Несобственные интегралы:

I рода:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \left(\int_{-\infty}^{b} \ ; \ \int_{-\infty}^{\infty}\right)$$

II рода:

$\int_a^{b} f(x)\,dx$, функция $f(x)$ в точке a и/или b имеет особенность

① Если $\exists$ конечный $\lim\limits_{\xi\to\infty}\int_a^{\xi} f(x)\,dx$,

то говорят, что $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится

Если конеч. предела нет, то инт. расходится

конечн. интервал

② Пусть особенность в точке a;

если $\exists$ конечн. $\lim\limits_{\xi\to a}\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx$, тогда $\int_a^{b} f(x)\,dx$ сходится

Иначе ($\nexists$ кон lim) – расходится

Необязательно точки особого рода в концах, они могут быть и посередине отрезка. Тогда разделяем интеграл по этой точке на два интеграла.

Кл:
2338
*1, *2,
*3, *4,
*5
2363
2364
~~2361~~
2370 (а)

Дз:
2337
2340
2343
2359
2369
2371
2361

2338 $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$

$$\int_{2}^{b} \frac{dx}{x^2+x-2} = \int_{2}^{b} \frac{dx}{(x-1)(x+2)} =$$

$$= \int_{2}^{b} \frac{A}{x-1}\,dx + \int_{2}^{b} \frac{B}{x+2}\,dx =$$

$$= \int_{2}^{b} \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{1}{x-1}\,dx + \int_{2}^{b} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\ln|b-1| - \ln|2-1|\right) +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\ln|b+2| - \ln|3+2|\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|b-1| + \frac{1}{3}\ln|b+2| - \frac{1}{3}\ln 5$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{3}\left[\ln\frac{x-1}{x+2}\right]\Bigg|_{2}^{b} = \frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{b-1}{b+2}\right] \xrightarrow{} \ln 1 \to 0 \; -$$

$$- \frac{1}{3}\ln 4 = \frac{1}{3}\ln 4$$ → Интеграл сходится, т.к. имеет конечный предел равный $\frac{1}{3}\ln 4$)

№1

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2+1}{x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{x^2+1}{x^3}\,dx =$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3}\,dx = \int\left(\frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right)dx =$$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx + \int x^{-3}\,dx = \ln|x| -$$

$$- \frac{x^{-2}}{2} + C$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[\ln|x| - \frac{x^{-2}}{2}\right]\Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[\ln|b| - \frac{b^{-2}}{2}\right] - \ln 1 + \frac{1}{2} =$$

$$= \infty$$

$\Rightarrow$ Интеграл расходится

№2

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0} \left[\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx\right]\Big|_a^1 =$$

$$= \lim_{a\to 0} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]\Big|_a^1 = \lim_{a\to 0} \left[2\sqrt{x}\right]\Big|_a^1 =$$

$$= \lim_{a\to 0} (2 - 2\sqrt{a}) = 2 \Rightarrow$$ Инт. сход.

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} -\int_0^b e^{-x}\,d(-x) =$$ *3

1

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^1 =$$

Теорема „Признак давления":

$0 < f(x) \leq g(x)$

→ если сходится $\int g(x)\,dx$ → сходится $\int f(x)\,dx$;

→ если расходится $\int f(x)\,dx$ → расходится $\int g(x)\,dx$

$f(x) = O(g(x))$ $\quad (f(x) \leq c\,g(x))$

$(x \to \infty)$

($x \to b$ в зависимости от рода н. и.)

$f(x) = O^*(g(x))$

$x \to \infty$

$x \to b$ $\quad \left[\exists \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ x\to b}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0\right]$

если $c = 1$

↓

Эквивал. → $f(x) \sim g(x)$

$x \to \infty$

$x \to b$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \alpha > 1 & \text{- сходится} \\ \alpha \le 1 & \text{- расходится} \end{cases}$$

$\boxed{a \ne 0}$ ↗ $a > 0$

$\boxed{a = 0}$

$$\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \alpha < 1 & \text{- сходится} \\ \alpha \ge 1 & \text{- расходится} \end{cases}$$

$\int_b^a \frac{dx}{(x-b)^\alpha}$ - Аналогично

$\exists\, a > b$

Удобно в качестве $g(x)$ брать $\frac{1}{x^\alpha}$ для I-ого рода

и $\frac{1}{(x-b)^\alpha}$ для II-ого рода

*4

сход.

$$\int_1^3 \frac{2+\cos x}{(x-1)^2}$$

$$\hookrightarrow \frac{2+\cos x}{(x-1)^2} \geq \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\hookrightarrow \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$$ — расходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_1^3 \frac{2+\cos x}{(x-1)^2}$ тоже расходится

---

*5

сход.

$$\int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+2\sqrt{x}}\,dx$$

$$\sin\frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

$$\left(\sin y \underset{y\to 0}{\sim} y\right)$$

$$\frac{\sin\frac{1}{x}}{2+2\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x(2+2\sqrt{x})} \sim \frac{1}{2x^{3/2}}$$

$\int \frac{1}{2x^{3/2}}$ сходится $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+2\sqrt{x}}\,dx$ тоже сходится

2358 $\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4 - x^2 + 1}$

$f(x) = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} = g(x)$

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$\alpha = 2 > 1$, т.к. $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ − сход.

2363 $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1 + x^n}\,dx$; По усл.: $m, n \in \mathbb{Z}$; $n > 0$

Интеграл сходится! $\begin{cases} n > m+1 \\ m > -1 \end{cases}$

$m > 0$:

Исходный интеграл I рода ⇒ сравниваем его с $\frac{1}{x^{n-m}}$ ⇒

$\Rightarrow \begin{cases} n > m+1 \to \text{сходится} \\ n \le m+1 \to \text{расходится} \end{cases}$

$m < 0$: $\frac{1}{x^m(1+x^n)} \sim \frac{1}{x^{-m}} \Rightarrow \begin{cases} -m \geq 1, \text{ расходится} \\ -m < 1, \text{ сходится} \end{cases}$

$\frac{\frac{x^m}{1+x^n}}{\frac{1}{x^{n-m}}} = \frac{x^n}{1+x^{n}}$

2364

$a \neq 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}\, dx$$

$x \to \infty$: $\dfrac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} = O^*\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$ ($x \to \infty$)

сходится при $n > 1$

$x \to 0$: $\dfrac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} = O^*\left(\dfrac{1}{x^{n-1}}\right)$ ($x \to 0$)

сходится при $n - 1 < 1$

при

Т.е. (общий ответ): $1 < n < 2$ исходный интеграл сходится

2370 (а) $$\int_0^1 \frac{x^n\, dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

Если $n < 0$, то 0 – особая точка;

Если $n > 0$, то 1 – особая точка

$x \to 0$: $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{-n}}$ (сход.)

$-n < 1$

$\underline{x \to 1}$: $\sqrt{1-x^4} = \sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}$

$$f(x) \sim \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\frac{1}{4} < 1 \quad (\text{сход.})$$

$$x \to b \quad f(x) = O^*\left(\frac{1}{(x-b)^\alpha}\right)$$

$\underline{2337}$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$$= \lim_{a \to -1} \int_{a}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \lim_{b \to 1} \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \lim_{a \to -1} \left[\arcsin x\right]\Big|_{a}^{0} + \lim_{b \to 1} \left[\arcsin x\right]\Big|_{0}^{b} =$$

$$= \lim_{a \to -1} ($$

2369 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$

При $x \to 0$:

$\frac{1}{\sin^p x \cos^q x} \sim \frac{1}{x^p \cdot 1} \Rightarrow p < 1$ – инт. сход.

При $x \to \frac{\pi}{2}$:

$\frac{1}{\sin^p x \cos^q x} \sim \frac{1}{(x-\frac{\pi}{2})^q} \Rightarrow q < 1$ – инт. сход.

$\frac{1}{\sin^p x \cos^q x} = \frac{1}{\sin^p x (-\sin^q (x-\frac{\pi}{2}))} \sim \frac{1}{(x-\frac{\pi}{2})^q}$

т. е. $x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow x - \frac{\pi}{2} \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{2}) \sim (x - \frac{\pi}{2})$

2371 $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q} = \int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$

При $p = q$:

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{2x^p} \Rightarrow \begin{cases} p < 1 \Leftarrow x \to 0 \\ p > 1 \Leftarrow x \to +\infty \end{cases}$

инт. расходится

$p < q$

$p > q$

$\max($

$\min($

при $p < q$:

$x \to 0$:

$$f(x) = \frac{1}{x^p(1+x^{q-p})} \sim \frac{1}{x^p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p < 1$$

$x \to \infty$:

$$f(x) \sim g(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\frac{1}{x^p+x^q}}{\frac{1}{x^q}} = \frac{x^q}{x^q+x^p} \to 1$$

$p < q$: $p < 1$, $q > 1$

$p > q$: $p > 1$, $q < 1$

$\max(p, q) > 1$

$\min(p, q) < 1$

2367
2368
2378
2379

Абсолютная сходимость

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ сход. абсолют. т. и т. т., к.

сходится $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$

Свойство:

Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится

Признак Дирихле:

$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ — сходится, если:

1) $g(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ монотонно

2) $|F(x)| < \text{const}$, где $F(x) = \int_a^x f(s)\,ds$

Пример

$f(x) = \cos kx$

$f(x) = \sin kx$

2367 $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^n}\,dx \quad (n\geq 0)$

$f(x) = \cos ax$

$F(x) = \frac{1}{a}\sin ax$ — огранич.

$g(x) = \frac{1}{1+x^n} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ — монотон.

$F(x)$ огранич. и $g(x)$ монотон. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^n}\,dx$ сходится (по признаку Дирихле)

2368 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int\limits_0^a + \int\limits_a^\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot x = 0$

$\int\limits_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{1-\cos 2x}{x}\,dx =$

$= \int\limits_a^\infty \frac{1}{x} - \int \frac{\cos 2x}{x}$ → сходится по приз. Дирихле

расходится в ∞

2378 $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

↳ 0 особой точкой не явл. (как в 2368) можно 0 заменить на a:

$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

↳ если есть абсолют. сход., то и условная (обычная) тоже будет

Проверим:

↳ $\int\limits_a^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int\limits_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$

$|\sin x| \geq \sin^2 x$

$\Downarrow$

$\frac{|\sin x|}{x}$ расход. (см. номер 2368)

$\int\limits_a^{\infty} \frac{\sin x}{x}$ сходится по пр. Дир.

$f(x) = \sin x$

$F(x) = |\cos x| < 1$

$g(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$