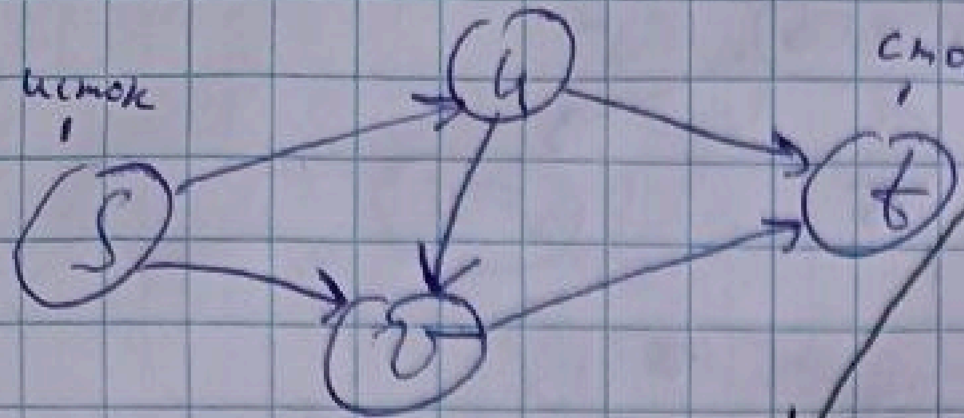
Потоки и разрезы

18-ого мая
II-ая к/р



Потоки

Граф называется **сетью**, если в ней есть один источник и один сток.

! Поток в графе — это распределение некоторого количества ресурса (например, жидкости или информации) по рёбрам графа. Каждое ребро имеет определённую пропускную способность, которая указывает, сколько ресурса может пройти через это ребро за единицу времени. Формально, поток в графе представляет собой функцию, которая сопоставляет каждому ребру графа неотрицательное число не превышающее его пропускной способности

$C : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Поток в сети — это функция f:

$f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

(1) $0 \leq f(v) \leq C(u)$

не превосходит пропускную способность

(2) $\forall v \in V \setminus \{s, t\}$

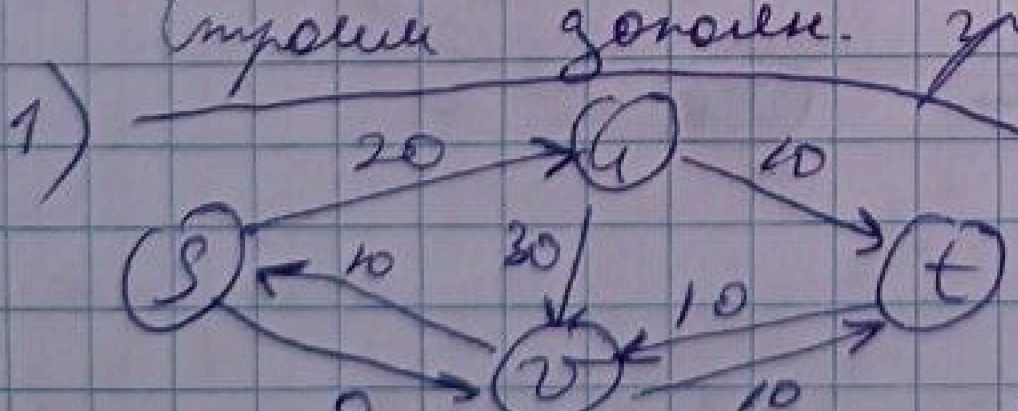
$$\sum_{e \in out(v)} f(e) = \sum_{e \in in(v)} f(e)$$

Как найти макс. ~~поток~~ пропускную способность в сети:

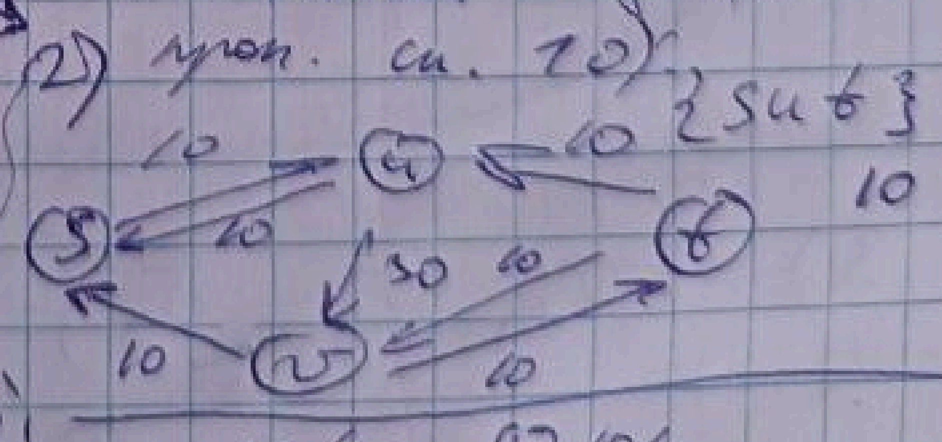
Пусть есть поток $\{s\ v\ t\}$ с проп. спос. 10

Строим дополн. граф:

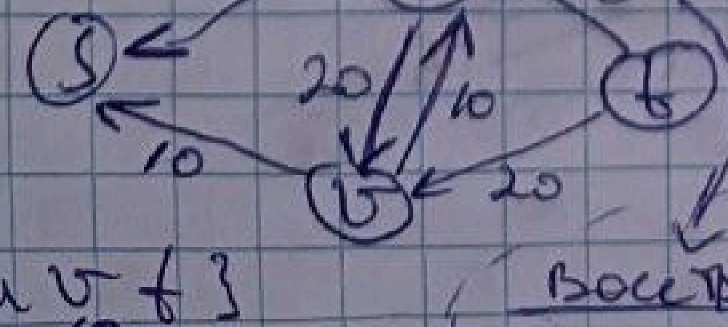
1)



2) Новый путь с проп. сп. 10): $\{s\ u\ t\}$



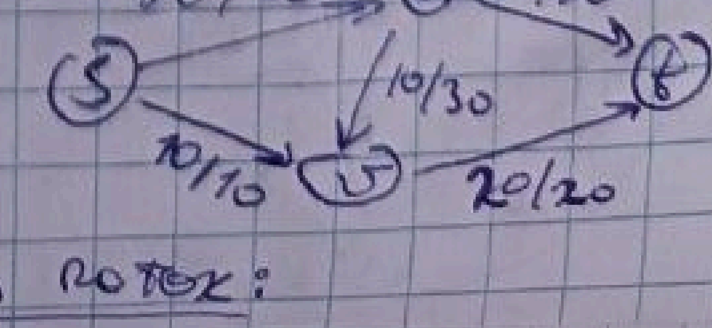
3)



$\{s\ u\ \underset{10}{v}\ t\}$

МАКС. ПОТОК ОБНАРУЖЕН

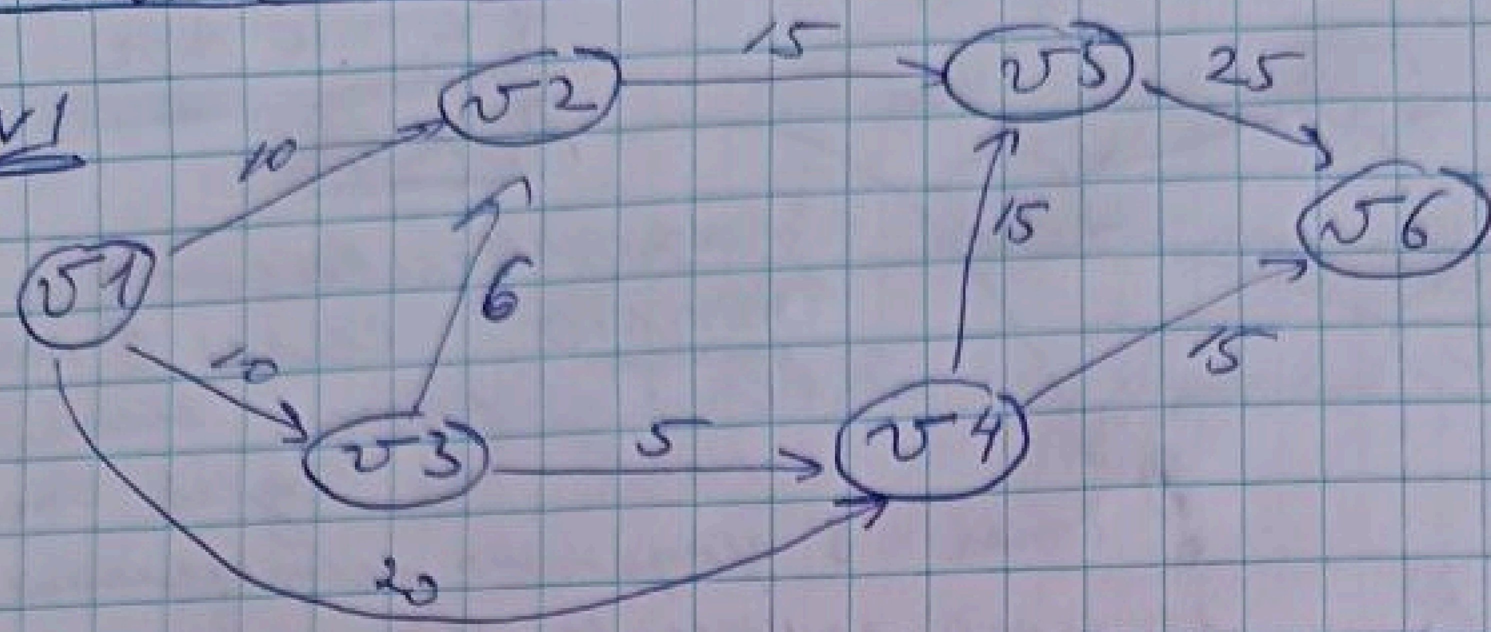
Восстановим поток:



Найти макс поток: (Алгоритм Форда — Фалкерсона

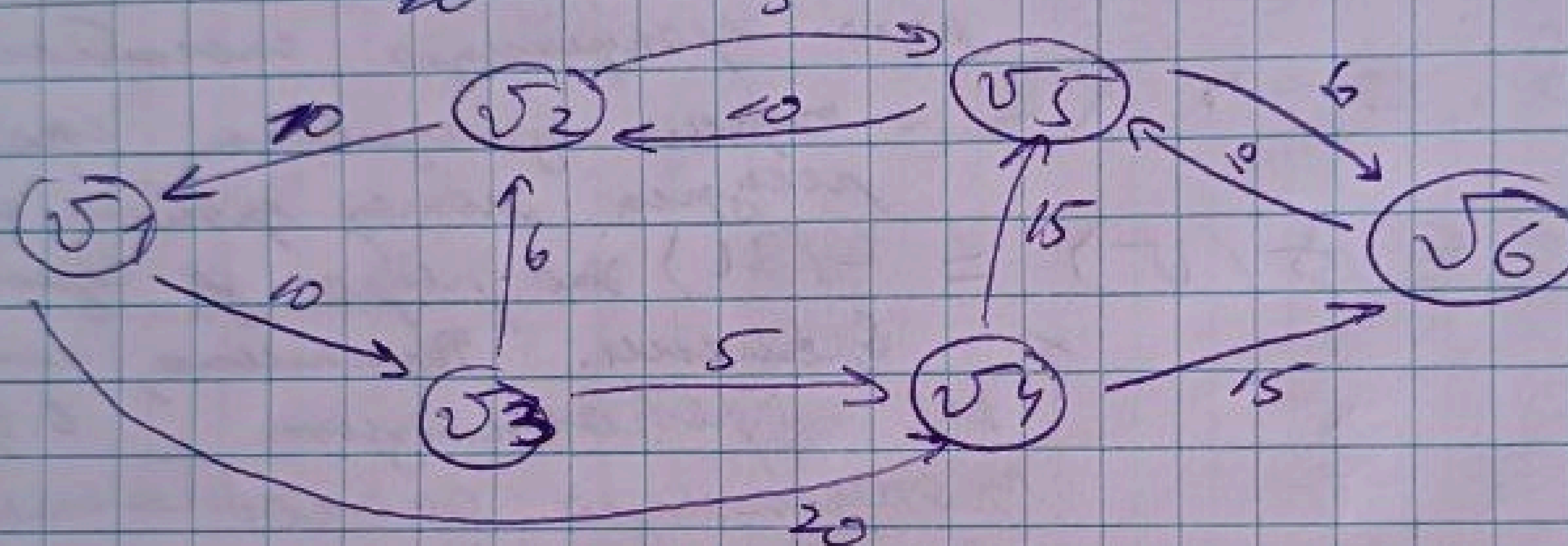
№1

а)

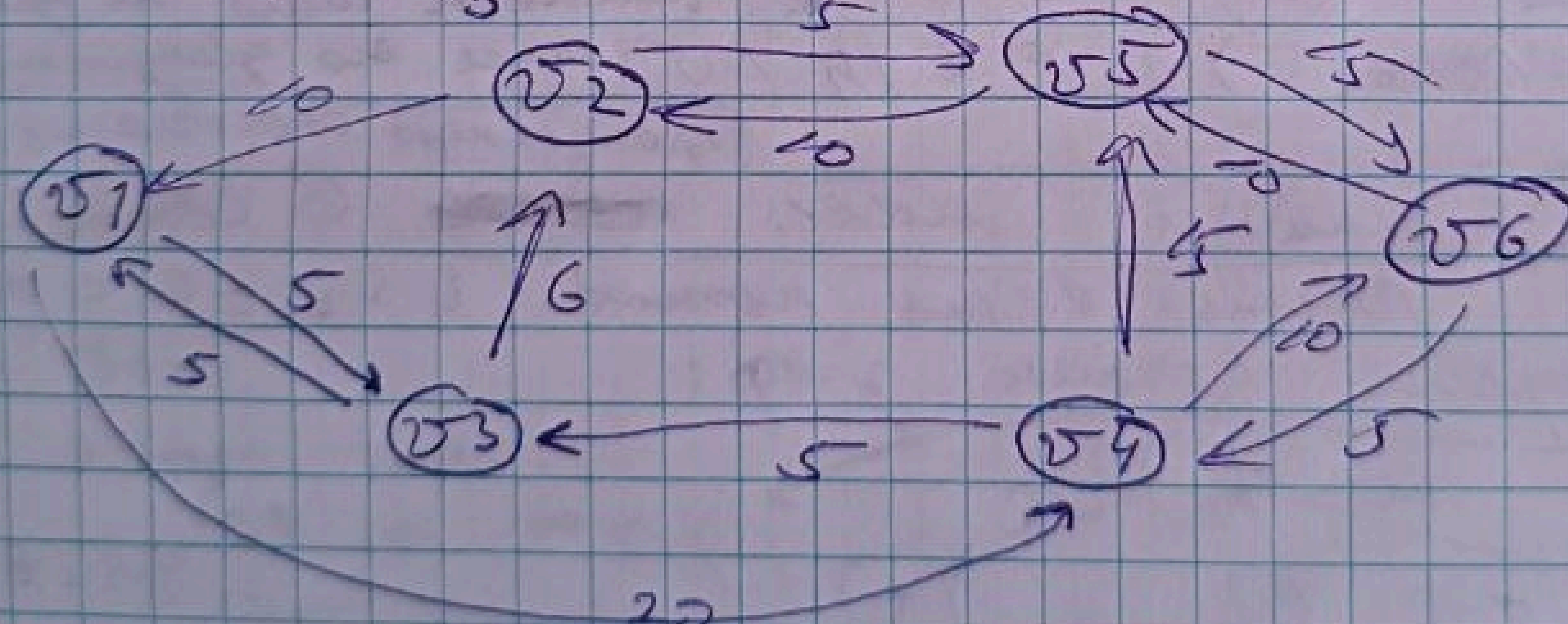


1) $\{v_1, v_2, v_5, v_6\}$

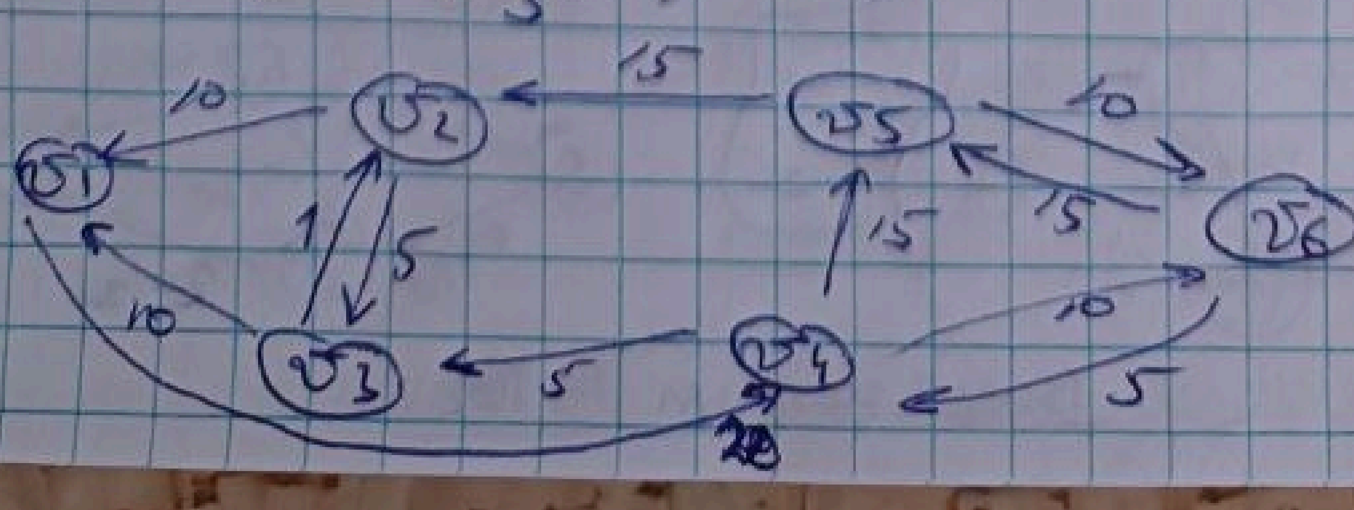
10



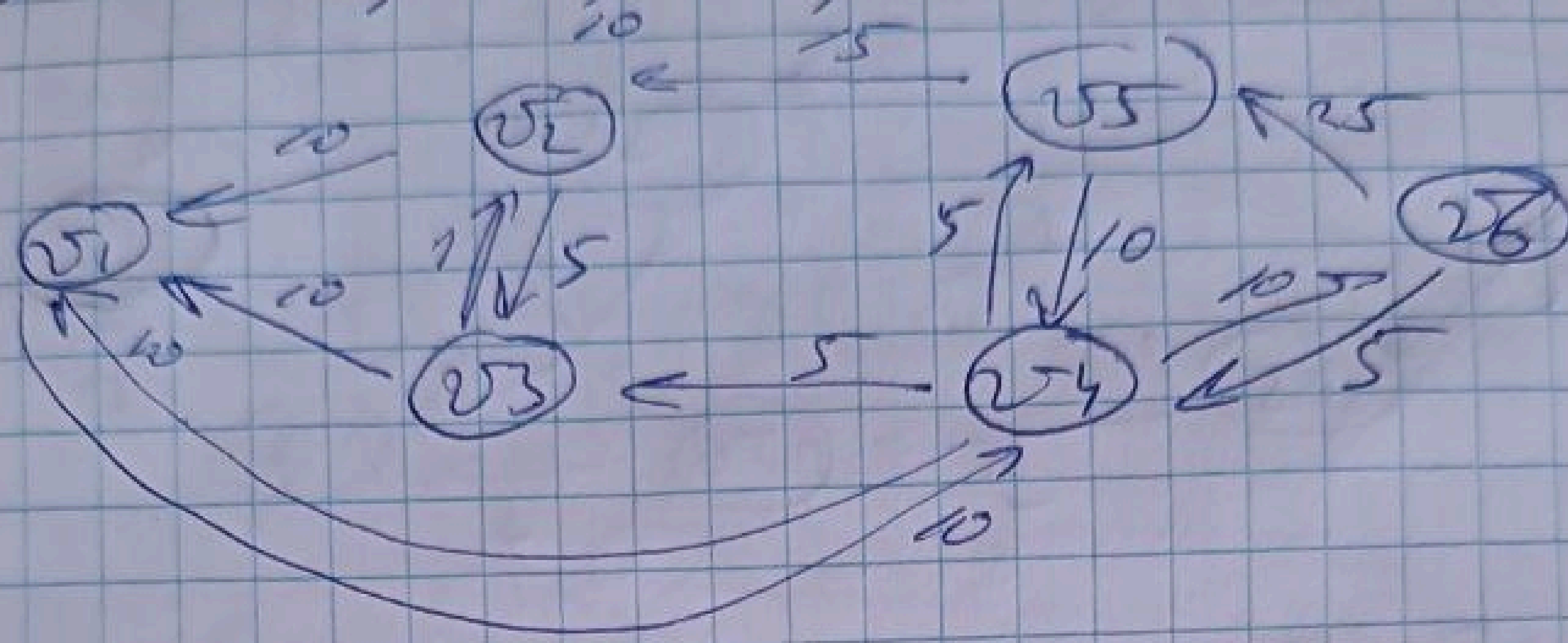
2) $\{v_1, v_3, v_4, v_6\}$,5



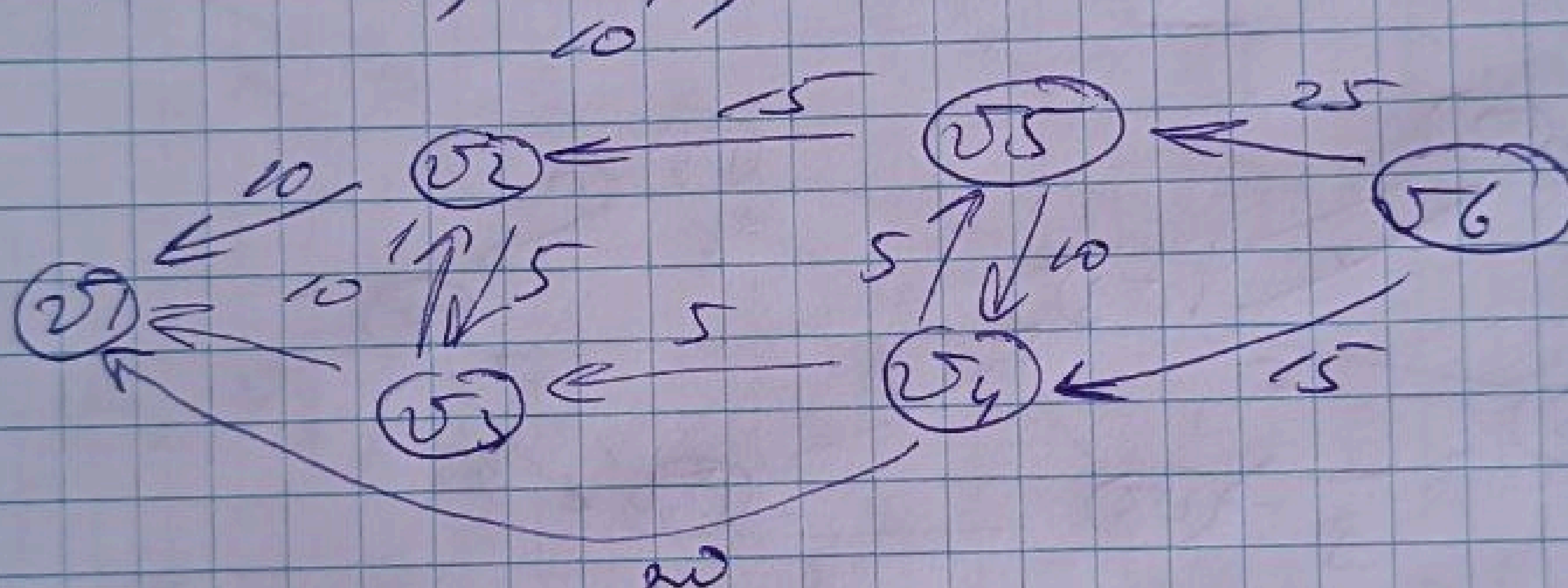
3) $\{v_1, v_3, v_2, v_5, v_6\}$ 5



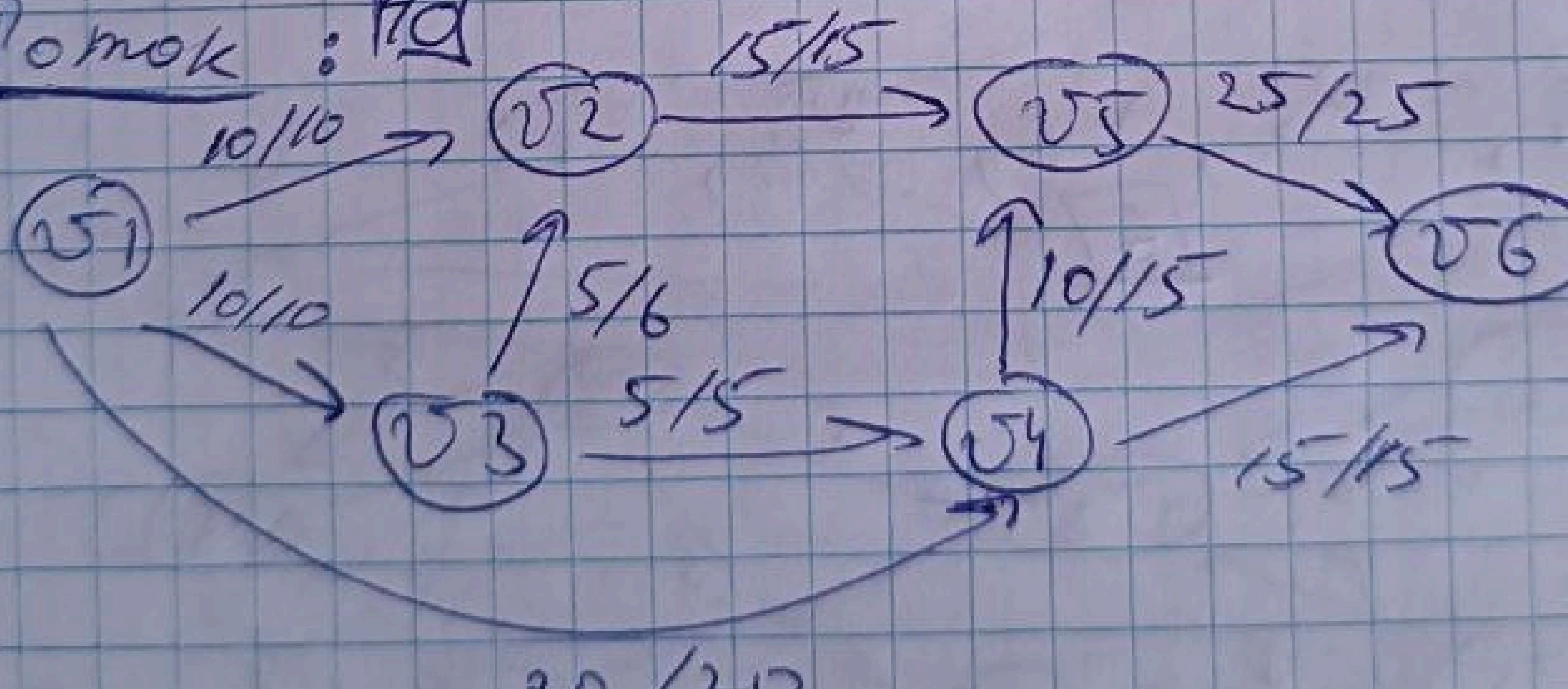
4) $\{v_1, v_4, v_5, v_6\}$



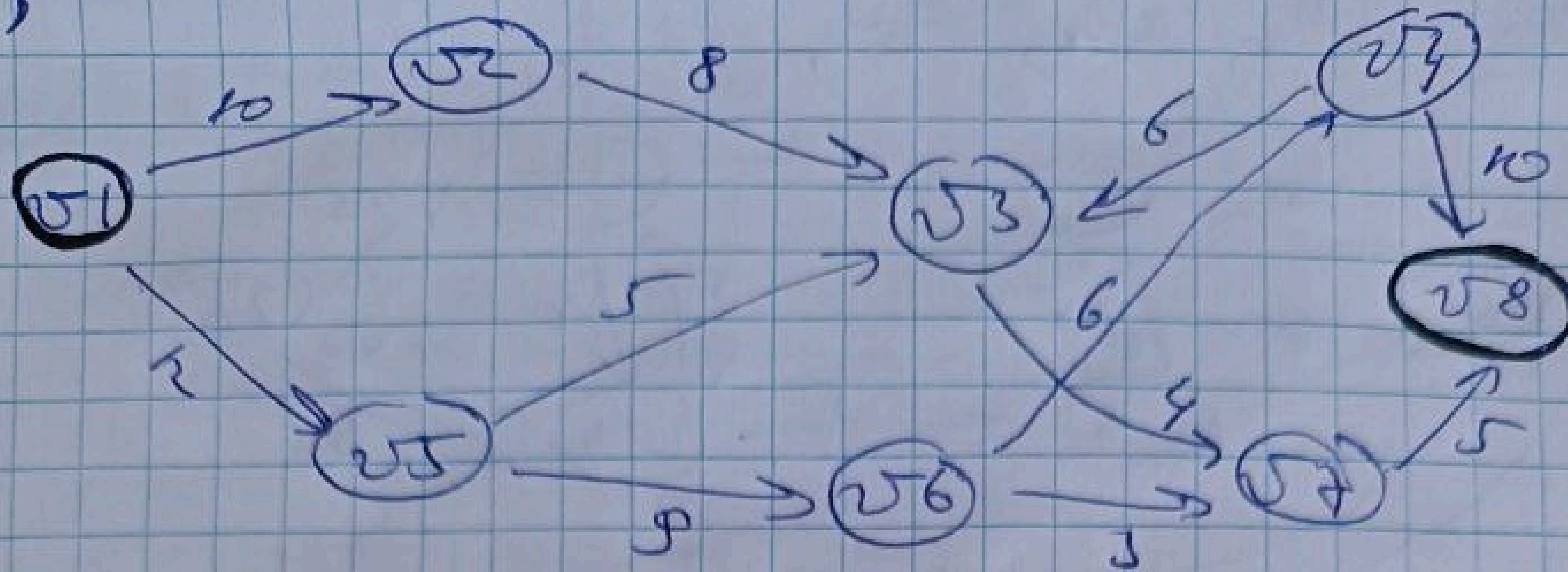
5) $\{v_1, v_4, v_6\}$



Макс. Поток: $\boxed{40}$

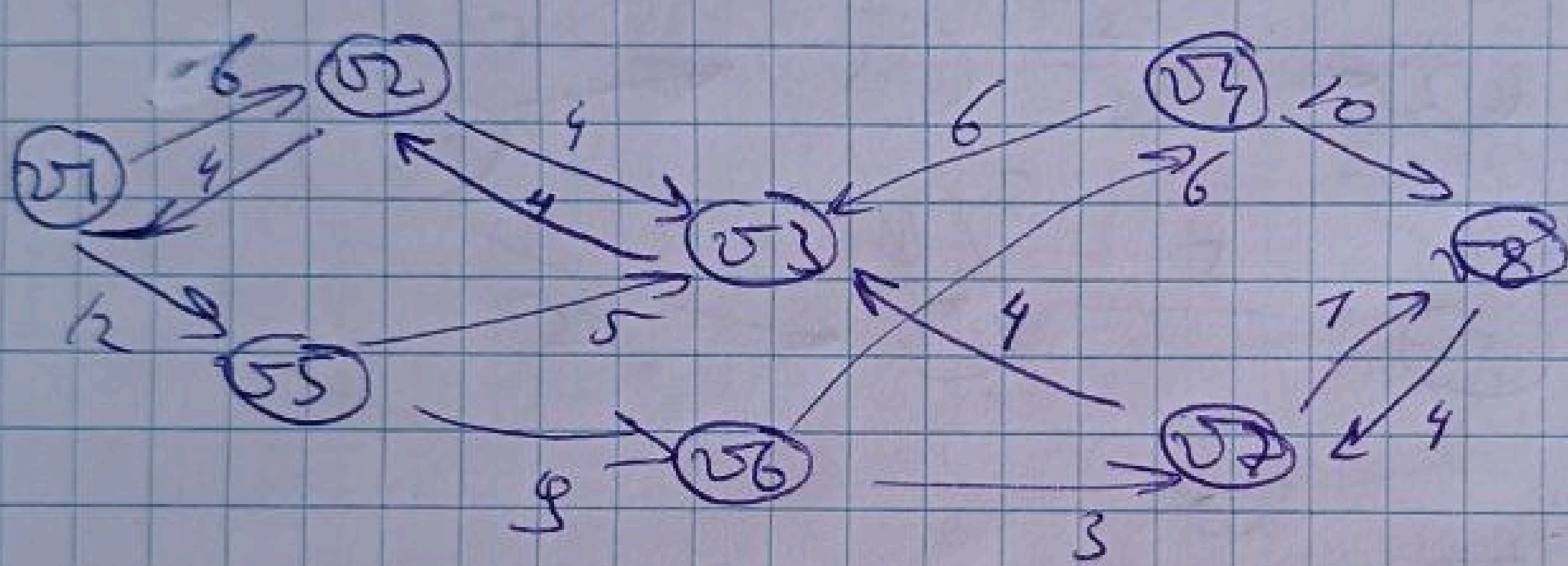


в)



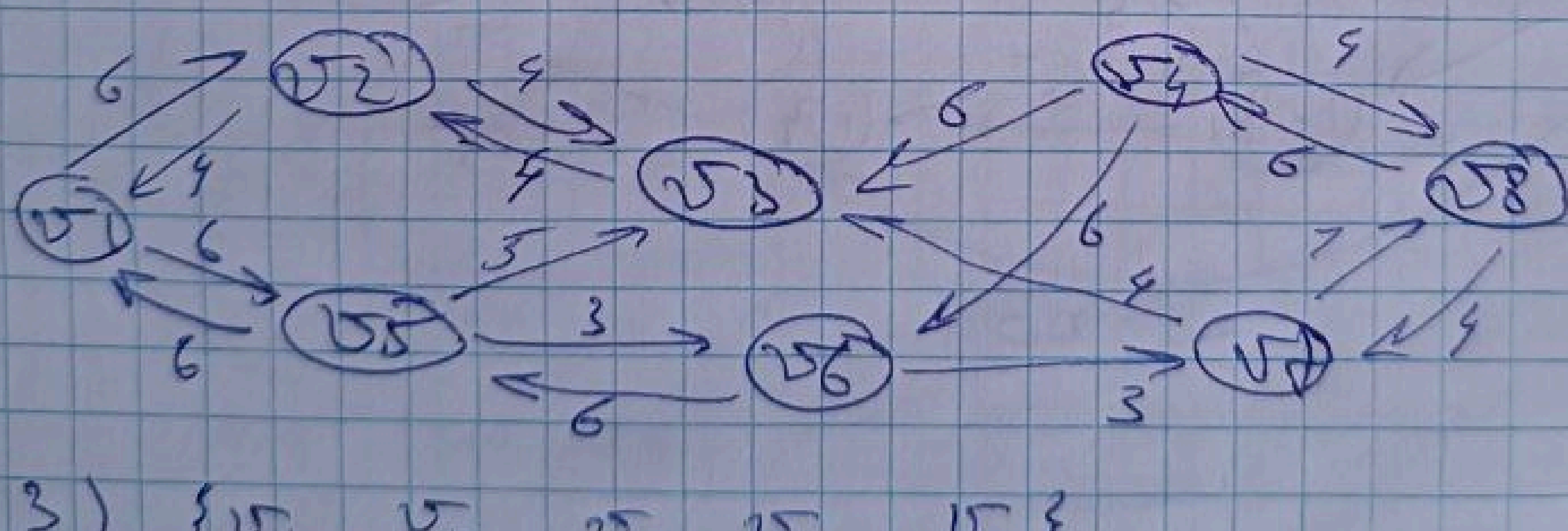
1) $\{v_1, v_2, v_3, v_7, v_8\}$

$\boxed{4}$



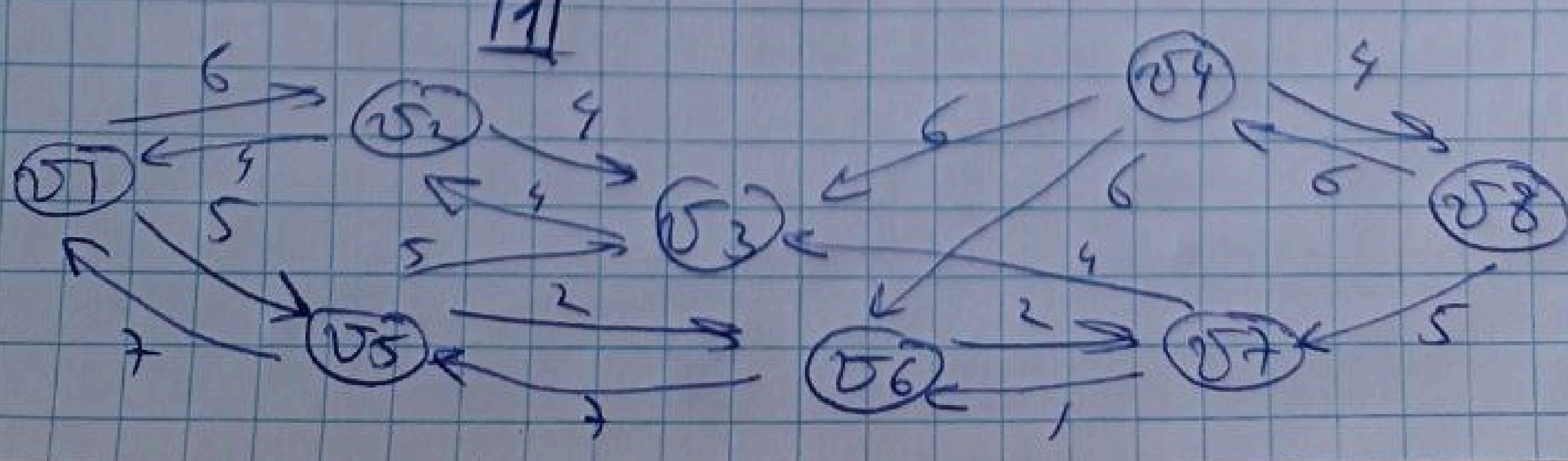
2) $\{v_1, v_5, v_6, v_4, v_8\}$

$\boxed{6}$

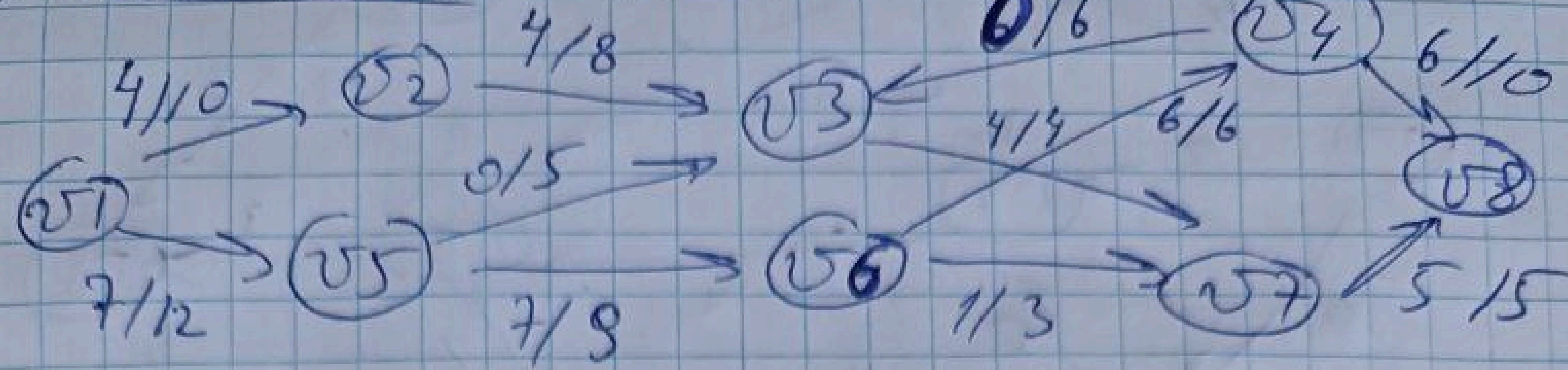


3) $\{v_1, v_5, v_6, v_7, v_8\}$

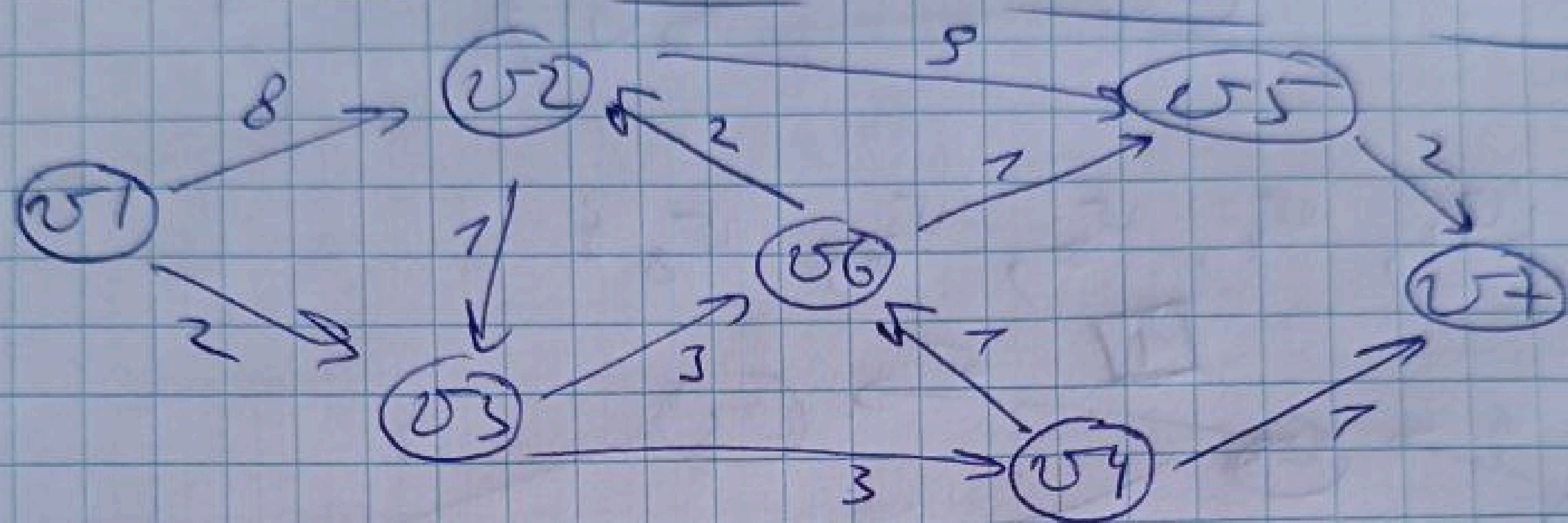
$\boxed{1}$



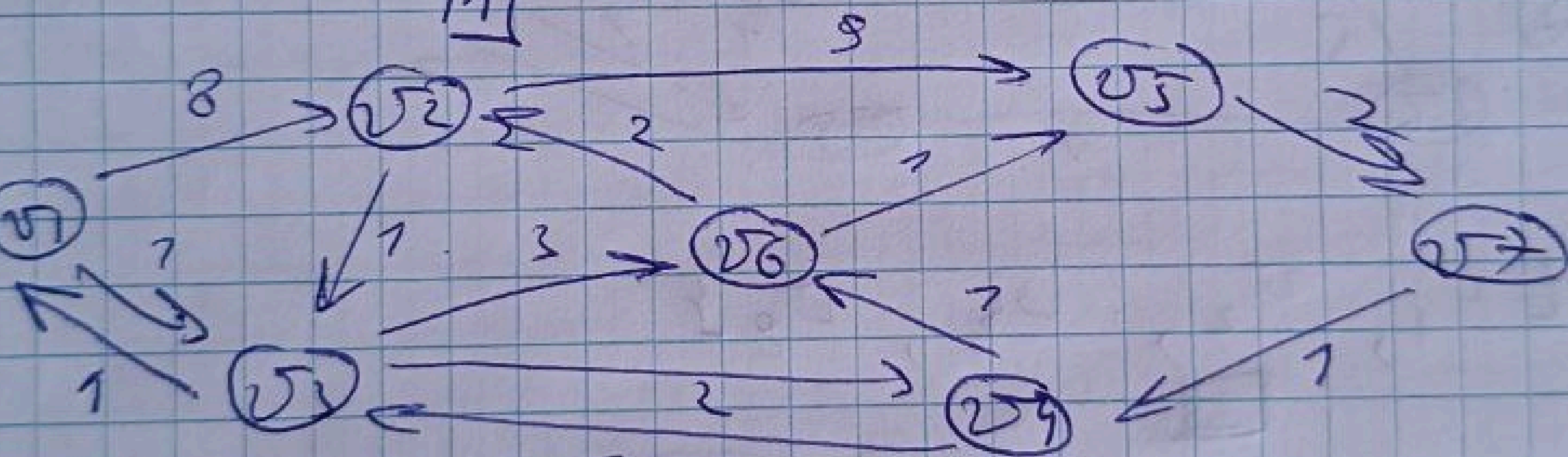
Макс. поток: $\boxed{11}$



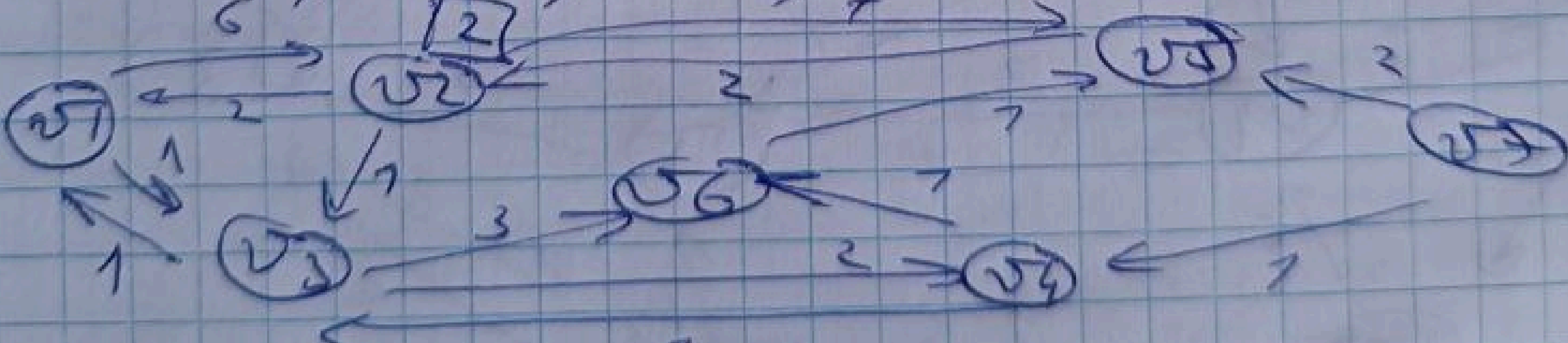
б)



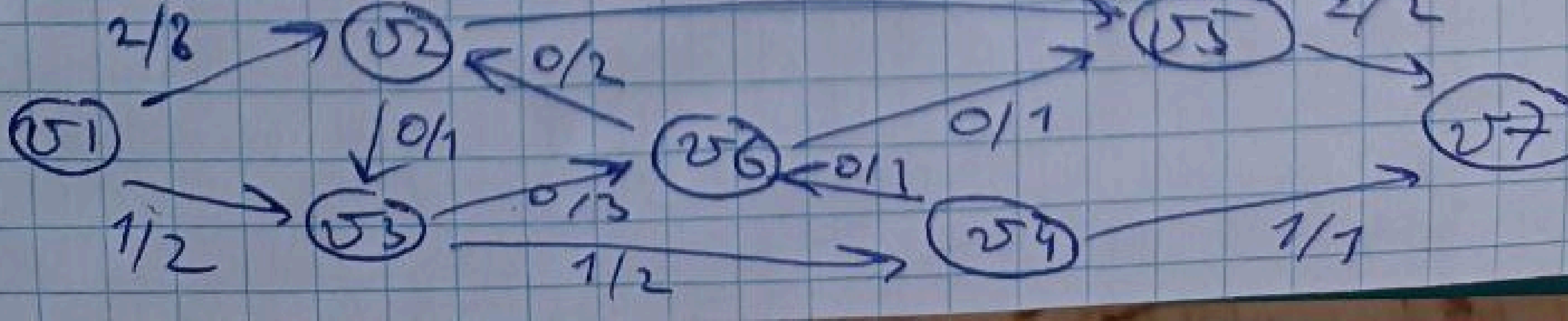
1) $\{v_1, v_3, v_4, v_7\}$ $\boxed{1}$



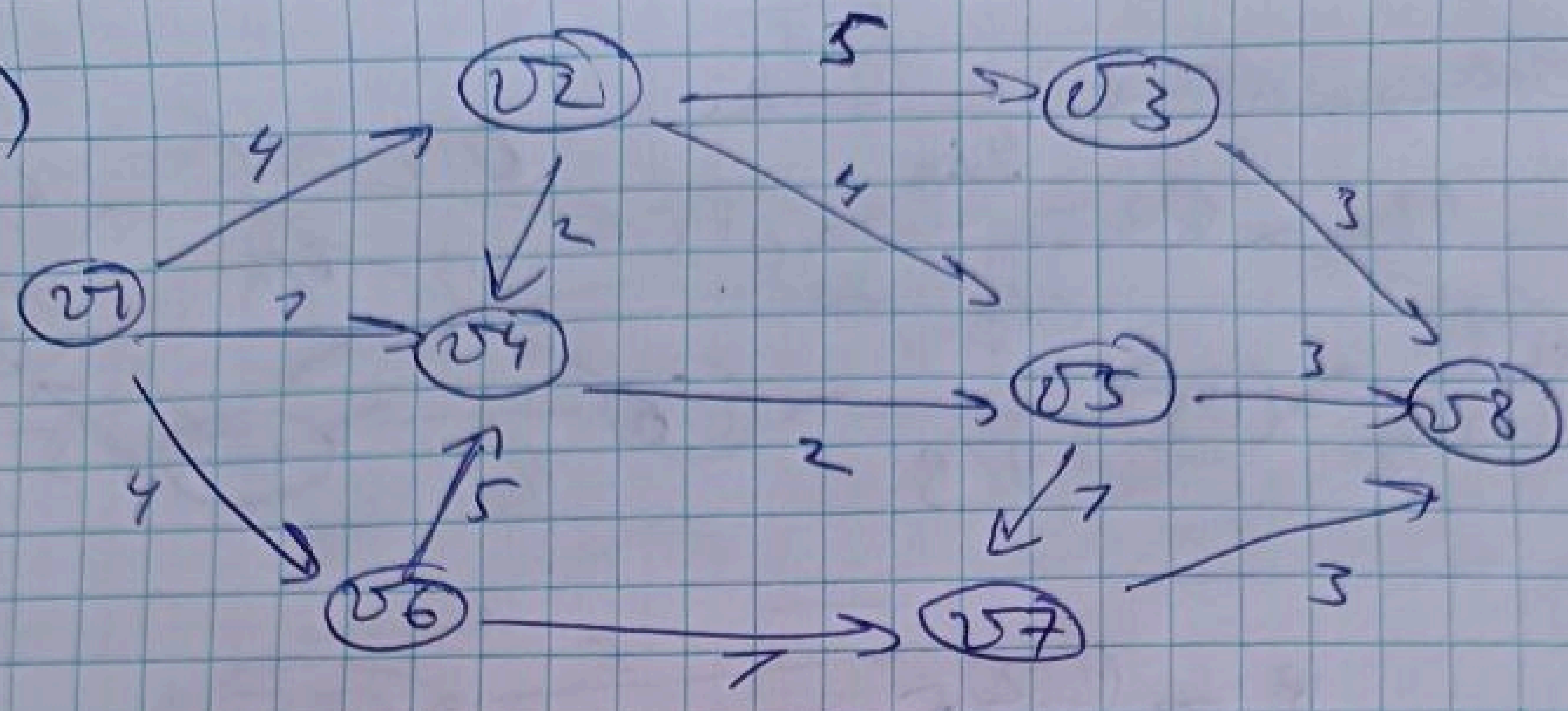
2) $\{v_1, v_2, v_5, v_7\}$ $\boxed{2}$



Макс. поток: $\boxed{3}$

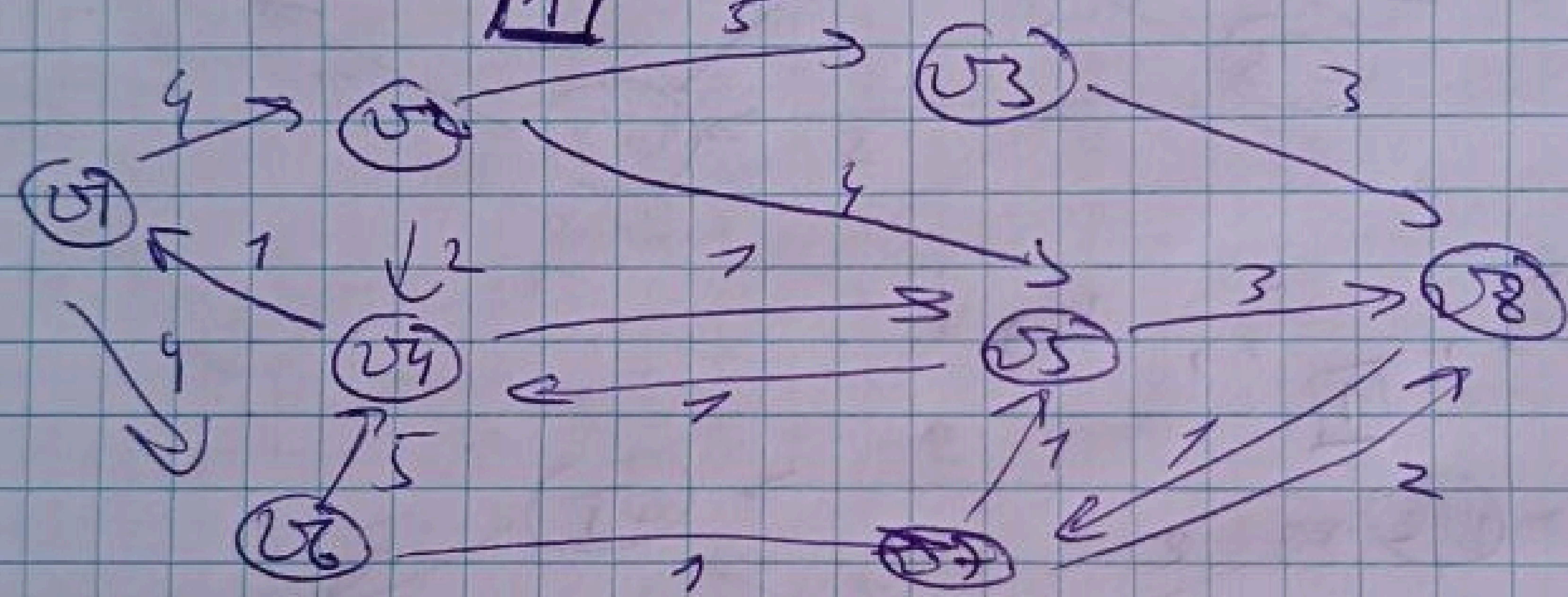


d)



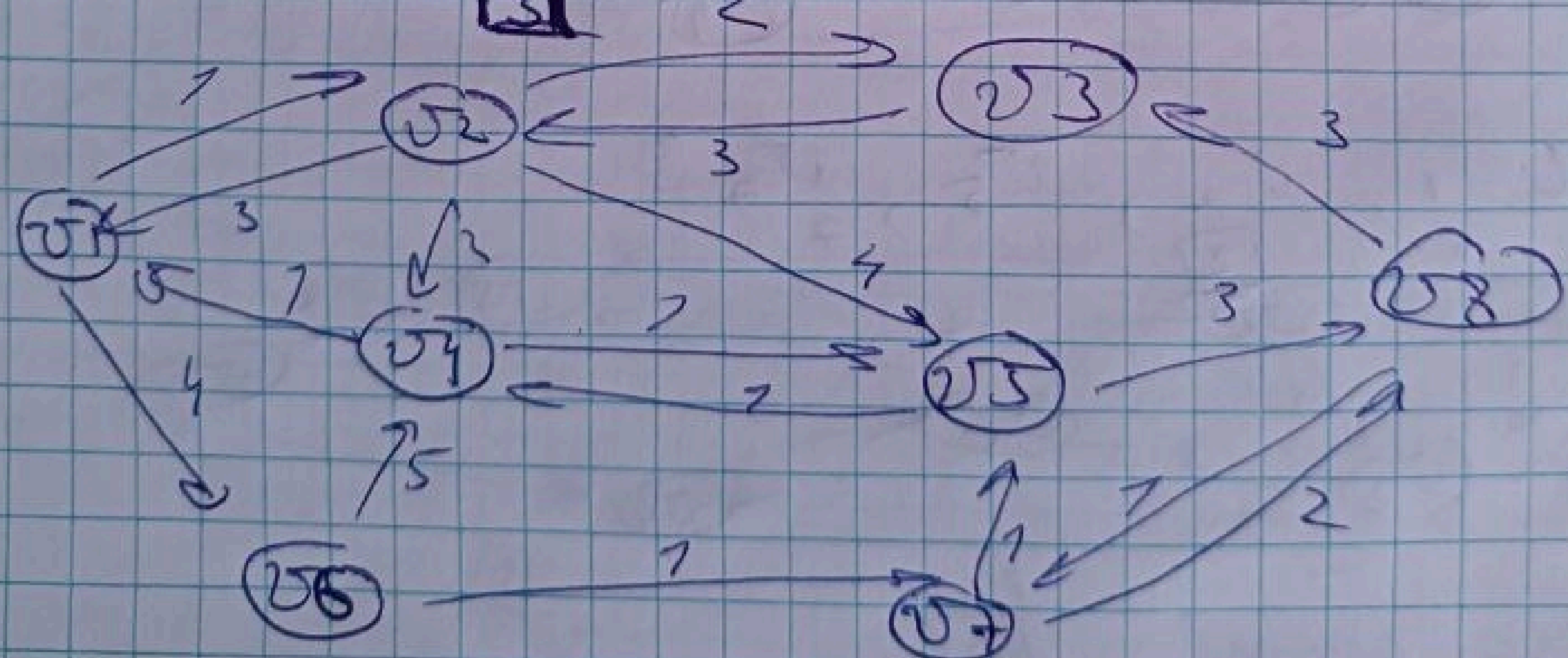
1) $\{v_1, v_4, v_5, v_7, v_8\}$

$\boxed{1}$



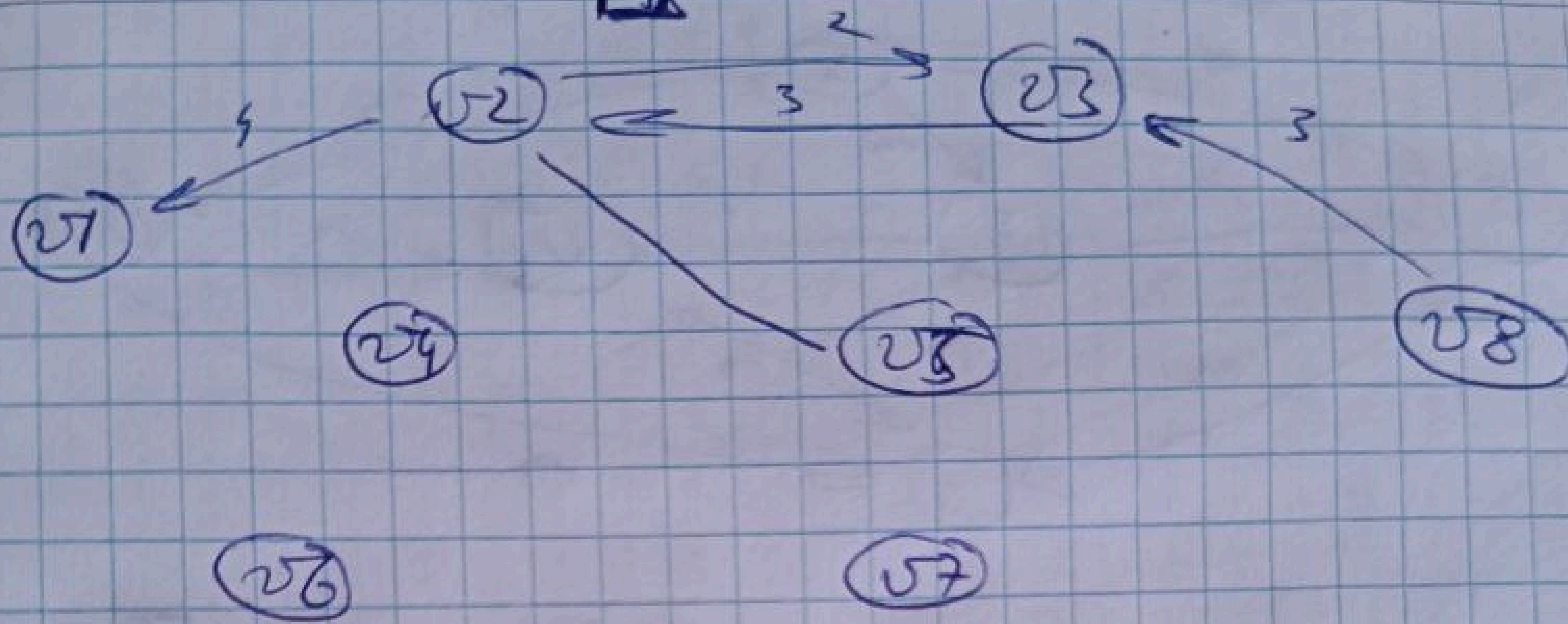
2) $\{v_1, v_2, v_3, v_8\}$

$\boxed{3}$

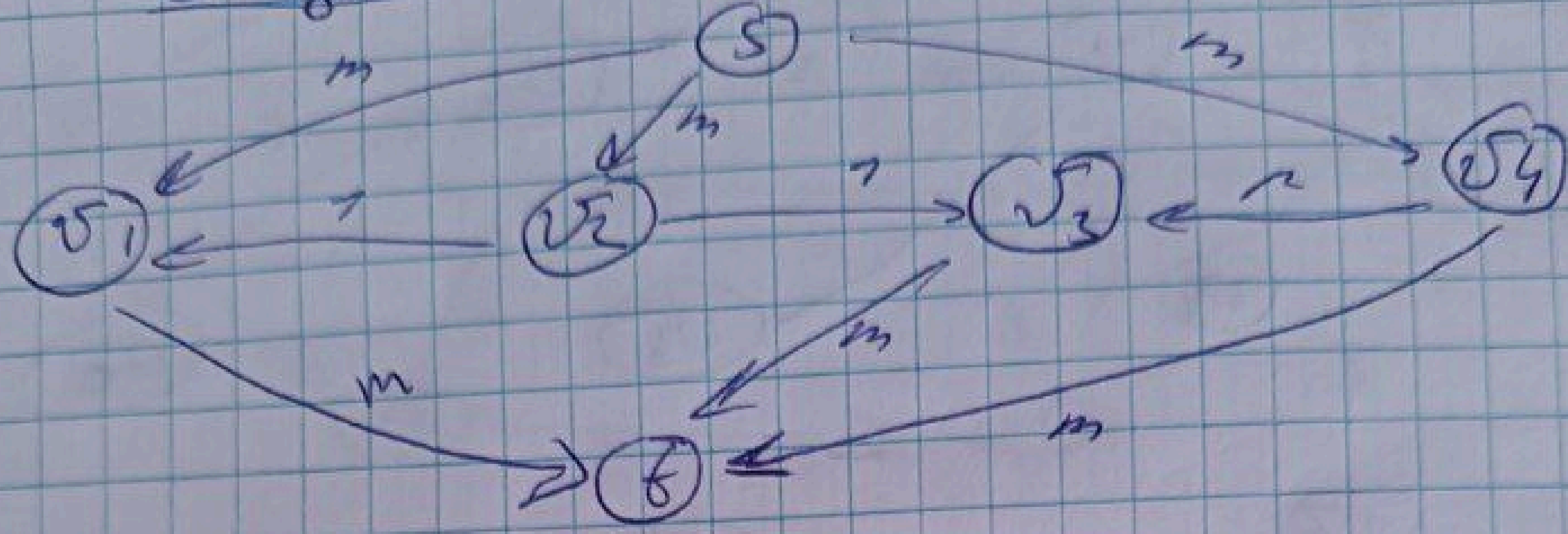


3) $\{v_1, v_2, v_5, v_8\}$

$\boxed{1}$



2. Почему важно работать с целочисленными значениями:



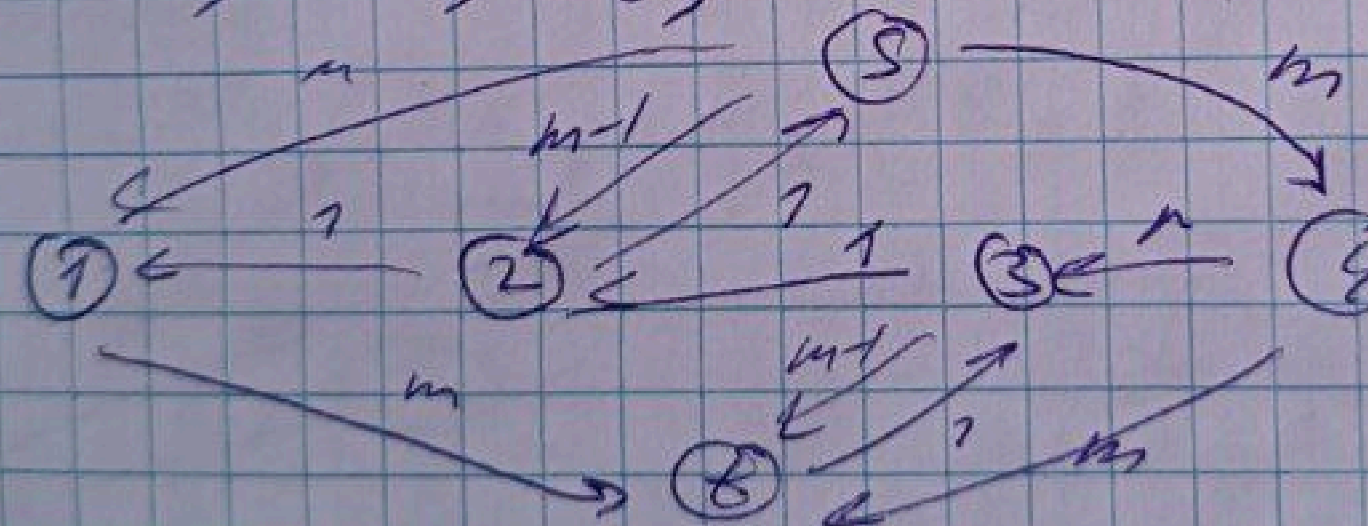
$m \geq 2$, $m \in \mathbb{Z}$;

$r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

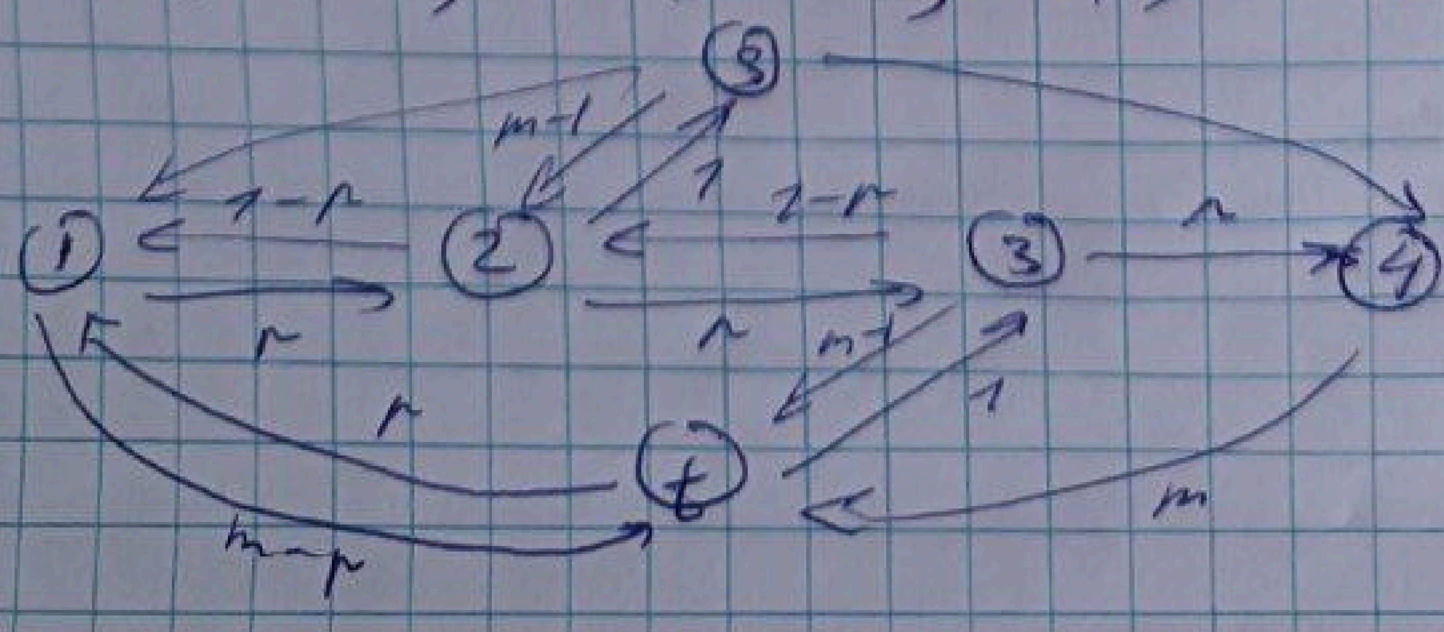
↳ одно из решений уравнения $r^2 = 1 - r$

Решаем:

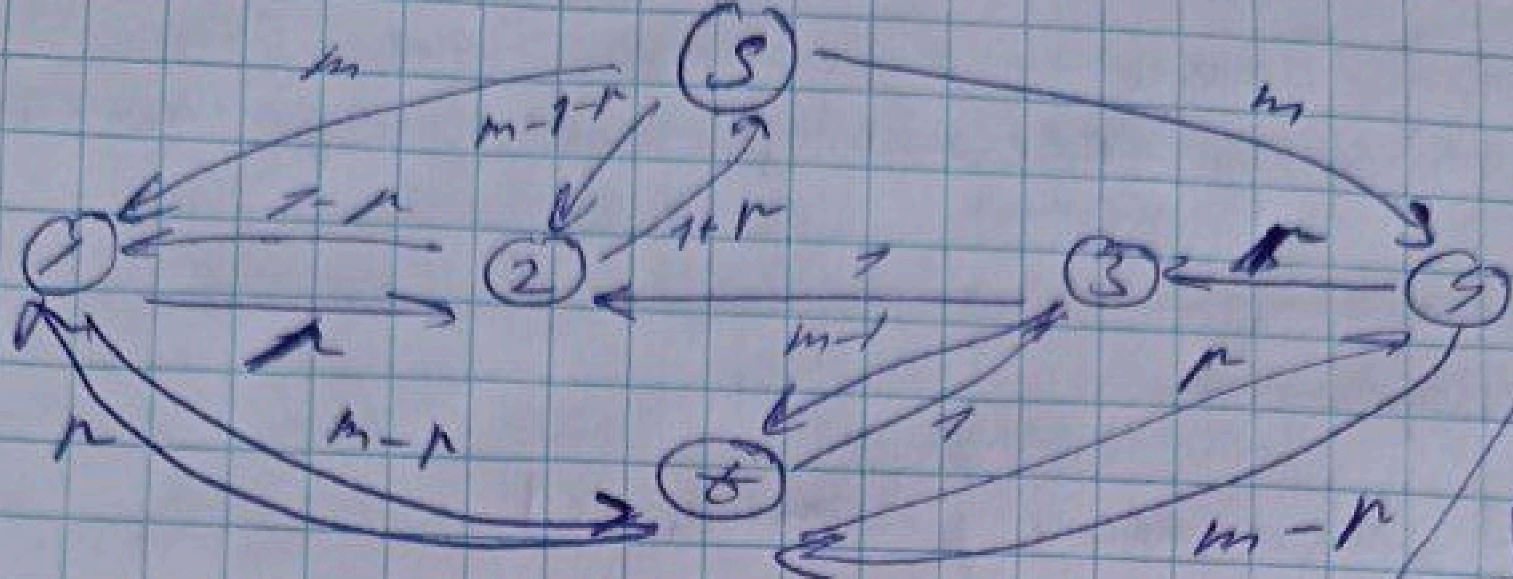
1) $\{s, v_2, v_3, t\}$



2) $\{s, v_4, v_3, v_2, v_1, t\}$

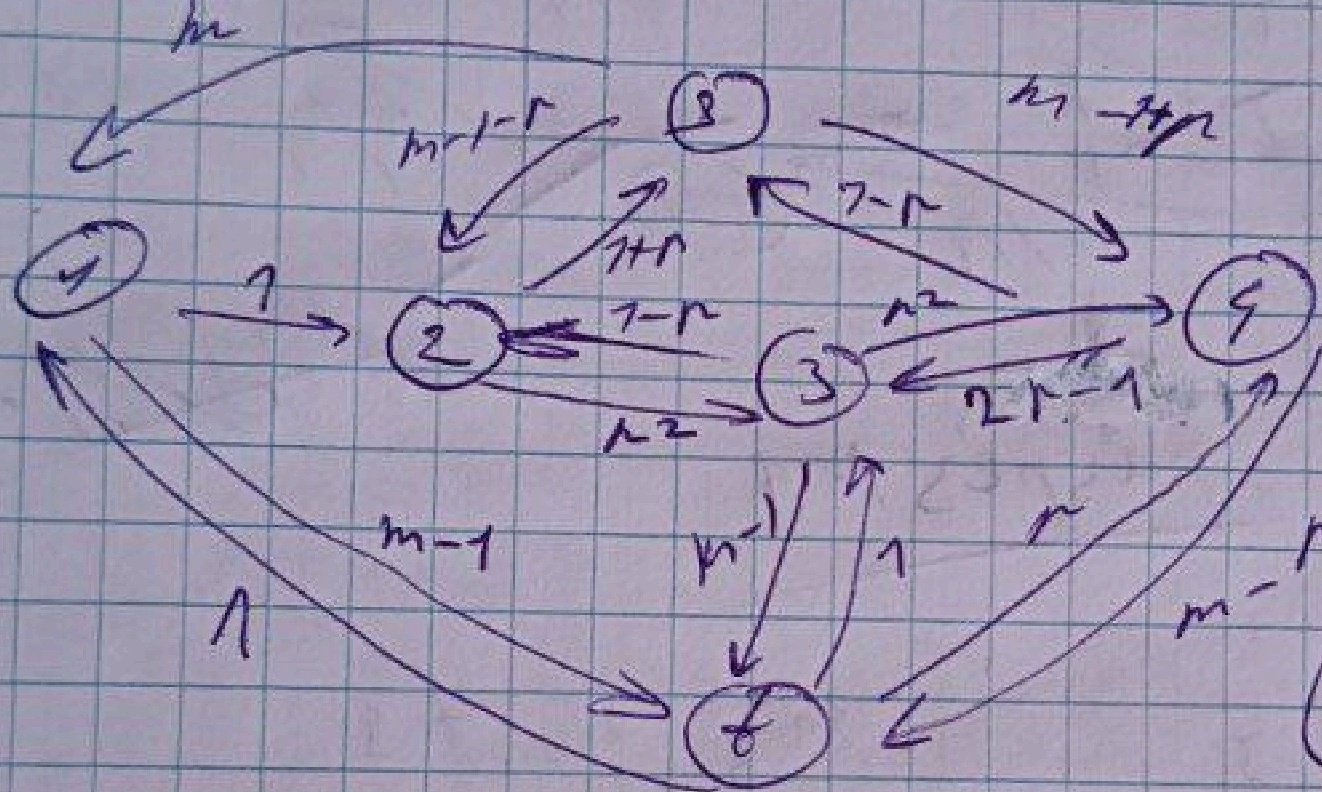


3) $\{s, v_2, v_3, v_4, t\}$



$1-(1-r)^2 = r^2$

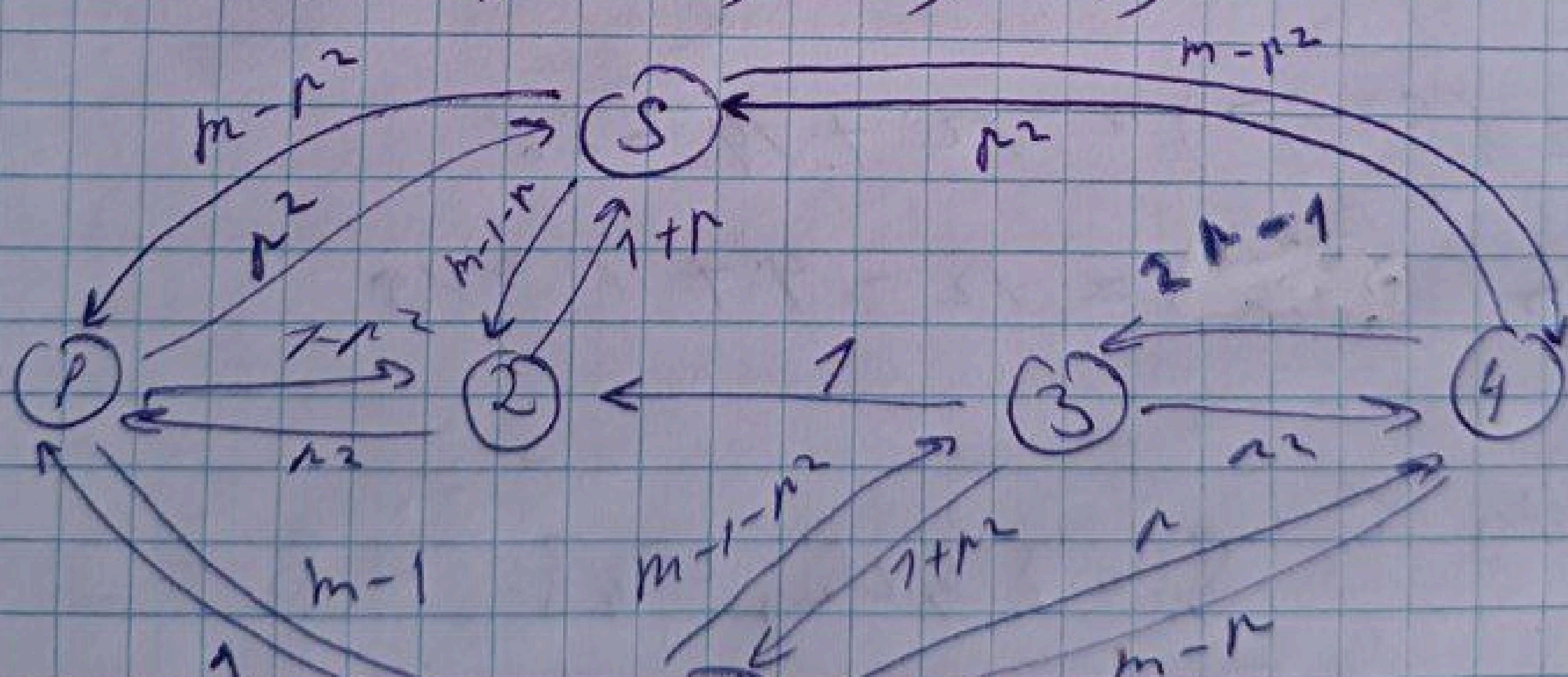
4) $\{s, v_4, v_3, v_2, v_1, t\}$



$\boxed{r^2 = 1-r}$

$1+1+r^2+r=3$

5) $\{s, v_1, v_2, v_3, v_4, t\}$



<u>Должно</u> было получиться: $1+2(r+r^2)$

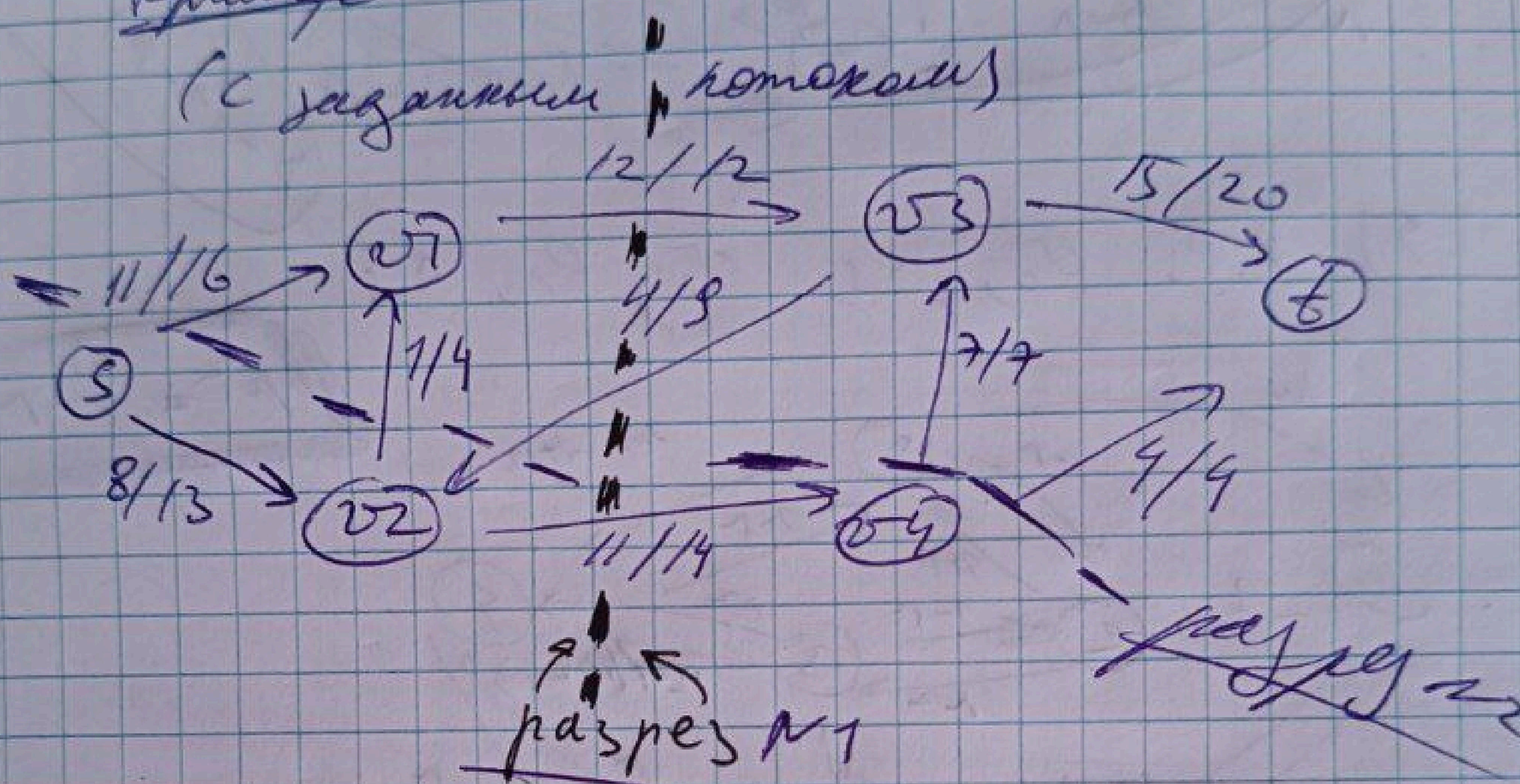
<u>Сумма</u> (сток, он же макс. поток): $1+2\sum r^i = 3+2r$

Разрезы

↳ разбиение вершин на два непересекающихся подмножества

Пример

(с заданным потоком)



Разрез №1:

$\underbrace{\{s, v_1, v_2\}}_{S}$, $\underbrace{\{v_3, v_4, t\}}_{T}$

$c(S, T) = 12 + 14 = 26$

$f(S, T) = 12 - 4 + 11 = 19$

Разрез №2:

$S_1 = \{s, v_2, v_4\}$

$T_1 = \{v_1, v_3, t\}$

$c(S, T) = 16 + 9 + 7 + 4 = 31$

$f(S, T) = 11 + 1 - 4 + 7 + 4 = 19$

→ Разрез графа:

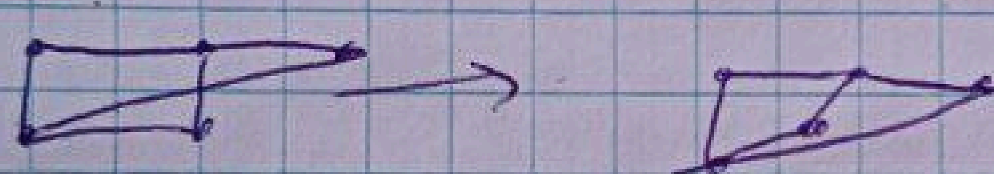
① Множество рёбер, образующих двудольный подграф, удаление которых делит граф на две или более компоненты, которые в частности, могут быть изолированными узлами.

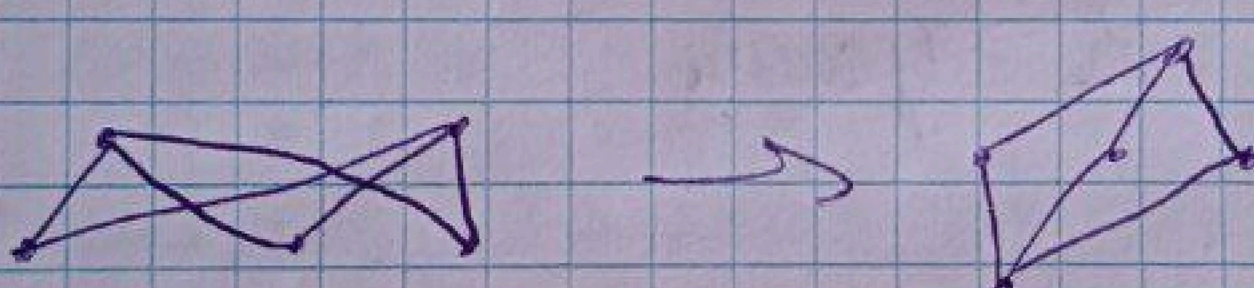
② Также это линия, проходящая через все рёбра разреза графа.

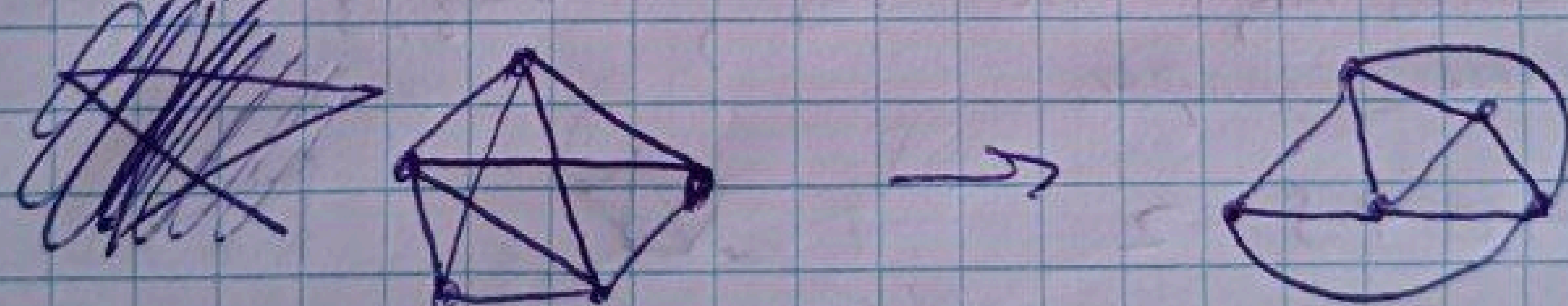
Планарность. Планарные графы

→ граф называется планарным, если его можно нарисовать без пересечений

1. Нарис. без перес. рёбер.

а) 

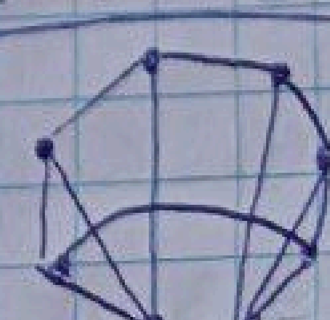
б) 

в) 

2. G — планарен, $|V| = 8$, $\deg_{v \in V} v = 3$,

Сколько граней?

$\boxed{2 = n - m + f}$



12 рёбер

$2 = 8 - 12 + f$

$f = 6$