Тема : Евклидовы пространства и ортогональные базисы

$\mathbf{1^0}$. Определение евклидова пространства и скалярного произведения. Норма вектора. $\mathbf{2^0}$. Неравенство Коши — Буняковского. Неравенство треугольника. $\mathbf{3^0}$. Угол между векторами евклидова пространства. Определение ортогональных и ортонормированных систем. Теорема Пифагора. $\mathbf{4^0}$. Ортонормированные базисы. Теорема о линейной независимости ортонормированной системы. $\mathbf{5^0}$. Координаты вектора в ортогональном базисе. $\mathbf{6^0}$. Линейные подпространства евклидовых пространств и ортогональные дополнения. $\mathbf{7^0}$. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Дополняемость ортогональной системы до ортогонального базиса.

1^0. Пусть X — это вещественное евклидово векторное пространство. По определению, это означает, во-первых, что X — это конечномерное линейное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, и, во-вторых, что в X задано *скалярное произведение* любых двух его элементов.

Условимся обозначать скалярное произведение элементов x и y из X символом (x, y).

Согласно определению, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — это бинарная операция со значениями в поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами.

1) Для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{X}$ его скалярное произведение на себя строго положительно: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > \mathbf{0}$. Скалярное произведение нулевого вектора на себя равно нулю;

2) Операция скалярного произведения симметрична: $(x, y) = (y, x)$.

3) Скалярное произведение линейно по каждому из своих аргументов, то есть

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$(z, \alpha x + \beta y) = \alpha(z, x) + \beta(z, y) \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Наличие в векторном пространстве X скалярного произведения создает возможность ввести в нем такие метрические характеристики как длина вектора и расстояние между векторами.

Определение. *Длиной (или нормой) вектора* v *из евклидова пространства* X *называется неотрицательное число*

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}.$$

По определению скалярного произведения для любого вектора v из евклидова пространства X величина (v, v) всегда неотрицательна. Поэтому длина $\|v\|$ любого вектора v определена однозначно.

Норма вектора обладает следующим свойством однородности: для любого вещественного числа λ справедливо равенство

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|.$$

Определение. *Расстоянием между векторами u и v из евклидова пространства X называется неотрицательное число*

$$\|u - v\| = \sqrt{(u - v, u - v)}.$$

Длина вектора v равна нулю тогда и только тогда, когда v нулевой:

$$\|v\| = 0 \;\Leftrightarrow\; v = 0.$$

Длина ненулевого вектора строго положительна.

Расстояние между векторами $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ равно нулю тогда и только тогда когда эти векторы совпадают:

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\| = \boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}.$$

Важный пример одномерного евклидова пространства дает поле вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Длина вектора в этом пространстве совпадает с модулем соответствующего вещественного числа.

<u>Пример</u>. В n-мерном вещественном координатном пространстве $X = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, скалярное произведение вводится с помощью разложения сомножителей по векторам стандартного базиса

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,\ e_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

Точнее, если справедливы разложения

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n,$$

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n,$$

то скалярное произведение (x, y) задается равенством

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

При этом норма вектора

$$\boldsymbol{x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n}$$

в указанном скалярном произведении задается равенством

$$\boldsymbol{\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}}$$

и называется *евклидовой длиной* этого вектора.

2^0. Хорошо известная реализация в случае координатного пространства $\mathbb{R}^3$ метрической структуры, связанной со скалярным произведением, подсказывает эффективный и разумный путь распространения этой структуры на случай произвольного конечномерного линейного пространства.

Ключевую роль при этом играют неравенство Коши — Буняковского и неравенство треугольника.

Теорема (неравенство Коши — Буняковского). *Для любых векторов* $\boldsymbol{u}$ *и* $\boldsymbol{v}$ *из* $\boldsymbol{X}$ *справедливо неравенство*

$$|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|. \tag{CB}$$

Равенство здесь достигается в том и только том случае, если векторы $\boldsymbol{u}$ *и* $\boldsymbol{v}$ *линейно зависимы (коллинеарны).*

Доказательство. Для любого вещественного α справедливо равенство

$$(u + \alpha v, u + \alpha v) = (u, u) + 2\alpha(u, v) + \alpha^2(v, v).$$

При фиксированных u и v из X выражение справа — это квадратичная функция переменной α, то есть квадратный трехчлен. Коэффициент при α^2 в нем неотрицателен (а если $v \neq 0$, то положителен). Значения квадратного трехчлена при этом также неотрицательны. Следовательно, его дискриминант должен быть неположительным:

$$|(u,v)|^2 - (u,u)\cdot(v,v) \leqslant 0.$$

Это и есть искомое неравенство (CB). Далее заметим, что если

$$|(u,v)| = \sqrt{(u,u)}\cdot\sqrt{(v,v)},$$

то дискриминант квадратного трехчлена

$$(u+\alpha v, u+\alpha v) = (u,u) + 2\alpha(u,v) + \alpha^2(v,v)$$

равен нулю. При этом квадратный трехчлен имеет ровно один вещественный корень α_0, для которого выполняется равенство

$$(u + \alpha_0 v, u + \alpha_0 v) = (u, u) + 2\alpha_0 (u, v) + \alpha_0^2 (v, v) = 0.$$

Это возможно лишь в случае, если $u + \alpha_0 v = 0$. Таким образом, $u = -\alpha_0 v$, то есть векторы u и v линейно зависимы (коллинеарны). $\square$

Следствие (неравенство треугольника). *Норма суммы любых векторов u и v из X не превосходит суммы норм слагаемых:*

$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|. \qquad (\Delta_{\leqslant})$$

Доказательство. Из определения нормы вектора, пользуясь свойствами скалярного произведения, получаем

$$\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u,v).$$

Применив к скалярному произведению в правой части неравенство Коши — Буняковского, имеем далее

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^{2} \leqslant \|\boldsymbol{u}\|^{2}+\|\boldsymbol{v}\|^{2}+2\|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\| = (\|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|)^{2}.$$

Извлекая корень из обеих частей полученного неравенства, получаем ($\boldsymbol{\Delta}_{\leqslant}$). $\square$

Неравенство треугольника легко распространяется на любое количество слагаемых, принимая в общем случае следующий вид:

$$\|u_1 + u_2 + \cdots + u_m\| \leqslant \|u_1\| + \|u_2\| + \cdots + \|u_m\|.$$

3^0. Неравенство Коши — Буняковского позволяет, в частности, определить понятие угла между любыми двумя векторами пространства. Точнее, из неравенства (CB) следует, что

$$-1 \leqslant \frac{(u, v)}{\|u\|\|v\|} \leqslant +1, \qquad u \neq 0,\ v \neq 0,$$

Следовательно, тригонометрическое уравнение

$$\cos\varphi = \frac{(u, v)}{\|u\|\,\|v\|}, \qquad u \neq 0,\ v \neq 0,$$

имеет на отрезке $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ единственный корень φ.

Именно этот корень φ и называют *углом между ненулевыми векторами* u и v.

Определение. *Ненулевые векторы* $\boldsymbol{u}$ *и* $\boldsymbol{v}$ *евклидова пространства* $\boldsymbol{X}$ *ортогональны друг другу, если угол* φ *между ними прямой, то есть равен* $\boldsymbol{\pi/2}$*.*

Ортогональность двух векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ принято обозначать с помощью символа $\perp$, то есть как $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

Нулевой вектор по определению считается ортогональным любому вектору.

Пусть в евклидовом пространстве X имеется множество u_1, u_2, ..., u_m попарно ортогональных векторов

$$u_i \perp u_j \quad \text{при} \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \ldots m.$$

Тогда справедлива следующая *теорема Пифагора*:

$$\|u_1 + u_2 + \cdots + u_m\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \cdots + \|u_m\|^2.$$

Для того чтобы обосновать это равенство, достаточно воспользоваться свойствами скалярного произведения и условиями попарной ортогональности:

$$\|u_1 + \cdots + u_m\|^2 = (u_1 + \cdots + u_m, u_1 + \cdots + u_m) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} (u_i, u_j) = \sum_{i=1}^{m} (u_i, u_i) = \|u_1\|^2 + \cdots + \|u_m\|^2.$$

4^0. В вещественном координатном пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение координатных строк $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ задается равенством

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

В этом скалярном произведении векторы стандартного базиса

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,\ e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

попарно ортогональны, причем длина каждого из них равна единице:

$$\|e_j\| = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Оказывается, что и в любом евклидовом пространстве X существуют базисы с аналогичными свойствами.

Определение. *Базис* e_1, e_2, ..., e_n *евклидова пространства* X, $\dim X = n$, *называется ортогональным, если*

$$(e_i, e_j) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j; \qquad i, j = 1, 2, \ldots n.$$

Если при этом $\|e_j\| = 1$ *при всех* $j = 1, \ldots, n$, *то базис называется ортонормированным.*

Любой ортогональный базис e_1, e_2, ..., e_n преобразуется в ортонормированный с помощью замены

$$e'_j = \frac{1}{\|e_j\|} e_j \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \ldots n.$$

При этой замене имеют место равенства

$$(e'_i, e'_j) = \frac{1}{\|e_i\|} \frac{1}{\|e_j\|} (e_i, e_j) = \delta_i^j,$$

где δ_i^j — это *символ Кронекера*, то есть величина, равная нулю при $i \neq j$ и единице при совпадении индексов i и j.

Установим некоторые полезные свойства множеств из взаимноортогональных векторов евклидова пространства.

Теорема (линейная независимость ортогональных векторов). *Любые ненулевые взаимноортогональные векторы* $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, ..., $\boldsymbol{e_m}$ *из* $\boldsymbol{X}$ *линейно независимы.*

Доказательство. Пусть векторы $\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_m}$ из $\boldsymbol{X}$ взаимноортогональны, $\boldsymbol{e_j \neq 0}$, $\boldsymbol{j = 1, \ldots, m}$.

Предположим, что имеется равная нулю линейная комбинация этих векторов:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_m e_m = \mathbf{0}.$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на вектор e_k, где k любой из допустимых номеров. В результате получим

$$0 = \alpha_1 (e_1, e_k) + \cdots + \alpha_m (e_m, e_k) = \alpha_k \|e_k\|^2.$$

По условию, $e_k \neq 0$, то есть $\|e_k\| > 0$. Учитывая это, получаем из последнего равенства $\alpha_k = 0$. Таким образом, все коэффициенты рассматриваемой линейной комбинации равны нулю:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0.$$

По определению, это означает, что векторы e_1, ..., e_m линейно независимы. $\square$

Если в условиях теоремы $\dim X = n$ и взаимноортогональных ненулевых векторов в системе $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$ ровно n, то есть $m = n$, то множество B — это ортогональный базис исходного евклидова пространства.

Оказывается, во всяком n-мерном евклидовом пространстве ортогональные базисы существуют.

5^0. Координаты любого вектора v в ортонормированном базисе

$$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

находятся особенно просто. Пусть

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Домножая скалярно обе части последнего равенства на базисный вектор e_k, получаем

$$(v, e_k) = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n, e_k) =$$

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, e_k\Big) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (e_j, e_k) = \alpha_k.$$

Это и есть искомые выражения координат вектора v в ортонормированном базисе.

Определение. *В евклидовом пространстве* X *линейная оболочка* $\langle e \rangle_R = \mathit{span}\,\{e\}$ *любого ненулевого вектора* e *называется прямой. При этом* e *— направляющий вектор этой прямой.*

Любая прямая содержит в себе нулевой вектор, который является произведением нуля из $\mathbb{R}$ на направляющий вектор $\boldsymbol{e}$.

Определение. *Если вектор* $\boldsymbol{e}$ *единичной длины, то вектор* $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$ *называется проекцией* $\boldsymbol{v}$ *на прямую* $\langle \boldsymbol{e} \rangle_{\boldsymbol{R}}$.

Углом между прямыми $\langle \boldsymbol{e_1} \rangle_{\boldsymbol{R}}$ и $\langle \boldsymbol{e_2} \rangle_{\boldsymbol{R}}$ называется угол между их направляющими векторами $\boldsymbol{e_1}$ и $\boldsymbol{e_2}$.

Пусть есть ортонормированный базис

$$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

евклидова пространства X. Тогда прямые

$$\langle e_1 \rangle_R,\ \langle e_2 \rangle_R,\ \ldots,\ \langle e_n \rangle_R$$

называют осями координат в X. Любые две оси координат пересекаются по нулевому вектору, а угол между ними прямой.

Координаты любого ненулевого вектора $\boldsymbol{v}$ в ортонормированном базисе совпадают с его проекциями на оси координат, порождаемые векторами рассматриваемого базиса.

6^0. Пусть $\boldsymbol{X_1}$ — линейное подпространство евклидова пространства $\boldsymbol{X}$. Это означает, что $\boldsymbol{X_1} \subset \boldsymbol{X}$ и при этом относительно сложения подмножество $\boldsymbol{X_1}$ замкнуто и образует в $\boldsymbol{X}$

аддитивную подгруппу:

$$\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X_1} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X_1}.$$

Кроме того $\boldsymbol{X_1}$ замкнуто относительно умножений на вещественные числа:

$$\forall\, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}, \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X_1} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\lambda x} \in \boldsymbol{X_1}.$$

Если $\boldsymbol{X_1}$ — это линейное подпространство $\boldsymbol{X}$, то его размерность не больше размерности $\boldsymbol{X}$, то есть $\dim \boldsymbol{X_1} \leqslant \dim \boldsymbol{X}$.

Если $\dim X_1 < \dim X$, то $X_1 \neq X$ и является в X *собственным подпространством*.

Приведем пример. Пусть $\dim X \geqslant 2$ и $v \neq 0$. Тогда множество $\{u \in X \mid u \perp v\}$ является в X линейным подпространством.

Проверим это. Пусть $x \perp v$ и $y \perp v$. Тогда

$$(\alpha x + \beta y, v) = \alpha(x, v) + \beta(y, v) = 0.$$

Следовательно, $\alpha x + \beta y$ также принадлежит множеству $\{u \in X \mid u \perp v\}$.

Определение. *Пространство* $\{u \in X \mid u \perp v\}$ *называется ортогональным дополнением к ненулевому вектору* v.

Говорят, что вектор v из евклидова пространства X ортогонален подпространству $X_1 \subset X$, если $v \perp u$ для любого вектора u из X_1.

Множество всех векторов из X, ортогональных заданному подпространству $X_1 \subset X$, является в X подпространством. Для этого подпространства используется специальное обозначение $X_1^{\perp}$.

Определение. *Пространство $X_1^{\perp}$ называется ортогональным дополнением к X_1 в пространстве X.*

7^0. Произвольный базис евклидова пространства линейным преобразованием переводится в ортогональный базис этого же пространства. Процесс соответствующего линейного преобразования называется ортогонализацией.

Теорема (процесс ортогонализации). *Пусть есть множество* $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$ *из* m *линейно независимых векторов евклидова пространства* X, $m \leqslant n$. *Тогда существует ортонорми-*

рованная система векторов $B' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$, *такая что линейные оболочки*

$$L_i = \mathit{span}\{e_1, \ldots, e_i\} \quad \text{и} \quad L'_i = \mathit{span}\{e'_1, \ldots, e'_i\}$$

при любом $i = 1, 2, \ldots, m$ *совпадают друг с другом.*

Доказательство. Ортонормированную систему векторов $B = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$ с нужными свойствами построим по индукции.

Первый вектор e'_1 искомого ортонормированного базиса зададим равенством

$$e'_1 = \lambda e_1, \quad \text{где} \quad \lambda = \frac{1}{\|e_1\|}.$$

При этом $\|e'_1\| = 1$ и

$$L_1 = \operatorname{span} e_1 = \operatorname{span} e'_1 = L'_1.$$

Предположим, что имеется ортонормированная система $B'_k = \{e'_1, \ldots, e'_k\}$, обладающая тем свойством, что для любого номера i, $i \leqslant k$, имеет место равенство

$$\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_i\} = \operatorname{span}\{e'_1, \ldots, e'_i\}. \qquad (H_k)$$

Это равенство означает, что каждый из векторов e'_j, $j = 1, 2, \ldots, i$, представим в виде линейной комбинации векторов из множества $\{e_1, \ldots, e_i\}$, а также обратное: каждый из векторов e_j исходного множества при $j \leqslant i$, допускает запись в виде линейной комбинации ортонормированных векторов $\{e'_1, \ldots, e'_i\}$.

При сделанном предположении (H_k) построим следующий по порядку вектор e'_{k+1} искомой ортонормированной системы.

Заметим, что вектор e_{k+1} исходного множества B в подпространстве $L_k = L'_k$ не содержится. В противном случае e_{k+1} представляет собой линейную комбинацию векторов из множества $\{e_1, \ldots, e_k\}$, что противоречит условию линейной независимости векторов из исходного множества $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$.

Рассмотрим теперь линейные комбинации следующего вида:

$$v = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i' \qquad (E_v)$$

Коэффициенты λ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, в разложении (E_v) — вещественные числа.

Для любого набора чисел λ_i, $i = 1, 2, \dots, k$, линейная оболочка $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_k, v\}$ совпадает с подпространством L_{k+1}:

$$\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_k; v\} = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_k; e_{k+1}\} = L_{k+1}.$$

Числа λ_i, $i = 1, 2, \dots, k$, выберем теперь таким образом, чтобы вектор v стал ортогонален подпространству L'_k. Оказывается, сделать это можно единственным образом.

Искомые значения скаляров λ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, найдем из следующих условий ортогональности:

$$(v, e'_j) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Подставляя сюда вместо вектора v его разложение

$$v = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e'_i$$

и пользуясь ортонормированностью векторов $\{e'_1, \ldots, e'_k\}$, получаем равенства

$$0 = (e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e'_i, e'_j) = (e_{k+1}, e'_j) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (e'_i, e'_j).$$

Учитывая, что скалярное произведение (e'_i, e'_j) равно нулю при $i \neq j$ и равно единице при $i = j$, имеем далее

$$0 = (e_{k+1}, e'_j) - \lambda_j (e'_j, e'_j) = (e_{k+1}, e'_j) - \lambda_j,$$

где $j = 1, 2, \ldots, k$. Таким образом, взяв в разложении (E_v) скаляры

$$\lambda_j = (e_{k+1}, e'_j), \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

получим вектор

$$v_* = e_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} (e_{k+1}, e'_j) e'_j,$$

обладающий следующими тремя свойствами: 1) $v_* \neq 0$, 2) $v_* \perp L'_k$ и

$$\text{3)} \qquad L_{k+1} = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_k; v_*\}.$$

Полагаем теперь

$$e'_{k+1} = \lambda v_*, \qquad \text{где} \qquad \lambda = \frac{1}{\|v_*\|} \neq 0.$$

Построенная таким образом система векторов $\{e'_1, \dots, e'_k, e'_{k+1}\}$ ортонормирована.

Докажем, что линейные оболочки $\boldsymbol{L_{k+1}}$ и $\boldsymbol{L'_{k+1}}$ совпадают друг с другом:

$$\boldsymbol{L_{k+1}} = \mathsf{span}\,\{\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_k}, \boldsymbol{e_{k+1}}\} =$$

$$= \mathsf{span}\,\{\boldsymbol{e'_1}, \ldots, \boldsymbol{e'_k}, \boldsymbol{e'_{k+1}}\} = \boldsymbol{L'_{k+1}}. \qquad (\boldsymbol{H_{k+1}})$$

С этой целью заметим, что в силу предположения индукции $(\boldsymbol{H_k})$ справедливы вложения

$$\mathsf{span}\,\{\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_k}\} = \mathsf{span}\,\{\boldsymbol{e'_1}, \ldots, \boldsymbol{e'_k}\} \subset \boldsymbol{L'_{k+1}},$$

а также

$$\mathsf{span}\,\{e'_1, \dots, e'_k\} = \mathsf{span}\,\{e_1, \dots, e_k\} \subset L_{k+1}.$$

Таким образом, для обоснования равенства (H_{k+1}) достаточно установить, что вектор e_{k+1} принадлежит подпространству L'_{k+1}, а вектор e'_{k+1} — подпространству L_{k+1}. Оба эти утверждения следуют из определения вектора v_*, в соответствии с которым

$$e_{k+1} = v_* + \sum_{j=1}^{k} (e_{k+1}, e'_j) e'_j.$$

Подставляя сюда выражение вектора v_* через e'_{k+1}, получаем

$$e_{k+1} = \|v_*\| e'_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} (e_{k+1}, e'_j) e'_j.$$

Следовательно, вектор e_{k+1} принадлежит подпространству L'_{k+1}, а вектор e'_{k+1} — подпространству L_{k+1}.

Заключаем теперь, что теорема верна в соответствии с принципом математической индукции. $\square$

Ортогонализация по индукции множества линейно независимых векторов, примененная при доказательстве предыдущей теоремы, называется *процессом Грама—Шмидта*. Подчеркнем, что этот процесс конструктивен.

Теорема (дополнение до ортонормированного базиса). *Всякую ортонормированную систему векторов евклидова пространства* $\boldsymbol{X}$ *можно дополнить до ортонормированного базиса этого пространства.*

Доказательство. Пусть имеется ортонормированная система векторов $\{e'_1, \ldots, e'_m\}$ евклидова пространства X, $m < n = \dim X$.

Векторы множества $\{e'_1, \ldots, e'_m\}$ линейно независимы. По теореме о дополнении это множество возможно расширить до некоторого базиса

$$B' = \{e'_1, \ldots, e'_m; e'_{m+1}, \ldots, e'_n\}$$

векторного пространства X. Этот базис B' может и не быть ортонормированным. Но применив к B' процесс Грама—Шмидта, получим в итоге искомый ортонормированный базис. $\square$

В частности, любой ненулевой вектор v евклидова пространства X можно нормировать и затем дополнить до ортогонального базиса.