Тема : Числовые множества

$\mathbf{1^0}$. Натуральные, целые и рациональные числа. Алфавит математики. $\mathbf{2^0}$. Конечные и бесконечные десятичные дроби. $\mathbf{3^0}$. Отношение равенства на множестве десятичных дробей и его свойства. $\mathbf{4^0}$. Равенство и неравенство десятичных дробей. Следствия этих отношений. $\mathbf{5^0}$. Линейный порядок на множестве десятичных дробей. $\mathbf{6^0}$. Числовая прямая. Интервалы, отрезки и промежутки. Плотность конечных десятичных дробей на любом интервале. $\mathbf{7^0}$. Десятичные приближения и их свойства.

1^0. Одно из основных понятий как алгебры так и математического анализа — это понятие числа. Как известно из школьного курса математики, все числа принято разбивать на классы, т.е. выделять специальные числовые подмножества.

Простейший из классов такого рода образуют *натуральные числа*. Совокупность всех натуральных чисел принято обозначать символом $\mathbb{N}$. Для того чтобы описать множество $\mathbb{N}$, используются десять цифр

$$\mathbf{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 0}.$$

По определению

$$\mathbb{N} = \{\mathbf{1, 2, 3, \ldots, 9, 10, 11, \ldots}\}.$$

Следующий класс чисел — это множество $\mathbb{Z}$

целых чисел:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Натуральные числа образуют в $\mathbb{Z}$ подмножество. Этот факт принято записывать с помощью символа вложения: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Более широкий чем $\mathbb{Z}$ класс чисел образуют всевозможные дроби и нуль. Их совокупность обозначается как $\mathbb{Q}$ и называется множеством рациональных чисел:

$$\mathbb{Q} = \{\ldots, -\frac{p}{q}, 0, \frac{p}{q} \cdots \mid p, q \in \mathbb{N}\}.$$

Справедливо вложение $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Как известно из школьного курса математики, рациональные числа можно складывать и умножать, а также сравнивать друг с другом.

Следующий класс в расширяющейся цепочке числовых множеств образуют *вещественные числа*. Вся их совокупность обозначается через $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Для того чтобы описать множество вещественых чисел $\mathbb{R}$ метода последовательного перебора его элементов, используемого в элементарной математике для описания множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$, уже недостаточно. Требуется специальный математический аппарат, а именно: *формула общего вида вещественного числа*.

Для записи такого рода формулы используются различные *позиционные системы счисления*, из которых наиболее распространена десятичная система. Перейдем к описанию соответствующего аппарата.

2^{0}. Рассмотрим совокупность всевозможных слов, составленных из десятичных цифр и имеющих вид

$$+\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots, \qquad (\mathbf{DF})$$

$$-\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots. \qquad (\mathbf{DF'})$$

Здесь α_0 — неотрицательное целое число, т.е. $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$ и $\alpha_0 \geqslant 0$. Следующие за α_0 символы α_1, α_2, ..., α_n — это десятичные цифры.

Определение. *Слова вида* $(\mathbf{DF})$ *и* $(\mathbf{DF'})$ *называют бесконечными десятичными дробями (или, короче, десятичными дробями).*

Десятичная дробь $(\mathbf{DF})$ называется положительной, если найдется такой номер j, что $\alpha_j \neq 0$. Дробь $(\mathbf{DF'})$ при этом называется отрицательной. Дроби $(\mathbf{DF})$ и $(\mathbf{DF'})$, у которых совпадают все цифры α_j, называются противоположными (взаимно противоположными).

Если число α_0 и все цифры α_j в формуле (DF) равны нулю, то соответствующая десятичная дробь — это нуль.

Определение. *Если для некоторого натурального n все цифры α_j с индексами $j \geqslant n+1$, в записи*

$$\pm \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

равны нулю, то соответствующая десятичная дробь называется конечной.

Таким образом, общий вид конечной десятичной дроби задается записью $(\mathbf{DF})$ или $(\mathbf{DF'})$, в которой все цифры начиная с некоторого номера равны нулю:

$$\pm\,\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\,0\,0\,0\ldots.$$

Каждой конечной десятичной дроби соответствует рациональное число x, определяемое по формуле

$$x = \pm\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n}\right).$$

Конечные десятичные дроби складывают, вычитают, умножают и делят друг на друга по обычным правилам арифметики для рациональных чисел. Кроме того конечные десятичные дроби сравнивают друг с другом по правилам сравнения рациональных чисел. Указанные арифметические операции, а также операцию сравнения, распространим на случай бесконечных десятичных дробей.

Определение. *Бесконечные десятичные дроби вида*

$$\alpha_0,\underbrace{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\,\underbrace{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\ldots,$$

или же вида

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\underbrace{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+n}}\,\underbrace{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+n}}\ldots,$$

где одна или несколько цифр повторяются в неизменном порядке, называются периодическими. Совокупность повторяющихся цифр называется периодом такой дроби.

Теорема. *Всякое рациональное число можно представить в виде конечной или периодической дроби и обратно — всякая конечная десятичная дробь или дробь периодическая изображает рациональное число.*

Следовательно, периодические дроби складываются, вычитаются, умножаются и делятся друг на друга как рациональные числа. Кроме того периодические дроби можно сравнивать друг с другом по тем же правилам, что и рациональные числа.

Расширим указанные арифметические операции, а также операцию сравнения, на случай, когда в качестве аргументов выступают бесконечные десятичные дроби, которые не являются периодическими.

3^0. Введем на множестве бесконечных десятичных дробей понятия равенства, а также отношение порядка, т.е. понятия “меньше"и “больше"(сравнение). Используем при этом понятие *одинаковых десятичных дробей*.

Определение. *Две неотрицательные бесконечные десятичные дроби*

$$\boldsymbol{\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots} \quad \textit{и} \quad \boldsymbol{\beta = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n \ldots}$$

назовем одинаковыми, если соответствующие им слова из цифр тождественно сов-

падают, т.е. если

$$\forall\, j = 0, 1, 2, \ldots \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = \beta_j.$$

Конечный начальный отрезок $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ бесконечной десятичной дроби $(\mathbf{DF})$–$(\mathbf{DF'})$ обозначим через $(\alpha)_n$ и назовем его n-отрезком исходной бесконечной дроби.

Определение. *Две бесконечные непериодические десятичные дроби*

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \quad \text{и} \quad \beta = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \ldots$$

равны друг другу, если

$$\forall\, n = 0, 1, 2, \ldots \quad \Rightarrow \quad |(\alpha)_n - (\beta)_n| \leqslant 10^{-n}.$$

Введенное понятие равенства бесконечных непериодических десятичных дробей обладает свойством рефлексивности ($\alpha = \alpha$) и симметричности (если $\alpha = \beta$, то $\beta = \alpha$).

Если две десятичные дроби одинаковы, то они равны. Однако класс равных дробей шире чем класс одинаковых.

Например, простая (обыкновенная) положительная дробь $\frac{p}{q}$ равна бесконечной десятичной дроби $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, если для всех

$n = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы неравенства

$$\left|\frac{p}{q} - \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{10^n}.$$

В частности, $1 = 0,9999\ldots$.

Упражнение. *Любая периодическая десятичная дробь с периодом* 9 *вида*

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n 9\,9\,9 \ldots, \qquad \alpha_n \neq 9,$$

равна конечной десятичной дроби

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}(\alpha_n + 1).$$

Оказывается, в предыдущем упражнении указан единственно возможный случай, когда разные десятичные дроби могут быть равными в определенном выше смысле.

Лемма 1. *Пусть десятичные дроби*

$$\alpha = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots \quad \text{и} \quad \beta = \beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$$

равны в смысле данного выше определения и $\alpha_0 > \beta_0$. *Тогда*

$$\alpha_0 = \beta_0 + 1 \quad \text{и} \quad \forall\, n \geqslant 1 \quad \alpha_n = 0,\ \beta_n = 9.$$

Доказательство. По условию леммы десятичные дроби α и β равны. Следовательно,

$$|(\alpha)_0 - (\beta)_0| \leqslant 10^0 = 1,$$

или, что то же самое $|\alpha_0 - \beta_0| \leqslant 1$. Но по условию α_0 и β_0 — это неотрицательные целые числа, причем $\alpha_0 > \beta_0$. Это возможно лишь при $\alpha_0 = \beta_0 + 1$.

Проверим, что при $n \geqslant 1$ справедливы равенства $\alpha_n = 0$ и $\beta_n = 9$. Используем *принцип математической индукции*.

База индукции, $n = 1$. Имеем

$$(\alpha)_1 = \beta_0 + 1, \alpha_1 = \beta_0 + 1 + \frac{\alpha_1}{10},$$

$$(\beta)_1 = \beta_0, \beta_1 = \beta_0 + \frac{\beta_1}{10}.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем

$$|(\boldsymbol{\alpha})_1 - (\boldsymbol{\beta})_1| = 1 + \frac{\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\beta}_1}{10}.$$

По условию десятичные дроби $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ равны и, следовательно, должна выполняться оценка

$$1 + \frac{\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\beta}_1}{10} \leqslant \frac{1}{10}.$$

Это возможно лишь при $\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1 \geqslant 9$. Но $\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\boldsymbol{\beta}_1$ — это цифры и последнее неравенство возможно лишь при $\alpha_1 = 0$ и $\beta_1 = 9$. Это означает, что заключение леммы верно при $n = 1$.

Предположение индукции, $n = k$. Пусть имеют место равенства

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0, \quad \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 9.$$

В этом предположении имеем

$$(\alpha)_k = \beta_0 + 1{,}0\ldots0, \quad (\beta)_k = \beta_0{,}9\ldots9.$$

После запятой в этих равенствах взяты ровно k цифр. Вычитая из первого равенства второе, получаем

$$|(\alpha)_k - (\beta)_k| = 0,0\ldots0\,1 = \frac{1}{10^k}.$$

Шаг индукции, $n = k+1$. Имеем

$$(\alpha)_{k+1} = (\alpha)_k + 0{,}0\ldots0\,\alpha_{k+1} = (\alpha)_k + \frac{\alpha_{k+1}}{10^{k+1}},$$

$$(\beta)_{k+1} = (\beta)_k + 0{,}0\ldots0\,\beta_{k+1} = (\beta)_k + \frac{\beta_{k+1}}{10^{k+1}}.$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем

$$(\alpha)_{k+1} - (\beta)_{k+1} = (\alpha)_k - (\beta)_k + \frac{\alpha_{k+1} - \beta_{k+1}}{10^{k+1}},$$

или, в соответствии с предположением индукции,

$$(\alpha)_{k+1} - (\beta)_{k+1} = \frac{1}{10^k} + \frac{\alpha_{k+1} - \beta_{k+1}}{10^{k+1}}.$$

По условию десятичные дроби α и β равны и, следовательно, должна выполняться оценка

$$(\alpha)_{k+1} - (\beta)_{k+1} = |(\alpha)_{k+1} - (\beta)_{k+1}| \leqslant \frac{1}{10^{k+1}},$$

или

$$\frac{1}{10^k} + \frac{\alpha_{k+1} - \beta_{k+1}}{10^{k+1}} \leqslant \frac{1}{10^{k+1}}.$$

Домножая обе части полученного неравенства на 10^k, получаем

$$1 + \frac{\alpha_{k+1} - \beta_{k+1}}{10} \leqslant \frac{1}{10}.$$

Это возможно лишь при $\beta_{k+1} - \alpha_{k+1} \geqslant 9$.

Но α_{k+1} и β_{k+1} — это цифры и последнее неравенство возможно лишь при $\alpha_{k+1} = 0$ и $\beta_{k+1} = 9$. Это означает, что заключение верно при $n = k + 1$.

В соответствии с принципом математической индукции лемма справедлива. $\square$

Следствие. *Десятичная дробь*

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

равна нулю тогда и только тогда когда в соответствующем дроби слове все цифры равны нулю:

$$\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_j = 0 \quad \forall\, j = 0, 1, 2, \dots.$$

Доказательство. Обозначим через β десятичную дробь, в записи которой все цифры нулевые. Пусть десятичная дробь α равна β по условию. Предположим, что при этом α и β не одинаковы. Тогда по определению равенства десятичных дробей имеем

$$(\alpha)_0 = \alpha_0, \quad (\beta)_0 = 0, \quad |(\alpha)_0 - (\beta)_0| \leqslant 10^0 = 1,$$

или $|\alpha_0| \leqslant 1$. Это возможно лишь в случае если $\alpha_0 = 0$ или $\alpha_0 = 1$. Но вариант $\alpha_0 = 1$ невозможен: в этом случае в соответствии с доказанной леммой должны выполняться равенства $\beta_n = 9$, $n = 1, 2, \ldots$, что противоречит определению β. Таким образом, $\alpha_0 = 0$ и десятичная дробь α имеет вид

$$\alpha = 0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots.$$

По определению равенства десятичных дробей имеем

$$(\alpha)_1 = 0{,}\alpha_1, \quad (\beta)_1 = 0{,}0 \quad |(\alpha)_1 - (\beta)_1| \leqslant \frac{1}{10},$$

или $|\alpha_1| \leqslant 1$. Это возможно лишь в случае если $\alpha_1 = 0$ или же $\alpha_1 = 1$. Но вариант $\alpha_1 = 1$

снова невозможен: в этом случае в соответствии с доказанной леммой должны выполняться равенства $\beta_n = 9$, $n = 2, 3, \ldots$, что противоречит определению β. Таким образом, $\alpha_1 = 0$ и десятичная дробь α имеет вид

$$\alpha = 0{,}0\,\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots .$$

Равенства $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \cdots = \alpha_n = 0$ доказываются аналогично. $\square$

$4^{\mathbf{0}}$. Продолжим рассмотрение множества бесконечных десятичных дробей, т.е. всевозможных слов, составленных из цифр и имеющих вид

$$\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots, \tag{DF}$$

где α_0 — целое неотрицательное число, т.е. $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$ и $\alpha_0 \geqslant 0$. Следующие за α_0 символы α_1, α_2, ..., α_n, ... — это бесконечная цифровая последовательность.

Следствие. *Если две разные (не одинаковые) десятичные дроби*

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \quad \text{и} \quad \beta = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \ldots$$

равны, то одна из них конечная, а другая периодическая с периодом 9*. Если при этом*

$$\alpha = \pm \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \, 9 \, 9 \ldots \quad \text{и} \quad \alpha_n \neq 9,$$

то $\beta = \pm \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots (\alpha_n + 1)$*.*

Докажите следствие в качестве упражнения.

Следствие (транзитивность равенства). *Пусть есть три десятичные дроби* α, β, γ, *причем* $\alpha = \beta$ *и* $\beta = \gamma$. *Тогда* $\alpha = \gamma$.

Доказательство. Пусть α и β — одинаковые слова. Тогда $\alpha = \gamma$ по определению равенства десятичных дробей.

Пусть теперь α и β — разные слова, причем α — бесконечная десятичная дробь. Тогда по предыдущему следствию имеем

$$\alpha = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n 9\,9 \ldots \quad \text{и} \quad \alpha_n \neq 9,$$

и $\beta = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots (\alpha_n + 1)$. Далее, если β и γ — одинаковые слова, то $\alpha = \gamma$ по определению равенства десятичных дробей. Если же β и γ — разные слова, то по доказанной лемме $\gamma = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n 9\,9 \ldots$, т.е. снова $\alpha = \gamma$. $\square$

Пусть есть две десятичные дроби α и β, не равные друг другу, $\alpha \neq \beta$.

В этом случае согласно определению равенства десятичных дробей существует такой номер $n = p$, для которого оценка

$$|(\alpha)_n - (\beta)_n| \leqslant 10^{-n}$$

неверна. Это означает, что для номера $n = p$ должна выполняться противоположная оценка, т.е.

$$|(\alpha)_p - (\beta)_p| > 10^{-p}.$$

Заметим, что $10^p \cdot (\alpha)_p$ и $10^p \cdot (\beta)_p$ — это целые числа и в соответствии с выбором номера p модуль расстояния между ними строго больше единицы:

$$|10^p \cdot (\alpha)_p - 10^p \cdot (\beta)_p| > 1.$$

Это возможно лишь в случае, если расстояние между рассматриваемыми целыми числами не меньше двух:

$$|10^p \cdot (\alpha)_p - 10^p \cdot (\beta)_p| \geqslant 2.$$

Следовательно, для номера p справедлива следующая оценка

$$|(\alpha)_p - (\beta)_p| \geqslant 2 \cdot 10^{-p}. \qquad (1)$$

Лемма 2. *Пусть десятичные дроби α и β таковы, что для некоторого номера p справедливо неравенство*

$$(\beta)_p - (\alpha)_p > 10^{-p}.$$

Тогда для всех номеров $n > p$ справедлива оценка

$$(\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-p}.$$

Доказательство. Пусть α имеет знак минус, а β имеет знак плюс. Тогда при $n > p$ имеем

$$(\beta)_n - (\alpha)_n \geqslant (\beta)_p - (\alpha)_p > 10^{-p}.$$

Пусть как α так и β имеют знак плюс. Тогда при $n > p$ имеем

$$(\beta)_n - (\alpha)_n = (\beta)_p - (\alpha)_p \pm$$
$$\pm (0,\beta_{p+1} \ldots \beta_n - 0,\alpha_{p+1} \ldots \alpha_n) \cdot 10^{-p}.$$

Воспользовавшись оценкой (1), получаем далее

$$(\beta)_n - (\alpha)_n \geqslant 2 \cdot 10^{-p} - 0,\underbrace{9\,9\,\ldots\,9}\cdot 10^{-p}.$$

Цифра 9, охваченная в записи выше фигурной скобкой снизу, повторяется $(n-p)$ раз. Вынося сомножитель 10^{-p}, получаем следующую оценку снизу:

$$(\beta)_n - (\alpha)_n \geqslant (2 - 0,\underbrace{99\ldots9}) \cdot 10^{-p} =$$

$$= 1,00\ldots01 \cdot 10^{-p} > 10^{-p}.$$

Эта оценка справедлива для всех $n \geqslant p$. $\square$

5^0. Введем на множестве десятичных дробей отношение порядка, т.е. введем правила их сравнения по величине.

Определение. *Десятичная дробь* α *меньше десятичной дроби* β, *если существует такой номер* n, *что*

$$(\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-n}.$$

Отметим, что в левой части последнего неравенства берется разность двух рациональных чисел, т.е. величина вполне определенная.

Условие, что α меньше β записывается как $\alpha < \beta$, или же в виде $\beta > \alpha$ (β больше α).

В соответствии с данным определением десятичная дробь $\beta > 0$ тогда и только тогда, когда β положительна, и дробь $\beta < \mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда β отрицательна.

Бинарное отношение $<$ на множестве десятичных дробей обладает следующим свойством.

$(\mathbf{P_1})$. Если $\alpha < \beta$, то $-\alpha > -\beta$.

Доказательство. Пусть $\alpha < \beta$, тогда существует такой номер n, что

$$(\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-n}.$$

Числа $(\beta)_n$ и $(\alpha)_n$ рациональны и, как известно, $(-\beta)_n = -(\beta)_n$ и $(-\alpha)_n = -(\alpha)_n$. Учитывая это и домножая предыдущую оценку на -1, получаем

$$(-\beta)_n - (-\alpha)_n < -10^{-n}.$$

Домножая это неравенство на -1, получаем ему противоположное:

$$(-\alpha)_n - (-\beta)_n > 10^{-n}.$$

Это и означает, что $-\alpha > -\beta$. $\square$

Определенные отношения $<$ и $>$ обладают свойством *транзитивности*.

Лемма 3 (транзитивность $<$). *Пусть есть три десятичные дроби* α, β, γ, *причем* $\alpha < \beta$ *и* $\beta < \gamma$. *Тогда* $\alpha < \gamma$.

Доказательство. Пусть $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$. Тогда по определению существуют два таких номера p и q, что

$$(\beta)_p - (\alpha)_p > 10^{-p}, \qquad (\gamma)_q - (\beta)_q > 10^{-q}.$$

Возьмем $\boldsymbol{n = \max(p, q)}$. Тогда по лемме 2 справедливы следующие две оценки

$$\boldsymbol{(\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-p}, \qquad (\gamma)_n - (\beta)_n > 10^{-q}}.$$

Все числа в последней строке — это рациональные числа. Их можно складывать и вычитать, пользуясь при этом известными свойствами арифметических операций на множестве $\mathbb{Q}$. Имеем

$$\boldsymbol{(\gamma)_n - (\alpha)_n = (\gamma)_n - (\beta)_n + (\beta)_n - (\alpha)_n >}$$

$$> 10^{-q} + 10^{-p} > 10^{-n}.$$

Последнее неравенство справедливо в силу выбора n. Итоговая оценка $(\gamma)_n - (\alpha)_n > 10^{-n}$ означает по определению, что $\alpha < \gamma$. $\square$

Исключив из рассмотрения периодические десятичные дроби с периодом 9, получаем следующие три утверждения.

1). Десятичные дроби $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ равны тогда и только тогда когда для любого неотрицательного номера $\boldsymbol{n}$ справедливо равенство $(\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{\beta})_{\boldsymbol{n}}$.

2). $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ тогда и только тогда когда существует такое неотрицательное $\boldsymbol{n}$ что справедливо неравенство $(\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{n}} < (\boldsymbol{\beta})_{\boldsymbol{n}}$.

3). Будем писать $\alpha \leqslant \beta$, если выполнено одно из двух условий: $\alpha < \beta$ или же $\alpha = \beta$. Отношение $\alpha \leqslant \beta$ выполняется тогда и только тогда когда для любого неотрицательного n справедливо неравенство $(\alpha)_n \leqslant (\beta)_n$.

Подчеркнем, что при каждом заданном n десятичные дроби $(\alpha)_n$ и $(\beta)_n$ — это рациональные числа.

Таким образом, в определяющих частях утверждений $\mathbf{1)}$–$\mathbf{3)}$ речь идет об уже заданных на множестве рациональных чисел порядковых отношениях.

Из утверждений $\mathbf{1)}$–$\mathbf{2)}$ заключаем, что для любых двух десятичных дробей $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ выполняется одно и только одно из трех отношений порядка:

$$\boldsymbol{\alpha < \beta}, \quad \boldsymbol{\alpha = \beta} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\alpha > \beta}.$$

Из неравенств $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$ следует, что $\alpha < \gamma$. Это означает, что определенное на множестве десятичных дробей отношение $<$ транзитивно.

Множество десятичных дробей с введенными на нем арифметическими операциями и линейным отношением порядка (сравнением любых двух его элементов по величине) называется *множеством вещественных чисел*.

6^0. Некоторые возникшие на практике вещественные числа имеют свои, исторически установившиеся обозначения, например: $\sqrt{2}$, π, e, ... Эти особые обозначения сохраняются за соответствующими числами при проведении самых разных операций, например, арифметических. По этой причине удобно предполагать, что множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ *не совпадает* с множеством всех десятичных дробей, а лишь находится с ним во взаимно однозначном соответствии.

Точнее, удобно предполагать, что каждое вещественное число лишь *изображается* некоторой десятичной дробью, а каждая десятичная дробь *представляет* собой некоторое вещественное число.

Линейная упорядоченность множества десятичных дробей, а значит и множества представляемых ими вещественных чисел, позволяет отождествить эти объекты с точками горизонтальной прямой, на которой выбрано начало отсчета (нуль) и задано положительное направление (вправо от нуля).

Предполагается, что все точки прямой, лежащие правее начала, изображают положительные десятичные дроби, в то время как все точки, лежащие левее начала, соответствуют отрицательным десятичным дробям.

Оснащенную таким образом прямую называют при этом *числовой прямой*, или *числовой осью*. За ней сохраняется то же самое обозначение $\mathbb{R}$, что и за множеством вещественных чисел.