Тема : Размерность и базисы линейного пространства

1^0. Определение линейно зависимых и линейно независимых систем элементов векторного пространства. Эквивалентные системы векторов. Число элементов в линейно независимых эквивалентных системах. Максимальные системы векторов и их эквивалентность. **2^0**. Размерность линейного пространства. **3^0**. Базис линейного конечномерного пространства. Теорема о разложении по базису. Теорема о дополнении до базиса. Следствия. **4^0**. Координаты вектора в базисе. **5^0**. Матрица перехода от одного базиса к другому: определение и свойства. **6^0**. Изоморфизм линейных пространств. Инвариантность размерности при изоморфизме. Теорема об изоморфности векторных пространств одинаковой размерности.

1^0. Пусть $\boldsymbol{X}$ — это линейное пространство над полем $\boldsymbol{K}$.

Определение. *Векторы* $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, ..., $\boldsymbol{v_n}$ *из* $\boldsymbol{X}$ *называются линейно зависимыми, если существует нетривиальная их линейная комбинация, равная нулю:*

$$\exists\,\{\boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2}, \ldots, \boldsymbol{\lambda_n}\} \subset \boldsymbol{K} : \ \boldsymbol{\lambda_1 v_1} + \boldsymbol{\lambda_2 v_2} + \cdots + \boldsymbol{\lambda_n v_n} = \mathbf{0},$$

причем $\boldsymbol{\lambda_j} \neq \mathbf{0}$ *по крайней мере для одного индекса* $\boldsymbol{j}$.

Любое множество векторов, включающее в себя вектор нуль из пространства X, является линейно зависимым.

Множество векторов, в котором хотя бы два вектора совпадают друг с другом, является линейно зависимым. Например, если $v_1 = v_2$, то соответствующая нетривиальная линейная комбинация имеет вид

$$v_1 - v_2 + 0v_3 + \cdots + 0v_n = 0.$$

Определение. *Векторы* v_1, v_2, ..., v_n *из* X *называются линейно независимыми, если не существует ни одной равной нулю нетривиальной линейной комбинации этих векторов, то есть если*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Множество, состоящее из единственного не равного нулю вектора из пространства X, является линейно независимым.

Теорема. *Ненулевые векторы v_1, v_2, ..., v_n из X, $n \geqslant 2$, линейно зависимы тогда и только тогда, когда какой-либо один из них можно представить в виде линейной комбинации всех остальных:*

$$\exists\, j: \qquad v_j = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \\ + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Если некоторое подмножество системы векторов v_1, v_2, ..., v_n из X линейно зависимо, *то и все множество векторов* v_1, v_2, ..., v_n *линейно зависимо. Если система векторов* v_1, v_2, ..., v_n *из* X *линейно независима, то и любое его подмножество также линейно независимо.*

Все утверждения теоремы легко доказать, пользуясь определением линейной независимости. Проделайте это в качестве упражнения.

Теорема $(s \leqslant t)$. *Если каждый из векторов v_1, v_2, ..., v_s линейно независимой системы является линейной комбинацией некоторых других векторов f_1, f_2, ..., f_t, то число s векторов в первом множестве не может быть больше числа t векторов во втором: $s \leqslant t$.*

Иными словами, если векторы v_1, v_2, ..., v_s линейно независимы и при этом

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_s\} \subset \operatorname{span}\{f_1, f_2, \ldots, f_t\},$$

то справедливо неравенство $s \leqslant t$. Таким образом, в линейной оболочке любого множества из t векторов пространства X не может существовать $(t+1)$-го линейно независимого вектора.

На линейном пространстве X вводится отношение эквивалентности. Именно, два множества векторов считаются *эквивалентными* друг другу, если каждый вектор одной системы является линейной комбинацией векторов второй из них.

Из этого определения и теоремы ($s \leqslant t$) следует, что *любые две эквивалентные системы линейно независимых векторов пространства* X *содержат одинаковое число элементов*.

Отметим, что эквивалентные линейно зависимые системы могут содержать разное число векторов. Если есть две эквивалентные системы векторов, то обе они могут быть как линейно зависимыми, так и линейно независимыми. Может также оказаться, что одна из этих систем линейно зависимая, а другая — нет.

Определение. *Линейно независимая система векторов пространства $\boldsymbol{X}$ называется максимальной, если при добавлении к ней любого ненулевого вектора из $\boldsymbol{X}$ она становится линейно зависимой.*

Лемма. *Любые две максимальные системы векторного пространства эквивалентны друг другу.*

Доказательство. Рассмотрим две максимальные системы, задаваемые равенствами

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\} \quad \text{и} \quad F = \{f_1, f_2, \ldots, f_t\}.$$

Взяв элемент v_1 из V, добавим его к множеству F. В результате получим линейно зависимую систему $F \cup \{v_1\}$. Следовательно, существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация векторов из этого множества:

$$\exists \{\mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset K: \ \mu v_1 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_t f_t = 0.$$

Среди коэффициентов этой линейной комбинации по крайней мере один не равен нулю. В качестве такого ненулевого коэффициента подходит скаляр μ. В самом деле, если предположить, что $\mu = 0$, то получим равенство

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_t f_t = 0,$$

в котором какой-то коэффициент λ_j обязательно не равен нулю: по условию комбинация нетривиальна. Но это противоречит условию линейной независимости векторов множества F и, таким образом, $\mu \neq 0$. Следовательно, имеет место равенство

$$v_1 = -(\mu^{-1}\lambda_1)f_1 - (\mu^{-1}\lambda_2)f_2 - \cdots - (\mu^{-1}\lambda_t)f_t.$$

Это означает, что вектор v_1 принадлежит линейной оболочке множества F.

Аналогично устанавливается, что и любой другой вектор v_j из V также принадлежит

$\operatorname{span} \boldsymbol{F}$. Следовательно, справедливо вложение

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_s}\} \subset \operatorname{span}\{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \ldots, \boldsymbol{f_t}\}.$$

Аналогично устанавливается обратное вложение

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \ldots, \boldsymbol{f_t}\} \subset \operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_s}\}.$$

Таким образом, линейные оболочки множеств $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{F}$ совпадают друг с другом, то есть эти два максимальных множества векторного пространства эквивалентны. $\square$

В частности, как это следует из теоремы ($s \leqslant t$), любые две максимальные системы векторов

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\} \quad \text{и} \quad F = \{f_1, f_2, \ldots, f_t\},$$

линейного пространства, будучи эквивалентными, состоят из одинакового числа элементов: $s = t$.

2^0. Пусть $\boldsymbol{X}$ — это линейное пространство над полем $\boldsymbol{K}$. Тогда мыслимы следующие две взаимоисключающие возможности:

1) В пространстве $\boldsymbol{X}$ существуют линейно независимые системы векторов с *любым наперед заданным числом элементов*;

2) Все достаточно большие системы векторов в $\boldsymbol{X}$ линейно зависимы, то есть суще-

ствует такое натуральное число N, что любое подмножество $\{v_1, v_2, \ldots, v_N\} \subset X$ состоит из линейно зависимых векторов.

В первом из этих случаев говорят, что *линейное пространство X бесконечномерно*, используя для обозначения этого факта следующую запись: $\dim X = +\infty$.

В противном случае пишут $\dim X < +\infty$, и говорят при этом, что *линейное пространство* X *конечномерно*.

Всюду далее мы будем рассматривать именно конечномерные векторные пространства: в линейной алгебре имеют дело исключительно с ними.

Если конечномерное линейное пространство X не является нульмерным, $X \neq \{0\}$, то в нем *существует по крайней мере одна максимальная система*.

В самом деле, если $v_1 \neq 0$ — это любой ненулевой вектор из X, то одноэлементное множество $\{v_1\}$ линейно независимо. Далее, найдем какой-нибудь вектор $v_2 \in X$, линейно независимый с предыдущим вектором v_1.

Может оказаться, что $v_2 \in X$ с указанным свойством не существует. Тогда искомая максимальная система в X состоит ровно из одного элемента, то есть совпадает с множеством $\{v_1\}$.

В противном случае рассмотрим множество $\{v_1, v_2\}$ из двух линейно независимых векторов и найдем какой-нибудь вектор $v_3 \in X$, линейно независимый с $\{v_1, v_2\}$.

Если вектор $v_3 \in X$ с указанным свойством не существует, то искомая максимальная система в X — это множество $\{v_1, v_2\}$.

В противном случае следует рассмотреть линейно независимое множество $\{v_1, v_2, v_3\}$ и по индукции продолжить затем построение максимальной системы.

Следует отметить, что в силу определения конечномерного пространства указанный процесс построения множества линейно независимых векторов максимальной мощности обязательно завершится через конечное число шагов. Его итогом как раз и станет некоторая максимальная система векторов в пространстве X.

Определение. *Линейное пространство* X*, в котором любая максимальная система состоит в точности из* n *векторов, называется*

n*-мерным. При этом* n *называют размерностью пространства* X *и пишут* $\dim X = n$.

По уже доказанному любая максимальная система векторов из заданного конечномерного пространства состоит из одного и того же числа элементов. Таким образом, данное выше определение размерности пространства корректно.

Единственный пример линейного пространства, в котором нет ни одной максимальной системы векторов, это множество $\boldsymbol{X} = \{\mathbf{0}\}$, состоящее из единственного нулевого элемента. Как уже отмечалось, в этом случае пространство называют нульмерным, то есть полагают $\dim \boldsymbol{X} = \mathbf{0}$.

Данное определение размерности пространства хорошо согласуется с уже известной нам терминологией: числовую прямую называют одномерным вещественным пространством, плоскость — двумерным, а физическое пространство $\mathbb{R}^3$ — трехмерным.

Вещественное пространство $\mathbb{R}^n$ имеет размерность $\dim \mathbb{R}^n = n$. Максимальную систему в $\mathbb{R}^n$ образуют следующие векторы:

$$(1, 0, 0, \ldots, 0), \quad (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Здесь единица из поля $\mathbb{R}$ занимает поочередно все возможные координатные позиции.

Пространство $\mathbb{P}_n$ полиномов от независимой переменной t, степень которых не превосходит $n-1$, имеет размерность $\dim \mathbb{P}_n = n$. Максимальную систему в $\mathbb{P}_n$ образуют мономы

$$1, \quad t, \quad t^2, \quad t^3, \quad \ldots, \quad t^{n-1}.$$

Пространство $C(a, b)$ функций, непрерывных на интервале (a, b), бесконечномерно и по этой причине в линейной алгебре не рассматривается.

Линейное пространство $M_n(K)$ квадратных матриц размера $n \times n$ над полем K имеет размерность $\dim M_n(K) = n^2$.

Убедимся в этом, расположив элементы произвольной матрицы из $M_n(K)$ в одну строку:

сначала элементы первой строки, затем элементы второй и так до элементов последней строки включительно. В результате получим вектор-строку длины n^2, принадлежащую координатному пространству K^{n^2}.

Максимальную систему в координатном пространстве K^{n^2} образуют следующие векторы одинаковой длины:

$$(1, 0, 0, \ldots, 0), \quad (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Здесь единица из поля $\boldsymbol{K}$ занимает поочередно все возможные координатные позиции, которых всего $\boldsymbol{n^2}$.

Реконструируя каждый из векторов указанной максимальной системы в координатном пространстве $\boldsymbol{K^{n^2}}$ в матрицу размера $\boldsymbol{n \times n}$, получим максимальную систему в пространстве $\boldsymbol{M_n(K)}$.

Таким образом, пространство матриц $M_n(K)$ и координатное пространство K^{n^2} имеют в своих максимальных системах одинаковое число n^2 элементов, то есть

$$\dim M_n(K) = \dim K^{n^2} = n^2.$$

3^0. В любом конечномерном линейном пространстве X, $\dim X = n$, максимальные системы его векторов играют важную роль.

Определение. *Любая система из* n *линейно независимых векторов пространства* X, *где* $n = \dim X$, *называется базисом этого пространства.*

Удобно считать, что базис нульмерного пространства — это пустое множество. Существование же базиса в конечномерном линейном пространстве X, размерность которого $\dim X \geqslant 1$, следует из существования в нем по меньшей мере одной максимальной системы и из самого определения размерности.

Теорема (о разложении по базису). *Пусть в линейном пространстве* $\boldsymbol{X}$ *над полем* $\boldsymbol{K}$ *задан базис* $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_n}\}$. *Тогда каждый вектор из* $\boldsymbol{X}$ *можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации векторов* $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, ..., $\boldsymbol{e_n}$.

Доказательство. Пусть v — произвольный вектор из X. Добавив его к исходному базису, рассмотрим множество

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n, v\}.$$

В нем $n+1$ элемент и по определению размерности $\dim X$ это множество должно быть линейно зависимым, то есть существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация элементов этого множества:

$$\exists\, \mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \subset K: \qquad \mu v + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0.$$

Заметим, что в этом равенстве $\mu \neq 0$ (в противном случае имеем соотношение

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0,$$

из которого в силу линейной независимости векторов e_1, e_2, ..., e_n следует, что

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Это означает, что рассматриваемая линейная комбинация тривиальна, что противоречит ее выбору).

Таким образом, $\mu \neq 0$ и, следовательно, имеет место равенство

$$v = -(\mu^{-1}\lambda_1)e_1 - (\mu^{-1}\lambda_2)e_2 - \cdots - (\mu^{-1}\lambda_n)e_n.$$

Это и есть искомое разложение исходного вектора v по векторам базиса $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

Докажем теперь, что разложение произвольного вектора v из X по заданному базису единственно. Пусть

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$$

и одновременно справедливо другое представление

$$v = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_n e_n.$$

Тогда, учитывая, что $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$, и подставляя в это равенство оба предыдущих разложения, получим

$$(\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (\boldsymbol{\lambda}_n - \boldsymbol{\mu}_n)\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}.$$

Коэффициенты этой равной нулю линейной комбинации векторов базиса должны быть нулевыми:

$$\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\mu}_2 = \cdots = \boldsymbol{\lambda}_n - \boldsymbol{\mu}_n = \mathbf{0}.$$

Это и означает, что разложение вектора v по базису $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ единственно. $\square$

Теорема (о дополнении до базиса). *В линейном конечномерном пространстве* X *над полем* K, $\dim X = n$, *любую систему из* s *линейно независимых векторов,* $1 \leqslant s < n$, *можно дополнить до базиса пространства* X.

Доказательство. Пусть $1 \leqslant s < n$ и имеется система $\{f_1, f_2, \ldots, f_s\}$ линейно независимых векторов из X. Рассмотрим следующее объединение этой системы с каким-либо базисом пространства X:

$$\{f_1, f_2, \ldots, f_s, e_1, e_2, \ldots, e_n\}. \tag{I}$$

В этом множестве всего $s+n$ элементов. Преобразуем его следующим образом.

Если последний вектор e_n цепочки (I) линейно выражается через ее предыдущие векторы, то исключаем его из (I). В противном случае оставляем e_n в цепочке и переходим к рассмотрению вектора e_{n-1}.

Если вектор e_{n-1} цепочки линейно выражается через ее предыдущие векторы, то исключаем его из $(\mathbf{I})$. Иначе оставляем e_{n-1} в цепочке и переходим к рассмотрению вектора e_{n-2}.

Завершим реконструкцию множества $(\mathbf{I})$, рассмотрев в заключение вектор e_1. Если вектор e_1 цепочки линейно выражается через ее предыдущие векторы, то исключаем его из множества $(\mathbf{I})$. Иначе оставляем e_1 в цепочке и завершаем процесс.

Заметим, что ни один из векторов f_j не выражается линейно через предыдущие векторы f_1, f_2, ..., f_{j-1} в силу линейной независимости этих векторов и поэтому все векторы

f_j войдут в преобразованное по описанному выше правилу множество. Это итоговое множество, таким образом, имеет следующий вид:

$$\{f_1, f_2, \ldots, f_s, e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_t}\}, \qquad (\mathrm{I}')$$

где $i_1 < i_2 < \cdots < i_t$. Всего в преобразованном множестве $s + t$ разных векторов.

Предположим, что найдется какая-нибудь нетривиальная линейная комбинация преобразованного множества (I'), равная нулю:

$$\boldsymbol{\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_s f_s + \beta_1 e_{i_1} + \beta_2 e_{i_2} + \cdots + \beta_t e_{i_t} = 0}.$$

Тогда среди скаляров $\boldsymbol{\beta_1}$, $\boldsymbol{\beta_2}$, ..., $\boldsymbol{\beta_t}$ обязательно имеется хотя бы один ненулевой.

В противном случае, если $\boldsymbol{\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_t = 0}$, то имеем равенство

$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_s f_s = 0.$$

Но векторы f_1, f_2, ..., f_s по условию линейно независимы и поэтому рассматриваемая их линейная комбинация обязана быть тривиальной:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0.$$

Таким образом, в предположении равенства нулю скаляров β_1, β_2, ..., β_t рассматриваемая линейная комбинация

$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_s f_s + \beta_1 e_{i_1} + \beta_2 e_{i_2} + \cdots + \beta_t e_{i_t}$$

таже тривиальна, что противоречит ее выбору.

Следовательно, множество номеров, соответствующих ненулевым скалярам β_j в рассматриваемой линейной комбинации, не пусто, то есть $\{j \mid \beta_j \neq 0\} \neq \emptyset$. Выберем в этом непустом множестве максимальный элемент:

$$k = \max\{j \mid \beta_j \neq 0\}.$$

Тогда $\beta_k \neq 0$, а $\beta_{k+1} = \cdots = \beta_t = 0$. Равенство нулю рассматриваемой линейной комбинации принимает при этом следующий вид:

$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_s f_s + \beta_1 e_{i_1} + \cdots + \beta_k e_{i_k} = 0.$$

Здесь $\beta_k \neq 0$ и поэтому элемент e_{i_k} линейно выражается через все предыдущие:

$$e_{i_k} = -(\beta_k^{-1}\alpha_1)f_1 - \dots - (\beta_k^{-1}\alpha_s)f_s - \\ -(\beta_k^{-1}\beta_1)e_{i_1} - \dots - (\beta_k^{-1}\beta_{k-1})e_{i_{k-1}}.$$

Но это противоречит правилу построения системы (I′), в соответствии с которым вектор e_{i_k} нужно было исключить из рассмотрения еще на этапе трансформации системы (I) к виду (I′).

Следовательно, никакая нетривиальная линейная комбинация вида

$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_s f_s + \beta_1 e_{i_1} + \beta_2 e_{i_2} + \cdots + \beta_t e_{i_t}$$

не может быть равной нулю: предположение о существовании линейной комбинации с таким свойством привело нас к противоречию.

Таким образом, доказано, что преобразованная система векторов

$$\{f_1, f_2, \ldots, f_s, e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_t}\}$$

линейно независима.

Заметим, что векторы исходной системы (I) линейно выражаются через векторы преобразованной системы (I'), как это следует из определения последней.

Но исходная цепочка (I) включает в себя базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ пространства X.

По векторам этого базиса однозначно раскладывается любой вектор v из X.

Следовательно, любой вектор v из X представим также линейной комбинацией векторов из множества (I').

По этой причине система векторов (I') не только линейно независима, но и максимальна. Это по определению означает, что векторы

$$\{f_1, f_2, \ldots, f_s, e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_t}\}$$

образуют базис пространства X. В частности, имеет место равенство $s + t = n$. $\square$

В качестве следствия доказанной теоремы отметим, что всякий ненулевой вектор конечномерного пространства X можно включить в базис этого пространства.

Еще одно следствие: если X_1 и X_2 — это линейные подпространства в X и при этом $X_1 \subset X_2$, $X_1 \neq X_2$, то $\dim X_1 < \dim X_2$.

4^0. Пусть есть базис $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ конечномерного линейного пространства X над полем K.

По теореме о разложении по базису любой вектор v из пространства X однозначно представим в виде линейной комбинации векторов базиса B, то есть в виде

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n. \qquad (\mathbf{E}_v)$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda_1}, \ldots, \boldsymbol{\lambda_n}$ — это скаляры из поля $\boldsymbol{K}$.

Определение. *Скаляры* $\boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2}, \ldots, \boldsymbol{\lambda_n}$ *в разложении* $(\mathrm{E}_{\boldsymbol{v}})$ *называются координатами вектора* $\boldsymbol{v}$ *в базисе* $\boldsymbol{B}$.

Координаты суммы векторов в заданном базисе получаются сложением координат слагаемых. При умножении вектора на скаляр его координаты также умножаются на тот же самый скаляр.

Пример. В пространстве полиномов $\mathbb{P}_n$ степени $\leqslant n-1$ стандартный базис образуют мономы

$$e_0 = 1,\ e_1 = t,\ e_2 = t^2, \quad \ldots, \quad e_{n-1} = t^{n-1}.$$

В этом базисе координаты полинома

$$f(t) = a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \cdots + a_{n-1} t + a_n$$

совпадают с его коэффициентами

$$(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1).$$

5^0. Пусть X — конечномерное линейное пространство над полем K и есть два его базиса

$$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \text{ и } B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}.$$

Каждый из векторов базиса B' однозначно представим в виде некоторой линейной комбинации векторов базиса B, то есть справедливы следующие равенства:

$$\left\{\begin{array}{lllll} e_1' = & a_{11}e_1 + & a_{21}e_2 + & \cdots & + a_{n1}e_n \\ e_2' = & a_{12}e_1 + & a_{22}e_2 + & \cdots & + a_{n2}e_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ e_n' = & a_{1n}e_1 + & a_{2n}e_2 + & \cdots & + a_{nn}e_n \end{array}\right. . \qquad (\text{в}'\text{в})$$

Из коэффициентов разложений (в′в) составим следующую квадратную матрицу:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}). \tag{MT}$$

Обратите внимание, что координатами вектора e'_j в базисе $\boldsymbol{B}$ служат элементы *столбца с номером* j матрицы $\boldsymbol{A}$, задаваемой равенством (MT).

Определение. *Матрица* A, *задаваемая равенством* (MT), называется матрицей перехода от базиса B к базису B'.

Пусть вектор v из пространства X представлен в виде линейной комбинации векторов базиса B', то есть в виде

$$v = \lambda'_1 e'_1 + \lambda'_2 e'_2 + \cdots + \lambda'_n e'_n.$$

Подставляя в правую часть разложения векторов e'_j, $j = 1, 2, \dots, n$, по векторам базиса B, получаем равенство

$$v = \lambda'_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n) + \\ +\lambda'_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n) + \dots + \\ +\lambda'_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n).$$

Записывая выражение в правой части в виде

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n,$$

и пользуясь однозначностью разложения вектора $\boldsymbol{v}$ по базису $\boldsymbol{B}$, получаем правило преобразования координат вектора при переходе от одного базиса к другому:

$$\left\{\begin{array}{lllll} \lambda_1 = & a_{11}\lambda'_1 + & a_{12}\lambda'_2 + & \cdots & + a_{1n}\lambda'_n \\ \lambda_2 = & a_{21}\lambda'_1 + & a_{22}\lambda'_2 + & \cdots & + a_{2n}\lambda'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_n = & a_{n1}\lambda'_1 + & a_{n2}\lambda'_2 + & \cdots & + a_{nn}\lambda'_n \end{array}\right. . \qquad (\lambda\lambda')$$

Эти же соотношения можем записать в следующем матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}. \qquad (\lambda\lambda')$$

Введем обозначения

$$\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{\lambda}' = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}, \qquad A = (a_{ij}).$$

Тогда соотношения $(\lambda\lambda')$ можно записать совсем коротко:

$$\vec{\lambda} = A\vec{\lambda}'.$$

Говорят, что формулы $(\lambda\lambda')$ выражают старые координаты $\vec{\lambda}$ через его же новые координаты при помощи линейного преобразования переменных с матрицей A.

Базисы B и B' в только что проведенных рассуждениях можно поменять местами. При этом получим аналогичную систему равенств

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (\lambda'\lambda)$$

Соотношения $(\lambda'\lambda)$ в матричном виде записываются следующим образом:

$$\vec{\lambda}' = A'\vec{\lambda}.$$

Формулы $(\lambda'\lambda)$ выражают новые координаты $\vec{\lambda}'$ через его же старые координаты при помощи линейного преобразования переменных с матрицей A'.

Заметим, что преобразования $(\lambda\lambda')$ и $(\lambda'\lambda)$ взаимно обратны. Следовательно, для любой пары векторов $\vec{\lambda}'$ и $\vec{\lambda}$ из n-мерного координатного пространства справедливы равенства

$$\vec{\lambda}' = A'\vec{\lambda} = A'A\vec{\lambda}' \quad \Rightarrow \quad A'A = E;$$

$$\vec{\lambda} = A\vec{\lambda}' = AA'\vec{\lambda} \quad \Rightarrow \quad AA' = E.$$

Здесь E — это единичная матрица. При этом говорят, что и матрицы A и A' также взаимно обратны, то есть удовлетворяют равенствам

$$A'A = AA' = E \quad \Leftrightarrow \quad A' = A^{-1},\ A = (A')^{-1}.$$

Теорема (о матрице перехода). *Матрица перехода A от базиса B линейного пространства к базису B' этого же пространства об-*

ратима. Координаты вектора в новом базисе B' *выражаются через его же координаты в старом базисе по формуле* $\vec{x}' = A^{-1}\vec{x}$.

6^0. Использование координат позволяет свести операции над векторами к действиям со скалярами. Выбор разумной системы координат, то есть базиса, существенно упрощает выкладки.

В частности, координатные системы используются при отождествлении векторных пространств одинаковой размерности.

Определение. *Линейные пространства* $\boldsymbol{X}$ *и* $\boldsymbol{Y}$ *над полем* $\boldsymbol{K}$ *называются изоморфными друг другу, если существует биективное отображение* $\boldsymbol{f : X \mapsto Y}$, *для которого справедливы равенства*

$$\boldsymbol{f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v),} \tag{$\mathbf{L_f}$}$$

где $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *— произвольные скаляры из* $\boldsymbol{K}$, *а* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *— произвольные векторы из* $\boldsymbol{X}$. *Отображение* $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{Y}$ *при этом называют изоморфизмом векторных пространств* $\boldsymbol{X}$ *и* $\boldsymbol{Y}$.

Равенства $(\mathbf{L_f})$ формулируют также следующим образом: отображение $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{Y}$ — это изоморфизм аддитивных групп векторных пространств $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, обладающий дополнительным свойством однородности

$$\boldsymbol{f(\alpha u) = \alpha f(u), \qquad \forall\, \alpha \in K,\ \forall\, u \in X.}$$

Любое отображение $\boldsymbol{f : X \mapsto Y}$ со свойством $(\mathbf{L_f})$ называют линейным отображением над полем $\boldsymbol{K}$.

По определению, изоморфизм $f : X \mapsto Y$ — это взаимно однозначное отображение. Следовательно, существует обратное к нему отображение $f^{-1} : Y \mapsto X$. Это обратное отображение также является изоморфизмом.

Размерность векторного пространства не меняется при его изоморфном отображении на другое пространство: если $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

— базис пространства $\boldsymbol{X}$, то его образ

$$f(B) = \Big\{ f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n) \Big\}$$

при изоморфном отображении $f : X \mapsto Y$ образует базис в пространстве $\boldsymbol{Y}$. Докажите это самостоятельно.

Говорят также, что размерность векторного пространства — это *инвариант* любого изоморфизма этого пространства.

Таким образом, если векторные пространства X и Y изоморфны, то их размерности совпадают: $\dim X = \dim Y$.

Теорема (об изоморфизме). *Конечномерные векторные пространства одинаковой размерности изоморфны между собой.*