

Тема : Числовые множества

1⁰. Натуральные, целые и рациональные числа. Алфавит математики. 2⁰. Конечные и бесконечные десятичные дроби. 3⁰. Отношение равенства на множестве десятичных дробей и его свойства. 4⁰. Равенство и неравенство десятичных дробей. Следствия этих отношений. 5⁰. Линейный порядок на множестве десятичных дробей. 6⁰. Числовая прямая. Интервалы, отрезки и промежутки. Плотность конечных десятичных дробей на любом интервале. 7⁰. Десятичные приближения и их свойства.

6⁰. Важным наглядным свойством любого интервала числовой оси является его геометрическое представление в виде *непрерывного* прямолинейного отрезка. В этой связи выделим следующее важное свойство десятичных дробей.

Лемма (неразрывность интервала). Для любых двух десятичных дробей α и β , $\alpha < \beta$, существует такая *конечная* десятичная дробь γ , что $\alpha < \gamma < \beta$.

Доказательство. Пусть $\alpha < \beta$, α и β — десятичные дроби, причем α не является периодической дробью с периодом 9.

По определению отношения $\alpha < \beta$ существует такой номер p , что $(\beta)_p - (\alpha)_p > 10^{-p}$. По лемме 2 для всех $n \geq p$ имеем

$$(\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-p}.$$

Рассмотрим следующую конечную десятичную дробь

$$\gamma = (\alpha)_{p+1} + 2 \cdot 10^{-p-1}.$$

Считая, что $\alpha_{p+1} \neq 9$, получаем $(\gamma)_{p+1} = \gamma$.

Далее имеем

$$(\gamma)_{p+1} - (\alpha)_{p+1} = 2 \cdot 10^{-p-1} > 10^{-p-1}.$$

Это по определению означает, что $\alpha < \gamma$. Далее

$$\begin{aligned}(\beta)_{p+1} - (\gamma)_{p+1} &= (\beta)_{p+1} - (\alpha)_{p+1} - 2 \cdot 10^{-p-1} > \\ &> 10^{-p} - 2 \cdot 10^{-p-1} > 10^{-p-1}.\end{aligned}$$

Таким образом, $\gamma < \beta$. □

Доказанная лемма переформулируется двумя другими эквивалентными способами.

(*a*) Между любыми двумя вещественными числами лежит конечная десятичная дробь,

(*b*) Множество конечных десятичных дробей плотно в множестве \mathbb{R} вещественных чисел.

Для заданной десятичной дроби вводится понятие ее *десятичных приближений*, каждое из которых является конечной десятичной дробью.

7⁰. Введем для заданной десятичной дроби понятие ее *десятичных приближений* и исследуем свойства этих приближений.

Определение. Пусть десятичная дробь α неотрицательна, $\alpha \geq 0$. Тогда конечные десятичные дроби

$$\underline{(\alpha)_n} = (\alpha)_n \quad \text{и} \quad \overline{(\alpha)_n} = (\alpha)_n + 10^{-n}$$

называются соответственно *нижним* и *верхним десятичным приближением* для α . Если

же десятичная дробь α отрицательна, $\alpha < 0$, то ее нижнее и верхнее десятичные приближения задаются равенствами

$$\underline{(\alpha)_n} = (\alpha)_n - 10^{-n} \quad \text{и} \quad \overline{(\alpha)_n} = (\alpha)_n.$$

Из данного определения следует, что для любой десятичной дроби α справедливы следующие оценки:

$$(\alpha)_n - 10^{-n} \leq \underline{(\alpha)_n} \leq \overline{(\alpha)_n} \leq (\alpha)_n + 10^{-n}. \quad (\text{DA})$$

Лемма (о десятичных приближениях). Для любой десятичной дроби α справедливы следующие порядковые соотношения:

$$\underline{(\alpha)_n} \leq \underline{(\alpha)_{n+1}}, \quad \overline{(\alpha)_n} \geq \overline{(\alpha)_{n+1}}, \quad \underline{(\alpha)_n} \leq \alpha \leq \overline{(\alpha)_n}.$$

Здесь n — любое натуральное число.

Доказательство. Рассуждения проведем для нижних десятичных приближений, верхние

десятичные приближения рассматриваются аналогично.

Пусть $\alpha \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \underline{(\alpha)_{n+1}} - \underline{(\alpha)_n} &= (\alpha)_{n+1} - (\alpha)_n = \\ &= 0, \underbrace{00 \dots 0}_n \alpha_{n+1} = 0, \alpha_{n+1} \cdot 10^{-n} \geq 0. \end{aligned}$$

Цифра 0 , охваченная в записи выше нижней фигурной скобкой, повторяется n раз. Та-

ким образом, полученное итоговое неравенство эквивалентно требуемому:

$$\underline{(\alpha)_n} \leq \underline{(\alpha)_{n+1}}.$$

Пусть теперь $\alpha < 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \underline{(\alpha)_{n+1}} - \underline{(\alpha)_n} &= (\alpha)_{n+1} - 10^{-n-1} - (\alpha)_n + 10^{-n} = \\ &= -0,\underbrace{00\dots0}_{n+1}\alpha_{n+1} + 0,9 \cdot 10^{-n} = 0,(9 - \alpha_{n+1}) \cdot 10^{-n}. \end{aligned}$$

Учтем, что α_{n+1} — это цифра, т.е. $\alpha_{n+1} \leq 9$.

Поэтому имеем искомое неравенство и для отрицательных десятичных дробей:

$$\underline{(\alpha)_{n+1}} - \underline{(\alpha)_n} \geq 0.$$

Неравенство $\underline{(\alpha)_n} \leq \alpha$ докажем методом от противного. Пусть для некоторого номера n имеет место противоположная оценка $\alpha < \underline{(\alpha)_n}$. Тогда применяя определение отношения $<$

на множестве десятичных дробей, а затем лемму 2, найдем такой номер p , что

$$\left(\underline{(\alpha)_n}\right)_m - (\alpha)_m > 10^{-p} \quad \text{для} \quad \forall m \geq p. \quad (1)$$

Если $\alpha \geq 0$, то для любого номера $m > n$ имеем далее

$$\begin{aligned} \left(\underline{(\alpha)_n}\right)_m - (\alpha)_m &= \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n - \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m = \\ &= -0, 00 \dots 0 \alpha_{n+1} \dots \alpha_m \leq 0. \end{aligned}$$

Взяв здесь $m > \max(n, p)$, получим противоречие с оценкой (1).

Если же $\alpha < 0$, то для любого номера $m > n$ имеем

$$\begin{aligned} & \left(\underline{(\alpha)_n} \right)_m - (\alpha)_m = \\ & = -\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n - 10^{-n} + \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m = \\ & = 10^{-n} \cdot 0, \alpha_{n+1} \dots \alpha_m - 10^{-n} \leq 0. \end{aligned}$$

Взяв здесь $m > \max(n, p)$, снова получим противоречие с оценкой (1).

Следовательно, для всех номеров n нижнее десятичное приближение $(\alpha)_n$ всегда не больше чем соответствующая ему десятичная дробь: $(\alpha)_n \leq \alpha$. □

Лемма (критерий отношения $<$). Десятичная дробь α меньше β тогда и только тогда когда для *некоторого* номера n верхнее десятичное приближение $\overline{(\alpha)_n}$ меньше нижнего десятичного приближения $\underline{(\beta)_n}$, т.е. когда $\overline{(\alpha)_n} < \underline{(\beta)_n}$.

Доказательство. Пусть десятичная дробь α меньше β . Тогда в соответствии с определением отношения $\alpha < \beta$ существует такой

неотрицательный номер p , что

$$(\beta)_p - (\alpha)_p > 10^{-p}.$$

При этом $(\alpha)_p < (\beta)_p$, а по лемме 2 при всех $n > p$ справедлива оценка

$$(\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-p}.$$

Взяв $n = p + 1$, воспользуемся неравенствами (DA) и оценим разность снизу:

$$\underline{(\beta)_n} - \overline{(\alpha)_n} \geq (\beta)_n - (\alpha)_n - 2 \cdot 10^{-n} >$$

$$> 10^{-p} - 2 \cdot 10^{-p-1} = 10^{-p} \left(1 - \frac{2}{10} \right) > 0.$$

Следовательно, $\overline{(\alpha)_n} < \underline{(\beta)_n}$.

Пусть теперь для некоторого номера n верхнее десятичное приближение $\overline{(\alpha)_n}$ строго меньше нижнего десятичного приближения $\underline{(\beta)_n}$:

$$\overline{(\alpha)_n} < \underline{(\beta)_n}.$$

По лемме о десятичных приближениях имеем $\alpha \leq \overline{(\alpha)_n}$ и $\underline{(\beta)_n} \leq \beta$. Подставляя оба этих

неравенства в предыдущее, получаем

$$\alpha \leq \overline{(\alpha)_n} < \underline{(\beta)_n} \leq \beta.$$

Следовательно, $\alpha < \beta$.



Тема : Последовательности и их пределы

1⁰. Определение числовой последовательности и ее подпоследовательности. Стационарные и ограниченные последовательности. Монотонные последовательности. Примеры. 2⁰. Определение предела числовой последовательности. Определение окрестности числа. Единственность предела. 3⁰. Пределы верхних и нижних десятичных приближений числа. Ограниченность сходящихся к конечному пределу последовательностей. 4⁰. Подпоследовательности сходящихся последовательностей. 5⁰. Теорема о предельном переходе в неравенстве. Теорема о трех последовательностях.

1⁰. Если любому натуральному числу n поставлено в соответствие вещественное число a_n , то говорят, что задана *числовая последовательность* $\{a_n\}$.

Каждое вещественное число a_n называется *элементом последовательности* $\{a_n\}$, а натуральное n — *номером элемента* a_n .

Множество \mathbb{N} натуральных чисел бесконечно и поэтому любая числовая последовательность всегда имеет бесконечное число элементов.

Числовые элементы a_n последовательности могут как совпадать друг с другом, так и различаться.

Если существует такое натуральное N_0 , что для всех $n \geq N_0$ элементы a_n совпадают друг

с другом, т.е. $a_n = a_{N_0}$ для $\forall n \geq N_0$, то последовательность называется *стационарной*.

Пример. Для любой десятичной дроби α ее верхние десятичные приближения $\overline{(\alpha)_n}$ образуют числовую последовательность, элементы которой — это рациональные числа. Аналогично, ее нижние десятичные приближения $\underline{(\alpha)_n}$ — это тоже числовая последовательность из рациональных чисел.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ вещественных чисел называется *ограниченной сверху*, если существует такое натуральное число M , что для всех $n \geq M$ имеет место неравенство $x_n \leq M$.

Если же существует такое натуральное число m , что для всех $n \geq m$ имеет место неравенство $x_n \geq m$, то последовательность $\{x_n\}$

вещественных чисел называется *ограниченной снизу*.

Последовательность $\{x_n\}$ вещественных чисел, ограниченная как сверху так и снизу, называется *ограниченной*.

Если существует такое вещественное число M , что для всех $n \geq 1$ имеет место неравенство $|x_n| \leq M$, то последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной.

Например, последовательность $\{x_n\}$ с элементами $x_n = (-1)^n$ — это ограниченная последовательность.

Из леммы о десятичных приближениях заключаем, что для любого вещественного числа x последовательность его нижних десятичных приближений $\underline{(x)_n}$ ограничена сверху. В то же время последовательность верхних десятичных приближений $\overline{(x)_n}$ ограничена снизу.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ вещественных чисел называется **монотонно возрастающей**, если для любого номера n справедливо неравенство $x_n \leq x_{n+1}$. Если же для любого номера n справедливо $x_n \geq x_{n+1}$, то $\{x_n\}$ — **монотонно убывающая**.

Пример 1. Пусть $x_n = n$. Тогда $\{x_n\}$ монотонно возрастает.

Пример 2. Если $x_n = -n$, то $\{x_n\}$ монотонно убывает.

Пример 3. Последовательность $x_n = (-1)^n$ не монотонная.

Пример 4. Для любого вещественного числа x последовательность его нижних десятичных приближений $\{(x)_n\}$ монотонно возрастает, оставаясь ограниченной сверху.

Пример 5. Последовательность верхних десятичных приближений вещественного числа монотонно убывает, оставаясь ограниченной снизу.

Теорема (о стационарности). *Если монотонная последовательность **целых** чисел ограничена, то она стационарна.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ целых чисел монотонно возрастает и

ограничена сверху, $x_n \in \mathbb{Z}$. Докажем, что $\{x_n\}$ стационарна. Предположим противное.

Тогда существует номер $n_1 > 1$, для которого $x_{n_1} > x_1$, затем существует номер $n_2 > n_1$ такой что $x_{n_2} > x_{n_1}$, и так далее.

Таким образом, имеется последовательность x_{n_k} , $k = 1, 2, \dots$, обладающая свойствами

$$k = 1, 2, \dots \quad \Rightarrow \quad x_{n_k} \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad x_{n_k} > x_{n_{k-1}},$$

причем $x_{n_0} = x_1$. По условию x_{n_k} — целое, поэтому

$$x_{n_k} > x_{n_{k-1}} \quad \Rightarrow \quad x_{n_k} \geq x_{n_{k-1}} + 1.$$

Последовательно применяя это неравенство для номеров n_k, n_{k-1}, \dots, n_1 , получаем оценку снизу

$$x_{n_k} \geq x_1 + k, \quad k = 1, 2, \dots$$

По условию существует такое целое число M что $x_{n_k} \leq M$. Подставляя эту оценку в предыдущее неравенство, получаем

$$x_1 + k \leq M, \quad \text{или} \quad k \leq M - x_1,$$

где $k = 1, 2, \dots$. Это означает, что натуральное число $M - x_1$ должно больше любого другого натурального числа k , что противоречит бесконечности множества натуральных чисел. □

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ вещественных чисел называется **строго** монотонно возрастающей, если для любого номера n справедливо строгое неравенство

$$x_n < x_{n+1}.$$

Если же $x_n > x_{n+1}$ для любого номера n , то $\{x_n\}$ — строго монотонно убывающая.

Как следует из теоремы о стационарности, любая строго монотонная последовательность целых чисел неограничена.

Пусть есть две числовых последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Если для любого k существует такой номер $n = n_k$, что $y_k = x_{n_k}$, и при этом последовательность номеров $\{n_k\}$ строго возрастающая, то $\{y_k\}$ называется

подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$. Для обозначения подпоследовательности $\{y_k\}$ применяется двухуровневый индекс: $\{y_k\} \equiv \{x_{n_k}\}$.

Следствие (теоремы о стационарности). *Если монотонно возрастающая последовательность целых чисел не является стационарной, то у нее найдется строго возрастающая подпоследовательность.*

2⁰. Дадим определение предела последовательности вещественных чисел, не используя при этом понятия суммы и разности вещественных чисел, которые мы еще не определили.

Определение. Вещественное число x называется *пределом* числовой последовательности $\{x_n\}$, если выполняется следующее условие: для любого интервала (a, b) такого что x

принадлежит (a, b) существует номер N , обладающий тем свойством, что

$$\forall n \geq N \implies x_n \in (a, b).$$

Отметим, что номер N , начиная с которого все элементы x_n последовательности попадают в интервал (a, b) , существенно от этого

интервала зависит. Тот факт, что x является пределом последовательности $\{x_n\}$, записывается в следующем виде:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \text{или} \quad (x_n \rightarrow x \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty).$$

В этом случае говорят также, что x_n сходится к x .

Определение. Любой интервал (a, b) , содержащий x , называется *окрестностью* числа x и обозначается через $O(x)$.

Используя понятие окрестности числа, определение предела можно дать следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow$$

$$\forall O(x) \exists N : \forall n \geq N \implies x_n \in O(x).$$

Помимо конечных пределов числовых последовательностей рассматриваются также бесконечные пределы, определяемые одним из

следующих соотношений:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\forall M \exists N : \forall n \geq N \Rightarrow x_n > M, \quad (+\infty)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow$$

$$\forall m \exists N : \forall n \geq N \Rightarrow x_n < m. \quad (-\infty)$$

Здесь $-\infty$ и $+\infty$ — это соответственно левая и правая бесконечно удаленные точки

числовой прямой

$$\mathbb{R} = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}.$$

Расширенной числовой прямой называется
множество

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

Окрестностью точки $\{-\infty\}$ называется любой интервал вида $(-\infty, a)$, а окрестностью точки $\{+\infty\}$ — любой интервал вида $(b, +\infty)$.

Данное выше определение предела является корректным: если предел последовательности существует, то он единствен.

Доказательство единственности основано на следующем свойстве.

Лемма (об отделимости). Если $x \in \overline{\mathbb{R}}$ и $y \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \neq y$, то существуют непересекающиеся окрестности $O(x)$ и $O(y)$, $O(x) \cap O(y) = \emptyset$.

Доказательство. Пусть $x < y$. Если $x = -\infty$ и $y = +\infty$, то возьмем

$$O(x) = (-\infty, a_1) \quad \text{и} \quad O(y) = (a_2, +\infty),$$

где $a_1 < a_2$. Из определения интервала следует, что $O(x) \cap O(y) = \emptyset$.

Пусть числа x и y конечны. Тогда по лемме о неразрывности интервала существует конечная десятичная дробь a , лежащая между x и y : $x < a < y$. В этом случае возьмем

$O(x) = (-\infty, a)$ и $O(y) = (a + 1, +\infty)$. Тогда справедливо равенство $O(x) \cap O(y) = \emptyset$.

Пусть $x = -\infty$, а число y конечно. Тогда возьмем $a = \underline{(y)_0} - 1$, $b = \overline{(y)_0} + 1$ и заметим, что интервал (a, b) представляет собой некоторую окрестность $O(y)$ числа y .

Взяв $O(x) = (-\infty, a - 1)$, получаем $O(x) \cap O(y) = \emptyset$. Аналогично рассматривается случай, когда x — конечно, а $y = +\infty$. □

Теорема (единственности предела). Числовая последовательность может иметь только один предел (конечный или бесконечный).

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два разных предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y, \quad x \neq y.$$

По лемме об отделимости существуют окрестности $O(x)$ и $O(y)$ такие что $O(x) \cap O(y) = \emptyset$.

Из условия, что x и y — пределы, получаем

$$\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \implies x_n \in O(x),$$

$$\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \implies x_n \in O(y).$$

Возьмем $n = \max \{N_1, N_2\}$. Тогда $x_n \in O(x)$ и одновременно $x_n \in O(y)$. Следовательно, пересечение $O(x) \cap O(y)$ не пусто, $O(x) \cap O(y) \neq \emptyset$. Это противоречит выбору окрестностей. \square

Пример 6. Любая стационарная последовательность имеет предел:

$$\forall n \quad x_n = C \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C.$$

Пример 7. Для любого вещественного числа x справедливы предельные равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{(x)_n} = x \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{(x)_n} = x. \quad (\text{L})$$

Доказательство. Пусть (a, b) — произвольная конечная окрестность вещественного числа

x , то есть $a < x < b$. Тогда по критерию отношения $<$ имеем

$$\exists N : \quad \overline{(a)_N} < \underline{(x)_N}.$$

Следовательно, в соответствии со свойствами десятичных приближений справедливы неравенства

$$a \leq \overline{(a)_N} < \underline{(x)_N} \leq x < b,$$

$$\forall n \geq N \quad \Rightarrow \quad \underline{(x)_N} \leq \underline{(x)_n} \leq x.$$

Таким образом, для любого $n \geq N$ имеем неравенства $a < \underline{(x)_n} < b$. Это и означает, по определению, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{(x)_n} = x$.

Второе из равенств (L) доказывается аналогично. В частности, для $x = 0$ имеем равенство $\overline{(x)_n} = 10^{-n}$. Следовательно, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} 10^{-n}$, равный нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} 10^{-n} = 0$. □

Пример 8. Последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела.

Пример 9. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow -\infty} n = -\infty$.

Пример 10. Последовательность $x_n = (-1)^n n$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

Доказательство. Предположим противное, то есть пусть существует вещественное число x такое что $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Полагаем

$$a = \underline{(x)_0} - 1, \quad b = \overline{(x)_0} + 1, \quad N = \max \{|a|, |b|\}.$$

Здесь N — натуральное.

Интервал (a, b) представляет собой окрестность $O(x)$, причем вне этой окрестности лежит любое число x_n с номером $n > N$: если n

— нечетное, то $x_n \leq a$, если же n — четное, $n > N$, то $x_n \geq b$. Это противоречит определению предела. Аналогично рассматривается предположение, что $x = +\infty$ и $x = -\infty$. \square

Числовая последовательность называется **сходящейся**, если у нее имеется конечный предел. В противном случае последовательность называется **расходящейся**.

Иногда говорят, что последовательность, имеющая пределом $\pm\infty$, сходится (расходится) к $\pm\infty$.

Теорема (об ограниченности). *Если последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$, где x — вещественное число. Возьмем его произвольную конечную окрестность — интер-

вал $O(x) = (a, b)$. Тогда существует номер N такой что при всех $n \geq N$ справедливы неравенства $a < x_n < b$.

Следовательно, вне интервала (a, b) может находиться лишь конечное число элементов рассматриваемой последовательности, а именно числа x_1, x_2, \dots, x_{N-1} . Полагаем

$$m = \min \{a, b, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\},$$

а также

$$M = \max \{a, b, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}.$$

Тогда для всех $n \geq 1$ имеем $m \leq x_n \leq M$. Это и означает, что рассматриваемая последовательность $\{x_n\}$ ограничена. □

Обратное теореме утверждение неверно: последовательность $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$, ограничена, но предела не имеет.

Докажите в качестве упражнения, что если последовательность сходится к $+\infty$, то она ограничена снизу и неограничена сверху.

4⁰. Переход от сходящейся последовательности к ее подпоследовательности не приводит к нарушению сходимости.

Теорема (о подпоследовательностях). Любая подпоследовательность сходящейся последовательности также сходится и имеет тот же самый предел.

Доказательство. Пусть $\{x_{n_k}\}$ — подпоследовательность $\{x_n\}$ и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Тогда

$$\forall O(x) \quad \exists N : \forall n \geq N \quad x_n \in O(x).$$

Но $n_k \geq k$ и поэтому для всех $k \geq N$ число x_{n_k} принадлежит $O(x)$. Это означает, по определению предела, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. □

5⁰. Установим правила предельного перехода в неравенствах, связывающих числовые последовательности.

Теорема. Пусть пределы двух числовых последовательностей связаны неравенством

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Тогда существует такой номер N , что при всех $n \geq N$ справедлива оценка $x_n < y_n$.

Доказательство. Из неравенства $x < y$ по лемме о неразрывности интервала следует, что существует такое вещественное число a , что $x < a < y$. По определению предела имеем

$$\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \implies x_n \in (-\infty, a);$$

$$\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \implies y_n \in (a, +\infty).$$

Возьмем $N = \max \{N_1, N_2\}$, тогда для всех номеров $n \geq N$ имеем $x_n < a < y_n$. □