



UNIVERZA V LJUBLJANI

FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

# Eksperimentalna modalna analiza

Zapiski predavanj

izr. prof. dr. Gregor Čepon

asist. Domen Ocepek

Ljubljana, 2022



# Kazalo

<b>1 Uvod</b>	<b>5</b>
<b>2 Dinamski modeli v različnih domenah</b>	<b>6</b>
2.1 Osnovne predpostavke . . . . .	7
2.2 Fizikalna domena . . . . .	7
2.3 Frekvenčna domena . . . . .	8
2.4 Modalna domena . . . . .	9
2.5 Različni modeli dušenja . . . . .	13
2.6 Primer: Dinamski model strukture v različnih domenah . . . . .	18
<b>3 Eksperimentalni dinamski model</b>	<b>24</b>
3.1 Osnovni koncepti in omejitve . . . . .	24
3.2 Eksperimentalni zajem frekvenčnih prenosnih funkcij . . . . .	26
3.3 Identifikacija modalnih parametrov . . . . .	29
<b>4 Metode modalne identifikacije</b>	<b>30</b>
4.1 Metoda polovične moči . . . . .	30
4.2 Primer: Metoda polovične moči . . . . .	33
4.3 Metoda prilagajanja kroga . . . . .	46
4.4 Primer: Metoda prilagajanja kroga . . . . .	50
4.5 Ewins-Glessonova metoda . . . . .	63
4.6 Primer: Ewins-Glessonova metoda . . . . .	65
4.7 Metoda kompleksnih eksponentov z najmanjšo kvadratično napako . . . . .	71
<b>5 Kriteriji vrednotenja rezultatov</b>	<b>77</b>
5.1 MAC kriterij . . . . .	77
5.2 Koherenčni kriterij . . . . .	77
5.3 LAC kriterij . . . . .	77
5.4 Faktor kompleksnosti modalnih oblik . . . . .	78
5.5 Primer: Kriteriji vrednotenja rezultatov . . . . .	79
<b>6 Merjenje dinamskih modelov med obratovanjem</b>	<b>86</b>
6.1 Obratovalne deformacijske oblike . . . . .	86
6.2 Obratovalna modalna analiza . . . . .	88
<b>7 Podstrukturiranje v frekvenčni domeni</b>	<b>90</b>
7.1 Kompatibilnostni pogoji . . . . .	91
7.2 Ravnotežni pogoji . . . . .	91
7.3 Primarno sklapljanje . . . . .	92

7.4	Sekundarno sklapljanje . . . . .	93
7.5	Primer: Sklapljanje na osnovi Lagrangeovih množiteljev . . . . .	95
<b>8</b>	<b>Analiza prenosnih poti</b>	<b>109</b>
8.1	Osnovne predpostavke . . . . .	109
8.2	Klasične metode TPA . . . . .	110
8.3	Metode ekvivalentnih sil . . . . .	113
8.4	Prenosnosti povezav . . . . .	119
8.5	Validacija prenosnih poti . . . . .	121
8.6	Primer: in-situ TPA . . . . .	122
<b>9</b>	<b>Transformacija virtualne točke</b>	<b>129</b>
9.1	Transformacija odzivov . . . . .	129
9.2	Transformacija vzbujanj . . . . .	132
9.3	Ocena kvalitete meritev . . . . .	133
9.4	Recipročnost in pasivnost virtualne točke . . . . .	135
	<b>Literatura</b>	<b>136</b>

# Slike

1	Obravnavo strukture v petih različnih domenah.	6
2	Shematski prikaz impedance in admittance.	9
3	Koncept izvedbe meritve.	25
4	Odziv sistema kot vsota prispevkov modalnih oblik.	30
5	Točki polovične moči.	31
6	Krožnica, ki jo opišejo točke v Nyquistovem diagramu.	46
7	Kot med točkami v Nyquistovem diagramu.	47
8	Kot med točkami v Nyquistovem diagramu.	48
9	Izračun razmernika histereznega dušenja.	49
10	Grafična prezentacija modalne konstante v Nyquistovi ravnini.	50
11	Primer stabilizacijskega diagrama.	76
12	Kompleksnost modalnih oblik.	78
13	Merjenje obratovalnih deformacijskih oblik.	86
14	Prikaz sklapljanja podstruktur A in B.	90
15	Analiza prenosa vibracij iz aktivne podstrukture A na pasivno podstrukturo B.	109
16	Sklapljanje podstruktur A in B z vzbujanjem v vozlišču 1.	110
17	Klasične metode TPA	111
18	Metoda neposrednega merjenja povezovalnih sil.	111
19	Metoda invertiranja admitančnih matrik.	112
20	Podajni spoj med podstrukturama.	112
21	Sklapljanje podstruktur A in B z vzbujanjem v vozlišču 2.	113
22	Metode ekvivalentnih sil.	114
23	Neposredno merjenje ekvivalentnih sil.	114
24	Koncept prostih hitrosti.	115
25	Uporaba testne naprave.	116
26	In-situ TPA.	117
27	Psevdo-sile.	118
28	Princip prenosnosti povezav.	119
29	Obratovalna analiza prenosnih poti.	120
30	Virtualna točka.	129
31	Relativni položaj pospeškomera glede na virtualno točko.	130
32	Pomik pospeškomera izražen iz pomikov virtualne točke.	130
33	Uporaba pospeškomerov za transformacijo virtualne točke.	132



# 1 Uvod

Zapiski pred bralcem obsegajo širok nabor tematik v okviru strukturne dinamike s ciljem bodočim razvojnim inženirjem predstaviti elementarna orodja, uporabljena v razvoju visokokakovostnih izdelkov. Dandanes razvijamo mirne in tihe izdelke, vse s ciljem doseganja konkurenčne prednosti in zadovoljstva uporabnikov. Vedno znova pa je razvoj takih produktov pogojen z ustreznim razumevanjem dinamskih lastnosti struktur. V okviru predmeta Eksperimentalna modalna analiza so predstavljene potrebne metode in orodja za modeliranje dinamskih lastnosti tovrstnih sistemov. V nadaljevanju so tako opisani postopki modeliranja strukture v različnih domenah, metode za identifikacijo modalnih parametrov in nihajočih načinov struktur, sklapljanje dinamskih modelov podstruktur v dinamski model končnega izdelka, ter analiza prenosnih poti. Na koncu vseh pomembnejših vsebin so dodani značilni rešeni primeri, ki na elementarnih analitičnih dinamskih modelih demonstrirajo aplikativnost predstavljenih orodij. Čar predstavljenih metod, tukaj prepuščen bralcu, je, da z menjavo analitičnih dinamskih modelov za eksperimentalne omenjene metode enostavno aplikira na realne primere.

Zapiski so v prvi vrsti namenjeni študentom Magistrskega študijskega programa II. stopnje in so plod raziskovalnega in aplikativnega napora Laboratorija za dinamiko strojev in konstrukcij na področju strukturne dinamike (LADISK). Verjamemo, da bodo prišli v pomoč tudi inženirjem in raziskovalcem, ki se bodo na svoji karierni poti ukvarjali s problematiko hrupa in vibracij.

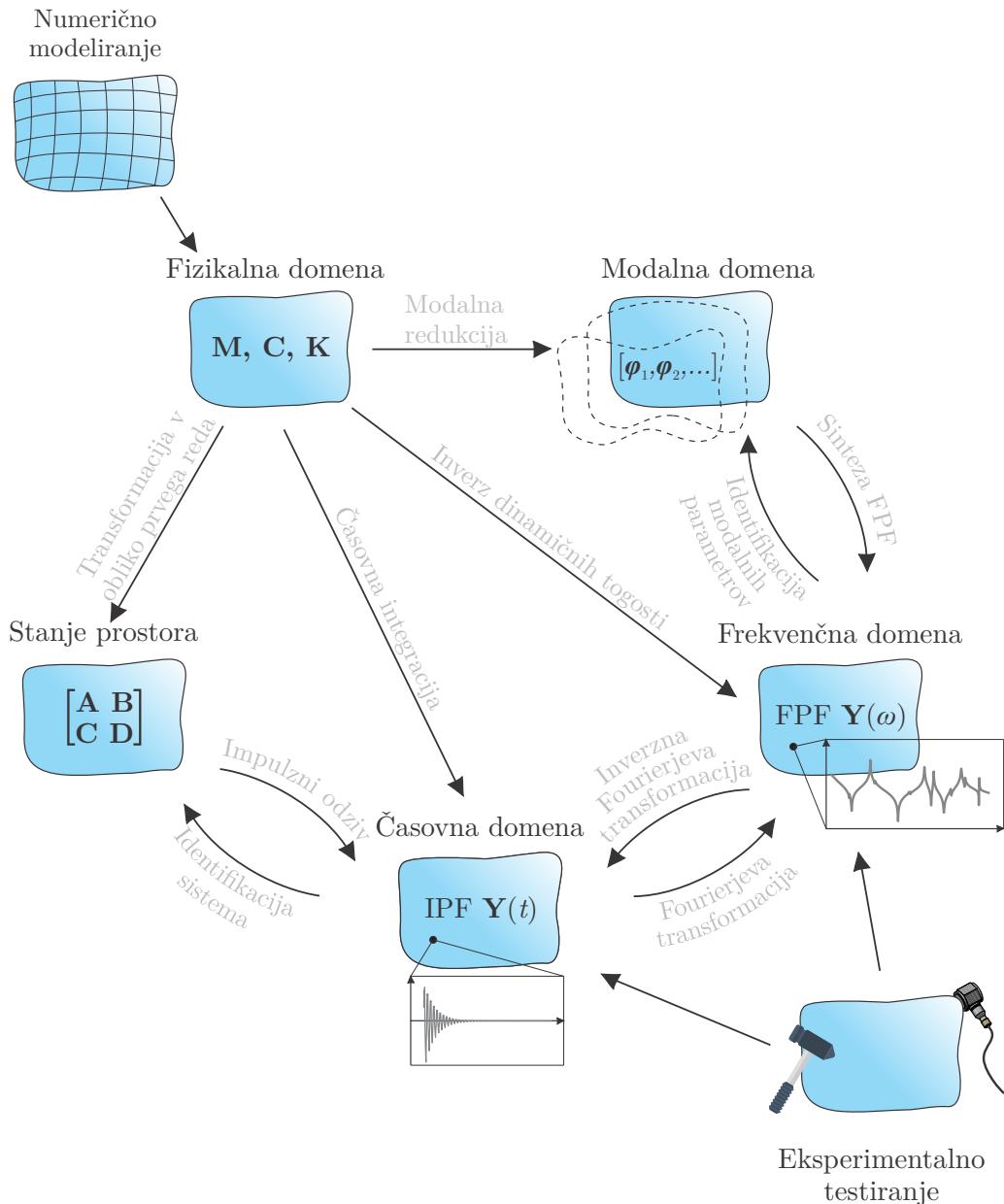
A good acoustic engineer uses his ears  
as a primary instrument for analysis;  
the measurement technology merely  
serves to confirm already-formed  
presumptions.

---

Maarten V. van der Seijs

## 2 Dinamski modeli v različnih domenah

V nadaljevanju so prikazani fizikalno ekvivalentni pristopi matematičnega modeliranja dinamskega modela strukture. Domene, ki jih lahko uporabimo za dinamsko analizo struktur, in prehodi med njimi, so prikazani na sliki 1:



Slika 1: Obravnavo strukture v petih različnih domenah.

- **Fizikalna domena**

Sistem popišemo z masno, togostno in dušilno matriko. Gre za osnovno domeno v strukturni dinamiki z definiranimi prehodi v vse ostale domene.

- **Modalna domena**

Sistem popišemo z lastnimi frekvencami in lastnimi oblikami. Te modalne pa-

rametre lahko identificiramo iz numeričnega modela, ali pa z eksperimentalno modalno analizo iz eksperimentalnih podatkov.

- **Frekvenčna domena**

Sistem popišemo s frekvenčnimi prenosnimi funkcijami (FPF), ki jih običajno dobimo na podlagi meritev.

- **Časovna domena**

Sistem popišemo z impulznimi prenosnimi funkcijami (IPF), ki so običajno rezultat eksperimenta.

- **Domena stanja prostora**

Sistem popišemo z vektorjem pomikov in hitrosti, ki sta neodvisni spremenljivki.

## 2.1 Osnovne predpostavke

Tekom obravnave struktur v okviru predmeta Eksperimentalna modalna analiza predpostavimo, da za vse obravnavane (pod)strukture velja sledeče:

- **Linearnost**

Nivo odziva podstukture je proporcionalen nivoju vzbujanja.

- **Časovna invariantnost**

Masne, togostne in dušilne lastnosti (matrike) podstuktur so neodvisne od časa.

- **Pasivnost**

Dovod energije v sistem je pozitiven ali enak nič.

- **Recipročnost**

Odziv podstrukture na vzbujanje se ne spremeni, če zamenjamo lokaciji vzbujanja in merjenja odziva.

- **Stabilnost**

Masne, togostne in dušilne lastnosti podstuktur so neodvisne od stanja sistema.

## 2.2 Fizikalna domena

Na področju strukturne dinamike obravnavane strukture pogosto modeliramo v diskretizirani obliki, torej kot sisteme z končnim številom  $n$  prostostnih stopenj. Prostostne stopnje v tem primeru smatramo kot nabor medsebojno neodvisnih koordinat, ki so potrebne za popis gibanja obravnavanega sistema. Linearizirana struktura v fizični domeni je definirana z diskretno porazdelitvijo mase, dušenja in togosti po sistemu. Iz

ravnotežja med zunanjimi obremenitvami in notranjimi silami ob predpostavki majhnih pomikov in viskozne narave dušenja<sup>1</sup> zapišemo diferencialno enačbo 2. reda, ki jo imenujemo tudi gibalna enačba sistema:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (1)$$

Matrike  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  in  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  predstavljajo masno, dušilno in togostno matriko strukture<sup>2</sup>. Vektorja  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  in  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  predstavlja nabor pomikov oziroma zunanjih obremenitev v vseh prostostnih stopnjah. V fizikalni domeni matrike  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  in  $\mathbf{K}$  običajno določimo iz numeričnega modela, ki je diskretiziran s končnimi elementi (KE). V kolikor strukturo analiziramo z eksperimentalnim pristopom, matrike  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  in  $\mathbf{K}$  niso znane. Bolj primerna domena za dinamsko analizo neposredno iz eksperimentalnih meritev je zato frekvenčna domena.

## 2.3 Frekvenčna domena

Če vektor pomikov (in obremenitev) v gibalni enačbi (1) zapišemo kot vsoto harmoničnih funkcij ( $\mathbf{u}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(\omega) e^{j\omega t}$ ) ter upoštevamo zvezi  $\dot{\mathbf{u}}(\omega) = j\omega \mathbf{u}(\omega)$  in  $\ddot{\mathbf{u}}(\omega) = -\omega^2 \mathbf{u}(\omega)$ , dobimo naslednji izraz:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(\omega) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(\omega) + \mathbf{K}\mathbf{u}(\omega) &= \mathbf{f}(\omega), \quad \omega \in (-\infty, \infty), \\ \left( -\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \mathbf{u}(\omega) &= \mathbf{f}(\omega), \\ \mathbf{Z}(\omega) \mathbf{u}(\omega) &= \mathbf{f}(\omega). \end{aligned} \quad (2)$$

Vektorja  $\mathbf{u}(\omega) \in \mathbb{C}^{n \times 1}$  in  $\mathbf{f}(\omega) \in \mathbb{C}^{n \times 1}$  vsebujeta amplitude harmonskih odzivov oz. vzbujevalnih sil, ki so zaradi transformacije v frekvenčno domeno kompleksna števila. Matrika kompleksnih funkcij  $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  predstavlja dinamično togost strukture oz. impedanco pri posamezni krožni frekvenci  $\omega$ :

$$\mathbf{Z}(\omega) = -\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}. \quad (3)$$

Posamezna funkcija v matriki  $(Z_{i,j})$  predstavlja silo na mestu  $i$ , s katero je potrebno vzbujati strukturo, da na mestu  $j$  dosežemo enotski odziv, pri čemer so vse ostale koordinate nepomično vpete (shematsko prikazano na sliki 2a). Posamezen člen matrike

---

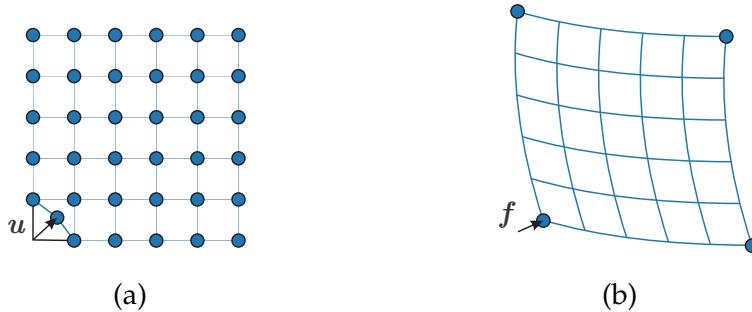
<sup>1</sup>Realističen popis dušilnih lastnosti strukture je zahteven, saj običajno odraža združen vpliv različnih mehanizmov disipacije energije. Za aproksimacijo dušenja pogosto uporabljamo poenostavljene modele, ki bodo podrobnejše predstavljeni v nadaljevanju, medtem, ko se za potrebe pregleda različnih domen modeliranja struktur omejimo na viskozno dušenje.

<sup>2</sup>Matrika  $\mathbf{M}$  je simetrična pozitivno definitna matrika, tako da velja:  $\dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} > 0, \forall \dot{\mathbf{u}} \neq 0$ . Slednje sledi iz dejstva, da je kinetična energija nihajočega sistema vedno pozitivna. Podobno lahko trdimo za matriko  $\mathbf{K}$ , ki je simetrično semi-pozitivno definitna matrika, ali:  $\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \geq 0, \forall \mathbf{u} \neq 0$ . Tudi potencialna energija nihajočega sistema je vedno pozitivna, razen, ko se telo giblje brez deformacije (gibanje točka telesa). Simetričnost obeh matrik sledi iz linearizacije problema.

$\mathbf{Z}$  tako popisuje zgolj lokalne dinamske lastnosti strukture. Dinamično togost lahko enostavno izračunamo iz znane masne, dušilne in togostne matrike numeričnega modela. Z invertiranjem enačbe (2) lahko iz dinamične togosti izrazimo admitanco ter preuredimo gibalno enačbo:

$$\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{Y}(\omega)\mathbf{f}(\omega) \Rightarrow \mathbf{Y}(\omega) = (\mathbf{Z}(\omega))^{-1}. \quad (4)$$

Posamezen člen admitančne (receptančne) matrike  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  je funkcija  $Y_{i,j}$ , imenovana tudi frekvenčna prenosna funkcija, ki ponazarja velikost odziva na mestu  $i$ , če strukturo vzbujamo z enotsko silo na mestu  $j$ , pri čemer so vse ostale koordinate proste (shematsko prikazano na sliki 2b). Nabor FPF lahko enostavno pridobimo s pomočjo eksperimenta, tako, da strukturo vzbujamo na mestu  $j$ , ter ob tem merimo vzbujevalno silo, sočasno pa na mestu  $i$  merimo odziv, ki je posledica zgolj vzbujevalne sile. Z eno vzbujevalno silo na  $j$ -tem mestu lahko sočasno izmerimo odzive na vseh  $i$ -tih mestih (celoten stolpec v admitančni matriki  $\mathbf{Y}$ ), zato sledi, da že ena FPF vsebuje globalne dinamske lastnosti strukture. Glede na fizikalno veličino, s katero opredelimo odziv strukture, poznamo različne definicije admitančne in impedančne matrike, ki so zbrane v preglednici 1.



Slika 2: Shematski prikaz impedance in admitance: a) impedance; b) admittance.

Tabela 1: Različne definicije členov admitančne in impedančne matrike.

Merjena fizikalna veličina	Impedanca	$Z$	Admitanca	$Y$
pomik	dinamična togost	$f/u$	podajnost	$u/f$
hitrost	mehanska impedanca	$f/\dot{u}$	mobilnost	$\dot{u}/f$
pospešek	dinamična masa	$f/\ddot{u}$	pospešenost	$\ddot{u}/f$

## 2.4 Modalna domena

Če obravnavamo sistem enačb nihanja strukture v fizikalni domeni (enačba (1)), je ta za kompleksnejše primere sestavljen iz širokega nabora prostostnih stopenj. Ekvivalenten dinamski model (v omejenem frekvenčnem razponu) lahko izrazimo z manjšim

številom spremenljivk, v kolikor ga definiramo v modalni domeni. Fizikalni model nedušenega dinamskega sistema predstavlja sistem diferencialnih enačb 2. reda v obliki:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (5)$$

Za vzpostavitev pripadajočega modalnega modela v nadaljevanju obravnavamo enačbo (5) za primer lastnega nihanja:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Očitna rešitev enačbe (6) je  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ , a obstaja tudi netrivialen odziv strukture, ko so vztrajnostne in elastične sile v ravnotežju v vsakem trenutku (kar enačba lastnega nihanja tudi zahteva). Enočbo (6) ponovno rešimo z uporabo Eulerjevega nastavka ( $\mathbf{u}(t) = \mathbf{X} e^{j\omega t}$ ), in tako ravnotežje sil pri lastnem odzivu strukture zagotovimo z linearno kombinacijo lastnih oblik  $\mathbf{X}$  in krožnih frekvenc  $\omega$ :

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{X} e^{j\omega t} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Matematično gledano moramo za netrivialno rešitev  $\mathbf{X}_r \neq \mathbf{0}$  rešiti homogen sistem  $n$  linearnih enačb:

$$(-\omega_r^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{X}_r = \mathbf{0}, \quad (8)$$

kjer so  $\omega_r^2$  ničle enačbe:

$$\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0. \quad (9)$$

Rešitev predstavlja  $n$  lastnih vrednosti  $\omega_r^2$ ;  $r \in [1, n]$ , ki predstavljajo kvadratne vrednosti lastnih nedušenih krožnih frekvenc sistema. Te so vedno nenegativne kot posledica pozitivne definitnosti matrik  $\mathbf{M}$  in  $\mathbf{K}$ . Vsaki lastni vrednosti (pri vsaki lastni frekvenci  $\omega_r$ ) lahko določimo pripadajoči lastni vektor  ${}_r \boldsymbol{\phi}$ ;  $r \in [1, n]$ , ki ga imenujemo tudi lastna oblika. Ta podaja razmerja med odzivi posameznih prostostnih stopenj pri dani lastni frekvenci.

Modalni model sistema tako sestoji iz nabora lastnih krožnih frekvenc, predstavljenih v obliki diagonalne matrike  $\boldsymbol{\omega}_r = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_r, \dots, \omega_n)$ , ter pripadajočih lastnih vektorjev, ki sestavljajo stolpce modalne matrike  $\boldsymbol{\Phi} = [{}_1 \boldsymbol{\phi}, \dots, {}_r \boldsymbol{\phi}, \dots, {}_n \boldsymbol{\phi}]$ .

#### 2.4.1 Medsebojna ortogonalnost lastnih vektorjev

Zaradi medsebojne ortogonalnosti lastnih vektorjev te lahko uporabimo za diagonalizacijo prostorskega modela. Gibalno enačbo sistema (7) tako namreč zapišemo v

obliki neodvisnih diferencialnih enačb, kar občutno olajša reševanje problema. V kolikor v enačbo (7) vstavimo  $r$ -to rešitev problema s pripadajočo lastno frekvenco  $\omega_r$ , ter množimo z rešitvijo  $X_s^T$  (kjer velja  $r \neq s$  in posledično  $\omega_r \neq \omega_s$ ) z leve, dobimo<sup>3</sup>:

$$X_s^T \mathbf{K} X_r = \omega_r^2 X_s^T \mathbf{M} X_r. \quad (10)$$

Postopek ponovimo za  $s$ -to rešitev, ki jo množimo s  $X_r^T$  z leve:

$$X_r^T \mathbf{K} X_s = \omega_s^2 X_r^T \mathbf{M} X_s. \quad (11)$$

Če od enačbe (11) odštejemo (10), se ob upoštevanju simetrije masne in togostne matrike člena z  $\mathbf{K}$  odštejeta, tako da dobimo:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) X_s^T \mathbf{M} X_r = 0. \quad (12)$$

Ker velja  $\omega_r \neq \omega_s$ , je pogoj izpolnjen ob:

$$X_s^T \mathbf{M} X_r = 0. \quad (13)$$

Z vstavljanjem enačbe (13) v enačbo (10) dobimo še:

$$X_s^T \mathbf{K} X_r = 0. \quad (14)$$

Sledi, da so lastni vektorji ortogonalni z ozirom na masno in togostno matriko. V okviru tega predmeta bomo s  $\Phi$  označevali masno normirane<sup>4</sup> lastne vektorje, za katere velja:

$$X_r^T \mathbf{M} X_r \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}, \quad (15)$$

kjer je  $\mathbf{I}$  identična matrika. Iz enačbe (6) ob identičnem normiraju sledi:

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \omega_r^2. \quad (16)$$

Z upoštevanjem lastnosti ortogonalnosti lastnih vektorjev lahko sistem enačb (5) zapišemo kot  $n$  neodvisnih enačb<sup>5</sup>. Rešitev enačbe (1) izrazimo z lastnimi vektorji  $X_r$  in časovno odvisnimi modalnimi koordinatami  $\eta_r(t)$ , ki so naše neznanke:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{r=1}^n X_r \eta_r(t) = \mathbf{X} \boldsymbol{\eta}. \quad (17)$$

<sup>3</sup>V primeru simetričnih struktur se lastne frekvence ponavljajo ( $\omega_r = \omega_s$ ), medtem, ko se lastni vektorji razlikujejo ( $X_r \neq X_s$ ). Ortogonalnost lastnih vektorjev velja tudi v tem primeru.

<sup>4</sup>Lastni vektorji problem lastnih vrednosti sicer rešijo pri poljubnem skaliranju.

<sup>5</sup>Zapis sistema neodvisnih enačb ob prisotnosti dušilne matrike  $\mathbf{C}$  lahko zainteresiran bralec najde v [1].

Nastavek (17) vstavimo v enačbo (6) in jo nato z leve množimo z  $\mathbf{X}_s^T$ :

$$\mathbf{X}_s^T \left( \mathbf{M} \sum_{r=1}^n \mathbf{X}_r \ddot{\eta}_r(t) + \mathbf{K} \sum_{r=1}^n \mathbf{X}_r \eta_r(t) \right) = \mathbf{X}_s^T \mathbf{f}(t). \quad (18)$$

Ob upoštevanju enačb (13) in (14) nato dobimo:

$$1 \ddot{\eta}_s(t) + \omega_s^2 \eta_s(t) = \mathbf{X}_s^T \mathbf{f}(t), \text{ za } s = 1, \dots, n, \quad (19)$$

kar predstavlja  $n$  neodvisnih enačb.

#### 2.4.2 Modalna superpozicija

Izračun admitančne matrike iz prostorskega modela (enačbi (3) in (4)) se izkaže kot računsko potraten pri obravnavi sistemov z velikim številom prostostnih stopenj. V realih aplikacijah se zato pogosteje poslužujemo relacije z modalnim modelom. Enačbo (3) z leve množimo z  $\Phi^T$  in z desne z  $\Phi$ :

$$\Phi^T \mathbf{Y}^{-1} \Phi = \Phi^T \left( -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} \right) \Phi \quad (20)$$

Nadalje ob upoštevanju enačb (15) in (16) dobimo naslednji izraz:

$$\Phi^T \mathbf{Y}^{-1} \Phi = \left( -\omega^2 \mathbf{I} + \omega_r^2 \right) \quad (21)$$

Iz zgornje enačbe izrazimo  $\mathbf{Y}$  in tako dobimo<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^{-1} &= (\Phi^T)^{-1} \left( -\omega^2 \mathbf{I} + \omega_r^2 \right) \Phi^{-1} \\ \mathbf{Y} &= \Phi \left( -\omega^2 \mathbf{I} + \omega_r^2 \right)^{-1} \Phi^T. \end{aligned} \quad (22)$$

Za doseganje zadovoljive točnosti dinamskih lastnosti v obravnavanem frekvenčnem območju tipično zadošča obravnavna reducirana modalna modelov, v katerih upoštevamo  $m \leq n$  najnižjih lastnih vrednosti in pripadajočih lastnih vektorjev (torej  $\omega_r \in \mathbb{R}^{m \times m}$  in  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ). Za aproksimacijo odzivnega modela na osnovi reducirane modalne superpozicije običajno poenostavimo enačbo (22) v sledečo (ekvivalentno) obliko:

$$\mathbf{Y} \approx \frac{\Phi \Phi^T}{(-\omega^2 \mathbf{I} + \omega_r^2)} = \sum_{r=1}^m \frac{{}_r \boldsymbol{\phi} {}_r \boldsymbol{\phi}^T}{(-\omega^2 + \omega_r^2)} = \sum_{r=1}^m \frac{{}_r \mathbf{A}}{(-\omega^2 + \omega_r^2)}, \quad (23)$$

kjer je  ${}_r \mathbf{A} = {}_r \boldsymbol{\phi} {}_r \boldsymbol{\phi}^T$  imenovana kot  $r$ -ta matrika modalnih konstant. Individualno frekvenčno prenosno funkcijo izračunamo po enačbi:

$$Y_{i,j} = \sum_{r=1}^m \frac{{}_r \boldsymbol{\phi}_i {}_r \boldsymbol{\phi}_j}{(-\omega^2 + \omega_r^2)}. \quad (24)$$

---

<sup>6</sup>Upoštevamo, da za kvadratni matriki  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{B}$  velja:  $(\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$

## 2.5 Različni modeli dušenja

Poleg masnih in togostnih lastnosti eno izmed pomembnih dinamskih lastnosti predstavlja tudi dušenje, prisotno pri vseh realnih sistemih. V dosedanji obravnavi dinamskega odziva strukture v različnih domenah smo predpostavili viskozno naravo dušenja. Za aproksimacijo dušenja uporabljamo poenostavljene modele, med katerimi sta v nadaljevanju predstavljena histerezni in viskozni model dušenja [2].

### 2.5.1 Predpostavka proporcionalnega dušenja

Proporcionalno viskozno dušenje predstavlja primer, v katerem dušilno matriko zapišemo kot linearne kombinacije masne in togostne matrike:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}, \quad (25)$$

kjer sta parametra  $\alpha$  in  $\beta$  v splošnem poljubni realni pozitivni konstanti. Tovrstna formulacija dušenja je matematično priročna zaradi poenostavite reševanja sistema enačb. Za praktično uporabno se izkaže v primeru obravnave rahlo dušenih sistemov. Gibalno enačbo

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + (\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K})\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (26)$$

diagonaliziramo z lastnimi vektorji nedušenega sistema (določenimi iz enačbe (26), ko je  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ ):

$$\mathbf{m}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{c}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{k}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \quad (27)$$

kjer je  $\mathbf{c}$  diagonalna matrika matrika modalnega dušenja. Enačba (27) tako vsebuje  $m$  neodvisnih enačb, kjer  $r$ -to dušeno lastno frekvenco in pripadajoči razmernik dušenja izrazimo kot<sup>7</sup>:

$$\bar{\omega}_r = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}, \quad (28)$$

$$\xi_r = \frac{\alpha}{2\omega_r} + \frac{\beta\omega_r}{2}. \quad (29)$$

Posledično ima sistem za katerega predpostavimo proporcionalno viskozno dušenje enake lastne vektorje kot njegov nedušen ekvivalent.

Podobno lahko obravnavamo proporcionalno histerezno dušenje, kjer dušilno matriko zapišemo kot linearne kombinacije masne in togostne matrike:

$$\mathbf{D} = \mu \mathbf{M} + \nu \mathbf{K}, \quad (30)$$

---

<sup>7</sup>Glej teorijo nihanja dušenega sistema z eno prostostno stopnjo [3].

kjer sta  $\mu$  in  $\nu$  poljubni pozitivni realni konstanti. Gibalna enačba tako dobi obliko:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + j(\mu\mathbf{M} + \nu\mathbf{K})\mathbf{u} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (31)$$

Če enačbo (31) diagonaliziramo z lastnimi vektorji nedušenega ekvivalentnega sistema ( $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ , kar pomeni, da ima tudi sistem z proporcionalnim histereznim dušenjem enake lastne oblike kot nedušen sistem), lastne dušene frekvence sistema izrazimo kot:

$$\bar{\omega}_r^2 = \omega_r^2(1 + j\eta_r), \quad (32)$$

kjer je:

$$\eta_r = \nu + \frac{\mu}{\omega_r^2}. \quad (33)$$

### 2.5.2 Histerezni model dušenja

Prostorski model za primer histereznega oz. strukturnega dušenja popisuje gibalna enačba:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + j\mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (34)$$

kjer  $\mathbf{D}$  predstavlja histerezno dušilno matriko. Zavoljo preglednosti definiramo kompleksno togostno matriko:

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{K} + j\mathbf{D}, \quad (35)$$

in enačba (34) dobi obliko:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_c\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (36)$$

Podobno kot v nedušenem primeru lahko, z Eulerjevim nastavkom in reševanjem enačbe lastnega nihanja, preidemo na reševanje kompleksnega problema lastnih vrednosti:

$$(-\bar{\omega}_r^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}_c) \mathbf{x}_r = \mathbf{0}. \quad (37)$$

Z rešitvijo enačbe (37) dobimo  $n$  kompleksnih lastnih vrednosti  $\bar{\omega}_r^2$ , za katere obstaja zveza z nedušeno lastno frekvenco  $\omega_r$  in faktorjem histereznih izgub  $\eta_r$  v obliki enačbe (32). Nabor lastnih vrednosti predstavimo z diagonalno matriko  $\bar{\omega}_r^2$ , pripadajoče kompleksne lastne vektorje,  $\bar{\Phi}$  pa sestavimo v obliki modalne matrike  $\bar{\Phi}$ . Pri tem ponovno predpostavimo masno normiranje, tako da velja:

$$\bar{\Phi}^T \mathbf{M} \bar{\Phi} = \mathbf{I}, \quad (38)$$

$$\bar{\Phi}^T (j\mathbf{D} + \mathbf{K}) \bar{\Phi} = \bar{\omega}_r^2. \quad (39)$$

Za prehod v odzivni model Fourierovo transformacijo izvedemo na enačbi (34):

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{U} + j \mathbf{D} \mathbf{U} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (40)$$

in tako definiramo zvezo med prostorskim in odzivnim modelom:

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{F}} = \left( -\omega^2 \mathbf{M} + j \mathbf{D} + \mathbf{K} \right)^{-1}. \quad (41)$$

Pogosteje sicer uporabljamo zvezo med modalnim in odzivnim modelom, kjer izvedemo superpozicijo  $m \leq n$  modalnih prispevkov:

$$\mathbf{Y} \approx \sum_{r=1}^m \frac{r \bar{\Phi}_r \bar{\Phi}^T}{-\omega^2 + \bar{\omega}_r^2} = \sum_{r=1}^m \frac{r \bar{\Phi}_r \bar{\Phi}^T}{-\omega^2 + \omega_r^2 + j \eta_r \omega_r^2} = \sum_{r=1}^m \frac{r \bar{\mathbf{A}}_r}{-\omega^2 + \omega_r^2 + j \eta_r \omega_r^2}. \quad (42)$$

Uporaba histereznega modela dušenja omogoča enostavno obravnavo dušenih sistemov z več prostostnimi stopnjami in hkrati dobro popisuje mehanizem strukturnega dušenja. Kljub temu je uporabnost te formulacije upravičena le za obravnavo ustaljenega odziva pri vzbujenem nihanju, medtem ko je za obravnavo impulznega vzbujanja oz. prostega nihanja manj primerna [4].

### 2.5.3 Viskozni model dušenja

Prostorski model z primer viskozno dušenega sistema popisuje gibalna enačba:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (43)$$

kjer  $\mathbf{C}$  predstavlja viskozno dušilno matriko.

Prehod v modalni model za primer viskoznega dušenja izvedemo s predhodno transformacijo v domeno stanja prostora, kjer gibalno enačbo zapišemo kot sistem  $2n$  homogenih diferencialnih enačb prvega reda. Za potrebe omenjene transformacije definiramo nov vektor spremenljivk  $\mathbf{x} = [\mathbf{u} \ \dot{\mathbf{u}}]^T$  in tako dobimo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (44)$$

oz. enostavneje:

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (45)$$

Za splošno rešitev problema uporabimo Laplacevo transformacijo, pri čemer transformacijo vektorja prostostnih stopenj  $\mathbf{x}$  izvedemo kot  $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}$ , Laplacevo spremenljivko pa označimo s  $s$ . Pripadajoči problem lastnih vrednosti zapišemo v obliki:

$$(s \mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{X} = \mathbf{0}. \quad (46)$$

Rešitev predstavlja  $2n$  kompleksnih lastnih vrednosti, ki nastopajo v kompleksno konjugiranih parih. Posamezen par zato označimo s  $s_r$  in  $s_r^*$ . Zanj velja zveza z nedušeno lastno frekvenco  $\omega_r$  in viskoznim razmernikom dušenja  $\xi_r$  v obliki:

$$\begin{aligned} s_r &= -\omega_r \xi_r + j \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \\ s_r^* &= -\omega_r \xi_r - j \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \end{aligned} \quad (47)$$

Celoten nabor lastnih vrednosti predstavimo v obliki diagonalne matrike  $\mathbf{s}_r$ . Pripadajoči lastni vektorji prav tako zavzamejo obliko kompleksno konjugiranih parov  ${}_r \tilde{\psi} \in \mathbb{Z}^{2n \times 1}$  in  ${}_r \tilde{\psi}^*$ , sestavljeni pa so kot:

$${}_r \tilde{\psi} = \begin{bmatrix} {}_r \psi \\ {}_r \psi s_r \end{bmatrix} \quad \text{ter} \quad {}_r \tilde{\psi}^* = \begin{bmatrix} {}_r \psi^* \\ {}_r \psi s_r^* \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Lastne vektorje združimo kot stolpce v modalno matriko  $\tilde{\Psi} \in \mathbb{Z}^{2n \times 2n}$ . V nadaljevanju predpostavljamo A-normalizacijo lastnih vektorjev, tako da velja<sup>8</sup>:

$$\tilde{\Psi}^T \mathbf{A} \tilde{\Psi} = \mathbf{I}, \quad (49)$$

$$\tilde{\Psi}^T \mathbf{B} \tilde{\Psi} = \mathbf{s}_r. \quad (50)$$

Rešitev za vsak  $r \in [0, n]$  obravnavamo kot rešitev enačbe:

$$\left( s_r^2 \mathbf{M} + s_r \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) {}_r \psi = \mathbf{0}. \quad (51)$$

Ob tem je mogoče (z upoštevanjem ortogonalnih lastnosti lastnih vektorjev) z dobljeno rešitvijo diagonalizirati izvorni prostorski model in posledično rešitev izraziti v povezavi z vektorjem nedušenih lastnih frekvenc  $\omega_r$  in vektorjem pripadajočih razmernikov dušenja  $\xi_r$ :

$$\frac{\tilde{\Psi}^{*T} \mathbf{K} \tilde{\Psi}}{\tilde{\Psi}^{*T} \mathbf{M} \tilde{\Psi}} = \omega_r^2, \quad (52)$$

$$\frac{\tilde{\Psi}^{*T} \mathbf{C} \tilde{\Psi}}{\tilde{\Psi}^{*T} \mathbf{M} \tilde{\Psi}} = 2 \omega_r \xi_r. \quad (53)$$

Odzivni model zapišemo preko Fourierove transformacije enačbe (43):

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{U} + j \omega \mathbf{C} \mathbf{U} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (54)$$

in tako dobimo admitančno matriko v obliki:

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{F}} = \left( -\omega^2 \mathbf{M} + j \omega \mathbf{C} + \mathbf{K} \right)^{-1}. \quad (55)$$

---

<sup>8</sup>V primeru kompleksnih lastnih vektorjev se ekvivalentne rešitve lahko medsebojno razlikujejo tako za poljubno neničelno skaliranje applitude, kot tudi za poljuben konstanten fazni zamik.

Odzivni model lahko izrazimo tudi z modalnim modelom, tako da izvedemo superpozicijo  $m \leq n$  modalnih prispevkov:

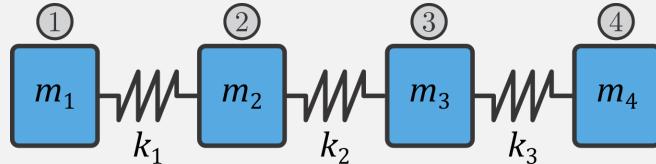
$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &\approx \sum_{r=1}^m \left( \frac{{}_r\boldsymbol{\psi} {}_r\boldsymbol{\psi}^T}{j\omega - s_r} + \frac{{}_r\boldsymbol{\psi}^* {}_r\boldsymbol{\psi}^{*\top}}{j\omega - s_r^*} \right) \\ &= \sum_{r=1}^m \left( \frac{{}_r\mathbf{R}}{\omega_r \xi_r + j(\omega - \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2})} + \frac{{}_r\mathbf{R}^*}{\omega_r \xi_r + j(\omega + \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2})} \right), \end{aligned} \quad (56)$$

kjer matriko modalnih konstant predstavlja  ${}_r\mathbf{R} = {}_r\boldsymbol{\psi} {}_r\boldsymbol{\psi}^T$ .

## 2.6 Primer: Dinamski model strukture v različnih domenah

```
import numpy as np  
import pandas as pd  
import matplotlib.pyplot as plt
```

Obravnavamo enostaven diskreten sistem s štirimi prostostnimi stopnjami:



Definiramo masno matriko:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}.$$

```
m1 = 1 # kg  
m2 = 1 # kg  
m3 = 1 # kg  
m4 = 1 # kg  
  
m = np.array([m1,m2,m3,m4])
```

```
M = np.asarray([[m1,0,0,0],  
                [0,m2,0,0],  
                [0,0,m3,0],  
                [0,0,0,m4]])
```

```
display(M)
```

```
array([[1, 0, 0, 0],  
       [0, 1, 0, 0],  
       [0, 0, 1, 0],  
       [0, 0, 0, 1]])
```

Definiramo togostno matriko:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}.$$

```
k1 = 200 # N/m
k2 = 200 # N/m
k3 = 200 # N/m

k = np.array([k1,k2,k3])
```

```
K = np.asarray([[k1,-k1,0,0],
               [-k1,k1+k2,-k2,0],
               [0,-k2,k2+k3,-k3],
               [0,0,-k3,k3]])
```

```
display(K)
```

```
array([[ 200, -200,     0,     0],
       [-200,  400, -200,     0],
       [    0, -200,  400, -200],
       [    0,     0, -200,  200]])
```

### 2.6.1 Reševanje problema lastnih vrednosti

Z znano masno in togostno matriko izračunamo lastne vrednosti in lastne vektorje obravnavanega sistema. Slednje izvedemo s pomočjo naslednjih paketov:

```
import scipy as sp
from scipy.sparse import linalg,diags

eig_val, eig_vec = sp.linalg.eigh(K, M)

eig_val.sort()
eig_freq = np.sqrt(np.abs(np.real(eig_val)))
```

Opozorilo! Bodite pozorni na število lastnih vrednosti (prostostnih stopenj), saj je od tega odvisen računski čas postopka.

## 2.6.2 Izračun frekvenčnih prenosnih funkcij: Neposredna sintetizacija

Frekvenčne prenosne funkcije za sisteme z majhnim številom prostostnih stopenj lahko učinkovito izračunamo z metodo neposredne sintetizacije:

$$(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}) \mathbf{U} e^{j\omega t} = \mathbf{F} e^{j\omega t},$$

$$(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}) \mathbf{U} = \mathbf{F}.$$

Admitančno matriko izračunamo po naslednji enačbi:

$$\mathbf{Y}(\omega) = \frac{\mathbf{U}(\omega)}{\mathbf{F}(\omega)} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1}.$$

Pred izračunom definiramo vektor frekvenc:

```
f_start = 0.01
f_end = 5
f_resolution = .01
freq = np.arange(f_start, f_end, f_resolution)

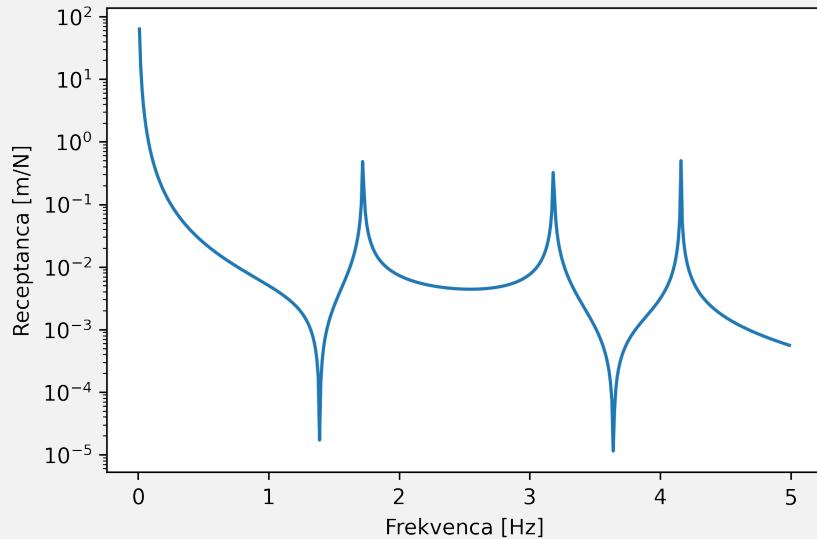
ome = 2 * np.pi * freq
```

Z neposredno sintetizacijo izračunamo frekvenčne prenosne funkcije za vse kombinacije prostostnih stopenj, vključenih v masno in togostno matriko sistema. To je večkrat problematično v primeru kompleksnih modelov z večjim številom prostostnih stopenj, saj je postopek časovno in spominsko potraten.

```
FRF_1 = np.zeros((4,4,len(freq)))

for i,ome_i in enumerate(ome):
    FRF_1[:, :, i] = np.linalg.inv(K-ome_i**2*M)
```

```
plt.subplots(dpi=300)
plt.semilogy(freq,np.abs(FRF_1[0,1,:]));
plt.xlabel('Frekvenca [Hz]');
plt.ylabel('Receptanca [m/N]');
```



### 2.6.3 Izračun frekvenčnih prenosnih funkcij: Modalna superpozicija

Z modalno superpozicijo frekvenčno prenosno funkcijo izračunamo kot vsoto modalnih oblik pri posamezni frekvenčni liniji:

$$Y_{ij} = \sum_{r=1}^m \frac{\phi_{i,r} \phi_{j,r}}{\omega_r^2 - \omega^2}.$$

```
no_modes = len(eig_val)
FRF_2 = np.zeros((no_modes, no_modes, len(freq)), dtype=complex)

ome = 2 * np.pi * freq

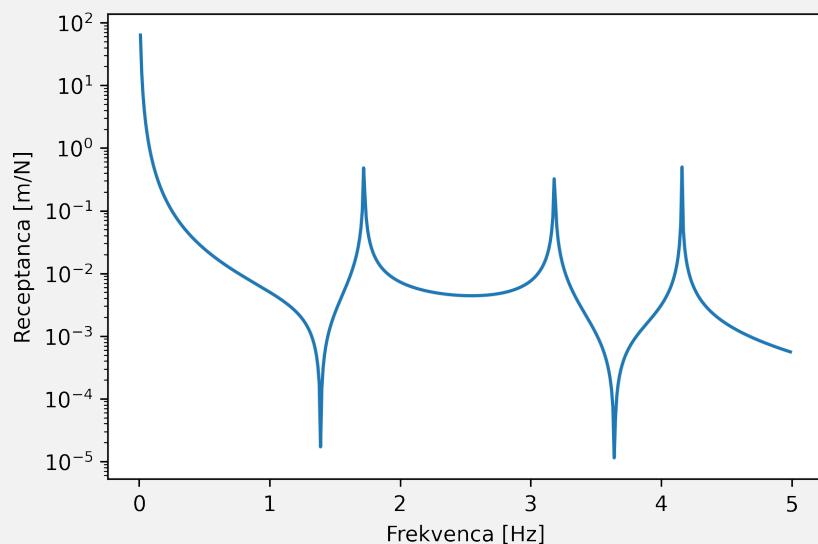
# za vsak input
for i in range(no_modes):

    # za vsak output
    for j in range(no_modes):

        # za vsako modalno obliko
        for no in range(eig_vec.shape[1]):
            FRF_2[i, j] += eig_vec[i, no] * eig_vec[j, no] /\
                            (-ome ** 2 + eig_freq[no] ** 2)
```

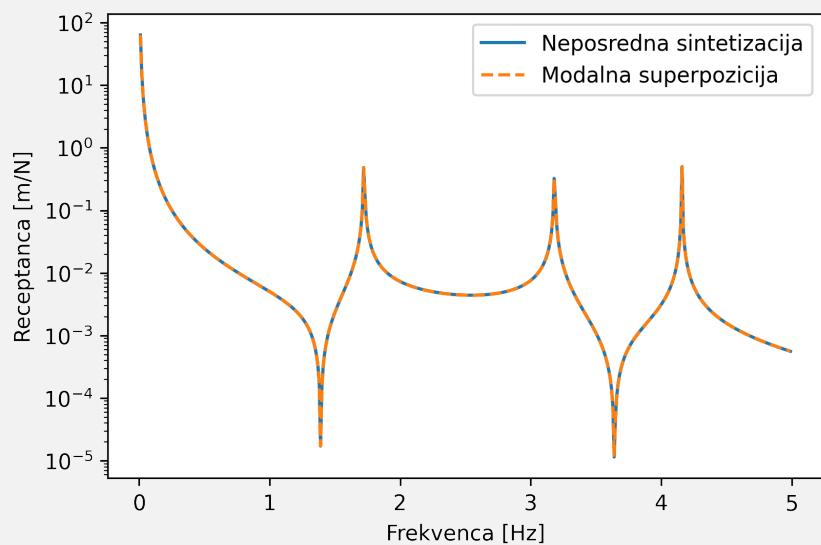
Opozorilo! Tudi če želimo frekvenčne prenosne funkcije izračunati zgolj v omejenem frekvenčnem razponu, moramo za potrebe metode modalne superpozicije v izračun vključiti modalne oblike v neposredni okolici frekvenčnega območja, sicer je sintetizacija zaradi manjka spodnjega in zgornjega ostanka modalnih oblik nepopolna. V našem primeru je ujemanje med obema pristopoma popolno, saj smo v modalno superpozicijo vključili vse modalne oblike sistema.

```
plt.subplots(dpi=300)
plt.semilogy(freq,np.abs(FRF_2[0,1,:]));
plt.xlabel('Frekvenca [Hz]');
plt.ylabel('Receptanca [m/N]');
```



Na koncu še primerjamo oba pristopa sintetizacije frekvenčnih prenosnih funkcij:

```
plt.subplots(dpi=300)
plt.semilogy(freq,np.abs(FRF_1[0,1,:]), label='Neposredna\u2014sintetizacija')
plt.semilogy(freq,np.abs(FRF_2[0,1,:]), '--', label='Modalna\u2014superpozicija');
plt.legend(loc=0);
plt.xlabel('Frekvenca [Hz]');
plt.ylabel('Receptanca [m/N]');
```



### 3 Eksperimentalni dinamski model

Eksperimentalna modalna analiza predstavlja področje strukturne dinamike [4–6], katere cilj je identificirati modalne parametre obravnavane strukture (torej lastne frekvence, lastne oblike in dušilne parametre). Modalni parametri niso neposredno merljivi, pač pa njihovo identifikacijo izvedemo na podlagi eksperimentalnega odzivnega modela. Ta je sestavljen iz frekvenčnih prenosnih funkcij (FPF), katerih cenilke določimo iz izmerjenih časovnih vrst vzbujanja  $F$  in odziva  $U$  na obravnavani strukturi.

#### 3.1 Osnovni koncepti in omejitve

Izvedbo vzbujanja in zajem odziva strukture običajno izvedemo na smiselno izbrani podmnožici vseh razpoložljivih prostostnih stopenj obravnavanega sistema. Za vsako prostostno stopnjo je pri tem potrebno upoštevati pripadajočo lokacijo, orientacijo in tip merjene fizikalne veličine.

Za potrebe vzbujanja v okviru merjenja odzivnega modela strukture sta široko uveljavljena dva pristopa: impulzno vzbujanje z modalnim kladivom in uporaba stresalnika. V obeh primerih vzbujevalno silo aproksimiramo s točkovno silo, ki je fizikalno komplementarna translacijskemu odzivu. Kot alternativne načine vzbujanja strukture se pri aplikaciji brezdotičnih metod uporablja tudi magnetno vzbujanje ali vzbujanje s curkom zraka. Aktivne so tudi raziskave na področju vzbujanja s točkovnim momentom, vendar je njihova praktična uporabnost zaenkrat omejena. Dinamski odziv struktur merimo z različnimi zaznavali, pri čemer najpogosteje uporabljamo merilnike translacijskega pospeška in laserske merilnike hitrosti (laserske vibrometre), pogosto pa tudi zaznavala deformacij. Kot alternativne metode merjenja lahko omenimo merilnike rotacijskih pospeškov, hitre kamere in akustične kamere.

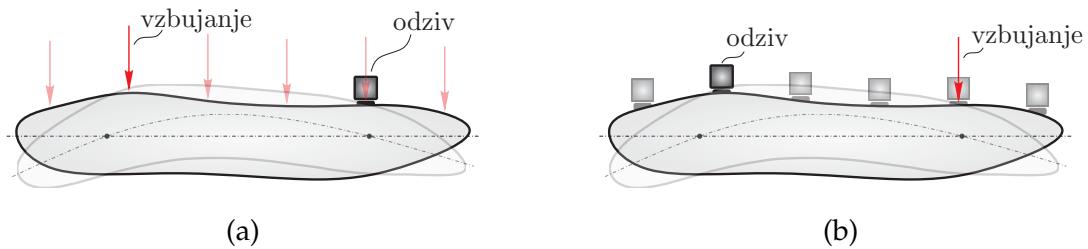
Po izbiri ustrezne merilne opreme to v nadaljevanju namestimo na vnaprej izbrana mesta (prostostne stopnje) na strukturi. Ob vzbujanju strukture izvedemo sočasno meritev časovnih vrst tako vzbujanja kot tudi odziva. Na osnovi obeh s postopkom procesiranja signalov [4] ocenimo pripadajoče cenilke frekvenčnih prenosnih funkcij, ki predstavljajo elemente odzivnega modela. V primeru, ko sta prostostni stopnji soležni (se ujemata v lokaciji, smeri in komplementarnosti fizikalnih veličin - npr. sila, pomik), izmerek imenujemo direktna FPF, v nasprotnem primeru pa gre za križno FPF. Na podlagi izmerjenega odzivnega modela izvedemo identifikacijo modalnih parametrov. Za vsak ( $r$ -ti) nihajni način pripadajoča lastna frekvenca in razmernik dušenja (imenovan tudi faktor izgub) predstavljata globalna modalna parametra, saj sta neodvisna od vzbujevalne in odzivne prostostne stopnje. To pomeni, da v kolikor nihajni način ob danem vzbujanju dejansko vzbudimo in da merilnik pripadajoči odziv

lahko zazna, lastno frekvenco in razmernik dušenja določimo iz poljubne FPF. Lokalne modalne parametre predstavljajo komponente lastnih vektorjev.

Iz strukture matrike modalnih konstant<sup>9</sup> pri  $r$ -ti lastni frekvenci:

$$r\mathbf{A} = r\boldsymbol{\phi} r\boldsymbol{\phi}^T = \begin{bmatrix} r\phi_1 r\phi_1 & \cdots & r\phi_1 r\phi_k & \cdots & r\phi_1 r\phi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\phi_j r\phi_1 & \cdots & r\phi_j r\phi_k & \cdots & r\phi_j r\phi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\phi_n r\phi_1 & \cdots & r\phi_n r\phi_k & \cdots & r\phi_n r\phi_n \end{bmatrix} \quad (57)$$

opazimo, da so vrstice oz. stolpci linearno odvisni. To pomeni, da je teoretično ob poznavanju ene same polne vrstice ali stolpca matrike modalnih konstant (na osnovi ene vrstice ali stolpca admitančne matrike strukture) mogoče določiti celoten  $r$ -ti lastni vektor, pri čemer ustrezno normiranje izvedemo na podlagi izmerka direktne FPF. Ob poznavanju vseh modalnih parametrov z upoštevanjem recipročnosti lahko določimo tudi polni odzivni model strukture. Eksperimentalni postopek meritve ene vrstice ali stolpca admitančne matrike je prikazan na sliki 3.



Slika 3: Koncept izvedbe meritve: a) meritev vrstice odzivnega modela z metodo premikanja vzbujanja (ang. *roving hammer*); b) meritev stolpca odzivnega modela z metodo premikanja zaznavala (ang. *roving sensor*).

Nasprotno pa so v praksi prisotne različne eksperimentalne omejitve, med katerimi velja izpostaviti sledeče:

- Za izvedbo normiranja modalnih konstant je potrebna meritev direktne FPF, ki je večkrat problematična. V prvi vrsti je potrebno zagotoviti fizikalno komplementarnost vzbujevalno-odzivnega para, pri čemer smo (z uveljavljenimi pristopi) omejeni na vzbujanje s točkovno silo. To nam omeji tudi možnosti merjenja odziva; za meritev direktne FPF razpolagamo le z možnostjo uporabe zaznavala translacijskega odziva. Hkrati je zagotovitev lokacijske in smerne soležnosti pogosto problematična zaradi geometrijskih omejitev in jo izpolnimo

<sup>9</sup>Zaradi enostavnosti prikazujemo modalne konstante za primer nedušenega oz. proporcionalno dušenega sistema iz enačbe (23). Prikazan koncept je sicer splošen.

le približno.

- Nabor izbranih vzbujevalnih prostostnih stopenj mora zagotoviti zadostno nadzorovanost (ang. *controllability*), da v obravnavanem frekvenčnem območju vzbudimo vse lastne nihajne načine strukture. Dodatno mora nabor odzivnih prostostnih stopenj zagotavljati zadostno opazovanost (ang. *observability*), da v zadostni prostorski ločljivosti zazna vse vzbujene nihajne načine. Pri analizi kompleksnih struktur z visoko modalno gostoto (in še neznanimi dinamskimi lastnostmi) je določitev ustreznega števila, lokacij in smeri meritnih in odzivnih mest za vse nihajne načine problematična, kar lahko vodi tudi v več iteracij meritve.
- Pri eksperimentalnem modeliranju je neizogibna prisotnost meritnih pogreškov, ki je v veliki meri odvisna od izbire eksperimentalnih pristopov, metodam procesiranja signalov in razpoložljive meritne opreme. Ocena meritne negotovosti je zahtevna, saj so vplivi tako frekvenčno kot tudi prostorsko odvisni, veliko-krat pa postopek modalne identifikacije vsebuje tudi več korakov, ki predvideva subjektivno odločitev uporabnika.

Iz vseh naštetih razlogov je predpostavka zadostnosti meritve ene same vrstice ali stolpca za realne primere neprimerna. Za zanesljivo izvedbo modalne identifikacije je tako potrebno zagotoviti določeno mero predoločenosti, ki jo dosežemo z izvedbo več-referenčnih (ang. *multi-reference, poly-reference*) meritov.

### 3.2 Eksperimentalni zajem frekvenčnih prenosnih funkcij

$j$ -ti stolpec admitančne matrike  $\mathbf{Y}(\omega)$  lahko ocenimo z aplikacijo sile na  $j$ -to prostostno stopnjo ( $f_j(t)$ ), kjer sočasno merimo odziv  $\ddot{u}(t)$  na večjem številu prostostnih stopenj<sup>10</sup>. Časovne vrste izmerjenih signalov ustrezno vzorčimo, digitaliziramo, in transformiramo v frekvenčno domeno.

Navadno so v izmerjenih časovnih vrstah poleg koristnega signala prisotni tudi meritni pogreški (npr. šum pri meritvi, negotovost lokacije in orientacije aplikacije sile zaradi načina izvedbe eksperimenta). Dobra praksa je, da admitanco strukture oce-

<sup>10</sup>To nakazuje, zakaj v praksi merimo admitanco strukture in ne impedance. Praktično je namreč nemogoče kontrolirano aplicirati pomik zgolj na eno prostostno stopnjo na strukturi in meriti silo na ostalih prostostnih stopnjah. Obraten postopek, ko zgolj v eni točki apliciramo silo in merimo pomike, je enostavnejši. V kolikor imamo na voljo polno admitančno matriko  $\mathbf{Y}(\omega)$ , lahko vedno impedanco izračunamo po enačbi (4). Ta postopek ni enakovreden invertiranju posameznih frekvenčnih prenosnih funkcij!

nimo iz večjega števila meritov. V ta namen FPF ocenimo preko dveh cenilk,  $H_1$  in  $H_2$ .

Zavoljo enostavnosti si poglejmo pristop, ko FPF ocenimo iz enega spektra sile ( $f_k$ ) in enega spektra odziva ( $u_k$ ), kjer se  $k$  nanaša na posamezno ponovitev meritve ( $k \in [1, \dots, n_m]$ ). V primeru, ko so strukture popolno linearne ter pri meritvi ni prisotnih meritnih negotovosti, za vsako ponovitev meritve izračunamo identično frekvenčno prenosno funkcijo<sup>11</sup>:

$$Y = \frac{u_k}{f_k}, \quad \forall k. \quad (58)$$

Identično FPF dobimo tudi v primeru povprečenja vseh  $n_m$  meritov:

$$Y = \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} \frac{u_k}{f_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n_m} u_k}{\sum_{k=1}^{n_m} f_k}. \quad (59)$$

### 3.2.1 Cenilki frekvenčne prenosne funkcije

Pri dejanskem eksperimentiranju je pristop z uporabo enačbe (59) neprimeren, saj je na vhodnem in izhodnem signalu meritve vedno prisotna meritna negotovost. Pri meritvi tako izmerimo:

$$f_k = \hat{f}_k + e_{f,k} \quad u_k = \hat{u}_k + e_{u,k}. \quad (60)$$

Spremenljivki  $e_{f,k}$  in  $e_{u,k}$  predstavljata naključne napake v izmerjenem signalu, medtem ko sta  $\hat{f}_k$  in  $\hat{u}_k$  dejansko vzbujanje in odziv sistema, ki pa neposredno nista meritiva. Za minimiziranje vpliva naključnih napak FPF ocenimo preko povprečenja večjega števila meritov. Za večje število ponovljenih meritov izračunamo avto- in križna močnostna spektra<sup>12</sup>:

$$G_{u,u} = \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} u_k u_k^*, \quad (61)$$

$$G_{f,f} = \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} f_k f_k^*, \quad (62)$$

$$G_{u,f} = \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} u_k f_k^*, \quad (63)$$

$$G_{f,u} = \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} f_k u_k^*. \quad (64)$$

---

<sup>11</sup>Na tem mestu privzamemo, da so časovni signali odziva in sile že transformirani v frekvečno domeno, ter vse nadaljne enačbe veljajo za individualno frekvenčno linijo. Zavoljo preglednosti tako izpustimo zapis odvisnosti od krožne frekvence.

<sup>12</sup>Nadpis  $(\star)^*$  predstavlja kompleksno konjugiranje.

Če so pri meritvah prisotni naključni pogreški, naključno porazdeljeni okoli prave vrednosti, velja:

$$\frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} e_{u,k} = 0, \quad \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} e_{f,k} = 0, \quad \text{ko } n_m \rightarrow \infty. \quad (65)$$

Zaradi naključne narave so pogreški tudi nekorelirani:

$$\frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} e_{u,k} e_{f,k} = 0, \quad \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} \hat{u}_k e_{f,k} = 0, \quad \text{itd., ko } n_m \rightarrow \infty. \quad (66)$$

Zakaj torej, glede na enačbo (65), FPF ne izračunamo po enačbi (59)? Pri povprečenju meritev se namreč tudi koristna signala  $f_k$  in  $u_k$  približujeta 0. Razlog je v naključni fazi signalov pri posamezni ponovitvi meritve. Vseeno pa sta fazi koristnih signalov ( $\hat{f}_k$  in  $\hat{u}_k$ ) konstantni gledano relativno ena na drugo. Prav to dejstvo omogoča konistentno oceno FPF z uporabo avto- in križnih močnostnih spektrov. Ker vemo, da s povprečenjem minimiziramo naključno napako, lahko zapišemo:

$$G_{u,f} \approx \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} \hat{u}_k \hat{f}_k^* = G_{\hat{u}\hat{f}}, \quad (67)$$

$$G_{f,u} \approx \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} \hat{f}_k \hat{u}_k^* = G_{\hat{f}\hat{u}}, \quad (68)$$

$$G_{u,u} \approx \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} \|\hat{u}_k\|^2 + \|e_{u,k}\|^2 = G_{\hat{u}\hat{u}} + G_{e_u e_u}, \quad (69)$$

$$G_{f,f} \approx \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} \|\hat{f}_k\|^2 + \|e_{f,k}\|^2 = G_{\hat{f}\hat{f}} + G_{e_f e_f}. \quad (70)$$

Očitno se naključni pogreški povprečijo z večjim številom ponovitev meritev v izrazih za križna močnostna spektra  $G_{uf}$  in  $G_{fu}$ . V kolikor je razmerje koristnega signala napram šumu visoko, je tudi v avto močnostnih spektrih napaka majhna (kot posledica kvadriranja). Nadalje definiramo  $H_1$  in  $H_2$  cenilki frekvenčne prenosne funkcije  $Y$ :

$$H_1 = \frac{G_{uf}}{G_{ff}} \approx \frac{G_{\hat{u}\hat{f}}}{G_{\hat{f}\hat{f}}} \left( \frac{1}{1 + \frac{G_{e_f e_f}}{G_{\hat{f}\hat{f}}}} \right) = Y \left( \frac{1}{1 + \frac{G_{e_f e_f}}{G_{\hat{f}\hat{f}}}} \right) \leq Y, \quad (71)$$

$$H_2 = \frac{G_{uu}}{G_{fu}} \approx \frac{G_{\hat{u}\hat{u}}}{G_{\hat{f}\hat{u}}} \left( 1 + \frac{G_{e_u e_u}}{G_{\hat{u}\hat{u}}} \right) = Y \left( 1 + \frac{G_{e_u e_u}}{G_{\hat{u}\hat{u}}} \right) \geq Y, \quad (72)$$

kjer je  $Y = G_{\hat{u}\hat{u}}/G_{\hat{f}\hat{f}}$  dejanska frekvenčna prenosna funkcija. Ker so signali vedno šumni, cenilki  $H_1$  in  $H_2$  nosita informacijo o spodnjem in zgornjem intervalu  $Y$  (nakazano z neenačajem v enačbi (71)). Kvaliteto meritev ocenimo preko koherenčne

funkcije<sup>13</sup>:

$$\gamma^2 = \frac{H_1}{H_2} \in [0, 1]. \quad (73)$$

Tu se zastavlja vprašanje, katero cenilko izbrati v praktičnih aplikacijah. Če strukturo vzbujamo z modalnim kladivom, imamo opravka z visokim razmerjem med signalom in šumom na vhodu v sistem (majhen  $e_f$ <sup>14</sup>,  $e_u$  minimiziramo s povprečenjem), je primernejša uporaba  $H_1$ . Kvaliteta ocene FPF je tudi frekvenčno odvisna; v resonanci je razmerje izhodnega signala napram šumu visoko in obratno v anti-resonancah.

Za testiranje z stresalnikom običajno uporabljamo vzbujanje z naključnim signalom, ki ga v postopku procesiranja razdelimo na večje število individualnih segmentov. Ti se lahko medsebojno tudi prekrivajo, saj tako ustvarimo večje število ponovitev  $n_m$ . Postopek imenujemo Welch-eva metoda.

### 3.3 Identifikacija modalnih parametrov

Identifikacija modalnih parametrov predstavlja zadnji korak eksperimentalne modalne analize. Izhodišče predstavlja eksperimentalni odzivni model, na podlagi katerega z upoštevanjem teoretičnih relacij z modalnim modelom ocenimo pripadajoče modalne parametre.

V ta namen ločujemo množico različnih metod, med katerimi naj kot preprostejše izpostavimo metodo polovične moči, metodo prileganja kroga in Ewins-Gleesonovo metodo [4, 5]. V skupino naprednejših metod prištevamo metodo kompleksnih eksponentov na podlagi minimalnega kvadratičnega odstopanja (ang. *least-squares complex exponential* - LSCE) in njeno frekvenčno različico LSCF (ang. *least-squares complex frequency*) [7] ter metodo za identifikacijo modalnih konstant LSFD (ang. *least-squares frequency-domain*) [7].

---

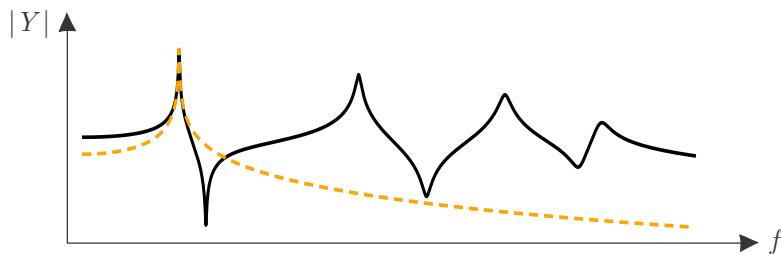
<sup>13</sup>Vrednosti blizu 1 nakazujejo dobro ujemanje med cenilkama. To pomeni, da je sistem linearen, ter da sta signala  $u_k$  in  $f_k$  medsebojno popolnoma povezana. Za vrednosti blizu 0 sta signala nekorelirana, kar nakazuje ne nelinearen sistem, prisotnost šuma na vhodu ali izhodu, ali prisotnost drugih vzbujevalnih sil ( $u_k$  ni posledica zgolj  $f_k$ ).

<sup>14</sup>Dobra praksa je uporaba pravokotnega okna na vzbujevalni sili, aplicirani z modalnim kladivom. Ko je kladivo v kontaktu s strukturo, je vrednost okna enaka 1, drugje 0.

## 4 Metode modalne identifikacije

### 4.1 Metoda polovične moči

Metoda polovične moči je ena izmed enostavnihjih metod modalne identifikacije, ki temelji na predpostavki, da so posamezne lastne frekvence strukture med seboj zadovoljivo narazen. To pomeni, da je frekvenčni odziv strukture (frekvenčna prenosna funkcija) v okolici individualne resonance odvisen zgolj od pripadajoče lastne oblike, ter da je delež ostalih lastnih oblik na istem mestu zanemarljiv (slika 4). Sistem z več prostostnimi stopnjami lahko tako v okolici posamezne lastne frekvence obravnavamo kot sistem z eno prostostno stopnjo, kar močno poenostavi matematični model odziva strukture. Zaradi enostavnosti metode lahko obravnavamo sistem tako z viskoznim, kot tudi histereznim dušenjem, pri čemer se bomo zavoljo preglednosti omejili zgolj na slednjega.



Slika 4: Odziv sistema kot vsota prispevkov modalnih oblik. (—) – frekvenčni odziv strukture, (---) – prispevek k odzivu strukture zaradi prve modalne oblike strukture.

Če obravnavamo frekvenčno prenosno funkcijo pri  $r$ -ti lastni frekvenci  $\omega_r$ , ob predpostavki histereznega dušenja njeni vrednosti izrazimo z enačbo (42):

$$Y_{ij}(\omega_r) = \frac{rA_{ij}}{j\eta_r \omega_r^2}. \quad (74)$$

Ker vrednost  $Y_{ij}(\omega_r)$  poznamo iz celine frekvenčne prenosne funkcije  $H_1$  ali  $H_2$ , neznanke ostajajo  $r$ -ta modalna konstanta  $rA_{ij}$ ,  $r$ -ta lastna frekvencia  $\omega_r$  in pripadajoči razmernik histereznega dušenja  $\eta_r$ . Določimo jih na sledeč način:

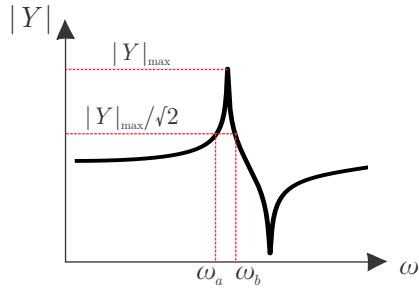
1.  $r$ -to lastno frekvenco ocenimo neposredno iz magnitude frekvenčne prenosne funkcije  $Y_{ij}$ , saj vemo, da je odziv sistema z eno prostostno stopnjo največji prav pri lastni frekvenci:

$$Y_{ij}(\omega_r) = \max(Y_{ij}(\omega)). \quad (75)$$

2.  $r$ -ti razmernik histereznega dušenja ocenimo iz širine resonančnega vrha  $r$ -te lastne frekvence. Točki levo in desno od resonančnega vrha, kjer amplitude

FPF pade na vrednost polovične moči signala  $\frac{|Y_{ij}(\omega_r)|}{\sqrt{2}}$ , označimo kot  $Y_{ij,a}(\omega_a)$  in  $Y_{ij,b}(\omega_b)$  (slika 5). Iz pripadajočih frekvenc razmernik histereznega dušenja ocenimo po enačbi (celotna izpeljava razmernika dušenja je prikazana v poglavju 4.3):

$$\eta_r = \frac{-\omega_a^2 + \omega_b^2}{2\omega_r^2} \approx \frac{\omega_b - \omega_a}{\omega_r}. \quad (76)$$



Slika 5: Točki polovične moči.

3. Z znanima vrednostima  $\omega_r$  in  $\eta_r$  iz enačbe (74) v zadnjem koraku izrazimo  $r$ -to modalno konstanto:

$${}_r A_{ij} = j \eta_r \omega_r^2 Y_{ij}(\omega_r). \quad (77)$$

Klub enostavnosti je edina prednost metode polovične moči njena hitra implementacija, ne velja pa kot zanesljiva in natančna metoda. Temelji na vrednosti frekvenčne prenosne funkcije neposredno v resonanci, ki je težko merljiva zaradi omejene frekvenčne ločljivosti meritve in občutljivosti amplitude FPF na napake v lokaciji aplikacije sile pri večjem številu zaporednih meritev. Dušenje ocenjujemo iz dveh točk, ki imata na zveznem signalu enako amplitudo, v primeru diskretizacije pa moramo za določitev dušenja izbrati točki, ki sta najbližje kriteriju  $\frac{|Y_{ij}(\omega_r)|}{\sqrt{2}}$ . Metoda je tako primerna samo za rahlo dušene sisteme (kjer enostavno grafično odčitamo vrednosti lastnih frekvenc sistema), kjer se lastne frekvence nahajajo široko narazen, frekvenčna ločljivost cenilk FPF pa je visoka.

#### 4.1.1 Modalne oblike

Privzemimo, da strukturo vzbujamo v eni točki, ter odziv merimo v več ( $o$ ) točkah na strukturi. Predpostavimo, da v prostostni stopnji 1 merimo tako odziv kot tudi vzbuj-

janje strukture (direktna FPF, ang. *driving-point*<sup>15</sup>). Po modalni identifikaciji imamo tako za  $r$ -to lastno frekvenco na voljo matriko modalnih konstant  ${}_r\mathbf{A}$  oblike:

$${}_r\mathbf{A} = \begin{bmatrix} {}_rA_{1,1} \\ \vdots \\ {}_rA_{i,1} \\ \vdots \\ {}_rA_{o,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_r\phi_1 & {}_r\phi_1 \\ & \vdots \\ & {}_r\phi_i & {}_r\phi_1 \\ & & \vdots \\ & & {}_r\phi_o & {}_r\phi_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{o \times 1}. \quad (79)$$

Modalna oblika je enaka izrazu  ${}_r\boldsymbol{\phi} = [{}_r\phi_1, \dots, {}_r\phi_i, \dots, {}_r\phi_o]^T$ . Tako moramo iz prve vrstice matrike (79) (direktne prostostne stopnje) izraziti:

$${}_r\phi_1 = \sqrt{{}_rA_{1,1}}. \quad (80)$$

$i$ -to komponento masno normirane (zaradi predpostavke o histereznem dušenju) modalne oblike končno izračunamo po enačbi<sup>16</sup>:

$${}_r\phi_i = \frac{{}_rA_{i,1}}{{}_r\phi_1}. \quad (81)$$

---

<sup>15</sup>Direktna FPF mora izpolnjevati predpostavko pasivnosti, kar pomeni, da odziv sledi vzbujevalni sili. To lahko preverimo preko faze frekvenčne prenosne funkcije, za katero mora veljati:

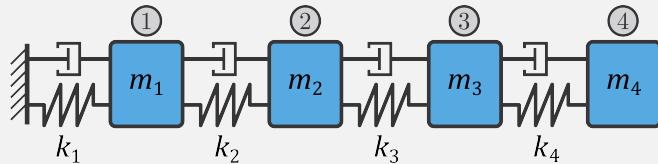
$$\angle Y_{ii} = \begin{cases} \in [-180^\circ, 0^\circ] & \text{za podajnost,} \\ \in [-90^\circ, 90^\circ] & \text{za mobilnost,} \\ \in [0^\circ, 180^\circ] & \text{za pospešenost.} \end{cases} \quad (78)$$

<sup>16</sup>V splošnem lahko na ta način dobimo masno ali A-normirane lastne oblike, odvisno od mehanizma dušenja ki ga posamezna metoda predpostavi.

## 4.2 Primer: Metoda polovične moči

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Obravnavamo enostaven diskreten sistem s štirimi prostostnimi stopnjami, za katerega predpostavimo proporcionalen histerezen mehanizem dušenja. Sistem je tako vpet na eni strani, saj se tako izognemo togim nihajnim načinom, ki so težavni za obravnavo z metodami modalne identifikacije.



$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1 \text{ kg}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 200 \text{ N/m}$$

$$\nu = 1 \cdot 10^{-2}$$

$$\mu = 0$$

Sistem vzbujamo v prostostni stopnji 1, pri čemer odziv merimo v vseh prostostnih stopnjah (1-4):

Opozorilo! Za metode modalne identifikacije zavoljo konsistentnosti enot normiranih modalnih oblik uporabljamo pomicnost.

```
freq = np.load('./data/freq.npy')
Y = np.load('./data/Y_A.npy')[:, :, 0:1]
Y.shape
```

(4999, 4, 1)

```
i = 0
o = 3

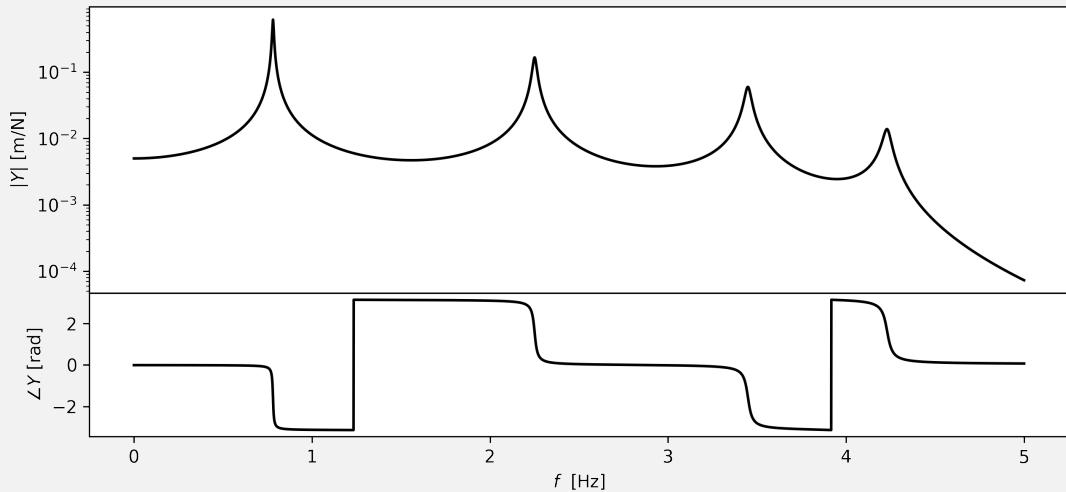
plt.subplots(figsize=(10,6), dpi=300)
plt.subplot(211)
plt.semilogy(freq, np.abs(Y[:, o, i]), color='k')
plt.ylabel(r'$|Y|$ [m/N]')
```

```

plt.subplots_adjust(hspace=0)

plt.subplot(413)
plt.plot(freq, np.angle(Y[:,o,i]), color='k')
plt.xlabel('f [Hz]')
plt.ylabel(r'$\angle Y$ [rad]');

```



#### 4.2.1 Določitev lastne frekvence

V prvem koraku vizualno določimo lastno frekvenco prvega vrha za frekvenčno prenosno funkcijo na mestu (3,0) v admitančni matriki  $\mathbf{Y}$ :

```

fr_step = freq[1]-freq[0]

fr_range = np.array((0.77/fr_step, 0.79/fr_step), dtype=int)

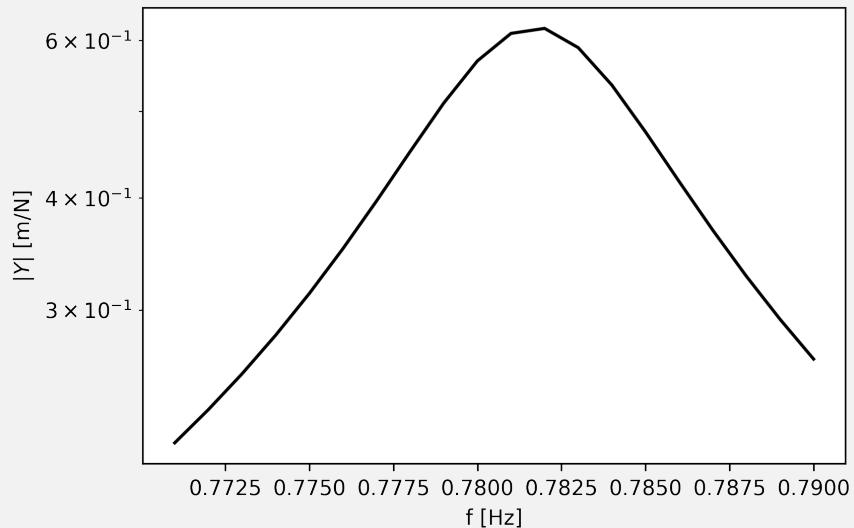
```

```

plt.subplots(dpi=300)
plt.semilogy(freq[slice(*fr_range)], np.abs(Y[slice(*fr_range),o,i]), color='k')

plt.ylabel(r'$|Y|$ [m/N]')
plt.xlabel('f [Hz]');

```

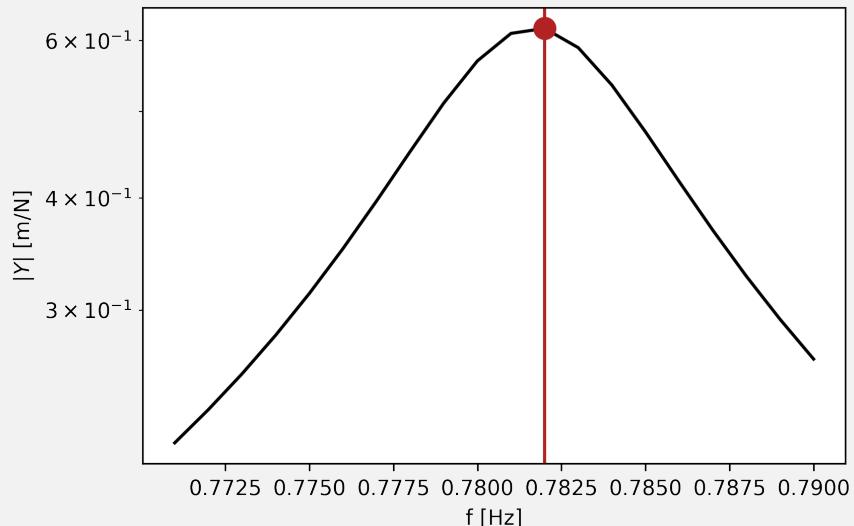


Poščemo indeks, kjer je magnituda lastne frekvence na izbranem intervalu (prvem resonančnem območju) največja:

```
ind = np.argmax(np.abs(Y[slice(*fr_range),o,i]))  
  
f1 = freq[ind+fr_range[0]]  
f1
```

0.782

```
plt.subplots(dpi=300)  
plt.semilogy(freq[slice(*fr_range)], np.abs(Y[slice(*fr_range),o,i]),  
             color='k')  
plt.semilogy(freq[ind+fr_range[0]], np.abs(Y[ind+fr_range[0],o,i]),  
             'o', color='firebrick', ms=10)  
plt.axvline(x=freq[ind+fr_range[0]], color='firebrick')  
plt.ylabel(r'$|Y|$ [m/N])  
plt.xlabel('f [Hz]');
```

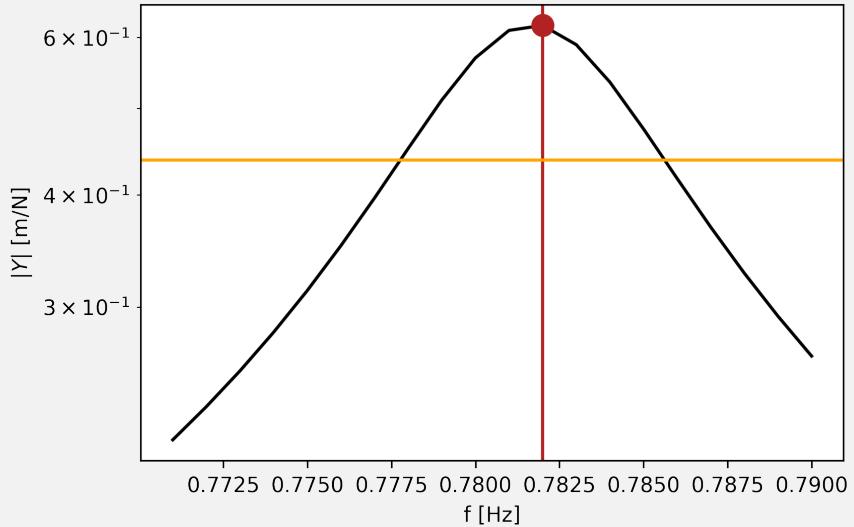


#### 4.2.2 Razmernik histereznega dušenja

Poščemo točki polovične moči, kjer je magnituda FPF levo in desno od resonančnega vrha enaka  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \max(Y)$ . Najprej izračunamo vrednost polovične moči glede na magnitudo v resonanci:

```
# izračunamo točko polovične moči
half_power_point = np.abs(Y[ind+fr_range[0],o,i])/np.sqrt(2)

plt.subplots(dpi=300)
plt.semilogy(freq[slice(*fr_range)], np.abs(Y[slice(*fr_range),o,i]), color='k')
plt.semilogy(freq[ind+fr_range[0]], np.abs(Y[ind+fr_range[0],o,i]), 'o', color='firebrick', ms=10)
plt.axvline(x=freq[ind+fr_range[0]], color='firebrick')
plt.axhline(y=half_power_point, color='orange')
plt.ylabel(r'$|Y|$ [m/N]')
plt.xlabel('f [Hz]');
```

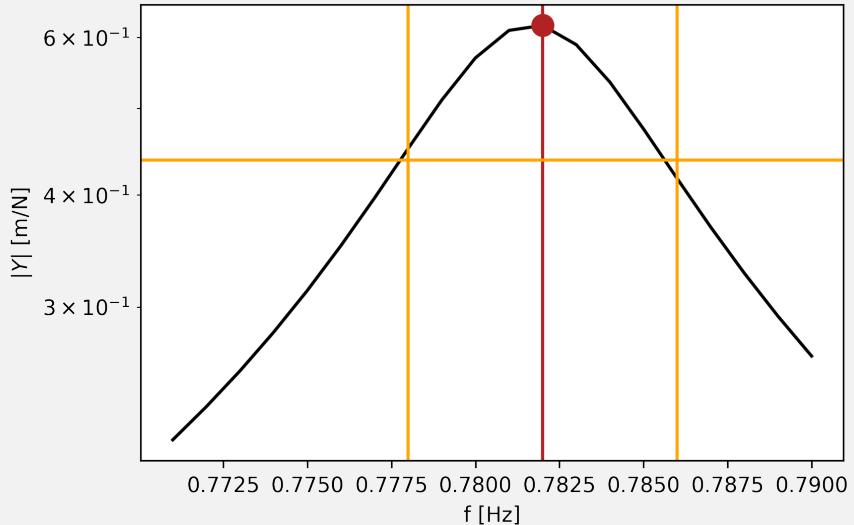


Poščemo točki na FPF na mestih polovične moči. Tu imamo na voljo dve možnosti: interpolacijo FPF tako, da točko polovične moči umestimo na FPF, ali pa izberemo že obstoječo točko, ki je polovični moči najbližje. Tu bomo prikazali drugo možnost, ki je izvedljiva le ob visoki frekvenčni ločljivosti meritve.

```
# poiščemo indeks najbližje točke polovični moči levo od resonančnega vrha
ind_half_1 = np.argmin(np.abs(np.abs(Y[fr_range[0]:fr_range[0]+ind,o,i])- half_power_point))
```

```
# poiščemo indeks najbližje točke polovični moči desno od resonančnega vrha
ind_half_2 = np.argmin(np.abs(np.abs(Y[fr_range[0]+ind:fr_range[1],o,i])-half_power_point))
```

```
plt.subplots(dpi=300)
plt.semilogy(freq[slice(*fr_range)], np.abs(Y[slice(*fr_range),o,i]),\
             color='k')
plt.semilogy(freq[ind+fr_range[0]], np.abs(Y[ind+fr_range[0],o,i]),\
             'o', color='firebrick', ms=10)
plt.axvline(x=freq[ind+fr_range[0]], color='firebrick')
plt.axhline(y=half_power_point, color='orange')
plt.axvline(x=freq[ind_half_1+fr_range[0]], color='orange')
plt.axvline(x=freq[ind_half_2+ind+fr_range[0]], color='orange')
plt.ylabel(r'$|Y|$ [m/N]')
plt.xlabel('f [Hz]');
```



Opozorilo! Vedno vizualno preverite, če je točka polovične moči na smiselnem mestu. Lahko se namreč zgodi, da je zaradi preslabe frekvenčne ločljivosti preveč oddaljena od zahtevane magnitude.

Iz točk polovične moči izračunamo razmernik histereznega dušenja:

$$\eta_r \approx \frac{\omega_b - \omega_a}{\omega_r}$$

```
damp1 = (freq[fr_range[0]+ind+ind_half_2]-freq[ind_half_1+fr_range[0]]) \
         /freq[ind+fr_range[0]]
damp1
```

0.010230179028133002

#### 4.2.3 Izračun modalne konstante

$${}_r A_{ij} = j \eta_r \omega_r^2 Y_{ij}(\omega_r)$$

```
# izračunamo modalno konstanto
A1 = 1j*Y[ind+fr_range[0], o, i]*damp1*(2*np.pi*f1)**2
A1
```

(0.15231253582981058-0.012374770312220514j)

Celoten postopek zdaj ponovimo za vse izmerjene frekvenčne prenosne funkcije, pri čemer lahko uporabimo zgolj eno vrstico ali en stolpec admitančne matrike (omejitev metode polovične moči kot metode v skupini "single-input single-output"):

```

# prva lastna frekvencija

# razpon, na katerem se nahaja prvi vrh
fr_range = np.array((0.77,0.79)/fr_step, dtype=int)

# pripravimo prazne sezname za lastno frekvenco, razmernik dušenja
# in modalno konstanto, ki jo odčitamo za vsako posamezno
# frekvenčno prenosno funkcijo
f1 = []
damp1 = []
A1 = []

fig = plt.subplots(Y.shape[1],1,figsize=(4,10), dpi=300)

# z for zanko gremo po vseh izmerjenih FPF-jih
for i in range(Y.shape[1]):
    plt.subplot(Y.shape[1],1,i+1)
    plt.axis('off')

    # poiščemo indeks maksimalne magnitude FPF-ja
    ind = np.argmax(np.abs(Y[slice(*fr_range),i,0]))

    plt.semilogy(freq[slice(*fr_range)], np.
    ↪abs(Y[slice(*fr_range),i,0]));
    plt.semilogy(freq[ind+fr_range[0]], np.
    ↪abs(Y[ind+fr_range[0],i,0]), 'o', color='firebrick')
    plt.axvline(x=freq[ind+fr_range[0]], color='firebrick')
    f1.append(freq[ind+fr_range[0]])

    # izračunamo točko polovične moči
    half_power_point = np.abs(Y[ind+fr_range[0],i,0])/np.sqrt(2)
    plt.axhline(y=half_power_point, color='orange')

    # poiščemo indeks najblžje točke polovični moči levo od
    ↪resonančnega vrha
    ind_half_1 = np.argmin(np.abs(np.abs(Y[fr_range[0]:.
    ↪ind+fr_range[0],i,0])\
        -half_power_point))

```

```

plt.axvline(x=freq[ind_half_1+fr_range[0]], color='orange')

# poiščemo indeks najbližje točke polovični moči desno od
# resonančnega vrha
ind_half_2 = np.argmin(np.abs(np.abs(Y[fr_range[0]+ind:
fr_range[1], i, 0]) \
                               -half_power_point))
plt.axvline(x=freq[fr_range[0]+ind+ind_half_2], color='orange')

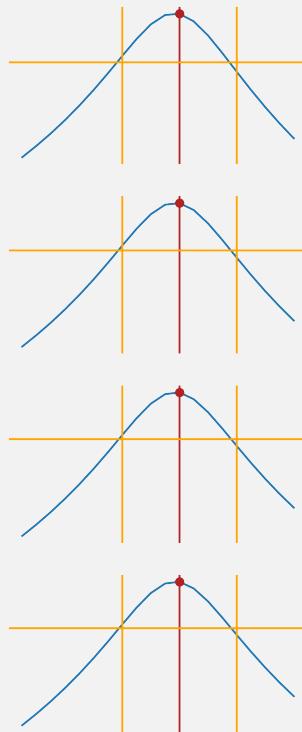
# iz točk polovične moči izračunamo razmernik dušenja
damp1 =
    append((freq[fr_range[0]+ind+ind_half_2]-freq[ind_half_1+fr_range[0]])/
           \
           freq[ind+fr_range[0]]))

# izračunamo modalno konstanto
A1.append(1j*Y[ind+fr_range[0], i, 0]*damp1[-1]*(2*np.pi*f1[-1])**2)

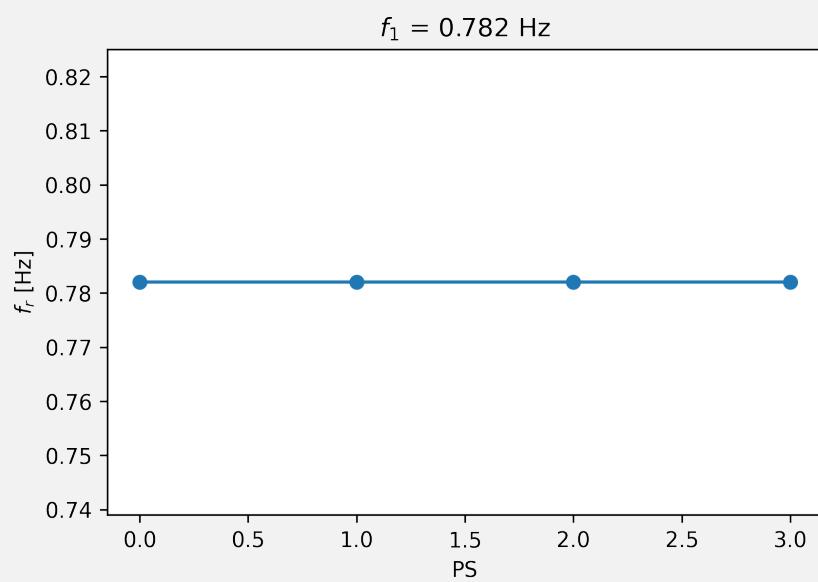
plt.xlabel(r'f [Hz]');
plt.ylabel(r'|\$\\alpha\$| [m s$^{-2}$/N]');

f1 = np.asarray(f1)
damp1 = np.asarray(damp1)
A1 = np.asarray(A1)

```



```
plt.subplots(dpi=300)
plt.plot(f1, 'o-');
plt.ylabel(r'$f_r$ [Hz]');
plt.xlabel('PS');
plt.title(r'$f_1$ = %.3f Hz' %np.average(f1));
```

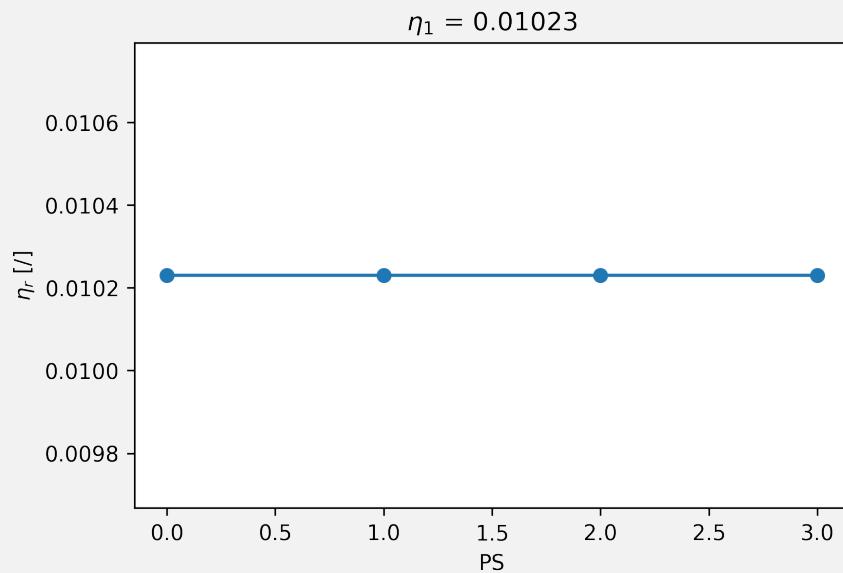


```
plt.subplots(dpi=300)
plt.plot(damp1, 'o-');
```

```

plt.ylabel(r'$\eta_r$ [/]);
plt.xlabel('PS');
plt.title(r'$\eta_1$ = %.5f' %np.average(damp1));

```



#### 4.2.4 Modalna oblika

Za izračun modalne oblike potrebujemo določiti driving-point FPF. V našem primeru je to FPF na mestu (0,0) v matriki  $Y$ . Najprej preverimo, če ta FPF izpolnjuje predpostavko pasivnosti:

```

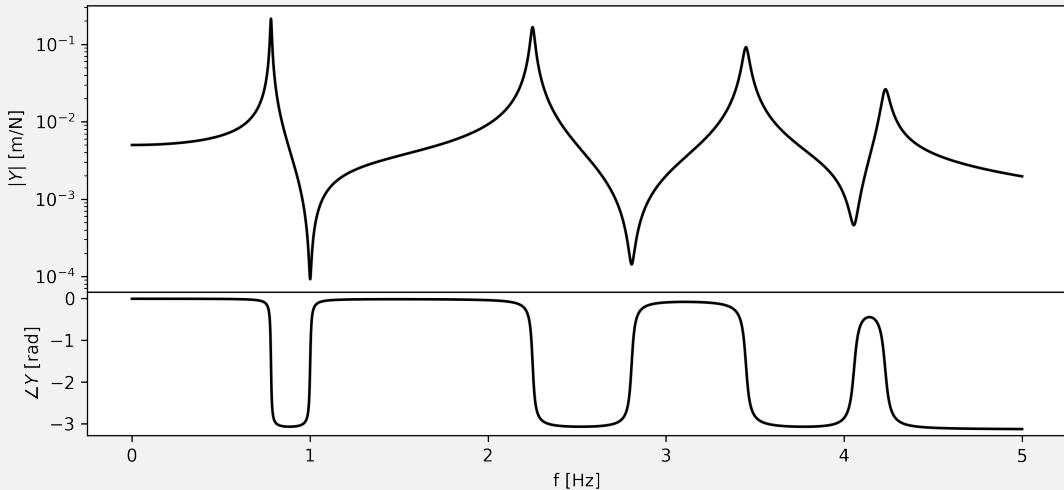
i = 0
o = 0

plt.subplots(figsize=(10,6), dpi=300)
plt.subplot(211)
plt.semilogy(freq, np.abs(Y[:,o,i]), color='k')
plt.ylabel(r'$|Y|$ [m/N]')

plt.subplots_adjust(hspace=0)

plt.subplot(413)
plt.plot(freq, np.angle(Y[:,o,i]), color='k')
plt.xlabel('f [Hz]')
plt.ylabel(r'$\angle Y$ [rad]');

```



Modalne konstante pri prvi lastni frekvenci izrazimo kot:

$${}_1\mathbf{A}_{i,1} = \boldsymbol{\varphi}_i \varphi_1 = \begin{bmatrix} {}_1\varphi_1 \cdot {}_1\varphi_1 \\ {}_1\varphi_2 \cdot {}_1\varphi_1 \\ {}_1\varphi_3 \cdot {}_1\varphi_1 \\ {}_1\varphi_4 \cdot {}_1\varphi_1 \end{bmatrix}$$

Iz prve modalne konstante izračunamo  ${}_1\varphi_1$ :

```
phi1 = np.sqrt(A1[0])
```

Ter nato modalno obliko  ${}_1\varphi_i$

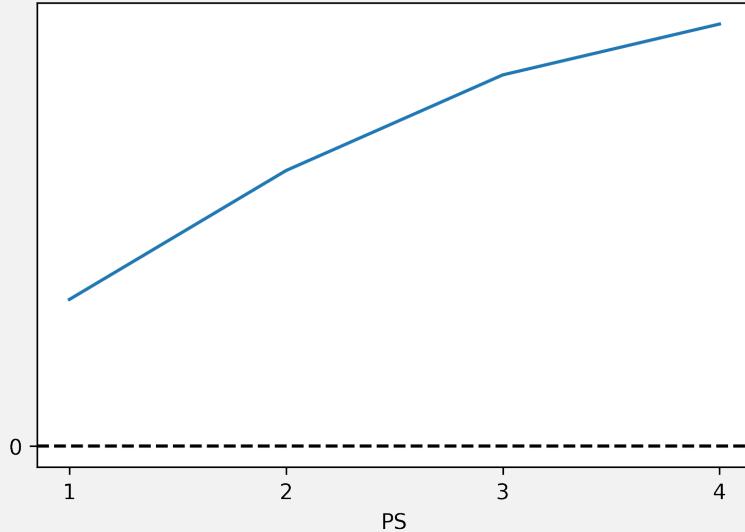
```
mode_shape = A1/phi1
```

```
mode_shape
```

```
array([0.23013519-0.00739452j, 0.43262108-0.01898032j,
       0.58291341-0.02775308j, 0.66288279-0.03247253j])
```

Prikažemo lastno obliko, pri čemer predpostavimo, da je lastna oblika realna.

```
plt.subplots(dpi=300)
plt.plot(np.real(np.real(mode_shape)));
plt.axhline(0, ls='--', color='k')
plt.yticks([0], [0]);
plt.xticks([0,1,2,3], [1,2,3,4])
plt.xlabel('PS');
```



#### 4.2.5 Modalna superpozicija

Frekvenčno prenosno funkcijo na koncu rekonstruiramo še iz identificiranih modalnih parametrov pri prvi lastni frekvenci, saj tako njenostavneje preverimo, če identificirani modalni parametri dobro popišejo dinamski odziv strukture:

$$Y = \frac{^1A}{-\omega^2 + \omega_1^2 + j\eta_1\omega_1^2}$$

```
Y_rec = np.einsum('jk,i->ijk',np.expand_dims(A1, axis=0),\
    1/((2*np.pi*np.average(f1))**2-(2*np.pi*freq)**2+\\
        1j*(2*np.pi*np.average(f1))**2*np.average(damp1)))
```

```
i = 0
o = 0

plt.subplots(figsize=(10,6), dpi=300)
plt.subplot(211)
plt.semilogy(freq, np.abs(Y[:,o,i]), color='k', label='Dejanska FPF')
plt.semilogy(freq, np.abs(Y_rec[:,o,i]), '--', color='orange',\
    label='Rekonstruirana FPF')
plt.legend(loc=0)
plt.ylabel(r'$|Y|$ [m/N]')

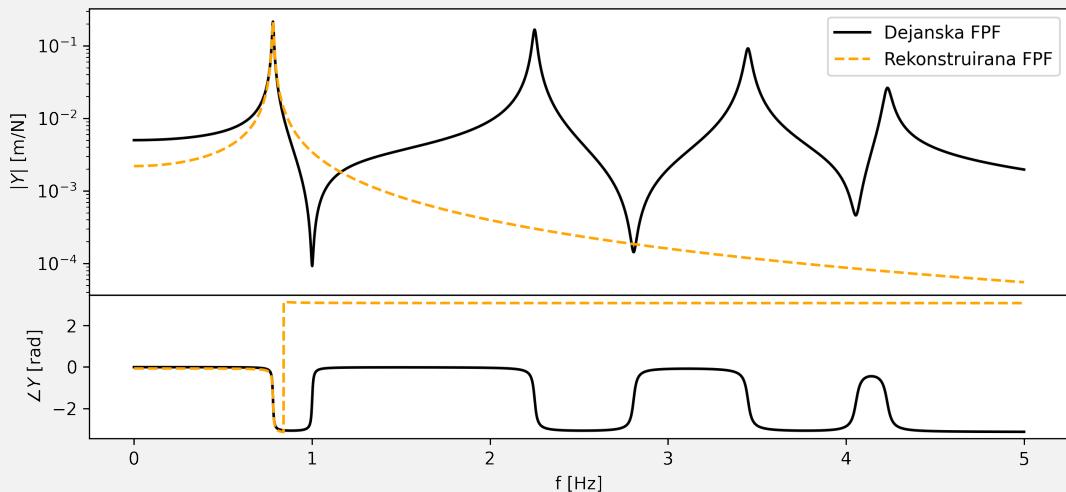
plt.subplots_adjust(hspace=0)

plt.subplot(413)
```

```

plt.plot(freq, np.angle(Y[:,o,i]), color='k')
plt.plot(freq, np.angle(Y_rec[:,o,i]), '--', color='orange')
plt.xlabel('f [Hz]')
plt.ylabel(r'$\angle Y$ [rad]');

```



Vidimo dobro ujemanje dejanske in rekonstruirane frekvenčne prenosne funkcije v okolini prve lastne frekvence, za katero smo tudi identificirali modalne parametre.

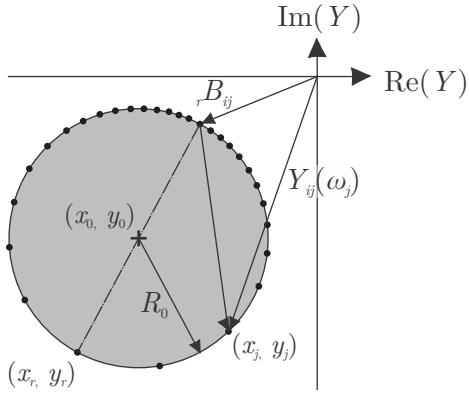
Opozorilo! Za konsistentno rekonstrukcijo po celotnem opazovanem frekvenčnem območju je potrebno v enačbi za modalno superpozicijo upoštevati vse lastne frekvence v tem območju (in po možnosti še tiste izven njega).

### 4.3 Metoda prilagajanja kroga

Predpostavko, da v odzivu strukture v okolici resonance dominira zgolj pripadajoča modalna oblika, razširi metoda prilagajanja kroga. Namesto, da prispevek ostalih modalnih oblik zanemarimo, jih smatramo v obliki ostanka, za katerega predpostavimo, da je konstanten v opazovanem frekvenčnem območju (v okolici posamezne resonance):

$$Y_{ij}(\omega) = \frac{{}^r A_{ij}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} + {}_r B_{ij}. \quad (82)$$

Ostanek modalnih oblik pri  $r$ -ti lastni frekvenci ponazarja kompleksna konstanta  ${}_r B_{ij}$ . Izraz  $\frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2}$  je enačba krožnice v kompleksni ravnini, skalirana in rotirana zaradi množenja z modalno konstanto  ${}^r A_{ij}$ . Ostanek  ${}_r B_{ij}$  povzroči translacijo kroga v kom-



Slika 6: Krožnica, ki jo opišejo točke v Nyquistovem diagramu.

pleksni ravnini tako, da se le-ta ne začenja v izhodišču koordinatnega sistema (slika 6). Pri  $r$ -ti lastni frekvenci tako  $Y_{ij}(\omega_r)$  izrazimo kot:

$$Y_{ij}(\omega_r) = \frac{{}^r A_{ij}}{j\eta_r \omega_r^2} + {}_r B_{ij} = 2 \cdot R_0 + {}_r B_{ij}. \quad (83)$$

Iz zgornje enačbe lahko izrazimo radij kroga:

$$|R_0| = \frac{|{}^r A_{ij}|}{2\eta_r \omega_r^2}. \quad (84)$$

Na osnovi aproksimacije točk v okolici posamezne resonance z obliko kroga lahko določimo njegovo izhodišče in radij. Za primer popolne krožnice točke FPF ustrezajo enačbi:

$$(x_j - x_0)^2 + (y_j - y_0)^2 = R_0^2, \quad x_j + j y_j = Y_{ij}(\omega_j), \quad (85)$$

kjer  $(x_0, y_0)$  predstavlja središče krožnice. Če želimo iz izmerjenih podatkov določiti enačbo krožnice, ki se najboljše prilagaja meritvi, za izbranih  $l$  točk v okolici  $r$ -te lastne

frekvence definiramo funkcijo kvadratičnih odstopkov:

$$\begin{aligned} e &= \sum_{j=1}^l \left[ R_0^2 - x_0^2 - y_0^2 - (x_j^2 - 2x_0 x_j - 2y_0 y_j + y_j^2) \right]^2 = \\ &= \sum_{j=1}^l \left[ c - (x_j^2 + a x_j + b y_j + y_j^2) \right]^2, \end{aligned} \quad (86)$$

kjer je:

$$a = -2x_0, \quad (87)$$

$$b = -2y_0, \quad (88)$$

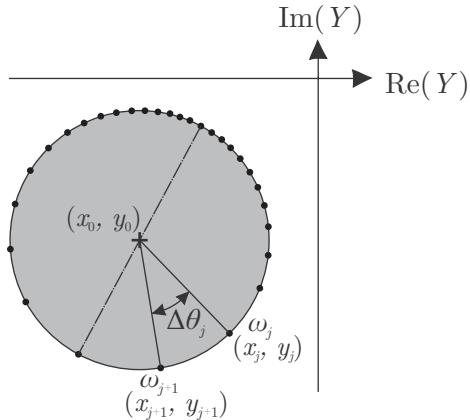
$$c = R_0^2 - x_0^2 - y_0^2. \quad (89)$$

Vrednost  $e$  minimiziramo za naslednje vrednosti parametrov  $a$ ,  $b$  in  $c$  [4]:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^l x_j^2 & \sum_{i=1}^l x_j y_j & -\sum_{i=1}^l x_j \\ \sum_{i=1}^l x_j y_j & \sum_{i=1}^l y_j^2 & -\sum_{i=1}^l y_j \\ -\sum_{i=1}^l x_j & -\sum_{i=1}^l y_j & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\sum_{i=1}^l x_j^3 + \sum_{i=1}^l x_j y_j^2) \\ -(\sum_{i=1}^l y_j^3 + \sum_{i=1}^l x_j^2 y_j) \\ \sum_{i=1}^l x_j^2 + \sum_{i=1}^l y_j^2 \end{bmatrix}. \quad (90)$$

Iz zgornje enačbe izračunamo neznanke  $a$ ,  $b$  in  $c$ , ter nato iz relacij (87) - (89) določimo izhodišče kroga  $(x_0, y_0)$  in njegov radij  $R_0$ .

Vrednost lastne frekvence ustreza mestu največje spremembe kota v Nyquistovem di-



Slika 7: Kot med točkami v Nyquistovem diagramu.

agramu v kolikor je frekvenčna diskretizacija konstantna (slika 7). Kot  $\Delta\theta_j$  med točkama, ki ustrezata frekvenci  $\omega_j$  in  $\omega_{j+1}$ , izračunamo s pomočjo kosinusnega izreka, saj poznamo točke  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_j, y_j)$  in  $(x_{j+1}, y_{j+1})$ . Za rahlo dušene sistema velja, da je kot  $\Delta\theta$  največji, ko je  $\omega = \omega_r$ <sup>17</sup>:

$$\omega_r = \omega \Big|_{d\theta/d\omega^2=\max} \quad (91)$$

---

<sup>17</sup>Na tem mestu privzamemo, da je to posledica velikih skokov v amplitudi FPF v okolici lastne frekvence. Zainteresiran bralec si lahko matematično utemeljitev prebere v [8].

Sledi še določitev razmernika histereznega dušenja. Za zvezo med točkami v Nyquistovem diagramu in razmernikom dušenja poenostavimo enačbo (82) tako, da zanemarimo konstanto  $rB_{ij}$  in kompleksni del modalne konstante  $rA_{ij}$ :

$$\begin{aligned}\hat{Y}(\omega) &= \frac{\Re(rA_{ij})}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r\omega_r^2} = \frac{\Re(rA_{ij})}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r\omega_r^2} \cdot \frac{\omega_r^2 - \omega^2 - j\eta_r\omega_r^2}{\omega_r^2 - \omega^2 - j\eta_r\omega_r^2} = \\ &= \frac{\Re(rA_{ij})(\omega_r^2 - \omega^2) - j\Re(rA_{ij})\eta_r\omega_r^2}{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 - \eta_r^2\omega_r^4}.\end{aligned}\quad (92)$$

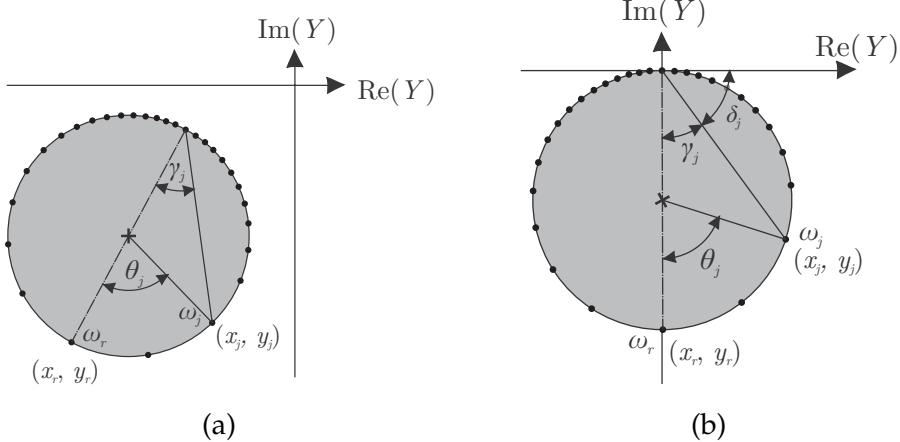
Posledično Nyquistov diagram dobi obliko kroga, ki se začne neposredno v koordinatnem izhodišču, točka pri  $\omega_r$  pa leži na oordinatni osi (iz krožnice, prikazane na sliki 8a, dobimo krožnico na sliki 8b). Če iz vrednosti FPF v točki  $\omega_j$  izrazimo kot  $\delta_j$ , dobimo:

$$\cot \delta_j = \tan \gamma_j = -\frac{\Re(\hat{Y}(\omega_j))}{\Im(\hat{Y}(\omega_j))} = \frac{\omega_r^2 - \omega_j^2}{\eta_r \omega_r^2}. \quad (93)$$

Iz slike 8a razberemo še zvezo med kotoma  $\theta_j$  in  $\gamma_j$ :

$$\tan \gamma_j = \tan \left( \frac{\theta_j}{2} \right), \quad (94)$$

tako, da razmernik dušenja  $\eta_r$  lahko določimo iz poljubne  $j$ -te točke obravnavanega frekvenčnega intervala:

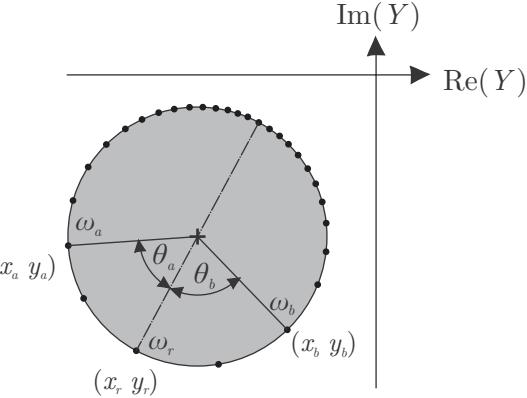


Slika 8: Kot med točkami v Nyquistovem diagramu: a) zveza med  $\theta_j$  in  $\gamma_j$ ; b) zveza med  $\gamma_j$  in  $\delta_j$ .

$$\eta_r = \frac{\omega_r^2 - \omega_j^2}{\omega_r^2} \frac{1}{\tan \left( \frac{\theta_j}{2} \right)}. \quad (95)$$

Teoretično bi morali za vsako izbrano točko  $j$  izračunati identično vrednost  $\eta_r$ . Zaradi meritnih pogreškov se v praksi izračunane vrednosti  $\eta_r(\omega_j)$  razlikujejo, zato je priporočljivo izračun ponoviti za večje število  $j$  ter na ta način preveriti natančnost identifikacije. Če si izberemo kombinacijo dveh točk na levi in desni strani resonančnega vrha

( $a$  in  $b$ , slika 9), zanj lahko zapišemo:



Slika 9: Izračun razmernika histereznega dušenja.

$$\tan \frac{\theta(\omega_a)}{2} = \frac{\omega_r^2 - \omega_a^2}{\eta_r \omega_r^2}, \quad \tan \frac{\theta(\omega_b)}{2} = \frac{\omega_r^2 - \omega_b^2}{\eta_r \omega_r^2}. \quad (96)$$

Če zgornji enačbi enačimo za  $\omega_r^2$  ( $\tan \frac{\theta(\omega_b)}{2}$  množimo z -1 zaradi spremembe kvadranta pri prehodu čez točko  $\omega_r$ , slika 8b), dobimo<sup>18</sup>:

$$\eta_r = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{\omega_r^2} \frac{1}{\tan \frac{\theta(\omega_a)}{2} + \tan \frac{\theta(\omega_b)}{2}}. \quad (97)$$

V zadnjem koraku izračunamo še modalno konstanto  ${}_r A_{ij}$ . Njeno velikost dobimo iz enačbe (84):

$$|{}_r A_{ij}| = 2 \eta_r \omega_r^2 R_0. \quad (98)$$

Amplituda modalne konstante nam definira skalirni faktor krožnice v Nyquistovi ravni (slika 10).

Za popolno informacijo potrebujemo še njen zasuk, ki ga določimo po enačbi:

$$\phi_r = \arctan \frac{x_r - x_0}{y_0 - y_r}, \quad (99)$$

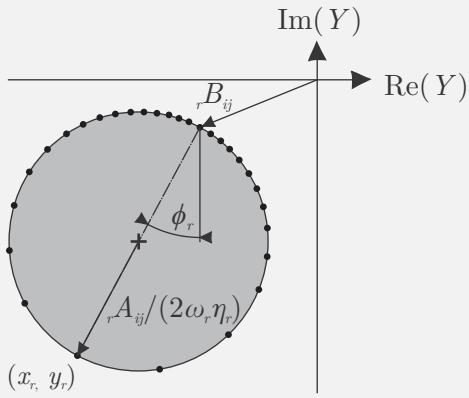
kjer je točka  $(x_r, y_r)$  lokacija lastne frekvence. Popolna modalna konstanta je tako:

$${}_r A_{ij} = |{}_r A_{ij}| e^{j\phi_r}. \quad (100)$$

Po identificiranih modalnih parametrih modalne oblike določimo po postopku, opisanem v poglavju 4.1.1.

---

<sup>18</sup>Za točki polovične moči velja  $\theta_a = \theta_b = 90^\circ$ , zato se enačba (97) poenostavi v  $\eta_r = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{\omega_r^2}$ . To enačbo za oceno razmernika histereznega dušenja uporabljamo pri metodi polovične moči.

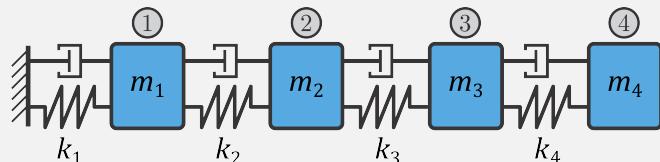


Slika 10: Grafična prezentacija modalne konstante v Nyquistovi ravnini.

#### 4.4 Primer: Metoda prilagajanja kroga

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import math
```

Obravnavamo enostaven diskreten sistem s štirimi prostostnimi stopnjami, za katerega predpostavimo proporcionalen histerezen mehanizem dušenja. Sistem je tako na eni strani, saj se tako izognemo togim nihajnim načinom, ki so težavni za obravnavo z metodami modalne identifikacije.



$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1 \text{ kg}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 200 \text{ N/m}$$

$$\nu = 1 \cdot 10^{-2}$$

$$\mu = 0$$

Sistem vzbujamo v prostostni stopnji 1, pri čemer odziv merimo v vseh prostostnih stopnjah (1-4):

**Opozorilo!** Za metode modalne identifikacije zavoljo konsistentnosti enot normiranih modalnih oblik uporabljamo pomicnost.

```
freq = np.load('./data/freq.npy')
Y = np.load('./data/Y_A.npy')[:, :, 0:1]
```

```
Y.shape
```

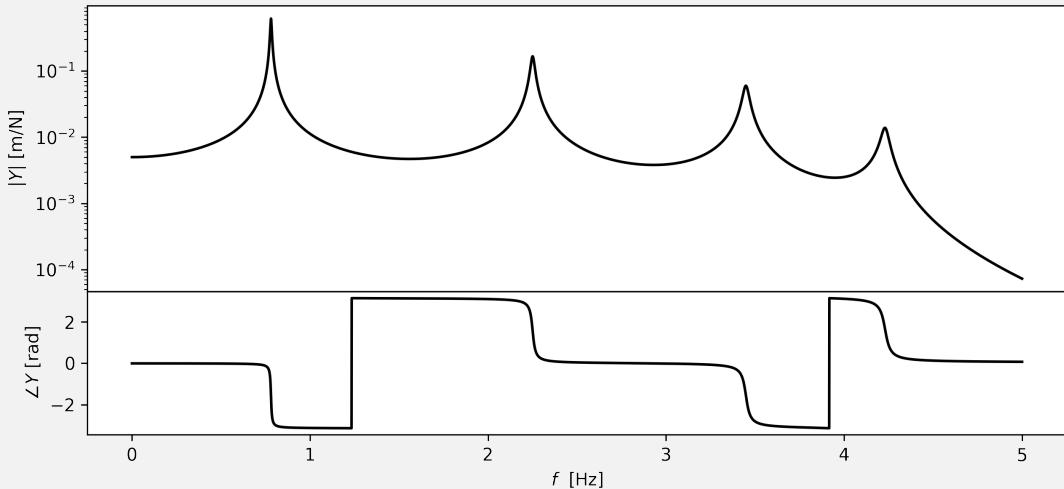
```
(4999, 4, 1)
```

```
i = 0
o = 3

plt.subplots(figsize=(10,6), dpi=300)
plt.subplot(211)
plt.semilogy(freq, np.abs(Y[:,o,i]), color='k')
plt.ylabel(r'$|Y|$ [m/N]')

plt.subplots_adjust(hspace=0)

plt.subplot(413)
plt.plot(freq, np.angle(Y[:,o,i]), color='k')
plt.xlabel('$f$ [Hz]')
plt.ylabel(r'$\angle Y$ [rad];
```



Izberemo si frekvenčno območje, na katerem se nahaja prvi resonančni vrh.

```
fr_step = freq[1]-freq[0]
```

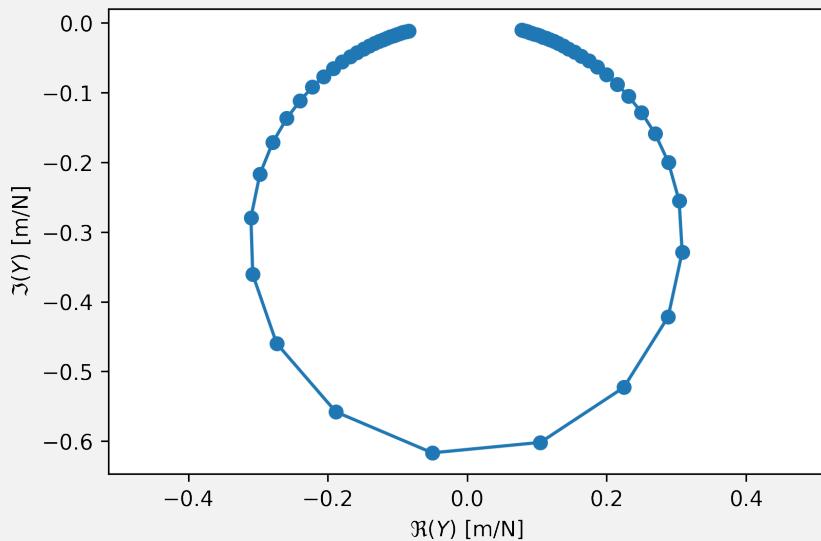
```
fr_range = np.array((0.75/fr_step, 0.81/fr_step), dtype=int)
```

Izbrano frekvenčno območje prikažemo na Nyquistovem diagramu.

```

plt.subplots(dpi=300)
plt.plot(np.real(Y[slice(*fr_range),o,i]), np.
         -imag(Y[slice(*fr_range),o,i]), 'o-')
plt.ylabel(r'$\operatorname{Im}(Y)$ [m/N]')
plt.xlabel(r'$\operatorname{Re}(Y)$ [m/N]');
plt.axis('equal');

```



Točke na Nyquistovem diagramu aproksimiramo z krožnico:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^l x_j^2 & \sum_{i=1}^l x_j y_j & -\sum_{i=1}^l x_j \\ \sum_{i=1}^l x_j y_j & \sum_{i=1}^l y_j^2 & -\sum_{i=1}^l y_j \\ -\sum_{i=1}^l x_j & -\sum_{i=1}^l y_j & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\sum_{i=1}^l x_j^3 + \sum_{i=1}^l x_j y_j^2) \\ -(\sum_{i=1}^l y_j^3 + \sum_{i=1}^l x_j^2 y_j) \\ \sum_{i=1}^l x_j^2 + \sum_{i=1}^l y_j^2 \end{bmatrix},$$

$$a = -2x_0,$$

$$b = -2y_0,$$

$$c = R_0^2 - x_0^2 - y_0^2.$$

```

xi = np.real(Y[slice(*fr_range),o,i])
yi = np.imag(Y[slice(*fr_range),o,i])

# priprava členov matrik
A11 = np.sum(xi ** 2)
A12 = np.sum(xi * yi)
A13 = np.sum(-1 * xi)
A22 = np.sum(yi ** 2)
A23 = np.sum(-1 * yi)

```

```

A33 = len(xi)

# priprava členov vektorja konstant
b1 = -1 * (np.sum(xi ** 3) + np.sum(xi * yi ** 2))
b2 = -1 * (np.sum(yi ** 3) + np.sum(yi * xi ** 2))
b3 = np.sum(xi ** 2) + np.sum(yi ** 2)

```

```

# kreiranje matrik
A = np.asarray([[A11, A12, A13], [A12, A22, A23], [A13, A23, A33]])
b_ = np.asarray([[b1], [b2], [b3]])

# reševanje sistema enačb
a, b, c = np.linalg.solve(A, b_)

# ločevanje vrednosti
x0 = float(-a/2)
y0 = float(-b/2)
R0 = float(np.sqrt(c + x0**2 + y0**2))

```

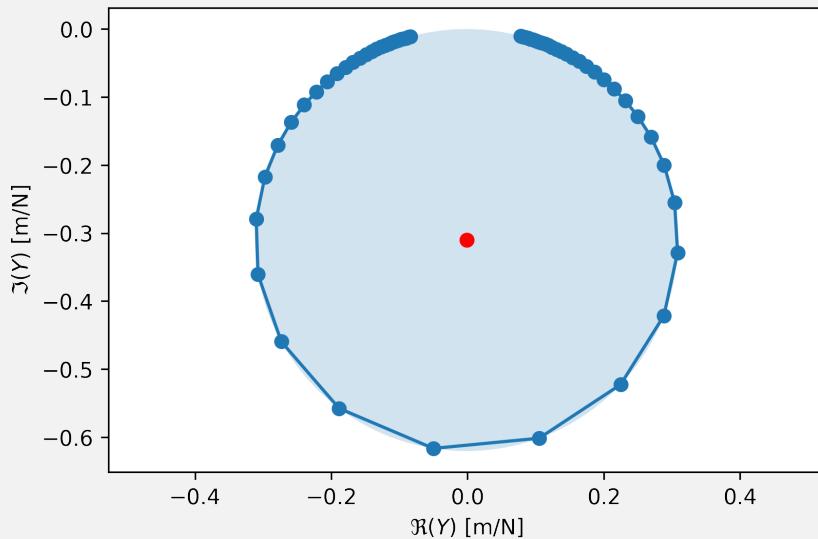
Vizualno preverimo, ali aproksimirana krožnica ustreza frekvenčne prenosni funkciji.

```

fig, ax = plt.subplots(dpi=300)
plt.plot(np.real(Y[slice(*fr_range),o,i]), np.
         -imag(Y[slice(*fr_range),o,i]), 'o-')
plt.plot(x0, y0, 'o', color='red')
circle = plt.Circle((x0, y0), R0, alpha=0.2)
ax.add_patch(circle)
plt.ylabel(r'$\text{Im}(\text{Y})$ [m/N]')
plt.xlabel(r'$\text{Re}(\text{Y})$ [m/N]');
plt.axis('equal');

```

Opozorilo! Ni nujno, da je krog v celoti zaprt z izmerjenimi točkami. Mora jih biti zgolj dovolj, da pravilno aproksimiramo krog.



#### 4.4.1 Določitev lastne frekvence

Izračunamo kot med dvema sosednjima točkama na Nyquistovem krogu z izhodiščem v središču krožnice.

```
def kot_iz_treh_tock(_x0, _y0, _x1, _y1, _x2, _y2):
    d1 = math.hypot(_x1-_x0, _y1-_y0)
    d2 = math.hypot(_x2-_x0, _y2-_y0)
    d3 = math.hypot(_x2-_x1, _y2-_y1)
    phi_ = np.arccos((d1**2+d2**2-d3**2)/(2*d1*d2))
    return phi_
```

```
d_theta_a = []
d_theta_b = []

for k in range(1, len(xi)-1):
    d_theta_1 = kot_iz_treh_tock(x0, y0, xi[k + 1], yi[k + 1], xi[k], yi[k])
    d_theta_2 = kot_iz_treh_tock(x0, y0, xi[k], yi[k], xi[k - 1], yi[k - 1])
    d_theta_a.append(d_theta_1)
    d_theta_b.append(d_theta_2)

d_theta_a = np.asarray(d_theta_a)
d_theta_b = np.asarray(d_theta_b)
```

Točka, kjer je vsota kotov  $\theta_a$  in  $\theta_b$  največja, ustreza lokaciji lastne frekvence v izbranem

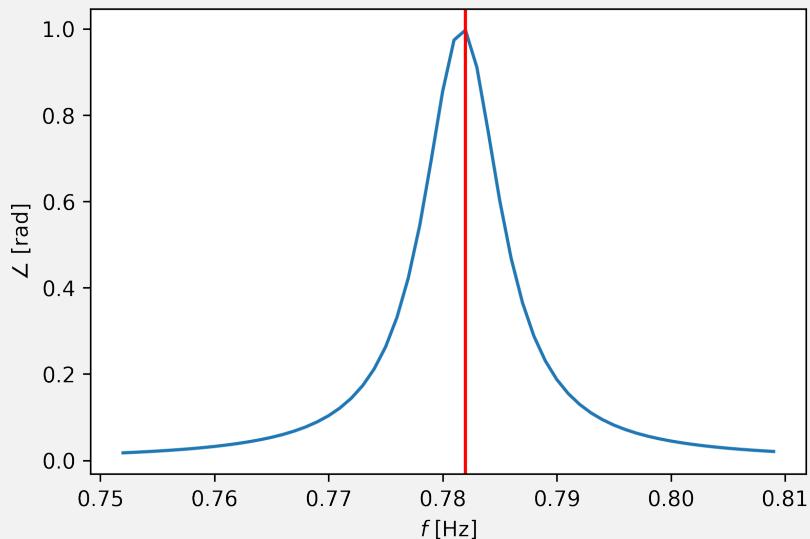
frekvenčnem intervalu.

```
ind = np.argmax(d_theta_a+d_theta_b)+1
f1 = freq[slice(*fr_range)][ind]
omega_1 = 2*np.pi*f1

f1
```

0.782

```
plt.subplots(dpi=300)
plt.plot(freq[slice(*fr_range)][1:-1], d_theta_a+d_theta_b)
plt.axvline(x=freq[slice(*fr_range)][ind], color='red')
plt.xlabel(r'$f$ [Hz]');
plt.ylabel(r'$\angle$ [rad]');
```



#### 4.4.2 Razmernik histereznegra dušenja

Izračunane kote  $\theta_a$  in  $\theta_b$  izkoristimo za izračun razmernika histereznegra dušnja po enačbi:

$$\eta_r = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{\omega_r^2} \frac{1}{\tan \frac{\theta(\omega_a)}{2} + \tan \frac{\theta(\omega_b)}{2}}.$$

```
damp1 = []
```

```

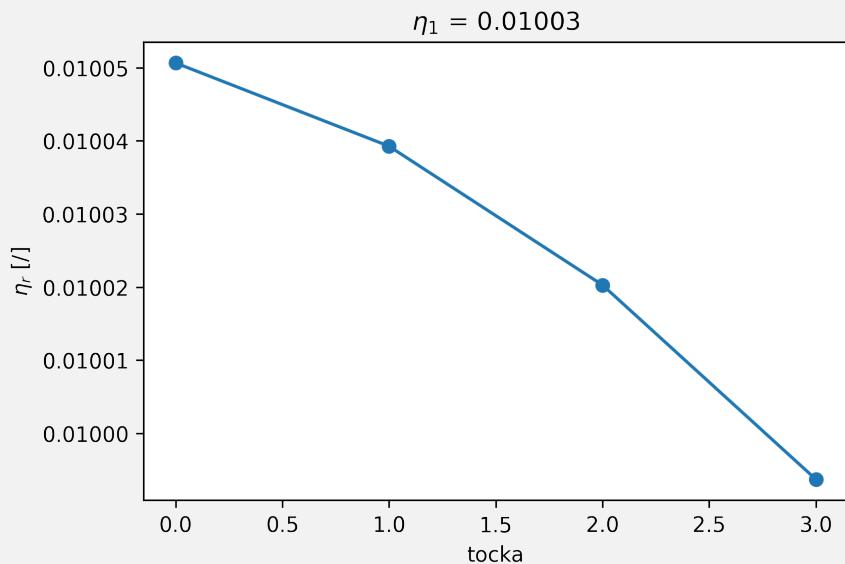
omega = 2*np.pi*freq

for t in range(1, 5, 1):
    omega_a = omega[slice(*fr_range)][ind+t]
    omega_b = omega[slice(*fr_range)][ind-t]
    theta_a = np.sum(d_theta_a[ind-t-1:ind-1])
    theta_b = np.sum(d_theta_a[ind-1:ind+t-1])

    damp1_ = (omega_a**2 - omega_b**2)/(omega1**2) * 1/(np.tan(theta_a/
    ↵2) + np.tan(theta_b/2))
    damp1.append(damp1_)
```

```

plt.subplots(dpi=300)
plt.plot(damp1, 'o-');
plt.ylabel(r'$\eta_r$ [/]);
plt.xlabel('tocka');
plt.title(r'$\eta_1$ = %.5f' %np.average(damp1));
```



#### 4.4.3 Izračun modalne konstante

Amplitudo modalne konstante izračunamo po enačbi:

$$|{}_r A_{ij}| = 2 \eta_r \omega_r^2 R_0.$$

Sledi še izračun faze ter končno kompleksne modalne konstante:

$$\phi_r = \arctan \frac{x_r - x_0}{y_0 - y_r},$$

$${}_r A_{ij} = |{}_r A_{ij}| e^{j\phi_r}.$$

```
A1_ = R0 * 2*(f1*2*np.pi) ** 2 * np.average(damp1)
phi = np.arctan2(-(x0 - xi[ind]), (y0 - yi[ind]))
A1 = A1_ * np.exp(1j * phi)
A1
```

(0.14834666381782016-0.02357453373522021j)

Celoten postopek zdaj ponovimo za vse izmerjene frekvenčne prenosne funkcije, pri čemer lahko uporabimo zgolj eno vrstico ali en stolpec admitančne matrike (omejitev metode polovične moči kot metode v skupini “single-input single-output”):

```
# ponovimo postopek za vsak input

f1 = []
damp1 = []
A1 = []

for i in range(Y.shape[1]):

    xi = np.real(Y[slice(*fr_range),i,0])
    yi = np.imag(Y[slice(*fr_range),i,0])

    # priprava členov matrik
    A11 = np.sum(xi ** 2)
    A12 = np.sum(xi * yi)
    A13 = np.sum(-1 * xi)
    A22 = np.sum(yi ** 2)
    A23 = np.sum(-1 * yi)
    A33 = len(xi)

    # priprava členov vektorja konstant
    b1 = -1 * (np.sum(xi ** 3) + np.sum(xi * yi ** 2))
    b2 = -1 * (np.sum(yi ** 3) + np.sum(yi * xi ** 2))
    b3 = np.sum(xi ** 2) + np.sum(yi ** 2)
```

```

# kreiranje matrik
A = np.asarray([[A11, A12, A13], [A12, A22, A23], [A13, A23, A33]])
b_ = np.asarray([[b1], [b2], [b3]])

# reševanje sistema enačb
a, b, c = np.linalg.solve(A, b_)

# ločevanje vrednosti
x0 = float(-a/2)
y0 = float(-b/2)
R0 = float(np.sqrt(c + x0**2 + y0**2))

d_theta_a = []
d_theta_b = []

for k in range(1, len(xi) - 1):
    d_theta_1 = kot_iz_treh_tock(x0, y0, xi[k + 1], yi[k + 1], xi[k], yi[k])
    d_theta_2 = kot_iz_treh_tock(x0, y0, xi[k], yi[k], xi[k - 1], yi[k - 1])
    d_theta_a.append(d_theta_1)
    d_theta_b.append(d_theta_2)

d_theta_a = np.asarray(d_theta_a)
d_theta_b = np.asarray(d_theta_b)

ind = np.argmax(d_theta_a)+1
f1_ = freq[slice(*fr_range)][ind]
omega1_ = 2*np.pi*f1_

damp1_ = []

omega = 2*np.pi*freq

for t in range(1, 3, 1):
    omega_a = omega[slice(*fr_range)][ind+t]
    omega_b = omega[slice(*fr_range)][ind-t]

```

```

theta_a = np.sum(d_theta_a[ind-t-1:ind-1])
theta_b = np.sum(d_theta_a[ind-1:ind+t-1])

_damp1 = (omega_a**2 - omega_b**2)/(omega_1_**2) *\ 
1/(np.tan(theta_a/2) + np.tan(theta_b/2))
damp1_.append(_damp1)

A1_ = R0 * 2*(f1_*2*np.pi) ** 2 * np.average(damp1_)
phi = np.arctan2(-(x0 - xi[ind]), (y0 - yi[ind]))
_A1 = A1_ * np.exp(1j * phi)

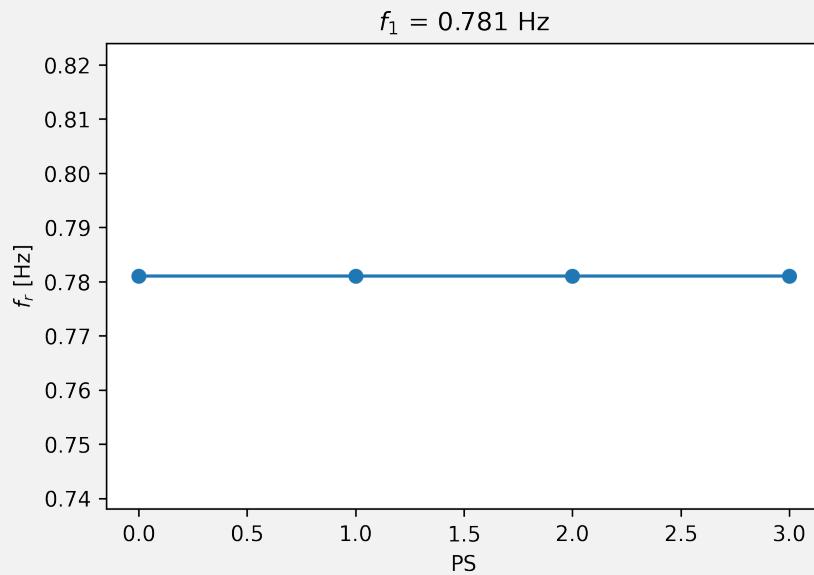
f1.append(f1_)
damp1.append(np.average(damp1_))
A1.append(_A1)

```

```

plt.subplots(dpi=300)
plt.plot(f1, 'o-');
plt.ylabel(r'$f_r$ [Hz]');
plt.xlabel('PS');
plt.title(r'$f_1$ = %.3f Hz' %np.average(f1));

```

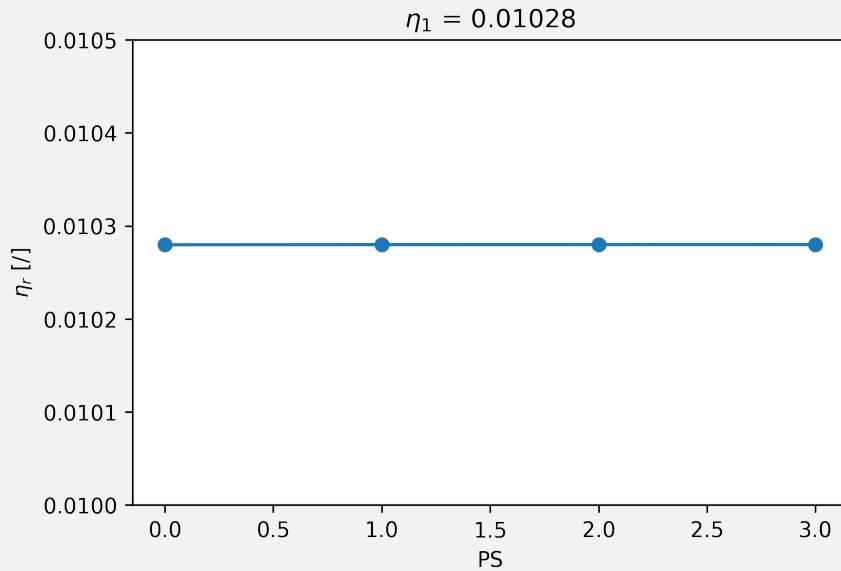


```

plt.subplots(dpi=300)
plt.plot(damp1, 'o-');
plt.ylim(0.01,0.0105);
plt.ylabel(r'$\eta_r$ [/] ');

```

```
plt.xlabel('PS');
plt.title(r'$\eta_1$ = %.5f' %np.average(damp1));
```



#### 4.4.4 Modalna oblika

Modalne konstante pri prvi lastni frekvenci izrazimo kot:

$${}_1\mathbf{A}_{i,1} = \boldsymbol{\varphi}_i \varphi_1 = \begin{bmatrix} {}_1\varphi_1 \cdot {}_1\varphi_1 \\ {}_1\varphi_2 \cdot {}_1\varphi_1 \\ {}_1\varphi_3 \cdot {}_1\varphi_1 \\ {}_1\varphi_4 \cdot {}_1\varphi_1 \end{bmatrix}$$

Iz prve modalne konstante izračunamo  ${}_1\varphi_1$ :

```
phi1 = np.sqrt(A1[0])
```

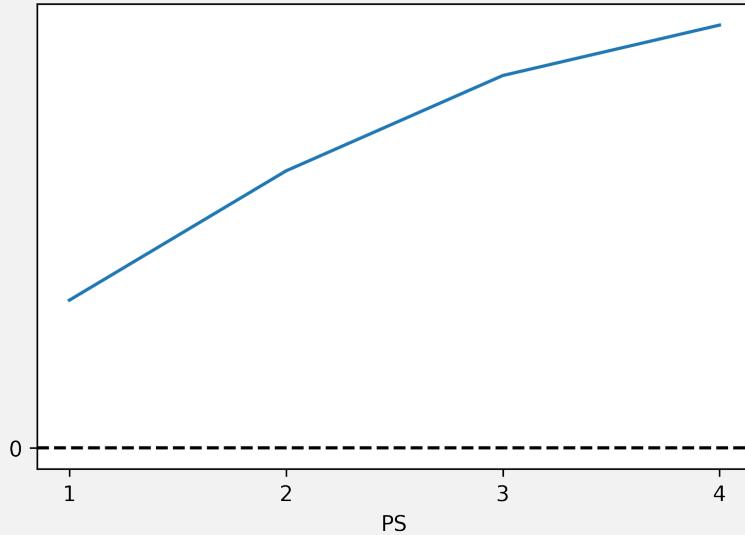
Ter nato modalno obliko  ${}_1\boldsymbol{\varphi}_i$

```
mode_shape = A1/phi1
```

Prikažemo lastno obliko, pri predpostavimo, da je ta realna.

```
plt.subplots(dpi=300)
plt.plot(np.real(np.real(mode_shape)));
plt.axhline(0, ls='--', color='k')
plt.yticks([0],[0]);
plt.xticks([0,1,2,3], [1,2,3,4])
```

```
plt.xlabel('PS');
```



#### 4.4.5 Modalna superpozicija

Frekvenčno prenosno funkcijo na koncu rekonstruiramo še iz identificiranih modalnih parametrov pri prvi lastni frekvenci, saj tako njenostavneje preverimo, če identificirani modalni parametri dobro popišejo dinamski odziv strukture:

$$Y = \frac{1A}{-\omega^2 + \omega_1^2 + j\eta_1\omega_1^2}$$

```
Y_rec = np.einsum('jk,i->ijk',np.expand_dims(A1, axis=0),\
    1/((2*np.pi*np.average(f1))**2-(2*np.pi*freq)**2+\ 
    1j*(2*np.pi*np.average(f1))**2*np.average(damp1)))
```

```
i = 0
o = 0

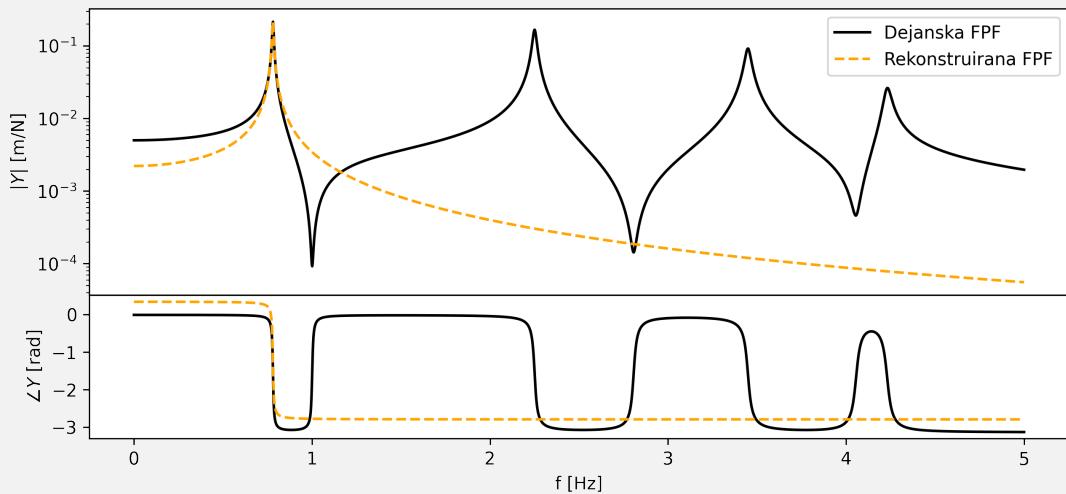
plt.subplots(figsize=(10,6), dpi=300)
plt.subplot(211)
plt.semilogy(freq, np.abs(Y[:,o,i]), color='k', label='Dejanska FPF')
plt.semilogy(freq, np.abs(Y_rec[:,o,i]), '--', color='orange', \
    label='Rekonstruirana FPF')
plt.legend(loc=0)
plt.ylabel(r'$|Y|$ [m/N]')

plt.subplots_adjust(hspace=0)
```

```

plt.subplot(413)
plt.plot(freq, np.angle(Y[:,o,i]), color='k')
plt.plot(freq, np.angle(Y_rec[:,o,i]), '--', color='orange')
plt.xlabel('f [Hz]')
plt.ylabel(r'$\angle Y$ [rad]');

```



Vidimo dobro ujemanje dejanske in rekonstruirane frekvenčne prenosne funkcije v okolici prve lastne frekvence, za katero smo tudi identificirali modalne parametre.

Opozorilo! Za konsistentno rekonstrukcijo po celotnem opazovanem frekvenčnem območju je potrebno v enačbi za modalno superpozicijo upoštevati vse lastne frekvence v tem območju (in po možnosti še tiste izven njega).

## 4.5 Ewins-Glessonova metoda

Ewins-Glessonova metoda je namenjena modalni identifikaciji rahlo dušenih struktur z več prostostnimi stopnjami ob predpostavki histerezneg modela dušenja. Za rahlo dušen sistem predpostavimo realen frekvenčni odziv (kot da faza FPF zavzema le vrednosti  $0^\circ$  in  $180^\circ$ , kar pomeni, da v teoriji dušenje sploh ni prisotno), zato enačbo (42) preuredimo v:

$$\Re(Y_{ij}(\omega)) = \sum_{r=1}^m \frac{{}_r\hat{A}_{ij}}{\omega_r^2 - \omega^2}, \quad (101)$$

kjer je  ${}_r\hat{A}_{ij}$  realna modalna konstanta. Postopek modalne identifikacije je sledeč:

1. Lastne frekvence strukture ocenimo neposredno iz magnitude frekvenčne prenosne funkcije  $Y_{ij}$ , kjer iščemo resonančna območja. Ker je struktura rahlo dušena, so lastne frekvence pogosto dobro ločljive med seboj.
2. V enačbi (101) tako ostane  $m$  neznanih modalnih konstant za posamezen  $r$ ,  ${}_r\hat{A}_{ij}$ . Izračunamo jih iz sistema  $m$  enačb, ki jih zapišemo pri poljubno izbranih frekvencah  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$  in pripadajočih realnih vrednosti frekvenčne prenosne funkcije  $\Re(Y_{ij}(\Omega_1)), \Re(Y_{ij}(\Omega_2)), \dots, \Re(Y_{ij}(\Omega_m))$ :

$$\begin{bmatrix} \Re(Y_{ij}(\Omega_1)) \\ \Re(Y_{ij}(\Omega_2)) \\ \vdots \\ \Re(Y_{ij}(\Omega_m)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_1^2} & \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega_1^2} & \cdots & \frac{1}{\omega_m^2 - \Omega_1^2} \\ \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_2^2} & \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega_2^2} & \cdots & \frac{1}{\omega_m^2 - \Omega_2^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_m^2} & \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega_m^2} & \cdots & \frac{1}{\omega_m^2 - \Omega_m^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_1\hat{A}_{ij} \\ {}_2\hat{A}_{ij} \\ \vdots \\ {}_m\hat{A}_{ij} \end{bmatrix}, \quad (102)$$

$$\hat{Y}_{ij} = \mathbf{R} \hat{\mathbf{A}}_{ij}. \quad (103)$$

Če ima matrika  $\mathbf{R}$  poln rank, lahko izrazimo<sup>19</sup>:

$$\hat{\mathbf{A}}_{ij} = \mathbf{R}^{-1} \hat{Y}_{ij}. \quad (104)$$

3. V zadnjem koraku iz enačbe (42) ocenimo še razmernik histereznegga dušenja, kar vrednotimo v posamezni resonanci glede na magnitudo frekvenčne prenosne funkcije:

$$|Y_{ij}(\omega_r)| = \frac{|{}_r\hat{A}_{ij}|}{\eta_r \omega_r^2}. \quad (105)$$

Sledi:

$$\eta_r = \frac{|{}_r\hat{A}_{ij}|}{|Y_{ij}(\omega_r)| \omega_r^2}. \quad (106)$$

---

<sup>19</sup>Dobra praksa je izbrati število enačb, ki presega  $m$ , ter nato enačbo (104) rešiti s psevdoinvertiranjem matrike  $\mathbf{R}$ .

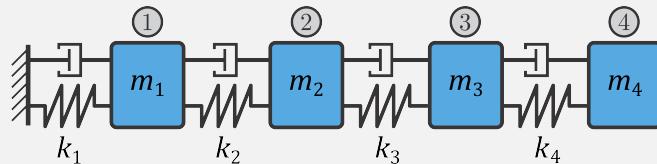
Glavni prednosti metode sta njena enostavnost in konsistentnost v primeru rahlo dušenih sistemov. Kot slabost velja omeniti občutljivost metode na izbiro frekvenčnih točk  $\Omega_i$ , še posebej v primeru šumnih meritev. Pravilna izbira teh točk zahteva določen nabor izkušenj.

Po identificiranih modalnih parametrih modalne oblike določimo po postopku, opisanem v poglavju [4.1.1](#).

## 4.6 Primer: Ewins-Glessonova metoda

```
[1]: import numpy as np  
import pandas as pd  
import matplotlib.pyplot as plt
```

Obravnavamo enostaven diskreten sistem s štirimi prostostnimi stopnjami, za katerega predpostavimo proporcionalen histerezen mehanizem dušenja. Sistem je togo vpet na eni strani, saj se tako izognemo togim nihajnim načinom, ki so težavni za obravnavo z metodami modalne identifikacije.



$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1 \text{ kg}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 200 \text{ N/m}$$

$$\nu = 1 \cdot 10^{-2}$$

$$\mu = 0$$

Sistem vzbujamo v prostostni stopnji 1, pri čemer odziv merimo v vseh prostostnih stopnjah (1-4):

Opozorilo! Za metode modalne identifikacije zavoljo konsistentnosti enot normiranih modalnih oblik uporabljamo pomicnost.

```
freq = np.load('./data/freq.npy')  
Y = np.load('./data/Y_A.npy')[:, :, 0:1]  
Y.shape
```

(4999, 4, 1)

### 4.6.1 Določitev lastne frekvence

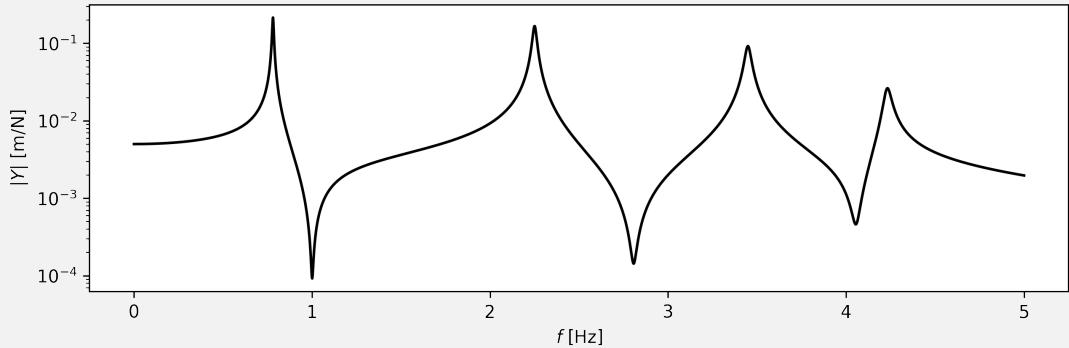
V prvem koraku vizualno določimo lastne frekvence sistema za poljubno izbrano frekvenčno prenosno funkcijo na mestu (0,0) v admitančni matriki Y:

```
i = 0  
o = 0  
  
plt.subplots(figsize=(10,3), dpi=300)
```

```

plt.semilogy(freq, np.abs(Y[:,o,i]), color='k')
plt.ylabel(r'$|Y|$ [m/N]');
plt.xlabel(r'$f$ [Hz]');

```



```
from scipy.signal import find_peaks
```

```

ind = find_peaks(np.abs(Y[:,o,i]))[0]
fr = freq[ind]
fr

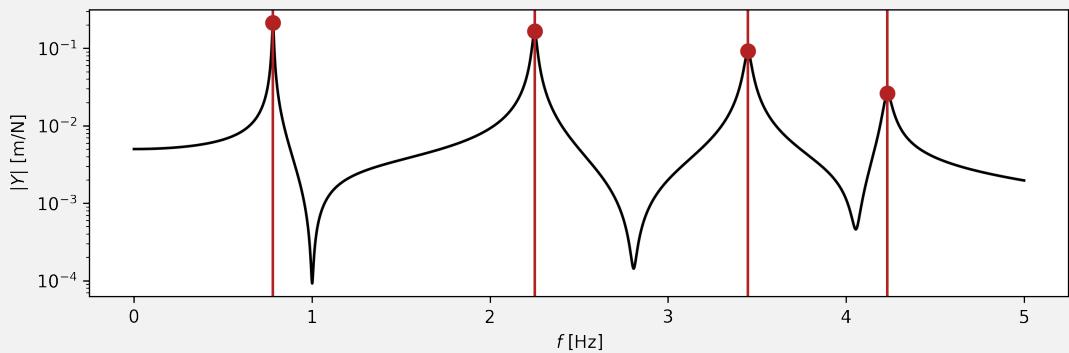
```

```
array([0.782, 2.251, 3.449, 4.232])
```

```

plt.subplots(figsize=(10,3), dpi=300)
plt.semilogy(freq, np.abs(Y[:,o,i]), color='k')
plt.semilogy(fr, np.abs(Y[ind,o,i]), 'o', color='firebrick', ms=8)
for _fr in fr:
    plt.axvline(_fr, color='firebrick')
plt.ylabel(r'$|Y|$ [m/N]');
plt.xlabel(r'$f$ [Hz]');

```



#### 4.6.2 Izračun modalnih konstant

Izberemo točke  $\Omega_r$ , ki jih kasneje uporabimo v sistemu enačb:

$$\begin{bmatrix} \Re(Y_{ij}(\Omega_1)) \\ \Re(Y_{ij}(\Omega_2)) \\ \vdots \\ \Re(Y_{ij}(\Omega_m)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_1^2} & \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega_1^2} & \cdots & \frac{1}{\omega_m^2 - \Omega_1^2} \\ \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_2^2} & \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega_2^2} & \cdots & \frac{1}{\omega_m^2 - \Omega_2^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_m^2} & \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega_m^2} & \cdots & \frac{1}{\omega_m^2 - \Omega_m^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_1\hat{A}_{ij} \\ {}_2\hat{A}_{ij} \\ \vdots \\ {}_m\hat{A}_{ij} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{ij} = \mathbf{R} \hat{\mathbf{A}}_{ij}.$$

```
omega = 2*np.pi*freq
omega_r = omega[ind]
omega_r
```

```
array([ 4.91345091, 14.14345013, 21.67070612, 26.59044022])
```

```
Omega_r_ind = ind * 1.05
Omega_r_ind = Omega_r_ind.astype(int)
Omega_r_ind

omega[Omega_r_ind]
```

```
array([ 5.15849514, 14.84716688, 22.751414 , 27.91619232])
```

```
# pripravimo matriko R
R = np.zeros((ind.shape[0], ind.shape[0]))
for _i, omega_ri in enumerate(omega_r):
    for _j, Omega_ri in enumerate(omega[Omega_r_ind]):
        R[_j, _i] = 1 / (omega_ri ** 2 - Omega_ri ** 2)

# pripravimo vektor Y
Y_ = np.asarray(np.real(Y[Omega_r_ind, :, :]))

# rešimo sistem za modalne konstante A
A = np.linalg.solve(R, Y_)
```

```
A
```

```
array([0.05101546, 0.32916016, 0.42580463, 0.18210139])
```

#### 4.6.3 Izračun razmernika histereznega dušenja

$$\eta_r = \frac{|{}_r\hat{A}_{ij}|}{|\Re(Y_{ij}(\omega_r))| \omega_r^2}$$

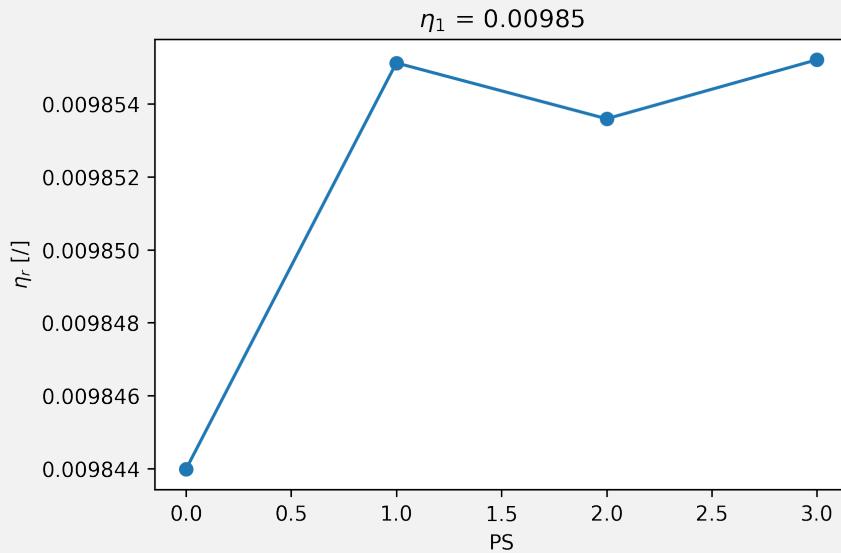
```
damp_r = np.abs(A) / (np.abs(Y[ind,o,i]) * np.asarray(omega_r) ** 2)  
damp_r
```

```
array([0.00984398, 0.00987404, 0.00987506, 0.00980048])
```

Celoten postopek zdaj ponovimo za vse izmerjene frekvenčne prenosne funkcije, pri čemer lahko uporabimo zgolj eno vrstico ali en stolpec admitančne matrike (omejitev Ewins-Glessonove kot metode v skupini “single-input single-output”):

```
Ar = []  
dampr = []  
  
for i in range(Y.shape[1]):  
  
    # pripravimo vektor Y  
    Y_ = np.asarray(np.real(Y[Omega_r_ind,i,0]))  
  
    # rešimo sistem  
    A = np.linalg.solve(R, Y_)  
    eta_r = np.abs(A) / (np.abs(Y[ind,i,0]) * np.asarray(omega_r) ** 2)  
  
    Ar.append(A)  
    dampr.append(eta_r)  
  
Ar = np.asarray(Ar)  
dampr = np.asarray(dampr)
```

```
plt.subplots(dpi=300)  
plt.plot(dampr[:,0], 'o-');  
plt.ylabel(r'$\eta_r$ [/]);  
plt.xlabel('PS');  
plt.title(r'$\eta_1$ = %.5f' %np.average(dampr[:,0]));
```



#### 4.6.4 Modalna oblika

Modalne konstante pri prvi lastni frekvenci izrazimo kot:

$${}_1\mathbf{A}_{i,1} = \boldsymbol{\varphi}_i \varphi_1 = \begin{bmatrix} {}_1\varphi_1 \cdot {}_1\varphi_1 \\ {}_1\varphi_2 \cdot {}_1\varphi_1 \\ {}_1\varphi_3 \cdot {}_1\varphi_1 \\ {}_1\varphi_4 \cdot {}_1\varphi_1 \end{bmatrix}$$

Iz prve modalne konstante izračunamo  ${}_1\varphi_1$ :

```
phi1 = np.sqrt(Ar[0,0])
```

Ter nato modalno obliko  ${}_1\varphi_i$

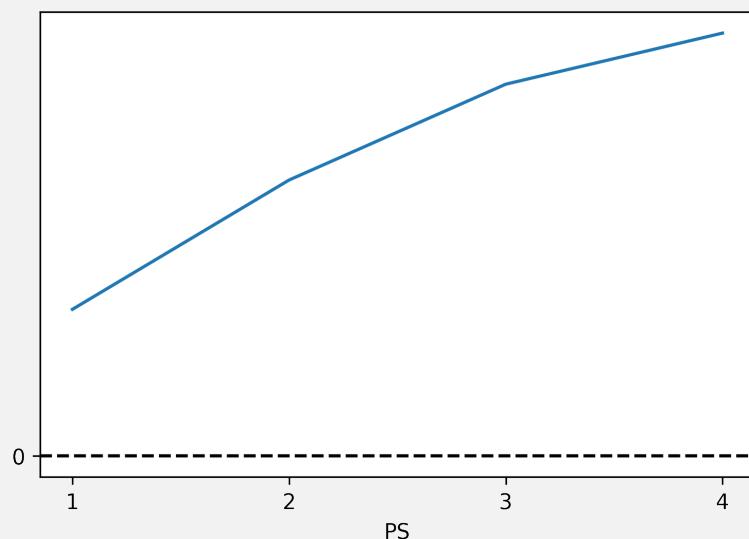
```
mode_shape = Ar[:,0]/phi1
```

```
mode_shape
```

```
array([0.22586603, 0.42526579, 0.57301158, 0.65177276])
```

Prikažemo lastno obliko:

```
plt.subplots(dpi=300)
plt.plot(mode_shape);
plt.axhline(0, ls='--', color='k')
plt.yticks([0],[0]);
plt.xticks([0,1,2,3], [1,2,3,4])
plt.xlabel('PS');
```



## 4.7 Metoda kompleksnih eksponentov z najmanjšo kvadratično napako

Kombinacija metode LSCF (ang. *least-squares complex-frequency*) za določanje polov in metode LSFD (ang. *least-squares frequency-domain*) za določanje modalnih konstant je uveljavljena kot ena izmed najprimernejših in najbolj robustnih metod za identifikacijo modalnih parametrov. Obe metodi izhajata iz modela z več prostostnimi stopnjami, predpostavita viskozen mehanizem izgub<sup>20</sup>, in lahko upoštevata več merjenih vzbujanj in odzivov hkrati (ang. *multiple inputs-multiple outputs*, MIMO).

### 4.7.1 Metoda LSCF

Enačbo (56) zapišemo v spremenjeni obliki<sup>21</sup>:

$$\mathbf{Y}(\omega) = \sum_{r=1}^m \left( \frac{{}_r\mathbf{R}}{\mathrm{j}\omega - s_r} + \frac{{}_r\mathbf{R}^*}{\mathrm{j}\omega - s_r^*} \right) = \sum_{r=1}^m \left( \frac{{}_r\boldsymbol{\phi} {}_r\mathbf{L}^T}{\mathrm{j}\omega - s_r} + \frac{{}_r\boldsymbol{\phi}^* {}_r\mathbf{L}^H}{\mathrm{j}\omega - s_r^*} \right), \quad (107)$$

kjer je  ${}_r\mathbf{L}$  vektor faktorjev modalnih prisotnosti pri  $r$ -ti lastni frekvenci<sup>22</sup>. V nadaljevanju z  $\mathbf{Y}$  označimo eksperimentalno pridobljeno admitančno matriko, na kateri želimo izvesti modalno identifikacijo, z  $\bar{\mathbf{Y}}$  pa njeno matematično aproksimacijo.

Za aproksimacijo uporabimo model s skupnim imenovalcem, kjer aproksimiramo FPF za posamezno vzbujanje ( $i = 1, \dots, N_i$ ) in vse odzive  $N_o$ :

$$\bar{\mathbf{Y}}_o(\omega) = \mathbf{N}_o(\Omega_j(\omega)) \mathbf{D}^{-1}(\Omega_j(\omega)). \quad (108)$$

$\mathbf{N}_o$  je vektor polinomskeh funkcij:

$$\mathbf{N}_o(\Omega_j(\omega)) = \sum_{j=0}^{n_p} \Omega_j(\omega) \boldsymbol{\beta}_{oj}, \quad (109)$$

kjer je  $n_p$  red polinoma, s katerim aproksimiramo  $\mathbf{Y}_o$ ,  $\boldsymbol{\beta}_{oj} \in \mathbb{R}^{1 \times N_i}$  vektor neznanih realnih konstant in  $\Omega_j$  polinomska baza, kjer frekvenco  $\omega$  preslikamo v z domeno:

$$\Omega_j(\omega) = z^j = e^{j\pi j \omega / \omega_{N_k}}. \quad (110)$$

$\omega_{N_k}$  je zadnja frekvenca v frekvenčnem vektorju<sup>23</sup>. Medtem je  $\mathbf{D}$  matrika polinomskeh funkcij:

$$\mathbf{D}(\omega) = \sum_{j=0}^{n_p} \Omega_j(\omega) \mathbf{A}_j, \quad (111)$$

<sup>20</sup>Rezultat identifikacije so tako A-normirane in ne masno normirane modalne oblike.

<sup>21</sup>Nadpis  $(\star)^H$  pomeni kompleksno konjugiranje in transponiranje.

<sup>22</sup>Poenostavljen lahko faktorje modalne prisotnosti opišemo kot razmerja, ki podajajo, kako v dani vzbujevalni točki vzbudimo posamezno modalno obliko.

<sup>23</sup>Celoten postopek izpeljave je prikazan in veljaven zgolj v primeru, ko je vektor krožnih frekvenc  $\omega = (0, \dots, \omega_k, \dots, \omega_{N_k})$ ,  $k = (1, \dots, N_k)$ .

kjer je  $\mathbf{A}_{oj} \in \mathbb{R}^{N_i \times N_i}$  matrika neznanih realnih konstant. Za vse stopnje polinoma neznanke zberemo v matriki:

$$\mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} \beta_{on_p} \\ \vdots \\ \beta_{o0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_p+1) \times N_i}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n_p} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_i(n_p+1) \times N_i}. \quad (112)$$

Upoštevajoč vsa vzbujanja sestavimo glavno matriko neznank  $\boldsymbol{\theta}$ :

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{N_o} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix}. \quad (113)$$

Rešitev  $\boldsymbol{\theta}$  dobimo z minimiziranjem napake med aproksimacijo  $\bar{\mathbf{Y}}_o$  in meritvijo  $\mathbf{Y}_o$ , ki pa je nelinearna:

$$\xi_o^{\text{NLS}}(\omega, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{N}_o(\Omega_j(\omega)) \mathbf{D}^{-1}(\Omega_j(\omega)) - \bar{\mathbf{Y}}_o(\omega). \quad (114)$$

V naslednjem koraku napako lineariziramo tako, da jo z desne strani množimo z  $\mathbf{D}(\Omega_j(\omega))$ :

$$\begin{aligned} \xi^{\text{LS}}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{W}_o(\omega) \xi_o^{\text{NLS}} \mathbf{D}(\omega, \mathbf{A}) \\ &= \mathbf{W}_o(\omega) (\mathbf{N}_o(\omega, \mathbf{B}_o) - \bar{\mathbf{Y}}_o(\omega) \mathbf{D}(\omega, \mathbf{A})) \\ &= \mathbf{W}_o(\omega) \sum_{j=0}^{n_p} (\Omega_j(\omega) \boldsymbol{\beta}_j - \Omega_j(\omega) \bar{\mathbf{Y}}_o(\omega) \mathbf{A}_j). \end{aligned} \quad (115)$$

Sočasno uvedemo še utežnostno matriko  $\mathbf{W}_o$ , ki oceno modalnih parametrov izboljša na način, da različnim frekvenčnim prenosnim funkcijam v enačbi (115) predpiše različne uteži. Enačbo (115) zapišemo v matrični obliki:

$$\xi^{\text{LS}}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \xi^{\text{LS}}(\omega_1, \boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ \xi^{\text{LS}}(\omega_{N_k}, \boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_o & \mathbf{Y}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_o \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_o \boldsymbol{\theta}, \quad (116)$$

kjer sta<sup>24</sup>:

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} (\mathbf{W}_o(\omega_1) [\Omega_0(\omega_1) \dots \Omega_{n_p}(\omega_1)]) \otimes \mathbf{I}_{N_i} \\ \vdots \\ (\mathbf{W}_o(\omega_{N_k}) [\Omega_0(\omega_{N_k}) \dots \Omega_{n_p}(\omega_{N_k})]) \otimes \mathbf{I}_{N_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_k \times (n_p+1)}, \quad (117)$$

$$\mathbf{Y}_0 = \begin{bmatrix} -(\mathbf{W}_o(\omega_1) [\Omega_0(\omega_1) \dots \Omega_{n_p}(\omega_1)]) \otimes \bar{\mathbf{Y}}_0(\omega_1) \\ \vdots \\ -(\mathbf{W}_o(\omega_{N_k}) [\Omega_0(\omega_{N_k}) \dots \Omega_{n_p}(\omega_{N_k})]) \otimes \bar{\mathbf{Y}}_0(\omega_k) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_k \times N_i(n_p+1)}. \quad (118)$$

---

<sup>24</sup>Operator  $\otimes$  pomeni Kroneckerjev produkt.

Ta sistem enačb lahko preoblikujemo v bolj kompaktno obliko reduciranih normalnih enačb. Formiramo Jacobijevu matriko  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{X}_{N_o} & \mathbf{Y}_{N_o} \end{bmatrix}, \quad (119)$$

kar vodi v cenilno funkcijo, ki jo želimo minimizirati s pravilno izbiro  $\boldsymbol{\theta}$ <sup>25</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\text{LS}}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{o=1}^{N_o} \text{sl}\left((\boldsymbol{\xi}_o^{\text{LS}}(\boldsymbol{\theta}))^H \boldsymbol{\xi}_o^{\text{LS}}(\boldsymbol{\theta})\right) \\ &= \sum_{o=1}^{N_o} \text{sl}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{B}_o^T & \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_o & \mathbf{S}_o \\ \mathbf{S}_o^T & \mathbf{T}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_o \\ \mathbf{A} \end{bmatrix}\right) \\ &= \text{sl}(\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{J}^H \mathbf{J} \boldsymbol{\theta}). \end{aligned} \quad (120)$$

Matrike  $\mathbf{R}_o$ ,  $\mathbf{S}_o$  in  $\mathbf{T}_o$  so definirane na način:

$$\mathbf{R}_o = \mathbf{X}_o^H \mathbf{X}_o \in \mathbb{C}^{(n_p+1) \times (n_p+1)}, \quad (121)$$

$$\mathbf{S}_o = \mathbf{X}_o^H \mathbf{Y}_o \in \mathbb{C}^{(n_p+1) \times N_i(n_p+1)}, \quad (122)$$

$$\mathbf{T}_o = \mathbf{Y}_o^H \mathbf{Y}_o \in \mathbb{C}^{N_i(n_p+1) \times N_i(n_p+1)}. \quad (123)$$

Njihove posamezne člene izračunamo iz enačb:

$$[\mathbf{R}_o]_{r,s} = \sum_{k=1}^{N_k} |W_o(\omega_k)|^2 \Omega_{r-1}^H(\omega_k) \Omega_{s-1}(\omega_k), \quad (124)$$

$$[\mathbf{S}_o]_{r,j} = - \sum_{k=1}^{N_k} |W_o(\omega_k)|^2 \bar{Y}_o(\omega_k) \Omega_{r-1}^H(\omega_k) \Omega_{s-1}(\omega_k), \quad (125)$$

$$[\mathbf{T}_o]_{i,j} = - \sum_{k=1}^{N_k} |W_o(\omega_k)|^2 \bar{Y}_o^H(\omega_k) \Omega_{r-1}^H(\omega_k) \Omega_{s-1}(\omega_k). \quad (126)$$

kjer indekse  $r, s, i$  in  $j$  definiramo na sledeč način:

$$r = 1, 2, \dots, n_p + 1, \quad (127)$$

$$s = 1, 2, \dots, n_p + 1, \quad (128)$$

$$i = [(r-1)N_i + 1 : rN_i], \quad (129)$$

$$j = [(s-1)N_i + 1 : sN_i]. \quad (130)$$

Z vstavljanjem enačbe (110) v (124)-(126) dobimo končne izraze za izračun matrik  $\mathbf{R}_o$ ,

---

<sup>25</sup>Operator  $\text{sl}(\star)$  pomeni sled (vsota elementov na diagonali) matrike.

$\mathbf{S}_o$  in  $\mathbf{T}_o$ :

$$[\mathbf{R}_o]_{r,s} = \sum_{k=1}^{N_k} |W_o(\omega_k)|^2 e^{j2\pi(s-r)\omega_k/\omega_{N_k}}, \quad (131)$$

$$[\mathbf{S}_o]_{r,j} = - \sum_{k=1}^{N_k} |W_o(\omega_k)|^2 \bar{Y}_o(\omega_k) e^{j2\pi(s-r)\omega_k/\omega_{N_k}}, \quad (132)$$

$$[\mathbf{T}_o]_{i,j} = - \sum_{k=1}^{N_k} |W_o(\omega_k)|^2 \bar{Y}_o^H(\omega_k), \bar{Y}_o(\omega_k) e^{j2\pi(s-r)\omega_k/\omega_{N_k}}. \quad (133)$$

Minimum cenilna funkcija, podana z enačbo (120), doseže, ko je:

$$\mathbf{J}^H \mathbf{J} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}, \quad (134)$$

kar vodi v enačbo:

$$\mathbf{M} \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \dots & \mathbf{S}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{S}_1^H & \dots & \sum_{o=1}^{N_o} \mathbf{T}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{N_o} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} \in \mathbb{C}^{N_i(n_p+1) \times N_i(n_p+1)}. \quad (135)$$

Za izračun ničel polinoma (polov sistema) potrebujemo zgolj matriko  $\mathbf{A}$ , ki jo dobimo iz zadnje vrstice<sup>26</sup>:

$$\sum_{o=1}^{N_o} \left( \mathbf{T}_o - \mathbf{S}_o^H \mathbf{R}_o^{-1} \mathbf{S}_o \right) \mathbf{A} = \mathbf{N} \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (136)$$

Če vsilimo vrednost koeficientov  $\mathbf{A}_{n_p} = \mathbf{I}$ , izračunamo vse preostale neznanke pri trenutni stopnji polinoma po enačbi<sup>27</sup>:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{N}_{[1:n_p \cdot N_i, 1:n_p \cdot N_i]}^{-1} \mathbf{N}_{[1:n_p \cdot N_i, n_p \cdot N_i + 1:(n_p + 1)N_i]} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_i(n_p + 1) \times N_i}. \quad (137)$$

Za identifikacijo polov sistema v naslednjem koraku ustvarimo spremljevalno matriko (ang. *companion matrix*)  $\mathbf{C}$  za iskanje ničel polinoma imenovalca. Matrika ima sledečo obliko:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{n_p-1} & -\mathbf{A}_{n_p-2} & \dots & -\mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_0 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (138)$$

---

<sup>26</sup>Upoštevamo zvezo  $\mathbf{B}_o = -\mathbf{R}_o^{-1} \mathbf{S}_o \mathbf{A}$ .

<sup>27</sup>Na tem mestu izračunamo neznanke  $\mathbf{A}$  za več stopenj polinoma med 0 in  $n_p$ , na osnovi katerih nato kasneje preverimo stabilnost polov.

Če izračunamo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike  $\mathbf{C}$ , so fizikalno to poli  $\bar{s}_r$  in faktorji modalnih prisotnosti  $\mathcal{V}_r$ :

$$(\mathbf{C} - \bar{s}_r \mathbf{I}) \mathcal{V}_r = \mathbf{0}. \quad (139)$$

Pole  $\bar{s}_r$  iz  $z$  domene transformiramo nazaj v časovno domeno:

$$s_r = -\ln(\bar{s}_r) \cdot 2 \cdot \omega_{N_k}, \quad (140)$$

kjer nato z enačbo (112) izračunamo lastne frekvence  $\omega_r$  in razmernike viskoznega dušenja  $\zeta_r$ . Lastni vektor  $\mathcal{V}_r$  je strukturiran na sledeč način:

$$\mathcal{V}_r = \begin{bmatrix} s_r^{n_p-1} \mathbf{L}_r[:,n_p] \\ s_r^{n_p-2} \mathbf{L}_r[:,n_p] \\ \vdots \\ s_r \mathbf{L}_r[:,n_p] \\ \mathbf{L}_r[:,n_p] \end{bmatrix}. \quad (141)$$

Iz zadnjih  $n_p$  vrstic tako dobimo faktorje modalnih prisotnosti  $\mathbf{L}_r$ .

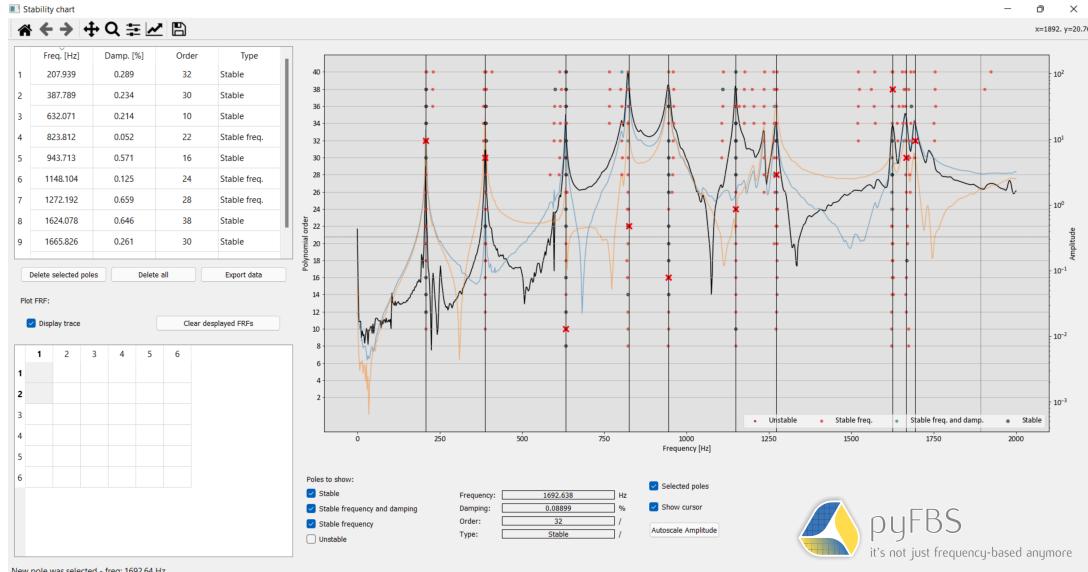
#### 4.7.2 Stabilizacijski diagram

Pri metodi LSCF se za identifikacijo fizikalno relavantnih polov uporablja stabilizacijski diagram, ki ga generiramo s spreminjačim redom polinomske aproksimacije. Pričakovano je, da bodo nekateri poli sovpadali z resonančnimi vrhovi, medtem ko bodo drugi izključno matematični in zatorej fizikalno irelevantni. Glede ponovljivost identificiranih modalnih parametrov v odvisnosti od reda polinoma lahko izmed vseh izračunanih polov izberemo podmnožico fizikalno relavantnih (stabilnih) polov. Iz nabora stabilnih polov nato uporabnik izvede končni izbor.

Za vsak polinomski red iz dobljenih polov izračunamo modalne parametre: lastne frekvence, razmernike dušenja in faktorje modalne prisotnosti. Te nato preko kriterija relativne napake primerjamo s modalnimi parametri, identificiranimi pri predhodnem redu polinoma. V kolikor je relativno odstopanje znotraj predpisane tolerance, lahko pol označimo kot stabilen z vidika frekvence, stabilen z vidika frekvence in razmernika dušenja ali popolnoma stabilen. V nasprotnem primeru gre za nestabilen (večkrat omenjen tudi kot nov) pol.

Različno stabilnost posameznih polov končno prikažemo v obliki stabilizacijskega diagrama. Na abcisni osi se nahajajo (lastne) frekvence, ki ustreza posameznemu polu. Na ordinatni osi se nahaja red polinoma, pri katerem smo izvedli polinomsko aproksimacijo. Na ustreznih mestih nato z različnim grafičnim oblikovanjem prikažemo vse tipe polov (slika 11). Za pomoč pri izbiri stabilnih polov lahko dodatno prikažemo

še izmerjene frekvenčne prenosne funkcije (lahko jih prikazujemo posamično ali pa prikažemo zgolj vsoto diagonalnih FPF-jev admitančne matrike).



Slika 11: Primer stabilizacijskega diagrama.

Izbira stabilnih polov je v obliki stabilizacijskega diagrama tako prepuščena uporabniku. Po dogovoru izbiramo stabilne pole pri čim manjši vrednosti polinomske aproksimacije.

#### 4.7.3 Metoda LSFD

Metoda LSFD je namenjena identifikaciji modalnih konstant, ki jih določimo na podlagi minimalnega kvadratičnega odstopanja med aproksimiranim in eksperimentalnim odzivnim modelom. Ker obravnavamo omejeno frekvenčno območje, v enačbi (56) upoštevamo tudi prisotnost manjkajočih modalnih prispevkov v obliki zgornjih ( $\mathbf{R}_U$ ) in spodnjih ( $\mathbf{R}_L$ ) ostankov, tako da dobimo:

$$\mathbf{Y} = -\frac{\mathbf{R}_L}{\omega^2} + \sum_{r=1}^m \left( \frac{r\mathbf{R}}{j\omega_r - s_r} + \frac{r\mathbf{R}^*}{j\omega_r - s_r^*} \right) + \mathbf{R}_U. \quad (142)$$

Izhodišče za metodo predstavljajo z uporabnikove strani izbrani poli iz metode LSCF, tako da neznanke v zgornji enačbi predstavljajo modalne konstante, zgornji in spodnji ostanki <sup>28</sup>. Na podlagi enačbe (??) med izmerjeno in aproksimirano FPF zapišemo predoločen<sup>29</sup> sistem linearnih enačb, ki ga rešujemo z metodo minimalnega kvadratičnega odstopanja. Rezultat so neznane kompleksne vrednosti modalnih konstant ter zgornjih in spodnjih ostankov.

<sup>28</sup>Ekvivalentno Ewins-Glessonovi metodi (poglavlje 4.5).

<sup>29</sup>Predpostavljamo, da je število frekvenčnih točk večje od števila neznank v naboru modalnih konstant.

## 5 Kriteriji vrednotenja rezultatov

### 5.1 MAC kriterij

Za primerjavo modalnih oblik, določenih v okviru dveh različnih postopkov<sup>30</sup>, je pogosta uporaba kriterija MAC [4]. Če modalne oblike določamo po dveh različnih metodah (indeksiranih z  $k$  in  $l$ ), potem MAC kriterij povezuje  $i$ -to lastno obliko  $_i\boldsymbol{\phi}^k$  z  $j$ -to lastno obliko  $_j\boldsymbol{\phi}^l$  za enake in različne  $i$  in  $j$ :

$$\text{MAC}(_i\boldsymbol{\phi}^k, _j\boldsymbol{\phi}^l) = \frac{|_i\boldsymbol{\phi}^{k^T} _j\boldsymbol{\phi}^{l^*}|^2}{(_i\boldsymbol{\phi}^{k^T} _i\boldsymbol{\phi}^{k^*})(_j\boldsymbol{\phi}^{l^T} _j\boldsymbol{\phi}^{l^*})}, \quad i, j \in (1, \dots, m). \quad (143)$$

Rezultat je matrika realnih vrednosti, ki so v primeru dobrega ujemanja rezultatov  $k$ -te in  $l$ -te meritve blizu vrednosti 1. Pogosto na ta način primerjamo rezultate eksperimentalne modalne analize z numerično rešitvijo.

### 5.2 Koherenčni kriterij

Za primerjavo medsebojnega ujemanja dveh frekvenčnih prenosnih funkcij lahko uporabimo koherenčni kriterij [9], ki omogoča primerjavo dveh kompleksnih števil z vidika amplitude in faze:

$$\text{coh}(x, y) = \frac{(x + y)(x^* + y^*)}{2(xx^* + yy^*)}, \quad x, y \in \mathbb{C} \rightarrow \begin{cases} \text{coh}(x, y) = 1 & \Rightarrow x = y \\ \text{coh}(x, y) = 0.5 & \Rightarrow x \perp y \\ \text{coh}(x, y) = 0 & \Rightarrow x = -y \end{cases}. \quad (144)$$

### 5.3 LAC kriterij

Primerjavo dveh frekvenčnih prenosnih funkcij zgolj z vidika amplitude omogoča LAC kriterij, ki ga zapišemo za dve kompleksni števili:

$$\text{LAC}(x, y) = \frac{2|x^*y|}{(x^*x) + (y^*y)}. \quad (145)$$

---

<sup>30</sup>Če MAC kriterij uporabimo na modalnih oblikah iste metode, dobimo t.i. matriko avtoMAC. V tem primeru so diagonalne vrednosti vedno enake 1, na osnovi vrednosti izven diagonalnih elementov pa lahko sklepamo o podobnosti višjih modalnih oblik z nižjimi.

## 5.4 Faktor kompleksnosti modalnih oblik

Za vrednotenje kompleksnosti modalnih oblik uporabimo faktor kompleksnosti modalnih oblik (ang. *Mode Complexity Factor*, MCF):

$$MCF = 1 - \frac{(S_{xx} - S_{yy})^2 + 4S_{xy}^2}{(S_{xx} + S_{yy})^2}, \quad (146)$$

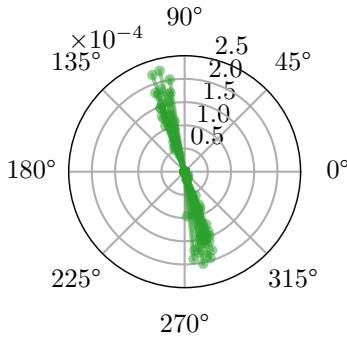
kjer so:

$$S_{xx} = \Re(\phi_r)^T \Re(\phi_r), \quad (147)$$

$$S_{yy} = \Im(\phi_r)^T \Im(\phi_r), \quad (148)$$

$$S_{xy} = \Re(\phi_r)^T \Im(\phi_r). \quad (149)$$

Vrednosti MCF blizu 0 pomenijo, da lahko modalno obliko obravnavamo kot realno. Vizualni vpogled v kompleksnost modalnih oblik dobimo, če modalno obliko prikažemo v kompleksni ravnini (slika 12). Tu lahko smatramo, da je modalna oblika realna, če točke ležijo na isti premici.



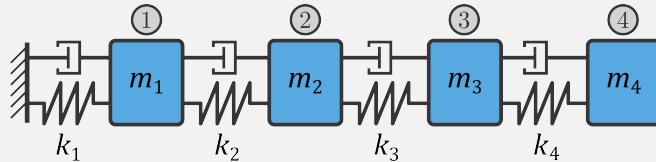
Slika 12: Kompleksnost modalnih oblik.

## 5.5 Primer: Kriteriji vrednotenja rezultatov

```
import numpy as np  
import matplotlib.pyplot as plt
```

### 5.5.1 MAC kriterij

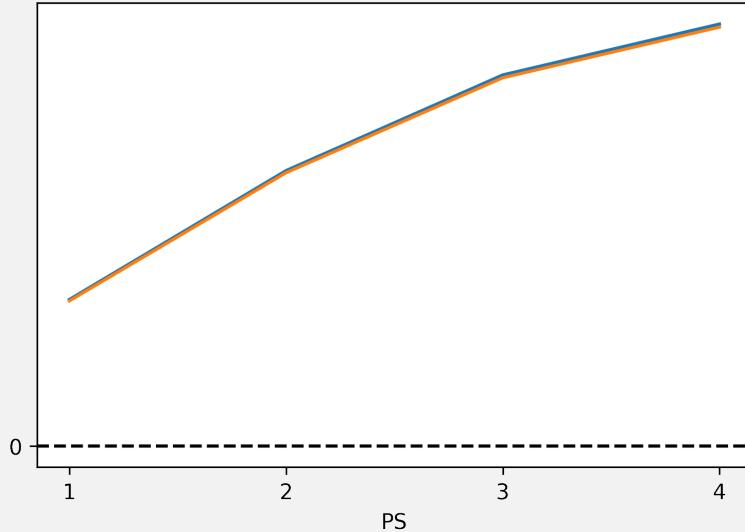
Za demonstracijo uporabe MAC kriterija bomo primerjali modalne oblike strukture na spodnji sliki, identificirane z dvema pristopoma: Ewins-Glessonovo metodo modalne identifikacije na proporcionalno histerezno dušenem sistemu, in lastnimi vektorji kot rešitev problema lastnih vrednosti iz masne in togostne matrike strukture na nedušenem sistemu. Zaradi predpostavke histereznega dušenja (lastni vektorji so identični primeru lastnega nedušenega nihanja) pričakujemo enake lastne oblike po obeh postopkih.



```
# uvozimo lastne oblike  
mode_shapes_MK = np.load('./data/mode_shapes_MK.npy')  
mode_shapes_eg = np.load('./data/mode_shapes_eg.npy')
```

Lastne oblike najprej primerjamo vizualno:

```
m = 0  
  
plt.plot(mode_shapes_MK[:,m]);  
plt.plot(mode_shapes_eg[:,m]);  
plt.axhline(0, ls='--', color='k')  
plt.yticks([0],[0]);  
plt.xticks([0,1,2,3], [1,2,3,4])  
plt.xlabel('PS');
```



MAC kriterij vrednotimo z enačbo:

$$\text{MAC}({}_i\boldsymbol{\psi}^k, {}_j\boldsymbol{\psi}^l) = \frac{\left| {}_i\boldsymbol{\psi}^{k^T} {}_j\boldsymbol{\psi}^{l^*} \right|^2}{\left( {}_i\boldsymbol{\psi}^{k^T} {}_i\boldsymbol{\psi}^{k^*} \right) \left( {}_j\boldsymbol{\psi}^{l^T} {}_j\boldsymbol{\psi}^{l^*} \right)}, \quad i, j \in (1, \dots, m).$$

```

phi_l = mode_shapes_MK
phi_k = mode_shapes_eg

MAC_mat = np.abs(np.einsum('ri,ik->rk', np.conj(phi_l).T, phi_k))**2 / \
          (np.einsum('ri,ir->r', np.conj(phi_l).T, phi_l)[:, np.newaxis] \
           * \
           np.einsum('ri,ir->r', np.conj(phi_k).T, phi_k))

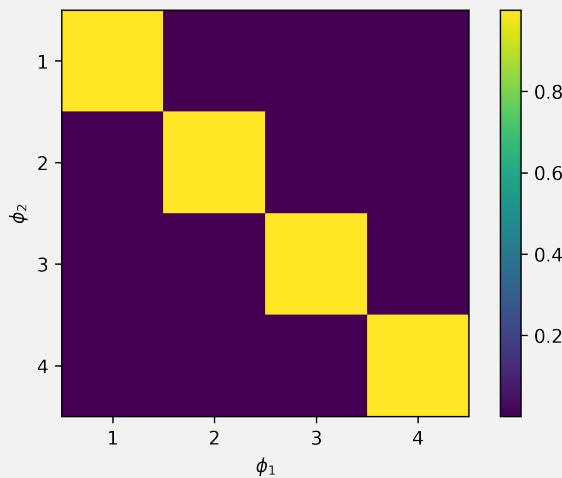
```

Najlažje ga pokažemo v obliki grafa:

```

plt.imshow(MAC_mat)
plt.xlabel(r'$\phi_1$')
plt.ylabel(r'$\phi_2$')
plt.colorbar()
plt.xticks(np.arange(0, 4, 1), np.arange(1, 5, 1))
plt.yticks(np.arange(0, 4, 1), np.arange(1, 5, 1));

```



### 5.5.2 Koherenčni kriterij

Za demonstracijo uporabe koherenčnega kriterija bomo primerjali frekvenčno prenosno funkcijo strukture, uporabljeni zgoraj, ter njeni rekonstrukciji zgolj iz identificiranih modalnih parametrov po metodi prilagajanja kroga.

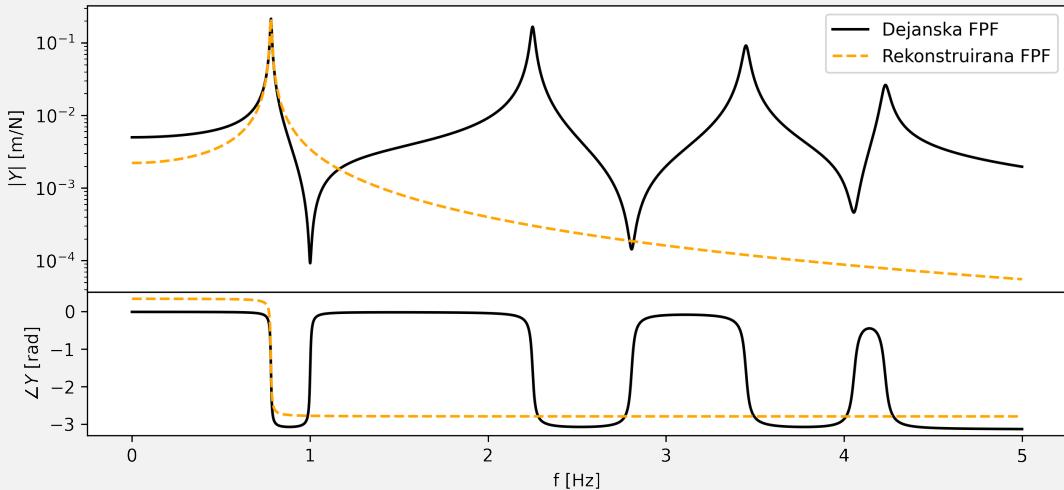
```
Y_1 = np.load('.\data\Y.npy')
Y_2 = np.load('.\data\Y_rec_cf.npy')
freq = np.load('./data/freq.npy')
```

Dva FPF-ja primerjamo vizualno:

```
i = 0
o = 0

plt.subplots(figsize=(10,6))
plt.subplot(211)
plt.semilogy(freq, np.abs(Y_1[:,o,i]), color='k', label='Dejanska FPF')
plt.semilogy(freq, np.abs(Y_2[:,o,i]), '--', color='orange', \
             label='Rekonstruirana FPF')
plt.legend(loc=0)
plt.ylabel(r'$|Y|$ [m/N]')

plt.subplot(413)
plt.plot(freq, np.angle(Y_1[:,o,i]), color='k')
plt.plot(freq, np.angle(Y_2[:,o,i]), '--', color='orange')
plt.xlabel('f [Hz]')
plt.ylabel(r'$\angle Y$ [rad]');
```



Ker modalno sintetizacijo izvajamo z nepopolnim modalnim modelom, so očitne razlike med dejanskim FPF in rekonstrukcijo. Dobro ujemanje je tako le okoli prve lastne frekvence, saj rekonstrukcijo izvedemo le s temi parametri. Izračunamo koherenčni kriteij:

$$\text{coh}(x, y) = \frac{(x + y)(x^* + y^*)}{2(xx^* + yy^*)}$$

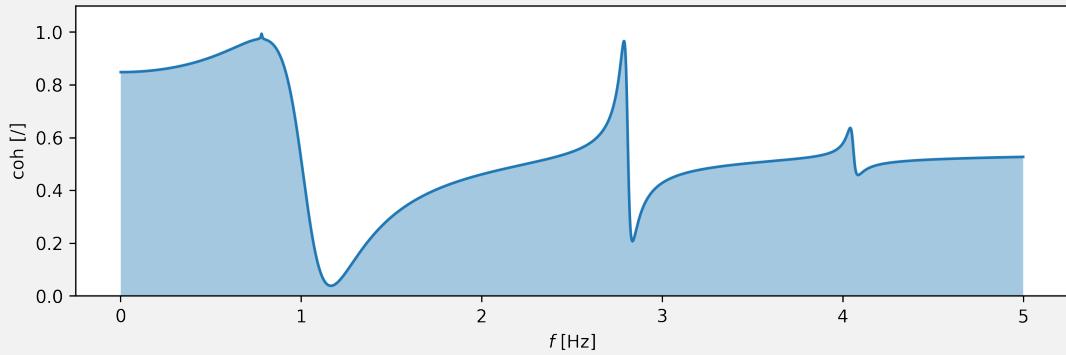
```
numerator = np.einsum("ijk,ijk->ijk", (Y_1+Y_2), (np.conj(Y_1)+np.
                     conj(Y_2)))
denumerator = 2*(np.einsum("ijk,ijk->ijk", Y_1, np.conj(Y_1)) +
                  np.einsum("ijk,ijk->ijk", Y_2, np.conj(Y_2)))
coh = np.einsum("ijk,ijk->ijk", numerator, 1/denumerator)
```

In ga analiziramo vizualno:

```
plt.subplots(figsize=(10,3))

plt.plot(freq, coh[:,o,i].real)
plt.ylim(0,1.1)
plt.fill_between(freq, coh[:,o,i].real, alpha=0.4)

plt.ylabel('coh [/]')
plt.xlabel(r'$f$ [Hz]');
```



Pričakovano je kriterij visok v okolici prve lastne frekvence. V večini preostalega frekvenčnega območja je vrednost manjša od 0.5, naraste pa ponovno okoli 2.8 Hz, ko sta tako amplituda kot faza rekonstrukcije podobni dejanskemu FPF-ju.

### 5.5.3 LAC kriterij

Primerjavo dveh istih FPF uporabimo še za demonstracijo LAC kriterija:

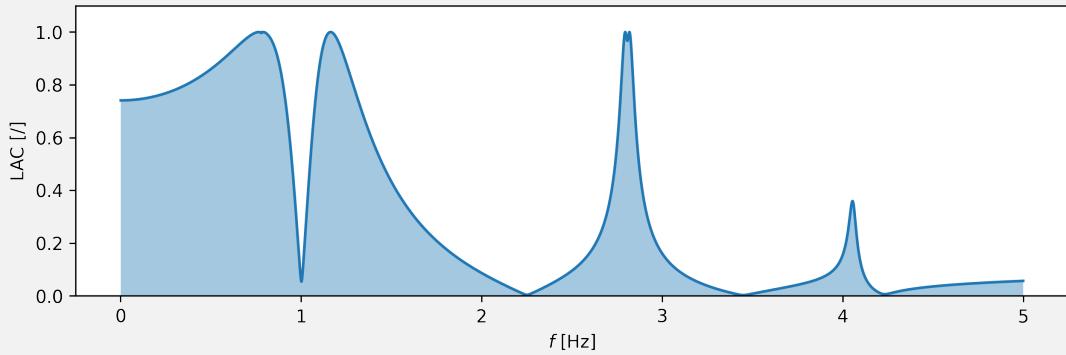
$$\text{LAC}(x, y) = \frac{2 |x^* y|}{(x^* x) + (y^* y)}$$

```
numerator = 2*np.abs(np.einsum("ijk,ijk->ijk", np.conj(Y_1), Y_2))
denumerator = np.einsum("ijk,ijk->ijk", Y_1, np.conj(Y_1)) +
              np.einsum("ijk,ijk->ijk", Y_2, np.conj(Y_2))
lac = np.einsum("ijk,ijk->ijk", numerator, 1/denumerator)
```

```
plt.subplots(figsize=(10,3))

plt.plot(freq, lac[:,o,i].real)
plt.ylim(0,1.1)
plt.fill_between(freq, lac[:,o,i].real, alpha=0.4)

plt.ylabel('LAC [/]')
plt.xlabel(r'$f$ [Hz]');
```



Pričakovano je kriterij visok v okolici prve lastne frekvence. V večini preostalega frekvenčnega območja je vrednost blizu 0, razen na mestih, kjer se sekata magnitudi rekonstruiranega in dejanskega FPF; tam kriterij skokovito naraste (LAC kriterij je občutljiv zgolj na amplitudo FPF-jev).

#### 5.5.4 Faktor kompleksnosti modalnih oblik

Faktor kompleksnosti modalnih oblik izračunamo po enačbi:

$$MCF = 1 - \frac{(S_{xx} - S_{yy})^2 + 4 S_{xy}^2}{(S_{xx} + S_{yy})^2}$$

$$S_{xx} = \Re(\phi_r)^T \Re(\phi_r)$$

$$S_{yy} = \Im(\phi_r)^T \Im(\phi_r)$$

$$S_{xy} = \Re(\phi_r)^T \Im(\phi_r)$$

Kompleksnost modalne oblike vrednotimo za 4. lastni vektor, izračunan iz problema lastnih vrednosti.

```
m = -1
mode = mode_shapes_MK[:,m]

sxx = np.real(mode).T@np.real(mode)
syy = np.imag(mode).T@np.imag(mode)
sxy = np.real(mode).T@np.imag(mode)
mcf = (1 - ((sxx-syy)**2+4*sxy**2)/((sxx+syy)**2))

mcf
```

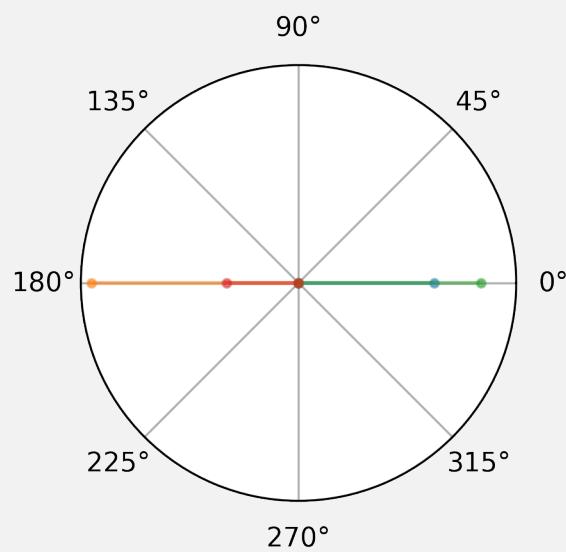
0.0

Rezultat je pričakovan, saj je modalna oblika realna. Modalno obliko nadalje pokažemo v kompleksni ravnini:

```
plt.figure(figsize = (3,3))
ax1 = plt.subplot(111,projection = "polar")

for x in mode:
    ax1.plot([0,np.angle(x)], [0,np.abs(x)],marker='.',alpha = 0.5)

plt.yticks([]);
```



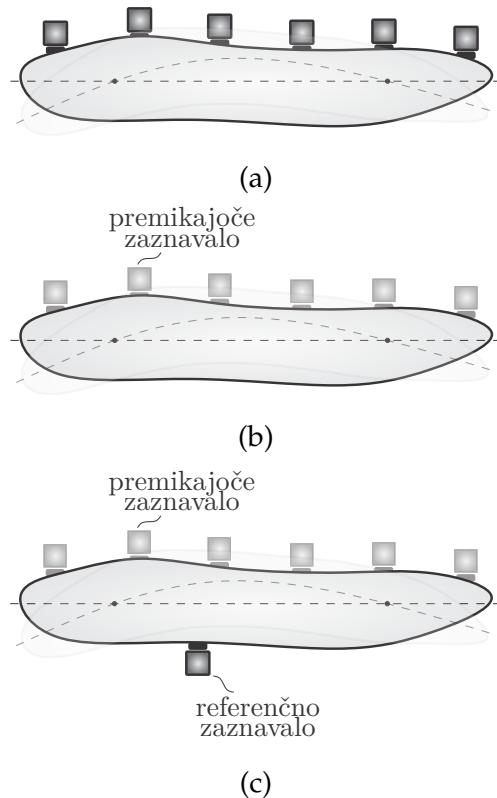
Vidimo, da vse točke ležijo na realni osi, saj je imaginarna komponenta vseh elementov v lastnem vektorju enaka 0.

## 6 Merjenje dinamskih modelov med obratovanjem

### 6.1 Obratovalne deformacijske oblike

Obratovalne deformacijske oblike (ang. *Operating Deflection Shapes, ODS*) prikazujejo deformacijsko stanje strukture med obratovanjem pri dani frekvenci. Identificiramo jih iz meritev odziva v več prostostnih stopnjah na strukturi. ODS podobno kot lastne oblike predstavi obliko nihanja strukture, a za razliko od lastnih oblik podaja absolutno vrednost odziva kot prispevke vseh lastnih oblik pri posamezni frekvenci nihanja. V bližini resonanc so ODS po obliki podobne lastnim oblikam, saj pri posamezni lastni frekvenci v odzivu strukture dominira pripadajoča lastna oblika.

Pomembno pri meritvah ODS je, da imamo zadostno prostorsko ločljivost odzivov, kar pomeni uporabo večjega števila zaznaval. Običajno to predstavlja glavno omejitev metode, saj navadno nimamo dovolj veliko zaznavala za sočasen zajem odziva. V tem primeru moramo odziv zajeti v več korakih, kar lahko izvedemo le, če je odziv sistema periodičen. Pri ločenih meritvah moramo paziti, da so faze odzivov usklajene, s čimer dosežemo podoben učinek, kot če bi bile vse meritve opravljene istočasno.



Slika 13: Merjenje obratovalnih deformacijskih oblik; **a)** uporaba več senzorjev za simultano merjenje odziva, **b)** premikanje zaznavala ob ponovljivem vzbujanju strukture, **c)** uporaba premikajočega in referenčnega zaznavala.

Meritev ODS lahko torej izvajamo na tri načine:

1. Sočasen zajem odziva v vseh točkah na strukturi, ko imamo na voljo dovolj veliko število zaznaval (slika 13a).
2. Uporaba premikajočega zaznavala, kjer moramo zagotoviti ponovljivost obratovalnih pomikov z vidika amplitude in faze za ločeno meritve (slika 13b).
3. Uporaba premikajočega in referenčnega zaznavala, kjer referenčno zaznavalo uporabimo za uskladitev amplitude in faze signalov iz premikajočega zaznavala (slika 13c).

Za zajem fazno usklajenih odzivov je najbolj robusten tretji pristop, pri katerem se referenčno zaznavalo pri vsaki ponovitvi meritve nahaja na istem mestu. Iz izmerjenih odzivov najprej izračunamo križni spekter  $G_{xy}(\omega)$ :

$$G_{xy}(\omega) = U_x(\omega) U_y^*(\omega), \quad (150)$$

kjer je  $U_x(\omega)$  odziv na premikajočem zaznavalu in  $U_y(\omega)$  odziv na referenčnem zaznavalu. Faza spektra  $G_{xy}(\omega)$  je fazna razlika med obema odzivoma<sup>31</sup>. Ker za vsako merjeno točko poznamo relativno fazo glede na referenco, lahko ODS rekonstruiramo že iz  $G_{xy}$ . Če se pri ločenih meritvah spreminja amplituda odziva zaradi nepopolne ponovljivosti, je zaradi množenja amplitud  $U_x(\omega)$  in  $U_y(\omega)$  ODS nekonsistentna.

V ta namen definiramo prenosljivost med premikajočim in referenčnim zaznavalom<sup>32</sup>:

$$H_{xy}(\omega) = \frac{U_x(\omega) U_y^*(\omega)}{U_y(\omega) U_y^*(\omega)} = \frac{G_{xy}(\omega)}{G_{yy}(\omega)}. \quad (151)$$

Faza funkcije  $H_{xy}$  je ponovno fazna razlika med obema signaloma. Tudi amplituda  $H_{xy}$  je konsistentna za več ponovitev meritve, saj je normirana glede na referenčni signal. Če je pri meritvi prisoten šum, se ponovno enostavno minimiziramo z večjim številom povprečenj (glej poglavje 3). Posledično lahko tudi  $H_{xy}$  uporabimo za določitev ODS, a moramo biti pri tem pozorni, saj amplituda ODS pri posamezni frekvenci ni ustrezno normirana. Vrhovi v spektru  $H_{xy}$  namreč ne ustrezajo lastnim in vzbujevalnim frekvencam sistema, pač pa se nahajajo na mestih, kjer je odziv na premikajočem zaznavalu mnogo večji od odziva na referenčnem zaznavalu. Za pravilno normiranje

---

<sup>31</sup>Izbira lokacije referenčnega zaznavala igra pomembno vlogo pri določevanju obratovalnih deformacijskih oblik. Izbrati moramo prostostno stopnjo, kjer je razmerje koristnega signala napram šumu visoko. Če za referenco izberemo mesto blizu vpetja strukture, kjer je odziva malo, velja  $U_y \approx 0$  in posledično  $G_{xy} \approx 0$ . Šum pri meritvi lahko minimiziramo tudi z povprečenjem križnih spektrov, kot je to predstavljeno v poglavju 3.

<sup>32</sup>Podobno kot FPF le da namesto sile uporabimo referenčni odziv.

amplitude na premikajočem zaznavalu prenosljivost  $H_{xy}$  delimo z njeno magnitudo  $|H_{xy}|$ , ter nato množimo z magnitudo  $|U_x|^{33}$ :

$$U_x^{\text{ODS}}(\omega) = \frac{H_{xy}(\omega)}{|H_{xy}(\omega)|} |U_x(\omega)| = \frac{G_{xy}(\omega)}{G_{yy}(\omega)} \frac{|U_x(\omega)|}{|G_{xy}(\omega)|} |G_{yy}(\omega)| = |U_x(\omega)| \frac{G_{xy}(\omega)}{|G_{xy}(\omega)|}. \quad (152)$$

Poleg ustrezone relativne faze se vrhovi  $U_x^{\text{ODS}}(\omega)$  nahajajo pri lastnih in vzbujevalnih frekvencah sistema. Slabost pristopa pa je, da v primeru nepopolne ponovljivosti med ločenimi meritvami amplitude niso konsistentne.

## 6.2 Obratovalna modalna analiza

Identifikacija modalnih parametrov z metodami eksperimentalne analize ni primerna za uporabo na večjih gradbenih inženirskih objektih zaradi njihove velikosti in odziva, ki je v splošnem omejen na nizko frekvenčno območje. Uporaba kontroliranega in merljivega vzbujanja takih struktur je kompleksna ter zahteva drage in velike vzbujevalne naprave. V okviru gradbeništva se je zato razvila izpeljanka eksperimentalne modalne analize, obratovalna modalna analiza (ang. *Operational modal analysis*, OMA).

OMA je postopek modalnega testiranja, kjer modalne parametre strukture ocenimo na osnovi meritve odziva. Za vzbujanje sistema namesto kontroliranega vzbujanja tako izkorisčamo ambientne vplive, kot so veter, promet, ipd. Pogosti načini vzbujanja so tudi naključno, impulzno in sinusno vzbujanje.

Metode OMA so neposredno razvite iz metod EMA, pri čemer identifikacijo izvajamo neposredno na merjenem odzivu ali pa na avto močnostnem spektru  $G_{u,u}$  (enačba (61)), v kolikor želimo meritve povprečiti in s tem minimizirati vpliv šuma. Razlika v formulaciji metod je torej le manjko vzbujevalne sile v OMA. Iz tega razloga bomo v okviru tega predmeta za obratovalno modalno analizo uporabljali metode, izpeljane v poglavju 4, pri čemer bomo frekvenčne prenosne funkcije nadomestili z avto močnostnimi spektri odziva. Zainteresiran bralec lahko alternativno izpeljavo identifikacijskih metod v okviru OMA najde v [10].

Zlasti za velike strukture je OMA priljubljena, saj je tak način testiranja struktur hiter in enostaven, ter se lahko izvaja neposredno na sistemu med njegovim obratovanjem. Identificirani modalni parametri tako neposredno sestavljajo obratovalen odziv strukture, saj so določeni iz nivoja obratovalnega vzbujanja, in ne na osnovi kontroliranega vzbujanja (ki običajno ni dobra reprezentacija obratovalne vzbujevalne sile).

Posledično (zaradi manjka vzbujevalne sile) identificirani lastni vektorji niso ustrezeno normirani in njihova medsebojna ortogonalnost (z ozirom na masno matriko) ne velja

---

<sup>33</sup>Upoštevamo  $|a + jb|^2 = (a + jb)(a - jb)$ .

več. Skalirni faktor, ki povezuje masno normiran in neskaliran lastni vektor se razlikuje od testa do testa, saj je vzbujanje strukture naključno<sup>34</sup>. Tako iz signalov, če niso ustrezeno usklajeni, ne moremo zlepiti lastnih oblik strukture.

Glavna pomanjkljivost OMA pristopa je nizek nivo vibracij, ki ga večje strukture izkazujejo med nekontroliranim vzbujanjem. To zahteva uporabo občutljive merilne opreme za merjenje odziva. Posledično imajo identificirani modalni parametri veliko merilno negotovost.

---

<sup>34</sup>V primeru premikanja senzorjev po strukturi med naključnih vzbujanjem (za potrebe zadostne prostorske ločljivosti modalne analize) lahko za usklajevanje amplitude in faze uporabimo pristope, opisane v poglavju 6.1. Če želimo obratovalno modalno identifikacijo izvesti na prenosljivosti  $H_{xy}$ , uporabimo izpeljanko OMA, ki temelji na prenosljivosti (OMAX) [11].

## 7 Podstrukturiranje v frekvenčni domeni

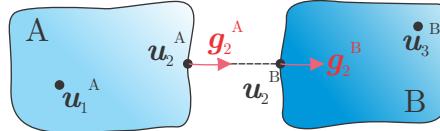
Dinamsko podstrukturiranje lahko razumemo kot dekompozicijo izbrane domene z namenom analizirati kompleksen problem na način, da prek preučevanja posamezne komponente (podstrukture), njenih robnih pogojev in pogojev konsistentnega prehoda v kontaktu s sosednjimi komponentami, dosežemo rešitev celotnega sistema.

V okviru obravnavanega sistema opazujemo njegovo podstrukturo A. Zavoljo enostavnosti in preglednosti se v nadaljevanju omejimo zgolj na sklapljanje dveh podstruktur, A in B. V splošnem sicer opisani postopek velja za poljubno število podstruktur [12, 13]. Obravnavo podstuktur začenjamо v fizični domeni, saj je za potrebe razumevanja bolj intuitivna, ter kasneje naredimo prehod v frekvenčno domeno. Gibalno enačbo podstrukture A zapišemo kot:

$$\mathbf{M}^A \ddot{\mathbf{u}}^A(t) + \mathbf{C}^A \dot{\mathbf{u}}^A(t) + \mathbf{K}^A \mathbf{u}^A(t) = \mathbf{f}^A(t) + \mathbf{g}^A(t), \quad (153)$$

kjer so  $\mathbf{M}^A$  masna,  $\mathbf{C}^A$  dušilna in  $\mathbf{K}^A$  togostna matrika podstrukture A. Vektor prostostnih stopenj  $\mathbf{u}^A$ , vektor zunanjih sil  $\mathbf{f}^A$  in vektor povezovalnih sil  $\mathbf{g}^A$  podstrukture A z ostalimi strukturami zadoščajo kompatibilnostnim in ravnotežnim pogojem.

Z združitvijo gibalnih enačb podsistemu A in B (slika 14) lahko zapišemo gibalno enačbo sistema v fizični domeni<sup>35</sup>:



Slika 14: Prikaz sklapljanja podstruktur A in B.

$$\mathbf{M}^{A|B} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}^{A|B} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^{A|B} \mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{g}, \quad (154)$$

kjer blok-diagonalne matrike sestavimo kot:

$$\mathbf{M}^{A|B} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{A|B} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{A|B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^B \end{bmatrix}. \quad (155)$$

Pri zapisu vektorjev  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{g}$  sledimo predstavitvi prostostnih stopenj (PS), prikazani na sliki 14. Notranje PS  $\mathbf{u}_1$  in  $\mathbf{u}_3$  niso v kontaktu s sosednjimi podstrukturami. V kontaktu se nahajajo zunanje PS  $\mathbf{u}_2$ :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^A \\ \mathbf{u}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^A \\ \mathbf{u}_2^A \\ \mathbf{u}_2^B \\ \mathbf{u}_3^B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^A \\ \mathbf{f}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^A \\ \mathbf{f}_2^A \\ \mathbf{f}_2^B \\ \mathbf{f}_3^B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^A \\ \mathbf{g}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^A \\ \mathbf{g}_2^A \\ \mathbf{g}_2^B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (156)$$

<sup>35</sup>Zavoljo preglednosti v nadaljevanju opustimo zapis odvisnosti od spremenljivke časa.

Povezovalne sile med podstrukturami delujejo zgolj na zunanjih prostostnih stopnjah in zagotavljajo, da so pomiki soležnih prostostnih stopenj enaki.

## 7.1 Kompatibilnostni pogoji

Poleg gibalne enačbe definiramo še kompatibilnostne in ravnotežne pogoje. Kompatibilnostni pogoji zagotavljajo konsistentnost pomikov sovpadajočih prostostnih stopenj v kontaktu med podstrukturama:

$$u_2^A = u_2^B \quad \Rightarrow \quad u_2^B - u_2^A = \mathbf{0}. \quad (157)$$

Slednji zapis lahko razširimo na celoten nabor prostostnih stopenj:

$$\mathbf{B}u = \mathbf{0}, \quad \text{kjer je} \quad \mathbf{B} = [\mathbf{0} \quad -\mathbf{I} \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0}]. \quad (158)$$

Matriko  $\mathbf{B}$  imenujemo Boolova matrika. Za mesto sovpadajočih prostostnih stopenj podstruktur vrne ustrezno predznačeno vrednost 1, sicer 0.

## 7.2 Ravnotežni pogoji

Ravnotežni pogoj zahteva, da vsota notranjih povezovalnih sil  $g$ , ki delujejo v sovpadajočih (zunanjih) prostostnih stopnjah, sledi III. Newtonovemu zakonu:

$$g_2^A = -g_2^B \quad \Rightarrow \quad g_2^A + g_2^B = \mathbf{0}. \quad (159)$$

V notranjih prostostnih stopnjah povezovalne sile ne delujejo. Ravnotežni pogoj, ki velja za vse prostostne stopnje, zapišemo v obliki enačbe:

$$\mathbf{L}^T g = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} g_1^A = \mathbf{0} \\ g_2^A + g_2^B = \mathbf{0} \\ g_3^B = \mathbf{0} \end{cases}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (160)$$

kjer matrika  $\mathbf{L}$  predstavlja logično matriko, ki opisuje ravnotežje sil v soležnih prostostnih stopnjah. Matematično gledano velja, da je matrika  $\mathbf{L}$  ničelni podprostor matrike  $\mathbf{B}$  [12].

Za sistem v fizični domeni s poljubnim številom podstruktur in poljubnimi kompatibilnostmi ter ravnotežnimi pogoji torej velja sistem enačb:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{A|B}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}^{A|B}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^{A|B}\mathbf{u} &= \mathbf{f} + \mathbf{g}, \\ \mathbf{B}u &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{L}^T g &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (161)$$

Preko Fourierjeve transformacije lahko izvedemo preslikavo iz časovne v frekvenčno domeno. Sistem enačb (161) se tako preoblikuje v:

$$\mathbf{Z}^{A|B}(\omega)\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) + \mathbf{g}(\omega), \quad (162a)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{0}, \quad (162b)$$

$$\mathbf{L}^T\mathbf{g}(\omega) = \mathbf{0}. \quad (162c)$$

Vektorji  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{g}$  predstavljajo kompleksne amplitude odziva in sil v frekvenčni domeni. Impedančna matrika  $\mathbf{Z}^{A|B}$  je blok-diagonalne oblike in vsebuje dinamične togoosti za vse podstrukture. Izrazimo jo lahko tudi na osnovi znanih masnih, dušilnih in togostnih lastnosti vseh podstruktur<sup>36</sup>:

$$\mathbf{Z}^{A|B} = -\omega^2 \mathbf{M}^{A|B} + j\omega \mathbf{C}^{A|B} + \mathbf{K}^{A|B}. \quad (163)$$

### 7.3 Primarno sklapljanje

S primarno sklopljivo podstruktur neposredno izrazimo pomike celotnega sklopljenega sistema. V prvem koraku je potrebno definirati nabor enoznačnih prostostnih stopenj, pri čemer si ponovno pomagamo z logično matriko  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{q} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^A \\ \mathbf{u}_2^A \\ \mathbf{u}_2^B \\ \mathbf{u}_3^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix}. \quad (164)$$

Vektor  $\mathbf{q}$  vsebuje enoznačen nabor pomikov prostostnih stopenj v kontaktu. To pomeni, da v vozlišču, kjer se dve podstrukturi sklapljata, obe prostostni stopnji nadomestimo z eno samo in posledično avtomatsko izpolnimo ravnotežni pogoj. Iz enačbe (158) namreč sledi:

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{BL}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{q}. \quad (165)$$

Z vstavljanjem enačbe (164) v enačbo (162) dobimo sistem enačb:

$$\mathbf{Z}^{A|B}\mathbf{L}\mathbf{q} = \mathbf{f} + \mathbf{g}, \quad (166a)$$

$$\mathbf{L}^T\mathbf{g} = \mathbf{0}. \quad (166b)$$

Množenje enačbe (166a) z matriko  $\mathbf{L}^T$  izloči povezovalne sile  $\mathbf{g}$ , kar vrne izraz:

$$\underbrace{\mathbf{L}^T \mathbf{Z}^{A|B} \mathbf{L}}_{\tilde{\mathbf{Z}}^{AB}} \mathbf{q} = \underbrace{\mathbf{L}^T \mathbf{f}}_p + \underbrace{\mathbf{L}^T \mathbf{g}}_0. \quad (167)$$

---

<sup>36</sup>Zavoljo preglednosti v nadaljevanju opustimo zapis odvisnosti od spremenljivke krožne frekvence.

$\tilde{\mathbf{Z}}^{AB}$  imenujemo primarno sklopljena impedanca,  $p$  pa vektor pripadajočih generaliziranih sil. Invertiranje enačbe (167) vrne zapis primarno sklopljene admitančne matrike:

$$q = \tilde{\mathbf{Y}}^{AB} p \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{Y}}^{AB} = (\mathbf{L}^T \mathbf{Z}^{A|B} \mathbf{L})^{-1}. \quad (168)$$

Iz primarnega zapisa admittance lahko preidemo na sekundarni zapis, ki obsega vse prostostne stopnje obeh podstruktur,  $u$ :

$$\bar{\mathbf{Y}}^{AB} = \mathbf{L} (\mathbf{L}^T \mathbf{Z}^{A|B} \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T. \quad (169)$$

Na osnovi razširitve prostostnih stopenj lahko iz osnovne gibalne enačbe (162a) izrazimo še povezovalne sile  $g$ , ki med postopkom sklapljanja niso neposredno izračunate:

$$g = \mathbf{Z}^{A|B} u - f = (\mathbf{Z}^{A|B} \mathbf{L} (\mathbf{L}^T \mathbf{Z}^{A|B} \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T - \mathbf{I}) f \quad (170)$$

Uporaba primarnega sklapljanja je smiselna, ko poznamo dinamične togosti podstuktur [13]. V primeru eksperimentalnega pristopa k podstrukturiranju pa imamo na voljo admitančne matrike posamezne podstrukture, zato v tem primeru uporabimo postopek sekundarnega sklapljanja.

## 7.4 Sekundarno sklapljanje

V okviru sekundarnega sklapljanja ohranjamo celoten nabor prostostnih stopenj, kar pomeni, da v vozlišču sklopitve dveh podstuktur ohranimo obe prostostni stopnji. Avtomatsko izpolnimo ravnotežni pogoj tako, da notranje povezovalne sile nadomestimo z Lagrangeovimi multiplikatorji  $\lambda$ :

$$g = -\mathbf{B}^T \lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} g_1^A \\ g_2^A \\ g_2^B \\ g_3^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ -\lambda \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (171)$$

Oblika zapisa enačbe (171) zagotavlja, da kontaktne sile, enake po velikosti, delujejo v nasprotnih smereh za vsako kontaktno vozlišče med podstrukturami. Ravnotežni pogoj (enačba (162c)) dobi obliko:

$$-\mathbf{L}^T \mathbf{B}^T \lambda = 0 \quad (172)$$

in velja za vsako prostostno stopnjo. Sistem enačb (162) lahko zato preoblikujemo, da dobimo:

$$u = \mathbf{Y}^{A|B} (f - \mathbf{B}^T \lambda), \quad (173a)$$

$$\mathbf{B}u = 0. \quad (173b)$$

Z vstavljanjem gibalne enačbe v kompatibilnostni pogoj izrazimo vektor Lagrangeovih multiplikatorjev:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} \mathbf{Y}^{A|B}(f - \mathbf{B}^T \lambda) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \mathbf{Y}^{A|B} f &= \mathbf{B} \mathbf{Y}^{A|B} \mathbf{B}^T \lambda \\ \lambda &= \left( \mathbf{B} \mathbf{Y}^{A|B} \mathbf{B}^T \right)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Y}^{A|B} f.\end{aligned}\tag{174}$$

Izraz (174) vstavimo v enačbo (173) in rešimo za  $\mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{Y}^{A|B} f - \mathbf{Y}^{A|B} \mathbf{B}^T \left( \mathbf{B} \mathbf{Y}^{A|B} \mathbf{B}^T \right)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Y}^{A|B} f \\ \mathbf{u} &= \left[ \mathbf{Y}^{A|B} - \mathbf{Y}^{A|B} \mathbf{B}^T \left( \mathbf{B} \mathbf{Y}^{A|B} \mathbf{B}^T \right)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Y}^{A|B} \right] f = \bar{\mathbf{Y}}^{AB} f,\end{aligned}\tag{175}$$

kjer z  $\bar{\mathbf{Y}}^{AB}$  označimo sklopljeno admitanco:

$$\bar{\mathbf{Y}}^{AB} = \mathbf{Y}^{A|B} - \mathbf{Y}^{A|B} \mathbf{B}^T \left( \mathbf{B} \mathbf{Y}^{A|B} \mathbf{B}^T \right)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Y}^{A|B}.\tag{176}$$

Posledica uporabe postopka sekundarnega sklapljanja je, da imamo v kontaktu podvojene prostostne stopnje. Podvojene vnose lahko nadomestimo z vstavljanjem generaliziranih koordinat  $\mathbf{q}$  in obremenitev  $\mathbf{p}$  v enačbo (176), kar vodi v primaren zapis sklopljene admitance:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{q} = \mathbf{L}^+ \mathbf{u} \\ \mathbf{p} = \mathbf{L}^+ f \end{array} \right\} \quad \tilde{\mathbf{Y}}^{AB} = (\mathbf{L})^+ \bar{\mathbf{Y}}^{AB} (\mathbf{L}^T)^+.\tag{177}$$

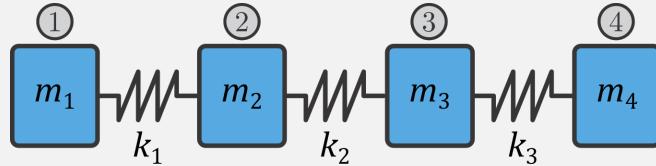
Enačba (175) predstavlja enovrstično formulacijo sklapljanja na osnovi Lagrangeovih množiteljev (ang. *Lagrange Multiplier Frequency Based Substructuring*, LM FBS).

## 7.5 Primer: Sklapljanje na osnovi Lagrangeovih množiteljev

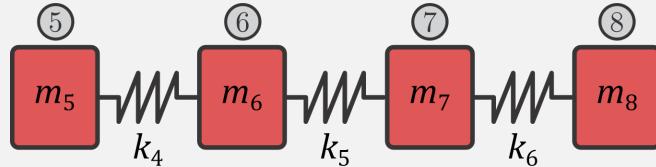
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

### 7.5.1 Sklapljanje podstruktur

Strukturi, ki jih sklapljamo, sta enostavna diskretna dinamska sistema z vsak po štirimi prostostnimi stopnjami. Podstruktura **A** je prikazana v **modri** barvi:



in podstruktura **B** v **rdeči** barvi:

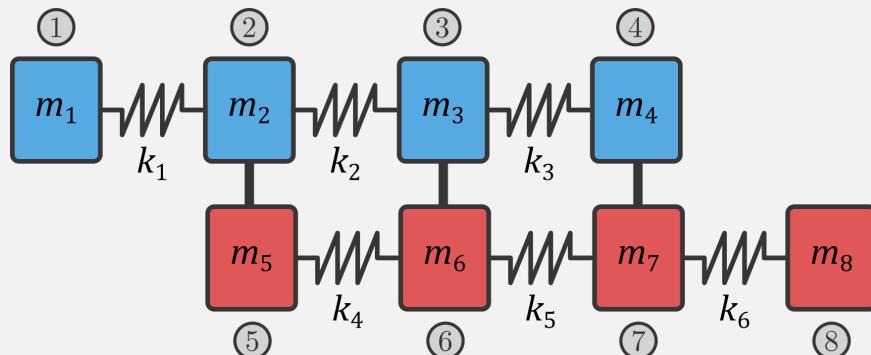


Podstruktura **A** je privzeta iz primera v poglavju 1. Frekvenčne prenosne funkcije podstrukture **B** dobimo z neposredno sintetizacijo ob upoštevanju masnih in togostnih parametrov:

$$m_5, m_6, m_7, m_8 = 2 \text{ kg}$$

$$k_4, k_5, k_6 = 100 \text{ N/m}$$

Sklopljeno konfiguracijo **AB** dobimo na sledeč način: prostostne stopnje **2, 3, 4** in **5, 6, 7** so soležne, zato sklop dobi naslednjo obliko:



Kontakt med podstrukturama je tako vzpostavljen v treh prostostnih stopnjah. Skladno s tem definiramo vektor odzivov, zunanjih in povezovalnih sil, ter nesklopljeno admitančno matriko:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_3^A \\ u_4^A \\ u_5^B \\ u_6^B \\ u_7^B \\ u_8^B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1^A \\ f_2^A \\ f_3^A \\ f_4^A \\ f_5^B \\ f_6^B \\ f_7^B \\ f_8^B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2^A \\ g_3^A \\ g_4^A \\ g_5^B \\ g_6^B \\ g_7^B \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}^{A \sqcup B} = \begin{bmatrix} Y_{11}^A & Y_{12}^A & Y_{13}^A & Y_{14}^A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{21}^A & Y_{22}^A & Y_{23}^A & Y_{24}^A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{31}^A & Y_{32}^A & Y_{33}^A & Y_{34}^A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{41}^A & Y_{42}^A & Y_{43}^A & Y_{44}^A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{55}^B & Y_{56}^B & Y_{57}^B & Y_{58}^B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{65}^B & Y_{66}^B & Y_{67}^B & Y_{68}^B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{75}^B & Y_{76}^B & Y_{77}^B & Y_{78}^B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{85}^B & Y_{86}^B & Y_{87}^B & Y_{88}^B \end{bmatrix}.$$

Najprej uvozimo admitančne matrike posameznih podstruktur ( $\mathbf{Y}^A$  in  $\mathbf{Y}^B$ ). Ker gre za sintetični primer, imamo na voljo polni admitančni matriki obeh struktur (vse kombinacije vzbujanj in odzivov, brez spodnjega in zgornjega modalnega ostanka).

```
Y_A = np.load('~/data/Y_A.npy')
Y_B = np.load('~/data/Y_B.npy')
Y_A.shape, Y_B.shape
```

((499, 4, 4), (499, 4, 4))

Opozorilo! Redno preverjajte pravilnost in konsistentnost velikosti matrik!

```
freq = np.load('~/data/freq.npy')
freq.shape
```

(499,)

Najprej ustvarimo matriko nesklopljene admitance, ki vsebuje frekvenčne prenosne funkcije posameznih podstuktur:

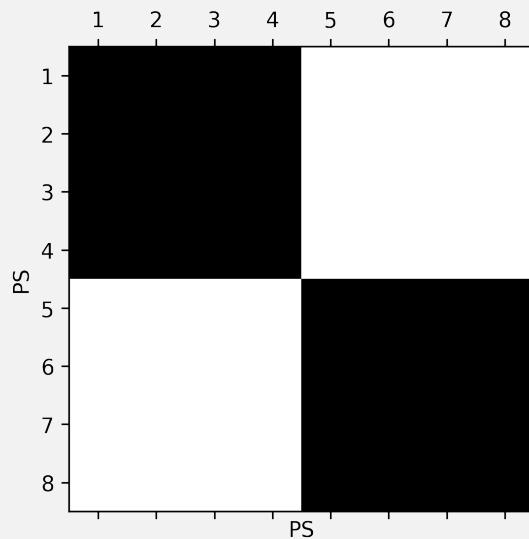
$$\mathbf{Y}^{A \sqcup B} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}^B \end{bmatrix}.$$

```
# prirpavi matriko ničel ustrezne velikosti
Y_A_B = np.zeros((Y_A.shape[0], Y_A.shape[1]+Y_B.shape[1], \
                   Y_A.shape[2]+Y_B.shape[2]), dtype=complex)

# dodaj Y_A:
Y_A_B[:, :Y_A.shape[1], :Y_A.shape[1]] = Y_A
# dodaj Y_B:
Y_A_B[:, Y_A.shape[2] :, Y_A.shape[2] :] = Y_B
```

Nasvet: Uporabite spy prikaz iz knjižnice matplotlib da preverite, če je oblika matrike  $\mathbf{Y}^{A \sqcup B}$  pravilna. Ničti vnesi so obarvani belo, polni pa temno.

```
plt.subplots(dpi=300)
plt.spy(Y_A_B[0,:,:]) # prikažemo pri poljubni frekvenci, v tem primeru
    ↪ 0,01 Hz
plt.xlabel('PS')
plt.ylabel('PS')
plt.xticks(np.arange(0,8,1),np.arange(1,9,1))
plt.yticks(np.arange(0,8,1),np.arange(1,9,1));
```



Nadalje definiramo kompatibilnostne in ravnotežne robne pogoje. Začnemo s kompatibilnostjo; zapišemo vse prostostne stopnje, kjer morajo biti pomiki na individualnih strukturah enaki v sklopljeni konfiguraciji:

$$u_2^A = u_5^B \Rightarrow u_5^B - u_2^A = 0,$$

$$u_3^A = u_6^B \Rightarrow u_6^B - u_3^A = 0,$$

$$u_4^A = u_7^B \Rightarrow u_7^B - u_4^A = 0.$$

Iz zgornjih enačb lahko enostavno kreiramo Boolovo matriko **B**, da z množenjem **B** *u* dobimo ustrezne kompatibilnosti. Potrebujemo tri enačbe (kompatibilnosti), zato je število vrstic matrike **B** enako 3, vključiti pa moramo vseh 8 prostostnih stopenj, zato ima 8 stolpcev.

```
B = np.zeros((3,8))
```

Prva vrstica izraza **B** *u* mora vrniti  $u_5^B - u_2^A = 0$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_3^A \\ u_4^A \\ u_5^B \\ u_6^B \\ u_7^B \\ u_8^B \end{bmatrix} = u_5^B - u_2^A = 0.$$

Zato prvo vrstico matrike **B** definiramo kot:

```
B[0,:] = np.array([0,-1,0,0,1,0,0,0])
```

Enako ponovimo z drugo in tretjo vrstico:

```
B[1,:] = np.array([0,0,-1,0,0,1,0,0])
B[2,:] = np.array([0,0,0,-1,0,0,1,0])
```

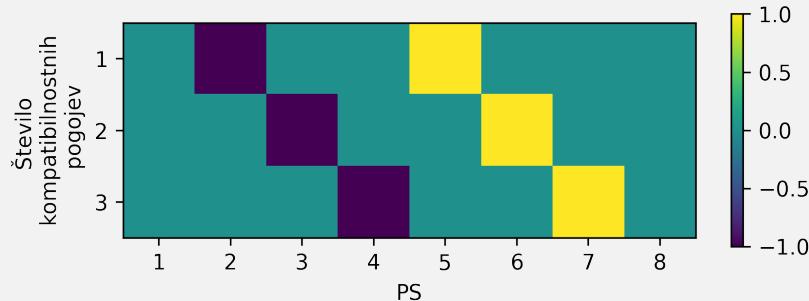
Nasvet: Uporabite imageshow prikaz iz knjižnice matplotlib da preverite pravilnost Boolove matrike.

```
plt.subplots(dpi=300)
plt.imshow(B)
plt.colorbar(shrink=0.5)
plt.xlabel('PS')
```

```

plt.ylabel('Število \n kompatibilnostnih \n pogojev')
plt.xticks(np.arange(0,8,1), np.arange(1,9,1))
plt.yticks(np.arange(0,3,1), np.arange(1,4,1));

```



Ker za sklapljanje uporabljamo metodo LM FBS, Boolova matrika  $\mathbf{B}$  zagotavlja tudi ravnotežne pogoje. Notranje ravnotežje v sklopu mora veljati na vseh kontaktnih prostostnih stopnjah, zato definiramo vektor Lagrangeovih množiteljev:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix},$$

Z razširitvijo  $\mathbf{g} = -\mathbf{B}^T \lambda$  dobimo ravnotežne enačbe za vse prostostne stopnje:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2^A \\ g_3^A \\ g_4^A \\ g_5^B \\ g_6^B \\ g_7^B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \\ -\lambda_3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

kjer opazimo, da so povezovalne sile na soležnih prostostnih stopnjah enake po magnitudi, a različne po smeri (III. Newtonov zakon):

$$g_2^A + g_5^B = 0 \Rightarrow \lambda_1 + (-\lambda_1) = 0,$$

$$g_3^A + g_6^B = 0 \Rightarrow \lambda_2 + (-\lambda_2) = 0,$$

$$g_4^A + g_7^B = 0 \Rightarrow \lambda_3 + (-\lambda_3) = 0.$$

V kolikor uporabljamo LM FBS metodo, za sklopitev podstruktur zadostuje definicija nesklopljene admittance  $\mathbf{Y}^{A|B}$  in Boolove matrike  $\mathbf{B}$ :

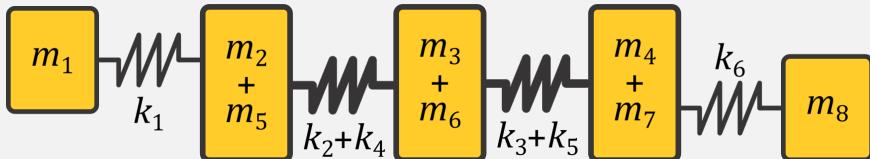
Nasvet: Za množenje matrik uporabite @ ali numpy.mathmul.

$$\mathbf{Y}^{AB} = \mathbf{Y}^{A|B} - \mathbf{Y}^{A|B} \mathbf{B}^T \left( \mathbf{B} \mathbf{Y}^{A|B} \mathbf{B}^T \right)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Y}^{A|B}.$$

```
Y_AB = Y_A_B - Y_A_B @ B.T @ np.linalg.inv(B@Y_A_B@B.T) @ B @ Y_A_B
Y_AB.shape
```

(499, 8, 8)

Sklopljen rezultat je admitančna matrike sledeče strukture:



Če pogledamo velikost novo nastale matrike  $\mathbf{Y}^{AB}$  opazimo, da je struktura, na katero se nanaša, sestavljena iz 8 prostostnih stopenj, kljub temu, da vemo, da AB sestavlja 5 unikatnih prostostnih stopenj. To je stranski produkt uporabe LM FBS metode: kontakt popisuje 6 prostostnih stopenj, od tega so 3 unikatne, ostale pa podvojene. To lahko hitro preverimo z primerjavo soležnih prostostnih stopenj:

```
np.allclose(Y_AB[:,1,:], Y_AB[:,4,:])
```

True

Podvojene prostostne stopnje v matriki  $\mathbf{Y}^{AB}$  ročno pobrišemo:

```
Y_AB_unique = Y_AB[:, [[0], [1], [2], [3], [-1]], [0, 1, 2, 3, -1]]
Y_AB_unique.shape
```

(499, 5, 5)

```
np.allclose(Y_AB_unique[:,1,:], Y_AB_unique[:,4,:])
```

False

Ali pa definiramo lokalizacijsko matriko  $L$ , ki povezuje unikatne prostostne stopnje z celotnim naborom (vključno s podvojenimi) prostostnimi stopanjami. Da definiramo  $L$ , prvo zapišemo unikatne PS (v našem primeru je to 5 PS):

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix},$$

Če unikatne PS razširimo na celoten nabor PS (vključno z podvojenimi PS), dobimo naslednjo zvezo (ki avtomatsko izpolni enakost odzivov na podvojenih PS):

$$\begin{bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_3^A \\ u_4^A \\ u_5^B \\ u_6^B \\ u_7^B \\ u_8^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix}.$$

Razširitev iz  $\mathbf{q}$  v  $\mathbf{u}$  torej dosežemo z lokalizacijsko matriko  $L$ :

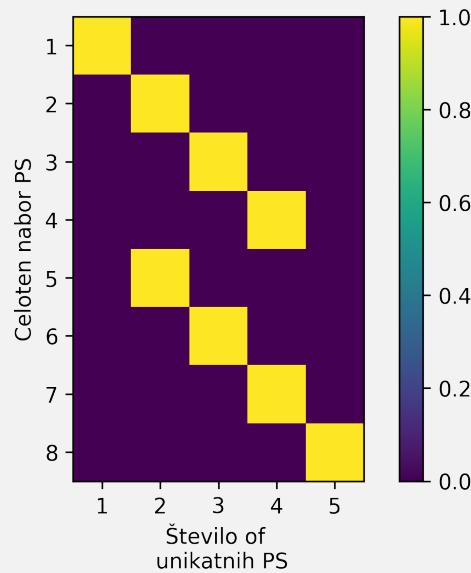
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_3^A \\ u_4^A \\ u_5^B \\ u_6^B \\ u_7^B \\ u_8^B \end{bmatrix}.$$

```
L = np.zeros((8,5))
L[:4,:4] = np.eye(4)
L[-4:,:1:] = np.eye(4)
```

```

plt.subplots(dpi=300)
plt.imshow(L);
plt.colorbar()
plt.xlabel('Število of \n unikatnih PS')
plt.ylabel('Celoten nabor PS')
plt.yticks(np.arange(0,8,1), np.arange(1,9,1))
plt.xticks(np.arange(0,5,1), np.arange(1,6,1));

```



$$\tilde{\mathbf{Y}}^{AB} = \mathbf{L}^+ \mathbf{Y}^{AB} \left(\mathbf{L}^T\right)^+.$$

```
Y_AB_unique_ = np.linalg.pinv(L) @ Y_AB @ np.linalg.pinv(L.T)
```

```
np.allclose(Y_AB_unique, Y_AB_unique_)
```

True

V zadnjem koraku še primerjamo sklopljene FPF-je z referenčnimi (pravilnimi):

```
Y_AB_true = np.load('./data/Y_AB.npy')
```

```
i = 0
o = 0
```

```
plt.subplots(figsize=(10,6), dpi=300)
plt.subplot(211)
```

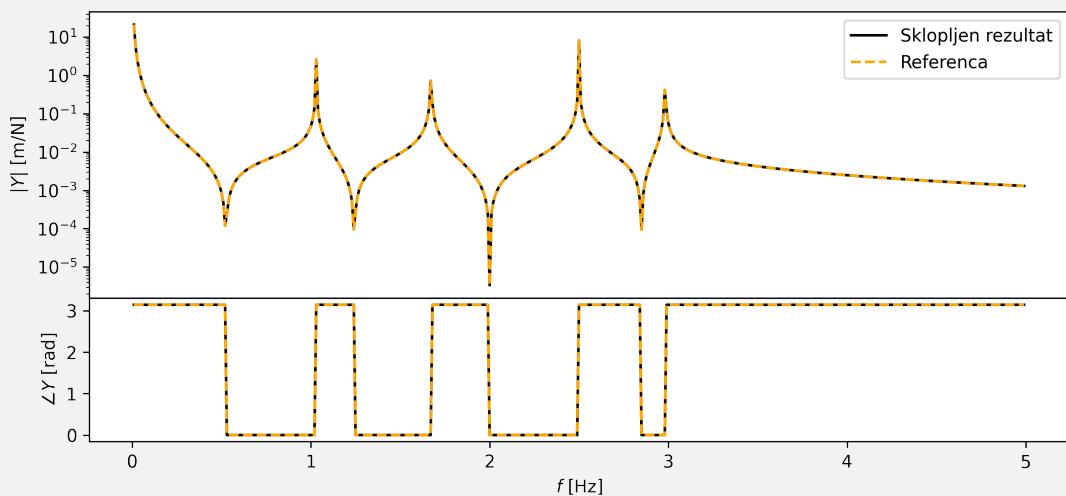
```

plt.semilogy(freq, np.abs(Y_AB_unique[:,o,i]), color='k',\
    label='Sklopljen rezultat')
plt.semilogy(freq, np.abs(Y_AB_true[:,o,i]), '--', color='orange',\
    label='Referenca')
plt.legend(loc=0)
plt.ylabel(r'$|Y|$ [m/N]')

plt.subplots_adjust(hspace=0)

plt.subplot(413)
plt.plot(freq, np.angle(Y_AB_unique[:,o,i]), color='k')
plt.plot(freq, np.angle(Y_AB_true[:,o,i]), '--', color='orange')
plt.xlabel('$f$ [Hz]')
plt.ylabel(r'$\angle Y$ [rad]');

```

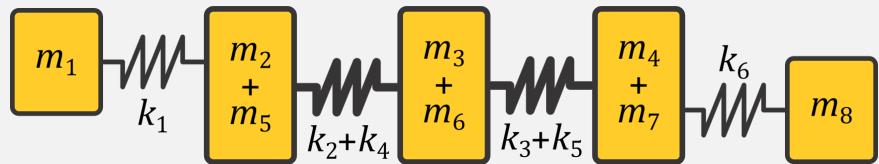


```
np.allclose(Y_AB_true, Y_AB_unique)
```

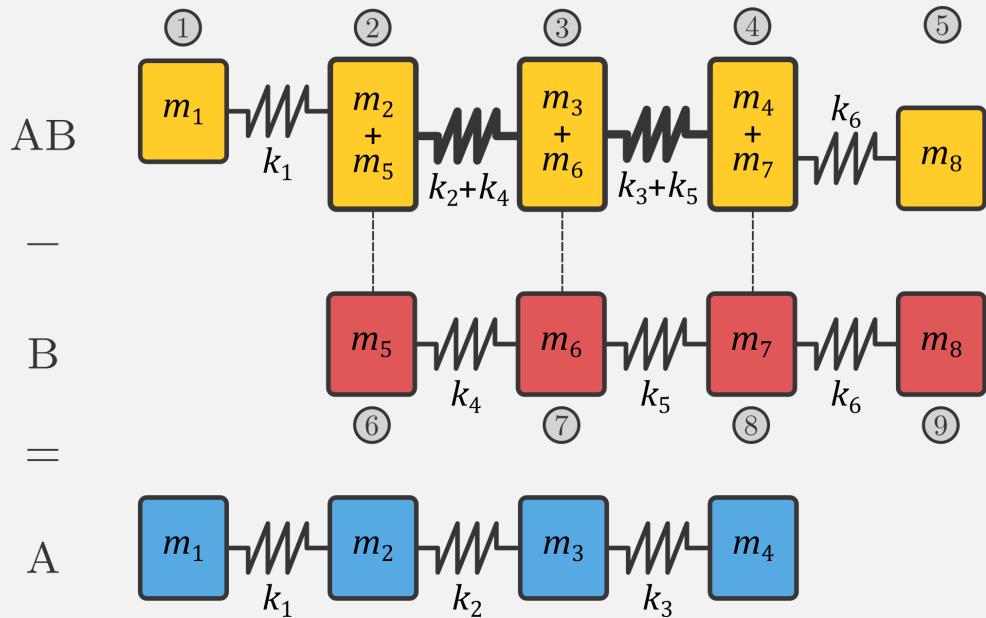
True

### 7.5.2 Odklapljanje podstruktur

V drugem primeru si poglejmo invezni postopek: odklapljanje podstruktur. Na osnovi znanih admitanc struktur AB in B izrazimo admitanco podstrukture A,  $Y^A$ . AB, A, in B ostajajo nespremenjeni napram prejšnjemu primeru, a zaradi enostavnosti uporabimo novo oštrevilčevanje PS. Struktura **AB** je prikazana v **oranžni** barvi in vsebuje 5 PS:



Iz sklopa AB bomo odklopili podstukturo B prikazano v **rdeči** barvi:



in tako dobimi admitanco podstrukture A v **modri** barvi.

$$u = \begin{bmatrix} u_1^{AB} \\ u_2^{AB} \\ u_3^{AB} \\ u_4^{AB} \\ u_5^{AB} \\ u_6^B \\ u_7^B \\ u_8^B \\ u_9^B \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1^{AB} \\ f_2^{AB} \\ f_3^{AB} \\ f_4^{AB} \\ f_5^{AB} \\ f_6^B \\ f_7^B \\ f_8^B \\ f_9^B \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2^{AB} \\ g_3^{AB} \\ g_4^{AB} \\ 0 \\ g_6^B \\ g_7^B \\ g_8^B \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}^{AB|B} = \begin{bmatrix} Y_{11}^{AB} & Y_{12}^{AB} & Y_{13}^{AB} & Y_{14}^{AB} & Y_{15}^{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{21}^{AB} & Y_{22}^{AB} & Y_{23}^{AB} & Y_{24}^{AB} & Y_{25}^{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{31}^{AB} & Y_{32}^{AB} & Y_{33}^{AB} & Y_{34}^{AB} & Y_{35}^{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{41}^{AB} & Y_{42}^{AB} & Y_{43}^{AB} & Y_{44}^{AB} & Y_{45}^{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{51}^{AB} & Y_{52}^{AB} & Y_{53}^{AB} & Y_{54}^{AB} & Y_{55}^{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y_{66}^B & -Y_{67}^B & -Y_{68}^B & -Y_{69}^B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y_{76}^B & -Y_{77}^B & -Y_{78}^B & -Y_{79}^B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y_{86}^B & -Y_{87}^B & -Y_{88}^B & -Y_{89}^B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y_{96}^B & -Y_{97}^B & -Y_{98}^B & -Y_{99}^B \end{bmatrix}.$$

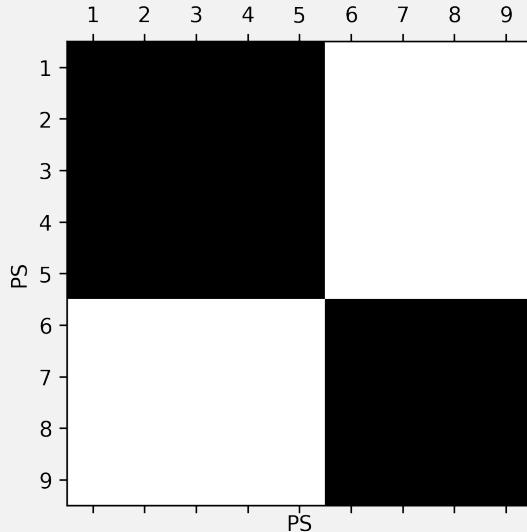
```
Y_AB = np.load('./data/Y_AB.npy')
Y_B = np.load('./data/Y_B.npy')
```

Kot predstavljeno v teoretični razlagi, LM FBS uporabimo za odklapljanje struktur tako, da admitanco strukture, ki jo iz sistema želimo odklopiti, enostavno pomnožimo z -1:

```
# pripravimo matriko ničel
Y_AB_B = np.zeros((Y_AB.shape[0], Y_AB.shape[1]+Y_B.shape[1], \
                    Y_AB.shape[2]+Y_B.shape[2]), dtype=complex)

# dodamo Y_AB:
Y_AB_B[:, :Y_AB.shape[1], :Y_AB.shape[1]] = Y_AB
# dodamo Y_B:
Y_AB_B[:, Y_AB.shape[2] :, Y_AB.shape[2] :] = -1*Y_B
```

```
plt.subplots(dpi=300)
plt.spy(Y_AB_B[0, :, :])
plt.xlabel('PS')
plt.ylabel('PS')
plt.xticks(np.arange(0, 9, 1), np.arange(1, 10, 1))
plt.yticks(np.arange(0, 9, 1), np.arange(1, 10, 1));
```



Nadalje definiramo kompatibilnostne in ravnotežne pogoje preko Boolove matrike **B**. V našem primeru najprej zapišemo kompatibilnost med strukturama AB in B:

$$u_2^{AB} = u_6^B \Rightarrow u_6^B - u_2^{AB} = 0,$$

$$u_3^{AB} = u_7^B \Rightarrow u_7^B - u_3^{AB} = 0,$$

$$u_4^{AB} = u_8^B \Rightarrow u_8^B - u_4^{AB} = 0.$$

Ker imamo opravka z tremi kompatibilnostnimi pogoji za 9 PS, je velikost matrike **B**  $3 \times 9$ .

```
B = np.zeros((3,9))
```

Da izraz **B** *u* vrne  $u_6^B - u_2^{AB} = 0$ , mora biti prva vrstica enačbe **B**:

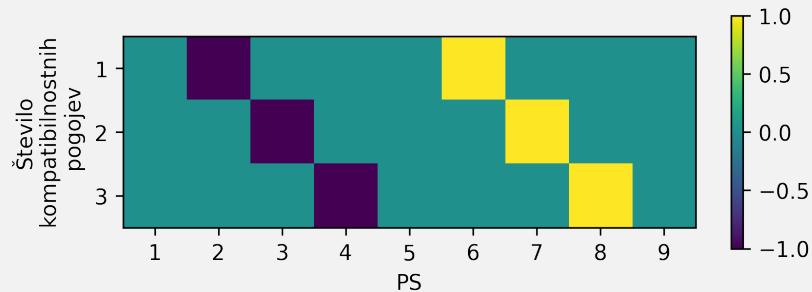
```
B[0,:] = np.array([0,-1,0,0,0,1,0,0,0])
```

Postopek ponovimo za preostale kompatibilnosti:

```
B[1,:] = np.array([0,0,-1,0,0,0,1,0,0])
B[2,:] = np.array([0,0,0,-1,0,0,0,1,0])
```

```
plt.subplots(dpi=300)
plt.imshow(B)
plt.colorbar(shrink=0.5)
plt.xlabel('PS')
plt.ylabel('Število\n kompatibilnostnih \n pogojev')
```

```
plt.xticks(np.arange(0,9,1), np.arange(1,10,1))
plt.yticks(np.arange(0,3,1), np.arange(1,4,1));
```



Z znanima  $\mathbf{Y}^{AB|B}$  in  $\mathbf{B}$  izračunamo admitanco podstrukture  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{Y}^A = \mathbf{Y}^{AB|B} - \mathbf{Y}^{AB|B} \mathbf{B}^T \left( \mathbf{B} \mathbf{Y}^{AB|B} \mathbf{B}^T \right)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Y}^{AB|B}.$$

```
Y_A = Y_AB_B - Y_AB_B @ B.T @ np.linalg.inv(B@Y_AB_B@B.T) @ B @ Y_AB_B
Y_A.shape
```

(499, 9, 9)

Zaradi podvajanje PS ostranimo podvojene PS v kontaktu:

```
Y_A_unique = Y_A[:, [[0], [1], [2], [3]], [0,1,2,3]]
Y_A_unique.shape
```

(499, 4, 4)

In v zadnjem koraku odklopiljten rezultat primerjamo z referenco:

```
Y_A_true = np.load('./data/Y_A.npy')
```

```
i = 0
o = 0

plt.subplots(figsize=(10,6), dpi=300)
plt.subplot(211)
plt.semilogy(freq, np.abs(Y_A_unique[:,o,i]), color='k', \
             label='Odklopiljen rezultat')
plt.semilogy(freq, np.abs(Y_A_true[:,o,i]), '--', color='orange', \
             label='Referenca')
```

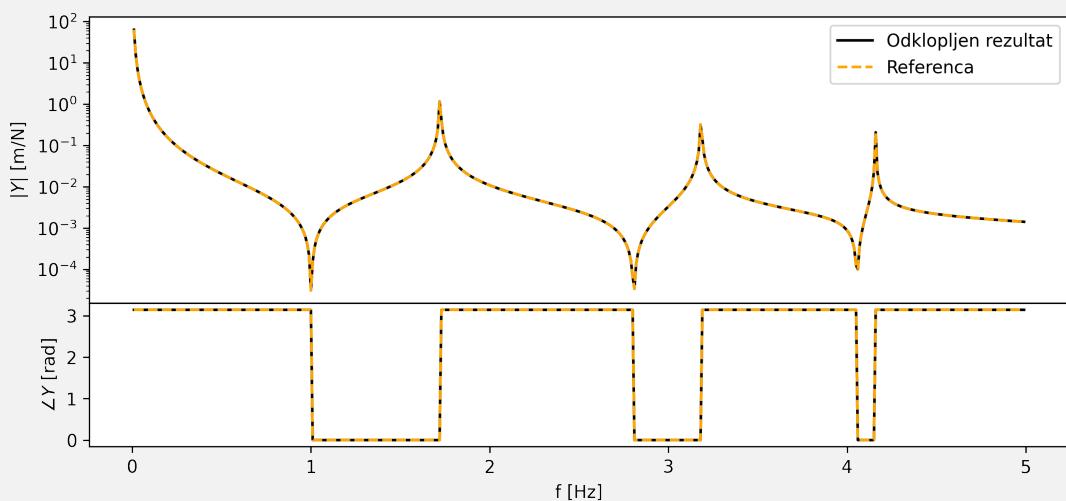
```

plt.legend(loc=0)
plt.ylabel(r'$|Y|$ [m/N]')

plt.subplots_adjust(hspace=0)

plt.subplot(413)
plt.plot(freq, np.angle(Y_A_unique[:,o,i]), color='k')
plt.plot(freq, np.angle(Y_A_true[:,o,i]), '--', color='orange')
plt.xlabel('f [Hz]')
plt.ylabel(r'$\angle Y$ [rad]');

```

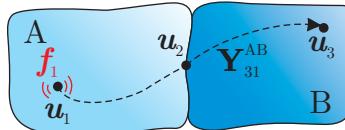


```
np.allclose(Y_A_true, Y_A_unique)
```

True

## 8 Analiza prenosnih poti

Sklopljen sistem, prikazan na sliki 15, je sestavljen iz aktivne podstrukture A in pasivne podstrukture B [14]. Aktiven del sestava predstavlja vir vzbujanja celotnega izdelka; je komponenta sklopa na kateri med obratovanjem sistema deluje vzbujevalna sila. Na pasivnih podstrukturah vzbujanja ni; odziv v obliki hrupa in vibracij je posledica prenosnih poti, ki pasivni del povezujejo z aktivno komponento. Podstrukturo A vzbujamo v vozlišču 1 s silo  $f_1$  (npr. vibracije zaradi delovanja motorja z notranjim zgorevanjem). Ob tem nas zanima odziv pasivne strukture v vozlišču 3,  $u_3$  (npr. hrup, ki se v kabino avtomobila prenaša preko karoserije<sup>37</sup>).



Slika 15: Analiza prenosa vibracij iz aktivne podstrukture A na pasivno podstrukturo B.

### 8.1 Osnovne predpostavke

Prostostne stopnje obravnavanega sistema (slika 15) lahko umestimo v tri tipične skupine [9]<sup>38</sup>:

- $u_1$  PS aktivnega podsistema A, v katerih vzbujamo sklopljen sistem,
- $u_2$  soležne PS aktivnega in pasivnega podsistema, ki ležijo v kontaktu med obema podsistemoma,
- $u_3$  PS pasivnega podsistema B, kjer nas zanima odziv kot posledica vzbujanja sistema.

V nadaljevanju privzamemo, da sile  $f_1$  med obratovanjem ni mogoče izmeriti, da pa se vibracije preko kontaktnih PS prenašajo na pasivno komponento, kjer povzročajo odziv  $u_3$ . Cilj metod analize prenosnih poti je posredna karakterizacija vzbujevalne sile  $f_1$  preko sil, ki delujejo v kontaktu med podstrukturama. Sile v kontaktu določimo na način, da te replicirajo identičen odziv na pasivni strukturi, kot ga sicer povzroči  $f_1$ . Znana vzbujevalna sila nam nato omogoči vrednotenje odziva pasivne strukture  $u_3$  kot posledico individualne prenosne poti iz  $\mathbf{Y}_{31}^{AB}$  in identifikacijo dominantnih poti prenosa.

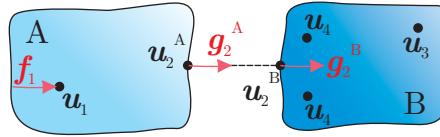
<sup>37</sup>V okviru analize prenosnih poti vektor  $u$  pogosto vsebuje tudi veličine, kot so akustični tlak, specifična deformacija, ipd.

<sup>38</sup>Zavoljo preglednosti so PS ilustrirane zgolj z uporabo treh tipičnih vozlišč. V praksi posamezna skupina PS obsega poljubno število vozlišč.

Analiza prenosnih poti temelji na gradnji admitance sklopa AB iz admitanc posameznih podstruktur A in B. Za lažje razumevanje so zato v poglavju 7 podane osnove sklapljanja podstruktur v frekvenčni domeni.

## 8.2 Klasične metode TPA

Klasične metode TPA predvidevajo eksperimentalno identifikacijo povezovalnih sil ( $g_2$ ) med aktivno in pasivno podstrukturo, ki jih izmerimo med obratovanjem sklopjenega sistema. Za bolj pregledno izpeljavo metod si na tem mestu izpeljimo struturno admitanco strukture AB iz znanih admitančnih matrik obeh podstruktur A in B. Primer je prikazan na sliki 16. Strukturo AB vzbujamo v vozlišču 1 s silo  $f_1$ .



Slika 16: Sklapljanje podstruktur A in B z vzbujanjem v vozlišču 1.

Zapišemo gibalno enačbo nesklopjenega sistema:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y}^{A|B}(f + g), \quad (178)$$

kjer so:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^A \\ \mathbf{u}_2^A \\ \mathbf{u}_2^B \\ \mathbf{u}_3^B \\ \mathbf{u}_4^B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{A|B} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11}^A & \mathbf{Y}_{12}^A & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Y}_{21}^A & \mathbf{Y}_{22}^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Y}_{22}^B & \mathbf{Y}_{23}^B & \mathbf{Y}_{24}^B \\ 0 & 0 & \mathbf{Y}_{32}^B & \mathbf{Y}_{33}^B & \mathbf{Y}_{34}^B \\ 0 & 0 & \mathbf{Y}_{42}^B & \mathbf{Y}_{43}^B & \mathbf{Y}_{44}^B \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1^A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2^A \\ g_2^B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (179)$$

Kompatibilnostne pogoje zagotovimo preko implementacije Boolove matrike  $\mathbf{B}$ , ki ima v danem primeru obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{I} & \mathbf{I} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (180)$$

Z enačbo (174) lahko izrazimo Lagrangeove množitelje:

$$\lambda = -\left(\mathbf{Y}_{22}^A + \mathbf{Y}_{22}^B\right)^{-1} \mathbf{Y}_{21}^A f_1. \quad (181)$$

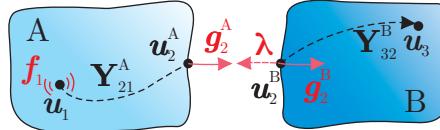
V nadaljevanju odziv posamezne PS izrazimo iz enačbe (175). Za potrebe analiz prenosnih poti nas zanimata odziva  $u_3$  in  $u_4$ :

$$u_3 = \left[ \mathbf{Y}_{32}^B \left( \mathbf{Y}_{22}^A + \mathbf{Y}_{22}^B \right)^{-1} \mathbf{Y}_{21}^A \right] f_1 = \mathbf{Y}_{31}^{AB} f_1, \quad (182a)$$

$$u_4 = \left[ \mathbf{Y}_{42}^B \left( \mathbf{Y}_{22}^A + \mathbf{Y}_{22}^B \right)^{-1} \mathbf{Y}_{21}^A \right] f_1 = \mathbf{Y}_{41}^{AB} f_1. \quad (182b)$$

Povezovalne sile, ki delujejo na pasivno strukturo, določimo iz III. Newtonovega zakona ( $g_2^B = -\lambda$ , slika 17). Odziv pasivne strukture sledi iz naslednje zveze [9]:

$$u_3 = \underbrace{\mathbf{Y}_{31}^{AB} f_1}_{-\lambda, \text{ enačba (181)}} = \underbrace{\mathbf{Y}_{32}^B \left( \mathbf{Y}_{22}^A + \mathbf{Y}_{22}^B \right)^{-1} \mathbf{Y}_{21}^A f_1}_{\mathbf{Y}_{32}^B g_2^B, \text{ enačba (182a)}} = \mathbf{Y}_{32}^B g_2^B. \quad (183)$$

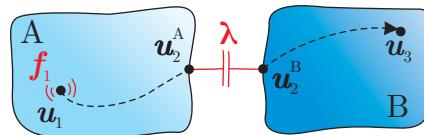


Slika 17: Klasične metode TPA; Apliciranje povezovalnih sil  $g_2$ , ki so posledica vzbušjanja v  $f_1$ , na pasivno podstrukturo B.

Iz enačbe (183) je razvidna glavna pomanjkljivost klasičnih metod TPA, t.j. zahteva po znani admitančni matriki  $\mathbf{Y}_{32}^B$ . Za določitev slednje je namreč potrebno sistem razstaviti ter ločeno obravnavati podstrukturo B. Klasične metode TPA ločimo glede na način določevanja povezovalnih sil, ki jih lahko merimo neposredno ali posredno.

### 8.2.1 Neposredno merjenje povezovalnih sil

Povezovalne sile  $g_2$  izmerimo neposredno z namestitvijo silomerov med aktivno in pasivno podstrukturo. Ta pristop je ustrezен zgolj v primeru zadostne togosti silomerov, saj tako ne spremojmo razmer v kontaktu (veljati mora  $u_2^A = u_2^B$ , slika 18). Odziv pasivne strukture rekonstruiramo po enačbi (183).



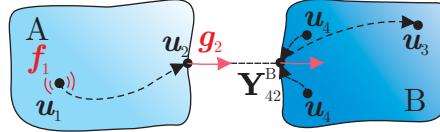
Slika 18: Metoda neposrednega merjenja povezovalnih sil.

### 8.2.2 Metoda invertiranja admitančnih matrik

Poleg neposrednega merjenja povezovalnih sil  $g_2$  lahko te določimo tudi posredno. Na pasivni strukturi (slika 19) izberemo  $n$  pomožnih odzivov  $u_4$ , ki se nahajajo v bližini kontakta. Veljati mora  $n \geq m$ , kjer je  $m$  število PS v  $g_2$ . Odzive  $u_4$  izmerimo med obratovanjem sklopljenega sistema in jih izrazimo na osnovi admitančnih matrik

podstrukturo B:

$$u_4 = \mathbf{Y}_{41}^{AB} f_1 = \underbrace{\mathbf{Y}_{42}^B \left( \mathbf{Y}_{22}^A + \mathbf{Y}_{22}^B \right)^{-1} \mathbf{Y}_{21}^A f_1}_{g_2^B, \text{ enačba (181)}} = \mathbf{Y}_{42}^B g_2^B. \quad (184)$$



Slika 19: Metoda invertiranja admitančnih matrik.

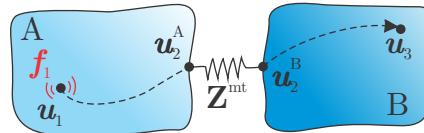
V nadaljevanju eksperimentalno določimo FPF za odzive pomožnih PS ob vzbujanju v PS kontakta ločeno za podstrukturo B ( $\mathbf{Y}_{42}^B$ ). Povezovalne sile, ki se v kontaktu pojavijo med obratovanjem sistema, izrazimo z množenjem izmerjenih odzivov  $u_4$  s psevdoinverzom admitančne matrike  $\mathbf{Y}_{42}^B$ :

$$g_2^B = \left( \mathbf{Y}_{42}^B \right)^+ u_4. \quad (185)$$

Odziv pasivne strukture sledi iz enačbe (183).

### 8.2.3 Prožni spoji med podstrukturami

Pogosto z željo po minimizirjanju prenosa vibracij iz aktivne na pasivno stran sklopa v kontakt med obema namestimo prožne spoje, tako, da se kontakt več ne obnaša togo (slika 20). Z pravilno izbiro togosti takega spoja in njegove dušilne karakteristike lahko učinkovito preprečimo prenos vibracij na pasivno komponento. Če poznamo dinamično togost takega spoja<sup>39</sup>, lahko določimo povezovalne sile v kontaktu.



Slika 20: Podajni spoj med podstrukturama.

Kompatibilnostni pogoji zaradi podajnosti kontakta ne veljajo več, zato povezovalne sile izračunamo kot:

$$g_2^B = \mathbf{Z}^{\text{mt}} (u_2^A - u_2^B), \quad (186)$$

<sup>39</sup>Prožni spoje lahko enostavno modeliramo kot sistem z dvema vozliščoma (12 prostostnimi stopnjami), kjer je vsak par prostostnih stopenj povezan z linearno vzmetjo. Karakterizacija tovrstnih spojev je predstavljena v [15].

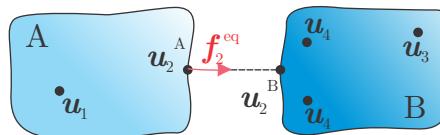
kjer je  $\mathbf{Z}^{\text{mt}}$  dinamična togost podajnega spoja. Odziv pasivne strukture sledi iz enačbe (183).

### 8.3 Metode ekvivalentnih sil

Kljub priročni uporabi klasičnih metod TPA, pa te izkazujejo pomanjkljivosti v primeru modifikacij pasivne podstrukture B. S spremembami slednje je namreč za analizo prenosnih poti potrebno ponoviti celoten eksperiment. Velja, da so povezovalne sile  $g_2$  lastne sklopljenemu sistemu AB in kot take neprenosljive na sistem s poljubno pasivno strukturo.

To slabost odpravijo metode, ki vzbujanje na aktivni podstrukturi A ( $f_1$ ) zapišejo v obliki ekvivalentnih sil ( $f_2^{\text{eq}}$ ), ki delujejo v kontaktu med obema podstrukturama. Poglejmo si primer (slika 21), ko sklopljeno strukturo vzbujamo v vozlišču 2. Vektor  $f$  dobi sledečo obliko:

$$f = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ f_2^{\text{eq}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (187)$$



Slika 21: Sklapljanje podstruktur A in B z vzbujanjem v vozlišču 2.

Z sklopitev obeh podstruktur<sup>40</sup> izrazimo odziva sklopljenega sistema  $u_3$  in  $u_4$ :

$$u_3 = \left[ \mathbf{Y}_{32}^B \left( \mathbf{Y}_{22}^A + \mathbf{Y}_{22}^B \right)^{-1} \mathbf{Y}_{22}^A \right] f_2^{\text{eq}} = \mathbf{Y}_{32}^{\text{AB}} f_2^{\text{eq}}, \quad (188a)$$

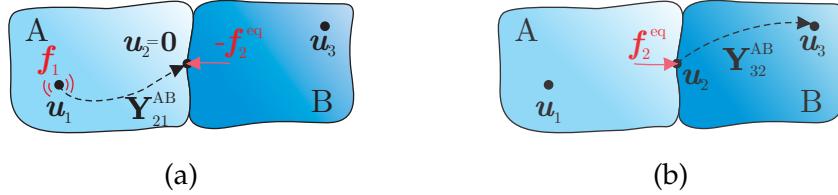
$$u_4 = \left[ \mathbf{Y}_{42}^B \left( \mathbf{Y}_{22}^A + \mathbf{Y}_{22}^B \right)^{-1} \mathbf{Y}_{22}^A \right] f_2^{\text{eq}} = \mathbf{Y}_{42}^{\text{AB}} f_2^{\text{eq}}. \quad (188b)$$

V kolikor bi ekvivalentne sile delovale kot zunanje reakcija na PS kontakta (slika 22a), velja:

$$u_2 = \mathbf{Y}_{21}^{\text{AB}} f_1 - \mathbf{Y}_{22}^{\text{AB}} f_2^{\text{eq}} = \mathbf{0}. \quad (189)$$

Ker v kontaktu med podstrukturama gibanja ni, za pasivno podstrukturo velja  $u_3 =$

<sup>40</sup>Glej postopek prikazan v poglavju 8.2, ki je na tem mestu zavoljo preglednosti izpuščen.



Slika 22: Metode ekvivalentnih sil; **a)** reakcija ekvivalentnih sil izniči vzbujanje strukture, **b)** odziv  $u_3$  kot posledica ekvivalentnih sil.

0:

$$\mathbf{u}_3^B = \mathbf{Y}_{31}^{\text{AB}} f_1^A + \mathbf{Y}_{32}^{\text{AB}} f_2^{\text{eq}} = \mathbf{0}. \quad (190)$$

V enačbo (190) vstavimo enačbi (182a) in (188a):

$$\mathbf{Y}_{32}^B \left( \mathbf{Y}_{22}^A + \mathbf{Y}_{22}^B \right)^{-1} \mathbf{Y}_{22}^A f_2^{\text{eq}} = \mathbf{Y}_{32}^B \left( \mathbf{Y}_{22}^A + \mathbf{Y}_{22}^B \right)^{-1} \mathbf{Y}_{21}^A f_1^A, \quad (191)$$

ter izrazimo ekvivalentne sile  $f_2^{\text{eq}}$ :

$$f_2^{\text{eq}} = \left( \mathbf{Y}_{22}^A \right)^{-1} \mathbf{Y}_{21}^A f_1^A. \quad (192)$$

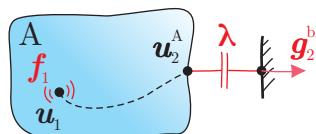
Ekvivalentne sile so lastne aktivni podstrukturi A in jih lahko apliciramo na poljubno pasivno strukturo B, na katero imajo enak učinek kot  $f_1$ . Za določitev odziva  $u_3$  potrebujemo še FPF sklopljene strukture (slika 22b):

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{Y}_{32}^{\text{AB}} f_2^{\text{eq}}. \quad (193)$$

### 8.3.1 Neposredno merjenje ekvivalentnih sil

Na najbolj intuitiven način lahko ekvivalentne sile določimo v primeru, ko aktivno podstrukturo A togo vpnemo, da velja  $u_2 = \mathbf{0}$  (slika 23):

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 = \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11}^A & \mathbf{Y}_{12}^A \\ \mathbf{Y}_{21}^A & \mathbf{Y}_{22}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ g_2^A = -g_2^{\text{bl}} \end{bmatrix}. \quad (194)$$



Slika 23: Neposredno merjenje ekvivalentnih sil.

Sledi:

$$g_2^{\text{bl}} = \left( \mathbf{Y}_{22}^A \right)^{-1} \mathbf{Y}_{21}^A f_1^A. \quad (195)$$

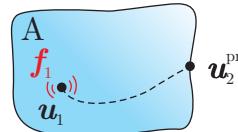
Iz enačb (192) in (195) sledi enakost:

$$f_2^{\text{eq}} = g_2^{\text{bl}}. \quad (196)$$

Neposredno merjenje ekvivalentnih sil velja za težavno, saj idealno togo podprtje podstrukture A v vozlišču 2 pogosto ni mogoče. V praksi se izkaže, da lahko z neposrednim merjenjem ekvivalentnih sil vir vzbujanja dobro karakteriziramo zgolj v nizkem frekvenčnem območju, medtem ko, zaradi fleksibilnosti vpetja, pri višjih frekvencah uporabljam alternativne metode karakterizacije.

### 8.3.2 Koncept prostih hitrosti

Ena izmed teh je metoda, ki temelji na merjenju prostih pomikov podstrukture A v vozlišču 2. Vozlišču 2 je potrebno vsiliti proste robne pogoje, kot je to prikazano na sliki 24.



Slika 24: Koncept prostih hitrosti.

Zapišemo gibalno enačbo za obravnavan sistem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2^A = \mathbf{u}_2^{\text{pr}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11}^A & \mathbf{Y}_{12}^A \\ \mathbf{Y}_{21}^A & \mathbf{Y}_{22}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ g_2^A = \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (197)$$

ter izrazimo pomike  $\mathbf{u}_2^{\text{pr}}$ :

$$\mathbf{u}_2^{\text{pr}} = \mathbf{Y}_{21}^A f_1. \quad (198)$$

Reakcija ekvivalentnih sil izniči vzbujanje  $f_1$ , tako da velja  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ :

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{Y}_{21}^A f_1 - \mathbf{Y}_{22}^A f_2^{\text{eq}} = \mathbf{0}. \quad (199)$$

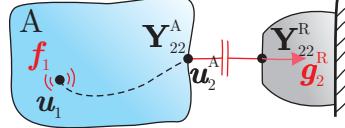
Z vstavljanjem izraza (198) v enačbo (199) dobimo ekvivalentne sile:

$$f_2^{\text{eq}} = (\mathbf{Y}_{22}^A)^{-1} \mathbf{u}_2^{\text{pr}}. \quad (200)$$

Tudi koncept prostih hitrosti izkazuje pomanjkljivosti, saj prosto vpetje aktivne podstrukture pomeni, da le-ta ne more delovati pod realnimi obratovalnimi pogoji. Kljub vsemu se prosti robni pogoji strukture v praksi izkažejo kot dober pristop karakterizacije vira v višjem frekvenčnem območju.

### 8.3.3 Hibridni vmesnik

Slabosti metod neposrednega merjenja ekvivalentnih sil in koncepta prostih hitrosti odpravimo z uporabo hibridnega vmesnika, na katerega pritrdimo aktivno podstrukturo A. Hibridni vmesnik v izmerjen odziv vnaša svoje dinamske lastnosti, ki jih je potrebno v postopku določevanja ekvivalentnih sil izolirati.



Slika 25: Uporaba testne naprave.

Za sistem, prikazan na sliki 25, zapišemo gibalno enačbo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^A \\ \mathbf{u}_2^B \\ \mathbf{u}_2^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11}^A & \mathbf{Y}_{12}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_{21}^A & \mathbf{Y}_{22}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{22}^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{g}_2^A \\ \mathbf{g}_2^R \end{bmatrix}. \quad (201)$$

Upoštevamo robna pogoja v kontaktu med strukturo A in testno napravo ( $\mathbf{u}_2^A = \mathbf{u}_2^R$  in  $\mathbf{g}_2^A = -\mathbf{g}_2^R$ ). Uporabimo enačbo (181) in izrazimo povezovalne sile:

$$\mathbf{g}_2^R = (\mathbf{Y}_{22}^A + \mathbf{Y}_{22}^R)^{-1} \mathbf{Y}_{21}^A \mathbf{f}_1, \quad (202)$$

ter jih vstavimo v enačbo (201):

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{Y}_{21}^A \mathbf{f}_1 - \underbrace{\mathbf{Y}_{22}^A (\mathbf{Y}_{22}^A + \mathbf{Y}_{22}^R)^{-1} \mathbf{Y}_{21}^A \mathbf{f}_1}_{\mathbf{g}_2^R} = \left[ \mathbf{I} - \mathbf{Y}_{22}^A (\mathbf{Y}_{22}^A + \mathbf{Y}_{22}^R)^{-1} \right] \mathbf{Y}_{21}^A \mathbf{f}_1. \quad (203)$$

Enačbo (203) preuredimo in dobimo:

$$(\mathbf{Y}_{22}^A)^{-1} \mathbf{u}_2 = \underbrace{(\mathbf{Y}_{22}^A)^{-1} \mathbf{Y}_{21}^A \mathbf{f}_1}_{f_2^{\text{eq}}, \text{enačba (192)}} - \mathbf{g}_2^R. \quad (204)$$

Iz primerjave z enačbama (196) in (200) sledi, da metoda hibridnega vmesnika za določitev ekvivalentnih sil upošteva prispevek posameznega tipa vpetja:

$$f_2^{\text{eq}} = \mathbf{g}_2^R + (\mathbf{Y}_{22}^A)^{-1} \mathbf{u}_2. \quad (205)$$

Če poznamo FPF testne naprave, ekvivalentne sile izrazimo zgolj v odvisnosti od paramikov v kontaktu  $\mathbf{u}_2$ :

$$f_2^{\text{eq}} = (\mathbf{Y}_{22}^R)^{-1} \mathbf{u}_2 + (\mathbf{Y}_{22}^A)^{-1} \mathbf{u}_2. \quad (206)$$

### 8.3.4 In-situ TPA

Z uporabo metode in-situ lahko vir vzbujanja okarakteriziramo kar na sklopu podstruktur A in B. Uporabimo idejo, da vzbujevalno silo zapišemo v obliki ekvivalentnih sil, ki v vozliščih  $u_2$  in  $u_4$  povzročijo enak odziv, kot vzbujevalna sila  $f_1$ :

$$0 = \underbrace{\mathbf{Y}_{21}^{AB} f_1 - \mathbf{Y}_{22}^{AB} f_2^{\text{eq}}}_{u_2}, \quad (207a)$$

$$0 = \underbrace{\mathbf{Y}_{41}^{AB} f_1 - \mathbf{Y}_{42}^{AB} f_2^{\text{eq}}}_{u_4}. \quad (207b)$$

Izrazimo ekvivalentne sile in dobimo izraza:

$$f_2^{\text{eq}} = (\mathbf{Y}_{22}^{AB})^{-1} u_2, \quad (208a)$$

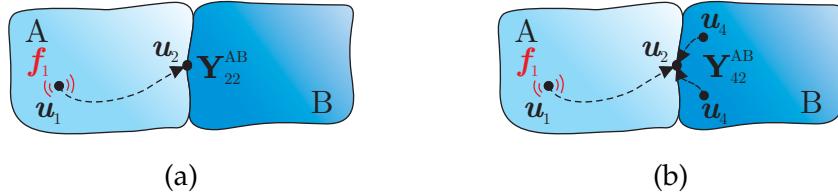
$$f_2^{\text{eq}} = (\mathbf{Y}_{42}^{AB})^+ u_4. \quad (208b)$$

Pokažimo še, da so ekvivalentne sile lastnost podstrukture A. Uporabimo enačbo (207b):

$$\underbrace{\mathbf{Y}_{42}^B (\mathbf{Y}_{22}^A + \mathbf{Y}_{22}^B)^{-1} \mathbf{Y}_{22}^A f_2^{\text{eq}}}_{\mathbf{Y}_{42}^{AB}, \text{enačba (188b)}} = \underbrace{\mathbf{Y}_{42}^B (\mathbf{Y}_{22}^A + \mathbf{Y}_{22}^B)^{-1} \mathbf{Y}_{21}^A f_1}_{\mathbf{Y}_{41}^{AB}, \text{enačba (182b)}}. \quad (209)$$

Izrazimo  $f_2^{\text{eq}}$  in dobimo:

$$f_2^{\text{eq}} = (\mathbf{Y}_{22}^A)^{-1} \mathbf{Y}_{21}^A f_1. \quad (210)$$



Slika 26: In-situ TPA; **a)** merjenje obratovalnih odzivov v  $u_2$ , **b)** merjenje obratovalnih odzivov v  $u_4$ .

Kljub temu, da meritve opravljamo na sklopljenem sistemu (slika 26), so ekvivalentne sile  $f_2^{\text{eq}}$  lastne podstrukture A in prenosljive na poljubno pasivno podstrukturo B. Ker tokrat analiziramo sklopljen sistem, moramo biti pozorni izpolnjevanje naslednjih pogojev:

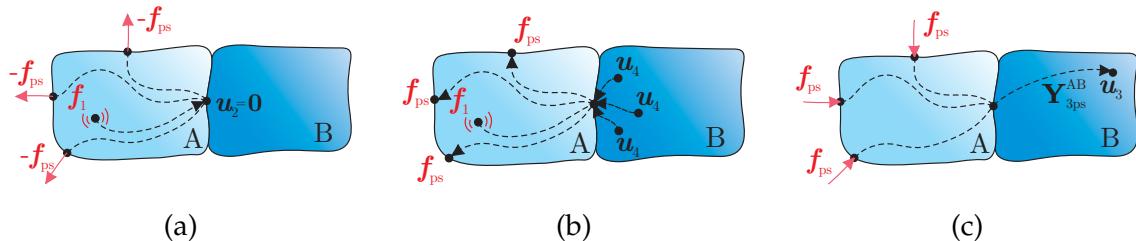
1. Vzbujevalna sila med obratovanjem  $f_1$  mora delovati izključno na aktivno komponento A. V praksi se sicer izkaže, da ekvivalentne sile pravilno identificiramo

tudi v primeru, ko vzbujevalna sila deluje na pasivno podstrukturo B, a v tem primeru  $f_2^{\text{eq}}$  niso lastne strukturi A in posledično niso prenosljive na poljuben pasivni del.

2. Odziv  $u_4$  lahko izmerimo v poljubnih PS na pasivni podstrukturi B tako, da je sistem enačb (208b) (pre)določen.
3. Da zagotovimo prenosljivost ekvivalentnih sil na sklop z poljubno pasivno strukturo, moramo zagotoviti popolno nadzorovanost in opazovanost kontakta (glej poglavje 3). Če kontakt smatramo kot dodatno podstrukturo med A in B, ima ta svoje lastne prostostne stopnje (npr. v primeru idelano toge povezave med A in B ima kontakt 6 PS). Pri meritvi moramo zagotoviti, da so vse lastne oblike kontakta vzbujene s silo  $f_1$  in da jih izmerimo v odzivu  $u_4$ <sup>41</sup>.

### 8.3.5 Metoda psevdo-sil

Z enakim pristopom kot ekvivalentne sile lahko določimo tudi psevdo-sile. Zadosten nabor psevdo-sil na aktivni strukturi, ki ne leži v bližini kontakta s pasivno strukturo (kar pomeni, da je enostavno dostopen za vzbujanje z modalnim kladivom ali elektrodinamičnim stresalnikom), na slednji povzroča enak odziv kot vzbujevalna sila  $f_1$ .



Slika 27: Psevdo-sile; **a)** reakcije psevdo-sil izničijo odziv pasivne strukture, **b)** določimo jih iz izmerjenega odziva  $u_4$  med obratovanjem sistema AB, **c)** povzročajo enak odziv pasivne strukture kot  $f_1$ .

Če na aktivno strukturo A apliciramo reakcije psevdo-sil, pasivna podstruktura miruje (slika 27a):

$$0 = \overbrace{\mathbf{Y}_{41}^{\text{AB}} f_1 - \mathbf{Y}_{4\text{ps}}^{\text{AB}} f_{\text{ps}}}^{u_4}. \quad (211)$$

Psevdo-sile izračunamo tako, da izmerjen odziv med obratovanjem  $u_4$  množimo z

<sup>41</sup>Zaradi teoretične lokacije  $u_2$  neposredno v kontaktnih PS predpostavimo, da  $u_2$  zagotovi popolno opazovanost kontakta

psevdoinverzom admitančne matrike  $\mathbf{Y}_{4\text{ps}}^{\text{AB}}$  (slika 27b):

$$\mathbf{f}_{\text{ps}} = \left( \mathbf{Y}_{4\text{ps}}^{\text{AB}} \right)^+ \mathbf{u}_4. \quad (212)$$

Ponovno preverimo, da so psevdo-sile lastnost zgolj podstrukture A. Izhajamo iz enačbe (211):

$$\underbrace{\mathbf{Y}_{42}^{\text{B}} \left( \mathbf{Y}_{22}^{\text{A}} + \mathbf{Y}_{22}^{\text{B}} \right)^{-1} \mathbf{Y}_{21}^{\text{A}} f_1}_{\mathbf{Y}_{42}^{\text{B}} \left( \mathbf{Y}_{22}^{\text{A}} + \mathbf{Y}_{22}^{\text{B}} \right)^{-1} \mathbf{Y}_{21}^{\text{A}} f_1} = \underbrace{\mathbf{Y}_{42}^{\text{B}} \left( \mathbf{Y}_{22}^{\text{A}} + \mathbf{Y}_{22}^{\text{B}} \right)^{-1} \mathbf{Y}_{2\text{ps}}^{\text{A}} f_{\text{ps}}}_{\mathbf{Y}_{42}^{\text{B}} \left( \mathbf{Y}_{22}^{\text{A}} + \mathbf{Y}_{22}^{\text{B}} \right)^{-1} \mathbf{Y}_{2\text{ps}}^{\text{A}} f_{\text{ps}}}. \quad (213)$$

Dobimo:

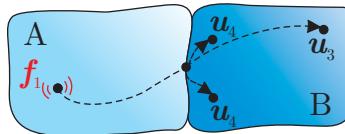
$$\mathbf{f}_{\text{ps}} = \left( \mathbf{Y}_{2\text{ps}}^{\text{A}} \right)^+ \mathbf{Y}_{21}^{\text{A}} f_1. \quad (214)$$

Ko kontakt med podstrukturama modeliramo kot tog, vzbujanje sistema zadostno popišemo s šestimi ( $s = 6$ ) psevdo-silami, ki izničijo pomike  $\mathbf{u}_4$ . Zavoljo ustreznih pogojev problemu, je potrebno izmeriti zadostno število pomožnih odzivov  $\mathbf{u}_4$ , tako, da velja  $n_4 \geq s$  (kjer je  $n_4$  število PS v  $\mathbf{u}_4$ ). Podobno kot v primeru ekvivalentnih sil lahko tudi s psevdo-silami napovemo odziv pasivne podstrukture zaradi obratovalne sile  $\mathbf{f}_1$  (slika 27c):

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{Y}_{3\text{ps}}^{\text{AB}} \mathbf{f}_{\text{ps}}. \quad (215)$$

## 8.4 Prenosnosti povezav

Metode prenosnosti povezav se osredotočajo izključno na identifikacijo najbolj dominantnih prenosnih poti na sklopljenem sistemu, kar pomeni, da identifikacija sil, s katerimi ponazorimo vzbujanje sistema, ni potrebna. Prenosne poti namreč okarakteriziramo preko prenosnosti med posameznimi merilnimi zaznavali, ki zajemajo odziv sklopljenega sistema med obratovanjem.



Slika 28: Princip prenosnosti povezav.

Predpostavimo, da poznamo silo  $\mathbf{f}_1$  (vektor dolžine  $n_1$ ), s katero vzbujamo sklopljen sistem (bodisi dejansko vzbujevalno silo, bodisi njen ekvivalenten zapis), ter da so znane frekvenčne prenosne funkcije med posameznimi prostostnimi stopnjami. V danem primeru lahko odzive na pasivni podstrukturi (v skladu s shemo, prikazano na sliki 28) izrazimo kot:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3 &= \mathbf{Y}_{31}^{\text{AB}} \mathbf{f}_1 \text{ v } n_3 \text{ prostostnih stopnjah,} \\ \mathbf{u}_4 &= \mathbf{Y}_{41}^{\text{AB}} \mathbf{f}_1 \text{ v } n_4 \text{ prostostnih stopnjah.} \end{aligned} \quad (216)$$

V primeru, ko velja  $n_4 \geq n_1$ , lahko vzbujevalno silo  $f_1$  izrazimo iz izmerjenih odzivov  $u_4$ . Enačbi (216) zato lahko združimo in izrazimo odziv  $u_3$ :

$$u_3 = T_{34, f_1}^{AB} u_4, \text{ kjer je } T_{34, f_1}^{AB} = Y_{31}^{AB} (Y_{41}^{AB})^+. \quad (217)$$

Matriko  $T$  imenujemo prenosnostna matrika. Vsebuje informacije o prenosnosti nihanja od prostostnih stopenj  $u_4$  do  $u_3$ , ko sistem vzbujamo s silo  $f_1$ . Če odziva  $u_3$  in  $u_4$  izrazimo iz admitančnih matrik obeh podstruktur (enačbi (188a) in (188b)):

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{31}^{AB} \\ Y_{41}^{AB} \end{bmatrix} f_1 = \begin{bmatrix} Y_{32}^B \\ Y_{42}^B \end{bmatrix} \underbrace{\left( Y_{22}^A + Y_{22}^B \right)^{-1} Y_{21}^A}_{g_2^B} f_1, \quad (218)$$

opazimo, da prenosnostna matrika zavisi zgolj od dinamskih lastnosti pasivne strukture:

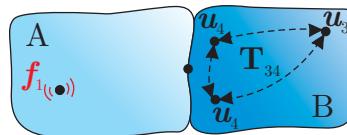
$$T_{34}^{AB} = T_{34}^B = Y_{32}^B (Y_{42}^B)^+ = T_{34}. \quad (219)$$

Vpeljava povezovalnih sil  $g_2^B$  pokaže, da lahko s prenosnostno matriko, ne glede na število izmerjenih odzivov  $n_3$  in  $n_4$ , napovemo le prenosnosti  $n_2$  prostostnih stopenj v kontaktu med podstrukutrami.

#### 8.4.1 Obratovalna analiza prenosnih poti

Pri obratovalni analizi prenosnih poti (ang. *operational transfer path analysis*, OTPA) prenosnostno matriko  $T_{34}$  ocenimo na osnovi statističnih cenilk, ki povezujejo odziva  $u_3$  in  $u_4$ , izmerjena med obratovanjem sistema (slika 29). Ta pristop omogoča identifikacijo prenosnosti za primer spreminjačajočih se obratovalnih pogojev, ki so med seboj neodvisni (npr. delovanje motorja pri različnih hitrostih). Odzive izmerimo pri  $r$  različnih obratovalnih pogojih:

$$\begin{bmatrix} u_3^{(1)} & u_3^{(2)} & \cdots & u_3^{(r)} \end{bmatrix}_{n_3 \times r} = [T_{34}]_{n_3 \times n_4} \begin{bmatrix} u_4^{(1)} & u_4^{(2)} & \cdots & u_4^{(r)} \end{bmatrix}_{n_4 \times r} \Rightarrow \mathbf{U}_3 = T_{34} \mathbf{U}_4. \quad (220)$$



Slika 29: Obratovalna analiza prenosnih poti.

Če velja  $r \geq n_4$ , lahko izraz invertiramo in izrazimo  $T_{34}$ :

$$T_{34} = \mathbf{U}_3 \mathbf{U}_4^H ( \mathbf{U}_4 \mathbf{U}_4^H )^{-1}. \quad (221)$$

Prenosnostno matriko izračunamo s pomočjo križnega in avto-močnostnega spektra:

$$\mathbf{T}_{34} = \mathbf{S}_{34}\mathbf{S}_{44}^{-1} \quad \begin{cases} \mathbf{S}_{34} = \frac{1}{r}\mathbf{U}_3\mathbf{U}_4^H \\ \mathbf{S}_{44} = \frac{1}{r}\mathbf{U}_4\mathbf{U}_4^H \end{cases}. \quad (222)$$

Če so v analizo vključene vse prenosne poti, potem zaradi predpostavke linearnosti strukture velja:

$$\mathbf{u}_3^{(l)} = \mathbf{T}_{34}\mathbf{u}_4^{(l)}, \quad l \in \{1, \dots, r\}. \quad (223)$$

Prednost OTPA je možnost enostavnega kombiniranja različnih tipov meritnih zaznaval za merjenje odzivov  $\mathbf{u}_3$  in  $\mathbf{u}_4$  (poleg pospeškov ali hitrosti lahko merimo tudi zvočni tlak, silo, deformacijo, ipd.). Rekonstrukcija odziva po enačbi (223) je močno odvisna od števila in postavitve meritnih zaznaval za merjenje odziva  $\mathbf{u}_4$ . Premalo ali preveč oddaljena zaznavala lahko vodijo v podcenjevanje dominantnih prenosnih poti.

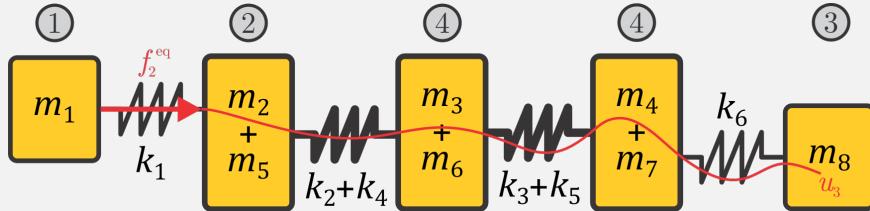
## 8.5 Validacija prenosnih poti

Posredna karakterizacija vira vzbujanja omogoča vrednotenje individualne poti glede deleža vibracij na pasivni podstrukturi. Ocenimo lahko, koliko posamezna sila ali moment prispeva k odzivu pasivne podsturkture [9]:

$$u_i(\omega) = \sum_j Y_{ij}^{\text{AB}}(\omega) f_j^{\text{eq}}(\omega) \quad \begin{cases} u_i \in \mathbf{u}_3 \\ f_j^{\text{eq}} \in \mathbf{f}_2^{\text{eq}} \end{cases}. \quad (224)$$

## 8.6 Primer: in-situ TPA

Analizo prenosnih poti bomo uporabili na strukturi **AB**. Prostostne stopnje označimo na način, da se ujemajo z dogovorom o PS pri teoretični razlagi TPA. Cilj tega primera je karakterizirati vzbujevalno silo  $f_1$ , ki deluje na prvi PS, preko ekvivalentne sile  $f_2^{\text{eq}}$ , ki deluje v kontaktu med aktivno in pasivno stranjo sklopa (v PS 2):



```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Predpostavimo, da je vzbujevalna sila  $f_1$  neznana, tako da smo sposobni meriti zgolj odziv sklopa AB na poljubno izbranih prostostnih stopnjah, ter, da poznamo frekvenčne prenosne funkcije sistema. Med obratovanjem tako izmerimo odzive  $u_4$  in  $u_3$ , v mirovanju pa frekvenčne prenosne funkcije  $\mathbf{Y}_{42}^{\text{AB}}$  in  $\mathbf{Y}_{32}^{\text{AB}}$ :

```
u4_AB = np.load('./data/u4_AB.npy')
u3_AB = np.load('./data/u3_AB.npy')
u4_AB.shape, u3_AB.shape
```

```
((499, 2, 1), (499, 1, 1))
```

```
Y42_AB = np.load('./data/Y42_AB.npy')
Y32_AB = np.load('./data/Y32_AB.npy')
Y42_AB.shape, Y32_AB.shape
```

```
((499, 2, 1), (499, 1, 1))
```

Ekvivalentne sile izrazimo iz pomikov  $u_4$ :

$$f_2^{\text{eq}} = \left( \mathbf{Y}_{42}^{\text{AB}} \right)^+ u_4$$

```
f2_eq_AB = np.linalg.pinv(Y42_AB) @ u4_AB
f2_eq_AB.shape
```

(499, 1, 1)

Ko so ekvivalentne sile znane, rekonstruiramo odzive na pasivni strani sklopa:

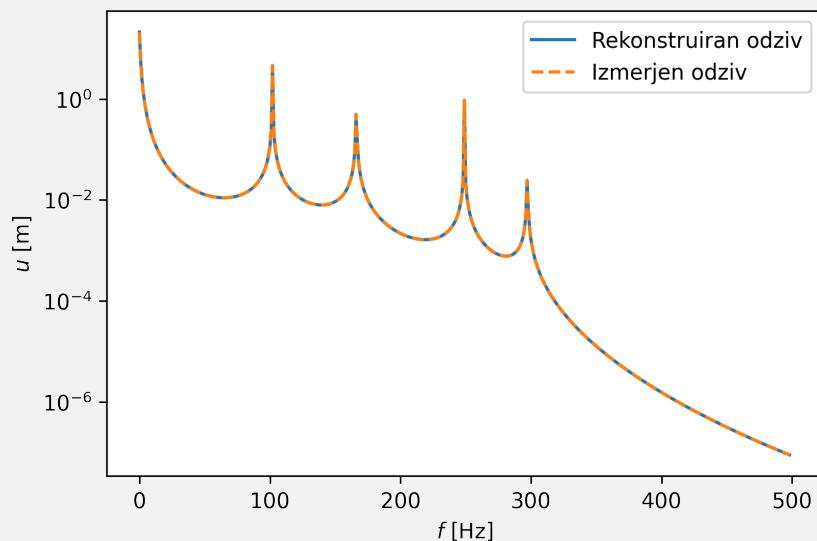
$$\tilde{u}_3 = Y_{32}^{AB} f_2^{\text{eq}}$$

```
u3_tpa_AB = Y32_AB @ f2_eq_AB  
u3_tpa_AB.shape
```

(499, 1, 1)

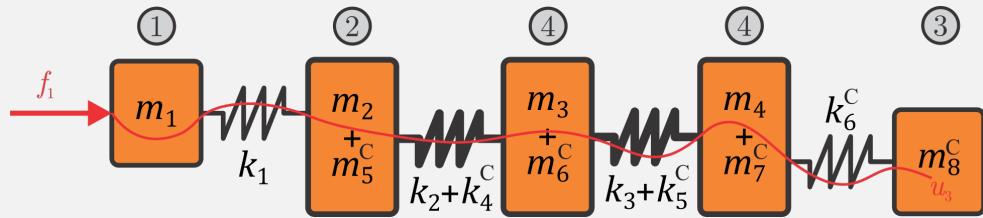
V zadnjem koraku izvedemo sklopno validacijo, tako da rekonstruiran odziv primerjamo z dejansko izmerjenim:

```
plt.subplots(dpi=300)  
plt.semilogy(np.abs(u3_tpa_AB[:,0,0]), label='Rekonstruiran odziv');  
plt.semilogy(np.abs(u3_AB[:,0,0]), '--', label='Izmerjen odziv');  
plt.xlabel(r'$f$ [Hz]');  
plt.ylabel(r'$u$ [m]');  
plt.legend(loc=0);
```



Iz popolnega ujemanja obeh odzivov sklepamo, da ekvivalentne sile dobro karakterizirajo neznano vzbujevalno silo.

V nadaljevanju modificiramo pasivno stran sklopa, tako da dobimo novo strukturo **AC**:



$$m_5^C, m_6^C, m_7^C, m_8^C = 1 \text{ kg}$$

$$k_4^C, k_5^C, k_6^C = 200 \text{ N/m}$$

Na novi strukturi ponovno apliciramo isti vzbujevalni režim kot na AB,  $f_1$ , ter izmerimo pomike na pasivni strani. Potrebujemo tudi frekvenčne prenosne funkcije novega sistema:

```
u4_AC = np.load('./data/u4_AC.npy')
u3_AC = np.load('./data/u3_AC.npy')
u4_AC.shape, u3_AC.shape
```

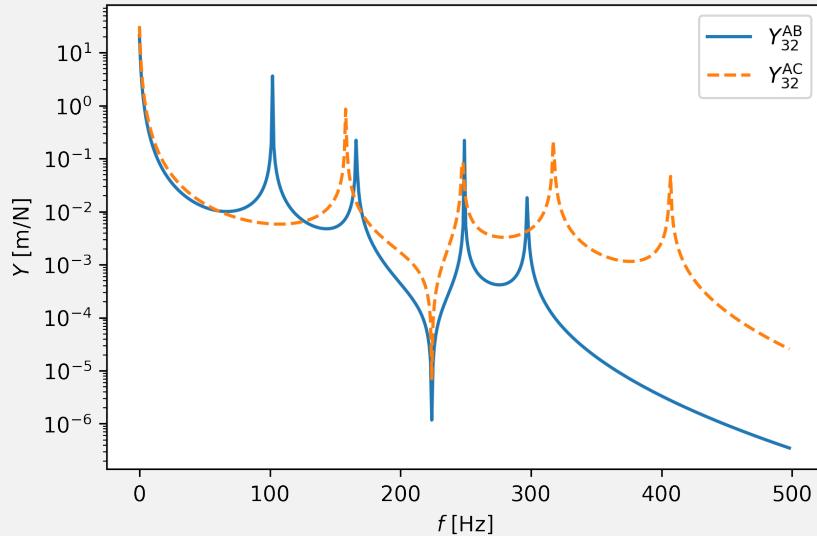
((499, 2, 1), (499, 1, 1))

```
Y42_AC = np.load('./data/Y42_AC.npy')
Y32_AC = np.load('./data/Y32_AC.npy')
Y42_AC.shape, Y32_AC.shape
```

((499, 2, 1), (499, 1, 1))

Za demonstracijo razlik v dinamskih modelih obeh struktur si najprej poglejmo razlike v frekvenčnih prenosnih funkcija:

```
plt.subplots(dpi=300)
plt.semilogy(np.abs(Y32_AB[:,0,0]), label=r'$Y_{32}^{\mathrm{AB}}$');
plt.semilogy(np.abs(Y32_AC[:,0,0]), '--', label=r'$Y_{32}^{\mathrm{AC}}$');
plt.xlabel('f [Hz]');
plt.ylabel('Y [m/N]');
plt.legend(loc=0);
```



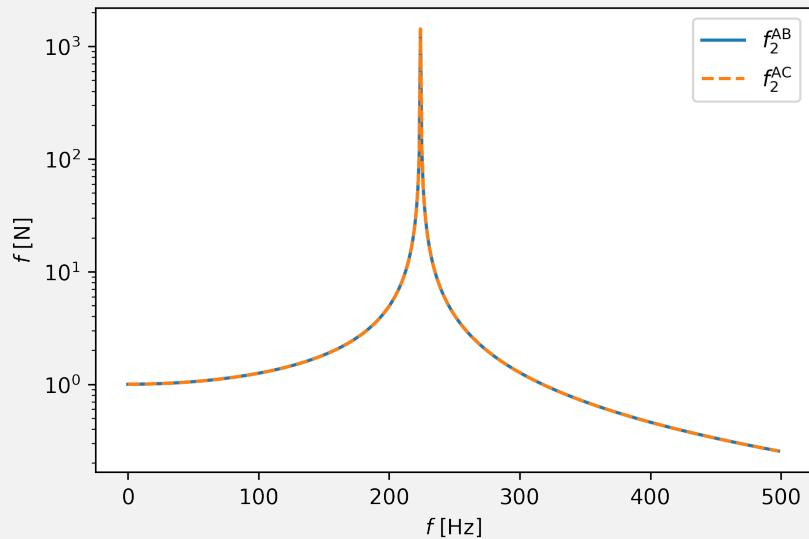
Očitno je, da sta si strukturi različni. Izračun ekvivalentnih sil ponovimo še na strukturi **AC**:

```
f2_eq_AC = np.linalg.pinv(Y42_AC) @ u4_AC
f2_eq_AC.shape
```

(499, 1, 1)

Primerjamo ekvivalentne sile, identificirane z struktur **AB** in **AC**:

```
plt.subplots(dpi=300)
plt.semilogy(np.abs(f2_eq_AB[:,0,0]), label=r'$f_2^{\mathrm{AB}}$');
plt.semilogy(np.abs(f2_eq_AC[:,0,0]), '--', label=r'$f_2^{\mathrm{AC}}$');
plt.xlabel(r'$f$ [Hz]');
plt.ylabel(r'$f$ [N]');
plt.legend(loc=0);
```



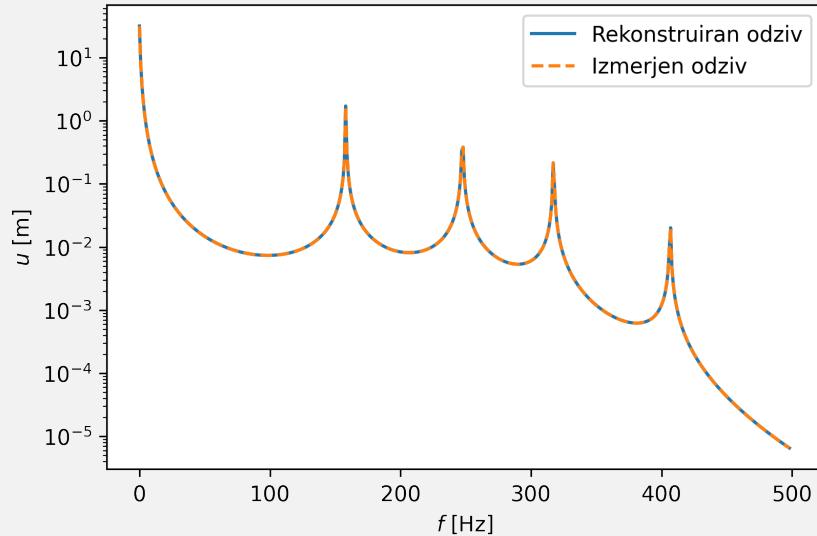
Očitno je, da se  $f_2^{\text{eq}}$  z obeh struktur popolnoma ujemajo. To potrdi tezo, da so  $f_2^{\text{eq}}$  lastnost zgolj aktivne podstrukture in so neodvisne od pasivne podstrukture.

Izvedemo še sklopno validacijo na strukturi AC:

```
u3_tpa_AC = Y32_AC @ f2_eq_AC
u3_tpa_AC.shape
```

(499, 1, 1)

```
plt.subplots(dpi=300)
plt.semilogy(np.abs(u3_tpa_AC[:,0,0]), label='Rekonstruiran odziv');
plt.semilogy(np.abs(u3_AC[:,0,0]), '--', label='Izmerjen odziv');
plt.xlabel(r'$f$ [Hz]');
plt.ylabel(r'$u$ [m]');
plt.legend(loc=0);
```



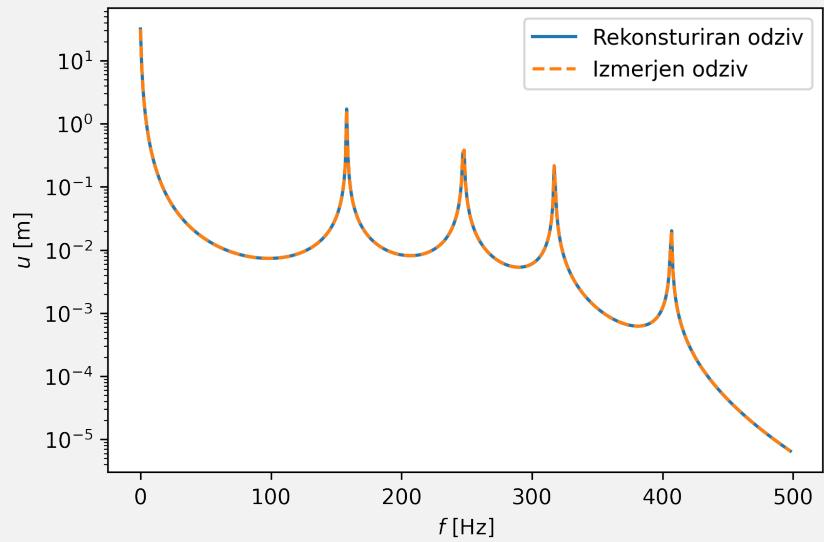
V zadnjem koraku demonstriramo še križno validacijo, kjer preverimo prenosljivost ekvivalentnih sil na modificirane sklope. Na tem mestu apliciramo  $f_2^{AB}$  na kontaktne prostostne stopnje sklopa AC in izračunamo odziv  $u_3^{AC}$ :

```
u3_tpa_AC_ = Y32_AC @ f2_eq_AB
u3_tpa_AC_.shape
```

(499, 1, 1)

Vizualno preverimo ujemanje odzivov:

```
plt.subplots(dpi=300)
plt.semilogy(np.abs(u3_tpa_AC_[:,0,0]), label='Rekonsturiran odziv');
plt.semilogy(np.abs(u3_AC[:,0,0]), '--', label='Izmerjen odziv');
plt.xlabel(r'$f$ [Hz]');
plt.ylabel(r'$u$ [m]');
plt.legend(loc=0);
```



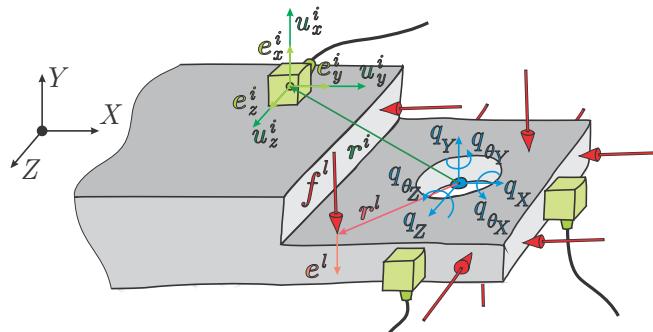
## 9 Transformacija virtualne točke

V številnih dinamskih aplikacijah se pojavi potreba po merjenju dinamskega odziva na mestu, ki fizično ni dostopno za namestitev merilne opreme (npr. kontakt med podstrukturami). V aplikacijah, kot sta sklapljanje in analiza prenosnih poti potrebujemo polne dinamske modele, kar vključuje tudi rotacijske prostostne stopnje, sicer nemerljive s konvencionalno merilno opremo.

Z metodo transformacije virtualne točke (ang. *Virtual Point Transformation*, VPT) na osnovi predpostavke, da se struktura lokalno obnaša togo, rekonstruiramo polni dinamski odziv strukture v poljubni točki (najpogosteje v kontaktu med podstrukturami). Šest togih kontaktnih (deformacijskih) oblik (ang. *Interface Displacement Modes*, IDM) tako zadovoljivo zajame dinamsko obnašanje neposredne okolice kontakta, kar pa lahko razširimo tudi na fleksibilne deformacijske oblike [16]. Če izmerimo translatorne dinamske odzive v neposredni okolici kontakta, lahko s projekcijo meritev na kontaktne deformacijske oblike rekonstruiramo dinamski odziv v poljubni točki kontakta v vseh šestih PS. Enak postopek uporabimo tudi za rekonstrukcijo vzbujanj v vseh šestih smereh.

### 9.1 Transformacija odzivov

V okolini virtualne točke, kot je to prikazano na sliki 30, izmerimo dinamske odzive za večje število vzbujanj in odzivov. Kontakt zato običajno vzbujamo z modalnim kladivom ter pri tem merimo odzive s triosnim translatornim pospeškomerom.

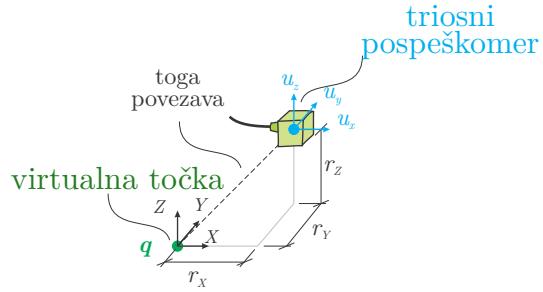


Slika 30: Virtualna točka.

Če dinamski odziv kontakta v večini sestavlja zgolj toge oblike, medtem ko je delež fleksibilnih oblik zanemarljiv, predpostavimo, da se kontakt obnaša togo. Posledično ima naša virtualna točka  $m = 6$  prostostnih stopenj (tri translacije in tri rotacije), kar zapišemo kot:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_X & q_Y & q_Z & q_{\theta_X} & q_{\theta_Y} & q_{\theta_Z} \end{bmatrix}^T. \quad (225)$$

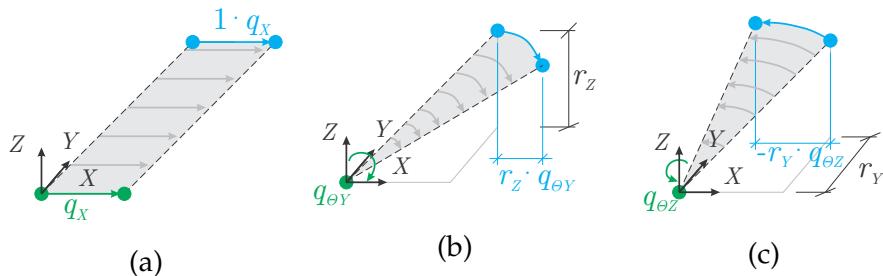
Če v okolico virtualne točke namestimo triosni pospeškomer (slika 31), pri čemer je znan



Slika 31: Relativni položaj pospeškomera glede na virtualno točko.

njegov relativen položaj glede na VT, potem lahko pomik  $u_x^i$  izrazimo iz  $q$  (tako, da se vprašamo, kateri pomiki v VT povzročijo pomik  $u_x^i$  v koordinatnem sistemu VT XYZ, slika 32):

$$u_x^i = \underbrace{1 \cdot q_X}_{\text{prispevek pomika v } X \text{ smeri}} + 0 \cdot q_Y + 0 \cdot q_Z + \\ 0 \cdot q_{\theta_X} + \underbrace{r_Z \cdot q_{\theta_Y}}_{\text{prispevek rotacije okoli } Y} - \underbrace{r_Y \cdot q_{\theta_Z}}_{\text{prispevek rotacije okoli } Z} \quad (226)$$



Slika 32: Pomik pospeškomera izražen iz pomikov virtualne točke: a) translacija v  $X$  smeri, b) rotacija okoli  $Y$  osi, c) rotacija okoli osi  $Z$ .

Enak postopek ponovimo še za pomika  $u_y^i$  in  $u_z^i$ , tako, da dobimo relacije med pomiki

na mestu pospeškomera in virtualno točko:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_x^i \\ u_y^i \\ u_z^i \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r_Z & -r_Y \\ 0 & 1 & 0 & -r_Z & 0 & r_X \\ 0 & 0 & 1 & r_Y & -r_X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_X \\ q_Y \\ q_Z \\ q_{\theta_X} \\ q_{\theta_Y} \\ q_{\theta_Z} \end{bmatrix} \quad (227) \end{aligned}$$

X translacija    Y translacija    Z translacija    X rotacija    Y rotacija    Z rotacija

ali krajše:

$$\boldsymbol{u}^i = \mathbf{R}_i \boldsymbol{q}. \quad (228)$$

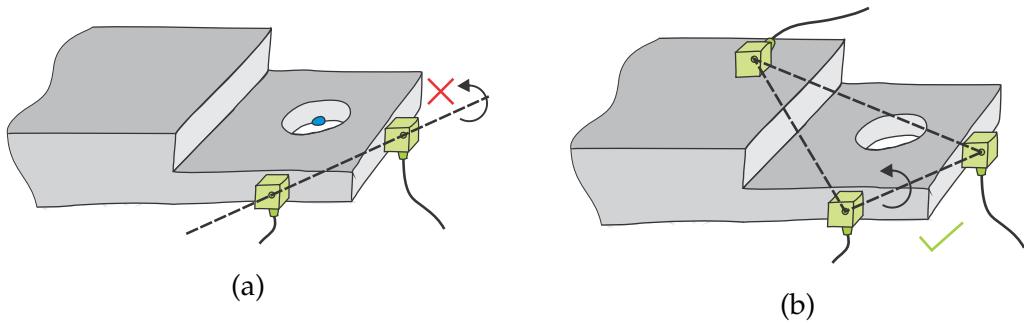
Stolpci matrike  $\mathbf{R}_i$  so toge kontaktne oblike, ki jih izrazimo z relativnim položajem pospeškomera z ozirom na VT. Če orientacija pospeškomera ni skladna z koordinatnim sistemom virtualne točke, kontaktne deformacijske oblike transformiramo v slednjega na način:

$$\begin{bmatrix} u_x^i \\ u_y^i \\ u_z^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{x,X} & e_{x,Y} & e_{x,Z} \\ e_{y,X} & e_{y,Y} & e_{y,Z} \\ e_{z,X} & e_{z,Y} & e_{z,Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r_Z & -r_Y \\ 0 & 1 & 0 & -r_Z & 0 & r_X \\ 0 & 0 & 1 & r_Y & -r_X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_X \\ q_Y \\ q_Z \\ q_{\theta_X} \\ q_{\theta_Y} \\ q_{\theta_Z} \end{bmatrix}, \quad (229)$$

kjer je  $[e_{x,X}, e_{x,Y}, e_{x,Z}]^T$  orientacija  $x$  osi pospeškomera,  $[e_{y,X}, e_{y,Y}, e_{y,Z}]^T$  orientacija  $y$  osi pospeškomera in  $[e_{z,X}, e_{z,Y}, e_{z,Z}]^T$  orientacija  $z$  osi pospeškomera v XYZ koordinatnem sistemu. Za večje število izmerjenih pomikov združimo enačbe, ki povezujejo individualni pomik z virtualno točko:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^1 \\ \boldsymbol{u}^2 \\ \boldsymbol{u}^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & & & \\ & \mathbf{R}_2 & & \\ & & \mathbf{R}_3 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{u} = \mathbf{R}_u \boldsymbol{q}. \quad (230)$$

Če torej želimo izraziti vektor  $\boldsymbol{q}$  iz izmerjenih pomikov  $\boldsymbol{u}$ , teoretično zadostuje merjenje odziva zgolj z dvema triosnima pospeškomeroma, tako, da je enačba transformacije (230) določena. V praksi to sicer ne zadostuje, saj zgolj z dvema pospeškomeroma ne moremo zajeti vseh treh rotacij v  $\boldsymbol{q}$  (ker dva pospeškomera vedno povezuje premica,



Slika 33: Uporaba pospeškomerov za transformacijo virtualne točke: **a)** dva triosna pospeškomera, **b)** trije triosni pospeškomeri.

ne izmerimo zasuka okrog premice<sup>42</sup>, slika 33). Prav zato se priporoča uporaba vsaj treh triosnih zaznaval, tako da velja  $n > m$ .

Ker je sistem enačb (230) predoločen, vektorja  $q$  ne moremo določiti enolično. To ponazorimo z vpeljavo ostanka  $\mu$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}_u q + \boldsymbol{\mu}. \quad (231)$$

$\boldsymbol{\mu}$  vsebuje odziv, ki ga zaradi fleksibilnosti kontakta ne moremo izraziti s togimi kontaktnimi deformacijskimi oblikami. Da iz enačbe (230) izrazimo  $q$ , lahko uporabimo enostaven psevdo-inverz matrike  $\mathbf{R}_u$ . Če enačbo (230) pomnožimo z  $\mathbf{R}^T \mathbf{W}$  z leve, z uvedbo utežnostne matrike  $\mathbf{W}$  utežimo posamezne odzive in tako zmanjšamo napako rešitve  $q$ . Če vsilimo enakost  $\mathbf{R}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ , lahko izpostavimo  $q$  in dobimo:

$$q = \mathbf{T}_u \mathbf{u}, \quad \mathbf{T}_u = \left( \mathbf{R}_u^T \mathbf{W}_u \mathbf{R}_u \right)^{-1} \mathbf{R}_u^T \mathbf{W}_u. \quad (232)$$

Matrika  $\mathbf{T}_u$  je transformacijska matrika odzivov, ki preslika izmerjene pomike v podprostor, ki ga definira šest togih kontaktnih oblik. Z znanim odzivom virtualne točke  $q$  lahko ponovno izračunamo odzive na mestih pospeškomerov:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_u q. \quad (233)$$

Ker enačbo (232) rešimo v smislu minimalnega odstopanja, pomiki  $\tilde{\mathbf{u}}$  niso enaki  $\mathbf{u}$ . Iz vektorja  $\tilde{\mathbf{u}}$  odstranimo fleksibilno gibanje kontakta, kar storimo s filtrirno matriko  $\mathbf{F}_u$ :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_u \left( \mathbf{R}_u^T \mathbf{W}_u \mathbf{R}_u \right)^{-1} \mathbf{R}_u^T \mathbf{W}_u \mathbf{u} = \mathbf{F}_u \mathbf{u}. \quad (234)$$

## 9.2 Transformacija vzbujanj

Vzbujanje v vseh 6 PS virtualne točke izrazimo v odvisnosti od izmerjenih vzbujanj iz okolice virtualne točke:

$$\mathbf{m} = \mathbf{R}_f^T f. \quad (235)$$

---

<sup>42</sup>Iz enakega razloga tudi pazimo, da nobena os pospeškomera (enako velja za sile, katerih transformacijo obravnavamo kasneje) ne poteka direktno čez virtualno točko.

Enak postopek kot v primeru pomikov tu ni mogoč, saj vektorju  $f$  ustreza mnogo različnih  $m$ . Za vsak impulz zapišemo zvezo:

$$\begin{bmatrix} m_X \\ m_Y \\ m_Z \\ m_{\theta_X} \\ m_{\theta_Y} \\ m_{\theta_Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -r_Z^l & r_Y^l \\ r_Z^l & 0 & -r_X^l \\ -r_Y^l & r_X^l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_X^l \\ e_Y^l \\ e_Z^l \end{bmatrix} f^l, \quad (236)$$

tako, da sistem enačb (235) postane nedoločen. Enačbo (235) lahko rešimo po metodi vpeljave vektorja Langrangeovih multiplikatorjev. Ponovno uvedemo utežnostno matriko  $\mathbf{W}$  ter nato izrazimo vzbujanja na poljubnih PS, če poznamo vzbujanja v VT,  $\tilde{f}$ :

$$\tilde{f} = \mathbf{W} \mathbf{R}_f \left( \mathbf{R}_f^T \mathbf{W} \mathbf{R}_f \right)^{-1} m. \quad (237)$$

Definiramo transformacijsko matriko sil  $\mathbf{T}_f$ :

$$\tilde{f} = \mathbf{T}_f^T m, \quad \mathbf{T}_f^T = \mathbf{W} \mathbf{R}_f \left( \mathbf{R}_f^T \mathbf{W} \mathbf{R}_f \right)^{-1}. \quad (238)$$

Zvezo med transformiranimi  $\tilde{f}$  in izmerjenimi silami  $f$  zapišemo s filtrirno matriko  $\mathbf{F}_f$ :

$$\tilde{f} = \mathbf{F}_f f, \quad \mathbf{F}_f = \mathbf{T}_f^T \mathbf{R}_f^T = \mathbf{R}_f \mathbf{T}_f. \quad (239)$$

Končno lahko admitanco virtualne točke izrazimo iz izmerjenih admitanc:

$$\mathbf{Y}_{qm} = \mathbf{T}_u \mathbf{Y}_{uf} \mathbf{T}_f^T. \quad (240)$$

Če pozorno analiziramo enačbi (232) in (235) opazimo, da admitanco VT v 6 PS rekonstruiramo na osnovi večjega števila odzivov in vzbujanj iz neposredne okolice VT. Ko izmerjene FPF preslikamo na IDM, ti delujejo kot filter, ki iz meritev odstrani fleksibilno obnašanje kontakta. Posledici sta dve: dinamika kontakta je "oslabljena", kar prepreči interakcijo med sosednjimi kontaktnimi PS, poleg tega pa zaradi rešitve v smislu najmanjšega kvadratnega odstopanja iz meritev deloma odstranimo eksperimentalne napake.

### 9.3 Ocena kvalitete meritev

V nadaljevanju si poglejmo indikatorje, na osnovi katerih lahko ocenimo konsistenco uporabljenih meritev v transformaciji. Ocena temelji na primerjavi FPF, transformiranih v VT ter projiciranih nazaj (brez fleksibilnega dela), z izmerjenimi FPF.

Za primerjamo medsebojnega ujemanja FPF uporabimo koherenčni kriterij (enačba (144)), ki omogoča primerjavo dveh kompleksnih števil z vidika amplitude in faze.

### Konsistenza senzorjev

Za validacijo konsistence senzorjev v okolici VT (označene z indeksom 1) potrebujemo odziv v točki 1 kot posledica vzbujanja v točki 2, ki ne leži v bližini VT:

$$\mathbf{u}_{1,2} = \mathbf{Y}_{12}\mathbf{f}_2. \quad (241)$$

Isti odziv rekonstruiramo še iz VT, tako da enačbo (241) množimo s filtrirno matriko  $\mathbf{F}_u$ , enačba (234):

$$\tilde{\mathbf{u}}_{1,2} = \mathbf{F}_{11}\mathbf{Y}_{12}\mathbf{f}_2. \quad (242)$$

Če primerjamo odziva  $\mathbf{u}_{1,2}$  in  $\tilde{\mathbf{u}}_{1,2}$ , lahko ocenimo konsistentnost transformiranega odziva. Prvi kriterij, ki ga uporabimo, je splošna konsistentnost senzorjev, ki jo ocenimo preko norm obeh vektorjev:

$$\rho_{\mathbf{u}_{1,2}}(\omega) = \frac{\|\tilde{\mathbf{u}}_{1,2}(\omega)\|}{\|\mathbf{u}_{1,2}(\omega)\|}. \quad (243)$$

Vrednost  $\rho_{\mathbf{u}_{1,2}} = 1$  pomeni, da odziv  $\mathbf{u}_{1,2}$  v celoti popišemo z šestimi togimi IDM. Kar se tiče meritve, to nakazuje, da smo pravilno namestili zaznavala v okolico kontakta ter pravilno odčitali njihovo orientacijo in občutljivost. V nasprotnem primeru bi posamezen senzor izkazoval zelo nizko vrednost konsistence. Če vrednost splošne konsistence pada s frekvenco, pa imamo težave s predpostavko o togosti kontakta, saj se ta v višjem frekvenčnem območju obnaša fleksibilno. Nadalje preverimo še specifično konsistenco senzorja z enačbo:

$$\rho_{\mathbf{u}_{i,2}}(\omega) = \text{coh}(\tilde{\mathbf{u}}_{i,2}(\omega), \mathbf{u}_{i,2}(\omega)), \quad u_i \in \mathbf{u}_1. \quad (244)$$

Nizka vrednost v celotnem frekvenčnem območju nakazuje na napako v lokaciji, orientaciji ali pa kalibraciji senzorja.

### Konsistenza udarcev

Pri analizi konsistence udarcev preverjamo vpliv filtrirne matrike  $\mathbf{F}_f$  na rekonstrukcijo odziva. Odzive v točki 2 zapišemo kot linearno kombinacijo:

$$y_2 = \mathbf{w}_2^T \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}. \quad (245)$$

V kolikor so odzivi v točki 2 posledica idealnega enotskega vzbujanja v točki 1, to lahko zapišemo kot:

$$y_{2,1} = \mathbf{w}_2^T \mathbf{Y}_{21}. \quad (246)$$

Iste odzive rekonstruiramo tokrat še tako, da uporabimo projekcijo vzbujanja v virtualni točki, ki leži v bližini točke 1. To storimo s filtrirno matriko  $\mathbf{F}_f$ :

$$\tilde{\mathbf{y}}_{2,1} = \mathbf{w}_2^T \mathbf{Y}_{21} \mathbf{F}_{11}. \quad (247)$$

Če primerjamo normo vektorjev  $\mathbf{y}_{2,1}$  in  $\tilde{\mathbf{y}}_{2,1}$ , dobimo splošno konsistenco udarcev:

$$\rho_{f_{1,2}} = \frac{\|\tilde{\mathbf{y}}_{2,1}(\omega)\|}{\|\mathbf{y}_{2,1}(\omega)\|}, \quad (248)$$

ki nam pove, kako dobro je kontakt popisan s tremi silami in tremi momenti. Slaba vrednost pomeni, da so udarci preveč oddaljeni od kontakta, ki se obnaša preveč fleksibilno. Nizka vrednost lahko nakazuje tudi napačno lokacijo in smer udarca. Zadnji kriterij je specifična konsistenza udarca, ki je vrednotimo preko koherenčnega kriterija:

$$\rho_{f_i,2}(\omega) = \text{coh}(\tilde{\mathbf{y}}_{2,j}(\omega), \mathbf{y}_{2,j}(\omega)). \quad (249)$$

Omogoča nam identifikacijo udarcev z napačno lokacijo, napačno smerjo, impulze z dvojnimi udarci ter udarce s preveliko (preobremenitev senzorjev) ali premajhno amplitudo (premajhen vnos energije).

## 9.4 Recipročnost in pasivnost virtualne točke

Kvaliteto transformacije meritev v VT ocenjujemo preko recipročnosti in pasivnosti admitančne matrike VT. Ker je virtualna točka vzbujana in merjena v soležnih prostostnih stopnjah, bi morala biti admitančna matrika recipročna. Slednje preverimo z vpeljavo koherenčnega kriterija:

$$\chi(\omega)_{ij} = \text{coh}(Y_{ij}(\omega), Y_{ji}(\omega)), \quad Y_{ij}, Y_{ji} \in \mathbf{Y}_{qm}. \quad (250)$$

Za diagonalne elemente matrike velja  $\chi_{ii} = 1$ , zato je kriterij recipročnosti uporaben zgolj za oceno izven diagonalnih FPF. Kvaliteto transformacije diagonalnih elementov zato vrednotimo preko drugega kriterija. Zanje preverjamo lastnost FPF za vzbujanje in odziv v isti PS (ang. *driving point*), ki so v teoriji pasivni. To pomeni, da v kolikor vzbujamo strukturo v  $i$ -ti PS, mora v isti PS odziv slediti smeri vzbujanja. Če slednje ni izpolnjeno, je kršena predpostavka o pasivnosti sistema. Faza FPF mora biti zato, v odvisnosti od merjene veličine, omejena na:

$$\angle \mathbf{Y}_{ii} = \begin{cases} \in [-180^\circ, 0^\circ] & \text{za receptanco,} \\ \in [-90^\circ, 90^\circ] & \text{za mobilnost,} \\ \in [0^\circ, 180^\circ] & \text{za pospešenost.} \end{cases} \quad (251)$$

## Literatura

- [1] Michael Häußler. *Modular sound & vibration engineering by substructuring*. PhD thesis, Universität München, 2021.
- [2] Miha Pogačar. *Karakterizacija dinamskih lastnosti prožnih povezav v eksperimentalnem modalnem podstrukturiranju*. PhD thesis, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, 2022.
- [3] Miha Boltežar. *Mehanska nihanja-1. del*. Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2010.
- [4] N.M.M. Maia and J.M.M. Silva. *Theoretical and experimental modal analysis*. Research Studies Press, 1997.
- [5] David J Ewins. *Modal testing: Theory and practice*. Research Studies Press, 1984.
- [6] Peter Avitabile. *Modal testing: A practitioner's guide*. John Wiley & Sons, 2017.
- [7] Peter Verboven. *Frequency-domain system identification for modal analysis*. PhD thesis, Vrije Universiteit Brussel, Brussels, 2002.
- [8] Zhi-Fang Fu and Jimin He. *Modal analysis*. Elsevier, 2001.
- [9] M. Van der Seijs. *Experimental dynamic substructuring: Analysis and design strategies for vehicle development*. PhD thesis, TU Delft, 2016.
- [10] Carlo Rainieri and Giovanni Fabbrocino. Operational modal analysis of civil engineering structures. *Springer, New York*, 142:143, 2014.
- [11] Christof Devriendt and Patrick Guillaume. The use of transmissibility measurements in output-only modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(7):2689–2696, 2007.
- [12] D. Klerk, D. Rixen, and S. Voormeeren. General framework for dynamic substructuring: History, review, and classification of techniques. *AIAA Journal*, 46:1169–1181, 05 2008.
- [13] P. Tiso, Allen M., D. Rixen, T. Abrahamsson, M. Van der Seijs, and R. Mayes. *Substructuring in Engineering Dynamics - Emerging Numerical and Experimental Techniques*. Springer, 09 2019.
- [14] M. van der Seijs, D. de Klerk, and D. Rixen. General framework for transfer path analysis: History, theory and classification of techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 68:217–244, 2016.
- [15] Tomaž Bregar, Ahmed El Mahmoudi, Miha Kodrič, Domen Ocepek, Francesco Trainotti, Miha Pogačar, Mert Göldeli, Gregor Čepon, Miha Boltežar, and Daniel J

Rixen. pyFBS: A python package for frequency based substructuring. *Journal of Open Source Software*, 7(69):3399, 2022.

- [16] E. Pasma, M. van der Seijs, S. Klaassen, and M. van der Kooij. Frequency based substructuring with the virtual point transformation, flexible interface modes and a transmission simulator. In *Dynamics of Coupled Structures, Volume 4*, pages 205–213. Springer, 2018.