet un maximum local en x_0 .

REMARQUE, GÉNÉRALISATION DU RÉSULTAT. Supposons que le développement limité de f en x_0 est de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p\varepsilon(x),$$

avec $p \geq 2$. De plus on suppose $a_p \neq 0$. Alors en posant

$$u(x) = f(x) - (f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0))$$

est du signe de $a_p(x - x_0)^p$ au voisinage de x_0 .

- Si p est pair alors $a_p > 0$ implique que x_0 est un minimum local, $a_p < 0$ implique que x_0 est un maximum local.
- Si p est impair alors x_0 est un point d'inflexion.

EXEMPLE. Prenons :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 5}$$

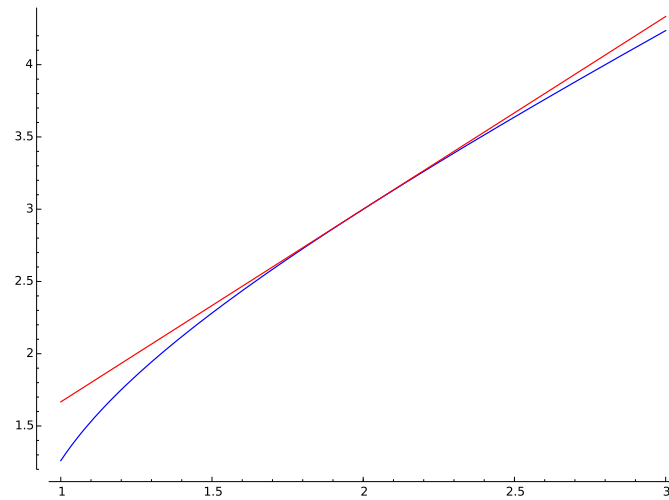
définie sur \mathbf{R} et étudions f au voisinage de $x_0 = 2$. On a :

$$\begin{aligned} f(x+2) &= \left((x+2)^3 + 6x^2 - 5\right)^{1/3} \\ f(x+2) &= \left(27 + 36x + 12x^2 + x^3\right)^{1/3} \\ f(x+2) &= 3 \cdot \left(1 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{27}x^3\right)^{1/3} \\ f(x+2) &= 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2\right) + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{-2}{3}\right)}{2} \left(\frac{16}{9}x^2\right)\right) + x^2\varepsilon(x) \\ f(x+2) &= 3 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{27}x^2 + x^2\varepsilon(x). \end{aligned}$$

L'équation de la tangente est :

$$y = 3 + \frac{4}{3}(x - 2).$$

Comme le terme en x^2 est non nul et négatif, la courbe est en-dessous de la tangente.



5.3.2 BRANCHES INFINIES

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction numérique.

DÉFINITION 5.12

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, avec $a \in \mathbf{R}$ alors la droite $x = a$ est une *asymptote verticale* de f .

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ alors f admet une *branche infinie* en $+\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ alors f admet une *branche infinie* en $-\infty$.

Soit $a, b \in \mathbf{R}$. La droite $y = ax + b$ est *asymptote* à f quand x tend vers $\pm\infty$ si :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax - b = 0.$$

Si $a = 0$ on dit que l'asymptote est *horizontale*.

Soit $a \in \mathbf{R}$, si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

alors on dit que f a une *direction asymptotique de pente a en $\pm\infty$* .

Si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

alors on dit que f a une *direction asymptotique verticale* en $\pm\infty$.

PROPOSITION 5.13

Soient $a, b \in \mathbf{R}$. La droite $y = ax + b$ est asymptote à f quand x tend vers $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si, et seulement si :

— on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a ;$$

— et de plus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b.$$

EXEMPLE. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x^2 + 1}.$$

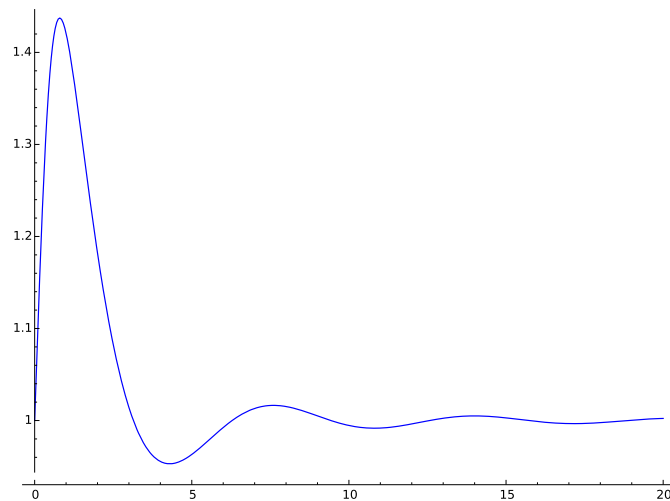
On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - 1| = 0$$

et donc $y = 1$ est asymptote à f en $+\infty$. La différence

$$f(x) - 1 = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$$

est du signe de $\sin x$ qui oscille.



EXEMPLE. Avec

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 5}$$

on regarde s'il y a une asymptote quand x tend vers $\pm\infty$ et la position par rapport à la possible asymptote. On écrit f sous la forme :

$$f(x) = xu(1/x)$$

avec

$$u(x) = \sqrt[3]{1 + 6x - 5x^3}.$$

Le développement limité de u en 0 à l'ordre 2 est :

$$\begin{aligned} u(x) &= (1 + 6x - 5x^3)^{1/3} \\ u(x) &= 1 + \frac{1}{3}(6x) + \frac{1}{3} \left(\frac{-2}{3} \right) \frac{1}{2}(36x^2) + x^2\varepsilon(x) \\ u(x) &= 1 + 2x - 4x^2 + x^2\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Ainsi pour x au voisinage de ∞ en valeur absolue :

$$f(x) = x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{\varepsilon(1/x)}{x^2} \right) = x + 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(1/x),$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) - (x + 2) = 0.$$

On regarde maintenant la position de f par rapport à $y = x + 2$. On a

$$f(x) - (x + 2) = \frac{-4}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(1/x).$$

Ainsi quand $x \rightarrow +\infty$, f est en-dessous de l'asymptote, quand $x \rightarrow -\infty$, f est au-dessus de l'asymptote.

5.3.3 ÉTUDE DE FONCTION

Par exemple avec

$$f(x) = x \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right|$$

de domaine de définition $\mathbf{R} \setminus \{0, -1/2\}$.

DÉRIVÉE. On calcule la dérivée de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= x(\log |2x + 1| - \log |x|) \\ f'(x) &= \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right| + x \left(\frac{2}{2x + 1} - \frac{1}{x} \right) \\ f'(x) &= \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right| - \frac{1}{2x + 1} \\ f''(x) &= \frac{2}{2x + 1} - \frac{1}{x} - \frac{2}{(2x + 1)^2} \\ f''(x) &= \frac{-1}{x(2x + 1)^2} \end{aligned}$$

Une étude des signes montre qu'il existe un unique α entre $-1/2$ et 0 (strictement) tel que $f'(\alpha) = 0$. En conclusion, f est croissante partout sauf sur $] -1/2, \alpha[$ où elle est décroissante.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty \end{aligned}$$

ce qui nous donne deux branches infinies.

$$\lim_{x \rightarrow -1/2} f(x) = +\infty$$

et donc il y a une asymptote verticale en $x = -1/2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$$

$$f(x) = x \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right|$$

$$f(x) = x \log |2x + 1| - x \log x$$

or les deux termes tendent vers 0 en 0 et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

et donc f admet un prolongement par continuité à 0 en 0.

Il reste à regarder les branches infinies :

— Quand $x \rightarrow \infty$, on cherche un développement limité de f en $+\infty$.

$$f(x) = x \log(2 + 1/x)$$

$$f(x) = x \log 2 + x \log \left(1 + \frac{1}{2x} \right)$$

$$f(x) = x \log 2 + x \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o(1/x^2) \right)$$

$$f(x) = (\log 2)x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o(1/x)$$

On en déduit que la droite d'équation

$$y = (\log 2)x + \frac{1}{2}$$

est asymptote oblique à f en $+\infty$ et la courbe est en-dessous de l'asymptote.

— En $-\infty$ la droite d'équation

$$y = (\log 2)x + \frac{1}{2}$$

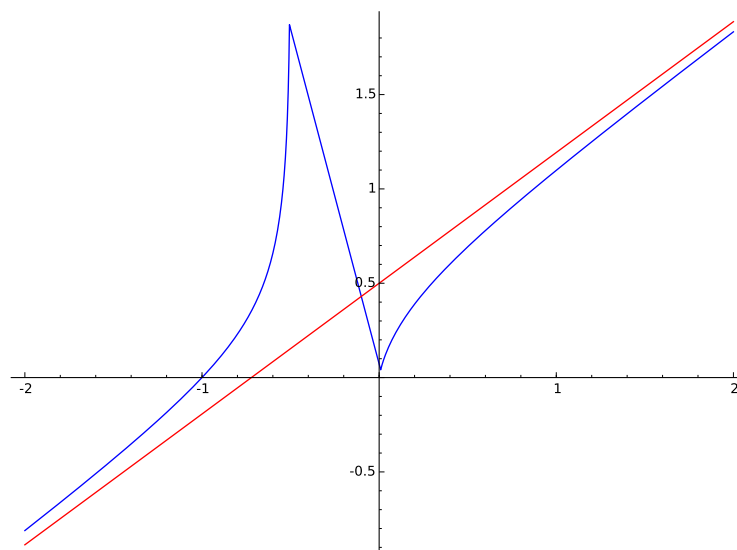
est également asymptote oblique à f en $-\infty$ et la courbe est au-dessus de l'asymptote.

— Pour ce qui est de la tangente en 0 :

$$f'(x) = \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right| - \frac{1}{2x+1}$$

et alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right| = +\infty.$$



Chapitre 4

Courbes et surfaces paramétrées

1 DÉFINITIONS

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ telle que $f(t) = (u(t), v(t))$.

DÉFINITION 1.1

Supposons que u, v sont continues.

Si u et v admettent un développement limité à l'ordre n au point t_0 :

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + u_1(t - t_0) + \dots + u_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon(t) \\ v(t) &= v_0 + v_1(t - t_0) + \dots + v_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon(t) \end{aligned}$$

alors f admet un développement limité à l'ordre n en t_0 :

$$\begin{aligned} f(t) &= f_0 + (t - t_0)f_1 + \dots + (t - t_0)^n f_n + (t - t_0)^n \varepsilon(t) \\ \forall i \in \{0, \dots, n\}, f_i &= (u_i, v_i). \end{aligned}$$

L'égalité précédente s'appelle le *développement limité de f en t_0 à l'ordre n* .

REMARQUE. On a bien

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0).$$

DÉFINITION 1.2

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ s'appelle *courbe paramétrée de \mathbf{R}^2* .

Supposons que f est dérivable en $t_0 \in I$. f admet le développement limité en t_0 à l'ordre 1 suivant :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t).$$

2 TANGENTES

DÉFINITION 2.1

Si $f'(t_0) \neq 0$ alors la tangente à la courbe au point $f(t_0)$ est la droite affine passant par $f(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$. L'équation est

$$\det \begin{pmatrix} x - u(t_0) & u'(t_0) \\ y - v(t_0) & v'(t_0) \end{pmatrix} = 0.$$

En d'autres termes, c'est l'équation :

$$(y - v(t_0)) \cdot u'(t_0) - (x - u(t_0)) \cdot v'(t_0) = 0.$$

On se demande quelles sont les conditions à l'existence de la tangente en un point ainsi que la position de la tangente par rapport à la courbe.

REMARQUE. On retrouve l'étude des fonctions à valeurs dans \mathbf{R} si on a

$$f(t) = (t, v(t)).$$

Supposons que u, v admettent des développements limités en t_0 à l'ordre $n \geq 2$. On a

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)^2 w_2 + \dots + (t - t_0)^n w_n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

où $w_2, \dots, w_n \in \mathbf{R}^2$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = 0_{\mathbf{R}^2}$.

1. Supposons que $f'(t_0) \neq 0$ et $f'(t_0)$ est non colinéaire à w_2 . On tronque le développement limité à l'ordre 2 :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)^2 w_2 + (t - t_0)^2 \varepsilon(t).$$

Soient $(a(t), b(t))$ les coordonnées de $\varepsilon(t)$ dans la base $(f'(t_0), w_2)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(t) - f(t_0) &= \left(t - t_0 + (t - t_0)^2 a(t) \right) f'(t_0) + (t - t_0)^2 (b(t) + 1) w_2 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} a(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = 0. \end{aligned}$$

Selon la coordonnée de $f'(t_0)$ on a que $(t - t_0)^2 a(t)$ tend vers 0 et alors $t - t_0$ détermine le signe. Selon la coordonnée w_2 , dans un voisinage suffisamment petit de t_0 on a que la coordonnée est de signe positif.

2. Supposons que $f'(t_0) \neq 0$, $w_2 = \lambda f'(t_0)$ et enfin w_3 et $f'(t_0)$ non colinéaires. On a alors dans la base $(f'(t_0), w_3)$:

$$f(t) - f(t_0) = \left(t - t_0 + \lambda(t - t_0)^2 \right) f'(t_0) + (t - t_0)^3 w_3 + (t - t_0)^3 \varepsilon(t).$$

On décompose $\varepsilon(t)$ dans cette base :

$$\varepsilon(t) = a(t)f'(t_0) + b(t)w_3.$$

On sait que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = 0.$$

Dans cette base, on a :

$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} t - t_0 + \lambda(t - t_0)^2 + (t - t_0)^3 a(t) \\ (t - t_0)^3 + (t - t_0)^3 b(t) \end{pmatrix}$$

Sur chaque coordonnée, le signe est celui de $t - t_0$.

REMARQUE. Supposons $f'(t_0) \neq 0$, $n \geq 3$ et il existe un entier $p \in \{3, \dots, n\}$ tel que les vecteurs w_2, w_3, \dots, w_{p-1} sont colinéaires à $f'(t_0)$ et tel que w_p n'est pas colinéaire à $f'(t_0)$. Ainsi, $(f'(t_0), w_p)$ est une base de \mathbf{R}^2 .

On écrit le développement limité de $f(t) - f(t_0)$ dans cette base. On étudie le signe des coordonnées de $f(t) - f(t_0)$ quand $t \rightarrow t_0$. Si p est pair alors la courbe est comme dans le cas $p = 2$ (la courbe est du côté de w_p par rapport à la tangente), sinon comme dans le cas $p = 3$ (elle traverse la tangente).

3. Supposons que $f'(t_0) = 0$ et que w_2, w_3 forme une base de \mathbf{R}^2 . On a

$$f(t) - f(t_0) = (t - t_0)^2 w_2 + (t - t_0)^3 w_3 + (t - t_0)^3 \varepsilon(t).$$

On décompose $\varepsilon(t)$ dans la base $(w_2, w_3) : \varepsilon(t) = a(t)w_2 + b(t)w_3$ avec $\lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = 0$. Les coordonnées dans cette base de $f(t) - f(t_0)$ sont alors :

$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} (t - t_0)^2 + (t - t_0)^3 a(t) \\ (t - t_0)^3 + (t - t_0)^3 b(t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la première coordonnée est positive et la seconde est du signe de $t - t_0$. Une telle situation est un *point de rebroussement*.

4. Supposons que $f'(t_0) = 0$, $w_3 = \lambda w_2$ et w_2, w_4 forme une base. On pose $\varepsilon(t) = a(t)w_2 + b(t)w_4$. Dans ces coordonnées :

$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} (t - t_0)^2 + \lambda(t - t_0)^3 + (t - t_0)^4 a(t) \\ (t - t_0)^4 (1 + b(t)) \end{pmatrix}.$$

Les deux coordonnées sont positives quand $t \rightarrow t_0$. C'est aussi un point de rebroussement

3 BRANCHES INFINIES

DÉFINITION 3.1

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée avec $f = (u, v)$. Soit $t_0 \in \bar{I} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$.

- On a une *branche infinie* quand $t \rightarrow t_0$ si soit u ou soit v n'est pas bornée.
- Si $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = a \in \mathbf{R}$ et si $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = \pm\infty$ alors la droite $x = a$ est une *asymptote verticale*.
- Si $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = a \in \mathbf{R}$ alors la droite $y = a$ est *asymptote horizontale*.
- Si u et v tendent vers $\pm\infty$ en t_0 :
 - Si $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t)/u(t) = a \in \mathbf{R}$ alors la droite $y = ax$ est direction asymptotique.
 - Si de plus $\lim_{t \rightarrow t_0} (v(t) - au(t)) = b$ alors la droite $y = ax + b$ est asymptote.

EXEMPLE. Soit f :

$$f : \begin{cases} \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbf{R}^2 \\ t \mapsto (\tan(t), 2t - 1/\cos(t)) \end{cases}.$$

On étudie l'asymptote en $t_0 = \pi/2$.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = -\infty.$$

On étudie le rapport v/u en $t \rightarrow t_0$. On pose $t = \pi/2 + h$.

$$\begin{aligned} u(t) &= \tan(\pi/2 - h) = \frac{\sin(\pi/2 - h)}{\cos(\pi/2 - h)} \\ u(t) &= \frac{\cos(h)}{\sin(h)} = \frac{1 - h^2/2 + h^2\varepsilon(h)}{h - h^3/6 + h^3\varepsilon(h)} \\ u(t) &= \frac{1}{h} \left(1 - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h) \right) \frac{1}{1 - \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon(h)} \\ u(t) &= \frac{1}{h} \left(1 - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h) \right) \left(1 + \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon(h) \right) \\ u(t) &= \frac{1}{h} \left(1 - \frac{h^2}{3} + h^2\varepsilon(h) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \pi - 2h - \frac{1}{\cos(\pi/2 - h)} = \pi - 2h - \frac{1}{\sin(h)} \\ v(t) &= \pi - 2h - \frac{1}{h - \frac{h^3}{6} + h^3\varepsilon(h)} \\ v(t) &= \pi - 2h - \frac{1}{h} \left(\frac{1}{1 - \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon(h)} \right) \\ v(t) &= -\frac{1}{h} + \pi - \frac{13}{6}h + h\varepsilon(h) \\ \frac{v(t)}{u(t)} &= \frac{-\frac{1}{h} + \pi - \frac{13}{6}h + h\varepsilon(h)}{\frac{1}{h} - \frac{1}{3}h + h\varepsilon(h)} \\ \frac{v(t)}{u(t)} &= \frac{-1 + \pi h - \frac{13}{6}h^2 + h^2\varepsilon(h)}{1 - \frac{1}{3}h^2 + h^2\varepsilon(h)} \\ \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} v(t)/u(t) &= -1. \end{aligned}$$

Et donc $y = -x$ est direction asymptotique.

$$\begin{aligned} v(t) + u(t) &= -\frac{1}{h} + \pi - \frac{13}{6}h - \frac{1}{h} + \frac{1}{3}h + h\varepsilon(h) \\ \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} v(t) + u(t) &= \pi. \end{aligned}$$

Et donc la droite d'équation $y = -x + \pi$ est asymptote en t_0 .

4 ÉTUDE DE COURBES PARAMÉTRÉES

Soit :

$$f: \begin{cases} \mathbf{R} \setminus \{-1, +1\} \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ t \mapsto \left(\frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, \frac{t^2}{t - 1} \right) \end{cases}.$$

On a :

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} \\ v'(t) &= \frac{t(t - 2)}{(t - 1)^2}. \end{aligned}$$

Au voisinage $t = 0$:

$$u(t) = -1 - 2t^2 + t^3\varepsilon(t)$$

$$v(t) = -t^2 - t^3 + t^3\varepsilon(t)$$

$$f(t) = (-1, 0) + t^2(-2, -1) + t^3(0, -1) + t^3\varepsilon(t)$$

$$f(0) = (-1, 0), f'(0) = (0, 0).$$

Les vecteurs $(-2, -1)$ et $(0, -1)$ sont linéairement indépendants.

$t = 0$ est un point singulier car $f'(0) = (0, 0)$.

BRANCHES INFINIES. On a :

— Une asymptote horizontale $y = -1/2$ quand $t \rightarrow -1$.

— Quand $t \rightarrow 1$:

$$\frac{v(t)}{u(t)} \frac{t^2(t+1)}{t^2+1} \xrightarrow{t \rightarrow 1} 1$$

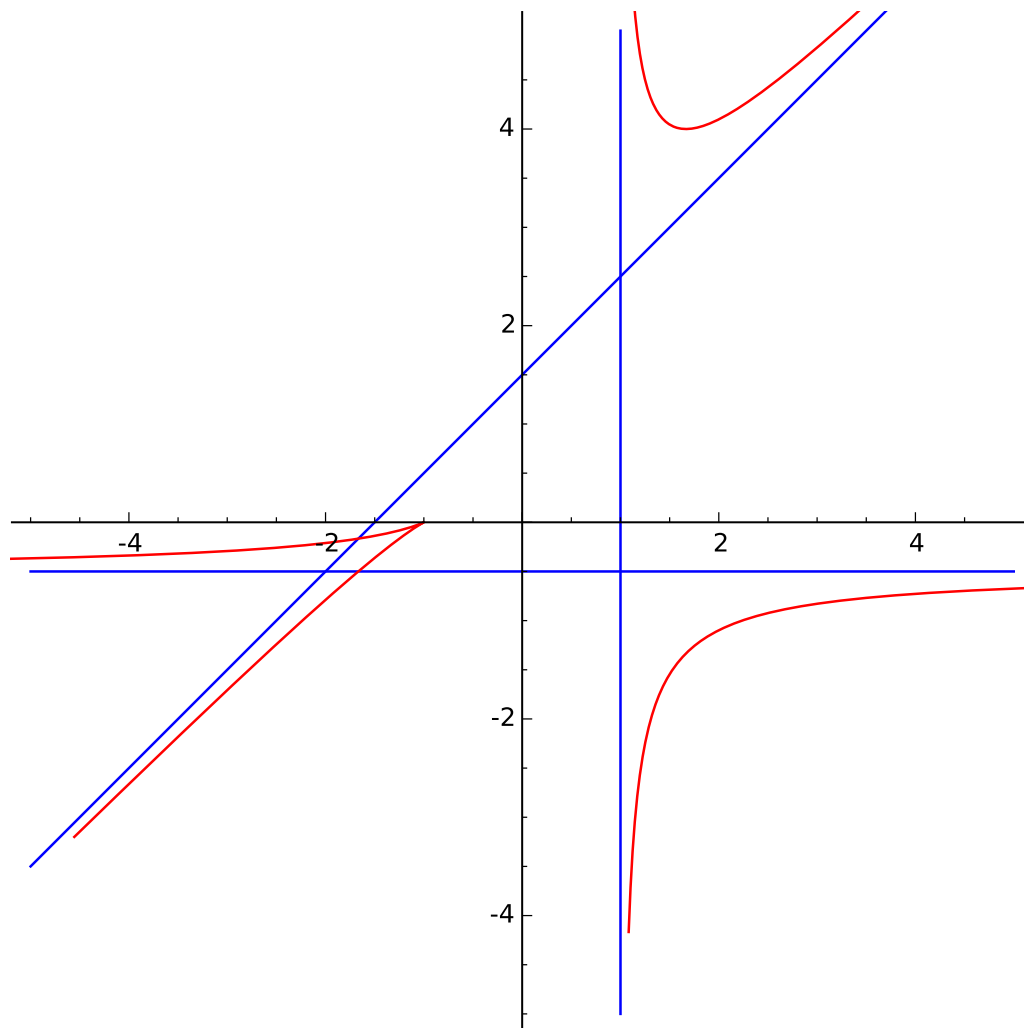
donc une direction asymptotique $y = x$.

$$v(t) - 1 \times u(t) = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1} \rightarrow \frac{3}{2}$$

et donc l'asymptote est $y = x + 3/2$.

— Quand $t \rightarrow -\infty$ alors $u \rightarrow 1$ et $v \rightarrow -\infty$. On a une branche infinie et $x = 1$ est asymptote verticale.

— Quand $t \rightarrow +\infty$ alors $u \rightarrow 1$ et $v \rightarrow \infty$. $x = 1$ est asymptote verticale.



Chapitre 5

Séries numériques

1 DÉFINITIONS

On considère des séries numériques, c'est-à-dire à valeurs dans \mathbf{R} .

DÉFINITION 1.1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite numérique.

On dit que la série $\sum u_n$ de terme général u_n converge si la suite de terme général

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

converge.

Si la suite s_n diverge, alors on dit que la série $\sum u_n$ de terme général u_n diverge.

Les s_n s'appellent les *sommes partielles*.

DÉFINITION 1.2

On note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

(quand elle est définie).

On l'appelle la *somme* de la série $(\sum u_n)$.

REMARQUE. La suite de terme général

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

converge si, et seulement si, la suite de terme général (pour n_0 fixé)

$$S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$$

converge.

PROPOSITION 1.3

Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0.

DÉMONSTRATION

Avec

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

et l la limite de s_n . Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de s_n , il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|l - s_n| < \varepsilon$. Et donc

$$|s_{n+1} - s_n| = |s_n + 1 - l + l - s_n| \leq |s_{n+1} - l| + |s_n - l| < 2\varepsilon.$$

Or

$$|s_{n+1} - s_n| = |u_{n+1}| < 2\varepsilon.$$

EXEMPLE – SÉRIES GÉOMÉTRIQUES. Soit $x \in \mathbf{R}$. On pose

$$u_n = a \cdot x^n.$$

On a

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

$$s_n = a \sum_{k=0}^n x^k$$

$$s_n = a \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{a}{1 - x} (1 - x^{n+1}).$$

- Si $|x| < 1$ alors $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $a/(1 - x)$.
- Si $|x| \geq 1$ alors la série $\sum ax^n$ diverge.

EXEMPLE – SÉRIE EXPONENTIELLE. Soit $x \in \mathbf{R}$. On regarde la série de terme général $x^n/n!$. Alors cette série a pour somme partielle :

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

et la formule de TAYLOR nous assure que s_n tend vers $\exp(x)$. La série est convergente pour tout x et de somme $\exp(x)$.

EXEMPLE. Soit $x \in \mathbf{R}$. On considère la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

- Si $|x| > 1$ alors la suite de terme général x^n/n ne converge pas et donc la série ne converge pas.
- Si $x = 1$ alors les sommes partielles sont

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Cependant

$$s_{2n} - s_n \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la série $\sum 1/n$ diverge.

— Si $-1 \leq x < 1$ alors pour tout $n \geq 1$, on pose

$$f_n: \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto 1 + t^2 + \dots + t^{n-1} \end{cases}$$

et pour tout $t \neq 1$:

$$f_n(t) = \frac{1 - t^n}{1 - t}$$

et alors

$$\frac{1}{1 - t} = f_n(t) + \frac{t^n}{1 - t}.$$

On peut intégrer, pour tout $x \in [-1, 1[$:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{1 - t} &= \int_0^x f_n(t) dt + \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt \\ -\log(1 - x) &= x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt \\ -\log(1 - x) &= s_n + \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt. \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'examiner la convergence du dernier terme.

1. Pour $0 \leq x < 1$, on a $0 \leq t \leq x < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{t^n}{1 - t} &\leq \frac{t^n}{1 - x} \\ \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt &\leq \frac{1}{1 - x} \int_0^x t^n dt \\ &\leq \frac{1}{1 - x} \frac{1}{n + 1} x^{n+1} \leq \frac{1}{1 - x} \frac{1}{n + 1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt = 0.$$

2. Pour $1 \leq x < 0$, on a $1 \leq x \leq t \leq 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt \right| &\leq \int_x^0 \frac{|t|^n}{1 - t} dt \\ &\leq \int_x^0 |t|^n dt \int_x^0 |t|^n dt = (-1)^n \int_x^0 t^n dt \\ &= \frac{(-1)^n}{n + 1} [0 - x^{n+1}] \\ &= \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n + 1} \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{n + 1} \leq \frac{1}{n + 1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Et donc on a aussi une limite nulle.

Finalement, on peut conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt.$$

Ainsi, les sommes partielles $\sum_{k=1}^n x^k/k$ ont pour limite $-\log(1 - x)$. La série converge donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1 - x).$$

REMARQUE. Posons une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$. On considère la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = a_n - a_{n+1}$. On a

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}.$$

Ainsi $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$ existe, c'est-à-dire si, et seulement si, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ existe.

EXEMPLE. On regarde la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

On a

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

EXEMPLE – NOMBRES DÉCIMAUX. On peut écrire un nombre réel comme $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \cdot 10^{-n}$ où $n_0 \in \mathbf{Z}$ et $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

2 OPÉRATIONS SUR LES SÉRIES

DÉFINITION 2.1

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries.

- La somme des séries est la série $\sum(u_n + v_n)$ de terme général $u_n + v_n$.
- Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Le produit de $\sum u_n$ par λ est la série $\sum \lambda u_n$ de terme général λu_n .

PROPOSITION 2.2

On a :

1. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors leur somme converge aussi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

2. Si la série $\sum u_n$ converge alors $\sum \lambda u_n$ aussi et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. Notons

$$U_n = \sum_{k=0}^n u_k ; V_n = \sum_{k=0}^n v_k.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n ; \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + V_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Par définition, $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ converge si, et seulement si, $\sum_{k=0}^n (u_k + v_k) = U_n + V_n$ converge. Donc on a bien, si $U_n + V_n$ converge :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

2. De même, en remarquant que $\sum \lambda u_n = \lambda \sum u_n$.

EXEMPLE. Soit $x \in \mathbf{R}$ et soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme. Il s'agit de montrer que la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{P(n)}{n!} x^n$$

est convergente et de donner sa somme. On se ramène à une combinaison linéaire de séries exponentielles :

$$\frac{P(n)}{n!} x^n = au_n + (a+b)v_n + cw_n$$

où

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n(n-1)}{n!} x^n \\ v_n &= \frac{n}{n!} x^n \\ w_n &= \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{P(k)}{k!} x^k &= P(0) + P(1)x + \sum_{k=2}^n \frac{P(k)}{k!} x^k \\ \sum_{k=0}^n \frac{P(k)}{k!} x^k &= c + (a+b+c)x + \sum_{k=2}^n \left((ax^2) \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} + (a+b)x \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + c \frac{x^k}{k!} \right) \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n &= c + (a+b+c)x + ax^2 e^x + (a+b)x(e^x - 1) + c(e^x - 2) \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n &= ax^2 e^x + (a+b)x e^x + c e^x \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n &= (ax^2 + (a+b)x + c) e^x. \end{aligned}$$

REMARQUE. On a vu qu'une somme de deux séries convergentes est convergente. On a aussi vu qu'une somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente. En effet, supposons que $\sum u_n$ converge et que $\sum v_n$ diverge. Considérons la série $\sum w_n = \sum (u_n + v_n)$. Supposons que $\sum_{k=0}^n w_k$ converge alors $\sum u_n$ et $\sum w_k$ convergent. Or, $\sum v_n = \sum (u_n - w_n)$ et ne peut converger. D'où :

PROPOSITION 2.3

Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n + v_n$ diverge.

REMARQUE. Une somme de deux séries divergentes peut converger ou diverger. En effet, considérons $\sum 1/n = \sum u_n$, c'est une série divergente. Cependant, $\sum u_n + \sum u_n$ diverge aussi, mais $\sum u_n - \sum u_n$ converge.

DÉFINITION 2.4

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries numériques. Considérons la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = a_n + ib_n \in \mathbf{C}$. On définit la convergence de $\sum u_n$ en disant qu'elle converge si, et seulement si, $(\sum_{k=0}^n u_k)$ converge, i.e. si, et seulement si, $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent.

3 CRITÈRES DE CONVERGENCE

3.1 Convergence des séries à terme positif

Soit $\sum u_n$ telle que $u_n \in \mathbf{R}_+$ pour tout n . On se demande à quelle condition la série $\sum u_n$ converge. Posons

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

La suite $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ainsi définie est croissante. Ainsi, $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente à l'unique condition qu'elle soit majorée. On a ainsi :

PROPOSITION 3.1

Une série de terme général positif converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles est majorée.

THÉORÈME 3.2 (De comparaison)

Soient $\sum u_n, \sum v_n$ des séries telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq u_n \leq v_n.$$

- Si la série $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ aussi.
- Si la série $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ aussi et sa somme est majorée par celle de $\sum v_n$.

DÉMONSTRATION

Notons

$$U_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

$$V_n = \sum_{k=0}^n v_k.$$

La proposition nous dit que $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est majorée et de même pour $\sum v_n$. Ainsi, si $\sum u_n$ diverge alors $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est non bornée et donc $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ non plus et donc $\sum v_n$ diverge.

Si $\sum v_n$ converge alors $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ étant majorée par $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui est majorée par un réel, donc $\sum u_n$ converge.

D'autre part, dans le second cas, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n. \end{aligned}$$

COROLLAIRE 3.3

Soient $\sum u_n, \sum v_n$ des séries de termes généraux u_n et v_n strictement positifs. Alors si la suite $(u_n/v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ a une limite finie non nulle alors on a $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum v_n$ converge.

DÉMONSTRATION

Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n/v_n$ avec $l \in \mathbf{R}^*$. Comme pour tout n , $u_n/v_n > 0$, on sait que $l > 0$. Fixons a, b tels que $0 < a < l < b$. Par convergence, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $a < u_n/v_n < b$, c'est-à-dire $av_n < u_n < bv_n$. Par le théorème de comparaison des séries, u_n converge si, et seulement si, v_n converge.

EXEMPLE 1. On considère la série de terme général

$$\forall n > 0, u_n = \frac{1}{n^2}.$$

On a vu que la série de terme général $v_n = 1/[n(n+1)]$ pour tout $n > 0$, converge. En effet $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et $\lim a_n = 0$ donc par le théorème de comparaison, $\sum v_n$ converge. On sait que

$$\forall n > 1, v_{n-1} > u_n$$

et

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi par le corollaire, $\sum u_n$ converge.

EXEMPLE 2. Considérons la série de terme général

$$u_n = \sin \left(\frac{\pi}{2^n} \right).$$

$$\forall n \geq 1, 0 < \frac{\pi}{2^n} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\forall n \geq 1, u_n \geq 0.$$

De plus

$$\forall x \in \mathbf{R}, |\sin x| \leq |x|$$

et donc

$$u_n = |u_n| \leq \frac{\pi}{2^n}.$$

La série de terme général v_n est une série géométrique de raison $1/2$. Donc elle converge et donc $\sum u_n$ converge.

EXEMPLE 3. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'entiers tels que $0 \leq x_n \leq 0$ pour tout $n \geq 0$. Considérons la série $\sum_{n \geq 0} x_n 10^{-n}$. Le terme général est positif et

$$0 \leq \frac{x_n}{10^n} \leq 10^{1-n}$$

et 10^{1-n} est le terme général d'une série géométrique de raison $1/10$. Cette série converge donc et donc $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ aussi.

3.2 Séries de RIEMANN

Soit $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$. On considère la série de terme général $1/n^\alpha$.

PROPOSITION 3.4

La série de terme général $1/n^\alpha$ avec $\alpha > 1$ converge. Elle diverge si $\alpha \leq 1$.

DÉMONSTRATION

Si $\alpha \leq 1$ alors pour tout $n \geq 1$, $n^\alpha \leq n$ et donc

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$$

or la série de terme général $1/n$ diverge.

Si $\alpha > 1$, on considère l'application

$$f : x \mapsto -\frac{1}{x^{\alpha-1}}.$$

De plus, $\alpha - 1 > 0$. On a :

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

Par le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[n, n+1]$:

$$f(n+1) - f(n) = f'(c)$$

avec $c \in]n, n+1[$. Comme

$$f'(x) = \frac{\alpha-1}{x^\alpha}$$

on a

$$f'(c) \geq \frac{\alpha-1}{(n+1)^\alpha}$$

et donc

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \geq \frac{\alpha-1}{(n+1)^\alpha}.$$

On pose

$$v_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

Les sommes partielles de $\sum v_n$ sont

$$\sum_{n=1}^k v_k = \frac{1}{1^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1.$$

Donc la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge, de somme 1.

On applique le théorème de comparaison, la série $\sum_{n \geq 1} 1/n^\alpha$ converge.

3.3 Convergence absolue**DÉFINITION 3.5**

Soit $\sum u_n$ une série de terme général u_n . Si la série de terme général $|u_n|$ est convergente, on dit que $\sum u_n$ est *absolument convergente*.

REMARQUE. Dans la définition, on peut prendre $u_n \in \mathbf{R}$ avec la valeur absolue ou $u_n \in \mathbf{C}$ avec le module.

THÉORÈME 3.6

Toute série absolument convergente est convergente.

DÉMONSTRATION

Soit $u_n \in \mathbf{R}$. On considère $v_n = |u_n| - u_n$. Par l'inégalité triangulaire :

$$0 \leq v_n \leq 2|u_n|.$$

Par hypothèse $\sum 2|u_n| = 2\sum |u_n|$ converge. Donc $\sum v_n$ converge par le théorème de comparaison. Comme $u_n = |u_n| - v_n$ on a que $\sum u_n$ converge.

Si $u_n \in \mathbf{C}$ alors en posant $u_n = a_n + ib_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbf{R}$ on a

$$0 \leq |a_n|, |b_n| \leq |u_n|.$$

Comme $\sum |u_n|$ converge, $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ aussi. Donc $\sum a_n$ et $\sum b_n$ converge et donc $\sum u_n$ aussi.

PROPOSITION 3.7

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

DÉMONSTRATION

Pour tout $k \geq 0$:

$$\left| \sum_{n=0}^k u_n \right| \leq \sum_{n=0}^k |u_n|$$

or $\sum |u_n|$ et $\sum u_n$ convergent et donc l'égalité tient pour $k = +\infty$.

REMARQUE. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors elles sont convergentes et donc leur $\sum u_n + v_n$ aussi. Mieux, $\sum u_n + v_n$ est absolument convergente. En effet $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$ et comme $\sum |u_n| + |v_n|$ est convergente, $\sum |u_n + v_n|$ est convergente.

EXEMPLE. Considérons la série de terme général

$$\frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$$

avec $\alpha \in \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}$.

$$\forall n \geq 1, \left| \frac{\cos nx}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

- si $\alpha > 1$ alors le théorème de comparaison conclut ;
- si $\alpha = 1$ et $x = 0$ alors le terme général est $1/n$ et la série diverge ;
- si $\alpha = 1$ et $x = \pi$ alors le terme général est $(-1)^n/n$ et alors la série converge (mais pas en valeur absolue).

EXEMPLE. Soit

$$u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n}, \quad |u_n| = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n} = \frac{2}{n\sqrt{n+2} + n\sqrt{n}}.$$

On a donc

$$|u_n| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

C'est une série de RIEMANN avec $\alpha = 3/2$ et donc la série $\sum u_n$ converge absolument.

3.4 Comparaison avec des séries géométriques

THÉORÈME 3.8 (Règle de D'ALEMBERT)

Soit $\sum u_n$ une série de terme général $u_n > 0$. S'il existe $K \in \mathbf{R}$ tel que $K < 1$ et pour tout n , $u_{n+1}/u_n \leq K$ alors $\sum u_n$ converge.

DÉMONSTRATION

On a :

$$u_n \leq K^n u_0$$

et donc comme $\sum K^n u_0$ converge, par le théorème de comparaison, $\sum u_n$ converge.

COROLLAIRE 3.9

Soit $\sum u_n$ la série dont le terme général, u_n , est strictement positif.

Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}/u_n = l$.

- Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge ;
- Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge.

DÉMONSTRATION

Supposons $l < 1$. Par définition, il existe n_0 et K entiers tels que $l < K < 1$ et pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1}/u_n \leq K$. Donc $\sum u_{n+n_0}$ converge et donc $\sum u_n$ aussi.

Supposons $l > 1$. Il existe n_0 et $K > 1$ tels que pour tout $n \geq n_0$ on a $u_{n+1}/u_n \geq K$. Donc $u_{n+1} \geq K u_n > u_n$ et donc $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

EXEMPLE. Soit $x \in \mathbf{R}$. On pose

$$u_n = n^2 x^n.$$

Si $x = 0$ alors $\sum u_n$ converge. Pour $x \neq 0$ on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} x.$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| > 0.$$

- Si $|x| < 1$ alors $\sum u_n$ est absolument convergente ;
- si $|x| > 1$ alors $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.