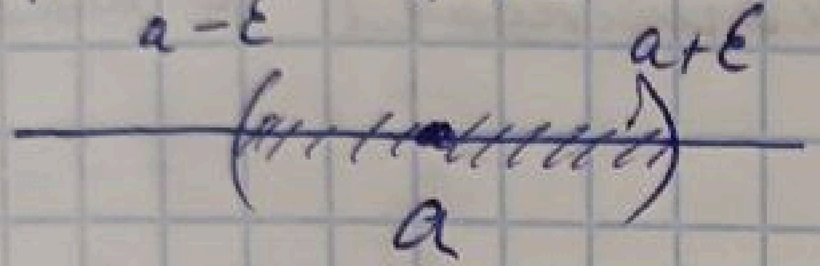
Семинар № 2. Пределы   Теория

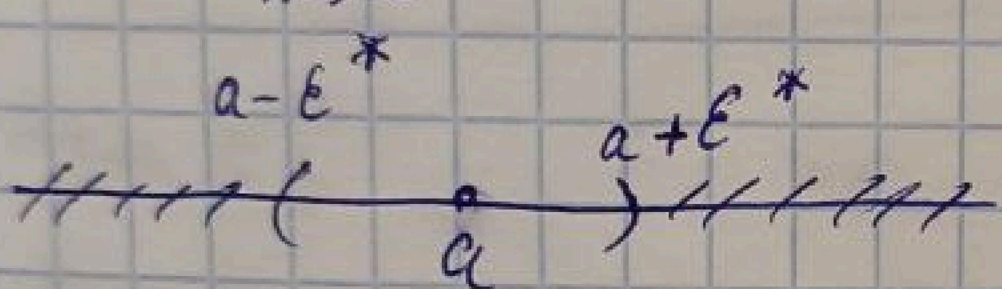
$$\underset{\in \mathbb{N}}{n} \to \underset{\in \mathbb{R}}{x_n}$$

$a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ $U_\varepsilon(a)$

Опр: $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |x_n - a| < \varepsilon$



Опр: $a \neq \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \exists \varepsilon^* > 0\ \forall m : \exists n > m\ |x_n - a| > \varepsilon$



- Последовательность сходится тогда и только тогда, когда её предел конечный.
- Последовательность расходится тогда когда её предел бесконечный либо когда предела нет.

Теорема 1 единственности предела

Если у последовательности есть предел, то он только один.

Теорема 2: если $\{x_n\}$ сходится $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ огр.

$\not\Leftarrow$

$x_n = (-1)^n$

Теорема о трёх последовательностях (о двух милиционерах):

Пусть $x_n \leq z_n \leq y_n$ (начиная с некот. n), если

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

Свойства:

$$\left.\begin{array}{l}
\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \\
\text{Тогда} \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b \\
\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab \\
\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, \text{ если } b \neq 0
\end{array}\right\} \text{конечные пределы}$$

Неопределённости:

$\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$

Бесконечно Малые Последовательности (БМП).

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$

ограниченная последовательность

1) БМП · огр = БМП

2) БМП · БМП = БМП

$\{x_n\}$ — БМП

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$

$\Updownarrow$

$y_n = \frac{1}{x_n}$, $\lim\limits_{n \to \infty} (y_n) = \infty$

Примеры

① а) Послед. $x_n = \frac{1}{n}$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \forall n > N:$

$\frac{1}{n} - 0 < \varepsilon$

$n > \frac{1}{\varepsilon}$

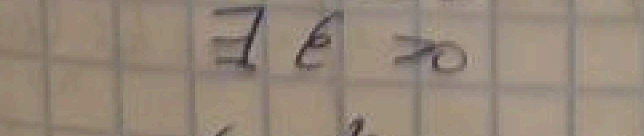
$N = [\frac{1}{2}] + 1$

б) Послед. $x_n = (-1)^n$

$\frac{1}{2}$

$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N: \exists n > N:$

$(-1)^n - A \geq \varepsilon$



② $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \neq 0$, $\{y_n\}$ – расходится

Доказать, что $\{\underbrace{x_n y_n}_{= z_n}\}$ – расходится

От противного: пусть

$$\exists \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

Тогда $y_n = \dfrac{z_n}{x_n}$ – сходится,

т.е. $\exists \lim y_n = \dfrac{a}{b}$

③ Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} < \frac{1}{2^n} \le \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{n}}$$

$\Rightarrow$ по т. о двух мил. $\dfrac{1}{2^n}$ также равняется ①.

Найти пределы последовательностей:

④ $$\lim_{n\to\infty} \frac{1000n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to 0}{\frac{1000}{n}}}{\underset{\to 1}{1} + \underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}} = 0$$

⑤ $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + \dots + b_m} =$$

$k > m$: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\overbrace{a_0 + \frac{a_1}{n} \dots \frac{a_k}{n^k}}^{\text{предел числителя} = a \text{ (конечн. число)}}}{\underbrace{b_0 n^{m-k} \dots + b_m \cdot n^{-k}}} =$

$m < k$: $\lim\limits_{n\to\infty}$ $\dfrac{a_0^{k-m} + \dots + \frac{a_k}{n}}{\dots}$

$m = k$: $\dfrac{a_0}{b_0}$

⑥ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$

⑦ $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot 1}{n\left(1+\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0}}\right)} = \frac{1}{2}$$

⑧ $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}\right] =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\dots+\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\dots+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[1-\frac{1}{n+1}\right] = 1$$

$= \frac{a_0}{0} = \infty$

$+ \frac{a_k}{n^k} \quad = \frac{0}{b_0} = 0$

⑨ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1} = 0$ → огр; $|\cos n| \le 1$ при $\forall n$

↓ БМП

→ как произведение огр на БМП

⑩ Доказать, что $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0}$, где $|q| < 1$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon \quad q^n < \varepsilon$

$\left(\frac{1}{q}\right)^n > \varepsilon$

$n > \frac{\varepsilon - 1}{a}$

$n_\varepsilon = \left[\frac{\varepsilon - 1}{a}\right] + 1$

$\left(\frac{1}{q}\right)^n = (1+a)^n \geqslant 1 + na > \varepsilon$

$\exists a > 0$

при полож. q ($q \in (0;1)$)

Т.к. $0 < q < 1$, то $\exists a : \frac{1}{q} = 1 + a$

$\underset{\to 0}{-|q^n|} \le q^n \le \underset{\to 0}{|q^n|}$ → q^n стремится к 0

Неравенство Бернулли:

$$(1+a)^n \geqslant 1+na \quad \text{при} \quad a>-1$$

Найти пределы:

(11) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2^n} = \dfrac{5}{1-\frac{2^n}{3^n}} = \dfrac{5}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 5$

стремится к 0

(12) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$, $(|a|<1,\ |b|<1)$;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n} = \frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}} =$$

к 1 к 0

$$= \left(\frac{1-b}{1-a}\right)\cdot\frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}} = \frac{1-b}{1-a}$$

к 0

к 1

(13) Доказать, что

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1}, \text{ где } a > 0$$

Пусть $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$;

покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

1) Пусть $a > 1$:

$$(x_n + 1)^n = a \geqslant 1 + n \cdot x_n$$

$$0 \leq x_n \leq \underbrace{\frac{a-1}{n}}_{\to 0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

$$\begin{matrix} y_n \leq x_n \leq z_n \\ \downarrow \quad \Downarrow \quad \downarrow \\ 0 \qquad\quad 0 \\ x_n \to 0 \end{matrix}$$

2) Если $a < 1$:

$$\left(\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}\right) \to 1$$

$\sqrt[n]{b} \to 1$

$$\Downarrow$$

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1$$

$a = \frac{1}{b}$, $b > 1$

(14) Доказать, что

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$

Бином Ньютона

$0 \le x_n = \sqrt[n]{n} - 1$

$x_n < ?$

$n = (x_n + 1)^n \geqslant 1 + n x_n + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 > \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$

$x_n \le \frac{2}{\sqrt{n-1}}$

ДЗ (Демид.)
47, 48,
49, 51,
53, 68;
60, 61

Числовой предел $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ || $a_n \to a$ при $n \to \infty$

Трушин;
Мат. ан. с человеческим лицом

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}:$

$n \geqslant n_\varepsilon : \ |a_n - a| < \varepsilon$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$