Тема : Линейные пространства

$\mathbf{1^0}$. Предмет линейной алгебры. Аксиоматическое определение векторного пространства над полем. Примеры. Следствия. $\mathbf{2^0}$. Линейные комбинации векторов. Линейные оболочки подмножеств векторного пространства. Подпространства. $\mathbf{3^0}$. Примеры векторных пространств. Координатные пространства. Линейные пространства функций. Пространства полиномов. $\mathbf{4^0}$. Определение структуры векторного пространства на множестве прямоугольных матриц заданного размера с коэффициентами из поля. Умножение матриц. Кольцо квадратных матриц.

1^0. Раздел математики, в котором изучаются такие математические объекты, как линейные (векторные) пространства, линейные отображения этих пространств друг в друга, системы линейных уравнений и правила их решения, называют *линейной алгеброй*. Сюда же относят специальные математические конструкции, называемые квадратичными и билинейными формами. Центральное место в линейной алгебре занимает теория линейных отображений.

Основной инструментарий линейной алгебры включает в себя такие понятия как матрицы, определители, координаты. Исходный же объект линейной алгебры — это *линейное пространство*. Линейное пространство — это множество, элементы которого называют векторами, и по этой причине часто используется эквивалентный термин — *векторное пространство*.

Современное определение линейного пространства основано на аксиоматическом подходе с использованием более общих математических понятий таких, как множество, группа, поле, бинарная операция и др.

Система аксиом, вводящих понятие линейного пространства, была разработана еще в

1888 г. (Дж. Пеано). Все аксиомы векторного пространства удобно разбить на три взаимосвязанные группы **(A)**, **(B)** и **(C)**.

Пусть X — это множество элементов, удовлетворяющих следующим группам условий.

(A). На произведении множеств $X \times X$ задана бинарная операция со значениями в X, записываемая как *сложение*, то есть аддитивно: $(x, y) \mapsto x + y$. При этом множество X, снабженное указанной операцией, образует *абелеву группу*. Это означает, что выполняются следующие условия:

$(\mathbf{LS})_1$: $x + y = y + x$ (коммутативность);

$(\mathbf{LS})_2$: $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность);

$(\mathbf{LS})_3$: существует называемый *нулевым вектором (нулем)* нейтральный элемент $\vec{\mathbf{0}}$ из $\boldsymbol{X}$ такой, что $\boldsymbol{x}+\vec{\mathbf{0}}=\boldsymbol{x}$ для $\forall\,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$;

$(\mathbf{LS})_4$: для любого вектора $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{X}$ существует *противоположный ему элемент* $(-\boldsymbol{x})$ из $\boldsymbol{X}$ такой, что $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\vec{\mathbf{0}}$ для $\forall\,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$.

Отметим, что стрелку над нулевым вектором $\vec{\mathbf{0}}$ обычно не пишут, употребляя сокращенное обозначение $\mathbf{0}$.

Далее пусть $\boldsymbol{K}$ — произвольное поле, элементы которого будем называть скалярами. Например, в качестве $\boldsymbol{K}$ может выступать поле вещественных чисел $\mathbb{R}$.

При этом на произведении множеств $\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{X}$ задана бинарная операция со значениями в $\boldsymbol{X}$, записываемая как $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{x}$ и называемая *умножением вектора на скаляр*.

$\mathbf{(B)}$. Умножение вектора на скаляр обладает следующими свойствами *унитарности* и ассоциативности:

$\mathbf{(LS)_5}$: $\mathbf{1} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ (унитарность). В этом равенстве $\mathbf{1}$ — это единичный элемент из поля $\boldsymbol{K}$, а $\boldsymbol{x}$ — произвольный вектор из $\boldsymbol{X}$. Эквивалентная форма записи: $(\mathbf{1}, \boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{x}$;

$\mathbf{(LS)_6}$: $(\boldsymbol{\alpha\beta}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{x})$ для любых скаляров $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ из поля $\boldsymbol{K}$ и любого вектора $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{X}$. В этом равенстве $\alpha\beta$ обозначает произведение скаляров α и β в поле K.

Отметим, что в большинстве случаев знак $\cdot$ для операции умножения вектора на скаляр не пишут, то есть вместо $\lambda \cdot x$ употребляют сокращенную запись λx.

(C). Операции сложения двух векторов и умножения вектора на скаляр связаны между собой законами дистрибутивности:

$(\mathbf{LS})_7$: $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}$ для любых скаляров $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ из поля $\boldsymbol{K}$ и любого вектора $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{X}$.

$(\mathbf{LS})_8$: $\boldsymbol{\lambda}\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{y}$ для любых скаляра $\boldsymbol{\lambda}$ из поля $\boldsymbol{K}$ и векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из $\boldsymbol{X}$.

Отметим, что в левой части равенства $(\mathbf{LS})_7$ знак плюс понимается как сумма элементов из поля $\boldsymbol{K}$, то есть сумма скаляров. В правой же части равенства $(\mathbf{LS})_{\mathbf{7}}$ знак плюс понимается как сумма векторов из $\boldsymbol{X}$.

Строго говоря, эти две операции сложения следовало бы обозначать разными символами. Например, в множестве $\boldsymbol{X}$ сложение обозначить как $\oplus$, а за сложением в поле $\boldsymbol{K}$ оставить прежнее обозначение $+$. Аналогично, операцию умножения вектора на скаляр обозначить как $\otimes$, а за умножением скаляров из поля $\boldsymbol{K}$ сохранить обозначение $\times$, или $\cdot$. Но такого усложнения системы обозначений обычно избегают, предполагая, что о каких именно операциях в формуле идет речь и так ясно из контекста.

Определение. *Множество векторов* $\boldsymbol{X}$ *с введенными операциями сложения и умножения на скаляр из поля* $\boldsymbol{K}$, *удовлетворяющих одновременно всем аксиомам* $\mathbf{(LS)_1 - (LS)_8}$, *называется линейным пространством над полем* $\boldsymbol{K}$.

В качестве важного примера векторного пространства приведем множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел с введенными на нем операциями сложения и умножения. В этом случае в качестве поля $\boldsymbol{K}$ выступает само поле вещественных чисел.

Приведем еще один пример. Рассмотрим множество $\boldsymbol{X} \equiv \mathbb{R}_+$ положительных вещественных чисел. В этом множестве уже есть операции сложения и умножения, но с ними множество $\mathbb{R}_+$ векторным пространством не является: число, противоположное положительному, является отрицательным, то есть не принадлежит $\mathbb{R}_+$. Введем здесь две другие операции, полагая

1) $x \oplus y = xy$, где величина в правой части — это обычное произведение двух положительных чисел;

2) для любого числа $\boldsymbol{\lambda}$ из поля $\mathbb{R}$ полагаем $\boldsymbol{\lambda} \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\lambda}}$, где в правой части — обычная степень положительного числа $\boldsymbol{x}$.

Множество $\mathbb{R}_+$ с введенной операцией сложения $\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}$, является, как несложно убедиться, абелевой группой. Нулевым вектором в этой группе служит единица $\mathbf{1}$ из $\mathbb{R}_+$. Противоположным к положительному числу

x при этом является величина $\frac{1}{x}$, также число положительное. Операция умножения на скаляр $\lambda \otimes x$, как легко проверить, является и унитарной, и ассоциативной. Таким образом, множество $\mathbb{R}_+$ является линейным пространством.

Отметим, что если в рассмотренном примере использовать не специальные символы, а те, что уже приняты в поле $\mathbb{R}$, то есть использовать равенства вида $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\lambda}}$, не делая при этом каких-либо пояснений, то это может вызвать непонимание. Поэтому в исключительных случаях технический прием с введением новых обозначений $\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{\lambda} \otimes \boldsymbol{x}$ все же имеет смысл применять.

В печатных текстах векторы из $\boldsymbol{X}$ зачастую выделяются полужирным шрифтом.

Из определения линейного пространства с помощью аксиом $\mathbf{(LS)_1 - (LS)_8}$ легко извлечь некоторые привычные нам свойства операций сложения и умножения на скаляр. Приведем вывод некоторых из этих свойств в качестве примера обращения с аксиомами.

1) Правило умножения на нуль: $\mathbf{0\vec{x} = \lambda\vec{0} = \vec{0}}$ для любого скаляра $\boldsymbol{\lambda}$ из $\boldsymbol{K}$ и любого вектора $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{X}$.

Выведем правило 1) из аксиомы $\mathbf{(LS)_7}$:

$$\mathbf{0}\vec{x} = (\mathbf{0}+\mathbf{0})\vec{x} = \mathbf{0}\vec{x} + \mathbf{0}\vec{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{0}\vec{x} = \mathbf{0}\vec{x} + \mathbf{0}\vec{x}.$$

Добавляя к обеим частям последнего равенства противоположный элемент $(-\mathbf{0}\vec{x})$ и пользуясь свойствами $\mathbf{(LS)_2}$, $\mathbf{(LS)_3}$ и $\mathbf{(LS)_4}$, получаем

$$\mathbf{0}\vec{x} + (-\mathbf{0}\vec{x}) = \mathbf{0}\vec{x} + (\mathbf{0}\vec{x} + (-\mathbf{0}\vec{x})) = \mathbf{0}\vec{x} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{0}} = \mathbf{0}\vec{x},$$

что и требовалось. Аналогично, из аксиомы $\mathbf{(LS)_8}$ выводим

$$\boldsymbol{\lambda}\vec{\mathbf{0}} = \boldsymbol{\lambda}(\vec{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{0}}) = \boldsymbol{\lambda}\vec{\mathbf{0}} + \boldsymbol{\lambda}\vec{\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\lambda}\vec{\mathbf{0}} = \boldsymbol{\lambda}\vec{\mathbf{0}} + \boldsymbol{\lambda}\vec{\mathbf{0}}.$$

Добавляя к обеим частям последнего равенства противоположный элемент $(-\boldsymbol{\lambda}\vec{\mathbf{0}})$ и пользуясь свойствами $\mathbf{(LS)_2}$, $\mathbf{(LS)_3}$ и $\mathbf{(LS)_4}$, получаем далее

$$\boldsymbol{\lambda}\vec{\mathbf{0}} + (-\boldsymbol{\lambda}\vec{\mathbf{0}}) = \boldsymbol{\lambda}\vec{\mathbf{0}} + (\boldsymbol{\lambda}\vec{\mathbf{0}} + (-\boldsymbol{\lambda}\vec{\mathbf{0}})) \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{0}} = \boldsymbol{\lambda}\vec{\mathbf{0}}.$$

2) Правило решения линейного уравнения. Если $\lambda\vec{x} = \vec{0}$, то $\lambda = 0$ или $\vec{x} = \vec{0}$.

Докажем это. Пусть $\lambda \neq 0$ и $\lambda\vec{x} = \vec{0}$. Тогда существует обратный элемент λ^{-1} и справедливы равенства

$$\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot \vec{x} = \lambda^{-1}(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda^{-1}\vec{0} = \vec{0}.$$

Последнее равенство здесь справедливо в силу уже установленного свойства 1).

3) Правило противоположностей. Для любого элемента $\vec{x}$ из X справедливо равенство $(-1)\cdot\vec{x} = -\vec{x}$.

Докажем это. Справедливы равенства

$$\vec{x} + (-1)\cdot\vec{x} = 1\cdot\vec{x} + (-1)\cdot\vec{x} = (1 + (-1))\cdot\vec{x} = 0\vec{x} = 0.$$

Последнее равенство здесь справедливо в силу уже установленного свойства 1).

2^0. Пусть X — это линейное пространство над полем K. Тогда для любого конечного набора скаляров λ_1, λ_2, ..., λ_n из поля K и набора векторов x_1, x_2, ..., x_n определена сумма

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j,$$

которая также является вектором из X.

Определение. *Сумма векторов*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j,$$

из пространства X *называется линейной комбинацией векторов* $x_1, \ldots, x_n$ *с коэффициентами* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

В более общем случае рассматривается семейство индексов I, возможно и бесконечное, а также проиндексированное элементами этого семейства множество векторов

$$\boldsymbol{M} = \left\{ \boldsymbol{x_j} \in \boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{j} \in \mathbf{I} \right\} \subset \boldsymbol{X}.$$

При этом возможно рассматривать линейные комбинации вида $\sum\limits_{\boldsymbol{j} \in \mathbf{I}} \boldsymbol{\lambda_j x_j}$ с произвольными скалярами $\boldsymbol{\lambda_j}$ из поля $\boldsymbol{K}$ при том условии, что *среди коэффициентов этой комбинации лишь конечное число ненулевые*.

Умножая линейную комбинацию векторов на скаляр $\boldsymbol{\lambda}$ из поля $\boldsymbol{K}$, получаем снова линейную комбинацию:

$$\lambda \sum_{j \in \mathbf{I}} \lambda_j x_j = \sum_{j \in \mathbf{I}} (\lambda \lambda_j) x_j.$$

Суммируя две линейные комбинации векторов, получаем снова линейную комбинацию:

$$\sum_{j \in \mathbf{I}} \lambda_j x_j + \sum_{j \in \mathbf{I}} \mu_j x_j = \sum_{j \in \mathbf{I}} (\lambda_j + \mu_j) x_j.$$

Отметим, что в последней сумме среди скаляров из поля $\boldsymbol{K}$, имеющих вид суммы $\boldsymbol{\lambda_j + \mu_j}$, лишь конечное число ненулевых. Таким образом, сумма в правой части последнего равенства определена корректно.

Рассмотрим подмножество $\boldsymbol{M}$ векторов линейного пространства, задаваемое равенством

$$\boldsymbol{M} = \left\{ \boldsymbol{x_j} \in \boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{j} \in \mathbf{I} \right\} \subset \boldsymbol{X}.$$

Всевозможные линейные комбинации векторов из M с коэффициентами из поля K образуют некоторое новое множество, которое мы условимся обозначать как $\langle M\rangle_K \equiv \langle M\rangle$.

Как уже отмечено, множество $\langle M\rangle$ замкнуто относительно операций сложения векторов и умножения их на скаляр:

$$\lambda \in K,\ x, y \in \langle M\rangle \quad \Rightarrow \quad (x+y) \in \langle M\rangle,\ \lambda x \in \langle M\rangle.$$

Это свойство позволяет утверждать, что для любого непустого множества векторов M соответствующее ему множество $\langle M \rangle$ является линейным пространством. Сложение и умножение на скаляр в этом линейном пространстве те же, что и в исходном пространстве X. Как говорят, операции в линейном пространстве $\langle M \rangle$ *индуцированы* соответствующими операциями из X.

Определение. *Множество* $\langle M \rangle$ *всевозможных линейных комбинаций векторов из* M *называют* *линейной оболочкой* *множества* M.

Пусть Y — подмножество линейного пространства X над полем K, $Y \subset X$. Тогда в Y имеются операции сложения и умножения на скаляр, перенесенные из пространства X.

Пусть относительно сложения подмножество $\boldsymbol{Y}$ замкнуто и образует в $\boldsymbol{X}$ аддитивную подгруппу. Пусть еще $\boldsymbol{Y}$ замкнуто относительно умножений на скаляры из $\boldsymbol{K}$. Тогда говорят, что $\boldsymbol{Y}$ — это *линейное (векторное) подпространство в* $\boldsymbol{X}$.

Пересечение любого числа векторных подпространств — это снова векторное подпространство (докажите это).

В частности, для любого непустого множества векторов $\boldsymbol{M}$ соответствующая ему *линейная оболочка* $\langle \boldsymbol{M} \rangle$ *является линейным подпространством в* $\boldsymbol{X}$. При этом $\langle \boldsymbol{M} \rangle$ — это наименьшее из всех подпространств в $\boldsymbol{X}$, содержащее в себе $\boldsymbol{M}$. Точнее, справедливы следующие соотношения:

$\mathbf{1}$. $\boldsymbol{M} \subset \langle \boldsymbol{M} \rangle$; $\mathbf{2}$. Если $\boldsymbol{X}_1$ — подпространство $\boldsymbol{X}$ и при этом $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{X}_1$, то $\langle \boldsymbol{M} \rangle \subset \boldsymbol{X}_1$.

Подпространство $\langle M \rangle$, как говорят, *порождено векторами* x_j, $j \in \mathbf{I}$.

Для линейной оболочки множества векторов используется также следующее обозначение:

$$\langle M \rangle = \mathrm{span}\,\{x_j \in M \mid j \in \mathbf{I}\}.$$

При этом говорят, что *подпространство* $\langle M \rangle$ *натянуто на векторы* $\{x_j \in M \mid j \in \mathbf{I}\}$.

3^0. Приведем ряд примеров векторных пространств.

1) Нульмерное векторное пространство над полем $\boldsymbol{K}$ определяется равенством $\boldsymbol{X} = \{\vec{\mathbf{0}}\}$. Таблица сложения в $\boldsymbol{X}$ состоит из единственного равенства $\vec{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}}$. Правило умножения на скаляр имеет следующий вид: $\boldsymbol{\lambda} \cdot \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}}$.

2) Основное поле $\boldsymbol{K}$ — это *одномерное координатное пространство*. По определению,

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{K}$ и операции в $\boldsymbol{X}$ совпадают с операциями в поле $\boldsymbol{K}$. Если $\mathbf{1}$ — это единица поля $\boldsymbol{K}$, то линейная оболочка $\langle \mathbf{1} \rangle$, порождаемая множеством $\{\mathbf{1}\}$, совпадает со всем пространством $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{K}$.

3) Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ — это векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Поле $\mathbb{R}$ — это векторное пространство над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

4) Степень K^n основного поля K, n — натуральное, называется *n-мерным координатным пространством*. По определению степени множества имеем

$$K^n = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \mid \lambda_j \in K\}.$$

Сложение векторов в K^n называется *покоординатным суммированием* и задается следующим равенством:

$$\oplus \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) + (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) =$$
$$= (\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \ldots, \lambda_n + \mu_n).$$

Умножение вектора из K^n на скаляр также называется *покоординатным* и задается следующей формулой:

$$\odot \quad \alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \ldots, \alpha\lambda_n).$$

Здесь α, λ_1, …, λ_n — произвольные скаляры из поля K.

Если $n = 1$, то $K^n = K = \langle 1 \rangle$. При $K = \mathbb{R}$ получаем $K^n = \mathbb{R}^n$ — *вещественное координатное пространство*.

5) Пусть есть некоторое непустое множество D и поле K. Тогда символ K^D обозначает совокупность всевозможных функций из

D в K, то есть

$$K^D \equiv \{f = f(x) \mid f : D \mapsto K\}.$$

Операции сложения векторов и умножения на скаляр в множестве K^D задаются поточечно, то есть равенствами

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall\, x \in D;$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \qquad \forall\, \lambda \in K \text{ и } \forall\, x \in D.$$

Наделенное этими операциями множество K^D является линейным пространством.

Если D — конечное множество из n различных элементов, то множество функций K^D отождествляется с координатным пространством K^n:

$$D = \{1, 2, \ldots, n\} \quad \Rightarrow \quad K^D \equiv K^n.$$

6) Если $\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ — это непустой интервал числовой оси, а $\boldsymbol{K} = \mathbb{R}$, то линейное пространство $\boldsymbol{K}^{\boldsymbol{D}} \equiv \mathbb{R}^{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}$ состоит из всевозможных вещественнозначных функций, определенных на интервале $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Множество $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ вещественнозначных функций, *непрерывных на интервале* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, с поточечными операциями суммирования и умножения на вещественное число, образуют в линейном пространстве $\mathbb{R}^{(a,b)}$ *собственное подпространство*.

Множество $C^{(1)}(a,b)$ вещественнозначных функций, *непрерывно дифференцируемых на интервале* (a,b), вложено в линейное пространство $C(a,b)$. В $C^{(1)}(a,b)$ унаследованы поточечные операции суммирования и умножения на вещественное число из $C(a,b)$. Вместе с этими операциями $C^{(1)}(a,b)$ является линейным пространством. При этом $C^{(1)}(a,b)$ — это собственное подпространство в $C(a,b)$.

7) Векторное пространство $\mathbb{P}_n$, где n — натуральное, образуют полиномы от независимой переменной t, степень которых не превосходит $n-1$:

$$f(t) \in \mathbb{P}_n \Leftrightarrow$$
$$f(t) = a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \cdots + a_{n-1} t + a_n.$$

Здесь коэффициенты a_1, a_2, …, a_n — это элементы из поля K. Сумма полиномов $f(t)$ и $g(t)$, задаваемых равенствами

$$f(t) = a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \cdots + a_{n-1} t + a_n,$$

$$g(t) = b_1 t^{n-1} + b_2 t^{n-2} + \cdots + b_{n-1} t + b_n,$$

определяется с помощью привычного правила: коэффициенты суммарного полинома получаются сложением коэффициентов слагаемых при одинаковых степенях независимой переменной, то есть

$$(f+g)(t) =$$
$$= (a_1+b_1)t^{n-1} + (a_2+b_2)t^{n-2} + \cdots + (a_n+b_n).$$

Аналогично, произведение полинома на скаляр λ из K определяется с помощью следующего правила:

$$(\lambda f)(t) = (\lambda a_1)t^{n-1} + (\lambda a_2)t^{n-2} + \cdots + (\lambda a_n).$$

Для всякого натурального $m > n$ векторное пространство $\mathbb{P}_m$ содержит в себе собственное линейное подпространство $\mathbb{P}_n$.

Объединение векторных пространств $\mathbb{P}_n$ по всем натуральным n — это линейное пространство $\mathbb{P}$ полиномов произвольной степени от независимой переменной t.

4^0. Особенно важным примером векторного пространства служит *кольцо квадратных* *матриц* с коэффициентами из заданного поля K. Дадим необходимые определения, зафиксировав сопутствующее поле K. Например, можно взять $K = \mathbb{R}$.

Определение. *Матрицей над полем K называется прямоугольная таблица, составленная из элементов K и содержащая m строк одинаковой длины n.*

В общем случае матрица записывается в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

Составляющие матрицу A элементы a_{ij} из поля K называют также ее *коэффициентами*.

Общее правило индексации элементов матрицы: в обозначении a_{ij} индекс i указывает номер строки, в которой стоит обозначенный коэффициент, а индекс j указывает номер столбца.

Говорят также, что элемент a_{ij} матрицы A получается на пересечении i-ой строки этой матрицы с ее j-м столбцом.

Элементы a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in} с одинаковым первым индексом образуют i-ую строку матрицы A. Всего у матрицы m строк.

Элементы a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj} с одинаковым вторым индексом образуют j-ый столбец матрицы A. Всего у матрицы n столбцов.

Принято называть матрицу A с m строками и n столбцами *матрицей размера* $m \times n$. При необходимости указать размер используют обозначение $A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}$.

Две матрицы

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \quad \text{и} \quad B = (b_{ij})_{m\times n}$$

одного размера $m \times n$ равны друг другу, если совпадают все их элементы с одинаковой парой индексов: $a_{ij} = b_{ij}$ для $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$.

Матрица $B = (b_{ij})$, i-ая строка которой совпадает с горизонтально расположенным i-м столбцом матрицы A, называется транспонированной к A и обозначается символом A^T. Таким образом, равенство $B = (b_{ij}) = A^T$ означает, что $b_{ij} = a_{ji}$ для всех допускаемых комбинаций индексов i, j.

На множестве всевозможных матриц одного и того же размера $m \times n$ вводятся операции сложения и умножения на скаляр из поля K.

Определение. *Суммой двух матриц*

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \quad \text{и} \quad B = (b_{ij})_{m\times n}$$

называется матрица $C = (c_{ij})_{m\times n}$ *того же размера, элементы которой получаются по формуле* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Как следует из этого определения, *операция сложения матриц коммутативна и ассоциативна*, то есть для любых матриц A, B,

$\boldsymbol{C}$ одинакового размера справедливы равенства

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}, \qquad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}).$$

Матрица $\mathbf{O}$ размера $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$, все коэффициенты которой равны нулю из поля $\boldsymbol{K}$, называется *нулевой*: $\mathbf{O}=(\mathbf{0})_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$.

Сумма любой матрицы $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{m\times n}$ с нулевой матрицей $\mathbf{O}$ никак не изменяет $\boldsymbol{A}$, то есть имеет место равенство

$$\boldsymbol{A} + \mathbf{O} = \boldsymbol{A}.$$

Определение. *Произведением* $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})_{m\times n}$ *на скаляр* $\boldsymbol{\lambda}$ *из* $\boldsymbol{K}$ *называется матрица* $\boldsymbol{\lambda A} = (\mathbf{d}_{ij})_{m\times n}$ *того же размера, элементы которой получаются по формуле* $\mathbf{d}_{ij} = \boldsymbol{\lambda a}_{ij}$.

Таким образом, произведение λA получается умножением каждого элемента матрицы A на один и тот же скаляр λ.

Произведение скаляра (-1) из поля K на матрицу $A = (a_{ij})_{m \times n}$ называется *противоположной* к A матрицей, которая при этом обозначается символом $-A$, то есть $-A = (-1)A$.

Сумма матрицы со своей противоположной — это тождественно нулевая матрица:

$$\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \mathbf{O}.$$

Произведение скаляра $\mathbf{1}$ из поля $\boldsymbol{K}$ на матрицу $\boldsymbol{A}$ никак не изменяет $\boldsymbol{A}$, то есть имеет место равенство

$$\mathbf{1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}.$$

При умножении матриц на скаляры удобно пользоваться также следующим свойством ассоциативности этой операции:

$$\boldsymbol{\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A}.$$

Введенные на множестве матриц одинаково- го размера операции сложения и умножения на скаляр обладают также свойствами дистрибутивности. Точнее, имеют место равенства

$$\alpha(A+B)=(\alpha A)+(\alpha B), \qquad (\alpha+\beta)A=(\alpha A)+(\beta A).$$

Таким образом, всевозможные матрицы одинакового размера $m \times n$ образуют в сочетании со сложением и умножением на скаляр линейное пространство над полем K.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то есть если $m = n$, то матрица называется *квадратной*.

Элементы a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} образуют *главную диагональ* квадратной матрицы.

Транспонированная к квадратной матрице — это снова квадратная матрица. Если транспонированная к матрице A совпадает с ней самой, $A = A^T$, то матрица A называется *сим-метрической*.

Квадратная матрица, у которой все элементы за исключением, возможно, элементов на главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*.

Таким образом, в общем случае диагональная матрица записывается в виде

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d_{11}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{d_{22}} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{d_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Применяется также сокращенная запись диагональной матрицы:

$$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}\,\{\boldsymbol{d_{11}}, \boldsymbol{d_{22}}, \ldots, \boldsymbol{d_{nn}}\}.$$

Определение. *Диагональная матрица*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\,\{1, 1, \ldots, 1\}$$

с единицами на главной диагонали называется единичной.

Единичная матрица обозначается символом E (иногда символом I).

Линейное пространство квадратных матриц размера $n \times n$ над полем K обозначается символом $M_n(K)$. Для любых двух матриц из пространства $M_n(K)$ определяется их произведение.

Определение. *Произведением квадратных матриц* A *и* B *из пространства* $M_n(K)$ *называется квадратная матрица* $C = (c_{ij})$, *элемен-*

ты которой задаются равенствами

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

В этом случае пишут $C = AB$*.*

В упрощенном виде правило вычисления произведения AB двух матриц формулируют как “умножение строки матрицы A на столбец матрицы B”.

Введенная в пространстве $M_n(K)$ *операция произведения матриц некоммутативна*. Это означает, что *в общем случае произведение* AB *не равно произведению* BA; порядок сомножителей в матричном произведении играет существенную роль. В частности, не всегда выполняется равенство

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Если $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, то говорят, что матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ перестановочны, или коммутируют. Для перестановочных матриц справедлива формула бинома Ньютона:

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{n}} = \sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{n}} \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}}.$$

В то же время операция произведения матриц ассоциативна, то есть для любых матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ из пространства $\boldsymbol{M_n(K)}$ справедливо равенство

$$\boldsymbol{(AB)C = A(BC)}.$$

Приведем здесь еще несколько полезных равенств для произведений матриц из $\boldsymbol{M_n(K)}$:

$$\boldsymbol{E \cdot E = E, \quad A \cdot E = A, \quad E \cdot A = A}.$$

Векторное пространство $\boldsymbol{M_n(K)}$ с введенным на нем умножением матриц друг на друга является *кольцом*.