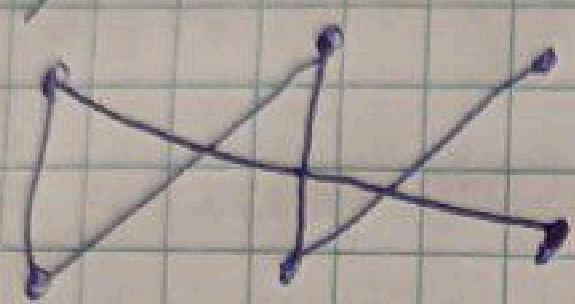
Семинар. Деревья

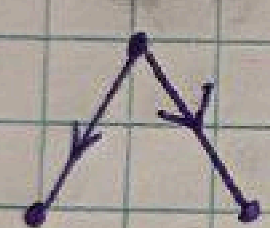
1. Дерево — неор. ацикл. связ.

Пример:



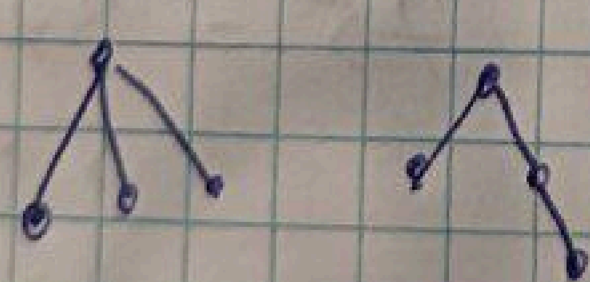
Лес — неор. ацикл.

Корневое дерево — ацикл. связ. (ориент.)

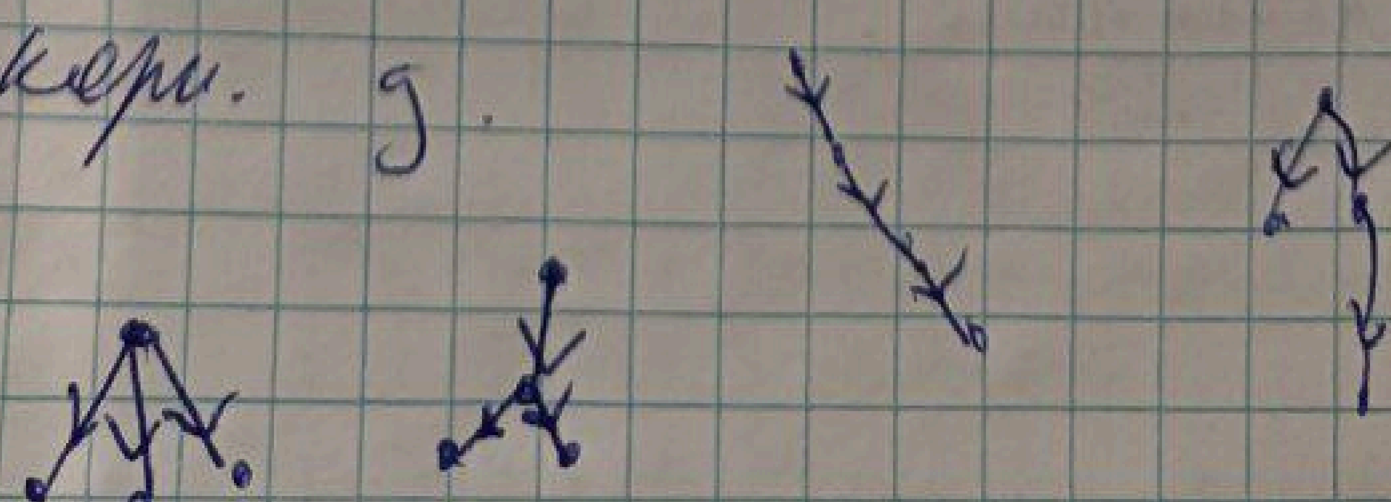


2. Описать все графы на 4 вершинах, если

а) дерево



б) корн. д.



3. $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}_{>0}$, $\sum d_i = 2n - 2$

Доказать, что существует дерево, где $d_1, \dots, d_n$ – степени

Док по мат. индукции!

База инд.:

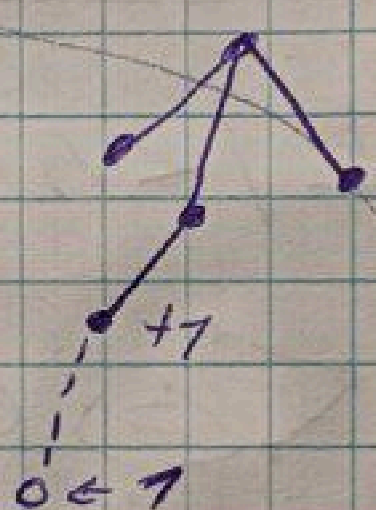
$n = 1$

$\longrightarrow 2 \cdot 1 - 2 = 0$

Шаг инд.!

$n = k$ ✓

$n = k+1$

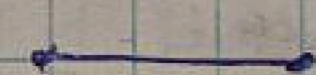


Док-во:

$n = 1$:

$d_1 = 0$

$n = 2$:



$d_1 = 1$

$d_2 = 1$

$n = 3$:

$d_1 = 1$

$d_2 = 2$

$d_3 = 1$

$d_1 + \dots d_k + d_{k+1} = 2k$

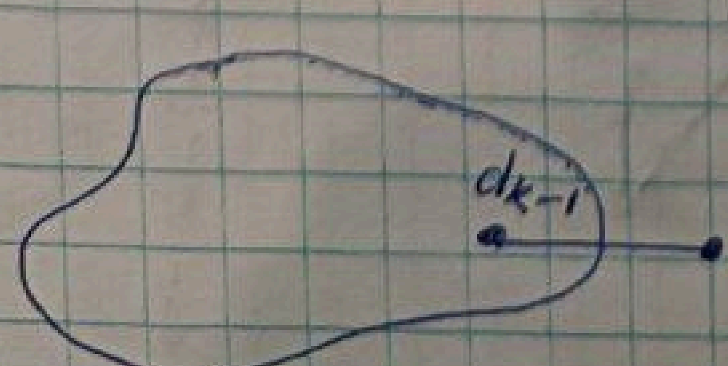
$d_1, \dots, d_k, d_{k+1}$

$d_{k+1} = 1$

$d_k \geq 2$

Тогда $d_1, \dots, d_{k-1}$, $(d_k - 1)$ и верно, что

$d_1 + \dots d_{k-1} + (d_k - 1) = 2k - 2$



Значит, дерево, где $d_1, \dots, d_n$, существует.

4. Доказать, что С. Д. Э.:

следующие условия эквивалентны

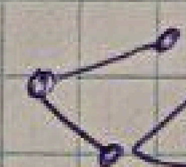
G – неор. граф, $|V| = n$

а) G – дерево

Пусть $\boxed{\text{св ацикл}} \overset{?}{\Rightarrow} \boxed{|E| = n-1}$

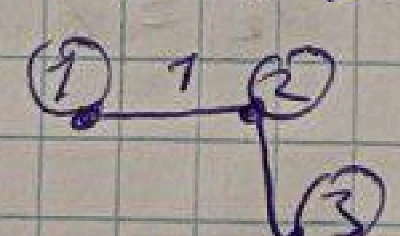
Есть два типа утверждений:
1) Простые – „Сейчас докажем!“
2) Сложные – „Очевидно, что...“

Если:
$|E| < n-1$

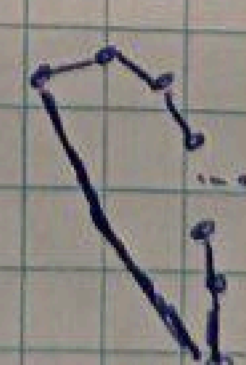
 $\Rightarrow$ в комп. связности макс $n-1$ вершин $\Rightarrow$ граф несвяз.

$\perp$

Если:
$|E| > n-1$
$|E| \geq n$



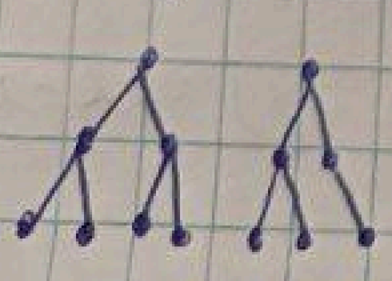
$\perp$
(противоречие с цикличностью либо



, либо

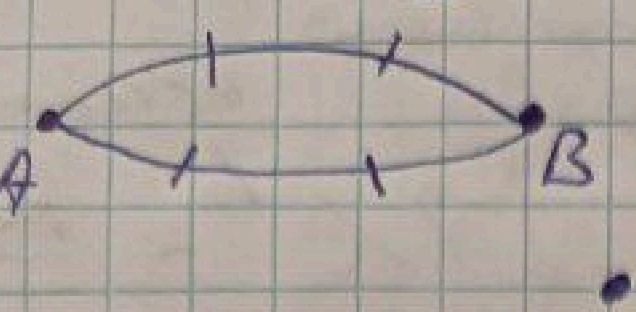
)

complete



full

б) G – связ и $|E| = n-1$



получится лес, а не дерево, если в графе будет цикл

---

n-арное дерево:
(подразумевается, что оно корневое)

$\forall v \in V \quad |child(v)| < n$

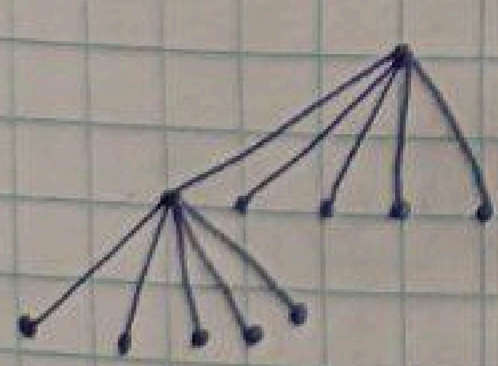
полное дерево:
(full)

$\forall v \in in\_V \quad |child(v)| = n$

внутренние вершины

---

5. Сколько вершин у полного 5-арного дерева с 100 внутр. верш.?



n-арн. граф с v верш. и i внутр. верш.

$v = 1 + n \cdot i$

$v = 1 + 5 \cdot 100 = 501$

7. $v = 1 + 3 \cdot i = 100 \Rightarrow i = 33 \Rightarrow 33$ внутр. верш.

$i = 67$

6.

$v = 1 + 2 \cdot 1000 = 2001 \Rightarrow$ дуг 2000

8. Сколько вершин, рёбер у полного совершенного k-арного дерева высоты h?

Вершины: $1+k+\ldots+k^h = \frac{k^{h+1}-1}{k-1}$

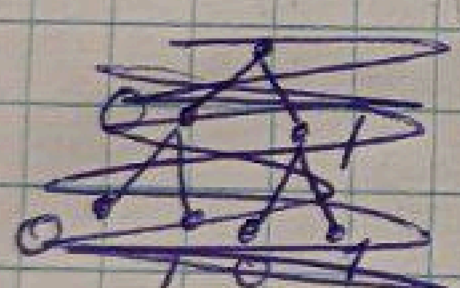
$k^{h+1} = (k-1)(1+\ldots+k^h)$

↑ ФСУ

Коды Хаффмана

↳ нужны, чтобы не передавать избыточную информацию

1. Префиксный код



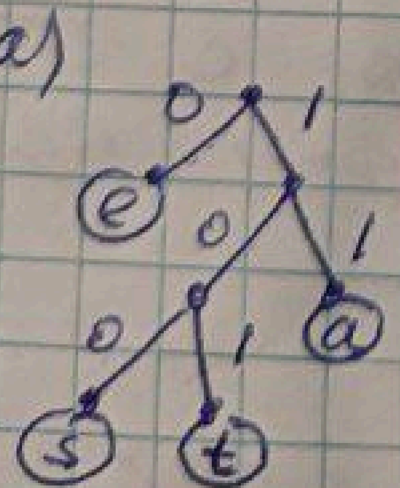
a	e	t	s
11	00	10	01

2.

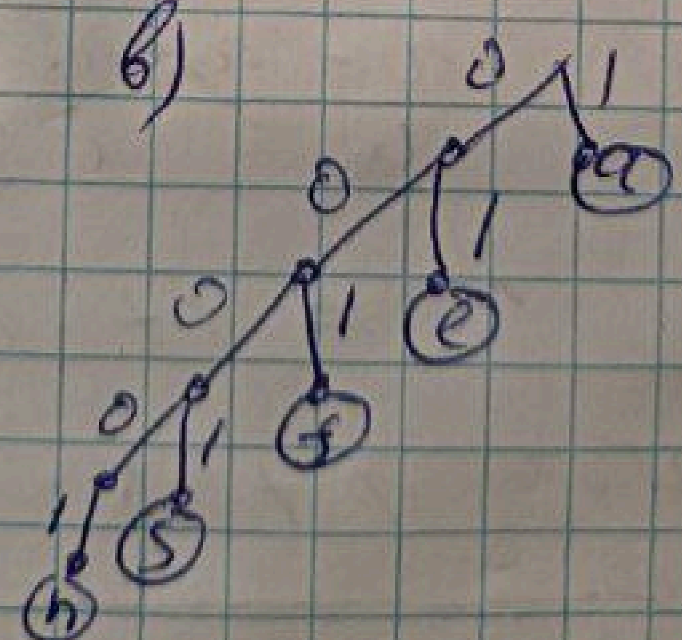
a	e	t	s
11	0	101	100

Дерево-декодер

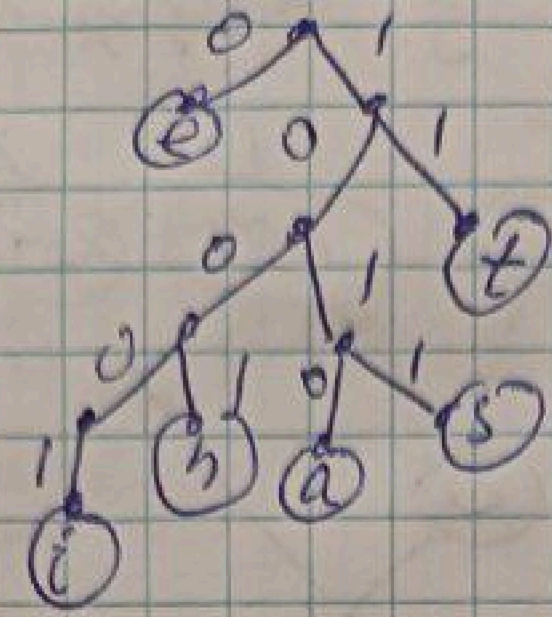
а)



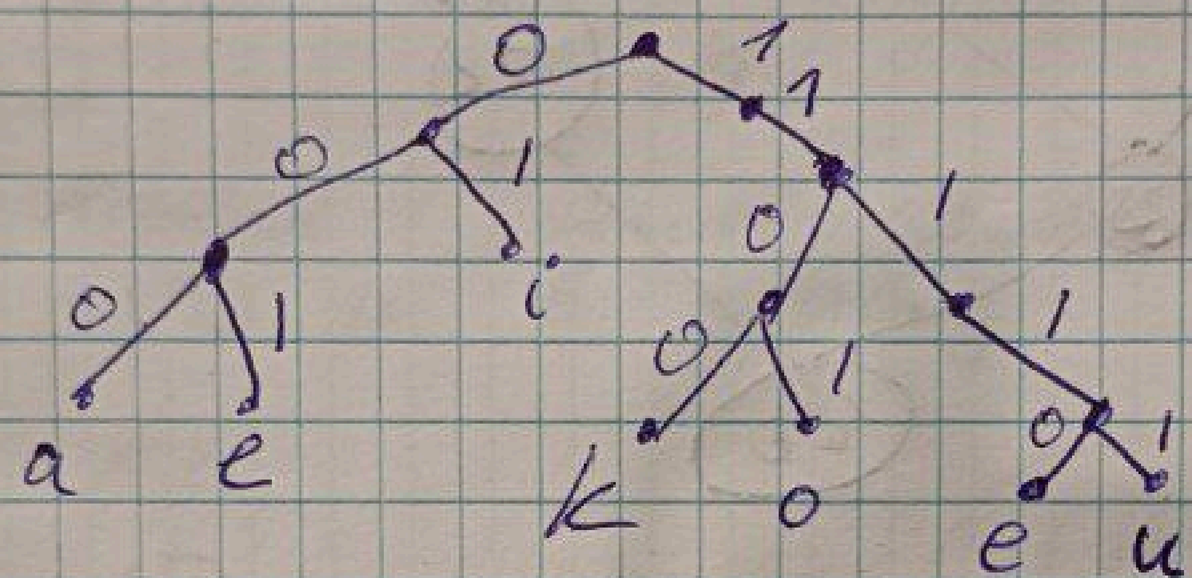
в)



c)



3. Постр. код



a	e	i	k	o	e	u
000	001	01	1100	1101	1110	11111

4. Декод. сообщ.

a	b	e	r	s	t	x
001	0001	1	0000	0100	011	01010

a) $\underbrace{011}_{t}\underbrace{1}_{e}\underbrace{0100}_{s}\underbrace{011}_{t}$

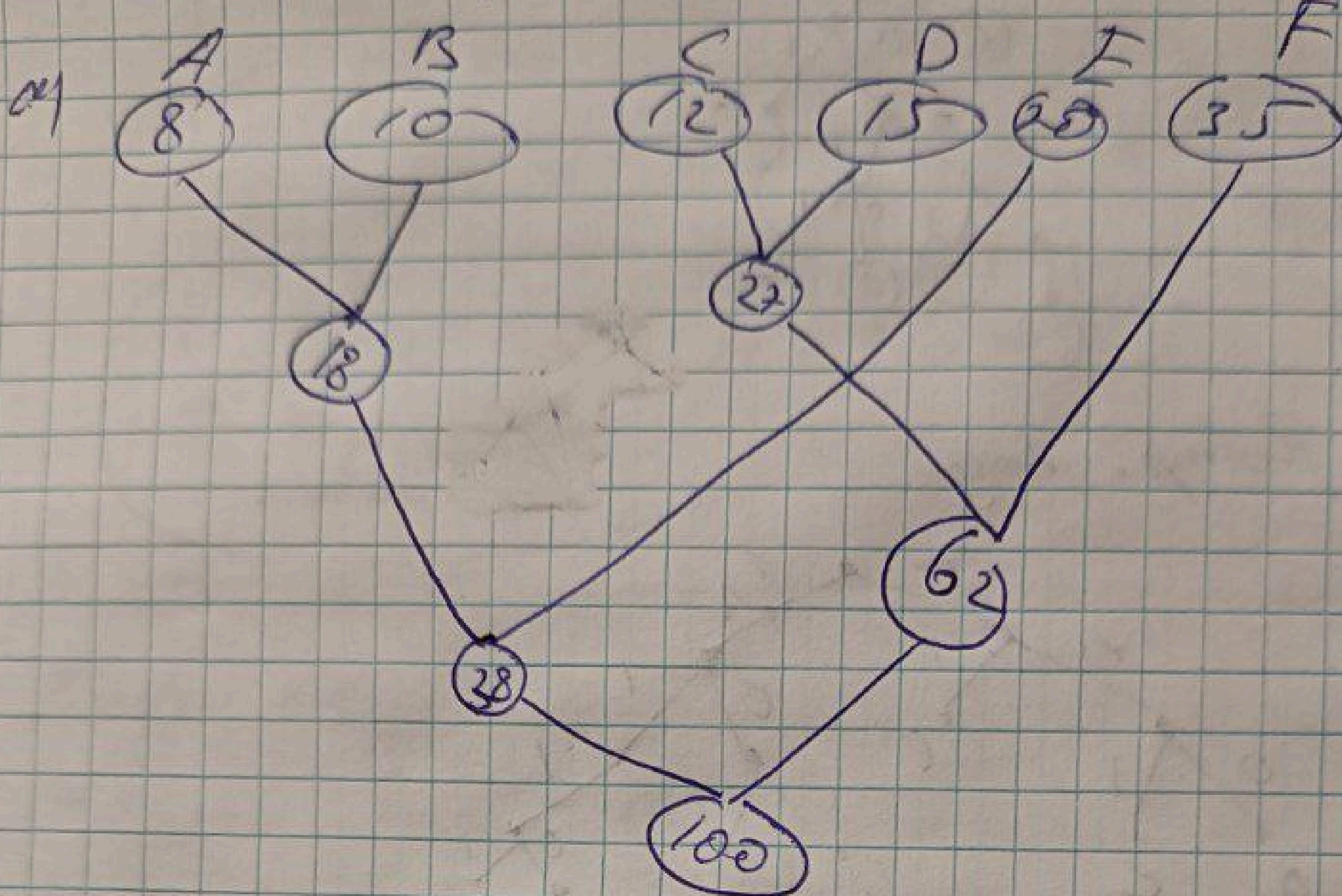
b) $\underbrace{0000}_{r}\underbrace{1}_{e}\underbrace{0100}_{s}\underbrace{011}_{t}$

c) $\underbrace{0001}_{b}\underbrace{1}_{e}\underbrace{1}_{e}\underbrace{0000}_{r}$

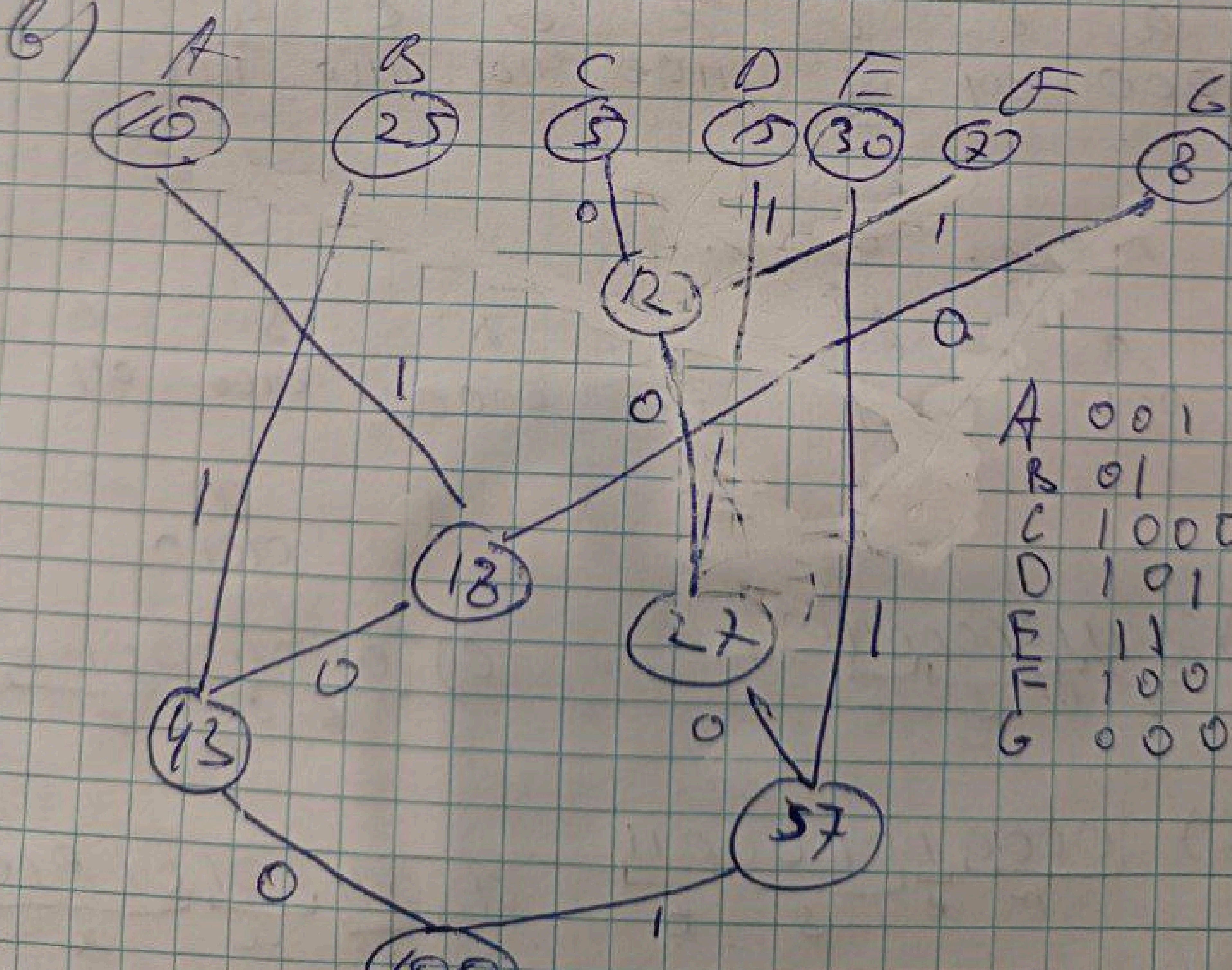
d) $\underbrace{011}_{t}\underbrace{001}_{a}\underbrace{01010}_{x}$

5. Постр. код Хаффмана

а)



б)

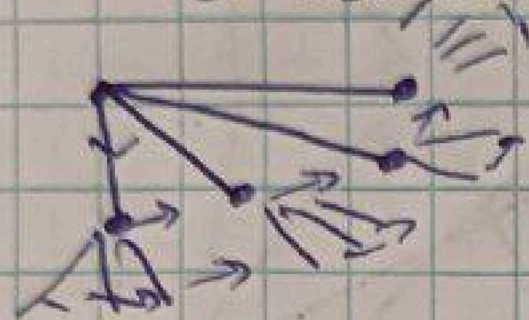


A	001
B	01
C	1000
D	101
E	11
F	1001
G	000

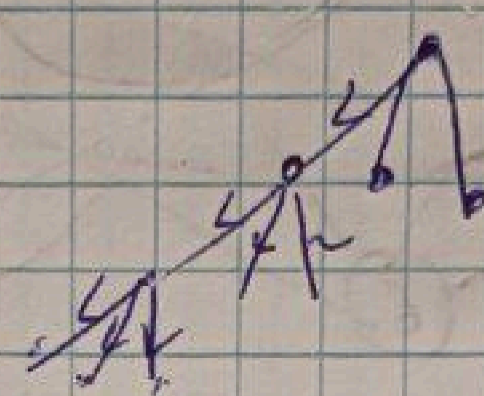
Остовные графы

↳ через поиск в глубину
↳ через поиск в ширину

В ширину:

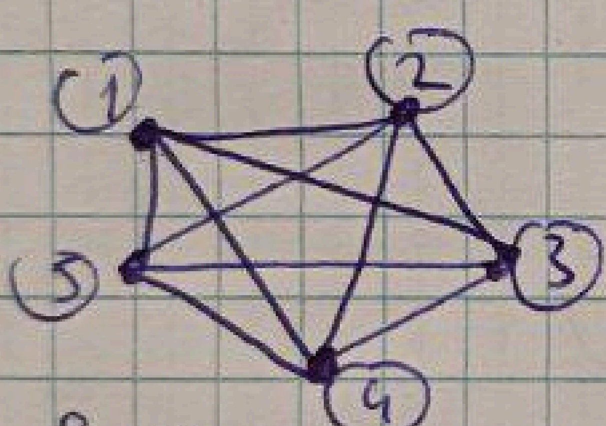


В глубину:

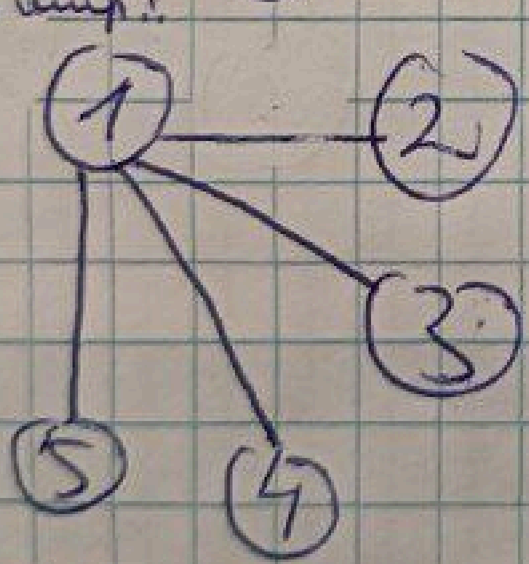


6. Найти остов поиском в глубину и в ширину.

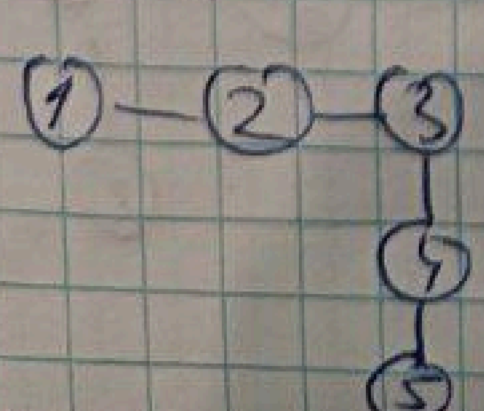
а) K_5

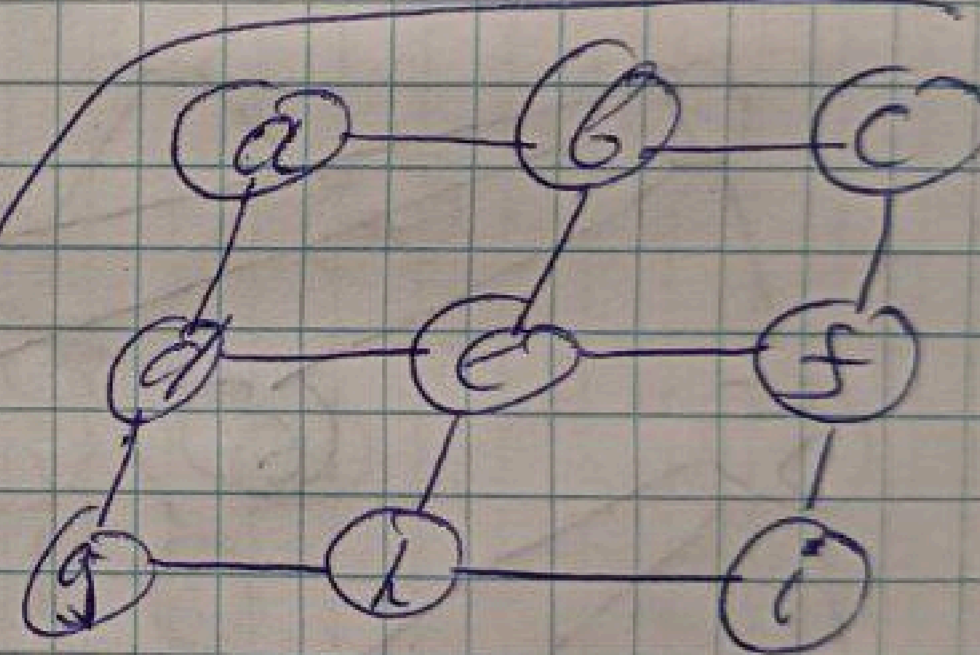


В шир.:

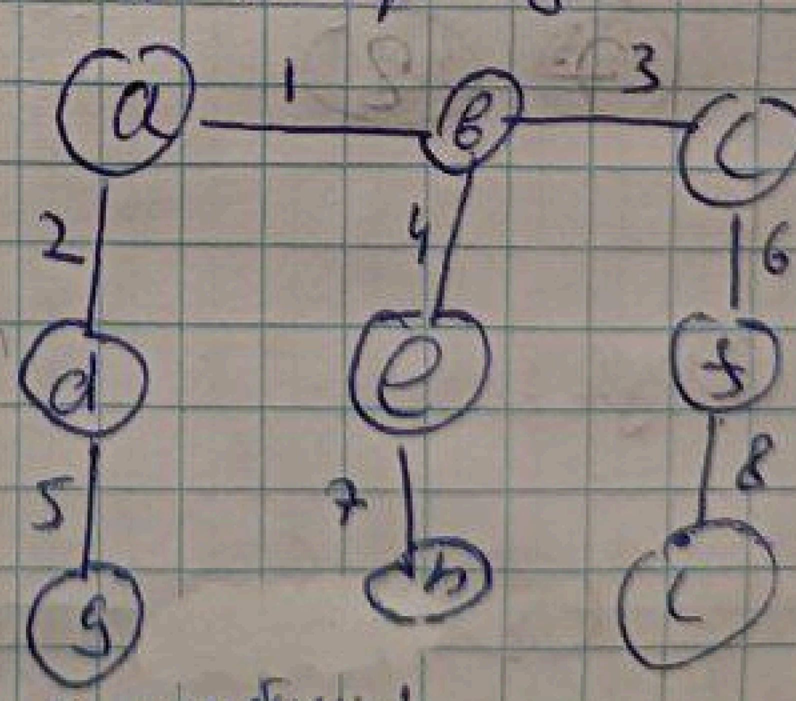


В глуб.:

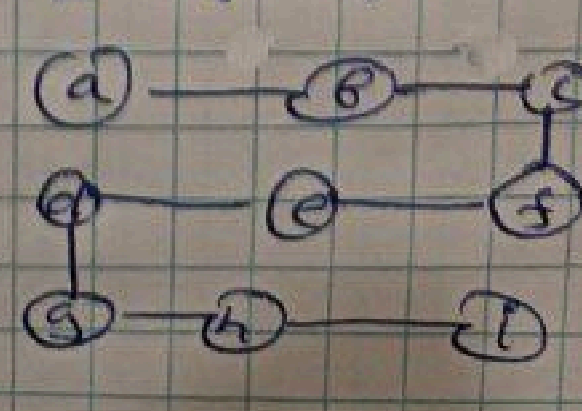




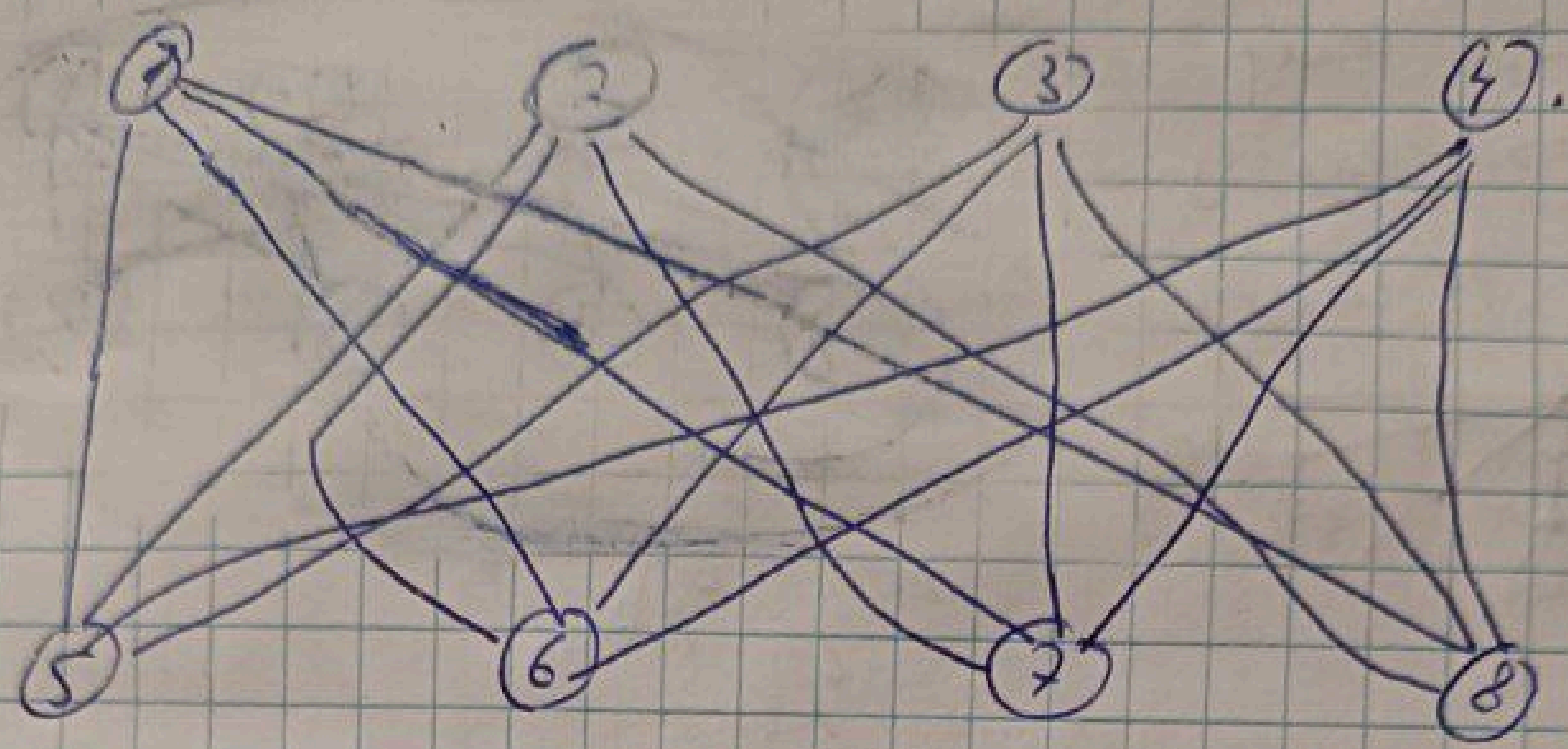
В ширину:



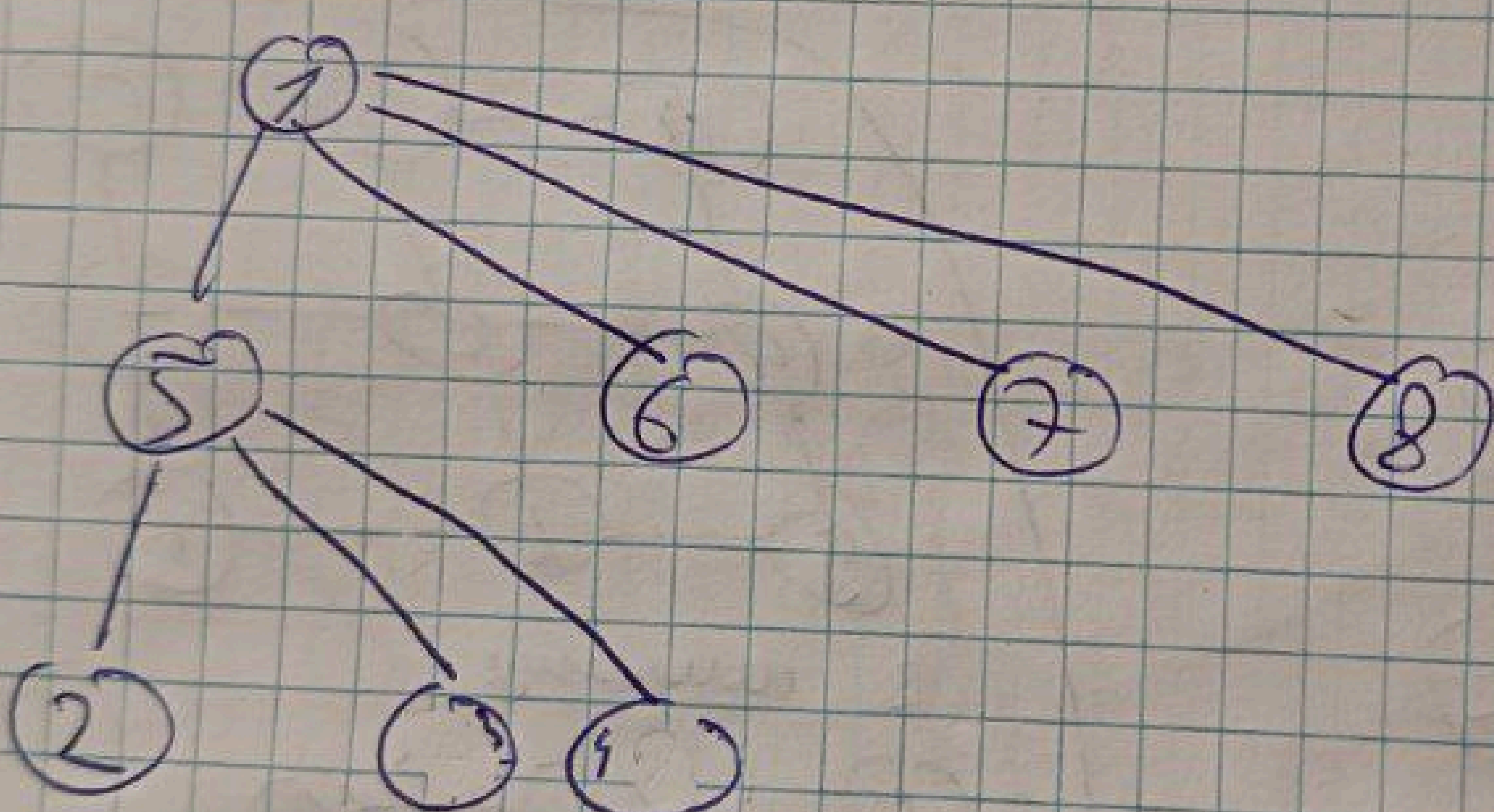
В глубину:



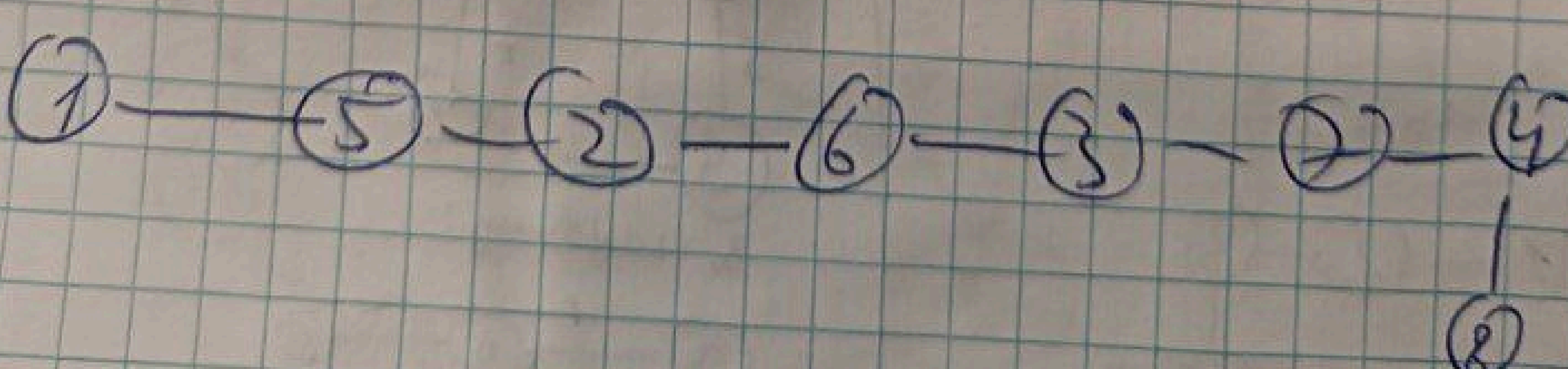
в) $K_{4,4}$



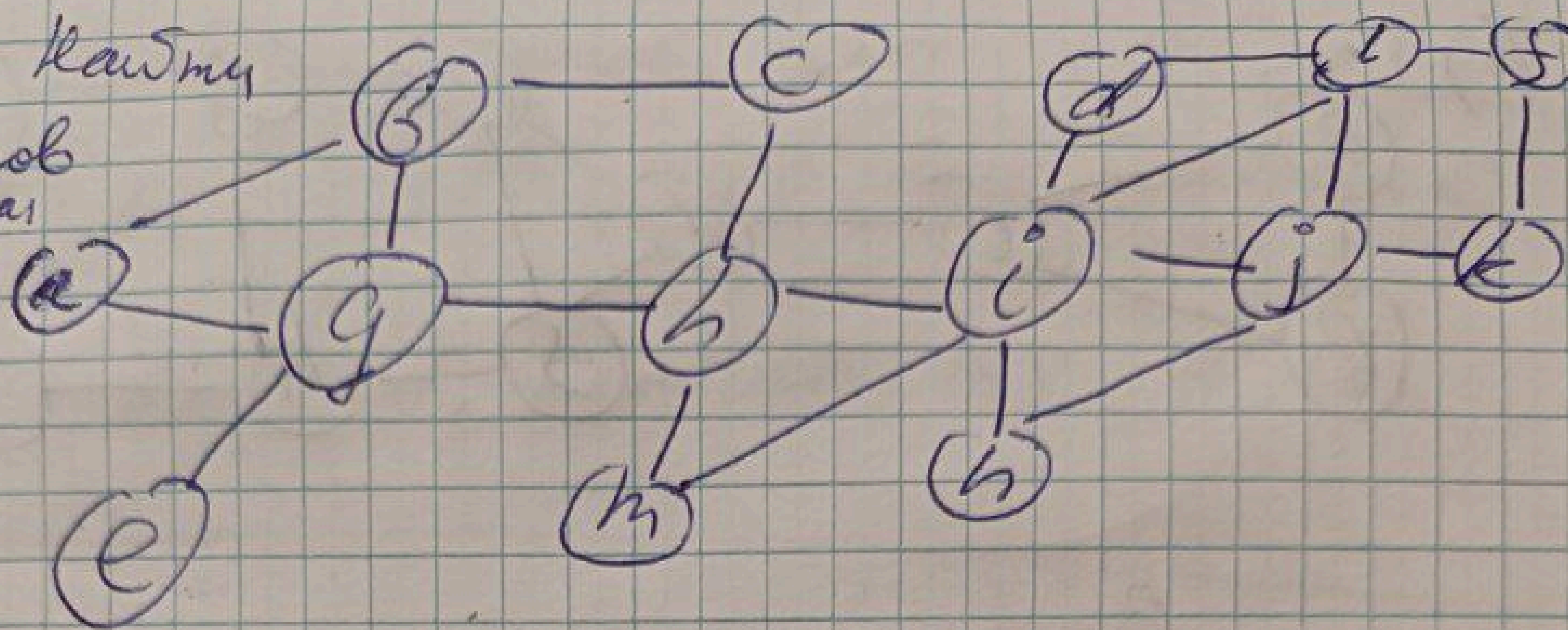
В шир.!



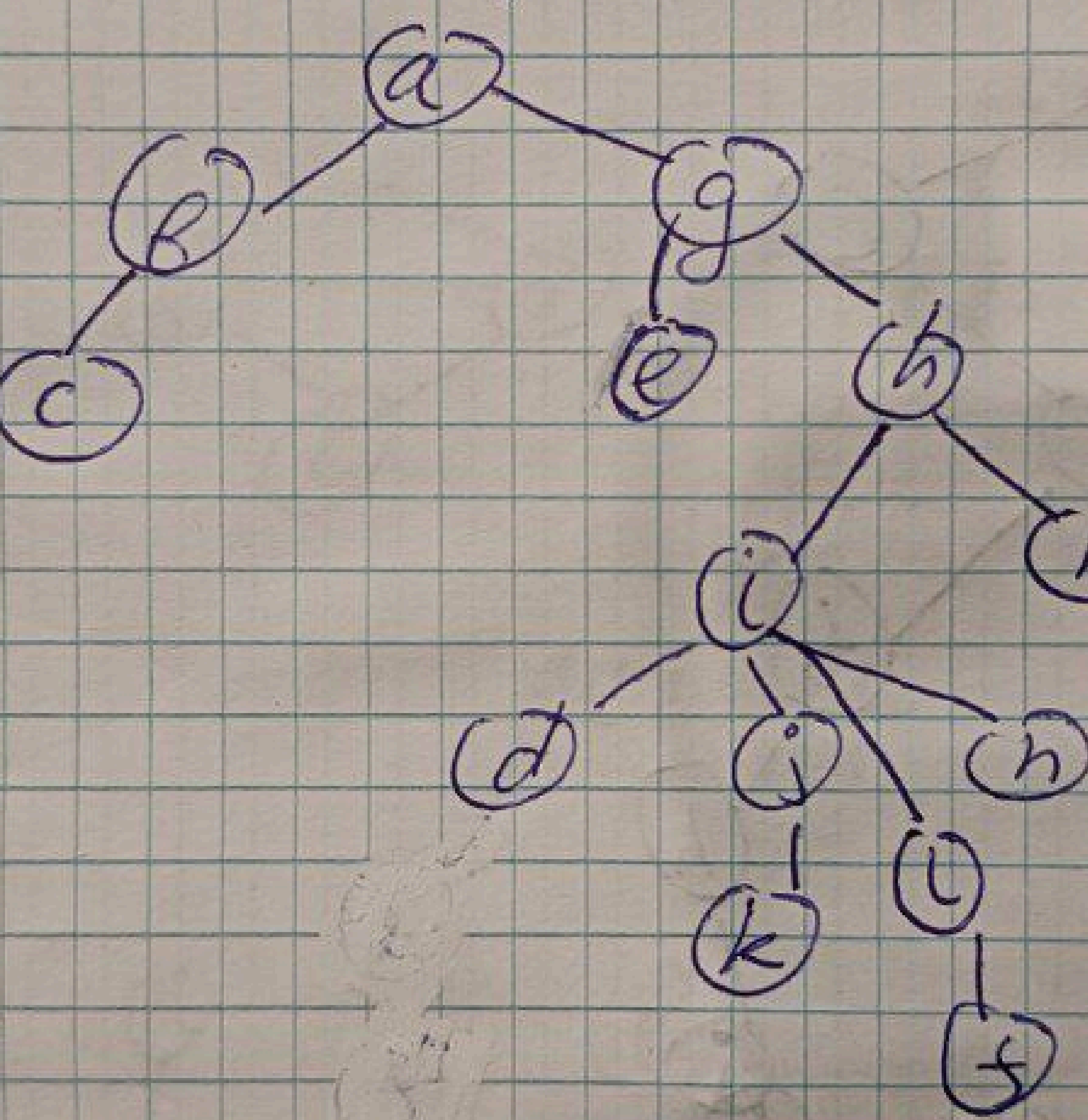
В глуб.:



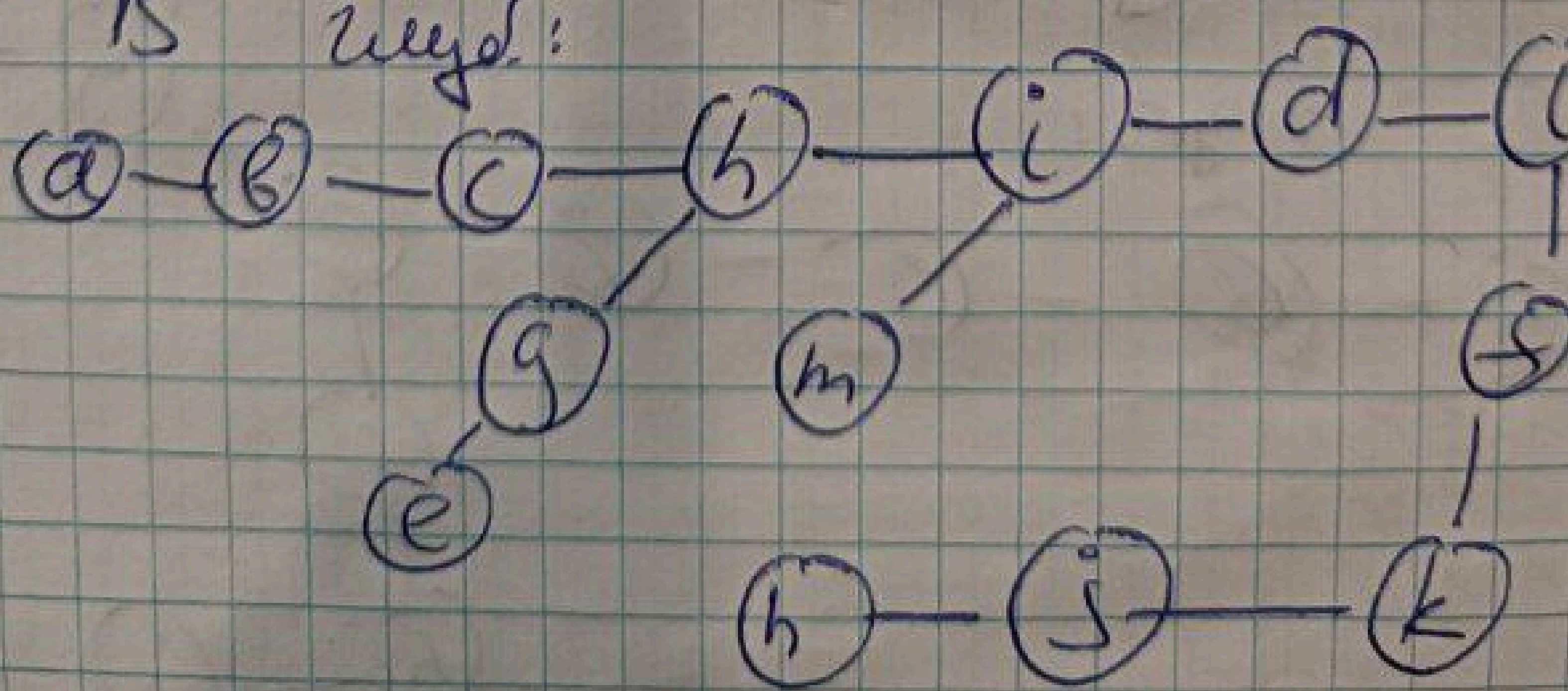
7. Найти остов графа



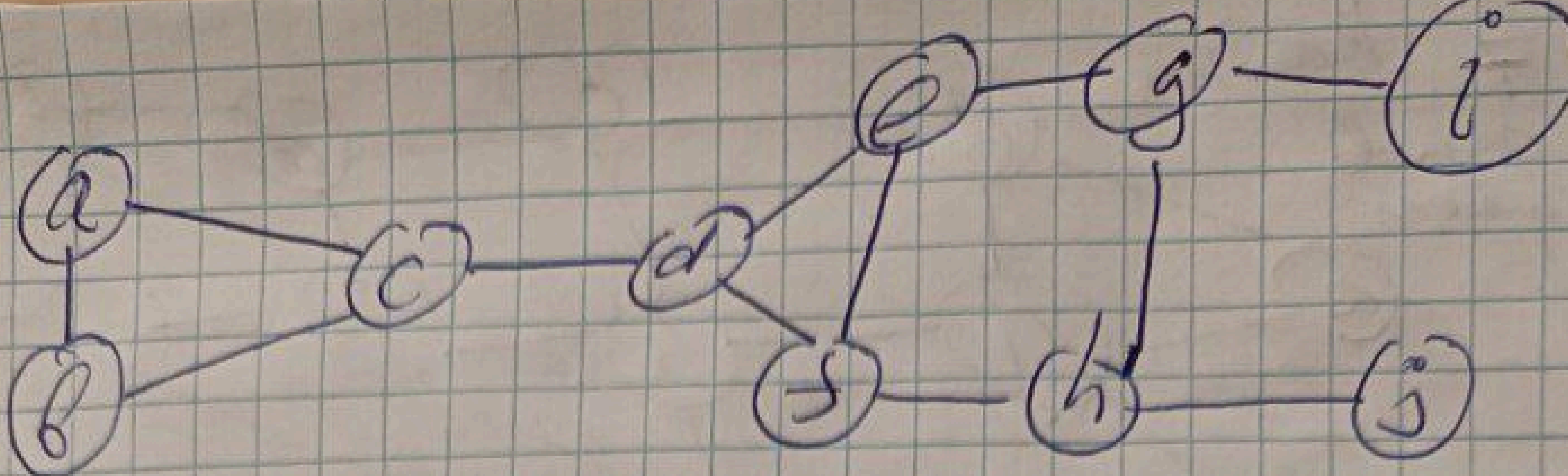
В шир.!



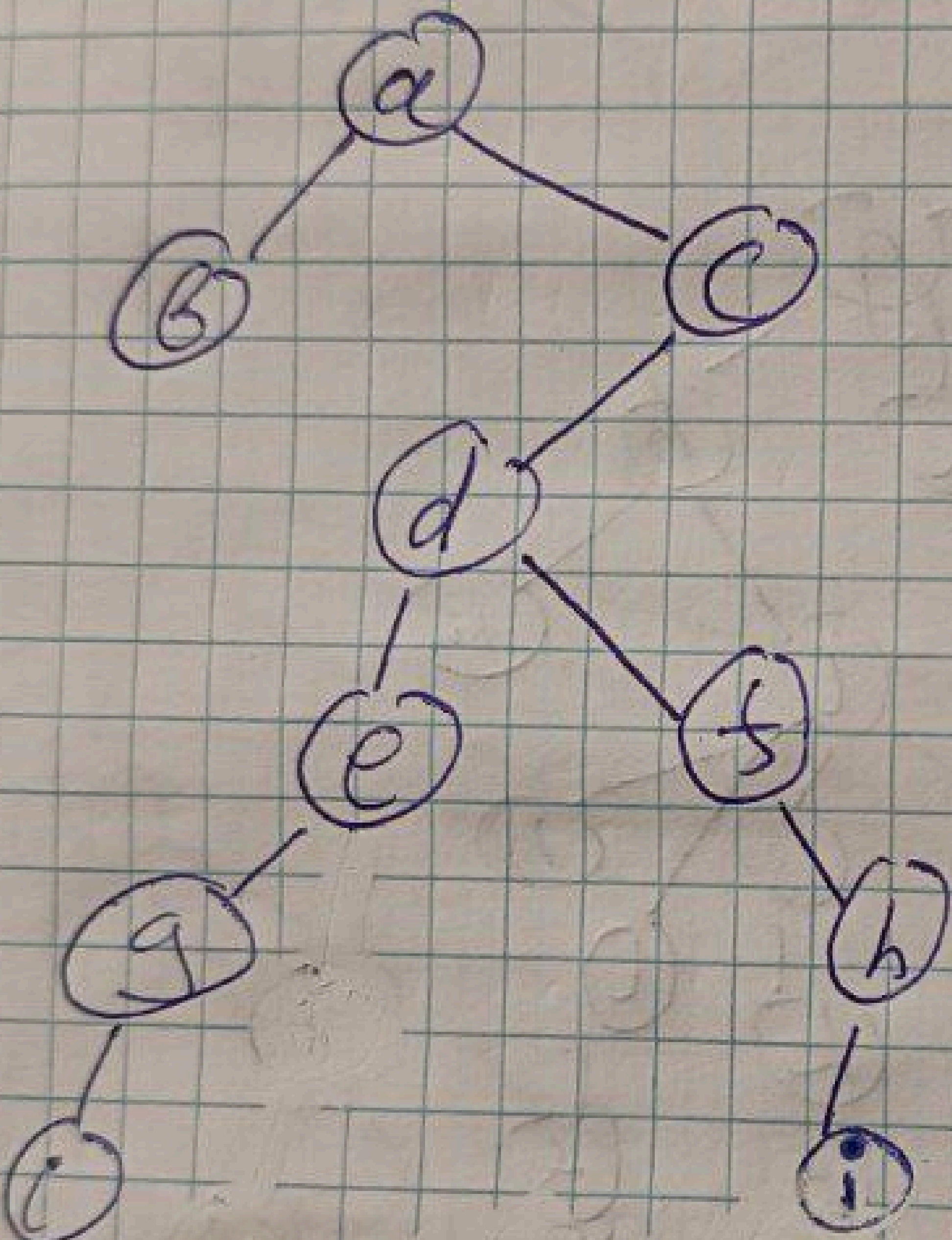
В глуб.!



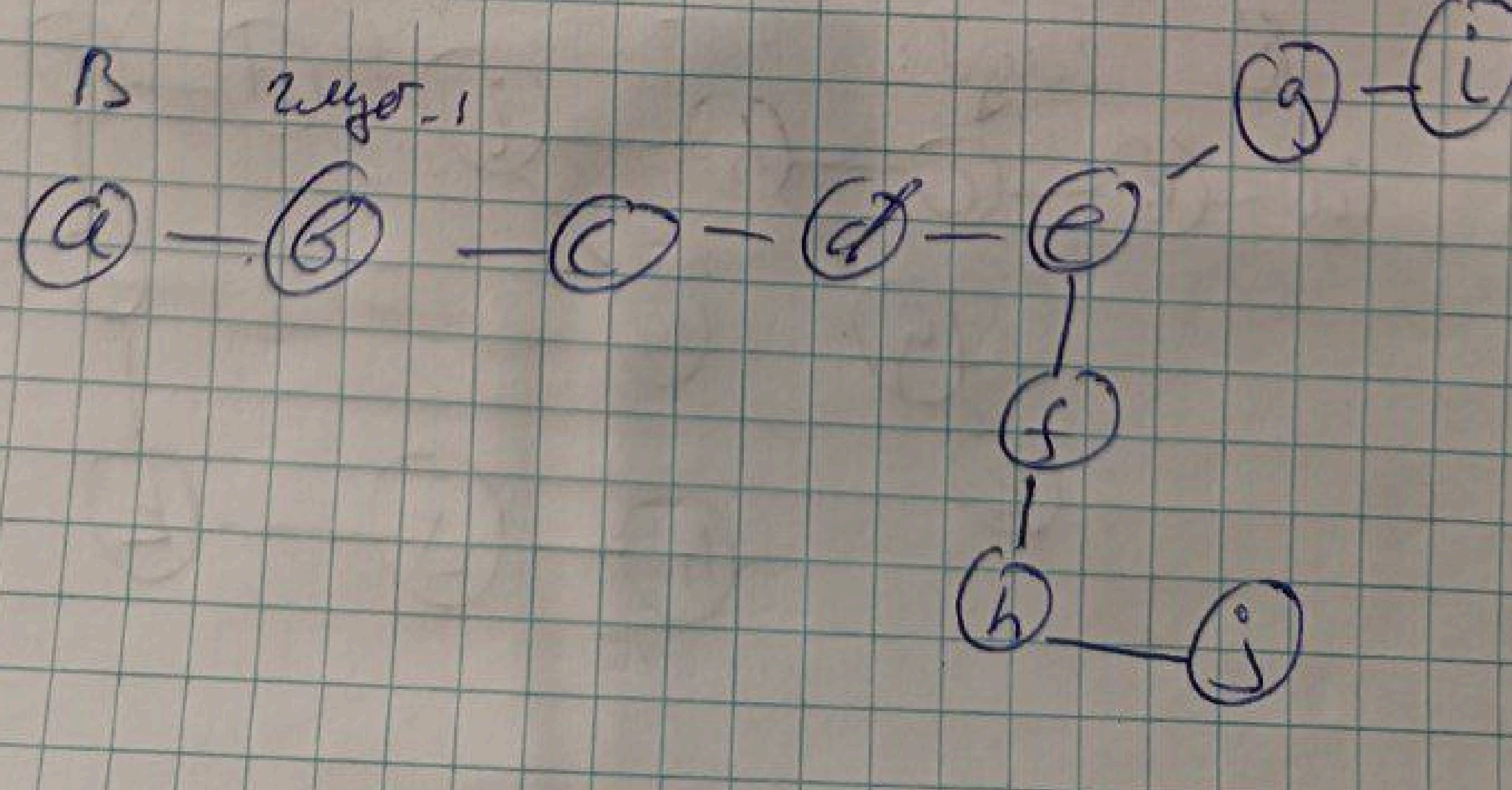
б)



В шир.:



В глуб.:



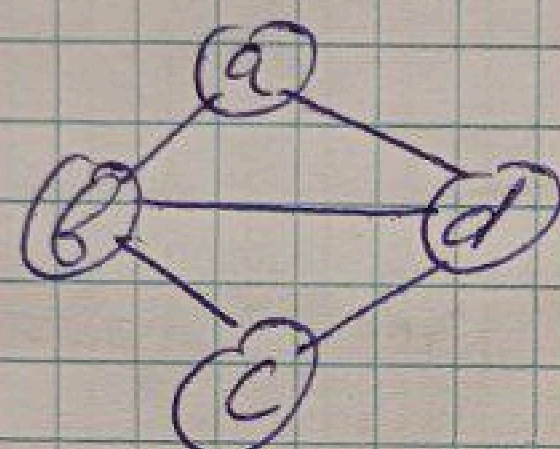
8. Найти остов для: (Д/З)

а) K_n, б) W_n (с верш. степени n),

с) $K_{m,n}$ (с верш. ст. m), d) Q_n

9. Можно ли покрасить в 3 цвета?

а)



a1

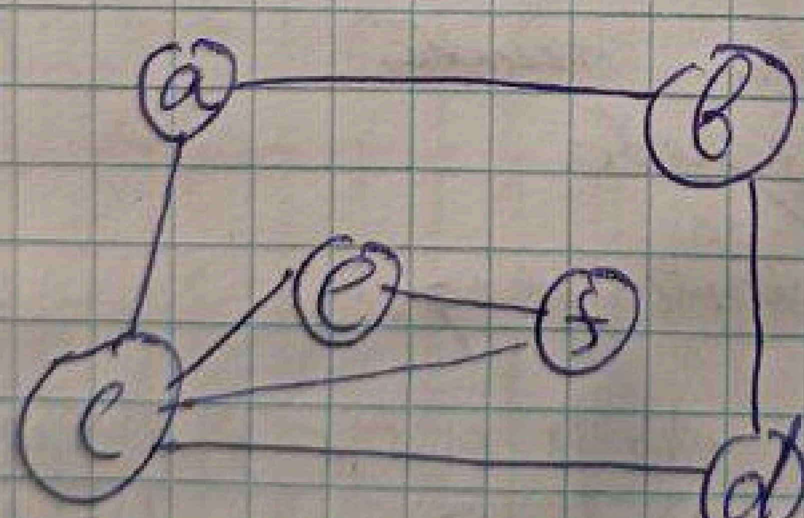
a1 b2

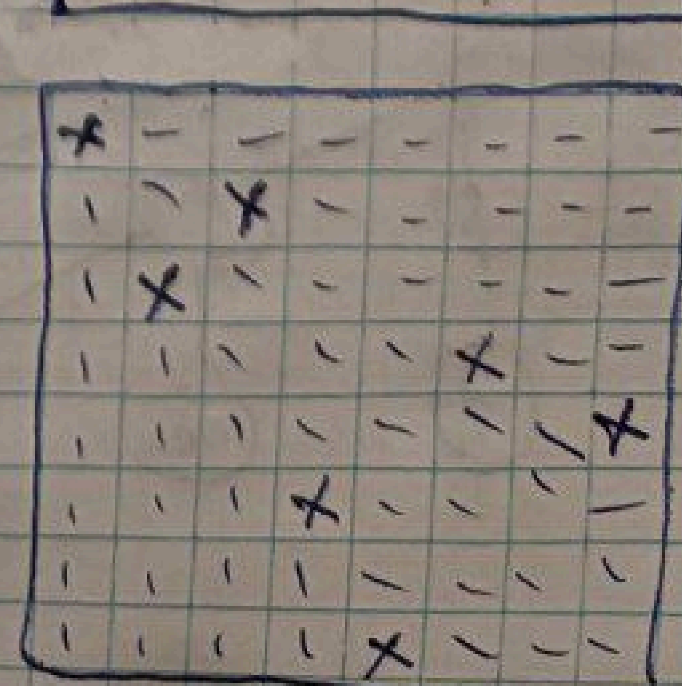
a1 b2 c1 — a1 b2 c3 нет реш.

a1 b2 c1 d3

раскраска

б)





a1

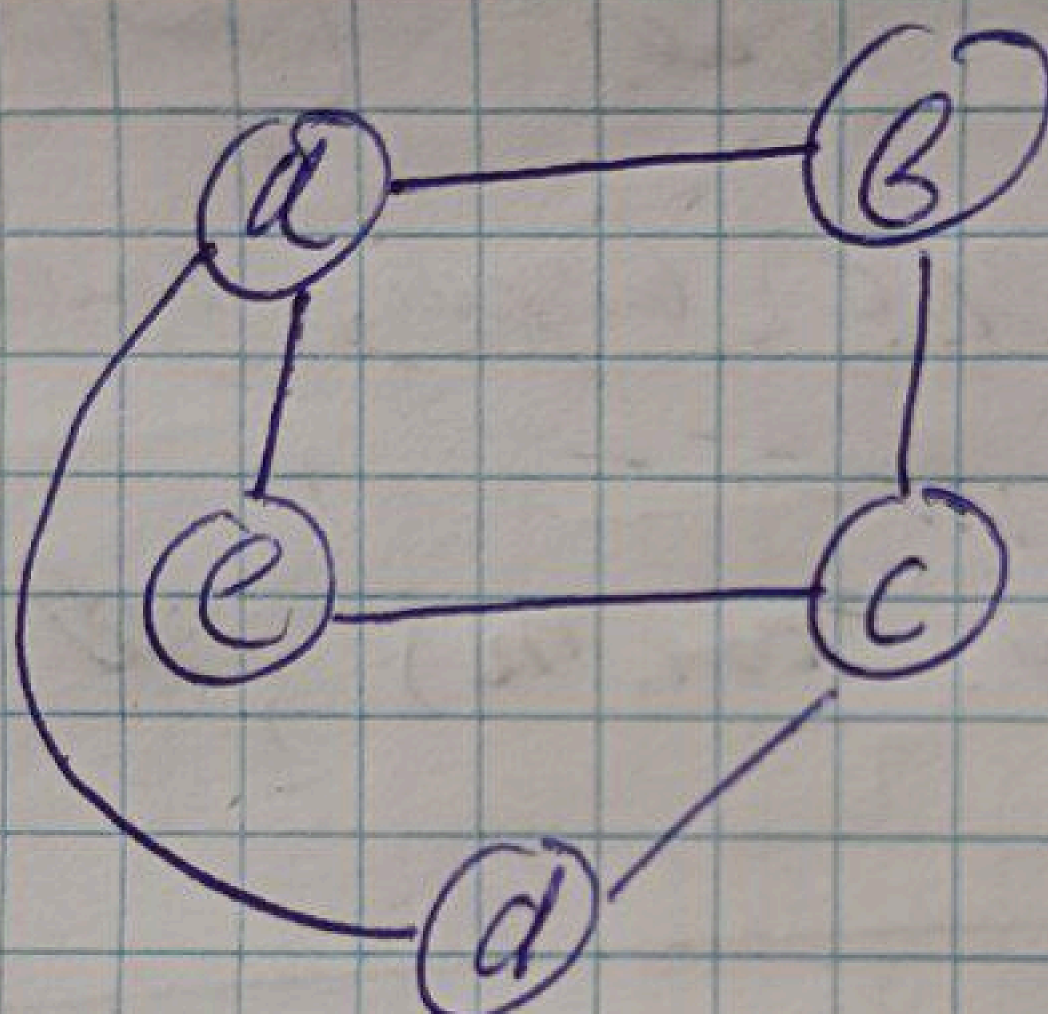
a1 b2

a1 b2 d1

a1 b2 d1 c3

a1 b2 d1 c3 e1 — a1 b2 d1 c3 e1 f2,

c)



d_1

$d_1 a_2$

$d_1 a_2 b_1$

$d_1 a_2 b_1 c_3$

$d_1 a_2 b_1 c_3 e_1$