Тема : Последовательности и их пределы

$\mathbf{6^0}$. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Следствие: общий вид положительного вещественного числа в виде суммы ряда по степеням десяти. $\mathbf{7^0}$. Определение суммы и разности двух вещественных чисел. Определение произведения и частного двух вещественных чисел. Свойства арифметических операций на числовой прямой. Неравенство Бернулли. Число Эйлера. $\mathbf{8^0}$. Симметричные окрестности на числовой прямой, критерий предела последовательности. Пространство последовательностей и операции на нем. Предел суммы, разности и произведения. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

5^0. Продолжим формулировать правила предельного перехода в неравенствах.

Теорема (о предельном переходе). *Пусть существуют пределы*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

и при этом найдется такой номер N_0, *что для всех* $n \geqslant N_0$ *справедливо неравенство* $x_n \leqslant y_n$. *Тогда* $x \leqslant y$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $x > y$. Тогда по предыдущей теореме

$$\exists\, N : \forall\, n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad x_n > y_n,$$

что противоречит условию. $\square$

Следствие (теоремы о предельном переходе). *Если существует* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *и при этом найдется номер* N *такой что* $x_n \leqslant b$ *для всех* $n \geqslant N$*, то справедлива оценка* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant b$.

Заметим, что если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

и при этом найдется номер N такой что $x_n > a$ для всех $n \geqslant N$, то в пределе можно утверждать лишь, что $x \geqslant a$, но нельзя гарантировать, что $x > a$.

Например, $10^{-n} > 0$ для всех натуральных n, но $\lim\limits_{n\to\infty} 10^{-n} = 0$.

Теорема. *Пусть существует такой номер N, что для всех $n \geqslant N$ справедливо неравенство*

$$x_n \leqslant y_n.$$

Тогда, если $x_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, то и $y_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Если же $y_n \to -\infty$, то и $x_n \to -\infty$.

Докажите эту теорему в качестве упражнения.

Теорема (о двух полицейских). *Пусть существует такой номер* N_0, *что для всех* $n \geqslant N_0$ *справедливы неравенства*

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n.$$

Если при этом существуют одинаковые пределы

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c,$$

то существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$.

Доказательство. Возьмем произвольную окрестность $O(c)$ точки c и пусть $O(c) = (a, b)$. Тогда по определению предела

$$\exists\, N_1 : \forall\, n \geqslant N_1 \quad \Longrightarrow \quad x_n \in (a, b),$$

$$\exists\, N_2 : \forall\, n \geqslant N_2 \quad \Longrightarrow \quad z_n \in (a, b).$$

Возьмем $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$. Тогда для любого $n \geqslant N$ имеют место неравенства

$$a < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < b.$$

Таким образом, для любой выбранной окрестности $\boldsymbol{O(c) = (a, b)}$ точки $\boldsymbol{c}$ указан номер $\boldsymbol{N}$, начиная с которого все элементы $\boldsymbol{y_n}$ принадлежат этой окрестности $\boldsymbol{O(c)}$.

По определению, это означает, что существует $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ и этот предел совпадает с числом $\boldsymbol{c}$. $\square$

Помимо уже указанного названия доказанная только что теорема называется также *теоремой о трех последовательностях*, или же *теоремой о зажатой последовательности*.

6^0. В множестве всевозможных числовых последовательностей выделен важный класс так называемых *монотонных последовательностей*. Исследуем основные свойства такого рода последовательностей.

Как уже установлено, *ограниченная монотонная последовательность целых чисел является стационарной* и поэтому заведомо имеет конечный предел.

Как обобщение этого утверждения сформулируем аналогичную лемму о последовательностях десятичных дробей, имеющих после запятой фиксированное число цифр.

Лемма. *Пусть последовательность десятичных дробей, имеющих после запятой ровно k цифр, монотонна и ограничена. Тогда эта последовательность стационарна и имеет конечный предел.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность k-значных десятичных дробей. Тогда последовательность

$$y_n = x_n \cdot 10^k, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

состоит из целых чисел. Если при этом $\{x_n\}$ — монотонная и ограниченная, то и $\{y_n\}$ также монотонна и ограничена.

По ранее доказанному, $\{y_n\}$ — стационарна и, следовательно, существует ее конечный предел

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Но в таком случае последовательность

$$x_n = y_n \cdot 10^{-k}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

также стационарна и, как легко проверить, сходится к числу $y \cdot 10^{-k}$. $\square$

Отметим, что если в условиях предыдущей леммы $\{x_n\}$ монотонно возрастает, то каждый ее элемент лежит левее ее же предела:

$$\forall\, k \geqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad x_k \leqslant \lim_{n\to\infty} x_n < +\infty.$$

Лемма. *Пусть имеется последовательность $\{x_n\}$ десятичных дробей, среди которых нет периодических с периодом 9. Тогда из серии неравенств*

$$x_n \leqslant x_{n+1}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

следует, что при всех k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и при всех n, $n = 1, 2, \ldots$, справедливо неравенство

$$(x_n)_k \leqslant (x_{n+1})_k. \tag{3.1}$$

Доказательство. Зафиксируем номер n и докажем справедливость неравенства (3.1) индукцией по индексу k.

Пусть десятичные дроби x_n и x_{n+1} заданы равенствами

$$x_n = +p_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots,$$

$$x_{n+1} = +p_1, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots.$$

Тогда $p_0 \leqslant p_1$ (в противном случае $p_0 > p_1$ и так как x_{n+1} не является периодической десятичной дробью с периодом 9, то имеет место неравенство $x_n > x_{n+1}$, что противоречит условию леммы).

Учитывая, что $(x_n)_0 = p_0$ и $(x_{n+1})_0 = p_1$, получаем оценку (3.1) при $k = 0$ то есть базис индукции:

$$(x_n)_0 \leqslant (x_{n+1})_0.$$

Предположим теперь, что $(x_n)_k \leqslant (x_{n+1})_k$ для некоторого k, тогда с необходимостью имеют место неравенства

$$\alpha_1 \leqslant \beta_1, \quad \alpha_2 \leqslant \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_k \leqslant \beta_k.$$

(Предположим противное, тогда найдется такой минимальный номер $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, что $\alpha_j > \beta_j$. Это означает, что выполняется соотношение $x_n > x_{n+1}$, но это противоречит условию леммы).

Далее имеем $\alpha_{k+1} \leqslant \beta_{k+1}$ (в случае $\alpha_{k+1} > \beta_{k+1}$ выполняется соотношение $x_n > x_{n+1}$, что противоречит условию леммы). Совокупность неравенств

$$p_0 \leqslant p_1, \quad \alpha_1 \leqslant \beta_1, \quad \ldots, \quad \alpha_{k+1} \leqslant \beta_{k+1}$$

обеспечивает выполнение для индекса $k+1$ искомой оценки:

$$(x_n)_{k+1} \leqslant (x_{n+1})_{k+1}.$$

По принципу математической индукции оценка (3.1) справедлива для всех n и k. $\square$

Важнейшее свойство монотонных последовательностей формулируется следующим образом.

Теорема (Вейерштрасса о монотонной последовательности). *Если монотонная последовательность вещественных чисел ограничена, то она имеет конечный предел.*

Доказательство. Пусть есть ограниченная монотонная последовательность $\{x_n\}$.

Будем предполагать, что для любого n число x_n представлено бесконечной десятичной дробью, которая не является периодической с периодом 9.

Тогда по предыдущей лемме из монотонного возрастания $\{x_n\}$ следует, что для любого $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k = 0, 1, 2, \ldots}$, последовательность $\boldsymbol{k}$-значных десятичных дробей

$$\boldsymbol{y_n = (x_n)_k, \quad n = 1, 2, \ldots},$$

также монотонно возрастает и ограничена.

Далее, применив к последовательности

$$\boldsymbol{y_n = (x_n)_k, \quad n = 1, 2, \ldots},$$

лемму о монотонной и ограниченной последовательности десятичных дробей с одинаковым числом цифр после запятой, заключаем, что $\{y_n\}$ — стационарная.

Это означает, что для каждого фиксированного k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, существует номер N_k такой что при всех $n \geqslant N_k$ имеет место равенство

$$(x_n)_k = +p_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k,$$

где p_0, α_1, ..., α_k от номера n не зависят.

Кроме того существует номер N_{k+1} такой что для всех $n \geqslant N_{k+1}$ справедливо равенство

$$(x_n)_{k+1} = +p_1, \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k \beta_{k+1}.$$

Из определения операций $(\cdot)_k$ и $(\cdot)_{k+1}$ следуют равенства

$$p_0 = p_1, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \ldots, \quad \alpha_k = \beta_k.$$

Таким образом, для любого $n \geqslant N_{k+1}$ имеем представление

$$(x_n)_{k+1} = +p_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \beta_{k+1}.$$

Не ограничивая общности, можем предполагать, что $N_{k+1} \geqslant N_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Далее, задав цифру α_{k+1} равенством $\alpha_{k+1} = \beta_{k+1}$, получаем в итоге последовательность

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots\} = \{\alpha_j\}.$$

Рассмотрим теперь порождаемую этой цифровой последовательностью бесконечную десятичную дробь

$$x = p_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_j \alpha_{j+1} \cdots$$

Построенное таким образом число x обладает следующим свойством:

$$(x_n)_k \leqslant x, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.2}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to +\infty$, получим по теореме о предельном переходе в неравенствах следующую оценку:

$$\lim_{k\to+\infty} (x_n)_k = x_n \leqslant x. \tag{3.3}$$

Далее используем следующие полученные в процессе построения числа x равенства:

$$(x_n)_k = (x)_k \qquad \forall\, n \geqslant N_k. \tag{3.4}$$

Докажем, что $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Воьмем произвольную конечную окрестность $O(x)$ точки x, т.е. интервал $O(x) = (a, b)$. Из неравенства (3.3) и условия, что $x < b$ получаем

$$x_n \leqslant x < b \quad \Longrightarrow \quad x_n < b.$$

Далее из условия, что $a < x$ следует существование номера k_0 такого что

$$\overline{(a)_{k_0}} < (x)_{k_0}. \tag{3.5}$$

При этом для всех $n \geqslant N_{k_0} \equiv N_0$ имеем равенство $(x_n)_{k_0} = (x)_{k_0}$.

Подставляя его в (3.5) и учитывая (3.2), получаем для всех $n \geqslant N_0$ следующие соотношения:

$$\overline{(a)_{k_0}} < (x_n)_{k_0} \leqslant x_n.$$

Учитывая еще, что верхнее десятичное приближение всегда не меньше самого числа, для номеров $n \geqslant N_0$ имеем

$$a \leqslant \overline{(a)_{k_0}} < (x_n)_{k_0} \leqslant x_n.$$

Таким образом, для всех $n \geqslant N_0$ число x_n попадает в интервал (a, b):

$$a < x_n < b.$$

Это означает, в силу произвольности окрестности $O(x) = (a, b)$ точки x, что существует конечный предел рассматриваемой последовательности

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

$\square$

Пусть $x = p_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_j\alpha_{j+1}\ldots$ — произвольное положительное вещественное число.

Последовательность соответствующих ему нижних десятичных приближений

$$\underline{(x)_n} = (x)_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

монотонно возрастает и ограничена сверху: $\underline{(x)_n} \leqslant x$.

В соответствии с теоремой Вейерштраса эта последовательность имеет предел.

Как уже доказано, этот предел совпадает с исходным числом x, т.е.

$$x = \lim_{n\to+\infty} (x)_n = \lim_{n\to+\infty} \left(p_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{10^j} \right).$$

Это предельное равенство принято записывать в следующем сокращенном виде:

$$x = p_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha_j}{10^j}. \tag{G}$$

При этом бесконечную сумму в правой части называют *суммой ряда*. Равенство ($\mathbf{G}$) задает общий вид положительного вещественного числа.

Задача. *Доказать, что если монотонная последовательность вещественных чисел является неограниченной, то она имеет бесконечный предел. Этот предел равен* $+\infty$, *если последовательность монотонно возрастает,* *и* $-\infty$, *если последовательность монотонно убывает.*

Таким образом, любая монотонная последовательность имеет предел: конечный, если она ограничена, и бесконечный, если последовательность неограничена.

Лемма. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *монотонно возрастает и существует конечный* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$, *то* $x_n \leqslant x$ *для всех номеров* n.

Доказательство. Из условия монотонности последовательности $\{x_n\}$ получаем следующую последовательность оценок:

$$x_n \leqslant x_{n+k}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получаем требуемое

$$x_n \leqslant \lim_{k \to +\infty} x_{n+k} = x.$$

$\square$

7^0. Арифметические операции на множестве вещественных чисел вводятся как естественное расширение этих же бинарных операций с множества рациональных чисел на множество всевозможных десятичных дробей.

Основным инструментом в построении такого типа расширений служит предельный переход в результатах арифметических операций, совершенных над соответствующими десятичными приближениями исходных вещественных чисел.

Определение. *Для любых двух вещественных чисел* x *и* y *последовательность*

$$z_n = \underline{(x)_n} + \underline{(y)_n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

имеет предел, который называется суммой чисел x *и* y*:*

$$x + y = \lim_{n \to +\infty} \left(\underline{(x)_n} + \underline{(y)_n} \right). \qquad (+)$$

Отметим, что предел в (+) существует по теореме Вейерштрасса: последовательность $\{\underline{(x)_n} + \underline{(y)_n}\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху целым числом $\overline{(x)_0} + \overline{(y)_0}$.

Операция сложения — это бинарная операция на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами.

(1). $a + 0 = a$ (нейтральность нуля),

$\mathbf{(2)}$. $a+b=b+a$ (коммутативность),

$\mathbf{(3)}$. $a \leqslant b \implies a+c \leqslant b+c$ для $\forall\, c$, (монотонность),

$\mathbf{(4)}$. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (ассоциативность),

$\mathbf{(5)}$. Для любого вещественного числа a существует единственное ему противоположное, обозначаемое как $-a$ и такое, что

$$a + (-a) = 0.$$

Определение. *Для любых двух вещественных чисел* x *и* y *определена их разность* $x - y$, *задаваемая равенством*

$$x - y = x + (-y), \tag{$-$}$$

где $(-y) = -y$ *— это противоположное* y *вещественное число.*

Определение. *Для любых двух вещественных чисел* x *и* y *последовательность*

$$z_n = (x)_n \cdot (y)_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

имеет предел, который называется произведением чисел x *и* y*:*

$$x \cdot y = \lim_{n \to +\infty} (x)_n \cdot (y)_n. \tag{$\times$}$$

Отметим, что предел в $(\times)$ существует по теореме Вейерштрасса: последовательность $\{(x)_n \cdot (y)_n\}$ монотонна и ограничена.

Точнее, если x и y одного знака, то последовательность $\{(x)_n \cdot (y)_n\}$ монотонно возрастает. Если же x и y разных знаков, то эта последовательность монотонно убывает.

Операция умножения — это бинарная операция на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами.

(1). $a \cdot 0 = 0$ (поглощение нулем),

(2). $a \cdot 1 = a$ (нейтральность единицы),

(3). $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность),

(4). Если $a \leqslant b$ и $c \geqslant 0$, то $a \cdot c \leqslant b \cdot c$. Если же $c \leqslant 0$, то $a \cdot c \geqslant b \cdot c$ (монотонность).

(5). $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (дистрибутивность).

$(\mathbf{6})$. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность).

$(\mathbf{7})$. Любое отличное от нуля вещественное число a имеет единственное обратное к нему число b, обладающее тем свойством, что $a \cdot b = 1$. Обратное к $a \neq 0$ число обозначается как a^{-1}.

Лемма. *Справедливы равенства*

$$(-x)^{-1} = -(x^{-1}), \; (x^{-1})^{-1} = x, \; x^{-1}y^{-1} = (xy)^{-1}.$$

Докажем, например, первое из этих равенств:

$$(-x)^{-1} = (-x)^{-1} \cdot 1 = (-x)^{-1} \cdot x \cdot x^{-1} =$$

$$= (-x)^{-1} \cdot (-x) \cdot (-(x^{-1})) = -(x^{-1}).$$

Определение. *Для любых двух веществен- ных чисел* x *и* y, *где* $y \neq 0$, *произведение* $x \cdot y^{-1}$ *называется частным от деления* x *на* y *и обо- значается одним из символов* $\frac{x}{y}$ *или* $x : y$.

Лемма (неравенство Бернулли). *Для любого числа* $x \geqslant -1$ *имеет место оценка снизу*

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{$\mathbb{B}$}$$

Доказательство. Воспользуемся принципом математической индукции. При $n = 1$ неравенство ($\mathbb{B}$) превращается в очевидное соотношение.

Предположим, что ($\mathbb{B}$) верно для некоторого n. Установим, что тогда ($\mathbb{B}$) выполняется и для $n+1$. Для $n > 1$ и $x \geqslant -1$ имеем

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant$$

$$\geqslant (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x.$$

Следовательно, неравенство ($\mathbb{B}$) выполняется для всех натуральных n. $\square$

Применив неравенство Бернулли, определим важное в анализе *число Эйлера*.

Рассмотрим числовую последовательность, задаваемую соотношениями

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Заметим, что $e_n > 1$ для всех натуральных n, т.е. $\{e_n\}$ ограничена снизу.

Оказывается, что $\{e_n\}$ еще и монотонно убывающая. Докажем это, оценив снизу отношение $\frac{e_{n-1}}{e_n}$. Имеем

$$\frac{e_{n-1}}{e_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} =$$

$$= \frac{n-1}{n}\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}.$$

Применив к последнему сомножителю неравенство Бернулли, получим

$$\frac{e_{n-1}}{e_n} \geqslant \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{n+1}{n^2-1}\right) = 1.$$

По теореме Вейерштрасса монотонно убывающая и ограниченная снизу последовательность $\{e_n\}$ сходится к некоторому конечному пределу.

Предел последовательности e_n, $n = 1, 2, \ldots$, при $n \to +\infty$ называется *числом Эйлера* и обозначается как e:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e.$$

Как следует из определения e_n, $n=1,2,\dots$, число e не меньше 1 и не больше 4. Более точные вычисления показывают, что

$$e=2,7182818284590\dots.$$

Доказано также, что e иррациональное число.

8^0. Во многих случаях удобнее работать не с произвольными окрестностями вещественного числа a, а с его симметричными окрестностями — интервалами, середина которых совпадает с этим самым числом a.

Определение. *Любой интервал вида*

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

где ε *— положительное вещественное число, называется* ε*–окрестностью точки* x_0 *и обозначается как* $O_\varepsilon(x_0)$.

Теорема (критерий предела). *Число* x_0 *является пределом последовательности* $\{x_n\}$ *тогда и только тогда когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \colon \forall n \geqslant N \implies x_n \in O_\varepsilon(x_0). \quad (L)$$

Докажите теорему в качестве упражнения.

Отметим, что условие (L) можно также записать в следующей эквивалентной форме:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists N \colon \forall\, n \geqslant N \quad |x_n - x_0| < \varepsilon. \qquad (L+)$$

Часто определение предела числовой последовательности $\{x_n\}$ дается именно в виде условия $(L+)$.

Пусть X обозначает множество всевозможных последовательностей вещественных чисел. На этом множестве вводятся следующие арифметические операции:

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\};$$

$$\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\}; \quad \{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}.$$

В частности, любую последовательность $\{a_n\}$ можно умножать на число α:

$$\{\alpha\} \cdot \{b_n\} = \{\alpha b_n\}.$$

К каждой сходящейся последовательности из X применима операция предельного перехода, которая обладает важным свойством линейности:

$$\lim_n(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_n a_n + \beta \lim_n b_n.$$

Это равенство справедливо при условии, что пределы $\lim\limits_n a_n$ и $\lim\limits_n b_n$ существуют и конечны. При этих же предположениях имеет место следующее равенство:

$$\lim_n (a_n \cdot b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n.$$

Определение. *Любая сходящаяся к нулю числовая последовательность называется бесконечно малой. Последовательность* $\{a_n\}$ *называется бесконечно большой, если*

$$\lim_n |a_n| = +\infty.$$

Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к $-\infty$ или к $+\infty$, то $\{a_n\}$ бесконечно большая. Обратное неверно: например, последовательность $\{a_n = (-1)^n n\}$ бесконечно большая, но предела не имеет.

Теорема. *Последовательность ненулевых вещественных чисел $\{\alpha_n\}$ является бесконечно малой тогда и только тогда когда соответствующая ей последовательность обратных величин $x_n = \frac{1}{\alpha_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, является бесконечно большой.*

Тема : Полнота множества вещественных чисел и её следствия

$\mathbf{1^0}$. Принцип вложенных отрезков (теорема Кантора о вложенных отрезках). $\mathbf{2^0}$. Последовательность стягивающихся отрезков (аксиома непрерывности Кантора). $\mathbf{3^0}$. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании сходящийся подпоследовательности в ограниченной последовательности. $\mathbf{4^0}$. Частичные пределы ограниченных последовательностей. Верхний и нижний пределы. Верхний предел неограниченной сверху последовательности. Критерий существования предела последовательности в терминах верхнего и нижнего пределов. $\mathbf{5^0}$. Необходимость условия Коши для сходящейся числовой последовательности. Теорема о сходимости фундаментальной последовательности. Критерий Коши. $\mathbf{6^0}$. Расходимость частичных сумм гармонического ряда.

1^0. Пусть имеется правило, согласно которому каждому натуральному числу n, $n \in \mathbb{N}$, поставлен в соответствие некоторый отрезок $[a_n, b_n]$ числовой оси:

$$n \longmapsto \{x \in \mathbb{R} \,|\, a_n \leqslant x \leqslant b_n\}.$$

В этом случае принято говорить, что задана *последовательность* отрезков:

$$[a_n, b_n]\,, \qquad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Упорядоченная пара $(n, [a_n, b_n])$ называется *элементом* этой последовательности.

Определение. *Множество $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, называется последовательностью вложенных отрезков, если выполняются следующие условия:*

$$\left[a_{n+1}, b_{n+1}\right] \subset [a_n, b_n], \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

В эквивалентном виде условие вложения отрезков можно также записать следующим образом:

$$\forall\, x: \quad a_{n+1} \leqslant x \leqslant b_{n+1} \Longrightarrow a_n \leqslant x \leqslant b_n.$$

Теорема (принцип вложенных отрезков). *Пусть* $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots,$ *— это последовательность вложенных отрезков. Тогда существует хотя бы одна точка, принадлежащая одновременно всем этим отрезкам:*

$$\exists\, x \in \mathbb{R}\colon\ x \in [a_n, b_n]\,,\ n = 1, 2, \ldots \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]\,.$$

Доказательство. Из условий вложенности получаем следующие неравенства:

$$a_1 \leqslant \underline{a_n \leqslant a_{n+1}} \leqslant \underline{b_{n+1} \leqslant b_n} \leqslant b_1.$$

Таким образом, последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает и ограничена, а $\{b_n\}$ — монотонно убывает и ограничена.

По теореме Вейерштрасса существуют конечные пределы этих монотонных ограниченных последовательностей:

$$\exists\, a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ и } \exists\, b = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Переходя в неравенстве $a_n \leqslant b_n$ к пределу при $n \to \infty$, получаем $a \leqslant b$. Таким образом, отрезок $[a,\, b]$ не пуст: $[a,\, b] \neq \emptyset$.

При этом $a_n \leqslant a$ и $b \leqslant b_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Это означает, что имеют место вложения

$$[a,\, b] \subset [a_n,\, b_n]\,,\; n = 1, 2, \ldots \Rightarrow [a,\, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n,\, b_n].$$

Следовательно, $\exists\, x \in [a,\, b]\colon\; x \in [a_n,\, b_n]$. $\square$

Доказанная теорема называется также *принципом вложенных отрезков Кантора*, или теоремой Кантора о вложенным отрезках.

Замечание. *У последовательности вложенных интервалов может не быть ни одной общей точки. Например:*

$$\left(0, \frac{1}{n+1}\right) \subset \left(0, \frac{1}{n}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и при этом $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$.

Последнее равенство доказывается методом от противного.