Пути и циклы Эйлеровские и Гамильтоновские.

Эйлеровы(?) пути:

Можно ли пройти через все рёбра, посещая их по одному разу?

Гамильтовы(?) пути:

можно ли пройти через все вершины, посещая их по одно) по одному разу?

Эйлеров цикл — простой цикл в графе, содержащий каждое ребро этого графа.

Эйлеров путь — путь в графе, содержащий каждое ребро графа.

Критерии существования:

Эй. цикл: все степени вершин в графе чётные (выполняется для связного мультиграфа). Сложн. = $O(m)$, m — кол-во рёбер

Эй. путь: все степени вершин чётные кроме двух вершин, у которых степени нечётные.

Задача про китайского почтальона: найти наименьшее кол-во рёбер, через которые потребуется пройти более одного раза, если в графе нет эйлерового пути.

Восстановление генома / цепочки ДНК:

Разбить с помощью ферментов или катализаторов цепочку на фрагменты, а затем восстановить между фрагментами эйлеров путь (цепочка).

Гамильтонов путь — путь в графе, содержащий каждую вершину графа.

Вершины по 1 разу

Гамильтонов цикл — цикл в графе, содержащий каждую вершину графа.

В полном графе всегда есть гамильтонов цикл.

Нет теоремы с необходимым и достаточным условием существования гамильтонова цикла.

Признаки отсутствия гамильт. цикла:

1) Граф содержит вершину степени 1.
(есть шарнир)

2) Есть мост.

Достаточные условия существования:

1) <u>Теорема Оре</u>
Если есть простой граф
с верш. $n \geq 3$ и $\forall$ degree $\geq n/2$

2) <u>Теорема Дирака:</u>
Для каждой пары верш.:

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n$$

Тогда это гамильтонов цикл.

Цикл C_5 содерж. гам. цикл,
но не удовл. теор. Дир. и Оре

<u>Алгоритм cheapest link algorithm (приближённый):</u>

→ на каждом шаге выбирать самое дешёвое ребро

→ следить, чтобы 3 ребра не проходили через 1 вершину

<u>Поиск ближайшего соседа:</u>

→ стартуем из дома

→ выбираем инц. ребро меньшего веса

Применение гам. циклов:

кодирование цифровых значений

↳ в каждое число попадает стрелка, такое значение у нас есть

↳ кодировки каждых двух секторов отличаются на 1 бит

↳ Нужно найти гамильтонов цикл в n-мерном кубе

$$W^1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 13 & \infty & 0 \\ \infty & 0 & \infty & 0 & \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 0 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Далее запускаем алгоритм Дейкстры

(из любой вершины)

$T_0 = \{2\}$ $D_2^{1,0} = (\infty\ \underline{0}\ \infty\ \underline{0}\ 1\ 0)$

$T_1 = \{2, 4\}$ $D = (2\ \underline{0}\ \underline{0}\ \underline{0}\ 10)$

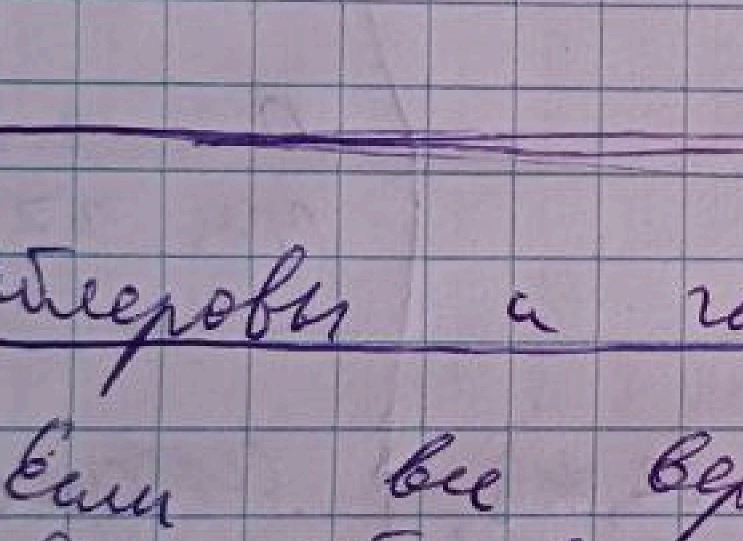
$2\ 0\ 0$

Эйлеровы и гамильтоновы графы

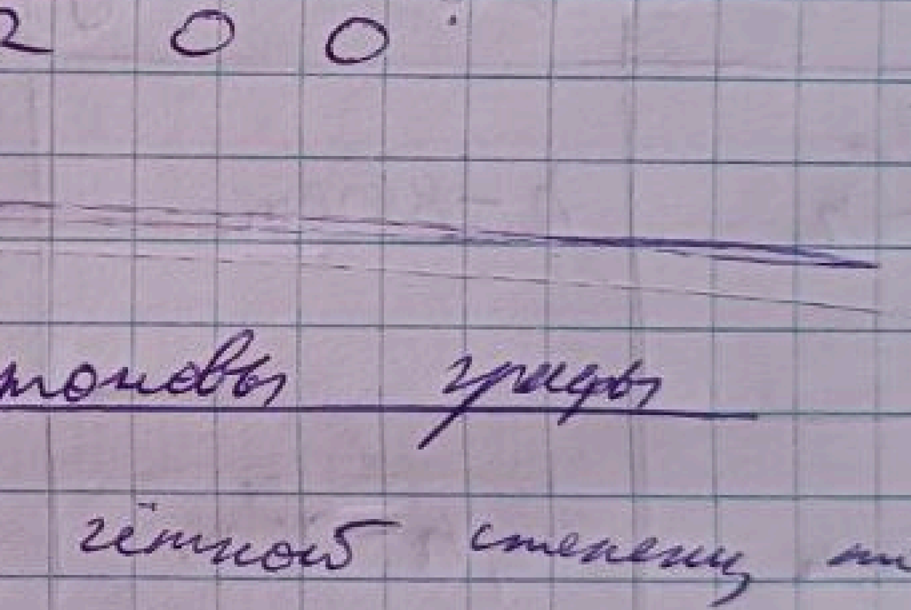
Если все вершины чётной степени, то есть эйлеров цикл.

Если все вершины, кроме двух, чётной степени, то есть эйлеров путь.

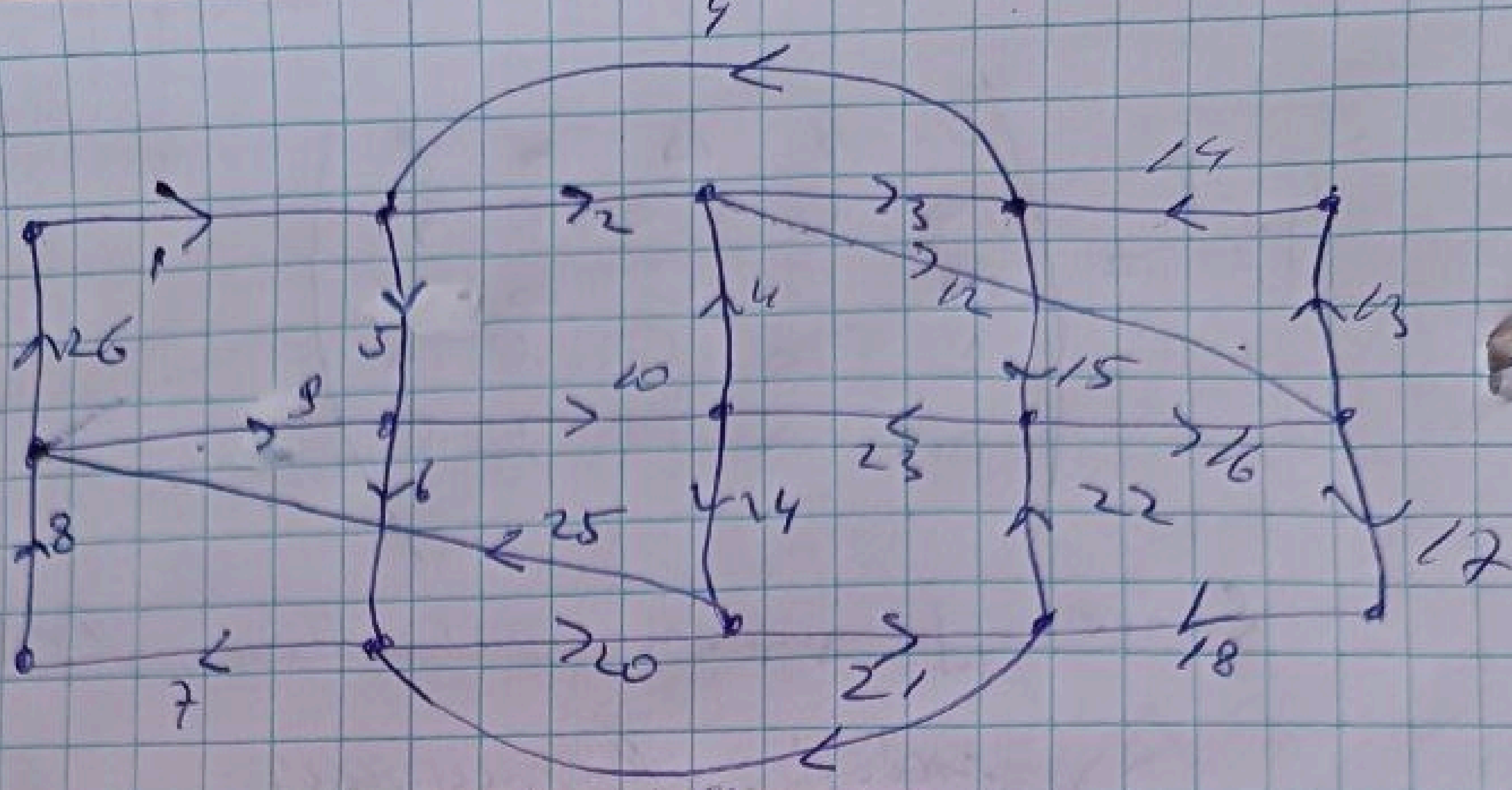
1. а) Цикл (эйл.): б) Ничего



в)



9)



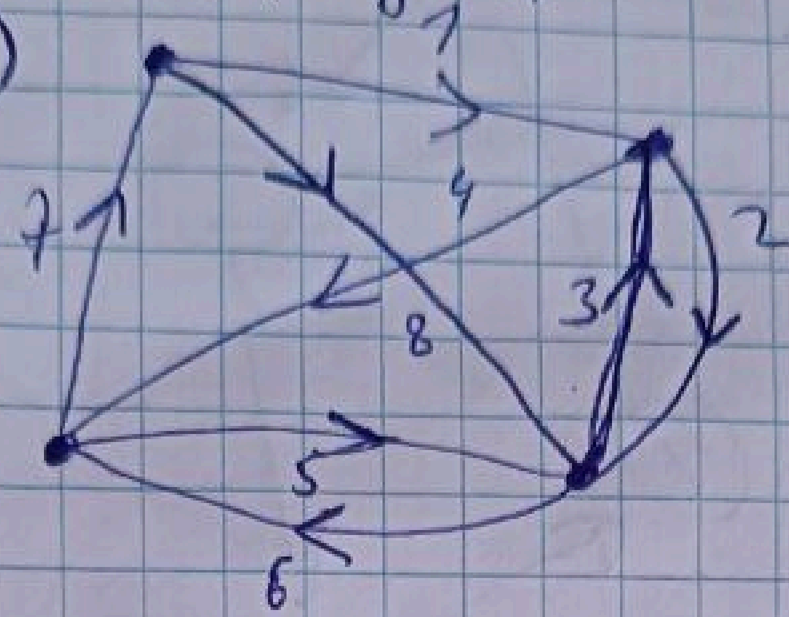
2. Эйлеров путь/цикл:

	Эйл. цикл	Эйл. путь (незамкн. цикл)	Ничего
K_n	n-нечёт.	$n=2$	n – чёт. при $n>2$
$K_{m,n}$	m,n-чёт.	$n,m=\{2,k\}$, k-нечёт.	иначе
C_n	$n>2$	$n=2$	—
W_n	$n=2$	$n=1$	$n\geq 3$
Q_n	n – чёт.	$n=1$	n – нечёт. при $n>1$

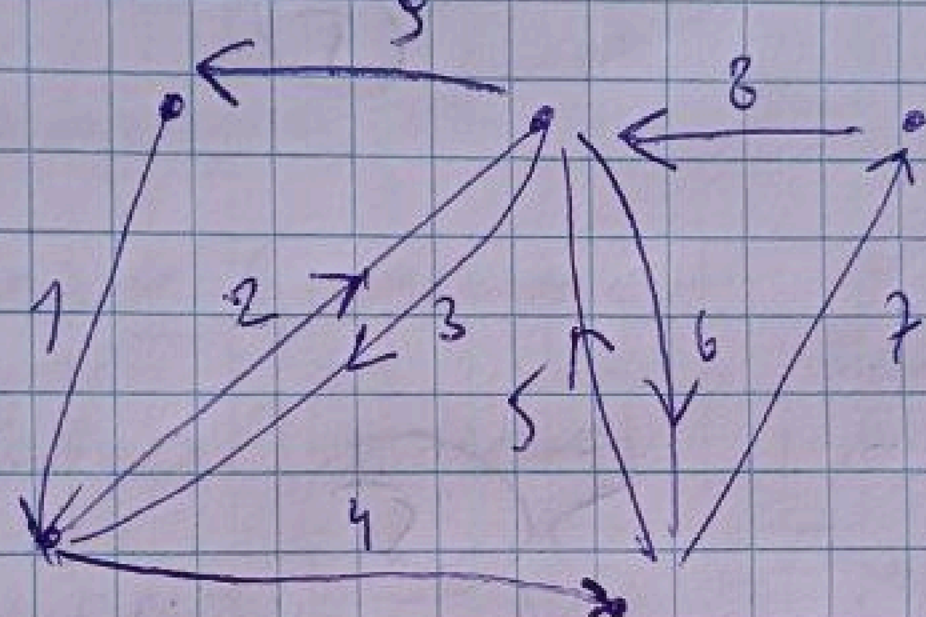
3.

Эйл. путь

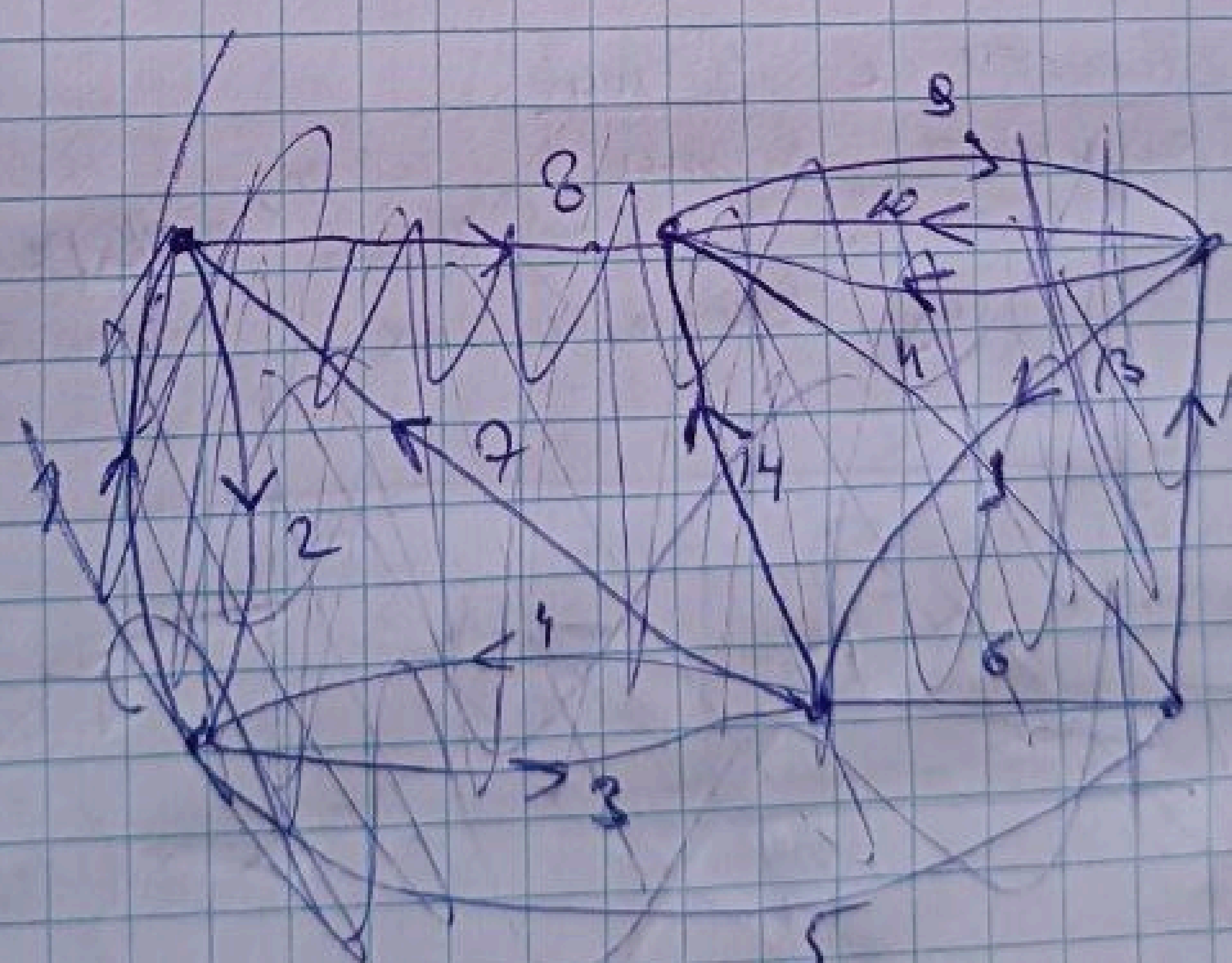
а)



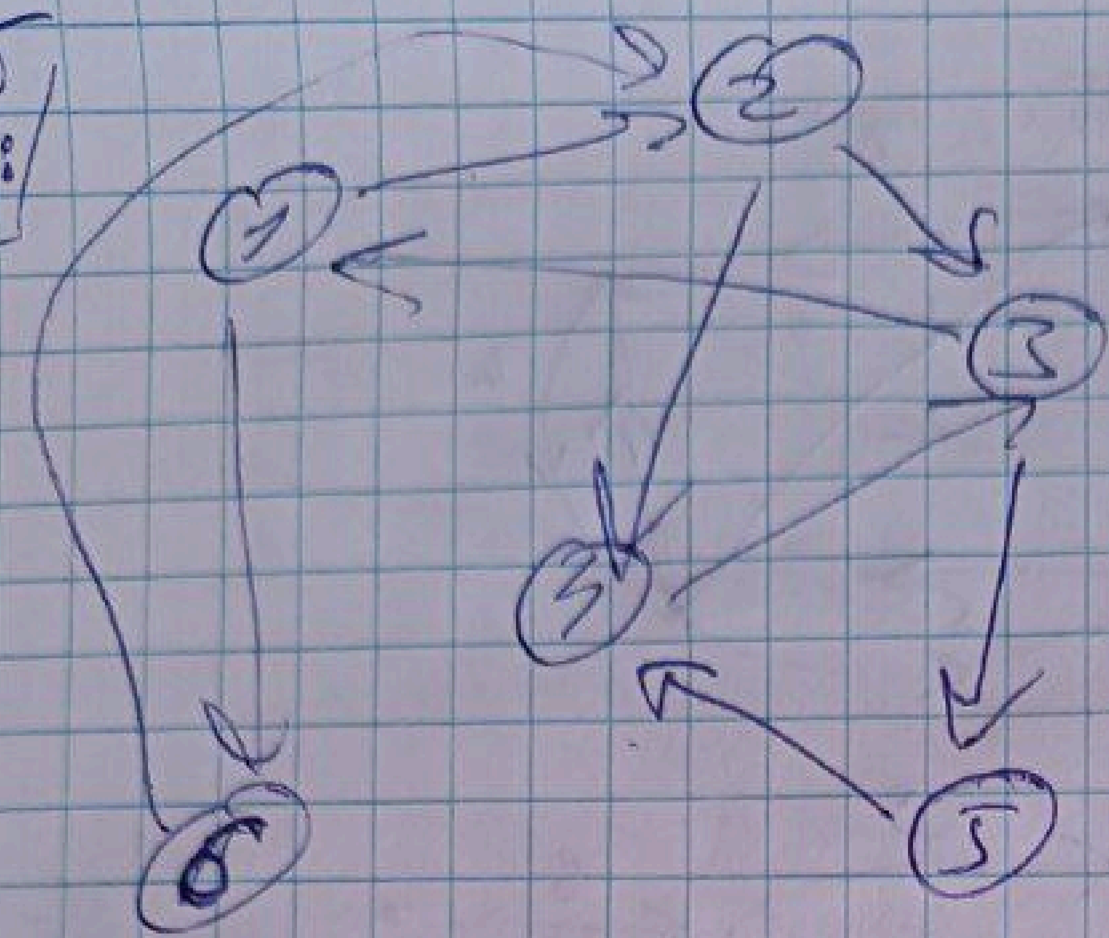
б)



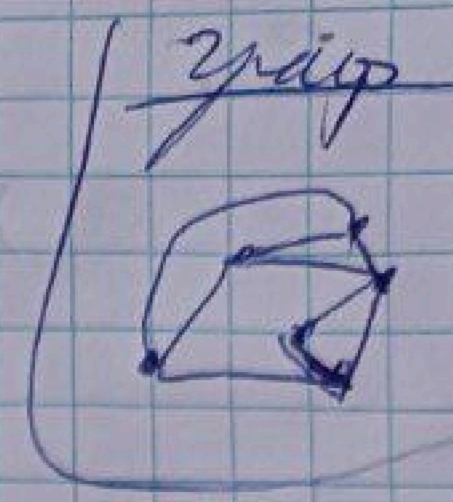
в)



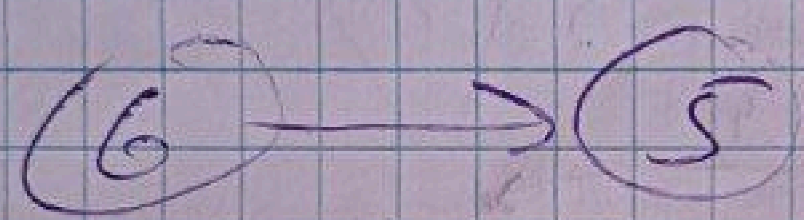
1-ый путь:



Граф



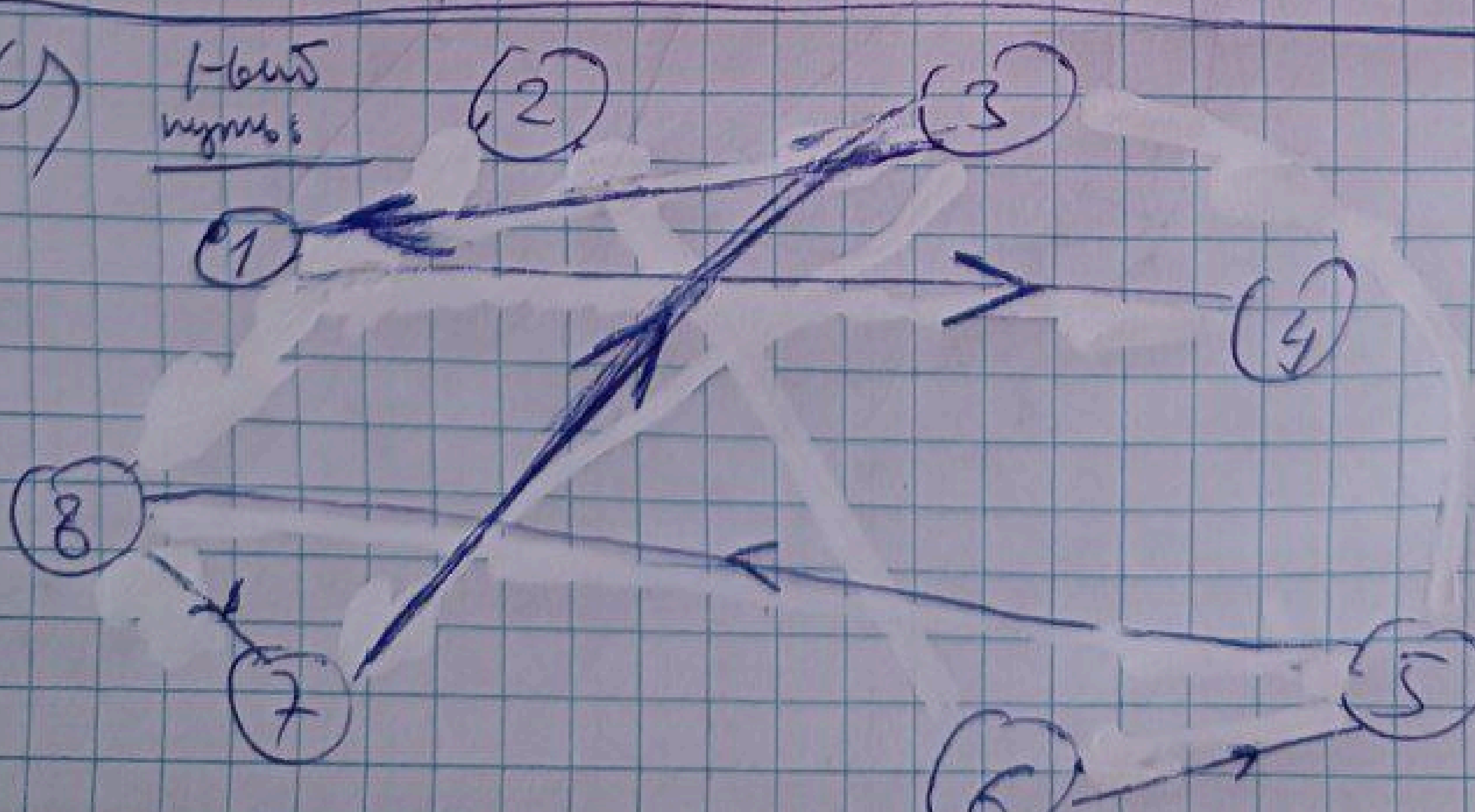
2-ой путь:



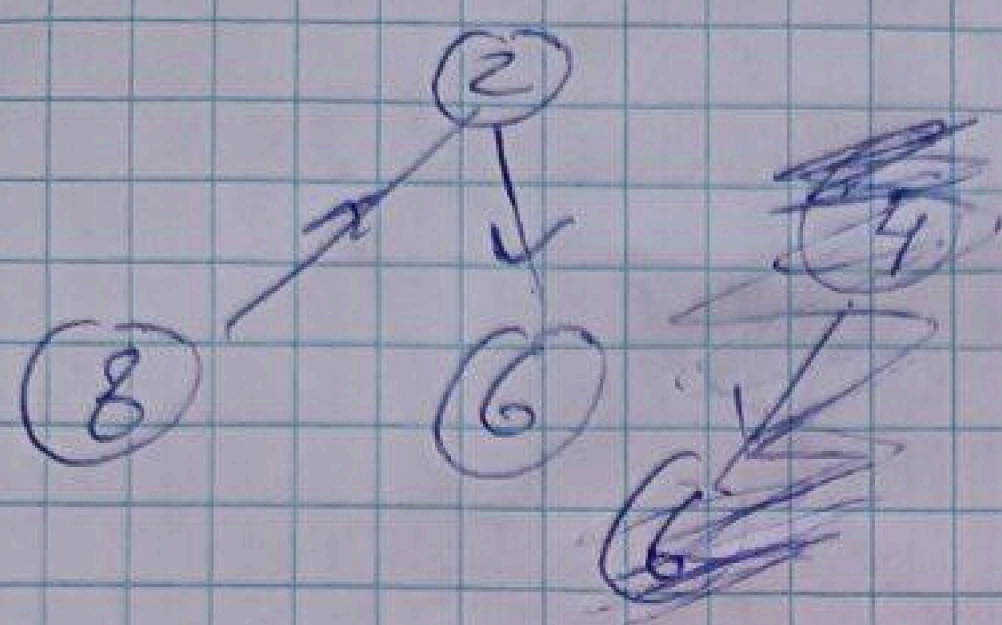
Покрывающие цепи

(одного пути нет, но можно собрать покрывающие цепи из нескольких путей

1-ый путь:



2-ой путь!



Гамильтонов цикл — цикл, проходящий по всем вершинам ровно 1 раз.

Гамильтонов путь — путь, ...

Есть некие условия.

Достаточные условия сущ. гам. цикла

→ Теорема Дирака: (частный случай теоремы Ора)

$$\text{degree}(v) \geqslant \frac{n}{2} \quad \forall v \in V$$

$\Longrightarrow$ есть гам. цикл

→ Теорема Ора:

$$\text{degree}(u) + \text{degree}(v) \geqslant n, \quad (u, v) \notin E$$

$\downarrow$

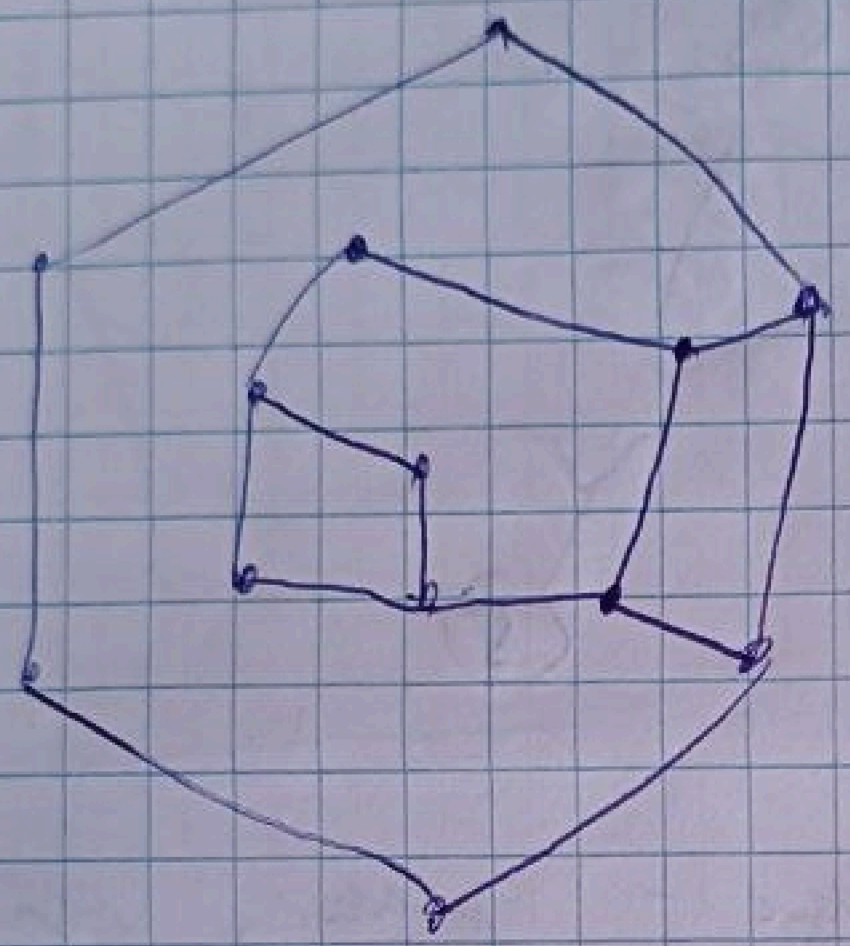
u и v — любые несвязные вершины

Признаки отсутствия гам. цикла:

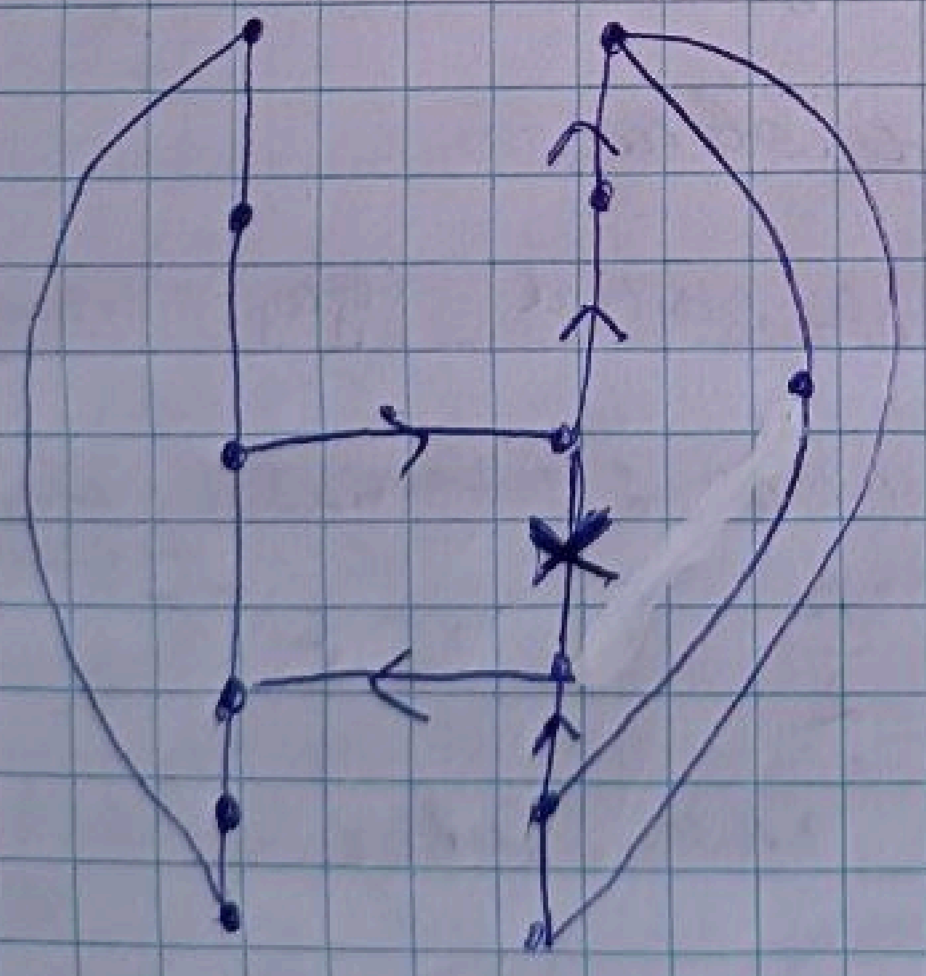
1) есть шарнир.
2) есть мост.

Доказать, что нет гам. цикла:

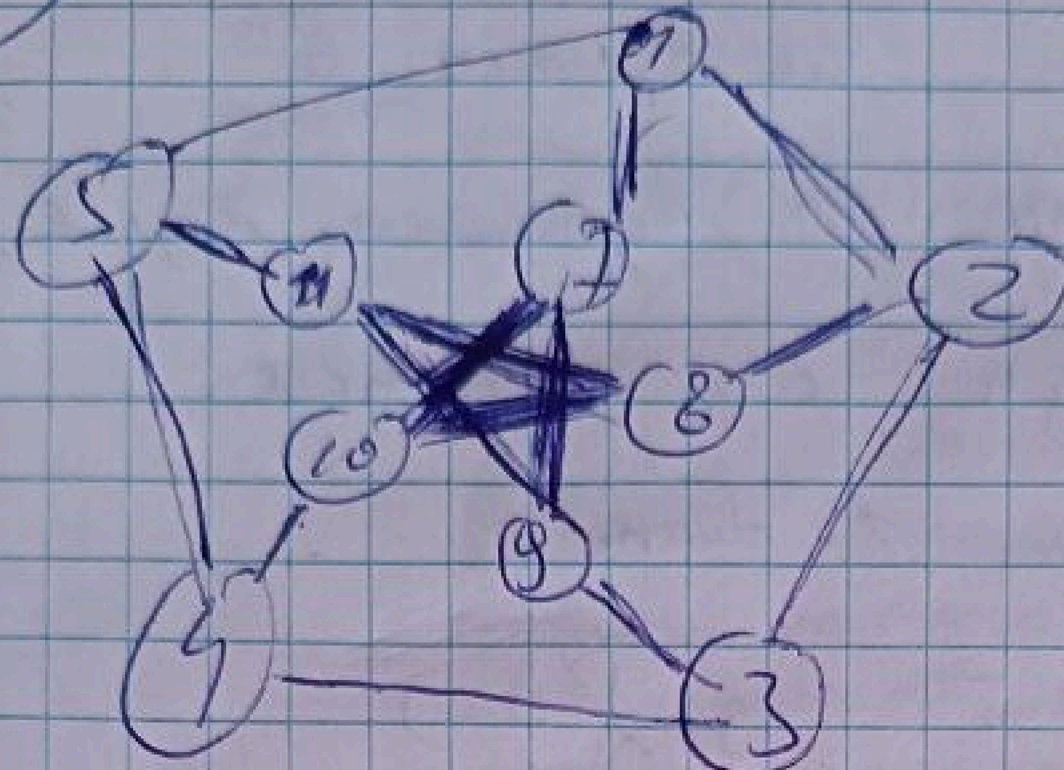
а)

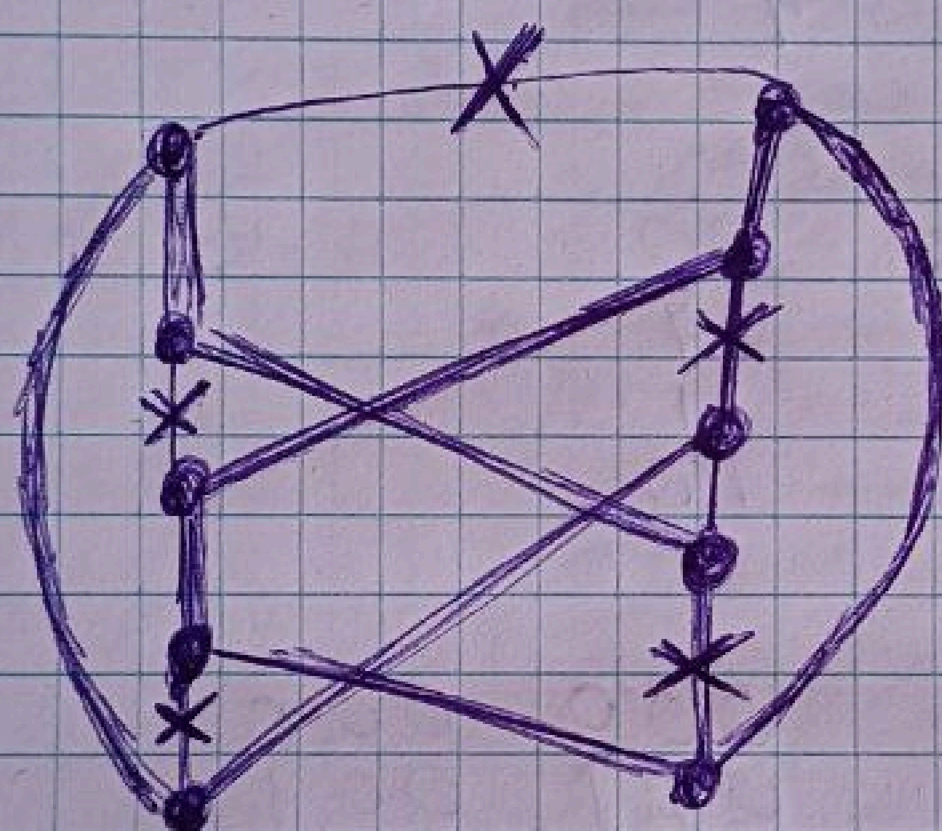


Перерисуем цикл:



б)





	Гам. цикл	Гам. путь	Ничего
K_n	всегда (при $n \geq 3$)	всегда	$n < 3$
$K_{m,n}$	$m = n$	$m = n$	$m \neq n$
W_n	всегда	при $n \geq 2$	$n < 3$
C_n	всегда	при $n \geq 3$	$n < 3$
Q_n	всегда (при $n \geq 2$)	(при $n \geq 1$)	

Код Грэя

↪ для гам. цикла в Q_n (n-мерном кубе) соседи отличаются на 1 бит

(зеркальный код Грэя)

Для $n=1$:

0
1

Для $n=2$:

00
01
11
10

Для $n=3$:

000
001
011
010
110
111
101
100

и т.д...