$$S=\left(\frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2}\right)'x=\left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right)'x=$$

$$=\left(\frac{(2-2x)(1-x)^{\cancel{2}}+2\cancel{(1-x)}(2x-x^2)}{(1-x)^{\cancel{4}\,3}}\right)x=$$

$$=\left(\frac{2-2x-2x+2x^2}{(1-x)^3}\right)x=\frac{2x}{(1-x)^3}$$

<u>или</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$

$$S(x)=1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\dots$$

$$\int_0^x S(t)dt=x^2+2x^3+3x^4+\dots=$$

$$=x(x+2x^2+3x^3+\dots)=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty} nx^n=$$

$$=\frac{x^2}{(1-x)^2}$$

$$S(x)=\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)'=\frac{2x}{(1-x)^3}$$

<u>Ряды Фурье</u>.

Если в ряд Тейлора можно только беск. диф. разложить, то в р. Ф. можно по п. Дирихле.

$f(x)$ имеет период $\underline{2L}$

Тогда $f(x)$ можно представить в виде ряда $\sim \frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{\pi n x}{L}+b_n\sin\frac{\pi n x}{L}$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{\pi n x}{L}\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{\pi n x}{L}\,dx$$

Если $f(x)$ — чётн. на $[-l, l]$

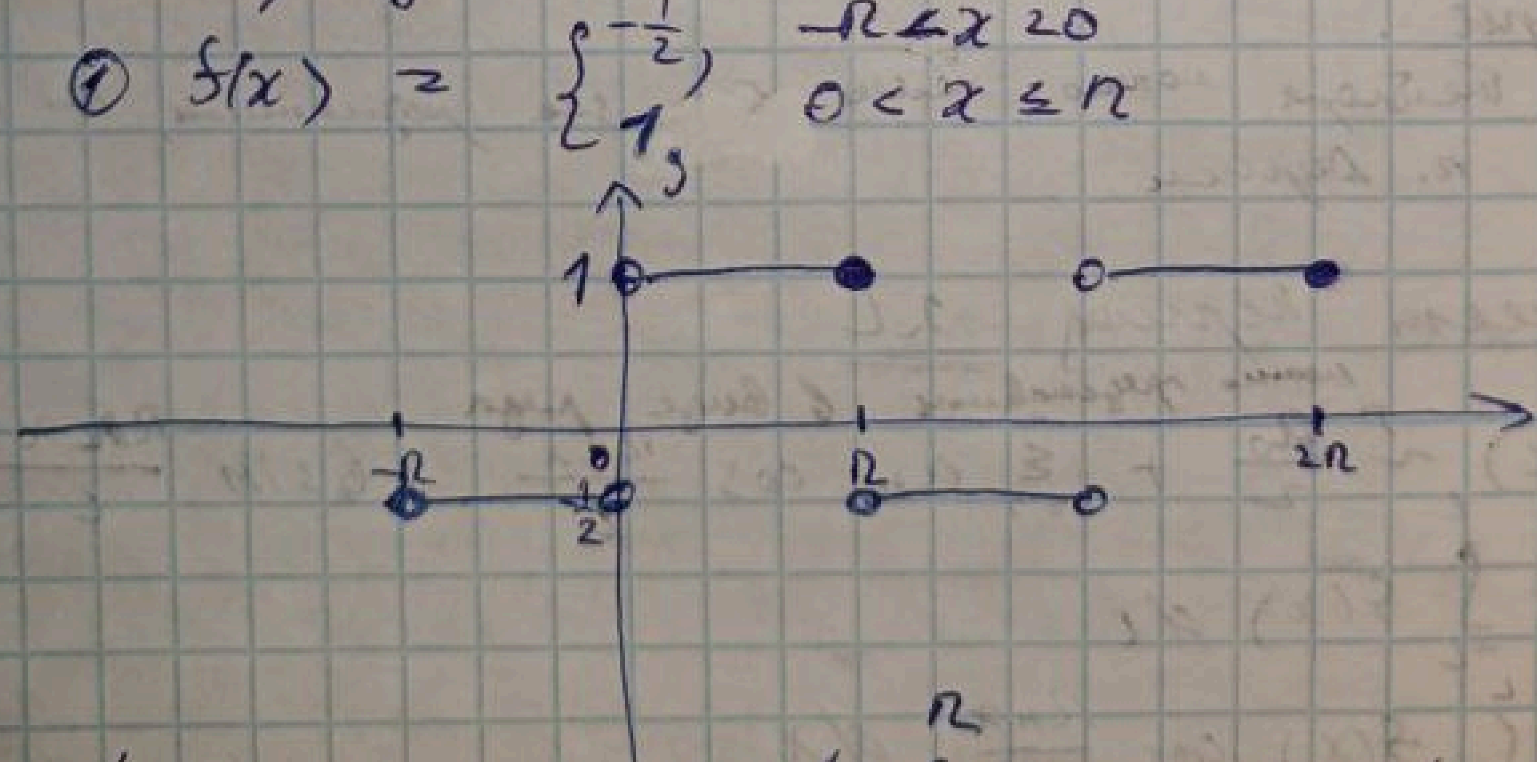
$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \ldots ; \quad b_n = 0$$

Теорема Дирихле:

если на $[-l, l]$ функция кус. мон., кус. огранич., то в точках непр. ряд сходится к $f(x)$, в точках разрыва полусумма значений

Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π:

① $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & -\pi \le x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$



$$l = \pi ; \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2}\pi + 1\cdot\pi\right) = \frac{1}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\frac{1}{2}\cos(nx)\,dx = -\frac{1}{2\pi n}\cos(nx)\,d(nx) =$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} =$$

$$-\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$\frac{1}{2\pi n} - \frac{(-1)^n}{2\pi n} - \frac{(-1)^n}{\pi n} + \frac{1}{\pi n} =$$

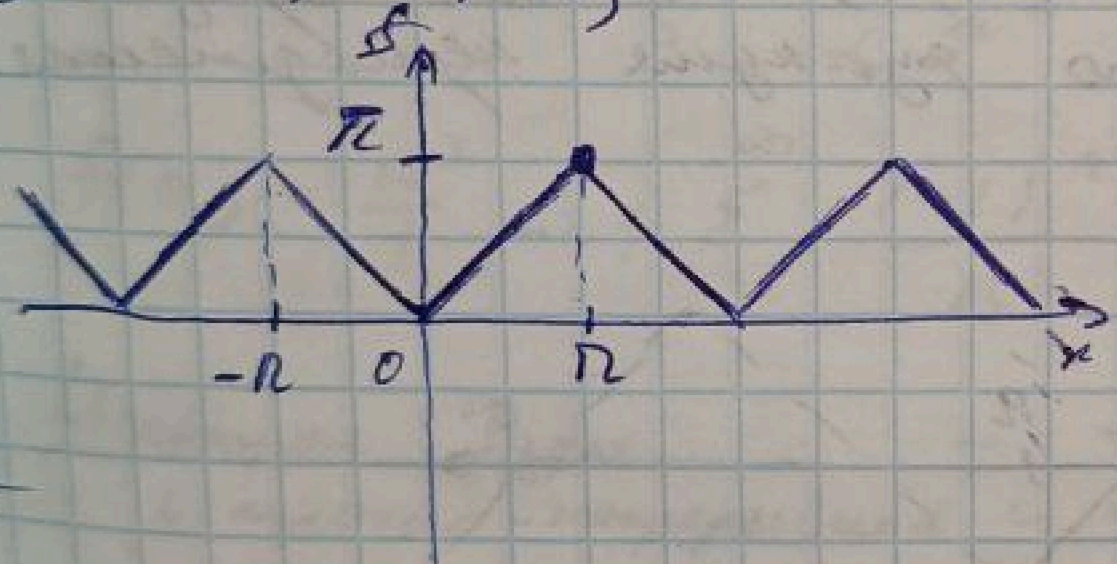
$$= \begin{cases} 0, & n = 2m \\ \frac{1}{\pi n} + \frac{2}{\pi n} = \frac{3}{\pi n}, & n = 2m+1 \end{cases}$$

т.е. 0 при чёт n и $\frac{3}{\pi n}$ ~~$\frac{2}{\pi n}$~~ ~~$\frac{2}{\pi n}$~~ при n нечёт.

Итоговый ряд: $\frac{a_0}{2}$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{3}{\pi(2m+1)}\sin\big((2m+1)x\big)$$

③ $f(x) = |x|, \quad -\pi < x \le \pi$



$l = \pi$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$du = u'dx; \quad v = \int dv\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \begin{cases} u = x \\ du = dx \\ dv = \cos nx\,dx \\ v = \frac{1}{n}\sin nx + C \end{cases} \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \int\frac{\sin nx}{n}\,dx\Big|_0^{\pi}\right)$$

$b_n = 0$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{2}{\pi n^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

n – чёт. : $a_n = 0$;

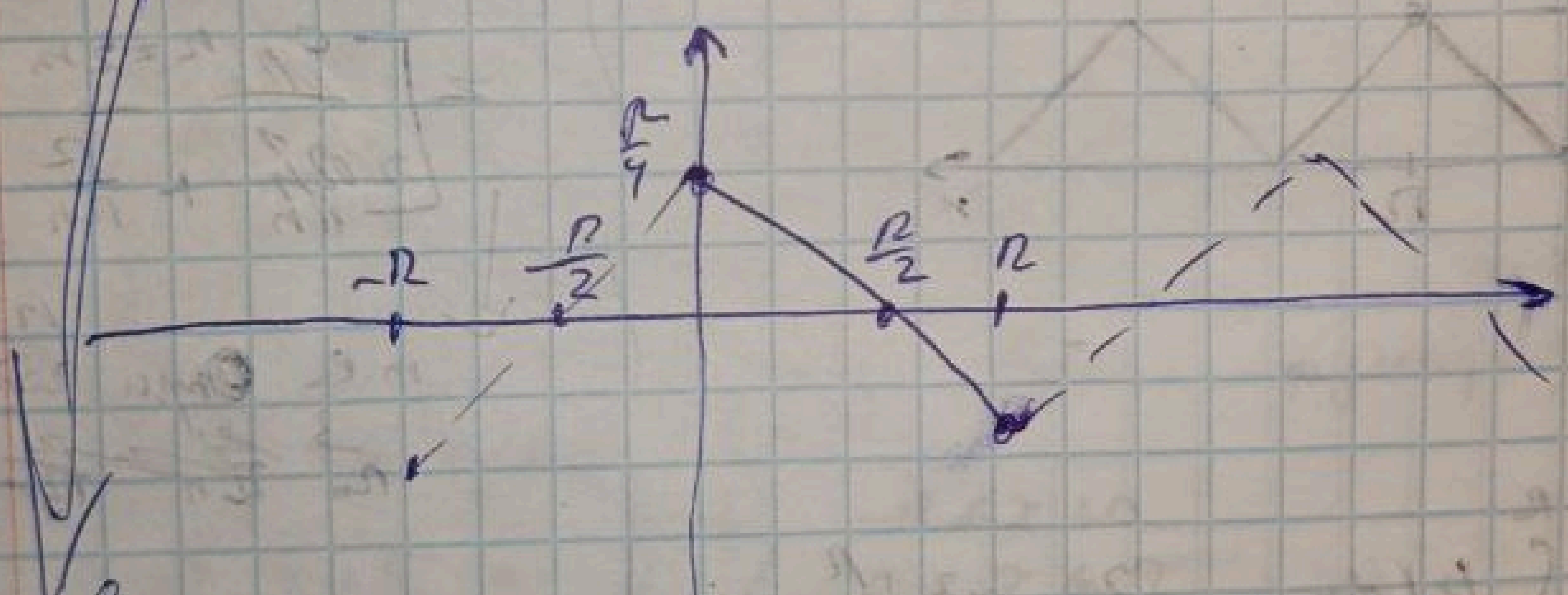
n – нечёт. : $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$

Ряд примет вид

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \cos((2n+1)x)$$

⑥ Функцию $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ разложить в ряд косинусов на интервале $(0, \pi)$

↳ чтобы $f(x)$ при разложении в ряд Фурье была представлена в виде ряда косинусов, нужно дозадать функцию $f(x)$ на интервале $(-\pi, 0)$ чётным образом и сказать, что функция периодическая.



$b_n = 0$; a_0 и a_n - посчитать

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\, dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos nx\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi}{4}\cos nx - \frac{x}{2}\cos nx\, dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}}_{0} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

при $n = 2m$: 0

$n = 2m+1$: $\frac{2}{\pi n^2}$

Итоговый вид ряда:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)x) \right)$$

Разбор Д/з. (8) Пользуясь разложением в ряд Фурье на интервале $[-\pi, \pi]$ функции $f(x) = x^2$ найти суммы рядов:

Д/з: 2, 4, 5, 7, 8, 9

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

можно заменить на =, т.к. функция непрерывна

$$f(x) = x^2 \approx \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nx \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_1 \frac{4}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$f(0) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{3\pi^2}$$

Интеграл Фурье

f кусочно-непрерывная и абсолютноинтегрируемая функция

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty, \quad f(x) - \text{кус. непр.} \ \forall \text{отр.} \in \mathbb{R}$$

Интеграл Фурье:

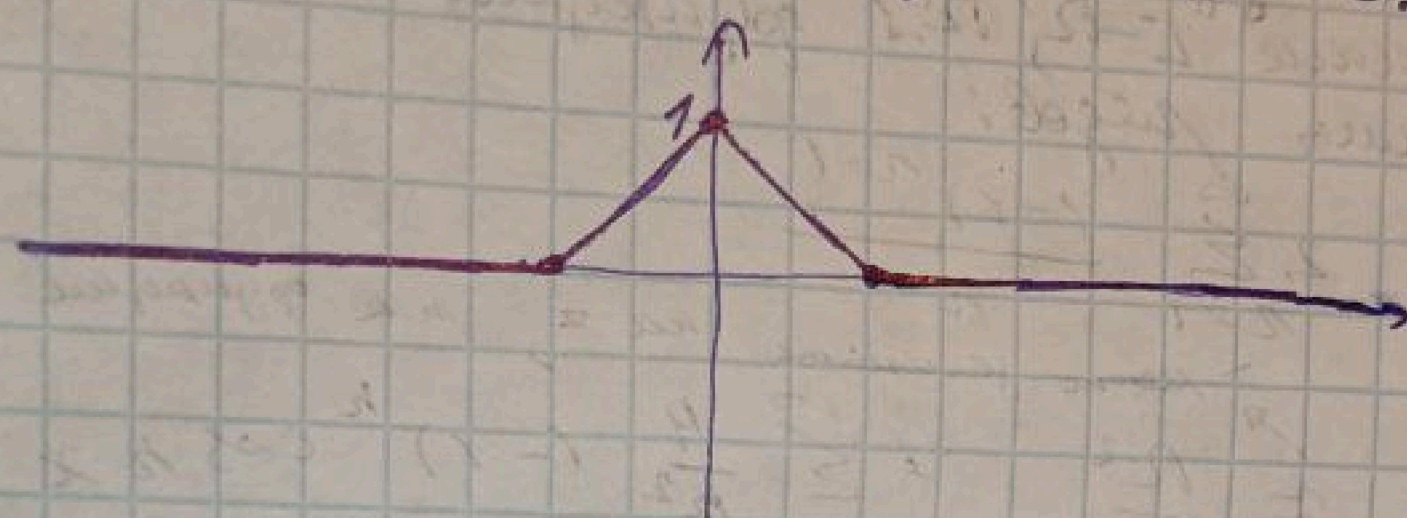
$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(y) \cos(xy) + b(y) \sin(xy)]\, dy$$

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos(xy)\, dy$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \sin(xy)\, dy$$

① $f(x) = \begin{cases} 1-\frac{x}{2}, & 0 \le x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$

Написать инт-л Фурье, продолжив чётным образом при $x < 0$.



$b(y) = 0$

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^2 \left(1-\frac{x}{2}\right)\cos(xy)\,dy =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^2 \cos(xy)\,dy - \int_0^2 \frac{y}{2}\cos(xy)\,dy\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{x} - \frac{1}{x}\left(y\sin(xy) - \int \frac{1}{2}\sin(xy)\,dy\right)\Big|_0^2\right.$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{x} - \frac{1}{x}\left(\frac{y}{2}\sin(xy) + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos xy\right)\Big|_0^2\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{x} - \frac{1}{x}\left(\sin 2x + \frac{\cos 2x}{2x} - 0 - \frac{1}{2x}\right)\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{x} - \frac{\sin 2x}{x} - \frac{\cos 2x}{2x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2x^2} =$$

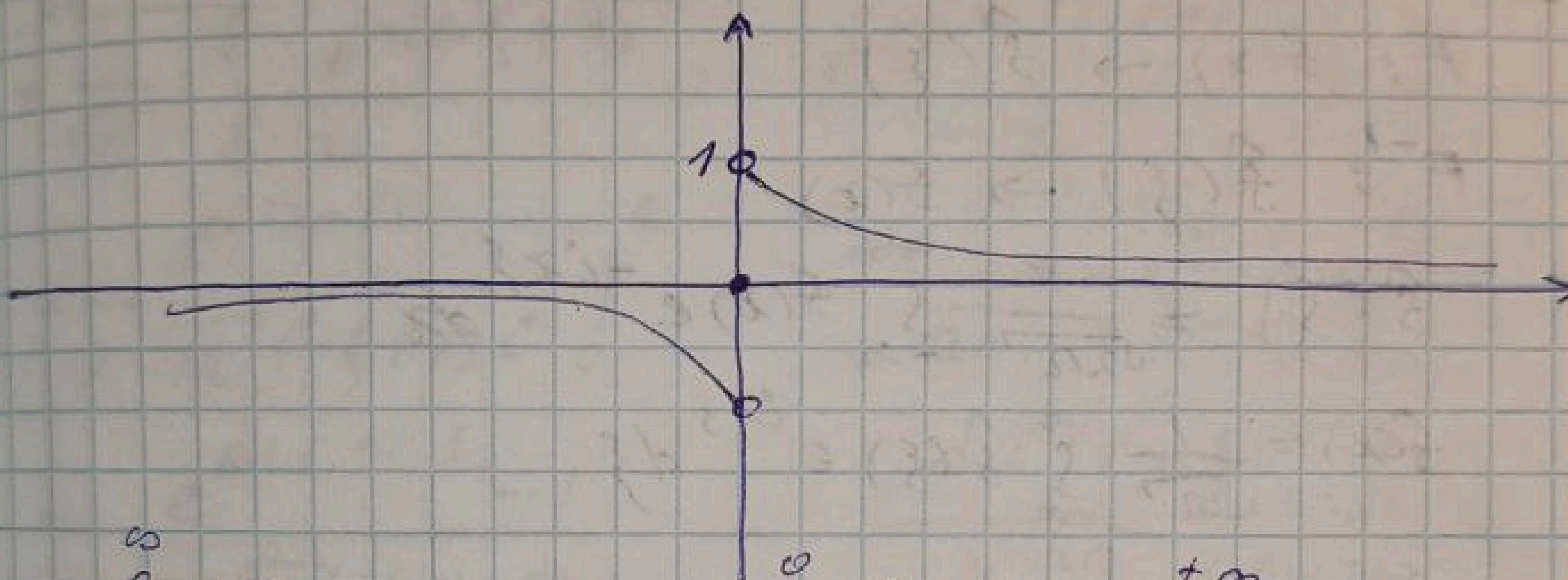
$$= \frac{2\sin^2 x}{\pi x^2}$$

$$f(x) = \int_0^\infty \left[\frac{2\sin^2 y}{\pi y^2}\cdot\cos(xy)\right] dy$$

$$f(0) = 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^2 y}{y^2}\,dy \Rightarrow \boxed{\int_0^\infty \frac{\sin^2 y}{y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}}$$

② Представить ч/з инт-л Фурье

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -e^{x}, & x < 0 \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx =$$

$$= \lim_{\xi \to -\infty} e^{x}\Big|_{\xi}^{0} + \lim_{\xi \to +\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_{0}^{\xi} = 2e^{0} = 2$$

$$b(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy = \left\{ \begin{array}{l} \sin(xy)dy = dv \\ \frac{-\cos(xy)}{x} = v \\ u = e^{-y} \\ du = -e^{-y}dy \end{array} \right\} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \int u\,dv = uv - \int v\,du \\ du = u'dx \\ v = \int dv\,dx \end{array}}$$

$$= \lim_{\xi \to \infty} \frac{-e^{-y}\cos(xy)}{x}\Big|_{0}^{\xi} - \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-y}\cos(xy)\,dy}{x} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-y} & \frac{\cos xy}{x}\,dy \\ -e^{-y}\,dy & \frac{\sin xy}{x^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{x} - \lim_{\xi \to \infty} \frac{e^{-y}\sin xy}{x^2}\Big|_{0}^{\xi} +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} \frac{-e^{-y}\sin xy\,dy}{x^2}; \quad I = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} I$$

$$I\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x} \qquad I = \frac{1}{x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{x^2+1}$$

$a_x = 0$

$F: f(x) \to \hat{f}(\xi)$

$F^{-1}: \hat{f}(\xi) \to f(x)$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

Что мы знаем про комплексные экспоненты

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

③ Напишем преобразование Фурье от функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

④ $f(x) = \begin{cases} \cos x, & [0, \pi] \\ 0, & \text{вне отр.} \end{cases}$

③ $$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} 1 \cdot e^{-ix\xi} dx =$$

$$= \frac{1}{-i\xi\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi}\Big|_{-1}^{1} = \frac{-1}{i\xi\sqrt{2\pi}} \left(e^{-i\xi} - e^{i\xi}\right) =$$

$$= \frac{2\sin\xi}{\xi\sqrt{2\pi}}$$

④ $f(x) = \begin{cases} \cos x, & [0, \pi] \\ 0, & \text{вне} \end{cases}$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi \cos x \cdot e^{-ix\xi}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot e^{-ix\xi}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi \frac{e^{xi(-\xi+1)}}{2} + \frac{e^{-ix(\xi+1)}}{2}\, dx =$$

$$= \frac{e^{xi(1-\xi)}}{2\sqrt{2\pi}(-\xi+1)i}\Big|_0^\pi + \frac{-e^{xi(1+\xi)}}{2\sqrt{2\pi}(\xi+1)i}\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{e^{\pi i(1-\xi)} - 1}{2\sqrt{2\pi}(1-\xi)i} - \frac{e^{\pi i(1+\xi)} - 1}{2\sqrt{2\pi}(\xi+1)} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}i}\left(\frac{-e^{\pi i\xi} - 1}{1-\xi} - \frac{-e^{-\pi i\xi} - 1}{\xi+1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}i} \cdot$$

$$\cdot \frac{(-\xi e^{\pi i\xi} - \xi - e^{\pi\xi} - 1 + e^{-\pi i\xi} + 1 - \xi e^{-\pi i\xi} - \xi)}{\xi^2 - 1} =$$

$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}i}$ (Дальше вообще страшно...

короче, правильный ответ был

$$\hat{\xi}(\xi) = \frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}}(e^{-i\pi\xi} - 1)$$