

COURS COMPLET DE MM3

Sommaire

I	Algèbre	1
1	Groupes et groupes symétriques	3
1	Introduction	3
2	Sous-groupe	5
3	Morphisme de groupes	7
4	Groupe symétrique	8
2	Déterminants et réduction	12
1	Déterminants	12
2	Déterminant d'un endomorphisme	17
3	Diagonalisation	19
4	Polynômes en un endomorphisme de E	23
5	Applications	28
II	Analyse	31
3	Développements limités	32
1	Fonctions négligeables et équivalentes	32
2	Dérivées successives et formules de TAYLOR	35
3	Développement limité à l'ordre n d'une fonction de classe C^n	38
4	Calculs avec les développements limités	44
5	Applications	48

Première partie

Algèbre

Table des matières

1	Groupes et groupes symétriques	3
1	Introduction	3
1.1	Groupe abstrait	3
1.2	Groupe commutatif	3
1.3	Exemples	4
2	Sous-groupe	5
2.1	Sous-groupe	5
2.2	Ordre d'un groupe et d'un élément	5
3	Morphisme de groupes	7
3.1	Morphisme de groupes	7
3.2	Image et noyau	7
4	Groupe symétrique	8
4.1	Groupe de permutations	8
4.2	Transpositions et cycles	8
4.3	Décomposition des cycles	9
2	Déterminants et réduction	12
1	Déterminants	12
1.1	Différentes définitions	12
1.2	Formes n -linéaires alternées	14
2	Déterminant d'un endomorphisme	17
2.1	Invariance par changement de base	17
3	Diagonalisation	19
3.1	Valeur propre et vecteur propre	19
3.2	Sous-espaces propres	19
3.3	Conditions de diagonalisabilité	21
4	Polynômes en un endomorphisme de E	23
4.1	Polynômes évalué en un endomorphisme	23
4.2	Lemme des noyaux	25
4.3	Trigonalisation	26
4.4	Comment calculer m_f ? (CAYLEY-HAMILTON)	27
5	Applications	28
5.1	Calculs de puissances	28

5.2	Systèmes différentiels	28
5.3	Application aux suites récurrentes	29

Chapitre 1

Groupes et groupes symétriques

1 INTRODUCTION

1.1 Groupe abstrait

DÉFINITION 1.1

Un groupe est la donnée d'un couple (G, \cdot) où G est un ensemble et $\cdot : G \times G \rightarrow G$ une loi de composition interne, telle que :

1. associativité :

$$\forall a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$

2. existence de l'élément neutre $e \in G$:

$$\forall g \in G, g \cdot e = e \cdot g = g;$$

3. existence de l'inverse :

$$\forall x \in G, \exists y \in G, x \cdot y = y \cdot x = e.$$

NOTATIONS. Pour un groupe multiplicatif on note ab l'élément $a \cdot b$, l'élément neutre est noté 1 et l'inverse de a est noté de a^{-1} .

DÉMONSTRATION 1.1 (Unicité de l'élément neutre et de l'inverse)

Soient e, e' deux éléments neutres. Alors

$$e' = e \cdot e' = e.$$

Soient b, c inverses de a . Alors :

$$b = b \cdot a \cdot c = c.$$

1.2 Groupe commutatif

DÉFINITION 1.2 (Groupe commutatif (ou Abélien))

Un groupe G est commutatif si la loi de composition l'est :

$$\forall x, y \in G, xy = yx.$$

NOTATIONS. En général la loi de composition d'un tel groupe est notée comme un groupe additif $(G, +)$. Le neutre est alors 0 et l'inverse de x est $-x$.

1.3 Exemples

- Le couple $(\mathbf{Z}, +)$ est un groupe abélien où $+$ est l'addition usuelle des entiers.
- $(\mathbf{R}, +)$ et $(\mathbf{Q}, +)$ sont également des groupes abéliens.
- $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \times)$ et $(\mathbf{Q} \setminus \{0\}, \times)$ sont des groupes abéliens.
- $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ est un groupe pour la composition de matrices en tant que loi de composition. Ce n'est pas un groupe commutatif.

2 SOUS-GROUPE

2.1 Sous-groupe

DÉFINITION 2.1 (Sous-groupe)

Soit G un groupe (multiplicatif) et $H \subset G$ un sous-ensemble de G . H est un sous-groupe de G si c'est un groupe avec la loi de composition et d'inverse astreintes à H ^{1§}.

PROPOSITION 2.1

Soit G un groupe.

Si $(H_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-groupes de G alors $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de G .

DÉFINITION 2.2

Pour tout $i \in I$, H_i vérifie la propriété de sous-groupe et donc l'intersection aussi.

REMARQUE. Généralement la réunion de sous-groupes n'est pas un sous-groupe. En effet si $x \in H_1$ et $y \in H_2$ alors il n'y a aucune raison que $xy \in \bigcup H_i$.

Pour une équivalence il faut rajouter une hypothèse. Si H, K sont deux sous-groupes de G alors $H \cup K$ est un sous-groupe si, et seulement si, $H \subset K$ ou $K \subset H$.

En effet supposons $H \not\subset K$ et que $H \cup K$ est un sous-groupe. Si $K \not\subset H$ alors on peut choisir $x \in K - K \cap H$ et $y \in H - K \cap H$. On a $x, y \in K \cup H$ et donc par hypothèse $xy \in H \cup K$ et donc il existe des inverses respectifs x^{-1}, y^{-1} . Supposons $xy \in H$: $H \ni (xy)y^{-1} = xe = x \in H$ absurde.

DÉFINITION 2.3 (Groupe engendré)

Si G est un groupe et X une partie de G alors on appelle sous-groupe de G engendré par X le plus petit sous-groupe de G contenant X . On le notera ici $\langle X \rangle$.

On a de plus si on note \mathbb{G} l'ensemble des sous-groupes de G :

$$\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathbb{G} \text{ et } H \supset X} H.$$

EXEMPLE. Soit G un groupe et $x \in G$. Alors :

$$\langle x \rangle = \left\{ x^k \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

En effet c'est un sous-groupe de $\langle x \rangle$ et le plus petit.

2.2 Ordre d'un groupe et d'un élément

DÉFINITION 2.4 (Ordre d'un groupe)

Si G est un groupe fini, on appelle *ordre de G* son cardinal, on le note généralement $|G|$ ou $\sharp G$.

Si G est un groupe et $x \in G$ alors on appelle *ordre de x* le cardinal de son sous-groupe engendré (s'il est fini).

Dans le cas où le groupe en question ne serait pas fini, on dit que l'ordre est infini.

EXEMPLES.

— Dans \mathbf{Z} , tous les éléments non nuls sont d'ordre infini.

^{1§}. C'est-à-dire si H est stable par l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$.

- Dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est d'ordre n puisque toute classe admet un représentant dans $\{0, \dots, n-1\}$.
- Ordre des éléments de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$:

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$ x $	1	4	2	4

THÉORÈME 2.1 (Théorème de LAGRANGE)

Pour tout groupe G et tout sous-groupe H de G , l'ordre (i.e. le cardinal) de H divise l'ordre de G :

$$\#H \mid \#G.$$

DÉMONSTRATION 2.1 (Théorème de LAGRANGE)

Le cardinal de l'ensemble G/H est appelé *indice* de H dans G et est noté $[G : H]$. De plus, ses classes forment une partition de G et chacune d'entre elles a le même cardinal que H . On a alors :

$$\#G = \#H \times [G : H].$$

3 MORPHISME DE GROUPE

3.1 Morphisme de groupes

DÉFINITION 3.1

Soient G, H deux groupes. Une application $f : G \rightarrow H$ est un morphisme de groupes si :

$$\forall x, y \in G, f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

PROPOSITION 3.1

Soient $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes. Alors :

1. $f(e_G) = e_H$;
2. $\forall x \in G, f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

3.2 Image et noyau

DÉFINITION 3.2

Soit $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes. On définit :

1. $\text{Ker}(f) = \{x \in G \mid f(x) = e\}$;
2. $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in G\}$.

PROPOSITION 3.2

Soit $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes.

1. $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des sous-groupes de G et H respectivement ;
2. f est injective si, et seulement si, $\text{Ker}(f) = \{e\}$;
3. f est surjective si, et seulement si, $\text{Im}(f) = H$.

DÉMONSTRATION 3.1

Point par point :

1. On a bien entendu $f(e) = e$ et $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$ pour tout $x \in G$. Ainsi $\text{Im}(f) = f(G)$ est un sous-groupe de H .
Soient $x, y \in G$, alors $f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = ef^{-1} = e$ donc $xy^{-1} \in G$. De plus $f(e) = e$ donc $\text{Ker}(f)$ est un sous-groupe de G .
2. Soient $x, y \in G$:

$$(f(x) = f(y)) \iff x = y \iff (f(xy^{-1}) = e \iff xy^{-1} = e).$$

3. Par définition, si $\text{Im}(f) = H$ alors f est surjective et réciproquement.

4 GROUPE SYMÉTRIQUE

4.1 Groupe de permutations

DÉFINITION 4.1

Soit E un ensemble. On définit :

$$S_E = \{\text{bijections } E \rightarrow E\}.$$

La loi étant la composition des applications. Elle est associative, admet un élément neutre (application identité) et toute application admet une application inverse par définition.

PROPOSITION 4.1

Si $\#E = n$ alors S_E est isomorphe (au sens de groupes) à $S_{\{1,2,\dots,n\}} := S_n$.

DÉMONSTRATION 4.1

Puisque $\#E = n$ il existe une bijection $\phi : E \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. On considère alors l'application de $\theta : S_E \rightarrow S_n$ définie par : $\omega \mapsto \phi \circ \omega \circ \phi^{-1}$. Comme ω, ϕ sont des bijections, l'application $\phi \circ \omega \circ \phi^{-1}$ est une bijection. L'application θ est bien définie.

On a :

$$\begin{aligned}\theta(\omega' \circ \omega) &= \phi \circ (\omega' \circ \omega) \circ \phi^{-1} \\ \theta(\omega' \circ \omega) &= \phi \circ \omega' \circ \text{id} \circ \omega \circ \phi^{-1} \\ \theta(\omega' \circ \omega) &= \theta(\omega') \circ \theta(\omega).\end{aligned}$$

θ est bien un morphisme de groupes. On a $\theta^{-1}(\omega) = \phi^{-1} \circ \omega \circ \phi$ qui fait de θ une bijection.

DÉFINITION 4.2 (Groupe symétrique)

On appelle S_n le *groupe symétrique*.

REMARQUE. On omet la notation \circ . Si $\omega \in S_n$ on décrit son action sur $\{1, 2, \dots, n\}$ par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \omega(1) & \omega(2) & \dots & \omega(n) \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE DE COMPOSITION. Dans S_4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.2 Transpositions et cycles

DÉFINITION 4.3 (Transposition)

Une *transposition* de S_n est une permutation qui échange deux éléments et laisse invariants les $n - 2$ autres.

NOTATION. Pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ avec $i \neq j$ on note (ij) la transposition :

$$(ij) : \begin{cases} i \mapsto j \\ j \mapsto i \\ k \mapsto k, \forall k \neq i, j \end{cases}.$$

REMARQUE. Une transposition est une involution. C'est à dire que l'ordre d'une transposition est 2.

PROPOSITION 4.2

$\#S_n = n!$.

DÉFINITION 4.4 (Cycle)

On appelle *cycle* de longueur $r > 1$ (noté r -cycle) (dans S_n) une permutation ω telle qu'il existe $x_1, x_2, \dots, x_r \in \{1, 2, \dots, n\}$ vérifiant :

1. $\omega(x_1) = x_2, \omega^n(x_1) = x_{1+n}$ avec $n < r$;
2. $\omega(x_r) = x_1$;
3. $\omega(x) = x$ si $x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$.

NOTATION. On note un tel cycle : $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r)$.

REMARQUE. Les 2-cycles sont exactement les transpositions.

EXEMPLE. Dans S_3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3) = \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases}.$$

4.3 Décomposition des cycles

DÉFINITION 4.5 (Support)

On appelle *support* du cycle ω le sous-ensemble :

$$\{x_1, x_2, \dots, x_r\} \subset \{1, 2, \dots, n\}.$$

LEMME 4.1

Deux cycles de supports disjoints commutent.

DÉMONSTRATION 4.2

Soient :

$$\begin{cases} v = (x_1, x_2, \dots, x_r) \\ w = (y_1, y_2, \dots, y_s) \end{cases}$$

avec $\{x_1, x_2, \dots, x_r\} \cap \{y_1, y_2, \dots, y_s\} = \emptyset$.

Sur un élément extérieur du support la permutation agit comme l'identité donc deux supports disjoints impliquent que les permutations associées permutent (puisque que l'identité permute).

LEMME 4.2

Un r -cycle est d'ordre r .

DÉMONSTRATION 4.3

Soit $w = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r)$ un r -cycle. Il est clair qu'un élément du support est d'ordre r . Les autres restent fixés par w et donc w est d'ordre r .

PROPOSITION 4.3

Toute permutation de S_n est décomposable en produit de cycles de supports disjoints.
 Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

EXEMPLES. Soit :

$$S_5 \ni \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = w.$$

On peut décomposer w :

$$(1 \ 3 \ 5)(2)(4) = (1 \ 3 \ 5). \\ S_8 \ni w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 7 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 5 \ 3)(2 \ 6 \ 8)(4 \ 7).$$

THÉORÈME 4.1

Le groupe symétrique est engendré par les transpositions.

DÉMONSTRATION 4.4

On procède par récurrence sur n .

1. $S_2 = \{1, (1 \ 2)\}$ est engendré par $(1 \ 2)$.
2. Soit $n > 2$, supposons que S_{n-1} est engendré par les transpositions de S_{n-1} . Soit $w \in S_n$:
 - (a) Soit $w(n) = n$ et alors on décompose w en cycles de tailles inférieures ou égales à S_{n-1} et c'est démontré.
 - (b) Soit $w(n) \neq n$. On pose $m = w(n)$ et soit $t = (n \ m)$. On pose $v = tw$ et alors $v(n) = n$ et on lui applique le cas précédent. On a alors par unicité de la décomposition que w est elle-même engendrée par des transpositions et c'est démontré.

THÉORÈME 4.2

On a les propositions suivantes :

1. Si $w \in S_n$ est une permutation qui s'écrit de deux façons différentes comme produit de transpositions :

$$w = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_{r'},$$

$$\text{alors } (-1)^r = (-1)^{r'}.$$

On appelle $(-1)^r$ la *signature* de w .

2. La signature est un morphisme de groupes de $S_n \rightarrow \{1, -1\} \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

DÉMONSTRATION 4.5

Soit $w \in S_n$. On pose :

$$\varepsilon(w) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{w(i) - w(j)}{i - j} \\ \varepsilon(w) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (w(i) - w(j))}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (i - j)} \\ \varepsilon(w) = \frac{N}{D}.$$

Avec

$$N = \prod_{1 \leq i, j \leq n ; w^{-1}(i) < w^{-1}(j)} (i - j) = \pm D.$$

D'où :

$$\varepsilon(w) = \pm 1.$$

EXEMPLE. $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. On a :

$$\varepsilon(w) = \frac{(w(1) - w(2))(w(1) - w(3))(w(2) - w(3))}{(1 - 2)(1 - 3)(2 - 3)} = \frac{(2 - 3)(2 - 1)(3 - 1)}{(1 - 2)(1 - 3)(2 - 3)} = 1.$$

LEMME 4.3

On a :

1. $\varepsilon : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ est un morphisme de groupes ;
2. $\varepsilon(ij) = -1$ pour tout $i \neq j$.

DÉMONSTRATION 4.6 (Théorème)

Si

$$w = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_{r'}$$

alors par le lemme :

$$\varepsilon(w) = (-1)^r = (-1)^{r'}.$$

DÉMONSTRATION 4.7 (Lemme)

Soit $E = \{(ij) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. On pose :

$$f_w : \begin{cases} E \rightarrow E \\ (i \ j) \mapsto (w(i) \ w(j)) \text{ si } w(i) < w(j) . \\ (i \ j) \mapsto (w(j) \ w(i)) \text{ si } w(i) > w(j) \end{cases}$$

f est une bijection car elle est injective et l'ensemble de départ et d'arrivée ont le même cardinal qui est fini. Donc on a :

$$\varepsilon(w) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (w(i) - w(j))}{\prod_{(i,j) \in E} (w(i) - w(j))}$$

$$\varepsilon(w) = \pm 1.$$

Pour vérifier que ε est un morphisme, on calcul $\varepsilon(wv)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(wv) &= \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{i - j} \\ \varepsilon(wv) &= \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \prod_{(i,j) \in E} \frac{v(i) - v(j)}{i - j} \\ \varepsilon(wv) &= \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \varepsilon(v). \end{aligned}$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \varepsilon(w) &\stackrel{?}{=} \prod_{(i,j) \in E} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \\ \varepsilon(w) &= \prod_{(i,j) \in E_1} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \prod_{(i,j) \in E_2} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \end{aligned}$$

Où $E_1 = \{(i, j) \in E \mid v(i) < v(j)\}$ et $E_2 = \{(i, j) \in E \mid v(j) < v(i)\}$; $E = E_1 \coprod E_2$.

$$\begin{aligned} \varepsilon(w) &= \prod_{(i,j) \in E_2} \frac{wv(j) - wv(i)}{v(j) - v(i)} \prod_{(i,j) \in E_1} \frac{wv(i) - wv(j)}{v(i) - v(j)} \\ \varepsilon(w) &= \prod_{i < j ; v^{-1}(j) < v^{-1}(i)} \frac{w(i) - w(j)}{i - j} \prod_{i < j ; v^{-1}(i) < v^{-1}(j)} \frac{w(i) - w(j)}{i - j} \\ \varepsilon(w) &= \prod_{i < j} \frac{w(i) - w(j)}{i - j} \end{aligned}$$

Chapitre 2

Déterminants et réduction

1 DÉTERMINANTS

1.1 Différentes définitions

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ avec $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

DÉFINITION 1.1 (Déterminant)

On définit en premier lieu :

$$\det A = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) a_{w(1),1} \cdot a_{w(2),2} \cdot \dots \cdot a_{w(n),n}.$$

C'est la formule de CRAMER.

DÉFINITION 1.2

Une seconde définition possible :

Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, soit $A_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ la matrice (extraite) obtenue en enlevant la i -ième ligne et la j -ième colonne de A .

On a alors :

$$\det' A = a_{1,1} \cdot \det'(A_{1,1}) - a_{1,2} \cdot \det'(A_{1,2}) + \dots + (-1)^{n-1} a_{1,n} \cdot \det'(A_{1,n}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{1,i} \cdot \det'(A_{1,i})$$

EXEMPLE. Prenons :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; A_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne avec la seconde définition :

$$\det A = 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 2. On vérifie que les deux définitions coïncident :

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} - a_{2,1} a_{1,2}.$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}\det(a_{2,2}) - a_{1,2}\det(a_{2,1}) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.$$

REMARQUE. Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$ un n -uplet de vecteurs de E . Pour tout j , on pose :

$$u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \cdot e_i \quad a_{i,j} \in \mathbf{R}.$$

On appelle *déterminant* dans la base B de (u_1, \dots, u_n) le réel :

$$\det_B(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det(a_{i,j}).$$

EXEMPLE. Pour $n = 2$. On prend :

$$\begin{aligned} u_1 &= 2e_1 + 3e_2, \\ u_2 &= -e_1 + 6e_2. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\det_B(u_1, u_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 15.$$

REMARQUE. Si $u_j = e_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ alors $\det_B(e_1, \dots, e_n) = \det(I_d) = 1$.

PROPOSITION 1.1

On a les énoncés :

1. pour tout $w \in S_n$:

$$\det_B(u_{w(1)}, u_{w(2)}, \dots, u_{w(n)}) = \varepsilon(w) \det_B(u_1, u_2, \dots, u_n);$$

2. on en déduit que le déterminant change de signe si on échange deux colonnes ;
3. si pour $i \neq j$ on a $u_i = u_j$ alors le déterminant est nul (puisque négatif et positif simultanément).

DÉMONSTRATION 1.1

Il suffit de montrer le premier point.

On sait que S_n est engendré par les transpositions. On suppose donc que $w \in S_n$ est une transposition.

En fait, S_n est engendré par les transpositions simples, i.e. les transpositions de la forme $(k, k+1)$ avec $1 \leq k < n$. ^{1§}

On suppose donc que w est de la forme $(k, k+1)$. Soit A la matrice (u_1, u_2, \dots, u_n) de ces n vecteurs dans les coordonnées de la base B . Soit A' la matrice obtenue en permutant les colonnes k et $k+1$ de A . Il faut donc vérifier que :

$$\det A' = \varepsilon(w) \det A = -\det A.$$

On calcule à gauche et à droite :

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{1,j}), \\ \det A' &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a'_{1,j} \det(A'_{1,j}). \end{aligned}$$

- Pour $j \neq k, k+1$ on a $a'_{1,j} = a_{1,j}$ et $A'_{1,j}$ est obtenue en échangeant les colonnes k et $k+1$ de $A_{1,j}$
- Pour $j = k$ on a $a'_{1,k} = a_{1,k+1}$ et donc $A'_{1,k} = A_{1,k+1}$.
- Pour $j = k+1$ on a $a'_{1,k+1} = a_{1,k}$ et donc $A'_{1,k+1} = A_{1,k}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}\det A' &= \sum_{j \neq k, k+1} (-1)^{j+1} \det(A'_{i,j}) \textcolor{red}{2}\S + (-1)^{k+1} a'_{1,k} \det(A'_{1,k}) + (-1)^k a'_{1,k+1} \det(A'_{1,k+1}), \\ \det A' &= \sum_{j \neq k, k+1} (-1)^{j+1} (-\det(A_{i,j})) + (-1)^{k+1} a_{1,k+1} (-\det(A_{1,k+1})) + (-1)^k a_{1,k} (-\det(A_{1,k})), \\ \det A' &= -\det A.\end{aligned}$$

1.2 Formes n -linéaires alternées

DÉFINITION 1.3 (Forme n -linéaire)

Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Une forme n -linéaire sur E est une application $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{R}$ qui est linéaire sur chaque composante.

PROPOSITION 1.2

Soit B une base de E avec $\dim E = n$.

$$\det_B : \begin{cases} E^n \rightarrow \mathbf{R} \\ (u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_B(u_1, \dots, u_n) \end{cases}$$

est une forme n -linéaire.

DÉMONSTRATION 1.2

On pose :

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & aa'_{1,k} + ba''_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & aa'_{2,k} + ba''_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \\ A' &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a'_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a'_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \\ A'' &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a''_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & a''_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On veut montrer :

$$\det A = a \det A' + b \det A''.$$

On calcule :

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{i,j}) + (-1)^{k+1} (aa'_{1,k} + ba''_{1,k}) \det(A_{1,k}), \\ \det A' &= \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A'_{i,j}) + (-1)^{k+1} a'_{1,k} \det(A_{1,k}), \\ \det A'' &= \sum_{j \neq k} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A''_{i,j}) + (-1)^{k+1} a''_{1,k} \det(A_{1,k})\end{aligned}$$

On doit alors montrer :

$$\forall j \neq k, \det A_{i,j} = a \det(A'_{i,j}) + b \det(A''_{i,j})$$

ce qui est démontré par hypothèse de récurrence.

1§. En effet, toute transposition est un produit de transpositions simples par une conjugaison adaptée : on « renomme » les éléments.

2§. Par récurrence sur n on a $\det(A'_{i,j}) = -\det(A_{i,j})$.

DÉFINITION 1.4 (Forme n -linéaire alternée)

Soit $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{R}$ une forme n -linéaire alternée avec E un \mathbf{R} -espace vectoriel.

φ est une forme n -linéaire alternée si on a :

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$$

dès que deux composantes u_i, u_j avec $i \neq j$ coïncident.

REMARQUE. On en déduit que le déterminant dans une base donnée est une forme n -linéaire alternée.

PROPOSITION 1.3

Soit φ une forme n -linéaire alternée. Alors pour tout $w \in S_n$, $\varphi(u_{w(1)}, \dots, u_{w(n)}) = \varepsilon(w)\varphi(u_1, \dots, u_n)$.

DÉMONSTRATION 1.3

On peut supposer que w est une transposition simple : $w = (k, k+1)$ avec $1 \leq k < n$.

On veut montrer :

$$\varphi(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, u_k, u_{k+2}, \dots, u_n) = -\varphi(u_1, \dots, u_n).$$

Pour simplifier les notations, on oublie les indices u_i avec $i \neq k, k+1$. On a :

$$\varphi(u_k + u_{k+1}, u_k + u_{k+1}) = 0$$

et donc par linéarité :

$$\varphi(u_k, u_k) + \varphi(u_k, u_{k+1}) + \varphi(u_{k+1}, u_k) + \varphi(u_{k+1}, u_{k+1}) = 0 \iff \varphi(u_k, u_{k+1}) = -\varphi(u_{k+1}, u_k).$$

PROPOSITION 1.4

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{R}$ une forme n -linéaire alternée. Alors :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(u_1, \dots, u_n)\varphi(e_1, \dots, e_n)$$

où les u_i sont exprimés dans la base B .

REMARQUE. Toutes les formes n -linéaires alternées sont proportionnelles au déterminant.

DÉMONSTRATION 1.4

Soit $u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i$, les $a_{i,j}$ sont les coordonnées des u_j dans la base B .

On a :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n a_{i,1}e_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,n}e_i\right).$$

Comme φ est n -linéaire alternée :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \sum_{w \in S_n} a_{w(1),1} a_{w(2),2} \dots a_{w(n),n} \varphi(e_{w(1)}, \dots, e_{w(n)})$$

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \sum_{w \in S_n} a_{w(1),1} a_{w(2),2} \dots a_{w(n),n} \varepsilon(w) \varphi(e_1, \dots, e_n)$$

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(u_1, \dots, u_n) \varphi(e_1, \dots, e_n)$$

REMARQUES. On a démontré :

1. Pour une base B choisie, le déterminant \det_B est une forme n -linéaire alternée ;
2. pour toute forme n -linéaire alternée, φ , on a : $\varphi(\cdot) = \det_B(\cdot)\varphi(B)$;

3. en particulier, les deux déterminants coïncident.

PROPOSITION 1.5

Pour tout $A \in M_n(\mathbf{R})$ on a :

$$\det(A) = \det(A^t).$$

DÉMONSTRATION 1.5

On a :

$$\begin{aligned} A &= (a_{i,j}) \\ A^t &= (b_{i,j}), \quad b_{i,j} = a_{j,i} \end{aligned}$$

On calcule par la formule de CRAMER :

$$\begin{aligned} \det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^n b_{w(i),i}, \\ \det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^n a_{i,w(i)}. \end{aligned}$$

Pour w fixé, dans i décrit 1 à n alors $w(i)$ décrit également 1 à n . On effectue un changement de variable $j = w(i)$ et alors $i = w^{-1}(j)$ et on a :

$$\begin{aligned} \det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{j=1}^n a_{w^{-1}(j),j}, \\ \det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w^{-1}) \prod_{j=1}^n a_{w(j),j}, \\ \det(A^t) &= \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{j=1}^n a_{w(j),j}, \\ \det(A^t) &= \det(A). \end{aligned}$$

REMARQUE. On peut calculer $\det(A)$ en développant par rapport à la première ligne ou la première colonne (au choix). On a alors :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^n a_{i,1} \det(A_{i,1}).$$

PROPOSITION 1.6

Si $A \in M_n(\mathbf{R})$ est triangulaire alors :

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

DÉMONSTRATION 1.6

Supposons A triangulaire supérieure, c'est-à-dire $a_{i,j} = 0$ si $i > j$.

Par la formule de CRAMER :

$$\det(A) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) \prod_{i=1}^n a_{i,w(i)}.$$

Or les seuls w qui contribuent à cette somme sont ceux tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, i \leq w(i),$$

c'est-à-dire : $w = \text{id}$ ^{3§}.

En développant par rapport à une ligne (ou une colonne quelconque) :

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{j,i} \det(A_{j,i}).$$

Si A' désigne la matrice obtenue en permutant les lignes de A par $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j \end{pmatrix}$:

$$\det(A') = \varepsilon(w) \det(A) = (-1)^{j+1} \det(A).$$

On note $A' = (a'_{k,l})_{k,l \in \{1, \dots, n\}}$.

En choisissant $j > 1$:

$$\det(A') \stackrel{\text{4§}}{=} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a'_{1,i} \det(A'_{1,i}),$$

$$\det(A') = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{j,i} \det(A_{j,i});$$

$$\det(A) = (-1)^{j+1} \det(A'),$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{j+i} a_{j,i} \det(A_{j,i}).$$

2 DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

2.1 Invariance par changement de base

PROPOSITION 2.1

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $C = (u_1, \dots, u_n)$ un système de n vecteurs de E . Alors C est une base de E si, et seulement si :

$$\det_B(C) \neq 0.$$

DÉMONSTRATION 2.1

Supposons que C est une base de E .

On a vu que si $\varphi : E^n \rightarrow \mathbf{K}$ est une forme n -linéaire alternée alors :

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n, \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det_B(u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \varphi(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

On applique cette formule avec $\varphi = \det_C$ et on a :

$$\begin{aligned} \det_C(u_1, u_2, \dots, u_n) &= \det_B(C) \det_C(B), \\ 1 &= \det_C(C) = \det_B(C) \det_C(B), \end{aligned}$$

et donc $\det_B(C) \neq 0$.

Supposons maintenant que C est liée. Il existe alors i tel que u_i est combinaison linéaire des u_j avec $j \neq i$. Par

3§. Soit $w \in S_n$, $w : \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \dots, n\}$.

Si $i \leq w(i)$ pour tout i alors $w(k) = k$ pour tout k par récurrence descendante sur k :

- $n \leq w(n)$ et donc $w(n) = n$;
- $k-1 \leq w(k-1)$ et donc $w(k-1) = w(k)$.

4§. En développant par rapport à la première ligne.

exemple :

$$u_i = \sum_{j \neq i} a_j \cdot u_j, \quad (a_j \in \mathbf{R})$$

$$\det_B(C) = \det_B(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, \sum_{j \neq i} a_j \cdot u_j, u_{i+1}, \dots, u_n),$$

$$\det_B(C) = \sum_{j \neq i} a_j \det_B(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_n),$$

or \det_B est alternée et comme u_j apparaît deux fois dans la dernière expression, on a

$$\det_B(C) = 0.$$

PROPOSITION 2.2

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , $B = (e_1, \dots, e_n)$, $C = (u_1, \dots, u_n)$ deux bases de E et f un endomorphisme de E . Alors :

$$\det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_C(f(u_1), \dots, f(u_n)).$$

REMARQUE. En d'autres termes, $\det_B(f(B))$ ne dépend pas du choix de la base B . On l'appelle $\det(f)$.

DÉMONSTRATION 2.2

On utilise la formule :

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n, \quad \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det_B(u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \varphi(e_1, e_2, \dots, e_n),$$

où φ est une forme n -linéaire alternée.

On pose :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$$

et on a alors :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det_C(f(u_1), \dots, f(u_n)) \det_B(C).$$

De même :

$$\det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det_B(C) \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Et donc :

$$\det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) \det_B(C) = \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)) \det_B(C)$$

et $\det_B(C) \neq 0$. Donc l'égalité voulue est obtenue.

PROPOSITION 2.3

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , f et g deux endomorphismes de E . Alors :

$$\det(fg) = \det(f) \det(g).$$

DÉMONSTRATION 2.3

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ,

$$\det(fg) = \det_B(fg(e_1), \dots, fg(e_n)).$$

Considérons la forme n -linéaire alternée φ telle que :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det_B(g(u_1), \dots, g(u_n)),$$

alors on a :

$$\begin{aligned} \varphi(f(u_1), \dots, f(u_n)) &= \det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) \varphi(e_1, \dots, e_n), \\ \det_B(gf(e_1), \dots, gf(e_n)) &= \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)) \det_B(g(e_1), \dots, g(e_n)), \\ \det(gf) &= \det(g) \det(f). \end{aligned}$$

REMARQUE. Si $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ alors

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

3 DIAGONALISATION

DÉFINITION 3.1

Une matrice A est *diagonalisable* si elle est conjugué par un isomorphisme à une matrice diagonale.

3.1 Valeur propre et vecteur propre

Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n . Soit f un endomorphisme de E .

DÉFINITION 3.2

On appelle *valeur propre* de f un réel λ tel qu'il existe un $v \in E - \{0\}$ tel que $f(v) = \lambda \cdot v$.
On dit que v est un *vecteur propre* de valeur propre λ .

Quitte à prendre la matrice A de f dans une base (e_1, \dots, e_n) fixée de E , λ est une valeur de f (ou de A) si, et seulement si

$$\det(A - \lambda I_d) = 0.$$

REMARQUE. Soient $A \in M_n(\mathbf{R})$, B la base canonique et $C = AB$. $\det(A)$ est non nul si, et seulement si, A est inversible. D'autre part s'il existe un vecteur propre v de valeur propre λ alors

$$\ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\}.$$

Or $f - \lambda I_d$ est un endomorphisme de E et E est de dimension finie. Donc il y a équivalence :

$$\ker(f - \lambda I_d) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I_d) = 0.$$

DÉFINITION 3.3

On appelle polynôme caractéristique de f (ou de A) le polynôme :

$$\chi_f(t) = \chi_A(t) = \det(A - tI_d).$$

EXEMPLE. En dimension 2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a

$$\chi_A(t) = t^2 - (a + d)t + ad - bc = t^2 - \operatorname{tr}(A)t + \det(A).$$

REMARQUE. $\chi_A(t)$ est un polynôme de degré n de coefficient dominant $(-1)^n$ et de terme constant $\chi_A(0) = \det(A)$.

3.2 Sous-espaces propres

DÉFINITION 3.4

Soit f un endomorphisme de E et de matrice A . Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On appelle *sous-espace propre* de f (ou de A) de valeur propre λ le sous-espace vectoriel $\ker(f - \lambda I_d)$.

PROPOSITION 3.1

Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors si $\lambda \neq \mu$ on a

$$\ker(f - \lambda I_d) \cap \ker(f - \mu I_d) = \{0\}.$$

Plus généralement si, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$ distincts alors on a :

$$\sum_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i I_d) = \bigoplus_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i I_d)$$

DÉMONSTRATION 3.1

Il s'agit de vérifier que pour tout $i \neq j$ on a :

$$\ker(f - \lambda_i I_d) \cap \ker(f - \lambda_j I_d) = \{0\}.$$

Si $v \in \ker(f - \lambda_i I_d) \cap \ker(f - \lambda_j I_d)$ alors :

$$f(v) = \lambda_i v = \lambda_j v \implies v = 0.$$

COROLLAIRE 3.1

Soient $\dim E = n$, f est un endomorphisme de E , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ valeurs propres de f et E_i le sous-espace associé à la valeur propre λ_i . Alors si

$$E = \bigoplus_{i=1}^k E_i,$$

l'endomorphisme f est diagonalisable.

DÉMONSTRATION 3.2

Si on fait la réunion :

$$B = \bigcup_{i=1}^k B_i,$$

où B_i est une base de E_i on obtient une base de E . Dans cette base la matrice de f est diagonale où l'élément diagonal λ_i est la valeur propre correspondante. La matrice de passage de la base canonique à la base B donne la diagonalisation.

Donc pour diagonaliser A il faut vérifier si $E = \bigoplus_{i=1}^k E_i$ où les E_i sont les sous-espaces propres.

EXEMPLE. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & -3 \\ 1 & 4 - \lambda & -5 \\ 0 & 2 & -2 - \lambda \end{pmatrix},$$

$$\chi_A(\lambda) = (1 - \lambda)((4 - \lambda)(-2 - \lambda) + 10) - (2(-2 - \lambda) + 6),$$

$$\chi_A(t) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Les trois valeurs propres sont 0, 1, 2 et sont de multiplicité 1.

$$\begin{aligned}
E_0 = \ker(A) &= \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \mid Ax = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \\
E_1 = \ker(A - I_d) &= \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \\
E_2 = \ker(A - 2I_d) &= \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.
\end{aligned}$$

On a l'égalité :

$$E_0 \oplus E_1 \oplus E_2 = \mathbf{R}^3.$$

On en déduit les matrices de passage :

$$\begin{aligned}
P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3.3 Conditions de diagonalisabilité

PROPOSITION 3.2

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E , $\chi_f(t) \in \mathbf{R}[t]$, $\deg \chi_f = n$.

Si χ_f admet n racines distinctes alors f est diagonalisable.

DÉMONSTRATION 3.3

Si :

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - t)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ racines distinctes. On a alors que pour tout i :

$$E_i = \ker(f - \lambda_i \text{id}) \neq \{0\}$$

et donc $\dim E_i \geq 1$. On a alors que

$$\sum_{i=1}^n \dim E_i = \sum_{i=1}^n 1 = n$$

est de dimension supérieure à n ce qui implique $\bigoplus E_i = \mathbf{R}^n$.

REMARQUE. La condition donnée est nécessaire mais non suffisante. On cherche donc une condition nécessaire et suffisante.

PROPOSITION 3.3

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E , λ une valeur propre de f , m_λ la multiplicité de λ en tant que racine de $\chi_f(t)$ et E_λ le sous-espace propre associé à λ .

Alors $\dim E_\lambda \leq m_\lambda$.

DÉMONSTRATION 3.4

Soit $k = \dim E_\lambda$ et (e_1, e_2, \dots, e_k) une base de E_λ . On peut compléter (e_1, \dots, e_k) en une base $(e_1, \dots, e_n) = B$ de E .

$$\text{Mat}_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_d & X \\ \hline 0 & A \end{array} \right).$$

Or le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des matrices diagonales. ^{5§}
Ainsi :

$$\chi_f(t) = \det \left(\begin{array}{c|c} (\lambda - t)I_d & X \\ \hline 0 & A - tI_d \end{array} \right) = (\lambda - t)^k \chi_A(t)$$

et donc $m_\lambda \geq k$.

COROLLAIRE 3.2

On a les propositions suivantes :

1. Si $\chi_f(t)$ n'est pas scindé sur \mathbf{R} alors f n'est pas diagonalisable.
2. S'il existe une valeur propre λ de f telle que $\dim E_\lambda < m_\lambda$ alors f n'est pas diagonalisable.

DÉMONSTRATION 3.5

On démontre :

2. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de $\chi_f(t)$, m_i la multiplicité de λ_i et E_i l'espace propre associé à λ_i . Alors la proposition nous dit que $\dim E_i \leq m_i$.
Or $\deg \chi_f(t) = n$ et donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k m_i &\leq n \\ \sum_{i=1}^k \dim E_i &\leq \sum_{i=1}^k m_i \leq n \end{aligned}$$

S'il existe i_0 tel que $\dim E_{i_0} < m_{i_0}$ alors cela implique

$$\sum_{i=1}^k \dim E_i < \sum_{i=1}^k m_i \leq n.$$

Et donc

$$\bigoplus_{i=1}^n E_i < n.$$

1. Idem.

THÉORÈME 3.1

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E .

f est diagonalisable si, et seulement si, on a les conditions suivantes :

1. $\chi_f(t)$ est scindé sur \mathbf{R} ;
2. pour tout $\lambda \in \chi_f^{-1}(0)$, la dimension du $\ker(f - \lambda \text{id})$ est égal à la multiplicité de λ dans $\chi_f(t)$.

DÉMONSTRATION 3.6

Le corollaire nous dit que ces conditions sont nécessaires.

Remarquons que :

$$\sum_{i=1}^r E_i = \bigoplus_{i=1}^r E_i$$

^{5§}. En effet, en utilisant la règle de CRAMER la preuve est assez aisée.

où E_i est le sous-espace propre de λ_i et r le nombre de racines deux à deux distinctes. Or la dimension de la somme est la somme des dimensions, c'est-à-dire la somme des multiplicités qui est égale à n . Donc f est diagonalisable.

EXEMPLE. On prend

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & -1 \\ -1 & 2-t & -1 \\ -1 & 1 & -t \end{pmatrix},$$

$$\chi_A(t) = -t(t-1)^2.$$

Les racines sont 0, 1 de multiplicités respectives 1 et 2. On a :

$$E_0 = \ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_1 = \ker A - \text{id} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

On a

$$\dim E_0 = 1 \text{ et } \dim E_1 = 2$$

et donc f est diagonalisable.

CONTRE-EXEMPLE DE MINIMALITÉ. On a que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'a comme valeurs propres que 0, elle n'est pas diagonalisable parce que si elle est nulle dans une base elle l'est dans toutes.

4 POLYNÔMES EN UN ENDOMORPHISME DE E

4.1 Polynômes évalué en un endomorphisme

DÉFINITION 4.1

Soit $P \in \mathbf{R}[t]$ un polynôme :

$$P(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^k.$$

On note pour f un endomorphisme de E :

$$P(f) = \sum_{k=0}^d a_k f^k \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E).$$

Avec la convention $f^0 = \text{id}$ et la notation $f^{k+1} = f \circ f^k$.

DÉFINITION 4.2

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbf{R}[t]$ annule f si $P(f) = 0_{\text{End}_{\mathbf{R}}}$.

PROPOSITION 4.1

On a que :

$$\phi: \begin{cases} \mathbf{R}[t] \rightarrow \text{End}_{\mathbf{R}}(E) \\ P(t) \mapsto P(f) \end{cases}$$

est un morphisme d'anneaux.

C'est-à-dire :

$$\forall P, Q \in \mathbf{R}[t], \phi(P + Q) = \phi(P) + \phi(Q) ; \phi(PQ) = \phi(P)\phi(Q).$$

REMARQUE. Ainsi l'ensemble des polynômes annulateurs de f est un idéal de $\mathbf{R}[t]$. Or $\mathbf{R}[t]$ est un anneau principal donc l'ensemble des polynômes annulateurs de f est principal. Il existe donc un polynôme $Q \in \mathbf{R}[t]$ tel que tout polynôme annulateur de f s'écrit RQ avec $R \in \mathbf{R}[t]$.

DÉFINITION 4.3

On appelle polynôme minimal de f le polynôme unitaire de plus petit degré, m_f annulant f .

On a évidemment que tout polynôme annulateur de f est de la forme $P \cdot m_f, P \in \mathbf{R}[t]$.

EXEMPLE. Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice nilpotente, c'est-à-dire $A^3 = 0$. On a

$$m_A(t) \mid t^3 \implies m_A = 1, t, t^2 \text{ ou } t^3.$$

Or $(t \mapsto 1)(A) = \text{id} \neq 0$, $(t \mapsto t)(A) = A \neq 0$ et $(t \mapsto t^2)(A) = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et

donc $m_A(t) = t^3$.

PROPOSITION 4.2

Soit $f \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E)$. Alors :

1. si f est diagonalisable, alors il existe un polynôme scindé $P \in \mathbf{R}[t]$ annulant f ayant que des racines simples ;
2. si $P \in \mathbf{R}[t]$ annule f alors toute valeur propre de f est racine de P .

DÉMONSTRATION 4.1

Dans l'ordre :

1. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres. Soient μ_1, \dots, μ_r des scalaires deux à deux distinctes tels que

$$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

avec $r \leq n$.

On pose :

$$P(t) = \prod_{i=1}^r (t - \mu_i).$$

On cherche à savoir si $P(f) = 0$.

$$P(f) = 0 \iff P(f)(e_j) = 0, \forall j,$$

$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{i=1}^r (f - \mu_i \text{id}) \right) (e_j),$$

$$f(e_j) = \lambda_j e_j \implies \exists i, \mu_i = \lambda_j.$$

Or pour tous k, l :

$$(f - \mu_k \text{id})(f - \mu_l \text{id}) = (f - \mu_l \text{id})(f - \mu_k \text{id})$$

et donc :

$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{k \neq i} (f - \mu_k \text{id}) \right) (f - \mu_i \text{id})(e_j),$$

$$P(f)(e_j) = \left(\prod_{k \neq i} (f - \mu_k \text{id}) \right) (f(e_j) - \mu_i e_j) = 0.$$

2. On suppose que $P(f) = 0$ et $\chi_f(\lambda) = 0$ avec $P \in \mathbf{R}[t]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

Soit $v \in \ker(f - \lambda \text{id})$, $v \neq 0$, alors :

$$P(f)(v) = \sum_{k=1}^d a_k f^k(v),$$

$$P(f)(v) = \sum_{k=1}^d a_k \lambda^k v.$$

Donc $P(\lambda) \cdot v = 0$ et comme $v \neq 0$: $P(\lambda) = 0$.

4.2 Lemme des noyaux

PROPOSITION 4.3 (Théorème des noyaux)

Soit $f \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E)$.

1. Soit $P \in \mathbf{R}[t]$ de la forme $P = ST$ avec $S, T \in \mathbf{R}[t]$ avec S et T premiers entre eux.

Alors si $P(f) = 0$ alors

$$E = \ker(S(f)) \oplus \ker(T(f)).$$

2. Soit $P \in \mathbf{R}[t]$, $P = P_1 P_2 \dots P_k$ avec $P_i \in \mathbf{R}[t]$ premiers entre eux deux à deux.

Alors si $P(f) = 0$ alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^k \ker P_i(f).$$

THÉORÈME 4.1

$f \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E)$ avec $\dim E = n$.

Supposons qu'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ est un polynôme scindé avec des racines simples. Alors $P(f) = 0$ implique que f est diagonalisable.

REMARQUE. C'est équivalent à $m_f(t)$ scindé avec des racines simples. En effet si P est scindé avec des racines simples et qui annulent f alors m_f divise P et donc m_f est scindé avec des racines simples.

DÉMONSTRATION 4.2

Soit :

$$P(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_k)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ réels distincts. Ainsi $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$ sont premiers entre eux pour tous $i \neq j$.

Ainsi d'après le théorème des noyaux :

$$E = \bigoplus_{i=1}^k \ker(f - \lambda_i \text{id}).$$

Donc f est diagonalisable.

COROLLAIRE 4.1

Soit $f \in \text{End}(E)$. f est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal m_f est scindé avec des racines simples.

DÉMONSTRATION 4.3

Le sens d'implication a déjà été fait, l'autre sens est donné par le théorème précédent.

4.3 Trigonalisation

DÉFINITION 4.4

On dit que $f \in \text{End}(E)$ est *trigonalisable* s'il existe une base B de E telle que la matrice en base B de f est triangulaire supérieure.

De même, une matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ est trigonalisable si elle est conjuguée à une matrice triangulaire supérieure, i.e. s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est trigonalisable.

PROPOSITION 4.4

Soit $f \in \text{End}(E)$.

χ_f est scindé dans $\mathbf{R}[X]$ si, et seulement si, f trigonalisable.

REMARQUE. On peut remplacer partout \mathbf{R} par $\mathbf{K} = \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ et E par un \mathbf{K} -espace vectoriel. Si E est un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension finie et si $f \in \text{End}_{\mathbf{C}}(E)$ alors la proposition assure la trigonalisation de f (et ainsi de tout endomorphisme).

DÉMONSTRATION 4.4

Si f est trigonalisable, alors il existe une base B telle que la matrice, $(a_{i,j})$ de f soit trigonale supérieure dans cette base. Alors le polynôme caractéristique (qui est indépendant de la base) est exactement : $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - t)$. Ce polynôme est bien scindé.

Pour la réciproque on effectue une récurrence sur $n = \dim E$. On suppose que c'est vrai pour tout espace vectoriel de dimension strictement inférieure à n :

$$\chi_f(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \dots (\lambda_n - t)$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$.

λ_1 est une valeur propre. Il existe par hypothèse $v_1 \in E$ un vecteur propre tel que $v_1 \neq 0$ et $f(v_1) = \lambda_1 v_1$. Par le théorème de la base incomplète, il existe une base B de la forme $B = (v_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$. Soit A la matrice de f dans la base B . On a :

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & * & \dots \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Avec $B \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ qui peut être la matrice d'un endomorphisme de \mathbf{R}^{n-1} .

$$\chi_A(t) = \det \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 - t & * \\ \hline 0 & B - tI_d \end{array} \right),$$

$$\chi_A(t) = (\lambda_1 - t)\chi_B(t),$$

$$\chi_A(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \dots (\lambda_n - t).$$

et donc $\chi_B(t) = (\lambda_2 - t) \dots (\lambda_n - t)$ est scindé.

Par récurrence, il existe $Q \in \text{GL}_{n-1}(\mathbf{R})$ tel que $Q^{-1}BQ$ soit triangulaire supérieure. Posons :

$$P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array} \right), \quad P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array} \right).$$

On a alors que $P^{-1}AP$ est triangulaire.

4.4 Comment calculer m_f ? (Cayley-Hamilton)

THÉORÈME 4.2 (CAYLEY-HAMILTON)

Soit $f \in \text{End}_{\mathbf{R}}(E)$. On a que m_f divise χ_f , c'est-à-dire : $\chi_f(f) = 0$.

DÉMONSTRATION 4.5

On veut montrer que $\chi_A(A) = 0$ où $A \in M_n(\mathbf{R})$. Puisque $M_n(\mathbf{R}) \subset M_n(\mathbf{C})$ on peut se placer dans le dernier. On sait alors que A est trigonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ tel que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.

Or pour tout k : $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$. Donc :

$$\chi_A(P^{-1}AP) = P^{-1}\chi_A(A)P.$$

Comme P est inversible, $\chi_A(0)$ si, et seulement si, $\chi_A(P^{-1}AP) = 0$. Posons $A' = P^{-1}AP$. On a $\chi_{A'} = \chi_A$.

$$\begin{aligned} T &= (\lambda_n I_d - A')(\lambda_{n-1} I_d - A') \dots (\lambda_1 I_d - A') \\ T(v_1) &= \left(\prod_{i=2}^n (\lambda_i I_d - A') \right) (\lambda_1 I_d - A')(v_1) = 0 \\ T(v_2) &= \left(\prod_{i=3}^n (\lambda_i I_d - A') \right) (\lambda_2 I_d - A')(\lambda_1 I_d - A')(v_2) \\ (\lambda_2 I_d - A')(\lambda_1 I_d - A')(v_2) &= (\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) \\ (\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) &= (\lambda_1 I_d - A')(-a'_{1,2} v_1) \\ (\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) &= -a'_{1,2} (\lambda_1 I_d - A')(v_1) \\ (\lambda_1 I_d - A')(\lambda_2 I_d - A')(v_2) &= -a'_{1,2} (\lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_1) = 0 \end{aligned}$$

Par récurrence on trouve $T(v_i) = 0$ pour tout i .

EXERCICE. Calculer $T(v_3)$.

REMARQUE. À noter :

1. Étant donné $f \in \text{End}(E)$, pour calculer m_f on cherche le plus petit diviseur de χ_f qui annule f .
2. Soit $f \in \text{End}(E)$. Supposons que f est inversible, alors $\det(f) \neq 0$, i.e. $\chi_f(0) \neq 0$. Soit $\chi_f(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$, a_0 est donc non nul. On a :

$$0 = a_0^{-1} \chi_f(f) = (-1)^n a_0^{-1} f^n + \dots + a_1 a_0^{-1} f + I_d$$

ce qui donne :

$$I_d = f \left((-1)^{n+1} a_0^{-1} f^{n-1} + \dots + (-1) a_1 a_0^{-1} I_d \right).$$

EXEMPLE. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\chi_A(t) = -t(t-1)^2$$

on en déduit :

$$t(t-1) \mid m_A(t) \mid t(t-1)^2.$$

Donc soit $m_A(t) = t(t-1)$ soit $m_A(t) = t(t-1)^2$. Dans le premier cas si $m_A(A) = 0$ alors A est diagonalisable. Dans le second, A est non diagonalisable.

$$A(A - I_d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5 APPLICATIONS

5.1 Calculs de puissances

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$, si A est diagonalisable alors :

$$A = PA'P^{-1}$$

où P est inversible et A' diagonale. Et donc pour tout k :

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

De même, si

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

alors

$$\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

5.2 Systèmes différentiels

Soient $x_1, x_2, x_3 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et le système différentiel :

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ x'_2 = x_1 + 4x_2 - 5x_3 \\ x'_3 = 2x_2 - 2x_3 \end{cases}.$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. On a :

$$X' = AX.$$

A a pour vecteurs propres :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de valeurs propres respectives :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2.$$

De matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$X' = AX \iff P^{-1}X' = P^{-1}APP^{-1}X \iff Y' = BY$$

$$Y' = BY \iff \begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = 2y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = c_1 \\ y_2 = c_2 e^t \\ y_3 = c_3 e^{2t} \end{cases}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} X &= PY, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 e^t \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t} \\ c_1 + 3c_2 e^t + 2c_3 e^{2t} \\ c_1 + 2c_2 e^t + c_3 e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.3 Application aux suites récurrentes

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On introduit une seconde suite v_n telle que $v_n = u_{n+1}$ pour tout n . La relation de récurrence s'écrit alors :

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

si on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a alors que la relation de récurrence est

$$X_{n+1} = AX_n.$$

On diagonalise A :

$$\chi_A(t) = t^2 - t - 1 \iff t \in \left\{ r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

On a :

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}$. On pose $Y_n = P_1 X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$:

$$X_{n+1} = AX_n \iff Y_{n+1} = A'Y_n.$$

On en déduit :

$$Y_n = \begin{pmatrix} c_1 r_1^n \\ c_2 r_2^n \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 r_1^n \\ c_2 r_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 r_1^n \\ c_2 r_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \\ c_1 r_1^{n+1} + c_2 r_2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi u_n est de la forme :

$$u_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Deuxième partie

Analyse

Table des matières

3	Développements limités	32
1	Fonctions négligeables et équivalentes	32
1.1	Négligeable	32
1.2	Équivalence	33
2	Dérivées successives et formules de TAYLOR	35
2.1	Formules de TAYLOR	36
2.2	Fonctions usuelles	37
3	Développement limité à l'ordre n d'une fonction de classe C^m	38
3.1	Développements limités	38
3.2	Développements limités et primitives	40
3.3	Développement limités usuels	42
4	Calculs avec les développements limités	44
4.1	Règles de calcul des développements limités	44
4.2	Développement limité d'une fonction composée	46
5	Applications	48
5.1	Calculs de limites	48
5.2	Courbes paramétrées	50
5.3	Étude de fonctions	54
5.3.1	Étude locale	54
5.3.2	Branches infinies	57
5.3.3	Étude de fonction	59
5.4	Courbes paramétrées	61

Chapitre 3

Développements limités

1 FONCTIONS NÉGLIGEABLES ET ÉQUIVALENTES

On considère des fonctions f, g de V dans \mathbf{R} où V est un voisinage épointé dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. C'est-à-dire que V est de la forme $U - \{a\}$ où U est un voisinage de a dans $\overline{\mathbf{R}}$ et $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

- si $a = \infty$ alors $V \supset \{k, \infty\}$;
 - si $a \in \mathbf{R}$ alors $V \supset]k, a[\cup]a, l[$ avec $k < a < l$ et $k, l \in \mathbf{R}$.
- f, g sont définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

1.1 Négligeable

DÉFINITION 1.1

On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a s'il existe un voisinage V tel qu'il existe une fonction $\varepsilon : V \rightarrow \mathbf{R}$ telle que :

- $f = \varepsilon \cdot g$;
- $\lim_a \varepsilon = 0$.

On note $f \underset{(a)}{=} o(g)$.

REMARQUE. On note :

$$\varepsilon f : \begin{cases} V \rightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto \varepsilon(t)f(t) \end{cases}.$$

EXEMPLES. Par exemple :

1. Si $g = 1$ alors $f = o(1)$ si, et seulement si, $\lim_a f = 0$.
2. Si $f = 0$ au voisinage de a alors pour toute fonction $g : f = o(g)$.
3. Si f est bornée et $\lim_a(g) = \infty$ alors $f = o(g)$ (on prend alors $\varepsilon = f/g$).
4. On a $x^m \underset{(\infty)}{=} o(x^n)$ si, et seulement si, $m < n$.
5. Pour tous $\alpha, \beta > 0$:

$$\begin{cases} x^\alpha \underset{\infty}{=} o(e^{\beta x}) \\ (\ln x)^\alpha \underset{(\infty)}{=} o(x^\beta) \end{cases},$$

car $\lim_{\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$.

PROPOSITION 1.1

Si f/g est définie dans un voisinage de a , alors :

$$f \underset{(a)}{=} o(g) \iff \lim_a (f/g) = 0.$$

DÉMONSTRATION 1.1

On prend $\varepsilon = f/g$.

REMARQUE. Il peut arriver que f/g n'est pas défini dans aucun voisinage de a .

EXEMPLES. Contre-exemples :

1. Avec $g(t) = \sin(1/[t - a])$, pour tout voisinage de V de a , $g(t)$ s'annule en un point de V .
2. Même si le quotient n'est pas défini : $t \underset{(0)}{=} o(\sin(1/t))$.

PROPOSITION 1.2

On a au voisinage de a :

1. la propriété o est transitive ;
2. la propriété o est compatible avec la multiplication, i.e. : si $f = o(g)$ alors $fh = o(gh)$;
3. si $f = o(g)$ et si $h = o(k)$ alors $fh = o(gk)$.

DÉMONSTRATION 1.2

Dans l'ordre :

1. Pour $f = \varepsilon_1 g$ et $g = \varepsilon_2 h$ avec $\lim_a \varepsilon_i = 0$ alors : $f = \varepsilon_1 \varepsilon_2 h$ et $\lim_a \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0$.
2. Si $f = \varepsilon g$, $\lim_a \varepsilon = 0$, alors $fh = \varepsilon gh$.
3. De même.

CONTRE-EXEMPLE. o n'est pas compatible avec l'addition. Par exemple : $x \underset{(\infty)}{=} o(x^3)$ et $x^2 \underset{(\infty)}{=} o(-x^3)$ n'entraîne pas $x + x^2 \underset{(\infty)}{=} o(0)$.

1.2 Équivalence

DÉFINITION 1.2

On dit que f est *équivalence* à g au voisinage de a si : $f - g \underset{(a)}{=} o(g)$. On note $f \underset{(a)}{\sim} g$.

PROPOSITION 1.3

Si f/g est définie dans un voisinage de a alors :

$$f \underset{(a)}{\sim} g \iff \lim_a f/g = 1.$$

PROPOSITION 1.4

$\underset{(a)}{\sim}$ est une relation d'équivalence.

DÉMONSTRATION 1.3

Par définition :

1. elle est réflexive : $f \underset{(a)}{\sim} f$ puisque $0 \underset{(a)}{=} o(f)$;
2. elle est symétrique si $f \underset{(a)}{\sim} g$ alors il existe ε telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ et $f = (1 + \varepsilon)g$, or $1/(1 + \varepsilon)$ est aussi définie au voisinage de a et puisque $g = (1/[1 + \varepsilon])f$ on a

$$g = (1 + (1/[1 + \varepsilon] - 1))f$$

or en posant $\varepsilon' = [1 + \varepsilon] - 1$ on a $\lim_a \varepsilon' = 0$;

3. elle est transitive : $f \underset{(a)}{\sim} g$ et $g \underset{(a)}{\sim} h$ implique qu'il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ telles que $f = (1 + \varepsilon_1)g$, $g = (1 + \varepsilon_2)h$ et donc $f = (1 + \varepsilon)h$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$ et $\lim_a \varepsilon = 0$.

PROPOSITION 1.5

Si $f \underset{(a)}{\sim} g$ et si $\lim_a f$ existe alors $\lim_a g$ existe et $\lim_a g = \lim_a f$.

DÉMONSTRATION 1.4

Soit ε telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ alors puisque $f = (1 + \varepsilon)g$ on a

$$\lim_a f = \lim_a (1 + \varepsilon)g = \lim_a g.$$

PROPOSITION 1.6

Le produit et le quotient (quand il est défini) d'équivalences est une équivalence.
Une puissance entière d'équivalences est une équivalence.

DÉMONSTRATION 1.5

Si $f = (1 + \varepsilon_1)g$ et $h = (1 + \varepsilon_2)k$ alors $fh = (1 + \varepsilon)gk$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$.

PROPOSITION 1.7

Si $f \underset{(a)}{\sim} g$ et si $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\lim_b \varphi = a$, $b \in I$. Alors

$$f \circ \varphi \underset{(a)}{\sim} g \circ \varphi.$$

DÉMONSTRATION 1.6

Si $f = (1 + \varepsilon)g$ avec $\lim_a \varepsilon = 0$. Alors

$$f \circ \varphi = (1 + \varepsilon') \cdot g \circ \varphi$$

avec $\varepsilon' = \varepsilon \circ \varphi$ et $\lim_a \varepsilon' = 0$.

PROPOSITION 1.8

On a :

1. Si f est dérivable en a alors si $f'(a) \neq 0$ on a $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a)$.
2. Si g est continue dans un voisinage épointé de a , alors si $f \underset{(a)}{\sim} g > 0$ alors

$$\int_a^x f(t) dt \underset{(a)}{\sim} \int_a^x g(t) dt.$$

DÉMONSTRATION 1.7

Dans l'ordre :

1. Si f est dérivable en a alors :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{(a)}{\sim} f'(a)$$

puisque si $\lim_a g = b \in \mathbf{R}^*$ alors $g \underset{(a)}{\sim} b$.

2. On sait que $f - g \underset{(a)}{=} o(g)$ et on veut :

$$\int_x^a (f - g)(t) dt \underset{(a)}{=} o \left(\int_x^a g(t) dt \right).$$

En posant $h = f - g$ on se ramène au problème :

$$h = o(g) \implies \int_a^x h = o \int_a^x g.$$

Si $h = \varepsilon g$ et $\lim_a \varepsilon = 0$ alors

$$\int_a^x g = \int_a^x \varepsilon g$$

Or

$$\frac{\left| \int_a^x \varepsilon g \right|}{\left| \int_a^x g \right|} \leq \max_{[a,x]} |\varepsilon| \frac{\left| \int_a^x g \right|}{\left| \int_a^x g \right|} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

Donc

$$\frac{\left| \int_a^x \varepsilon g = h \right|}{\left| \int_a^x g \right|} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

2 DÉRIVÉES SUCCESSIVES ET FORMULES DE TAYLOR

Soit $p \geq 0$ un entier.

DÉFINITION 2.1

Soit I un intervalle de \mathbf{R} et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$.

1. $f \in C^0$ si f est continue ;
2. $f \in C^p$ ($p \geq 1$) si f est dérivable et $f' \in C^{p-1}$.

REMARQUE. Si $f \in C^p$ alors les p -ièmes dérivées successives et f sont toutes continues sur I . $f \in C^\infty$ si $f^{(p)}$ existe et est continue pour tout $p \geq 1$.

PROPOSITION 2.1

Si $f, g \in C^p$ alors $f + g$, fg , f/g et $f \circ g$ (si définie) sont C^p .

DÉMONSTRATION 2.1

Dans l'ordre :

1. $(f + g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$ par récurrence sur p ;
2. $(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}$;
3. par récurrence sur p pour $(f \circ g)^{(p)}$ en utilisant : $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.

RAPPELS SUR LES PRIMITIVES. Si $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est de classe C^1 avec $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert. Alors si f' est continue $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$.

2.1 Formules de Taylor

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert.

THÉORÈME 2.1 (Formule de TAYLOR avec reste intégral)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^k . Alors pour tous $a, b \in I$ on a :

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

DÉMONSTRATION 2.2

Par récurrence sur n , on note

$$(T_n) : f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

Supposons que (T_k) soit vraie pour tout $k < n$. Alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{(b-t)^k}{k!}, \\ v(t) &= f^{(k)}(t), \\ R_k &= \int_a^b \frac{(b-s)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(s) ds, \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} R_k &= \int_a^b u'(s)v(s) ds \\ R_k &= [u(s)v(s)]_a^b - \int_a^b u(s)v'(s) ds \\ R_k &= u(b)v(b) - u(a)v(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s) ds \\ R_k &= \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(s) ds \end{aligned}$$

On applique (T_{n-1}) :

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_{n-1} \\ f(b) &= f(a) + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n \end{aligned}$$

donc (T_n) vraie.

THÉORÈME 2.2 (Formule de TAYLOR avec reste en $f^{(n+1)}(\theta)$)

Soit $n > 0$, $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^{n+1} . Pour tous $a, b \in I$ avec $a \neq b$, il existe θ strictement compris en a et b tel que :

$$f(b) = \sum_{i=0}^n \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta).$$

DÉMONSTRATION 2.3

On pose A telle que

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot A = \int_a^b \frac{(b-s)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(s) \, ds - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Soit $F : I \rightarrow \mathbf{R}$ telle que :

$$F(x) = \int_x^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) \, dt - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A.$$

On calcule $F'(x)$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} A \\ F'(x) &= \frac{(b-x)^n}{n!} (A - f^{(n+1)}(x)). \end{aligned}$$

F est dérivable donc continue sur I :

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) \, dt - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A = 0, \\ F(b) &= 0. \end{aligned}$$

Par le théorème de ROLLE, il existe θ strictement entre a et b tel que $F'(\theta) = 0$. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{(b-\theta)^n}{n!} (A - f^{(n+1)}(\theta)) &= 0 \\ A &= f^{(n+1)}(\theta). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta) = \int_a^b \frac{(b-s)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(s) \, ds - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

On a alors le résultat en remplaçant dans (T_n) .

REMARQUE. Si $|f^{(n+1)}(s)| \leq M$ pour tout $s \in I$ alors

$$\left| f(b) - \sum_{i=0}^n \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2.2 Fonctions usuelles**PROPOSITION 2.2 (Exponentielle)**

Soit $n \in \mathbf{N}$, on regarde le développement de TAYLOR en 0 à l'ordre $n+1$, $\forall i$, $\exp^{(i)}(0) =$

1. On prend $b = x, a = 0$:

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(\theta) \\ \theta &\in]0, x[. \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.3 (Cosinus, sinus)

La dérivée n -ième de $\cos(t)$ est $\cos(t + n\pi/2)$.

$$\left| \cos(x) - \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

car $|\cos \theta| \leq 1$.

3 DÉVELOPPEMENT LIMITÉ À L'ORDRE N D'UNE FONCTION DE CLASSE C^N

3.1 Développements limités

DÉFINITION 3.1

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert tel que $0 \in I, n \in \mathbf{N}$. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ admet un *développement limité* à l'ordre n en 0 si, et seulement si, il existe un polynôme P de degré n à coefficients réels tel que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^n} = 0.$$

Notons

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - P(x)}{x^n}$$

alors

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x) \text{ }^{1§}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0. \end{cases}$$

DÉFINITION 3.2

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert et soit $n \in \mathbf{N}$. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ admet un *développement limité* à l'ordre n en a si, et seulement si, la fonction $t \mapsto f(t + a)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. C'est-à-dire si, et seulement si, il existe un polynôme de degré n , P à coefficients réels tel que :

$$f(x) = P(x - a) + o((x - a)^n)$$

au voisinage de a .

THÉORÈME 3.1

Si f admet un développement limité à l'ordre n en un point a , alors ce développement limité est unique.

DÉMONSTRATION 3.1

On peut supposer $a = 0$. Supposons que

$$f(x) = P_1(x) + x^n \varepsilon_1(x) = P_2(x) + x^n \varepsilon_2(x)$$

où $\lim_0 \varepsilon_i = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. On a que

$$(P_1 - P_2)(x) = x^n (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x)$$

et $(P_1 - P_2)(x)$ est de la forme $r_0 + r_1 x + \dots + r_n x^n$ avec $r_0, r_1, \dots, r_n \in \mathbf{R}$.

On montre par récurrence que les r_k sont tous nuls. Quand $x \rightarrow 0$ on trouve :

$$r_0 = 0$$

et donc

$$r_1 x + \dots + r_n x^n = x^n (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x).$$

Supposons que $r_0 = r_1 = \dots = r_{k-1} = 0, k > 0$. Alors

$$\begin{aligned} r_k x^k + \dots + r_n x^n &= x^n (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x), \\ r_k + r_{k+1} x + \dots + r_n x^{n-k} &= x^{n-k} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x), \end{aligned}$$

$n - k \geq 0$ et donc $r_k = 0$ en passant à la limite.

1§. C'est-à-dire, $f(x) - P(x) = o(x^n)$.

COROLLAIRE 3.1

Soit $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$ le développement limité d'une fonction f à l'ordre n en 0. Alors :

1. si f est paire alors P est paire ;
2. si f est impaire alors P est impaire.

DÉMONSTRATION 3.2

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x) + x^n \varepsilon(x), \\ f(-x) &= P(-x) + x^n (-1)^n \varepsilon(-x) = P(-x) + x^n \varepsilon_1(x), \end{aligned}$$

Or comme $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ alors $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ aussi.

1. si f est impaire alors on a :

$$f(x) = -P(-x) - x^n \varepsilon_1(x)$$

et comme la première et cette expression sont des développements limits de f à l'ordre n en 0, par unicité on a $-P(-x) = P(x)$, c'est-à-dire P impaire ;

2. si f est paire, on a :

$$f(x) = P(-x) + x^n \varepsilon_1(x)$$

alors de même, l'unicité nous dit que P est alors paire.

PROPOSITION 3.1

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue en $a \in I$.

1. le développement limité de f en a à l'ordre 0 est

$$f(x) = f(a) + \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 ;$$

2. la fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle possède un développement limité à l'ordre 1 en a , alors dans ce cas le développement limité est donné par :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x)(x - a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION 3.3

Dans l'ordre :

1. On pose $\varepsilon(x) = f(x) - f(a)$. Comme f est continue en 0, $\varepsilon(x)$ aussi et $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.
2. Supposons que f soit dérivable en a , c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

On pose

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

On a bien $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ et

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x).$$

Réciproquement, supposons que f admette un développement limité :

$$f(x) = a_0 + (x - a)a_1 + (x - a)\varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. Alors, par continuité $a_0 = f(a)$ et

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} a_1 + \varepsilon(x) = a_1 = f'(a).$$

3.2 Développement limités et primitives

THÉORÈME 3.2

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue. Soit F une primitive de f . Soit $a \in I$ et supposons que f admette un développement limité en a à l'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \frac{a_2}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{a_n}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors F admet le développement limité suivant à l'ordre $n+1$ en a :

$$F(x) = F(a) + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{a_n}{(n+1)!}x^{n+1} + (x-a)^{n+1} \varepsilon_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION 3.4

Soit

$$P(t) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} (t-a)^k.$$

Pour tout $x \neq a$:

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n}.$$

Par hypothèse, $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. En posant $\varepsilon(a) = 0$, on obtient que ε est continue sur I . Donc ε admet une primitive et dans l'identité

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \frac{a_2}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{a_n}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

tous les termes admettent des primitives. Donc

$$\begin{aligned} F(x) - F(a) &= \int_a^x f(t) dt \\ F(x) - F(a) &= \int_a^x \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} (t-a)^k + (t-a)^n \varepsilon(t) \right) dt \\ F(x) - F(a) &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + u(x), \\ u(x) &= \int_a^x (t-a)^n \varepsilon(t) dt. \end{aligned}$$

Par le théorème de ROLLE :

$$u(x) = (x-a)(\theta-a)^n \varepsilon(\theta)$$

pour un θ compris entre a et x . Donc

$$|u(x)| = |x-a| |\theta-a|^n |\varepsilon(\theta)| \leq |x-a|^{n+1} |\varepsilon(\theta)|$$

et $\varepsilon(\theta)$ tend vers 0 quand x tend vers a puisque θ est compris entre a et x . Donc :

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + (x-a)^{n+1} \varepsilon_1(x)$$

où

$$\varepsilon_1(x) = \frac{u(x)}{(x-a)^{n+1}} \rightarrow 0.$$

THÉORÈME 3.3

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^n , $a \in I$. Alors f admet pour développement limité à l'ordre n en a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION 3.5

Pour $n = 0, 1$ ça a été déjà vu. Supposons alors $n \geq 2$. Soit $f \in C^n$, posons $g = f'$ avec $g \in C^{n-1}(I)$.

Par récurrence :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^{n-1} \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

f est une primitive de g :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + (x-a)^n \varepsilon_1(x)$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon_1(x).$$

EXEMPLE. Soit :

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

son développement limité en 0 d'ordre n est :

$$f(x) = x^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

3.3 Développement limités usuels

Développements limités en 0 :

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\alpha \in \mathbf{R} : (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{i=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-i)}{(i+1)!} x^{i+1} + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^n x^i + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^n (-1)^i x^i + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

$$\log(1-x) = - \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{i!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\log(1+x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{Arctan}(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{x^{2i-1}}{2i-1} + x^{2n} \varepsilon(x)$$

DÉMONSTRATION 3.6 (ch)

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} (= \operatorname{sh}(x))$$

$$\operatorname{ch}''(x) = \operatorname{ch}(x)$$

$$\operatorname{ch}^{(2i)}(0) = 1$$

$$\operatorname{sh}^{(2i)}(0) = 0$$

DÉMONSTRATION 3.7 (cos)

$$\cos^{(k)}(x) = \cos(x + k\pi/2)$$

$$\cos^{(k)}(0) = \cos(k\pi/2)$$

$$\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k$$

$$\cos^{(2k+1)}(0) = 0$$

DÉMONSTRATION 3.8 (\sin)

$$\begin{aligned}\sin^{(k)}(x) &= \sin(x + k\pi/2) \\ \sin^{(2k)}(0) &= 0 \\ \sin^{(2k+1)}(0) &= (-1)^k\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION 3.9 ($(1+x)^\alpha = f(x)$)

Par récurrence :

$$\begin{aligned}f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \\ f^{(k)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION 3.10 ($1/(1-x)$)

$$\begin{aligned}\frac{1-x^n}{1-x} &= 1+x+x^2+\dots+x^n \\ \frac{1}{1-x} &= 1+x+\dots+x^n+x^n \cdot \frac{x}{1-x}\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION 3.11 ($\log(1-x)$)Utiliser le théorème sur le développement limité d'une primitive avec le développement limité de $1/(1-x)$.DÉMONSTRATION 3.12 ($\text{Arctan}(x)$)

$$\begin{aligned}\text{Arctan}'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{i=1}^n (-1)^i x^{2i} + x^{2n} \varepsilon(x)\end{aligned}$$

et on conclut avec le théorème du développement limité d'une primitive.

REMARQUE. On a vu que si

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

alors le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre n est

$$f(x) = x^n \varepsilon(x).$$

Or le développement limité de 0 en 0 à l'ordre n est identique.

EXEMPLE. Soit :

$$f: \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}.$$

La fonction f est continue en 0.

On regarde le développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = x^2 \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \sin(1/x) & \text{sinon} \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Donc le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre 2 est :

$$f(x) = x^2 \varepsilon(x).$$

Dérivabilité de f en 0 (puisque'elle est lisse sur \mathbf{R}^*) :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2 \sin(1/x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

donc f est dérivable et $f'(0) = 0$.

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x)}{x} = 3x \sin(1/x) - \cos(1/x)$$

donc f n'est pas dérivable à l'ordre 2 en 0 (même si elle a un développement limité à l'ordre 2).

4 CALCULS AVEC LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

4.1 Règles de calcul des développements limités

PROPOSITION 4.1

Soit f, g ayant des développements limités à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon(x)$$

avec P, Q des polynômes de degré au plus n et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ (non forcément identiques). Alors

1. le développement limité à l'ordre n en 0 de $f + g$ est

$$(f + g)(x) = (P + Q)(x) + x^n \varepsilon(x);$$

2. pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, le développement λf à l'ordre n en 0 est :

$$(\lambda f)(x) = \lambda P(x) + x^n \varepsilon(x).$$

DÉMONSTRATION 4.1

Écrivons $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_f(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_g(x)$.

1. $(f + g)(x) = P(x) + Q(x) + x^n (\varepsilon_f + \varepsilon_g)(x)$ et on note $\varepsilon = \varepsilon_f + \varepsilon_g$ qui tend bien en 0.
2. De même.

PROPOSITION 4.2

Soit f qui admet le développement limité en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, f admet le développement limité en 0 à l'ordre p :

$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p \varepsilon(x)$$

avec $T_p(P)$ le polynôme tronqué de P :

$$T_p(P) = \sum_{k=0}^p a_k x^k, \quad P = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

DÉMONSTRATION 4.2

On a

$$f(x) = T_p(P)(x) + x^p \left(\sum_{k=p+1}^n a_k x^{k-p} + x^{n-p} \varepsilon(x) \right).$$

Et on pose

$$\varepsilon_1(x) = \sum_{k=p+1}^n a_k x^{k-p} + x^{n-p} \varepsilon(x).$$

On a bien $\varepsilon_1(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.

PROPOSITION 4.3

Soient f, g admettant les développements limités :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x).$$

Alors fg admet le développement limité à l'ordre n en 0 suivant :

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x) + x^n \varepsilon(x).$$

REMARQUE. Si f, g admettent les développements limités à l'ordre n en a :

$$f(x) = P(x - a) + (x - a)^n \varepsilon_1(x), \quad g(x) = Q(x - a) + (x - a)^n \varepsilon_2(x)$$

alors le développement limité :

$$(fg)(x) = T_n(PQ)(x - a) \text{ 2§} + (x - a)^n \varepsilon(x).$$

DÉMONSTRATION 4.3

$$\begin{aligned} (fg)(x) &= (PQ)(x) + x^n (Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x)) \\ PQ(x) &= T_n(PQ)(x) + x^{n+1} R(x), \quad R \in \mathbf{R}[x] \\ (fg)(x) &= T_n(PQ)(x) + x^n (xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x)) \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= xR(x) + Q\varepsilon_1(x) + P\varepsilon_2(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0} xR(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} Q\varepsilon_1(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} P\varepsilon_2(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) &= 0 \end{aligned}$$

EXEMPLE. On veut le développement limité de :

$$\text{Arctan}(x - 1) \exp(x)$$

2§. On tronque avant d'évaluer en $x - a$.

en 1 d'ordre 3.

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctan}(y) &= y - \frac{y^3}{3} + y^3\varepsilon(y) \\ \operatorname{Arctan}(x-1) &= (x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3\varepsilon(x) \\ \exp(x) &= \exp(x-1+1) = e \exp(x-1) \\ \exp(x) &= e \left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3\varepsilon(x) \right)\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}f(x) &= e \left((x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3\varepsilon(x) \right) \times \left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3\varepsilon(x) \right) \\ f(x) &= e \left((x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} \right) + (x-1)^3\varepsilon(x)\end{aligned}$$

4.2 Développement limité d'une fonction composée

Puisque la composition de deux fonctions polynômiales est encore un polynôme :

PROPOSITION 4.4

Soient f, g admettant un développement limité en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon(x)$$

avec P, Q deux polynômes de degré inférieur à n .

Supposons que $g(0) = 0$ alors $f \circ g$ admet le développement limité suivant à l'ordre n en 0 :

$$(f \circ g)(x) = T_n(P \circ Q)(x) + x^n\varepsilon(x).$$

DÉMONSTRATION 4.4

Supposons $n = 0$, alors P et Q sont deux polynômes constants donc $f(x) = P(0) + \varepsilon(x)$ et $g(x) = Q(0) + \varepsilon(x)$. Comme $Q(0) = 0$ on a bien $f(g(x)) = (P \circ Q)(x) + \varepsilon(x)$ par continuité.

Supposons que $n \geq 1$. On note $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_2(x)$. Posons $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= P(g(x)) + g(x)^n\varepsilon_1(g(x)) \\ P(g(x)) &= \sum_{i=0}^n a_i g(x)^i \\ P(g(x)) &= \textcolor{red}{3}\S T_n \left(\sum_{i=0}^n a_i Q(x)^i \right) + x^n\varepsilon_3(x)\end{aligned}$$

Puisque $Q(0) = 0$, on a $Q(x) = b_1x + \dots + b_nx^n$ et donc :

$$\begin{aligned}g(x) &= b_1x + \dots + b_nx^n + x^n\varepsilon_2(x) \\ g(x) &= x(b_1 + \dots + b_nx^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon_2(x)) \\ g(x) &= xh(x) \\ (f \circ g)(x) &= P(xh(x)) + x^n h(x)^n \varepsilon_1(xh(x)) \\ (f \circ g)(x) &= T_n(P \circ Q)(x) + x^n(h(x)^n \varepsilon_1(xh(x)) + \varepsilon_3(x))\end{aligned}$$

On pose $\varepsilon_4(x) = h(x)^n \varepsilon_1(xh(x)) + \varepsilon_3(x)$ et :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} xh(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} h(x)^n &= b_1^n \\ \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_4(x) &= 0.\end{aligned}$$

EXEMPLE. Développement limité de $\cos(\sin(x))$ à l'ordre 5 en 0 :

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6\varepsilon(x) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x) \\ \cos(\sin(x)) &= T_5 \left(1 - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^4}{4!} \right) + x^5\varepsilon(x) \\ \cos(\sin(x)) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x) \\ \cos(\sin(x)) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^5\varepsilon(x)\end{aligned}$$

PROPOSITION 4.5

Soient f, g admettant des développements limités à l'ordre n en 0. Alors si $g(0) \neq 0$ alors la fonction f/g admet un développement limité à l'ordre n en 0.

DÉMONSTRATION 4.5

Puisque $g(0) \neq 0$, f/g est définie et continue en 0. Comme $f/g = f \times 1/g$, il suffit de vérifier que $1/g$ admet un développement limité en 0 (puis on applique la règle de produit).

Posons $a = g(0) \neq 0$. On a :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a + (g(x) - a)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)}$$

Il suffit de vérifier que :

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)}$$

admet un développement limité à l'ordre n en 0. Posons

$$h(x) = \frac{1}{1 + x}$$

on a alors

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{g(x)}{a} - 1\right)} = h\left(\frac{g(x)}{a} - 1\right) = (h \circ k)(x)$$

où $k(x) = g(x)/a - 1$. Or $k(x)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et $h(x)$ admet également un développement limité à l'ordre ∞ en 0. Enfin, $k(0) = 0$ et donc on conclut avec le résultat précédent.

EXEMPLE. Développement limité de $f : f(x) = 1/(a - x)$ en 0 à l'ordre n .

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{a} \frac{1}{1 - x/a} \\ \frac{1}{1 - t} &= 1 + t + t^2 + \dots + t^n + t^n\varepsilon(t) \\ f(x) &= \frac{1}{a} \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \dots + \frac{x^n}{a^n} \right) + x^n\varepsilon(x) \\ \frac{1}{a - x} &= \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \dots + \frac{x^n}{a^{n+1}} + x^n\varepsilon(x).\end{aligned}$$

La méthode précédente ne donne pas de formule générale pour le développement limité de f/g .

3§. D'après les formules de développements limités d'une somme et d'un produit.

RAPPEL. Si $P, Q \in \mathbf{R}[x]$, $n \in \mathbf{N}$ et si $Q(0) \neq 0$. Alors la division de P par Q suivant les puissances croissantes à l'ordre n est l'unique polynôme A tel que :

- $P - AQ$ est divisible par X^{n+1} ;
- soit $A = 0$, soit $\deg A \leq n$.

PROPOSITION 4.6

Soient f, g avec les développements limités suivants à l'ordre n en 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x) + x^n \varepsilon_1(x), \\ g(x) &= B(x) + x^n \varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

Supposons que $g(0) = B(0) \neq 0$. Le développement limité à l'ordre n de f/g en 0 est :

$$\frac{f}{g}(x) = Q(x) + x^n \varepsilon(x)$$

où Q est la division de A par B à l'ordre n suivant les puissances croissantes.

DÉMONSTRATION 4.6

On a $A(x) = Q(x)B(x) + x^{n+1}R(x)$ où R est un polynôme et $Q = 0$ ou $\deg Q \leq n$. Ainsi

$$\begin{aligned} f(x) &= Q(x)B(x) + x^{n+1}R(x) + x^n \varepsilon_1(x) \\ f(x) - Q(x)g(x) &= x^{n+1}R(x) + x^n \varepsilon_1(x) - Q(x)x^n \varepsilon_2(x) \\ f(x) - Q(x)g(x) &= x^n(\varepsilon_1(x) - Q(x)\varepsilon_2(x) + xR(x)) \\ \frac{f}{g}(x) &= Q(x) + x^n \varepsilon_3(x) \\ \varepsilon_3(x) &= \frac{1}{g(x)}(\varepsilon_1(x) - Q(x) \cdot \varepsilon_2(x) + xR(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

EXEMPLE. Développement limité de $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0.

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x) \\ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) + x^6 R(x) \\ \frac{f(x)}{g(x)} &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5 \varepsilon(x) \end{aligned}$$

5 APPLICATIONS

APPLICATIONS. Les développements limités peuvent être utiles pour :

1. les calculs de limites (pour des « formes indéterminées ») ;
2. études de fonctions ou courbes paramétrées.

5.1 Calculs de limites

EXEMPLE. On veut calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)}.$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \\
\log \operatorname{ch} x &= \log(1 + (\operatorname{ch} x - 1)) \\
\log \operatorname{ch} x &= T_2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2} \right) + x^2\varepsilon(x) \\
\log \operatorname{ch} x &= \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \\
x \log \operatorname{ch} x &= \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x) ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \\
x\sqrt{1+x} &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + x^3\varepsilon(x) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \\
\exp(\sin x) &= T_3 \left(\left(x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \right) + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(\sin x) &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\
\exp(\sin x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) ;
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \frac{\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)}{1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)} \\
\frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \frac{\frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)}{-\frac{x^3}{8} + x^3\varepsilon(x)} \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log \operatorname{ch} x}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/2 + \varepsilon(x)}{-1/8 + \varepsilon(x)} = -4.
\end{aligned}$$

REMARQUE. Un calcul de dérivée s'obtient par un calcul de limite et donc parfois par développements limités.

EXEMPLE. On prend

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + x + x^2}$$

et on cherche $f^{(i)}(0)$ pour $i \in \{0, \dots, 4\}$, c'est-à-dire que l'on cherche le développement limité de f en 0 à l'ordre 4.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x).$$

On cherche le développement limité de

$$g(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

que l'on peut voir comme

$$g(x) = (a \circ b)(x) ; a(x) = \frac{1}{1+x} ; b(x) = x+x^2.$$

$$a(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

$$g(x) = T_4((x \mapsto 1 - x + x^2 - x^3 + x^4)(x+x^2)) + x^4\varepsilon(x)$$

$$g(x) = 1 - x - x^2 + x^2 + x^4 + 2x^3 + x^4 - x^3 - 3x^4 + x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

$$g(x) = 1 - x + x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

$$f(x) = T_4\left((1 - x + x^3 - x^4)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\right) + x^4\varepsilon(x)$$

$$f(x) = 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{2} - \frac{23x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$$

Comme f admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, elle est dérivable quatre fois. De plus

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = -1$$

$$f^{(2)}(0) = -1$$

$$f^{(3)}(0) = 9$$

$$f^{(4)}(0) = -23.$$

5.2 Courbes paramétrées

RAPPELS SUR LES FONCTIONS CLASSIQUES. Quelques rappels :

— on définit le logarithme népérien par :

$$\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Ainsi $\log : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ est croissante, C^∞ ,

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \log x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = +\infty$$

$$\log(ab) = \log a + \log b.$$

— on définit l'exponentielle, $\exp : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, qui est croissante, lisse et stable par dérivation.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = \infty$$

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$

— soient $a \in \mathbf{R}_+^*$, $b \in \mathbf{R}$ alors on définit :

$$a^b = \exp(b \log a).$$

$$a^{b+b'} = a^b a^{b'}$$

$$(aa')^b = a^b (a')^b$$

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

$$a^0 = 1 = 1^b$$

$$\frac{d}{dx} x^b = b x^{b-1}$$

$$\frac{d}{dx} a^x = \log(a) a^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^a (\log x)^n = 0 \quad , \quad a > 0 \text{ et } n \in \mathbf{Z}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^a e^x = 0.$$

— trigonométrie :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\sin(x+t) = \cos(t) \sin(x) + \cos(x) \sin(t)$$

$$\cos(x+t) = \cos(x) \cos(t) - \sin(x) \sin(t)$$

$$\tan(x+t) = \frac{\tan(t) + \tan(x)}{1 - \tan(x) \tan(t)}.$$

— Arcsin : $[-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ est lisse sur $] -1, 1[$ et :

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Arccos : $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ est la réciproque de cos et on a la relation :

$$\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Arctan : $\mathbf{R} \rightarrow] -\pi/2, \pi/2[$ est lisse et :

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

— trigonométrie hyperbolique :

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$$

leurs réciproques Arcsh : $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, Arch : $[-1, \infty] \rightarrow \mathbf{R}_+$ et Arcth : $] -1, +1[\rightarrow \mathbf{R}$ sont lisses sur l'intérieur de leur domaine de définition.

$$\text{Arcsh}'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\text{Arch}'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$\text{Arcsh}(t) = \log(t + \sqrt{t^2 + 1})$$

$$\text{Arch}(t) = \log(t + \sqrt{t^2 - 1}).$$

DÉFINITION 5.1

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ avec I un intervalle ou une union finie d'intervalles dans \mathbf{R} . Soient u, v telles que

$$\forall t, f(t) = (u(t), v(t)).$$

1. On dit que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$ où $l = (l_1, l_2)$ si $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = l_1$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = l_2$.
2. On dit que f est continue en t_0 si les fonctions u et v sont continues en 0. f est continue sur I si elle est continue en tout point de I .
3. On dit que f est dérivable en t_0 si u et v le sont et on note $f'(t_0) = (u'(t_0), v'(t_0))$.

PROPOSITION 5.1

Si $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ et si $t_0 \in I$ alors :

1. si $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = m$ alors $\lim_{t \rightarrow t_0} (f + g)(t) = l + m$;
2. si f, g sont dérivables en t_0 alors $f + g$ aussi et on a $(f + \lambda g)'(t_0) = f'(t_0) + \lambda g'(t_0)$.

PROPOSITION 5.2

Soit (r, s) une base de \mathbf{R}^2 et soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ telle que $f(t) = (u(t), v(t))$. Soit $(a(t), b(t))$ les coordonnées de $f(t)$ dans la base (r, s) .

1. On a :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l \iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \alpha \\ \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = \beta \end{cases}$$

où (α, β) sont les coordonnées de l dans la base (r, s) .

2. Idem pour la dérivée.

DÉMONSTRATION 5.1

Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ et $r, s \in \mathbf{R}^2$. On a $l = \alpha \cdot r + \beta \cdot s$,

$$f(t) = (u(t), v(t)) = a(t) \cdot r + b(t) \cdot s$$

avec $a(t), b(t) \in \mathbf{R}$.

1. On a que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$ c'est par définition :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = l_1 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = l_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \alpha \\ \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = \beta \end{cases} &\iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} (a(t)r_1 + b(t)s_1) = \alpha r_1 + \beta s_1 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} (a(t)r_2 + b(t)s_2) = \alpha r_2 + \beta s_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} a(t)r_1 + b(t)s_1 = l_1 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} a(t)r_2 + b(t)s_2 = l_2 \end{cases} \end{aligned}$$

2. De même ...

DÉFINITION 5.2

On dit que $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2, f(t) = (u(t), v(t))$ admet un développement limité à l'ordre n en t_0 si $u(t)$ et $v(t)$ admettent un développement limité à l'ordre n en t_0 .

Si $u(t) = u_0 + u_1(t - t_0) + \dots + u_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon_1(t)$ et $v(t) = v_0 + v_1(t - t_0) +$

$\dots + v_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon_2(t)$ alors on appelle

$$f(t) = (u_0, v_0) + (t - t_0)(u_1, v_1) + \dots + (t - t_0)^n(u_n, v_n) + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

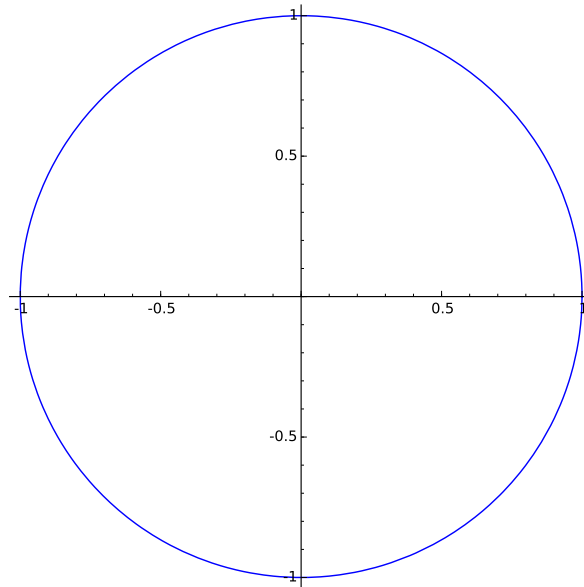
 le développement limité de f à l'ordre n en t_0 avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0)$.

EXEMPLE. Le développement limité de $f : t \mapsto (2t^3 - t \sin t, t^3 + \cos t)$ à l'ordre 4 en 0 :

$$\begin{aligned}
 2t^3 - t \sin t &= -t^2 + 2t^3 + \frac{t^4}{6} + t^4 \varepsilon(t) \\
 t^3 + \cos t &= 1 - \frac{t^2}{2} + t^3 + \frac{t^4}{24} + t^4 \varepsilon(t) \\
 f(t) &= (0, 1) - t^2(1, 1/2) + t^3(2, 1) + t^4(1/6, 1/24) + t^4 \varepsilon(t).
 \end{aligned}$$

DÉFINITION 5.3
 On appelle *courbe paramétrée* de \mathbf{R}^2 une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$.

EXEMPLE. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$.



REMARQUE. Supposons que f soit dérivable en $t \in I$. Alors $u(t), v(t)$ admettent des développements limités à l'ordre 1 en t_0 et donc f admet aussi un développement limité à l'ordre 1 en t_0 . Or si

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t)$$

alors

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0)) = f'(t_0).$$

DÉFINITION 5.4
 On appelle $f'(t_0)$ *vecteur tangent* de f en t_0 . La droite affine passant par $f(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$ s'appelle la *tangente* à f en t_0 .

REMARQUE. Le vecteur tangent dépend du paramétrage de la courbe et non seulement de sa représentation.

EXEMPLE. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ et soit $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$. Remarquons que f et g ont même représentation graphique. Cependant les vecteurs tangents en 0 à f et g sont :

$$\begin{aligned} f'(0) &= (0, 1) \\ g'(0) &= (0, 2). \end{aligned}$$

La tangente à f en t_0 est la droite d'équation :

$$\det \begin{pmatrix} y - v(t_0) & v'(t_0) \\ x - u(t_0) & u'(t_0) \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire :

$$(y - v(t_0))u'(t_0) - (x - u(t_0))v'(t_0) = 0.$$

5.3 Étude de fonctions

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, où I est un intervalle de \mathbf{R} . On procède à l'étude de f au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. En particulier, on s'intéresse notamment au graphe de f .

5.3.1 Étude locale

PROPOSITION 5.3

Soit $x_0 \in I, f : I \rightarrow \mathbf{R}$. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 :

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

où $P \in \mathbf{R}[x], P(x) = a_p x^p + \dots + a_n x^n$ avec $0 \leq p \leq n$ et $a_p \neq 0$.

Alors il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $x \neq x_0$, $f(x)$ est non nul et a le signe de $a_p(x - x_0)^p$.

DÉMONSTRATION 5.2

Puisque $p \leq n$, le développement limité de f en x_0 à l'ordre p est :

$$f(x) = (T_p(P))(x - x_0) + (x - x_0)^p \varepsilon(x).$$

C'est-à-dire :

$$f(x) = a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p \varepsilon(x).$$

Pour tout $x \neq x_0$, on a :

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^p} = a_p + \varepsilon(x)$$

et $a_p \neq 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi il existe α tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $x \neq x_0, |\varepsilon(x)| < \frac{1}{2}(a_p)$.

C'est-à-dire que pour un tel $x, f(x) \neq 0$ et est du même signe que $a_p(x - x_0)$.

DÉFINITION 5.5

Si $I \subset \mathbf{R}$ est un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction numérique et si $x_0 \in \bar{I}$ ^{4§}, on dit que f est *positive au voisinage de x_0* s'il existe un voisinage $J \subset I$ de x_0 tel que pour tout $x \in J$ et $x \neq x_0, f(x) > 0$.

EXEMPLE. Prenons :

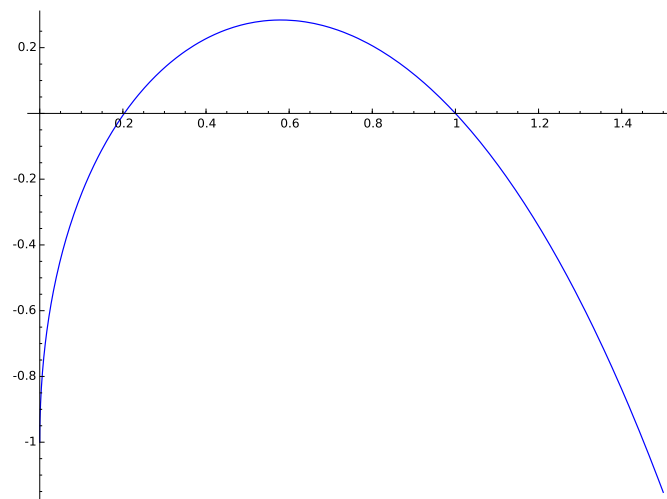
$$f(x) = e \cdot \sqrt{x} - e^x.$$

^{4§}. Dans I ou l'une de ses bornes.

On cherche le signe de f quand x tend vers 1.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e \left[(1 + (x-1))^{1/2} - e^{x-1} \right] \\
 &\begin{cases} (1 + (x-1))^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \\ e^{x-1} = 1 + (x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \end{cases} \\
 f(x) &= e \left(-\frac{1}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x) \right) \\
 f(x) &= \frac{-e}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon(x).
 \end{aligned}$$

Ainsi au voisinage de 1, le signe de f est le même que celui de $1-x$.



DÉFINITION 5.6

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. La *tangente* en $(x_0, f(x_0))$ au graphe de f est la droite affine d'équation :

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

DÉFINITION 5.7

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$.

On dit que f admet une *inflexion* au point $(x_0, f(x_0))$ si la fonction

$$x \mapsto f(x) - (f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0))$$

s'annule en x_0 en changeant de signe.

PROPOSITION 5.4

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. On a :

1. si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ est le développement limité de f à l'ordre 1 en x_0 , alors la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ est donnée par :

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) ;$$

2. si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\varepsilon(x)$ est le développement limité de f à l'ordre 2 en x_0 , alors

- si $a_2 > 0$ alors pour tout $x \neq x_0$ dans un voisinage suffisamment petit de x_0 , le point $(x, f(x))$ est au-dessus de la tangente ;
 - si $a_2 < 0$ alors pour tout $x \neq x_0$ dans un voisinage suffisamment petit de x_0 , le point $(x, f(x))$ est en-dessous de la tangente ;
3. si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_3(x - x_0)^3 + (x - x_0)^3\varepsilon(x)$ est le développement limité de f à l'ordre 3 en x_0 , alors si $a_3 \neq 0$, f admet un point d'inflexion en $(x_0, f(x_0))$.

DÉMONSTRATION 5.3

Dans l'ordre :

1. Comme f est dérivable en x_0 , on a $a_1 = f'(x_0)$ et $a_0 = f(x_0)$, l'équation de la tangente est

$$y = a_1(x - x_0) + a_0.$$

2. Posons

$$u(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)).$$

On a alors :

$$u(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 - a_1(x - x_0) - a_0 + (x - x_0)^2\varepsilon(x) = a_2(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\varepsilon(x).$$

Comme $a_2 \neq 0$ (par hypothèse) alors la proposition précédente entraîne que le signe de $u(x)$ au voisinage de 0 est celui de $a_2(x - x_0)^2$, c'est-à-dire le signe de a_2 .

3. Posons de même

$$u(x) = a_3(x - x_0)^3 + (x - x_0)^3\varepsilon(x).$$

D'après la proposition précédente, le signe de $u(x)$ au voisinage de x_0 est celui de $a_3(x - x_0)$ puisque $a_3 \neq 0$. Comme $(x - x_0)^3$ n'est pas de signe constant, c'est un point d'inflexion.

REMARQUE. Si $a_2 \neq 0$, alors :

- si $a_2 > 0$, $f(x)$ admet un minimum local en x_0 ;
- sinon, $f(x)$ admet un maximum local en x_0 .

REMARQUE, GÉNÉRALISATION DU RÉSULTAT. Supposons que le développement limité de f en x_0 est de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p\varepsilon(x),$$

avec $p \geq 2$. De plus on suppose $a_p \neq 0$. Alors en posant

$$u(x) = f(x) - (f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0))$$

est du signe de $a_p(x - x_0)^p$ au voisinage de x_0 .

- Si p est pair alors $a_p > 0$ implique que x_0 est un minimum local, $a_p < 0$ implique que x_0 est un maximum local.
- Si p est impair alors x_0 est un point d'inflexion.

EXEMPLE. Prenons :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 5}$$

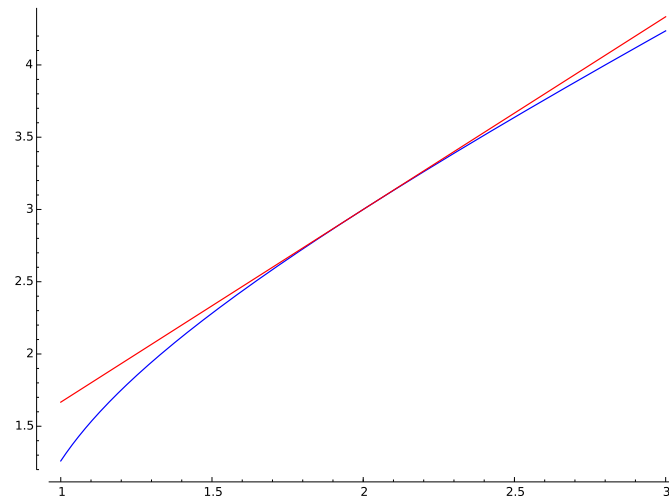
définie sur \mathbf{R} et étudions f au voisinage de $x_0 = 2$. On a :

$$\begin{aligned} f(x+2) &= \left((x+2)^3 + 6x^2 - 5\right)^{1/3} \\ f(x+2) &= \left(27 + 36x + 12x^2 + x^3\right)^{1/3} \\ f(x+2) &= 3 \cdot \left(1 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{27}x^3\right)^{1/3} \\ f(x+2) &= 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2\right) + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{-2}{3}\right)}{2} \left(\frac{16}{9}x^2\right)\right) + x^2\varepsilon(x) \\ f(x+2) &= 3 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{27}x^2 + x^2\varepsilon(x). \end{aligned}$$

L'équation de la tangente est :

$$y = 3 + \frac{4}{3}(x - 2).$$

Comme le terme en x^2 est non nul et négatif, la courbe est en-dessous de la tangente.



5.3.2 Branches infinies

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction numérique.

DÉFINITION 5.8

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, avec $a \in \mathbf{R}$ alors la droite $x = a$ est une *asymptote verticale* de f .

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ alors f admet une *branche infinie* en $+\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ alors f admet une *branche infinie* en $-\infty$.

Soit $a, b \in \mathbf{R}$. La droite $y = ax + b$ est *asymptote* à f quand x tend vers $\pm\infty$ si :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax - b = 0.$$

Si $a = 0$ on dit que l'asymptote est *horizontale*.

Soit $a \in \mathbf{R}$, si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

alors on dit que f a une *direction asymptotique de pente a en $\pm\infty$* .

Si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

alors on dit que f a une *direction asymptotique verticale* en $\pm\infty$.

PROPOSITION 5.5

Soient $a, b \in \mathbf{R}$. La droite $y = ax + b$ est asymptote à f quand x tend vers $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si, et seulement si :

— on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a ;$$

— et de plus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b.$$

EXEMPLE. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x^2 + 1}.$$

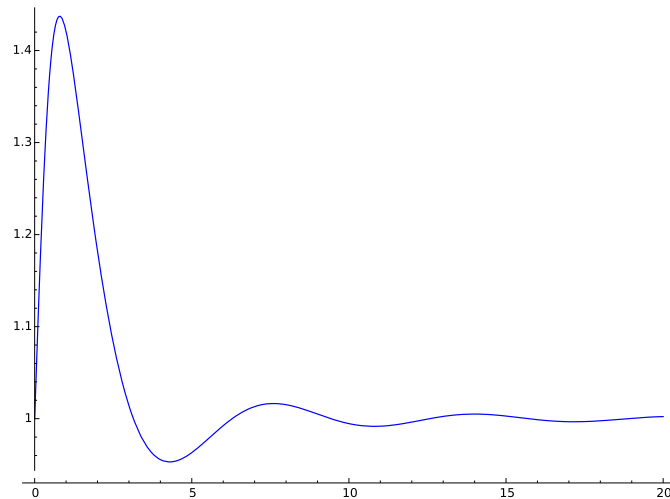
On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - 1| = 0$$

et donc $y = 1$ est asymptote à f en $+\infty$. La différence

$$f(x) - 1 = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$$

est du signe de $\sin x$ qui oscille.



EXEMPLE. Avec

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 5}$$

on regarde s'il y a une asymptote quand x tend vers $\pm\infty$ et la position par rapport à la possible asymptote. On écrit f sous la forme :

$$f(x) = xu(1/x)$$

avec

$$u(x) = \sqrt[3]{1 + 6x - 5x^3}.$$

Le développement limité de u en 0 à l'ordre 2 est :

$$\begin{aligned} u(x) &= (1 + 6x - 5x^3)^{1/3} \\ u(x) &= 1 + \frac{1}{3}(6x) + \frac{1}{3} \left(\frac{-2}{3} \right) \frac{1}{2}(36x^2) + x^2\varepsilon(x) \\ u(x) &= 1 + 2x - 4x^2 + x^2\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Ainsi pour x au voisinage de ∞ en valeur absolue :

$$f(x) = x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{\varepsilon(1/x)}{x^2} \right) = x + 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(1/x),$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) - (x + 2) = 0.$$

On regarde maintenant la position de f par rapport à $y = x + 2$. On a

$$f(x) - (x + 2) = \frac{-4}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(1/x).$$

Ainsi quand $x \rightarrow +\infty$, f est en-dessous de l'asymptote, quand $x \rightarrow -\infty$, f est au-dessus de l'asymptote.

5.3.3 Étude de fonction

Par exemple avec

$$f(x) = x \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right|$$

de domaine de définition $\mathbf{R} \setminus \{0, -1/2\}$.

DÉRIVÉE. On calcule la dérivée de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= x(\log |2x + 1| - \log |x|) \\ f'(x) &= \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right| + x \left(\frac{2}{2x + 1} - \frac{1}{x} \right) \\ f'(x) &= \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right| - \frac{1}{2x + 1} \\ f''(x) &= \frac{2}{2x + 1} - \frac{1}{x} - \frac{2}{(2x + 1)^2} \\ f''(x) &= \frac{-1}{x(2x + 1)^2} \end{aligned}$$

Une étude des signes montre qu'il existe un unique α entre $-1/2$ et 0 (strictement) tel que $f'(\alpha) = 0$. En conclusion, f est croissante partout sauf sur $] -1/2, \alpha[$ où elle est décroissante.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty \end{aligned}$$

ce qui nous donne deux branches infinies.

$$\lim_{x \rightarrow -1/2} f(x) = +\infty$$

et donc il y a une asymptote verticale en $x = -1/2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$$

$$f(x) = x \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right|$$

$$f(x) = x \log |2x + 1| - x \log x$$

or les deux termes tendent vers 0 en 0 et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

et donc f admet un prolongement par continuité à 0 en 0.

Il reste à regarder les branches infinies :

— Quand $x \rightarrow \infty$, on cherche un développement limité de f en $+\infty$.

$$f(x) = x \log(2 + 1/x)$$

$$f(x) = x \log 2 + x \log \left(1 + \frac{1}{2x} \right)$$

$$f(x) = x \log 2 + x \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o(1/x^2) \right)$$

$$f(x) = (\log 2)x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o(1/x)$$

On en déduit que la droite d'équation

$$y = (\log 2)x + \frac{1}{2}$$

est asymptote oblique à f en $+\infty$ et la courbe est en-dessous de l'asymptote.

— En $-\infty$ la droite d'équation

$$y = (\log 2)x + \frac{1}{2}$$

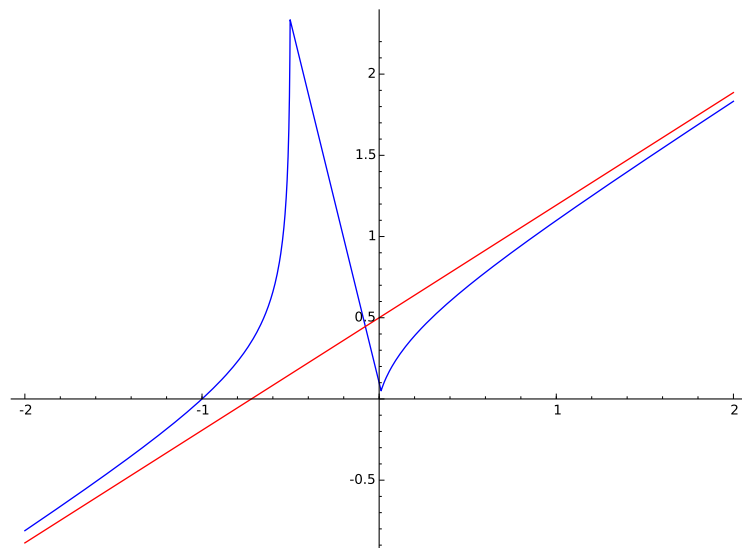
est également asymptote oblique à f en $-\infty$ et la courbe est au-dessus de l'asymptote.

— Pour ce qui est de la tangente en 0 :

$$f'(x) = \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right| - \frac{1}{2x + 1}$$

et alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log \left| 2 + \frac{1}{x} \right| = +\infty.$$



5.4 Courbes paramétrées

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ telle que $f(t) = (u(t), v(t))$.

DÉFINITION 5.9

Supposons que u, v sont continues.

Si u et v admettent un développement limité à l'ordre n au point t_0 :

$$u(t) = u_0 + u_1(t - t_0) + \dots + u_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

$$v(t) = v_0 + v_1(t - t_0) + \dots + v_n(t - t_0)^n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

alors f admet un développement limité à l'ordre n en t_0 :

$$f(t) = f_0 + (t - t_0)f_1 + \dots + (t - t_0)^n f_n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, f_i = (u_i, v_i).$$

L'égalité précédente s'appelle le *développement limité de f en t_0 à l'ordre n* .

REMARQUE. On a bien

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0).$$

DÉFINITION 5.10

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ s'appelle *courbe paramétrée de \mathbf{R}^2* .

Supposons que f est dérivable en $t_0 \in I$. f admet le développement limité en t_0 à l'ordre 1 suivant :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t).$$

DÉFINITION 5.11

Si $f'(t_0) \neq 0$ alors la tangente à la courbe au point $f(t_0)$ est la droite affine passant par $f(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$. L'équation est

$$\det \begin{pmatrix} x - u(t_0) & u'(t_0) \\ y - v(t_0) & v'(t_0) \end{pmatrix} = 0.$$

En d'autres termes, c'est l'équation :

$$(y - v(t_0)) \cdot u'(t_0) - (x - u(t_0)) \cdot v'(t_0) = 0.$$

On se demande quelles sont les conditions à l'existence de la tangente en un point ainsi que la position de la tangente par rapport à la courbe.

REMARQUE. On retrouve l'étude des fonctions à valeurs dans \mathbf{R} si on a

$$f(t) = (t, v(t)).$$

Supposons que u, v admettent des développements limités en t_0 à l'ordre $n \geq 2$. On a

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)^2 w_2 + \dots + (t - t_0)^n w_n + (t - t_0)^n \varepsilon(t)$$

où $w_2, \dots, w_n \in \mathbf{R}^2$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = 0_{\mathbf{R}^2}$.

1. Supposons que $f'(t_0) \neq 0$ et $f'(t_0)$ est non colinéaire à w_2 . On tronque le développement limité à l'ordre 2 :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)^2 w_2 + (t - t_0)^2 \varepsilon(t).$$

Soient $(a(t), b(t))$ les coordonnées de $\varepsilon(t)$ dans la base $(f'(t_0), w_2)$. Ainsi :

$$f(t) - f(t_0) = \left((t - t_0 + (t - t_0)^2 a(t)) f'(t_0) + (t - t_0)^2 (b(t) + 1) w_2 \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = 0.$$

Selon la coordonnée de $f'(t_0)$ on a que $(t - t_0)^2 a(t)$ tend vers 0 et alors $t - t_0$ détermine le signe. Selon la coordonnée w_2 , dans un voisinage suffisamment petit de t_0 on a que la coordonnée est de signe positif.

2. Supposons que $f'(t_0) \neq 0$, $w_2 = \lambda f'(t_0)$ et enfin w_3 et $f'(t_0)$ non colinéaires. On a alors dans la base $(f'(t_0), w_3)$:

$$f(t) - f(t_0) = \left((t - t_0 + \lambda(t - t_0)^2) f'(t_0) + (t - t_0)^3 w_3 + (t - t_0)^3 \varepsilon(t) \right).$$

On décompose $\varepsilon(t)$ dans cette base :

$$\varepsilon(t) = a(t)f'(t_0) + b(t)w_3.$$

On sait que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = 0.$$

Dans cette base, on a :

$$f(t) - f(t_0) = \left(\begin{array}{c} t - t_0 + \lambda(t - t_0)^2 + (t - t_0)^3 a(t) \\ (t - t_0)^3 + (t - t_0)^3 b(t) \end{array} \right)$$

Sur chaque coordonnée, le signe est celui de $t - t_0$.

REMARQUE. Supposons $f'(t_0) \neq 0$, $n \geq 3$ et il existe un entier $p \in \{3, \dots, n\}$ tel que les vecteurs w_2, w_3, \dots, w_{p-1} sont colinéaires à $f'(t_0)$ et tel que w_p n'est pas colinéaire à $f'(t_0)$. Ainsi, $(f'(t_0), w_p)$ est une base de \mathbf{R}^2 .

On écrit le développement limité de $f(t) - f(t_0)$ dans cette base. On étudie le signe des coordonnées de $f(t) - f(t_0)$ quand $t \rightarrow t_0$. Si p est pair alors la courbe est comme dans le cas $p = 2$ (la courbe est du côté de w_p par rapport à la tangente), sinon comme dans le cas $p = 3$ (elle traverse la tangente).

3. Supposons que $f'(t_0) = 0$ et que w_2, w_3 forme une base de \mathbf{R}^2 . On a

$$f(t) - f(t_0) = (t - t_0)^2 w_2 + (t - t_0)^3 w_3 + (t - t_0)^3 \varepsilon(t).$$

On décompose $\varepsilon(t)$ dans la base (w_2, w_3) : $\varepsilon(t) = a(t)w_2 + b(t)w_3$ avec $\lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) = 0$. Les coordonnées dans cette base de $f(t) - f(t_0)$ sont alors :

$$f(t) - f(t_0) = \left(\begin{array}{c} (t - t_0)^2 + (t - t_0)^3 a(t) \\ (t - t_0)^3 + (t - t_0)^3 b(t) \end{array} \right).$$

Ainsi, la première coordonnée est positive et la seconde est du signe de $t - t_0$. Une telle situation est un *point de rebroussement*.

4. Supposons que $f'(t_0) = 0$, $w_3 = \lambda w_2$ et w_2, w_4 forme une base. On pose $\varepsilon(t) = a(t)w_2 + b(t)w_4$. Dans ces coordonnées :

$$f(t) - f(t_0) = \left(\begin{array}{c} (t - t_0)^2 + \lambda(t - t_0)^3 + (t - t_0)^4 a(t) \\ (t - t_0)^4 (1 + b(t)) \end{array} \right).$$

Les deux coordonnées sont positives quand $t \rightarrow t_0$. C'est aussi un point de rebroussement