$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} A$

Опр. $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A}$

$\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое что $\forall n > N$: $\boxed{|x_n - A| < \varepsilon}$ $x_n \in B_\varepsilon(A)$

$x_n = \dfrac{1000n}{n^2+1}$ | $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1000n}{n^2+1} \overset{?}{=} 0$

$$\frac{1000n}{n^2+1} = \frac{1000}{n + \frac{1}{n}} = 1000 \cdot \left(\frac{1}{n + \frac{1}{n}}\right)$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $\forall n > N$: $\dfrac{1}{n + \frac{1}{n}} < \varepsilon$

$$\frac{1}{n + \frac{1}{n}} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0 \Rightarrow \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N: \dfrac{1}{n} < \varepsilon$

$$x_n = \frac{2^{n+2}}{7^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\frac{2^2\cdot 2^n}{7^n} = \underbrace{4}_{=\text{const}}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^n \xrightarrow{?} 0$$

$$y_n = \left(\frac{2}{7}\right)^n$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \ \forall n > N:$

$\left(\frac{2}{7}\right)^n < \varepsilon \ \Big| \ \frac{2}{7} < 1 \Rightarrow$ уман при ↑ меньшает

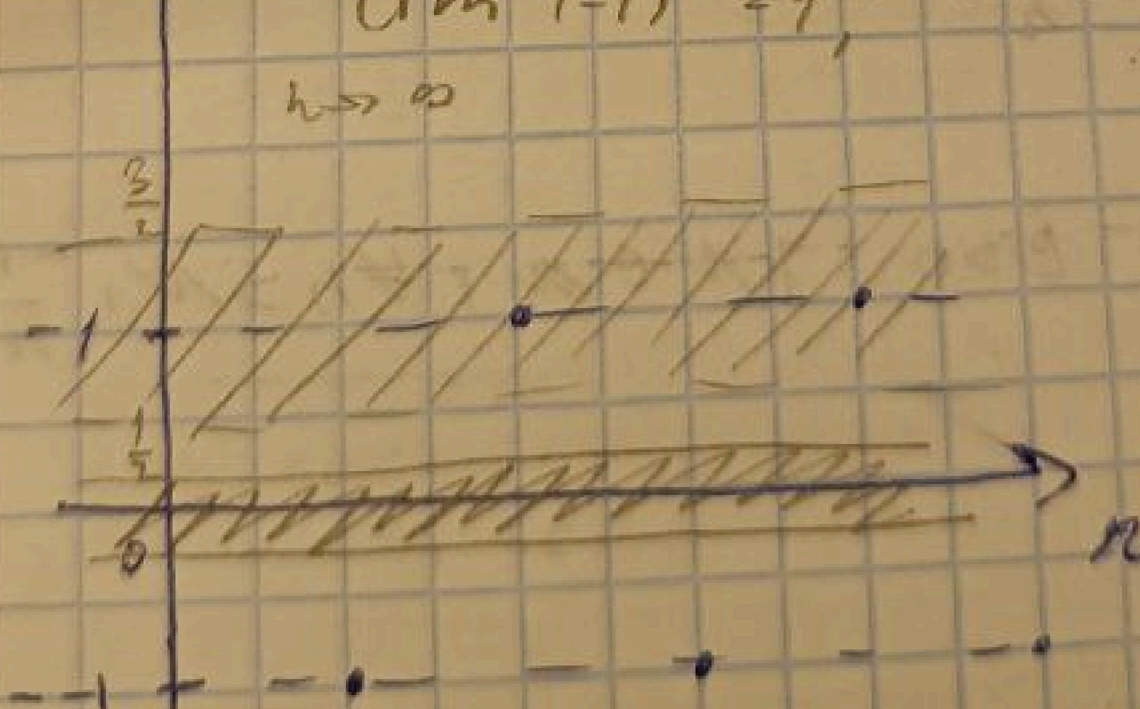
$n > \log_{\frac{2}{7}} \varepsilon$

$N = [\log_{\frac{2}{7}} \varepsilon] + 1$

$x_n = (-1)^n$; $\quad -1 \ \ 1 \ \ -1 \ \ 1 \ \ -1 \ \ 1 \ldots$

НЕТ ПРЕДЕЛА

$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = 1, \ \ \varepsilon > 0$



$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - A) = 0$; бесконечно малая последовательность, стремящаяся к нулю

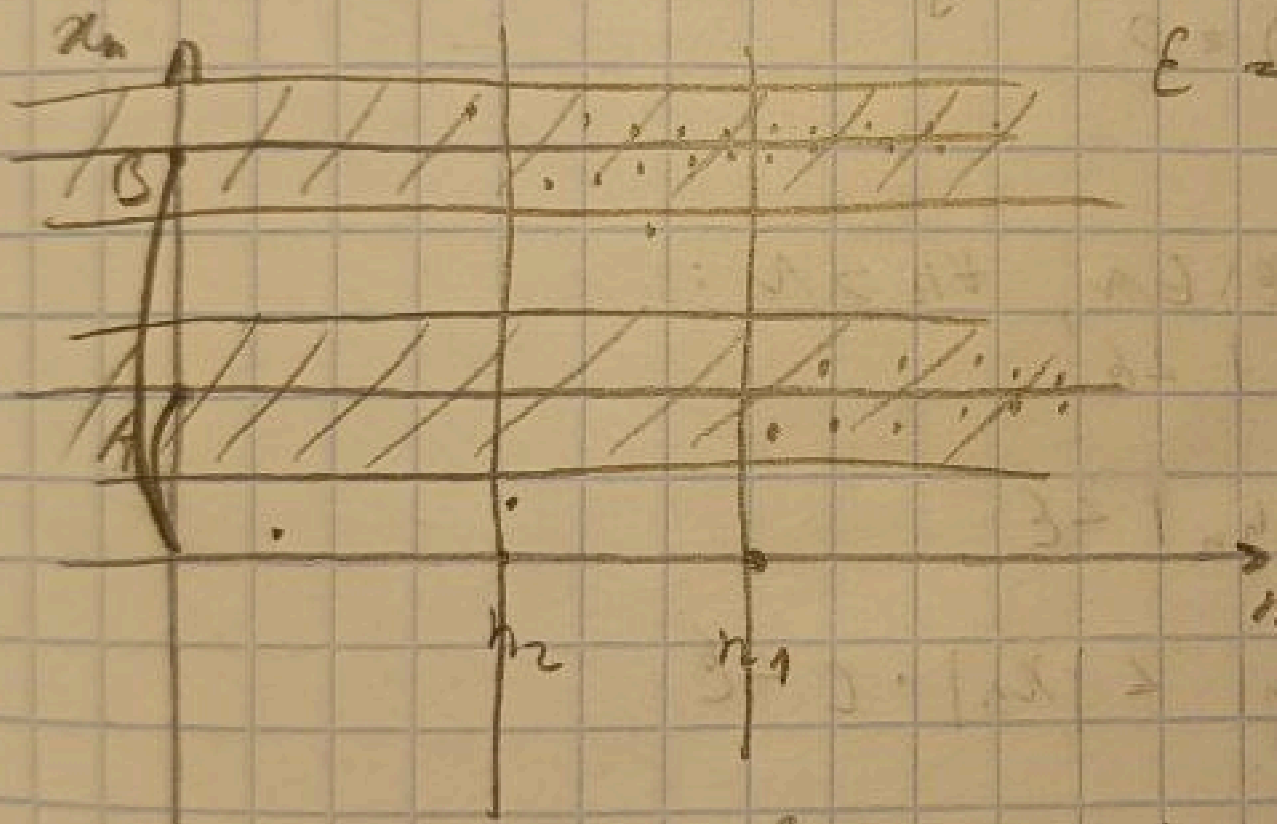
$y_n = x_n - A$

Свойства пределов:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ (единств.)

Пусть это не так:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B \neq A$



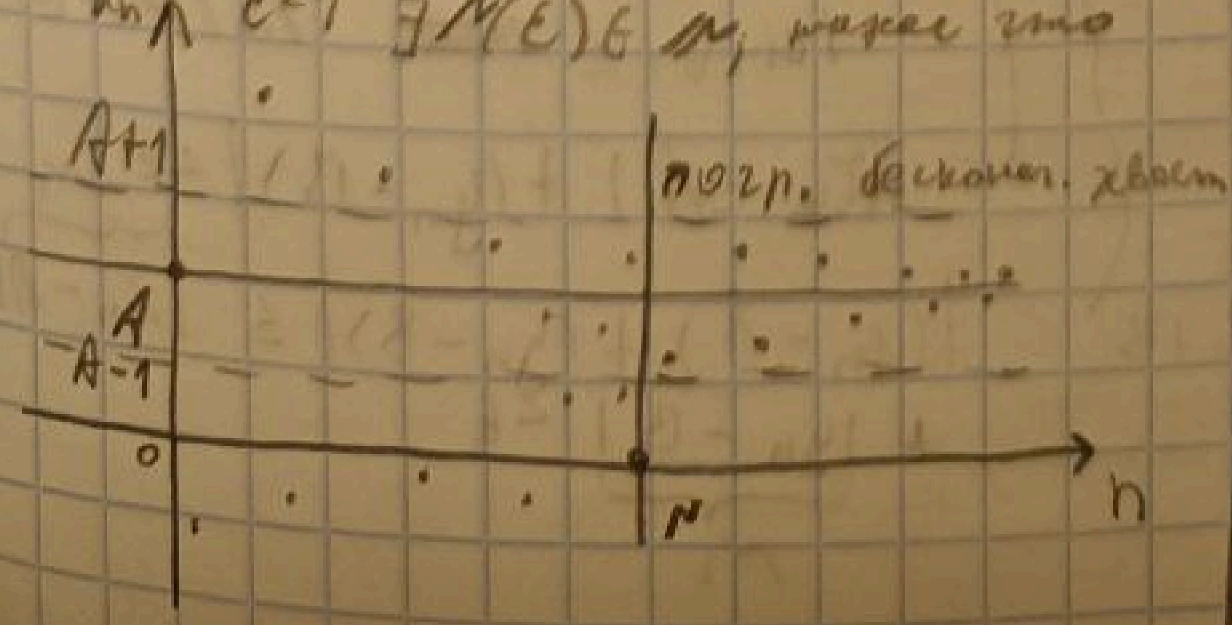
$\varepsilon = \frac{B-A}{2}$

последовательность, которая имеет предел

2) Сходящаяся последовательность ограничена

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Rightarrow \{x_n\}$ - огр. | $|x_n| < C$

$\varepsilon = 1$ $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое что $\forall n > N: |x_n - A| < 1$



Контрпример: (огр., но не сход.)

$x_n = (-1)^n$

Свойства пределов

① $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

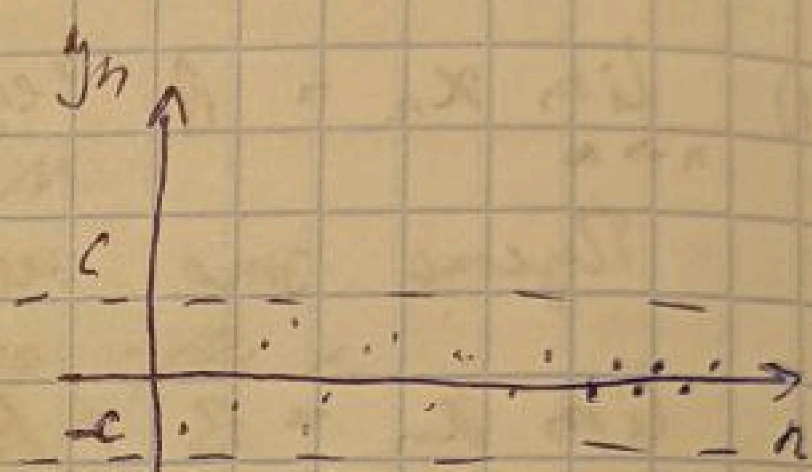
c – const

$\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot \overset{\nearrow \text{БМП}}{x_n}) = 0$

---

② $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

y_n – огр. посл. $\longrightarrow |y_n| < C$



$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \ \forall n > N:$

$|x_n \cdot y_n| < \varepsilon$

$|x_n| \cdot |y_n| < \varepsilon$

$|x_n| \cdot |y_n| < |x_n| \cdot C < \varepsilon$

---

③ Предел суммы

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$

$\lim (x_n + y_n) = A + B$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},$

$\forall n > N:$

$|x_n + y_n - A - B| < \varepsilon$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

$|(x_n - A) + (y_n - B)| < \varepsilon$

$|(x_n - A) + (y_n - B)| \leq \underbrace{|x_n - A|}_{N_1} +$

$+ \underbrace{|y_n - B|}_{N_2} < \varepsilon$

3. $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n y_n) = AB$

$$x_n - A = \alpha_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$y_n -$