

# PATCHWORK COMBINATOIRE DE COURBES ALGÈBRIQUES

Raphaël ALEXANDRE, Thomas MORDANT  
Encadré par : Ilia ITENBERG

7 février 2016

# Sommaire

<b>Introduction du problème</b>	<b>ii</b>
1 Le seizième problème de HILBERT . . . . .	ii
<b>1 Géométrie des courbes algébriques</b>	<b>1</b>
1 Lemme de MORSE . . . . .	1
2 Théorème des petites perturbations . . . . .	2

# Introduction du problème

Avant le propos central de ce texte, nous allons essayer d'exposer le problème étudié ainsi que de poser les premières notations utilisées.

## 1 LE SEIZIÈME PROBLÈME DE HILBERT

Le problème est le suivant. Étant donné une polynôme homogène  $F(x_0, x_1, x_2)$  à coefficients réels et de degré  $d$ , quelles sont les qualités topologiques de ses zéros dans le plan projectif réel,  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  ?

Par la suite, nous supposons toujours que les zéros de  $F$  sont non-singuliers.

Nous désignerons par  $\mathbf{R}F$  l'ensemble des zéros de  $F$ , qui a alors naturellement une structure de variété lisse. Une variété lisse fermée de dimension 1 dans un espace compact est une union de cercles. Ainsi,  $\mathbf{R}F$  sera une collection de cercles.

EN DIMENSION 1. En prenant  $d = 1$ , nous observons que

$$F(x_0, x_1, x_2) = ax_0 + bx_1 + cx_2$$

avec  $a, b, c \in \mathbf{R}$ . Ainsi,  $\mathbf{R}F$  est une droite de  $\mathbf{R}^2$ . Son plongement dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  est un grand cercle.

### Plongements de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$

Il est utile de garder à l'esprit que deux plongements possibles dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  donnent lieu à un cercle :

- le plongement d'une droite de  $\mathbf{R}^2$  (qui donne un grand cercle qui intersecte la droite à l'infini en un point) ;
- le plongement d'une conique de  $\mathbf{R}^2$  (que nous appellerons *ovale*).<sup>§1</sup>

Le plongement d'un ovale divise  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  en deux régions non connectées : une boule et un ruban de MÖBIUS.<sup>§2</sup>

EN DIMENSION 2. Si nous revenons au problème initial, pour  $d = 2$  nous avons  $F$  qui décrit une conique de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ , c'est donc ou bien un ovale ou bien l'ensemble vide (ce qui se produit lorsque  $F$  est définie).

#### LEMME 1.1

Nous montrerons que :

- lorsque  $d$  est pair,  $\mathbf{R}F$  est une réunion d'ovales ;
- lorsque  $d$  est impair,  $\mathbf{R}F$  est la réunion d'une droite et d'ovales.

§1. Quelques doutes dessus, il faudrait vérifier si c'est le plongement d'une conique ou d'autre chose ...

§2. Est-ce que c'est aussi vrai pour les grands cercles ?

EN DIMENSION 4. La classification pour  $d = 4$  nous donne la distinction de cas suivante sur la composition de  $\mathbf{R}F$  :

- cela peut être l'ensemble vide ;
- un, ou deux, ou trois, ou quatre ovals ;
- un ovale dans un autre tel que dans la figure qui suit.

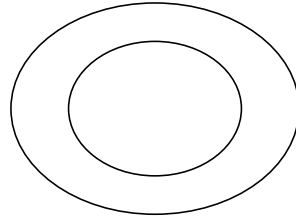


FIGURE 1 – Lorsque  $d = 4$ , un ovale peut être dans un autre

Mais le cas suivant est impossible :

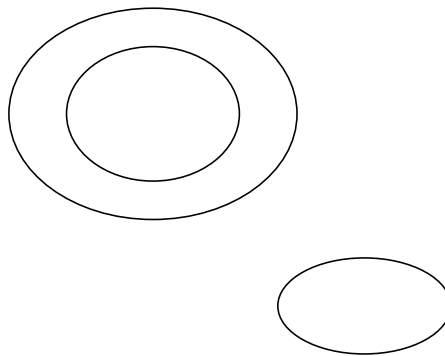


FIGURE 2 – Ceci est impossible

En effet, si nous traçons une droite qui coupe chacun des ovals en deux points, nous obtenons 6 points d'intersections alors que le degré de l'équation sous-jacente est de 4.

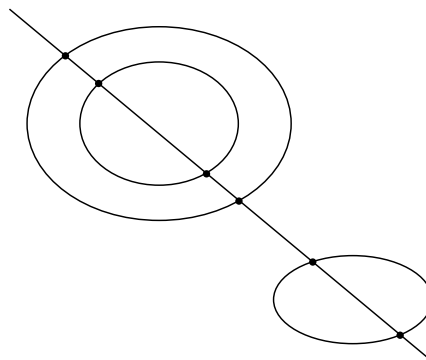


FIGURE 3 – Les six points d'intersections contredisent  $d = 4$

Nous procédons de même avec le cas où nous aurions 5 ovals. Par leurs 5 centres passe une conique et l'intersection est de 10 points alors qu'il devrait y en avoir au plus  $4 \times 2 = 8$ .<sup>§3</sup>

# Chapitre 1

## Géométrie des courbes algébriques

### 1 LEMME DE MORSE

D'après MILNOR, *Morse Theory*.<sup>§1</sup>

LEMME 1.1 (MORSE)

Soit  $p$  un point critique non dégénéré de  $f$ . Alors il existe un système de coordonnées locales  $(y^1, \dots, y^n)$  dans un voisinage  $U$  de  $p$  tel que  $y^i(p) = 0$  pour tout  $i$  et aussi :

$$f = f(p) - (y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2$$

avec  $\lambda$  l'index de  $f$  en  $p$ .

Nous commençons par se donner un lemme préliminaire :

LEMME 1.2

Si  $f$  est lisse dans un voisinage  $V$  de  $0 \in \mathbf{R}^n$  avec  $f(0) = 0$  alors

$$f(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n x^i g_i(x^1, \dots, x^n)$$

avec des fonctions  $g_i$  lisse sur  $V$  et telles que

$$g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0).$$

PREUVE

Nous avons l'égalité

$$f(x) = \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) \cdot x^i dt$$

et nous définissons alors

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) dt.$$

PREUVE (Lemme de MORSE)

Nous commençons par montrer que si  $f$  a une telle expression alors  $\lambda$  est l'index de  $f$  en  $p$ . Supposons ainsi pour un système de coordonnées  $(z^1, \dots, z^n)$  que

$$f(q) = f(p) - (z^1(q))^2 - \dots - (z^\lambda(q))^2 + (z^{\lambda+1}(q))^2 + \dots + (z^n(q))^2.$$

---

§1. Il faudra commencer à préparer la bibliographie.

Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial z^j}(p) = \begin{cases} -2 & \text{si } i = j \leq \lambda \\ 2 & \text{si } i = j > \lambda \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela montre que la matrice de  $\Delta f$  selon la base  $\left. \frac{\partial}{\partial z^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial z^n} \right|_p$  est diagonale avec  $\lambda$  fois  $-2$ ,  $(n - \lambda)$  fois  $2$  sur la diagonale et dans cet ordre.

Ainsi, il existe un sous-espace de  $TM_p$  de dimension  $\lambda$  où  $\Delta f$  est définie négative et un sous-espace de dimension  $n - \lambda$  où  $\Delta f$  est définie positive. Cela montre que  $\lambda$  est l'index de  $f$  en  $p$ .

Il nous reste à montrer qu'un tel système de coordonnées existe. Pour cela, nous commençons par supposer que  $p = 0$  et  $f(0) = 0$ , par le lemme précédent nous obtenons des  $g_i$  telles que

$$f(x) = x^i g_i(x).$$

Comme  $0$  est un point critique,  $g_i(0) = 0$  pour tout  $i$  et donc il existe des  $h_{i,j}$  telles que

$$f(x) = x^i x^j h_{i,j}(x).$$

Nous pouvons supposer (quitte à moyenner) que  $h_{i,j} = h_{j,i}$ .

Pour obtenir le système de coordonnées, nous allons imiter la preuve de diagonalisation des formes quadratiques. Procédons par récurrence, supposons qu'il existe  $u^1, \dots, u^n$  définies dans un voisinage  $U_1$  de  $0$  telles que

$$f = \pm(u^1)^2 \pm \dots \pm (u^{r-1})^2 + \sum_{i,j \geq r} u^i u^j H_{i,j}(u^1, \dots, u^n)$$

sur  $U_1$  et où la matrice décrite par  $H_{i,j}(u^1, \dots, u^n)$  (de taille  $(n - r + 1) \times (n - r + 1)$ ) est symétrique. Après un changement linéaire sur la dernière coordonnée, on peut faire en sorte que  $H_{r,r}(0) \neq 0$ . Désignons par  $g(u^1, \dots, u^n)$  la racine carrée de  $|H_{r,r}(u^1, \dots, u^n)|$ . Comme  $g$  est non nulle en  $0$  et est lisse, il existe un voisinage  $U_2 \subset U_1$  de  $0$  où  $g$  est non nulle. On pose  $v^i = u^i$  pour  $i \neq r$  et

$$v^r(u^1, \dots, u^n) = g(u^1, \dots, u^n) \left( u^r + \sum_{i > r} u^i \frac{H_{i,r}(u^1, \dots, u^n)}{H_{r,r}(u^1, \dots, u^n)} \right).$$

Par le théorème d'inversion locale,  $(v^1, \dots, v^n)$  sera un système de coordonnées dans un voisinage  $U_3 \subset U_2$  de  $0$ . Cela complète la récurrence puisque sur  $U_3$  :

$$f = \pm(v^1)^2 \pm \dots \pm (v^r)^2 + \sum_{i,j > r} v^i v^j H_{i,j}(v^1, \dots, v^n).$$

## 2 THÉORÈME DES PETITES PERTURBATIONS

### DÉFINITION 2.1

Nous dirons que  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  est un *croisement* si  $\Delta P(\xi)$  a une valeur propre positive et une négative. §2

De manière équivalente,  $\xi$  est un croisement si  $\xi$  est un point critique non dégénéré et d'index 1 pour les applications :

$$\varphi_i : \begin{cases} \{x_i \neq 0\} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \frac{P(x)}{x_i} \deg P \end{cases}$$

pour  $i$  tel que  $\xi_i \neq 0$ .

---

§2. C'est pas clair si c'est strict ou non, à vérifier.

Le lemme de MORSE implique qu'au voisinage de  $\xi$ ,  $\mathbf{R}P$  est la réunion de deux droites réelles.

Réciproquement, si  $\mathbf{R}A_1, \dots, \mathbf{R}A_k$  sont non singulières, mutuellement transverse et si 3 d'entre-elles ne se croisent jamais, alors les points critiques de  $\mathbf{R}A_1 \cup \dots \cup \mathbf{R}A_k$  sont des croisements.

Le théorème des petites perturbations s'énonce de la manière suivante :

THÉORÈME 2.2 (Petites perturbations §3 )

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes de degré  $n$  et tels que  $\mathbf{R}Q$  ne passe pas par les points critiques de  $\mathbf{R}P$ . Soit  $U$  un voisinage régulier de  $\mathbf{R}A$  dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  tel que  $U$  se décompose selon :

$$U = U_0 \sqcup U_1$$

où  $U_0$  est voisinage des points critiques et  $U_1$  est un voisinage tubulaire de la sous-variété  $\mathbf{R}P - U_0$ .

Alors il existe  $X$  de degré  $n$  tel que :

1. la courbe  $\mathbf{R}X$  est partie de  $U$  ;
2. pour chaque composante connexe  $V$  de  $U_0$ , il existe un homéomorphisme  $h : V \rightarrow D^1 \times D^1$  (avec  $D^1$  le disque unité de dimension 1) tel que :

$$h(\mathbf{R}P \cap V) = D^1 \times \{0\}, \quad h(\mathbf{R}Q \cap V) = \{0\} \times D^1,$$

$$h(\mathbf{R}X \cap V) = \left\{ xy = \frac{1}{2} \right\} \subset D^1 \times D^1 ;$$

3.  $\mathbf{R}X - U_0$  est une section du fibré tubulaire  $V_1 \rightarrow \mathbf{R}P - U_0$  ;
4.  $\mathbf{R}X$  est partie de  $\{P(x_0, x_1, x_2)Q(x_0, x_1, x_2) \leq 0\}$  ;
5.  $\mathbf{R}X \cap \mathbf{R}P = \mathbf{R}X \cap \mathbf{R}Q = \mathbf{R}P \cap \mathbf{R}Q$  ;
6. si  $p \in \mathbf{R}P \cap \mathbf{R}Q$  est non singulier de  $Q$  et si  $\mathbf{R}Q$  est transverse à  $\mathbf{R}P$  en  $p$  alors  $\mathbf{R}X$  est transverse à  $\mathbf{R}Q$  en  $p$ .

Il existe aussi  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $t \in ]0, \varepsilon]$ ,  $X = P + tQ$  convienne.