Семинар

"О большое"

$$\boxed{f(x) = O(g(x)) \text{ при } x \to a} \Leftrightarrow \exists C: \ |f(x)| \le C|g(x)| \quad \forall x \in X \cap \overset{\circ}{U}(a)$$

$$\boxed{f(x) \asymp g(x) \text{ при } x \to a} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = O(g(x)) \\ g(x) = O(f(x)) \end{cases}$$

функции одного порядка

Лемма 1:

Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \asymp g(x)$ при $x \to a$

$$f(x) \sim g(x) \text{ при } x \to a \Leftrightarrow \text{при } x \in X \cap \overset{\circ}{U}(a)$$

$f(x) = \lambda(x) \cdot g(x)$,

где $\lim\limits_{x \to a} \lambda(x) = 1$

эквивалентные функции

Лемма 2:

Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$

Теорема:

Пусть $f \sim f_1$, $g \sim g_1$ при $x \to a$.

Тогда, если $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f_1}{g_1}$, тогда $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f_1}{g_1}$

„о малое"

$f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$ $\Leftrightarrow$ при $x \in X \cap \mathring{U}(a)$ $f(x) = \varepsilon(x) \cdot g(x)$, где $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

Если $f(x) = o(g(x))$ и при этом f, g – БМФ, тогда говорят, что $f(x)$ – БМФ более высокого порядка малости чем $g(x)$.

---

① $f = \frac{2x^2}{1+x}$, $g = x^2$, $x \to 0$

Показать, что $f \simeq g$

② Показать, что $f = \frac{x^3}{3-x}$ имеет более высокий порядок малости, чем $g = x^2$ при $x \to 0$

③ Определить порядок малости по x при $x \to 0$ функции $f(x) = 1 - \cos(x)$

④ Д-ть, что $\frac{x}{1-x} \sim \frac{x}{1+x^2}$ при $x \to 0.$

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2}{(1+x)x^2} = 2 \neq 0 \Rightarrow f(x) \simeq g(x)$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f}{g} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x^3}{3-x}}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{(3-x)\,x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{3-x} = \frac{0}{3} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^k} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^k} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^k} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}\cdot x^{k-2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{k-2}}$

$\to 1$

$x^k = \frac{x^2}{x^2}\cdot x^{k-2}$

$\boxed{(1-\cos x) \simeq x^k}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$x \to 0$

$\sin x \sim x$ $\qquad$ $\arcsin x \sim x$

$\operatorname{tg} x \sim x$ $\qquad$ $\operatorname{arctg} x \sim x$

$1 - \cos \sim \frac{x^2}{2}$

$e^x - 1 \sim x$

$\ln(1+x) \sim x$

$(1+x)^a - 1 \sim ax$

---

⑤ $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3} = \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(x-1)} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}$

⑥ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos mx}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{m\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \frac{m}{2}$

⑦ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\arcsin^2 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-(4x)^2 + (2x)^2 - 1 + 1}{2 \cdot (3x)^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{-12x^2}{2 \cdot 9x^2} = -\frac{12}{2 \cdot 9} = -\frac{4}{3 \cdot 2} = -\frac{2}{3}$

⑧ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{7}{4}\cancel{x}}{-2\cancel{x}} = -\frac{7}{8}$

⑨ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x - 1 + 1)}{x^2} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(-1 \cdot (1 - \cos x) + 1)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(-\frac{x^2}{2} + 1\right)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{\cancel{x^2}}{2}}{\cancel{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

(10) $$\lim_{x \to e} \frac{\ln x - \ln e}{x - e} = \lim_{x \to e} \frac{\ln \frac{x}{e}}{x - e} =$$

$$= \{x - e = y \to 0\} \quad x = y + e$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{y}{e}\right)}{y} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{y}{e \cdot y} = e^{-1}$$

(11) $$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin(2y + 2\pi)}{\sin(3y + 3\pi)} =$$

$x - \pi = y \to 0$

$\Downarrow$

$x = y + \pi$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\sin 2y}{-\sin 3y} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{2y}{-3y} = \lim_{y \to 0} -\frac{2}{3}$$