б) $\neg\forall x \exists y\, (P(x,y) \to P(y,z)) \wedge \forall x \exists z\, (Q(x) \to P(z,x)) \equiv \neg\forall x \exists y\, (\neg P(x,y) \vee P(y,z)) \wedge \forall x \exists z\, (\neg Q(x) \vee P(z,x)) \equiv$

$\equiv \exists x \forall y\, (P(x,y) \wedge \neg P(y,z)) \wedge \forall x \exists z\, (\neg Q(x) \vee P(z,x)) \equiv \exists x \forall y\, (P(x,y) \wedge \neg P(y,z)) \wedge$

$\cancel{\wedge \forall x \exists z}$ $\wedge \forall v \exists w\, (\neg Q(v) \vee P(w,v)) \equiv$

$\equiv$

Доп

$\sigma = (P, F; \mu)$

сигнатура

множество переменных

- $T(\sigma)$ – терм, $x \in V \to x \in T(\sigma)$
- $f^n \in F$, $t_1, \ldots t_n \in T(\sigma) \Rightarrow f(t_1, \ldots t_n) \in T(\sigma)$

Самые простые термы: $0, 1, x, y$

Постфиксная запись: $+(1, 0)$ $\quad +(1, +(x,y))$

Инфиксная запись: $1+0$ $\quad 1+(x+y)$

$\forall y((y+y=0) \Rightarrow (y=0))$

Формулы: $0=0$, $1=0$, $x=(x+1)$ $\quad x=y+(x \cdot z)$

$(1=0) \wedge (x+y=y+x)$ $\quad \exists x (x=1)$

$\forall x \forall z (\forall z \in y) \to \exists t (z \in t) \wedge x)$

→ Замкнутая формула — формула, в которой нет свободных переменных

$\sigma_1 = (P_1, F_1, \mu_1)$ $\sigma_2 = (P_2, F_2, \mu_2)$

- $P_1 \subseteq P_2$
- $F_1 \subseteq F_2$
- $\forall s \in P_1 \cup F_1$ верно, что

$$\mu_1(s) = \mu_2(s)$$

σ_2 обогащение σ_1

σ_1 обеднение σ_2

$\sigma_1 \leq \sigma_2$

Пример:

$\{+^2\} \leq \{+^2, \cdot^2\} \leq \{+^2, \cdot^2, \leq^2\}$

$\{+^2, \cdot^2\} \nleq \{+^1, \cdot^2, \leq^2\}$

грубо говоря: множество констант — множество символов

$\mathcal{M} = (M, \sigma)$ — структура

V_0 — множество переменных ($a \in M$, $v \in V_0$) м-во переменных

Отобр. $\gamma : V_0 \to M$ означивание (интерпретация)

γ^{v}_{a}

$V_0 = \{\Delta, \square\}$ $\Delta = 0$

$M = \{0, 1\}$ $\square = 1$

Все вхождения v меняются на a.

множество термов в конкретной сигнатуре

$t \in T(\sigma)$

$t^{\mathcal{M}}[\gamma]$

$V(t) \subseteq V_0$

- если $t = v$ — переменная, то значение терма после означивания просто равно переменной!

$t^{\mathcal{M}}[\gamma] \rightleftarrows \gamma(v)$

- если $t = f(t_1, \dots t_n)$, то

$t^{\mathcal{M}}[\gamma] \rightleftarrows f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\gamma], \dots t_n^{\mathcal{M}}[\gamma])$

Пример! есть терм $\underline{+(\cdot(\overset{0}{\square}, \overset{1}{\Delta}), \mathrm{pow}(\overset{1}{\Delta}, \overset{0}{\square}))}$ $\Leftarrow 1$

$\rightleftarrows$ тогда и только тогда, когда

$\langle = \rangle$ по определению

Семантика на

$\varphi(\bar{x}) = \varphi(x_1, \dots x_n)$

$\models$ – отношение истинности

φ в $\mathcal{M}$ при γ

- $\mathcal{M} \models (t_1 = t_2)[\gamma] \overset{def}{\Leftrightarrow} t_1^{\mathcal{M}}[\gamma] = t_2^{\mathcal{M}}[\gamma]$

  т.е. $(\square = \triangle)[\gamma]$

  $\square[\gamma] = \triangle[\gamma]$

- $\mathcal{M} \models (\varphi \underset{\vee}{\wedge} \psi)[\gamma] \overset{def}{\Leftrightarrow} (\mathcal{M} = \varphi[\gamma]) \underset{\vee}{\wedge}$

  $\wedge (\mathcal{M} \models \psi[\gamma])$

- $\mathcal{M} \models \neg\varphi[x] \overset{def}{\Leftrightarrow} \mathcal{M} \overset{\text{не истина}}{\not\models} \varphi[\gamma]$

  ↳ не фи при означивании гамма истинно при структуре М

- $\mathcal{M} \models \underset{\exists}{\forall} x \varphi[\gamma] \overset{def}{\Leftrightarrow} \underset{\exists}{\forall} a \in M \, (\mathcal{M} \models \varphi[\gamma_a^x])$

$\mathcal{N} \, (\omega^{\{0\}}, \underbrace{\{+^2, \cdot^2, 0^0, x^0, y^0\}}_{\text{PUF}}$

натуральные числа

- $\mathcal{N} \models \forall x \forall y \, (x + (y+1) = (x+y)+1)$

- $\mathcal{N} \not\models \forall x \exists y \, (x = y+1)$

$$\frac{\varphi_1, \dots \varphi_n \vdash \varphi_0}{(\varphi_1)^{\bar{x}}_{\bar{t}}, \dots, (\varphi_n)^{\bar{x}}_{\bar{t}} \vdash (\varphi_0)^{\bar{x}}_{\bar{t}}}$$

I) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$, $x \notin FV(\Gamma)$

для любого x работает формула φ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ формула φ работает всегда $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ записывает то же самое без квантора

II) $$\frac{\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, (\varphi)^{x}_{t} \vdash \psi}}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \psi}$$

III) $$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi)^{x}_{t}}}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}$$

IV) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \psi}$, $x \notin FV(\Gamma, \psi)$

$$* \quad \varphi \vdash \varphi$$

$$\text{III} \quad (\varphi)^x_t \vdash (\varphi)^x_t \quad \text{III}$$

$$\text{II} \quad (\varphi)^x_t \vdash \exists x \varphi \quad \text{II}$$

$$\forall x \varphi \vdash \exists x \varphi$$

$$\varphi \vdash \varphi$$

$$\varphi \vdash (\varphi)^x_x$$

$$\text{II} \quad (\varphi)^y_y \vdash (\varphi)^x_x \quad \text{II}$$

$$\text{III} \quad \forall y \varphi \vdash (\varphi)^x_x \quad \text{III}$$

$$\text{I} \quad \forall y \varphi \vdash \exists x \varphi \quad \text{I}$$

$$\text{IV} \quad \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi$$

$$\exists x \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi$$

$$\varphi \vdash \varphi \quad \text{I}$$

$$\varphi \vdash \forall y \varphi$$

$$\exists x \varphi \vdash \forall y \varphi \quad \text{IV}$$

$$(\exists x \varphi)^y_y \vdash (\forall y \varphi)^x_x \quad \text{III}$$

$$(\exists x \varphi)^y_y \vdash \exists x \forall y \varphi \quad \text{II}$$

$$\forall y \exists x \varphi \vdash \exists x \forall y \varphi$$