Степенные ряды

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$

Рассмотреть, почему строгое неравенство в доказательстве теоремы

Теорема Абеля:

$\exists R$:

ряд сходится при $|x - x_0| < R$

ряд расходится при $|x - x_0| > R$

Если $\exists \lim$ (конечный или бесконечный):

① $R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

② $R = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

радиус сходимости может быть как конечным, так бесконечным

2812 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$

$a_n = \frac{1}{n^p}$;

$R = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^p}{n^p} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = 1$

$|x| < R \Rightarrow$ ряд сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow |x| < 1$

$-1 < x < 1$

$x_0 = 0$; при $|x - x_0| < R$ ряд сходится

Отдельно рассмотрим $x = 1$ и $x = -1$;

$\underline{x=1:}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\nearrow$ $p>1$ – сход.

$\searrow$ $p \leq 1$ – расх.

$\underline{x=-1:}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

По Лейбницу

$p<0$ – расх.

$0<p\leq 1$ – усл. сход.

$p>1$ – абс. сход.

$\underline{28.14}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4$$

По необх. признаку ряд расходится.

$|x|<R$

$|x|<4$

$-4<x<4$

$\underline{x<4:}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$;

$\cancel{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2 \, 4^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

2816 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e}$

$-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$ – сход-ся

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{1}{e}\right)^n =$ $\boxed{A = e^{\ln A}}$

$= \sum e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} e^{-n} = \sum e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n}$;

$a_n = e^{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2}+o\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)-n} = e^{-\frac{1}{2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)n^2}$

$\downarrow$ $\lim = e^{-\frac{1}{2}}$ – необх. усл. сх. не выполн.

2817 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}x^n$, $a>1$

$a_n = \frac{n!}{a^{n^2}}$; $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}\cdot\frac{a^{(n+1)^2}}{(n+1)!} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{(n+1)^2-n^2}}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{2n+1}}{n+1} = \infty$; $R=\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ряд сходится на всей числовой прямой

Найти сумму ряда и интервал сходимости

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$ сходится при $|x|<1$

и $$\frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x}$$ при $|x|<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

№4 $$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} =$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' =$$

↑ область сходимости $|x|<1$

$$= x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

№5 $$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n =$$

Продолжение рядов

№6 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

№7 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots =$

(при $|x|<1$) (при $x \ne 0$)

$= \frac{1}{x}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right) = \frac{1}{x}\int_0^x (1+t+t^2+\dots)\,dt =$

$= \frac{1}{x}\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k\right)dt = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \frac{-1}{x}\ln|1-t|\Big|_0^x =$

$= \frac{-\ln(1-x)}{x}$

Получаем: $S = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$\sum_{n=1} q^{n-1} = \sum_{k=0} q^k = \frac{1}{1-q}$

№8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x}\int_0^x\left(\frac{1}{n}\cdot t^n\right)dt =$

$= \frac{1}{x}\int_0^x\left(\int_0^t\left(\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}\right)dq\right)dt = \frac{1}{x}\int_0^x\left(\int_0^t \frac{dq}{1-q}\right)dt =$

$= \frac{1}{x}\int_0^x(-\ln|1-t|)\,dt = \left\{\begin{matrix} dv = dt \\ u = -\ln|1-t| \\ v = t \\ du = \frac{1}{1-t}\end{matrix}\right\} =$

$= \frac{1}{x}\left(\left(-t\ln|1-t|\right)\Big|_0^x - \int_0^x \frac{t}{1-t}\,dt\right) = \frac{1}{x}\Big(-x\ln|1-x| +$

$+ \int_0^x\left(1 - \frac{1}{1-t}\right)dt = \frac{1}{x}\left(-x\ln|1-x| + (t + \ln|1-t|)\Big|_0^x\right) =$

$$= -\ln|1-x| + 1 + \frac{\ln|1-x|}{x} \to (x \neq 0)$$

Ряд Тейлора

↳ по сути это степенной ряд

$f(x)$ разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$$

Нужно, чтобы:

① Ряд сходился

② Равн. $f(x)$

Остаток в форме Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1},$$

где $x_0 < c < x$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\cos x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

ВСЁ В ОКРЕСТНОСТИ НУЛЯ

(для единицы по-другому)

Разложить в ряд Тейлора:
(не напрямую, а через интегрирование / дифференцирование)

№12 $f(x) = \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-t)^n dt =$$

$$\frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Теперь посчитаем напрямую:

$$f(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = 0 \cdot x^0 + 1 \cdot x + +$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2};$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}; \quad f^{IV}(x) = \frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4}$$

$$+ \underbrace{\frac{-1}{2!}}_{-\frac{1}{2}} x^2 + \underbrace{\frac{2}{3!}}_{\frac{1}{3}} x^3 - \underbrace{\frac{2\cdot 3}{4!}}_{= -\frac{1}{4}} x^4 + \ldots$$

№13 $f(x) = \operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^{2n}\right) dt =$

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \int_0^x t^{2n} dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

Сходится при $|x| < 1$.

Найти сумму ряда

№14 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t = e^{\ln x} = x$

$\ln^n x = t^n$

Радиус сходимости:

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$

Радиус сходимости равен бесконечности, значит ряд сходится на всей числовой прямой.

№15 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x t^n dt =$

Радиус сходимости:

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)!} (n+2)\, n! = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)n}{n+1} = \infty$

$= \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!}\right) dt = \int_0^x t \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right) dt =$

$= \int_0^x t \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\right) dt = \int_0^x t\, e^t dt = \left\{ \begin{array}{l} u = t \\ du = dt \\ dv = e^t dt \\ v = e^t \end{array} \right\} =$

$= t e^t \Big|_0^x - \int_0^x e^t dt = x e^x - e^x = e^x (x-1)$

№16 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n x^{2n-1}}{(2n+1)!} =$

МАТАН. ЭКЗ!
Практика:
① Интегралы / ряды (степенной / Тейлора)
② Ряд Фурье

$\cancel{= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{(2n+1)2n} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} =}$

$\cancel{= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} \cdot \int}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x^{2n})'}{(2n+1)!} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \right)' =$$

$$= \left(\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \left(\frac{1}{x} (x - \sin x) \right)' =$$

$$= \frac{(1-\cos x)x - x + \sin x}{x^2} = \frac{\sin x - \cos x}{x^2}$$

№17 $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

$$S' = 0 + x + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\begin{cases} S + S' = e^{x} \\ S - S' = e^{-x} \\ S = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \end{cases}$$

Глянуть медиум по рядам Фурье