Док по секвенциям

Семантическая эквивалентность

Общие секвенции

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \vdash \varphi_0$

— — — — —

Противоречие

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \vdash \bot$

— — — — — —

Истинность

- $\vdash \varphi_0$ φ_0

— — — — —

φ_1 χ, χ, ... - формулы

— — — — —

Γ, Γ_1, Γ_2 - последовательность формул

Правила

① $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \;;\; \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}$ введение ∧

② $\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \vdash \varphi}$

③ $\dfrac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$

исключение ∧

④ $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}$

⑤ $\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}$

введение ∨

⑥ $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash X \;;\; \Gamma, \psi \vdash X \;;\; \Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}{\Gamma \vdash X}$ исключение ∨

⑦ $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}$ введение ¬

⑧ $\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}$ исключение ¬

⑨ $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \;;\; \Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$ исключение →

⑩ $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}$ введение →

(11) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi;\ \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}$ введение $\bot$

(12) $\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}$ исключение $\bot$

(13) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$ расширение

(14) $\dfrac{\Gamma_1, \varphi, \psi, \Gamma_2 \vdash \chi}{\Gamma_1, \psi, \varphi, \Gamma_2 \vdash \chi}$ перестановка

(15) $\dfrac{\Gamma \vdash A;\ \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$ сечение

дерево

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}(3)}{\varphi, \psi \vdash \varphi}(3) \quad ; \quad \dfrac{\dfrac{}{\psi \vdash \psi}(3)}{\varphi, \psi \vdash \psi}(14)}{\varphi, \psi \vdash (\varphi \wedge \psi)}(1)$$

φ, ψ — Γ

$\Delta \vdash \Gamma$ — выводимость (формула Γ выводима)

▷ $\neg\neg X \vdash X$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{аксиома}\ \neg X \vdash \neg X}{(13)\ \neg X, \neg\neg X \vdash \neg X}}{(14)\ \neg\neg X, \neg X \vdash \neg X} \quad \dfrac{\text{аксиома}\ \neg\neg X \vdash \neg\neg X}{\neg\neg X, \neg X \vdash \neg\neg X}}{(11)\ \neg\neg X, \neg X \vdash \bot}$$

$$(7)\ \dfrac{\neg\neg X, \neg X \vdash \bot}{\neg\neg X \vdash X}$$

▷ $\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vdash \psi)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{аксиома}\ (\varphi\vdash\psi)\vdash(\varphi\vdash\psi)}{(13)\ (\varphi\vdash\psi), \varphi, \neg\psi \vdash (\varphi\vdash\psi)}}{(14)\ \varphi, \neg\psi, (\varphi\vdash\psi) \vdash (\varphi\vdash\psi)} \quad \dfrac{\varphi, \neg\psi, (\varphi\vdash\psi)}{(11)\ \varphi, \neg\psi, (\varphi\vdash\psi), (\varphi\vdash\psi) \vdash \bot}}{(11)\ \varphi, \neg\psi, (\varphi\vdash\psi) \vdash \bot} \quad \dfrac{\varphi, \neg\psi, (\varphi\vdash\psi) \vdash \bot}{(8)\ \varphi, \neg\psi, (\varphi\vdash\psi) \vdash \neg(\varphi\vdash\psi)}$$

$$(7)\ \dfrac{\varphi, \neg\psi, (\varphi\vdash\psi) \vdash \bot}{\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi\vdash\psi)}$$