Повторение

6.3 Являются ли системы векторов лин. незав.:

а) $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (3, 6, 7)$

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0$$

$$\begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}}_{\text{тривиальная система уравнений}} = 0$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow$ система из a_1 и a_2 линейно независимая

б) $a_1 = (4, -2, 6)$, $a_2 = (6, -3, 9)$

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0$$

$$\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ \cancel{0} & \cancel{0} \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}}_{\text{нетривиальная система уравнений}} = 0 \qquad 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$$

↳ (т.к. коэффициенты могут быть не нулевые, при этом система имеет решение)

Система из a_1 и a_2 линейно зависимая

6.12 Найти какой-нибудь базис системы векторов и выразить через этот базис остальные векторы системы:

3) $a_1 = (2, 1, -3)$, $a_2 = (3, 1, -5)$,
$a_3 = (4, 2, -1)$, $a_4 = (1, 0, -7)$

[Если лин. $\det A = 0$, то система векторов зависима, если же $\det A \neq 0$, то система векторов лин. независима.

$$A = \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = (-1)^3 \cdot (1 \cdot 5 - (-2) \cdot 0) = -5$$

$\det A \neq 0 \Rightarrow (a_1, a_2, a_3)$ – лин. незав. с.в.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & -1 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 9 & 12 & 3 \\ 6 & 6 & 12 & 0 \\ 6 & 10 & 2 & 14 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -10 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -10 & 11 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -1$

$a_4 = 1a_1 + 1a_2 - 1a_3$

$a'_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4) $a_1 = (2, 1), \quad a_2 = (3, 2), \quad a_3 = (1, 1), \quad a_4 = (2, 3)$

$a_1 \quad a_2$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det A = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$

$\det A \neq 0 \Rightarrow (a_1, a_2)$ – лин. незав. система векторов

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$a_3 = a_1 - a_2 \ ; \quad a'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$a_4 = 4a_2 - 5a_1 \ ; \quad a'_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

34.11 Доказать, что каждая из двух заданных систем векторов S и S' является базисом. Найти матрицу перехода от S к S':

а) $S = ((1,2,1), (2,3,3), (3,8,2))$,

$S' = ((3,5,8), (5,14,13), (1,9,2))$

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix}3\\8\\2\end{pmatrix}$$

$$e_1' = \begin{pmatrix}3\\5\\8\end{pmatrix}, \quad e_2' = \begin{pmatrix}5\\14\\13\end{pmatrix}, \quad e_3' = \begin{pmatrix}1\\9\\2\end{pmatrix}$$

Допустим, мы уже доказали, что S и S' — базисы. Тогда:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&3\\2&3&8&5\\1&3&2&8\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}2&4&6&6\\2&3&8&5\\2&6&4&16\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-2&1\\2&3&8&5\\0&2&-2&10\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-2&1\\2&3&8&5\\0&1&0&9\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-2&1\\2&2&10&4\\0&1&0&9\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-2&1\\1&1&5&2\\0&1&0&9\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}0&0&-2&-8\\1&0&5&-7\\0&1&0&9\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&-4\\1&0&0&-27\\0&1&0&9\end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix}-27&\dots&\dots\\9&20&\dots\\4&12&\dots\end{pmatrix}$$

матрица перехода

39.1 Какие из следующих отображений в соответствующих векторных пространствах являются линейными операторами:

а) $x \mapsto a$ (a – фиксированный вектор)

$\mathcal{A}(x+y) = a$

$\neq$ свойство $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$

$\mathcal{A}x + \mathcal{A}y = a + a$

не выполняется ⇒
⇒ векторное пространство не является линейным оператором

б) Для $x \mapsto x+a$ аналогично

в) $x \mapsto \alpha x$ (α – фиксированный скаляр)

$\mathcal{A}(x+y) = \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ ✓

$\mathcal{A}x + \mathcal{A}y = \alpha x + \alpha y$

Свойства линейного оператора:
① $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$
② $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}x$

$\mathcal{A}(\lambda x) = \alpha(\lambda x)$ ✓

$\lambda \mathcal{A}x = \lambda(\alpha x)$

18.9

д) Найти обратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = (-1)^2 \cdot 3 \cdot (3+5) + (-1)^3 \cdot 2 \cdot (4+25) + (-1)^4 \cdot 3 \cdot (-4+15) = 24 - 58 + 33 = -1$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^2 = 8$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^3 = 5$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^4 = -1$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^3 = -29$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^4 = -18$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^5 = 3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^4 = 11$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^5 = 7$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^6 = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{\vee} \rightarrow$$ транспонированная матрица из алгебраического дополнения

обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

и) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det A = (-1)^2 \cdot 2 \cdot (9 \cdot 3 - 5 \cdot 4) +$$
$$+ (-1)^3 \cdot 3 \cdot (7 \cdot 3 - 5 \cdot 3) +$$
$$+ (-1)^4 \cdot (1) \cdot (7 \cdot 4 - 9 \cdot 3) = 14 - 18 + 1 =$$
$$= -3$$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} (-1)^2 = 7$

$A_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} (-1)^3 = -5$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} (-1)^4 = 6$

$A_{21} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} (-1)^3 = -6$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} (-1)^4 = 3$

$A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} (-1)^5 = -3$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} (-1)^4 = 1$

$A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} (-1)^5 =$
$= 1$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} (-1)^6 =$
$= -3$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\vee} =$$
$$= \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{-3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти ж.ф. и ж.б.:

① $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ищем λ из $\det(A-\lambda E)=0$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1)^8 \cdot$$

$$\cdot (1-\lambda)(-1)^6 \cdot \left((-\lambda)\cdot(2-\lambda)+1\right) =$$

$$= (1-\lambda)^2 (\lambda-1)^2 = (1-\lambda)^4$$

← макс. степень при λ

Нашли: $\lambda = 1$, $k_{\text{алг.к.}} = 4$;

$$(A-\lambda E) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(A-\lambda E) = 1$$

Ищем $\operatorname{rank}(A-\lambda E)$ ↑

Ищем r: $r_{\text{геом.к.}} = n - \operatorname{rank}(A-\lambda E) = 4 - 1 = 3$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & & & \\ & \boxed{\lambda} & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$T = (v^{I};\ v^{II};\ v^{III},\ u^{III})$; v^{I}, v^{II}, v^{III} − независ. собств.

u^{III} − присоед. к v^{III}

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array}$$

<u>Ищем собственный вектор:</u>

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \end{array} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{-3c_1 = c_2 = c_3}_{\text{условие совместности}}$$

<u>Подбираем лин. независ. собст. вектора:</u>

<u>Пусть</u> $c_1 = 1$ для v^{I}; $c_2 = 1$ для v^{II}:

$$v^{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v^{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Тогда:</u>

$$v^{III} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(Все векторы линейно независимые и для них выполняется условие совместности)

<u>Теперь найдём u (присоединённый вектор):</u>

$$\begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \text{это } c_1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & b_1 & b_2 & b_3 & \end{array}$$

$$u = \begin{pmatrix} -1 + b_1 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = -c_1 + b_1 = -1 + b_1$$

Жорданова форма:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Жорданов базис:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1689 $\quad dt = t'\,dx \quad \underbrace{dx = \frac{1}{t'}\,dt}$

1689
1695
1703
1710
1712
1723
1725
1742
1744
1747
1754

$$\int x e^{-x^2}\,dx = \left\{ \begin{aligned} dt &= (x^2)'\,dx = 2x\,dx \\ dx &= \frac{1}{2x}\,dt \end{aligned} \right\} =$$

$$= \int x e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2x}\,dt = \frac{1}{2}\int e^{-x^2}\,dx^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-e^{-x^2}\right) + C = -\frac{e^{-x^2}}{2} + C$$

1695 $\quad \int \sin^5 x \cos x\,dx = \int \sin^5 x\,d\sin x =$

$$= \frac{\sin^6 x}{6} + C$$

$d\cos x = -\sin x\,dx$

1703 $\quad \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{-d(\cos x)}{1-\cos^2 x} =$

$$= -\frac{1}{2\cdot 1}\cdot \ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C = \ln\left|\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

1710
$$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d \arcsin x}{(\arcsin x)^2} =$$

$$= -\frac{1}{\arcsin x} + C$$

Указание:
$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = d\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

1712
$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx =$$

$$= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{x^2+\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C$$

1723
$$\int \frac{x^2}{1+x}\,dx = \int \frac{x^2+2x+1-2x-1}{1+x}\,dx =$$

$$= \int \frac{(1+x)^2-2x-1}{1+x}\,dx = \int (1+x)\,dx - \int\frac{2x+1}{1+x}\,dx =$$

$$= x+\frac{x^2}{2} - \int \frac{2(x+1)-1}{x+1}\,dx = x+\frac{x^2}{2} - \int 2dx +$$

$$+ \int \frac{1}{x+1}\,dx = x+\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x+1| + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$$

1725 $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1+2x+x^2}{1+x^2}\,dx =$

$= \int 1\cdot dx + \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \\ dx = \frac{1}{t'}\,dt = \\ = \frac{1}{2x}\,dt \end{array} \right\} =$

$= x + \int \frac{\cancel{2x}}{1+x^2}\left(\frac{1}{\cancel{2x}}\right)dt = x + \int \frac{1}{1+t}\,dt =$

$= x + \ln|1+x^2| + C$

1742 $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx =$

$= \int \frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx =$

$= \left\{ \begin{array}{l} t = 2x \\ dx = \frac{1}{t'}\,dt = \frac{1}{2}\,dt \end{array} \right\} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\int \cos t\,dt = \frac{x}{2} +$

$+ \sin t + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

1744 $\int \sin 3x \cdot \sin 5x\,dx = \int\left(-\frac{1}{2}\right)(\cos 8x -$

$- \cos 2x)\,dx = -\frac{1}{2}\int \cos 8x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx =$

$= -\frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

1747 $\int \sin^3 x\,dx = \int (\sin x)(\sin^2 x)\,dx =$

$= \int (1-\cos^2 x)(-d\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)\,d\cos x =$

$= -\cos x + \dfrac{\cos^3 x}{3} + C$

1754 $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx =$

$= \int \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx + \int \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx =$

$= -\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C$

$\{\ln(\varphi(x)), \operatorname{arctg} x, \arcsin x\} = u$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

1792, 1796, 1799, 1802, 1807, 1826, 1829, 1816, 1797, 1805, 1808, 1820, 1818

1792 $\int x^n \ln x\,dx =$

$= \begin{cases} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^n \\ v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases} = (\ln x)\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right) - \int \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \dfrac{1}{x}\,dx =$

$\{P(x)e^{\alpha x}, P(x)\cos\alpha x, P(x)\sin\alpha x\} \Rightarrow u = P(x)$

$= (\ln x)\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right) - \int \dfrac{x^n}{n+1}\,dx =$

$= \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \dfrac{1}{n+1}\int x^n\,dx =$

$= \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C =$

$= \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \dfrac{1}{n+1}\right) + C$

$e^{\alpha x}\cos\beta x$,
$e^{\alpha x}\sin\beta x$,
$\cos(\ln(x))$,
$\sin(\ln(x))$
$\Downarrow$
цикл

1796

$$\int x^2 e^{-2x} dx = \begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \\ dv = e^{-2x}\,dx \\ v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases} =$$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

$$\int e^{-2x} dx = \begin{cases} t = -2x \\ dx = \frac{1}{t'}dt = -\frac{1}{2}dt \end{cases} = -\frac{1}{2}\int e^{t} dt = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

$$= x^2\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\, 2x\, dx =$$

$$= \begin{cases} u = 2x \\ du = u'dx = 2dx \\ dv = e^{-2x}dx \\ v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2 \cdot e^{-2x}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(2x \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) + \frac{1}{2}\int e^{-2x} \cdot 2\,dx\right) =$$

$$= -\frac{x^2 \cdot e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\left(\cancel{2}x \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}}e^{-2x}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\right) + C =$$

$$= -\frac{x^2 \cdot e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}x\left(-e^{-2x}\right) +$$

$$+ \left(-\frac{1}{4}\right)e^{-2x} + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 e^{-2x} + xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right) + C =$$

$$= -\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + C$$

1799 $$\int x^2 \sin 2x\, dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2 \\ du = u'dx = 2x\,dx \\ dv = \sin 2x\, dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix}\right\} =$$

$$\int \sin 2x\, dx = \left\{\begin{matrix} t = 2x \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int \sin t\, dt = \frac{1}{2}\cdot(-\cos 2x) + C$$

$$= x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x + \frac{1}{2}\int (\cos 2x)\, 2x\, dx =$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right) x^2 \cos 2x}_{\cdots} + \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)}2 \int (\cos 2x)\, x\, dx =$$

$$\int \cos 2x\, dx = \left\{\begin{matrix} t = 2x \\ dx = \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}dt \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int \cos t\, dt = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x \\ du = dx \\ dv = \cos 2x\, dx \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix}\right\} = \cdots + \underbrace{x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)}_{\circ\circ\circ} -$$

$$-\frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx = \cdots + \circ\circ\circ + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos 2x + C =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos 2x + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-x^2\cos 2x + x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \left(\frac{1}{2} - x^2\right)\cos 2x\right) + C$$

1802

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = \left\{\begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x \\ du = u'dx = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx \\ v = x \end{matrix}\right\} = \underbrace{x \cdot \operatorname{arctg} x}_{\cdots} -$$

$$-\int x \frac{1}{1+x^2}dx = \left\{\begin{matrix} t = 1+x^2 \\ dx = \frac{1}{t'}dt = \frac{1}{2x}dt \end{matrix}\right\} = \cdots - \frac{1}{2}\int \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1+x^2)}dt =$$

$$= \cdots - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

1807 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \\ du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ dv = dx \\ v = x \end{array}\right\} =$

$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$

$= \underbrace{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}_{\dots} - \int x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx =$

$= \left\{\begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dx = \frac{1}{t'}dt = \frac{1}{2x}dt \end{array}\right\} = \dots - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x}\frac{1}{\sqrt{t}}dt =$

$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2t^{\frac{1}{2}}}{1} + C =$

$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$

1826 $\underbrace{\int \sin(\ln(x))\,dx}_{A} = \left\{\begin{array}{l} u = \sin(\ln x) \\ du = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ dv = dx \\ v = x \end{array}\right\} =$

$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$

$= x\sin(\ln x) - \int \frac{x}{x}\cos(\ln x)\,dx =$

$= \underbrace{x\sin(\ln x)}_{\dots} - \int\cos(\ln x)\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = \cos(\ln x) \\ du = \frac{-\sin(\ln x)}{x}dx \\ dv = dx \\ v = x \end{array}\right\} =$

$= \dots - \left(x\cos(\ln x) - \int \frac{x}{x}(-\sin(\ln x))\,dx\right) =$

$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \underbrace{\int \sin(\ln x)\,dx}_{A}$

$2A = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) =$

$= \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$

1828 $\underbrace{\int e^{ax} \sin bx \, dx}_{A} = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{ax} \\ du = a e^{ax} dx \\ dv = \sin bx \, dx \\ v = -\frac{1}{b} \cos(bx) \end{array} \right\} =$

$\int \sin bx \, dx = \left\{ \begin{array}{l} t = bx \\ dx = \frac{1}{b} dt = \frac{1}{b} dt \end{array} \right\} =$

$= -\frac{1}{b} (\cos bx) + C$

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{1}{b} \int \cos(bx) \, a e^{ax} dx =$

$= \underbrace{-\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx)}_{\dots} + \frac{a}{b} \int \cos(bx) e^{ax} dx =$

$= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{ax} \\ du = a e^{ax} dx \\ dv = \cos(bx) dx \\ v = \frac{1}{b} \sin(bx) \end{array} \right\} = \dots + \frac{a}{b} \left(e^{ax} \cdot \frac{1}{b} \sin(bx) - \right.$

$\left. - \frac{1}{b} \underbrace{\int \sin(bx) \, a \, e^{ax} dx}_{A} \right) =$

$A = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin(bx) -$

$- \frac{a^2}{b^2} A + C$

$A \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) = \frac{1}{b} \left(\frac{a}{b} e^{ax} \sin bx - \right.$

$\left. - e^{ax} \cos bx \right) + C$;

$A = \frac{\frac{1}{b} \left(\frac{a}{b} e^{ax} \sin bx - e^{ax} \cos bx \right)}{1 + \frac{a^2}{b^2}} + C$

1816

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \frac{x}{(1+x^2)^2}dx \\ v = -\frac{1}{2(1+x^2)} \end{array}\right\} =$$

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dx = \frac{1}{t'}dt = \frac{1}{2x}dt \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\cancel{x}}{(1+x^2)^2\,\cancel{x}}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{2(1+x^2)} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\cdot\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{-x}{1+x^2} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arctg} x\right) + C = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}\right) + C$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

1797

$$\int x^3 e^{-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \\ dv = xe^{-x^2}dx \\ v = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \end{array}\right\} =$$

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} t = -x^2 \\ dx = -\frac{1}{2x}dt \end{array}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \cancel{x}e^t\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dt = -\frac{e^{-x^2}}{2} + C$$

$$= -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} + \frac{1}{2}\int e^{-x^2}\,2x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + C =$$

$$= -\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1) + C$$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

805 $\int x^2 \arccos x\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \\ dv = \arccos x\,dx \\ v = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} \end{array}\right\} =$

$= x^2\left(x\arccos x - \sqrt{1-x^2}\right) -$

$-2\int \left(x\arccos x - \sqrt{1-x^2}\right)x\,dx =$

$=$

$\int \arccos x\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = \arccos x \\ du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ dv = dx \\ v = x \end{array}\right\} =$

$= \underbrace{x\arccos x}_{\dots} + \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$= \left\{\begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dx = -\frac{1}{2x}\,dt \end{array}\right\} = \dots +$

$+ \left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt =$

$= x\arccos x - \frac{1}{2}\cdot\frac{2t^{\frac{1}{2}}}{1} + C =$

$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

1869
1872
1880
1876
1870
1871
1877

1869 $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx = \int \frac{x^3-5x^2+6x+5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$

$$= \int\left(1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}\right)dx = \int\left(1+\frac{5x^2-6x+1}{x(x^2-5x+6)}\right)dx =$$

$$= \int\left(1+\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}\right)dx = \int\left(1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}\right)dx$$

К общ. знаменателю:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3} = \frac{A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)}$$

$$1+\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = 1+\frac{A(x^2-5x+6)+B(x^2-3x)+C(x^2-2x)}{x(x-2)(x-3)}$$

$$5x^2-6x+1 = A(x^2-5x+6)+B(x^2-3x)+C(x^2-2x)$$

$$\begin{cases} 5 = A+B+C \\ -6 = -5A-3B-2C \\ 1 = 6A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = \frac{1}{6}+B+C \\ -6 = -\frac{5}{6}-3B-2C \\ A = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{29}{6} = B+C \\ -\frac{31}{6} = -3B-2C \\ A = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{6} \\ 2B+2C = \frac{29}{3} \\ -3B-2C = -\frac{31}{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$-B = \frac{27}{6} \Rightarrow B = -\frac{27}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{6} \\ B = -\frac{27}{6} = -\frac{9}{2} \\ C - \frac{9}{2} = \frac{29}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{6} \\ B = -\frac{9}{2} \\ C = \frac{56}{6} = \frac{28}{3} \end{cases}$$

2) Метод вычёркивания:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

$$A = \frac{5x^2-6x+1}{(x-2)(x-3)}\Bigg|_{x=0} = \frac{1}{6}$$

$$B = \frac{5x^2-6x+1}{x(x-3)}\Bigg|_{x=2} = -\frac{9}{2}$$

$$C = \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)}\Bigg|_{x=3} = \frac{28}{3}$$

$$= \int\left(1 + \frac{1}{6x} - \frac{9}{2(x-2)} + \frac{28}{3(x-3)}\right)dx =$$

$$= x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3| + C$$

1872 $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx = \int -\frac{1}{(x+1)^2}dx + \int\frac{1}{2(x+1)}dx + \int\frac{1}{2(x-1)}dx =$

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} =$$

$$A = \frac{x^2+1}{x-1}\Bigg|_{x=-1} = -1 \qquad = \frac{-1(x-1)}{(x+1)^2} + \frac{(x^2-1)B}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}(x+1)^2}{x-1}$$

$$C = \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\Bigg|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

$$x^2+1 = 1-x + (x^2-1)B + \frac{1}{2}(x+1)^2$$

$$1 = 1\cdot B + \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$= \left\{\begin{matrix} t = x+1 \\ dx = dt\end{matrix}\right\} = -\int\frac{1}{t^2}dt = (-1)(-1)\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C =$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$$