Тема : Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей

$\mathbf{1^0}$. Классификация неопределенностей при переходе к пределу в отношении (частном) двух функций. $\mathbf{2^0}$. Теорема Лопиталя о раскрытии неопределенности вида $[\frac{0}{0}]$ (в случае конечной и бесконечной предельной точки). Примеры применения. $\mathbf{3^0}$. Теорема (правила) Лопиталя о раскрытии неопределенности вида $[\frac{\infty}{\infty}]$ в случае конечного предела. Примеры применения.

□ Пусть есть две функции $f(x)$ и $g(x)$,
определенные на интервале (a, b) числовой оси. Пусть при этом существуют пределы

$$F = \lim_{x \to b-0} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to b-0} g(x) = G.$$

Пределы F и G могут быть как конечными, так и бесконечными. Предположив, что $g(x) \neq 0$ на (a, b), зададимся вопросом: как найти предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to b-0$, если таковой существует?

Если пределы F и G — конечные числа, то известно, что при $G \neq 0$ $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$.

Это утверждение распространяется на случаи:

1) $F \neq 0$, $G = 0 \Rightarrow \frac{F}{G} = \frac{F}{0} = \infty$

2) $F = +\infty,\ G \neq \infty \Rightarrow \frac{\infty}{G} = \infty;$

3) $F = 0,\ G \neq 0 \Rightarrow \frac{0}{G} = 0;$

4) $F \neq \infty,\ G = \infty \Rightarrow \frac{F}{\infty} = 0.$

Но помимо указанных четырёх случаев есть ещё следующие:

5) $F = 0$ и $G = 0$ 6) $F = \infty$ и $G = \infty$.

В этих случаях, зная только F и G, найти предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to b-0$ невозможно. Поэтому в случаях 5) и 6) говорят, что в пределе имеет место неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

☑ Поясним, как в случае неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ всё же можно найти, используя дополнительную информацию об $f(x)$ и $g(x)$.

3

<u>Теорема</u> Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b) и при этом $f(x) \to 0$ и $g(x) \to 0$ при $x \to b$, $g'(x) \neq 0$ на (a, b).

Тогда
$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (L_1)$$
если только предел отношения $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ в правой части при $x \to b-0$ существует (конечный или бесконечный).

Аналогично, если $f(x) \to 0$ и $g(x) \to 0$ при $x \to a+0$, то
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (L_2)$$

Отметим, что в усл. теоремы возможны два случая $b \neq +\infty$ и $b = +\infty$, а также $a \neq -\infty$ и $a = -\infty$. Если b и a конечны, то в (L_1) и (L_2) имеются в виду <u>односторонние пределы</u> (т.е. при $x \to b-0$ и $x \to a+0$).

4

<u>Док-во</u>. Пусть $b \neq +\infty$. Доопределим $f(x)$ и $g(x)$ в точке b, положив $f(b)=g(b)=0$.

Рассмотрим произвольную послед-ть $\{x_n\}$, сходящуюся при $n\to\infty$ к точке b:

$$\forall n \quad x_n \in (a, b) \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b.$$

Заметим, что на отрезке $[x_n, b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ <u>удовлетворяют всем условиям теоремы Коши о среднем</u>. Пользуясь этой теоремой, получаем

$$\forall n \quad \exists \xi_n \in (x_n, b): \quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Переходя здесь к пределу при $n\to\infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Предел отношения производных в правой части $\exists$ по условию. Послед-ть $\{x_n\}$ в последнем равенстве — произвольная, схо-

(5)

длящееся к в. Поэтому имеем формулу (L_1) в случае, когда $b \neq +\infty$.

Пусть $b = +\infty$. Условимся тогда рассматривать $a \geq 1$. Сделаем замену $x = \frac{1}{t}$, тогда функции
$$\varphi(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \text{ и } \psi(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$$
определены на интервале $\left(0, \frac{1}{a}\right)$.

Пара функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяет всем условиям доказываемой теоремы в случае конечного интервала $\left(0, \frac{1}{a}\right)$:

$$\lim_{t \to +0} \varphi(t) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0;$$

$$\lim_{t \to +0} \psi(t) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0;$$

$$\varphi'(t) = f'(x) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right); \quad \psi'(t) = g'(x) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right).$$

При этом
$$\exists \lim_{t \to +0} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Применяя к паре функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ (б формулу (L_2), получаем

$$\lim_{t\to+0}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \lim_{t\to+0}\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Но
$$\lim_{t\to+0}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

по определению ф-ий φ и ψ. Таким образом, равенство (L_1) доказано и для $b=+\infty$.

Случай $a=-\infty$ рассматривается аналогично. #

<u>Опр.</u> Равенства (L_1) и (L_2) называются <u>правилами Лопиталя</u> раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

<u>Примеры</u> (1) Найти $\lim\limits_{x\to0} \operatorname{ctg}^2 x\,\{\ln(\sqrt{1+2x}-\sin x)\}$

<u>Решение.</u> Полагаем
$$h(x) = \operatorname{ctg}^2 x\cdot\ln(\sqrt{1+2x}-\sin x).$$

При переходе к пределу при $x \to 0$ получается неопределенность вида $\infty \cdot 0$. Заметим, что

$$h(x) = \cos^2 x \cdot \frac{\ln(\sqrt{1+2x} - \sin x)}{\sin^2 x}.$$

Введем функции $f(x) = \ln(\sqrt{1+2x} - \sin x)$ и $g(x) = \sin^2 x$. Тогда $h(x) = \cos^2 x \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow$

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]?$$

Для раскрытия получившейся неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$ используем правило Лопиталя (L_1). Имеем

$$f'(x) = \frac{(1+2x)^{-1/2} - \cos x}{\sqrt{1+2x} - \sin x}; \quad g'(x) = 2\sin x \cdot \cos x$$

Поэтому

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+2x)^{-1/2} - \cos x}{\sin 2x} = \left[\frac{0}{0}\right]?$$

Еще раз воспользуемся (L_1):

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-(1+2x)^{-3/2}+\sin x}{2\cos 2x} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Найти $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+2x}-\sin x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Решение. Полагаем $H(x)=\left(\sqrt{1+2x}-\sin x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

При переходе к пределу при $x\to 0$ возникает неопределенность вида 1^∞. Заметим, что

$$H(x)=\exp h(x), \text{ где } h(x)=\cos^2 x\,\frac{\ln\left(\sqrt{1+2x}-\sin x\right)}{\sin^2 x}.$$

Функция $h(x)$ рассмотрена в предыдущем примере, где доказано, что $\lim_{x\to 0} h(x) = -\frac{1}{2}$.

Учитывая это, получаем

$$\lim_{x\to 0} H(x) = \exp\left(\lim_{x\to 0} h(x)\right) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}\ln\left(1+\frac{1}{x^{\beta}}\right)$, где $\alpha>0, \beta>0$.

Решение. Записывая функцию под знаком предела в эквивалентном виде, получаем

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^{-\beta})}{x^{-\alpha}} = \left[\frac{0}{0}\right]?$$

Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)},\text{ где}$$

$$f(x) = \ln(1+x^{-\beta}) \Rightarrow f'(x) = \frac{-\beta x^{-\beta-1}}{1+x^{-\beta}};$$

$$g(x) = x^{-\alpha} \Rightarrow g'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1}.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\beta x^{-\beta-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \frac{\beta}{\alpha}\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-\beta}!$$

Последний предел равен 0 при $\alpha<\beta$, 1 при $\alpha=\beta$ и $+\infty$ при $\alpha>\beta$. #

☐ Выясним, как раскрывать неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. (10)

Теорема Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b), причем $f(x) \to \infty$ и $g(x) \to \infty$ при $x \to b$, $g'(x) \neq 0$ на (a, b). Тогда

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \qquad (L_1^\infty)$$

если только предел отношения в правой части при $x \to b$ существует (конечный или бесконечный).

Аналогично, если $f(x) \to \infty$ при $x \to a$ и $g(x) \to \infty$ при $x \to a$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (L_2^\infty)$$

Док-во. Пусть $\exists$ конечный предел

$$\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k, \quad |k| < +\infty.$$

Рассмотрим произвольную последова- (11)
тельность $\{x_n\}$ с условиями

$$\forall n \quad x_n \in (a, b), \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b.$$

По определению предела для $\forall \varepsilon > 0$
$\exists y_\varepsilon \in (a, b)$:

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - k \right| < \varepsilon \quad \forall x \in (y_\varepsilon, b) \qquad (*)$$

По данному $\varepsilon > 0$ найдем номер N_ε:

$$y_\varepsilon < x_n < b \quad \text{для } \forall n \geq N_\varepsilon.$$

При $n \geq N_\varepsilon$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши о среднем на отрезке $[y_\varepsilon, x_n]$.

Пользуясь этой теоремой, находим точку ξ_n: $\quad y_\varepsilon < \xi_n < x_n$ и при этом

$$\frac{f(x_n) - f(y_\varepsilon)}{g(x_n) - g(y_\varepsilon)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Пользуясь этим соотношением и оценкой (*), получаем

$$k-\varepsilon < \frac{f(x_n)-f(y_\varepsilon)}{g(x_n)-g(y_\varepsilon)} < k+\varepsilon, \quad \forall n \geq N_\varepsilon.$$

Фиксируя $\varepsilon>0$ и вычисляя нижний и верхний предел от всех частей полученных неравенств, приходим к соотношениям

$$k-\varepsilon \leq \varliminf_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(y_\varepsilon)}{g(x_n)-g(y_\varepsilon)} \leq \qquad (**)$$

$$\leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(y_\varepsilon)}{g(x_n)-g(y_\varepsilon)} \leq k+\varepsilon.$$

Отметим, что точка y_ε от n никак не зависит, $a<y_\varepsilon<b$. Учитывая это и пользуясь условиями $f(x_n)\to\infty$ при $n\to\infty$, $g(x_n)\to\infty$ при $n\to\infty$, заключаем, что

$$\frac{f(x_n)-f(y_\varepsilon)}{g(x_n)-g(y_\varepsilon)} \sim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \text{ при } n\to\infty.$$

Следовательно,

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(y_\varepsilon)}{g(x_n)-g(y_\varepsilon)} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)};$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(y_\varepsilon)}{g(x_n)-g(y_\varepsilon)} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)}.$$

Подставляя эти равенства в оценку (*), получаем

$$k-\varepsilon \le \varliminf_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \le k+\varepsilon.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = k.$$

Это и означает, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = k$. 14

Последовательность $\{x_n\}$ в этом пределном равенстве произвольная, сходящаяся к b. Поэтому

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Это и есть требуемое равенство (L_1^∞) /в случае конечного правого предела/.

Случай $k = +\infty$ с выводом формул (L_1^∞) и (L_2^∞) рассмотрите самостоятельно.

\#

Опр Формулы (L_1^∞) и (L_2^∞) называются правилами Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример (1) Доказать, что

$$\lim_{x\to+0} x^{\alpha}\ln x = 0, \ \forall \alpha>0$$

/В окрестности нуля ($\ln x$) растет медленнее, чем убывает любая положительная степень/

Док-во. Здесь неопр. вида $0\cdot\infty$. Сведем её к виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Имеем

$$\lim_{x\to+0} x^{\alpha}\ln x = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = (\text{по правилу } (L_1^{\infty})) = \lim_{x\to0}\frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to0} x^{\alpha} = 0.$$

#

Пример (2) Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0, \forall\alpha>0$

Док-во. Имеем $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, по (L_1^{∞}) получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha}} = 0.$$

#

/На ∞ ($\ln x$) растет медленнее любой положительной степени x/.