COURS COMPLET DE MM3

Sommaire

Première partie

Algèbre

Table des matières

Chapitre 1

Groupes et groupes symétriques

1 INTRODUCTION

1.1 Groupe abstrait

Définition 1.1.0.1. —
Un groupe est la donnée d'un couple $(G, \cdot)$ où G est un ensemble et $\cdot : G \times G \to G$ une loi de composition interne, telle que :

1. associativité :
$$\forall a, b, c \in G,\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$
2. existence de l'élément neutre $e \in G$:
$$\forall g \in G,\ g \cdot e = e \cdot g = g;$$
3. existence de l'inverse :
$$\forall x \in G, \exists y \in G,\ x \cdot y = y \cdot x = e.$$

Notations. Pour un groupe multiplicatif on note ab l'élément $a \cdot b$, l'élément neutre est noté 1 et l'inverse de a est noté de a^{-1}.

Démonstration 1.1.0.1 (Unicité de l'élément neutre et de l'inverse). —
Soient e, e' deux éléments neutres. Alors
$$e' = e \cdot e' = e.$$
Soient b, c inverses de a. Alors :
$$b = b \cdot a \cdot c = c.$$

1.2 Groupe commutatif

Définition 1.2.0.2 (Groupe commutatif (ou Abélien)). —
Un groupe G est commutatif si la loi de composition l'est :
$$\forall x, y \in G,\ xy = yx.$$

Notations. En général la loi de composition d'un tel groupe est notée comme un groupe additif $(G, +)$. Le neutre est alors 0 et l'inverse de x est $-x$.

1.3 Exemples

— Le couple $(\mathbf{Z}, +)$ est un groupe abélien où $+$ est l'addition usuelle des entiers.
— $(\mathbf{R}, +)$ et $(\mathbf{Q}, +)$ sont également des groupes abéliens.
— $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \times)$ et $(\mathbf{Q} \setminus \{0\}, \times)$ sont des groupes abéliens.
— $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ est un groupe pour la composition de matrices en tant que loi de composition. Ce n'est pas un groupe commutatif.

2 SOUS-GROUPE

2.1 Sous-groupe

DÉFINITION 2.1.0.3 (Sous-groupe). —
Soit G un groupe (multiplicatif) et $H \subset G$ un sous-ensemble de G. H est un sous-groupe de G si c'est un groupe avec la loi de composition et d'inverse astreintes à H [1§].

PROPOSITION 2.1.0.1. —
Soit G un groupe.
Si $(H_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-groupes de G alors $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G.

DÉFINITION 2.1.0.4. —
Pour tout $i \in I$, H_i vérifie la propriété de sous-groupe et donc l'intersection aussi.

REMARQUE. Généralement la réunion de sous-groupes n'est pas un sous-groupe. En effet si $x \in H_1$ et $y \in H_2$ alors il n'y a aucune raison que $xy \in \bigcup H_i$.

Pour une équivalence il faut rajouter une hypothèse. Si H, K sont deux sous-groupes de G alors $H \cup K$ est un sous-groupe si, et seulement si, $H \subset K$ ou $K \subset H$.

En effet supposons $H \not\subset K$ et que $H \cup K$ est un sous-groupe. Si $K \not\subset H$ alors on peut choisir $x \in K - K \cap H$ et $y \in H - K \cap H$. On a $x, y \in K \cup H$ et donc par hypothèse $xy \in H \cup K$ et donc il existe des inverses respectifs x^{-1}, y^{-1}. Supposons $xy \in H$: $H \ni (xy)y^{-1} = xe = x \in H$ absurde.

DÉFINITION 2.1.0.5 (Groupe engendré). —
Si G est un groupe et X une partie de G alors on appelle sous-groupe de G engendré par X le plus petit sous-groupe de G contenant X. On le notera ici $\langle X\rangle$.
On a de plus si on note $\mathbb{G}$ l'ensemble des sous-groupes de G :

$$\langle X\rangle = \bigcap_{H\in\mathbb{G} \text{ et } H\supset X} H.$$

EXEMPLE. Soit G un groupe et $x \in G$. Alors :

$$\langle x\rangle = \left\{x^k \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

En effet c'est un sous-groupe de $\langle x\rangle$ et le plus petit.

2.2 Ordre d'un groupe et d'un élément

DÉFINITION 2.2.0.6 (Ordre d'un groupe). —
Si G est un groupe fini, on appelle *ordre de G* son cardinal, on le note généralement $|G|$ ou $\sharp G$.
Si G est un groupe et $x \in G$ alors on appelle *ordre de x* le cardinal de son sous-groupe engendré (s'il est fini).
Dans le cas où le groupe en question ne serait pas fini, on dit que l'ordre est infini.

EXEMPLES.
— Dans $\mathbf{Z}$, tous les éléments non nuls sont d'ordre infini.

1§. C'est-à-dire si H est stable par l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$.

— Dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est d'ordre n puisque toute classe admet un représentant dans $\{0, \ldots, n-1\}$.
— Ordre des éléments de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$:

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\lvert x \rvert$	1	4	2	4

Théorème 2.2.0.1 (Théorème de Lagrange). —
Pour tout groupe G et tout sous-groupe H de G, l'ordre (i.e. le cardinal) de H divise l'ordre de G :

$$\sharp H \mid \sharp G.$$

Démonstration 2.2.0.2 (Théorème de Lagrange). —
Le cardinal de l'ensemble G/H est appelé *indice* de H dans G et est noté $[G : H]$. De plus, ses classes forment une partition de G et chacune d'entre elles a le même cardinal que H. On a alors :

$$\sharp G = \sharp H \times [G : H].$$

3 MORPHISME DE GROUPES

3.1 Morphisme de groupes

DÉFINITION 3.1.0.7. —
Soient G, H deux groupes. Une application $f : G \to H$ est un morphisme de groupes si :

$$\forall x, y \in G,\ f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

PROPOSITION 3.1.0.2. —
Soient $f : G \to H$ un morphisme de groupes. Alors :

1. $f(e_G) = e_H$;
2. $\forall x \in G,\ f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

3.2 Image et noyau

DÉFINITION 3.2.0.8. —
Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes. On définit :

1. $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G \,|\, f(x) = e\}$;
2. $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \,|\, x \in G\}$.

PROPOSITION 3.2.0.3. —
Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes.

1. $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-groupes de G et H respectivement ;
2. f est injective si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f) = \{e\}$;
3. f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) = H$.

DÉMONSTRATION 3.2.0.3. —
Point par point :

1. On a bien entendu $f(e) = e$ et $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$ pour tout $x \in G$. Ainsi $\mathrm{Im}(f) = f(G)$ est un sous-groupe de H.
   Soient $x, y \in G$, alors $f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = ee^{-1} = e$ donc $xy^{-1} \in G$. De plus $f(e) = e$ donc $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-groupe de G.
2. Soient $x, y \in G$:

$$(f(x) = f(y) \iff x = y) \iff \left(f(xy^{-1}) = e \iff xy^{-1} = e\right).$$

3. Par définition, si $\mathrm{Im}(f) = H$ alors f est surjective et réciproquement.

4 GROUPE SYMÉTRIQUE

4.1 Groupe de permutations

Définition 4.1.0.9. —
Soit E un ensemble. On définit :

$$S_E = \{\text{bijections } E \to E\}.$$

La loi étant la composition des applications. Elle est associative, admet un élément neutre (application identité) et toute application admet une application inverse par définition.

Proposition 4.1.0.4. —
Si $\sharp E = n$ alors S_E est isomorphe (au sens de groupes) à $S_{\{1,2,\ldots,n\}} := S_n$.

Démonstration 4.1.0.4. —
Puisque $\sharp E = n$ il existe une bijection $\phi = E \to \{1,2,\ldots,n\}$. On considère alors l'application de $\theta : S_E \to S_n$ définie par : $\omega \mapsto \phi \circ \omega \circ \phi^{-1}$. Comme ω, ϕ sont des bijections, l'application $\phi \circ \omega \circ \phi^{-1}$ est une bijection. L'application θ est bien définie.
On a :

$$\begin{aligned}\theta(\omega' \circ \omega) &= \phi \circ (\omega' \circ \omega) \circ \phi^{-1}\\ \theta(\omega' \circ \omega) &= \phi \circ \omega' \circ \mathrm{id} \circ\ \omega \circ \phi^{-1}\\ \theta(\omega' \circ \omega) &= \theta(\omega') \circ \theta(\omega).\end{aligned}$$

θ est bien un morphisme de groupes. On a $\theta^{-1}(\omega) = \phi^{-1} \circ \omega \circ \phi$ qui fait de θ une bijection.

Définition 4.1.0.10 (Groupe symétrique). —
On appelle S_n le *groupe symétrique*.

Remarque. On omet la notation $\circ$. Si $\omega \in S_n$ on décrit son action sur $\{1,2,\ldots,n\}$ par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \omega(1) & \omega(2) & \ldots & \omega(n) \end{pmatrix}.$$

Exemple de composition. Dans S_4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.2 Transpositions et cycles

Définition 4.2.0.11 (Transposition). —
Une *transposition* de S_n est une permutation qui échange deux éléments et laisse invariants les $n-2$ autres.

Notation. Pour tous $i, j \in \{1,2,\ldots,n\}$ avec $i \neq j$ on note (ij) la transposition :

$$(ij) : \begin{cases} i \mapsto j \\ j \mapsto i \\ k \mapsto k,\ \forall k \neq i,j \end{cases}.$$

REMARQUE. Une transposition est une involution. C'est à dire que l'ordre d'une transposition est 2.

PROPOSITION 4.2.0.5. —
$\sharp S_n = n!$.

DÉFINITION 4.2.0.12 (Cycle). —
On appelle *cycle* de longueur $r > 1$ (noté r-cycle) (dans S_n) une permutation ω telle qu'il existe $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vérifiant :

1. $\omega(x_1) = x_2, \omega^n(x_1) = x_{1+n}$ avec $n < r$;
2. $\omega(x_r) = x_1$;
3. $\omega(x) = x$ si $x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$.

NOTATION. On note un tel cycle : $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_r \end{pmatrix}$.

REMARQUE. Les 2-cycles sont exactement les transpositions.

EXEMPLE. Dans S_3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases}.$$

4.3 Décomposition des cycles

DÉFINITION 4.3.0.13 (Support). —
On appelle *support* du cycle ω le sous-ensemble :

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}.$$

LEMME 4.3.0.1. —
Deux cycles de supports disjoints commutent.

DÉMONSTRATION 4.3.0.5. —
Soient :

$$\begin{cases} v = (x_1, x_2, \ldots, x_r) \\ w = (y_1, y_2, \ldots, y_s) \end{cases}$$

avec $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\} \cap \{y_1, y_2, \ldots, y_s\} = \emptyset$.
Sur un élément extérieur du support la permutation agit comme l'identité donc deux supports disjoints impliquent que les permutations associées permutent (puisque que l'identité permute).

LEMME 4.3.0.2. —
Un r-cycle est d'ordre r.

DÉMONSTRATION 4.3.0.6. —
Soit $w = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_r \end{pmatrix}$ un r-cycle. Il est clair qu'un élément du support est d'ordre r. Les autres restent fixés par w et donc w est d'ordre r.

Proposition 4.3.0.6. —
Toute permutation de S_n est décomposable en produit de cycles de supports disjoints. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Exemples. Soit :

$$S_5 \ni \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = w.$$

On peut décomposer w :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$S_8 \ni w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 7 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Théorème 4.3.0.2. —
Le groupe symétrique est engendré par les transpositions.

Démonstration 4.3.0.7. —
On procède par récurrence sur n.

1. $S_2 = \left\{1, \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ est engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Soit $n > 2$, supposons que S_{n-1} est engendré par les transpositions de S_{n-1}. Soit $w \in S_n$:
   (a) Soit $w(n) = n$ et alors on décompose w en cycles de tailles inférieures ou égales à S_{n-1} et c'est démontré.
   (b) Soit $w(n) \neq n$. On pose $m = w(n)$ et soit $t = \begin{pmatrix} n & m \end{pmatrix}$. On pose $v = tw$ et alors $v(n) = n$ et on lui applique le cas précédent. On a alors par unicité de la décomposition que w est elle-même engendrée par des transpositions et c'est démontré.

Théorème 4.3.0.3. —
On a les propositions suivantes :

1. Si $w \in S_n$ est une permutation qui s'écrit de deux façons différentes comme produit de transpositions :

   $$w = \tau_1\tau_2 \dots \tau_r = \tau_1'\tau_2' \dots \tau_{r'}',$$

   alors $(-1)^r = (-1)^{r'}$.
   On appelle $(-1)^r$ la *signature* de w.
2. La signature est un morphisme de groupes de $S_n \to \{1, -1\} \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Démonstration 4.3.0.8. —
Soit $w \in S_n$. On pose :

$$\varepsilon(w) = \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{w(i) - w(j)}{i - j}$$
$$\varepsilon(w) = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(w(i) - w(j))}{\prod_{1\leq i<j\leq n}(i - j)}$$
$$\varepsilon(w) = \frac{N}{D}.$$

Avec

$$N = \prod_{1\leq i,j\leq n \ ; \ w^{-1}(i)<w^{-1}(j)} (i - j) = \pm D.$$

D'où :

$$\varepsilon(w) = \pm 1.$$

EXEMPLE. $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. On a :

$$\varepsilon(w) = \frac{(w(1)-w(2))(w(1)-w(3))(w(2)-w(3))}{(1-2)(1-3)(2-3)} = \frac{(2-3)(2-1)(3-1)}{(1-2)(1-3)(2-3)} = 1.$$

LEMME 4.3.0.3. —
On a :

1. $\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ est un morphisme de groupes ;
2. $\varepsilon(ij) = -1$ pour tout $i \neq j$.

DÉMONSTRATION 4.3.0.9 (Théorème). —
Si

$$w = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r = \tau_1' \tau_2' \dots \tau_{r'}'$$

alors par le lemme :

$$\varepsilon(w) = (-1)^r = (-1)^{r'}.$$

DÉMONSTRATION 4.3.0.10 (Lemme). —
Soit $E = \{(ij) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. On pose :

$$f_w : \begin{cases} E \to E \\ \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w(i) & w(j) \end{pmatrix} \text{ si } w(i) < w(j) \\ \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w(j) & w(i) \end{pmatrix} \text{ si } w(i) > w(j) \end{cases}.$$

f est une bijection car elle est injective et l'ensemble de départ et d'arrivée ont le même cardinal qui est fini.
Donc on a :

$$\varepsilon(w) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n}(w(i) - w(j))}{\prod_{(i,j) \in E}(w(i) - w(j))}$$
$$\varepsilon(w) = \pm 1.$$

Pour vérifier que ε est un morphisme, on calcul $\varepsilon(wv)$:

$$\varepsilon(wv) = \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{i - j}$$
$$\varepsilon(wv) = \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \prod_{(i,j) \in E} \frac{v(i) - v(j)}{i - j}$$
$$\varepsilon(wv) = \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \varepsilon(v).$$

On calcule :

$$\varepsilon(w) \stackrel{?}{=} \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)}$$
$$\varepsilon(w) = \prod_{(i,j) \in E_1} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \prod_{(i,j) \in E_2} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)}$$

Où $E_1 = \{(i,j) \in E \mid v(i) < v(j)\}$ et $E_2 = \{(i,j) \in E \mid v(j) < v(i)\}$; $E = E_1 \coprod E_2$.

$$\varepsilon(w) = \prod_{(i,j) \in E_2} \frac{wv(j) - wv(i)}{v(j) - v(i)} \prod_{(i,j) \in E_1} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)}$$
$$\varepsilon(w) = \prod_{i<j \,;\, v^{-1}(j) < v^{-1}(i)} \frac{w(i) - w(j)}{i - j} \prod_{i<j \,;\, v^{-1}(i) < v^{-1}(j)} \frac{w(i) - w(j)}{i - j}$$
$$\varepsilon(w) = \prod_{i<j} \frac{w(i) - w(j)}{i - j}$$

Chapitre 2

Déterminants et réduction

1 DÉTERMINANTS

1.1 Différentes définitions

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ avec $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$

Définition 1.1.0.14 (Déterminant). —
On définit en premier lieu :

$$\det A = \sum_{w\in S_n} \varepsilon(w) a_{w(i),1} \cdot a_{w(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{w(n),n}.$$

C'est la formule de Cramer.

Définition 1.1.0.15. —
Une seconde définition possible :
Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, soit $A_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ la matrice (extraite) obtenue en enlevant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A.
On a alors :

$$\det{}' A = a_{1,1} \cdot \det{}'(A_{1,1}) - a_{1,2} \cdot \det{}'(A_{1,2}) + \ldots + (-1)^{n-1} a_{1,n} \cdot \det{}'(A_{1,n}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1,i} \cdot \det{}'(A_{1,i})$$

Exemple. Prenons :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ A_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne avec la seconde définition :

$$\det A = 2\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2. On vérifie que les deux définitions coïncident :

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}\det(a_{2,2}) - a_{1,2}\det(a_{2,1}) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.$$

Remarque. Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$ un n-uplet de vecteurs de E. Pour tout j, on pose :

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot e_i \quad a_{i,j} \in \mathbf{R}.$$

On appelle *déterminant* dans la base B de $(u_1, \ldots, u_n)$ le réel :

$$\det_B(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det(a_{i,j}).$$

Exemple. Pour $n = 2$. On prend :

$$u_1 = 2e_1 + 3e_2,$$
$$u_2 = -e_1 + 6e_2.$$

On a alors :

$$\det_B(u_1, u_2) = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 15.$$

Remarque. Si $u_j = e_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ alors $\det_B(e_1, \ldots, e_n) = \det(I_d) = 1$.

Proposition 1.1.0.7. —
On a les énoncés :

1. pour tout $w \in S_n$:

$$\det_B(u_{w(1)}, u_{w(2)}, \ldots, u_{w(n)}) = \varepsilon(w)\det_B(u_1, u_2, \ldots, u_n);$$

2. on en déduit que le déterminant change de signe si on échange deux colonnes ;
3. si pour $i \neq j$ on a $u_i = u_j$ alors le déterminant est nul (puisque négatif et positif simultanément).

Démonstration 1.1.0.11. —
Il suffit de montrer le premier point.
On sait que S_n est engendré par les transpositions. On suppose donc que $w \in S_n$ est une transposition.
En fait, S_n est engendré par les transpositions simples, i.e. les transpositions de la forme $(k, k+1)$ avec $1 \leq k < n$. [1§]
On suppose donc que w est de la forme $(k, k+1)$. Soit A la matrice $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de ces n vecteurs dans les coordonnées de la base B. Soit A' la matrice obtenue en permutant les colonnes k et $k+1$ de A. Il faut donc vérifier que :

$$\det A' = \varepsilon(w)\det A = -\det A.$$

On calcule à gauche et à droite :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{1,j}),$$
$$\det A' = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a'_{1,j} \det(A'_{1,j}).$$

— Pour $j \neq k, k+1$ on a $a'_{1,j} = a_{1,j}$ et $A'_{1,j}$ est obtenue en échangeant les colonnes k et $k+1$ de $A_{1,j}$
— Pour $j = k$ on a $a'_{1,k} = a_{1,k+1}$ et donc $A'_{1,k} = A_{1,k+1}$.
— Pour $j = k+1$ on a $a'_{1,k+1} = a_{1,k}$ et donc $A'_{1,k+1} = A_{1,k}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\det A' &= \sum_{j\neq k,k+1} (-1)^{j+1}\det(A'_{i,j})^{2\S} + (-1)^{k+1}a'_{1,k}\det(A'_{1,k}) + (-1)^k a'_{1,k+1}\det(A'_{1,k+1}),\\
\det A' &= \sum_{j\neq k,k+1} (-1)^{j+1}(-\det(A_{i,j})) + (-1)^{k+1}a_{1,k+1}(-\det(A_{1,k+1})) + (-1)^k a_{1,k}(-\det(A_{1,k})),\\
\det A' &= -\det A.
\end{aligned}$$

1.2 Formes n-linéaires alternées

DÉFINITION 1.2.0.16 (Forme n-linéaire). —
Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Une forme n-linéaire sur E est une application $\varphi : E^n \to \mathbf{R}$ qui est linéaire sur chaque composante.

PROPOSITION 1.2.0.8. —
Soit B une base de E avec $\dim E = n$.

$$\det{}_B : \begin{cases} E^n \to \mathbf{R} \\ (u_1, \dots, u_n) \mapsto \det{}_B(u_1, \dots, u_n) \end{cases}$$

est une forme n-linéaire.

DÉMONSTRATION 1.2.0.12. —
On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & aa'_{1,k} + ba''_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & aa'_{2,k} + ba''_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a'_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a'_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a''_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a''_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

On veut montrer :

$$\det A = a\det A' + b\det A''.$$

On calcule :

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{j\neq k} (-1)^{j+1}a_{1,j}\det(A_{i,j}) + (-1)^{k+1}(aa'_{1,k} + ba''_{1,k})\det(A_{1,k}),\\
\det A' &= \sum_{j\neq k} (-1)^{j+1}a_{1,j}\det(A'_{i,j}) + (-1)^{k+1}a'_{1,k}\det(A_{1,k}),\\
\det A'' &= \sum_{j\neq k} (-1)^{j+1}a_{1,j}\det(A''_{i,j}) + (-1)^{k+1}a''_{1,k}\det(A_{1,k})
\end{aligned}$$

On doit alors montrer :

$$\forall j \neq k,\ \det A_{i,j} = a\det(A'_{i,j}) + b\det(A''_{i,j})$$

ce qui est démontré par hypothèse de récurrence.

1§. En effet, toute transposition est un produit de transpositions simples par une conjugaison adaptée : on « renomme » les éléments.

2§. Par récurrence sur n on a $\det(A'_{i,j}) = -\det(A_{i,j})$.

Définition 1.2.0.17 (Forme n-linéaire alternée). —
Soit $\varphi : E^n \to \mathbf{R}$ une forme n-linéaire alternée avec E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
φ est une forme n-linéaire alternée si on a :

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$$

dès que deux composantes u_i, u_j avec $i \neq j$ coïncident.

Remarque. On en déduit que le déterminant dans une base donnée est une forme n-linéaire alternée.

Proposition 1.2.0.9. —
Soit φ une forme n-linéaire alternée. Alors pour tout $w \in S_n$, $\varphi(u_{w(1)}, \dots, u_{w(n)}) = \varepsilon(w)\varphi(u_1, \dots, u_n)$.

Démonstration 1.2.0.13. —
On peut supposer que w est une transposition simple : $w = (k, k+1)$ avec $1 \leq k < n$.
On veut montrer :

$$\varphi(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, u_k, u_{k+2}, \dots, u_n) = -\varphi(u_1, \dots, u_n).$$

Pour simplifier les notations, on oublie les indices u_i avec $i \neq k, k+1$. On a :

$$\varphi(u_k + u_{k+1}, u_k + u_{k+1}) = 0$$

et donc par linéarité :

$$\varphi(u_k, u_k) + \varphi(u_k, u_{k+1}) + \varphi(u_{k+1}, u_k) + \varphi(u_{k+1}, u_{k+1}) = 0 \iff \varphi(u_k, u_{k+1}) = -\varphi(u_{k+1}, u_k).$$

Proposition 1.2.0.10. —
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $\varphi : E^n \to \mathbf{R}$ une forme n-linéaire alternée. Alors :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(u_1, \dots, u_n)\varphi(e_1, \dots, e_n)$$

où les u_i sont exprimés dans la base B.

Remarque. Toutes les formes n-linéaires alternées sont proportionnelles au déterminant.

Démonstration 1.2.0.14. —
Soit $u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$, les $a_{i,j}$ sont les coordonnées des u_j dans la base B.
On a :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n a_{i,1} e_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,n} e_i\right).$$

Comme φ est n-linéaire alternée :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \sum_{w \in S_n} a_{w(1),1} a_{w(2),2} \dots a_{w(n),n} \varphi(e_{w(1)}, \dots, e_{w(n)})$$
$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \sum_{w \in S_n} a_{w(1),1} a_{w(2),2} \dots a_{w(n),n} \varepsilon(w) \varphi(e_1, \dots, e_n)$$
$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(u_1, \dots, u_n)\varphi(e_1, \dots, e_n)$$

Remarques. On a démontré :

1. Pour une base B choisie, le déterminant $\det_B$ est une forme n-linéaire alternée ;
2. pour toute forme n-linéaire alternée, φ, on a : $\varphi(\cdot) = \det_B(\cdot)\varphi(B)$;

3. en particulier, les deux déterminants coïncident.

PROPOSITION 1.2.0.11. —
Pour tout $A \in M_n(\mathbf{R})$ on a :

$$\det(A) = \det(A^t).$$

DÉMONSTRATION 1.2.0.15. —
On a :

$$A = (a_{i,j})$$
$$A^t = (b_{i,j}),\ b_{i,j} = a_{j,i}$$

On calcule par la formule de CRAMER :

$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^{n} b_{w(i),i},$$
$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^{n} a_{i,w(i)}.$$

Pour w fixé, dans i décrit 1 à n alors $w(i)$ décrit également 1 à n. On effectue un changement de variable $j = w(i)$ et alors $i = w^{-1}(j)$ et on a :

$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{j=1}^{n} a_{w^{-1}(j),j},$$
$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{w(j),j},$$
$$\det(A^t) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{j=1}^{n} a_{w(j),j},$$
$$\det(A^t) = \det(A).$$

REMARQUE. On peut calculer $\det(A)$ en développant par rapport à la première ligne ou la première colonne (au choix). On a alors :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^n a_{i,1} \det(A_{i,1}).$$

PROPOSITION 1.2.0.12. —
Si $A \in M_n(\mathbf{R})$ est triangulaire alors :

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

DÉMONSTRATION 1.2.0.16. —
Supposons A triangulaire supérieure, c'est-à-dire $a_{i,j} = 0$ si $i > j$.
Par la formule de CRAMER :

$$\det(A) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^{n} a_{i,w(i)}.$$

Or les seuls w qui contribuent à cette somme sont ceux tels que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, i \leq w(i),$$

c'est-à-dire : $w = \mathrm{id}$ [3§].

En développant par rapport à une ligne (ou une colonne quelconque) :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{j,i} \det(A_{j,i}).$$

Si A' désigne la matrice obtenue en permutant les lignes de A par $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j \end{pmatrix}$:

$$\det(A') = \varepsilon(w)\det(A) = (-1)^{j+1}\det(A).$$

On note $A' = (a'_{k,l})_{k,l\in\{1,\dots,n\}}$.
En choisissant $j > 1$:

$$\begin{aligned} \det(A') &\overset{4\S}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a'_{1,i} \det(A'_{1,i}), \\ \det(A') &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{j,i} \det(A_{j,i}); \\ \det(A) &= (-1)^{j+1}\det(A'), \\ \det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{j,i} \det(A_{j,i}). \end{aligned}$$

2 DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

2.1 Invariance par changement de base

PROPOSITION 2.1.0.13. —
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $C = (u_1, \dots, u_n)$ un système de n vecteurs de E. Alors C est une base de E si, et seulement si :

$$\det_B(C) \neq 0.$$

DÉMONSTRATION 2.1.0.17. —
Supposons que C est une base de E.
On a vu que si $\varphi : E^n \to \mathbf{K}$ est une forme n-linéaire alternée alors :

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n,\ \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det_B(u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \varphi(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

On applique cette formule avec $\varphi = \det_C$ et on a :

$$\begin{aligned} \det_C(u_1, u_2, \dots, u_n) &= \det_B(C)\det_C(B), \\ 1 = \det_C(C) &= \det_B(C)\det_C(B), \end{aligned}$$

et donc $\det_B(C) \neq 0$.
Supposons maintenant que C est liée. Il existe alors i tel que u_i est combinaison linéaire des u_j avec $j \neq i$. Par

3§. Soit $w \in S_n$, $w : \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \dots, n\}$.
Si $i \leq w(i)$ pour tout i alors $w(k) = k$ pour tout k par récurrence descendante sur k :
— $n \leq w(n)$ et donc $w(n) = n$;
— $k - 1 \leq w(k-1)$ et donc $w(k-1) = w(k)$.

4§. En développant par rapport à la première ligne.

exemple :

$$u_i = \sum_{j\neq i} a_j \cdot u_j,\ (a_j \in \mathbf{R})$$

$$\det_B(C) = \det_B(u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, \sum_{j\neq i} a_j \cdot u_j, u_{i+1}, \ldots, u_n),$$

$$\det_B(C) = \sum_{j\neq i} a_j \det_B(u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, \underset{j\neq i}{u_j}, u_{i+1}, \ldots, u_n),$$

or $\det_B$ est alternée et comme u_j apparaît deux fois dans la dernière expression, on a

$$\det_B(C) = 0.$$

Proposition 2.1.0.14. —
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, $B = (e_1, \ldots, e_n)$, $C = (u_1, \ldots, u_n)$ deux bases de E et f un endomorphisme de E. Alors :

$$\det_B(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \det_C(f(u_1), \ldots, f(u_n)).$$

Remarque. En d'autres termes, $\det_B(f(B))$ ne dépend pas du choix de la base B. On l'appelle $\det(f)$.

Démonstration 2.1.0.18. —
On utilise la formule :

$$\forall (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n,\ \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det_B(u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot \varphi(e_1, e_2, \ldots, e_n),$$

où φ est une forme n-linéaire alternée.
On pose :

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = \det_B(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n))$$

et on a alors :

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = \det_B(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \det_C(f(u_1), \ldots, f(u_n))\det_B(C).$$

De même :

$$\det_B(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \det_B(C)\det_B(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

Et donc :

$$\det_B(f(u_1), \ldots, f(u_n))\det_B(C) = \det_B(f(e_1), \ldots, f(e_n))\det_B(C)$$

et $\det_B(C) \neq 0$. Donc l'égalité voulue est obtenue.

Proposition 2.1.0.15. —
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, f et g deux endomorphismes de E. Alors :

$$\det(fg) = \det(f)\det(g).$$

Démonstration 2.1.0.19. —
Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E,

$$\det(fg) = \det_B(fg(e_1), \ldots, fg(e_n)).$$

Considérons la forme n-linéaire alternée φ telle que :

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = \det_B(g(u_1), \ldots, g(u_n)),$$

alors on a :

$$\begin{aligned}\varphi(f(u_1), \ldots, f(u_n)) &= \det_B(f(u_1), \ldots, f(u_n))\varphi(e_1, \ldots, e_n),\\ \det_B(gf(e_1), \ldots, gf(e_n)) &= \det_B(f(e_1), \ldots, f(e_n))\det_B(g(e_1), \ldots, g(e_n)),\\ \det(gf) &= \det(g)\det(f).\end{aligned}$$

Remarque. Si $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ alors

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

3 DIAGONALISATION

Définition 3.0.0.18. —
Une matrice A est *diagonalisable* si elle est conjugué par un isomorphisme à une matrice diagonale.

3.1 Valeur propre et vecteur propre

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E.

Définition 3.1.0.19. —
On appelle *valeur propre* de f un réel λ tel qu'il existe un $v \in E - \{0\}$ tel que $f(v) = \lambda \cdot v$. On dit que v est un *vecteur propre* de valeur propre λ.

Quitte à prendre la matrice A de f dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$ fixée de E, λ est une valeur de f (ou de A) si, et seulement si

$$\det(A - \lambda I_d) = 0.$$

Remarque. Soient $A \in M_n(\mathbf{R})$, B la base canonique et $C = AB$. $\det(A)$ est non nul si, et seulement si, A est inversible. D'autre part s'il existe un vecteur propre v de valeur propre λ alors

$$\ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\}\,.$$

Or $f - \lambda I_d$ est un endomorphisme de E et E est de dimension finie. Donc il y a équivalence :

$$\ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I_d) = 0.$$

Définition 3.1.0.20. —
On appelle polynôme caractéristique de f (ou de A) le polynôme :

$$\chi_f(t) = \chi_A(t) = \det(A - tI_d).$$

Exemple. En dimension 2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a

$$\chi_A(t) = t^2 - (a + d)t + ad - bc = t^2 - \mathrm{tr}(A)t + \det(A).$$

Remarque. $\chi_A(t)$ est un polynôme de degré n de coefficient dominant $(-1)^n$ et de terme constant $\chi_A(0) = \det(A)$.

3.2 Sous-espaces propres

Définition 3.2.0.21. —
Soit f un endomorphisme de E et de matrice A. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On appelle *sous-espace propre* de f (ou de A) de valeur propre λ le sous-espace vectoriel $\ker(f - \lambda I_d)$.

PROPOSITION 3.2.0.16. —
Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors si $\lambda \neq \mu$ on a

$$\ker(f - \lambda I_d) \ker(f - \mu I_d) = \{0\} .$$

Plus généralement si, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}$ distincts alors on a :

$$\sum_{i=1}^{k} \ker(f - \lambda_i I_d) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(f - \lambda_i I_d)$$

DÉMONSTRATION 3.2.0.20. —
Il s'agit de vérifier que pour tout $i \neq j$ on a :

$$\ker(f - \lambda_i I_d) \cap \ker(f - \lambda_j I_d) = \{0\} .$$

Si $v \in \ker(f - \lambda_i I_d) \cap \ker(f - \lambda_j I_d)$ alors :

$$f(v) = \lambda_i v = \lambda_j v \implies v = 0.$$

COROLLAIRE 3.2.0.1. —
Soient $\dim E = n$, f est un endomorphisme de E, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ valeurs propres de f et E_i le sous-espace associé à la valeur propre λ_i. Alors si

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i,$$

l'endomorphisme f est diagonalisable.

DÉMONSTRATION 3.2.0.21. —
Si on fait la réunion :

$$B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i,$$

où B_i est une base de E_i on obtient une base de E. Dans cette base la matrice de f est diagonale où l'élément diagonal λ_i est la valeur propre correspondante. La matrice de passage de la base canonique à la base B donne la diagonalisablisation.

Donc pour diagonaliser A il faut vérifier si $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$ où les E_i sous les sous-espaces propres.

EXEMPLE. Soit :

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}. \\
\chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 1 & 4-\lambda & -5 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}, \\
\chi_A(\lambda) &= (1-\lambda)((4-\lambda)(-2-\lambda)+10) - (2(-2-\lambda)+6), \\
\chi_A(t) &= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2).
\end{aligned}$$

Les trois valeurs propres sont $0, 1, 2$ et sont de multiplicité 1.

$$E_0 = \ker(A) = \left\{x \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, Ax = 0\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_1 = \ker(A - I_d) = \left\{x \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} x = 0\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_2 = \ker(A - 2I_d) = \left\{x \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} x = 0\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

On a l'égalité :

$$E_0 \oplus E_1 \oplus E_2 = \mathbf{R}^3.$$

On en déduit les matrices de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.3 Conditions de diagonalisabilité

Proposition 3.3.0.17. —
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E, $\chi_f(t) \in \mathbf{R}[t]$, $\deg \chi_f = n$.
Si χ_f admet n racines distinctes alors f est diagonalisable.

Démonstration 3.3.0.22. —
Si :

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - t)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ racines distinctes. On a alors que pour tout i :

$$E_i = \ker(f - \lambda_i \mathrm{id}) \neq \{0\}$$

et donc $\dim E_i \geq 1$. On a alors que

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$$

est de dimension supérieure à n ce qui implique $\bigoplus E_i = \mathbf{R}^n$.

Remarque. La condition donnée est nécessaire mais non suffisante. On cherche donc une condition nécessaire et suffisante.

Proposition 3.3.0.18. —
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E, λ une valeur propre de f, m_λ la multiplicité de λ en tant que racine de $\chi_f(t)$ et E_λ le sous-espace propre associé à λ.
Alors $\dim E_\lambda \leq m_\lambda$.

DÉMONSTRATION 3.3.0.23. —
Soit $k = \dim E_\lambda$ et $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ une base de E_λ. On peut compléter $(e_1, \dots, e_k)$ en une base $(e_1, \dots, e_n) = B$ de E.

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_d & X \\ 0 & A \end{array}\right).$$

Or le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des matrices diagonales. [5§]
Ainsi :

$$\chi_f(t) = \det \left(\begin{array}{c|c} (\lambda - t)I_d & X \\ 0 & A - tI_d \end{array}\right) = (\lambda - t)^k \chi_A(t)$$

et donc $m_\lambda \geq k$.

COROLLAIRE 3.3.0.2. —
On a les propositions suivantes :

1. Si $\chi_f(t)$ n'est pas scindé sur $\mathbf{R}$ alors f n'est pas diagonalisable.
2. S'il existe une valeur propre λ de f telle que $\dim E_\lambda < m_\lambda$ alors f n'est pas diagonalisable.

DÉMONSTRATION 3.3.0.24. —
On démontre :

2. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de $\chi_f(t)$, m_i la multiplicité de λ_i et E_i l'espace propre associé à λ_i. Alors la proposition nous dit que $\dim E_i \leq m_i$.
Or $\deg \chi_f(t)$ =n et donc

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \leq n$$

$$\sum_{i=1}^{k} \dim E_i \leq \sum_{i=1}^{k} m_i \leq n$$

S'il existe i_0 tel que $\dim E_{i_0} < m_{i_0}$ alors cela implique

$$\sum_{i=1}^{k} \dim E_i < \sum_{i=1}^{k} m_i \leq n.$$

Et donc

$$\bigoplus_{i=1}^{n} E_i < n.$$

1. Idem.

THÉORÈME 3.3.0.4. —
Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E.
f est diagonalisable si, et seulement si, on a les conditions suivantes :

1. $\chi_f(t)$ est scindé sur $\mathbf{R}$;
2. pour tout $\lambda \in \chi_f^{-1}(0)$, la dimension du $\ker(f - \lambda \mathrm{id})$ est égal à la multiplicité de λ dans $\chi_f(t)$.

DÉMONSTRATION 3.3.0.25. —
Le corollaire nous dit que ces conditions sont nécessaires.
Remarquons que :

$$\sum_{i=1}^{r} E_i = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$$

5§. En effet, en utilisant la règle de CRAMER la preuve est assez aisée.

où E_i est le sous-espace propre de λ_i et r le nombre de racines deux à deux distinctes. Or la dimension de la somme est la somme des dimensions, c'est-à-dire la somme des multiplicité qui est égale à n. Donc f est diagonalisable.

Exemple. On prend

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & -1 \\ -1 & 2-t & -1 \\ -1 & 1 & -t \end{pmatrix},$$

$$\chi_A(t) = -t(t-1)^2.$$

Les racines sont $0, 1$ de multiplicités respectives 1 et 2. On a :

$$E_0 = \ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_1 = \ker A - \mathrm{id} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

On a

$$\dim E_0 = 1 \text{ et } \dim E_1 = 2$$

et donc f est diagonalisable.

Contre-exemple de minimalité. On a que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'a comme valeurs propres que 0, elle n'est pas diagonalisable parce que si elle est nulle dans une base elle l'est dans toutes.

4 POLYNÔMES EN UN ENDOMORPHISME DE E

4.1 Polynômes évalué en un endomorphisme

Définition 4.1.0.22. —
Soit $P \in \mathbf{R}[t]$ un polynôme :

$$P(t) = \sum_{k=0}^{d} a_k t^k.$$

On note pour f un endomorphisme de E :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(E).$$

Avec la convention $f^0 = \mathrm{id}$ et la notation $f^{k+1} = f \circ f^k$.

DÉFINITION 4.1.0.23. —
On dit qu'un polynôme $P \in \mathbf{R}[t]$ annule f si $P(f) = 0_{\mathrm{End}_{\mathbf{R}}}$.

PROPOSITION 4.1.0.19. —
On a que :

$$\phi\colon \begin{cases} \mathbf{R}[t] \to \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(E) \\ P(t) \mapsto P(f) \end{cases}$$

est un morphisme d'anneaux.
C'est-à-dire :

$$\forall P, Q \in \mathbf{R}[t],\ \phi(P+Q) = \phi(P) + \phi(Q)\ ;\ \phi(PQ) = \phi(P)\phi(Q).$$

REMARQUE. Ainsi l'ensemble des polynômes annulateurs de f est un idéal de $\mathbf{R}[t]$. Or $\mathbf{R}[t]$ est un anneau principal donc l'ensemble des polynômes annulateurs de f est principal. Il existe donc un polynôme $Q \in \mathbf{R}[t]$ tel que tout polynôme annulateur de f s'écrit RQ avec $R \in \mathbf{R}[t]$.

DÉFINITION 4.1.0.24. —
On appelle polynôme minimal de f le polynôme unitaire de plus petit degré, m_f annulant f.

On a évidemment que tout polynôme annulateur de f est de la forme $P \cdot m_f, P \in \mathbf{R}[t]$.

EXEMPLE. Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice nilpotente, c'est-à-dire $A^3 = 0$. On a

$$m_A(t) \mid t^3 \implies m_A = 1, t, t^2 \text{ ou } t^3.$$

Or $(t \mapsto 1)(A) = \mathrm{id} \neq 0$, $(t \mapsto t)(A) = A \neq 0$ et $(t \mapsto t^2)(A) = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et donc $m_A(t) = t^3$.

PROPOSITION 4.1.0.20. —
Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(E)$. Alors :

1. si f est diagonalisable, alors il existe un polynôme scindé $P \in \mathbf{R}[t]$ annulant f ayant que des racines simples ;
2. si $P \in \mathbf{R}[t]$ annule f alors toute valeur propre de f est racine de P.

DÉMONSTRATION 4.1.0.26. —
Dans l'ordre :

1. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres. Soient $\mu_1, \dots, \mu_r$ des scalaires deux à deux distinctes tels que

$$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

avec $r \leq n$.
On pose :

$$P(t) = \prod_{i=1}^{r} (t - \mu_i).$$

On cherche à savoir si $P(f) = 0$.

$$P(f) = 0 \iff P(f)(e_j) = 0,\ \forall j,$$
$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{i=1}^{r}(f - \mu_i \mathrm{id})\right)(e_j),$$
$$f(e_j) = \lambda_j e_j \implies \exists i, \mu_i = \lambda_i.$$

Or pour tous k, l :

$$(f - \mu_k \mathrm{id})(f - \mu_l \mathrm{id}) = (f - \mu_l \mathrm{id})(f - \mu_k \mathrm{id})$$

et donc :

$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{k \neq i}(f - \mu_k \mathrm{id})\right)(f - \mu_i \mathrm{id})(e_j),$$
$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{k \neq i}(f - \mu_k \mathrm{id})\right)(f(e_j) - \mu_i e_j) = 0.$$

2. On suppose que $P(f) = 0$ et $\chi_f(\lambda) = 0$ avec $P \in \mathbf{R}[t]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.
   Soit $v \in \ker(f - \lambda \mathrm{id}), v \neq 0$, alors :

$$P(f)(v) = \sum_{k=1}^{d} a_k f^k(v),$$
$$P(f)(v) = \sum_{k=1}^{d} a_k \lambda^k v.$$

Donc $P(\lambda) \cdot v = 0$ et comme $v \neq 0$: $P(\lambda) = 0$.

4.2 Lemme des noyaux

Proposition 4.2.0.21 (Théorème des noyaux). —
Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(E)$.

1. Soit $P \in \mathbf{R}[t]$ de la forme $P = ST$ avec $S, T \in \mathbf{R}[t]$ avec S et T premiers entre eux.
   Alors si $P(f) = 0$ alors
   $$E = \ker(S(f)) \oplus \ker(T(f)).$$
2. Soit $P \in \mathbf{R}[t]$, $P = P_1 P_2 \ldots P_k$ avec $P_i \in \mathbf{R}[t]$ premiers entre eux deux à deux.
   Alors si $P(f) = 0$ alors
   $$E = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(f).$$

Théorème 4.2.0.5. —
$f \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(E)$ avec $\dim E = n$.
Supposons qu'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ est un polynôme scindé avec des racines simples. Alors $P(f) = 0$ implique que f est diagonalisable.

Remarque. C'est équivalent à $m_f(t)$ scindé avec des racines simples. En effet si P est scindé avec des racines simples et qui annulent f alors m_f divise P et donc m_f est scindé avec des racines simples.

DÉMONSTRATION 4.2.0.27. —
Soit :

$$P(X) = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_k)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ réels distincts. Ainsi $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$ sont premiers entre eux pour tous $i \neq j$.
Ainsi d'après le théorème des noyaux :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(f - \lambda_i \mathrm{id}).$$

Donc f est diagonalisable.

COROLLAIRE 4.2.0.3. —
Soit $f \in \mathrm{End}(E)$. f est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal m_f est scindé avec des racines simples.

DÉMONSTRATION 4.2.0.28. —
Le sens d'implication a déjà été fait, l'autre sens est donné par le théorème précédent.

4.3 Trigonalisation

DÉFINITION 4.3.0.25. —
On dit que $f \in \mathrm{End}(E)$ est *trigonalisable* s'il existe une base B de E telle que la matrice en base B de f est triangulaire supérieure.
De même, une matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ est trigonalisable si elle est conjuguée à une matrice triangulaire supérieure, i.e. s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est trigonalisable.

PROPOSITION 4.3.0.22. —
Soit $f \in \mathrm{End}(E)$.
χ_f est scindé dans $\mathbf{R}[X]$ si, et seulement si, f trigonalisable.

REMARQUE. On peut remplacer partout $\mathbf{R}$ par $\mathbf{K} = \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ et E par un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Si E est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et si $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(E)$ alors la proposition assure la trigonalisation de f (et ainsi de tout endomorphisme).

DÉMONSTRATION 4.3.0.29. —
Si f est trigonalisable, alors il existe une base B telle que la matrice, $(a_{i,j})$ de f soit trigonale supérieure dans cette base. Alors le polynôme caractéristique (qui est indépendant de la base) est exactement : $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - t)$.
Ce polynôme est bien scindé.
Pour la réciproque on effectue une récurrence sur $n = \dim E$. On suppose que c'est vrai pour tout espace vectoriel de dimension strictement inférieure à n :

$$\chi_f(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)\dots(\lambda_n - t)$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$.
λ_1 est une valeur propre. Il existe par hypothèse $v_1 \in E$ un vecteur propre tel que $v_1 \neq 0$ et $f(v_1) = \lambda_1 v_1$. Par le théorème de la base incomplète, il existe une base B de la forme $B = (v_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$. Soit A la matrice de f dans la base B. On a :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda_1 & \star & \star & \dots \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Avec $B \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ qui peut être la matrice d'un endomorphisme de $\mathbf{R}^{n-1}$.

$$\chi_A(t) = \det \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 - t & \star \\ \hline 0 & B - tI_d \end{array}\right),$$
$$\chi_A(t) = (\lambda_1 - t)\chi_B(t),$$
$$\chi_A(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)\dots(\lambda_n - t).$$

et donc $\chi_B(t) = (\lambda_2 - t)\dots(\lambda_n - t)$ est scindé.

Par récurrence, il existe $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{R})$ tel que $Q^{-1}BQ$ soit triangulaire supérieure. Posons :

$$P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right), \; P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right).$$

On a alors que $P^{-1}AP$ est triangulaire.

4.4 Comment calculer m_f ? (Cayley-Hamilton)

Théorème 4.4.0.6 (Cayley-Hamilton). —
Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(E)$. On a que m_f divise χ_f, c'est-à-dire : $\chi_f(f) = 0$.

Démonstration 4.4.0.30. —
On veut montrer que $\chi_A(A) = 0$ où $A \in M_n(\mathbf{R})$. Puisque $M_n(\mathbf{R}) \subset M_n(\mathbf{C})$ on peut se placer dans se dernier.
On sait alors que A est trigonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ tel que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.
Or pour tout k : $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$. Donc :

$$\chi_A(P^{-1}AP) = P^{-1}\chi_A(A)P.$$

Comme P est inversible, $\chi_A(0)$ si, et seulement si, $\chi_A(P^{-1}AP) = 0$. Posons $A' = P^{-1}AP$. On a $\chi_{A'} = \chi_A$.

$$\begin{aligned}
T &= (\lambda_n I_d - A')(\lambda_{n-1} I_d - A')\dots(\lambda_1 I_d - A') \\
T(v_1) &= \left(\prod_{i=2}^{n}(\lambda_i I_d - A')\right)(\lambda_1 I_d - A')(v_1) = 0 \\
T(v_2) &= \left(\prod_{i=3}^{n}(\lambda_i I_d - A')\right)(\lambda_2 I_d - A')(\lambda_1 I_d - A')(v_2) \\
(\lambda_2 I_d - A')(\lambda_1 I_d - A')(v_2) &= (\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) \\
(\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) &= (\lambda_1 I_d - A')(-a'_{1,2}v_1) \\
(\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) &= -a'_{1,2}(\lambda_1 I_d - A')(v_1) \\
(\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) &= -a'_{1,2}(\lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_1) = 0
\end{aligned}$$

Par récurrence on trouve $T(v_i) = 0$ pour tout i.

Exercice. Calculer $T(v_3)$.

Remarque. À noter :

1. Étant donné $f \in \mathrm{End}(E)$, pour calculer m_f on cherche le plus petit diviseur de χ_f qui annule f.
2. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$. Supposons que f est inversible, alors $\det(f) \neq 0$, i.e. $\chi_f(0) \neq 0$. Soit $\chi_f(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$, a_0 est donc non nul. On a :

$$0 = a_0^{-1}\chi_f(f) = (-1)^n a_0^{-1} f^n + \ldots + a_1 a_0^{-1} f + I_d$$

ce qui donne :

$$I_d = f\left((-1)^{n+1}a_0^{-1}f^{n-1} + \ldots + (-1)a_1 a_0^{-1} I_d\right).$$

Exemple. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\chi_A(t) = -t(t-1)^2$$

on en déduit :

$$t(t-1) \mid m_A(t) \mid t(t-1)^2.$$

Donc soit $m_A(t) = t(t-1)$ soit $m_A(t) = t(t-1)^2$. Dans le premier cas si $m_A(A) = 0$ alors A est diagonalisable. Dans le second, A est non diagonalisable.

$$A(A - I_d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5 APPLICATIONS

5.1 Calculs de puissances

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$, si A est diagonalisable alors :

$$A = PA'P^{-1}$$

où P est inversible et A' diagonale. Et donc pour tout k :

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

De même, si

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

alors

$$\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & e\lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

5.2 Systèmes différentiels

Soient $x_1, x_2, x_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ x_2' = x_1 + 4x_2 - 5x_3 \\ x_3' = 2x_2 - 2x_3 \end{cases}.$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. On a :

$$X' = AX.$$

A a pour vecteurs propres :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de valeurs propres respectives :

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2.$$

De matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$X' = AX \iff P^{-1}X' = P^{-1}APP^{-1}X \iff Y' = BY$$

$$Y' = BY \iff \begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = 2y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = c_1 \\ y_2 = c_2e^t \\ y_3 = c_3e^{2t} \end{cases},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

On a alors :

$$X = PY,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2e^t \\ c_3e^{2t} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2e^t + c_3e^{2t} \\ c_1 + 3c_2e^t + 2c_3e^{2t} \\ c_1 + 2c_2e^t + c_3e^{2t} \end{pmatrix}.$$

5.3 Application aux suites récurrentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels telle que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On introduit une seconde suite v_n telle que $v_n = u_{n+1}$ pour tout n. La relation de récurrence s'écrit alors :

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

si on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a alors que la relation de récurrence est

$$X_{n+1} = AX_n.$$

On diagonalise A :

$$\chi_A(t) = t^2 - t - 1 \iff t \in \left\{ r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

On a :

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}$. On pose $Y_n = P_1 X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$:

$$X_{n+1} = AX_n \iff Y_{n+1} = A' Y_n.$$

On en déduit :

$$Y_n = \begin{pmatrix} c_1 r_1^n \\ c_2 r_2^n \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 r_1^n \\ c_2 r_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 r_1^n \\ c_2 r_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \\ c_1 r_1^{n+1} + c_2 r_2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi u_n est de la forme :

$$u_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n,\ c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Deuxième partie

Analyse

Table des matières

Chapitre 3

Développements limités

1 FONCTIONS NÉGLIGEABLES ET ÉQUIVALENTES

On considère des fonctions f, g de V dans $\mathbf{R}$ où V est un voisinage épointé dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. C'est-à-dire que V est de la forme $U - \{a\}$ où U est un voisinage de a dans $\overline{\mathbf{R}}$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

— si $a = \infty$ alors $V \supset \{k, \infty\}$;

— si $a \in \mathbf{R}$ alors $V \supset]k, a[\cup]a, l[$ avec $k < a < l$ et $k, l \in \mathbf{R}$.

f, g sont définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

1.1 Négligeable

Définition 1.1.0.26. —
On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a s'il existe un voisinage V tel qu'il existe une fonction $\varepsilon : V \to \mathbf{R}$ telle que :

— $f = \varepsilon \cdot g$;

— $\lim_a \varepsilon = 0$.

On note $f \underset{(a)}{=} \mathrm{o}(g)$.

Remarque. On note :

$$\varepsilon f : \begin{cases} V \to \mathbf{R} \\ t \mapsto \varepsilon(t) f(t) \end{cases}.$$

Exemples. Par exemple :

1. Si $g = 1$ alors $f = \mathrm{o}(1)$ si, et seulement si, $\lim_a f = 0$.
2. Si $f = 0$ au voisinage de a alors pour toute fonction g : $f = \mathrm{o}(g)$.
3. Si f est bornée et $\lim_a(g) = \infty$ alors $f = \mathrm{o}(g)$ (on prend alors $\varepsilon = f/g$).
4. On a $x^m \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(x^n)$ si, et seulement si, $m < n$.
5. Pour tous $\alpha, \beta > 0$:

$$\begin{cases} x^\alpha \underset{\infty}{=} \mathrm{o}(e^{\beta x}) \\ (\ln x)^\alpha \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(x^\beta) \end{cases},$$

car $\lim_\infty x^\alpha e^{-\beta x} = 0$.

Proposition 1.1.0.23. —
Si f/g est définie dans un voisinage de a, alors :

$$f \underset{(a)}{=} \mathrm{o}(g) \iff \lim_a (f/g) = 0.$$

Démonstration 1.1.0.31. —
On prend $\varepsilon = f/g$.

Remarque. Il peut arriver que f/g n'est pas défini dans aucun voisinage de a.

Exemples. Contre-exemples :

1. Avec $g(t) = \sin(1/[t-a])$, pour tout voisinage de V de a, $g(t)$ s'annule en un point de V.
2. Même si le quotient n'est pas définit : $t \underset{(0)}{=} \mathrm{o}(\sin(1/t))$.

Proposition 1.1.0.24. —
On a au voisinage de a :

1. la propriété o est transitive ;
2. la propriété o est compatible avec la multiplication, i.e. : si $f = \mathrm{o}(g)$ alors $fh = \mathrm{o}(gh)$;
3. si $f = \mathrm{o}(g)$ et si $h = \mathrm{o}(k)$ alors $fh = \mathrm{o}(gk)$.

Démonstration 1.1.0.32. —
Dans l'ordre :

1. Pour $f = \varepsilon_1 g$ et $g = \varepsilon_2 h$ avec $\lim_a \varepsilon_i = 0$ alors : $f = \varepsilon_1\varepsilon_2 h$ et $\lim_a \varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$.
2. Si $f = \varepsilon g$, $\lim_a \varepsilon = 0$, alors $fh = \varepsilon gh$.
3. De même.

Contre-exemple. o n'est pas compatible avec l'addition. Par exemple : $x \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(x^3)$ et $x^2 \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(-x^3)$ n'entraine pas $x + x^2 \underset{(\infty)}{=} \mathrm{o}(0)$.

1.2 Équivalence

Définition 1.2.0.27. —
On dit que f est *équivalence* à g au voisinage de a si : $f - g \underset{(a)}{=} \mathrm{o}(g)$. On note $f \underset{(a)}{\sim} g$.

Proposition 1.2.0.25. —
Si f/g est définie dans un voisinage de a alors :

$$f \underset{(a)}{\sim} g \iff \lim_a f/g = 1.$$

Proposition 1.2.0.26. —
$\underset{(a)}{\sim}$ est une relation d'équivalence.

Démonstration 1.2.0.33. —
Par définition :

1. elle est réflexive : $f \underset{(a)}{\sim} f$ puisque $0 \underset{(a)}{=} o(f)$;
2. elle est symétrique si $f \underset{(a)}{\sim} g$ alors il existe ε telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ et $f = (1+\varepsilon)g$, or $1/(1+\varepsilon)$ est aussi définie au voisinage de a et puisque $g = (1/[1+\varepsilon])f$ on a
$$g = (1 + (1/[1+\varepsilon] - 1))f$$
or en posant $\varepsilon' = [1+\varepsilon] - 1$ on a $\lim_a \varepsilon' = 0$;
3. elle est transitive : $f \underset{(a)}{\sim} g$ et $g \underset{(a)}{\sim} h$ implique qu'il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ telles que $f = (1+\varepsilon_1)g$, $g = (1+\varepsilon_2)h$ et donc $f = (1+\varepsilon)h$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$ et $\lim_a \varepsilon = 0$.

Proposition 1.2.0.27. —
Si $f \underset{(a)}{\sim} g$ et si $\lim_a f$ existe alors $\lim_a g$ existe et $\lim_a g = \lim_a f$.

Démonstration 1.2.0.34. —
Soit ε telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ alors puisque $f = (1+\varepsilon)g$ on a
$$\lim_a f = \lim_a (1+\varepsilon)g = \lim_a g.$$

Proposition 1.2.0.28. —
Le produit et le quotient (quand il est défini) d'équivalences est une équivalence.
Une puissance entière d'équivalences est une équivalence.

Démonstration 1.2.0.35. —
Si $f = (1+\varepsilon_1)g$et $h = (1+\varepsilon_2)k$ alors $fh = (1+\varepsilon)gk$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$.

Proposition 1.2.0.29. —
Si $f \underset{(a)}{\sim} g$ et si $\varphi : I \to \mathbf{R}$ telle que $\lim_b \varphi = a$, $b \in I$. Alors
$$f \circ \varphi \underset{(a)}{\sim} g \circ \varphi.$$

Démonstration 1.2.0.36. —
Si $f = (1+\varepsilon)g$ avec $\lim_a \varepsilon = 0$. Alors
$$f \circ \varphi = (1+\varepsilon') \cdot g \circ \varphi$$
avec $\varepsilon' = \varepsilon \circ \varphi$ et $\lim_a \varepsilon' = 0$.

Proposition 1.2.0.30. —
On a :

1. Si f est dérivable en a alors si $f'(a) \neq 0$ on a $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x-a)$.
2. Si g est continue dans un voisinage épointé de a, alors si $f \underset{(a)}{\sim} g > 0$ alors
$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{(a)}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

DÉMONSTRATION 1.2.0.37. —
Dans l'ordre :

1. Si f est dérivable en a alors :
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{(a)}{\sim} f'(a)$$
puisque si $\lim_a g = b \in \mathbf{R}^*$ alors $g \underset{(a)}{\sim} b$.
2. On sait que $f - g \underset{(a)}{=} \mathrm{o}(g)$ et on veut :
$$\int_x^a (f-g)(t)\,\mathrm{d}t \underset{(a)}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^a g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$
En posant $h = f - g$ on se ramène au problème :
$$h = \mathrm{o}(g) \implies \int_a^x h = \mathrm{o}\int_a^x g.$$
Si $h = \varepsilon g$ et $\lim_a \varepsilon = 0$ alors
$$\int_a^x g = \int_a^x \varepsilon g$$
Or
$$\frac{\left|\int_x^a \varepsilon g\right|}{\int_a^x g} \le \max_{[a,x]} |\varepsilon| \frac{\int_a^x g}{\int_a^x g} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$
Donc
$$\frac{\left|\int_a^x \varepsilon g = h\right|}{\left|\int_a^x g\right|} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

2 DÉRIVÉES SUCCESSIVES ET FORMULES DE TAYLOR

Soit $p \ge 0$ un entier.

DÉFINITION 2.0.0.28. —
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$.

1. $f \in C^0$ si f est continue ;
2. $f \in C^p$ $(p \ge 1)$ si f est dérivable et $f' \in C^{p-1}$.

REMARQUE. Si $f \in C^p$ alors les p-ièmes dérivées successives et f sont toutes continues sur I. $f \in C^\infty$ si $f^{(p)}$ existe et est continue pour tout $p \ge 1$.

PROPOSITION 2.0.0.31. —
Si $f, g \in C^p$ alors $f + g$, fg, f/g et $f \circ g$ (si définie) sont C^p.

DÉMONSTRATION 2.0.0.38. —
Dans l'ordre :

1. $(f+g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$ par récurrence sur p ;
2. $(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}$;
3. par récurrence sur p pour $(f \circ g)^{(p)}$ en utilisant : $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.

RAPPELS SUR LES PRIMITIVES. Si $f : I \to \mathbf{R}$ est de classe C^1 avec $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert. Alors si f' est continue $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

2.1 Formules de Taylor

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert.

THÉORÈME 2.1.0.7 (Formule de TAYLOR avec reste intégral). —
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ de classe C^k. Alors pour tous $a, b \in I$ on a :

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

DÉMONSTRATION 2.1.0.39. —
Par récurrence sur n, on note

$$(T_n) : f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Supposons que (T_k) soit vraie pour tout $k < n$. Alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{(b-t)^k}{k!}, \\ v(t) &= f^{(k)}(t), \\ R_k &= \int_a^b \frac{(b-s)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(s)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} R_k &= \int_a^b u'(s)v(s)\,\mathrm{d}s \\ R_k &= [u(s)v(s)]_a^b - \int_a^b u(s)v'(s)\,\mathrm{d}s \\ R_k &= u(b)v(b) - u(a)v(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s)\,\mathrm{d}s \\ R_k &= \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

On applique (T_{n-1}) :

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_{n-1} \\ f(b) &= f(a) + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n \end{aligned}$$

donc (T_n) vraie.

THÉORÈME 2.1.0.8 (Formule de TAYLOR avec reste en $f^{(n+1)}(\theta)$). —
Soit $n > 0$, $f : I \to \mathbf{R}$ de classe C^{n+1}. Pour tous $a, b \in I$ avec $a \neq b$, il existe θ strictement compris en a et b tel que :

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta).$$

DÉMONSTRATION 2.1.0.40. —
On pose A telle que

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot A = \int_a^b \frac{(b-s)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(s)\,\mathrm{d}s - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Soit $F : I \to \mathbf{R}$ telle que :

$$F(x) = \int_x^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A.$$

On calcule $F'(x)$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} A \\ F'(x) &= \frac{(b-x)^n}{n!} \left(A - f^{(n+1)}(x)\right). \end{aligned}$$

F est dérivable donc continue sur I :

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A = 0, \\ F(b) &= 0. \end{aligned}$$

Par le théorème de ROLLE, il existe θ strictement entre a et b tel que $F'(\theta) = 0$. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{(b-\theta)^n}{n!} \left(A - f^{(n+1)}(\theta)\right) &= 0 \\ A &= f^{(n+1)}(\theta). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta) = \int_a^b \frac{(b-s)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(s)\,\mathrm{d}s - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

On a alors le résultat en remplaçant dans (T_n).

REMARQUE. Si $\left|f^{(n+1)}(s)\right| \leq M$ pour tout $s \in I$ alors

$$\left|f(b) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)\right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2.2 Fonctions usuelles

PROPOSITION 2.2.0.32 (Exponentielle). —
Soit $n \in \mathbf{N}$, on regarde le développement de TAYLOR en 0 à l'ordre $n+1$, $\forall i,\ \exp^{(i)}(0) = 1$. On prend $b = x, a = 0$:

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(\theta) \\ \theta &\in]0, x[. \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.2.0.33 (Cosinus, sinus). —
La dérivée n-ième de $\cos(t)$ est $\cos(t + n\pi/2)$.

$$\left|\cos(x) - \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x^{2i}}{(2i)!}\right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

car $|\cos\theta| \leq 1$.

3 DÉVELOPPEMENT LIMITÉ À L'ORDRE N D'UNE FONCTION DE CLASSE C^N

3.1 Développements limités

DÉFINITION 3.1.0.29. —
Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert tel que $0 \in I, n \in \mathbf{N}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ admet un *développement limité* à l'ordre n en 0 si, et seulement s'il existe un polynôme P de degré n à coefficients réels tel que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^n} = 0.$$

Notons

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - P(x)}{x^n}$$

alors

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)\ ^{1\S}, \\ \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0. \end{cases}$$

DÉFINITION 3.1.0.30. —
Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert et soit $n \in \mathbf{N}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ admet un *développement limité* à l'ordre n en a si, et seulement si, la fonction $t \mapsto f(t + a)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. C'est-à-dire si, et seulement s'il existe un polynôme de degré n, P à coefficients réels tel que :

$$f(x) = P(x - a) + \mathrm{o}((x - a)^n)$$

au voisinage de a.

THÉORÈME 3.1.0.9. —
Si f admet un développement limité à l'ordre n en un point a, alors ce développement limité est unique.

DÉMONSTRATION 3.1.0.41. —
On peut supposer $a = 0$. Supposons que

$$f(x) = P_1(x) + x^n\varepsilon_1(x) = P_2(x) + x^n\varepsilon_2(x)$$

où $\lim_0 \varepsilon_i = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. On a que

$$(P_1 - P_2)(x) = x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x)$$

et $(P_1 - P_2)(x)$ est de la forme $r_0 + r_1x + \ldots + r_nx^n$ avec $r_0, r_1, \ldots, r_n \in \mathbf{R}$.
On montre par récurrence que les r_k sont tous nuls. Quand $x \to 0$ on trouve :

$$r_0 = 0$$

et donc

$$r_1x + \ldots + r_nx^n = x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x).$$

Supposons que $r_0 = r_1 = r_{k-1} = 0$, $k > 0$. Alors

$$r_kx^k + \ldots + r_nx^n = x^n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x),$$
$$r_k + r_{k+1}x + \ldots + r_nx^{n-k} = x^{n-k}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x),$$

$n - k \geq 0$ et donc $r_k = 0$ en passant à la limite.

1§. C'est-à-dire, $f(x) - P(x) = \mathrm{o}(x^n)$.

Corollaire 3.1.0.4. —
Soit $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ le développement limité d'une fonction f à l'ordre n en 0. Alors :

1. si f est paire alors P est paire ;
2. si f est impaire alors P est impaire.

Démonstration 3.1.0.42. —

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x),$$
$$f(-x) = P(-x) + x^n(-1)^n\varepsilon(-x) = P(-x) + x^n\varepsilon_1(x),$$

Or comme $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$ alors $\varepsilon_1 \to 0$ aussi.

1. si f est impaire alors on a :
$$f(x) = -P(-x) - x^n\varepsilon_1(x)$$
et comme la première et cette expression sont des développements limits de f à l'ordre n en 0, par unicité on a $-P(-x) = P(x)$, c'est-à-dire P impaire ;
2. si f est paire, on a :
$$f(x) = P(-x) + x^n\varepsilon_1(x)$$
alors de même, l'unicité nous dit que P est alors paire.

Proposition 3.1.0.34. —
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue en $a \in I$.

1. le développement limité de f en a à l'ordre 0 est
$$f(x) = f(a) + \varepsilon(x),\ \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0\ ;$$
2. la fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle possède un développement limité à l'ordre 1 en a, alors dans ce cas le développement limité est donné par :
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a),\ \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0.$$

Démonstration 3.1.0.43. —
Dans l'ordre :

1. On pose $\varepsilon(x) = f(x) - f(a)$. Comme f est continue en 0, $\varepsilon(x)$ aussi et $\lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$.
2. Supposons que f soit dérivable en a, c'est-à-dire :
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$
On pose
$$\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a).$$
On a bien $\lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$ et
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x).$$
Réciproquement, supposons que f admette un développement limité :
$$f(x) = a_0 + (x-a)a_1 + (x-a)\varepsilon(x),$$
avec $\lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$. Alors, par continuité $a_0 = f(a)$ et
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} a_1 + \varepsilon(x) = a_1 = f'(a).$$

3.2 Développements limités et primitives

THÉORÈME 3.2.0.10. —
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une application continue. Soit F une primitive de f. Soit $a \in I$ et supposons que f admette un développement limité en a à l'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \frac{a_2}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x), \ \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0.$$

Alors F admet le développement limité suivant à l'ordre $n+1$ en a :

$$F(x) = F(a)+a_0(x-a)+\frac{a_1}{2}(x-a)^2+\ldots+\frac{a_n}{(n+1)!}x^{n+1}+(x-a)^{n+1}\varepsilon_1(x), \ \lim_{x\to a}\varepsilon_1(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION 3.2.0.44. —
Soit

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}(t-a)^k.$$

Pour tout $x \neq a$:

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n}.$$

Par hypothèse, $\lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$. En posant $\varepsilon(a) = 0$, on obtient que ε est continue sur I. Donc ε admet une primitive et dans l'identité

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \frac{a_2}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x), \ \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$$

tous les termes admettent des primitives. Donc

$$\begin{aligned}
F(x) - F(a) &= \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
F(x) - F(a) &= \int_a^x \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}(t-a)^k + (t-a)^n\varepsilon(t)\right)\mathrm{d}t \\
F(x) - F(a) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + u(x), \\
u(x) &= \int_a^x (t-a)^n\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Par le théorème de ROLLE :

$$u(x) = (x-a)(\theta-a)^n\varepsilon(\theta)$$

pour un θ compris entre a et x. Donc

$$|u(x)| = |x-a|\,|\theta-a|^n\,|\varepsilon(\theta)| \leq |x-a|^{n+1}\,|\varepsilon(\theta)|$$

et $\varepsilon(\theta)$ tend vers 0 quand x tend vers a puisque θ est compris entre a et x. Donc :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + (x-a)^{n+1}\varepsilon_1(x)$$

où

$$\varepsilon_1(x) = \frac{u(x)}{(x-a)^{n+1}} \to 0.$$

THÉORÈME 3.2.0.11. —
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ de classe C^n, $a \in I$. Alors f admet pour développement limité à l'ordre n en a :

$$f(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n\varepsilon(x), \ \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION 3.2.0.45. —
Pour $n = 0, 1$ ça a été déjà vu. Supposons alors $n \geq 2$. Soit $f \in C^n$, posons $g = f'$ avec $g \in C^{n-1}(I)$.
Par récurrence :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^{n-1}\varepsilon(x), \ \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

f est une primitive de g :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x), \ \lim_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x)$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon_1(x).$$

EXEMPLE. Soit :

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), \text{ si } x > 0 \\ 0, \text{, si } x \leq 0 \end{cases}$$

son développement limité en 0 d'ordre n est :

$$f(x) = x^n \varepsilon(x), \ \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

3.3 Développement limités usuels

Développements limités en 0 :

$$
\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + x^n \varepsilon(x) \\
\mathrm{ch}(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x) \\
\mathrm{sh}(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x) \\
\cos(x) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x) \\
\sin(x) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x) \\
\alpha \in \mathbf{R} : \ (1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-i)}{(i+1)!} x^{i+1} + x^{n+1} \varepsilon(x) \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{i=0}^{n} x^i + x^{n+1} \varepsilon(x) \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^i + x^{n+1} \varepsilon(x) \\
\log(1-x) &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i!} + x^n \varepsilon(x) \\
\log(1+x) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} x^n \varepsilon(x) \\
\mathrm{Arctan}(x) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x^{2i-1}}{2i-1} + x^{2n} \varepsilon(x)
\end{aligned}
$$

Démonstration 3.3.0.46 (ch). —

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\mathrm{ch}'(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} (= \mathrm{sh}(x)) \\
\mathrm{ch}''(x) &= \mathrm{ch}(x) \\
\mathrm{ch}^{(2i)}(0) &= 1 \\
\mathrm{sh}^{(2i)}(0) &= 0
\end{aligned}
$$

Démonstration 3.3.0.47 (cos). —

$$
\begin{aligned}
\cos^{(k)}(x) &= \cos(x + k\pi/2) \\
\cos^{(k)}(0) &= \cos(k\pi/2) \\
\cos^{(2k)}(0) &= (-1)^k \\
\cos^{(2k+1)}(0) &= 0
\end{aligned}
$$

DÉMONSTRATION 3.3.0.48 (sin). —

$$\begin{aligned}\sin^{(k)}(x) &= \sin(x + k\pi/2)\\ \sin^{(2k)}(0) &= 0\\ \sin^{(2k+1)}(0) &= (-1)^k\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION 3.3.0.49 ($(1+x)^\alpha = f(x)$). —
Par récurrence :

$$\begin{aligned}f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}\\ f^{(k)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION 3.3.0.50 ($1/1-x$). —

$$\begin{aligned}\frac{1-x^n}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n\\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + \ldots + x^n + x^n \cdot \frac{x}{1-x}\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION 3.3.0.51 ($\log(1-x)$). —
Utiliser le théorème sur le développement limité d'une primitive avec le développement limité de $1/1-x$.

DÉMONSTRATION 3.3.0.52 ($\mathrm{Arctan}(x)$). —

$$\begin{aligned}\mathrm{Arctan}'(x) &= \frac{1}{1+x^2}\\ \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i x^{2i} + x^{2n}\varepsilon(x)\end{aligned}$$

et on conclut avec le théorème du développement limité d'une primitive.

REMARQUE. On a vu que si

$$f(x) = \begin{cases}\exp(-1/x^2),\ \text{si } x > 0\\ 0,\ \text{si } x \leq 0\end{cases}$$

alors le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre n est

$$f(x) = x^n \varepsilon(x).$$

Or le développement limité de 0 en 0 à l'ordre n est identique.

EXEMPLE. Soit :

$$f\colon \begin{cases}\mathbf{R} \to \mathbf{R}\\ x \mapsto \begin{cases}0 \text{ si } x = 0\\ x^3 \sin(1/x) \text{ si } x \neq 0\end{cases}\end{cases}.$$

La fonction f est continue en 0.

On regarde le développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = x^2\varepsilon(x),\ \varepsilon(x) = \begin{cases}0 \text{ si } x = 0\\ x\sin(1/x) \text{ sinon}\end{cases},\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)0.$$

Donc le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre 2 est :

$$f(x) = x^2\varepsilon(x).$$

Dérivabilité de f en 0 (puisqu'elle est lisse sur $\mathbf{R}^*$) :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^2\sin(1/x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc f est dérivable et $f'(0) = 0$.

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \frac{3x^2\sin(1/x) - x\cos(1/x)}{x} = 3x\sin(1/x) - \cos(1/x)$$

donc f n'est pas dérivable à l'ordre 2 en 0 (même si elle a un développement limité à l'ordre 2).

4 CALCULS AVEC LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

4.1 Règles de calcul des développements limités

Proposition 4.1.0.35. —
Soit f, g ayant des développements limités à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x),\ g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon(x)$$

avec P, Q des polynômes de degré au plus n et $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ (non forcément identiques). Alors

1. le développement limité à l'ordre n en 0 de $f+g$ est
$$(f+g)(x) = (P+Q)(x) + x^n\varepsilon(x);$$
2. pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, le développement λf à l'ordre n en 0 est :
$$(\lambda f)(x) = \lambda P(x) + x^n\varepsilon(x).$$

Démonstration 4.1.0.53. —
Écrivons $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_f(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_g(x)$.

1. $(f+g)(x) = P(x) + Q(x) + x^n(\varepsilon_f + \varepsilon_g)(x)$ et on note $\varepsilon = \varepsilon_f + \varepsilon_g$ qui tend bien en 0.
2. De même.

Proposition 4.1.0.36. —
Soit f qui admet le développement limité en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x),\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Alors pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, f admet le développement limité en 0 à l'ordre p :

$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p\varepsilon(x)$$

avec $T_p(P)$ le polynôme tronqué de P :

$$T_p(P) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k,\ P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

DÉMONSTRATION 4.1.0.54. —
On a

$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p \left(\sum_{k=p+1}^{n} a_k x^{k-p} + x^{n-p}\varepsilon(x) \right).$$

Et on pose

$$\varepsilon_1(x) = \sum_{k=p+1}^{n} a_k x^{k-p} + x^{n-p}\varepsilon(x).$$

On a bien$\varepsilon_1(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

PROPOSITION 4.1.0.37. —
Soient f, g admettant les développements limités :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x), \; g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x).$$

Alors fg admet le développement limité à l'ordre n en 0 suivant :

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x) + x^n \varepsilon(x).$$

REMARQUE. Si f, g admettent les développements limités à l'ordre n en a :

$$f(x) = P(x-a) + (x-a)^n \varepsilon_1(x), \; g(x) = Q(x-a) + (x-a)^n \varepsilon_2(x)$$

alors le développement limité :

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x-a) \text{ [2§] } + (x-a)^n \varepsilon(x).$$

DÉMONSTRATION 4.1.0.55. —

$$\begin{aligned}
(fg)(x) &= (PQ)(x) + x^n(Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x)) \\
PQ(x) &= T_n(PQ)(x) + x^{n+1}R(x), \; R \in \mathbf{R}[x] \\
(fg)(x) &= T_n(PQ)(x) + x^n(xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x))
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(x) = xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x) \\
&\lim_{x\to 0} xR(x) = 0 \\
&\lim_{x\to 0} Q\varepsilon_1(x) = 0 \\
&\lim_{x\to 0} P\varepsilon_2(x) = 0 \\
&\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0
\end{aligned}$$

EXEMPLE. On veut le développement limité de :

$$\operatorname{Arctan}(x-1)\exp(x)$$

2§. On tronque avant d'évaluer en $x - a$.

en 1 d'ordre 3.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arctan}(y) &= y - \frac{y^3}{3} + y^3\varepsilon(y) \\
\operatorname{Arctan}(x-1) &= (x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3\varepsilon(x) \\
\exp(x) &= \exp(x-1+1) = e\exp(x-1) \\
\exp(x) &= e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3\varepsilon(x)\right)
\end{aligned}$$

Et donc

$$f(x) = e\left((x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3\varepsilon(x)\right) \times \left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3\varepsilon(x)\right)$$

$$f(x) = e\left((x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} - \frac{(x-1)^3}{3}\right) + (x-1)^3\varepsilon(x)$$

4.2 Développement limité d'une fonction composée

Puisque la composition de deux fonctions polynômiales est encore un polynôme :

Proposition 4.2.0.38. —
Soient f, g admettant un développement limité en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x), \ g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon(x)$$

avec P, Q deux polynômes de degré inférieur à n.
Supposons que $g(0) = 0$ alors $f \circ g$ admet le développement limité suivant à l'ordre n en 0 :

$$(f \circ g)(x) = T_n(P \circ Q)(x) + x^n\varepsilon(x).$$

Démonstration 4.2.0.56. —
Supposons $n = 0$, alors P et Q sont deux polynômes constants donc $f(x) = P(0) + \varepsilon(x)$ et $g(x) = Q(0) + \varepsilon(x)$. Comme $Q(0) = 0$ on a bien $f(g(x)) = (P \circ Q)(x) + \varepsilon(x)$ par continuité.
Supposons que $n \geq 1$. On note $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_2(x)$. Posons $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$.

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= P(g(x)) + g(x)^n\varepsilon_1(g(x)) \\
P(g(x)) &= \sum_{i=0}^{n} a_i g(x)^i \\
P(g(x)) &= {}^{3\S}T_n\left(\sum_{i=0}^{n} a_i Q(x)^i\right) + x^n\varepsilon_3(x)
\end{aligned}$$

Puisque $Q(0) = 0$, on a $Q(x) = b_1x + \ldots + b_nx^n$ et donc :

$$\begin{aligned}
g(x) &= b_1x + \ldots + b_nx^n + x^n\varepsilon_2(x) \\
g(x) &= x(b_1 + \ldots + b_nx^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon_2(x)) \\
g(x) &= xh(x) \\
(f \circ g)(x) &= P(xh(x)) + x^nh(x)^n\varepsilon_1(xh(x)) \\
(f \circ g)(x) &= T_n(P \circ Q)(x) + x^n(h(x)^n\varepsilon_1(xh(x)) + \varepsilon_3(x))
\end{aligned}$$

On pose $\varepsilon_4(x) = h(x)^n\varepsilon_1(xh(x)) + \varepsilon_3(x)$ et :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} xh(x) &= 0 \\
\lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) &= 0 \\
\lim_{x\to 0} h(x)^n &= b_1^n \\
\lim_{x\to 0} \varepsilon_4(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Exemple. Développement limité de $\cos(\sin(x))$ à l'ordre 5 en 0 :

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6\varepsilon(x)\\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x)\\
\cos(\sin(x)) &= T_5\left(1 - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^4}{4!}\right) + x^5\varepsilon(x)\\
\cos(\sin(x)) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x)\\
\cos(\sin(x)) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^5\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Proposition 4.2.0.39. —
Soient f, g admettant des développements limités à l'ordre n en 0. Alors si $g(0) \neq 0$ alors la fonction f/g admet un développement limité à l'ordre n en 0.

Démonstration 4.2.0.57. —
Puisque $g(0) \neq 0$, f/g est définie et continue en 0. Comme $f/g = f \times 1/g$, il suffit de vérifier que $1/g$ admet un développement limité en 0 (puis on applique la règle de produit).
Posons $a = g(0) \neq 0$. On a :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a + (g(x) - a)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)}$$

Il suffit de vérifier que :

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)}$$

admet un développement limité à l'ordre n en 0. Posons

$$h(x) = \frac{1}{1+x}$$

on a alors

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)} = h\left(\frac{g(x)}{a} - 1\right) = (h \circ k)(x)$$

où $k(x) = g(x)/a - 1$. Or $k(x)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et $h(x)$ admet également un développement limité à l'ordre ∞ en 0. Enfin, $k(0) = 0$ et donc on conclut avec le résultat précédent.

Exemple. Développement limité de $f : f(x) = 1/(a-x)$ en 0 à l'ordre n.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{a}\frac{1}{1 - x/a}\\
\frac{1}{1-t} &= 1 + t + t^2 + \ldots + t^n + t^n\varepsilon(t)\\
f(x) &= \frac{1}{a}\left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \ldots + \frac{x^n}{a^n}\right) + x^n\varepsilon(x)\\
\frac{1}{a-x} &= \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \ldots + \frac{x^n}{a^{n+1}} + x^n\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

La méthode précédente ne donne pas de formule générale pour le développement limité de f/g.

3§. D'après les formules de développements limités d'une somme et d'un produit.

Rappel. Si $P, Q \in \mathbf{R}[x]$, $n \in \mathbf{N}$ et si $Q(0) \neq 0$. Alors la division de P par Q suivant les puissances croissantes à l'ordre n est l'unique polynôme A tel que :

— $P - AQ$ est divisible par X^{n+1} ;

— soit $A = 0$, soit $\deg A \leq n$.

Proposition 4.2.0.40. —
Soient f, g avec les développements limités suivants à l'ordre n en 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x) + x^n \varepsilon_1(x), \\ g(x) &= B(x) + x^n \varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

Supposons que $g(0) = B(0) \neq 0$. Le développement limité à l'ordre n de f/g en 0 est :

$$\frac{f}{g}(x) = Q(x) + x^n \varepsilon(x)$$

où Q est la division de A par B à l'ordre n suivant les puissances croissantes.

Démonstration 4.2.0.58. —
On a $A(x) = Q(x)B(x) + x^{n+1}R(x)$ où R est un polynôme et $Q = 0$ ou $\deg Q \leq n$. Ainsi

$$\begin{aligned} f(x) &= Q(x)B(x) + x^{n+1}R(x) + x^n \varepsilon_1(x) \\ f(x) - Q(x)g(x) &= x^{n+1}R(x) + x^n \varepsilon_1(x) - Q(x)x^n \varepsilon_2(x) \\ f(x) - Q(x)g(x) &= x^n(\varepsilon_1(x) - Q(x)\varepsilon_2(x) + xR(x)) \\ \frac{f}{g}(x) &= Q(x) + x^n \varepsilon_3(x) \\ \varepsilon_3(x) &= \frac{1}{g(x)}(\varepsilon_1(x) - Q(x) \cdot \varepsilon_2(x) + xR(x)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Exemple. Développement limité de $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0.

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x) \\ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) + x^6 R(x) \\ \frac{f(x)}{g(x)} &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x) \end{aligned}$$

5 APPLICATIONS

Applications. Les développements limités peuvent être utiles pour :

1. les calculs de limites (pour des « formes indéterminées ») ;
2. études de fonctions ou courbes paramétrées.

5.1 Calculs de limites

Exemple. On veut calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \log \mathrm{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)}.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \\
\log \mathrm{ch}x &= \log(1 + (\mathrm{ch}x - 1)) \\
\log \mathrm{ch}x &= T_2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2}\right) + x^2\varepsilon(x) \\
\log \mathrm{ch}x &= \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \\
x\log \mathrm{ch}x &= \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x) \ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \\
x\sqrt{1+x} &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + x^3\varepsilon(x) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \\
\exp(\sin x)) &= T_3\left(\left(x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right) + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(\sin x)) &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(\sin x)) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) \ ;
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{x\log \mathrm{ch}x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \frac{\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)}{1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)} \\
\frac{x\log \mathrm{ch}x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \frac{\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)}{-\frac{x^3}{8} + x^3\varepsilon(x)} \\
\lim_{x\to 0}\frac{x\log \mathrm{ch}x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{1/2 + \varepsilon(x)}{-1/8 + \varepsilon(x)} = -4.
\end{aligned}$$

Remarque. Un calcul de dérivée s'obtient par un calcul de limite et donc parfois par développements limités.

Exemple. On prend

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + x + x^2}$$

et on cherche $f^{(i)}(0)$ pour $i \in \{0, \ldots, 4\}$, c'est-à-dire que l'on cherche le développement limité de f en 0 à l'ordre 4.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x).$$

On cherche le développement limité de

$$g(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

que l'on peut voir comme

$$g(x) = (a \circ b)(x) \; ; \; a(x) = \frac{1}{1+x} \; ; \; b(x) = x + x^2.$$

$$\begin{aligned}
a(x) &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
g(x) &= T_4((x \mapsto 1 - x + x^2 - x^3 + x^4)(x + x^2)) + x^4\varepsilon(x) \\
g(x) &= 1 - x - x^2 + x^2 + x^4 + 2x^3 + x^4 - x^3 - 3x^4 + x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
g(x) &= 1 - x + x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x) \\
f(x) &= T_4\left((1 - x + x^3 - x^4)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\right) + x^4\varepsilon(x) \\
f(x) &= 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{2} - \frac{23x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Comme f admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, elle est dérivable quatre fois. De plus

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(0) &= -1 \\
f^{(2)}(0) &= -1 \\
f^{(3)}(0) &= 9 \\
f^{(4)}(0) &= -23.
\end{aligned}$$

5.2 Courbes paramétrées

Rappels sur les fonctions classiques. Quelques rappels :

— on définit le logarithme népérien par :

$$\log(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Ainsi $\log : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ est croissante, C^∞,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log x &= \frac{1}{x} \\
\lim_{x\to 0, x>0} \log x &= -\infty \\
\lim_{x\to\infty} \log x &= +\infty \\
\log(ab) &= \log a + \log b.
\end{aligned}$$

— on définit l'exponentielle, $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, qui est croissante, lisse et stable par dérivation.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \exp(x) &= 0 \\
\lim_{x\to+\infty} \exp(x) &= \infty \\
\exp(a+b) &= \exp(a)\exp(b).
\end{aligned}$$

— soient $a \in \mathbf{R}_+^*, b \in \mathbf{R}$ alors on définit :

$$a^b = \exp(b \log a).$$

$$\begin{aligned}
a^{b+b'} &= a^b a^{b'} \\
(aa')^b &= a^b (a')^b \\
\left(a^b\right)^c &= a^{bc} \\
a^0 &= 1 = 1^b \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^b &= b x^{b-1} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x &= \log(a) a^x \\
\lim_{x \to 0, x > 0} x^a (\log x)^n &= 0 \ \ , \ a > 0 \text{ et } n \in \mathbf{Z} \\
\lim_{x \to +\infty} x^a e^x &= +\infty \\
\lim_{x \to -\infty} x^a e^x &= 0.
\end{aligned}$$

— trigonométrie :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \\
\sin(x+t) &= \cos(t)\sin(x) + \cos(x)\sin(t) \\
\cos(x+t) &= \cos(x)\cos(t) - \sin(x)\sin(t) \\
\tan(x+t) &= \frac{\tan(t) + \tan(x)}{1 - \tan(x)\tan(t)}.
\end{aligned}$$

— Arcsin : $[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est lisse sur $]-1,1[$ et :

$$\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$ est la réciproque de cos et on a la relation :

$$\mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Arctan : $\mathbf{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ est lisse et :

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

— trigonométrie hyperbolique :

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\mathrm{ch}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\mathrm{th}(x) &= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}
\end{aligned}$$

leurs réciproques Arcsh : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, Arcch : $[-1, \infty] \to \mathbf{R}_+$ et Arcth $:]-1,+1[\to \mathbf{R}$ sont lisses sur l'intérieur de leur domaine de définition.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arcsh}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\
\mathrm{Arcch}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \\
\mathrm{Arcsh}(t) &= \log(t + \sqrt{t^2+1}) \\
\mathrm{Arcch}(t) &= \log(t + \sqrt{t^2-1}).
\end{aligned}$$

DÉFINITION 5.2.0.31. —
Soit $f : I \to \mathbf{R}^2$ avec I un intervalle ou une union finie d'intervalles dans $\mathbf{R}$. Soient u, v telles que

$$\forall t,\ f(t) = (u(t), v(t)).$$

1. On dit que $\lim_{t\to t_0} f(t) = l$ où $l = (l_1, l_2)$ si $\lim_{t\to t_0} u(t) = l_1$ et $\lim_{t\to t_0} v(t) = l_2$.
2. On dit que f est continue en t_0 si les fonctions u et v sont continues en 0. f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.
3. On dit que f est dérivable en t_0 si u et v le sont et on note $f'(t_0) = (u'(t_0), v'(t_0))$.

PROPOSITION 5.2.0.41. —
Si $f, g : I \to \mathbf{R}^2$ et si $t_0 \in I$ alors :

1. si $\lim_{t\to t_0} f(t) = l$ et $\lim_{t\to t_0} g(t) = m$ alors $\lim_{t\to t_0}(f+g)(t) = l + m$;
2. si f, g sont dérivables en t_0 alors $f+g$ aussi et on a $(f+\lambda g)'(t_0) = f'(t_0)+\lambda g'(t_0)$.

PROPOSITION 5.2.0.42. —
Soit (r, s) une base de $\mathbf{R}^2$ et soit $f : I \to \mathbf{R}^2$ telle que $f(t) = (u(t), v(t))$. Soit $(a(t), b(t))$ les coordonnées de $f(t)$ dans la base (r, s).

1. On a :
$$\lim_{t\to t_0} f(t) = l \iff \begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} a(t) = \alpha \\ \lim\limits_{t\to t_0} b(t) = \beta \end{cases}$$
où (α, β) sont les coordonnées de l dans la base (r, s).
2. Idem pour la dérivée.

DÉMONSTRATION 5.2.0.59. —
Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ et $r, s \in \mathbf{R}^2$. On a $l = \alpha \cdot r + \beta \cdot s$,

$$f(t) = (u(t), v(t)) = a(t) \cdot r + b(t) \cdot s$$

avec $a(t), b(t) \in \mathbf{R}$.

1. On a que $\lim_{t\to t_0} f(t) = l$ c'est par définition :
$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} u(t) = l_1 \\ \lim\limits_{t\to t_0} v(t) = l_2 \end{cases}.$$
$$\begin{aligned}\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} a(t) = \alpha \\ \lim\limits_{t\to t_0} b(t) = \beta \end{cases} &\iff \begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} (a(t)r_1 + b(t)s_1) = \alpha r_1 + \beta s_1 \\ \lim\limits_{t\to t_0} (a(t)r_2 + b(t)s_2) = \alpha r_2 + \beta s_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} a(t)r_1 + b(t)s_1 = l_1 \\ \lim\limits_{t\to t_0} a(t)r_2 + b(t)s_2 = l_2 \end{cases}\end{aligned}$$
2. De même ...

DÉFINITION 5.2.0.32. —
On dit que $f : I \to \mathbf{R}^2, f(t) = (u(t), v(t))$ admet un développement limité à l'ordre n en t_0 si $u(t)$ et $v(t)$ admettent un développement limité à l'ordre n en t_0.
Si $u(t) = u_0 + u_1(t-t_0) + \ldots + u_n(t-t_0)^n + (t-t_0)^n\varepsilon_1(t)$ et $v(t) = v_0 + v_1(t-t_0) +$

$\ldots + v_n(t-t_0)^n + (t-t_0)^n\varepsilon_2(t)$ alors on appelle

$$f(t) = (u_0, v_0) + (t-t_0)(u_1, v_1) + \ldots + (t-t_0)^n(u_n, v_n) + (t-t_0)^n\varepsilon(t)$$

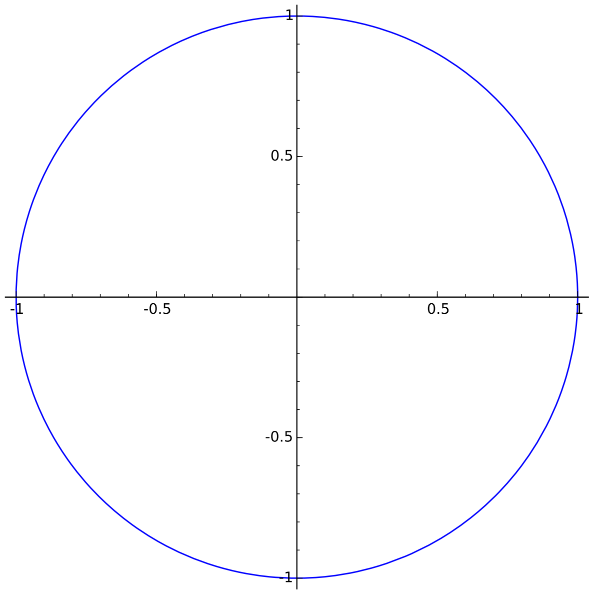
le développement limité de f à l'ordre n en t_0 avec $\lim_{t\to t_0} \varepsilon(t) = (0,0)$.

Exemple. Le développement limité de $f : t \mapsto (2t^3 - t\sin t, t^3 + \cos t)$ à l'ordre 4 en 0 :

$$2t^3 - t\sin t = -t^2 + 2t^3 + \frac{t^4}{6} + t^4\varepsilon(t)$$
$$t^3 + \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + t^3 + \frac{t^4}{24} + t^4\varepsilon(t)$$
$$f(t) = (0,1) - t^2(1, 1/2) + t^3(2,1) + t^4(1/6, 1/24) + t^4\varepsilon(t).$$

Définition 5.2.0.33. —
On appelle *courbe paramétrée* de $\mathbf{R}^2$ une fonction $f : I \to \mathbf{R}^2$.

Exemple. $f : R \to \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$.



Remarque. Supposons que f soit dérivable en $t \in I$. Alors $u(t), v(t)$ admettent des développements limités à l'ordre 1 en t_0 et donc f admet aussi un développement limité à l'ordre 1 en t_0. Or si

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0) + (t-t_0)\varepsilon(t)$$

alors

$$\lim_{t\to t_0} \frac{1}{t-t_0}(f(t) - f(t_0)) = f'(t_0).$$

Définition 5.2.0.34. —
On appelle $f'(t_0)$ *vecteur tangent* de f en t_0. La droite affine passant par $f(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$ s'appelle la *tangente* à f en t_0.

Remarque. Le vecteur tangent dépend du paramétrage de la courbe et non seulement de sa représentation.

Exemple. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ et soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$. Remarquons que f et g on même représentation graphique. Cependant les vecteurs tangents en 0 à f et g sont :

$$f'(0) = (0, 1)$$
$$g'(0) = (0, 2).$$

La tangente à f en t_0 est la droite d'équation :

$$\det \begin{pmatrix} y - v(t_0) & v'(t_0) \\ x - u(t_0) & u'(t_0) \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire :

$$(y - v(t_0))u'(t_0) - (x - u(t_0))v'(t_0) = 0.$$

5.3 Étude de fonctions

Soit $f : I \to \mathbf{R}$, où I est un intervalle de $\mathbf{R}$. On procède à l'étude de f au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. En particulier, on s'intéresse notamment au graphe de f.

5.3.1 Étude locale

Proposition 5.3.1.1. —
Soit $x_0 \in I, f : I \to \mathbf{R}$. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 :

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x), \ \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

où $P \in \mathbf{R}[x], P(x) = a_p x^p + \ldots + a_n x^n$ avec $0 \leq p \leq n$ et $a_p \neq 0$.
Alors il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $x \neq x_0$, $f(x)$ est non nul et a le signe de $a_p(x - x_0)^p$.

Démonstration 5.3.1.1. —
Puisque $p \leq n$, le développement limité de f en x_0 à l'ordre p est :

$$f(x) = (T_p(P))(x - x_0) + (x - x_0)^p \varepsilon(x).$$

C'est-à-dire :

$$f(x) = a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p \varepsilon(x).$$

Pour tout $x \neq x_0$, on a :

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^p} = a_p + \varepsilon(x)$$

et $a_p \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi il existe α tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $x \neq x_0$, $|\varepsilon(x)| < \frac{1}{2}(a_p)$. C'est-à-dire que pour un tel x, $f(x) \neq 0$ et est du même signe que $a_p(x - x_0)$.

Définition 5.3.1.1. —
Si $I \subset \mathbf{R}$ est un intervalle et $f : I \to \mathbf{R}$ est une fonction numérique et si $x_0 \in \overline{I}$ [4§], on dit que f est *positive au voisinage de* x_0 s'il existe un voisinage $J \subset I$ de x_0 tel que pour tout $x \in J$ et $x \neq x_0$, $f(x) > 0$.

Exemple. Prenons :

$$f(x) = e \cdot \sqrt{x} - e^x.$$

4§. Dans I ou l'une de ses bornes.

On cherche le signe de f quand x tend vers 1.

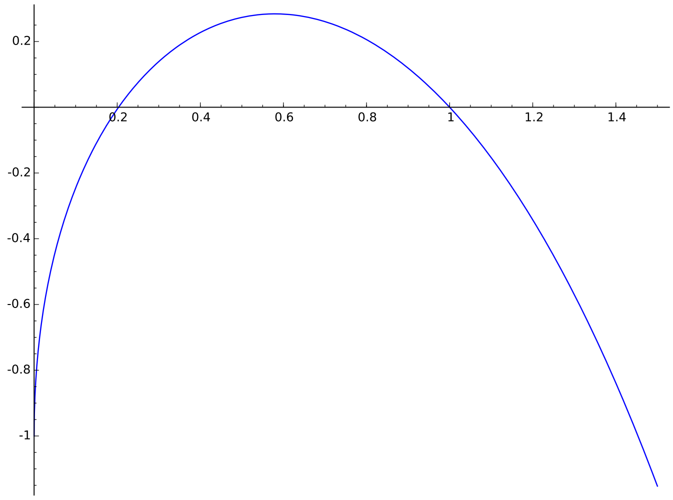
$$f(x) = e\left[(1+(x-1))^{1/2} - e^{x-1}\right]$$

$$\begin{cases} (1+(x-1))^{1/2} = 1 + \dfrac{1}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \\ e^{x-1} = 1 + (x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \end{cases}$$

$$f(x) = e\left(-\frac{1}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x)\right)$$

$$f(x) = \frac{-e}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x).$$

Ainsi au voisinage de 1, le signe de f est le même que celui de $1-x$.



Définition 5.3.1.2. —
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. La *tangente* en $(x_0, f(x_0))$ au graphe de f est la droite affine d'équation :

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Définition 5.3.1.3. —
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$.
On dit que f admet une *inflexion* au point $(x_0, f(x_0))$ si la fonction

$$x \mapsto f(x) - (f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0))$$

s'annule en x_0 en changeant de signe.

Proposition 5.3.1.2. —
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. On a :

1. si $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x)$ est le développement limité de f à l'ordre 1 en x_0, alors la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ est donnée par :

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) \;;$$

2. si $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2\varepsilon(x)$ est le développement limité de f à l'ordre 2 en x_0, alors

   - si $a_2 > 0$ alors pour tout $x \neq x_0$ dans un voisinage suffisamment petit de x_0, le point $(x, f(x))$ est au-dessus de la tangente ;
   - si $a_2 < 0$ alors pour tout $x \neq x_0$ dans un voisinage suffisamment petit de x_0, le point $(x, f(x))$ est en-dessous de la tangente ;
3. si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_3(x - x_0)^3 + (x - x_0)^3\varepsilon(x)$ est le développement limité de f à l'ordre 3 en x_0, alors si $a_3 \neq 0$, f admet un point d'inflexion en $(x_0, f(x_0))$.

Démonstration 5.3.1.2. —
Dans l'ordre :

1. Comme f est dérivable en x_0, on a $a_1 = f'(x_0)$ et $a_0 = f(x_0)$, l'équation de la tangente est
$$y = a_1(x - x_0) + a_0.$$
2. Posons
$$u(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)).$$
On a alors :
$$u(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 - a_1(x - x_0) - a_0 + (x - x_0)^2\varepsilon(x) = a_2(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\varepsilon(x).$$
Comme $a_2 \neq 0$ (par hypothèse) alors la proposition précédente entraine que le signe de $u(x)$ au voisinage de 0 est celui de $a_2(x - x_0)^2$, c'est-à-dire le signe de a_2.
3. Posons de même
$$u(x) = a_3(x - x_0)^3 + (x - x_0)^3\varepsilon(x).$$
D'après la proposition précédente, le signe de $u(x)$ au voisinage de x_0 est celui de $a_3(x - x_0)$ puisque $a_3 \neq 0$. Comme $(x - x_0)^3$ n'est pas de signe constant, c'est un point d'inflexion.

Remarque. Si $a_2 \neq 0$, alors :
- si $a_2 > 0$, $f(x)$ admet un minimum local en x_0 ;
- sinon, $f(x)$ admet un maximum local en x_0.

Remarque, généralisation du résultat. Supposons que le développement limité de f en x_0 est de la forme
$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p\varepsilon(x),$$
avec $p \geq 2$. De plus on suppose $a_p \neq 0$. Alors en posant
$$u(x) = f(x) - (f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0))$$
est du signe de $a_p(x - x_0)^p$ au voisinage de x_0.
- Si p est pair alors $a_p > 0$ implique que x_0 est un minimum local, $a_p < 0$ implique que x_0 est un maximum local.
- Si p est impair alors x_0 est un point d'inflexion.

Exemple. Prenons :
$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 5}$$

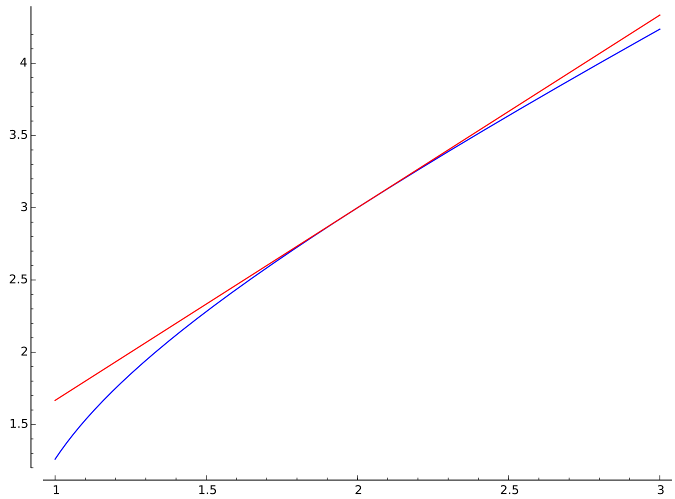
définie sur $\mathbf{R}$ et étudions f au voisinage de $x_0 = 2$. On a :

$$f(x+2) = \left((x+2)^3 + 6x^2 - 5\right)^{1/3}$$
$$f(x+2) = \left(27 + 36x + 12x^2 + x^3\right)^{1/3}$$
$$f(x+2) = 3 \cdot \left(1 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{27}x^3\right)^{1/3}$$
$$f(x+2) = 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2\right) + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)}{2}\left(\frac{16}{9}x^2\right)\right) + x^2\varepsilon(x)$$
$$f(x+2) = 3 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{27}x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

L'équation de la tangente est :

$$y = 3 + \frac{4}{3}(x-2).$$

Comme le terme en x^2 est non nul et négatif, la courbe est en-dessous de la tangente.



5.3.2 Branches infinies

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction numérique.

DÉFINITION 5.3.2.1. —
Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, avec $a \in \mathbf{R}$ alors la droite $x = a$ est une *asymptote verticale* de f.
Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ alors f admet une *branche infinie* en $+\infty$.
Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ou si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ alors f admet une *branche infinie* en $-\infty$.
Soit $a, b \in \mathbf{R}$. La droite $y = ax + b$ est *asymptote* à f quand x tend vers $\pm\infty$ si :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax - b = 0.$$

Si $a = 0$ on dit que l'asymptote est *horizontale*.
Soit $a \in \mathbf{R}$, si

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

alors on dit que f a une *direction asymptotique de pente a en $\pm\infty$*.

Si

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

alors on dit que f a une *direction asymptotique verticale* en $\pm\infty$.

PROPOSITION 5.3.2.1. —
Soient $a, b \in \mathbf{R}$. La droite $y = ax + b$ est asymptote à f quand x tend vers $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si, et seulement si :

— on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a\ ;$$

— et de plus

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = b.$$

EXEMPLE. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par :

$$f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x^2+1}.$$

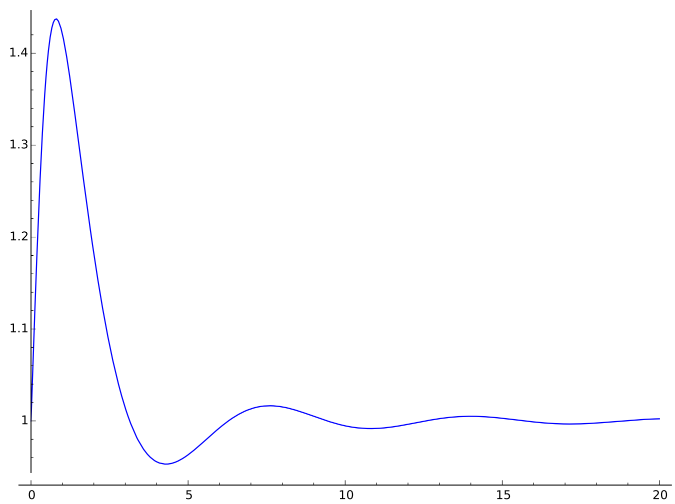
On a

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - 1| = 0$$

et donc $y = 1$ est asymptote à f en $+\infty$. La différence

$$f(x) - 1 = \frac{\sin x}{x^2+1}$$

est du signe de $\sin x$ qui oscille.



EXEMPLE. Avec

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 5}$$

on regarde s'il y a une asymptote quand x tend vers $\pm\infty$ et la position par rapport à la possible asymptote. On écrit f sous la forme :

$$f(x) = xu(1/x)$$

avec

$$u(x) = \sqrt[3]{1 + 6x - 5x^3}.$$

Le développement limité de u en 0 à l'ordre 2 est :

$$\begin{aligned}
u(x) &= (1+6x-5x^3)^{1/3}\\
u(x) &= 1+\frac{1}{3}(6x)+\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)\frac{1}{2}(36x^2)+x^2\varepsilon(x)\\
u(x) &= 1+2x-4x^2+x^2\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Ainsi pour x au voisinage de ∞ en valeur absolue :

$$f(x) = x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{\varepsilon(1/x)}{x^2}\right) = x+2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon(1/x),$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x)-(x+2) = 0.$$

On regarde maintenant la position de f par rapport à $y = x+2$. On a

$$f(x)-(x+2) = \frac{-4}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon(1/x).$$

Ainsi quand $x \to +\infty$, f est en-dessous de l'asymptote, quand $x \to -\infty$, f est au-dessus de l'asymptote.

5.3.3 Étude de fonction

Par exemple avec

$$f(x) = x\log\left|2+\frac{1}{x}\right|$$

de domaine de définition $\mathbf{R}\setminus\{0,-1/2\}$.

Dérivée. On calcule la dérivée de f :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x(\log|2x+1|-\log|x|)\\
f'(x) &= \log\left|2+\frac{1}{x}\right|+x\left(\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x}\right)\\
f'(x) &= \log\left|2+\frac{1}{x}\right|-\frac{1}{2x+1}\\
f''(x) &= \frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x}-\frac{2}{(2x+1)^2}\\
f''(x) &= \frac{-1}{x(2x+1)^2}
\end{aligned}$$

Une étude des signes montre qu'il existe un unique α entre $-1/2$ et 0 (strictement) tel que $f'(\alpha) = 0$. En conclusion, f est croissante partout sauf sur $]-1/2,\alpha[$ où elle est décroissante.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

ce qui nous donne deux branches infinies.

$$\lim_{x\to-1/2} f(x) = +\infty$$

et donc il y a une asymptote verticale en $x = -1/2$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = ?$$

$$f(x) = x \log \left|2 + \frac{1}{x}\right|$$

$$f(x) = x \log |2x+1| - x \log x$$

or les deux termes tendent vers 0 en 0 et donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

et donc f admet un prolongement par continuité à 0 en 0.

Il reste à regarder les branches infinies :

— Quand $x \to \infty$, on cherche un développement limité de f en $+\infty$.

$$f(x) = x\log(2+1/x)$$

$$f(x) = x\log 2 + x\log\left(1 + \frac{1}{2x}\right)$$

$$f(x) = x\log 2 + x\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \mathrm{o}(1/x^2)\right)$$

$$f(x) = (\log 2)x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \mathrm{o}(1/x)$$

On en déduit que la droite d'équation

$$y = (\log 2)x + \frac{1}{2}$$

est asymptote oblique à f en $+\infty$ et la courbe est en-dessous de l'asymptote.

— En $-\infty$ la droite d'équation

$$y = (\log 2)x + \frac{1}{2}$$

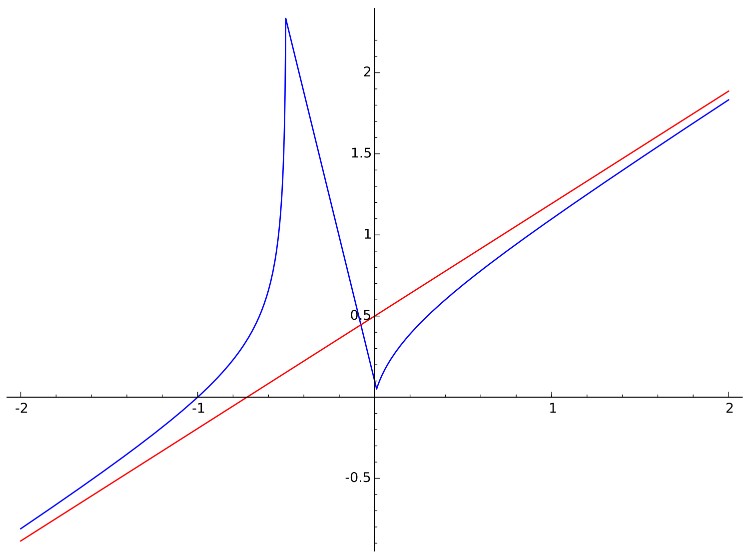
est également asymptote oblique à f en $-\infty$ et la courbe est au-dessus de l'asymptote.

— Pour ce qui est de la tangente en 0 :

$$f'(x) = \log\left|2 + \frac{1}{x}\right| - \frac{1}{2x+1}$$

et alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \log\left|2 + \frac{1}{x}\right| = +\infty.$$



5.4 Courbes paramétrées

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbf{R}^2$ telle que $f(t) = (u(t), v(t))$.

DÉFINITION 5.4.0.1. —
Supposons que u, v sont continues.
Si u et v admettent un développement limité à l'ordre n au point t_0 :

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + u_1(t-t_0) + \ldots + u_n(t-t_0)^n + (t-t_0)^n \varepsilon(t) \\ v(t) &= v_0 + v_1(t-t_0) + \ldots + v_n(t-t_0)^n + (t-t_0)^n \varepsilon(t) \end{aligned}$$

alors f admet un développement limité à l'ordre n en t_0 :

$$f(t) = f_0 + (t-t_0)f_1 + \ldots + (t-t_0)^n f_n + (t-t_0)^n \varepsilon(t)$$
$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}, \ f_i = (u_i, v_i).$$

L'égalité précédente s'appelle le *développement limité de f en t_0 à l'ordre n.*

REMARQUE. On a bien
$$\lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = (0,0).$$

DÉFINITION 5.4.0.2. —
Une fonction $f : I \to \mathbf{R}^2$ s'appelle *courbe paramétrée de* $\mathbf{R}^2$.

Supposons que f est dérivable en $t_0 \in I$. f admet le développement limité en t_0 à l'ordre 1 suivant :
$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0) + (t-t_0)\varepsilon(t).$$

DÉFINITION 5.4.0.3. —
Si $f'(t_0) \neq 0$ alors la tangente à la courbe au point $f(t_0)$ est la droite affine passant par $f(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$. L'équation est

$$\det \begin{pmatrix} x - u(t_0) & u'(t_0) \\ y - v(t_0) & v'(t_0) \end{pmatrix} = 0.$$

En d'autres termes, c'est l'équation :

$$(y - v(t_0)) \cdot u'(t_0) - (x - u(t_0)) \cdot v'(t_0) = 0.$$

On se demande quelles sont les conditions à l'existence de la tangente en un point ainsi que la position de la tangente par rapport à la courbe.

REMARQUE. On retrouve l'étude des fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}$ si on a

$$f(t) = (t, v(t)).$$

Supposons que u, v admettent des développements limités en t_0 à l'ordre $n \geq 2$. On a

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0) + (t-t_0)^2 w_2 + \ldots + (t-t_0)^n w_n + (t-t_0)^n \varepsilon(t)$$

où $w_2, \ldots, w_n \in \mathbf{R}^2$ et $\lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0_{\mathbf{R}^2}$.

1. Supposons que $f'(t_0) \neq 0$ et $f'(t_0)$ est non colinéaire à w_2. On tronque le développement limité à l'ordre 2 :
$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0) + (t-t_0)^2 w_2 + (t-t_0)^2\varepsilon(t).$$
Soient $(a(t), b(t))$ les coordonnées de $\varepsilon(t)$ dans la base $(f'(t_0), w_2)$. Ainsi :
$$f(t) - f(t_0) = \left(t - t_0 + (t-t_0)^2 a(t)\right) f'(t_0) + (t-t_0)^2(b(t)+1)w_2$$
$$\lim_{t\to t_0} a(t) = \lim_{t\to t_0} b(t) = 0.$$
Selon la coordonnée de $f'(t_0)$ on a que $(t-t_0)^2 a(t)$ tend vers 0 et alors $t - t_0$ détermine le signe. Selon la coordonnée w_2, dans un voisinage suffisamment petit de t_0 on a que la coordonnée est de signe positif.
2. Supposons que $f'(t_0) \neq 0$, $w_2 = \lambda f'(t_0)$ et enfin w_3 et $f'(t_0)$ non colinéaires. On a alors dans la base $(f'(t_0), w_3)$:
$$f(t) - f(t_0) = \left(t - t_0 + \lambda(t-t_0)^2\right) f'(t_0) + (t-t_0)^3 w_3 + (t-t_0)^3\varepsilon(t).$$
On décompose $\varepsilon(t)$ dans cette base :
$$\varepsilon(t) = a(t)f'(t_0) + b(t)w_3.$$
On sait que
$$\lim_{t\to t_0} a(t) = \lim_{t\to t_0} b(t) = 0.$$
Dans cette base, on a :
$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} t - t_0 + \lambda(t-t_0)^2 + (t-t_0)^3 a(t) \\ (t-t_0)^3 + (t-t_0)^3 b(t) \end{pmatrix}$$
Sur chaque coordonnée, le signe est celui de $t - t_0$.

Remarque. Supposons $f'(t_0) \neq 0, n \geq 3$ et il existe un entier $p \in \{3, \ldots, n\}$ tel que les vecteurs $w_2, w_3, \ldots, w_{p-1}$ sont colinéaires à $f'(t_0)$ et tel que w_p n'est pas colinéaire à $f'(t_0)$. Ainsi, $(f'(t_0), w_p)$ est une base de $\mathbf{R}^2$.
On écrit le développement limité de $f(t) - f(t_0)$ dans cette base. On étudie le signe des coordonnées de $f(t) - f(t_0)$ quand $t \to t_0$. Si p est pair alors la courbe est comme dans le cas $p = 2$ (la courbe est du côté de w_p par rapport à la tangente), sinon comme dans le cas $p = 3$(elle traverse la tangente).
3. Supposons que $f'(t_0) = 0$ et que w_2, w_3 forme une base de $\mathbf{R}^2$. On a
$$f(t) - f(t_0) = (t-t_0)^2 w_2 + (t-t_0)^3 w_3 + (t-t_0)^3\varepsilon(t).$$
On décompose $\varepsilon(t)$ dans la base (w_2, w_3) : $\varepsilon(t) = a(t)w_2 + b(t)w_3$ avec $\lim_{t\to t_0} a(t) = \lim_{t\to t_0} b(t) = 0$. Les coordonnées dans cette base de $f(t) - f(t_0)$ sont alors :
$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} (t-t_0)^2 + (t-t_0)^3 a(t) \\ (t-t_0)^3 + (t-t_0)^3 b(t) \end{pmatrix}.$$
Ainsi, la première coordonnée est positive et la seconde est du signe de $t - t_0$. Une telle situation est un *point de rebroussement*.
4. Supposons que $f'(t_0) = 0$, $w_3 = \lambda w_2$ et w_2, w_4 forme une base. On pose $\varepsilon(t) = a(t)w_2 + b(t)w_4$. Dans ces coordonnées :
$$f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} (t-t_0)^2 + \lambda(t-t_0)^3 + (t-t_0)^4 a(t) \\ (t-t_0)^4(1 + b(t)) \end{pmatrix}.$$
Les deux coordonnées sont positives quand $t \to t_0$. C'est aussi un point de rebroussement