Ряды Фурье

(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ — числовой ряд

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}_{n \text{ слагаемых}}$ — частичная сумма ряда

I. $\exists$ конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \iff$ ряд сходится

II. Критерий Коши сходимости ряда

ряд (1) сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon):$

$\forall n > N, \ \forall p > 0: \ \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

III. Необходимый признак сходимости:

$\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

↳ если ряд сход., то признак выполн. но если призн. вып., то необяз. ряд сход.

(Необходимый, но недостаточный признак сходимости)

НО если признак не выполнен, то ряд точно расходится

2550
2552
2561
2564

$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)^3}$

2550

$$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{4 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$a_n = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1}$$

$$A(3n+1) + B(3n-2) = 1$$

$$3An + A + 3Bn - 2B = 1$$

$$\begin{cases} 3A + 3B = 0 \Rightarrow A = -B \\ A - 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ A + 2A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{3n-2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \underbrace{\frac{1}{3n+1}}_{\to 0}\right) = \frac{1}{3}$$

Признаки сравнения

$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k}$, $\quad a_k, b_k \geq 0$, $\quad \boxed{a_k \leq b_k}$

$\Rightarrow$ Если $\sum a_k$ расход., то $\sum b_k$ расход.

$\Rightarrow$ Если $\sum b_k$ сход., то $\sum a_k$ сход.

Пример:

1) $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ — сход. $|q| < 1$

расход. $|q| > 1$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ — сход. $\alpha > 1$

расх. $\alpha \leq 1$

Если $a_k \underset{k\to\infty}{\sim} b_k$, то $\sum a_k$ и $\sum b_k$ сход. и расход. одновременно

2552

$$\sum\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{1}+\\ +\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\\ +\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Остаётся!

$$\cancel{\sqrt{n}}-2\sqrt{n-1}+$$
$$+\sqrt{n-2}+\sqrt{n+1}-\cancel{2\sqrt{n}}+$$
$$+\sqrt{n-1}+\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}}$$

$$S_n=-\sqrt{2}+1+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2-n-1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=0$$

$$S_n=-\sqrt{2}+1+0=-\sqrt{2}+1$$

2561 Общий член стремится к $\frac{1}{2}$ =>

=> нарушен необходимый признак сходимости

$$a_n = \frac{n}{2n-1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2} \neq 0$$

(необход. признак нарушен =>

=> ряд расходится)

2564 $$\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \ldots$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} > \frac{1}{\sqrt{4n^2}} = \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

гармонический ряд расходится =>

=> исходный ряд также расходится

№1

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} - \text{расх.},\ \text{т.к.}$$

$$\sin\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \text{расх.}$$

№2

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3} - \text{сход.},\ \text{т.к.}$$

$$\frac{n}{(n+1)^3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \text{сход.}$$

Общ. вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_m(n)}{Q_k(n)} \sim \frac{1}{x^{k-m}}$$

$$k-m>1$$

$$k>m+1 - \text{сход.}$$

Критерий Коши

$\hookrightarrow$ ряд сходится $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N, \ p > 0 :$$

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

2574 $\quad a_n = \dfrac{\sin(nx)}{2^n}$

$$\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin(2x)}{2^2} + \ldots + \frac{\sin(nx)}{2^n} + \ldots$$

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \frac{\sin((n+1)x)}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\sin((n+p)x)}{2^{n+p}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right)}{\frac{1}{2}} <$$

$$< \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

$$1 = \varepsilon 2^N$$

$$N = \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

ЛИБО вспомнить, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится

2575. 1

$$a_n = \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$$

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \frac{\cos(n+1)x - \cos(n+2)x}{n+1} + \dots + \frac{\cos(n+p)x - \cos(n+1+p)x}{n+p} \right| =$$

$$= \left| \frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \cos(n+2)x\left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) + \dots + \cos(n+p)x\left(-\frac{1}{n+p-1} + \frac{1}{n+p}\right) - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p} \right| =$$

$$= \left| \frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)} - \dots - \frac{\cos(n+p)x}{(n+p-1)(n+p)} - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p} \right| \le$$

$$\le \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{n+p} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} =$$

$$= \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} < \varepsilon$$

$\uparrow n > N \Rightarrow \frac{2}{N} = \varepsilon \Rightarrow N = \frac{2}{\varepsilon}$

Расходимость по кр. Коши:

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N: \exists n > N, \exists p > 0:$

$|S_{n+p} - S_n| \geq \varepsilon$

2577 (б)

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \ldots$$

$$|S_{n+p} - S_n| = \left|\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(n+p)(n+p+1)}}\right| >$$

$$> \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p+1} > \frac{p}{n+p+1} = \varepsilon$$

$$p = n+1$$

$$\varepsilon = \frac{n+1}{n+n+1+1} = \frac{1}{2}$$

Признак сравнения...

Признак Даламбера (Д'Аламбера):

$a_n > 0, \ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \ \left[\begin{array}{l} q<1 \text{ — ряд сходится} \\ q>1 \text{ — ряд расходится} \end{array}\right.$

Признак Коши:

$a_n \geq 0, \ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \ \left[\begin{array}{l} q<1 \text{ — ряд сходится} \\ q>1 \text{ — ряд расходится} \end{array}\right.$

Интегральный признак:

Пусть $f(x)$ $(x>0)$ — неотр. и невозраст.
тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно

2578

$$a_n = \frac{1000^n}{n!}$$

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1000^{n+1}\cdot n!}{1000^n \cdot (n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1000}{n+1} = 0 < 1$$

$\Downarrow$

по признаку Д'Аламбера ряд сходится

2581

$$a_n = \frac{k^n \cdot n!}{n^n}$$

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{k^{n+1}\cdot (n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot k^n \cdot n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{k\cdot \cancel{(n+1)}\cdot n^n}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{k\cdot n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} k\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} k\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} k\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{k}{e}$$

2585 (a) $\boxed{\sqrt[n]{a} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1}$

$$a_n = (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \dots \cdot (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})$$

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[2(n+1)+1]{2}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[2n+3]{2}) = \sqrt{2} - 1 < 1$$

$\Downarrow$

ряд сходится

2587

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\Rightarrow a_n = \left(\frac{n+\frac{1}{n}}{n}\right)^n \nrightarrow 1$$

Нарушен необходимый признак сходимости ряда (общий член стремится не к 0, а к 1)

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \\ &\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} e \\ &\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}}$$

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

2588

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$ (ряд расходится)

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} > 1$$ → меньший ряд расходится, значит, и больший ряд расходится

2589 (в)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}}=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}$$

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-2}{n+1}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n-1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{(n-1)\left(-\frac{n+1}{2}\right)}\right)^{\left(-\frac{2}{n+1}\right)}=$$

e

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n-1)\left(-\frac{2}{n+1}\right)}=e^{-2}<1$$

Сходится по пр. К.

$$*\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+1}\right)^{n}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$$

II-ой замеч. пред.

$$\lim_{n\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

По Коши?

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}\cdot\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{1}{n+3}\right)\right)^{n}=$$

$$=e^{-1}$$

$$\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}\cdot\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n}=\frac{3}{e}>1$$ — расх. по призн. Коши

2619

$$a_n = \frac{1}{n \cdot \ln^p n} \qquad (n > 1)$$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$$

↳ Посчитать $f'(x)$ чтобы убедиться, что производная неотрицательная при всех значениях p.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \left\{ \begin{aligned} t &= \ln x \\ \frac{dx}{x} &= dt \\ dx &= x\,dt \end{aligned} \right\} =$$

$$= \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^p} \rightarrow$$

если $p > 1$, то инт. сходится (иначе расходится)

Д/з

2547
2548
2573
2575. 2
2576
2582
2584
2586
2589(б)
2620(в)
2593

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$