Дифференцирование интегралов.

2231
2232
(а, б)
2233
(а, б, в)
2397
2398
2403
2413
2418
2431
2432
Дз:
2234
2235
2400
2404
2414
2419
2435

2231

$$I = \int_a^b \underbrace{\sin x^2}_{f(x)} dx = F(b) - F(a)$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\frac{dI}{dx} = 0$$

$$\frac{dI}{da} = -f(a) = -\sin a^2$$

$$\frac{dI}{db} = f(b) = \sin b^2$$

Для 2232

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dx\right) = \frac{d}{dx}\left[F(\psi(x)) - F(\varphi(x))\right] =$$

$$= f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

2232 а) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt =$

$$= \sqrt{1+x^4} \cdot 2x - 0$$

б) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2)\,dt = \cos(\pi \cos^2 x)\cdot(-\sin x) -$

$$- \cos(\pi \sin^2 x) \cdot \cos x$$

2233 а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \cos x^2\,dx}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\int_0^x \cos x^2\,dx\right)'}{x'} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x^2 \cdot 1 - \cos 0 \cdot 0}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \cos x^2 = 1$

б) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\int_0^x (\operatorname{arctg} x)^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left(\int_0^x (\operatorname{arctg} x)^2\,dx\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\operatorname{arctg} x)^2 \cdot 1 - \operatorname{arctg} 0 \cdot 0}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\operatorname{arctg} x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to +\infty} (\operatorname{arctg} x)^2}{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} =$

$\dfrac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$

$= \dfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{1} = \dfrac{\pi^2}{4}$

в) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left(\int_0^x e^{x^2}\,dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}\,dx} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2\left(\int_0^x e^{x^2}\,dx\right)\cdot\left(\int_0^x e^{x^2}\,dx\right)'}{\left(\int_0^x e^{2x^2}\,dx\right)'} =$

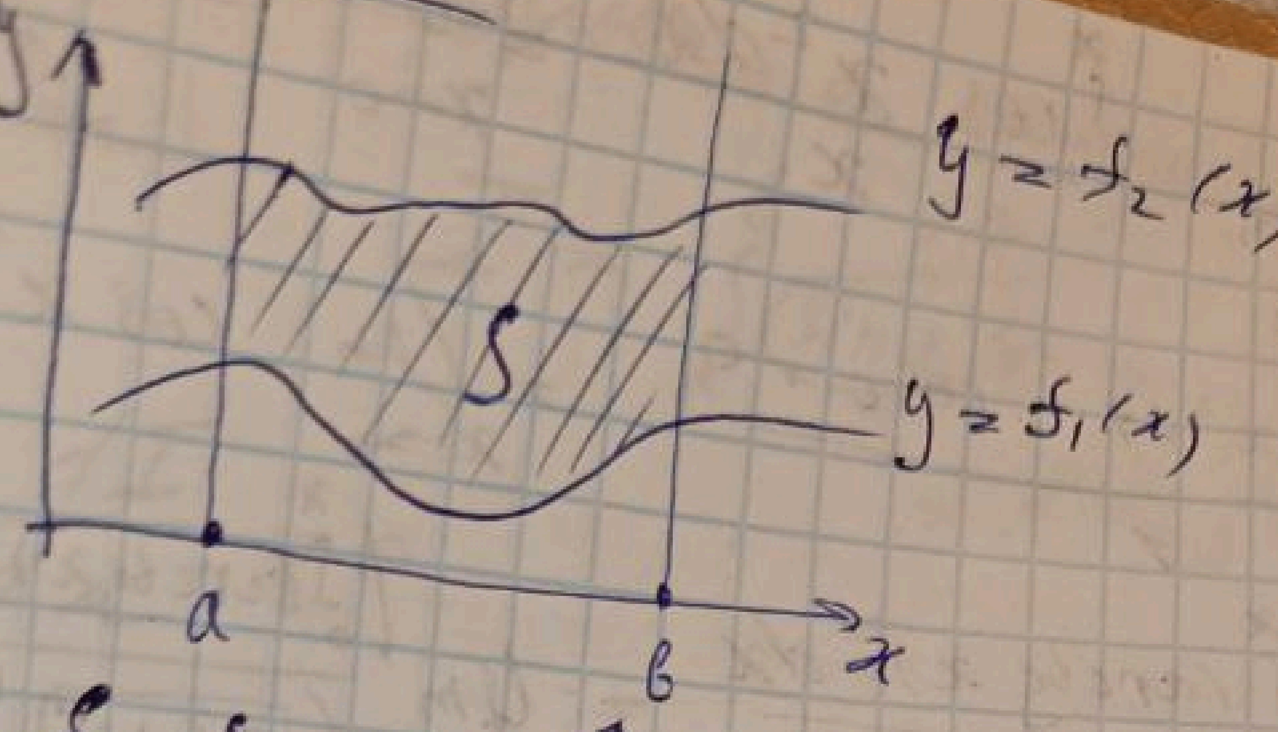
$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2\left(\int_0^x e^{x^2}\,dx\right)\cdot\left(e^{x^2}\cdot 2x - \overset{1}{e^0}\cdot 0\right)}{e^{2x^2}\cdot 4x - 1\cdot 0} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4\left(\int_0^x e^{x^2}\,dx\right) x e^{x^2}}{4x e^{2x^2}} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left(\int_0^x e^{x^2}\,dx\right)'}{\left(e^{x^2}\right)'} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{x^2}\cdot 1 - 0}{e^{x^2}\cdot 2x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{2x} =$

$= 0$

Площади.

(1)



$f_1, f_2 \in C^1[a, b]$

$f_2(x) \geq f_1(x)$

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx$$

$C^m[a, b]$ → принадлежит m-мерному пространству

функции, у которых производная m-ого порядка существует

---

(2) Площадь внутри замкнутой кривой

Пусть G имеет параметрический вид

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq T$$

Направление обхода = фигура слева

Тогда площадь кривой можно записать тремя способами

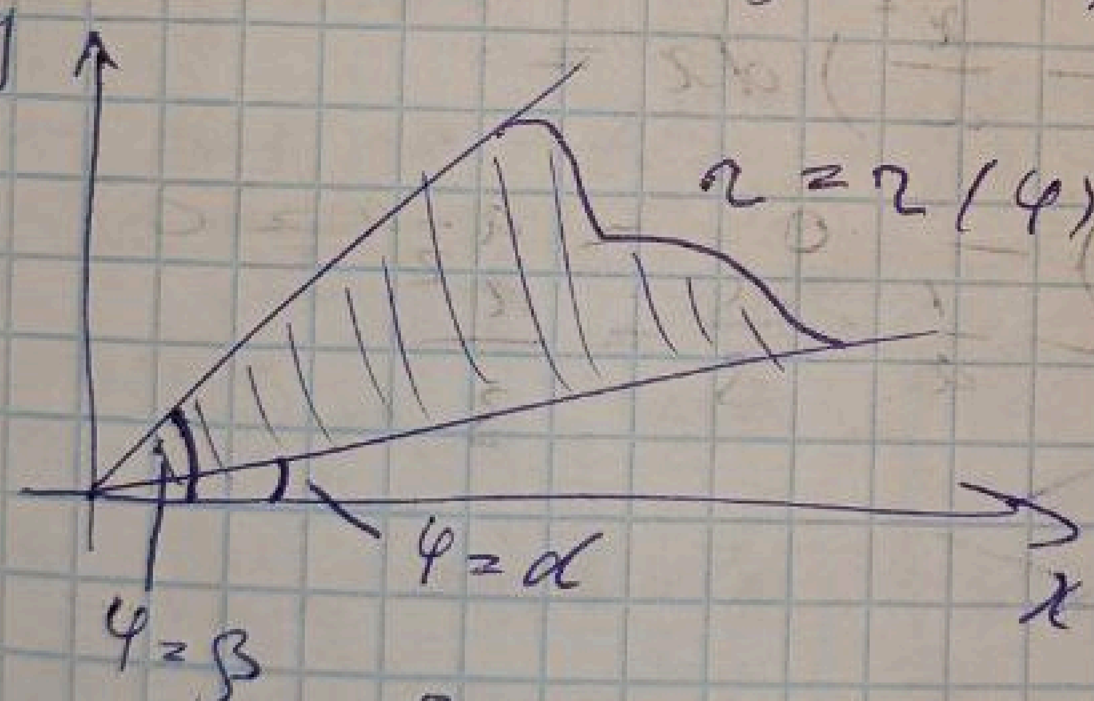
(1) $S = -\int_0^T \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt =$

(2) $= S = \int_0^T \varphi(t)\,\psi'(t)\,dt =$

(3) $= S = \frac{1}{2}\int_0^T [\varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)]\,dt$

---

(3) Если нужно найти сектор, ограниченный гладкой кривой, то:



Связь полярных координат с декартовыми:

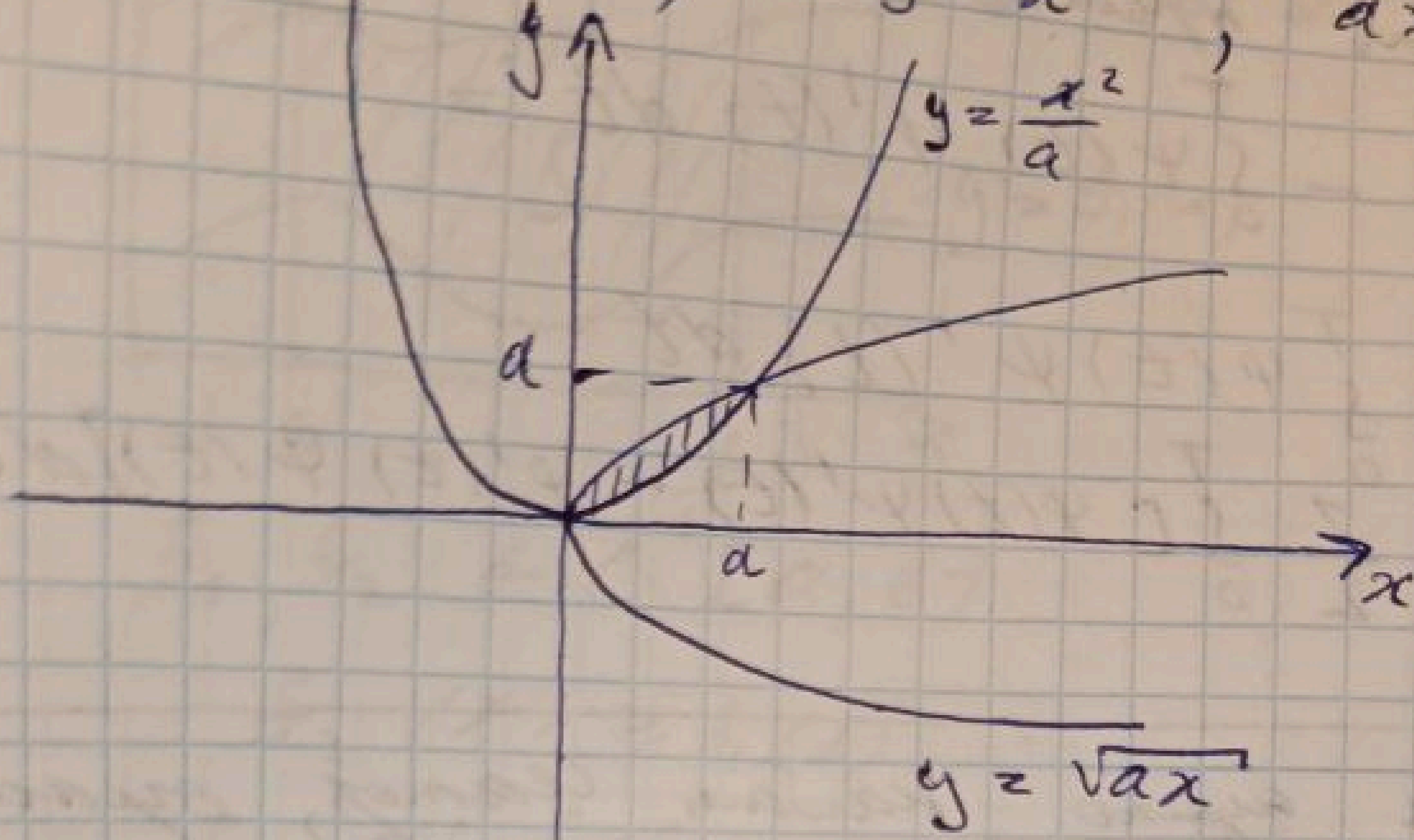
$\boxed{x = r\cos\varphi}$

$\boxed{y = r\sin\varphi}$

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\xi)\,d\xi$$

2397

$ax = y^2 \to y = \sqrt{ax}$, $ay = x^2 \to y = \frac{x^2}{a}$; $a > 0$



$$S = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right) dx =$$

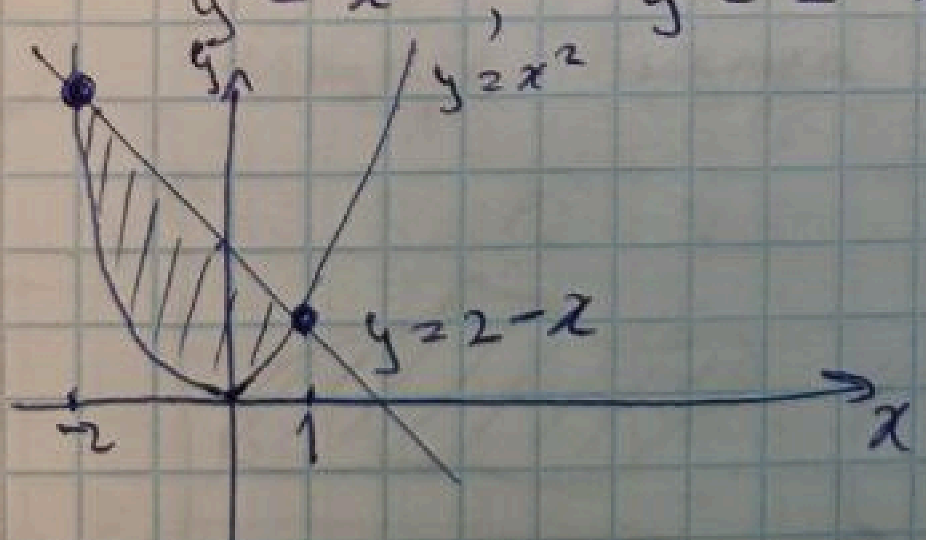
$\frac{a^2}{3}$

$$= \underbrace{\sqrt{a} \cdot a^{3/2}}_{a^2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^2}{3}$$

2398

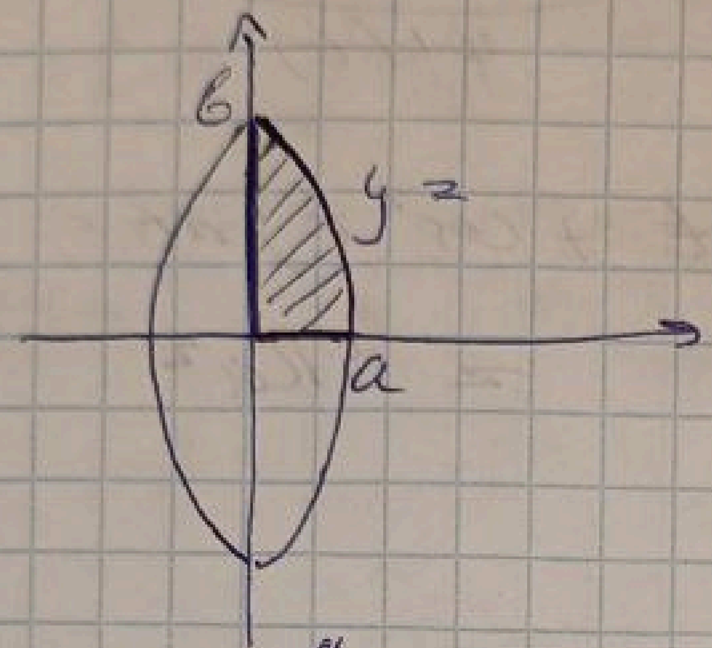
$y = x^2$, $x + y = 2$

$y = x^2$, $y = 2 - x$



$$S = \int_{-2}^{1} ((2-x) - x^2) dx =$$

2403 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;



$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$;

$y^2=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2$

$y=\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2}$

$\boxed{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$

$\frac{S}{4}=b\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=$

$$=\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{a}=\sin t\\ \sin t=0\to t=0\\ \sin t=1\to t=\frac{\pi}{2}\\ \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\cos t\\ \frac{dx}{a}=\cos t\,dt\end{array}\right\}$$

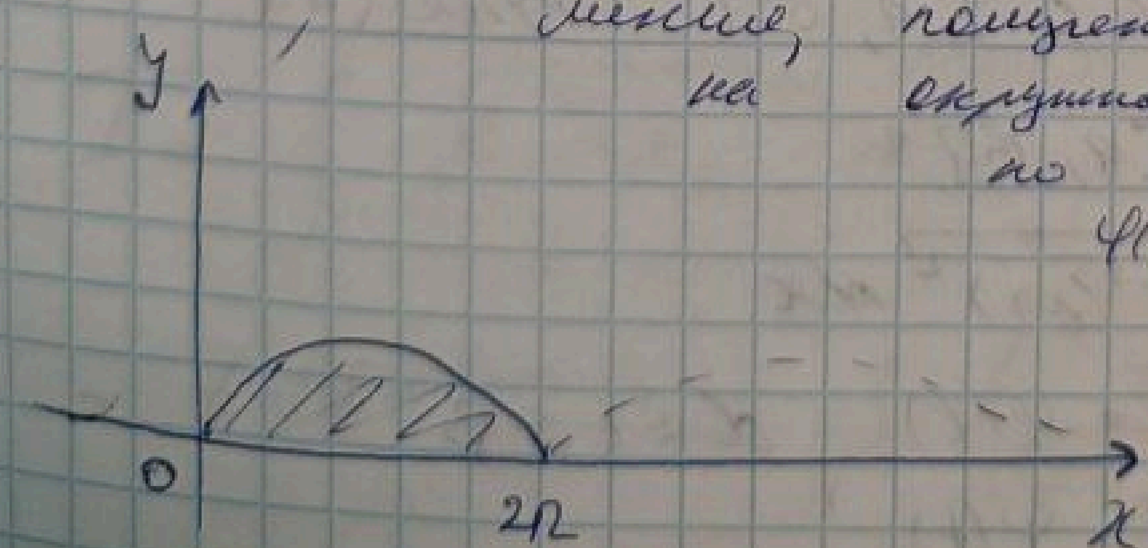
$=b\int_0^a\cos t\cdot a\cdot\cos t\,dt=$

$=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=$

$=\frac{\pi ab}{4}\Rightarrow$

$\Rightarrow S=\pi ab$

2413 Циклоида (фигура линии, представленная как линия, полученная с помощью точки на окружности, которая едет по оси абсцисс)



$\varphi(t)=x=a(t-\sin t)$,

$\psi(t)=y=a(1-\cos t)$

$0\le t\le 2\pi$

Обрат. направление, поэтому знак меняется,

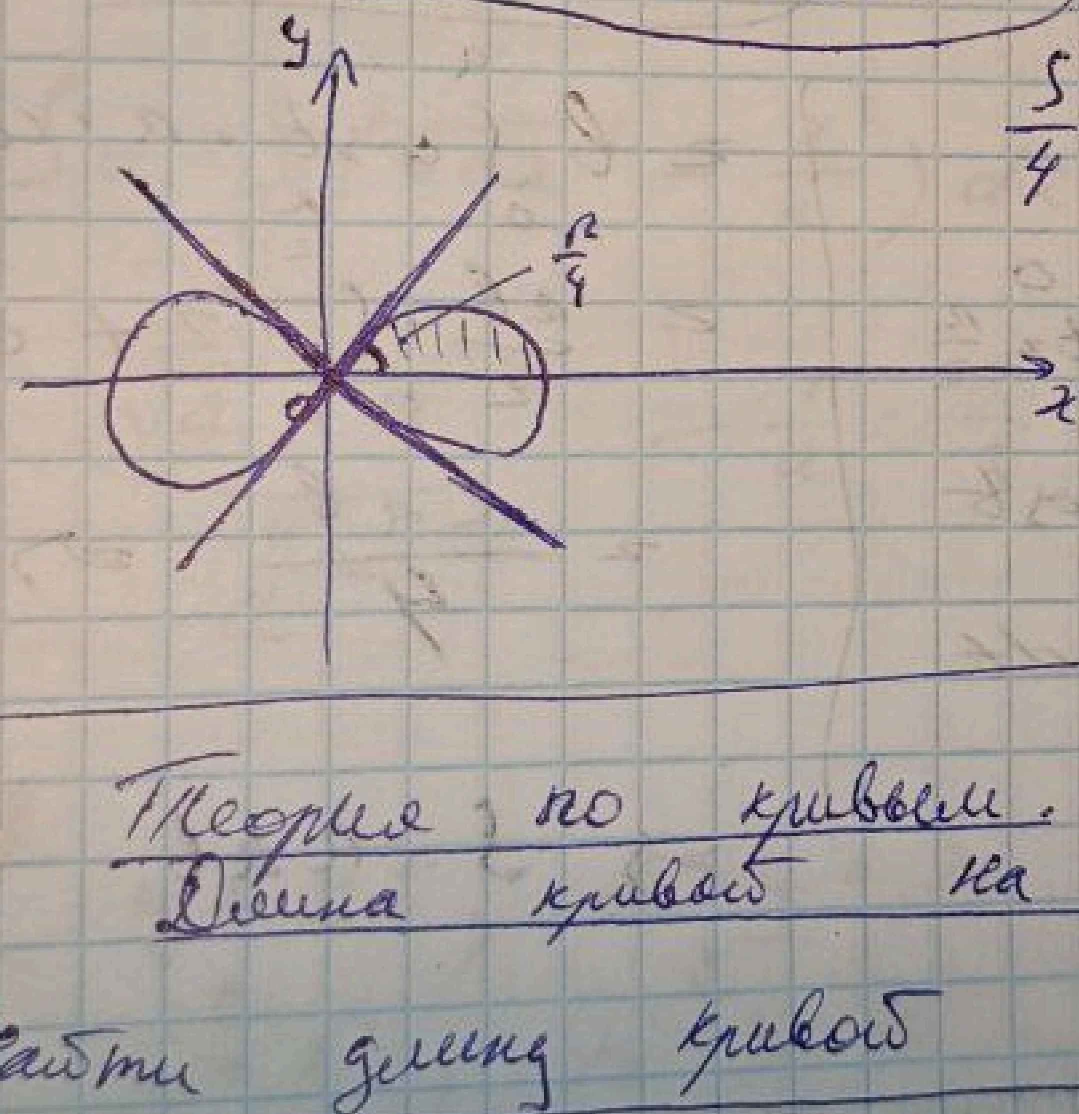
$$S = +\int_0^{2\pi} \underbrace{a(1-\cos t)}_{\psi(t)} \cdot \underbrace{a(1-\cos t)\,dt}_{\varphi'(t)} =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt =$$

$$= 3\pi a^2$$

2418 Лемниската

$$\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$$



$$\frac{S}{4} = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\, d\varphi$$

Теория по кривым.
Длина кривой на отрезке:

→ Найти длину кривой → ПРОСТО функция

① $y=f(x)$, $f\in C^1[a,b]$

на отрезке $[a,b]$

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

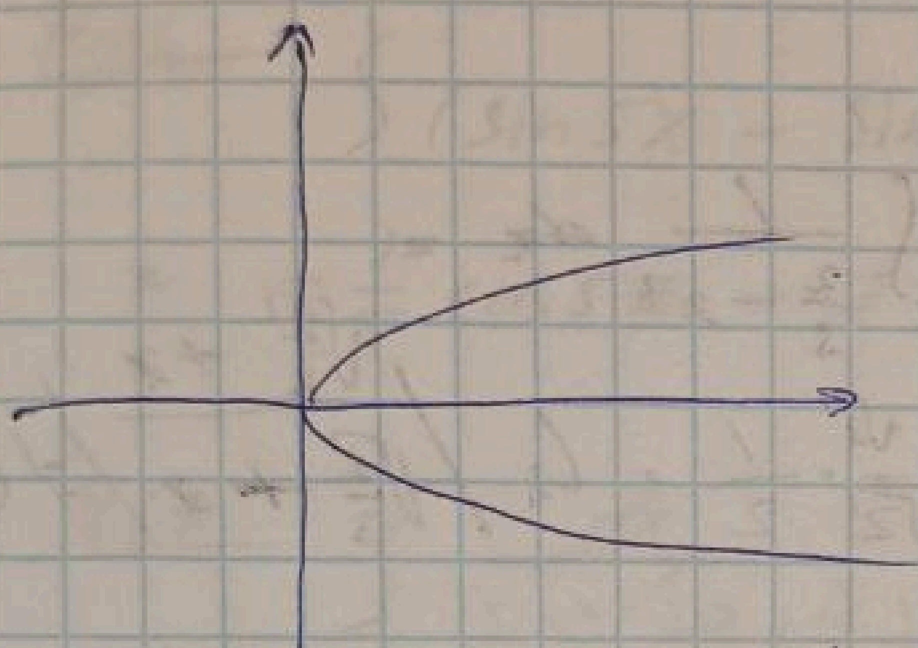
② параметрич. $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, $\alpha\le t\le\beta$

$$l=\int\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$$

2431 $y = x^{3/2}$ $(0 \le x \le 4)$

$$l = \frac{4}{9}\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, d\left(\frac{9}{4}x+1\right) \ldots$$

2432 $y^2 = 2px$, $0 \le x \le x_0$



$$l = 2\int_0^{x_0} \sqrt{1+\frac{p}{2x}}\,dx$$

$$y = \pm\sqrt{2p}\cdot(x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(y')^2 = \left(\pm\sqrt{2p}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 =$$

$$= \frac{2p}{3\cdot 4\cdot x} = \frac{p}{6x}$$

$$\int \frac{\sqrt{2x+p}}{\sqrt{2x}}\,dx = \left\{\begin{array}{l} t = \sqrt{2x} \\ dt = \frac{\sqrt{2}\,dx}{2\sqrt{x}} \end{array}\right\} =,$$

$$I = \int \sqrt{t^2+p}\,dt = \left\{\begin{array}{l} u = \sqrt{t^2+p} \\ du = \frac{2t}{\sqrt{t^2+p}} \\ dv = dt \\ v = t \end{array}\right\} =$$

$$= t\sqrt{t^2+p} - \int \frac{t^2+p-p}{\sqrt{t^2+p}} = -I + \ldots$$