Семинар «Секвенции 2.0»

Синтаксическая эквивалентность

$\varphi \equiv \psi$

$\uparrow\downarrow$

$\varphi \vdash \psi$
$\psi \vdash \varphi$

1)

а) $$\dfrac{\dfrac{\varphi \to \psi,\ \varphi \vdash \psi}{\varphi \to \psi,\ \varphi \vdash \neg\varphi \vee \psi;\ \varphi \to \psi,\ \neg\varphi \vdash \neg\varphi \vee \psi;\ \vdash \varphi \vee \neg\varphi}\,5 \quad \dfrac{\neg\varphi \vdash \neg\varphi}{}\,11,12,4}{\text{а)}\ \varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi}\,\text{др}$$

$\neg\varphi \vee \psi \equiv \varphi \to \psi$

$$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi,\quad \Gamma, \neg\varphi \vdash \psi;\quad \vdash \varphi \vee \neg\varphi}{\Gamma \vdash \psi}$$

допустимое правило

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi \qquad \neg\varphi \vdash \neg\varphi}{\neg\varphi, \varphi \vdash \varphi,\quad \neg\varphi, \varphi \vdash \neg\varphi}\,10}{\neg\varphi, \varphi \vdash \bot}}{\neg\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \varphi \vdash \psi}\,9,11,12 \quad \dots}{\neg\varphi \vee \psi, \neg\varphi \vdash \varphi \to \psi;\ \neg\varphi \vee \psi, \psi, \vdash \varphi \to \psi;\ \cancel{\neg\varphi \vee \psi}}\,7$$

$$6\ \dfrac{}{\neg\varphi \vee \psi \equiv \varphi \to \psi}$$

б) $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$

аксиома

$$\frac{\varphi \wedge \varphi \vdash \varphi \wedge \varphi}{\varphi \wedge \varphi \vdash \varphi}\ \text{3 сим 2}$$

аксиома

$$\frac{\varphi \vdash \varphi;\ \varphi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \varphi \wedge \varphi}\ 1$$

$$\frac{\varphi \vdash \varphi\ ;\ \psi \vdash \psi}{\varphi, \psi \vdash \varphi;\ \ \varphi, \psi \vdash \psi}\ 11, 12$$

в) $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi) \vee (\neg\psi)$

$$\frac{}{\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi}\ 1$$

$$\frac{\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi}{\neg(\varphi \wedge \psi), \varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi}\ 11, 12 \qquad \frac{\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg(\varphi \wedge \psi), \varphi, \psi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)}\ 12, 12$$

$$\frac{}{\neg(\varphi \wedge \psi), \varphi, \psi \vdash \bot}\ 10$$

$$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi), \varphi, \psi \vdash \bot}{\neg(\varphi \wedge \psi), \varphi \vdash (\neg\psi)}\ 9$$

$$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi), \varphi \vdash (\neg\psi)}{\neg(\varphi \wedge \psi), \varphi \vdash (\neg\varphi) \vee (\neg\psi)}\ 5 \qquad \frac{\neg\varphi \vdash \neg\varphi}{\neg(\varphi \wedge \psi), \neg\varphi \vdash (\neg\varphi) \vee (\neg\psi)}\ 4, 11, 12$$

$$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi), \varphi \vdash (\neg\varphi) \vee (\neg\psi);\ \neg(\varphi \wedge \psi), \neg\varphi \vdash (\neg\varphi) \vee (\neg\psi)}{\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash (\neg\varphi) \vee (\neg\psi)}\ \text{9п}$$

φ - фи
ψ - пси
χ - хи

Исчисление Гильбертовского типа

Аксиомы

1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$
3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
4) $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$
5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$
6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$
7) $\psi \to (\varphi \vee \psi)$
8) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$
9) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$
10) $\neg\neg\varphi \to \varphi$

MP (правило вывода)

(дедуктивное правило, дедуктивный вывод)

$$\frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$$

По и.Б.

2. а) $\vdash \varphi \to \varphi$

1. 2. $(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to ((\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$

2. 1. $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$

3. MP (1, 2). $(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$

4. 1. $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$

5. MP (3, 4) $\varphi \to \varphi$

Теорема о дедукции по и.Б.:

$\varphi_1 \to (\varphi_2 \dots (\varphi_n \to \psi))$
тогда и только тогда, когда
$\{\varphi_1, \dots \varphi_n\} \vdash \psi$

б) $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$

$\varphi \wedge \psi$

0. φ, ψ
1. 3. $(\varphi \to \varphi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \varphi \wedge \psi))$
2. D. $\varphi \to \varphi$
3. MP $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\varphi \wedge \psi))$
4. 1. $\psi \to (\varphi \to \psi)$
5. MP (0, 4) $\varphi \to \psi$
6. MP (3, 5) $\varphi \to (\varphi \wedge \psi)$
7. MP (0, 6) $\varphi \wedge \psi$

Резолюция:

$D_1 = \tilde{D}_1 \vee A$

$D_2 = \tilde{D}_2 \vee \bar{A}$

$res_A(D_1, D_2) = \tilde{D}_1 \vee \tilde{D}_2$

↑ резольвента

$res(A, \bar{A}) = 0$

$D_1 \dots D_n \vdash$.

$\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash \psi$

$\varphi_1 \dots \varphi_n, \neg\psi \vdash$

3.a) $A \to (B \to C),\ C \wedge D \to E,\ \bar{F} \to D \wedge \bar{E} \vdash A \to (B \to F)$

Переводим каждую формулу в ДНФ

$A \to (B \to C) \equiv \bar{A} \vee \bar{B} \vee C$

$C \wedge D \to E \equiv \overline{C \wedge D} \vee E \equiv \bar{C} \vee \bar{D} \vee E$

$\bar{F} \to D \wedge \bar{E} \equiv F \vee D \wedge \bar{E} \equiv (F \vee D) \wedge (F \vee \bar{E})$

$\overline{A \to (B \to F)} \equiv \overline{\bar{A} \vee \bar{B} \vee F} \equiv A \wedge B \wedge \bar{F}$

$S = \{ \underset{1}{\bar{A} \vee \bar{B} \vee C},\ \underset{2}{\bar{C} \vee \bar{D} \vee E},\ \underset{3}{F \vee D},\ \underset{4}{F \vee \bar{E}},\ \underset{5}{A},\ \underset{6}{B},\ \underset{7}{\bar{F}} \}$

$res(1,2) = \bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{D} \vee E$ (8)

$res(3,7) = D$ (9)

$res(4, 7) = \bar{E}$ (10)

$res(8, 5) = \bar{B} \lor \bar{D} \lor \bar{F}$ (11)

$res(11, 6) = \bar{D} \lor E$ (12)

$res(12, 9) = E$ (13)

$res(13, 10) = 0$

$\rightarrow$ Значит, резольвента противоречивая

$\Rightarrow$ секвенция доказана

б) $\neg A \lor C,\ C \to B,\ B \to A \vdash A \to (B \to C)$

КНФ:

$\neg A \lor C \equiv \bar{A} \lor C$

$C \to B \equiv \bar{C} \lor B$

$B \to A \equiv \bar{B} \lor A$

$\overline{A \to (B \to C)} \equiv \overline{\bar{A} \lor \bar{B} \lor C} \equiv A \land B \land \bar{C}$

$res(A \lor B, \bar{A} \lor \bar{B}) = B \lor \bar{B}$

$res(A \lor B, \bar{A} \lor \bar{B}) = A \lor \bar{A}$

$S = \{ \underset{1}{\bar{A} \lor C},\ \underset{2}{\bar{C} \lor B},\ \underset{3}{\bar{B} \lor A},\ \underset{4}{A},\ \underset{5}{B},\ \underset{6}{\bar{C}} \}$

$res(1, 6) = \bar{A}$ (7)

$res(7, 4) = 0$

Кр!

Лямбда-исчисление

и

исчисление секвенций

(+ резолюция)