

Доп. по алгебра-численно

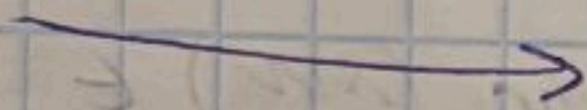
$$x^2 + 2x + 3$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$\underbrace{x \mapsto x^2 + 2x + 3}_{\lambda}$$

$$\text{или } f: x \mapsto x^2 + 2x + 3$$

$\lambda$



$$\underbrace{\lambda x. (x^2 + 2x + 3)}_{\lambda\text{-префикс}}$$

$$x^2 + yx + 3$$

$$\lambda x. (x^2 + yx + 3)$$

↗ свободная переменная

$$\lambda y. (x^2 + yx + 3)$$

↘ связанная переменная

$$\lambda xy. (x^2 + yx + 3)$$

или (равнозначны)

$$\lambda x. \lambda y. (x^2 + yx + 3)$$



## Функции многих переменных:

multi(1, 2, 3)      function multi(a, b, c) {  
                               return a \* b \* c; }

→ 6

Каррирование:

multi(1)(2)(3)

→ 6

function multi(a) {  
           return (b) => {  
                   return (c) => {  
                           return a \* b \* c; }  
           }

$\lambda$ -терм — наименьший элемент  
 мн-ва  $\mathcal{L}$ , который удовл. и. усл:

- ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ПУНКТЫ**  
 (чисел  $\lambda$ -численые)
- 1)  $\text{Var} \subseteq \mathcal{L}$  (можно использовать переменные)  
 $\text{Var} = \{x, y, z, \dots\}$
  - 2) если  $M \in \mathcal{L}$   $x \in \text{Var}$ , то  $\lambda x. M$  ка-  
 зывают абстракцией (это просто  $\lambda$ -префикс и  
 т.е. это  $\lambda$ -выражение)
  - 3) если  $M, N \in \mathcal{L}$ , то  $(MN) \in \mathcal{L}$   
 (аппликация)
- $\alpha$ -м конкатенация

$((\lambda x. (\lambda y. (x + y))) 4) 5$

**НЕОБЯЗАТЕЛЬНЫЙ ПУНКТ**  
 (чисел  $\lambda$ -числ)

$\ominus$  Тета  
 $\uparrow (m, n, a)$   
 буквы (греческие)

$\eta$  Эта  
 $\uparrow (m, n, a)$



$$(\lambda x. M) N \xrightarrow{\beta} M[x := N]$$

$\beta$  - reduction

$$(\lambda x. (\lambda y. x)) N \xrightarrow{\beta} (\lambda y. x)[x := N] = \lambda y. N$$

$$(\lambda x. (x^2 + 2)) 3 \xrightarrow{\beta} 3^2 + 2$$

$$(\lambda x. \lambda y. x) y \xrightarrow{\beta} \lambda y. y$$

не изменяем  $y$

$$(\lambda x. \lambda y. x) y = (\lambda x y. x) y$$

$$(\lambda x. \lambda y. x) y \xrightarrow{\beta} (\lambda x. \lambda y. x) z \xrightarrow{\beta}$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda y. x)[x := z] = \lambda y. z$$

или  $\lambda x. x \sim \lambda y. y \quad | \quad \lambda y. z \sim \lambda z. y$

$$(\lambda x. \lambda y. x) y \xrightarrow{\beta} (\lambda x. \lambda z. x) y \xrightarrow{\beta}$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda z. x)[x := y] = \lambda z. y$$



$\eta$  — преобразование  
(эма)

$$\lambda x. \text{fix } x \xrightarrow{\eta} \text{fix}$$

$$\lambda y. \lambda x. yx \xrightarrow{\eta} \lambda y. y \xrightarrow{\eta} \text{fix}$$

### Примеры

$$\begin{aligned} (\lambda x. x y z w) w &\xrightarrow{\alpha} (\lambda x. x y z a) w \xrightarrow{\beta} \\ &\xrightarrow{\beta} (x y z a) [x := w] = (w y z a) \end{aligned}$$

Можно и сделать так:

$$(\lambda x. x y z w) w \xrightarrow{\beta} (x y z w) [x := w] = w y z w$$

НЕЛЬЗЯ

$$\begin{aligned} (\lambda x. x x x) (y z) &\xrightarrow{\beta} (x x x) [x := y z] = \\ &= (y z y z y z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda x. x x) (\lambda x. x x) &\xrightarrow{\alpha} (\lambda x. x x) (\lambda y. y y) \xrightarrow{\beta} \\ &\xrightarrow{\beta} (x x) [x := \lambda y. y y] = (\lambda y. y y) (\lambda y. y y) \end{aligned}$$



$$(\lambda x. \underbrace{xx}_n) (\underbrace{\lambda z. z}_n) y \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\beta}$$

$$(xx) [\lambda z. z] y \xrightarrow{\alpha}$$

$$\xrightarrow{\alpha} ((\lambda z. \underbrace{z}_n) (\underbrace{\lambda 0. 0}_n)) y \xrightarrow{\beta}$$

$$\xrightarrow{\beta} (z) [z := \lambda 0. 0] y =$$

$$= (\lambda 0. \underbrace{0}_n) y \xrightarrow{\beta} (0) [0 := y] = y$$

$$(\lambda x. (\underbrace{\lambda y. y}_f) x) \xrightarrow{\eta} (\lambda y. y)$$

$\eta$  - рефлексия

$$\lambda x. f x \xrightarrow{\eta} f$$