Тема : Производные и дифференциалы функций одной переменной

$\mathbf{1^0}$. Определение производной. Обозначения. Односторонние производные. $\mathbf{2^0}$. Производные элементарных функций. $\mathbf{3^0}$. Линейные приближения функции в точке. Дифференциал. $\mathbf{4^0}$. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной. $\mathbf{5^0}$. Свойства оператора дифференцирования: линейность, производная произведения и частного двух функций. $\mathbf{6^0}$. Дифференцирование сложной функции. Примеры. Производная обратной функции. $\mathbf{7^0}$. Производные высших порядков и их вычисление. Формула Лейбница.

1^0. Пусть имеется функция $f = f(x)$, $x \in D_f$, и точка x_0 из ее области определения.

Определение. *Для любой точки x из D_f, $x \neq x_0$, частное*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad \text{где } h = x - x_0,$$

называется разностным отношением функции f в точке x_0.

Определение. *Если существует предел разностного отношения*

$$\frac{\Delta f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{FD}$$

при $h \to 0$, то этот предел называется производной функции f в точке x_0.

Для производной функции используется следующее стандартное обозначение:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Может оказаться, что предел отношения $(\mathbf{FD})$ при $h \to 0$ не существует, но при этом имеются односторонние пределы при $h \to +0$ и при $h \to -0$. Эти односторонние пределы называются соответственно *правой* и *левой* производной функции f в точке x_0.

Стандартное обозначение для правой производной следующее:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{h}. \qquad (\mathbf{RD})$$

Аналогично, левая производная обозначается как

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{h \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{h}. \qquad \text{(LD)}$$

О производной функции f в точке x_0 из D_f можно говорить лишь в случае, если x_0 является предельной точкой множества D_f.

Обычно предполагается, что точка x_0 в определении производной функции f является внутренней точкой множества D_f. Это означает, что функция f определена в некоторой окрестности рассматриваемой точки x_0.

Функция f, определенная в некоторой окрестности рассматриваемой точки x_0, имеет в этой точке производную тогда и только тогда, когда существуют обе односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ и эти производные совпадают:

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Пределы при $h \to 0$, $h \to -0$ и $h \to +0$ в определении производных могут быть как конечными, так и бесконечными. Но как правило утверждение “функция имеет производную” означает, что эта производная конечна. Случай бесконечных производных оговаривается особо.

Определение. *Функция* f *называется дифференцируемой в точке* x_0, *если она определена в окрестности этой точки и имеет при этом конечную производную в* x_0.

Часто вместо x_0 пишут просто x, а шаг h обозначают как Δx и называют *приращением независимой переменной*.

Разность $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ называют *приращением функции*, или же *приращением* *зависимой переменной*. В этих обозначениях определение производной принимает следующий вид:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{df}{dx}(x).$$

Если предполагается, что $y = f(x)$, то пишут

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Таким образом, производной называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении приращения аргумента к нулю.

Операция нахождения производной функции $f = f(x)$, $x \in D_f$, называется *дифференцированием* этой функции. Оператор, сопоставляющий данной функции $y = f(x)$ ее производную $y' = f'(x)$, называется *оператором дифференцирования* и обозначается как

$$\frac{d}{dx} : y \to y'.$$

2^0. Приведем несколько примеров вычисления производных от заданных функций.

1. Пусть функция $y = y(x)$ тождественно постоянна, $y(x) = C$ для любого x. Тогда в любой точке x имеет место равенство $\Delta y = 0$. Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(x) = 0.$$

2. Пусть $y(x) = \sin x$. Тогда

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Таким образом, $(\sin x)' = \cos x$ для любого x.

3. Пусть $y(x) = \cos x$. Тогда

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x.$$

Таким образом, $(\cos x)' = -\sin x$ для любого вещественного x.

4. Пусть $y(x) = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда

$$\Delta y = a^{(x+\Delta x)} - a^x = a^x \left(a^{\Delta x} - 1 \right).$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{e^{\Delta x \ln a} - 1}{\Delta x} \right) =$$

$$= a^x (\ln a) \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{e^{\Delta x \ln a} - 1}{\Delta x \ln a} \right) = a^x \ln a.$$

В частности, при $a = e$ имеем $(e^x)' = e^x$.

5. Пусть $y(x) = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Область определения функции y — это полупрямая $D_y = \{x > 0\}$. Пусть $|\Delta x| < x$. Тогда $x + \Delta x > 0$ и далее

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

или, в эквивалентном виде:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем

$$y'(x) = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Переходя под знаком предела к новой переменной $t = \frac{\Delta x}{x}$, получаем

$$y'(x) = \frac{1}{x} \lim_{t \to 0} \log_a (1 + t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{x} \log_a \left(\lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}}\right).$$

Пользуясь здесь вторым замечательным пределом, то есть равенством

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

имеем далее

$$y'(x) = \frac{1}{x}\log_a\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right) = \frac{1}{x}\log_a e.$$

В частности, при $a = e$ имеем

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad x > 0.$$

6. Пусть $y(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда при $x > 0$ имеем

$$y(x) = x, \quad y(x+h) = x+h \quad \text{для} \quad \forall\, h : |h| < x.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x+h-x}{h} = 1 \;\Rightarrow\; \quad y'(x) = 1 \;\text{ при } \forall\, x > 0.$$

Аналогично, при $x < 0$ имеем $y(x) = -x$ и, следовательно, $y'(x) = -1$. В точке $x = 0$ имеем

$$y(0) = 0,\; y(0+h) = |h| \;\Rightarrow\; y'_{+}(0) = 1,\; y'_{-}(0) = -1.$$

Таким образом, в нуле функция $y(x) = |x|$ не является дифференцируемой, а при $x \neq 0$ производная вычисляется по формуле

$$(|x|)' = \mathbf{sign\,x}.$$

Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке (проверьте это). Обратное утверждение неверно. Например, функция $y(x) = |x|$ непрерывна в нуле, но не имеет здесь производной.

3^0. С помощью производной функции в точке конструируется ее линейное приближение в окрестности этой точки.

Лемма. *Если функция* $f = f(x)$, $x \in D_f$, *дифференцируема в точке* x_0, *то она представима в виде*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \quad (\mathrm{T}_1)$$

где функция $\alpha(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *и* $\alpha(x_0) = 0$.

Доказательство. Для любой точки $x \neq x_0$ рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0).$$

По условию функция $f = f(x)$ имеет в точке x_0 производную. Следовательно, существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Доопределив значение $\alpha(x)$ в точке x_0 равенством $\alpha(x_0) = 0$, получаем бесконечно малую при $x \to x_0$ функцию $\alpha(x)$, с которой справедливо равенство (T_1). $\square$

Условие (T_1) допускает также запись в виде следующего асимптотического равенства

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \qquad (\mathrm{T}_1')$$

где $o(\Delta x)$ — о-малое при $\Delta x = x - x_0 \to 0$.

Равенство (T_1) служит основанием для приближения функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 с помощью соотношения

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Это приближение функции $f(x)$ называется *линейным*. Оказывается, что отличных от этой формулы линейных приближений функции $f(x)$, удовлетворяющих условию (T_1), не существует.

Лемма. *Пусть функция $f = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и при этом существует число A из $\mathbb{R}$ такое что справедливо асимптотическое равенство*

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(\Delta x), \qquad (\mathrm{T}_1'')$$

где $o(\Delta x)$ — это o-малое при $\Delta x = x - x_0 \to 0$. Тогда $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и при этом $f'(x_0) = A$.

Доказательство. Из разложения (T_1'') получаем равенство

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Разделив обе части последнего равенства на $\Delta x \neq 0$, приходим к соотношению

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x).$$

Предел правой части при $\Delta x \to 0$ существует и равен A. Следовательно, существует и предел левой части, то есть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и при этом $f'(x_0) = A$. $\square$

Две последние леммы позволяют сформулировать следующий *критерий дифференцируемости* функции в точке:

Функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, дифференцируема в этой точке тогда и только тогда когда выполняется следующее асимптотическое равенство

$$\exists\, A: \; f(x) = f(x_0) + A\Delta x + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

С линейным приближением дифференцируемой в окрестности точки x_0 функции $f(x)$

тесно связано следующее важное аналитическое понятие.

Определение. *Линейная функция*

$$(x - x_0) \mapsto f'(x_0)(x - x_0)$$

называется дифференциалом функции $f(x)$ *в точке* x_0 *и обозначается как* $df(x_0)$.

Согласно этому определению имеем равенство $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$. Взяв здесь $f(x) = x$, получим $dx\Big|_{x_0} = \Delta x = x - x_0$. С учетом этого имеем

$$df(x_0) = f'(x_0)dx \quad \Leftrightarrow \quad dy = y'dx.$$

Эти же соотношения допускают следующую эквивалентную запись:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y'.$$

Критерий дифференцируемости функции в

точке допускает запись в следующей форме:

$$\Delta y = dy + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

Таким образом, $\Delta y \approx dy$. В частности, для дифференциалов элементарных функций справедливы следующие представления:

$$dC = 0; \qquad d(\sin x) = \cos x dx; \qquad d(\cos x) = -\sin x dx;$$

$$da^x = (a^x \ln a)dx; \qquad de^x = e^x dx; \qquad d(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

4^{0}. Производная функции в точке имеет наглядный геометрический смысл.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в x_0. Выделим на графике функции $y = f(x)$ две точки

$$M_0 = (x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big)$$

и

$$M_h = \big(x_0 + h, f(x_0 + h)\big), \quad \text{где} \quad h > 0.$$

Прямая, проходящая через точки M_0 и M_h графика, называется его *секущей*. Уравнение этой прямой имеет вид

$$y - y_0 = \frac{\Delta f}{h}(x - x_0). \tag{SE}$$

Определение. *Прямая M_0M, уравнение которой получается из уравнения секущей (SE) с помощью предельного перехода при $h \to 0$, называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.*

Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке может и не существовать. Но если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то касательная к ее графику в этой точке существует и задается уравнением

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Верно и обратное утверждение: если график функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет касательную, то функция $y = f(x)$ имеет в этой точке производную. Пусть уравнение касательной задается с помощью коэффициента наклона k, то есть имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Тогда $f'(x_0) = k$.

Если α — это угол, который наклонная касательная образует с осью абсцисс, то

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k.$$

Пусть теперь функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в этой точке производную, равную $+\infty$ и $-\infty$. Запишем уравнение секущей (SE) в эквивалентной форме

$$(y - y_0)\frac{h}{\Delta f} = (x - x_0).$$

Перейдем здесь к пределу при $h \to 0$, заметив, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{\Delta f} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{1}{\pm\infty} = 0.$$

В результате получим уравнение $x = x_0$. Эта вертикальная прямая на плоскости и есть касательная к графику $y = f(x)$. Угол, который эта вертикаль образует с осью абсцисс, равен $\pi/2$.

Пусть функция $y = f(x)$ в точке x_0 непрерывна, но не имеет в ней ни конечной, ни бесконечной производной. Если при этом *существуют бесконечные односторонние произ-*

водные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ *разных знаков*, то график функции $y = f(x)$ также имеет в точке x_0 вертикальную касательную $x = x_0$. В этом особом случае x_0 называется *точкой возврата*.

Отметим еще, что дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной в этой же точке:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x = df(x_0).$$

5^0. Оператор, действующий на множестве дифференцируемых функций $y = f(x)$ по формуле

$$\frac{d}{dx} : y(x) \mapsto y'(x)$$

и называемый оператором дифференцирования $D \equiv \frac{d}{dx}$, или же оператором взятия производной, обладает некоторыми стандартными свойствами. Сформулируем их.

Теорема (свойства дифференцирования $\frac{d}{dx}$). *Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x_0. Тогда для любых постоянных α, β линейная комбинация $\alpha u(x) + \beta v(x)$ — это также дифференцируемая в точке x_0 функция, производная которой задается формулой*

$$(\alpha u + \beta v)' = \alpha u' + \beta v'. \tag{D1}$$

Произведение $u(x)v(x)$ *— это также дифференцируемая в точке* x_0 *функция, причем*

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{D2}$$

Если $v(x_0) \neq 0$, *то частное* $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ *— это также дифференцируемая в точке* x_0 *функция, причем*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{D3}$$

Доказательство. Приращения пробных функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ определяются равенствами

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0), \qquad \Delta v = v(x_0 + \Delta x) - v(x_0).$$

Пусть $y(x) = \alpha u(x) + \beta v(x)$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Предел при $\Delta x \to 0$ функции в правой части этого равенства существует и равен значению $\alpha u'(x_0) + \beta v'(x_0)$. Следовательно, существует и предел функции в левой части, равный по определению $y'(x_0)$. Таким образом, свойство $(\mathbf{D1})$ доказано.

Пусть теперь $y(x) = u(x)v(x)$. Тогда

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v.$$

Разделив обе части последнего равенства на Δx, имеем далее

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x. \qquad \left(\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}\right)$$

Предел при $\Delta x \to 0$ последнего слагаемого в правой части равенства $\left(\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}\right)$ существует и равен нулю. Следовательно, предел при $\Delta x \to 0$ всей правой части рассматриваемого равенства также существует и равен выражению $(uv' + u'v)(x_0)$. Таким образом, существует и предел $y'(x_0)$ функции в левой части равенства $(\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}})$, и свойство $(\mathbf{D2})$ действительно имеет место.

Если $y(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, то

$$\Delta y = \frac{(u + \Delta u)}{(v + \Delta v)} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{(v + \Delta v)v}.$$

Разделив обе части последнего равенства на Δx, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}.$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем искомое равенство

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Таким образом, свойство (**D3**) теоремы также доказано. $\square$

Рассмотрим два примера подсчета производных элементарных функций с использованием только что доказанной теоремы.

1. Справедливы равенства

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

При вычислении производной от тангенса мы воспользовались свойством $(\mathbf{D3})$ оператора дифференцирования.

2. Аналогично для производной от $\operatorname{ctg} x$ справедливы равенства

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Здесь также использовано свойство $(\mathbf{D3})$ из предыдущей теоремы.

6^0. Выведем общее правило дифференцирования сложной функции.

Пусть функция $u = \varphi(x)$ определена и непрерывна в окрестности точки x_0, а функция $y = f(u)$ определена и непрерывна в окрестности точки $u_0 = f(x_0)$. Тогда в окрестности точки x_0 определена и непрерывна сложная функция $y = f(\varphi(x))$. Выясним, при каких условиях существует производная этой сложной функции в x_0, а также сформулируем правило подсчета этой производной.

Теорема (дифференцирование композиции). *Если функция* $u = \varphi(x)$ *дифференцируема в точке* x_0, *а функция* $y = f(u)$ *дифференцируема в точке* $u_0 = f(x_0)$, *то сложная функция* $F(x) = f(\varphi(x))$ *также дифференцируема в* x_0 *и при этом*

$$F'(x_0) = f'(u_0)\varphi'(x_0). \tag{D4}$$

Доказательство. Пусть $y = f(u)$ и задано приращение аргумента

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0) = u - u_0.$$

Для оценки приращения функции $y = f(u)$ применим формулу (T_1) и в результате получим

$$f(u) = f(u_0) + f'(u_0)(u - u_0) + \alpha(u)(u - u_0).$$

Здесь функция $\alpha(u)$ непрерывна в точке u_0 и $\alpha(u_0) = 0$. Перенеся слагаемое $f(u_0)$ в левую часть и разделив затем обе части полученного равенства на приращение Δx, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (\mathrm{T}_1(\mathrm{u}))$$

Учитывая, что при $\Delta x \to 0$ значение u стремится к u_0, имеем далее

$$\lim_{\Delta x\to 0} \alpha(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{u\to u_0} \alpha(u) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = 0 \cdot u'(x_0) = 0.$$

Используя это равенство, перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$ в формуле $(\mathrm{T}_1(\mathrm{u}))$. В результате получим искомое соотношение

$$y'(x_0) = f'(u_0)u'(x_0).$$

Таким образом, свойство $(\mathbf{D4})$ оператора дифференцирования доказано. $\square$

Приведем еще немного упрощенную, но эквивалентную запись свойства $(\mathbf{D4})$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \tag{$\mathbf{D4'}$}$$

1. Воспользуемся выведенной формулой дифференцирования композиции и подсчитаем производную степенной функции.

Пусть $y = x^{\alpha}$, где $\alpha \neq 0$. Область определения этой функции — полупрямая $x > 0$. Представим степенную функцию в виде композиции:

$$y = e^{\alpha \ln x} \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{u},\ u = \alpha \ln x.$$

Вычисляя производную от $y(x)$ по формуле (D4$'$), получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^{u} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Таким образом, степенная функция $y = x^{\alpha}$ дифференцируема в любой точке $x > 0$ и при этом

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Эту формулу возможно продолжить в точку $x = 0$ во всех тех случаях, когда обе входящие в нее функции имеют в нуле определенное значение.

В частности, при $0 < \alpha < 1$ существует бесконечная односторонняя правая производная степенной функции $y = x^{\alpha}$ в нуле: $y'_{+}(0) = +\infty$.

Если $\alpha = 1$, то $y'_{+}(0) = 1$. Если же $\alpha > 1$, то $y'_{+}(0) = 0$.

2. В качестве еще одного примера применения свойств дифференцирования найдем производные гиперболического косинуса и синуса.

Определение. *Полуразность* $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *двух экспонент называется гиперболическим синусом и обозначается как* $\operatorname{sh} x$. *Полусумма* $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ *называется гиперболическим косинусом и обозначается как* $\operatorname{ch} x$.

Производные гиперболических синуса и косинуса вычисляются по формулам

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

3. Найдем производную сложной функции $y = \ln|x|$, $x \neq 0$. Если $x > 0$, то $y = \ln x$. Произ-

водная натурального логарифма подсчитана ранее: $y' = \frac{1}{x}$.

Если же $x < 0$, то $y = \ln(-x)$ и производная вычисляется по формуле

$$y' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}.$$

Таким образом, для всех $x \neq 0$ справедливо равенство

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

Если функция $u(x)$ дифференцируема и при этом $u(x) \neq 0$, то

$$d(\ln|u|) = \frac{du}{u} = \frac{u'}{u}dx.$$

4. Найдем производную сложной функции $y = u^v$, где $u = u(x) > 0$ и $v = v(x)$. Записав эту функцию в виде $y = e^{v \ln u}$, имеем далее

$$y' = e^{v \ln u}(v \ln u)' = u^v \left(v' \ln u + v\frac{u'}{u} \right).$$

В частности, при $u(x) = v(x) = x$ имеем

$$(x^x)' = x^x(\ln x + 1).$$

7^0. Выведем правило дифференцирования обратной функции. Пусть есть две взаимообратные дифференцируемые функции $u = f(x)$ и $x = \varphi(y)$. Тогда

$$f(\varphi(y)) = y \qquad \forall\, y \in D_\varphi.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по переменной y и пользуясь формулой для производной сложной функции, получаем

$$\frac{d}{dy}\left[f(\varphi(y))\right] = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1 \qquad \forall\, y \in D_\varphi.$$

Следовательно, для всех x из области определения D_f должно выполняться равенство

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}, \quad \text{где} \quad y = f(x).$$

Теорема (формула дифференцирования обратной функции). *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена и непрерывна в окрестности точки* x_0, *а также обратима на этой окрестности. Если обратная функция* $x = \varphi(y)$ *имеет в точке* $y_0 = f(x_0)$ *ненулевую производную* $\varphi'(x_0) \neq 0$, *то функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в* x_0. *При этом справедлива формула*

$$f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)}, \quad \text{где} \quad y_0 = f(x_0). \tag{D5}$$

Отметим, что формула $(\mathbf{D5})$ остается справедливой и в случае, если $\varphi'(y_0) = \pm\infty$. При этом $f'(x_0) = 0$.

1. Найдем производную обратной функции $y = \arcsin x$, где $-1 < x < 1$.

Учитывая, что $x = \sin y$, где $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, получим по формуле $(\mathbf{D5})$:

$$y' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Выразим правую часть этого равенства как функцию переменной x. Заметим, что при $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ косинус положителен: $\cos y > 0$. Следовательно,

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

и по этой причине

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \text{где} \quad -1 < x < 1.$$

2. Аналогично находим производную обратной функции $y = \arccos x$, где $-1 < x < 1$. Учитывая, что $x = \cos y$, где $y \in (0, \pi)$, получим по формуле $(\mathrm{D5})$:

$$y' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Пусть теперь $y = \operatorname{arctg} x$, где $-\infty < x < +\infty$. Тогда $x = \operatorname{tg} y$, где $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Следовательно,

$$y' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Аналогично получается формула для функции $y = \operatorname{arcctg} x$, где $-\infty < x < +\infty$:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

4. Пусть заданы две функции одной и той же переменной t:

$$x = x(t), \qquad y = y(t).$$

Если при этом существует функция $t = t(x)$, обратная к $x = x(t)$, то, как говорят, *сложная функция* $y = y(t(x))$ *задана параметрически*. Производную этой сложной функции можно найти по формуле

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)},$$

где $x'(t) \neq 0$.