PATCHWORK COMBINATOIRE DE COURBES ALGÉBRIQUES

Thomas Mordant, Raphaël Alexandre
Encadré par : Ilia Itenberg

29 janvier 2016

Sommaire

Introduction du problème

Avant le propos central de ce texte, nous allons essayer d'exposer le problème étudié ainsi que de poser les premières notations utilisées.

1 Le seizième problème de Hilbert

Le problème est le suivant. Étant donné une polynôme homogène $F(x_0, x_1, x_2)$ à coefficients réels et de degré d, quelles sont les qualités topologiques de ses zéros dans le plan projectif réel, $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$?

Par la suite, nous supposerons toujours que les zéros de F sont non-singuliers.

Nous désignerons par $\mathbf{R}F$ l'ensemble des zéros de F, qui a alors naturellement une structure de variété lisse. Une variété lisse fermée de dimension 1 dans un espace compact est une union de cercles. Ainsi, $\mathbf{R}F$ sera une collection de cercles.

En dimension 1. En prenant $d = 1$, nous observons que

$$F(x_0, x_1, x_2) = ax_0 + bx_1 + cx_2$$

avec $a, b, c \in \mathbf{R}$. Ainsi, $\mathbf{R}F$ est une droite de $\mathbf{R}^2$. Son plongement dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ est un grand cercle.

Plongements de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$

Il est utile de garder à l'esprit que deux plongements possibles dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ donnent lieu à un cercle :

- le plongement d'une droite de $\mathbf{R}^2$ (qui donne un grand cercle qui intersecte la droite à l'infini en un point) ;
- le plongement d'une conique de $\mathbf{R}^2$ (que nous appellerons *ovale*). [§1]

Le plongement d'un ovale divise $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ en deux régions non connectées : une boule et un ruban de Möbius. [§2]

En dimension 2. Si on revient au problème initial, pour $d = 2$ nous avons F qui décrit une conique de $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$, c'est donc ou bien un ovale ou bien l'ensemble vide (ce qui se produit lorsque F est définie).

Lemme 1.1

Nous montrerons que :

- lorsque d est pair, $\mathbf{R}F$ est une réunion d'ovales ;
- lorsque d est impair, $\mathbf{R}F$ est la réunion d'une droite et d'ovales.

§1. Quelques doutes dessus, il faudrait vérifier si c'est le plongement d'une conique ou d'autre chose ...

§2. Est-ce que c'est aussi vrai pour les grands cercles ?

En dimension 4. La classification pour $d = 4$ nous donne les cas suivants sur la composition de $\mathbf{R}F$:

- cela peut être l'ensemble vide ;
- un, ou deux, ou trois, ou quatre ovales ;
- un ovale dans un autre tel que dans la figure qui suit.

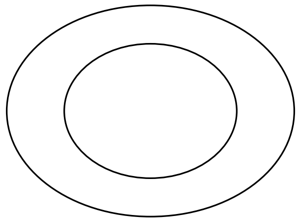

Figure 1 – Lorsque $d = 4$, un ovale peut être dans un autre

Mais le cas suivant est impossible :

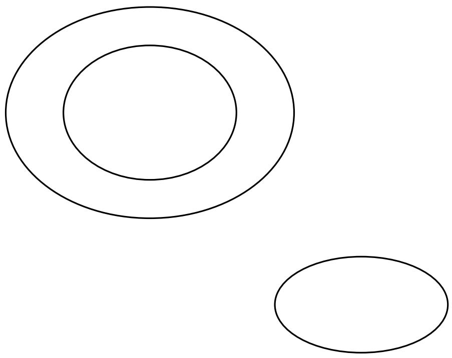

Figure 2 – Ceci est impossible

En effet, si on trace une droite qui coupe chacun des ovales en deux points, on obtient 6 points d'intersections alors que le degré de l'équation sous-jacente est de 4.

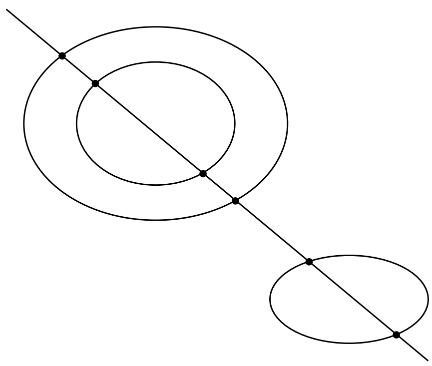

Figure 3 – Les six points d'intersections contredisent $d = 4$

On procède de même avec le cas où nous aurions 5 ovales. Par leurs 5 centres passe une conique et l'intersection est de 10 points alors qu'il devrait y en avoir au plus $4 \times 2 = 8$.