PATCHWORK COMBINATOIRE DE COURBES ALGÉBRIQUES

Raphaël ALEXANDRE, Thomas MORDANT
Encadré par : Ilia ITENBERG

7 février 2016

Sommaire

Introduction du problème

Avant le propos central de ce texte, nous allons essayer d'exposer le problème étudié ainsi que de poser les premières notations utilisées.

1 Le seizième problème de Hilbert

Le problème est le suivant. Étant donné une polynôme homogène $F(x_0, x_1, x_2)$ à coefficients réels et de degré d, quelles sont les qualités topologiques de ses zéros dans le plan projectif réel, $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$?

Par la suite, nous supposerons toujours que les zéros de F sont non-singuliers.

Nous désignerons par $\mathbf{R}F$ l'ensemble des zéros de F, qui a alors naturellement une structure de variété lisse. Une variété lisse fermée de dimension 1 dans un espace compact est une union de cercles. Ainsi, $\mathbf{R}F$ sera une collection de cercles.

En dimension 1. En prenant $d = 1$, nous observons que

$$F(x_0, x_1, x_2) = ax_0 + bx_1 + cx_2$$

avec $a, b, c \in \mathbf{R}$. Ainsi, $\mathbf{R}F$ est une droite de $\mathbf{R}^2$. Son plongement dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ est un grand cercle.

Plongements de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$

Il est utile de garder à l'esprit que deux plongements possibles dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ donnent lieu à un cercle :

- le plongement d'une droite de $\mathbf{R}^2$ (qui donne un grand cercle qui intersecte la droite à l'infini en un point) ;
- le plongement d'une conique de $\mathbf{R}^2$ (que nous appellerons *ovale*). [§1]

Le plongement d'un ovale divise $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ en deux régions non connectées : une boule et un ruban de Möbius. [§2]

En dimension 2. Si nous revenons au problème initial, pour $d = 2$ nous avons F qui décrit une conique de $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$, c'est donc ou bien un ovale ou bien l'ensemble vide (ce qui se produit lorsque F est définie).

> Lemme 1.1
>
> Nous montrerons que :
> - lorsque d est pair, $\mathbf{R}F$ est une réunion d'ovales ;
> - lorsque d est impair, $\mathbf{R}F$ est la réunion d'une droite et d'ovales.

§1. Quelques doutes dessus, il faudrait vérifier si c'est le plongement d'une conique ou d'autre chose ...

§2. Est-ce que c'est aussi vrai pour les grands cercles ?

En dimension 4. La classification pour $d = 4$ nous donne la distinction de cas suivante sur la composition de $\mathbf{R}F$:

- cela peut être l'ensemble vide ;
- un, ou deux, ou trois, ou quatre ovales ;
- un ovale dans un autre tel que dans la figure qui suit.

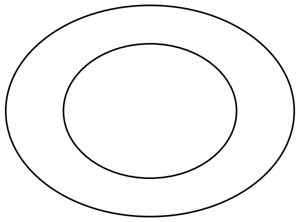

Figure 1 – Lorsque $d = 4$, un ovale peut être dans un autre

Mais le cas suivant est impossible :

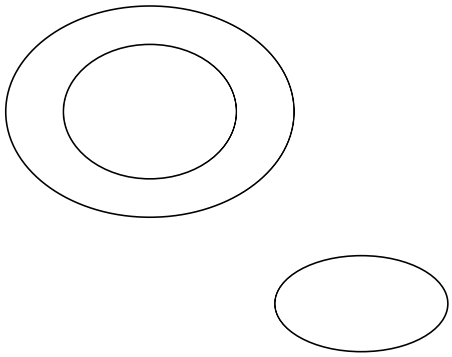

Figure 2 – Ceci est impossible

En effet, si nous traçons une droite qui coupe chacun des ovales en deux points, nous obtenons 6 points d'intersections alors que le degré de l'équation sous-jacente est de 4.

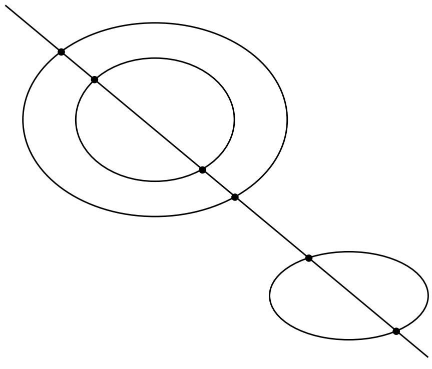

Figure 3 – Les six points d'intersections contredisent $d = 4$

Nous procédons de même avec le cas où nous aurions 5 ovales. Par leurs 5 centres passe une conique et l'intersection est de 10 points alors qu'il devrait y en avoir au plus $4 \times 2 = 8$.

Chapitre 1

Géométrie des courbes algébriques

1 Lemme de Morse

D'après Milnor, *Morse Theory*.

Lemme 1.1 (Morse)
Soit p un point critique non dégénéré de f. Alors il existe un système de coordonnées locales $(y^1, \ldots, y^n)$ dans un voisinage U de p tel que $y^i(p) = 0$ pour tout i et aussi :

$$f = f(p) - (y^1)^2 - \ldots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \ldots + (y^n)^2$$

avec λ l'index de f en p.

Nous commençons par se donner un lemme préliminaire :

Lemme 1.2
Si f est lisse dans un voisinage V de $0 \in \mathbf{R}^n$ avec $f(0) = 0$ alors

$$f(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{i=1}^{n} x^i g_i(x^1, \ldots, x^n)$$

avec des fonctions g_i lisse sur V et telles que

$$g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0).$$

Preuve
Nous avons l'égalité

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}f(tx)}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) \cdot x^i \,\mathrm{d}t$$

et nous définissons alors

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) \,\mathrm{d}t.$$

Preuve (Lemme de Morse)
Nous commençons par montrer que si f a une telle expression alors λ est l'index de f en p. Supposons ainsi pour un systèmes de coordonnées $(z^1, \ldots, z^n)$ que

$$f(q) = f(p) - (z^1(q))^2 - \ldots - (z^\lambda(q))^2 + (z^{\lambda+1}(q))^2 + \ldots + (z^n(\lambda))^2.$$

Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial z^j}(p) = \begin{cases} -2 \text{ si } i = j \leq \lambda \\ 2 \text{ si } i = j > \lambda \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Cela montre que la matrice de Δf selon la base $\left.\frac{\partial}{\partial z^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial z^n}\right|_p$ est diagonale avec λ fois -2, $(n-\lambda)$ fois 2 sur la diagonale et dans cet ordre.

Ainsi, il existe un sous-espace de $\mathrm{T}M_p$ de dimension λ où Δf est définie négative et un sous-espace de dimension $n-\lambda$ où Δf est définie positive. Cela montre que λ est l'index de f en p.

Il nous reste à montrer qu'un tel système de coordonnées existe. Pour cela, nous commençons par supposer que $p = 0$ et $f(0) = 0$, par le lemme précédent nous obtenons des g_i telles que

$$f(x) = x^i g_i(x).$$

Comme 0 est un point critique, $g_i(0) = 0$ pour tout i et donc il existe des $h_{i,j}$ telles que

$$f(x) = x^i x^j h_{i,j}(x).$$

Nous pouvons supposer (quitte à moyenner) que $h_{i,j} = h_{j,i}$.

Pour obtenir le système de coordonnées, nous allons imiter la preuve de diagonalisation des formes quadratiques. Procédons par récurrence, supposons qu'il existe $u^1, \ldots, u^n$ définies dans un voisinage U_1 de 0 telles que

$$f = \pm(u^1)^2 \pm \ldots \pm (u^{r-1})^2 + \sum_{i,j \geq r} u^i u^j H_{i,j}(u^1, \ldots, u^n)$$

sur U_1 et où la matrice décrite par $H_{i,j}(u^1, \ldots, u^n)$ (de taille $(n-r+1) \times (n-r+1)$) est symétrique. Après un changement linéaire sur la dernière coordonnée, on peut faire en sorte que $H_{r,r}(0) \neq 0$. Désignons par $g(u^1, \ldots, u^n)$ la racine carrée de $|H_{r,r}(u^1, \ldots, u^n)|$. Comme g est non nulle en 0 et est lisse, il existe un voisinage $U_2 \subset U_1$ de 0 où g est non nulle. On pose $v^i = u^i$ pour $i \neq r$ et

$$v^r(u^1, \ldots, u^n) = g(u^1, \ldots, u^n) \left(u^r + \sum_{i>r} u^i \frac{H_{i,r}(u^1, \ldots, u^n)}{H_{r,r}(u^1, \ldots, u^n)} \right).$$

Par le théorème d'inversion locale, $(v^1, \ldots, v^n)$ sera un système de coordonnées dans un voisinage $U_3 \subset U_2$ de 0. Cela complète la récurrence puisque sur U_3 :

$$f = \pm(v^1)^2 \pm \ldots \pm (v^r)^2 + \sum_{i,j > r} v^i v^j H_{i,j}(v^1, \ldots, v^n).$$

2 Théorème des petites perturbations

Définition 2.1

Nous dirons que $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est un *croisement* si $\Delta P(\xi)$ a une valeur propre positive et une négative.

De manière équivalente, ξ est un croisement si ξ est un point critique non dégénéré et d'index 1 pour les applications :

$$\varphi_i \colon \left| \begin{array}{l} \{x_i \neq 0\} \to \mathbf{R} \\ \qquad x \mapsto \dfrac{P(x)}{x_i} \deg P \end{array} \right.$$

pour i tel que $\xi_i \neq 0$.

Le lemme de Morse implique qu'au voisinage de ξ, $\mathbf{R}P$ est la réunion de deux droites réelles.

Réciproquement, si $\mathbf{R}A_1, \ldots, \mathbf{R}A_k$ sont non singulières, mutuellement transverse et si 3 d'entre-elles ne se croisent jamais, alors les points critiques de $\mathbf{R}A_1 \cup \cdots \cup \mathbf{R}A_k$ sont des croisements.

Le théorème des petites perturbations s'énonce de la manière suivante :

Théorème 2.2

Soient P et Q deux polynômes de degré n et tels que $\mathbf{R}Q$ ne passe pas par les points critiques de $\mathbf{R}P$. Soit U un voisinage régulier de $\mathbf{R}A$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ tel que U se décompose selon :

$$U = U_0 \sqcup U_1$$

où U_0 est voisinage des points critiques et U_1 est un voisinage tubulaire de la sous-variété $\mathbf{R}P - U_0$.

Alors il existe X de degré n tel que :

1. la courbe $\mathbf{R}X$ est partie de U ;
2. pour chaque composante connexe V de U_0, il existe un homéomorphisme $h : V \to D^1 \times D^1$ (avec D^1 le disque unité de dimension 1) tel que :
$$h(\mathbf{R}P \cap V) = D^1 \times \{0\},\ h(\mathbf{R}Q \cap V) = \{0\} \times D^1,$$
$$h(\mathbf{R}X \cap V) = \left\{ xy = \frac{1}{2} \right\} \subset D^1 \times D^1 \,;$$
3. $\mathbf{R}X - U_0$ est une section du fibré tubulaire $V_1 \to \mathbf{R}P - U_0$;
4. $\mathbf{R}X$ est partie de $\{P(x_0, x_1, x_2)Q(x_0, x_1, x_2) \leq 0\}$;
5. $\mathbf{R}X \cap \mathbf{R}P = \mathbf{R}X \cap \mathbf{R}Q = \mathbf{R}P \cap \mathbf{R}Q$;
6. si $p \in \mathbf{R}P \cap \mathbf{R}Q$ est non singulier de Q et si $\mathbf{R}Q$ est transverse à $\mathbf{R}P$ en p alors $\mathbf{R}X$ est transverse à $\mathbf{R}Q$ en p.

Il existe aussi $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \varepsilon]$, $X = P + tQ$ convienne.