Доп к "Секвенции 2.0"

Две формулы синтаксически эквивалентны $\Rightarrow$ $\rhd\, \Phi \vdash \Psi$ и $\rhd\, \Psi \vdash \Phi$

$$\Phi \equiv \Psi.$$

Если $\Phi_1 \equiv \Phi_2$ и $\Psi_1 \equiv \Psi_2$

1. $\neg \Phi_1 \equiv \neg \Phi_2$
2. $(\Phi_1 \wedge \Psi_1) \equiv (\Phi_2 \wedge \Psi_2)$
3. $(\Phi_1 \vee \Psi_1) \equiv (\Phi_2 \vee \Psi_2)$
4. $(\Phi_1 \to \Psi_1) \equiv (\Phi_2 \to \Psi_2)$

Теорема (о замене):

Φ – формула, и $\rhd\, \Psi \equiv \varphi$ – подформула. Если $\Psi \equiv \Psi'$ и Φ' – результат замены некоторого вхождения Ψ на Ψ', то $\Phi \equiv \Phi'$

$\varphi = (A \wedge B) \vee C$ $\qquad \psi = A \wedge B$

$\psi' = (A \vee A) \wedge (B \vee B)$

$\varphi' = ((A \vee A) \wedge (B \vee B)) \vee C$

Аксиомы эквивалентности: (основные эквивалентности)

① $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

② $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

③ $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$

④ $\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$

⑤ $\varphi \wedge \top \equiv \varphi$

⑥ $\varphi \wedge \bot \equiv \bot$

⑦ $\varphi \vee \top \equiv \top$

⑧ $\varphi \vee \bot \equiv \varphi$

⑨ $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$

⑩ $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

⑪ $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$

⑫ $\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$

⑬ $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$

⑭ $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \chi$

⑮ $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$

⑯ $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$

Для $\forall \varphi \, \exists \varphi'$: φ' не содержит $\rightarrow$ и $\varphi' \equiv \varphi$

Теорема (приведение к КНФ / ДНФ):

Для $\forall \varphi \, \exists \psi_1, \psi_2$: $\varphi \equiv \psi_1 \equiv \psi_2$ и

ψ_1 в КНФ,

ψ_2 в ДНФ

φ – формула:

Дизъюнктивная часть $D(\varphi)$
Конъюнктивная часть $K(\varphi)$

- если φ – атомарная ф-ла

$D(\varphi) = K(\varphi) = \{\varphi\}$

- если $\varphi = \neg \psi$, то

$D(\varphi) = K(\varphi) = \{\varphi\}$

- если $\varphi = (\psi \wedge \chi)$, то

$D(\varphi) = \{\varphi\}$ и $K(\varphi) = K(\psi) \cup K(\chi)$

- если $\varphi = (\psi \vee \chi)$, то $K(\varphi) = \{\varphi\}$

$D(\varphi) = D(\psi) \cup D(\chi)$

- если $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, то

$D(\varphi) = \{\varphi\}$ и $K(\varphi) = \{\varphi\}$

$D(v_1 \wedge (v_2 \vee \neg v_3)) = \{ v_1 \wedge (v_2 \vee \neg v_3) \}$

$K(v_1 \wedge (v \vee \neg v_3)) = K(v_1) \cup K(v_2 \vee \neg v_3) =$

$= \{ v_1, v_2 \vee \neg v_3 \}$

$K(v_1 \wedge (v_2 \vee \neg v_3) \wedge \neg v_2) =$

$= \{ v_1, v_2 \vee \neg v_3, \neg v_2 \}$

$D(v_1 \wedge (v_2 \vee \neg v_3) \wedge \neg v_2) =$

$= \{ v_1 \wedge (v_2 \vee \neg v_3) \wedge \neg v_2 \}$

Лемма. Γ – набор формул, φ – формулы

$\rhd \Gamma \vdash \varphi \iff \rhd \Gamma \vdash \psi$ для $\forall \psi \in K(\varphi)$

Лемма. φ, ψ – формулы и $\rhd \varphi$, то $\psi \wedge \varphi \equiv \psi$

удаление $\wedge$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$$

аксиома

$$\frac{\psi \wedge \varphi \vdash \psi \wedge \varphi}{\psi \wedge \varphi \vdash \psi}$$

аксиома

$$\frac{\psi \vdash \psi, \quad \vdash \varphi}{\psi \vdash \psi \wedge \varphi} \text{ удал.} \wedge$$

Лемма. Для $\forall\varphi, \forall\psi \vdash \varphi \equiv \varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi)$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$$

(1) $$\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi)}$$ введение или

$$\dfrac{\dfrac{\psi \vdash \psi}{\psi \wedge \neg\psi \vdash \psi}\,\text{и}_1 \;;\; \dfrac{\neg\psi \vdash \neg\psi}{\psi \wedge \neg\psi \vdash \neg\psi}\,\text{и}_2}{\dfrac{\psi \wedge \neg\psi \vdash \bot}{\psi \wedge \neg\psi \vdash \varphi}\,\text{удал.}\bot}\,\text{вв.}\bot$$

аксиома

$$\dfrac{\varphi \vdash \varphi \;;\; \psi \wedge \neg\psi \vdash \varphi \;;\; \varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi) \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi)}{\varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi) \vdash \varphi}$$ аксиома, удаление или

Доп перед кр.

$K\ x\ y = x$

$\lambda xy.x$

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\varphi \to \psi, \varphi \vdash \varphi}\,{\scriptstyle 11,12} \quad ; \quad \dfrac{\varphi \to \psi \vdash \varphi \to \psi}{\varphi \to \psi, \varphi \vdash \varphi \to \psi}\,{\scriptstyle 12}}{\varphi \to \psi, \varphi \vdash \psi}\,{\scriptstyle 8}$$

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \to \psi, \varphi \vdash \psi}{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi \vdash \psi}\,{\scriptstyle 11,12} \; ; \; \dfrac{\psi \to \chi \vdash \psi \to \chi}{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi \vdash \psi \to \chi}\,{\scriptstyle 11,12}}{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi \vdash \chi}\,{\scriptstyle 8}$$

$$\dfrac{\overbrace{\varphi \to \psi, \psi \to \chi}^{\Gamma}, \overbrace{\varphi}^{\Gamma} \vdash \overbrace{\chi}^{\Gamma}}{\underbrace{\varphi \to \psi, \psi \to \chi}_{\Gamma} \vdash \underbrace{\varphi \to \chi}}\,{\scriptstyle 7} \qquad \dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$$

$(\lambda h f^{x}. h(\lambda g. \lambda h. h(g f))(\lambda u. x)(\lambda u. u))(\lambda f x x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda f^{x}. (((\lambda f x. x)(\lambda g h. h(g f)))(\lambda u. x))(\lambda u. u) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda f^{x}. ((\lambda u. x)(\lambda u. u)) \Rightarrow \lambda f x. x$

$$\boxed{(\lambda g h. h(g f))^{n}(\lambda u. x) \to \lambda h. h^{n} x}$$