Тема : Предел функции одной переменной

$\mathbf{1^0}$. Определение предела функции в точке по Гейне. $\mathbf{2^0}$. Примеры вычисления предела функции в точке по Гейне. Бесконечно большие и бесконечно малые. $\mathbf{3^0}$. Определение предела функции в точке по Коши. Эквивалентность определений предела по Гейне и по Коши. $\mathbf{4^0}$. Свойства операции предела. Примеры. Односторонние пределы функции. $\mathbf{5^0}$. Теорема — Критерий существования предела функции в терминах существования пределов ее значений по подпоследовательностям. Условие Коши. Критерий Коши.

1^0. Нам понадобится вспомнить понятие предельной точки числового множества.

Определение. *Пусть множество X вложено в $\mathbb{R}$. Точка x_0 из $\mathbb{R}$ называется предельной точкой X, если*

$$\forall\, O(x_0) \quad \exists\, x_1 \in O(x_0) \cap X : \qquad x_1 \neq x_0.$$

Любая внутренняя точка множества является его предельной точкой. Любая точка отрезка $[a, b]$ является его предельной точкой.

Предельная точка множества может ему не принадлежать. Например, интервал (a, b) имеет предельными свои конечные точки a и b, которые ему не принадлежат.

Бесконечно удаленная точка $+\infty$ расширенной числовой прямой является предельной точкой любого неограниченного сверху числового множества X: в любой окрестности $+\infty$ имеется элемент из X, отличный от $+\infty$.

Аналогично, бесконечно удаленная точка $-\infty$ расширенной числовой прямой является предельной точкой любого неограниченного снизу числового множества X: в любой окрестности $-\infty$ имеется элемент из X, отличный от $-\infty$.

Определение (предел функции по Гейне). *Пусть имеется числовая функция* $y = f(x)$, $x \in X$, *и* x_0 — *это предельная точка* X. *Тогда число* C *из расширенной числовой прямой называется пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to x_0$, *если для любой сходящейся к* x_0 *последовательности* $\{x_n\}$ *элементов множества* X, *ни один из которых не совпадает с точкой* x_0, *числовая последовательность*

$y_n = f(x_n),\ n = 1, 2, \dots,$ сходится к C:

$$x_n \in X,\ x_n \neq x_0,\ x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = C.$$

Если предел C функции $f(x)$ в точке x_0 существует, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C$.

Отметим, что в определении предела функции не требуется, чтобы сама эта функция была определена в предельной точке x_0 своей области определения X.

Функция не может иметь в одной и той же точке двух разных пределов (если предположить противное, то найдется числовая последовательность сходящаяся одновременно к двум разным пределам, что невозможно).

2^0. Докажем, например, что в любой точке x_0 из $\mathbb{R}$ косинус имеет предел, совпадающий с его же значением в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0.$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$\cos x_n - \cos x_0 = -2 \sin \frac{x_n - x_0}{2} \sin \frac{x_n + x_0}{2}.$$

Используем следующие две оценки:

$$|\sin\frac{x_n+x_0}{2}|\leqslant 1,\qquad |\sin\frac{x_n-x_0}{2}|\leqslant|\frac{x_n-x_0}{2}|.$$

Подставляя их в предыдущее равенство, получаем

$$|\cos x_n-\cos x_0|\leqslant|x_n-x_0|.$$

Полагая, что $x_n\to x_0$ при $n\to\infty$, перейдем в последнем неравенстве к пределу при $n\to\infty$. Тогда получим $\lim\limits_{n\to\infty}|\cos x_n-\cos x_0|=0.$ $\square$

Рассмотрим функцию $f(x) = \mathbf{sign}\,\mathbf{x}$, задаваемую следующими равенствами:

$$\mathbf{sign}\,\mathbf{x} = +1 \quad \text{при } \mathbf{x} > \mathbf{0}, \qquad \mathbf{sign}\,\mathbf{x} = -1 \quad \text{при } \mathbf{x} < \mathbf{0}.$$

В нуле значение этой функции не определяем. Заметим, что нуль является предельной точкой области определения функции $f(x) = \mathbf{sign}\,\mathbf{x}$ и докажем, что в этой точке функция предела не имеет.

Доказательство. Пусть $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

При этом $f(x_{2n}) = \operatorname{sign}\frac{1}{2n} = +1$, а $f(x_{2n+1}) = \operatorname{sign}(-\frac{1}{2n+1}) = -1$. Следовательно, верхний и нижний пределы последовательности $y_n = f(x_n)$ друг с другом не совпадают и, таким образом, предела у этой последовательности не существует. $\square$

Докажем, что функция $f(x) = \cos x$ не имеет предела при $x \to +\infty$.

Доказательство. Предположим, что $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$ существует и равен числу C. Тогда должны быть справедливы равенства

$$C = \lim_{n\to\infty} \cos n\pi = \lim_{k\to\infty} \cos 2k\pi = +1,$$

$$C = \lim_{n\to\infty} \cos n\pi = \lim_{k\to\infty} \cos (2k+1)\pi = -1.$$

Это противоречие показывает, что исходное предположение неверно. $\square$

Лемма (второй замечательный предел). *Функция* $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ *имеет пределом при* $x \to +\infty$ *число Эйлера* e*:*

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (E)$$

Доказательство. По определению числа Эйлера имеем равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Таким образом, в произвольной окрестности $O(e) = (a, b)$ числа Эйлера начиная с некоторого номера N оказываются все числа вида $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, то есть

$$\forall\, n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in (a, b).$$

Пусть последовательность $\{n_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, натуральных чисел при $k \to +\infty$ также стремится к $+\infty$. Тогда найдется номер $K = K(N)$, начиная с которого все числа вида $\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$ попадают в интервал (a, b):

$$\forall\, n_k \geqslant K(N) \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \in (a, b).$$

Это по определению означает, что

$$\lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e.$$

Пусть теперь есть последовательность $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, вещественных чисел при $k \to +\infty$ стремящихся к $+\infty$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$.

Будем предполагать, что все эти числа не меньше двух: $x_k \geqslant 2$. Если это не так, то все лишние числа отбросим.

Далее полагаем $n_k = [x_k]$, где символ $[x]$ обозначает целую часть положительного числа

x. По определению целой части для всех k имеем двустороннюю оценку $n_k \leqslant x_k < n_k + 1$. Следовательно, справедливы неравенства

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} \leqslant \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{n_k} \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}.$$

Заметив, что $n_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, перейдем к пределу в последней цепочке неравенств.

Получим для крайних выражений следующие равенства:

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1} = e,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e.$$

Следовательно, по теореме о зажатой последовательности имеет место предельное равенство

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e.$$

Это соотношение справедливо для всякой последовательности $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, вещественных чисел при $k \to +\infty$ стремящихся к $+\infty$. По определению предела функции по Гейне имеем искомое равенство (E). $\square$

Сделав в предельном равенстве (E) замену переменной $t = \frac{1}{x}$, получим

$$e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \to +0} \left(1 + t\right)^{\frac{1}{t}}. \qquad (E')$$

Это равенство известно как второй замечательный предел.

Если существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ и вместе с ним предел $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$, то пишут "$f(x) \to A$ при $x \to \infty$", или, что тоже самое, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Определение. *Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, где x_0 — предельная точка области определения D_f, если* *выполняется предельное равенство*

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty.$$

Если же $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, *то* $f(x)$ *называется бесконечно малой при* $x \to x_0$.

Например, функция $y = x^2$ является бесконечно малой при $x \to 0$ и бесконечно большой при $x \to \infty$.

Функция $y = 1 - \cos x$ — это бесконечно малая при $x \to 0$.

Функция $y = x^{-\alpha}$, где $\alpha > 0$, — это бесконечно большая при $x \to 0$.

3^0. В анализе используется еще одно определение предела функции в точке, эквивалентное уже приведенному выше определению предела функции по Гейне.

Определение (предел функции по Коши). *Пусть имеется числовая функция* $y = f(x)$, $x \in X$, *и* x_0 *— это предельная точка* X.

Тогда число C *из расширенной числовой прямой называется пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to x_0$, *если для любой окрестности* $O(C)$ *числа* C *существует такая окрестность* $O(x_0)$ *предельной точки, что для произвольного* x

из пересечения $O(x_0) \cap X$, $x \neq x_0$, *значение* $f(x)$ *принадлежит окрестности* $O(C)$:

$$\forall\, O(C) \quad \exists\, O(x_0): \ \forall\, x \in O(x_0) \cap X, x \neq x_0 \quad \Rightarrow$$

$$f(x) \in O(C).$$

Если x_0 — предельная точка числового множества $M \subset \mathbb{R}$, то существует последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in M$, $x_n \neq x_0$, и такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Докажите это характеристическое свойство предельных точек в качестве упражнения.

Теорема. *Определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.*

Доказательство. Пусть точка x_0 предельная для области определения функции $f(x)$ и при этом $f(x) \to C$ при $x \to x_0$ в смысле определения предела по Коши.

Рассмотрим любую последовательность $\{x_n\}$, где $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, и такую, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Последовательности с таким свойством существуют в силу характеристического свойства предельной точки x_0 области определения функции $f(x)$.

Тогда, во-первых, для любой окрестности $O(C)$ существует окрестность $O(x_0)$ такая, что

$$\forall\, x \in O(x_0) \cap X, \quad x \neq x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \in O(C).$$

Во-вторых, по определению предела существует номер N со свойством, что $\forall\, n \geqslant N$ точка x_n принадлежит $O(x_0)$.

Следовательно, для $\forall\, n \geqslant N$ значение $f(x_n)$

принадлежит $O(C)$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = C,$$

то есть C — это предел функции $f(x)$ в смысле определения по Гейне.

Обратное утверждение докажите самостоятельно. $\square$

При определении предела функции часто используют понятие *проколотой окрестности*.

Определение. *Множество* $\{x \in O(x_0) \mid x \neq x_0\}$ *называется проколотой окрестностью точки* x_0. *Проколотая окрестность точки обозначается символом* $\dot{O}(x_0)$.

Например, проколотая окрестность интервала $O(x_0) = (a, b)$ это объединение двух меньших интервалов $\dot{O}(x_0) = (a, x_0) \cup (x_0, b)$. Для бесконечно удаленной точки справедливо равенство $\dot{O}(+\infty) = O(+\infty)$.

С использованием понятия проколотой окрестности условие Коши существования предела функции $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C$ записывается следующим образом:

$$\forall\, O(C)\ \exists\, O(x_0):\ \forall\, x \in \dot{O}(x_0) \cap D_f \quad \Rightarrow\ f(x) \in O(C).$$

Если $x_0 \in \mathbb{R}$ и $C \in \mathbb{R}$, то условие Коши существования предела функции $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C$ допускает также следующую эквивалентную форму записи:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0:\ \forall\, x \in \dot{O}_\delta(x_0) \cap D_f \quad \Rightarrow\ f(x) \in O_\varepsilon(C).$$

Если функция $f(x)$ определена лишь в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то существование предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C$ означает, что

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 :\ \forall\, x : |x - x_0| < \delta, |x - x_0| > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |f(x) - C| < \varepsilon.$$

4^0. По своим свойствам операция взятия предела функции в точке сходна с операцией вычисления предела числовой последовательности. Приведем перечень некоторых из этих аналогичных свойств.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = C$, то $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = C$.

2. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ подчинены неравенству

$$\varphi(x) \leqslant \psi(x) \quad \text{для} \quad \forall\, x \in X,\, x \neq x_0$$

и при этом существуют равные пределы

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x).$$

Тогда для любой функции $f(x)$, $x \in X$, удовлетворяющей условию

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x) \quad \text{для} \quad \forall\, x \in X,\, x \neq x_0,$$

существует предел

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x).$$

3. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ подчинены неравенству $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ для $\forall\, x \in X \cap \dot{O}(x_0)$. Тогда

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} \psi(x),$$

если только оба последних предела существуют.

4. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) < \lim\limits_{x \to x_0} \psi(x)$, то

$$\exists\, O(x_0): \qquad \varphi(x) < \psi(x) \qquad \forall\, x \in X \cap \dot{O}(x_0).$$

5. Имеют место равенства

$$\lim_{x \to x_0} (\varphi(x) \pm \psi(x)) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) \pm \lim_{x \to x_0} \psi(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) \cdot \psi(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \psi(x)$$

при условии, что все присутствующие в формулах пределы существуют и конечны.

Сосчитаем пределы некоторых конкретных числовых функций. В первую очередь установим, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Для обоснования этого равенства, известного как первый замечательный предел, воспользуемся следующей хорошо известной двусторонней оценкой:

$$\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1 \qquad \forall\, x : |x| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Перейдя здесь к пределу при $x \to 0$, получим искомое предельное соотношение.

Справедливы также следующие равенства:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1.$$

Далее, если $\alpha > 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha} = 0$.

При изучении функции в окрестности точки x_0 числовой прямой часто исследуют поведение функции слева и справа от этой точки по отдельности.

При этом, в частности, используется понятие одностороннего предела функции, а именно, ее предела при $x \to x_0$ с дополнительным условием в виде одного из неравенств $x < x_0$ или $x > x_0$.

Для обозначения односторонних пределов используются специальные символы. Предел справа обозначают как

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0,\, x > x_0} f(x) \equiv \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

а для предела слева используют запись

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0,\, x < x_0} f(x) \equiv \lim_{x \to x_0 - 0} f(x).$$

Односторонние пределы обладают всеми свойствами обычных пределов.

Теорема. *Если функция $f(x)$ определена и монотонна на интервале (a, b), то в любой точке x_0 этого интервала существуют ее односторонние пределы. Если при этом функ-*

ция $f(x)$ возрастающая, то справедливо дву-сторонее неравенство

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0).$$

Докажите теорему в качестве упражнения.

5^0. Сформулируем два критерия существования предела функции в точке.

Теорема (первый критерий). *Пусть точка* x_0 *предельная для области определения* X *функции* $f(x)$. *Тогда предел* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *существует в том и только том случае, если для любой сходящейся к* x_0 *последовательности* $\{x_n\}$ *элементов* X, *ни один из которых не совпадает с точкой* x_0, *сходится числовая после-*

довательность $y_n = f(x_n),\ n = 1, 2, \ldots$*:*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Big\{ \forall \{x_n\} : x_n \in X,\ x_n \neq x_0,\ x_n \to x_0 \ \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \Big\}.$$

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов множества X удовлетворяет условию

$$x_n \in X,\ x_n \neq x_0, \quad x_n \to x_0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \quad (\star)$$

Заметим, что хотя бы одна последовательность со свойством $(\star)$ обязательно найдется, что следует из условия о предельности точки x_0 для множества X.

Если при этом существует предел функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то по определению предела функции по Гейне существует и предел последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.

Установим обратное, для чего покажем, что предел последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ не зависит от изначального выбора $\{x_n\}$ со свойством $(\star)$. Пусть есть две какие-то последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$, каждая из которых обладает свойством $(\star)$, то есть

$$x'_n \in X,\ x'_n \neq x_0, \quad x'_n \to x_0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad (\star)$$

и

$$x''_n \in X,\ x''_n \neq x_0, \quad x''_n \to x_0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \quad (\star)$$

Образуем составную последовательность $\{x_n\}$, положив

$$x_{2k-1} = x'_k \quad \text{и} \quad x_{2k} = x''_k \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Новая составная последовательность $\{x_n\}$, как легко заметить, также обладает свойством $(\star)$. Но тогда по условию теоремы обязан существовать предел последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.

При этом $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ — это подпоследовательности в $\{f(x_n)\}$. Но если последовательность сходится, то к тому же пределу сходится и любая ее подпоследовательность. В частности,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x''_n).$$

Воспользовавшись определением предела функции по Гейне, заключаем, что этот общий (один и тот же) для всех последовательностей образов $\{f(x_n)\}$, где $\{x_n\}$ обладает свойством $(\star)$, предел $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ и является искомым пределом функции $f(x)$ в предельной точке x_0 ее области определения. $\square$

Определение (условие Коши). *Пусть точка* x_0 *предельная для области определения* X *функции* $f(x)$. *Тогда говорят, что* $f(x)$ *удо-*

влетворяет в x_0 условию Коши, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, O(x_0):\ \forall\, x, x' \in \dot{O}(x_0) \cap X\ \Rightarrow\ |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Теорема (критерий Коши). *Пусть точка* x_0 *предельная для области определения* X *функции* $f(x)$. *Тогда конечный предел* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *существует в том и только том случае, если функция* $f(x)$ *удовлетворяет в* x_0 *условию Коши.*

Доказательство. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $A \in \mathbb{R}$. Тогда по определению предела для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $O(x_0)$, что

$$\forall\, x \in \dot{O}(x_0) \cap X \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пользуясь этим неравенством, а также неравенством треугольника, получаем

$$\forall\, x, x' \in \dot{O}(x_0) \cap X \;\Rightarrow$$
$$|f(x) - f(x')| \leqslant |f(x) - A| + |A - f(x')| < \varepsilon.$$

Таким образом, функция $f(x)$ удовлетворяет в x_0 условию Коши.

Установим обратное. Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов множества X обладает свойством

$$x_n \in X,\ x_n \neq x_0, \quad x_n \to x_0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \quad (\star)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для любых натуральных

$m \geqslant N$ и $n \geqslant N$ точки x_m и x_n попадут в пересечение $\dot{O}(x_0) \cap X$. Но функция $f(x)$ удовлетворяет в x_0 условию Коши и, следовательно,

$$\forall\, m \geqslant N,\ n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность образов $y_n = f(x_n)$ фундаментальна в множестве $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

В силу полноты $\mathbb{R}$ эта фундаментальная последовательность обязана иметь конечный вещественный предел:

$$A = \lim_{n \to \infty} f(x_n).$$

Последовательность $\{x_n\}$ со свойством $(\star)$ в проведенных нами рассуждениях была произвольной. Поэтому к функции $f(x)$ применима уже доказанная теорема о первом критерии существования предела в точке. Таким образом, предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует и равен A. $\square$