Тема : Непрерывные функции одной переменной

$\mathbf{1^0}$. Определение непрерывной функции в точке. $\mathbf{2^0}$. Точки разрыва. Односторонняя непрерывность. Примеры. $\mathbf{3^0}$. Теорема об образе отрезка при непрерывном отображении. Следствие о наибольшем и наименьшем значениях непрерывной на отрезке функции. Примеры. $\mathbf{4^0}$. Теорема о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции.

☐ Понятие предела функции в точке позволяет ввести в рассмотрение класс непрерывных на отрезке функций. (1

Опр. Функция $f(x)$, $x \in \mathcal{D}_f$, называется непрерывной в предельной точке $x_0 \in \mathcal{D}_f$, если существует предел $f(x)$ в точке x_0 и этот предел равен $f(x_0)$:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \quad \wedge \quad f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Заметим, что область определения $\mathcal{D}_f$ разбивается на два непересекающихся подмножества: первое из них образуют все предельные точки мн-ва $\mathcal{D}_f$, а второе состоит из изолированных точек мн-ва $\mathcal{D}_f$.

В любой изолированной точке из $\mathcal{D}_f$ функция $f(x)$ считается непрерывной (по определению).

Опр. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in D_f$, то x_0 называется <u>точкой непрерывности</u> функции f. В противном случае $x_0 \in D_f$ называется <u>точкой разрыва</u> функции f.

К точкам разрыва функции f обычно относят также те вещественные числа x_0, которые не принадлежат D_f, но являются при этом предельными точками как для множества $D_f \cap (-\infty, x_0)$ так и для $D_f \cap (x_0, +\infty)$.

<u>Пример.</u> Функции $y = \operatorname{sgn} x$ и $y = 1/x$ непрерывны в $\forall$ точке $x_0 \neq 0$. Точка же $x_0 = 0$ — это точка разрыва как для $\operatorname{sgn} x$, так и для $y = 1/x$.

<u>Опр.</u> Если x_0 — точка разрыва функции f и при этом $\exists$ конечный предел $f(x)$ при $x \to x_0$, то x_0 называется точкой <u>устранимого разрыва</u>. Если же у $f(x)$ в точке x_0 $\exists$ конечные односторонние пределы, но они не равны, то x_0 — <u>точка разрыва первого рода</u>.

Точки разрыва функции, которые не являются точками разрыва первого рода, называются точками разрыва второго рода.

Пример. ① Функция $y = \operatorname{sign} x$ имеет в $x_0 = 0$ разрыв первого рода, а функция $y = |\operatorname{sign} x|$ имеет в $x_0 = 0$ устранимый разрыв.

② Функции $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{|x|}$, $y = \sin\frac{1}{x}$ имеют в точке $x_0 = 0$ разрывы второго рода.

Приведем эквивалентное определение непрерывности функции в точке на языке последовательностей.

Опр. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in D_f$, если для $\forall \{x_n\}: x_n \in D_f$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies y_n = f(x_n)$ сходится при $n \to \infty$ и при этом её предел равен $y_0 = f(x_0)$.

Согласно этому определению, если

$x_0 \in D_f$ — предельная точка для D_f, то и (3)
при этом $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция $f(x)$ непрерывна в x_0.

Если же x_0 — изолированная точка у D_f, то сходящаяся к ней последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in D_f$, является стационарной и поэтому $f(x_n) = f(x_0)$ начиная с некоторого номера.

Упр. Переформулируйте определение непрерывности функции в точке на языке окрестностей.

Опр. (ε-δ). Функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, называется непрерывной в x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Теорема. (1) Если $f(x)$ непрерывна в x_0, то и функция $y = |f(x)|$ также непрерывна в точке x_0.

(2). Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в x_0, то функции $f(x) \pm g(x)$ и $f(x) \cdot g(x)$

также непрерывны в точке x_0. Если $g(x_0) \neq 0$, то и частное $\frac{f(x)}{g(x)}$, также непрерывная функция в x_0

(3) Если функция $\varphi(t)$ непрерывна в t_0, а функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = \varphi(t_0)$, то сложная функция $f(\varphi(t))$ – непрерывна в точке t_0.

Докажите теорему в качестве упражнения, пользуясь теоремами о пределах функций.

<u>Опр</u>. Функция $f(x)$ называется <u>непрерывн</u> <u>справа</u> в точке $x_0 \in D_f$, если существует односторонний предел $f(x_0+0)$ и при этом $f(x_0) = f(x_0+0)$.

Аналогично дается определение ф-ии непрерывной слева в точке:
$\exists f(x_0-0)$ и $f(x_0-0) = f(x_0)$.

<u>Пример</u>. Функция $y = [x]$, где $[x]$ – целая часть веществ. числа x, непрерывна во всех точках x_0, которые не являются целыми. В целых же точках у $y = [x]$ име-

ются разрывы первого рода. При этом в целых точках $y=[x]$ непрерывна справа.

4. Простейшим ограниченным замкнутым множеством на вещественной оси является отрезок. Будем рассматривать функции, определенные и непрерывные на отрезке $[a,b]$, т.е. на компакте.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда образ этого отрезка при отображении $f: [a,b] \to R$ является замкнутым и ограниченным множеством.

Док-во. В силу непрерывности $f(x)$ на $[a,b]$ у $\forall$ точки $x_0 \in [a,b]$ $\exists$ $O(x_0)$:

$$|f(x)-f(x_0)|<1 \text{ для } \forall x \in O(x_0) \cap [a,b].$$

Множество $\{O(x_0) \mid x_0 \in [a,b]\}$ окрестностей представляет собой покрытие компакта $[a,b]$. По лемме Гейне-Бореля из этого покрытия можно выбрать конечное

подпокрытие отрезка $[a,b]$, т.е.
$O(x_1), \dots, O(x_N)$: $\bigcup\limits_{j=1}^{N} O(x_j) \supset [a,b]$.

Рассмотрим следующие два вещест. числа:

$$m = \min_{1\le j\le N} (f(x_j)-1), \quad M = \max_{1\le j\le N} (f(x_j)+1).$$

Тогда
$\forall x \in O(x_j) \Rightarrow m < f(x) < M$.
Поэтому $\forall x \in [a,b] \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} O(x_j)$ имеем:

$$m < f(x) < M.$$

Таким образом, ограниченность множества $f([a,b]) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [a,b] : y = f(x)\}$ доказана. Убедимся, что это множество замкнуто.

Пусть y_0 – предельная точка мн-ва $f([a,b])$. Тогда $\exists \{y_n\}$: $y_n \in f([a,b])$ и $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$. Пусть $x_n \in [a,b]$: $f(x_n) = y_n$. У ограниченной послед-ти $\{x_n\}$ $\exists$ сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $k=1,2\ldots$; Отрезок $[a,b]$ — замкнутое множество. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0$ принадлежит $[a,b]$. По условию, $f(x)$ непрерывна в точке $x_0\in X$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$, т.е.

$$y_0 = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0).$$

Таким образом, предельная точка y_0 принадлежит самому множеству $f([a,b])$, т.е. это множество замкнуто. #

Следствие. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a,b]$, достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Док-во. По теореме $f([a,b])$ ограничено. Поэтому $\exists$ конечные грани этого мн-ва:

$m = \inf f([a,b])$, $M = \sup f([a,b])$,

$-\infty < m \leq M < +\infty$.

Точки m и M — предельные для множества $f([a,b])$ и по доказанной теореме этому замкнутому мн-ву принадлежат, (8)

т.е. $\exists x_0 \in [a, b]: \; m = f(x_0)$,

$\exists x_1 \in [a, b]: \; M = f(x_1)$.

В точке x_0 функция $f(x)$ достигает своего наименьшего на $[a, b]$ значения, а в точке x_1 – наибольшего. #

Примеры. ① Непрерывная на огр. интервале $(0, 1)$ функция $y = \frac{1}{x}$ неограничена на $(0, 1)$.
/ Т.о., существенно, что в условии теоремы отрезок $[a, b]$ – замкнут /.

② Непрерывная на $[0, +\infty)$ функция $y = x$ является неограниченной на $[0, +\infty)$.
/ Промежуток $[0, +\infty)$ замкнут, но не ограничен. Т.о., существенно, что в условии теоремы отрезок $[a, b]$ конечен. /

③ Непрерывная на $(0, 1)$ функция $y = x$ не достигает на $(0, 1)$ ни наименьшего, ни наибольшего значений.
/ Интервал $(0, 1)$ не замкнут $\to$ теоремой и следствием пользоваться нельзя /.

(4). Непрерывная на $[0,+\infty)$ функция $y=\frac{1}{1+x^2}$ (4)
не достигает на $[0,+\infty)$ своего наименьшего значения. / $[0;\infty)$ — замкнутое мн-во, но не ограничено/.

Установим некоторые свойства функций, непрерывных на промежутках.

Любой промежуток Δ вещест. прямой R обладает следующим свойством:
$a \in \Delta,\ b \in \Delta,\ a<b \Rightarrow [a,b] \subset \Delta$. (*)

Верно и обратное: если мн-во $\Delta \subset R$ обладает свойством (*), то это — промежуток числовой оси.

Теорема (о промежуточных значениях).
Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке Δ и принимает на нем значения A и B, $A<B$, то $f(x)$ принимает на Δ любое значение C: $A<C<B$.

Док-во. Построим вспомогательную последовательность вложенных отрезков, стягивающихся в точку. Построение проведем по индукции.

По условию, $\exists\, a \in \Delta$ и $b \in \Delta$: $f(a) = A$ и $f(b) = B$. Пусть $a < b$, тогда в качестве начального отрезка возьмем $[a, b]$.

Далее, пусть c_1 – середина $[a, b]$, т.е. $c_1 = \frac{a+b}{2}$. Если $f(c_1) = C$, то теорема доказана. Пусть $f(c_1) \neq C$. Если $f(c_1) > C$, то полагаем $a_1 = a$ и $b_1 = c_1$. Если же $f(c_1) < C$, то $a_1 = c_1$ и $b_1 = b$. Таким образом, имеем отрезок $[a_1, b_1]$, длина которого в два раза меньше длины $[a, b]$, и при этом

$$f(a_1) < C < f(b_1).$$

Отрезок $[a_1, b_1]$ снова разделим пополам: $c_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Если $f(c_2) = C$, то теорема доказана. Пусть $f(c_2) \neq C$. Если $f(c_2) > C$, то полагаем $a_2 = a_1$ и $b_2 = c_2$. Если же $f(c_2) < C$, то $a_2 = c_2$ и $b_2 = b_1$. Таким образом, имеем отрезок $[a_2, b_2]$, длина которого в два (1 раза меньше длины $[a_1, b_1]$ и при этом

$$f(a_2) < C < f(b_2).$$

Дальнейшие построение проведем аналогично. В результате процесс или оборвется на некотором шаге и тогда теорема будет доказана, или же получится искомая последовательность $\{[a_n, b_n]\}$ вложенных отрезков таких, что

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \quad \text{и} \quad f(a_n) < C < f(b_n),\ n = 1, 2 \dots$$

Как уже доказано ранее, числовые последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют предел при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

Этот предел $\in [a, b]$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве

$$f(a_n) < C < f(b_n)$$

в силу непрерывности $f(x)$ получаем

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq C \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c).$$

14