→ Разрез графа:

① Множество рёбер, образующих двудольный подграф, удаление которых делит граф на две или более компоненты, которые в частности, могут быть изолированными узлами.

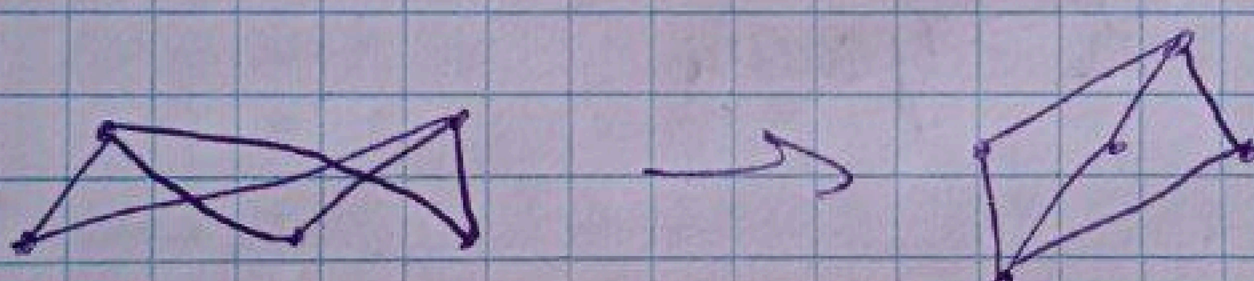
② Также это линия, проходящая через все рёбра разреза графа.

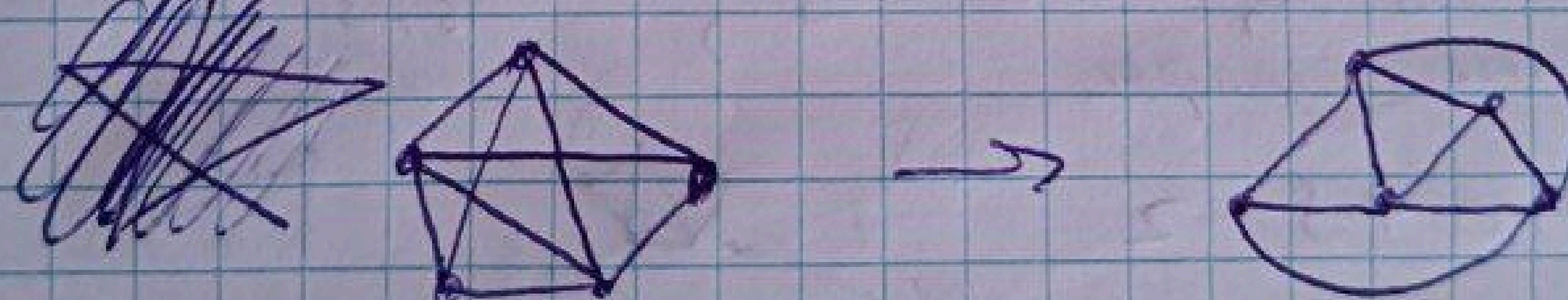
Планарность. Планарные графы

→ граф называется планарным, если его можно нарисовать без пересечений

1. Нарис. без перес. рёбер.

а) 

б) 

в) 

2. G — планарен, $|V| = 8$, $\deg_{v \in V} v = 3$,

Сколько граней?

$$\boxed{2 = n - m + f}$$

12 рёбер

$$2 = 8 - 12 + f$$

$$f = 6$$

Формула Эйлера

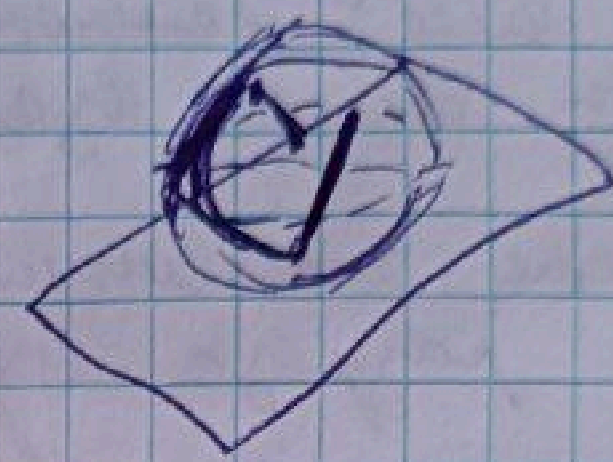
$2 = n - m + f$

Эйлерова характеристика, для сферы она равна 2

$n = |V|$ − кол-во вершин,

$m = |E|$ − кол-во рёбер

f = кол-во граней

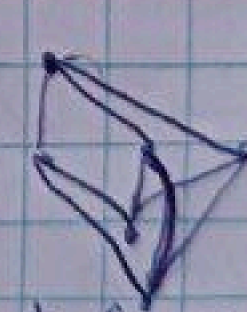


3. G − планарный граф. $|E| = 30$, $f = 20$ (20 граней)
Сколько вершин?

$2 = n - 30 + 20$

$n = 12 \Rightarrow 12$ вершин

4. Доказать, что K_5, $K_{3,3}$ − не планарные графы.



$5 - 10 + f = 2$

$f = 7$

≥ 3 рёбер для грани (грани)

$10 = m \geq \frac{7 \cdot 3}{2} = 10{,}5$

$6 - 9 + f = 2$

$f = 5$

$9 = m \geq \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

Общ. случай:

$m \leq 3 \cdot n - 6$

Введём операцию — разделение ребра:

G_1 гомеоморфен G_2,

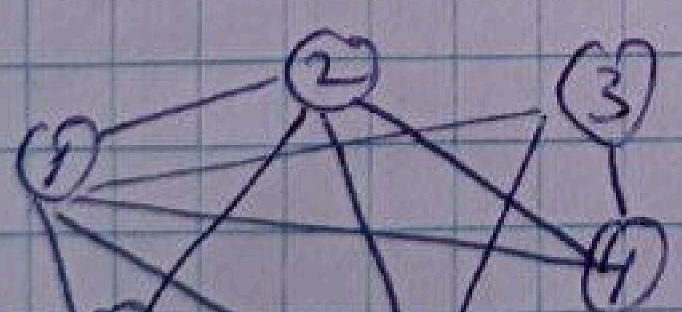
если ∃ G_1 такой, что G_1 и G_2 получаются последовательным разделением рёбер.

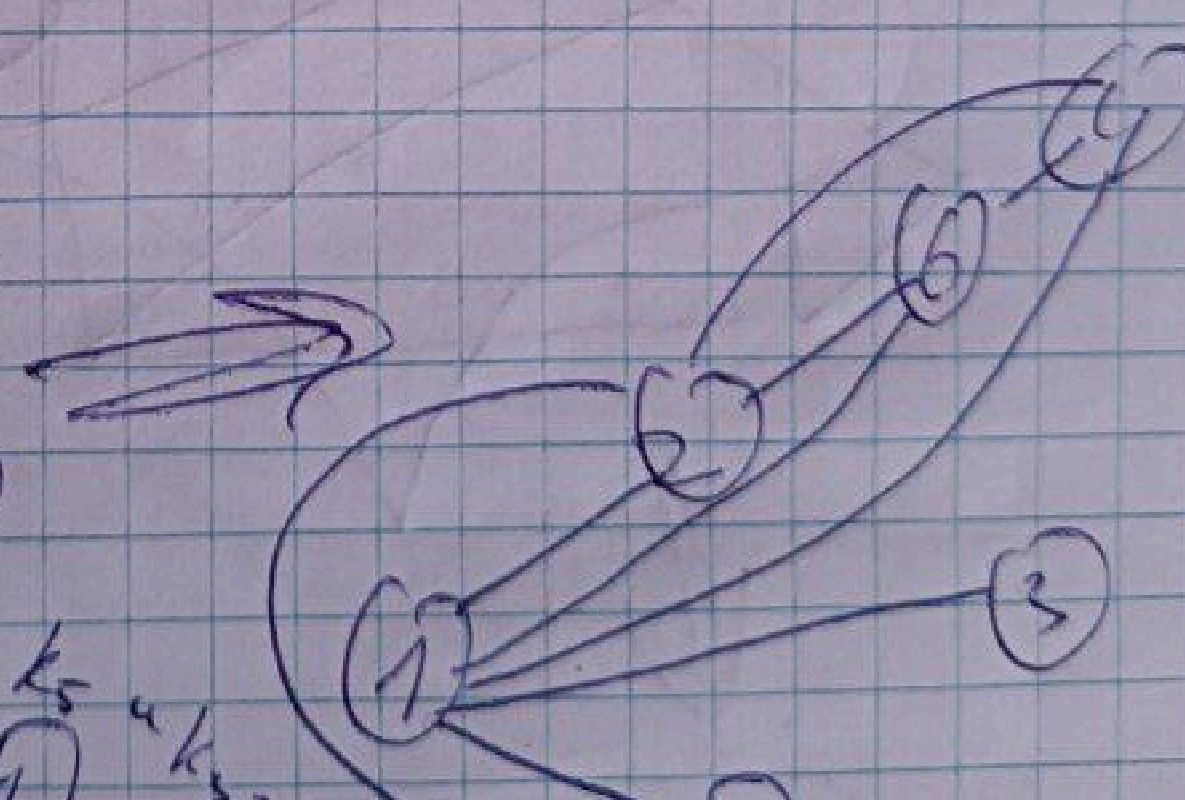
<u>Теорема Куратовского:</u>

G_1 планарен $\Leftrightarrow$ G_1 не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$.

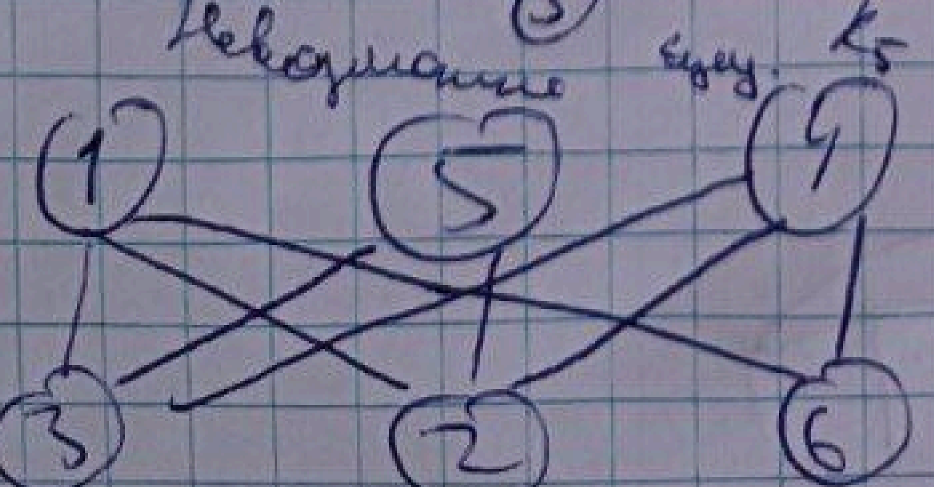
<u>Планарны ли:</u>

а)  Да.

б) 

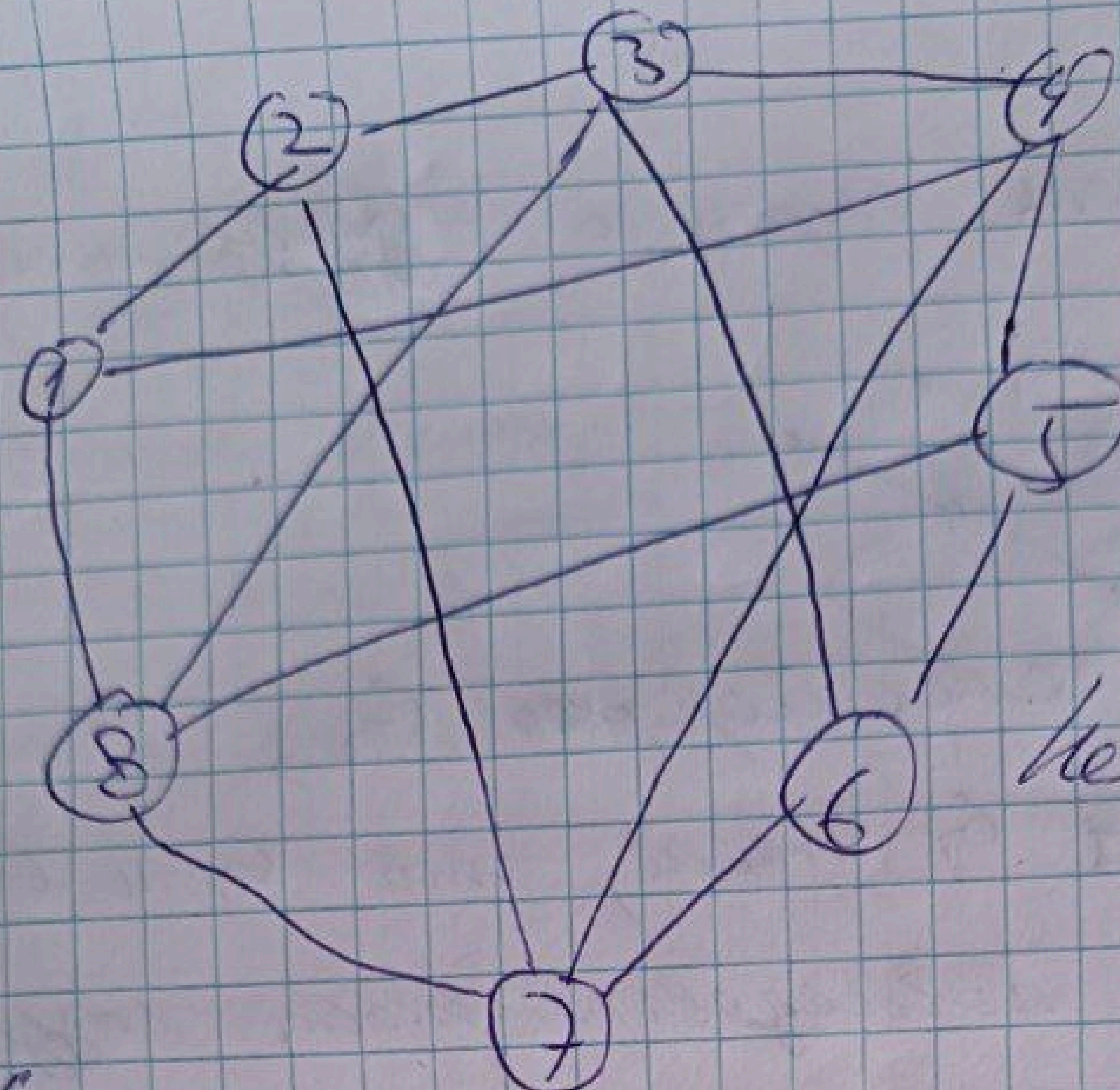


Невозможно выд. K_5 и $K_{3,3}$!



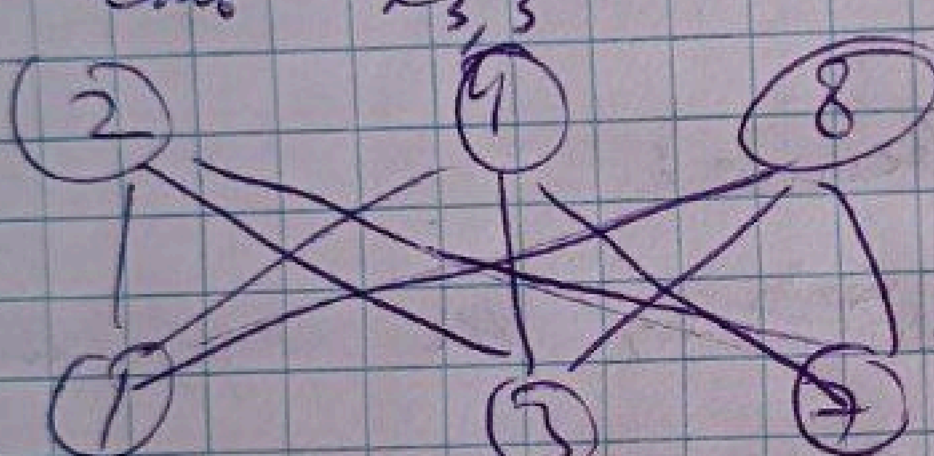
Да.

б)

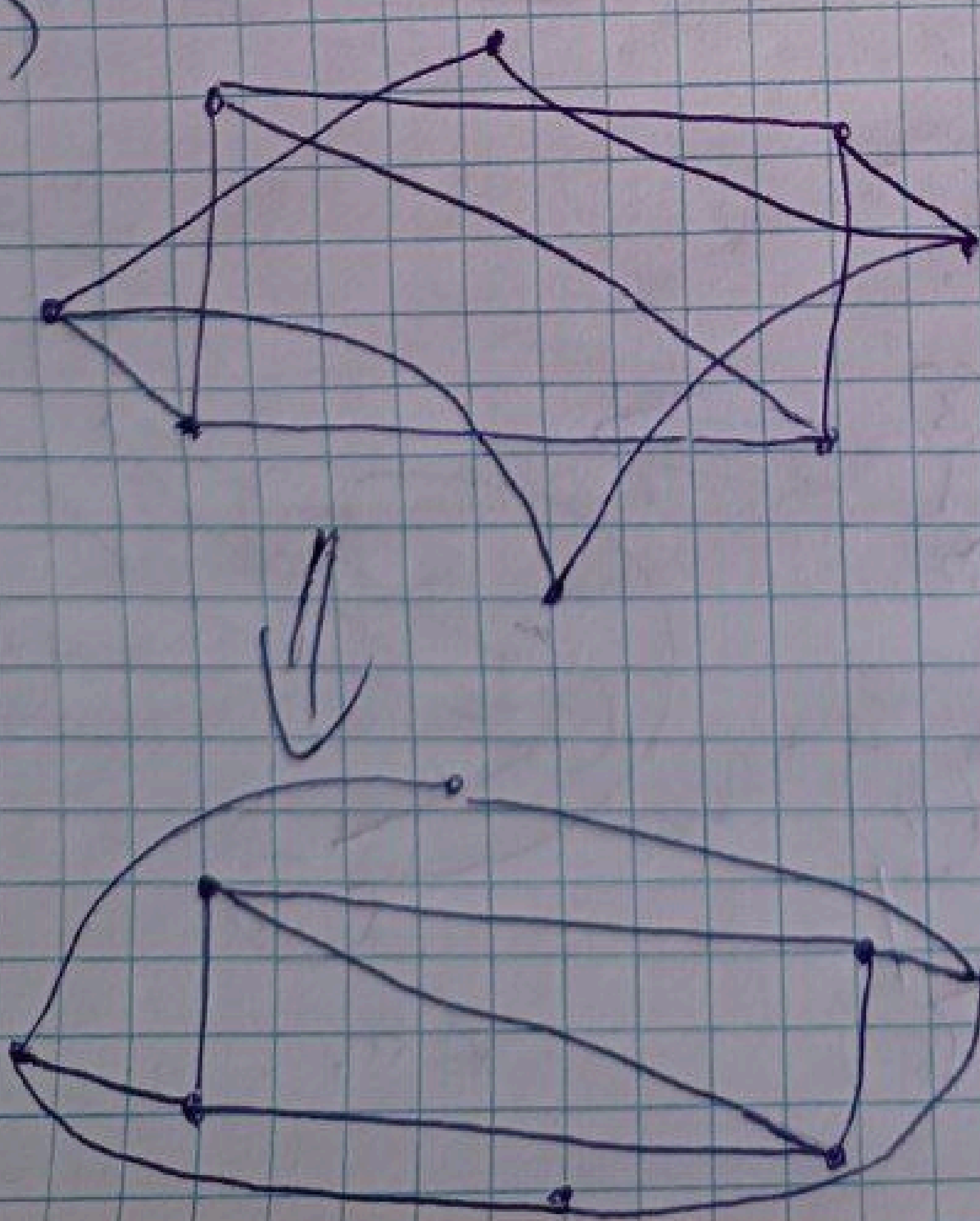


нет.

Есть $K_{3,3}$



2)



Да

6. При каких условиях для G верно, что G - планарный граф с $|E| = 3|V| - 6$?

$$\frac{3f}{2} = e$$

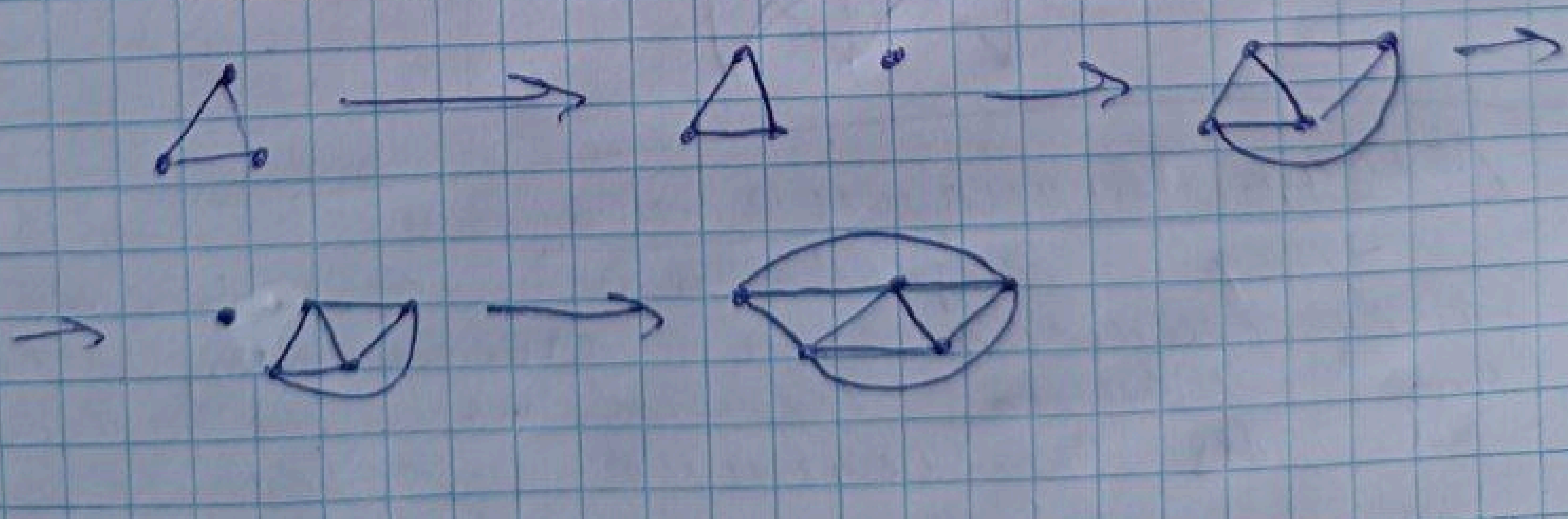
$$\begin{cases} \frac{3 \cdot f}{2} \le e \\ 3v - 6 = e \\ v - e + f = 2 \end{cases}$$

$$-2v + 6 + f = 2 \Rightarrow 2v - f = 4$$

$$v - \frac{1}{2} f \le 2$$

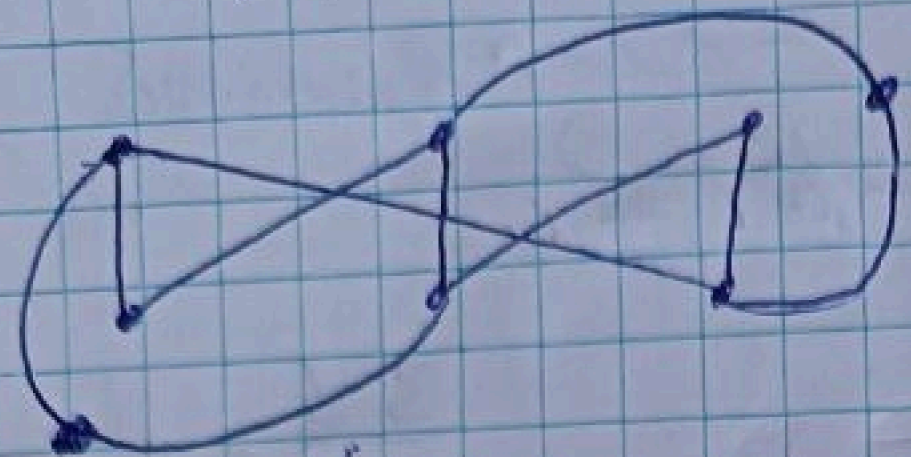
$$2v - f \le 4$$

Триангулирующий граф

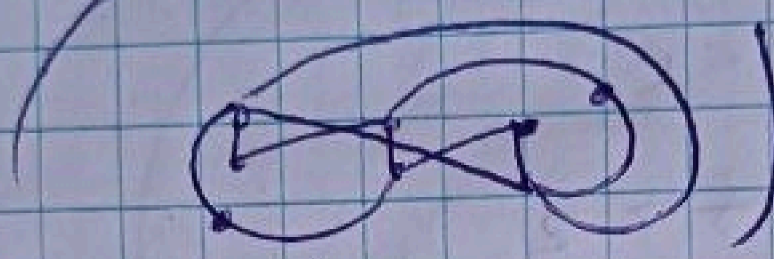


7. Гомеоморфен ли $K_{3,3}$:

а)

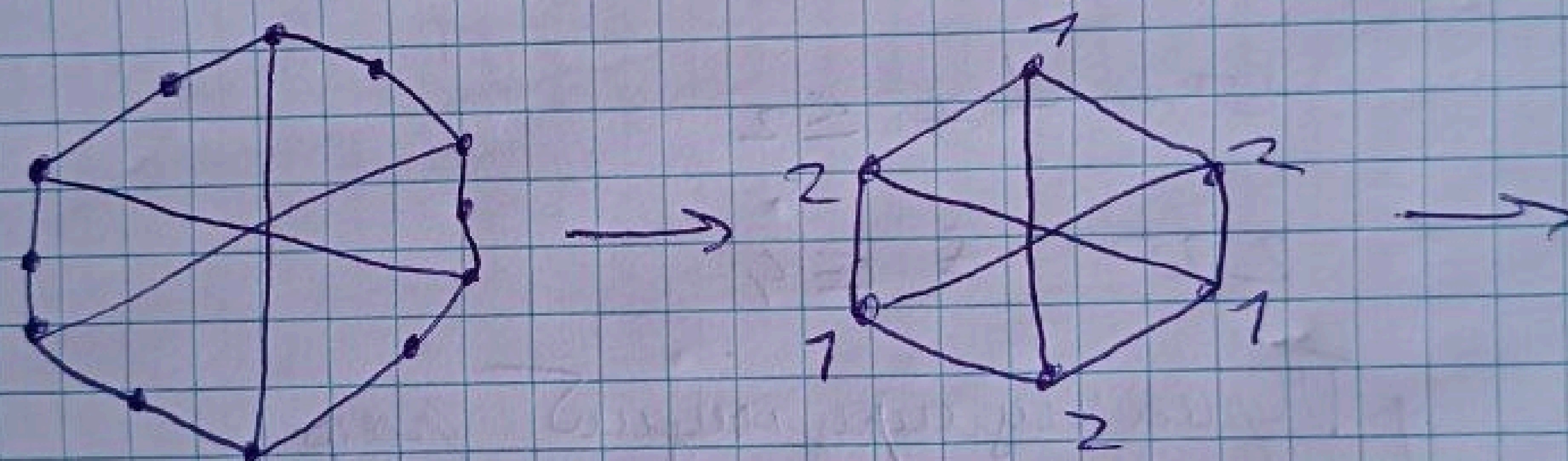


↳ планарный



не гом. K_5 и $K_{3,3}$

б)



Лекция Планарность

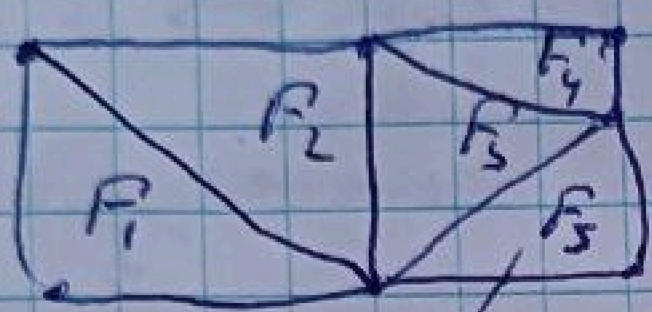
Граф называется планарным или укладываемым на плоскости, если его можно нарисовать на плоскости без пересечения рёбер.

Теорема: граф можно уложить на сфере т. и т. т., к. его можно уложить на плоскости.

„Северный полюс" сферы отображается в бесконечность.

Теорема: любой граф можно уложить в R^3 (в трёхмерном пространстве).

Планарное изображение разбивает плоскость на несколько областей, которые называют внутренними и внешней гранями.



F_6 – внеш. г.

$F_1 - F_5$ – внутр. г.

Теорема: любой граф можно изобразить так, что его внутренняя грань станет внешней (а внешняя – внутренней).

Формула Эйлера (т. Э.): если есть связный, необязательно простой, планарный граф, то верно, что

$\boxed{n - m + f = 2}$, где n – кол-во вершин, m – кол-во рёбер, f – кол-во граней.

Теорема: все изображения планарного графа G имеют одинаковое кол-во граней.

Лемма: $m \le 3n - 6$ (для простого планарного графа), если у него $n \geq 3$;

не менее 3 рёбер простого графа могут образовать грань.

В любом планарном графе кол-во рёбер линейным образом зависит от кол-ва вершин

Лемма: любой связный простой планарный граф имеет вершину со степенью ≤ 5.

Лемма: любой прост. план. двудольный граф с $n \geq 3$ имеет $m \leq 2n-4$ рёбер.

Граф K_5 непланарный. $\Longleftrightarrow$ $m \leq 3n-6$ не вып.

Граф $K_{3,3}$ также непланарный.
$\Updownarrow$
$m \leq 2n-4$
не вып.

Теорема Куратовского: все непланарные графы содержат подграфы, гомеоморфные графу K_5 или $K_{3,3}$.

Говорят, что два графа гомеоморфны, если между ними можно построить такое отображение, которое отображает смежные вершины в смежные.
Проще говоря, гомеоморфные графы — это графы, которые могут быть получены друг из друга путем применения операций удаления вершин и рёбер, а также добавления новых вершин и рёбер.

Второй алгоритм проверки планарности инкрементальный.

↳ Идея: последовательно строить последовательность графов, добавляя по одной вершине, пока не добудемся до исходного для задач графа. Проверяем планарность $\forall$ G_i графа, если он планарен, то переходим к G_{i+1}.

Основное достоинство St-нумерации: для $\forall$ G_i все вершины с номерами $k > i$ лежат во внешней грани благодаря свойствам St-нум.

Кустовая форма B_i : Lempel-Even-Cederbaum

Пусть G_k — граф, индуцированный k вершинами. Есть вершины с номерами $> k$. Рассмотрим рёбра, соединяющие вершины с номерами $< k$ и вершины с номерами $> k$.

Рассматриваем вершины по линии горизонта, так расположатые копии вершины с ном. $> k$ — виртуальные вершины.

Кустовая форма позволяет на линии горизонта менять местами виртуальные вершины так, чтобы эти вирт. верш. с одинак. номером оказались рядом, стянулись в одну нормальную вершину, и граф стал планарным.

Стягивание виртуальных верш. в норм. происходит благодаря отражению и перестановке вершин.

Теорема: граф G планарный $\Leftrightarrow$ для каждой k есть B_k.

Как понять, что граф непланарный?

Есть G_k, на линии горизонта верш. с пом. $\geq k+1$.

$E = k+1,$

$n \geq k+2$

Тогда у кустовой формы вид $r^* e^* r^*$ (расш. к.ф.)

Компоненты:

→ Clean – ни одной верш. $k+1$

→ Full – все верш. $k+1$

→ Mixed – есть и $k+1$, и другие в.

Если на линии горизонта более двух mixed компонент, то граф не является планарным.

Комбинаторные укладки

→ позволяет представить планарный граф в компьютере

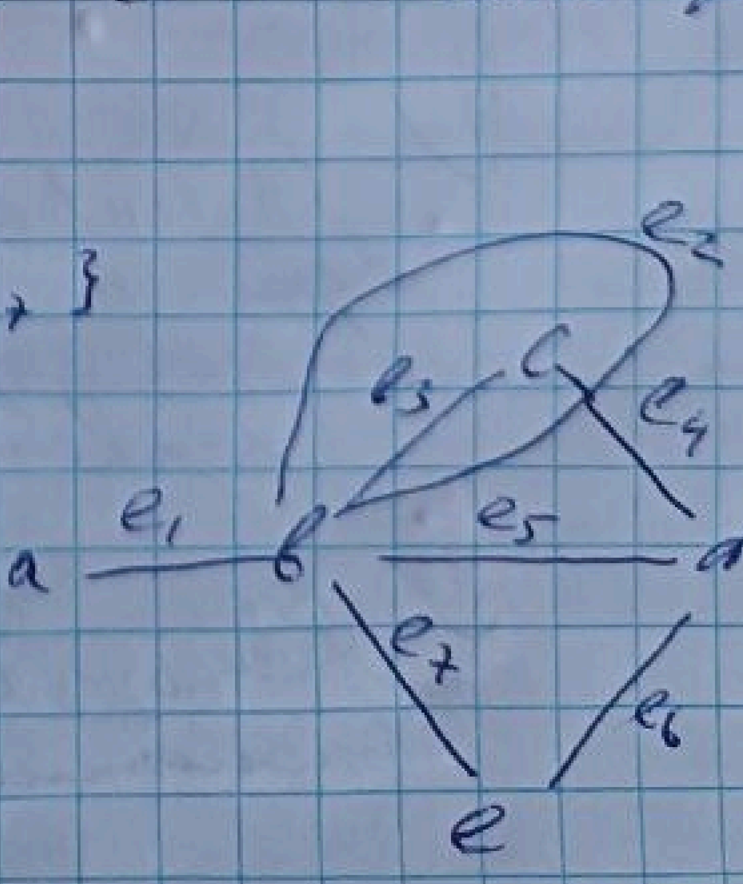
$R_a: \{e_1\}$

$R_b: \{e_1, e_2, e_3, e_2, e_5, e_7\}$

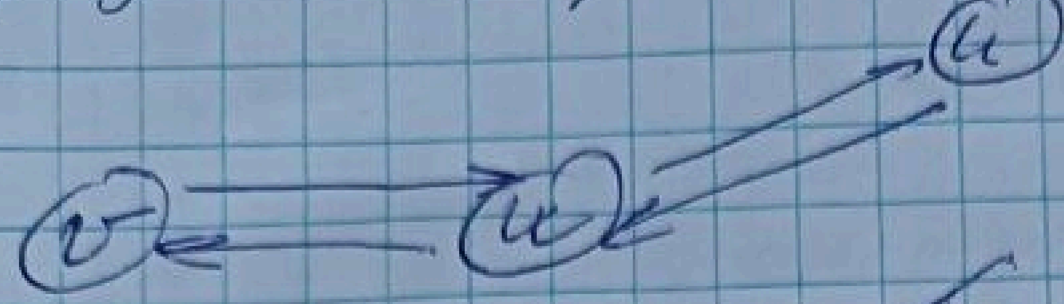
$R_c: \{e_3, e_4\}$

$R_d: \{e_4, e_6, e_5\}$

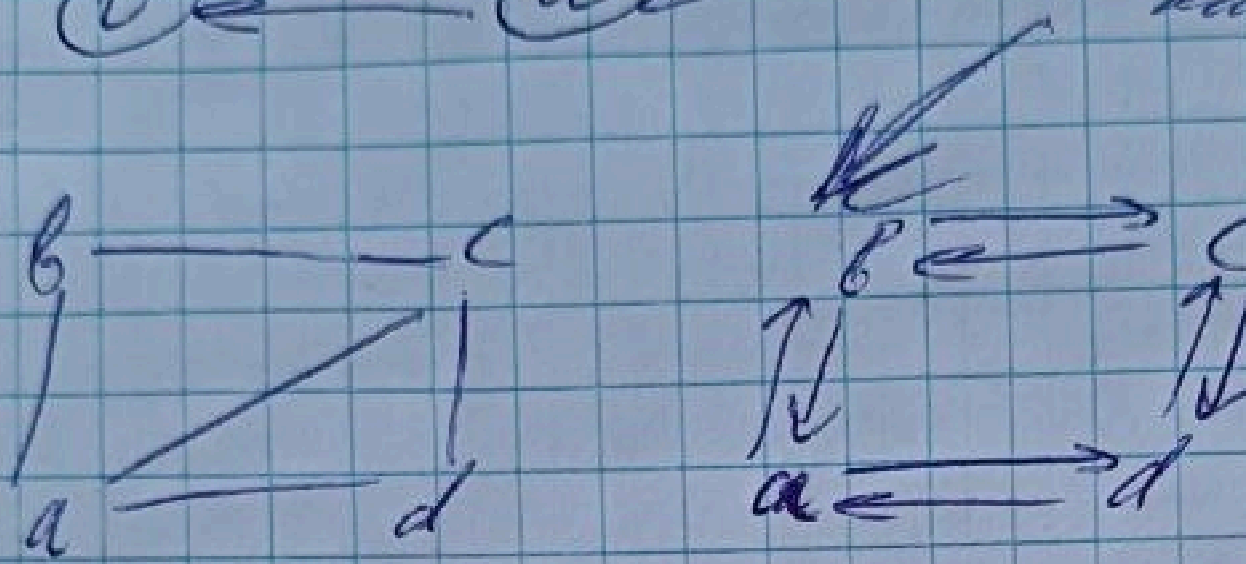
$R_e: \{e_6, e_7\}$



Как комбинаторным образом определить грань планарного графа.



Сначала представить граф как ориент.



Далее используем понятие следующего ребра, строим эквивалентные классы.

$f_0 = \{(a,b), (b,c), (c,d), (d,a)\}$,

$f_1 = \{(a,c), (c,b), (b,a)\}$,

$f_2 = \{(a,d), (d,c), (c,a)\}$

Находим циклы и выбрасываем их из рассмотрения, запоминая пройденный цикл как грань.

Полученные циклы — граневые циклы — это комбинаторное определение граней плоскграфа.

Плоский граф — планарный, имеющий фиксированную комбинаторную укладку.

Теорема Уитни:
Единственная комбинаторная укладка есть у трёхсвязного графа.