Тема : Асимптотические отношения на множестве функций одной переменной

$\mathbf{1^0}$. Функции одного порядка при $x \to x_0$. $\mathbf{2^0}$. Функции разных порядков при $x \to x_0$. $\mathbf{3^0}$. Эквивалентные функции при $x \to x_0$. Асимптотические равенства. Асимптотические разложения. $\mathbf{4^0}$. Асимптоты графика функции.

1

□ Пусть функция $f(x)$ задана на множестве $X = D_f$ и точка x_0 — предельная для X. Часто бывает важно знать как ведет себя функция $f(x)$ при $x \to x_0$. Для этого $f(x)$ сравнивают с более простой функцией $g(x)$, поведение которой в окрестности точки x_0 известно и изучено.

Опр. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X, а x_0 — предельная точка X. Говорят, что $f(x)$ есть O-большое от $g(x)$ при $x \to x_0$, если $\exists$ постоянная $C > 0$ и некоторая окрестность $O(x_0)$ точки x_0 такие, что

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \quad \forall x \in O(x_0) \cap X, x \neq x_0,$$

Данное определение устанавливает между функциями $f(x)$ и $g(x)$ определенное отношение. Символически наличие такого отношения отображается в записи $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$.

В частности, запись $f(x) = \underline{\underline{O}}(1)$ при $x \to x_0$ (4)
значает, что $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0.

Примеры. (1) $\sin x = \underline{\underline{O}}(1)$ при $x \to 0$,

(2) $\sin x = \underline{\underline{O}}(1)$ при $x \to +\infty$,

(3) $\sin x = \underline{\underline{O}}(x)$ при $x \to 0$,

(4) $\sin^2 x = O(\sin x)$ при $x \to +\infty$.

Отношение O-большое при $x \to x_0$ между функциями обладает свойством транзитивности:
Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$ при $x \to x_0$, то $f(x) = O(h(x))$ при $x \to x_0$.
Для этого отношения справедлива так называемая теорема сложения:
Если $f(x) = O(h(x))$ и $g(x) = O(h(x))$ при $x \to x_0$, то

$$f(x) + g(x) = O(h(x)) \text{ при } x \to x_0$$

В качестве упражнения обоснуйте транзитивность и теорему сложения.

Опр. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются функциями одного порядка при $x \to x_0$, если одновременно

$$f(x) = O(g(x)) \text{ и } g(x) = O(f(x)) \text{ при } x \to x_0.$$

Символически отношение одного порядка записывают в виде формулы

$$f(x) \asymp g(x) \text{ при } x \to x_0.$$

Функции $f(x)$ и $g(x)$ одного порядка называют также подобными при $x \to x_0$.

Справедливы след. свойства

1. $f(x) \asymp f(x)$ при $x \to x_0$ (рефлексивность отношения)
2. $f(x) \asymp g(x)$ при $x \to x_0 \Longrightarrow g(x) \asymp f(x)$ при $x \to x_0$ (симметричность отношения).
3. $f(x) \asymp g(x)$ и $g(x) \asymp h(x)$ при $x \to x_0 \Longrightarrow f(x) \asymp h(x)$ при $x \to x_0$ (транзитивность отношения).

(4)

Теорема. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X и x_0 — предельная точка X. Пусть кроме того существует предел
$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}=k.$$

1). Если $0<k<+\infty$, то $f(x)\asymp g(x)$ при $x\to x_0$;

2) Если $k=0$, то $f(x)=\underline{O}(g(x))$ при $x\to x_0$;

3) Если $k=+\infty$, то $g(x)=\underline{O}(f(x))$ при $x\to x_0$

Док-во теоремы проведите самостоятельно, пользуясь соотв. определением.

Примеры. (1) $\sin x\asymp x$ при $x\to 0$

(2) $\sin 3x\asymp x$ при $x\to 0$

(3) $2x^2+x+3\asymp x^2$ при $x\to+\infty$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые при $x\to x_0$, т.е.
$$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=\lim_{x\to x_0}|g(x)|=0.$$
Если при этом $f(x)$ и $g(x)$ подобны при $x\to x_0$, то их называют беск. малыми одного порядка.

5

Примеры. ① $f(x)=x^2$ и $g(x)=\sin^2 3x$ — это беск. малые одного порядка при $x\to 0$.

② $f(x)=x^2$ и $g(x)=(3x+1)^2$ — это бесконечно большие при $x\to\infty$ одного порядка.

☑ **Опр.** Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X, а x_0 — предельная точка X. Говорят, что $f(x)$ есть о-малое от $g(x)$ при $x\to x_0$, если $\exists$ окрестность $O(x_0)$ точки x_0:

$$|f(x)|\le \alpha(x)\,|g(x)| \quad \forall x\in X\cap O(x_0),\ x\ne x_0,$$

где $\alpha(x)$ — это бесконечно малая при $x\to x_0$

~~В частности, для~~

Символически наличие отношения „о-малое" между $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to x_0$ записывают в виде формулы

$$f(x)\overset{=}{\ } o(g(x)) \text{ при } x\to x_0.$$

В частности, запись $f(x)=o(1)$ при $x\to x_0$ означает, что $f(x)$ является бесконечно малой при $x\to x_0$.

Примеры. 1) $\sin x = o(1)$ при $x \to 0$

2) $\sin x = o(x^{1/3})$ при $x \to 0$ 3) $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$.

4) $x = o(x^2)$ при $x \to +\infty$.

Если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$. / достаточно взять $\alpha(x) = \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ /.

Лемма Пусть $f(x) = \underline{\underline{O}}(g(x))$ и $g(x) = \bar{\bar{o}}(\varphi(x))$ при $x \to x_0$. Тогда $f(x) = \bar{\bar{o}}(\varphi(x))$ при $x \to x_0$.

Док-во. По условию $\exists\, O(x_0)$ и $C > 0$:

$$|f(x)| \le C\,|g(x)| \quad \forall x \in X \cap O(x_0),\ x \ne x_0.$$

Но $g(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to x_0 \Rightarrow \exists\, O_1(x_0)$ и $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to x_0$:

$$|g(x)| \le \alpha(x)\,|\varphi(x)| \quad \forall x \in X \cap O_1(x_0),\ x \ne x_0$$

$$\Rightarrow |f(x)| \le C\alpha(x)\,|\varphi(x)|,\ \forall x \in X \cap O(x_0) \cap O_1(x_0),\ x \ne x_0$$

Но $O(x_0) \cap O_1(x_0)$ — это некоторая окрестность точки x_0. #

Следствия 1). $f(x)=o(g(x))$ и $g(x)=o(h(x))$ при $x\to x_0$ $\Rightarrow$ $f(x)=o(h(x))$ при $x\to x_0$.

2). $f(x)=o(h(x))$ и $g(x)=\bar{o}(h(x))$ при $x\to x_0$ $\Rightarrow$ $f(x)\pm g(x)=o(h(x))$ при $x\to x_0$

3) $f(x)=o(h(x))$ и $g(x)=o(h(x))$ при $x\to x_0$ $\Rightarrow$ $f(x)\cdot g(x)=o(h^2(x))$ при $x\to x_0$.

Докажите сформулированные следствия в качестве упражнения.

$\boxed{4}$ Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X, а x_0 – предельная точка X.

Опр. Функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x\to x_0$, если

$$f(x)-g(x)=o(g(x)) \text{ при } x\to x_0$$

Символически отношение эквивалентности двух функций при $x\to x_0$ отображается в записи

$$f(x)\sim g(x) \text{ при } x\to x_0.$$

Теорема [симметричность $\sim$]. Если $f(x) \sim g(x)$ (8
при $x \to x_0$, то и $g(x) \sim f(x)$ при $x \to x_0$.

Док-во. Условие $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$ влечет $\exists\, \overset{\circ}{O}(x_0)$ и $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to x_0$:

$$|f(x) - g(x)| \le \alpha(x)\,|g(x)| \quad \forall x \in X \cap \overset{\circ}{O}(x_0),\ x \ne x_0. \quad (*)$$

По неравенству треугольника имеем

$$|g(x)| - |f(x)| \le |f(x) - g(x)|$$

/См: $g(x) = g(x) - f(x) + f(x) \Rightarrow |g(x)| \le |g(x) - f(x)| + |f(x)| \Rightarrow |g(x)| - |f(x)| \le |g(x) - f(x)|$./

Поэтому

$$|g(x)| - |f(x)| \le \alpha(x)\,|g(x)| \Rightarrow (1 - \alpha(x))\,|g(x)| \le |f(x)|$$

Подставляя в нер-во $(*)$, получаем

$$|f(x) - g(x)| \le \frac{\alpha(x)}{1 - \alpha(x)}\,|f(x)| \quad \forall x \in X \cap \overset{\circ}{O}(x_0),\ x \ne x_0$$

Но $\alpha_1(x) = \dfrac{\alpha(x)}{1 - \alpha(x)}$ — это беск. малая при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha_1(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{1 - \alpha(x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Таким образом,

$$g(x) - f(x) = o(f(x)) \text{ при } x \to x_0$$

Это и означает, что $g(x) \sim f(x)$ при $x \to x_0$. #

Таким образом, отношение $\sim$ обладает свойством симметрии.

Теорема [транзитивность $\sim$]. Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$ и $g(x) \sim h(x)$ при $x \to x_0$. Тогда $f(x) \sim h(x)$ при $x \to x_0$.

Док-во. По условию, $\exists\, O(x_0)$ и $\alpha(x) = o(1)$, $\beta(x) = o(1)$ при $x \to x_0$ такие, что

$$|f(x) - g(x)| \le \alpha(x)|g(x)|; \quad |g(x) - h(x)| \le \beta(x)|h(x)|$$

$$\forall x \in X \cap O(x_0),\ x \ne x_0.$$

Учитывая, что $g(x) = h(x) + (g(x) - h(x))$, получаем

$$|g(x)| \le |h(x)| + \beta(x)|h(x)|,$$

$$|f(x) - h(x)| \le |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \le$$

$\le \alpha(x)|g(x)| + \beta(x) \cdot |h(x)|$. Подставляя сюда предыдущее неравенство, получаем

$$|f(x)-h(x)| \le \alpha(x)|h(x)| + \alpha(x)\beta(x)|h(x)| + \beta(x)|h(x)| =$$

$$= (\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)+\beta(x))|h(x)|$$

Но $\alpha_1(x) = \alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)+\beta(x) = \bar{o}(1)$.

Поэтому $f(x) \sim h(x)$ при $x \to x_0$. #

Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются <u>асимптотически равными</u> при $x \to x_0$. Соотношение вида

$$f(x) = g(x) + \bar{o}(g(x)) \text{ при } x \to x_0$$

называются <u>асимптотическими равенствами</u>.

<u>Лемма.</u> Если в некоторой окрестности точки x_0 функция $g(x) \ne 0$ $\forall x \in X, x \ne x_0$ и при этом

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

то $f(x)$ и $g(x)$ асимптотически равны при $x \to x_0$: $f(x) \sim g(x)$.

<u>Док-во.</u> Полагаем $\alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 1$.

Тогда $\alpha(x) = \bar{o}(1)$ при $x \to x_0$ и при этом

$f(x)-g(x)=\alpha(x)g(x). \Rightarrow f(x)\sim g(x)$ при $x\to x_0$ (#)

<u>Примеры асимптотических эквивалентностей</u>

(1) $\sin x\sim x$ при $x\to 0$; $\arcsin x\sim x$ при $x\to 0$

(2) $\operatorname{tg} x\sim x$ при $x\to 0$; $\operatorname{arctg} x\sim x$ при $x\to 0$

(3) $e^x-1\sim x$ при $x\to 0$; $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to 0$.

(4) $a^x-1\sim x\ln a$ при $x\to 0$; $\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}$, $x\to 0$

(5). $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ при $x\to 0$;

(6) $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$ при $x\to 0$;

(7) $\frac{x^2}{(1+x)^3}\sim x^2$ при $x\to 0$;

(8) $\frac{x^2}{(1+x)^3}\sim\frac{1}{x}$ при $x\to\pm\infty$.

$\boxed{\text{Ч}}$ Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены для $\forall x>a$ и пусть $g(x)\neq 0$ при $x>a$. Тогда отношение $f(x)\sim g(x)$ при $x\to+\infty$

указывает, что относительная погрешность (1

$$\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}$$

приближенного равенства $\boxed{f(x)\approx g(x)}$

стремится к нулю при $x\to+\infty$.

Однако из отношения $f(x)\sim g(x)$ при $x\to+\infty$ не следует, что при $x\to+\infty$ абсолютная погрешность прибл. р-ва $f(x)\approx g(x)$ уменьшается (с ростом x).

Пример. $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}\sim x^2$ при $x\to+\infty$,

или: $f(x)=x^2+\bar{o}(x^2)$, при $x\to+\infty$

При этом $f(x)-x^2=\dfrac{-x^2}{x+1}$ $\Rightarrow$

$$|f(x)-x^2|=\frac{x^2}{|1+x|}\to+\infty \text{ при } x\to+\infty.$$

Кроме того $f(x)-x^2\sim -x$ при $x\to\infty$

т.е. $f(x)-x^2+x=\bar{o}(x)$.

Далее имеем $f(x)-x^2+x=\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{1+1/x}$.

Если $x\to+\infty$, то $q=-1/x$ по модулю меньше

При этом

$$\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+\ldots$$ /Сумма геом. прогрессии/.

Таким образом,

$$f(x) = x^2 - x + 1 + o(1) \text{ при } x \to +\infty \quad (\#)$$

такого вида соотношения называются <u>асимптотическими разложениями</u> данной функции по степеням x при $x \to +\infty$.

Полученное в примере асимпт. разложение можно продолжить:

$$f(x) = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ при } x \to +\infty$$

$$f(x) = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ при } x \to +\infty.$$

и т. д.

<u>Аналогично</u> рассматриваются асимпт. разложения функции по степеням $(x-x_0)$ при $x \to x_0$.

Примеры. (1) $\sin x = x + o(x)$; $\arcsin x = x + o(x)$ при $x \to 0$.

(2) $\operatorname{tg} x = x + o(x)$, $\operatorname{arctg} x = x + o(x)$ при $x \to 0$

(3) $e^x = 1 + x + o(x)$, $\ln(1+x) = x + o(x)$ при $x \to 0$

(4) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ при $x \to 0$; (5) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.

(6) $f(x) \equiv \frac{x^3}{x+1} = x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$

(7) $f(x) = x^3 - x^4 + o(x^4)$ при $x \to 0$

(8) $f(x) = x^3 - x^4 + x^5 + o(x^5)$ при $x \to 0$.

Имеется хорошо развитая теория асимптотических разложений, в которую мы здесь углубляться не будем.

□ Дадим определение асимптот ветвей графика функции, уходящих на бесконечность, т.е. когда $x \to \pm\infty$ или когда

$$y = f(x) \to \pm\infty \text{ при } x \to x_0$$

слева или справа.

<u>Опр.</u> Пусть функция $f(x)$ определена при $x > a$. Прямая l на плоскости Oxy называется <u>асимптотой</u> графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если расстояние $\rho(x, l)$ от точки графика с координатами $(x, f(x))$ до прямой l удовлетворяет асимптотическому равенству $\rho(x, l) = \bar{\bar{o}}(1)$ при $x \to +\infty$.

<u>Теорема</u> [об асимптоте] График функции $y = f(x)$, $x > a$, имеет асимптоту при $x \to +\infty$ $\Longleftrightarrow$ $\exists$ числа k и b: $f(x) = kx + b + \bar{\bar{o}}(1)$ при $x \to +\infty$.

При этом условии асимптота графика имеет уравнение $\underline{y = kx + b}$.

Док-во. Известно, что расстояние от прямой l, заданной уравнением $y=kx+b$, до точки $(x, f(x))$ плоскости задается формулой 16

$$\rho(x,l)=\frac{|f(x)-kx-b|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

/Докажите это в качестве упражнения!/

Следовательно, $\rho(x,l)=\bar{\bar{o}}(1)$ при $x\to+\infty$ влечет за собой асимпт. равенство

$$f(x)=kx+b+\bar{\bar{o}}(1) \text{ при } x\to+\infty,$$

и наоборот. #

Из условия асимптоты следует, что

$$\frac{f(x)}{x}=k+\frac{b+o(1)}{x}=k+o(1) \text{ при } x\to+\infty,$$

$$b=f(x)-kx+o(1) \text{ при } x\to+\infty.$$

Следовательно,

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ и } b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx).$$

При $x\to-\infty$ асимптота определяется и ищется аналогично.

<u>Опр.</u> Пусть $f(x)$ определена на конечном интервале (a, x_0), $x_0 > a$, и при этом $f(x) \to \pm\infty$ при $x \to x_0 - 0$ (или же при $x \to x_0 + 0$). Тогда прямая l, задаваемая уравнением $x = x_0$ называется <u>вертикальной</u> асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to x_0 - 0$ (или же при $x \to x_0 + 0$).

В случае <u>вертикальной</u> асимптоты l имеем $\rho(x, l) = |x - x_0|$ и поэтому

$\rho(x, l) = \bar{o}(1)$ при $x \to x_0 - 0$ (или $x \to x_0 + 0$).
