Гомоморфизм

$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$

отображение

→ Если f сюръективна (если у каждого образа есть хотя бы один прообраз) — Эпиморфизм

(сюръ. + инъек.)

→ Если f биективно — изоморфизм

$1 + 2 = 3$
$3 \to -3$

$1 \to -1$
$2 \to -2$
$-1 + (-2) = -3$

гомоморфизм

Ядро гомоморфизма — элементы, которые при отображении переходят в нейтральный элемент.

Семинар.

$\Sigma = (F, P, \nu)$, $\{x_i\}$ - переменная

$T(\Sigma)$: x_i - терм

$f \in F$, $\nu(f) = n$, t_1, t_n - термы $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(t_1 \ldots t_n)$ - терм

$t_1 = t_2$ $\quad P(t_1, \ldots t_n)$ - формулы

t_i - термы, P - предик. символ

φ, ψ - формулы

$(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $\neg \varphi$ - формулы

$\forall x \varphi, \quad \exists x \varphi$

$(x = y)$

$\forall x (x = y)$

Свободное и связное вхождение

а) $\forall x (P(x, \underline{\underline{y}}) \to \forall y \, Q(y))$

б) $\forall x \, P(x, \underline{\underline{y}}) \to \forall y \, R(\underline{\underline{x}}, y)$

в) $\neg \exists x \, Q(x, x) \wedge P(f(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}))$

$\Sigma = (F, P, D)$ $\{x_i\}$ - переменные

$\mathcal{A} = (A, M)$ $\cancel{X} = \{x_0\}$

$\gamma : X \to A$ - интерпретация

$\forall [\gamma]$ $\quad t = x \quad t[\gamma] = \gamma(x)$

$t = f(t_1, \dots t_n) \quad t[\gamma] = f(t_1[\gamma], \dots t_n[\gamma])$

$\varphi = (t_1 = t_2) \quad \mathcal{A} \models \varphi[\gamma] \Leftrightarrow t_1[\gamma] = t_2[\gamma]$

$\varphi = (P(t_1, \dots t_n)) \quad \mathcal{A} \models \varphi[\gamma] \Leftrightarrow P(t_1[\gamma], \dots t_n[\gamma])$

$\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2 \quad \mathcal{A} \models \varphi[\gamma] \Leftrightarrow (\mathcal{A} \models \varphi_1[\gamma] \to \mathcal{A} \models \varphi_2[\gamma])$

$\wedge$ / $\vee$ / $\leftrightarrow$

$\varphi = \neg\psi \quad \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[\gamma] \Leftrightarrow \neg\, \mathfrak{A} \models \psi[\gamma]$

$\varphi = \forall x \psi \quad \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma] \Leftrightarrow \forall a \in A \quad \mathfrak{A} \models \psi[\gamma^{x}_{a}]$

$\exists \qquad\qquad\qquad \exists$

---

2. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ Написать φ такую, что

а) $\mathbb{N} \models \varphi(a) \Leftrightarrow a = 0$

$\varphi(x) = \forall y\, (x + y = y)$ $\quad$ is_zero $= (x = x + x)$

$\forall y\, (x \cdot y = x)$

$(x = x + x)$

б) $\mathbb{N} \models \varphi(a) \Leftrightarrow a = 1$ $\quad$ is_one$(x) = \forall y\, (x \cdot y = y)$

$\varphi(x) = \forall y\, (x \cdot y = y)$

в) $\mathbb{N} \models \varphi(a) \Leftrightarrow a = 2$ $\quad$ is_two$(x) = \forall y\, (x \cdot y = y + y)$

$\varphi(x) = \forall y\, (x \cdot y = y + y)$

г) $\mathbb{N} \models \varphi(a) \Leftrightarrow a$ - нечёт.

$\varphi(x) = \neg \exists y, z\, (is_two(y)\ \&\ x = y \cdot z)$

д) $\mathbb{N} \models \varphi(a) \Leftrightarrow a$ - чёт.

$\varphi(x) = \exists y, z\, (is_two(y)\ \&\ x = y \cdot z)$

е) $\mathbb{N} \models \varphi(a) \Leftrightarrow a$ - прост.

$(x \neq 1)\ \&\ ((x = yz \Rightarrow (y = 1 \vee z = 1))$

$\varphi(x) = \forall y, z\, (\neg$is_one$(x)\ \&\ ((x = yz) \to$

$\to ($is-one$(y) \vee$ is-one$(z)))$

$\varphi(x) = \forall y z\, ((x = y z \Rightarrow (y = 1 \vee y = x))\ \&\ x \neq 1$

3. а) $\mathbb{N} \models \varphi(a, b) \Leftrightarrow a = b$

$\varphi(x, y) = (x = y)$

б) $\mathbb{N} \models \varphi(a, b) \Leftrightarrow a \leq b$

$\varphi(x, y) = \exists h\, (x + h = y)$

в) $\mathbb{N} \models \varphi(a, b) \Leftrightarrow a < b$

$\varphi(x, y) = \exists h\, (x + h = y) \,\&\, \neg (x = y)$

$\Rightarrow p_1, p_2$ – простые числа,

г) $\mathbb{N} \models \varphi(a, b) \Leftrightarrow a, b$ – прост. близнецы, $p_2 - p_1 = 2$

$\varphi(x, y) = prime(x) \,\&\, prime(y) \,\&\, (x + 2 = y \lor$

$\lor\, x = y + 2)$

---

4. а) $\mathbb{N} \models \varphi(a, b, c) \Leftrightarrow a + b = c$

$\varphi(x, y, z) = (x + y = z)$

$\Rightarrow$ 1) $a | c$, $b | c$, 2) $a | d$, $b | d \Rightarrow c | d$

б) $\mathbb{N} \models \varphi(a, b, c) \Leftrightarrow lcm(a, b) = c$

$\varphi(x, y, z) = \exists u\, (xu = z) \,\&\, \exists u\, (yu = z) \,\&$

$\&\, \forall v\, (\exists u\, (xu = v) \,\&\, \exists u\, (yu = v) \to \exists u\, (zu = v))$