2547 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+$

$+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\ldots <$ $\boxed{S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}}$

$< \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right)=$

$=\left(\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{2}{2^2}\right)+\ldots+\left(\frac{2}{2^n}\right)$

$|S_{n+p}-S_n|=\frac{2}{2^{n+1}}+\frac{2}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{2}{2^{n+p}}=$

$=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+p-1}}=$

$=\frac{\frac{1}{2^n}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{p}\right)}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon$

$\left(\frac{1}{2}\right)^p \to <1$

сокр.

$1=\varepsilon 2^{N-1}$

$N-1=\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

$N=\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+1$

2572.2 $\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \dots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \dots$

Указание: $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ $(n = 2, 3, \dots)$

$$a_n = \frac{\cos x^n}{n^2} < \frac{\cos x^n}{n(n-1)} = \frac{\cos x^n}{n-1} - \frac{\cos x^n}{n}$$

$$|S_{n+p} - S_n| = \frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{\cos x^{n+2}}{(n+2)^2} + \dots +$$

$$+ \frac{\cos x^{n+p}}{(n+p)^2} < \frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)n} + \frac{\cos x^{n+2}}{(n+2)(n+1)} + \dots +$$

$$+ \frac{\cos x^{n+p}}{(n+p)(n+p-1)} = \frac{\cos x^{n+1}}{n} - \frac{\cos x^{n+1}}{n+1} +$$

$$+ \frac{\cos x^{n+2}}{n+1} - \frac{\cos x^{n+2}}{n+2} + \dots + \frac{\cos x^{n+p}}{n+p-1} -$$

$$- \frac{\cos x^{n+p}}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{бесконеч. мал.}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{p}\right)}_{\text{огранич.}}$$

$\Downarrow$

сходится

<u>2593</u> Доказать, что если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$ то существует

также $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

$\{b_n\}$ $\quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_k + b_{k+1} + \ldots + b_{k+n}}{n} = b$$

Что значит, что b является пределом последовательности:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon): \quad n > N(\varepsilon)$

$$|b_n - b| < \varepsilon$$

$b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$, в т.ч. для $n = k, k+1, \ldots, k+n$

$$\frac{n(b-\varepsilon)}{n} < \frac{b_k + b_{k+1} + \ldots + b_{k+n}}{n} < \frac{n(b+\varepsilon)}{n}$$

Доказать, что если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$,

то тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} (\ln a_{n+1} - \ln a_n) = \ln q$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln a_n}{n}\right) = \ln q$$

$$\frac{b_1 + \ldots + b_n}{n} = \frac{-\ln a_1 + \ln a_{n+1}}{n} \to \ln q$$

Если работает Даламбер, то работает и Коши.

Наоборот не работает. Пример:

$$a_n = \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}; \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}} = \lim \frac{\sqrt[n]{3 + (-1)^n}}{2} = \frac{1}{2}$$

чёт. $\lim \frac{\sqrt[n]{4}}{2} = \frac{1}{2}$

нечёт $\lim \frac{\sqrt[n]{2}}{2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2} \cdot \frac{2^n}{3 + (-1)^{n+1}} =$$

чёт. $\lim \frac{4}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$

нег. $\lim \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Пр. Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad a_n \geq 0$$

ряд сходится, если $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2661 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$= a_n \qquad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad \forall n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ — расходится}$$

Нет абсолютной сходимости, только условная

Функциональные ряды

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ — функциональный ряд; $x \in R$

при каждом фиксированном x → числовой ряд

Множество x таких, что ряд сходится называется областью сходимости.

* Определить область сходимости:

① $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$

↳ Рассмотрим с помощью признака Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{-nx}} = \lim \frac{1}{e^{x}} = q$$

По Коши:

при $n > 0 \Rightarrow q < 1$ – сходится

при $n < 0 \Rightarrow q > 1$ – расходится

По самому виду ряда:

при $n = 0 \Rightarrow 1$ – расходится

ряд из единичек

Ответ: Область сходимости: $x \in (0, \infty)$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{|x|}\right)^{n}$

При $x > 0$: $a_n = \frac{1}{n}$ → гармонический ряд (расходится)

При $x < 0$: $a_n = \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n \frac{1}{n}$

сход. по признаку Лейбница

При $x = 0$: общий член не определён

Ответ: обл. сход.: $x \in (-\infty; 0)$

2717

$$\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

Абсолютная сходимость:

→ по Даламберу проверим сходимость (абс.):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{2n-1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|} =$$

$$= \left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1 \to$$ абсолютная сходимость при $x > 0$, т.е.

область абс. сход.: $x \in (0; \infty)$

$$-1 < \frac{1-x}{1+x} < 1$$

$$-1-x < 1-x < 1+x$$

$$-1 < 1 < 1+2x$$

$$0 < 2x \Rightarrow x > 0$$

При $x = 0$ сходимость будет условная по признаку Лейбница

При $x < 0$: проверим необходимое условие сходимости (оно будет нарушено) $(\lim_{k\to\infty} a_k = 0)$, в данном случае $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$.

Ответ: абс. сход.: $x \in (0; \infty)$,
усл. сход.: $x \in [0; \infty)$.

2719 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$

__Абсолютная сходимость (по Д'Аламберу):__

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\left(\dfrac{2|x|}{1+x^2}\right)^{n+1}}{\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\left(\dfrac{2|x|}{1+x^2}\right)^{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)\left(\frac{2|x|}{1+x^2}\right) = \frac{2|x|}{1+x^2}$$

$$\frac{2|x|}{1+x^2} < 1$$

$$2|x| < 1+x^2$$

$$x^2+1-2|x| > 0$$

$$(|x|-1)^2 > 0$$

$$|x|-1 > 0$$

$$|x| > 1$$

При $x \neq \pm 1$ у нас абсолютная область сходимости.

__Обл. абс. сход.:__ $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$

При $x = 1$:

$$\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n = 1,$$

При $x = -1$ выполн. пр. Лейбница, всё сх.

Получаем: $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Необходимое условие сходимости выполняется, упираться к расходимости сразу не получилось. Придётся сходимость искать дальше (Д'Аламбер, Коши, сравнение, интегральный признак)...

Равномерная и поточечная сходимость

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$$

послед. $f_n(x)$ равномерно сходится при $n\to\infty$, **если**:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \underline{\forall x} \ \exists N(\varepsilon): \forall n > N(\varepsilon)$$
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

поточечная сход. = обычная сход.

Теорема (она же признак) Вейерштрасса (она же мажорантный признак сходимости)

Если для функционального ряда $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)}_{\text{ряд (1)}}$ $\exists$ сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$

$$|a_n(x)| \le C_n \quad \forall n.$$

Тогда ряд (1) – ряд, сходящийся абсолютно равномерно.

Зачем это нужно? → нужна равномерная сходимость ряда

$$\lim_{x\to b}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right) \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to b} a_n(x)$$

$$\left(\sum\right) \overset{?}{=} \sum(\,)$$

---

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^n}$, $x \in R$

$$\left|\frac{\sin nx}{n^n}\right| \le \frac{1}{n^n}$$ → получим $c_n = \frac{1}{n^n}$

смотрим сходимость ряда (тут удобно по Коши):

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$; $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} = 0$;

$0 < 1 \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится по Коши $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ исходный ряд сходится по теореме Вейерштрасса

2774 (а, д)

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ $\boxed{-\infty < x < +\infty}$

т.к. степень 2 > 1.

$\frac{1}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ – ряд сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. Вейерштрасса исходный ряд тоже сходится

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n}} (x^n + x^{-n})$

$\frac{n^2}{\sqrt{n}} \cdot (x^n + x^{-n}) \leq$

②
2718
2721
2774
(б, л)
(д)

2718 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$

Проверим абсолютную сходимость (с помощью Д'Аламбера):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{n+1}{n+1+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{n+1}\right|}{\left|\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{n}\right|} =$$

$$= \left|\frac{x}{2x+1}\right| < 1$$

Абс. сход. при $x > -\frac{1}{3}$,

т.е. область абс. сход: $x \in (-\frac{1}{3}, \infty)$

$$-1 < \frac{x}{2x+1} < 1$$

$$-2x - 1 < x < 2x+1$$

$$-1 < 3x < 4x+1$$

$$\begin{cases} -1 < 3x \\ 3x < 4x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ x > -1 \end{cases}$$

При $x = -\frac{1}{3}$

2774 (в)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \quad |a_n(x)| < c_n$$

$$\forall x, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \text{сходится}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) - \text{равн. абс. сход.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2} \le \frac{1}{2n^2} - \text{сход.}$$

(л)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \quad 0 \le x < +\infty;$$

$$a_n = x^2 e^{-nx}, \quad 0 \le x < \infty$$

$$a_n = \frac{x^2}{e^{nx}} < \frac{x^2}{\frac{n^2x^2}{2}} = \frac{2}{n^2} - \text{сход.}$$

$$e^{nx} = 1 + nx + \frac{n^2x^2}{2} + \dots$$

$$e^{nx} > \frac{n^2x^2}{2}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

Нужно, чтобы

→ ряд сходился равномерно

→ существует предел общего члена ряда

$$\lim_{x \to b} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \to b} a_n(x)\right)$$

необх. р. с. $\sum a_n$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$$

необх.

равн. сход.

$\sum a_n'$

№ 1

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}, \quad \forall x \in R$$

$$\left| \frac{\sin nx}{n^4} \right| \le \frac{1}{n^4}$$

$\sum \frac{1}{n^4}$ сход-ся $\Rightarrow \sum \frac{\sin nx}{n^4}$ равн. абс. сход-ся

$$\int_0^a f(x)\,dx = \sum \int_0^a \frac{\sin nx}{n^4}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos na}{n^5}$$

$$\int_0^a \frac{\sin nx}{n^4}\,dx = \frac{1}{n^5}(-\cos nx)\Big|_0^a =$$

$$= \frac{1}{n^5}(-\cos na + \cos 0) = \frac{1}{n^5}(1 - \cos na)$$

№ 2

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n \pi x)}{2^n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left|\frac{\sin(2^n \pi x)}{2^n}\right| \le \frac{1}{2^n}$$ $\Rightarrow$ исходный ряд равномерно сходится

$$\frac{d a_n}{dx} = \frac{\cos(2^n \pi x)\, 2^n \pi}{2^n} = \pi \cos(2^n \pi x)$$

общий член предела не имеет, поэтому, несмотря на равн. сход., $f(x)$ нельзя дифференцировать ни в одной точке

№ 3

$$\lim_{x \to +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} =$$

$$\left|\frac{1}{2^n n^x}\right| \le \frac{1}{2^n}$$

$\sum \frac{1}{2^n}$; общий член ряда $= \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2^n}$ сход. $\Rightarrow \frac{1}{2^n n^x}$ сход.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lim \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$