(14) Доказать, что

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$

Бином Ньютона

$$0 \le x_n = \sqrt[n]{n} - 1$$

$$x_n < ?$$

$$n = (x_n + 1)^n \geq 1 + n x_n + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 > \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

$$x_n \le \frac{2}{\sqrt{n-1}}$$

ДЗ (Демид.)

47, 48,
49, 51,
53, 68;
60, 61

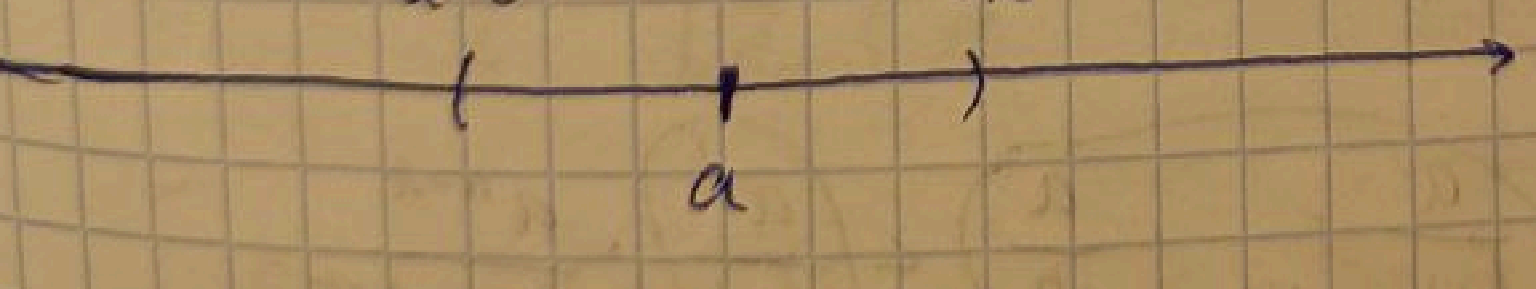
Числовой предел

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Big\| \quad a_n \to a \text{ при } n \to \infty$$

Трушин;
Мат. ан. с
человеческим
лицом

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}:$$

$$n \geq n_\varepsilon : \ |a_n - a| < \varepsilon$$



$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

60. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \qquad (a > 1)$

$$0 < \frac{n^k}{a^n} < ?$$

$$0 < \frac{n^k}{a^n} < \frac{n^m}{a^n} = \left(\frac{n}{\sqrt[m]{a^n}}\right)^m = \left(\frac{n}{(\sqrt[m]{a})^n}\right)^m \le \left(\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}(n-1)b^2}\right)^m \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

где $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq k$

$$(\sqrt[m]{a})^n = (1+b)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} b^2$$

61. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad a > 0$

const

стремится к 0

$$0 < \frac{a^n}{n!} < \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{a^{n-k}}{(k+1)^{n-k}} \Rightarrow$$

стремится к 0

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{k} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{n}$$

$k > a$

$$\frac{a^k}{k!} \cdot \frac{a}{k+1} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{n} < \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{a^{n-k}}{(k+1)^{n-k}}$$

const

$$\left(\frac{a}{k+1}\right)^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Теорема Вейерштрасса:

→ Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится (имеет конечный предел)

$\{x_n\} \nearrow$, $\exists x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$x_n \le x$

Число e:

$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$\left.\begin{matrix} \text{ограничена снизу } e_n > 1 \\ \text{и } \{e_n\} \searrow \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} e_n = e$

монотонно убывает

Дома: $\tilde{e}_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; доказать, что огр. сверху

и $\{\tilde{e}_n\} \nearrow$

$e_n = \tilde{e}_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$;

$\frac{e_n}{1 + \frac{1}{n}} = \tilde{e}_n$

Замечательный предел

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

БМП: $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

ББП: $\lim\limits_{n\to\infty} |\beta_n| = \infty$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \left[\begin{array}{l}+\infty \\ -\infty\end{array}\right. \Rightarrow \{z_n\}$ ББП

$\not\Leftarrow \quad (-1)^n n$

α_n – БМП $\Leftrightarrow \beta_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$ – ББП

$a^n, \; n^k, \; n^n, \; n!$

$\ll$ – много больше (сравнение порядков роста)

$n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$

ДЗ

БО через т. Вейерш.:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

$$0 < x_n = \frac{n^k}{a^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k \cdot a^n}{n^k \cdot a^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} < 1$$

при $n > n_0$

$$\left(1+\frac{1}{n_0}\right)^k < a$$

$$1+\frac{1}{n_0} < \sqrt[k]{a}$$

$$\frac{1}{n_0} < \sqrt[k]{a} - 1$$

$$n_0 = \left[\frac{1}{\sqrt[k]{a}-1}\right]+1 \; ;$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

Предположим, что $x \neq 0$

$$y_n = x_n + 1 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

$$\lim \frac{(n+1)^k \cdot a^n}{a^{n+1} \cdot n^k} = \frac{1}{a} = \frac{x}{x}$$

---

61) Пред т. Вейер. :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \; , \quad a>0$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1} \; n!}{(n+1)! \; a^n} = \frac{a}{n+1} \to 0 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x \; ,$$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x = x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

? предположение

Пусть $x \neq 0$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$, где $y_n = x_n + 1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{x} = 1 \; ; \quad \lim \left(\frac{a}{n+1}\right) = 0 \neq 1$$

Кр. Коши (позволяет доказывать сходимость / расходимость последовательности, не находя предел):

$\{x_n\}$ — сходится $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность,

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon : \forall p \geq 0$
$\forall n > n_\varepsilon$

$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

Д.85

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

Д-ть, что $\{x_n\}$ сходится

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon : \; \forall p > 0 \; \forall n > n_\varepsilon$

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2}$$

$1 = Ak - A + Bk$

$A = -1, \; B = 1$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k \cdot k} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k-1} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots$$

$$- \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \qquad n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

Д. 88 Доказать, пользуясь критерием Коши, что последовательность расходится:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$\exists \varepsilon^* > 0 \quad \forall m: \exists p > 0 \quad \exists n > m$

$|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon^*$

$$x_{n+p} - x_n > \frac{p}{n+p} \geq \varepsilon^*$$

возьмём $p = n \Rightarrow x_{n+p} - x_n > \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} \geq \varepsilon^*$

тогда ε^* — любое из $(0, \frac{1}{2}]$

---

47. $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

48. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1} = 0$$

$|\sin n!| < 1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{n}} = 0$$

$\to \lim = 0$

$\to \lim = 1$

$\lim = 0$

51.

$= \lim_{n\to\infty}$

$= \lim_{n\to\infty}$

49.

51. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)=$ 47

48

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{2n}\right)=$ 49

51

53

68

60

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{2}$ 61

---

49. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

53. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}}{n^3}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right]=\frac{1}{3}$

68. Доказать, что

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)=0$

$0<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{n}\right)=0$

78. Доказать сходимость:

$x_n=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+9}{2n-1}$

→

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \tilde{e}_n$$

$$\frac{\tilde{e}_{n+1}}{\tilde{e}_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} =$$

$$= \left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) >$$

$$> \left(1-\frac{\cancel{(n+1)}}{(n+1)^{\cancel{2}}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = 1$$