677
700
729
730
891
900
911
925
960а
965.1
992
1040
1049
1060
1101
1111
1117
1131
1160
1163
1320
1330
1346
1378
1387
1388

677 Исследовать на непрерывность

$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, если $x \neq -1$

$f(-1)$ — произв.

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{1}{(1+x)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{1}{(1+x)^2} = +\infty$$

$x = -1$ — точка разрыва II-ого рода

($x = -1$ — точки бесконечного разрыва)

т.к. оба односторонних предела равны ∞

---

700 $y = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$

Подозрительные точки: $x = 0$, $x = 1$

При $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{0}}} = \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{1-0} =$$

$$= \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{1} = 1$$

$$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}} = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{1-e^{\infty}} = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{-\infty} =$$

$$= 0$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) \neq \lim_{x\to 1-0} f(x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $x = 1$ – точка разрыва I-ого рода

При $x=0$:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{1-e^{\frac{0}{1-0}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{1-e^{+0}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{1-(1+0)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}} = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{1-e^{-0}} =$$

$$= \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{1-1+0} = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{+0} = \infty$$

$\Rightarrow$

$x = 0$ – точка разрыва II-ого рода

729 Является ли непрерывной функция

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & \text{если } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Проверим $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1-0} 2x = 2$$

$$\lim_{x \to 1+0} 2-x = 2-1 = 1$$

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) \neq \lim_{x \to 1+0} f(x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 1$ — точка разрыва I-ого рода

---

730 Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{если } x < 0 \\ a + x, & \text{если } x \ge 0 \end{cases}$$

При каком выборе числа a функция $f(x)$ будет непрерывной?

$$\lim_{x \to 0-0} e^x = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \to 0+0} a + x = a + 0 \Rightarrow a = 1$$

Непрерывность и точки разрыва:

① x_0 — устранимая точка разрыва, если два односторонних предела равны и функция в x_0 неопределена

② x_0 — точка разрыва I-ого рода, если два односторонних предела существуют и НЕ равны

③ x_0 — точка разрыва II-ого рода, если хотя бы один односторонних пределов не существует (~~ил~~ равен бесконечности)

891 Найти производную

$$y = \frac{1}{4(1+x^3)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1+x^4}$$

1040

Найти y'_x

$$x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t$$

$$y' = 2\cos t \cdot (-\sin t)$$

$$x' = 2\sin t \cdot \cos t$$

$$y'_x = \frac{-2\cos t \sin t}{2\sin t \cos t} = -1$$

$$\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\cos(-\sin t)}{2\sin t\cos t} = -1$$

1049

$$y^2 = 2px$$

$$y^2 - 2px = 0$$

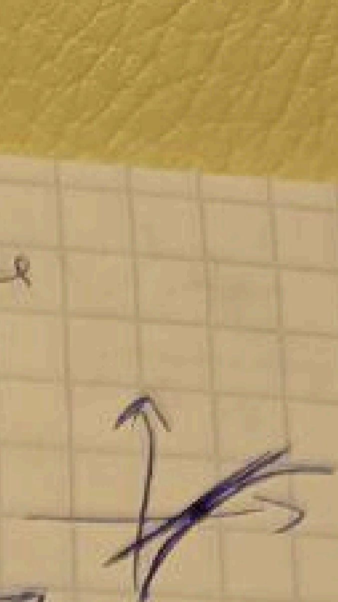
$$2y \cdot y' - 2p = 0$$

$$y' = \frac{p}{y}$$

1060 Под каким углом кривая

$y = \ln x$

пересекает ось Ox?



$f'_{y=0}$

$y = \ln x$

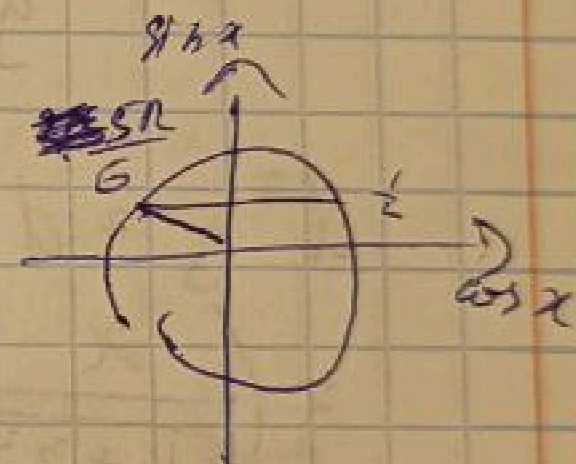
$0 = \ln x$

$x = 1$

$y' = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{1} = 1$

$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$



1101

$\cos 151^\circ$

$f(x) = \cos x$

$x_0 = 150^\circ = \frac{5\pi}{6}$

$\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$

$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x$

$f(151^\circ) = -\sin\frac{5\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180} + \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{360} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f'(x)\Delta x = f(x+\Delta x) - f(x)$

$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$x = 150^\circ$,

$\Delta x = 1^\circ$

$f(x_0+\Delta x) = f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

$$df = f'(x) \cdot dx$$

$$df = f(x+dx) - f(x)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

1131 Считая x независимой переменной, найти d^2y, если:

$$y = \sqrt{1+x^2}$$

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = d\left(\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\,dx\right) =$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' \cdot dx \cdot dx = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \cdot dx \cdot dx =$$

$$= \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot dx \cdot dx =$$

$$= \frac{dx^2}{\sqrt{1+x^2}^3}$$

$$df = f'(x) \cdot dx$$

1130 Найти d^2y для функции $y = e^x$

а) x — независимая переменная

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = d(e^x dx) =$$

$$= e^x (dx)^2$$

1160 Найти $y^{(100)}$ если $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ 1130 891 392

Правило Лопиталя

① $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$,

Если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0, $g'(x) \neq 0$,

то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\left(\frac{0}{0}\right)$

$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sin 5x}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\cos 5x \cdot 5}{1} = 5$

1320

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\,x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{tg^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-tg^2 x}{\cos x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\left(2\,tg\,x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right)}{-\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot \frac{\sin x}{\cos^3 x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{\cancel{\sin x}}{\cos^3 x} \cdot \frac{1}{\cancel{\sin x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos^3 x} = 2$$

$$(x^x)' = (e^{x\cdot\ln(x)})'$$

1330

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x\ln x}\cdot(\ln x + 1)}{\frac{1}{x} - 1} =$$

$$(x^x)' = (e^{x\cdot\ln(x)})' =$$

$$= e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)' =$$

$$= e^{x\ln x}\cdot\left(\ln x + \frac{x}{x}\right) =$$

$$= e^{x\ln x}\cdot(\ln x + 1)$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{e^{x\ln x}(\ln x + 1) + \frac{e^{x\ln x}}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x\cdot e^{x\ln x}(\ln x+1) + e^{x\ln x}}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= -2$$

1346 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \left((1+x-1)^{\frac{1}{x-1}}\right)^{(-1)} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 1} -1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

---

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{2(x-1)\cdot 1} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{2x-2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{2} = 1$

через Лопиталя

$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} =$ клас. способ

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$

$= \text{Лопи} \left(\frac{0}{0}\right)$

$\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$

2) $$\lim_{x \to 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 2x - 15} = \lim_{x \to 5} \frac{6x - 14}{2x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{16}{8} = 2$$

3) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(5x)}{\frac{\sin^2(3x)}{\cos^2(3x)}} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin 5x \cdot \cos 5x \cdot 5}{\frac{(\sin^2(3x))' \cos^2 3x - \sin^2 3x (\cos^2 3x)'}{\cos^4(3x)}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{10 \sin 5x \cdot \cos 5x}{\frac{2\sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 \cdot \cos^2 3x - \sin^2 3x \cdot 2\cos 3x \cdot (-\sin 3x) \cdot 3}{\cos^4(3x)}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{10 \sin 5x \cdot \cos 5x}{\frac{6 \sin 3x \cos^3 3x + 6 \sin^3 3x \cos 3x}{\cos^4 3x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{5 \sin 10x}{\frac{6 \sin 3x \cos 3x (\cos^2 3x + \sin^2 3x)}{\cos^4 3x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{5 \sin 10x}{\frac{6 \sin 3x \cdot 1}{\cos^3 3x}} = \lim_{x \to 0} \frac{5 \sin 10x \cos^3 3x}{6 \sin 3x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{50 \cos 10x \cos^3 3x + 5 \sin 10x \cdot 3\cos^2 3x \cdot (-\sin 3x) \cdot 3}{6 \cos 3x \cdot 3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{50 \cos 10x \cos^3 3x - 45 \sin 10x \cos^2 3x \sin 3x}{18 \cos 3x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{50\cos 10x \cos^2 3x - 45 \sin 10x \cos 3x \sin 3x}{18} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{50\cos 10x \cos^2 3x - \frac{45}{2} \sin 6x \sin 10x}{18} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{100\cos 10x \cos^2 3x - 45 \sin 6x \sin 10x}{36} = \frac{100}{36} = \frac{25}{9}$$

---

4) $$\lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x^2 - x + 1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - x + 1})(x + \sqrt{x^2 - x + 1})}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 + x - 1}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1}}{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 2x - 1}$$

7) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$;

$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{1-x} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' =$

$= \frac{-x}{1-x^2} + \frac{x+1}{2(1-x)} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1\cancel{+x)^2}} =$

$= \frac{-x}{1-x^2} + \frac{-2}{2(1-x)} = \frac{-x}{(1-x)(1+x)} \backslash \cdot 2 +$

$+ \frac{-2}{2(1-x)} \backslash (1+x) = \frac{-2x-2+2x}{2(1-x^2)} =$

$= -\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{x^2-1}$

6)

6) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x < -1 \\ x+1, & -1 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$

Подозрительные точки: $x = -1$, $x = 1$

Проверим $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1-0} x + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) \ne \lim_{x \to 1+0} f(x) \Rightarrow x = 1 \text{ — точка разрыва I-ого рода}$$

Проверим $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{1}{x+1} = \infty$$

— один из односторонних пределов равен бесконечности, значит $x = -1$ — точка разрыва II-ого рода (точка бесконечного разрыва)