# Тема : Аффинные преобразования евклидовых пространств

**1⁰**. Определение аффинного пространства и эталонного афинного пространства. **2⁰**. Аффинная система координат, координатный изоморфизм в эталонное пространство. Изоморфизм аффинных пространств одинаковой размерности. **3⁰**. Связь аффинных координат точки в двух разных аффинных координатных системах. **4⁰**. Определение аффинного преобразования и его общий вид в произвольном базисе аффинного пространства. Примеры. **5⁰**. Свойства аффинных преобразований. Группа $\mathbb{A}^n$. Подгруппа собственных преобразований. **6⁰**. Плоскости и прямые в аффинном пространстве. Параллельные плоскости. Критерий аффинного преобразования. Лемма о геометрических свойствах аффинного преобразования. **7⁰**. Метрика аффинного пространства в случае, когда ассоциированное с ним векторное пространство евклидово. Теорема об основном свойстве аффинного преобразования.

$1^0$. Пусть $\mathbb{A}$ — это аффинное пространство, связанное с конечномерным векторным пространством $\boldsymbol{X}$, $\dim \boldsymbol{X} = \boldsymbol{n}$. По определению, это означает, что любым двум точкам $\dot{\boldsymbol{A}}$ и $\dot{\boldsymbol{B}}$ из $\mathbb{A}$ сопоставляется вектор из $\boldsymbol{X}$ с началом в точке $\dot{\boldsymbol{A}}$ и концом в точке $\dot{\boldsymbol{B}}$, то есть вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$. При этом выполняются следующие две аксиомы:

$\boldsymbol{i}$) для $\forall\, \dot{\boldsymbol{A}} \in \mathbb{A}$ и $\forall\, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}$ существует единственная точка $\dot{\boldsymbol{B}}$ из $\mathbb{A}$ такая, что $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{a}$;

$ii)$ для любых трех точек $\dot{\boldsymbol{A}}$, $\dot{\boldsymbol{B}}$, $\dot{\boldsymbol{C}}$ из $\mathbb{A}$ выполняется *равенство треугольника*:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{CA}} = \mathbf{0}.$$

В частности, взяв в равенстве треугольника $\dot{\boldsymbol{A}} = \dot{\boldsymbol{B}} = \dot{\boldsymbol{C}}$, получим соотношение $\overrightarrow{\boldsymbol{AA}} = \mathbf{0}$. Если же взять $\dot{\boldsymbol{A}} = \dot{\boldsymbol{C}}$, то получим

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}.$$

Размерность аффинного пространства $\mathbb{A}$ по определению полагается равной размерности связанного с ним векторного пространства $\boldsymbol{X}$, то есть

$$\mathbf{dim}\,\mathbb{A} = \mathbf{dim}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{n}.$$

Векторное пространство $\boldsymbol{X}$ называют также *ассоциированным с аффинным пространством* $\mathbb{A}$.

В качестве важного примера рассмотрим *эталонное аффинное пространство* $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Обозначение здесь применяется то же самое, что и для вещественного координатного пространства $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

В случае, если эти две структуры все таки требуется разделить в проводимых построениях, будем применять для них обозначения $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\text{афф}}$ и $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\text{век}}$ соответственно.

*Точками* эталонного аффинного пространства $\mathbb{R}^n_{\text{афф}}$ условимся называть вектор-столбцы следующего вида:

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad x^j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ассоциированное с аффинным пространством $\mathbb{R}^n_{\text{афф}}$ векторное пространство $X$ совпадает с вещественным координатным про-

странством $\mathbb{R}^n_{\text{век}}$, образуемого вектор-столб-
цами следующего вида:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad a^j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Взяв в аффинном пространстве $\mathbb{R}^n_{\text{афф}}$ произвольную пару точек

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \dot{B} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix},$$

сопоставим ей следующий вектор из ассоциированного линейного пространства:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} y^1 - x^1 \\ y^2 - x^2 \\ \vdots \\ y^n - x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_{\text{век}}.$$

Пользуясь этим соглашением, проверим справедливость аксиомы $i$) аффинного пространства. Пусть

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_{\text{аф}\text{ф}} \quad \text{и} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_{\text{век}}.$$

Тогда точка $\dot{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} x^1 + a^1 \\ x^2 + a^2 \\ \vdots \\ x^n + a^n \end{pmatrix}$ принадлежит $\mathbb{R}^n_{\text{афф}}$ и при этом $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Точка $\dot{\boldsymbol{B}}$ с указанным свойством единственна в пространстве $\mathbb{R}^n_{\text{афф}}$.

Проверим еще, что и аксиома $ii$) также выполняется. Пусть выбраны три точки

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \dot{B} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \dot{C} = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix}.$$

Тогда в соответствии с принятым правилом образования векторов получим

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} y^1 - x^1 \\ y^2 - x^2 \\ \vdots \\ y^n - x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^1 - y^1 \\ z^2 - y^2 \\ \vdots \\ z^n - y^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z^1 - x^1 \\ z^2 - x^2 \\ \vdots \\ z^n - x^n \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}.$$

Таким образом, равенство треугольника также выполнено и, следовательно, $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\text{афф}}$ с введенной выше структурой представляет собой аффинное пространство.

Размерность этого аффинного пространства совпадает с размерностью ассоциированного с ним линейного пространства $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\text{век}}$, то есть

$$\mathbf{dim}\, \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\text{афф}} = \boldsymbol{n}.$$

$2^0$. Пусть $\mathbb{A}$ — это произвольное аффинное пространство, с которым ассоциированно линейное пространство $X$ над полем вещественных чисел,

$$\dim X = n < \infty.$$

Выберем в пространстве $X$ произвольный базис

$$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}.$$

**Определение.** *Аффинной системой координат в пространстве* $\mathbb{A}$ *называется совокупность, состоящая из фиксированной точки* $\dot{O}$, *лежащей в* $\mathbb{A}$, *и векторов* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *выбранного базиса.*

Для обозначения указанной в предыдущем определении аффинной системы координат используется символ

$$\dot{O}e_1e_2\ldots e_n.$$

Пользуясь аксиомой $i$) аффинного пространства, каждый из векторов $\boldsymbol{e_1, e_2, \ldots, e_n}$ выбранного базиса возможно отложить от начальной точки $\dot{O}$ координатной системы. Действуя таким образом, получаем графическую визуализацию понятия аффинной системы коородинат.

Получаемая при этом картина во многом схожа с привычным нам изображением декартовой системы координат. Однако имеются и существенные отличия: в произвольном аффинном пространстве отсутствует понятие угла между векторами.

Взяв произвольную точку $\dot{A}$ из пространства $\mathbb{A}$, образуем вектор с началом в точке $\dot{O}$ координатной системы и концом в $\dot{A}$. Этот вектор $\overrightarrow{OA}$ называется *радиус-вектором точки* $\dot{A}$ в выбранной аффинной системе координат.

Радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$ принадлежит линейному пространству $X$ и, следовательно, допускает однозначное представление в виде линейной комбинации базисных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\overrightarrow{OA} = a^1 e_1 + a^2 e_2 + \cdots + a^n e_n.$$

Скаляры $a^1, a^2, \ldots, a^n$ в этом разложении — это вещественные числа.

Говорят, что вектор $(a^1, a^2, \ldots, a^n)$ из $\mathbb{R}^n$ задает *координаты точки* $\dot{A}$ *в системе* $\dot{O}e_1 \ldots e_n$.

Рассмотрим отображение $\boldsymbol{I_c} : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\text{афф}}$, определяемое следующим соотношением:

$$\boldsymbol{I_c} : \dot{\boldsymbol{A}} \in \mathbb{A} \mapsto \vec{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^{\mathbf{1}} \\ \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\text{афф}},$$

где вектор $\vec{\boldsymbol{a}} =\uparrow (\boldsymbol{a}^{\mathbf{1}}, \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}, \ldots, \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}})$ задает *координаты точки* $\dot{\boldsymbol{A}}$ *в системе* $\dot{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{e}_{\mathbf{1}} \ldots \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}$.

Определенное указанным образом отображение $\boldsymbol{I_c}$ взаимно однозначно отображает аффинное пространство $\mathbb{A}$ на эталонное аффинное пространство $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\text{афф}}$ и называется *координатным изоморфизмом*.

**Теорема** (об изоморфизме). *Любые два аффинных пространства одинаковой размерности изоморфны друг другу.*

$3^0$. Пусть в аффинном пространстве $\mathbb{A}$ взяты две системы координат:

$\dot{O}e_1e_2\dots e_n$–"старая"; $\dot{\tilde{O}}\tilde{e}_1\tilde{e}_2\dots\tilde{e}_n$–и "новая".

Возьмем произвольную точку $\dot{M}$ из $\mathbb{A}$ и установим связь координат этой точки в выбранных координатных системах.

Если аффинные координаты точки $\dot{M}$ в старой системе $\dot{O}e_1e_2\dots e_n$ — это вещественные числа $x^1, x^2, \dots, x^n$, то радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$

этой точки представим как следующая линейная комбинация:

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{j=1}^{n} x^j e_j = [e_1 e_2 \ldots e_n] \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}.$$

Аналогично, если аффинные координаты точки $\dot{M}$ в новой системе $\dot{\tilde{O}}\tilde{e}_1\tilde{e}_2\ldots\tilde{e}_n$ — это вещественные числа $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \ldots, \tilde{x}^n$, то ее радиус-вектор $\overrightarrow{\tilde{O}M}$ представим как следующая линейная комбинация:

$$\overrightarrow{\tilde{O}M} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}^j \tilde{e}_j = [\tilde{e}_1 \tilde{e}_2 \ldots \tilde{e}_n] \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{bmatrix}.$$

Любые два базиса ассоциированного линейного пространства $X$ связаны между собой соотношениями вида

$$[\tilde{e}_1 \tilde{e}_2 \ldots \tilde{e}_n] = [e_1 e_2 \ldots e_n] \cdot C, \qquad (B \mapsto \tilde{B})$$

где $C$ — это квадратная матрица размера $n \times n$, называемая *матрицей перехода* от старого базиса $B$ к новому $\tilde{B}$.

Столбцы матрицы перехода $C$ представляют собой координаты новых базисных векторов $\tilde{e}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, в разложении по старому базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Отметим, что матрица $C$ тогда и только тогда является матрицей перехода от одного базиса к другому, когда $C$ обратима.

**Теорема.** *Следующие утверждения эквивалентны между собой:*

$\otimes$ *Квадратная матрица $C$ обратима.*

$\otimes$ *Столбцы квадратной матрицы $C$ линейно независимы.*

$\otimes$ *Строки квадратной матрицы $\boldsymbol{C}$ линейно независимы.*

$\otimes$ *Определитель матрицы $\boldsymbol{C}$ ненулевой.*

Взяв произвольный вектор $\boldsymbol{e}$ из линейного пространства $\boldsymbol{X}$, разложим его по векторам нового базиса $(\tilde{B})$:

$$e = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}^j \tilde{e}_j = [\tilde{e}_1 \tilde{e}_2 \ldots \tilde{e}_n] \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{bmatrix}.$$

Подставляя сюда выражение $(B \mapsto \tilde{B})$ векторов нового базиса $(\tilde{B})$ через старый $(B)$ с помощью матрицы перехода $C$, приходим к разложению вектора $e$ по векторам старого базиса $(B)$:

$$e = [e_1 e_2 \dots e_n] \cdot C \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x^j e_j.$$

Учитывая, что любой вектор раскладывается по векторам базиса $(B)$ единственно возможным образом, заключаем из последнего равенства, что координаты вектора $e$ в разных базисах линейного пространства связаны между собой следующими соотношения-ми:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{pmatrix}.$$

Здесь $C$, как и прежде, матрица перехода от базиса $(B)$ к базису $(\tilde{B})$.

Получим аналогичные соотношения для аффинных координат произвольной точки $\dot{M}$ из пространства $\mathbb{A}$. С этой целью воспользуемся разложениями

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{j=1}^{n} x^j e_j = [e_1 e_2 \dots e_n] \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix},$$

$$\overrightarrow{\tilde{O}M} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}^j \tilde{e}_j = [\tilde{e}_1 \tilde{e}_2 \dots \tilde{e}_n] \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{bmatrix},$$

а также разложением радиус-вектора $\overrightarrow{O\tilde{O}}$ точки $\dot{\tilde{O}}$ по старому базису $(B)$:

$$\overrightarrow{O\dot{\tilde{O}}} = [e_1 e_2 \dots e_n] \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} b^j e_j.$$

Здесь $(b^1, b^2, \dots, b^n)$ — аффинные координаты точки $\dot{\tilde{O}}$ в старой системе координат.

Подставим представленные выше разложения векторов $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{\tilde{O}M}$ и $\overrightarrow{O\tilde{O}}$ в равенство треугольника $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\tilde{O}M} + \overrightarrow{O\tilde{O}}$. Тогда получим

$$[e_1 e_2 \dots e_n] \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = [e_1 e_2 \dots e_n] \cdot C \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{bmatrix} +$$

$$+ [e_1 \dots e_n] \begin{bmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix} = [e_1 \dots e_n] \left\{ C \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix} \right\}.$$

Пользуясь однозначностью разложения радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ по базису $(B)$, получаем следующие соотношения между аффинными координатами точки $\dot{M}$ в разных аффинных системах координат:

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}. \qquad (OB \mapsto \tilde{O}\tilde{B})$$

Здесь $C$, как и прежде, обозначает матрицу перехода от базиса $(B)$ к базису $(\tilde{B})$.

Если точки $\dot{O}$ и $\dot{\tilde{O}}$ совпадают, то координаты радиус- вектора $\overrightarrow{O\tilde{O}}$ нулевые:

$$b^1 = b^2 = \cdots = b^n = 0.$$

Формулы перехода $OB \mapsto \tilde{O}\tilde{B}$ в этом случае совпадают с формулами $(B \mapsto \tilde{B})$.

Если базисы $(B)$ и $\tilde{B}$ совпадают, то матрица перехода $C$ является единичной, $C = E$.

$4^0$. Пусть точкам $\dot{M}$ и $\dot{N}$ в аффинном пространстве $\mathbb{A}$ соответствуют радиус-векторы

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = [e_1 e_2 \dots e_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{и}$$

$$\overrightarrow{ON} = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j = [e_1 e_2 \dots e_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

и при этом их координаты связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{Aff}$$

Здесь $C$ — это квадратная невырожденная матрица размера $n \times n$, $\det C \neq 0$, а вектор-столбец $\vec{b} = \uparrow (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ принадлежит $\mathbb{R}^n$.

Вводя обозначения

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

запишем соотношения $(\mathbf{Aff})$ в укороченном векторном виде

$$y = Cx + b \quad \Leftrightarrow \quad (\dot{M} \mapsto \dot{N}). \tag{$\mathbf{Aff'}$}$$

**Определение**. *Преобразование аффинного пространства* $\mathbb{A}$ *в себя, задаваемое формулой*

$$y = Cx + b \quad \Leftrightarrow \quad (\dot{M} \mapsto \dot{N}),$$

где $C$ — это квадратная невырожденная матрица размера $n \times n$, $\det C \neq 0$, а вектор-столбец $\vec{b} =\uparrow (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ принадлежит $\mathbb{R}^n$, называется аффинным.

Отметим, что векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в формуле $(\mathbf{Aff}')$ представляют собой координаты точек $\dot{\boldsymbol{M}}$ и $\dot{\boldsymbol{N}}$ в наперед выбранной аффинной системе координат $\dot{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{e}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{e}_{\mathbf{2}}\ldots\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}$.

Возникает вопрос: останется ли это преобразование $\dot{\boldsymbol{M}} \mapsto \dot{\boldsymbol{N}}$ аффинным, если изначально выбрать в $\mathbb{A}$ какую-либо другую аффинную систему координат $\dot{\tilde{\boldsymbol{O}}}\tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{1}}\tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{2}}\ldots\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}}$?

**Теорема** (общий вид аффинного преобразования). *Преобразование* $(\mathbf{Aff}')$ *аффинного пространства* $\mathbb{A}$ *в себя в любой аффинной системе координат* $\dot{\tilde{O}}\tilde{e}_1\tilde{e}_2\ldots\tilde{e}_n$ *записывается в следующем виде:*

$$\tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{b}, \qquad (\mathbf{Aff}'')$$

*где* $\tilde{C}$ *— это квадратная невырожденная матрица размера* $n \times n$, $\det \tilde{C} = \det C \neq 0$, *а вектор-столбец* $\tilde{b}$ *принадлежит* $\mathbb{R}^n$.

*Доказательство.* В пространстве $\mathbb{A}$ рассмотрим две системы координат:

$\dot{O}e_1e_2\ldots e_n$–“старую”; $\dot{\tilde{O}}\tilde{e}_1\tilde{e}_2\ldots\tilde{e}_n$–и “новую”.

Векторы новой системы связаны с векторами старой линейными соотношениями вида

$$[\tilde{e}_1\tilde{e}_2\ldots\tilde{e}_n] = [e_1e_2\ldots e_n]\cdot T. \qquad (B \mapsto \tilde{B})$$

Здесь $T$ — квадратная невырожденная матрица размера $n\times n$, $\det T \neq 0$. Пусть радиус-вектор $\overrightarrow{O\dot{O}}$ точки $\dot{O}$ раскладывается в сумму

$$\overrightarrow{O\dot{O}} = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j.$$

Тогда старые координаты $x$ точки $\dot{M}$ связаны с ее новыми координатами $\tilde{x}$ следующими соотношениями:

$$x = T\tilde{x} + a, \tag{$\dot{M}$}$$

где $a =\uparrow (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Аналогичные равенства имеют место и для координат точки $\dot{N}$:

$$y = T\tilde{y} + a. \qquad (\dot{N})$$

Учитывая, что $y = Cx + b$ и подставляя сюда разложения $(\dot{M})$ и $(\dot{N})$, получаем

$$T\tilde{y} + a = C(T\tilde{x} + a) + b \ \Leftrightarrow \ T\tilde{y} = CT\tilde{x} + Ca - a + b.$$

Умножая обе части полученного векторного равенства слева на матрицу $T^{-1}$, получаем

$$\tilde{y} = T^{-1}CT\tilde{x} + T^{-1}(Ca - a + b).$$

Вводя обозначения

$$\tilde{C} = T^{-1}CT \quad \text{и} \quad \tilde{b} = T^{-1}(Ca - a + b),$$

получаем окончательно $\tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{b}$. Кроме того имеем равенства

$$\det \tilde{C} = (\det T^{-1}) \det C (\det T) = \det C.$$

Как видно из полученных формул, матрицы $C$ и $\tilde{C}$ в общем случае друг с другом не совпадают, то есть представление аффинного преобразования зависит от выбранной координатной системы. При этом определитель матрицы в формуле общего вида аффинного преобразования от базиса никак не зависит, то есть этот определитель является инвариантом. $\square$

$5^0$. Сформулируем некоторые наиболее важные свойства множества аффинных преобразований пространства.

$\mathbf{(AT)_1}$: Любое преобразование

$$\dot{M}(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \dot{N}(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

задаваемое формулой

$$y = Cx + b, \tag{Aff}$$

где $C$ — это квадратная невырожденная матрица размера $n \times n$, $\det C \neq 0$, а вектор-столбец $\vec{b} = \uparrow (b_1, b_2, \dots, b_n)$ принадлежит $\mathbb{R}^n$, является взаимно однозначным. Обратное к нему преобразование

$$x = C^{-1}y - C^{-1}b \qquad (\mathbf{Aff}^{-1})$$

также является аффинным.

$(\mathbf{AT})_2$: Последовательное выполнение двух аффинных преобразований

$$\dot{M}(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \dot{N}(y_1, \ldots, y_n) \mapsto \dot{L}(z_1, \ldots, z_n),$$

где $y = C_1x + b_1$ и $z = C_2y + b_2$, также является аффинным преобразованием:

$$z = C_2(C_1x + b_1) + b_2 = (C_2C_1)x + (C_2b_1 + b_2).$$

Это координатное преобразование называется *композицией*, или *произведением*, преобразований $y = C_1x + b_1$ и $z = C_2y + b_2$.

$\mathbf{(AT)_3}$: Произведение аффинных преобразований ассоциативно.

$(\mathbf{AT})_4$: Тождественное преобразование $\dot{M} \mapsto \dot{M}$ является аффинным: ему соответствует матрица $C = E$ и нулевой вектор $b$.

Свойства $(\mathbf{AT})_1$–$(\mathbf{AT})_4$ означают, что все аффинные преобразования пространства образуют группу. Для обозначения этой группы используется символ $\mathbb{A}^n$.

**Определение.** *Преобразование аффинного пространства* $\mathbb{A}$ *в себя, задаваемое формулой* $\boldsymbol{y = Cx + b}$, *где* $\boldsymbol{C}$ *— это квадратная невырожденная матрица размера* $\boldsymbol{n \times n}$, $\mathbf{det}\, \boldsymbol{C > 0}$, *называется собственным.*

Композиция (произведение) двух собственных аффинных преобразований — это снова собственное преобразование. Это означает, что собственные преобразования образуют подгруппу в $\mathbb{A}^{\boldsymbol{n}}$.

$\mathbf{6^0}$. Пусть $\dot{\boldsymbol{M}}$ — это фиксированная точка аффинного пространства $\mathbb{A}$, с которым ассоциировано векторное пространство $\boldsymbol{X}$,

$$\mathbf{dim}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{n} < +\infty.$$

Пусть кроме того в $\boldsymbol{X}$ выбрано какое-нибудь подпространство $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{X}$.

**Определение.** *Подмножество $\boldsymbol{P}$ точек аффинного пространства $\mathbb{A}$, задаваемое равенством*

$$\boldsymbol{P} = \dot{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{Y} = \{\dot{\mathbf{N}} \in \mathbb{A} \mid \dot{\mathbf{N}} = \dot{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}\},$$

*называется плоскостью в $\mathbb{A}$, или аффинным подпространством. При этом размерностью этого аффинного подпространства называется число $\boldsymbol{m} = \mathbf{dim}\,\boldsymbol{Y} \leqslant \boldsymbol{n}$.*

В условиях данного определения говорят также, что плоскость $\boldsymbol{P}$ проходит через точку $\dot{\boldsymbol{M}}$ в направлении подпространства $\boldsymbol{Y}$. Само же подпространство $\boldsymbol{Y}$ называют *направляющим* для плоскости $\boldsymbol{P}$.

Если $\boldsymbol{m} = \mathbf{dim}\,\boldsymbol{Y} = \mathbf{0}$, то множество $\boldsymbol{P} = \dot{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{Y}$ — это точка $\dot{\boldsymbol{M}}$. Если $\boldsymbol{m} = \mathbf{dim}\,\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{n} - \mathbf{1}$, то $\boldsymbol{P} = \dot{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{Y}$ называют гиперплоскостью.

Если же $\boldsymbol{m} = \dim \boldsymbol{Y} = \mathbf{1}$, то множество $\boldsymbol{P} = \dot{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{Y}$ — это прямая.

Пусть $\dot{\boldsymbol{N}}$ принадлежит прямой $\boldsymbol{P} = \dot{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{Y}$, причем $\dot{\boldsymbol{N}} \neq \dot{\boldsymbol{M}}$. Тогда $\boldsymbol{P}$ состоит из точек вида $\dot{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{\lambda}\overrightarrow{\boldsymbol{MN}}$, где $\boldsymbol{\lambda}$ — вещественный параметр, а вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{MN}}$ принадлежит $\boldsymbol{Y}$. В частности, если $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$, то $\dot{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{\lambda}\overrightarrow{\boldsymbol{MN}} = \dot{\boldsymbol{N}}$. По этой причине говорят, что прямая $\boldsymbol{P}$ проходит через точки $\dot{\boldsymbol{M}}$ и $\dot{\boldsymbol{N}}$.

Упражнения. $\mathbf{1}$. Доказать, что если $\dot{\boldsymbol{M}} \in \boldsymbol{P}$ и $\dot{\boldsymbol{N}} \in \boldsymbol{P}$, то вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{MN}}$ принадлежит $\boldsymbol{Y}$.

$\mathbf{2}$. Доказать, что если $\dot{\boldsymbol{M}} \in \boldsymbol{P}$, $\dot{\boldsymbol{N}} \in \boldsymbol{P}$ и $\dot{\boldsymbol{L}} \in \boldsymbol{P}$ то справедливы включения

$$\dot{\boldsymbol{M}} + \overrightarrow{\boldsymbol{NL}} \in \boldsymbol{P}, \quad \dot{\boldsymbol{N}} + \overrightarrow{\boldsymbol{ML}} \in \boldsymbol{P}, \quad \dot{\boldsymbol{L}} + \overrightarrow{\boldsymbol{MN}} \in \boldsymbol{P}.$$

$\mathbf{3}$. Доказать, что если множество $\boldsymbol{P} \subset \mathbb{A}$ обладает свойствами $\mathbf{1}$ и $\mathbf{2}$, то это множество — плоскость.

Если есть плоскость $\boldsymbol{P} \subset \mathbb{A}$ с направляющим пространством $\boldsymbol{Y}$, то

$$\boldsymbol{Y} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{N}\boldsymbol{L}} \mid \dot{\boldsymbol{N}} \in \boldsymbol{P},\ \dot{\boldsymbol{L}} \in \boldsymbol{P}\}.$$

**Теорема.** *Всякая плоскость $\boldsymbol{P} = \dot{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{Y}$ в аффинном пространстве $\mathbb{A}$ сама является аффинным пространством с ассоциированным векторным пространством $\boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{X}$.*

**Определение.** *Любые две плоскости аффинного пространства в направлении одного и того же линейного пространства* $\boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{X}$ *называются параллельными.*

Параллельные плоскости $\dot{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{Y}$ и $\dot{\boldsymbol{N}} + \boldsymbol{Y}$ совпадают тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{MN}}$ принадлежит $\boldsymbol{Y}$.

Упражнение. Доказать, что при аффинном преобразовании $y = Cx + b$, где $C$ — это квадратная невырожденная матрица размера $n \times n$, $\det C \neq 0$, всякая прямая аффинного пространства отображается в прямую.

**Теорема.** *Взаимнооднозначное преобразование аффинного пространства в себя, при котором всякая прямая отображается в прямую того же пространства, является аффинным преобразованием.*

Доказательство этой теоремы не является простым и здесь не приводится.

**Лемма.** *При аффинном преобразовании параллельные плоскости переходят в параллельные плоскости. Пересекающиеся плоскости пространства переходят в пересекающиеся. Прямая, пересекающая плоскость, переходит в прямую, пересекающую плоскость.*

$7^0$. Отдельный интерес представляет случай, когда ассоциированное с аффинным пространством $\mathbb{A}$ векторное пространство $\boldsymbol{X}$ представляет собой евклидово пространство.

В этом случае в пространстве $\mathbb{A}$ появляется метрическая структура: для любых двух точек из $\mathbb{A}$ определено расстояние меду ними. Если $\dot{\boldsymbol{M}}$ и $\dot{\boldsymbol{N}}$ — точки из $\mathbb{A}$, то расстоянием между ними называется вещественное число

$$\boldsymbol{\rho}(\dot{\boldsymbol{M}}, \dot{\boldsymbol{N}}) = \sqrt{(\overrightarrow{\boldsymbol{MN}}, \overrightarrow{\boldsymbol{MN}})} = \|\overrightarrow{\boldsymbol{MN}}\|,$$

где $(\overrightarrow{\boldsymbol{MN}}, \overrightarrow{\boldsymbol{MN}})$ представляет собой скалярное произведение вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{MN}}$ на себя в евклидовом пространстве $\boldsymbol{X}$.

Величина же $\|\overrightarrow{\boldsymbol{MN}}\| = (\overrightarrow{\boldsymbol{MN}}, \overrightarrow{\boldsymbol{MN}})^{\mathbf{1/2}}$ называется *нормой вектора* $\overrightarrow{\boldsymbol{MN}}$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{X}$.

Функция $\boldsymbol{\rho(\dot{M},\dot{N})}$ обладает следующими важными свойствами:

$\mathbf{1}$). $\boldsymbol{\rho(\dot{M},\dot{N}) \geqslant 0}$ и при этом $\boldsymbol{\rho(\dot{M},\dot{N}) = 0 \ \Leftrightarrow \ \dot{M} = \dot{N}}$;

$\mathbf{2}$). $\boldsymbol{\rho(\dot{M},\dot{N}) = \rho(\dot{N},\dot{M})}$ (симметричность);

$\mathbf{3}$). Для любых трех точек $\boldsymbol{\dot{M}}$, $\boldsymbol{\dot{N}}$ и $\boldsymbol{\dot{L}}$ справедливо следующее *неравенство треугольника*:

$$\boldsymbol{\rho(\dot{M},\dot{N}) \leqslant \rho(\dot{M},\dot{L}) + \rho(\dot{L},\dot{N})}.$$

Указанные три свойства означают, что бинарная функция $\rho(\dot{M}, \dot{N})$ задает на прямом произведении $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$ метрику.

Отметим, что в случае общего аффинного преобразования расстояние между двумя точками аффинного пространства не сохраняется. Однако всегда справедливо следующее утверждение.

**Теорема** (основное свойство аффинных преобразований). *Аффинное преобразование евклидова пространства сохраняет отношение длин направленных отрезков, лежащих на одной прямой аффинного пространства.*

*Доказательство.* Пусть на прямой $(M)$ аффинного пространства $\mathbb{A}$ произвольным образом выбраны четыре различных точки, последовательно занумерованных. Обозначим эти точки как $\dot{M}_1$, $\dot{M}_2$, $\dot{M}_3$ и $\dot{M}_4$ соответственно. Точка $\dot{M}_j$ предшествует на прямой $(M)$ точке $\dot{M}_{j+1}$ с большим номером.

При аффинном преобразовании $\vec{y} = C\vec{x} + \vec{b}$, где $C$ — это квадратная невырожденная матрица размера $n \times n$, $\det C \neq 0$, прямая $(M)$ аффинного пространства отображается в некоторую прямую $(N)$ этого же пространства.

Образы точек $\dot{M}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, при этом лежат на прямой $(N)$. Обозначим их как $\dot{N}_1$, $\dot{N}_2$, $\dot{N}_3$ и $\dot{N}_4$ соответственно.

Введем в $\mathbb{A}$ аффинные координаты и пусть точка $\dot{M}_j$ имеет в качестве этих координат вектор $\vec{x}_j =\uparrow (x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^n)$ из $\mathbb{R}^n_{\text{афф}}$. Тогда аффинные координаты точки $\dot{N}_j$ определяются равенством

$$\vec{y}_j = C\vec{x}_j + \vec{b}.$$

Далее, вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ имеет координаты $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$, а вектор $\overrightarrow{M_3M_4}$ — координаты $\vec{x}_4 - \vec{x}_3$ из $\mathbb{R}^n_{\text{век}}$. Отношение нормы $\|\overrightarrow{M_3M_4}\|$ к норме $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|$ обозначим как $\lambda$, тогда $\lambda > 0$ и при этом

$$\|\vec{x}_4 - \vec{x}_3\| = \lambda\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|.$$

По условию векторы $\vec{x}_4 - \vec{x}_3$ и $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ из $\mathbb{R}^n_{\text{век}}$ коллинеарны: они лежат на одной прямой. Следовательно, справедливо равенство

$$(\vec{x}_4 - \vec{x}_3) = \lambda(\vec{x}_2 - \vec{x}_1), \qquad \lambda > 0.$$

Пользуясь равенствами

$$\vec{y}_j = C\vec{x}_j + \vec{b}, \qquad j = 1, 2, 3, 4,$$

получаем соотношения

$$\vec{y}_2 - \vec{y}_1 = C(\vec{x}_2 - \vec{x}_1), \qquad \vec{y}_4 - \vec{y}_3 = C(\vec{x}_4 - \vec{x}_3),$$

и далее

$$\vec{y}_4 - \vec{y}_3 = C(\vec{x}_4 - \vec{x}_3) = \lambda C(\vec{x}_2 - \vec{x}_1),$$

$$\|\vec{y}_4 - \vec{y}_3\| = \lambda\|C(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)\| = \lambda\|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\|.$$

Таким образом, отношение норм $\|\overrightarrow{N_3N_4}\|$ и $\|\overrightarrow{N_1N_2}\|$ равно $\lambda$, то есть совпадает с отношением нормы $\|\overrightarrow{M_3M_4}\|$ к норме $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|$. $\square$

**Определение.** *Преобразование аффинного пространства* $\mathbb{A}$ *в себя, задаваемое формулой* $y = x + b$*, где вектор* $\vec{b} =\uparrow (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *принадлежит* $\mathbb{R}^n$*, называется сдвигом (трансляцией) пространства на вектор* $\vec{b}$.

Всевозможные сдвиги аффинного пространства $\mathbb{A}$ образуют группу, которая обозначается как $\mathbb{R}^n$, где $n = \dim \mathbb{A}$.

**Определение.** *Аффинное преобразование пространства* $\mathbb{A}$, *задаваемое формулой* $y = Cx$, *где* $C$ *— это квадратная невырожденная матрица размера* $n \times n$, $\det C \neq 0$, *называется линейным. Всевозможные аффинные линейные преобразования образуют группу.*