PATCHWORK COMBINATOIRE DE COURBES ALGÉBRIQUES

Raphaël Alexandre, Thomas Mordant
Encadré par : Ilia Itenberg

5 février 2016

Sommaire

Introduction du problème

Avant le propos central de ce texte, nous allons essayer d'exposer le problème étudié ainsi que de poser les premières notations utilisées.

1 Le seizième problème de Hilbert

Le problème est le suivant. Étant donné une polynôme homogène $F(x_0, x_1, x_2)$ à coefficients réels et de degré d, quelles sont les qualités topologiques de ses zéros dans le plan projectif réel, $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$?

Par la suite, nous supposerons toujours que les zéros de F sont non-singuliers.

Nous désignerons par $\mathbf{R}F$ l'ensemble des zéros de F, qui a alors naturellement une structure de variété lisse. Une variété lisse fermée de dimension 1 dans un espace compact est une union de cercles. Ainsi, $\mathbf{R}F$ sera une collection de cercles.

En dimension 1. En prenant $d = 1$, nous observons que

$$F(x_0, x_1, x_2) = ax_0 + bx_1 + cx_2$$

avec $a, b, c \in \mathbf{R}$. Ainsi, $\mathbf{R}F$ est une droite de $\mathbf{R}^2$. Son plongement dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ est un grand cercle.

Plongements de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$

Il est utile de garder à l'esprit que deux plongements possibles dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ donnent lieu à un cercle :

- le plongement d'une droite de $\mathbf{R}^2$ (qui donne un grand cercle qui intersecte la droite à l'infini en un point) ;
- le plongement d'une conique de $\mathbf{R}^2$ (que nous appellerons *ovale*). §1

Le plongement d'un ovale divise $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ en deux régions non connectées : une boule et un ruban de Möbius. §2

En dimension 2. Si on revient au problème initial, pour $d = 2$ nous avons F qui décrit une conique de $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$, c'est donc ou bien un ovale ou bien l'ensemble vide (ce qui se produit lorsque F est définie).

Lemme 1.1

Nous montrerons que :
- lorsque d est pair, $\mathbf{R}F$ est une réunion d'ovales ;
- lorsque d est impair, $\mathbf{R}F$ est la réunion d'une droite et d'ovales.

§1. Quelques doutes dessus, il faudrait vérifier si c'est le plongement d'une conique ou d'autre chose ...

§2. Est-ce que c'est aussi vrai pour les grands cercles ?

En dimension 4. La classification pour $d = 4$ nous donne la distinction de cas suivante sur la composition de $\mathbf{R}F$:

- cela peut être l'ensemble vide ;
- un, ou deux, ou trois, ou quatre ovales ;
- un ovale dans un autre tel que dans la figure qui suit.

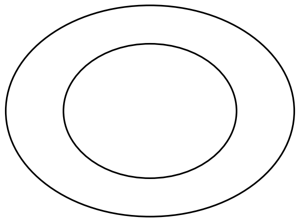

Figure 1 – Lorsque $d = 4$, un ovale peut être dans un autre

Mais le cas suivant est impossible :

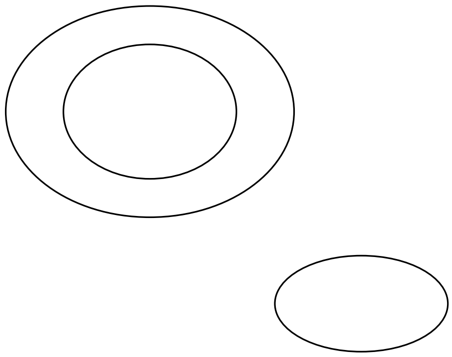

Figure 2 – Ceci est impossible

En effet, si on trace une droite qui coupe chacun des ovales en deux points, on obtient 6 points d'intersections alors que le degré de l'équation sous-jacente est de 4.

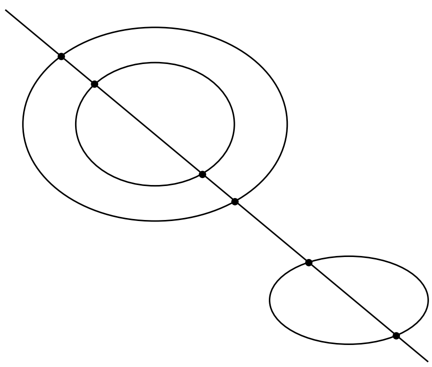

Figure 3 – Les six points d'intersections contredisent $d = 4$

On procède de même avec le cas où nous aurions 5 ovales. Par leurs 5 centres passe une conique et l'intersection est de 10 points alors qu'il devrait y en avoir au plus $4 \times 2 = 8$.