

ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ОЛЕСЯ ГОНЧАРА
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА
МАТЕМАТИЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ

ДИПЛОМНА РОБОТА
за фаховим спрямуванням

**МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ З УРАХУВАННЯМ
ДИСИПАЦІЇ**

Спеціальності 113 Прикладна математика

Виконав:
студент групи ПА–16–1 Ветров Д. М.

Керівник: доцент кафедри ОМ та МК
Тонкошкур І.С.

Кількість балів _____

Національна шкала _____

Члени комісії :

_____ Кузьменко В.І.
(підпис) (прізвище та ініціали)

_____ Тонкошкур І.С.
(підпис) (прізвище та ініціали)

_____ Годес Ю.Я.
(підпис) (прізвище та ініціали)

Дніпро
2019

ЗМІСТ

ВСТУП	3
1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ	4
2. ПЛІВКОВІ ТЕЧІЇ І АКТУАЛЬНІСТЬ ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ	8
2.1 ЗАГАЛЬНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ ТЕЧІЇ ПЛІВОК	8
2.2 Модель в'язкої нестисливої рідини.	9
2.3 Застосування плівок в техніці.....	12
3. ЗАДАЧА ПРО ТЕЧІЮ ДВОШАРОВОЇ РІДКОЇ ПЛІВКИ НЕЛІНІЙНО-В'ЯЗКОЇ РІДИНИ ПО ПОВЕРХНІ ПЛАСТИНИ ..	13
3.1 Застосування методу малого параметру	13
3.2 Отримання розв'язку крайової задачі	16
3.2 Течія двошарових плівок нелінійно-в'язкої рідини.	18
3.3 Взаємодія двошарової плівки з газовим потоком, який направлено вгору	24
4. ЗАДАЧА ПРО ТЕЧІЮ ДВОШАРОВОЇ РІДКОЇ ПЛІВКИ ПО ПОВЕРХНІ ЦИЛІНДРА.....	31
4.1 Течія двошарової плівки по циліндричній поверхні	31
4.2 Розрахунок оптимального параметру впливу газового потоку на робочу плівку.	36
4.3 Задача о течії двухшарової плівки нелінійно-в'язкої рідини.	40
4.4 Задача о течії двухшарової плівки нелінійно-в'язкої рідини.	46
5. РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ	52
ВИСНОВКИ	53
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	54
ДОДАТОК А	55
ДОДАТОК Б	58

ВСТУП

Плівкові апарати, в тому числі і плівкові хімічні реактори, знаходять все більш широке застосування в різних галузях промисловості внаслідок високої інтенсивності теплообмінних і масообмінних процесів в рідинних плівках. До переваг плівкових апаратів відносять також малий і фіксований час перебування реакційної маси в зоні реакції. Це дуже суттєво для цілого ряду процесів, де тривалий час впливу призводить до небажаних явищ (термічне розкладання речовин, чутливих до підвищеної температури; можливість протікання побічних реакцій і т.д.). Однак згадана перевага суттєво нівелюється через високу поперечну нерівномірність плівкової течії, особливо при ламінарному режимі, оскільки швидкість пристінних слоїв рідини через їх «прилипання» до стінки близька до нуля, а час перебування цих слоїв в апараті дуже великий. У зв'язку з цим доцільно організувати течію плівки рідини таким чином, щоб всі її шари мали певну (відмінну від нуля) швидкість щодо цієї нерухомої стінки. Найпростіший спосіб організації такого перебігу є рух плівки робочої рідини не по самій стінці, а по тонкій плівці, яка «змазує» стінку рідини, що не володіє взаємною розчинністю з робочою і є інертною в хімічному і дифузійному розумінні по відношенню до реагентів і продуктів реакції. При малих витратах рідини течія робочої плівки по інерції під дією сили тяжіння буде ламінарною. У зв'язку з нерівномірністю профілю швидкості по товщині робочої плівки існує розподіл елементів потоку за часом перебування їх у зоні реакції. Тому спостерігається деяке відхилення від перебігу за моделлю ідеального витіснення, згідно з якою всі елементи потоку рухаються з однаковою швидкістю і знаходяться в апараті один і той же час. Тим не менш, існує можливість наближення режиму течії робочої плівки до моделі ідеального витіснення за допомогою газового потоку, спрямованого протилежно течії плівки, а також за рахунок варіювання товщини та інших властивостей інертної плівки.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається в'язка течія двох рідких плівок по поверхні твердого тіла. Припускається, що плівки є нерозчинними одна в другій, а хімічні реакції відсутні. Вісь тіла OZ розташована вертикально, а плівки стікають від його вершини вниз (рис. 1.1.). На плівки діє сила ваги, а також зустрічний потік газу, направлений вгору.

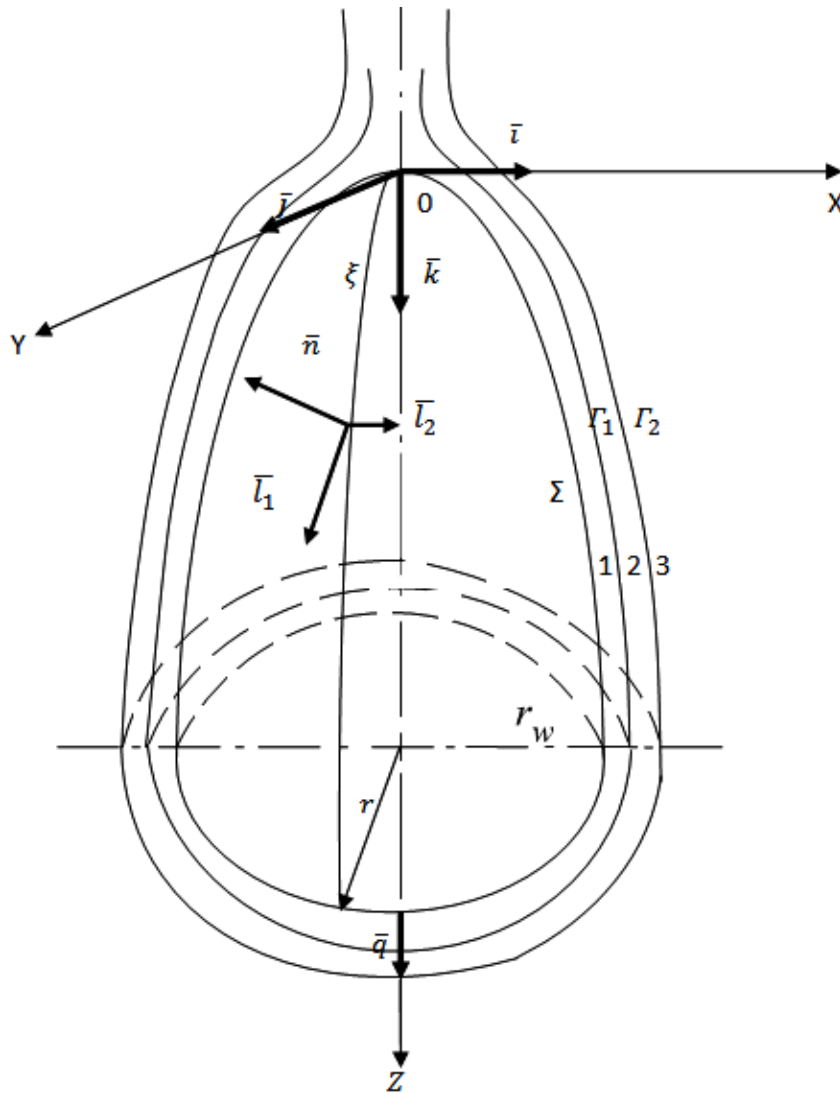


Рисунок 1.1 - Стікання плівок від вершини твердого тіла.

1, 2 – перша і друга плівки, 3 – газ.

Σ - поверхня твердого тіла.

Γ_1 - вільна межа, що розділяє дві плівки.

Γ_2 - вільна межа, що розділяє другу плівку та газовий потік.

Введемо декартову прямокутну систему координати (x, y, z) і криволінійну ортогональну систему координат (ξ, η, ζ) , зв'язану з поверхнею тіла;

ξ – координата, яка відраховується від вершини тіла вздовж твірної;

η – полярний кут в площині, що перпендикулярна до осі OZ;

ζ – відстань по нормалі до поверхні.

Вектори \bar{e}_1 , \bar{e}_2 , \bar{n} – орти криволінійної системи координат (вектори \bar{e}_1 , \bar{e}_2 лежать в площині, яка є дотичною до поверхні тіла; \bar{e}_1 - напрямлений вздовж твірної ξ , $\bar{e}_2 \perp \bar{e}_1$), r_w - поточний радіус тіла обертання (тобто відстань від точки на поверхні тіла до його вісі OZ).

Для опису течії рідких плівок застосовується модель в'язкої нестисливої рідини, яка базується на рівняннях руху і неперервності. Для ньютонівської моделі рідини ці рівняння мають вигляд:

- для першої плівки:

$$\frac{d\bar{V}_1}{dt} = -\frac{\text{grad} P_1}{\rho_1} + \nu_1 \Delta \bar{V}_1 + \bar{g} \quad (1.1)$$

$$\text{div} \bar{V}_1 = 0$$

- для другої плівки:

$$\frac{d\bar{V}_2}{dt} = \frac{\text{grad} P_2}{\rho_2} + \nu_2 \Delta \bar{V}_2 + \bar{g} \quad (1.2)$$

$$\text{div} \bar{V}_2 = 0$$

Крайові умови:

• на твердій поверхні Σ - умови прилипання

$$\bar{V}_1 = 0 \quad (1.3)$$

• на поверхні розділу Γ_1 - умови неперервності вектора швидкості і тензора напружень

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2, \quad (1.4)$$

$$(\bar{p}_2 - \bar{p}_1) \bar{N}_1 = 2\sigma H_1 \bar{N}_1 - \nabla_{\Gamma_1} \sigma,$$

• на поверхні розділу Γ_2 :

$$\bar{p}_2 = \bar{p}_3 \quad (1.5)$$

Взаємодія газового потоку з другою плівкою враховується через крайову умову (1.5), при цьому тензор напруження в газовому потоці \tilde{p}_3 визначається заданим.

В рівняннях (1.1-1.5) введені позначення:

\bar{V} -вектор швидкості рідини;

p - тиск;

ρ - густина;

ν - кінематичний коефіцієнт в'язкості;

$\bar{N}_1 = \bar{N}_1(\xi, \eta)$ - одинична нормаль до поверхні Γ_1 ;

H_1 - середня кривизна поверхні Γ_1 ;

σ - коефіцієнт поверхневого натягу;

$\nabla_{\Gamma_1} \sigma$ - поверхневий градієнт коефіцієнта σ ;

\tilde{p} - тензор напружень;

\bar{g} - інтенсивність сили тяжіння.

Величини з індексами 1, 2, 3, відносяться до параметрів першої і другої плівки та газового потоку відповідно.

Для замикання системи диференціальних рівнянь використовувались наступні реологічні моделі рідини, що дають зв'язок між тензором в'язких напружень \tilde{p} і тензором швидкостей деформацій \tilde{s} :

1). Модель ньютонівської рідини

$$p_{ij} = 2\mu s_{ij},$$

де μ - коефіцієнт динамічної в'язкості (стала величина).

2). Модель нелінійно- в'язкої рідини Оствальда де Віля

$$p_{ij} = 2k(2I_2)^{\frac{n-1}{2}} s_{ij}, \quad I_2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 s_{ij} s_{ji},$$

де k і n – сталі величини, s_{ij} – компоненти тензора швидкостей деформацій.

В курсовій роботі ставились наступні задачі:

- за допомогою метода малого параметра розробити методику наближеного розрахунку течії двошарової рідкої плівки по циліндричній поверхні для випадків ньютонівської та нелінійно-в'язкої рідини.
- створити програмне забезпечення для побудови профілей швидкості рідкої плівки в залежності від вхідних параметрів для течії двошарової рідкої плівки по циліндричній поверхні.

2. ПЛІВКОВІ ТЕЧІЇ І АКТУАЛЬНІСТЬ ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ

2.1 Загальні закономірності течії плівок

Плівковий тип течії являє собою рідину, що стікає по гладкій твердій поверхні під дією сил тяжіння. Товщина плівки завжди виявляється значно менше її ширини і, отже, течію можна розглядати як двовимірну. Те ж саме можна розглядати для випадку, коли плівка стікає вниз по викривленій поверхні за умови, що радіус кривизни на багато більше товщини плівки. Двовірність течії дозволяє розглядати випадок для плівки одиничної ширини. Витрата рідини в такій плівці визначається співвідношенням ваги рідини, її в'язкості і сил, що діють на поверхні розділу середовищ газ-рідина.

Експериментальні дані свідчать про те, що для рідких плівок можливі три основні режими течії: ламінарний, хвильовий і турбулентний. Області існування цих режимів течії визначаються за допомогою критичних значень числа Рейнольдса ($Re = Q / V$), де Q -об'ємна витрата рідини, що припадає на одиницю ширини плівки.

Ламінарною називається така течія, коли частинки рідини рухаються уздовж прямолінійних траєкторій паралельно поверхні тіла. Ламінарний режим течії плівки спостерігається при дуже низьких числах Рейнольдса ($Re \leq 2$). Він може існувати при витратах, менших, ніж деяке критичне значення, залежне від властивостей рідини (поверхневого натягу, в'язкості, властивостей твердої підкладки (шорсткості), наявності поверхнево-активних речовин і т. п.). Критичним числом Рейнольдса називається граничне значення числа Рейнольдса, при якому ламінарний режим течії змінюється турбулентним, і позначається $Re_{кр}$. Значення $Re_{кр}$ залежить від конфігурації тіл, що обтікають рідиною, а також від ступеня збуреності самого ламінарного плину.

Безхвильова течія плівки малов'язких рідин може бути реалізована тільки після гідрофілізації твердої поверхні (для плівок води). Якщо підкладна – тверда, скляна поверхня, гідрофілізацію, що забезпечує змочуваність, можна забезпечити обробкою поверхні за допомогою лужних агентів (розчинів їдкого натрію, нашатирю). Після

такої обробки може бути експериментально реалізована течія з гранично низькими числами Рейнольдса ($Re < 0,5$).

Нестійкість течії тонких шарів в'язкої рідини настає при малих числах Рейнольдса ($Re \sim 0$). Нова хвильова течія, що виникає та існує на поверхні плівок до розвитку турбулентності, тому такий клас течій має важливе значення в розумінні механізму нестійкості.

Верхньою межею для хвильового режиму течії є $Re = 250$. За експериментальними даними перехід до турбулентного режиму відбувається при $250 < Re_{кр} < 500$. Це залежить від гідродинамічного критерію або перехідної природи і властивостей поверхні хвиль. Перехідний режим, безсумнівно, існує. Досліджено течію рідкої плівки при накладанні низькочастотних збурень, порушуваних пульсуючим струменем газу з частотами 1-10 Гц.

2.2 Модель в'язкої нестисливої рідини.

Математичні моделі механіки рідини і газу засновані на гіпотезі суцільного середовища. Це означає, що середовище (рідина) безперервним чином заповнює весь простір, тобто будь-який малий обсяг складається з нескінченного числа частинок і який більше, ніж мікрорівень. У зв'язку з цим вводиться визначення рідкої частинки. Рідка частинка - об'єм рідини, який малий порівняно з тим обсягом, що розглядається і великий порівняно з обсягом молекули. Рідка поверхня - поверхня, яка складається з одних і тих же частинок в будь-який момент часу.

В даній дипломній роботі використовується найбільш загальна модель обтікання - модель в'язкої нестисливої рідини. У загальному випадку рух рідини описується наступними рівняннями:

1. Рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{V} = 0;$$

2. Рівняння руху в напруженнях:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{f} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \overline{P_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{P_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{P_z}}{\partial z} \right];$$

3. Рівняння спільності напружень:

$$P_{ij} = P_{ji};$$

4. Рівняння енергії:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(U + \frac{v^2}{2} \right) = \bar{f}\bar{V} + \frac{1}{p} \operatorname{div}(\tilde{P}\bar{V}) + q.$$

Але останнє не пов'язано з рівняннями динаміки рідини і розв'язується окремо. Напружений і деформований стан в даній точці суцільного середовища характеризують тензори \tilde{P} і \tilde{S} . Між ними повинен встановлюватися зв'язок. У разі в'язкої рідини такий зв'язок встановлюється законом Нав'є-Стокса.

В основу моделі в'язкої нестисливої рідини покладені наступні припущення:

- 1) в рідині спостерігаються як нормальні так і дотичні напруження;
- 2) рідина ізотропна - властивості її однакові у всіх напрямках;
- 3) компоненти тензора напружень - лінійні функції компонент тензора швидкостей деформації.

Найбільш загальний вид зв'язку між тензорами \tilde{P} і \tilde{S} , який задовольняє ці умови:

$$\tilde{P} = -P\tilde{\varepsilon} + 2\mu\tilde{S}, \quad (2.1)$$

де $\tilde{\varepsilon}$ - одиничний тензор, μ - коефіцієнт динамічної в'язкості ($\mu = \text{const}$),

тензор напружень має вигляд:

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix},$$

а тензор швидкостей деформації

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{pmatrix}, \quad \text{де } s_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

$$(x_1 = x, \ x_2 = y, \ x_3 = z), \quad \bar{V} = \{V_1, V_2, V_3\}.$$

Вираз (2.1) називається узагальненим законом Ньютона. Тому рідини і гази, які підпорядковуються цьому закону, називаються ньютонівськими. У рівняннях вважається $p = \text{const}$, тобто рідина нестислива. Таким чином, в якості математичної моделі, яка описує рух в'язкої нестисливої рідини в роботі використовується замкнута система - рівняння Нав'є-Стокса:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \nabla) \bar{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \bar{V} + \bar{f};$$

$$\Delta \bar{V} = 0. \quad (2.2)$$

Тут t означає час;

$X = (x, y, z)$ - точка евклідового простору E^3 ;

$\bar{V} = \bar{V}(X, t)$ - швидкість частинки з координатою X в момент часу t ;

$p = p(X, t)$ - тиск рідини ; ρ - її щільність; ν - коефіцієнт кінематичної в'язкості;

$(\nu = \frac{\mu}{\rho} = \text{const}); \bar{f} = \bar{f}(X, t)$ - щільність зовнішніх масових сил.

Позначення: $\Delta \bar{V} = \text{div} \bar{V}, \nabla p = \text{grad } p$.

Друге рівняння системи - рівняння збереження маси.

Перше рівняння виражає рівновагу сил, що діють на рідку частину. Воно випливає із загального рівняння руху суцільного середовища. Основна задача динаміки в'язкої нестисливої рідини - задача обтікання, полягає у визначенні рішення \bar{V} , p системи (2.1), що задовольняє певні початкові і граничні умови. При цьому вектор \bar{f} вважається відомою функцією або $\bar{f} = 0$. Якщо течія рідини стала, тобто $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, тоді початкові умови можна опустити.

(Далі в роботі вважається, що течія рідини стала.)

Граничні умови задаються на:

- кордоні рідини і твердого тіла;
- вільній поверхні.

На твердих ділянках кордону швидкість рідини збігається зі швидкістю кордону, тобто $\bar{V} = 0$. Ця умова називається умовою прилипання. Вона відображає те, що між поверхнею твердого тіла і реальною рідиною завжди існують сили молекулярного зчеплення, що затримують частинки рідини, які стикаються зі стінкою.

На вільному кордоні рідини вектор напружень повинен перетворюватись на нуль: $P\bar{n} = 0$. І крім цього на вільній поверхні слід задати ще кінематичну умову. Вона виражає той факт, що ця поверхня складається з одних і тих же частинок, тобто нормальна складова швидкості в точках вільної поверхні збігається зі швидкістю переміщення поверхні в напрямку нормалі.

2.3 Застосування плівок в техніці.

Ламінарна, хвильова і турбулентна течії плівок широко використовуються в промисловості і техніці. Плівки використовуються в різноманітних масообмінних апаратах. Для успішного вирішення однієї з головних технологічних задач - підвищення ефективності роботи таких апаратів.

Прикладами масообмінних апаратів є абсорбери, ректифікаційні колони, кристалізатори, електролізери. В холодильній техніці плівкові массообмінювачі використовуються як конденсатори холодоагентів. У хімічній технології та харчовій промисловості водяні плівки служать для охолодження сірчаної кислоти, молочних продуктів, розсолу при отриманні соди. Останнім часом у ряді сучасних технологій широко використовуються структурні методи обробки поверхонь металів і пластмас. Між плівкою рідини, яка розтікається уздовж поверхні, і стінкою здійснюються процеси тепло - і масообміну. Такі методи використовуються при загартуванні металів, очищенні внутрішніх поверхонь цистерн і труб, хімічному фрезеруванні великомасштабних деталей в авіабудуванні. У ракетних двигунах плівка використовується для теплового захисту стінок камери згоряння і для отримання гомогенної горючої суміші.

Таким чином в результаті можна зробити висновок, що:

- плівкові течії широко поширені в техніці, де спостерігаються різні режими течії;
- течії описуються математичною моделлю, в якості якої є модель в'язкої нестисливої рідини.

3. ЗАДАЧА ПРО ТЕЧІЮ ДВОШАРОВОЇ РІДКОЇ ПЛІВКИ НЕЛІНІЙНО-В'ЯЗКОЇ РІДИНИ ПО ПОВЕРХНІ ПЛАСТИНИ

3.1 Застосування методу малого параметру

Розглядається задача про течію двох рідких плівок нелінійно-в'язкої рідини по поверхні пластини, яка розташована вертикально. На плівки діють сили ваги, а також зустрічний потік газу, направлений вгору.

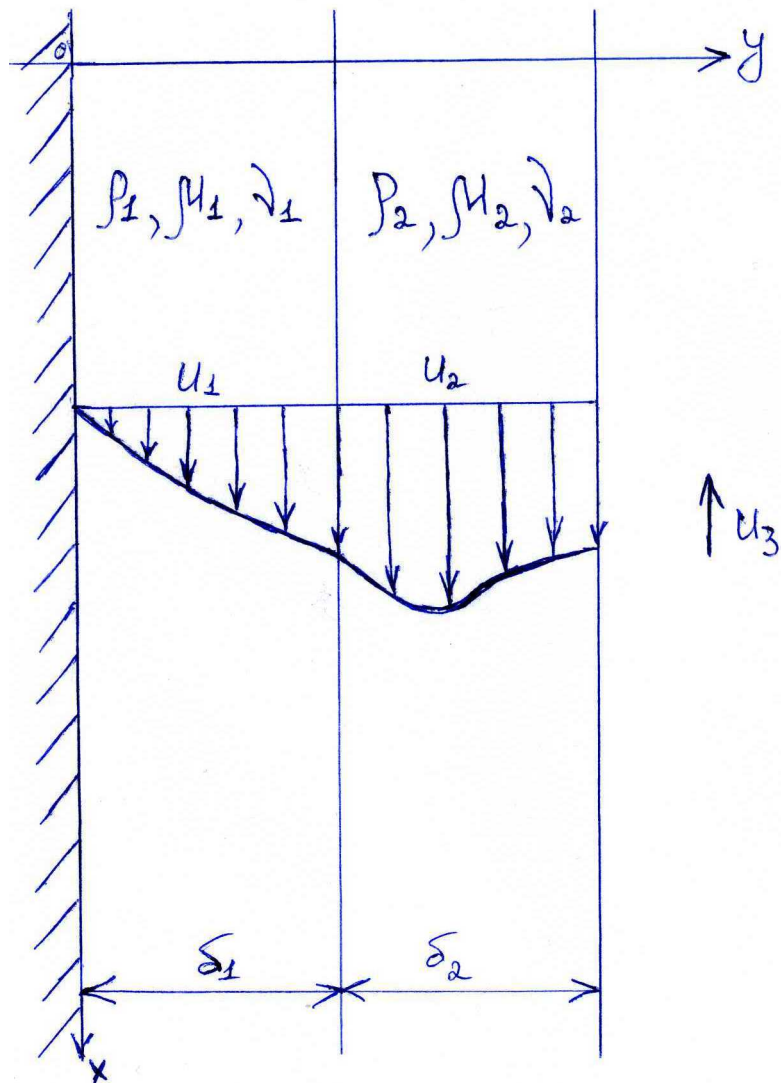


Рис. 3.1. Фрагмент плівок двох рідин, що стікають при зустрічному газовому потоці.

Двофазна течія рідини в двовимірному випадку в декартових координатах описується наступною системою рівнянь:

- для першої плівки:

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} + F_x^1 + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \tau_{xx}^1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \tau_{xy}^1}{\partial y} \quad (3.1.1)$$

$$u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y} + F_y^1 + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \tau_{yx}^1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \tau_{yy}^1}{\partial y} \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad \text{- рівняння нерозривності} \quad (3.1.3)$$

для другої плівки

$$u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x} + F_x^2 + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \tau_{xx}^2}{\partial x} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \tau_{xy}^2}{\partial y}, \quad (3.1.4)$$

$$u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial y} + F_y^2 + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \tau_{yx}^2}{\partial x} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \tau_{yy}^2}{\partial y}, \quad (3.1.5)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0. \quad (3.1.6)$$

Тут p – тиск; ρ – густина рідини; ν і μ – кінематичний та динамічний коефіцієнти в'язкості; g – прискорення вільного падіння, u, v – компоненти швидкості. $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yy}$ – складові тензора напружень.

Крайові умови:

$$1) \quad \text{на твердій поверхні } y = 0, \quad u_1 = v_1 = 0 \quad (3.1.7)$$

$$2) \quad \text{на між фазній поверхні рідина-рідина: } y = h (h = \delta_1)$$

$$p_{n_1} = p_\sigma + p_{n_2}, \quad p_{\tau_1} = p_{\tau_2} \quad (3.1.8)$$

$$u_{n_1} = u_{n_2}, \quad u_{\tau_1} = u_{\tau_2}.$$

$$3) \quad \text{на між фазній поверхні рідина-газ:}$$

$$y = \delta_1 + \delta_2, \quad p_{n_2} = p_{n_3}, \quad p_{\tau_2} = p_{\tau_3}. \quad (3.1.9)$$

Верхній індекс означає диференціювання по x , нижній індекс належить до відповідної фази, σ – коефіцієнт поверхневого натягу рідини,

p_n і p_τ - нормальне та дотичне напруження на міжфазній поверхні, а

p_σ - капілярний тиск.

Застосовуючи метод малого параметру, як і у випадку з ньютонівською рідиною можна одержати наступну спрощену систему рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (3.1.10)$$

$$-\frac{\partial p_1}{\partial x} + \rho_1 F_x^1 + \frac{\partial \tau_{xy}^1}{\partial y} = 0 \quad (3.1.11)$$

$$-\frac{\partial p_1}{\partial y} + \rho_1 F_y^1 = 0 \quad (3.1.12)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad (3.1.13)$$

$$-\frac{\partial p_2}{\partial x} + \rho_2 F_x^2 + \frac{\partial \tau_{xy}^2}{\partial y} = 0 \quad (3.1.14)$$

$$-\frac{\partial p_2}{\partial y} + \rho_2 F_y^2 = 0 \quad (3.1.15)$$

Крайові умови:

$$1) \quad \text{на твердій поверхні } y = 0, \quad u_1 = v_1 = 0 \quad (3.1.16)$$

$$2) \quad \text{на міжфазній поверхні рідина-рідина: } y = h (h = \delta_1)$$

$$p_{n_1} = p_\sigma + p_{n_2}, \quad p_{\tau_1} = p_{\tau_2}$$

$$u_{n_1} = u_{n_2}, \quad u_{\tau_1} = u_{\tau_2}. \quad (3.1.17)$$

$$3) \quad \text{на міжфазній поверхні рідина-газ:}$$

$$y = \delta_1 + \delta_2, \quad p_{n_2} = p_{n_3}, \quad p_{\tau_2} = p_{\tau_3} \quad (3.1.18)$$

Для нелінійно-в'язкої рідини [1]:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^1 &= k_1 \left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|^{n_1-1} \frac{\partial u_1}{\partial y} = \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \tau_{xy}^2 &= k_2 \left| \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|^{n_2-1} \frac{\partial u_2}{\partial y} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

$$\text{де } k_1, n_1, k_2, n_2 - \text{const}, \quad \mu_1 = k_1 \left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|^{n_1-1}, \quad \mu_2 = k_2 \left| \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|^{n_2-1}$$

Розглянемо течію двошарової плівки по вертикально розташованій пластині, під дією сили тяжіння.

Для повздовжніх швидкостей U_1 та U_2 отримаємо наступну крайову задачу:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|^{n_1-1} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] + \frac{\rho_1 g}{k_1} = 0 \quad (3.1.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left| \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|^{n_2-1} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] + \frac{\rho_2 g}{k_2} = 0 \quad (3.1.21)$$

де g — прискорення вільного падіння.

Крайові умови матимуть наступний вигляд:

1) на твердій поверхні $y = 0$

$$u_1 = 0 \quad (3.1.22)$$

2) на міжфазній поверхні рідина-рідина $y = \delta_1$

$$\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \text{ (тобто } \tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^2 \text{) } \quad \text{та} \quad (3.1.23)$$

$$u_1 = u_2 \quad (3.1.24)$$

3) на міжфазній поверхні рідина-газ $y = \delta_1 + \delta_2$

$$\mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\tau_3 \text{ (} \tau_{xy}^2 = \tau_3 \text{)} \quad (3.1.25)$$

де величина τ_3 - вважається заданою.

3.2 Отримання розв'язку крайової задачі

Система лінійних диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|^{n_1-1} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] + \frac{\rho_1 g}{k_1} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\left| \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|^{n_2-1} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] + \frac{\rho_2 g}{k_2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

Розглянемо випадок $\frac{\partial u_1}{\partial y} > 0$, $\frac{\partial u_2}{\partial y} > 0$, тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^{n_1} \right] &= -\frac{\rho_1 g}{k_1} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^{n_2} \right] &= -\frac{\rho_2 g}{k_2} \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^{n_1} = -\frac{\rho_1 g y}{k_1} + C_{11}, \quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^{n_2} = -\frac{\rho_2 g y}{k_2} + C_{21} \quad (3.1.28)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \left(C_{11} - \frac{\rho_1 g y}{k_1} \right)^{\frac{1}{n_1}} \quad (3.1.29)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = \left(C_{21} - \frac{\rho_2 g y}{k_2} \right)^{\frac{1}{n_2}} \quad (3.1.30)$$

$$u_1 = -\frac{k_1}{\rho_1 g} \frac{n_1}{n_1+1} \left(C_{11} - \frac{\rho_1 g y}{k_1} \right)^{\frac{1+n_1}{n_1}} + C_{12}$$

$$u_2 = -\frac{K_2}{\rho_2 g} \frac{n_2}{n_2+1} \left(C_{21} - \frac{\rho_2 g y}{K_2} \right)^{\frac{1+n_2}{n_2}} + C_{22} \quad (3.1.31)$$

Крайові умови:

1) на твердій поверхні ($y=0$) крайова умова $u_1 = 0$, тобто

$$0 = -\frac{K_1 n_1}{\rho_1 g (n_1+1)} (C_{11})^{\frac{1+n_1}{n_1}} + C_{12}$$

$$C_{12} = \frac{K_1 n_1}{\rho_1 g (n_1+1)} (C_{11})^{\frac{1+n_1}{n_1}} \quad (3.1.32)$$

2) на міжфазній поверхні рідина-рідина ($y=\delta_1$) крайові умови

$$\tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^2 \leftrightarrow \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \mu_1 \left(C_{11} - \frac{\rho_1 g y}{K_1} \right)^{\frac{1}{n_1}} = \mu_2 \left(C_{21} - \frac{\rho_2 g y}{K_2} \right)^{\frac{1}{n_2}} \quad (3.1.33)$$

при $y=\delta_1$

$$\mu_1 \left(C_{11} - \frac{\rho_1 g \delta_1}{K_1} \right)^{\frac{1}{n_1}} = \mu_2 \left(C_{21} - \frac{\rho_2 g \delta_2}{K_2} \right)^{\frac{1}{n_2}} \quad (3.1.34)$$

із крайової умови $u_1(\delta_1) = u_2(\delta_2)$, маємо:

$$-\frac{K_1}{\rho_1 g} \frac{n_1}{n_1+1} \left(C_{11} - \frac{\rho_1 g \delta_1}{K_1} \right)^{\frac{1}{n_1}+1} + C_{12} =$$

$$= -\frac{K_2}{\rho_2 g} \frac{n_2}{n_2+1} \left(C_{21} - \frac{\rho_2 g \delta_2}{K_2} \right)^{\frac{1}{n_2}+1} + C_{22}$$

3) на міжфазній поверхні рідина-газ ($y=\delta_1 + \delta_2$) крайова умова:

$$\tau_{xy}^2 = -\tau_3 \leftrightarrow \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\tau_3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \mu_2 \left(C_{21} - \frac{\rho_2 g (\delta_1 + \delta_2)}{K_2} \right)^{\frac{1}{n_2}} = -\tau_3 \quad (3.1.35)$$

Знайшовши значення $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ та ввівши позначення

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \mu, \frac{\rho_1 g \delta_1}{K_1} = a_1, \frac{\rho_2 g \delta_2}{K_2} = a_2, \frac{\delta_1}{\delta_2} = \delta, \left(-\frac{\tau_3}{\mu_2} \right)^{n_2} = \tau. \quad (3.1.36)$$

отримаємо розв'язок задачі, який можна представити у такому вигляді:

$$u_1 = -\frac{\delta_1}{a_1} \frac{n_1}{n_1+1} \left(a_1 + \mu^{n_1} (\tau + a_2)^{\frac{n_1}{n_2}} - \frac{a_1}{\delta_1} y \right)^{\frac{1+n_1}{n_1}} +$$

$$+ \frac{\delta_1}{a_1} \frac{n_1}{n_1+1} \left(a_1 + \mu^{n_1} (\tau + a_2)^{\frac{n_1}{n_2}} \right)^{\frac{1+n_1}{n_1}} \quad (3.1.37)$$

$$\begin{aligned}
u_2 = & -\frac{\delta_2}{a_2} \frac{n_2}{n_2+1} \left(\tau + a_2(1 + \delta) - \frac{a_2}{\delta_2} y \right)^{\frac{1+n_2}{n_2}} + \\
& + \frac{\delta_1}{a_1} \frac{n_1}{n_1+1} \left[\left(a_1 + \mu^{n_1} (\tau + a_2)^{\frac{n_1}{n_2}} \right)^{\frac{1+n_1}{n_1}} - \mu^{n_1+1} (\tau + a_2)^{\frac{1+n_1}{n_1}} \right] + \\
& + \frac{\delta_2}{a_2} \frac{n_2}{n_2+1} (\tau + a_2 \delta)^{\frac{1}{n_2}+1}
\end{aligned} \tag{3.1.38}$$

3.2 Течія двошарових плівок нелінійно-в'язкої рідини.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|^{n_1-1} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] = -\frac{\rho_1 g}{k_1} \tag{3.2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|^{n_1-1} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] = -\frac{\rho_1 g}{k_1} \tag{3.2.2}$$

Введемо характерні величини:

$h_0 \equiv \delta_1$ - характерний поперечний розмір;

u_0 - характерна повздовжня швидкість;

та безрозмірні величини Y, U_1, U_2 за формулами:

$$y = Y h_0$$

$$u_1 = U_1 u_0;$$

$$u_2 = U_2 u_0.$$

тоді отримаємо:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{u_0^{n_1-1}}{h_0^{n_1-1}} \left| \frac{\partial U_1}{\partial Y} \right|^{n_1-1} \frac{u_0}{h_0} \frac{\partial U_1}{\partial Y} \right] &= -\frac{\rho_1 g}{k_1} \\
\rightarrow \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left| \frac{\partial U_1}{\partial Y} \right|^{n_1-1} \frac{\partial U_1}{\partial Y} \right] &= -\frac{\rho_1 g}{k_1} \frac{h_0^{n_1+1}}{u_0^{n_1}} = -\frac{\rho_1 u_0^{2-n_1} h_0^{n_1}}{k_1} \frac{g h_0}{u_0^2} = -\frac{Re_1}{Fr}
\end{aligned}$$

де $Re_1 = \frac{\rho_1 u_0^{2-n_1} h_0^{n_1}}{k_1}$ - узагальнене число Рейльдса (для першої плівки),

а $Fr = \frac{g h_0}{u_0^2}$ - число Фруда.

Таким чином

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[\left| \frac{\partial U_1}{\partial Y} \right|^{n_1-1} \frac{\partial U_1}{\partial Y} \right] = -\frac{Re_1}{Fr} = const \tag{3.2.3}$$

Аналогічно, для другого рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[\left| \frac{\partial U_2}{\partial Y} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_2}{\partial Y} \right] = -\frac{Re_2}{Fr} = const, \quad (3.2.4)$$

де $Re_2 = \frac{\rho_2 u_0^{2-n_2} h_0^{n_2}}{k_2}$ - узагальнене число Рейльдса (для другої плівки).

Крайові умови:

1) при $y = 0$:

$$u_1 = 0. \quad (3.2.5)$$

2) при $y = \delta_1$:

$$a) \quad u_1 = u_2 \quad (3.2.6)$$

$$b) \quad k_1 \left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|^{n_1-1} \frac{\partial u_1}{\partial y} = k_2 \left| \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|^{n_2-1} \frac{\partial u_2}{\partial y} = \mu_1 = \mu_2 \quad (3.2.7)$$

3) при $y = \delta_1 + \delta_2$:

$$k_2 \left| \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|^{n_2-1} \frac{\partial u_2}{\partial y} = \pm \tau_3 \quad (3.2.8)$$

„+” – якщо газовий потік напрямлений вниз;

„-” – якщо газовий потік напрямлений вгору;

Перейдемо до нових змінних:

1) при $Y h_0 = 0$:

$$U_1 u_0 = 0, \text{ тобто при } Y = 0 \rightarrow U_1 = 0.$$

2) при $Y h_0 = \delta_1 (h_0 = \delta_1)$:

$$a) \quad U_1 u_0 = U_2 u_0, \text{ тобто при } Y = 1 \rightarrow U_1 = U_2$$

$$b) \quad \frac{k_1 u_0^{n_1}}{h_0^{n_1}} \left(\frac{\partial U_1}{\partial Y} \right)^{n_1} = \frac{k_2 u_0^{n_2}}{h_0^{n_2}} \left(\frac{\partial U_2}{\partial Y} \right)^{n_2}, \quad \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right| = \frac{\partial u_1}{\partial y}, \left| \frac{\partial u_2}{\partial y} \right| = \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)$$

$$\rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_1} \frac{k_1}{h_0^{n_1} u_0^{-n_1+2}} \left(\frac{\partial U_1}{\partial Y} \right)^{n_1} = \frac{\rho_2}{\rho_2} \frac{k_2}{h_0^{n_2} u_0^{-n_2+2}} \left(\frac{\partial U_2}{\partial Y} \right)^{n_2}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial U_1}{\partial Y} \right)^{n_1} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial Y} \right)^{n_2} \frac{\rho_2 Re_1}{\rho_1 Re_2}$$

3) при $Y h_0 = \delta_1 + \delta_2$:

$$\frac{k_2 u_0^{n_2}}{h_0^{n_2}} \left| \frac{\partial U_2}{\partial Y} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_2}{\partial Y} = \frac{\tau_3}{\rho_2 g \delta_2} \rho_2 g \delta_2, \text{ де } \frac{\tau_3}{\rho_2 g \delta_2} = Ge$$

$$\rightarrow \left| \frac{\partial U_2}{\partial Y} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_2}{\partial Y} = \pm Ge \frac{\rho_2 g h_2 h_0^{n_2}}{k_2 u_0^{n_2}} = \pm Ge \frac{\rho_2 h_0^{n_2} u_0^{-n_2+2} g h_0 \delta_2}{k_2 u_0^2 h_0} =$$

$$= \pm Ge \frac{Re_2}{Fr} \frac{\delta_2}{\delta_1}, \text{ так як } h_0 = \delta_1, \text{ де } Re_2 = \frac{\rho_2 h_0^{n_2} u_0^{-n_2+2}}{k_2}, \frac{1}{Fr} = \frac{gh_0}{u_0^2}.$$

$$\text{Отже, } \left| \frac{\partial U_2}{\partial Y} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_2}{\partial Y} = \pm Ge \frac{Re_2}{Fr} \frac{\delta_2}{\delta_1} \text{ при } Y = 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

Тобто, крайова задача (*загальний випадок*) в безрозмірних змінних, враховуючи, що $\left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right| = \frac{\partial u_1}{\partial y}$, приймає вид:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[\left| \frac{\partial U_1}{\partial Y} \right|^{n_1} \right] = - \frac{Re_1}{Fr} \quad (3.2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[\left| \frac{\partial U_2}{\partial Y} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_1}{\partial Y} \right] = - \frac{Re_2}{Fr} \quad (3.2.10)$$

Крайові умови:

1) при $Y = 0$:

$$U_1 = 0. \quad (3.2.11)$$

2) при $Y = 1$:

$$U_1 = U_2 \quad (3.2.12)$$

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial Y} \right)^{n_1} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial Y} \right)^{n_2} \frac{\rho_2 Re_1}{\rho_1 Re_2} \quad (3.2.13)$$

3) при $Y = 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}$:

$$\left| \frac{\partial U_2}{\partial Y} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_2}{\partial Y} = \pm Ge \frac{Re_2}{Re_1} \frac{\delta_2}{\delta_1} \quad (3.2.14)$$

Розглянемо випадок, коли газовий потік направлений вниз.

В цьому випадку $\left| \frac{\partial U_2}{\partial Y} \right| = \frac{\partial U_2}{\partial Y}$ та в рівнянні (14) візьмемо знак „+”

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[\left| \frac{\partial U_1}{\partial Y} \right|^{n_1} \right] = - \frac{Re_1}{Fr} \quad (3.2.9')$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[\left| \frac{\partial U_2}{\partial Y} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_1}{\partial Y} \right] = - \frac{Re_2}{Fr} \quad (3.2.10')$$

Крайові умови:

1) при $Y = 0$:

$$U_1 = 0. \quad (3.2.11')$$

2) при $Y = 1$:

$$U_1 = U_2 \quad (3.2.12')$$

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial Y}\right)^{n_1} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial Y}\right)^{n_2} \frac{\rho_2 Re_1}{\rho_1 Re_2} \quad (3.2.13')$$

3) при $Y = 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}$:

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial Y}\right)^{n_2} = \pm Ge \frac{Re_2 \delta_2}{Re_1 \delta_1} \quad (3.2.14')$$

Проінтегрувавши (3.2.9') - (3.2.10'), отримаємо:

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial Y}\right)^{n_1} = -\frac{Re_1}{Fr} Y + C_{11} \quad (3.2.15)$$

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial Y}\right)^{n_2} = -\frac{Re_2}{Fr} Y + C_{21} \quad (3.2.16)$$

або
$$\frac{\partial U_1}{\partial Y} = \left(-\frac{Re_1}{Fr} Y + C_{11}\right)^{\frac{1}{n_1}}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial Y} = \left(-\frac{Re_2}{Fr} Y + C_{21}\right)^{\frac{1}{n_2}}$$

Проінтегрувавши ще одним разом, отримаємо:

$$U_1 = \int \left(-\frac{Re_1}{Fr} Y + C_{11}\right)^{\frac{1}{n_1}} dY = -\frac{Fr}{Re_1} \left(-\frac{Re_1}{Fr} Y + C_{11}\right)^{\frac{1}{n_1}+1} + C_{12} \quad (3.2.17)$$

$$U_2 = \int \left(-\frac{Re_2}{Fr} Y + C_{21}\right)^{\frac{1}{n_2}} dY = -\frac{Fr}{Re_2} \left(-\frac{Re_2}{Fr} Y + C_{21}\right)^{\frac{1}{n_2}+1} + C_{22} \quad (3.2.18)$$

Підставивши (3.2.15)-(3.2.18) в крайові умови, отримаємо:

1) при $Y = 0$:

$$-\frac{Fr}{Re_1} \left(-\frac{Re_1}{Fr} 0 + C_{11}\right)^{\frac{1}{n_1}+1} + C_{12} = 0 \rightarrow C_{12} = \frac{Fr}{Re_1} (C_{11})^{\frac{1}{n_1}+1}$$

2) при $Y = 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}$:

$$\begin{aligned} -\frac{Re_2}{Fr} \left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}\right) + C_{21} &= +Ge \frac{Re_2 \delta_2}{Fr \delta_1} \\ \rightarrow C_{21} &= \frac{Re_2}{Fr} \left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} + Ge \frac{\delta_2}{\delta_1}\right) = \frac{Re_2}{Fr} \left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} (1 + Ge)\right) \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

3) при $Y = 1$

$$\begin{cases} C_{12} - \frac{Fr}{Re_1} \left(-\frac{Re_1}{Fr} 1 + C_{11}\right)^{\frac{1}{n_1}+1} = C_{22} - \frac{Fr}{Re_2} \left(-\frac{Re_2}{Fr} 1 + C_{21}\right)^{\frac{1}{n_2}+1} \\ -\frac{Re_1}{Fr} 1 + C_{11} = \left(-\frac{Re_2}{Fr} 1 + C_{21}\right) \frac{\rho_2 Re_1}{\rho_1 Re_2} \end{cases}$$

$$C_{11} = \frac{Re_1}{Fr} + \left(-\frac{Re_2}{Fr} + \frac{Re_2}{Fr} + \frac{Re_2}{Fr} \frac{\delta_2}{\delta_1} (1 + Ge) \right) \frac{\rho_2 Re_1}{\rho_1 Re_2} = \frac{Re_1}{Fr} + \frac{Re_1}{Fr} \frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} (1 + Ge) =$$

$$\frac{Re_1}{Fr} \left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} (1 + Ge) \right) = C_{11} \quad (3.2.20)$$

$$C_{12} = \frac{Fr}{Re_1} \left(\frac{Re_1}{Fr} \left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} (1 + Ge) \right) \right)^{\frac{1}{n_1}+1} \quad (3.2.21)$$

$$C_{22} = C_{12} - \frac{Fr}{Re_1} \left(-\frac{Re_1}{Fr} + C_{11} \right)^{\frac{1}{n_1}+1} + \frac{Fr}{Re_2} \left(-\frac{Re_2}{Fr} + C_{21} \right)^{\frac{1}{n_2}+1} \quad (3.2.22)$$

Рішення дається формулами (3.2.17)-(3.2.18), де C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} визначаються за формулами (3.2.19)-(3.2.22).

Параметри задачі:

$$Re_1, Re_2, Fr, Ge, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \frac{\delta_2}{\delta_1}, n_1, n_2.$$

Окремий випадок.

$$Re_1 = 1, Re_2 = 1, Fr = 1, \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1, \frac{\delta_2}{\delta_1} = 1$$

$$U_1 = -(-Y + C_{11})^{\frac{1}{n_1}+1} + C_{12}$$

$$U_2 = -(-Y + C_{21})^{\frac{1}{n_2}+1} + C_{22}$$

де

$$C_{11} = 2 + Ge$$

$$C_{12} = (2 + Ge)^{\frac{1}{n_1}+1}$$

$$C_{21} = 2 + Ge$$

$$C_{22} = (2 + Ge)^{\frac{1}{n_1}+1} + (1 + Ge)^{\frac{1}{n_1}+1} + (1 + Ge)^{\frac{1}{n_2}+1}$$

Рішення задачі буде таким:

$$U_1 = -(-Y + 2 + Ge)^{\frac{1}{n_1}+1} + (2 + Ge)^{\frac{1}{n_1}+1}, \text{ при } Y \in [0,1] \quad (3.2.23)$$

$$U_2 = -(-Y + 2 + Ge)^{\frac{1}{n_2}+1} + (2 + Ge)^{\frac{1}{n_1}+1} + (1 + Ge)^{\frac{1}{n_2}+1} - (1 + Ge)^{\frac{1}{n_2}+1}, \text{ при } Y \in [0,1] \quad (3.2.24)$$

Задачу оптимізації дії газового потоку на плівки(для випадку, коли газовий потік напрямлений вниз або дорівнює нулю) розглядати немає сенсу, тому що оптимальне значення буде при $Ge=0$.

Випадок, коли потік напрямлений вгору, потрібно розглядати за допомогою чисельних методів.

Отже, розподіл швидкостей за товщиною плівок можливо представити у вигляді:

$$U_1 = \left(\frac{Re_1}{Fr}\right)^{\frac{1}{n_1}} \frac{n_1}{n_1+1} \left\{ \left[1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} (1 + Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} - \left[1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} (1 + Ge) - Y \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} \right\},$$

при $Y \in [0,1]$

$$U_2 = \left(\frac{Re_1}{Fr}\right)^{\frac{1}{n_1}} \frac{n_1}{n_1+1} \left\{ \left[1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} (1 + Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} - \left[\frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} (1 + Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} \right\} + \left(\frac{Re_2}{Fr}\right)^{\frac{1}{n_2}} \frac{n_2}{n_2+1} \left\{ \left[\frac{\delta_2}{\delta_1} (1 + Ge) \right]^{\frac{n_2+1}{n_2}} - \left[1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} (1 + Ge) - Y \right]^{\frac{n_2+1}{n_2}} \right\}, \text{ при } Y \in [0,1]$$

$$Re_1 = \frac{\rho_1 u_0^{2-n_1} h_0^{n_1}}{k_1} - \text{узагальнене число Рейльдса(для першої плівки);}$$

$$Re_2 = \frac{\rho_2 u_0^{2-n_2} h_0^{n_2}}{k_2} - \text{узагальнене число Рейльдса(для другої плівки);}$$

$$Fr = \frac{gh_0}{u_0^2} - \text{число Фруда;}$$

u_0 - характерна повздовжня швидкість;

$h_0 = \delta_1$ - характерний поперечний розмір (товщина 1-ї плівки);

δ_1, δ_2 - товщини плівок;

ρ_1, ρ_2 - густина рідких плівок;

n_1, n_2, k_1, k_2 — фізичні константи для нелінійно-в'язких плівок;

$$Ge = \frac{\tau_3}{\rho_2 g \delta_2} - \text{параметр, який характеризує вплив газового потоку(знак „+”, якщо}$$

газовий потік направлений вниз);

$Y = \frac{y}{h_0} = \frac{y}{\delta_1}$ – безрозмірна поперечна координата (розраховуючи від твердої стінки);

$U_1 = \frac{u_1}{u_0}$; $U_2 = \frac{u_2}{u_0}$ – безрозмірні повздовжні швидкості;

3.3 Взаємодія двошарової плівки з газовим потоком, який направлено вгору

Розглянемо випадок, коли газовий потік направлений вгору:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial Y} \right)^{n_1} \right] = - \frac{Re_1}{Fr}, \quad (0 \leq Y \leq 1) \quad (3.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[\left| \frac{\partial U_2}{\partial Y} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_2}{\partial Y} \right] = - \frac{Re_2}{Fr}, \quad (1 \leq Y \leq 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}) \quad (3.3.2)$$

Крайові умови:

1) при $Y = 0$:

$$U_1 = 0. \quad (3.3.3)$$

2) при $Y = 1$:

$$U_1 = U_2 \quad (3.3.4)$$

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial Y} \right)^{n_1} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial Y} \right)^{n_2} \frac{\rho_2 Re_1}{\rho_1 Re_2} \quad (3.3.5)$$

3) при $Y = 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}$:

$$\left| \frac{\partial U_2}{\partial Y} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_2}{\partial Y} = -Ge \frac{Re_2 \delta_2}{Re_1 \delta_1} \quad (3.3.6)$$

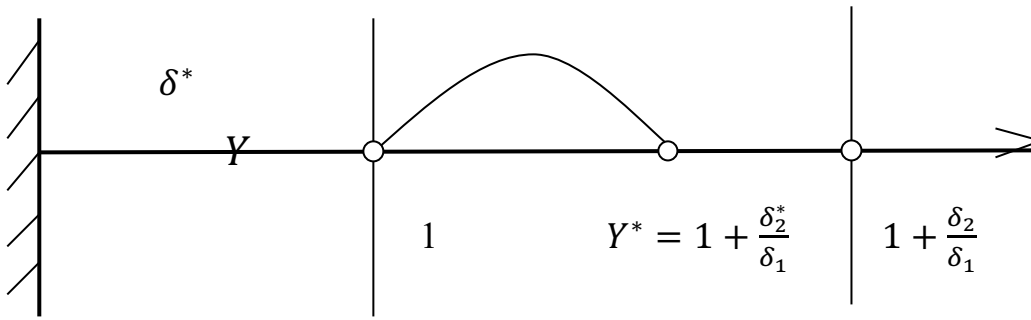
Видозмінимо умови (3.3.6):

Так як при $Y = 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}$ маємо $\frac{\partial U_2}{\partial Y} < 0$, то з (3.3.6) отримаємо:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial U_2}{\partial Y} \right|^{n_2-1} &= Ge \frac{Re_2 \delta_2}{Re_1 \delta_1} \quad (\text{вважаємо, що } Ge > 0) \\ \rightarrow \left| \frac{\partial U_2}{\partial Y} \right| &= \left(Ge \frac{Re_2 \delta_2}{Re_1 \delta_1} \right)^{\frac{1}{n_2}} \\ \rightarrow \frac{\partial U_2}{\partial Y} &= - \left(Ge \frac{Re_2 \delta_2}{Re_1 \delta_1} \right)^{\frac{1}{n_2}} \end{aligned} \quad (3.3.6')$$

На проміжку $(1, 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1})$ похідна $\frac{\partial U_2}{\partial Y}$ змінює знак.

Нехай це відбувається в точці $Y^* = 1 + \frac{\delta_2^*}{\delta_1}$



На проміжку $(Y^*, 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1})$ рівняння (3.3.2) приймає такий вид:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[\left| \frac{\partial U_2}{\partial Y} \right|^{n_2} \frac{\partial U_1}{\partial Y} \right] = \frac{Re_2}{Fr} \rightarrow \left| \frac{\partial U_2}{\partial Y} \right|^{n_2} = \frac{Re_2}{Fr} Y + C_1$$

$$\rightarrow \left| \frac{\partial U_2}{\partial Y} \right| = \left(\frac{Re_2}{Fr} Y + C_1 \right)^{\frac{1}{n_2}}$$

$$\rightarrow \frac{\partial U_2}{\partial Y} = - \left| \frac{\partial U_2}{\partial Y} \right| = - \left(\frac{Re_2}{Fr} Y + C_1 \right)^{\frac{1}{n_1}}$$

Використовуючи крайові умови (3.3.6'), знайдемо C_1 :

$$- \left(\frac{Re_2}{Fr} \left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) + C_1 \right)^{\frac{1}{n_2}} = - \left(Ge \frac{Re_2}{Re_1} \frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^{\frac{1}{n_2}}$$

$$\rightarrow \frac{Re_2}{Fr} \left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) + C_1 = Ge \frac{Re_2}{Re_1} \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

$$\rightarrow C_1 = \frac{Re_2}{Fr} \left(Ge \frac{\delta_2}{\delta_1} - \left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) \right) = \frac{Re_2}{Fr} \left[\frac{\delta_2}{\delta_1} (Ge - 1) - 1 \right]$$

$$\rightarrow \frac{\partial U_2}{\partial Y} = - \left[\frac{Re_2}{Fr} Y + \frac{Re_2}{Fr} \{ (Ge - 1) - 1 \} \right]^{\frac{1}{n_2}}$$

або

$$\frac{\partial U_2}{\partial Y} = - \left(\frac{Re_2}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_2}} \left[Y + \frac{\delta_2}{\delta_1} (Ge - 1) - 1 \right]^{\frac{1}{n_2}}, Y \in \left[Y^*, 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right] \quad (3.3.7)$$

З умови $\frac{\partial U_2}{\partial Y} = 0$ знайдемо Y^* :

$$Y^* = 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} (1 - Ge) = 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} - \frac{\delta_2}{\delta_1} Ge \quad \text{тобто довжина відрізка } \left[Y^*, 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right] \text{ буде}$$

$$\text{дорівнювати } l = Ge \frac{\delta_2}{\delta_1} \quad (3.3.8)$$

На проміжку $[1, Y^*]$ рівняння (3.3.2) буде приймати вигляд

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\frac{\partial U_2}{\partial Y} \right)^{n_2} \right] = - \frac{Re_2}{Fr}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial U_2}{\partial Y} \right)^{n_2} = -\frac{Re_2}{Fr} + C_2$$

$$\rightarrow \frac{\partial U_2}{\partial Y} = \left(-\frac{Re_2}{Fr} + C_2 \right)^{\frac{1}{n_2}}$$

використовуючи крайову умову(отриману раніше)

$$\frac{\partial U_2}{\partial Y} = 0 \text{ при } Y = Y^* = 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} [1 - Ge]$$

отримаємо

$$-\frac{Re_2}{Fr} \left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} [1 - Ge] \right) + C_2 = 0$$

$$\rightarrow C_2 = \frac{Re_2}{Fr} \left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} [1 - Ge] \right)$$

Таким чином:

$$\frac{\partial U_2}{\partial Y} = \left(-\frac{Re_2}{Fr} Y + \frac{Re_2}{Fr} \left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} [1 - Ge] \right) \right)^{\frac{1}{n_2}}$$

або

$$\frac{\partial U_2}{\partial Y} = \left(\frac{Re_2}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_2}} \left[-Y + 1 - \frac{\delta_2}{\delta_1} (Ge - 1) \right]^{\frac{1}{n_2}}, Y \in [1, Y^*] \quad (3.3.9)$$

Потрібно відмітити, що похідна $\frac{\partial U_2}{\partial Y}$ в різних областях (формули (3.3.7) та (3.3.9)

відрізняються знаком в правій частині рівняння і знаком в квадратних дужках.

В точці $Y = 1$ похідна $\frac{\partial U_2}{\partial Y}$ дорівнює:

$$\frac{\partial U_2}{\partial Y} = \left(\frac{Re_2}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_2}} \left[\frac{\delta_2}{\delta_1} (1 - Ge) \right]^{\frac{1}{n_2}} \quad (3.3.10)$$

Розглянемо рівняння (3.3.1), що задано в області $[0, 1]$.

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial Y} \right)^{n_1} \right] = -\frac{Re_1}{Fr}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial U_1}{\partial Y} \right)^{n_1} = -\frac{Re_1}{Fr} Y + C_3$$

$$\rightarrow \frac{\partial U_1}{\partial Y} = \left(-\frac{Re_1}{Fr} Y + C_3 \right)^{\frac{1}{n_1}} \quad (3.3.11)$$

Крайова умова (3.3.5) при $Y = 1$ враховуючи (3.3.9) матиме вид:

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial Y} \right)^{n_1} = \frac{Re_2}{Fr} \frac{\delta_2}{\delta_1} (1 - Ge) \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{Re_1}{Re_2} = \frac{Re_1}{Re_2} \frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} (1 - Ge)$$

або

$$\frac{\partial U_1}{\partial Y} = \left(\frac{Re_1}{Re_2} \frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} (1 - Ge) \right)^{\frac{1}{n_1}} \quad (3.3.12)$$

Тоді отримаємо, враховуючи (3.3.11):

$$\frac{\partial U_1}{\partial Y} = \left(\frac{Re_1}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_1}} \left[1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\delta_2}{\delta_1} (1 - Ge) - Y \right]^{\frac{1}{n_1}}, \quad Y \in [0, 1] \quad (3.3.13)$$

Таким чином ми отримали три рівняння першого порядку (3.3.7), (3.3.9), (3.3.13) з крайовими умовами (3.3.3), (3.3.4) та умовою неперервності швидкості U_2 в точці $Y = Y^*$

Проінтегрувавши рівняння (3.3.13), отримаємо:

$$U_1 = - \left(\frac{Re_1}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_1}} \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\delta_2}{\delta_1} (1 - Ge) - Y \right)^{\frac{n_1+1}{n_1}} \frac{n_1}{n_1+1} + C_4$$

підставивши U_1 в крайові умови (3.3.3), отримаємо

$$0 = - \left(\frac{Re_1}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_1}} \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\delta_2}{\delta_1} (1 - Ge) - Y \right)^{\frac{n_1+1}{n_1}} \frac{n_1}{n_1+1} + C_4$$

$$\rightarrow C_4 = \left(\frac{Re_1}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_1}} \frac{n_1}{n_1+1} \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\delta_2}{\delta_1} (1 - Ge) - Y \right)^{\frac{n_1+1}{n_1}}, \text{ тоді для швидкості } U_1$$

отримаємо формулу

$$U_1 = \left(\frac{Re_1}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_1}} \frac{n_1}{n_1+1} \left\{ \left(\left[1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\delta_2}{\delta_1} (1 - Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} - \left[1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\delta_2}{\delta_1} (1 - Ge) - Y \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} \right) \right\}$$

(3.3.14)

В точці $Y = 1$ швидкість U_2 буде дорівнювати

$$U_1 = \left(\frac{Re_1}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_1}} \frac{n_1}{n_1+1} \left\{ \left[1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\delta_2}{\delta_1} (1 - Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} - \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\delta_2}{\delta_1} (1 - Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} \right\} \quad (3.3.15)$$

Проінтегрувавши (3.3.9) на проміжку $[1, Y^*]$, отримаємо:

$$U_2 = - \left(\frac{Re_2}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_2}} \left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1} (Ge - 1) - Y \right)^{\frac{n_2+1}{n_2}} \frac{n_2}{n_2+1} + C_5$$

Використовуючи крайову умову (3.3.4) у точці $Y = 1$, отримаємо:

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{Re_2}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_2}} \left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1} (Ge - 1) - Y \right)^{\frac{n_2+1}{n_2}} \frac{n_2}{n_2+1} + C_5 = \left(\frac{Re_1}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_1}} \frac{n_1}{n_1+1} \left\{ \left[1 + \frac{\rho_2 \delta_2}{\rho_1 \delta_1} (1 - \right. \right. \\
& \left. \left. Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} - \left[\frac{\rho_2 \delta_2}{\rho_1 \delta_1} (1 - Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} \right\} \\
& \rightarrow C_5 = \left(\frac{Re_2}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_2}} \frac{n_2}{n_2+1} \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} (1 - Ge) \right)^{\frac{n_2+1}{n_2}} + \left(\frac{Re_1}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_1}} \frac{n_1}{n_1+1} \left\{ \left[1 + \frac{\rho_2 \delta_2}{\rho_1 \delta_1} (1 - \right. \right. \\
& \left. \left. Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} - \left[\frac{\rho_2 \delta_2}{\rho_1 \delta_1} (1 - Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} \right\}
\end{aligned}$$

Тоді для швидкості U_2 на проміжку $[1, Y^*]$ отримаємо формулу

$$\begin{aligned}
U_2 = & \left(\frac{Re_1}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_1}} \frac{n_1}{n_1+1} \left\{ \left[1 + \frac{\rho_2 \delta_2}{\rho_1 \delta_1} (1 - Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} - \left[\frac{\rho_2 \delta_2}{\rho_1 \delta_1} (1 - Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} \right\} + \\
& \left(\frac{Re_2}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_2}} \frac{n_2}{n_2+1} \left\{ \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} (1 - Ge) \right)^{\frac{n_2+1}{n_2}} - \left[1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} (1 - Ge) - Y \right]^{\frac{n_2+1}{n_2}} \right\} \quad (3.3.16)
\end{aligned}$$

У точці $Y = Y^* = 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} [1 - Ge]$ швидкість U_2 буде максимальною

$$\begin{aligned}
U_{2 \max} = & \left(\frac{Re_1}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_1}} \frac{n_1}{n_1+1} \left\{ \left[1 + \frac{\rho_2 \delta_2}{\rho_1 \delta_1} (1 - Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} - \left[\frac{\rho_2 \delta_2}{\rho_1 \delta_1} (1 - Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} \right\} + \\
& \left(\frac{Re_2}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_2}} \frac{n_2}{n_2+1} \left[1 + \frac{\rho_2 \delta_2}{\rho_1 \delta_1} (1 - Ge) \right]^{\frac{n_2+1}{n_2}} \quad (3.3.17)
\end{aligned}$$

Проінтегрувавши (3.3.7) (на проміжку $[Y^*, 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}]$) отримаємо формулу

$$U_2 = - \left(\frac{Re_2}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_2}} \left(Y + \frac{\delta_2}{\delta_1} (Ge - 1) - 1 \right)^{\frac{n_2+1}{n_2}} \frac{n_2+1}{n_2} + C_6 \text{ в точці}$$

$Y = Y^* = 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} [1 - Ge]$ отримаємо

$$- \left(\frac{Re_2}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_2}} \left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} (1 - Ge) + \frac{\delta_2}{\delta_1} (Ge - 1) - 1 \right)^{\frac{n_2+1}{n_2}} \frac{n_2}{n_2+1} + C_6 = U_{2 \max}$$

Тоді для швидкості U_2 на проміжку $[Y^*, 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}]$ отримаємо формулу

$$\begin{aligned}
U_2 = & \left(\frac{Re_1}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_1}} \frac{n_1}{n_1+1} \left\{ \left[1 + \frac{\rho_2 \delta_2}{\rho_1 \delta_1} (1 - Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} - \left[\frac{\rho_2 \delta_2}{\rho_1 \delta_1} (1 - Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} \right\} + \\
& + \left(\frac{Re_2}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_2}} \frac{n_2}{n_2+1} \left\{ \left[\frac{\delta_2}{\delta_1} (1 - Ge) \right]^{\frac{n_2+1}{n_2}} - \left[Y + \frac{\delta_2}{\delta_1} (Ge - 1) - 1 \right]^{\frac{n_2+1}{n_2}} \right\}
\end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Порівнюючи формули (3.3.16) і (3.3.17) можна помітити що вони співпадають, за виключенням знаку виразу в квадратних дужках, що містять Y .

Потрібно відмитити, що в обох формулах ці вирази невід'ємні (на відповідних проміжках $[1, Y^*]$ та $[Y^*, 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}]$). Тому ці формули можна об'єднати, записавши вираз під знаком модуль. Таким чином отримаємо формулу:

$$\begin{aligned}
U_2 = & \left(\frac{Re_1}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_1}} \frac{n_1}{n_1+1} \left\{ \left[1 + \frac{\rho_2 \delta_2}{\rho_1 \delta_1} (1 - Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} \left[\frac{\rho_2 \delta_2}{\rho_1 \delta_1} (1 - \right. \right. \\
& \left. \left. - Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} + \left(\frac{Re_2}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_2}} \frac{n_2}{n_2+1} \left\{ \left[\frac{\delta_2}{\delta_1} (1 - Ge) \right]^{\frac{n_2+1}{n_2}} - \left| 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} (1 - Ge) - Y \right|^{\frac{n_2+1}{n_2}} \right\} \right\}
\end{aligned}$$

Порівнюючи формули для U_1 та U_2 у випадках, коли газовий потік направлений вниз і вгору, ці формули можна об'єднати, вважаючи, що при газовому потоці, направленому вниз $Ge \geq 0$, а при направленному - вгору $Ge \leq 0$.

Тоді формули набувають такого значення:

$$\begin{aligned}
U_1 = & \left(\frac{Re_1}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_1}} \frac{n_1}{n_1+1} \left\{ \left[1 + \frac{\rho_2 \delta_2}{\rho_1 \delta_1} (1 + Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} - \left[1 + \frac{\rho_2 \delta_2}{\rho_1 \delta_1} (1 + Ge) - \right. \right. \\
& \left. \left. - Y \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} \right\}
\end{aligned} \quad (3.3.19)$$

$$\begin{aligned}
U_2 = & \left(\frac{Re_1}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_1}} \frac{n_1}{n_1+1} \left\{ \left[1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\delta_2}{\delta_1} (1 + Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} - \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\delta_2}{\delta_1} (1 + \right. \right. \\
& \left. \left. + Ge) \right]^{\frac{n_1+1}{n_1}} \right\} + \left(\frac{Re_2}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_2}} \frac{n_2}{n_2+1} \left\{ \left[\frac{\delta_2}{\delta_1} (1 + Ge) \right]^{\frac{n_2+1}{n_2}} - \left| 1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} (1 + Ge) - Y \right|^{\frac{n_2+1}{n_2}} \right\}
\end{aligned}$$

(3.3.20)

4. ЗАДАЧА ПРО ТЕЧІЮ ДВОШАРОВОЇ РІДКОЇ ПЛІВКИ ПО ПОВЕРХНІ ЦИЛІНДРА

4.1 Течія двошарової плівки по циліндричній поверхні

У технологічних апаратах часто реалізується течія рідких плівок по зовнішнім або внутрішнім поверхням вузьких труб. У цьому випадку необхідно враховувати кривизну стінки.

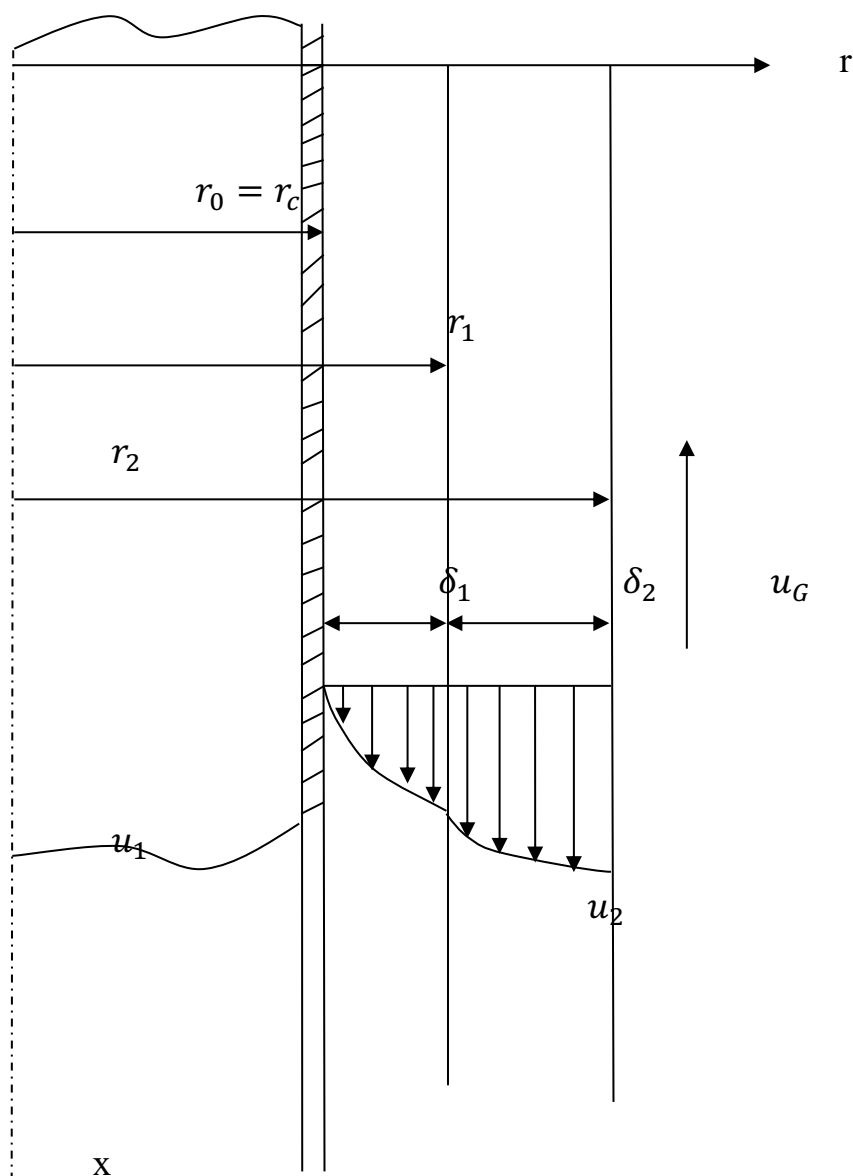


Рисунок 4.1 – Схема течії двошарової плівки по циліндричній поверхні

В цьому розділі розглядається задача про стаціонарну течію двох рідких плівок по циліндричній поверхні.

Для опису течії рідких плівок застосовується модель в'язкої нестисливої рідини, яка базується на рівняннях Нав'є-Стокса і нерозривності. В циліндричній системі координат (r, θ, x) ці рівняння мають вигляд:

• для першої плівки:

$$\begin{cases} v_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_1}{\partial r} \right) + g, \\ v_1 \frac{\partial v_1}{\partial r} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r^2} \right), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_1)}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

• для другої плівки:

$$\begin{cases} v_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_2}{\partial r} \right) + g, \\ v_2 \frac{\partial v_2}{\partial r} + u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_2}{\partial r} - \frac{v_2}{r^2} \right), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_2)}{\partial r} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Тут v та u – компоненти вектора швидкості в напрямку осей r та x , p – тиск, ρ – густина рідини, ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості, g – прискорення вільного падіння, індекси 1, 2 відповідають номеру плівки.

На поверхнях розділу ставляться наступні крайові умови:

1) на твердій поверхні тіла - умова "прилипання":

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad r = r_0, \quad (4.1.3)$$

2) умова рівноваги сил та неперервних швидкостей на міжфазній поверхні рідина – рідина:

$$\begin{aligned} p_{n1} &= p_{\sigma 1} + p_{n2}, & p_{\tau 1} &= p_{\tau 2}, \\ u_{n1} &= u_{n2}, & u_{\tau 1} &= u_{\tau 2} \quad \text{при} \quad r = r_1, \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

3) умова на міжфазній поверхні рідина – газ:

$$p_{n2} = p_{nG}, \quad p_{\tau 2} = p_{\tau G}, \quad \text{при} \quad r = r_2, \quad (4.1.5)$$

де σ - коефіцієнт поверхневого натягу рідини, p_n і p_τ - нормальна та дотична компоненти тензора напружень на міжфазних поверхнях відповідно, а p_σ - капілярний тиск.

Для спрощення вихідної системи диференціальних рівнянь (4.1.1)-(4.1.2) застосовано метод малого параметру, за який вибрані відносини товщини плівок та газового шару: $\varepsilon = \frac{h}{l}$, де l - характерний поздовжній розмір, h - характерний поперечний розмір в рідких плівках.

Будемо вважати, що сили інерції значно менші ніж сили тертя і тяжіння, ці сили не будемо враховувати. Застосовуючи методику, що наведена в розділі (3.1) для випадку пластини, отримаємо спрощену систему диференціальних рівнянь, що описують течію в двошаровій рідкій плівці. Відповідні рівняння для поздовжніх компонент швидкостей можуть бути розглянуті окремо від інших невідомих (нормальна компонента швидкості та тиск).

Для кожного з шарів рідкої плівки отримаємо наступну спрощену систему рівнянь для визначення поздовжніх компонент швидкостей в кожному шарі:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) = - \frac{\rho_1 g}{\mu_1} r \quad (4.1.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) = - \frac{\rho_2 g}{\mu_2} r \quad (4.1.7)$$

Маємо:

r – радіус в циліндричній системі координат;

u – поздовжня компонента швидкості;

ρ – щільність;

μ – коефіцієнт динамічної в'язкості;

g – пришвидження вільного падіння;

Індекси „1” та „2” відповідають першому і другому шару рідкої плівки.

Введемо характерні величини: $h_0 = \delta_1$ - характерний поперечний розмір, що дорівнює товщині першої плівки, u_0 - характерна поздовжня швидкість, а також безрозмірні змінні R , U_1 , U_2 за формулами:

$$r = R r_0, u_1 = U_1 u_0, u_2 = U_2 u_0 \quad (4.1.8)$$

$$r_c = r_0$$

У нових змінних, система (4.1.6)-(4.1.7) запишеться таким чином:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U_1}{\partial R} \right) = - \frac{Re_1}{Fr} R \quad (4.1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U_2}{\partial R} \right) = - \frac{Re_2}{Fr} R \quad (4.1.10)$$

де $Re_1 = \frac{\rho_1 u_0 r_0}{\mu_1}$, $Re_2 = \frac{\rho_2 u_0 r_0}{\mu_2}$ - числа Рейнольдса для першої і другої плівки,

$Fr = \frac{u_0^2}{r_0 g}$ - число Фруда.

Розглянемо крайові умови:

- 1) на поверхні твердого тіла умови „прилипання”:

$$u_1 = 0 \text{ при } r=0 \quad (4.1.11)$$

- 2) на міжфазній поверхні рідина-рідина умови неперервності поздовжньої швидкості і дотичного напруження:

$$u_1 = u_2 \text{ при } r = r_1 \quad (4.1.12)$$

$$\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} \quad (4.1.13)$$

- 3) на міжфазній поверхні рідина-газ умова неперервності дотичних напружень:

$$\mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} = \tau_3 \text{ при } r = r_2 \quad (4.1.14)$$

У нових змінних крайові умови набудуть вигляду:

$$1) \quad U_1 = 0 \quad \text{при } R = 1 = R_0 \quad (4.1.15)$$

$$2) \quad U_1 = U_2 \quad \text{при } R = 1 + \frac{\delta_1}{r_0} = R_1 \quad (4.1.16)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial R} = \frac{\partial U_2}{\partial R} \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{Re_1}{Re_2} \quad (4.1.17)$$

$$3) \quad \frac{\partial U_2}{\partial R} = Ge \frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{Re_1}{Fr}, \quad \text{при } R = 1 + \frac{\delta_1 + \delta_2}{r_0} = R_2, \quad (4.1.18)$$

де $Ge = \frac{\tau_3}{\rho_2 \delta_2 g}$ - параметр, що характеризує вплив газового потоку.

Таким чином, отримаємо систему диференціальних рівнянь (4.1.9)-(4.1.10) з крайовими умовами (4.1.15)-(4.1.18).

Проінтегрувавши (4.1.9)-(4.1.10), отримаємо:

$$R \frac{\partial U_1}{\partial R} = - \frac{Re_1}{Fr} \frac{R^2}{2} + C_1 \quad (4.1.19)$$

$$R \frac{\partial U_2}{\partial R} = - \frac{Re_2}{Fr} \frac{R^2}{2} + C_2 \quad (4.1.20)$$

Підставивши (4.2.15) в (4.2.13), отримаємо:

$$\frac{\partial U_2}{\partial R} \Big|_{R=R_2} = - \left(\frac{Re_2 R}{Fr} - \frac{C_1}{R} \right) \Big|_{R=R_2} = \frac{Re_2 R_2}{Fr} + \frac{C_1}{R_2} = Ge \frac{\delta_2}{r_0} \frac{Re_2}{Fr}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{Re_2}{Fr} \left(\frac{R_2^2}{2} + Ge \frac{\delta_2}{r_0} R_2 \right) \quad (4.1.21)$$

тоді

$$\frac{\partial U_2}{\partial R} = \frac{Re_2}{2Fr} \left(-R + \frac{R_2^2 + 2Ge \frac{\delta_2}{r_0} R_2}{R} \right) \quad (4.1.22)$$

У точці $R = R_1$ отримаємо:

$$\frac{\partial U_2}{\partial R} \Big|_{R=R_1} = \frac{Re_2}{2Fr} \left(-R_1 + \frac{R_2^2 + 2Ge \frac{\delta_2}{r_0} R_2}{R_1} \right) \quad (4.1.23)$$

Підставивши цей вираз в (4.2.12), отримаємо:

$$\frac{\partial U_1}{\partial R} \Big|_{R=R_1} = \frac{\partial U_2}{\partial R} \Big|_{R=R_2} \cdot \frac{\rho_2 Re_1}{\rho_1 Re_2} = \frac{Re_1}{2Fr} \left(-R_1 + \frac{R_2^2 + 2Ge \frac{\delta_2}{r_0} R_2}{R_1} \right) \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (4.1.24)$$

Підставимо (4.1.14) в (4.1.19), отримаємо:

$$\frac{\partial U_1}{\partial R} \Big|_{R=R_1} = \left(-\frac{Re_1 R}{Fr} + \frac{C_1}{R} \right) \Big|_{R=R_1} = -\frac{Re_1 R_1}{Fr} + \frac{C_1}{R_1} = \frac{Re_1}{2Fr} \left(-R_1 + \frac{R_2^2 + 2Ge \frac{\delta_2}{r_0} R_2}{R_1} \right) \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{Re_1}{2Fr} R_1 \left(R_1 + \left(-R_1 + \frac{R_2^2 + 2Ge \frac{\delta_2}{r_0} R_2}{R_1} \right) \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) = \frac{Re_1}{2Fr} \left(R_1^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (-R_1^2 + R_2^2 + 2Ge \frac{\delta_2}{r_0} R_2) \right) \quad (4.1.25)$$

Тоді

$$\frac{\partial U_1}{\partial R} = \frac{Re_1}{2Fr} \left(-R + \left(\frac{R_1^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (-R_1^2 + R_2^2 + 2Ge \frac{\delta_2}{r_0} R_2)}{R} \right) \right) \quad (4.1.26)$$

Проінтегрувавши рівняння (4.1.20), отримаємо:

$$U_1 = \frac{Re_1}{2Fr} \left(\frac{R_2}{2} + \left(R_1^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (-R_1^2 + R_2^2 + 2Ge \frac{\delta_2}{r_0} R_2) \right) \ln R \right) + C_3 \quad (4.2.27)$$

Підставивши (4.1.27) у крайову умову (4.1.15), отримаємо:

$$C_3 = \frac{Re_1}{2Fr} \frac{1}{2} \quad (4.1.28)$$

А підставивши (4.1.28) в умову (4.1.27), отримаємо:

$$U_1 = \frac{Re_1}{2Fr} \left(\frac{1-R^2}{2} + \left(R_1^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (-R_1^2 + R_2^2 + 2Ge \frac{\delta_2}{r_0} R_2) \right) \ln R \right) \quad (4.1.29)$$

При $R = R_1$ буде

$$U_1|_{R=R_1} = \frac{Re_1}{2Fr} \left(\frac{1-R_1^2}{2} + \left(R_1^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (-R_1^2 + R_2^2 + 2Ge \frac{\delta_2}{r_0} R_2) \right) \ln R_1 \right) \quad (4.1.30)$$

Проінтегрувавши (4.1.30), отримаємо:

$$U_2 = \frac{Re_2}{2Fr} \left(-\frac{R^2}{2} + \left(R_2^2 + 2Ge \frac{\delta_2}{r_0} R_2 \right) \ln R \right) + C_4$$

Підставивши U_2 в крайову умову (4.2.11), враховуючи умови (4.1.25), визначимо C_4 і кінцевий результат буде таким:

$$U_2 = \frac{Re_2}{2Fr} \left(\frac{R_1^2 - R^2}{2} - \left(R_2^2 + 2Ge \frac{\delta_2}{r_0} R_2 \right) \ln \frac{R_1}{R} \right) + \frac{Re_1}{2Fr} \left(\frac{1-R_1^2}{2} + \left(R_1^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (-R_1^2 + R_2^2 + 2Ge \frac{\delta_2}{r_0} R_2) \right) \ln R_1 \right) \quad (4.1.31)$$

Отже, формули (4.1.29), (4.1.31) дають розв'язок крайової задачі (4.1.9), (4.1.10), (4.1.15)-(4.1.18).

Відмітимо, що у формулах (4.1.29)-(4.1.31) величини R_1 та R_2 задано формулами:

$$R_1 = 1 \pm \frac{\delta_1}{r_0}$$

$$R_2 = 1 \pm \frac{\delta_1 + \delta_2}{r_0},$$

де знак „+” використовуємо при зовнішній течії плівки, тобто навколо циліндру, а знак „-” – коли плівка буде стікати з внутрішньої сторони циліндру.

Таким чином отримали розрахункові формули:

$$U_1 = \frac{Re_1}{2Fr} \left(\frac{1-R^2}{2} + \left(R_1^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (-R_1^2 + R_*^2) \right) \ln R \right), \quad (4.1.32)$$

$$U_2 = \frac{Re_2}{2Fr} \left(\frac{R_1^2 - R^2}{2} + R_*^2 \ln \frac{R_1}{R} \right) + \frac{Re_1}{2Fr} \left\{ \frac{1-R_1^2}{2} + [R_1^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (-R_1^2 + R_*^2)] \ln R_1 \right\}, \quad (4.1.33)$$

$$\text{де } R_* = \sqrt{R_2^2 + 2Ge \frac{\delta_2}{r_0} R_2}.$$

4.2 Розрахунок оптимального параметру впливу газового потоку на робочу плівку.

Розглянемо задачу по вибору оптимального значення параметру впливу газового потоку Ge на течію рідини. Тобто, визначимо, при яких значеннях

параметру Ge швидкість у другій плівці буде розподілена найбільш рівномірно в поперечному напрямі.

Швидкість рідини в другій (робочій) плівці визначається наступною формулою (4.1.33) з попереднього підрозділу 4.1:

$$U_2 = \frac{Re_2}{2Fr} \left(\frac{R_1^2 - R^2}{2} + R_*^2 \ln \frac{R}{R_1} \right) + \frac{Re_1}{2Fr} \left\{ \frac{1 - R_1^2}{2} + \left[R_1^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (-R_1^2 + R_*^2) \right] \ln R_1 \right\}$$

Знайдемо максимальну U_2^{max} і середню U_2^{cp} швидкості рідини в плівці.

1. Відзначимо, що у випадку, коли газовий потік направлений вниз (вздовж осі z), найбільше значення швидкості U_2^{max} досягається в крайній точці $R = R_2$. Для того, щоб визначити U_2^{max} при газовому потоці направленому вгору, знайдемо похідну $\frac{\partial U_2}{\partial R}$ і прирівняємо її до нуля

$$\frac{\partial U_2}{\partial R} = \frac{Re_2}{2Fr} \left(-R + \frac{R_*^2}{R} \right) = 0 \quad (4.2.1)$$

$$\Rightarrow -R^2 + R_*^2 = 0$$

В цьому випадку максимальне значення швидкості U_2 досягає в точці:

$$R = R_* = \sqrt{R_2^2 + 2Ge \frac{\delta_2}{r_0} R_2}, \quad (4.2.2)$$

при чому $R_* = R_2$, якщо $Ge=0$, і $R_* \in (R_1; R_2)$, якщо $Ge < 0$.

Підставивши $R = R_*$ в формулу (4.1.33) з підрозділу 4.1, отримаємо максимальне значення швидкості U_2^{max} в другій плівці:

$$U_2^{max} = \frac{Re_2}{2Fr} \left(\frac{R_1^2 - R_*^2}{2} + R_*^2 \ln \frac{R_*}{R_1} \right) + \frac{Re_1}{2Fr} \left\{ \frac{1 - R_1^2}{2} + \left[R_1^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (-R_1^2 + R_*^2) \right] \ln R_1 \right\}. \quad (4.2.3)$$

Похідна $\frac{dU_2^{max}}{dGe}$ обчислюється за формулою:

$$\frac{dU_2^{max}}{dGe} = \frac{dU_2^{max}}{d(R_*^2)} \cdot \frac{d(R_*^2)}{dGe}, \text{ де}$$

$$\frac{dU_2^{max}}{d(R_*^2)} = \frac{Re_2}{2Fr} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{R_*^2}{R_1^2} + \frac{Re_1}{2Fr} \frac{\rho_2}{\rho_1} \ln R_1, \quad (4.2.4)$$

$$\frac{dR_*^2}{dGe} = \frac{d}{dGe} \left(R_*^2 + 2Ge \frac{\delta_2}{r_0} R_2 \right) = 2 \cdot \frac{\delta_2}{r_0} \cdot R_2. \quad (4.2.5)$$

2. Тепер з формули (4.1.33) з підрозділу 4.1 знайдемо середнє значення швидкості U_2^{cp} . Ця величина визначається за формулою:

$$U_2^{\text{cp}} = \frac{Q_2}{S_2},$$

де Q_2 - витрата (тобто об'єм рідини, який за одиницю часу проходить через даний поперечний переріз) в другій (робочій) плівці;

S_2 - площа кільця (перерізу робочої плівки).

Витрата Q_2 обчислюється за формулою:

$$Q_2 = \iint_D U_2 dx dy = \iint_{\Delta} R U_2 dR d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} R U_2 dR = 2\pi \cdot \int_{R_1}^{R_2} R U_2 dR. \quad (4.2.7)$$

Площа кільця Δ : $R_1 \leq R \leq R_2$, визначається так:

$$S_2 = \iint_D dx dy = \iint_{\Delta} R dR d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} R dR = 2\pi \frac{R^2}{2} \Big|_{R_1}^{R_2} = \pi(R_2^2 - R_1^2). \quad (4.2.8)$$

Швидкість U_2 можна записати у вигляді:

$$U_2 = AR^2 + B \ln R + C, \text{ де} \quad (4.2.9)$$

$$A = -\frac{Re_2}{4Fr};$$

$$B = \frac{Re_2}{2Fr} R_*^2;$$

$$C = \frac{Re_2}{2Fr} \left(\frac{R_1^2}{2} - R_*^2 \ln R_1 \right) + \frac{Re_1}{2Fr} \left\{ \frac{1-R_1^2}{2} + \left[R_1^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (-R_1^2 + R_*^2) \right] \ln R_1 \right\}.$$

Тоді

$$R U_2 = AR^3 + BR \ln R + CR,$$

$$\Rightarrow \int_{R_1}^{R_2} R U_2 dR = \int_{R_1}^{R_2} (AR^3 + BR \ln R + CR) dR = \left[A \frac{R^4}{4} + B \frac{R^2}{4} (2 \ln R - 1) + \right. \\ \left. + C \frac{R^2}{2} \right] \Big|_{R_1}^{R_2} = A \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} + B \frac{R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1}{2} - B \frac{R_2^2 - R_1^2}{4} + C \frac{R_2^2 - R_1^2}{2}.$$

Для витрати Q_2 отримаємо формулу:

$$Q_2 = \pi \left[A \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} + B \frac{R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1}{2} - B \frac{R_2^2 - R_1^2}{4} + C \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \right] \quad (4.2.10)$$

Середнє значення швидкості U_2^{cp} та похідна $\frac{dU_2^{\text{cp}}}{dGe}$ обчислюються за формулами

$$U_2^{\text{cp}} = \frac{Q_2}{S_2} = A \frac{R_2^2 + R_1^2}{2} + B \frac{R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{2C - B}{2}, \quad (4.2.11)$$

$$\frac{dU_2^{\text{cp}}}{dGe} = \frac{dU_2^{\text{cp}}}{d(R_*^2)} \cdot \frac{d(R_*^2)}{dGe} = \frac{dU_2^{\text{cp}}}{d(R_*^2)} \cdot 2 \cdot \frac{\delta_2}{r_0} \cdot R_2, \quad (4.2.12)$$

$$\text{де } \frac{dU_2^{\text{cp}}}{d(R_*^2)} = \frac{Re_2}{2Fr} \frac{R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1}{R_2^2 - R_1^2} + \left(\frac{Re_2}{2Fr} \ln R_1 + \frac{Re_1}{2Fr} \frac{\rho_2}{\rho_1} \ln R_1 - \frac{Re_2}{4Fr} \right). \quad (4.2.13)$$

3. Знайдемо відношення максимальної швидкості U_2^{max} до середньої швидкості U_2^{cp} , як функцію від параметру впливу газового потоку Ge . Швидкість у другій плівці буде розподілена найбільш рівномірно в поперечному напрямі, коли відношення $\frac{U_2^{\text{max}}}{U_2^{\text{cp}}}$ прийматиме найменше значення, тобто, коли похідна цього відношення по змінній Ge (а значить і похідна по змінній R_*^2) дорівнюватиме нулю.

Похідна $\frac{d\left(\frac{U_2^{\text{max}}}{U_2^{\text{cp}}}\right)}{dGe}$ обчислюється за формулою:

$$\frac{d}{dGe} \left[\frac{U_2^{\text{max}}}{U_2^{\text{cp}}} \right] = \frac{d}{d(R_*^2)} \left[\frac{U_2^{\text{max}}}{U_2^{\text{cp}}} \right] \cdot \frac{d(R_*^2)}{dGe} = \frac{(U_2^{\text{max}})'_{R_*^2} \cdot U_2^{\text{cp}} - (U_2^{\text{cp}})'_{R_*^2} \cdot U_2^{\text{max}}}{(U_2^{\text{cp}})^2} \cdot \frac{d(R_*^2)}{dGe} = 0. \quad (4.2.14)$$

Оскільки $\frac{dR_*^2}{dGe} = 2 \cdot \frac{\delta_2}{r_0} \cdot R_2 \neq 0$ і $(U_2^{\text{cp}})^2 \neq 0$, то отримаємо наступне рівняння

для знаходження оптимального значення величини R_{*opt}^2 :

$$(U_2^{\text{max}})'_{R_*^2} \cdot U_2^{\text{cp}} - (U_2^{\text{cp}})'_{R_*^2} \cdot U_2^{\text{max}} = 0, \quad (4.2.15)$$

а значить і оптимального значення параметра Ge_{opt} :

$$Ge_{opt} = \frac{R_{*opt}^2 - R_2^2}{2R_2 \frac{\delta_2}{r_0}}. \quad (4.2.16)$$

Формулу (4.2.3) для обчислення U_2^{max} можна подати у вигляді:

$$U_2^{\text{max}} = K_1 R_*^{2\frac{1}{2}} \ln(R_*^2) + K_2 R_*^2 + K_3, \quad (4.2.17)$$

де коефіцієнти K_1 , K_2 , K_3 не залежать від R_*^2 і мають вигляд:

$$K_1 = \frac{Re_2}{4Fr},$$

$$K_2 = -\frac{Re_2}{4Fr} (1 + 2 \ln R_1) + \frac{Re_1}{2Fr} \frac{\rho_2}{\rho_1} \ln R_1,$$

$$K_3 = \frac{Re_1}{2Fr} \left(\frac{1 - R_1^2}{2} + R_1^2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \ln R_1 \right) + \frac{Re_2}{4Fr} R_1^2.$$

Тоді похідна U_2^{max} по R_*^2 знаходиться так:

$$\frac{dU_2^{\text{max}}}{d(R_*^2)} = K_1 \ln(R_*^2) + (K_1 + K_2). \quad (4.2.18)$$

Формулу (4.2.11) для обчислення U_2^{cp} подамо у вигляді:

$$U_2^{\text{cp}} = K_4 R_*^2 + K_5, \quad (4.2.19)$$

де коефіцієнти K_4, K_5 не залежать від R_*^2 і мають вигляд:

$$K_4 = \frac{Re_2}{2Fr} \left(\frac{R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1}{R_2^2 - R_1^2} - \ln R_1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{Re_1}{2Fr} \ln R_1,$$

$$K_5 = \frac{Re_2}{2Fr} \left(-\frac{R_1^2 - R_2^2}{4} \right) + \frac{Re_1}{2Fr} \left[\frac{1 - R_1^2}{2} + R_1^2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \ln R_1 \right],$$

$$\text{Похідна } U_2^{\text{cp}} \text{ по } R_*^2 \text{ знаходиться так: } \frac{dU_2^{\text{cp}}}{d(R_*^2)} = K_4, \quad (4.2.20)$$

Тоді нелінійне рівняння (4.2.15) для знаходження величини R_{*opt}^2 матиме вигляд:

$$K_1 K_5 \ln(R_*^2) + K_1 K_4 R_*^2 + K_1 K_5 + K_2 K_5 - K_3 K_4 = 0. \quad (4.2.21)$$

Це рівняння (4.2.21) можна розв'язати за допомогою одного з чисельних методів.

Рівняння було розв'язане за допомогою JS – бібліотеки math.js.

4.3 Задача о течії двухшаровой плівки нелінійно-в'язкої рідини.

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_1 + \rho_1 g) = 0. \quad (4.3.1) \right.$$

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_2 + \rho_2 g) = 0. \quad (4.3.2) \right\}$$

$$\tau_1 = k_1 \left| \frac{\partial u_1}{\partial r} \right|^{n_1-1} \frac{\partial u_1}{\partial r}$$

$$\tau_2 = k_2 \left| \frac{\partial u_2}{\partial r} \right|^{n_2-1} \frac{\partial u_2}{\partial r}$$

Крайові умови

$$1) \quad u_1 = 0 \text{ при } r = r_0 \quad (4.3.1)$$

$$2) \quad u_1 = u_2 \text{ при } r = r_1 \quad (4.3.2)$$

$$3) \quad \tau_1 = \tau_2 \quad (4.3.3)$$

$$4) \quad \tau_2 = \tau_3 \text{ при } r = r_2 \quad (4.3.4)$$

Введемо характерні величини

$h_0 = \delta_1$ - характерний поперечний розмір

u_0 - характерна поздовжня швидкість

Безрозмірні змінні: R, U_1, U_2

$$r = R \cdot r_0, \quad u_1 = U_1 u_0, \quad u_2 = U_2 u_0$$

Тоді з (4.3.1) =>

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{R \cdot r_0} \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial R} \left(r_0 R \cdot k_1 \frac{u_0^{n_1}}{r_0^{n_1}} \left| \frac{\partial U_1}{\partial R} \right|^{n_1-1} \frac{\partial U_1}{\partial R} \right) = -\rho_1 g \\
& \frac{\partial(R \left| \frac{\partial U_1}{\partial R} \right|^{n_1-1} \frac{\partial U_1}{\partial R})}{\partial R} = -\frac{\rho_1 g r_0^{n_1} r_0}{k_1 u_0^{n_1}} R = -\frac{\rho_1 u_0^{2-n_1} r_0^{n_1} r_0 g}{k_1 u_0^2} R \\
& \Rightarrow \frac{\partial(R \left| \frac{\partial U_1}{\partial R} \right|^{n_1-1} \frac{\partial U_1}{\partial R})}{\partial R} = -\frac{Re_1}{F_2} R
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Тобто тут:

$$\begin{aligned}
Re_1 &= \frac{\rho_1 u_0^{2-n_1} r_0^{n_1}}{k_1} \\
F_2 &= \frac{u_0^2}{r_0 g}
\end{aligned}$$

Аналогічно з (4.3.2):

$$\frac{\partial(R \left| \frac{\partial U_2}{\partial R} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_2}{\partial R})}{\partial R} = -\frac{Re_2}{F_2} R \tag{4.3.6}$$

Де:

$$Re_2 = \frac{\rho_2 u_0^{2-n_2} r_0^{n_2}}{k_2}$$

Крайові умові:

$$1) \quad u_0 U_1 = 0 \text{ при } r_0 R = 0, \text{ тобто } \Rightarrow U_1 = 0 \text{ при } R = 0 \tag{4.3.7}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad u_0 U_1 &= u_0 U_2 \text{ при } r_0 R = r_1 = r_0 + \delta_1, \text{ тобто } \Rightarrow U_1 = U_2 \text{ при } R = \\
1 + \frac{\delta_1}{r_0} &= R_1
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

$$\begin{aligned}
& k_1 \frac{u_0^{n_1}}{r_0^{n_1}} \left| \frac{\partial U_1}{\partial R} \right|^{n_1-1} \frac{\partial U_1}{\partial R} = k_2 \frac{u_0^{n_2}}{r_0^{n_2}} \left| \frac{\partial U_2}{\partial R} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_2}{\partial R} \\
& \Rightarrow \frac{\rho_1 k_1 u_0^2}{\rho_1 u_0^{2-n_1} r_0^{n_1}} \left| \frac{\partial U_1}{\partial R} \right|^{n_1-1} \frac{\partial U_1}{\partial R} = \frac{\rho_2 k_2 u_0^2}{\rho_2 u_0^{2-n_2} r_0^{n_2}} \left| \frac{\partial U_2}{\partial R} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_2}{\partial R}
\end{aligned}$$

$$\text{На границі } r = r_1: \frac{\partial U_1}{\partial R} > 0, \quad \frac{\partial U_2}{\partial R} > 0$$

Тоді отримаємо:

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial R} \right)^{n_1} = \frac{\rho_1 Re_1}{\rho_2 Re_2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial R} \right)^{n_2} \quad \text{при} \quad R = 1 + \frac{\delta_1}{r_0} = R_1 \tag{4.3.9}$$

$$3) k_2 \frac{u_0^{n_2}}{r_0^{n_2}} \left| \frac{\partial U_2}{\partial R} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_2}{\partial R} = \tau_3 \quad \text{при} \quad r_0 R = r_0 + \delta_1 + \delta_2$$

$$\frac{r_0 g}{r_0 g} \frac{\rho_2 k_2 u_0^2}{\rho_2 u_0^{2-n_2} r_0^{n_2}} \left| \frac{\partial U_2}{\partial R} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_2}{\partial R} = \tau_3$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial U_2}{\partial R} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_2}{\partial R} = \frac{\delta_2 \tau_3}{\delta_2 \rho_2 r_0 g} \frac{Re_2}{F_2}$$

$$\left| \frac{\partial U_2}{\partial R} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_2}{\partial R} = Ge \cdot \frac{\delta_2}{r_0} \cdot \frac{Re_2}{F_2} \quad \text{при} \quad R = 1 + \frac{\delta_1 + \delta_2}{r_0} = R_2 \quad (4.3.10)$$

Тобто крайова задача (у безрозмірному вигляді) о течії двухшарової плівки нелінійно-в'язкої рідини по поверхні циліндра може мати наступний вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R \left| \frac{\partial U_1}{\partial R} \right|^{n_1-1} \frac{\partial U_1}{\partial R} \right) = - \frac{Re_1}{F_2} R \quad (4.3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R \left| \frac{\partial U_2}{\partial R} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_2}{\partial R} \right) = - \frac{Re_2}{F_2} R \quad (4.3.12)$$

Крайові умови:

$$1. U_1 = 0 \text{ при } R = 1 \quad (4.3.13)$$

$$2. U_1 = U_2 \quad (4.3.14)$$

$$3. \left(\frac{\partial U_1}{\partial R} \right)^{n_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{Re_1}{Re_2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial R} \right)^{n_2} \quad \text{при} \quad R = 1 + \frac{\delta_1}{r_0} = R_1 \quad (4.3.15)$$

$$4. \left| \frac{\partial U_2}{\partial R} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_2}{\partial R} = Ge \cdot \frac{\delta_2}{r_0} \cdot \frac{Re_2}{F_2} \quad \text{при} \quad R = 1 + \frac{\delta_1 + \delta_2}{r_0} = R_2 \quad (4.3.16)$$

При:

U_1, U_2 – невідомі функції (швидкості)

R – аргумент (координати)

Re_1, Re_2 – числа Рейнольдса

F_2 -число Фруда

ρ_1, ρ_2 - щільність рідких плівок

δ_1, δ_2, r_0 -геометричні параметри

n_1, n_2, Ge -фізичні параметри

Всі цілі величини являються постійними та вважаються заданими.

Вважаючи, що у області допоміжної плівки ($1 \leq R \leq R_1$) виконується умова

$\frac{\partial U_1}{\partial R} > 0$, рівняння (4.3.16) приймає наступний вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U_1}{\partial R}^{n_1} \right) = -\frac{Re_1}{F_2} R \quad (4.3.16')$$

Враховуючи, що у області допоміжної плівки ($1 \leq R \leq 1 + \frac{\delta_1}{r_0}$) виконується

умова $\frac{\partial U_1}{\partial R} > 0$, отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \left| \frac{\partial U_1}{\partial R} \right|^{n_1} \right) &= -\frac{Re_1}{F_2} R \\ \frac{\partial}{\partial R} \left(R \left| \frac{\partial U_2}{\partial R} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_2}{\partial R} \right) &= -\frac{Re_2}{F_2} R \end{aligned}$$

Розглянемо випадок коли $U_1 > 0$ та $U_2 > 0$, тоді отримаємо наступну систему:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R \left| \frac{\partial U_1}{\partial R} \right|^{n_1} \right) = -\frac{Re_1}{F_2} R \quad (4.3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R \left| \frac{\partial U_2}{\partial R} \right|^{n_2} \right) = -\frac{Re_2}{F_2} R \quad (4.3.19)$$

Крайові умови:

$$1. U_1 = 0 \text{ при } R = 1 \quad (4.3.20)$$

$$2. U_1 = U_2 \quad (4.3.21)$$

$$3. \left(\frac{\partial U_1}{\partial R} \right)^{n_1} = \frac{\rho_1 Re_1}{\rho_2 Re_2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial R} \right)^{n_2} \quad \text{при } R = 1 + \frac{\delta_1}{r_0} = R_1 \quad (4.3.22)$$

$$4. \left| \frac{\partial U_2}{\partial R} \right|^{n_2-1} \frac{\partial U_2}{\partial R} = Ge \cdot \frac{\delta_2}{r_0} \cdot \frac{Re_2}{F_2} \quad \text{при } R = 1 + \frac{\delta_1 + \delta_2}{r_0} = R_2 \quad (4.3.23)$$

Інтегруючи рівняння (4.3.18) та (4.3.19) отримаємо

$$\left\{ R \left(\frac{\partial U_1}{\partial R} \right)^{n_1} = -\frac{Re_1}{F_2} \frac{R^2}{2} + C_1 \right. \Rightarrow \left. \left(\frac{\partial U_1}{\partial R} \right)^{n_1} = -\frac{Re_1}{F_2} \frac{R}{2} + \frac{C_1}{R} \right. \quad (4.3.24)$$

$$\left\{ R \left(\frac{\partial U_2}{\partial R} \right)^{n_2} = -\frac{Re_2}{F_2} \frac{R^2}{2} + C_2 \right. \Rightarrow \left. \left(\frac{\partial U_2}{\partial R} \right)^{n_2} = -\frac{Re_2}{F_2} \frac{R}{2} + \frac{C_2}{R} \right. \quad (4.3.25)$$

C_1 та C_2 виразимо з (4.3.22) та (4.3.23):

$$(6) \Rightarrow \left(\frac{\partial U_2}{\partial R} \right)^{n_2} = Ge \cdot \frac{\delta_2}{r_0} \cdot \frac{Re_2}{F_2} = -\frac{Re_2 R_2}{F_2^2} + \frac{C_2}{R_2} \Rightarrow C_2 \quad (4.3.26)$$

$$(5) \Rightarrow \left(\frac{\partial U_1}{\partial R} \right)^{n_1} = \frac{\rho_1 Re_1}{\rho_2 Re_2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial R} \right)^{n_2} = -\frac{Re_2 R_1}{F_2^2} + \frac{C_1}{R_1} \Rightarrow C_1 \quad (4.3.27)$$

З (4.3.27) є можливість виразити C_1 через C_2 , оскільки

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial R} \right)^{n_2} = C_2 \Rightarrow C_1 = \frac{\rho_1 Re_1}{\rho_2 Re_2} C_2 \quad (4.3.28)$$

З (4.3.24) та (4.3.25) отримаємо

$$\left\{ \frac{\partial U_2}{\partial R} = \left(-\frac{Re_2}{F_2^2} - \frac{R}{2} + \frac{C_2}{R} \right)^{\frac{1}{n_2}} \right. \quad (4.3.29)$$

$$\left\{ \frac{\partial U_1}{\partial R} = \left(-\frac{Re_2}{F_2^2} - \frac{R}{2} + \frac{C_1}{R} \right)^{\frac{1}{n_1}} \right. \quad (4.3.30)$$

Отже з цієї системи є можливість отримати формули для швидкості плівок:

$$U_1 = \int \left(-\frac{Re_2}{F_2^2} - \frac{R}{2} + \frac{C_1}{R} \right)^{\frac{1}{n_1}} dR + C_3 \quad (4.3.31)$$

$$U_2 = \int \left(-\frac{Re_2}{F_2^2} - \frac{R}{2} + \frac{C_2}{R} \right)^{\frac{1}{n_2}} dR + C_4 \quad (4.3.32)$$

Виходячи с отриманих формул для швидкостей (4.3.31) та (4.3.32) значення $\frac{1}{n_1}$

та $\frac{1}{n_2}$ повинні бути натуральними, тобто:

$$\frac{1}{n_1} \in N$$

$$\frac{1}{n_2} \in N$$

Отже n_1 та n_2 повинні задовольняти цій умові.

1) Розглянемо частковий випадок при $n = 1/2$.

У такому випадку функції (4.3.31) та (4.3.32) приймають наступний вигляд:

$$U_1 = \int \left(-\frac{Re_2}{F_2^2} - \frac{R}{2} + \frac{C_1}{R} \right)^2 dR + C_3 \quad (4.3.33)$$

$$U_2 = \int \left(-\frac{Re_2}{F_2^2} - \frac{R}{2} + \frac{C_2}{R} \right)^2 dR + C_4 \quad (4.3.34)$$

Вирішивши інтеграли отримаємо наступний розв'язок:

$$U_1 = 2C_1 \frac{Re_2}{F_2^2} \ln(|R|) + \frac{R^3 - 6 \frac{Re_2}{F_2^2} R^2}{12} + R \left(\left(\frac{Re_2}{F_2^2} \right)^2 - C_1 \right) - \frac{C_1^2}{R} + C_3$$

$$U_2 = 2C_2 \frac{Re_2}{F_2^2} \ln(|R|) + \frac{R^3 - 6 \frac{Re_2}{F_2^2} R^2}{12} + R \left(\left(\frac{Re_2}{F_2^2} \right)^2 - C_2 \right) - \frac{C_2^2}{R} + C_4$$

Де:

$$C_1 = \frac{\rho_1 Re_1}{\rho_2 Re_2} C_2 \quad (4.3.28)$$

$$C_2 = Ge \cdot \frac{\delta_2}{r_0} \cdot \frac{Re_2}{F_2} \quad (4.3.26)$$

Тоді знайдемо C_3 та C_4 використовуючи крайові умови (4.3.20) та (4.3.21) відповідно.

$$1. U_1 = 0 \text{ при } R = 1$$

$$C_3 = \frac{6 \frac{Re_2}{F_2^2} - 1}{12} - \left(\frac{Re_2}{F_2^2} \right)^2 + C_1$$

$$2. U_1 = U_2$$

$$C_4 = 2 \frac{Re_2}{F_2^2} \ln(|R|) (C_1 - C_2) + R(C_2 - C_1) - \frac{1}{R} (C_1^2 - C_2^2) - C_3$$

2) Розглянемо частковий випадок при $n = 1/3$.

У такому випадку функції (4.3.31) та (4.3.32) приймають наступний вигляд:

$$U_1 = \int \left(-\frac{Re_2}{F_2^2} - \frac{R}{2} + \frac{C_1}{R} \right)^3 dR + C_3 \quad (4.3.35)$$

$$U_2 = \int \left(-\frac{Re_2}{F_2^2} - \frac{R}{2} + \frac{C_2}{R} \right)^3 dR + C_4 \quad (4.3.36)$$

$$U_1 = \frac{\left(96C_1 \left(\frac{Re_2}{F_2^2} \right)^2 - 48C_1^2 \right) \ln(|R|) - R^4 + 8 \frac{Re_2}{F_2^2} R^3 + \left(12C_1 - 24 \left(\frac{Re_2}{F_2^2} \right)^2 \right) R^2 + \left(96C_1 \frac{Re_2}{F_2^2} - 32 \left(\frac{Re_2}{F_2^2} \right)^3 \right) R + \frac{96C_1^2 \frac{Re_2}{F_2^2}}{R} - \frac{16C_1^3}{R^2}}{32} + C_3$$

$$U_2 = \frac{\left(96C_2 \left(\frac{Re_2}{F_2^2} \right)^2 - 48C_2^2 \right) \ln(|R|) - R^4 + 8 \frac{Re_2}{F_2^2} R^3 + \left(12C_2 - 24 \left(\frac{Re_2}{F_2^2} \right)^2 \right) R^2 + \left(96C_2 \frac{Re_2}{F_2^2} - 32 \left(\frac{Re_2}{F_2^2} \right)^3 \right) R + \frac{96C_2^2 \frac{Re_2}{F_2^2}}{R} - \frac{16C_2^3}{R^2}}{32} + C_4$$

Де:

$$C_1 = \frac{\rho_1 Re_1}{\rho_2 Re_2} C_2 \quad (4.3.28)$$

$$C_2 = Ge \cdot \frac{\delta_2}{r_0} \cdot \frac{Re_2}{F_2} \quad (4.3.26)$$

Тоді знайдемо C_3 та C_4 використовуючи крайові умови (4.3.20) та (4.3.21) відповідно.

$$1. U_1 = 0 \text{ при } R = 1$$

$$C_3 = 1 - 8 \frac{Re_2}{F_2^2} - \left(12C_1 - 24 \left(\frac{Re_2}{F_2^2} \right)^2 \right) - \left(96C_1 \frac{Re_2}{F_2^2} - 32 \left(\frac{Re_2}{F_2^2} \right)^3 \right) - 96C_1^2 \frac{Re_2}{F_2^2} + 16C_1^3$$

$$2. U_1 = U_2$$

$$C_4 = \ln(|R|) \left(\left(96C_1 \left(\frac{Re_2}{F_2^2} \right)^2 - 48C_1^2 \right) - \left(96C_2 \left(\frac{Re_2}{F_2^2} \right)^2 - 48C_2^2 \right) \right) + 12R^2(C_1 - C_2) + 96R \frac{Re_2}{F_2^2} (C_1 - C_2) + \frac{96 \frac{Re_2}{F_2^2}}{R} (C_1^2 - C_2^2) - \frac{16}{R^2} (C_1^3 - C_2^3)$$

4.4 Задача о течії двухшаровой плівки нелінійно-в'язкої рідини.

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_1 + \rho_1 g) = 0. & r \in [r_0, r_1] \quad (4.4.1) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_2 + \rho_2 g) = 0. & r \in [r_1, r_2] \quad (4.4.2) \end{cases}$$

$$\tau_1 = k_1 \left| \frac{\partial u_1}{\partial r} \right|^{n_1-1} \frac{\partial u_1}{\partial r} \quad (4.4.*)$$

$$\tau_2 = k_2 \left| \frac{\partial u_2}{\partial r} \right|^{n_2-1} \frac{\partial u_2}{\partial r} \quad (4.4.**)$$

Крайові умови

$$1) \quad u_1 = 0 \text{ при } r = r_0 \quad (4.4.3)$$

$$2) \quad u_1 = u_2 \text{ при } r = r_1 \quad (4.4.4)$$

$$3) \quad \tau_1 = \tau_2 \text{ при } r = r_1 \quad (4.4.5)$$

$$4) \quad \tau_2 = \tau_3 \text{ при } r = r_2 \quad (4.4.6)$$

З рівняння (4.4.1):

$$\frac{\partial}{\partial r} (r\tau_1) = -\rho_1 g r \Rightarrow r\tau_1 = -\frac{1}{2} \rho_1 g r^2 + C_1 \Rightarrow \tau_1 = -\frac{1}{2} \rho_1 g r + \frac{C_1}{r} \quad r \in [r_0, r_1]$$

Аналогічно з рівняння (4.4.2):

$$\frac{\partial}{\partial r} (r\tau_2) = -\rho_2 g r \Rightarrow r\tau_2 = -\frac{1}{2} \rho_2 g r^2 + C_2 \Rightarrow \tau_2 = -\frac{1}{2} \rho_2 g r + \frac{C_2}{r} \quad r \in [r_1, r_2]$$

З крайової умови (4.4.6):

$$\tau_2 = -\frac{1}{2}\rho_2 g r_2 + \frac{C_2}{r_2} = \tau_{\Gamma\text{Ж}} \Rightarrow C_2 = \tau_{\Gamma\text{Ж}} r_2 + \frac{1}{2}\rho_2 g r_2^2 \Rightarrow$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{2}\rho_2 g r + \frac{\tau_{\Gamma\text{Ж}} r_2 + \frac{1}{2}\rho_2 g r_2^2}{r} \quad (4.4.7)$$

З крайової умови (4.4.5):

$$-\frac{1}{2}\rho_1 g r_1 + \frac{C_1}{r_1} = -\frac{1}{2}\rho_1 g r_1 + \frac{\tau_{\Gamma\text{Ж}} r_2 + \frac{1}{2}\rho_2 g r_2^2}{r_1} \Rightarrow$$

$$C_1 = \tau_{\Gamma\text{Ж}} r_2 + \frac{1}{2}g(\rho_1 r_1^2 - \rho_2 r_1^2 + \rho_2 r_2^2)$$

Тоді отримаємо:

$$\tau_1 = -\frac{1}{2}\rho_1 g r + \frac{\tau_{\Gamma\text{Ж}} r_2 + \frac{1}{2}(\rho_1 r_1^2 - \rho_2 r_1^2 + \rho_2 r_2^2)}{r} \quad (4.4.8)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2}\rho_1 g \\ B &= \tau_{\Gamma\text{Ж}} r_2 + \frac{1}{2}(\rho_1 r_1^2 - \rho_2 r_1^2 + \rho_2 r_2^2) \\ C &= -\frac{1}{2}\rho_2 g \\ D &= \tau_{\Gamma\text{Ж}} r_2 + \frac{1}{2}\rho_2 g r_2^2 \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Тоді отримаємо:

$$\begin{cases} \tau_1 = Ar + \frac{B}{2} \\ \tau_2 = Cr + \frac{D}{2} \end{cases} \quad (4.4.10)$$

Нехай $\frac{\partial u_1}{\partial r} \geq 0$, тоді з рівенства (4.4.*) отримаємо:

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} = \left(\frac{\tau_1}{k_1}\right)^{\frac{1}{n_1}} = \left(\frac{Ar + \frac{B}{2}}{k_1}\right)^{\frac{1}{n_1}} \Rightarrow$$

$$u_1 = \int_{r_0}^r \left(\frac{Ar}{k_1} + \frac{B}{k_1 r}\right)^{\frac{1}{n_1}} dr + C_3$$

З крайової умови (4.4.3):

$$u_1(r_0) = \int_{r_0}^r \left(\frac{Ar}{k_1} + \frac{B}{k_1 r} \right)^{\frac{1}{n_1}} dr + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \quad (4.4.11)$$

Отже:

$$u_1 = \int_{r_0}^r \left(\frac{Ar}{k_1} + \frac{B}{k_1 r} \right)^{\frac{1}{n_1}} dr \quad (4.4.12)$$

Нехай $\frac{\partial u_2}{\partial r} \geq 0$, тоді з рівенства (4.4.***) отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial r} &= \left(\frac{\tau_2}{k_2} \right)^{\frac{1}{n_2}} = \left(\frac{Cr + \frac{D}{2}}{k_1} \right)^{\frac{1}{n_2}} \Rightarrow \\ u_2 &= \int_{r_1}^r \left(\frac{Cr}{k_2} + \frac{D}{k_2 r} \right)^{\frac{1}{n_2}} dr + C_4 \end{aligned}$$

З крайової умови (4.4.4):

$$\begin{aligned} u_2(r_1) &= \int_{r_1}^r \left(\frac{Cr}{k_2} + \frac{D}{k_2 r} \right)^{\frac{1}{n_2}} dr + C_4 = \int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{Ar}{k_1} + \frac{B}{k_1 r} \right)^{\frac{1}{n_1}} dr \Rightarrow \\ C_4 &= \int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{Ar}{k_1} + \frac{B}{k_1 r} \right)^{\frac{1}{n_1}} dr \quad (4.4.13) \end{aligned}$$

Тоді:

$$u_2 = \int_{r_1}^r \left(\frac{Cr}{k_2} + \frac{D}{k_2 r} \right)^{\frac{1}{n_2}} dr + C_4 \quad (4.4.14)$$

Введемо безрозмірні величини:

$$U_1 = \frac{u_1}{u_0}$$

$$U_2 = \frac{u_2}{u_0}$$

$$R_1 = \frac{r_1}{r_0}$$

$$R_2 = \frac{r_2}{r_0}$$

$$R = \frac{r}{r_0}$$

Розглянемо обидва шари плівки:

$$1) \ u_1 = u_0 U_1 = \int_{r_0}^r \left(\frac{Ar}{k_1} + \frac{B}{k_1 r} \right)^{\frac{1}{n_1}} dr \Rightarrow$$

$$U_1 = \int_1^R \left(\alpha_1 R + \frac{\beta_1}{R} \right)^{\frac{1}{n_1}} dR$$

де:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} \frac{Re_1}{Fr}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \frac{Re_1}{Fr} \left(R_1^2 + \frac{p_2}{p_1} (-R_1^2 + R_*^2) \right)$$

$$R_*^2 = R_2^2 + 2Ge\delta_2 R_2$$

Отже, отримаємо:

$$U_1 = \left(\frac{Re_1}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_1}} * \int_1^R \left(-R + \frac{R_1^2 + \frac{p_2}{p_1} (-R_1^2 + R_*^2)}{R} \right)^{\frac{1}{n_1}} dR \quad R \in [1, 1 + \delta_1] \quad (4.4.15)$$

Де:

$$Re_1 = \frac{p_1 u_0^{2-n_1} r_0^{n_1}}{k} - \text{число Рейнольдса для першого шару плівки}$$

$$Fr = \frac{u_0^2}{gr_0} - \text{число Фруда}$$

$$Ge = \frac{\tau_{гж}}{\rho_2 g h_2} - \text{параметр впливу газового потоку}$$

$\tau_{гж}$ – напруга тертя на міжфазній поверхні («рідина – газ»)

$$\delta_2 = \frac{h_2}{r_0} = \frac{r_2 - r_1}{r_0} - \text{відносна товщина другої плівки}$$

Позначимо:

$$A_1 = \left(\frac{1}{2} \frac{Re_1}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_1}} \quad (4.4.16)$$

$$B_1 = R_1^2 + \frac{p_2}{p_1} (-R_1^2 + R_*^2)$$

Тоді

$$U_1 = A_1 \int_1^R \left(-R + \frac{B_1}{R} \right)^{\frac{1}{n_1}} dR \quad (4.4.17)$$

$$2) \quad u_2 = u_0 U_2 = \int_{r_0}^r \left(\frac{C_* r_0}{k_2} + \frac{D}{k_2 r_0} \right)^{\frac{1}{n_2}} dR + C_4 \Rightarrow$$

$$U_2 = \int_{R_0}^R \left(\alpha_2 R + \frac{\beta_2}{R} \right)^{\frac{1}{n_2}} dR + \frac{C_4}{u_0}$$

де:

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \frac{Re_2}{Fr}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \frac{Re_2}{Fr} (R_*^2)$$

$$R_*^2 = R_2^2 + 2Ge\delta_2 R_2$$

Отже, виходячи з (4.4.13) та (4.4.15), отримаємо:

$$U_1 = \left(\frac{1}{2} \frac{Re_2}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_2}} \int_{R_1}^R \left(-R + \frac{R_*^2}{R} \right)^{\frac{1}{n_2}} dR + \left(\frac{1}{2} \frac{Re_1}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_1}} \int_1^{R_1} \left(-R + \frac{R_1^2 + \frac{p_2}{p_1}(-R_1^2 + R_*^2)}{R} \right)^{\frac{1}{n_1}} dR \quad (4.4.18)$$

Де:

$$Re_2 = \frac{p_2 u_0^{2-n_2} r_0^{n_2}}{k_2} - \text{число Рейнольдса для другого шару плівки.}$$

Позначимо:

$$A_2 = \left(\frac{1}{2} \frac{Re_2}{Fr} \right)^{\frac{1}{n_2}} \quad (4.4.19)$$

$$B_2 = R_*^2$$

Отримаємо:

$$U_2 = A_2 \int_{R_1}^R \left(-R + \frac{B_2}{R} \right)^{\frac{1}{n_2}} dR + A_1 \int_1^{R_1} \left(-R + \frac{B_1}{R} \right)^{\frac{1}{n_1}} dR \quad (4.4.20)$$

Отже вирішення крайової задачі (4.4.1 – 4.4.6) можливо переглянути у вигляді системи (у безрозмірних змінних):

$$U_1 = A_1 \int_1^R \left(-R + \frac{B_1}{R}\right)^{\frac{1}{n_1}} dR, R \in [1, R_1] \quad (4.4.21)$$

$$U_2 = A_2 \int_{R_1}^R \left(-R + \frac{B_2}{R}\right)^{\frac{1}{n_2}} dR + A_1 \int_1^{R_1} \left(-R + \frac{B_1}{R}\right)^{\frac{1}{n_1}} dR, R \in [R_1, R_2] \quad (4.4.22)$$

Якщо $Re_1 = Re_2 = Fr = 1, \frac{p_2}{p_1} = 1$, отримаємо:

$$U_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n_1}} \int_1^R \left(-R + \frac{R_*^2}{R}\right)^{\frac{1}{n_1}} dR$$

$$U_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n_2}} \int_1^R \left(-R + \frac{R_*^2}{R}\right)^{\frac{1}{n_2}} dR + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n_1}} \int_1^R \left(-R + \frac{R_*^2}{R}\right)^{\frac{1}{n_1}} dR$$

Тобто у загальному випадку вирішення задачі (4.4.1 – 4.4.6) отримано у вигляді квадратур (інтегралів). Для часткових випадків, коли показники степенів являють собою цілі числа можливо отримати у аналітичному вигляді, тобто у вигляді формули.

5. РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ

Згідно з описаною вище методикою, були проведені розрахунки швидкості в двухшарових плівках нелінійно-в'язкої рідини, що стікають по поверхні циліндру, з урахуванням впливу газового потоку. Результати розрахунків наведені в додатку А.

1. Результати розрахунків течії двошарової рідкої плівки нелінійно-в'язкої рідини по циліндричній поверхні наведені на рисунках А.1-А.3 при наступних значеннях визначальних параметрів:

$$\delta_1 = 1; \delta_2 = 5; \rho_1 = 997; \rho_2 = 1,205; Re_1 = 1,2; Re_2 = 1,2; Fr = 1; n = 1/2$$

та при значеннях параметра газового потоку

$$Ge = 0, \quad Ge = 0.5, \quad Ge = 1$$

2. Результати розрахунків течії двошарової рідкої плівки нелінійно-в'язкої рідини по циліндричній поверхні наведені на рисунках А.4-А.7 при наступних значеннях визначальних параметрів:

$$\delta_1 = 1; \delta_2 = 5; \rho_1 = 997; \rho_2 = 1,205; Re_1 = 1,2; Re_2 = 1,2; Fr = 1; n = 1/3$$

та при значеннях параметра газового потоку

$$Ge = 0, \quad Ge = 0.5, \quad Ge = 1$$

ВИСНОВКИ

Основні результати та висновки роботи зводяться до наступних:

- 1) За допомогою метода малого параметра розроблено методика наближеного розрахунку течії двошарової рідкої плівки по циліндричній поверхні для випадків ньютонівської та нелінійно-в'язкої рідини.
- 2) Розроблене програмне забезпечення для побудови профілей швидкості рідкої плівки в залежності від вхідних параметрів для течії двошарової рідкої плівки по циліндричній поверхні. Реалізацію на EOM проведено у вигляді SPA (Single Page Application), за допомогою фреймворку React.JS, бібліотеки для побудови графіків Charts.js та бібліотеки Math.js.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бояджиев Х. Массоперенос в движущихся пленках жидкости / Х. Бояджиев, В. Бешков. – М., 1988.
2. Шульман З.П. Реодинамика и тепломассообмен в пленочных течениях / З.П. Шульман, В.Н. Байков. – Минск, 1979.
3. Холпанов Л.П. Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела / Л.П. Холпанов, В.Я. Шкадов. – М., 1990.
4. Тананайко Ю.М., Воронцов Е.Г. Методы расчета и исследования пленочных процессов, Киев: Техника, 1975.
5. Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Розенберг Г.Д. Нефтегазовая гидромеханика. М.:Ижевск, 2005, 544с.
6. Захаров М.К. Противоточное совместное ламинарное течение двух взаимно нерастворимых жидкостей в узкой щели [Текст] / М.К. Захаров, В.Г. Айнштейн, Дж.Л. Локшин // Теоретические основы химической технологии. – 2000. – Т. 34, № 3. – С. 261–264.
7. Захаров, М.К. Анализ структуры потоков при совместном течении двух пленок взаимно нерастворимых жидкостей по вертикальной поверхности с учетом воздействия газового потока [Текст] / М.К. Захаров, А.Ю. Комков, Д.М. Павленко // Вестник МИТХТ. – 2008. – № 3. – С.70–74.
8. Захаров М. К. Анализ структуры потоков при совместном течении двух пленок взаимно нерастворимых жидкостей по вертикальной поверхности с учетом воздействия газового потока / М. К. Захаров, А.Ю. Комков // Теоретические основы химической технологии – 2009. Т. 43, № 1. – С. 37–46.
9. Санто О.В. Математичне моделювання течій двошарової рідкої плівки по поверхні твердого тіла [Текст] / О.В.Санто, І.С. Тонкошкур // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: Ліра, 2014. – С. 200-206.
10. Девід Фленаган «Java Scritp. The Definitive Guide» 1996

ДОДАТОК А

Графіки

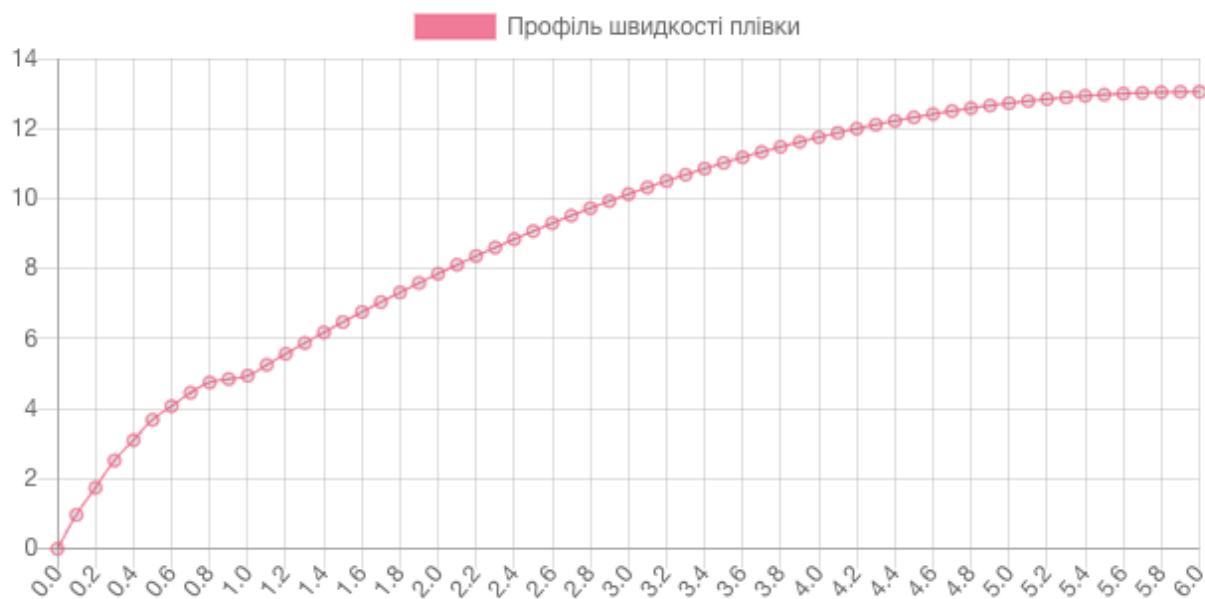


Рисунок А.1 – Профіль швидкості двошарової плівки нелінійно-в'язкої рідини по поверхні циліндру, при значенні параметру впливу газового потоку $Ge=0$ та $n=1/2$

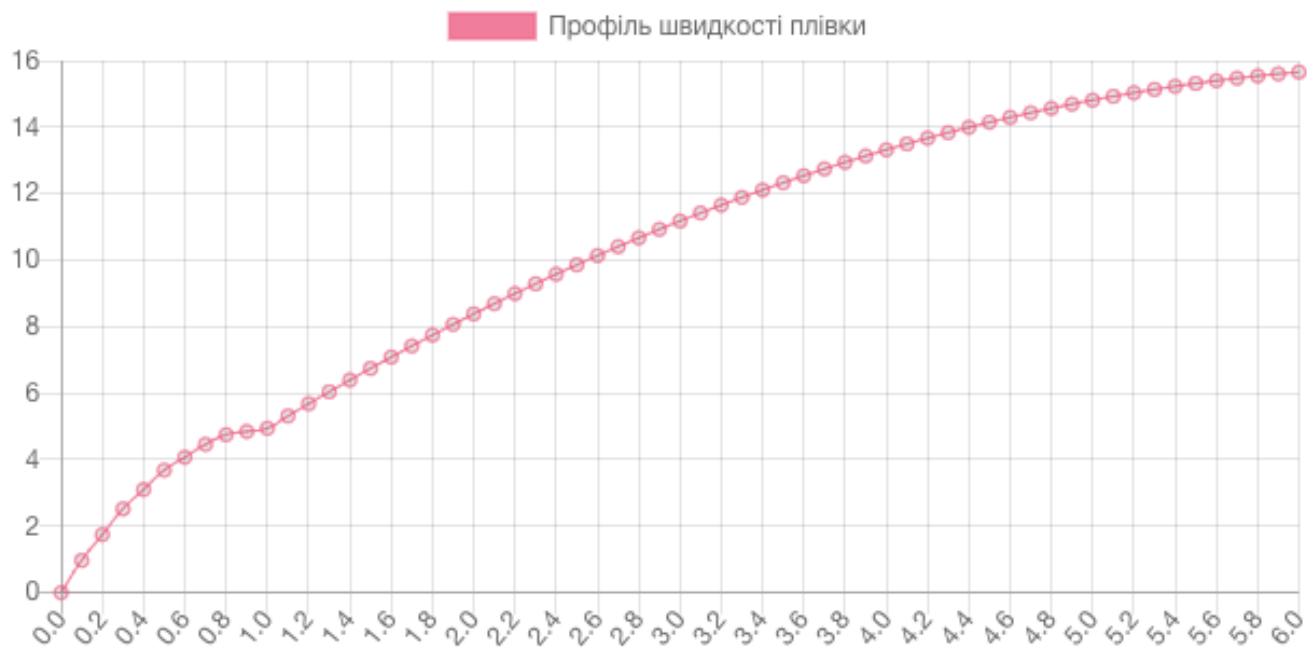


Рисунок А.2 – Профіль швидкості двошарової плівки нелінійно-в'язкої рідини по поверхні циліндру, при значенні параметру впливу газового потоку $Ge=0.5$ та $n=1/2$

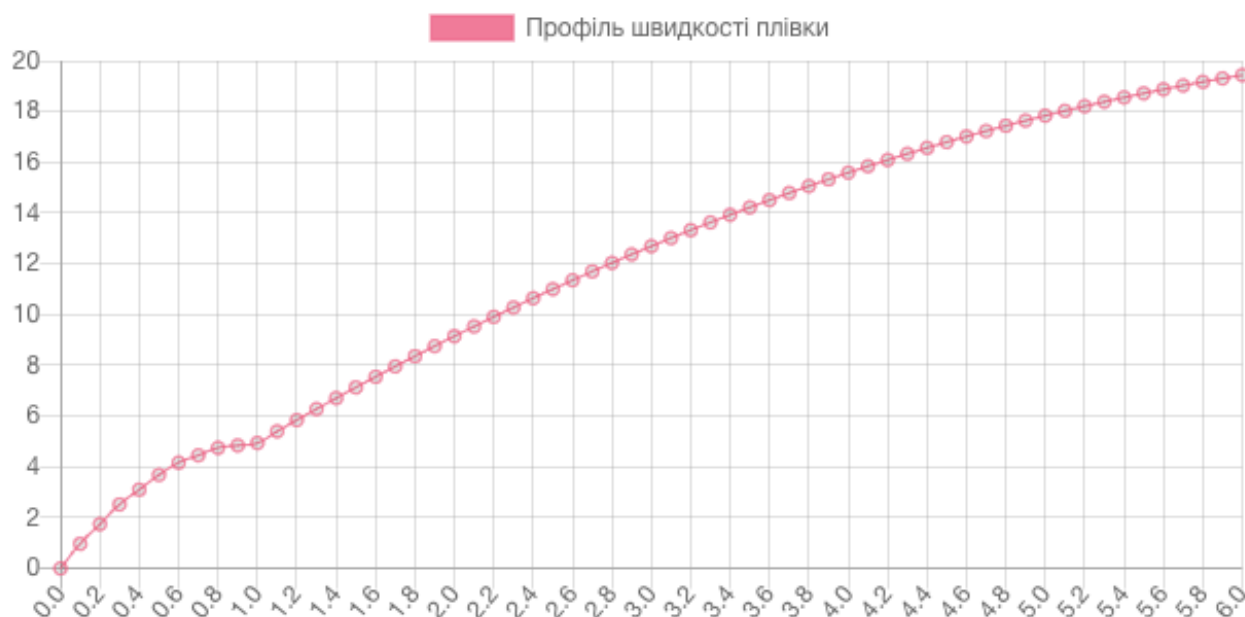


Рисунок А.3 – Профіль швидкості двошарової плівки нелінійно-в'язкої рідини по поверхні циліндру, при значенні параметру впливу газового потоку $Ge=1$ та $n=1/2$

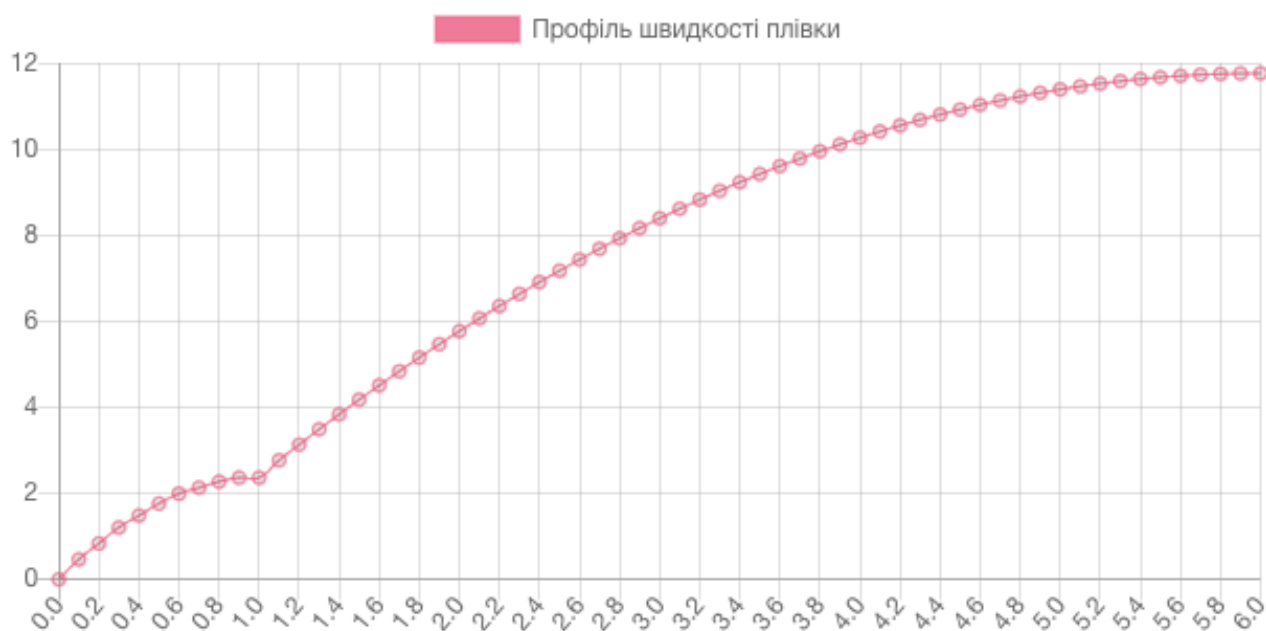


Рисунок А.4 – Профіль швидкості двошарової плівки нелінійно-в'язкої рідини по поверхні циліндру, при значенні параметру впливу газового потоку $Ge=0$ та $n=1/3$

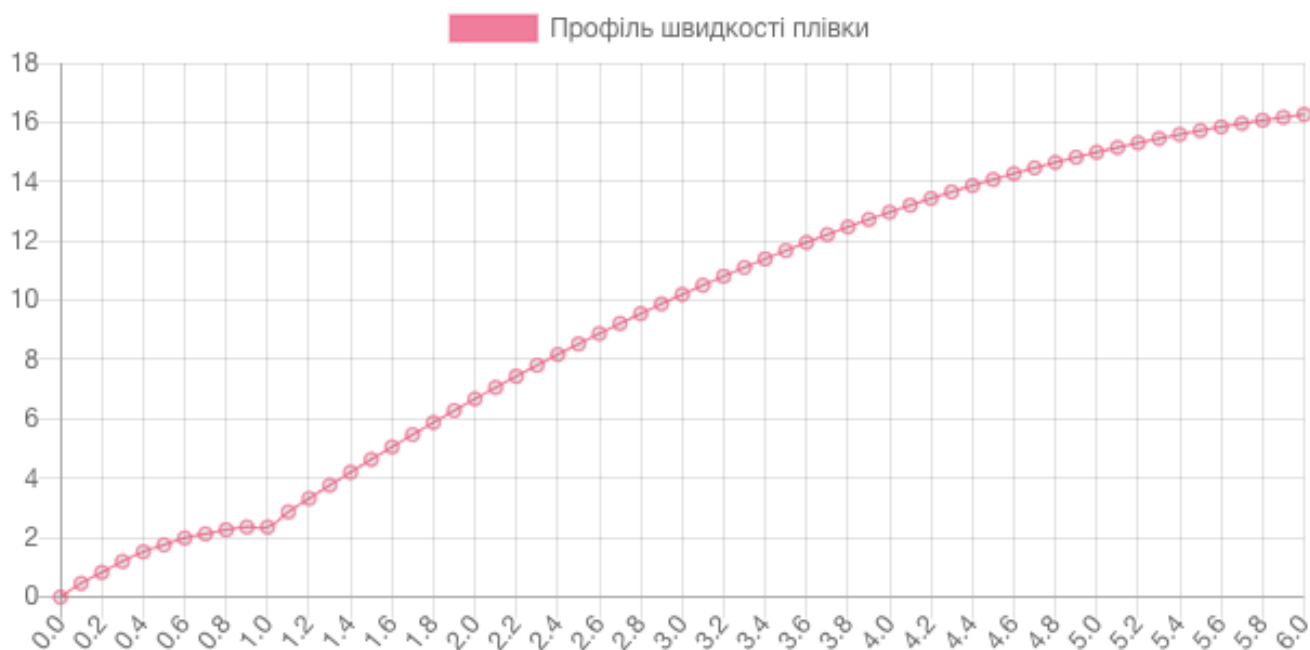


Рисунок А.5 – Профіль швидкості двошарової плівки нелінійно-в'язкої рідини по поверхні циліндру, при значенні параметру впливу газового потоку $Ge=0.5$ та $n=1/3$

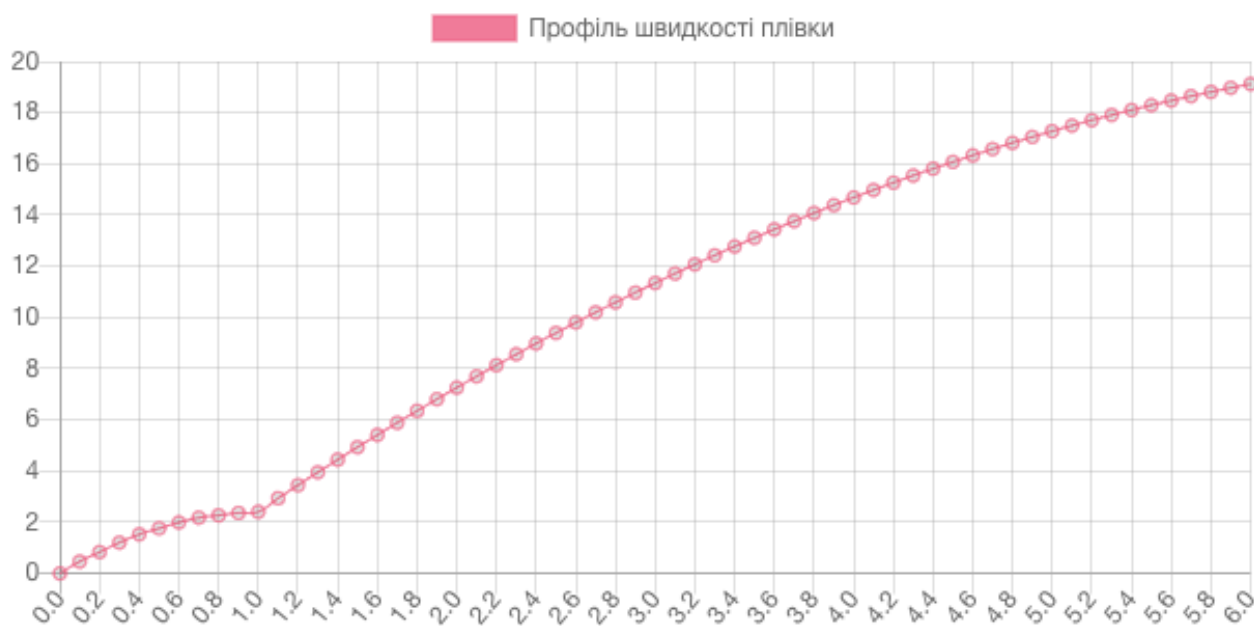


Рисунок А.6 – Профіль швидкості двошарової плівки нелінійно-в'язкої рідини по поверхні циліндру, при значенні параметру впливу газового потоку $Ge=1$ та $n=1/3$

ДОДАТОК Б

Лістинг програми

Функція розрахунку швидкостей течій плівок лінійної рідини по поверхні пластини та пошуку Ge оптимального:

```
export function calculateTwoPhaseSkin(g,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , p1, p2, v1, v2,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , Ge) {
  const yLength =  $\delta_1$  +  $\delta_2$ 
  v1 = v1 / Math.pow(10, 6)
  v2 = v2 / Math.pow(10, 6)
   $\mu_1$  =  $\mu_1$  / Math.pow(10, 6)
   $\mu_2$  =  $\mu_2$  / Math.pow(10, 6)
  //g – прискорення вільного падіння
  //p – густина рідини;
  //v і  $\mu$  - кінематичний та динамічний коефіцієнти в'язкості;
  //Ge потік газу
  //δ ширина пленки
  //y- напруження тертя
  let speedArray = []
  let W1, W2;
  for (let y = 0; y < Number(yLength) + 1; y = y + 0.1) {
    W1 = (g / v1) * (-(Math.pow(y, 2) / 2) + ( $\delta_1$  + ((p2 *  $\delta_2$  / p1) * (1 - Ge))) *
y).toFixed(2)
    W2 = ((g / v2) * (-(Math.pow(y, 2) / 2) + ( $\delta_1$  +  $\delta_2$  * (1 - Ge) * y + ( $\delta_1$  *  $\delta_1$  / 2)
* ((v2 / v1) - 1) +  $\delta_1$  *  $\delta_2$  * (( $\mu_2$  /  $\mu_1$ ) - 1) * (1 - Ge))))).toFixed(2)
    speedArray.push({ y, W1: parseFloat(W1) / Math.pow(10, 6), W2:
parseFloat(W2) / Math.pow(10, 6) })
  }
  //оптимальна дія на робочу плівку
  let q = ( $\delta_1$  *  $\mu_2$ ) / ( $\delta_2$  *  $\mu_1$ )
```

```

let r = (1 / 2) * (v1 / v2) * (δ1 / δ2) * (δ1 / δ2)
let GeOpt = Math.sqrt((2 + 6 * (q + r) + Math.sqrt(1 + 12 * q * q + 6 * (1 + 6 * r) *
(q + r)))) / (3 + 6 * q))
//максимальне та середнє значення швидкості
let v = v2 / v1
let δ = δ2 / δ1
let p = p2 / p1
let Wsr = (1 / 3) - (Ge / 2) + ((v * Math.pow(δ, 2)) / 2) + (δ * v * p * (1 - Ge));
let Wmax = ((1 / 2) * Math.pow((1 - Ge), 2)) + ((v * Math.pow(δ, 2)) / 2) + (δ * v
* p * (1 - Ge));
let calculatedInfo = {
    speedArray, GeOpt
}
return calculatedInfo
}

```

Функція розрахунку швидкостей течій плівок лінійної рідини по поверхні циліндру та пошуку Ge оптимального:

```
function Dydx(expression, a) {
    if (!expression) {
        return 0
    }
    var x, y, dx;
    dx = 0.000025
    x = a - dx;
    y = eval(expression)
    x = a + dx
    return ((eval(expression) - y) / 2 / dx)
}
function extremum(expression, a, b, d) {
    if (!d) d = 0.001
    var x, y1, y2, i
    x = a
    y1 = Dydx(expression, a)
    i = 1
    while ((x <= b) && (i <= 1000)) {
        y2 = Dydx(expression, x + d)
        if ((y1 < 0) && (y2 >= 0) || (y2 < 0) && (y1 >= 0)) {
            x = x + d * Math.abs(y1) / (Math.abs(y1) + Math.abs(y2))
            return new Array(x, eval(expression))
        }
        x += d
        y1 = y2
        i++
    }
    return new Array()
}
```

```

export function calculateSimpleCylinder(inner_skin, rLength,  $\delta 1$ ,  $\delta 2$ , p1, p2, Re1,
Re2, Fr, Ge) {
    //y - радіус, r0 - стартова точка відліку
    let r0 = 0.9999, speedArray = [], R_spec, R1, R2, R, W1, W2, W_1, lnR, lnR1,
    ReFr1, ReFr2, R_spec2lnRR1
    let K1, K2, K3, K4, K5, GeOpt
    for (let y = 0; y < Number(rLength) + 1; y = y + 0.1) {
        R = y / r0
        R1 = Math.abs(inner_skin ? 1 - ( $\delta 1$  / r0) : 1 + ( $\delta 1$  / r0))
        R2 = Math.abs(inner_skin ? 1 - (( $\delta 1$  +  $\delta 2$ ) / r0) : 1 + (( $\delta 1$  +  $\delta 2$ ) / r0))
        ReFr1 = Re1 / (2 * Fr)
        ReFr2 = Re2 / (2 * Fr)
        R_spec = Math.sqrt(Math.pow(R2, 2) + 2 * Ge * R2 * ( $\delta 2$  / r0))
        W_1 = (p2 / p1) * (-Math.pow(R1, 2) + Math.pow(R_spec, 2))
        lnR = Math.log(R)
        lnR1 = Math.log(R1)
        R_spec2lnRR1 = Math.pow(R_spec, 2) * Math.log(R / R1)
        W1 = ReFr1 * (((1 - Math.pow(R, 2)) / 2) + (Math.pow(R1, 2) + W_1) * lnR)
        W2 = ReFr2 * (((Math.pow(R1, 2) + Math.pow(R, 2)) / 2) + R_spec2lnRR1) +
        ReFr1 * (((1 - Math.pow(R, 2)) / 2) + (Math.pow(R1, 2) + W_1) * lnR1)
        speedArray.push({ y, W1: parseFloat(W1), W2: parseFloat(W2) })
        //розрахунок оптимального значення Ge
        K1 = Re2 / (Fr * 4)
        K2 = -(Re2 / (Fr * 4)) * (1 + 2 * Math.log(R1)) + (Re1 * p2) / (2 * Fr * p1) *
        Math.log(R1)
        K3 = (Re1 / (2 * Fr)) * (((1 - Math.pow(R1, 2)) / 2) + Math.pow(R1, 2) * (1 - p2
        / p1) * Math.log(R1)) + (Re2 / (4 * Fr)) * Math.pow(R1, 2)
        K4 = (Re2 / (2 * Fr)) * (((Math.pow(R2, 2) * Math.log(R2) - Math.pow(R1, 2) *
        Math.log(R1)) / (Math.pow(R2, 2) - Math.pow(R1, 2))) - Math.log(R1) - 1 / 2) +
        Math.log(R1) * (Re1 / (2 * Fr))
    }
}

```

```

    let k5_second = (Re1 / (2 * Fr)) * ((1 - Math.pow(R1, 2) / 2) + Math.pow(R1, 2)
* (1 - p2 / p1) * Math.log(R1))
    K5 = (Re2 / (2 * Fr)) * (-(Math.pow(R1, 2) - Math.pow(R2, 2)) / 4) + k5_second
    let RR2 = Math.pow(R2, 2) + 2 * 0.4 *  $\delta_2$  * R2;
    let U2_max = K1 * RR2 * Math.log(RR2) + K2 * RR2 + K3;
    let DU2_max = K1 * (Math.log(RR2) + 1) + K2;
    let U2_sr = K4 * RR2 + K5;
    let DU2_sr = K4;
    let U2_maxsr = U2_max / U2_sr;
    let DU2_maxsr = DU2_max * U2_sr - U2_max * DU2_sr;
    let extremumValue = (extremum(`${DU2_maxsr}`), -1, 1)
    GeOpt = (extremumValue - Math.pow(R2, 2)) / (2 *  $\delta_2$  * R2);
  }
  let calculatedInfo = {
    speedArray, GeOpt
  }
  return calculatedInfo
}

```

Функція розрахунку швидкостей течій плівок нелінійно-в'язкої рідини по поверхні циліндру:

```

export function calculateHardCylinder(inner_skin, rLength,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , p1, p2, Re1, Re2,
Fr, Ge) {
  //n=1/3
  //y - радіус, r0 - стартова точка відліку
  let r0 = 0.9999, speedArray = [], W1, W2, c_1, c_2, c_3, c_4, R, result1, result2;
  const a = (Re2 / Math.pow(Fr, 2))
  for (let y = 0; y < Number(rLength) + 1; y = y + 0.1) {
    R = y / r0
    c_2 = Ge * ( $\delta_2$  / r0) * (Re2 / Math.pow(Fr, 2));
    c_1 = (p1 / p2) * (Re1 / Re2) * c_2;

```

```

    c_3 = 1 - 8 * a - (12 * c_1 - 24 * Math.pow(a, 2)) - (96 * c_1 * a - 32 *
Math.pow(a, 3)) - 96 * Math.pow(c_1, 2) * a + 16 * Math.pow(c_1, 3);

    c_4 = Math.log(R) * (96 * c_1 * Math.pow(a, 2) - 48 * Math.pow(c_1, 2) - 96 *
c_2 * Math.pow(a, 2) + 48 * Math.pow(c_2, 2)) + 12 * Math.pow(R, 2) * (c_1 - c_2) + 96
* R * a * (c_1 - c_2) + ((96 * a) / R) * (Math.pow(c_1, 2) - Math.pow(c_2, 2)) - (16 /
Math.pow(R, 2)) * (Math.pow(c_1, 3) - Math.pow(c_2, 3))

    W1 = ((96 * c_1 * Math.pow(a, 2) - 48 * Math.pow(c_1, 2)) * Math.log(R) -
Math.pow(R, 4) + 8 * a * Math.pow(R, 3) + (12 * c_1 - 24 * Math.pow(a, 3)) *
Math.pow(R, 2) + (96 * c_1 * a - 32 * Math.pow(a, 3)) * R + ((96 * Math.pow(c_1, 2) * a)
/ R) + 16 * Math.pow(c_1, 3) / Math.pow(R, 2)) / 32 + c_3;

    W2 = ((96 * c_2 * Math.pow(a, 2) - 48 * Math.pow(c_2, 2)) * Math.log(R) -
Math.pow(R, 4) + 8 * a * Math.pow(R, 3) + (12 * c_2 - 24 * Math.pow(a, 3)) *
Math.pow(R, 2) + (96 * c_1 * a - 32 * Math.pow(a, 3)) * R + ((96 * Math.pow(c_2, 2) * a)
/ R) + 16 * Math.pow(c_2, 3) / Math.pow(R, 2)) / 32 + c_4;

    if (W1 < 0 || W1 === NaN) {
        result1 = 0;
    }
    else {
        result1 = W1 * y;
    }

    speedArray.push({ y, W1: parseFloat(result1), W2: parseFloat(Math.abs(W2))
}))

}

let calculatedInfo = {
    speedArray
}

return calculatedInfo
}

```