

# PATCHWORK COMBINATOIRE DE COURBES ALGÈBRIQUES

Mémoire de L3

Raphaël ALEXANDRE, Thomas MORDANT

21 février 2016  
École Normale Supérieure

Encadré par :  
Ilia ITENBERG

# Sommaire

<b>Introduction du problème</b>	<b>ii</b>
1 Le seizième problème de HILBERT . . . . .	ii
<b>1 Géométrie des courbes algébriques</b>	<b>1</b>
1 Lemme de MORSE . . . . .	1
2 Théorème des petites perturbations . . . . .	2
3 Théorème de HARNACK . . . . .	3
4 Bref historique des travaux généraux après HARNACK . . . . .	4

# Introduction du problème

Avant le propos central de ce texte, nous allons essayer d'exposer le problème étudié ainsi que de poser les premières notations utilisées.

## 1 LE SEIZIÈME PROBLÈME DE HILBERT

Le problème est le suivant. Étant donné une polynôme homogène  $F(x_0, x_1, x_2)$  à coefficients réels et de degré  $d$ , quelles sont les qualités topologiques de ses zéros dans le plan projectif réel,  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  ?

Par la suite, nous supposons toujours que les zéros de  $F$  sont non-singuliers.

Nous désignerons par  $\mathbf{R}F$  l'ensemble des zéros de  $F$ , qui a alors naturellement une structure de variété lisse. Une variété lisse fermée de dimension 1 dans un espace compact est une union de cercles. Ainsi,  $\mathbf{R}F$  sera une collection de cercles.

POUR  $d = 1$ . Nous observons que

$$F(x_0, x_1, x_2) = ax_0 + bx_1 + cx_2$$

avec  $a, b, c \in \mathbf{R}$ . Ainsi,  $\mathbf{R}F$  est une droite de  $\mathbf{R}^2$ . Son plongement dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  est un grand cercle.

### Plongements de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$

Il est utile de garder à l'esprit que deux plongements possibles dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  donnent lieu à un cercle :

- le plongement d'une droite de  $\mathbf{R}^2$  (qui donne un grand cercle qui intersecte la droite à l'infini en un point) ;
- le plongement d'une conique de  $\mathbf{R}^2$  (que nous appellerons *ovale*).<sup>§1</sup>

Le plongement d'un ovale divise  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  en deux régions non connectées : une boule et un ruban de MÖBIUS.<sup>§2</sup>

### Classification en petits degrés

POUR  $d = 2$ . Si nous revenons au problème initial, pour  $d = 2$  nous avons  $F$  qui décrit une conique de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ , c'est donc ou bien un ovale ou bien l'ensemble vide (ce qui se produit lorsque  $F$  est définie).

#### LEMME 1.1

Nous montrerons que :

- lorsque  $d$  est pair,  $\mathbf{R}F$  est une réunion d'ovales ;

§1. Quelques doutes dessus, il faudrait vérifier si c'est le plongement d'une conique ou d'autre chose ...

§2. Est-ce que c'est aussi vrai pour les grands cercles ?

| • lorsque  $d$  est impair,  $\mathbf{R}F$  est la réunion d'une droite et d'ovales.

POUR  $d = 4$ . La classification pour  $d = 4$  nous donne la distinction de cas suivante sur la composition de  $\mathbf{R}F$  :

- cela peut être l'ensemble vide ;
- un, ou deux, ou trois, ou quatre ovales ;
- un ovale dans un autre tel que dans la figure qui suit.

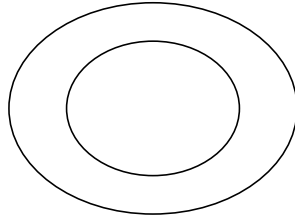


FIGURE 1 – Lorsque  $d = 4$ , un ovale peut être dans un autre

Mais le cas suivant est impossible :

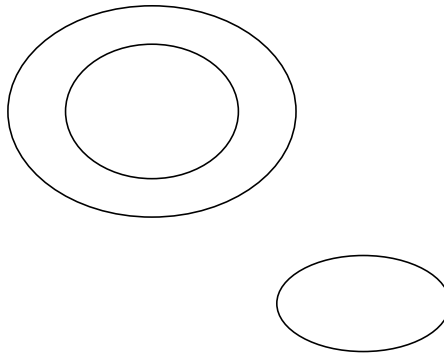


FIGURE 2 – Ceci est impossible

En effet, si nous traçons une droite qui coupe chacun des ovales en deux points, nous obtenons 6 points d'intersections alors que le degré de l'équation sous-jacente est de 4.

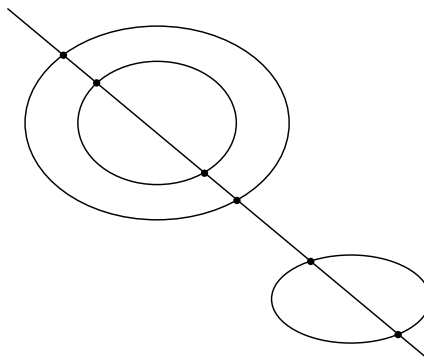


FIGURE 3 – Les six points d'intersections contredisent  $d = 4$

Nous procédons de même avec le cas où nous aurions 5 ovals. Par leurs 5 centres passe une conique et l'intersection est de 10 points alors qu'il devrait y en avoir au plus  $4 \times 2 = 8$ . §3

Il est utile de mentionner le résultat suivant qui donne la classification topologique (mais ne donne pas de classification sur le plongement).

LEMME 1.2 (HARNACK - 1876)

Soit  $l$  le nombre de composantes connexes, alors

$$1 \leq l \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1 \text{ §4}$$

et les deux bornes sont atteintes pour tout degré  $d$ .

POUR  $d = 6$ . C'est ici qu'apparaissent les premières difficultés. Le lemme précédent nous donne  $l \leq 11$ , lorsque cette borne est atteinte nous dirons que la courbe est *maximale*. Supposons  $l = 11$ , on a les trois possibilités suivantes, regroupées dans la figure suivante §5.

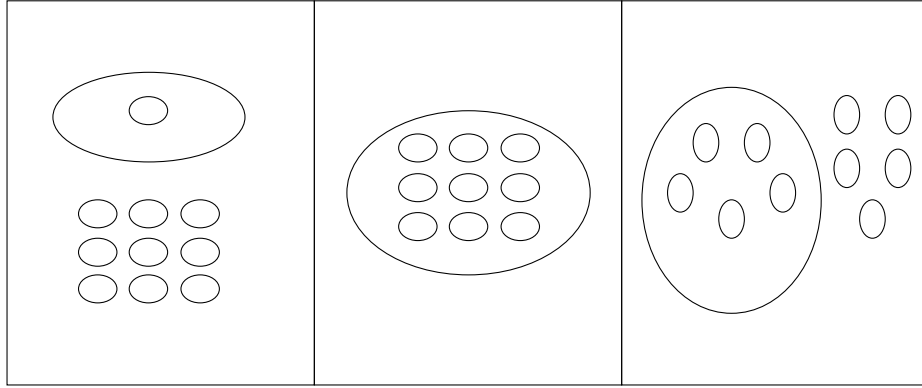


FIGURE 4 – Classification lorsque  $d = 6$  avec 11 composantes connexes

Les autres configurations sont difficiles à écarter.

EN PLUS HAUT DEGRÉ. Lorsque  $d = 7$  la classification est connue. Lorsque  $d = 8$  le problème reste ouvert.

## Patchwork

La technique du patchwork combinatoire permet d'établir des configurations par un procédé simple et ne dépendant pas du degré. §6

§3. Introduction à compléter

§4. Le quotient est le genre (en tant que surface) des zéros de  $F$  dans  $\mathbf{C}$ .

§5. La première configuration est la courbe de HARNACK.

§6. Ce serait bien de mettre un premier exemple.

# Chapitre 1

## Géométrie des courbes algébriques

### 1 LEMME DE MORSE

D'après [Milnor1973]. Par la suite, on considère  $f$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$  définie dans un voisinage de  $p \in \mathbf{R}^n$  telle que  $f$  est lisse et admet un point critique en  $p$ . Un point critique de  $f$  est non dégénéré si la forme quadratique définie par  $\Delta f(p)$  est non dégénérée. L'index de  $p$  pour  $f$  est le nombre de  $-$  qui apparaissent dans la réduction de GAUSS de la forme quadratique précédemment évoquée.

LEMME 1.1 (MORSE)

Soit  $p$  un point critique non dégénéré de  $f$ . Alors il existe un système de coordonnées locales  $(y^1, \dots, y^n)$  dans un voisinage  $U$  de  $p$  tel que  $y^i(p) = 0$  pour tout  $i$  et aussi :

$$f = f(p) - (y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2$$

avec  $\lambda$  l'index de  $f$  en  $p$ .

Nous commençons par se donner un lemme préliminaire :

LEMME 1.2

Si  $f$  est lisse dans un voisinage  $V$  de  $0 \in \mathbf{R}^n$  avec  $f(0) = 0$  alors

$$f(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n x^i g_i(x^1, \dots, x^n)$$

avec des fonctions  $g_i$  lisse sur  $V$  et telles que

$$g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0).$$

PREUVE

Nous avons l'égalité

$$f(x) = \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) \cdot x^i dt$$

et nous définissons alors

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) dt.$$

PREUVE (Lemme de MORSE)

Nous commençons par montrer que si  $f$  a une telle expression alors  $\lambda$  est l'index de  $f$  en  $p$ . Supposons ainsi pour un système de coordonnées  $(z^1, \dots, z^n)$  que

$$f(q) = f(p) - (z^1(q))^2 - \dots - (z^\lambda(q))^2 + (z^{\lambda+1}(q))^2 + \dots + (z^n(q))^2.$$

Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial z^j}(p) = \begin{cases} -2 & \text{si } i = j \leq \lambda \\ 2 & \text{si } i = j > \lambda \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela montre que la matrice de  $\Delta f$  selon la base  $\left. \frac{\partial}{\partial z^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial z^n} \right|_p$  est diagonale avec  $\lambda$  fois  $-2$ ,  $(n - \lambda)$  fois  $2$  sur la diagonale et dans cet ordre.

Ainsi, il existe un sous-espace de  $TM_p$  de dimension  $\lambda$  où  $\Delta f$  est définie négative et un sous-espace de dimension  $n - \lambda$  où  $\Delta f$  est définie positive. Cela montre que  $\lambda$  est l'index de  $f$  en  $p$ .

Il nous reste à montrer qu'un tel système de coordonnées existe. Pour cela, nous commençons par supposer que  $p = 0$  et  $f(0) = 0$ , par le lemme précédent nous obtenons des  $g_i$  telles que

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x^i g_i(x).$$

Comme  $0$  est un point critique,  $g_i(0) = 0$  pour tout  $i$  et donc il existe des  $h_{i,j}$  telles que

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n x^i x^j h_{i,j}(x).$$

Nous pouvons supposer (quitte à moyenner) que  $h_{i,j} = h_{j,i}$ .

Pour obtenir le système de coordonnées, nous allons imiter la preuve de diagonalisation des formes quadratiques. Procédons par récurrence, supposons qu'il existe  $u^1, \dots, u^n$  définies dans un voisinage  $U_1$  de  $0$  telles que

$$f = \pm(u^1)^2 \pm \dots \pm (u^{r-1})^2 + \sum_{i,j \geq r} u^i u^j H_{i,j}(u^1, \dots, u^n)$$

sur  $U_1$  et où la matrice décrite par  $H_{i,j}(u^1, \dots, u^n)$  (de taille  $(n - r + 1) \times (n - r + 1)$ ) est symétrique. Après un changement linéaire sur la dernière coordonnée, on peut faire en sorte que  $H_{r,r}(0) \neq 0$ . Désignons par  $g(u^1, \dots, u^n)$  la racine carrée de  $|H_{r,r}(u^1, \dots, u^n)|$ . Comme  $g$  est non nulle en  $0$  et est lisse, il existe un voisinage  $U_2 \subset U_1$  de  $0$  où  $g$  est non nulle. On pose  $v^i = u^i$  pour  $i \neq r$  et

$$v^r(u^1, \dots, u^n) = g(u^1, \dots, u^n) \left( u^r + \sum_{i > r} u^i \frac{H_{i,r}(u^1, \dots, u^n)}{H_{r,r}(u^1, \dots, u^n)} \right).$$

Par le théorème d'inversion locale,  $(v^1, \dots, v^n)$  sera un système de coordonnées dans un voisinage  $U_3 \subset U_2$  de  $0$ . Cela complète la récurrence puisque sur  $U_3$  :

$$f = \pm(v^1)^2 \pm \dots \pm (v^r)^2 + \sum_{i,j > r} v^i v^j H_{i,j}(v^1, \dots, v^n).$$

## 2 THÉORÈME DES PETITES PERTURBATIONS

### DÉFINITION 2.1

Nous dirons que  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  est un *croisement* si  $\Delta P(\xi)$  a une valeur propre strictement positive et une strictement négative.

De manière équivalente,  $\xi$  est un croisement si  $\xi$  est un point critique non dégénéré et d'index  $1$  pour les applications :

$$\varphi_i : \begin{cases} \left\{ (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbf{P}^2(\mathbf{R}) \mid x_i \neq 0 \right\} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \frac{P(x)}{x_i} \deg P \end{cases}$$

$$\tilde{P}(x_1, x_2) = P(1, x_1, x_2)$$

pour  $i$  tel que  $\xi_i \neq 0$ .

Le lemme de MORSE implique qu'au voisinage de  $\xi$ ,  $\mathbf{R}P$  est la réunion de deux droites réelles.

Réciproquement, si  $\mathbf{R}A_1, \dots, \mathbf{R}A_k$  sont non singulières, mutuellement transverse et si 3 d'entre-elles ne se croisent jamais, alors les points critiques de  $\mathbf{R}A_1 \cup \dots \cup \mathbf{R}A_k$  sont des croisements.

Le théorème des petites perturbations s'énonce de la manière suivante :

THÉORÈME 2.2 (Petites perturbations)

Soit  $P$  un polynôme de degré  $d$  dont les points critiques sont des croisements. Soit  $Q$  un polynôme de degré  $d$  dont la courbe algébrique ne passe pas par les points critiques de  $P$ . Soit  $U$  un voisinage régulier de  $\mathbf{R}P$  dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  tel que  $U$  se décompose selon :

$$U = U_0 \cup U_1$$

où  $U_0$  est voisinage des points critiques et  $U_1$  est un voisinage tubulaire de la sous-variété  $\mathbf{R}P - U_0$  dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R}) - U_0$ .

Alors il existe  $X$  de degré  $d$  tel que :

1. la courbe  $\mathbf{R}X$  est partie de  $U$  ;
2. pour chaque composante  $V$  de  $U_0$ , il existe un homéomorphisme  $h : V \rightarrow D^1 \times D^1$  (avec  $D^1$  le disque unité de dimension 1) tel que :

$$h(\mathbf{R}P \cap V) = D^1 \times \{0\} \cup \{0\} \times D^1,$$

$$h(\mathbf{R}X \cap V) = \left\{ (x, y) \in D^1 \times D^1 \mid xy = 1/2 \right\} ;$$

3.  $\mathbf{R}X - U_0$  est une section du fibré tubulaire  $U_1 \rightarrow \mathbf{R}P - U_0$  ;
4.  $\mathbf{R}X \subset \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbf{P}^2(\mathbf{R}) \mid P(x_0, x_1, x_2)Q(x_0, x_1, x_2) \leq 0\}$  ;
5.  $\mathbf{R}X \cap \mathbf{R}P = \mathbf{R}X \cap \mathbf{R}Q = \mathbf{R}P \cap \mathbf{R}Q$  ;
6. si  $p \in \mathbf{R}P \cap \mathbf{R}Q$  est non singulier de  $Q$  et si  $\mathbf{R}Q$  est transverse à  $\mathbf{R}P$  en  $p$  alors  $\mathbf{R}X$  est aussi transverse à  $\mathbf{R}P$  en  $p$ .

Il existe aussi  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $t \in ]0, \varepsilon]$ ,  $X = P + tQ$  convienne.

### 3 THÉORÈME DE HARNACK

THÉORÈME 3.1 (HARNACK 1876)

Pour tout entier naturel  $m$  et pour tout entier  $c$  vérifiant

$$\frac{1 - (-1)^m}{2} \leq c \leq \frac{m^2 - 3m + 4}{2} \quad (1.1)$$

il existe une courbe plane non-singulière de degré  $m$  et constituée de  $c$  composantes.

L'inégalité à droite de (1.1) est l'inégalité de HARNACK, celle de gauche découle de considérations élémentaires : une courbe de degré impair a forcément une droite projective comme composante. L'encadrement (1.1) est donc une condition nécessaire de l'existence d'une courbe avec  $c$  composantes, et le théorème affirme que cette condition est suffisante, et résout ainsi le problème de classification des courbes de degré  $m$  à homéomorphisme près.

Commençons par démontrer que l'inégalité de droite de (1.1) est optimale.



## LEMME 3.2

Pour tout entier naturel  $m$ , il existe une courbe de degré  $m$  contenant  $\frac{m^2-3m+4}{2}$  composantes. Une telle courbe est appelée une M-courbe de degré  $m$ .

## PREUVE

Nous allons construire une suite de telles courbes. Le cas  $m \leq 5$  a déjà été traité, on peut donc partir d'une M-courbe de degré 5,  $A_5$ , construite à partir de l'union de deux coniques et d'une droite  $L$ , perturbée en direction de l'union  $B_5$  de cinq droites.

On définit par récurrence  $B_m$  pour  $m > 5$  comme l'union de  $m$  droites qui intersectent  $\mathbf{RL}$  en  $m$  points distincts tels que, si  $m$  est pair, les points sont dans une composante arbitraire de  $\mathbf{RL} \setminus \mathbf{RB}_{m-1}$ , et si  $m$  est impair, les points sont dans la composante de  $\mathbf{RL} \setminus \mathbf{RB}_{m-1}$  qui contient  $\mathbf{RL} \cap \mathbf{RB}_{m-2}$  (nous nous plaçons dans un espace projectif, il ne faut donc pas perdre de vue que le complémentaire d'un point dans une droite ne contient qu'une composante). On construit aussi  $A_m$  comme une petite perturbation de  $A_{m-1} \cup L$  dirigée vers  $B_m$ .

Pour  $m > 5$ , supposons que  $A_{m-1}$  est une M-courbe de degré  $m-1$ , telle que  $\mathbf{RA}_{m-1}$  intersecte  $\mathbf{RL}$  transversalement en  $m-1$  points, placés sur une seule composante de  $\mathbf{RA}_{m-1}$ , dans le même ordre que sur  $\mathbf{RL}$ . Alors pour une certaine direction de la perturbation de  $A_{m-1}$ , cette composante donne  $m-1$  composantes, et les  $\frac{(m-1)^2-3(m-1)+4}{2} - 1 = \frac{m^2-5m+6}{2}$  autres composantes ne sont que légèrement modifiées. Le nombre de composantes de  $\mathbf{RA}_m$  est donc :

$$\frac{m^2 - 5m + 6}{2} + m - 1 = \frac{m^2 - 3m + 4}{2}.$$

$A_m$  est donc bien une M-courbe de degré  $m$ .

Par le théorème des petites perturbations,  $\mathbf{RA}_m$  est transversal à  $\mathbf{RL}$  et leur intersection est  $\mathbf{RL} \cap \mathbf{RB}_m$ . Comme  $\mathbf{RL} \cap \mathbf{RB}_m$  est contenu dans une composante de  $\mathbf{RL} \setminus \mathbf{RB}_{m-1}$ , il est aussi contenu dans une seule composante de  $\mathbf{RA}_m$ , et ses points apparaissent dans le même ordre sur  $\mathbf{RL}$  que sur cette composante, ce qui termine la récurrence. ■

On voit aussi que l'inégalité de gauche de (1.1) est optimale : il suffit de considérer la courbe  $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^m + x_2^m + x_3^m$ , dont l'ensemble des zéros projectifs est vide si  $m$  est pair, et est une droite projective sinon.

Le reste de la démonstration peut se faire en construisant des courbes avec un nombre quelconque de composantes de la même manière que dans la démonstration du lemme avec des  $B_m$  construits différemment. Cette démonstration est fastidieuse et n'inclut pas de nouvelles idées, nous ne la présenterons donc pas. Il existe aussi une preuve plus conceptuelle utilisant  $\mathbf{RC}_m$ , l'espace projectif des polynômes homogènes de degré  $m$ .

On appelle M-courbes de HARNACK les M-courbes pouvant être obtenues par cette méthode (le seul degré de liberté laissé par la démonstration est, pour  $m$  pair, la composante de  $\mathbf{RL} \setminus \mathbf{RB}_{m-1}$  dans laquelle se trouve  $\mathbf{RB}_m$ ).

## 4 BREF HISTORIQUE DES TRAVAUX GÉNÉRAUX APRÈS HARNACK

En 1891, HILBERT s'intéressa au problème de la classification des classes d'isotopie des courbes réelles projectives, et en particulier des M-courbes. Il remarqua que la construction de HARNACK ne permettait pas d'obtenir tous les types d'isotopies des M-courbes, et proposa une autre construction, similaire à celle de HARNACK, mais où les lignes sont remplacés par des coniques. Pour  $m = 6$ , la construction de HARNACK ne donnait qu'un type d'isotopie, et celle de HILBERT en donnait un nouveau. HILBERT conjectura que ces deux types étaient les seuls possibles, mais cette conjecture fut invalidée par GUDKOV en 1969, qui en trouva un troisième, et montra qu'il n'y avait pas plus de trois types possibles.

En 1900, HILBERT présenta sa célèbre liste de problèmes devant guider les mathématiciens de XXème siècle, et en seizième position y figurait, notamment, la classification des types d'isotopie des courbes réelles projectives de degré 6.

Au cours du XXème siècle, les mathématiciens cherchèrent des conditions nécessaires plus fortes que celles entraînées par le théorème de BEZOUT et l'inégalité de HARNACK. RAGSDALE ouvrit la voie en s'intéressant aux M-courbes de degré pair et en séparant les ovals d'une courbe en deux groupes : les ovals pairs, qui sont contenus dans un nombre pair d'autres ovals (on note  $p$  leur nombre) et les ovals impairs (on note  $n$  leur nombre). En étudiant les résultats des constructions de HARNACK et de HILBERT pour de petits degrés, elle conjectura en 1906 des encadrements sur  $p$  et  $n$  pour les courbes de HARNACK et de HILBERT, sur lesquels travaillèrent notamment PETROVSKY, VIRO, et ITENBERG. La première nouvelle condition nécessaire portant sur toutes les M-courbes de degré pair fut le théorème de PETROVSKY :

THÉORÈME 4.1 (PETROVSKY 1933-1938)

Pour toute courbe plane projective réelle algébrique non-singulière de degré  $m = 2k$  :

$$-\frac{3}{2}k(k-1) \leq p - n \leq \frac{3}{2}k(k-1) + 1.$$