# Введение в алгебру и анализ

Анна Сергеевна

Б. П. Демидович «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» (2005 год издания)

## Метод мат. индукции:

Утверждение справедливо $\forall n \in \mathbb{N}$, если:

1) (база индукции) Утверждение справедливо для $n = 1$
2) (индукц. переход) Из предположения, что утверждение справедливо для $n = k$ $\Rightarrow$ что утв. справ. для $n = k+1$

---

$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = ?$

$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

$n = 1: \quad 1 = 1$

$n = 2: \quad 1 + 2 = 3$

$n = 3: \quad 1 + 2 + 4 = 7$

предположение

$n = k: \quad 1 + 2 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1$

$\Downarrow$

$n = k+1: \quad (1 + 2 + \ldots + 2^{k-1}) + 2^k = (2^k - 1) + 2^k = 2^{k+1} - 1$

---

① Метод Гаусса: $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\frac{\begin{array}{l} 1 + 2 + \ldots + n \\ n + (n-1) + \ldots + 1 \end{array}}{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}$$

② $1 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$n = 1: \quad \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$ ✓

$\left( n = 2: \quad \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} = 5 \right.$ ✓ $\left. \right)$

$n = k: \quad 1 + 2^2 + \ldots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$n = k+1: \quad (1 + 2^2 + \ldots + k^2) + (k+1)^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \dfrac{6(k+1)^2}{6} =$

$= \dfrac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Бином Ньютона

(3) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n-k+1}$

$n=1: \quad (a+b)^1 = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0 =$

$= 1 \cdot 1 \cdot b + 1 \cdot a \cdot 1 = b + a$

$n+1: \quad (a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) =$

$\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}\right)(a+b) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k}}_{k+1=l} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1} =$

$= \sum_{l=1}^{n} C_n^{l-1} a^l b^{n-(l-1)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} =$

$= \underset{1}{C_n^n} a^{n+1} \underset{1}{b^0} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) a^k b^{n-k+1} + C_n^0 a^0 b^{n+1} =$

$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}\right) a^k b^{n-k+1} =$

$= a^{n+1} + b^{n+1}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} A_k + \sum_{k=0}^{n} B_k = \sum_{k=1}^{n} A_k + A_{n+1} + B_0 + \sum_{k=1}^{n} B_k =$$

$$= A_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (A_k + B_k) + B_0$$

---

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = A_0 + A_1 + \ldots + A_n$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

---

④ a) $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$n = 2$: $\frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2^{2-1}}$ ✓ $\left(\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\right)$

$\left(n = 3: \frac{1}{3!} \leq \frac{1}{2^{3-1}} \quad ✓ \quad \left(\frac{1}{6} \leq \frac{1}{4}\right)\right)$

Предположение:

$n = k$: $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$

При $n = k+1$: надо показать $\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{2^k}$

т.к. $k+1 > 2$

$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{2}$ ✓

$$\frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!\,(k+1)} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{1}{k+1} \overset{\text{т.к.}}{\leq} \frac{1}{2 \cdot 2^{k-1}}$$

б) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n} < 2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$

$n=2$: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} < 2$ ✓

$\left(\frac{7}{4} < \frac{8}{4}\right)$

При $n=k$: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^k} < 2$

Покажем, что вып. при

$n=k+1$: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}} < 2$

$$1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^k}\right) < 1+\frac{1}{2}\cdot 2=2$$

в) $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$

(неравенство числа e)

ДЗ:

4в – нер. ч. e

Д6 – нер. Бернулли

Д7

---

Тема: Последовательности и их пределы

1°. Если любому натуральному числу $n$ поставлено в соответствие вещественное число $a_n$, то говорят, что задана числовая последовательность $\{a_n\}$.

• Каждое вещественное число $a_n$ называется элементом последовательности $\{a_n\}$, а натуральное $n$ – номером элемента $a_n$.

б) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$n = 2: \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 2$ ✓

$\left(\frac{7}{4} < \frac{8}{4}\right)$

При $n = k: \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k} < 2$

Покажем, что вып. при

$n = k+1: \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} < 2$

$1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) < 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$

в) $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

(неравенство числа e)

ДЗ:

48 – нер. ч. e

Д6

– нер. Бернулли

Д7

---

Тема: Последовательности и их пределы

1°. Если любому натуральному числу $n$ поставлено в соответствие вещественное число $a_n$, то говорят, что задана числовая последовательность $\{a_n\}$.

- Каждое вещественное число $a_n$ называется элементом последовательности $\{a_n\}$, а натуральное $n$ – номером элемента $a_n$.

Доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$ выполнено $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$

→ Воспользуемся биномом Ньютона $\left(a = \frac{1}{n},\ b = 1\right)$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n!}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n!}{2!\,(n-2)!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n!}{3!\,(n-3)!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n!}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{n-1}{2!\,n} + \frac{(n-1)(n-2)}{3!\,n^2} + \ldots + \frac{n!}{n!\,n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{2}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

→ С одной стороны, все слагаемые, содержащие произведение скобок вида $\left(1-\frac{1}{k}\right)$ положительны, значит, отбросив их, получим оценку снизу:

$$2 < \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

→ С другой стороны, каждое $\left(1-\frac{1}{k}\right) < 1$, тогда

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \underset{\substack{no\\4a}}{\leq} 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \underset{\substack{no\\4b}}{<} 3$$

2 тд.

3, 6, 7,
8, 9, доп

3. $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1+2+\ldots+n)^2$

$n=3$: $1^3+2^3+3^3 = (1+2+3)^2 (36=36)$ и

Предположение:

При $n=k$: $1^3+2^3+\ldots+k^3 = (1+2+\ldots+k)^2$

При $n=k+1$:

$(1^3+2^3+\ldots+k^3)+(k+1)^3 =$

$= (1+2+\ldots+k)^2 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 +$

$+ (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} =$

$= \frac{(k+1)^2(k^2+4(k+1))}{4} =$

$= \frac{(k+1)^2(k^2+2\cdot 2\cdot k+2^2)}{4} =$

$= \frac{(k+1)^2(k+1)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right)^2 =$

$= (1+2+\ldots+(k+1))^2$

7.

6. $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\ldots+x_n$

$n=3$: $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) = (1+x_2+x_1+$

$+x_1x_2)(1+x_3) = 1+x_3+x_2+x_2x_3+$

$+x_1+x_1x_3+x_1x_2+x_1x_2x_3 =$

$= (1+x_1+x_2+x_3)+x_1x_2+x_2x_3+$

$+x_1x_3+x_1x_2x_3 \geqslant (1+x_1+x_2+x_3)$

Предположение

При $n = k$: $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k) \geqslant$
$\geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k$

При $n = k+1$: $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k)(1+x_{k+1}) =$

$= (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k)(1 + x_{k+1}) =$

$= (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k) + (x_{k+1} + x_1 x_{k+1} +$

$+ x_2 x_{k+1} + \ldots + x_k x_{k+1}) =$

$= (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}) +$

$+ (x_1 x_{k+1} + x_2 x_{k+1} + \ldots + x_k x_{k+1}) \geqslant$

$\geqslant (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1})$

7. $(1+x)^n \geqslant 1 + nx \quad (n > 1)$

8. Доказать неравенство

$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 1$

$n = 2$: $2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2$ V

Предположение:

При $n = k$: $k! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k$

При $n = k+1$: $(k+1)! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k (k+1) =$

$$= \frac{(k+1)^k}{2^k} \cdot \frac{2^k (k+1)}{2^k} = \frac{(k+1)^{k+1}}{2^k} = 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}$$

т.к. $\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2$ для $(k = 1, 2, \dots)$,

то $(k+1)! < \left(\frac{(k+1)+1}{2}\right)^{k+1}$;

10 • Д-ть неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$n=1$: $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ✓

Предположение

$n=k$: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$

нужно показать $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$

При $n=k+1$: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2(k+1)-1}{2(k+1)} =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} =$

$= \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+1}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}$;

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}};$$

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{\sqrt{2k+3}}{2k+3};$$

$\sqrt{2k+1}\,(2k+3) < \sqrt{2k+3}\,(2k+2)$;

$(2k+1)(2k+3) < \sqrt{4k^2+8k+3}\,(2k+2)$;

$= 4k^2+8k+9 < 4k^2+8k+4 =$

$= (2k+2)^2$

$(2k+1)(2k+3) < (2k+2)(2k+2)$;

$(2k+1)(2k+3) < (2k+2)^2$;

$4k^2+8k+3 < 4x^2+8x+4$

$3<4$

9. Д-ть неравенство:

$$2!\cdot 4! \dots (2n)! > ((n+1)!)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n>1$$

$n=2$: $2!\cdot 4! = 48 > ((2+1)!)^2 = 36$ ✓

Предположение:

$n=k$: $2!\cdot 4! \dots (2k)! > ((k+1)!)^k$

При $n=k+1$ нужно показать $2!\cdot 4! \dots (2(k+1))! >$

$$> (\underbrace{((k+1)+1)!}_{(k+2)!})^{k+1}:$$

$$2!\cdot 4! \dots (2k+2)! > ((k+1)!\,(k+2))^{k+1} \qquad (k+1)!\,(k+2)$$

$$2!\cdot 4! \dots (2k+2)! > ((k+1)!)^{k+1}(k+2)(k+3)\dots(2k+2);$$

$$2!\cdot 4! \dots (2k+2)! > ((k+1)!)^{k+1}(k+2)^{k+1};$$

$$2!\cdot 4! \dots (2k+2)! > ((k+1)!\,(k+2))^{k+1};$$

$$2!\cdot 4! \dots (2k+2)! > ((k+2)!)^{k+1}$$

10. а)

Д-ть неравенство:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n},$$

$\forall n\in N,\ n\geq 2$

$n=2$: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$ ✓

Предположение:

$n=k$: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$;

При $n=k+1$ нужно показать $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$;

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

(т.к. $\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}\cancel{+1}>k\cancel{+1}$;
$\cancel{\sqrt{k}}\cdot\sqrt{k+1}>\cancel{\sqrt{k}}\cdot\sqrt{k}$;
$\sqrt{k+1}>\sqrt{k}$)

г) Д-ть неравенство:

$(2n)!<2^{2n}(n!)^3$, $\forall n\in N$

$n=3$: $(2\cdot 3)!=720<2^{2\cdot 3}(3!)^3=13824$ ✓