Лекция «Непрерывные функции»

Опр: Функция $f(x)$, $x \in D_f$, называется непрерывной в предельной точке x_0 множества D_f ($x_0 \in D_f$), если $\exists$ предел $f(x)$ при $x \to x_0$ и этот предел равен $f(x_0)$.

D_f = {предельная точка D_f} $\cup$
$\cup$ {изолированные}

$D_f \cap (-\infty, x_0)$ $D_f \cap (x_0, +\infty)$

$y_1 = \operatorname{sign} x$ $y_2 = \frac{1}{x}$

$x_0 \neq 0$

Опр: Функция $f(x)$ является непрерывной в $x_0 \in D_f$, если для $\forall \{x_n\}: x_n \in D_f$, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, равен $y = f(x_0)$

Опр ($\varepsilon - \delta$) Функция $f(x)$, определённая в окр-ти т. x_0, называется непрерывной в x_0, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \forall x, \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Теоремы

① Если $f(x)$ непрерывна в x_0, то $y = |f(x)|$ также непрерывна в x_0

② Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в x_0, то $f(x) \pm g(x)$ и $f(x) \cdot g(x)$ также непрерывны в x_0. Если $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывная в точке x_0.

650,
651,
496 ✓,
502 ✓,
505 ✓,
523,
535

496

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{tg^3 x - 3 tg x^{**}}{\cos(x + \frac{\pi}{6})^{*}} =$$

$$* \cos(x + \frac{\pi}{6}) = \cos x \cos\frac{\pi}{6} - \sin x \sin\frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

$$** \ tg^3 x - 3 tg x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^3 - 3\frac{\sin x}{\cos x} =$$

$$= \frac{\sin^3 x - 3\sin x \cos^2 x}{\cos^3 x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x - 3\sin x\cos^2 x}{\frac{1}{2}\cos^3 x(\sqrt{3}\cos x - \sin x)} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\sin^3 x - 6\sin x\cos^2 x}{\sqrt{3}\cos^4 x - \cos^3 x \sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x(\sin^2 x - 3\cos^2 x)}{\sqrt{3}\cos^4 x - \cos^3 x\sin x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x\cancel{(\sin x - \sqrt{3}\cos x)}(\sin x + \sqrt{3}\cos x)}{-\cos^3 x\cancel{(\sin x - \sqrt{3}\cos x)}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x\,(\sin x + \sqrt{3}\cos x)}{-\cos^3 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x}{-\cos^3 x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin(2x)}{-\cos^3 x} = \frac{2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{-\frac{1}{8}} =$$

$$= -24$$

<u>502</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-(1-2\sin^2\frac{x^2}{2})}}{1-\cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2}\sin\frac{x^2}{2}}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2}\sin\frac{x^2}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\sqrt{2}\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\left(\frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}\right)\frac{x^2}{2}}{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\left(\frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}\right)\frac{x^2}{2}}{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \frac{x^2}{4}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \sqrt{2}\,\frac{1}{1} = \sqrt{2}$$

505

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(2 \sin\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cdot \cos\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right) =$$

$$\boxed{\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \to 0}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 0 \cdot \cos\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} = 0$$

523

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \to \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \ \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2} \end{array} \right. =$$

$$= \lim_{t \to 1} \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^{\frac{2t}{1-t^2}} = \left[\left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^{\frac{2t}{1-t^2}} = \left(1 + \frac{2t-1-t^2}{1+t^2} \right)^{\frac{2t}{1-t^2}} = \right.$$

$$= \left(1 + \underbrace{\frac{-(t-1)^2}{1+t^2}}_{\to 0} \right)^{\frac{1+t^2}{-(t-1)^2} \cdot \frac{-(t-1)^2}{1+t^2} \cdot \frac{2t}{1-t^2}} =$$

$$= \lim_{t \to 1} e^{\frac{-2t(t-1)^2}{(t^2+1)(1-t)(1+t)}} = e^{\lim_{t \to 1} \frac{2t(t-1)}{(t^2+1)(t+1)}} =$$

$$= e^{\frac{2 \cdot 1 \cdot 0}{2 \cdot 2}} = e^0 = 1$$

535 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})} =$

А.п.: $S = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$

$S_{г.п.} = \frac{a_1}{1-q}$

57 $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}\,\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}) = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2(1-\frac{1}{2})}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^1 = 2$

80 Доказать сходимость: $x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{2^{n+1}})}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})\ldots(1+\frac{1}{2^n})} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow$ последовательность x_n возрастающая

413

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2+x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1-1-5x}{x^2+x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2}{x^2+x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+5x^2+10x+10}{x^3+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{0+0+0+10}{0+1} = 10$$

416

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^{20}\cdot 3^{30}}{2^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}$$

420

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+x+1} = 1$$

423

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{(x-2)^{20}(x+4)^{10}} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}} = \frac{3^{20}}{6^{10}} = \frac{3^{20}}{3^{10}\cdot 2^{10}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\ldots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{n^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+(2n-1)^2)n}{n^3\cdot 2}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(2n-1)^2}{n^2\cdot 2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4n^2-4n+1}{2n^2}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-4n+2}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-2n+1}{n^2}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1}=2$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[2]{3}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2n]{3}\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}3^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}3^{\left(\frac{1}{2(1-\frac{1}{2})}\right)}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}3^{1}=3$

6 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}\cancel{-x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{1+\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$

7
$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} =$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)} =$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} =$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{1+2x}+3)} =$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

8
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)x^2}{\sin^2 x\cdot x^2} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\ \sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x\ \sin^2 x} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x\cdot 2^2\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x\cdot\cos^2\frac{x}{2}} =$$

$$=\frac{1}{2}$$

Расходимость

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\exists \varepsilon^* > 0: \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists p: \ x_{n+p} - x_n > \varepsilon$$

$$x_{n+p} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+p}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} =$$

$$= \frac{p}{\sqrt{n+p}} = \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}} > \varepsilon$$

$$\forall n \geq 1$$

$$p = n \qquad \varepsilon = \frac{1}{4}$$

$$\frac{n}{\sqrt{2n}} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \varepsilon^*$$

Семинар

Непрерывность

$f(x)$ — непрерывная в точке x_0 функция, если:

1. $f(x)$ определена в x_0
2. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ — конечный предел (не к ∞)
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Если хотя бы 1 из условий нарушается, то функция называется разрывной.

Типы точек разрыва:

(а) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ $\Rightarrow$ x_0 — устранимая точка разрыва

односторонние пределы

(б) $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, но $\exists$ конечные $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ x_0 — точка разрыва I-ого рода

(в) если хотя бы 1 из односторонних пределов не существует, то $\Rightarrow$ x_0 — точка разрыва II-ого рода

→ Если хотя бы один из односторон. пред. $= \infty$, то $\Rightarrow$ x_0 — точка бесконечного разрыва

675, 676, 678(мод), 679, 682, 687, 688, 690, 691, 720, 722

675

Исследовать на непрерывность:

$f(x) = |x|$ непр. в т. x_0

Опр. предела по Коши: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Нер. т.: $||\alpha| - |\beta|| < |\alpha - \beta|$

$-|\alpha - \beta| \le |\alpha| - |\beta| \le |\alpha - \beta|$

1) $-|\alpha - \beta| < |\alpha| - |\beta|$

$|\beta| = |\beta - \alpha + \alpha| \le |\beta - \alpha| + |\alpha|$

$|\beta| \le |\beta - \alpha| + |\alpha|$

2) $|\alpha| = |\alpha - \beta + \beta| \le |\alpha - \beta| + |\beta|$

$|\alpha| \le |\alpha - \beta| + |\beta|$

$||x| - |x_0|| < \varepsilon$

По нер. треуг.: $|\underbrace{|x|}_{f(x)} - \underbrace{|x_0|}_{f(x_0)}| < |x - x_0| \le \delta = \varepsilon$

676

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{если } x \ne 2 \\ A, & \text{если } x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 2 + 2 = 4 \overset{(3)}{\overset{?}{=}} A$$

4)

Функ. непрерывна при $A = 4$; $A \ne 4 \Rightarrow$ точка $x = 2$ — это устранимая точка разрыва

678 (модл)

1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, непрерывна при $x \neq 0$

$x=0$ – точка разрыва (устранимая, т.к. есть предел, т.е.

$\exists \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, но при

при $x=0$ $f(x)$ не определена)

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $f(x)$ непрерывна для любого x ($\forall x$)

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

$f(+0) = \lim\limits_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$f(-0) = \lim\limits_{x \to -0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{-t} = -1$

$\Rightarrow$ существуют конечные односторонние пределы $\Rightarrow$ x_0 – т. разрыва I-ого рода

4) $f(x) = \begin{cases} \left|\frac{\sin x}{x}\right|, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $f(x)$ непрерывна $\forall x$

679

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$$

$\exists ? \lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ $\qquad \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y}$

По опр. по Гейне:

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\sin\frac{1}{x_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$$

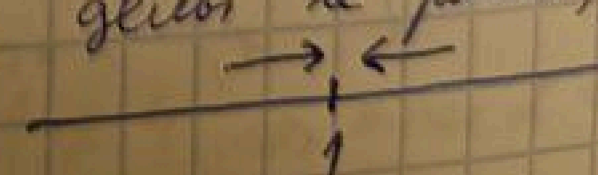
$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Rightarrow$ разрыв II-ого рода

$\nexists \lim\limits_{x \to x_0} \sin\frac{1}{x}$

682

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}, & x \neq 1 \\ A, & x = 1 \end{cases}$$

$x = 1$ — разрыв I-ого рода (односторонние пределы не равны)



$x \to 1+0$	$x \to 1-0$
$x - 1 > 0$	$x - 1 < 0$
$\frac{1}{x-1} \to +\infty$	$\frac{1}{x-1} \to -\infty$
$e^{\frac{1}{x-1}} \to \infty$	$e^{\frac{1}{x-1}} \to 0$
$f(x) \to 0$	$f(x) \to 1$

Д/З: 680, 685, 689, 693, 721, 726, 731

687

$$y = \frac{x}{(1+x)^2}$$

$x_0 = -1$ – точка разрыва, т.к. в x_0 не определена $f(x_0)$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x}{(1+x)^2} = -\infty \Rightarrow$$ разрыв II-ого рода (бесконечный разрыв)

688

$$y = \frac{1+x}{1+x^3}$$

$x_0 = -1$ – точка разрыва

$$\lim_{x \to -1} \frac{1+x}{1+x^3} = \frac{\cancel{1+x}}{\cancel{(1+x)}(1-x+x^2)} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_0$ – устранимая точка разрыва

690

$$y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x+1-x}{x(x+1)}}{\frac{x-x+1}{x(x-1)}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x(x+1)}}{\frac{1}{x(x-1)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x-1}{x+1} = -1 \Rightarrow$$ $x_0 = 0$ – устранимая точка разрыва (т.к. существует конечный предел в этой точке)

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)}{(x+1)} = 0 \Rightarrow x_0 = 1$$ – устранимая точка разрыва

$$\lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x+1} = +\infty \Rightarrow x_0 = -1$$ – точка бесконечного разрыва

691

$$y = \frac{x}{\sin x}$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n$$

$$\exists \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \Rightarrow x_0 = 0$$ – устр. т. разр.

$$\lim_{x \to \pi n} \frac{x}{\sin x} = \infty \Rightarrow x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$ – точка беск. разр.

685

720 $$y = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1+x^n},\quad x \geq 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

680

x_0

$\lim_{x \to 0-}$

$\lim_{x \to 0+}$

Но

$\lim_{x \to x}$

680 $$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} \left(x \sin \frac{1}{x}\right) = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \left(x \sin \frac{1}{x}\right) = \underline{\underline{0}}$$

$$f(0) = \underline{\underline{0}}$$

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x_0) = f(x_0) \Rightarrow x_0$ является точкой непрерывности и $f(x)$ непрерывна

685 $f(x) = [x]$

689

$$y = \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}$$

$\hookrightarrow (x+2)(x-1)^2 = 0$

$x_1 = -2$

$$\lim_{x\to -2-0} \frac{x^2-1}{x^3-3x+2} = \lim \frac{(-2-0)^2-1}{(-2-0)^3-3(-2-0)+2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2+0} \frac{x^2-1}{x^3-3x+2} = \lim \frac{(-2+0)^2-1}{(-2+0)^3-3(-2+0)+2} = \infty$$

$\Downarrow$

$x = -2$ – точка бесконечного разрыва (разрыва II-ого рода)

$x_2 = 1$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x+1}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to 1-0} \frac{1-0+1}{(1-0+2)(1-0-1)} = \frac{2}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x+1}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to 1+0} \frac{1+0+1}{(1+0+2)(1+0-1)} = \infty$$

$\Downarrow$

$x = 1$ – точка бесконечного разрыва (разрыва II-ого рода)

693 $y = \cos^2 \frac{1}{x}$

$x_0 = 0$ – точка бесконечного разрыва (II-ого р.) (при $x=0$ функция y не определена; пределов ни одного из односторонних не существует).