COURBES PARAMÉTRÉES

Table des matières

1. Définitions 1
2. Tangentes 2
3. Branches infinies 4
4. Étude de courbes paramétrées 5

1. Définitions

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbf{R}^2$ telle que $f(t) = (u(t), v(t))$.

Définition 1.1
Supposons que u, v sont continues.
Si u et v admettent un développement limité à l'ordre n au point t_0 :

$$u(t) = u_0 + u_1(t - t_0) + \ldots + u_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$
$$v(t) = v_0 + v_1(t - t_0) + \ldots + v_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

alors f admet un développement limité à l'ordre n en t_0 :

$$f(t) = f_0 + (t - t_0)f_1 + \ldots + (t - t_0)^n f_n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

$\forall i \in \{0, \ldots, n\}$, $f_i = (u_i, v_i)$.

L'égalité précédente s'appelle le *développement limité de f en t_0 à l'ordre n.*

Remarque. — On a bien

$$\lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = (0, 0).$$

Définition 1.2
Une fonction $f : I \to \mathbf{R}^2$ s'appelle *courbe paramétrée de* $\mathbf{R}^2$.

Supposons que f est dérivable en $t_0 \in I$. f admet le développement limité en t_0 à l'ordre 1 suivant :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t).$$

2. Tangentes

> Définition 2.1
> Si $f'(t_0) \neq 0$ alors la tangente à la courbe au point $f(t_0)$ est la droite affine passant par $f(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$. L'équation est
> $$\det\begin{pmatrix} x - u(t_0) & u'(t_0) \\ y - v(t_0) & v'(t_0) \end{pmatrix} = 0.$$
> En d'autres termes, c'est l'équation :
> $$(y - v(t_0)) \cdot u'(t_0) - (x - u(t_0)) \cdot v'(t_0) = 0.$$

On se demande quelles sont les conditions à l'existence de la tangente en un point ainsi que la position de la tangente par rapport à la courbe.

Remarque. — On retrouve l'étude des fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}$ si on a

$$f(t) = (t, v(t)).$$

Supposons que u, v admettent des développements limités en t_0 à l'ordre $n \geq 2$. On a

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)^2 w_2 + \ldots + (t - t_0)^n w_n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

où $w_2, \ldots, w_n \in \mathbf{R}^2$ et $\lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0_{\mathbf{R}^2}$.

1. Supposons que $f'(t_0) \neq 0$ et $f'(t_0)$ est non colinéaire à w_2. On tronque le développement limité à l'ordre 2 :

   $$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)^2 w_2 + (t - t_0)^2 \varepsilon(t).$$

   Soient $(a(t), b(t))$ les coordonnées de $\varepsilon(t)$ dans la base $(f'(t_0), w_2)$. Ainsi :

   $$\begin{aligned} f(t) - f(t_0) &= \left(t - t_0 + (t - t_0)^2 a(t)\right) f'(t_0) + (t - t_0)^2 (b(t) + 1) w_2 \\ \lim_{t \to t_0} a(t) &= \lim_{t \to t_0} b(t) = 0. \end{aligned}$$

   Selon la coordonnée de $f'(t_0)$ on a que $(t - t_0)^2 a(t)$ tend vers 0 et alors $t - t_0$ détermine le signe. Selon la coordonnée w_2, dans un voisinage suffisamment petit de t_0 on a que la coordonnée est de signe positif.

2. Supposons que $f'(t_0) \neq 0$, $w_2 = \lambda f'(t_0)$ et enfin w_3 et $f'(t_0)$ non colinéaires. On a alors dans la base $(f'(t_0), w_3)$:

$$f(t) - f(t_0) = \left(t - t_0 + \lambda(t-t_0)^2\right) f'(t_0) + (t-t_0)^3 w_3 + (t-t_0)^3\varepsilon(t).$$

On décompose $\varepsilon(t)$ dans cette base :

$$\varepsilon(t) = a(t)f'(t_0) + b(t)w_3.$$

On sait que

$$\lim_{t\to t_0} a(t) = \lim_{t\to t_0} b(t) = 0.$$

Dans cette base, on a :

$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} t - t_0 + \lambda(t-t_0)^2 + (t-t_0)^3 a(t) \\ (t-t_0)^3 + (t-t_0)^3 b(t) \end{pmatrix}$$

Sur chaque coordonnée, le signe est celui de $t - t_0$.

Remarque. — Supposons $f'(t_0) \neq 0, n \geq 3$ et il existe un entier $p \in \{3, \ldots, n\}$ tel que les vecteurs $w_2, w_3, \ldots, w_{p-1}$ sont colinéaires à $f'(t_0)$ et tel que w_p n'est pas colinéaire à $f'(t_0)$. Ainsi, $(f'(t_0), w_p)$ est une base de $\mathbf{R}^2$.

On écrit le développement limité de $f(t) - f(t_0)$ dans cette base. On étudie le signe des coordonnées de $f(t)-f(t_0)$ quand $t \to t_0$. Si p est pair alors la courbe est comme dans le cas $p = 2$ (la courbe est du côté de w_p par rapport à la tangente), sinon comme dans le cas $p = 3$(elle traverse la tangente).

3. Supposons que $f'(t_0) = 0$ et que w_2, w_3 forme une base de $\mathbf{R}^2$. On a

$$f(t) - f(t_0) = (t-t_0)^2 w_2 + (t-t_0)^3 w_3 + (t-t_0)^3\varepsilon(t).$$

On décompose $\varepsilon(t)$ dans la base (w_2, w_3) : $\varepsilon(t) = a(t)w_2 + b(t)w_3$ avec $\lim_{t\to t_0} a(t) = \lim_{t\to t_0} b(t) = 0$. Les coordonnées dans cette base de $f(t) - f(t_0)$ sont alors :

$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} (t-t_0)^2 + (t-t_0)^3 a(t) \\ (t-t_0)^3 + (t-t_0)^3 b(t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la première coordonnée est positive et la seconde est du signe de $t - t_0$. Une telle situation est un *point de rebroussement*.

4. Supposons que $f'(t_0) = 0$, $w_3 = \lambda w_2$ et w_2, w_4 forme une base. On pose $\varepsilon(t) = a(t)w_2 + b(t)w_4$. Dans ces coordonnées :

$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} (t-t_0)^2 + \lambda(t-t_0)^3 + (t-t_0)^4 a(t) \\ (t-t_0)^4(1 + b(t)) \end{pmatrix}.$$

Les deux coordonnées sont positives quand $t \to t_0$. C'est aussi un point de rebroussement

3. Branches infinies

Définition 3.1
Soit $f : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée avec $f = (u, v)$. Soit $t_0 \in \overline{I} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$.
- On a une *branche infinie* quand $t \to t_0$ si soit u ou soit v n'est pas bornée.
- Si $\lim_{t\to t_0} u(t) = a \in \mathbf{R}$ et si $\lim_{t\to t_0} v(t) = \pm\infty$ alors la droite $x = a$ est une *asymptote verticale.*
- Si $\lim_{t\to t_0} u(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t\to t_0} v(t) = a \in \mathbf{R}$ alors la droite $y = a$ est *asymptote horizontale.*
- Si u et v tendent vers $\pm\infty$ en t_0 :
  - Si $\lim_{t\to t_0} u(t)/v(t) = a \in \mathbf{R}$ alors la droite $y = ax$ est direction asymptotique.
  - Si de plus $\lim_{t\to t_0}(v(t) - au(t)) = b$ alors la droite $y = ax + b$ est asymptote.

Exemple. — Soit f :

$$f\colon \begin{cases} \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbf{R}^2 \\ \qquad t \mapsto (\tan(t), 2t - 1/\cos(t)) \end{cases}.$$

On étudie l'asymptote en $t_0 = \pi/2$.

$$\lim_{t\to t_0} u(t) = +\infty,\ \lim_{t\to t_0} v(t) = -\infty.$$

On étudie le rapport v/u en $t \to t_0$. On pose $t = \pi/2 + h$.

$$\begin{aligned}
u(t) &= \tan(\pi/2 - h) = \frac{\sin(\pi/2 - h)}{\cos(\pi/2 - h)} \\
u(t) &= \frac{\cos(h)}{\sin(h)} = \frac{1 - h^2/2 + h^2\varepsilon(h)}{h - h^3/6 + h^3\varepsilon(h)} \\
u(t) &= \frac{1}{h}\left(1 - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)\right)\frac{1}{1 - \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon(h)} \\
u(t) &= \frac{1}{h}\left(1 - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)\right)\left(1 + \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon(h)\right) \\
u(t) &= \frac{1}{h}\left(1 - \frac{h^2}{3} + h^2\varepsilon(h)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \pi - 2h - \frac{1}{\cos(\pi/2 - h)} = \pi - 2h - \frac{1}{\sin(h)} \\
v(t) &= \pi - 2h - \frac{1}{h - \frac{h^3}{6} + h^3\varepsilon(h)} \\
v(t) &= \pi - 2h - \frac{1}{h}\left(\frac{1}{1 - \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon(h)}\right) \\
v(t) &= -\frac{1}{h} + \pi - \frac{13}{6}h + h\varepsilon(h) \\
\frac{v(t)}{u(t)} &= \frac{-\frac{1}{h} + \pi - \frac{13}{6}h + h\varepsilon(h)}{\frac{1}{h} - \frac{1}{3}h + h\varepsilon(h)} \\
\frac{v(t)}{u(t)} &= \frac{-1 + \pi h - \frac{13}{6}h^2 + h^2\varepsilon(h)}{1 - \frac{1}{3}h^2 + h^2\varepsilon(h)}
\end{aligned}
$$

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} v(t)/u(t) = -1.$$

Et donc $y = -x$ est direction asymptotique.

$$v(t) + u(t) = -\frac{1}{h} + \pi - \frac{13}{6}h - \frac{1}{h} + \frac{1}{3}h + h\varepsilon(h)$$

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} v(t) + u(t) = \pi.$$

Et donc la droite d'équation $y = -x + \pi$ est asymptote en t_0.

4. Étude de courbes paramétrées

Soit :

$$f \colon \begin{cases} \mathbf{R} \setminus \{-1, +1\} \to \mathbf{R}^2 \\ \qquad\qquad t \mapsto \left(\dfrac{t^2+1}{t^2-1}, \dfrac{t^2}{t-1}\right) \end{cases}.$$

On a :

$$
\begin{aligned}
u'(t) &= \frac{-4t}{(t^2-1)^2} \\
v'(t) &= \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}.
\end{aligned}
$$

Au voisinage $t = 0$:

$$
\begin{aligned}
&u(t) = -1 - 2t^2 + t^3\varepsilon(t) \\
&v(t) = -t^2 - t^3 + t^3\varepsilon(t) \\
&f(t) = (-1, 0) + t^2(-2, -1) + t^3(0, -1) + t^3\varepsilon(t) \\
&f(0) = (-1, 0),\ f'(0) = (0, 0).
\end{aligned}
$$

Les vecteurs $(-2, -1)$ et $(0, -1)$ sont linéairement indépendants.

$t = 0$ est un point singulier car $f'(0) = (0, 0)$.

Branches infinies. — On a :

— Une asymptote horizontale $y = -1/2$ quand $t \to -1$.

— Quand $t \to 1$:

$$\frac{v(t)}{u(t)} \frac{t^2(t+1)}{t^2+1} \xrightarrow[t \to 1]{} 1$$

donc une direction asymptotique $y = x$.

$$v(t) - 1 \times u(t) = \frac{t^2+t+1}{t+1} \to \frac{3}{2}$$

et donc l'asymptote est $y = x + 3/2$.

— Quand $t \to -\infty$ alors $u \to 1$ et $v \to -\infty$. On a une branche infinie et $x = 1$ est asymptote verticale.

— Quand $t \to +\infty$ alors $u \to 1$ et $v \to \infty$. $x = 1$ est asymptote verticale.