

FGV EMap
João Pedro Jerônimo

Inferência Estatística

Revisão para A2

Rio de Janeiro

2025

Conteúdo

1	Distribuição Amostral de Estimadores	3
2	Distribuição Chi-Quadrado	6
2.1	Propriedades	7
3	Distribuição Conjunta da Média e Variância Amostral	9
3.1	Independência da Média e Variância Amostrais	10
4	Distribuições t	13
4.1	Propriedades	15
5	Intervalos de Confiança	18
5.1	Intervalo de Confiança para a média de uma Normal	19
5.2	Intervalos de Confiança Unilaterais	20
5.3	Intervalo de confiança para outros parâmetros	21
6	Análise Bayesiana de Amostras Normais	23
6.1	Família de Conjugados	24
6.2	Marginais	24
6.3	Distribuições Impróprias	25
7	Estimadores não-vieizados	26
7.1	Estimador não-vieizado da Variância	27
7.2	Limitações	28
8	Análise e Teste de Hipóteses	29
8.1	Hipóteses Nula e Alternativa	30
8.2	Região Crítica e Testes Estatísticos	31
8.3	Função de Poder e Tipos de Erro	31
8.4	Induzindo um nível de significância	32
8.5	p-valor	33
8.6	Calculando p-valores	33
8.7	Equivalência de testes e conjuntos de confiança	33
8.8	Testes de razão de verossimilhança	34
9	Testes t	37
9.1	Testando Hipóteses sobre a Média de uma Normal quando a Variância é Desconhecida	38
9.2	Propriedades dos testes t	38
9.3	Teste t pareado	40
9.4	Testando uma alternativa bilateral	41
9.5	Testes t como testes de razão de verossimilhança	42
10	Comparando as médias de duas Distribuições Normais	44
10.1	O t -teste biamostrai	45
10.2	Poder do Teste	46
10.3	Alternativas Bilaterais	47

Distribuição Amostral de Estimadores

Quando temos um estimador δ , e note que estamos falando de um **estimador** e não de uma **estimativa**, temos que, como ele é função de variáveis aleatórias, ele próprio é uma variável aleatória, que possui sua própria distribuição, seus próprios parâmetros, média, variância, etc. Essa distribuição própria da estimativa é o que chamamos de **Distribuição Amostral do Estimador**

Definição 1.1 (Distribuição Amostral do Estimador): Dadas as variáveis aleatórias $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ e $T = r(\underline{X})$ um estimador, onde \underline{X} tem uma distribuição indexada pelo parâmetro θ , então a distribuição de $T|\theta$ chamada de Distribuição Amostral de T . ($\mathbb{E}_\theta[T]$ é a média de T na distribuição amostral)

O nome vem do fato que T depende da amostra \underline{X} . Na maioria das vezes, T não depende de θ . Mas por que essa distribuição me é interessante?

Vamos supor que eu tenho um estimador $\hat{\theta}$ de θ , pode me ocorrer de eu querer saber a chance de o meu estimador estar próximo do meu θ de verdade, por exemplo, qual a chance de a distância entre meu estimador e meu θ ser de só 0.1 medidas? Então podemos querer calcular:

$$\mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| < 0.1) \quad (1)$$

Pela lei da probabilidade total, temos também:

$$\mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| < 0.1) = \mathbb{E}[\mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| < 0.1|\theta)] \quad (2)$$

Outro uso que podemos derivar para a distribuição amostral é escolher entre vários experimentos qual será performado para obter o melhor estimador de θ . Por exemplo, podemos querer saber qual a quantidade de amostras necessárias para atingir um objetivo em específico

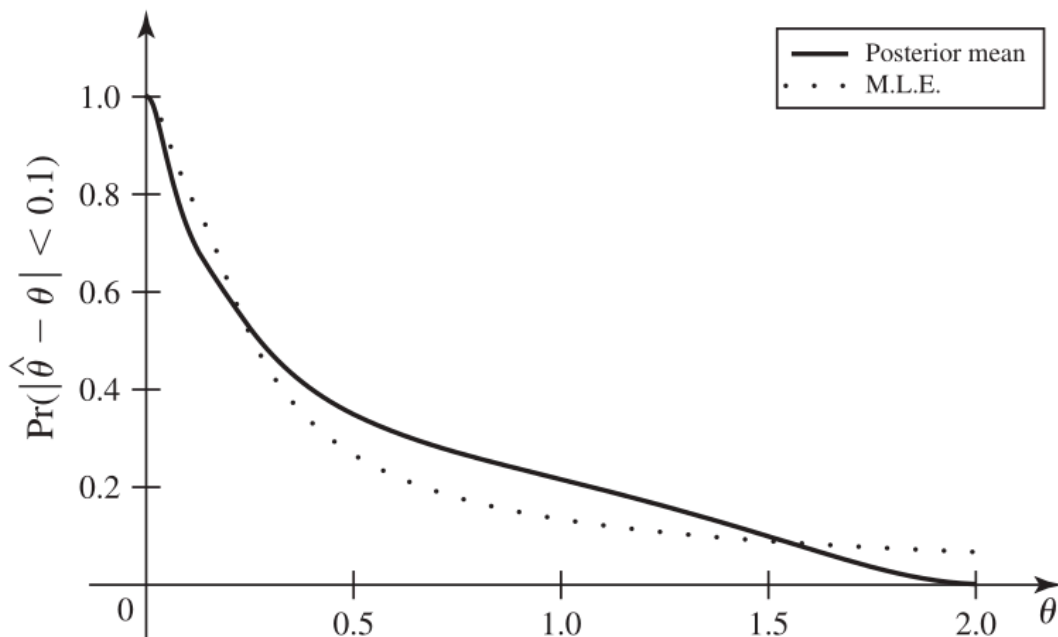


Figura 1: Imagem que representa $\mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| < 0.1)$ em função da quantidade de amostras em um dos exemplos do livro, mostrando que dependendo da nossa situação, podemos querer escolher estimadores diferentes

Uma outra medida interessante que foi apresentada em um dos exemplos do livro é uma distância relativa:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\hat{\theta}}{\theta} - 1\right| < 0.1\right) \quad (3)$$

Ou seja, a probabilidade de que meu estimador esteja a pelo menos 10% de θ de distância de θ

Exemplo 1.1: Vamos tentar condensar tudo o que vimos em um exemplo. Vamos supor que temos uma clínica que está a fim de identificar ou prever pacientes candidatos a um remédio específico para tratamento da depressão. Então podemos modelar a variável aleatória de um paciente usar ou não esse remédio como uma Bernoulli com θ de chance de utilizar o remédio ($\mathbb{P}(X = 1) = \theta$). Sabemos por capítulos anteriores que $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ (A proporção de pacientes que vão utilizar o remédio) é uma estatística suficiente e também é o EVM (Estimador de Máxima Verossimilhança) de θ

Porém, T também é uma variável aleatória com distribuição própria, então ela pode assumir vários valores, mas queremos que ela seja o mais próximo possível de θ . Então, que tal calcularmos:

$$\mathbb{P}(|T - \theta| < 0.1) \quad (4)$$

Para isso temos que saber exatamente a distribuição de T . Não é muito difícil, na verdade! Sabemos que $T = \frac{1}{n}Y$ com $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ e $Y|\theta \sim \text{Bin}(n, \theta)$. Então sabemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = t|\theta) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}Y = t|\theta\right) = \mathbb{P}(Y = nt|\theta) \\ &= \binom{n}{nt} \theta^{nt} (1 - \theta)^{n-nt} \end{aligned} \quad (5)$$

Assim, encontramos a nossa Distribuição Amostral do estimador T . Então agora poderíamos calcular a equação mencionada anteriormente

$$\mathbb{P}(|T - \theta| < 0.1) = \mathbb{P}(-0.1 < T - \theta < 0.1) = \mathbb{P}(\theta - 0.1 < T < \theta + 0.1) \quad (6)$$

Podemos utilizar a distribuição amostral de T que encontramos anteriormente, porém, por questões de praticidade, vou fazer um pouco diferente:

$$\mathbb{P}(\theta - 0.1 < T < \theta + 0.1) = \mathbb{P}(\lceil(\theta - 0.1)n\rceil \leq Y \leq \lfloor(\theta + 0.1)n\rfloor) \quad (7)$$

Eu adicionei o piso e o teto por conta que Y assume apenas valores inteiros. Então temos que:

$$\mathbb{P}(|T - \theta| < 0.1) = \sum_{k=\lceil(\theta-0.1)n\rceil}^{\lfloor(\theta+0.1)n\rfloor} \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k} \quad (8)$$

Distribuição Chi-Quadrado

Essa distribuição é muito utilizada dentro da estatística serve como base para uma outra distribuição que veremos posteriormente. Ela vai ser útil no próximo capítulo também pois ela é a distribuição do estimador de máxima verossimilhança da variância de uma Normal com média μ conhecida

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \quad (9)$$

Definição 2.1: $\forall m \in \mathbb{R}$, uma distribuição Gamma($\frac{m}{2}, \frac{1}{2}$) é também chamada de X_m^2 (Chi quadrado com m graus de liberdade). Ou seja, se $X \sim X_m^2$:

$$f_X(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} \quad (10)$$

2.1 Propriedades

Teorema 2.1.1: Se $X \sim X_m^2$ então:

$$\mathbb{E}[X] = m \quad \mathbb{V}[X] = 2m \quad (11)$$

Demonstração: A esperança de uma Gamma(α, β) é $\frac{\alpha}{\beta}$, logo:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\frac{m}{2}}{\frac{1}{2}} = m \quad (12)$$

E a variância é $\frac{\alpha}{\beta^2}$, logo:

$$\mathbb{V}[X] = \frac{\frac{m}{2}}{\frac{1}{4}} = 2m \quad (13)$$

□

Teorema 2.1.2: A função geradora de momentos de uma X_m^2 é dada por

$$\psi(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{m/2} \quad \left(t < \frac{1}{2}\right) \quad (14)$$

Teorema 2.1.3: Se X_1, \dots, X_k são iid e $X_i \sim X_{m_i}^2$, então $Y = \sum_{j=1}^k X_j \sim X_{\sum_{j=1}^k m_j}^2$

Demonstração: Sabemos que, dado a FGM de X (ψ_X) e de Y (ψ_Y) onde X e Y são iid, então a FGM de $X + Y$ é $\psi_X \psi_Y$. Sabendo disso, calculamos a FGM de $X_1 + \dots + X_k$:

$$\begin{aligned}
\psi_Y(t) &= \prod_{j=1}^k \left(\frac{1}{1-2t} \right)^{m_j/2} & \left(t < \frac{1}{2} \right) \\
&= \left(\frac{1}{1-2t} \right)^{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k m_j} & \left(t < \frac{1}{2} \right)
\end{aligned} \tag{15}$$

□

Teorema 2.1.4: Se $X \sim N(0, 1)$, então $Y = X^2 \sim X_1^2$

Demonstração: Sabemos que se X tem pdf $f_X(x)$ e $Z = h(X)$, então a pdf de Z é

$$f_Z(z) = \frac{f_X(x)}{|h'(x)|} \tag{16}$$

Então, considerando $h(x) = x^2$ e $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, temos que

$$f_Z(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi z}} e^{-\frac{1}{2}z} \tag{17}$$

Perceba que isso é a densidade de uma X_1^2 , veja:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} z^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}z} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-\frac{1}{2}z} = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-\frac{1}{2}z} \tag{18}$$

Logo, $Z \sim X_1^2$. A função $f_Z(z)$ possui um termo $\frac{1}{2}$ pois precisamos lembrar que a normal vai de $[-\infty, \infty]$, então para que $h(x)$ seja monótona, precisamos restringir em $[-\infty, 0]$ e $[0, \infty]$ então obtemos duas funções que integram $\frac{1}{2}$ em cada intervalo, logo o resultado integra 1 □

Corolário 2.1.4.1: Se $X_1, \dots, X_n \sim N(0, 1)$, então:

$$X_1^2 + \dots + X_n^2 \sim X_m^2 \tag{19}$$

Distribuição Conjunta da Média e Variância Amostral

Vamos supor que estamos fazendo um experimento e coletamos amostras de uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 , porém, não sabemos nenhum dos dois, então queremos estimá-los! Podemos escolher vários estimadores, por exemplo, o EVM:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2 \quad (20)$$

Porém, como vimos na primeira parte, eles são variáveis aleatórias com distribuições próprias, então podemos utilizar técnicas para saber o quão bem eles aproximam μ e σ^2 , mas antes, temos que descobrir suas distribuições amostrais! Acontece que a distribuição de $\hat{\mu}$ depende de σ^2 , porém, veremos que a distribuição conjunta de $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}^2$ nos permite inferir μ sem referenciar σ

3.1 Independência da Média e Variância Amostrais

Teorema 3.1.1: Suponha que as variáveis X_1, \dots, X_n são iid, onde $X_j \sim N(0, 1)$. Seja Q uma matriz ortogonal $n \times n$ e $\underline{Y} = Q\underline{X}$ onde $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$, então $Y_j \sim N(0, 1)$ e Y_1, \dots, Y_n são iid, além de que $\sum X_i^2 = \sum Y_i^2$

Demonstração: A distribuição conjunta de X_1, \dots, X_n é dada por:

$$f_X(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right\} \quad (21)$$

Sabemos que, se $Z = h(Y)$ com h monótona, então

$$f_Z(z) = \frac{f_Y(y)}{|h'(y)|} \quad (22)$$

Se considerarmos $h(x) = Qx$, então $\underline{Y} = h(\underline{X})$, logo:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(Q^T y)}{|\det(Q)|} \quad (23)$$

Porém, $\det(Q) = 1$ pois Q é ortogonal. Além disso, sabemos que $\|x\|^2 = \|Qx\|^2$, então:

$$f_Y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2\right\} \quad (24)$$

Logo, chegamos que $Y_j \sim N(0, 1)$ e são iid □

Agora vamos demonstrar um dos teoremas mais surpreendentes da estatística

Teorema 3.1.2 (Independência da Média e Variância Amostral): Sejam $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ e dados os estimadores:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2 \quad (25)$$

As variáveis aleatórias $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}^2$ são **INDEPENDENTES** entre si. Junto desse teorema, também mostraremos que:

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2 \sim \chi_{n-1}^2 \quad (26)$$

Demonstração: Primeiro vamos provar considerando que $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, de forma que utilizaremos esse resultado para generalizar posteriormente.

Vamos primeiro definir $u = (\frac{1}{\sqrt{n}} \dots \frac{1}{\sqrt{n}})^T$, então construímos uma matriz Q utilizando Gram-Schmidt de forma que u seja a primeira linha dessa matriz. Então definimos:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad (27)$$

Vimos pelo Teorema 3.1.1 que Y_j são iid e são normais padrão também. Guarde essa informação! Não é difícil ver que:

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i = \hat{\mu} \sqrt{n} \quad (28)$$

Como $\sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2$, então:

$$\sum_{i=2}^n Y_i^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - Y_1^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n(\hat{\mu})^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2 \quad (29)$$

Ou seja, $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}^2$ são independentes! Dado esse resultado, consideremos agora média e variância não-padrões. Então vamos definir:

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \quad (30)$$

Então Z_1, \dots, Z_n são iid. Sabemos que \bar{Z}_n e $\sum (Z_i - \bar{Z}_n)$ são independentes. Perceba também que, como $\sum (Z_i - \bar{Z}_n) = \sum_{i=2}^n Z_i$, então $\sum (Z_i - \bar{Z}_n) \sim \chi_{n-1}^2$. Porém, sabemos também que $\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, então

$$\begin{aligned} \bar{Z}_n &= \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \\ \Rightarrow \sum (Z_i - \bar{Z}_n)^2 &= \frac{1}{\sigma^2} \sum (X_i - \bar{X}_n)^2 \end{aligned} \quad (31)$$

Logo, \bar{X}_n e $\frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X}_n)^2$ são independentes e $\frac{1}{\sigma^2} \sum (X_i - \bar{X}_n)^2 \sim \chi_{n-1}^2$ □

Esse resultado é interessante pois, em certas ocasiões, podemos querer saber a seguinte probabilidade:

$$\mathbb{P}\left(|\hat{\mu} - \mu| \leq \frac{1}{5}\sigma, |\hat{\sigma} - \sigma| \leq \frac{1}{5}\sigma\right) \geq \frac{1}{2} \quad (32)$$

Já que ela indica uma probabilidade de proximidade entre meus estimadores e meus parâmetros. Porém, pelo Teorema 3.1.2, podemos separar essa probabilidade em:

$$\underbrace{\mathbb{P}\left(|\hat{\mu} - \mu| \leq \frac{1}{5}\sigma\right)}_{p_1} \underbrace{\mathbb{P}\left(|\hat{\sigma} - \sigma| \leq \frac{1}{5}\sigma\right)}_{p_2} \geq \frac{1}{2} \quad (33)$$

e isso simplifica bastante nossas contas! Vamos definir $U \sim N(0, 1)$, então podemos reescrever as probabilidades como:

$$p_1 = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\hat{\mu} - \mu| < \frac{1}{5}\sqrt{n}\right) = \mathbb{P}\left(|U| < \frac{1}{5}\sqrt{n}\right) \quad (34)$$

definindo $V = \frac{n}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2$, sabemos que $V \sim X_{n-1}^2$, então

$$\begin{aligned} p_2 &= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{5}\sigma \leq \hat{\sigma} - \sigma \leq \frac{1}{5}\sigma\right) = \mathbb{P}\left(\frac{4}{5}\sigma \leq \hat{\sigma} \leq \frac{6}{5}\sigma\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{16}{25}\sigma^2 \leq \hat{\sigma}^2 \leq \frac{36}{25}\sigma^2\right) = \mathbb{P}\left(\frac{16}{25}n \leq V \leq \frac{36}{25}n\right) \end{aligned} \quad (35)$$

e como $V \sim X_{n-1}^2$, basta consultar uma tabela ou um software para descobrir esses quantis

Distribuições t

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1) \quad (36)$$

Porém, podemos não saber σ e queremos substituir, por exemplo, por seu EMV, então qual seria a distribuição de

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\hat{\sigma}} \quad (37)$$

Definição 4.1 (Distribuição t com m graus de liberdade): Se $Z \sim N(0, 1)$ e $Y \sim X_m^2$, então

$$X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{m}}} \sim t_m \quad (38)$$

onde dizemos t com m graus de liberdade

Teorema 4.1 (PDF): A pdf de $X \sim t_m$ é:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{(m\pi)^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{m}\right)^{-(m+1)/2} \quad (39)$$

Demonstração: Lembrando: $Y \sim X_m^2$ e $Z \sim N(0, 1)$. Vamos aplicar as transformações! Sabemos que:

$$f_{XW}(x, w) = f_{YZ}(y, z) \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(x, w)} \right| \quad (40)$$

então denotando $W = Y$, temos:

$$Z = X \left(\frac{W}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad Y = W \quad (41)$$

Então vamos ter que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial y}{\partial w} &= 1 \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \left(\frac{w}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (42)$$

então vamos ter que

$$\left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(x, w)} \right| = - \left(\frac{w}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
f_{XW}(x, w) &= f_{WZ}(w, z) \left(\frac{w}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= f_W(w) f_Z(z) \left(\frac{w}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Independência de Y e Z}) \\
&= f_W(w) f_Z \left(x \left(\frac{w}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{w}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \underbrace{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} w^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}w}}_{f_W(w)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2 w}{2m}}}_{f_Z(z)} \left(\frac{w}{m} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{44}$$

reescrevendo para ficar algo mais limpo e unir os termos comuns:

$$f_{XW}(x, w) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sqrt{2\pi m}} w^{\frac{m-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{m}\right)w\right\} \tag{45}$$

Agora, para obtermos a marginal de X , precisamos integrar isso tudo com relação a w . Porém, basta integrarmos aquilo que é em função apenas de w , as constantes nós podemos adicionar novamente depois, então:

$$f_X(x) \propto \int_0^\infty w^{\frac{m-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{m}\right)w\right\} dw \tag{46}$$

Se definirmos $\alpha = \frac{m+1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{m}\right)$, então a integral equivale a:

$$f_X(x) \propto \int_0^\infty w^{\alpha-1} e^{-\beta w} dw = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\left[1 + \frac{x^2}{m}\right]\right)^{(m+1)/2}} \tag{47}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sqrt{2\pi m}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\left[1 + \frac{x^2}{m}\right]\right)^{-(m+1)/2} \tag{48}$$

juntando tudo, temos:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{m\pi} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{m}\right)^{-(m+1)/2} \tag{49}$$

□

4.1 Propriedades

Teorema 4.1.1: Se $T \sim t_m$, então:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T] &= 0 \quad (m > 1) \\
\mathbb{V}[T] &= \frac{m}{m-2} \quad (m > 2)
\end{aligned} \tag{50}$$

Demonstração: Seja $Z \sim N(0, 1)$ e $W \sim X_m^2$, sabemos que

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{m}}} \sim t_m \quad (51)$$

porém, temos que $T|W = w \sim N(0, \frac{m}{w})$, logo:

$$\mathbb{E}[T|W = w] = 0 \quad (52)$$

pela lei de adão:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[T|W = w]] = \mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[0] = 0 \quad (53)$$

No mesmo raciocínio, lembrando a lei de EVA

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[X] &= \mathbb{E}[\mathbb{V}[X|Y]] + \mathbb{V}[\mathbb{E}[X|Y]] \\ \Rightarrow \mathbb{V}[T] &= \mathbb{E}[\mathbb{V}[T|W]] + \mathbb{V}[\mathbb{E}[T|W]] \end{aligned} \quad (54)$$

sabemos que $\mathbb{E}[T|W] = 0$, então basta calcularmos $\mathbb{V}[T|W]$ que, como vimos antes, vai ser $\frac{W}{m}$, então:

$$\mathbb{V}[T] = \mathbb{E}\left[\frac{W}{m}\right] \quad (55)$$

Sabemos que W é uma $\Gamma(\frac{m}{2}, \frac{1}{2})$, então W^{-1} é uma Gamma Inversa, logo, sua média vai ser:

$$\mathbb{E}[W^{-1}] = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{m}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{m-2}{2}} = \frac{1}{m-2} \quad (56)$$

logo:

$$\mathbb{V}[T] = \frac{m}{m-2} \quad (57)$$

□

Teorema 4.1.2 (Divergência dos Momentos): Se $T \sim t_m$, então $\mathbb{E}[|T|^p]$ diverge se $p \geq m$. Se m é inteiro, então apenas os $m - 1$ primeiros momentos existem

Teorema 4.1.3: Sejam $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $\sigma' = \left(\frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X}_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, então

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma'} \sim t_{n-1} \quad (58)$$

Demonstração: Defina $S_n^2 = \sum (X_i - \bar{X}_n)^2$, $Z = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma$ e $Y = S_n^2/\sigma^2$. Sabemos que Y e Z são independentes e $Y \sim \chi_{n-1}^2$. Definimos então:

$$U = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n-1}}} \quad (59)$$

que é uma t_{n-1} por definição. Porém, perceba que:

$$U = \frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{S_n^2}{n-1}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma'} \quad (60)$$

□

Essa propriedade é interessante, pois saímos de variáveis que dependiam diretamente de σ para uma variável que tem distribuição que **não depende** de σ

Teorema 4.1.4: Uma distribuição t_1 é equivalente a uma distribuição de *Cauchy*

Definição 4.1.1 (Distribuição de Cauchy): Se $X \sim \text{Cauchy}(x_0, \gamma)$, então temos:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]} \quad (61)$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2} \quad (62)$$

Além do fato que:

$$\mathbb{E}[|X|^k] = \infty \quad \forall k \quad (63)$$

Intervalos de Confiança

Essa é uma parte que costuma gerar bastante confusão! Intervalos de confiança adicionam mais informações a um estimador $\hat{\theta}$ quando não conhecemos o θ , de forma que podemos encontrar um intervalo $[A, B]$ com alta probabilidade de conter θ

5.1 Intervalo de Confiança para a média de uma Normal

Dada a amostra $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, sabemos que $U = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma' \sim t_{n-1}$. Eu gostaria de achar um intervalo no qual eu tenho uma chance boa de encontrar minha média, então eu gostaria de algo do tipo:

$$\mathbb{P}(-c < U < c) = \gamma \quad (64)$$

O método mais comum é calcular diretamente o c que torna a equação (64) verdadeira. Isso é equivalente a dizer:

$$\mathbb{P}\left(\bar{X}_n - \frac{c\sigma'}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + \frac{c\sigma'}{\sqrt{n}}\right) = \gamma \quad (65)$$

Vale ressaltar que essa probabilidade é referente a distribuição conjunta de \bar{X}_n e σ' para valores **fixos** de μ e σ (Independentemente de sabermos eles ou não). Então vamos tentar achar o c que satisfaz isso

$$\mathbb{P}(-c < U < c) = \gamma \Leftrightarrow T_{n-1}(c) - T_{n-1}(-c) = \gamma \quad (66)$$

Pela simetria de t em 0, posso reescrever como:

$$2T_{n-1}(c) - 1 = \gamma \Rightarrow c = T_{n-1}^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \quad (67)$$

Então, depois que descobrimos c , nosso intervalo de confiança vira:

$$\begin{aligned} A &= \bar{X}_n - \frac{\sigma'}{\sqrt{n}} T_{n-1}^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \\ B &= \bar{X}_n + \frac{\sigma'}{\sqrt{n}} T_{n-1}^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \end{aligned} \quad (68)$$

Dada essa noção inicial, vamos definir formalmente esses intervalos:

Definição 5.1.1 (Intervalo de confiança): Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ uma amostra de uma distribuição indexada pelo(s) parâmetro(s) θ e seja $g(\theta) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Seja também A e B duas estatísticas ($A \leq B$) que satisfazem:

$$\mathbb{P}(A < g(\theta) < B) \geq \gamma \quad (69)$$

O intervalo aleatório (A, B) é chamado de intervalo de confiança γ para $g(\theta)$ ou de intervalo de confiança $100\gamma\%$ para $g(\theta)$. Depois que X_1, \dots, X_n foi observado e o intervalo $A = a$ e $B = b$ foi computado, chamamos o valor observado do intervalo de **valor observado do intervalo de confiança**. Se a equação (69) vale a igualdade $\forall c \in (A, B)$, então chamamos esse intervalo de **exato**

Aqui eu vou definir melhor a interpretação com relação a essa definição, que pode ser um pouco confusa. A interpretação do intervalo A, B em si é bem direta, representa um intervalo **aleatório** que tem probabilidade γ de conter $g(\theta)$. Porém, ao observamos as amostras e calcularmos $A = a$ e $B = b$, o intervalo (a, b) **não necessariamente contém $g(\theta)$ com probabilidade γ** , como assim? Lembra que (A, B) é um intervalo **aleatório**, enquanto (a, b) é uma das muitas possíveis ocorrências desse intervalo! A interpretação correta é, que quanto mais repetimos o experimento e computamos (a, b) e armazenamos

esses valores observados de intervalo, uma fração γ deles contém $g(\theta)$, porém, **não sabemos dizer quais contém e quais não contém**

Teorema 5.1.1: Dada a amostra $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$. $\forall \gamma \in [0, 1]$, o intervalo (A, B) com seguintes pontos:

$$\begin{aligned} A &= \bar{X}_n - \frac{\sigma'}{\sqrt{n}} T_{n-1}^{-1} \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) \\ B &= \bar{X}_n + \frac{\sigma'}{\sqrt{n}} T_{n-1}^{-1} \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) \end{aligned} \quad (70)$$

é um intervalo de confiança γ -exato

5.2 Intervalos de Confiança Unilaterais

Nós vimos como encontrar intervalos aleatórios (A, B) que tem probabilidade γ de conter o parâmetro θ , porém, podem acontecer situações que apenas obter um limite superior ou inferior seja suficiente para nós

Dados γ_1 e γ_2 com $\gamma_2 > \gamma_1$ e $\gamma_2 - \gamma_1 = \gamma$, então:

$$\mathbb{P}(T_{n-1}^{-1}(\gamma_1) < U < T_{n-1}^{-1}(\gamma_2)) = \gamma \quad (71)$$

E então obtemos que, perante todos os intervalos aleatórios possíveis, o intervalo de confiança γ com o menor tamanho é o simétrico

$$\gamma_1 = 1 - \gamma_2 \quad (72)$$

Porém, há casos que um intervalo não-simétrico é útil (Como mencionei o caso anterior de apenas limites superiores ou inferiores)

Definição 5.2.1 (Intervalo de Confiança Generalizado): Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ uma amostra de uma distribuição parametrizada por θ . Seja $g(\theta) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e seja A uma estatística tal que:

$$\mathbb{P}(A < g(\theta)) \geq \gamma \quad \forall \theta \quad (73)$$

Então o intervalo aleatório $(A, +\infty)$ é chamado de intervalo de confiança unilateral γ de limite inferior A . A mesma definição vale para a estatística B tal que:

$$\mathbb{P}(g(\theta) < B) \geq \gamma \quad (74)$$

Então o intervalo aleatório $(-\infty, B)$ é chamado de intervalo de confiança unilateral γ de limite superior B . Se a desigualdade " $\geq \gamma$ " é uma igualdade para todo θ , então tanto o intervalo quanto os limites são chamados de exatos

Teorema 5.2.1 (Intervalo unilateral da média da normal): Seja $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, as estatísticas a seguir são, respectivamente, limites inferior e superior exatos com coeficiente γ para μ :

$$\begin{aligned} A &= \bar{X}_n - T_{n-1}^{-1}(\gamma) \frac{\sigma'}{\sqrt{n}} \\ B &= \bar{X}_n + T_{n-1}^{-1}(\gamma) \frac{\sigma'}{\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (75)$$

5.3 Intervalo de confiança para outros parâmetros

Até agora, só vimos a aplicação de intervalos de confiança para a distribuição normal, mas por quê? Pois a normal possui propriedades que tornam encontrar os intervalos de confiança mais fáceis, como por exemplo, encontrarmos estatísticas (Por exemplo $T = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma'$) que não dependem do parâmetro que queremos estimar, e isso na verdade é uma definição útil que pode nos ajudar:

Definição 5.3.1 (Pivô): Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ uma amostra de uma distribuição parametrizada por θ e $V(\theta, \underline{X})$ uma variável aleatória tal que sua distribuição **não depende de θ** e é a mesma $\forall \theta$, então chamamos $V(\theta, \underline{X})$ de **quantidade pivotal** ou **pivô**

Podemos então utilizar dessa definição para construir intervalos de confiança. Porém, para isso, precisamos de uma “função inversa” desse V , algo do tipo:

$$r(V(\theta, \underline{X}), \underline{X}) = g(\theta) \quad (76)$$

Teorema 5.3.1: Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ uma amostra de uma distribuição parametrizada por θ . Suponha que existe um pivô V . Seja $F_V(v)$ a CDF de V e contínua. Assuma também que a função r tal qual a equação (76) existe e é estritamente crescente em v para cada \underline{x} . Seja $\gamma \in (0, 1)$ e $\gamma_2 > \gamma_1$ tal que $\gamma_2 - \gamma_1 = \gamma$, então as seguintes estatísticas são endpoints de um intervalo de confiança γ -exato para $g(\theta)$

$$\begin{aligned} A &= r(F_V^{-1}(\gamma_1), \underline{x}) \\ B &= r(F_V^{-1}(\gamma_2), \underline{x}) \end{aligned} \quad (77)$$

Se r é estritamente decrescente, então invertamos A e B

Demonstração: Se $r(\theta, \underline{x})$ é estritamente crescente em v para todo \underline{x} , então:

$$V(\theta, \underline{X}) < c \Leftrightarrow g(\theta) < r(c, \underline{X}) \quad (78)$$

Defina $c = F_V^{-1}(\gamma_i)$ para $i = 1, 2$, então obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(g(\theta) < A) &= \gamma_1 \\ \mathbb{P}(g(\theta) < B) &= \gamma_2 \end{aligned} \quad (79)$$

Como V tem distribuição contínua e r é estritamente crescente, então:

$$\mathbb{P}(A = g(\theta)) = \mathbb{P}(V(\theta, \underline{X}) = F_V^{-1}(\gamma_1)) = 0 \quad (80)$$

Similarmente com $\mathbb{P}(B = g(\theta))$, então combinamos as duas equações na equação (79) para obter $\mathbb{P}(A < g(\theta) < B) = \gamma$ \square

Exemplo 5.3.1: Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 desconhecidos. Vimos anteriormente que:

$$V(\theta, \underline{X}) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \sim \chi^2_{n-1} \quad \forall \theta = (\mu, \sigma^2) \quad (81)$$

Logo, V é um pivô, de forma que conseguimos utilizá-lo para achar intervalos de confiança para σ^2 . Porém é bem comum que o pivô não exista em casos discretos

Exemplo 5.3.2: Seja θ a proporção de sucessos em uma população muito grande de pacientes tratados com imipramina. Suponha que os clínicos desejem uma variável aleatória A tal que, para todo θ , tenhamos

$$\Pr(A < \theta) \geq 0.9 \quad (82)$$

Isto é, eles querem ter **90% de confiança** de que a proporção de sucesso seja **pelo menos A** . Os dados observáveis consistem no número X de sucessos em uma amostra aleatória de $n = 40$ pacientes. Nenhuma variável pivotal existe neste exemplo, e os intervalos de confiança são mais difíceis de construir

Análise Bayesiana de Amostras Normais

Nesse capítulo, vamos fazer uma análise bayesiana completa quando o problema trata de amostras de uma distribuição **Normal**. Para facilitar algumas contas, vamos trocar a definição usual com variância para a definição com **precisão**

Definição 6.1 (Precisão): A precisão de uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ é

$$\tau = \frac{1}{\sigma^2} \quad (83)$$

Teorema 6.1 (Densidade da Normal): Seja $X \sim N(\mu, \tau)$, temos que a **função de densidade probabilística** de X é:

$$f(x|\mu, \tau) = \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\tau}{2}(x - \mu)^2\right) \quad (84)$$

Corolário 6.1.1 (*Likelihood*): Sejam $X_1, \dots, X_n | \mu, \tau \sim N(\mu, \tau)$, temos que a função de verossimilhança é dada por:

$$f(\underline{x}|\mu, \tau) = \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tau \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right) \quad (85)$$

6.1 Família de Conjugados

Teorema 6.1.1 (Família de Conjugados): Suponha que $X_1, \dots, X_n | \mu, \tau \sim N(\mu, \tau)$ e temos que $\mu | \tau \sim N(\mu_0, \lambda_0 \tau_0)$ e $\tau \sim \Gamma(\alpha_0, \beta_0)$, então a posteriori de μ e τ $[p(\mu, \tau | \underline{x})]$ é:

$$\begin{aligned} \mu, \tau | \underline{x} &\sim N(\mu_1, \lambda_1 \tau) \\ \mu_1 &= \frac{\lambda_0 \mu_0 + n \bar{x}_n}{\lambda_0 + n} \quad \lambda_1 = \lambda_0 + n \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \tau &\sim \Gamma(\alpha_1, \beta_1) \\ \alpha_1 &= \alpha_0 + \frac{n}{2} \quad \beta_1 = \beta_0 + \frac{1}{2} s_n^2 + \frac{n \lambda_0 (\bar{x}_n - \mu_0)^2}{2(\lambda_0 + n)} \end{aligned} \quad (87)$$

Essa família de conjugados é chamada de NormalGamma com parâmetros α_0, β_0, μ_0 e λ_0 , de forma que a posteriori de μ, τ é a NormalGamma com parâmetros α_1, β_1, μ_1 e λ_1 . Vale lembrar também que:

$$p(\mu, \tau) \propto p(\mu | \tau) p(\tau) \quad (88)$$

Outro ponto é que μ e τ **não** são independentes, e mesmo que a gente escolha eles de forma que eles sejam independentes a priori, mesmo após uma única observação, eles já viram dependentes

6.2 Marginais

Nós encontramos as distribuições de $\mu, \tau, \mu | \tau$ e τ , porém, qual seria a marginal de μ ?

Teorema 6.2.1 (Marginal de μ): Suponha que $\mu, \tau \sim \text{NormalGamma}(\mu_0, \lambda_0, \alpha_0, \beta_0)$, então:

$$\left(\frac{\lambda_0 \alpha_0}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{2}} (\mu - \mu_0) \sim t_{2\alpha_0} \quad (89)$$

Demonstração: $\mu|\tau \sim N(\mu_0, \lambda_0 \tau)$, então temos que:

$$\mathbb{V}[\mu|\tau] = \frac{1}{\lambda_0 \tau} \Rightarrow (\mu - \mu_0) \cdot (\lambda_0 \tau)^{\frac{1}{2}} \sim N(0, 1) \quad (90)$$

Então seja $p(\tau)$ a marginal de τ e $p(\mu|\tau)$ a pdf condicional de μ em τ

$$p(z, \tau) = \underbrace{(\lambda_0 \tau)^{-\frac{1}{2}} \cdot p\left(\mu = (\lambda_0 \tau)^{-\frac{1}{2}} z + \mu_0 \mid \tau\right)}_{\Phi(z) \rightarrow \text{pdf da } N(0,1)} p(\tau) \quad (91)$$

Como eu consigo exprimir $p(z, \tau)$ como a multiplicação de suas marginais, isso significa que z e τ são **independentes**. Definimos então $Y = 2\beta_0 \tau \Rightarrow Y \sim \Gamma(\alpha_0, \frac{1}{2}) \sim X_{2\alpha_0}^2$. Ou seja, vamos ter que:

$$U = \frac{Z}{\left(\frac{Y}{2\alpha_0}\right)^{\frac{1}{2}}} \sim t_{2\alpha_0} = \frac{(\lambda_0 \tau)^{\frac{1}{2}} (\mu - \mu_0)}{\left(\frac{2\beta_0 \tau}{2\alpha_0}\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{\lambda_0 \alpha_0}{\beta_0}\right)^{\frac{1}{2}} (\mu - \mu_0) \quad (92)$$

□

Por conta disso, obtemos o seguinte

Corolário 6.2.1.1 (*Propriedades da Marginal de μ*): Se $\alpha_0 > \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{E}[\mu] = \mu_0$. Se $\alpha_0 > 1 \Rightarrow \mathbb{V}[\mu] = \frac{\beta_0}{\lambda_0(\alpha_0 - 1)}$

6.3 Distribuições Impróprias

Utilizamos esses parâmetros mais por conveniência do que por qualquer outro motivo (Como uma convicção). Para a posteriori, utilizamos os seguintes hiperparâmetros:

$$\alpha_0 = -\frac{1}{2} \quad \beta_0 = 0 \quad \mu_0 = 0 \quad \lambda_0 = 0 \quad (93)$$

assim, obtemos as seguintes pdf's **a priori**:

$$p(\mu) = 1 \quad p(\tau) = \frac{1}{2} \tau^{-1} \quad p(\mu, \tau) = \frac{1}{\tau} \quad (94)$$

Dessa forma, a posteriori fica:

$$p(\mu, \tau) \propto \left\{ \tau^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{n\pi}{2}(\mu - \bar{x}_n)^2\right] \right\} \tau^{\frac{n-1}{2}-1} \exp\left[-\tau \frac{s_n^2}{2}\right] \quad (95)$$

Estimadores não-vieizados

Nosso principal objetivo quando estamos fazendo inferência é fazer um estimador $\delta(\underline{X})$ de $g(\theta)$ que a distribuição se concentra bem próximo de θ , ou seja, na maior parte do tempo, os valores retornados pelo estimador são próximos do verdadeiro valor de $g(\theta)$. É com esse objetivo que criamos estimadores **não-viesados**

Definição 7.1 (Estimador não-viezado): Um estimador $\delta(\underline{X})$ é não-viezado para $g(\theta)$ se $\mathbb{E}_\theta[\delta(\underline{X})] = g(\theta) \forall \theta$

Definição 7.2 (Viés): O viés de um estimador $\delta(\underline{X})$ tem o seu **viés** definido como

$$\text{Bias}(g(\theta)) = \mathbb{E}_\theta[\delta(\underline{X})] - g(\theta) \quad (96)$$

Porém, um estimador **não-viezado** não significa que ele é um **bom** estimador ou sequer um estimador viável para a situação. Por exemplo, um estimador que subestima $g(\theta)$ em 1000 unidades ou superestima vai ser não-viezado, mas sempre retornará valores ruins de aproximação frequentemente. Então para um estimador ser **bom**, ele necessita ter uma baixa variância

Teorema 7.1: Seja δ um estimador de variância finita, então $\mathbb{E}_\theta[(\delta - g(\theta))^2] = \mathbb{V}_\theta[\delta] + (\text{Bias}(\delta, g(\theta)))^2$

7.1 Estimador não-viezado da Variância

Teorema 7.1.1: Seja X_1, \dots, X_n uma amostra de uma distribuição indexada por θ e $\mathbb{V}[X_i] = \sigma^2$, então o seguinte estimador é não-viezado:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \quad (97)$$

Demonstração: Vamos utilizar do fato que:

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 + n(\bar{X}_n - \mu)^2 \quad (98)$$

Então vamos ter que (Tirando a esperança nos dois lados da equação mostrada anteriormente):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\sigma}_0^2] &= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} \\ &= \frac{n-1}{n} \sigma^2 \end{aligned} \quad (99)$$

logo, vamos ter que:

$$\frac{n}{n-1} \mathbb{E}[\hat{\sigma}_0^2] = \mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2 \quad (100)$$

□

Esse estimador citado agora é chamado de **variância amostral** em diversas literaturas (No livro do DeGroot, a variância amostral é o estimador com $1/n$)

7.2 Limitações

- Muitas vezes os estimadores não-viesados possuem uma variância maior que os estimadores viesados, um bom exemplo é que $\mathbb{V}[\hat{\sigma}^2] \geq \mathbb{V}[\hat{\sigma}_0^2]$
- Não há garantia que estimadores não-viesados existam em toda situação. Um exemplo é que, se $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bern}(p)$, não existe estimador **não-viesado** de \sqrt{p}
- Estimadores inapropriados, mesmo sendo não-viesados. Por exemplo, se eu tenho uma sequência de bernoullis, e tentar estimar p pela quantidade de erros até o primeiro sucesso X (Geométrica). O estimador não viesado seria:

$$\delta(X) = \begin{cases} 1 & \text{se } X = 0 \\ 0 & \text{se } X = 1 \end{cases} \quad (101)$$

- Os estimadores podem ignorar informações. Se você for medir a votagem de um sistema com um multímetro, e ele retornar 2.5, então podemos pensar que θ é 2.5, mas e se o multímetro arredonda tudo que é maior que 3 para 3? Isso muda completamente a distribuição da informação

Análise e Teste de Hipóteses

De acordo com Natalia Pasternak, presidente do Instituto Questão de Ciência, a ciência pode ser definida como um processo de investigação que leva em conta experimento e observação da natureza, e a partir deles tirar **conclusões provisórias** de acordo com as evidências. Vamos supor que, ao fazermos um experimento, comprovamos a hipótese que estávamos analisando. Ao escrever o artigo científico, é correto afirmar que a nossa hipótese é verdadeira? **Não!** Pois ela foi comprovada em **nosso** estudo, sob as **nossas** condições, com as **nossas** amostras, mas dizer que nossa hipótese está confirmada/rejeitada apenas com o **nosso** estudo é muito subjetivo, então é aí que entra a estatística com a **Análise e Teste de Hipóteses**

8.1 Hipóteses Nula e Alternativa

Nós temos $\theta \in \Omega$ e vamos particionar o espaço em dois conjuntos disjuntos Ω_0 e Ω_1 e queremos testar as duas hipóteses:

$$H_0 : \theta \in \Omega_0 \quad H_1 : \theta \in \Omega_1 \quad (102)$$

Definição 8.1.1: H_0 é chamada de **hipótese nula** e H_1 a **hipótese alternativa**. Se decidirmos que $\theta \in \Omega_1$, então nós **REJEITAMOS** H_0 , se $\theta \in \Omega_0$, nós **NÃO REJEITAMOS** H_0

Ué, porque não falamos que **aceitamos** a hipótese H_0 ? Esse modo de visualizar o teste de hipóteses foi popularizado por Ronald Fisher, Jerzy Neyman e Egon Pearson. Essa visualização de assemelha muito ao sistema jurídico, onde seguimos o princípio da presunção de inocência:

- **Hipótese Nula H_0 :** Representa o status quo, a crença estabelecida, o “nenhum efeito” ou a “igualdade”. É a hipótese que se presume verdadeira até que haja evidência estatística suficiente para o contrário. (Ex: “O réu é inocente”)
- **Hipótese Alternativa (H_1):** É a afirmação que o pesquisador está tentando encontrar evidências para suportar. (Ex: “O réu é culpado.”)

Ou seja, o teste foca em coletar dados que são **inconsistentes** a H_0 . Vamos tentar esclarecer com um exemplo. Você quer saber se uma nova dieta reduziu o peso médio dos participantes.

- H_0 : O peso médio não mudou (o efeito da dieta é zero).- H_1 : O peso médio diminuiu.

Se os dados mostrarem uma grande redução de peso, você rejeita a H_0 e conclui que a dieta funcionou. Se os dados mostrarem apenas uma pequena redução, ou um aumento, você não rejeita a H_0 . Você conclui: “Os dados não fornecem evidência suficiente para dizer que a dieta reduziu o peso.” Você não conclui: “A dieta definitivamente não teve efeito.”

Exemplo 8.1.1 (Exemplo simples): Temos uma hipótese principal que é “Correr é diminuir/intensificar os sintomas da depressão”, então vamos dividir essa hipótese geral nas duas hipóteses que mencionamos anteriormente

- H_0 : Correr não afeta em nada os sintomas da depressão
- H_1 : Correr diminui/intensifica os sintomas da depressão

Dividimos assim pois, até o momento, queremos comprovar que correr tem algum efeito nos sintomas da depressão, e enquanto não o comprovarmos, assumimos que a atividade física não faz efeito

Definição 8.1.2 (Hipótese Simples e Composta): Se Ω_i contém apenas 1 valor de θ , então H_i é simples. Se Ω_i contém mais que um valor, então H_i é composta

Quando a hipótese é simples, a distribuição das observações é bem especificada. Já sob hipóteses compostas, dizemos que eles pertencem a uma classe. Uma hipótese nula simples tem a forma:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad (103)$$

Definição 8.1.3 (Hipótese unilateral e multilateral): Seja $\theta \in R$, hipóteses nulas unidimensionais são da forma $H_0 : \theta \leq \theta_0$ ou $H_0 : \theta \geq \theta_0$. Já hipóteses nulas simples ($H_0 : \theta = \theta_0$) tem hipóteses multilaterais alternativas ($H_1 : \theta \neq \theta_0$)

8.2 Região Crítica e Testes Estatísticos

Considere o problema de testar as hipóteses:

$$H_0 : \theta \in \Omega_0 \quad H_1 : \theta \in \Omega_1 \quad (104)$$

Seja $\underline{X} = [X_1, \dots, X_n]$ uma amostra indexada por θ desconhecido e S o conjunto de **todas as saídas possíveis de \underline{X}** . Um estatístico pode especificar um procedimento de teste particionando S em dois grupos, onde S_1 contém os valores de \underline{X} onde H_0 será rejeitada e S_0 os valores que H_0 não é rejeitada

Definição 8.2.1 (Região Crítica): O conjunto S_1 é chamado de **região crítica**

Na maioria dos problemas, S_1 é definido usando uma estatística $T = r(\underline{X})$

Definição 8.2.2 (Estatística de Teste e Região de Rejeição): Seja $T = r(\underline{X})$ uma estatística e $R \subset \mathbb{R}$. Suponha que o procedimento de teste das hipóteses seja de forma “Rejeite H_0 se $T \in R$ ”, então T é uma **estatística de teste** e R é a **região de rejeição**

Se definirmos o teste em termos de T e R como na definição, então a região crítica é:

$$S_1 := \{\underline{x} | r(\underline{x}) \in R\} \quad (105)$$

Exemplo 8.2.1: Ainda na linha de raciocínio do exemplo da atividade física pro combate na depressão, vamos supor que definimos o procedimento δ como:

“Rejeite H_0 (Correr não afeta os sintomas da depressão) se o número de pessoas com os sintomas afetados for maior que um valor c ”

Então podemos definir a estatística de teste como \bar{X} e a região de rejeição é $R \subset \mathbb{R}$ com os valores reais maiores que c . Logo, a região crítica é dada por:

$$S_1 := \{\underline{x} | \bar{X} \in R\} \quad (106)$$

8.3 Função de Poder e Tipos de Erro

Seja δ um procedimento de teste como definimos antes

Definição 8.3.1 (Função de Poder): A função $\pi(\theta|\delta)$ é chamada de **função de poder**. Se S_1 é a região crítica de δ , então:

$$\pi(\theta|\delta) = \mathbb{P}(\underline{X} \in S_1 | \theta) \text{ ou } \mathbb{P}(T \in R | \theta) \quad (107)$$

Ou seja, é a probabilidade de que a minha amostra esteja na região crítica dado os meus parâmetros, ou seja, a probabilidade de que vou rejeitar H_0 . A função de poder especial é aquela que:

$$\begin{aligned}\pi(\theta|\delta) &= 0 & \forall \theta \in \Omega_0 \\ \pi(\theta|\delta) &= 1 & \forall \theta \in \Omega_1\end{aligned}\tag{108}$$

Lembrando: Para cada valor $\theta \in \Omega_0$, rejeitar H_0 é uma decisão **incorreta** e o mesmo para cada valor $\theta \in \Omega_1$ e não rejeitar H_0

Definição 8.3.2 (Tipos de Erro): A decisão errônea de rejeitar uma hipótese nula **verdadeira** é de **Tipo I** (ou primeira ordem). Uma decisão errônea de **não rejeitar** uma hipótese nula **falsa** é chamada de **Tipo II** (ou segunda ordem)

	Aceitar a hipótese nula	Rejeitar a hipótese nula
Hipótese nula é verdadeira	✓	Erro de Tipo I
Hipótese nula é falsa	Erro de Tipo II	✓

Se $\theta \in \Omega_0$, $\pi(\theta|\delta)$ é a probabilidade de cometermos um erro de Tipo I, já que ele representa a probabilidade de que a amostra esteja na região crítica (rejeitar H_0) e, se $\theta \in \Omega_1$, $1 - \pi(\theta|\delta)$ é a probabilidade de cometermos um erro de Tipo II. No geral, queremos achar δ tal que $\pi(\theta|\delta)$ seja baixo para $\theta \in \Omega_0$ e alto para $\theta \in \Omega_1$, já que isso representa diminuir a probabilidade de cometer cada um dos erros.

Um método muito usado é escolher $\alpha_0 \in (0, 1]$ tal que:

$$\pi(\theta|\delta) \leq \alpha_0 \quad \forall \theta \in \Omega_0\tag{109}$$

e depois procurar o teste que **maximiza** $\pi(\theta|\delta)$ satisfazendo a condição (para $\theta \in \Omega_1$)

Definição 8.3.3 (Tamanho de um Teste): Um teste que satisfaz a equação (109) é chamado de **teste de nível α_0** e que o teste tem nível de significância α_0 . O tamanho $\alpha(\delta)$ de um teste δ é definido por:

$$\alpha(\delta) = \sup_{\theta \in \Omega_0} \pi(\theta|\delta)\tag{110}$$

Ou seja, o tamanho de um teste é a maior probabilidade de cometermos um erro de **Tipo I** possível (já que fazemos o supremo dentre todos os valores de Ω_0) e um teste ter nível de significância α_0 significa que, independente de qual parâmetro de H_0 seja o verdadeiro da distribuição, a chance de cometermos um erro de **Tipo I** sempre será menor que α_0

Corolário 7.1.1.1: Um teste δ é de nível $\alpha_0 \Leftrightarrow \alpha(\delta) \leq \alpha_0$

Se a hipótese nula é simples ($H_0 : \theta = \theta_0$), então $\alpha(\delta) = \pi(\theta_0|\delta)$

8.4 Induzindo um nível de significância

Nós queremos testar:

$$\begin{aligned}H_0 : \theta &\in \Omega_0 \\ H_1 : \theta &\in \Omega_1\end{aligned}\tag{111}$$

Seja T uma estatística e suponha que vamos rejeitar H_0 se $T \geq c$. Vamos supor que queremos que nosso teste tenha um nível específico de significância α_0 . Temos:

$$\pi(\theta|\delta) = \mathbb{P}(T \geq c|\theta) \quad \underbrace{\rightarrow}_{\text{Queremos}} \quad \sup_{\theta \in \Omega_0} \mathbb{P}(T \geq c|\theta) \leq \alpha_0\tag{112}$$

perceba que o lado direito é não-crescente em c , então a desigualdade é satisfeita para altos valores de c , então devemos fazer c o menor possível sem que a desigualdade seja desfeita, e também queremos que $\pi(\theta|\delta)$ seja o maior possível para $\theta \in \Omega_1$. Quando T tem distribuição contínua, costuma ser fácil achar um c apropriado

8.5 p-valor

Definição 8.5.1 (p-valor): O p-valor é o menor nível α_0 ao qual rejeitaríamos a hipótese nula no nível α_0 **com os dados observados**. Também chamamos o p-valor de **nível de significância observado**

É o que, macho? Essa definição está muito objetiva e densa, então simplificando um pouco: p-valor é a **probabilidade** de se obter o padrão de resultados que encontramos no nosso estudo ou resultados mais extremos, **considerando a hipótese nula como verdadeira**. Vamos supor que observamos uma amostra \underline{x} e não fixamos um valor α para rejeitarmos H_0 , então nos perguntamos “Qual é o menor nível para o qual esses dados ainda seriam considerados extremos o suficiente para rejeitar H_0 ?”. Então o p-valor segue uma linha diferente do procedimento de teste estabelecido anteriormente. Original:

- Escolhemos um nível α
- Define-se a **região crítica** associada a esse α
- Calcula-se a estatística de teste
- Verificamos se ela cai na região crítica

Agora nós invertemos a lógica

- Em vez de fixar um α , vamos perguntar “rejeito ou não?”
- Fixamos os dados
- Para quais valores de α eu rejeitaria? O menor desses será meu p-valor

Mas por que essa definição é útil? Usamos isso pois, se eu faço um teste em um nível α_0 e rejeito H_0 , simplesmente dizer que rejeitei H_0 no nível α_0 parece vago. Isso não diz o quão perto estávamos de tomar a outra decisão.

Um experimentador que rejeita a hipótese nula \Leftrightarrow o p-valor é no máximo α_0 , está usando um teste de significância α_0

8.6 Calculando p-valores

Se nossos testes são da forma “Rejeite H_0 quando $T \geq c$ ” para uma única estatística de teste, tem um jeito direto de calcular p-valores. Para cada t , deixe δ_t o teste que rejeita H_0 quando $T \geq t$. Então o p-valor quando $T = t$ é observado é o tamanho do teste δ_t , ou seja, o p-valor é:

$$\sup_{\theta \in \Omega_0} \pi(\theta|\delta_t) = \sup_{\theta \in \Omega_0} \mathbb{P}(T \geq t|\theta) \quad (113)$$

8.7 Equivalência de testes e conjuntos de confiança

Os teoremas a seguir mostram a equivalência de intervalos e conjuntos de confiança (o nome é bem intuitivo). Intuitivamente, um intervalo de confiança é um tipo específico de conjunto de confiança (com um tipo específico de regra)

Teorema 8.7.1: Seja $\underline{X} = [X_1, \dots, X_n]$ uma amostra de uma distribuição indexada por um parâmetro θ . Seja $g(\theta)$ uma função e suponha que para todo possível valor g_0 de $g(\theta)$, existe um teste δ_{g_0} de nível α_0 da hipótese

$$\begin{aligned} H_{0,g_0} : g(\theta) &= g_0 \\ H_{1,g_0} : g(\theta) &\neq g_0 \end{aligned} \quad (114)$$

Para cada possível valor de \underline{x} de \underline{X} , defina:

$$\omega(\underline{x}) = \{g_0 | \delta_{g_0} \text{ não rejeita } H_{0,g_0} \text{ se } \underline{X} = \underline{x} \text{ é visto}\} \quad (115)$$

e seja $\gamma = 1 - \alpha_0$, então o conjunto aleatório $w(\underline{X})$ satisfaz

$$\mathbb{P}(g(\theta_0) \in \omega(\underline{X}) | \theta = \theta_0) \geq \gamma \quad \forall \theta_0 \in \Omega \quad (116)$$

Demonstração: Seja $\theta_0 \in \Omega$ um elemento arbitrário e defina $g_0 = g(\theta_0)$. Como δ_{g_0} é um teste de nível α_0 , sabemos que:

$$\mathbb{P}(\delta_{g_0} \text{ não rejeitar } H_{0,g_0} | \theta = \theta_0) \geq 1 - \alpha_0 = \gamma \quad (117)$$

Para cada \underline{x} , $g(\theta_0) \in \omega(\underline{x}) \Leftrightarrow$ o teste δ_{g_0} não rejeitar H_{0,g_0} quando $\underline{X} = \underline{x}$ é visto

$$\Rightarrow \mathbb{P}(g(\theta_0) \in \omega(\underline{X}) | \theta = \theta_0) = \gamma \quad (118)$$

□

Definição 8.7.1 (Conjunto de confiança): Se um conjunto aleatório $\omega(\underline{X})$ satisfaz

$$\mathbb{P}(g(\theta_0) \in \omega(\underline{X}) | \theta = \theta_0) \geq \gamma \quad \forall \theta_0 \in \Omega \quad (119)$$

então o chamamos de conjunto de confiança com coeficiente γ para $g(\theta)$. Se a desigualdade for igualdade, o chamamos de exato

Teorema 8.7.2: Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de uma distribuição indexada por θ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e seja $\omega(\underline{X})$ um conjunto de confiança γ para $g(\theta)$. Para cada possível valor g_0 de $g(\theta)$, construa o teste $\delta_{g_0} : \delta_{g_0}$ não rejeita $H_{0,g_0} \Leftrightarrow g_0 \in \omega(\underline{X})$. Então δ_{g_0} é um teste de nível $\alpha_0 = 1 - \gamma$

8.8 Testes de razão de verossimilhança

Não vou explicar formalmente todos os pontos da teoria, mas dar uma ideia intuitiva. Como vimos nos Estimadores de Máxima Verossimilhança, quanto mais próximo do verdadeiro valor de θ a minha amostra estiver, maior será a verossimilhança. Então, intuitivamente, se a minha amostra tem uma verossimilhança muito maior para um valor de θ que pertence a H_1 do que para um valor de θ que pertence a H_0 , isso é uma evidência contra H_0 . O teste de razão de verossimilhança é justamente isso, ele rejeita H_0 quando a razão entre a máxima verossimilhança sob H_1 e a máxima verossimilhança sob H_0 é grande o suficiente. Como comentei antes, a gente tenta sempre achar evidências contra H_0

$$\begin{aligned} H_0 : \theta &\in \Omega_0 \\ H_1 : \theta &\in \Omega_1 \end{aligned} \quad (120)$$

Definição 8.8.1 (Teste de razão de verossimilhança): A estatística

$$\Lambda(\underline{x}) = \frac{\sup_{\theta \in \Omega_0} f_n(\underline{x}|\theta)}{\sup_{\theta \in \Omega} f_n(\underline{x}|\theta)} \quad (121)$$

é chamada de **estatística de teste de razão de verossimilhança** e o teste que rejeita H_0 quando $\Lambda(\underline{X}) \leq k$ para alguma constante k é chamado de **teste de razão de verossimilhança**

Botando em palavras simples, o teste de razão de verossimilhança rejeita H_0 quando a razão entre a máxima verossimilhança sob Ω_0 e a máxima verossimilhança sob Ω é menor que um dado valor. Normalmente escolhemos k de forma que o teste tenha nível de significância α_0 , quando possível

Exemplo 8.8.1 (Teste da Razão de Verossimilhança para Hipóteses Bilaterais sobre um Parâmetro de Bernoulli): Suponha que observemos Y , o número de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes com parâmetro desconhecido θ . Considere as hipóteses

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0. \quad (122)$$

Após observar o valor $Y = y$, a função de verossimilhança é

$$f(y|\theta) = \binom{n}{y} \theta^y (1 - \theta)^{n-y}. \quad (123)$$

Neste caso, o espaço paramétrico sob H_0 é $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ e o espaço paramétrico completo é $\Theta = [0, 1]$. A estatística da razão de verossimilhança é

$$\Lambda(y) = \frac{\theta_0^y (1 - \theta_0)^{n-y}}{\sup_{\theta \in [0,1]} \theta^y (1 - \theta)^{n-y}}. \quad (124)$$

O máximo do denominador ocorre quando θ é igual ao estimador de máxima verossimilhança (EMV), isto é,

$$\hat{\theta} = \frac{y}{n}. \quad (125)$$

Assim,

$$\Lambda(y) = \frac{\theta_0^y (1 - \theta_0)^{n-y}}{\left(\frac{y}{n}\right)^y \left(1 - \frac{y}{n}\right)^{n-y}} = \left(\frac{n\theta_0}{y}\right)^y \left(\frac{n(1 - \theta_0)}{n - y}\right)^{n-y} \quad (126)$$

Não é difícil ver que $\Lambda(y)$ é pequeno para valores de y próximos de 0 ou de n , e é maior quando y está próximo de $n\theta_0$.

Como exemplo específico, suponha que $n = 10$ e $\theta_0 = 0.3$. A tabela abaixo apresenta os 11 possíveis valores de $\Lambda(y)$ para $y = 0, \dots, 10$.

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Lambda(y)$	0.028	0.312	0.773	1.000	0.797	0.418	0.147	0.034	0.005	3×10^{-4}	6×10^{-5}

$\mathbb{P}(Y = y \theta = 0.3)$	0.028	0.121	0.233	0.267	0.200	0.103	0.037	0.009	0.001	1×10^{-4}	6×10^{-6}
----------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------------------	--------------------

Se desejarmos um teste com nível de significância α_0 , ordenaríamos os valores de y de acordo com os valores de $\Lambda(y)$, do menor para o maior, e escolheríamos k de modo que a soma das probabilidades

$$\mathbb{P}(Y = y|\theta = 0.3) \quad (127)$$

correspondentes aos valores de y tais que $\Lambda(y) \leq k$, fosse no máximo α_0 .

Por exemplo, se $\alpha_0 = 0.05$, vemos na Tabela 9.1 que podemos somar as probabilidades correspondentes a $y = 10, 9, 8, 7, 0$, obtendo 0.039. Entretanto, se incluirmos $y = 6$, correspondente ao próximo menor valor de $\Lambda(y)$, a soma salta para 0.076, que é maior do que 0.05.

O conjunto

$$\{10, 9, 8, 7, 0\} \quad (128)$$

corresponde a $\Lambda(y) \leq k$ para todo k no intervalo semiaberto $[0.028, 0.147)$.

O tamanho do teste que rejeita H_0 quando

$$y \in \{10, 9, 8, 7, 0\} \quad (129)$$

é 0.039

Testes t

Nesse capítulo, vamos abordar um caso específico de teste de hipóteses para distribuições normais com média e variância desconhecida

Exemplo 9.1: Um instituto médico quer saber a distribuição de quantos dias um paciente internado em UTI's de hospitais permanece internado. Foram coletadas informações de $n = 30$ hospitais por todo o estado. Vamos supor que modelamos a quantidade de dias que a pessoa se mantém internada como uma variável normal com média μ e variância σ^2 . Vamos dizer também que queremos testar as hipóteses:

$$H_0 : \mu \geq 200 \quad H_1 : \mu < 200 \quad (130)$$

que teste seria apropriado de se utilizar? Quais são suas propriedades?

9.1 Testando Hipóteses sobre a Média de uma Normal quando a Variância é Desconhecida

Consideremos X_1, \dots, X_n uma amostra de uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 desconhecidas, e também que trabalhamos com as hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0 : \mu &\leq \mu_0 \\ H_1 : \mu &> \mu_0 \end{aligned} \quad (131)$$

O espaço paramétrico Ω suprime todo vetor bidimensional (μ, σ^2) com $\mu \in (-\infty, \infty)$ e $\sigma^2 > 0$. Aqui, definimos a estatística de teste U como:

$$U = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma'} \quad (132)$$

onde o teste rejeita H_0 se $U \geq c$. Sabemos que a distribuição de U é uma t com $n - 1$ graus de liberdade, por isso os testes que utilizam de U são chamados de **testes t** . Quando invertemos as hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0 : \mu &\geq \mu_0 \\ H_1 : \mu &< \mu_0 \end{aligned} \quad (133)$$

o teste vira da forma “rejeite H_0 quando $U \leq c$ ”

Exemplo 9.1.1: No Exemplo 9.1, se a gente quisesse um teste de tamanho α_0 , a gente poderia usar o teste t que rejeita H_0 se a estatística U for menor ou igual a um c (escolhemos c de forma a fazer o teste ter tamanho α_0)

9.2 Propriedades dos testes t

Teorema 9.2.1 (Nível e Viés dos testes t): Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma distribuição normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e U ser a estatística definida anteriormente. Seja também c o $1 - \alpha_0$ quantil da distribuição t com $n - 1$ graus de liberdade. Seja δ o procedimento que rejeita H_0 na equação (131) se $U \geq c$. A função de poder $\pi(\mu, \sigma^2 | \delta)$ tem as seguintes propriedades:

- i. $\pi(\mu, \sigma^2 | \delta) = \alpha_0$ quando $\mu = \mu_0$
- ii. $\pi(\mu, \sigma^2 | \delta) < \alpha_0$ quando $\mu < \mu_0$
- iii. $\pi(\mu, \sigma^2 | \delta) > \alpha_0$ quando $\mu > \mu_0$
- iv. $\pi(\mu, \sigma^2 | \delta) \rightarrow 0$ conforme $\mu \rightarrow -\infty$
- v. $\pi(\mu, \sigma^2 | \delta) \rightarrow 1$ conforme $\mu \rightarrow \infty$

Além disso, o teste δ tem tamanho α_0 e é não-viezado

Demonstração: Se $\mu = \mu_0$, então $U \sim t_{n-1}$, portanto:

$$\pi(\mu_0, \sigma^2 | \delta) = \mathbb{P}(U \geq c | \mu_0, \sigma^2) = \alpha_0 \quad (134)$$

lembrando que a função de poder, quando $\theta \in \Omega_0$ é a probabilidade de rejeitarmos H_0 (Erro de **Tipo I**), então vai ser a probabilidade de $U \geq c$. Isso prova (i)

Para provar (ii) e (iii), defina:

$$U^* = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma'} \quad W = \frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu)}{\sigma'} \quad (135)$$

Logo, $U = U^* - W$. Primeiramente, assuma que $\mu < \mu_0$, então $W > 0$, então segue que:

$$\begin{aligned} \pi(\mu, \sigma^2 | \delta) &= \mathbb{P}(U \geq c | \mu, \sigma^2) = \mathbb{P}(U^* - W | \mu, \sigma^2) \\ &= \mathbb{P}(U^* \geq c + W | \mu, \sigma^2) < \mathbb{P}(U^* \geq c | \mu, \sigma^2) \end{aligned} \quad (136)$$

Como U^* tem distribuição t_{n-1} , a última probabilidade da equação é igual a α_0 . Isso prova (ii). Para provar (iii), basta assumir que $\mu > \mu_0$, logo $W < 0$, então o sinal de **menor que** no final da equação vira um **maior que**. A prova de (iv) e (v) são mais complicadas e não serão abordadas \square

Corolário 9.2.1.1: Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma distribuição normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e U ser a estatística definida anteriormente. Seja também c o $1 - \alpha_0$ quantil da distribuição t com $n - 1$ graus de liberdade. Seja δ o procedimento que rejeita H_0 na equação (133) se $U \leq c$. A função de poder $\pi(\mu, \sigma^2 | \delta)$ tem as seguintes propriedades:

- i. $\pi(\mu, \sigma^2 | \delta) = \alpha_0$ quando $\mu = \mu_0$
- ii. $\pi(\mu, \sigma^2 | \delta) > \alpha_0$ quando $\mu < \mu_0$
- iii. $\pi(\mu, \sigma^2 | \delta) < \alpha_0$ quando $\mu > \mu_0$
- iv. $\pi(\mu, \sigma^2 | \delta) \rightarrow 1$ conforme $\mu \rightarrow -\infty$
- v. $\pi(\mu, \sigma^2 | \delta) \rightarrow 0$ conforme $\mu \rightarrow \infty$

Além disso, o teste δ tem tamanho α_0 e é não-viesado

Exemplo 9.2.1: Para o Exemplo 9.1, se quiséssemos um teste de nível de significância $\alpha_0 = 0.1$, então pelas propriedades, rejeitaríamos H_0 se $U \leq c$ onde $c = T_{n-1}^{-1}(0.1)$.

Calcular p -valores para os testes t é bem direto ao ponto!

Teorema 9.2.2 (p -valores para testes t): Suponha que estamos testando ou as hipóteses da equação (131) ou da (133). Seja u o valor observado da estatística U e $T_{n-1}(\cdot)$ a cdf da distribuição t_{n-1} . Então o p -valor para as hipóteses da equação (131) é $1 - T_{n-1}(u)$ e para as hipóteses da equação (133) é $T_{n-1}(u)$

Demonstração: Seja $T_{n-1}^{-1}(\cdot)$ a função quantil da t_{n-1} . Nós rejeitaríamos a hipótese na equação (131) em um nível α_0 se, e somente se $u \geq T_{n-1}^{-1}(1 - \alpha_0)$, que é equivalente a $\alpha_0 \geq 1 - T_{n-1}(u)$. Similarmente, rejeitamos as hipóteses da equação (133) se, e somente se $u \leq T_{n-1}^{-1}(\alpha_0)$, que é equivalente a $\alpha_0 \geq T_{n-1}(u)$ \square

Exemplo 9.2.2 (Tamanho de Fibras): Suponha que os comprimentos, em milímetros, de fibras metálicas produzidas por um determinado processo tenham distribuição normal, com média desconhecida (μ) e variância desconhecida (σ^2), e que as seguintes hipóteses devam ser testadas:

$$H_0 : \mu \leq 5.2 \quad H_1 : \mu > 5.2 \quad (137)$$

Suponha que os comprimentos de 15 fibras selecionadas aleatoriamente sejam medidos e que se observe que a média amostral (\bar{X}_{15}) é 5.4 e que ($\sigma' = 0.4226$). Com base nessas medições, realizaremos um teste t ao nível de significância ($\alpha_0 = 0.05$).

Como ($n = 15$) e ($\mu_0 = 5.2$), a estatística (U) terá distribuição t com 14 graus de liberdade quando ($\mu = 5.2$). Verifica-se na tabela da distribuição t que

$$T_{14}^{-1}(0.95) = 1.761. \quad (138)$$

Assim, a hipótese nula (H_0) será rejeitada se ($U > 1.761$). Como o valor numérico de (U) é 1,833, a hipótese nula (H_0) seria rejeitada ao nível de 0.05.

Com o valor observado ($u = 1.833$) para a estatística (U) e ($n = 15$), podemos calcular o **p-valor** para as hipóteses utilizando um software computacional que inclua a função de distribuição acumulada das várias distribuições t . Em particular, obtemos

$$1 - T_{14}(1.833) = 0.0441. \quad (139)$$

Legal, mas será que conseguimos dizer algo sobre a **função poder** de um teste t ? Se conseguirmos determinar a distribuição de U , nós conseguimos sim!

Definição 9.2.1 (Distribuição t não-central): Seja Y e W variáveis aleatórias independentes onde $W \sim N(\psi, 1)$ e $Y \sim X_m^2$, então a distribuição de:

$$X = \frac{W}{\left(\frac{Y}{m}\right)^{1/2}} \quad (140)$$

é chamada de **distribuição t não-central com m graus de liberdade e parâmetro de não-centralidade ψ** . Chamaremos a sua cdf de $T_m(t|\psi)$ ($T_m(t|\psi) = \mathbb{P} * (X \leq t)$)

Teorema 9.2.3: Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 . A distribuição da estatística U é dada por uma distribuição t não-central com $n - 1$ graus de liberdade e parâmetro de não-centralidade $\psi = \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma$. Seja δ o teste que rejeita $H_0 : \mu \leq \mu_0$ quando $U \geq c$. Então a função de poder de δ é $\pi(\mu, \sigma^2|\delta) = 1 - T_{n-1}(c|\psi)$. Seja δ' o teste que rejeita $H_0 : \mu \geq \mu_0$ quando $U \leq c$, então a função de poder de δ' é $\pi(\mu, \sigma^2|\delta') = T_{n-1}(c|\psi)$

9.3 Teste t pareado

Em vários experimentos, podemos desejar comparar a mesma variável em condições distintas na mesma amostra, então estaríamos interessados em comparar qual condição possui maior média. Nesses casos é comum fazer a subtração entre os valores de cada condição e tratar como uma variável aleatória normal

Exemplo 9.3.1 (): O **National Transportation Safety Board** coleta dados de testes de colisão referentes à quantidade e à localização dos danos em bonecos (**dummies**) colocados nos carros testados. Em uma série de testes, um boneco foi colocado no banco do motorista e outro no banco do passageiro dianteiro de cada carro. Uma das variáveis medidas foi o grau de lesão na cabeça de cada boneco. Entre outros aspectos, há interesse em saber se, e/ou em que medida, a quantidade de lesão na cabeça difere entre o banco do motorista e o banco do passageiro.

Sejam (X_1, \dots, X_n) as diferenças entre os logaritmos das medidas de lesão na cabeça do lado do motorista e do lado do passageiro. Podemos modelar (X_1, \dots, X_n) como uma amostra aleatória de uma distribuição normal com média (μ) e variância (σ^2) . Suponha que desejamos testar a hipótese nula $(H_0 : \mu \leq 0)$ contra a alternativa $(H_1 : \mu > 0)$, ao nível de significância $(\alpha_0 = 0.01)$.

Há $n = 164$ carros. O teste consiste em rejeitar (H_0) se

$$U \geq T_{163}^{-1}(0.99) = 2.35. \quad (141)$$

A média das diferenças é $\bar{x}_n = 0.2199$. O valor de σ' é 0.5342. A estatística U é então igual a 5.271. Esse valor é maior que 2.35, e a hipótese nula seria rejeitada ao nível de 0.01. De fato, o **p-valor** é menor que $1.0 \cdot 10^{-6}$.

Suponha também que estamos interessados na função poder sob H_1 do teste de nível 0.01. Suponha que a diferença média entre os logaritmos das lesões na cabeça do lado do motorista e do lado do passageiro seja $\frac{\sigma}{4}$. Então, o parâmetro de não centralidade é $\frac{(164)^{\frac{1}{2}}}{4} = 3.20$

9.4 Testando uma alternativa bilateral

Exemplo 9.4.1: Vamos retomar o Exemplo 9.2.2, mas agora vamos alterar as hipóteses para:

$$H_0 : \mu = 5.2, \quad H_1 : \mu \neq 5.2 \quad (142)$$

Assumiremos novamente que os comprimentos de 15 fibras são medidos, e que o valor de U , calculado a partir dos valores observados, é 1,833. Testaremos as hipóteses ao nível de significância $\alpha_0 = 0.05$.

Como $\alpha_0 = 0.05$, nosso valor crítico será o quantil $1 - \frac{0.05}{2} = 0.975$ da distribuição t com 14 graus de liberdade. Pela tabela das distribuições t deste livro, encontramos

$$T_{14}^{-1}(0.975) = 2.145. \quad (143)$$

Assim, o teste t especifica a rejeição de H_0 se $U \leq -2.145$ ou se $U \geq 2.145$. Como $U = 1.833$, a hipótese H_0 **não** seria rejeitada.

Os valores numéricos nos exemplos enfatizam a importância de decidir se a hipótese alternativa apropriada em um dado problema é unilateral (**one-sided**) ou bilateral (**two-sided**). Quando as hipóteses do Exemplo 9.2.2 foram testadas ao nível de significância 0.05, a hipótese nula H_0 , de que $\mu \leq 5.2$, foi rejeitada. Quando as hipóteses desse exemplo foram testadas ao mesmo nível de significância, utilizando os mesmos dados, a hipótese nula H_0 , de que $\mu = 5.2$, não foi rejeitada.

Teorema 9.4.1 (Função de poder de testes t bilaterais): A função de poder do teste δ que rejeita $H_0 : \mu = \mu_0$ quando $|U| \geq c$, onde $c = T_{n-1}^{-1}(1 - \alpha_0/2)$ pode ser encontrada utilizando a distribuição t não-central. Se $\mu \neq \mu_0$, então U tem distribuição t não-central com $n - 1$ graus de liberdade e parâmetro de não-centralidade $\psi = \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma$. A função de poder é:

$$\pi(\mu, \sigma^2 | \delta) = T_{n-1}(-c|\psi) + 1 - T_{n-1}(c|\psi) \quad (144)$$

Teorema 9.4.2 (p -valores de testes t bilaterais): Suponha que estamos testando as hipóteses bilaterais $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Seja u o valor observado da estatística U e seja $T_{n-1}(\cdot)$ a cdf de uma t_{n-1} . Então o p -valor é $2[1 - T_{n-1}(|u|)]$

Demonstração: Deixe $T_{n-1}^{-1}(\cdot)$ denotar a função quantil da t_{n-1} . Nós rejeitaríamos a hipótese nula no nível α_0 se, e somente se, $|u| \geq T_{n-1}^{-1}(1 - \alpha_0/2)$ que é equivalente a $T_{n-1}(|u|) \geq 1 - \alpha_0/2$ que é equivalente a $\alpha_0 \geq 2[1 - T_{n-1}(|u|)]$ \square

9.5 Testes t como testes de razão de verossimilhança

Exemplo 9.5.1 (Teste da Razão de Verossimilhança para Hipóteses Unilaterais sobre a Média de uma Distribuição Normal): Considere as hipóteses unilaterais sobre a média de uma distribuição normal:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad H_1 : \mu > \mu_0 \quad (145)$$

Neste caso, $\Omega_0 = \{(\mu, \sigma^2) : \mu \leq \mu_0\}$ e $\Omega_1 = \{(\mu, \sigma^2) : \mu > \mu_0\}$. A função de verossimilhança é:

$$f_n(\underline{x}|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right] \quad (146)$$

Após observar os valores x_1, \dots, x_n , a estatística de teste de razão de verossimilhança é:

$$\Lambda(x) = \frac{\sup_{\{(\mu, \sigma^2) \in \Omega_0\}} f_n(\underline{x}|\mu, \sigma^2)}{\sup_{\{(\mu, \sigma^2) \in \Omega\}} f_n(\underline{x}|\mu, \sigma^2)} \quad (147)$$

Chamemos $\hat{\mu}_0$ e $\hat{\sigma}_0^2$ os EMVs de μ e σ^2 sob H_0 , e $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}^2$ os EMVs de μ e σ^2 sob o espaço paramétrico completo.

Suponha primeiro que os valores amostrais observados são tais que $\bar{x}_n \leq \mu_0$. Então temos que $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) \in \Omega_0$, se isso acontecer, então temos que $\hat{\mu}_0 = \hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}_0^2 = \hat{\sigma}^2$, por tanto, nesse cenário, $\Lambda(\underline{x})$ é igual a 1.

Agora, suponha que os valores amostrais observados são tais que $\bar{x}_n > \mu_0$, logo, $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) \notin \Omega_0$. Nesse cenário, é possível demonstrar que $f_n(\underline{x}|\mu, \sigma^2)$ atinge seu valor máximo entre os pontos $(\mu, \sigma^2) \in \Omega_0$ se escolhermos μ o mais próximo possível de \bar{x}_n . O valor de μ mais próximo de \bar{x}_n é μ_0 , pois μ_0 é o valor máximo possível de μ sob H_0 , por isso $\hat{\mu}_0 = \mu_0$. Logo, podemos mostrar que:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 \quad (148)$$

nesse cenário, o valor do numerador de $\Lambda(\underline{x})$ é:

$$\sup_{\{(\mu, \sigma^2) | \mu > \mu_0\}} f_n(\underline{x}|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\hat{\sigma}_0^2)^{n/2}} \exp \left(-\frac{n}{2} \right) \quad (149)$$

Tirando a razão em ambos os casos mencionados anteriormente, temos que:

$$\Lambda(\underline{x}) = \begin{cases} \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2} \right)^{n/2} \rightarrow \bar{x}_n > \mu_0 \\ 1 \rightarrow \text{do contrário} \end{cases} \quad (150)$$

Agora, usamos seguinte relação:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 + n(\bar{x}_n - \mu_0)^2 \quad (151)$$

para reescrever a parte de cima da estatística $\Lambda(\underline{x})$ como:

$$\left[1 + \frac{n(\bar{x}_n - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2} \right]^{-n/2} \quad (152)$$

Se u é o valor observado da estatística U (Equação (132)), então podemos checar que:

$$\frac{n(\bar{x}_n - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2} = \frac{u^2}{n-1} \quad (153)$$

Ou seja, segue que $\Lambda(\underline{x})$ é uma função **não-crescente** de u . Por isso, para $k < 1$, $\Lambda(\underline{x}) \leq k \Leftrightarrow u \geq c$ onde:

$$c = \sqrt{(n-1) \cdot \left(\left(\frac{1}{k} \right)^{2/n} - 1 \right)} \quad (154)$$

Segue então que o teste de razão de verossimilhança é um teste t

Comparando as médias de duas Distribuições Normais

No mundo da estatística, é bem comum ocorrer de querermos comparar duas distribuições, suas médias, propriedades, etc. Quando utilizamos duas distribuições normais, os testes e intervalos de confiança são bem similares com os que aparecem quando consideramos apenas uma distribuição

10.1 O t -teste biamostrai

Primeiramente, considere o problema em que temos duas amostras de variáveis normais (com mesma variância) e queremos saber qual distribuição tem maior média. Especificamente, assumimos que $\underline{X} = (X_1, \dots, X_m)$ é uma amostra aleatória de m , onde $X \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ (com μ_X e σ^2 desconhecidos) e $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ formam uma amostra independente da primeira de n observações, onde $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$. Estamos interessados em testar as hipóteses:

$$H_0 : \mu_X \leq \mu_Y \quad H_1 : \mu_X > \mu_Y \quad (155)$$

para cada procedimento δ , vamos deixar que $\pi(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2 | \delta)$ seja a **power function** (Definição 8.3.1) de δ . Vamos assumir que σ^2 é igual para ambas as distribuições, se esse requisito não fosse apropriado para o cenário analisado (posteriormente citarei um exemplo que esse caso é plausível), os testes t que vamos derivar nas próximas seções não seriam apropriados.

Pensando em um δ intuitivo, se a diferença entre as médias ($\mu_Y - \mu_X$) for alta, faz sentido rejeitarmos H_0 , certo?

Teorema 10.1.1 (Estatística t para amostras duplas): Assumindo a estrutura descrita nos parágrafos anteriores e definindo:

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j \quad (156)$$

$$S_X^2 = \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 \quad S_Y^2 = \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2 \quad (157)$$

defina então o teste estatístico:

$$U = \frac{(m+n-2)^{1/2}(\bar{X} - \bar{Y})}{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)^{1/2}(S_X^2 + S_Y^2)^{1/2}} \quad (158)$$

Para todos os valores de $\theta = (\mu_X, \mu_Y, \sigma^2)$ tais que $\mu_X = \mu_Y$, temos então que:

$$U \sim t_{m+n-2} \quad (159)$$

Demonstração: Assuma que $\mu_X = \mu_Y$. Defina as seguintes variáveis aleatórias:

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)^{1/2} \sigma} \quad (160)$$

$$W = \frac{S_X^2 + S_Y^2}{\sigma^2}$$

Agora podemos representar U como:

$$U = \frac{Z}{(W/(m+n-2))^{1/2}} \quad (161)$$

perceba que se provarmos que $Z \sim N(0, 1)$, $W \sim X_{m+n-2}^2$, e Z e W são independentes que o teorema está concluído. Desde o começo estamos assumindo que X e Y são independentes dado θ . Desse fato, segue que toda função de X é independente de toda função de Y , em particular, (\bar{X}, S_X^2) é independente de (\bar{Y}, S_Y^2) . Pelo Teorema 3.1.2, sabemos que \bar{X} e S_X^2 são independentes, assim como \bar{Y} e S_Y^2 , ou seja, todos \bar{X} , \bar{Y} , S_X^2 e S_Y^2 são independentes entre si, logo, Z e W também são independentes.

Segue também do Teorema 3.1.2 que:

$$\frac{S_X^2}{\sigma^2} \sim X_{m-1}^2 \quad \frac{S_Y^2}{\sigma^2} \sim X_{n-1}^2 \quad (162)$$

e pelas propriedades da X^2 (Teorema 2.1.3), temos que $W \sim X_{m+n-2}^2$. Utilizando das propriedades que vimos no curso de Probabilidade, sabemos que $\bar{X} - \bar{Y}$ tem média $\mu_X - \mu_Y = 0$ e variância $\sigma^2/n + \sigma^2/m$, logo, segue que $Z \sim N(0, 1)$ \square

Um teste t biamostrais com nível de significância α_0 é o procedimento δ que rejeita H_0 se $U \geq T_{m+n-2}^{-1}(1 - \alpha_0)$. O próximo teorema estabelece algumas propriedades interessantes sobre a **função de poder** de testes t biamostrais análogos aos do :

Teorema 10.1.2 (Nível e Viés de Testes t biamostrais): Seja δ um teste t biamostrais definido antes. A função de poder $\pi(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2 | \delta)$ tem as seguintes propriedades:

- $\pi(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2 | \delta) = \alpha_0$ quando $\mu_X = \mu_Y$
- $\pi(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2 | \delta) < \alpha_0$ quando $\mu_X < \mu_Y$
- $\pi(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2 | \delta) > \alpha_0$ quando $\mu_X > \mu_Y$
- $\pi(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2 | \delta) \rightarrow 0$ conforme $\mu_X - \mu_Y \rightarrow -\infty$
- $\pi(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2 | \delta) \rightarrow 1$ conforme $\mu_X - \mu_Y \rightarrow \infty$

além disso, o teste δ tem tamanho α_0 e é não-viezado

Vale ressaltar que, se as hipóteses forem:

$$H_0 : \mu_X \geq \mu_Y \quad H_1 : \mu_X < \mu_Y \quad (163)$$

o teste δ correspondente de tamanho α_0 é **rejeitar H_0 quando $U \leq -T_{m+n-2}^{-1}(1 - \alpha_0)$** . P -valores são computados de forma muito parecida da forma como se eles fossem de testes t uniamostrais

Teorema 10.1.3 (p -valores de testes t biamostrais): Suponha que estejamos testando as hipóteses da equação (155) ou (163). Seja u o valor observado da estatística U (equação (158)) e seja $T_{m+n-2}(\cdot)$ a cdf da distribuição t com $m + n - 2$ graus de liberdade. Então o p -valor das hipóteses em (155) é $1 - T_{m+n-2}(u)$ e o p -valor das hipóteses em (163) é $T_{m+n-2}(u)$

10.2 Poder do Teste

Para cada parâmetro do vetor $\theta = (\mu_X, \mu_Y, \sigma^2)$, a função de poder do teste t biamostrais pode ser computada usando a distribuição t não-central

Teorema 10.2.1 (Poder do teste t biamostrais): Seja a estatística U ser definida como na equação (158), então U tem distribuição não-central t com $m + n - 2$ graus de liberdade e parâmetro de não-centralidade

$$\psi = \frac{\mu_X - \mu_Y}{\sigma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)^{1/2}} \quad (164)$$

10.3 Alternativas Bilaterais

Podemos adaptar os testes t biamostrais para o caso de hipóteses bilaterais:

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \quad H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \quad (165)$$

O teste t bilateral de tamanho α_0 rejeita H_0 se $|U| \geq c$ onde $c = T_{m+n-2}^{-1}(1 - \alpha_0/2)$ e a estatística U é a mesma definida anteriormente. O p -valor quando $U = u$ é observado é igual a $2[1 - T_{m+n-2}(|u|)]$