ANALYSE – DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

FONCTION NÉGLIGEABLE DEVANT UNE AUTRE

1. Soit $f : V \subset \mathbf{R}$ une application définie dans un voisinage V de $a \in \mathbf{R}$. Si $g : V \to \mathbf{R}$ est une autre application définie au voisinage de a. Alors s'il existe $\varepsilon : I \to \mathbf{R}$ une application continue telle que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x-a) = 0$ et telle que pour tout $x \in V$ on ait $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ alors on note $f = \mathrm{o}(g)$ *au voisinage de a*.

Pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tels que ε, puisque :

$$\lim_{x\to a} \varepsilon_1(x-a)\varepsilon_2(x-a) = 0,$$

2. $\mathrm{o}(\cdot)$ est une relation transitive et compatible avec la multiplication.

FORMULE DE TAYLOR-LAGRANGE

3. Supposons f de classe C^n. Soient a et $a+h$ deux points de V. Posons :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n. \tag{1}$$

C'est la formule de TAYLOR-LAGRANGE. Le *reste* R_n sera une nouvelle fonction de h que nous allons déterminer.

En prenant les dérivées successives de (1) par rapport à h on voit que : 1. la dérivée n-ième de R_n est égale à $f^{(n)}(a+h)$; 2. R_n et ses $n-1$ premières dérivées s'annulent pour $h = 0$.

Ces deux conditions permettent de définir complètement R_n. En effet si ϕ est une autre fonction qui satisfait ces conditions, alors $R_n - \phi$, ayant sa n-ième dérivée nulle, sera un polynôme entier d'ordre $n-1$ mais ce polynôme et ses $n-1$ premières dérivées s'annulent pour $h = 0$ et est donc identiquement nul.

La formule

$$R_n = \int_0^h \frac{(h-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+t)\,\mathrm{d}t$$

convient.

4. Posons $t = uh$ avec u variant de 0 à 1. On a alors :

$$R_n = \frac{h^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(a+uh)\,\mathrm{d}u.$$

Cela montre que $R_n = \mathrm{o}(h^n)$.

5. Soit p un entier positif arbitraire non supérieur à n. La fonction à intégrer sera le produit des deux facteurs :

$$(1-u)^{p-1} \text{ et } (1-u)^{n-p} f^{(n)}(a+uh),$$

dont le premier est positif et le second étant continu, on en déduit par le théorème de la moyenne :

$$R_n = h^n \frac{(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta h)}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{p-1}\,\mathrm{d}u,$$

θ désignant une quantité comprise entre 0 et 1. De plus :

$$\int_0^1 (1-u)^{p-1}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{(1-u)^p}{p}\right]_0^1 = \frac{1}{p}.$$

On en déduit donc, avec $p = n$:

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h).$$

DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

6. Soit $f : V \to \mathbf{R}$ et soit $a \in V$ un point intérieur. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a s'il existe un polynôme P de degré au plus n tel que :

$$f(a+h) = P(h) + \mathrm{o}(h^n).$$

La formule de Taylor garantit l'existence d'un développement limité pour une application f de classe C^{n+1}.

7. Un développement limité d'ordre n, s'il existe, est unique.

En effet soient P, Q deux polynômes à priori distincts tels que $f(a+h) = P(h) + \mathrm{o}(h^n) = Q(h) + \mathrm{o}(h^n)$. On a alors l'existence de ε une application définie au voisinage de a de limite nulle telle que :

$$P(h) - Q(h) = h^n \varepsilon(h)$$

or terme à terme le membre de gauche s'annule quand on fait tendre h vers a.

8. Si f admet un développement limité à l'ordre 0 alors f est continue.
En effet,

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0} f(a) + \varepsilon(h) = f(a).$$

La réciproque est vraie :

$$\varepsilon(h) = f(a+h) - f(a).$$

9. Si f admet un développement limité à l'ordre 1 alors f est dérivable.
En effet, si $f(a+h) = f(a) + a_1 h + \varepsilon(h)h$ alors :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = a_1.$$

La réciproque est vraie :

$$\varepsilon(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h.$$

CALCULS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

10. Soient $f, g : V \to \mathbf{R}$ admettant P, Q respectifs comme développement limité à l'ordre n. Alors pour $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha f + g$ admet pour développement limité :

$$(\alpha f + g)[a+h] = (\alpha P + Q)[h] + \mathrm{o}(h^n).$$

En effet, pour $\varepsilon_f, \varepsilon_g$ correspondants on a bien :

$$h^n(\alpha \varepsilon_f(h) + \varepsilon_g) = \mathrm{o}(h^n).$$

11. Soient $f : V \to \mathbf{R}$ et $g : U \to \mathbf{R}$ admettant respectivement pour développements limités à l'ordre n P et Q. Alors fg admet pour développement limité à l'ordre n

$$(fg)(a+h) = (T_n(PQ))(h) + \mathrm{o}(h^n)$$

où T_n est le tronqué du polynôme à l'ordre n.
En effet :

$$PQ(x) = (T_n(PQ))(x) + x^{n+1}R(x), R \in \mathbf{R}[x]$$

et d'où :

$$(fg)(a+h) = (T_n(PQ))(h) + h^n(Q\varepsilon_f(h) + P\varepsilon_g(h) + hR(h))$$

ce qui convient.

12. Soient $f : V \to \mathbf{R}$ et $g : V \to \mathbf{R}$ admettant pour développements limités respectifs à l'ordre n P et Q et avec $a = 0 = g(a)$. Alors $f \circ g$ admet pour développement limité :

$$(f \circ g)(h) = (T_n(P \circ Q))(h) + \mathrm{o}(h^n).$$

Pour $n = 0$ c'est vérifié, de plus on a $Q(0) = 0$. Supposons $f = P + \varepsilon_1$ et $g = Q + \varepsilon_2$.
Posons $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ et $Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$. On a :

$$P(g(x)) = \sum_{i=0}^{n} a_i g(x)^i = T_n\left(\sum_{i=0}^{n} a_i Q(x)^i\right) + x^n \varepsilon_3(x).$$

Comme $Q(0) = 0$ on a $b_0 = 0$. On pose (possible car on peut supposer $n > 0$) h tel que :

$$g(x) = xh(x)$$

ce qui donne :

$$(f \circ g)(x) = P(xh(x)) + x^n h(x)^n \varepsilon_1(xh(x)) = T_n(P \circ Q)(x) + x^n(h(x)^n \varepsilon_1(g(x)) + \varepsilon_3(x)).$$

13. Soient f, g admettant un développement limité à l'ordre n en a. Puisque le développement limité à l'ordre n de $1/(1-x)$ est :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

alors si f/g est bien défini, un développement limité existe.

14. Soit $f : V \subset \mathbf{R}$ admettant pour développement limité à l'ordre n :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} h^k + \mathrm{o}(h^n).$$

Alors si F est une primitive de f, le développement limité de F est :

$$F(a+h) = F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)!} h^{k+1} + \mathrm{o}(h^{n+1}).$$

Il s'agit de montrer que si $f(a+x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$ alors $x^n \varepsilon(x)$ admet bien une primitive en $\mathrm{o}(x^{n+1})$. Par le théorème de la moyenne :

$$\int_0^x x^n \varepsilon(x) \, \mathrm{d}x = x\theta^n \varepsilon(\theta) = u(x)$$

pour un certain θ entre 0 et x. Maintenant

$$|u(x)| \leq |x|^{n+1} |\varepsilon(\theta)|$$

et comme $\varepsilon(\theta)$ tend vers 0 pour x tendant vers 0 on a bien $u(x) = \mathrm{o}(x^{n+1})$.

FORMULE DE TAYLOR-YOUNG

15. Formule de Taylor-Young. Soit $f : V \subset \mathbf{R}$ une application d'un voisinage de $a \in \mathbf{R}$. Si f est C^n avec $n < \infty$ alors f admet un développement limité à l'ordre n en a :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{o}(h^n).$$

Pour le cas $n \leq 1$ c'est déjà démontré par les points 8 et 9. En général, on fait descendre la valeur de n par récurrence et on remonte par l'intégration du développement limité.