Семинар. Пределы (для функций)

$f(x)$, где X - множество определения

a ($a \in X$ или $a \notin X$) - предельная точка множества X, если в любой окрестности $U(a)$ существуют точки из X

Опр 1 (по Коши): $A = \lim\limits_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X :$

$0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

или

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X \ \ x \in \mathring{U}_\delta(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$

Опр 2 (по Гейне): $A = \lim\limits_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \{x_n\} : x_n \neq a, \ \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$

2й замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{y\to \infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$$

1й замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

Односторонние пределы:

$$A' = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0) \Leftrightarrow$$

(предел при x стрем. к a слева)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0:$

$\forall x: a-\delta < x < a \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) A'| < \varepsilon$

$$A'' = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0:$

$\forall x: a < x < a+\delta \Rightarrow$

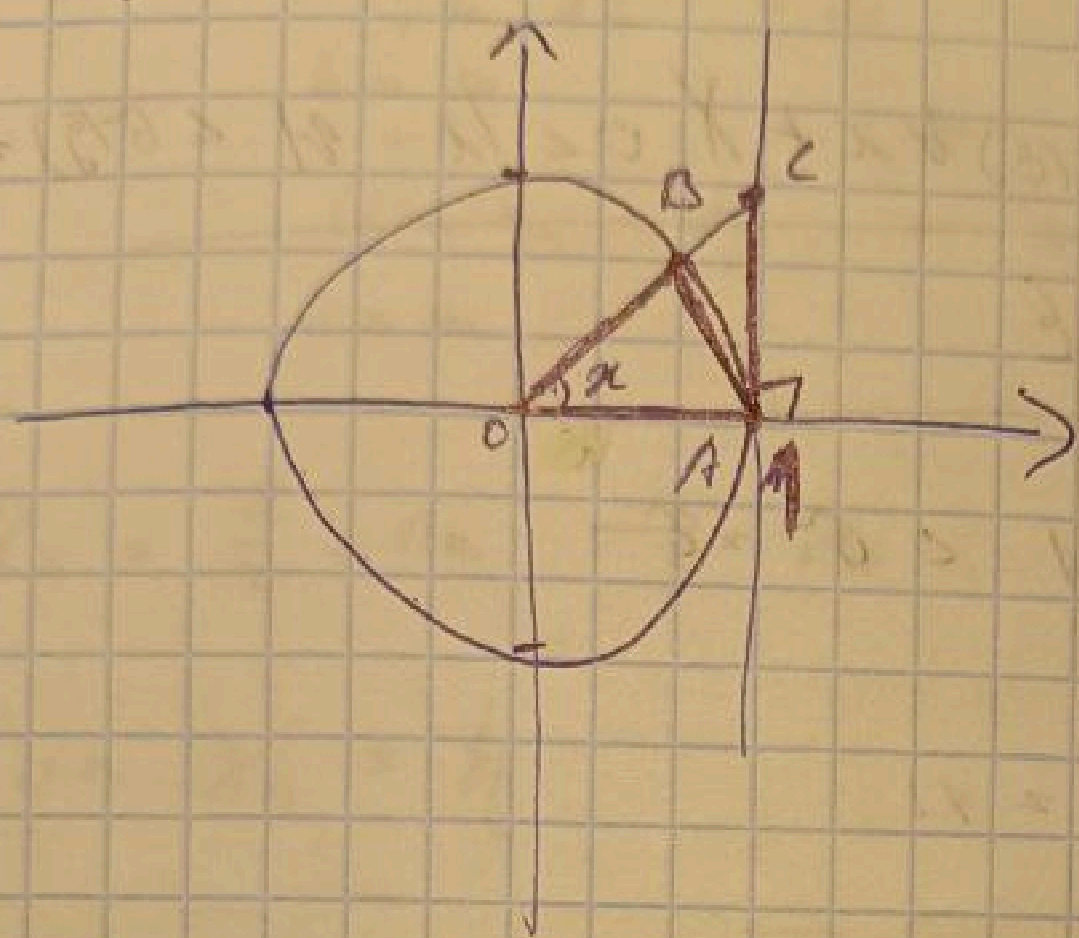
$\Rightarrow |f(x) A''| < \varepsilon$

$$\exists A = \lim_{x\to a} f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$f(a-0) = f(a+0)$

Почему 1



$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сек } OAB} < S_{\triangle OAC}$$

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \xrightarrow{x \to 0+0} 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{\sin x}{x} \begin{cases} t = -x \\ t \to 0+0 \end{cases}$$

$$\left\{ \lim_{t \to 0+0} \frac{\sin t}{t} = 1 \right.$$

Доказать:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) \ \forall x \in X \ 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow |\sin x| < \varepsilon$

$|\sin x| \leq |x| < \delta = \varepsilon$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$:

$|\cos x - 1| < C|x|$

$\cos \frac{2x}{x} = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$

$|\cos x - 1| = |1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} - 1| = |2\sin^2 \frac{x}{2}| <$

$< |x|$

3) $\sin x$ не имеет предела при $x \to \infty$

$\exists \{x_n\}, \{y_n\}$: $x_n \neq a$, $y_n \neq a$ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = a$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f(y_n)$

$\exists \{x_n\}, \{y_n\} : x_n \neq y_n$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

$$x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n \to \infty$$

$$\sin x_n = h$$

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$y_n = \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi$$

---

411 а) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{\lim_{x\to 0}(x^2-1)}{\lim_{x\to 0}(2x^2-x-1)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

б) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to 1}(x^2-1)}{\lim_{x\to 1}(2x^2-x-1)} = \frac{\lim_{x\to 1}(x-1)(x+1)}{\lim_{x\to 1}(x-1)(2x+1)} = \frac{\lim_{x\to 1}(x+1)}{\lim_{x\to 1}(2x+1)} =$$

$$= \frac{2}{3}$$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \cancel{\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-x-1)}} =$

$= \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1}{2}$

(424) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)+(x^2-1)+\ldots+(x^n-1)}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}\left[\overbrace{1}^{1}+\overbrace{x+1}^{2}+\overbrace{x^2+x+1}^{3}+\ldots+\overbrace{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1}^{n}\right]}{\cancel{x-1}} =$

$= n \cdot \dfrac{1+n}{2}$

(440) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+13-4x-4}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9-3x}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-3\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} \longrightarrow \dfrac{-3}{68} = -\dfrac{1}{16}$

474

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\frac{2x}{2}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-1+2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot 2} =$$

$$=$$

475

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x\,\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos^2 x)\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1-\cos x}}{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos x)\cos x} = \frac{1}{2}$$