Тема : Производные и дифференциалы функций одной переменной

$\mathbf{1^0}$. Определение производной. Обозначения. Односторонние производные. $\mathbf{2^0}$. Производные элементарных функций. $\mathbf{3^0}$. Линейные приближения функции в точке. Дифференциал. $\mathbf{4^0}$. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной. $\mathbf{5^0}$. Свойства оператора дифференцирования: линейность, производная произведения и частного двух функций. $\mathbf{6^0}$. Дифференцирование сложной функции. Примеры. Производная обратной функции. $\mathbf{7^0}$. Производные высших порядков. Примеры. $\mathbf{8^0}$. Свойства операторов дифференцирования высших порядков. Линейность. Формула Лейбница.

7^0. Пусть функция $f = f(x)$, $x \in D_f$, имеет в окрестности точки x_0 из своей области определения производную $f' = f'(x)$. Может оказаться, что функция $f' = f'(x)$ также дифференцируема в точке x_0.

Определение. *Производная от функции $f' = f'(x)$, $x \in D_{f'}$, называется второй производной от функции f и обозначается символом $f'' = f''(x)$:*

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}, \quad x_0 \in D_{f'}.$$

Помимо символа $y'' = f''(x)$ для второй производной функции $y = f(x)$ используются также обозначения $\frac{d^2y}{dx^2}(x)$, $y^{(2)}(x)$.

Вторую производную функции называют также *производной второго порядка*.

Аналогично определяются производные более высокого порядка чем второй. Точнее для любого натурального n полагается

$$f^{(n+1)}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n)}(x_0)}{\Delta x},$$

где x_0 — произвольная точка из области определения производной $f^{(n)}$.

Отметим, что для определения производной порядка $n+1$ по приведенным рекуррентным соотношениям необходимо знать, что такое производная порядка n.

Для производной функции $y = f(x)$ порядка n используются также обозначения

$$\frac{d^n y}{dx^n}(x), \quad y^{(n)}(x).$$

Рассмотрим три примера, в которых вычисляется производная второго порядка от функции.

1. С помощью производных высокого порядка записываются разные *дифференциальные*

уравнения, широко применяемые при моделировании механических процессов. Например, в теории колебаний используется следующее дифференциальное уравнение:

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad \text{где} \quad \omega \in \mathbb{R}. \qquad (\mathrm{O}_\omega)$$

Выразим функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую этому уравнению, через элементарные функции. Заметим, что уравнению (O_ω) удовлетворяют следующие две тригонометрические функции:

$$y_1(x) = \sin \omega x, \qquad y_2(x) = \cos \omega x.$$

Используя свойства операции дифференцирования, получаем

$$y_1'(x) = \omega \cos \omega x \Rightarrow y_1''(x) = -\omega^2 \sin \omega x.$$

Следовательно, $y_1''(x) = -\omega^2 y_1(x)$, или

$$y_1''(x) + \omega^2 y_1(x) = 0.$$

Аналогично, для функции $y_2(x)$ справедливы равенства

$$y_2'(x) = -\omega \sin \omega x \Rightarrow y_2''(x) = -\omega^2 \cos \omega x.$$

Следовательно, $y_2''(x) = -\omega^2 y_2(x)$, или

$$y_2''(x) + \omega^2 y_2(x) = 0.$$

Вместе с функциями y_1 и y_2 решением уравнения (O_ω) является любая их линейная комбинация, то есть функция вида

$$y(x) = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x,$$

где C_1 и C_2 — это произвольные веществен-ные постоянные, которые не зависят от x.

2. Найдем вторую производную натурально-го логарифма $y = \ln x$, $x > 0$. Имеем равенства

$$y'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x} y'.$$

Таким образом, функция $y = \ln x$ является решением следующего дифференциального уравнения второго порядка:

$$xy'' + y' = 0.$$

3. Пусть заданы две функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ вещественного параметра t и при этом существует обратная к $x = x(t)$ функция $t = t(x)$.

Тогда первая производная сложной функции $y = y(t(x))$ находится по формуле

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)},$$

где $x'(t) \neq 0$. Найдем вторую производную функции $y = y(t(x))$ по переменной x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) \cdot \frac{dt}{dx}.$$

Пользуясь формулой для производной от отношения двух функций, получаем далее

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x'(t)} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{y''x' - y'x''}{(x')^3}.$$

Штрихи в правой части этого равенства означают взятие производных по переменной t. В частном случае, когда $x = t$ полученное равенство принимает вид тождества.

8^0. Установим некоторые свойства оператора дифференцирования высокого порядка, то есть порядка $n > 1$.

Теорема (линейность). *Для любых двух функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$, имеющих в некоторой области все производные до порядка n включительно, во всех точках этой же области справедливо равенство*

$$\frac{d^n}{dx^n}(C_1 u + C_2 v) = C_1 \frac{d^n u}{dx^n} + C_2 \frac{d^n v}{dx^n}.$$

Здесь C_1 *и* C_2 *— это произвольные вещественные постоянные.*

Докажите теорему индукцией по порядку n оператора дифференцирования.

С помощью свойства линейности оператора дифференцирования произвольного порядка и известных формул для производных степенных функций легко сосчитать производную любого порядка от полинома произвольной степени. Например, для полинома $y(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ справедливы равенства

$$y' = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow y'' = 6x + 2 \Rightarrow y''' = 6.$$

Все последующие производные от полинома y третьей степени, то есть производные порядка $n \geqslant 4$, это тождественно нулевые функции.

В общем случае производная порядка n от полинома степени m при $n > m$ всегда тождественно равна нулю.

Теорема (формула Лейбница). *Для любых двух функций* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$, *имеющих в точке* x_0 *все производные до порядка* n *включительно, их произведение* $y = u(x)v(x)$ *также имеет в этой точке производную по-*

рядка n. *При этом справедливо равенство*

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}, \tag{LF}$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$ *и* C_n^k *— это биномиальные коэффициенты:*

$$C_n^k \equiv \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доказательство. Равенство (**LF**), известное как *формула Лейбница*, докажем индукцией по порядку n производной. При $n = 1$ формула Лейбница принимает уже известный нам вид

$$(uv)' = uv' + u'v,$$

то есть верна.

Предположим, что формула Лейбница установлена для производной порядка $n \geqslant 1$. В этом предположении сосчитаем производную порядка $n+1$ от произведения $y = u(x)v(x)$. Имеем по определению $y^{(n+1)} = (y^{(n)})'$. Подставляя в правую часть этой формулы значение производной $y^{(n)}$, вычисленное согласно равенству $(\mathbf{LF})$, получаем

$$y^{(n+1)} = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}\right)'.$$

Внося производную в правой части этого равенства под знак суммы и пользуясь правилом вычисления производной первого порядка от произведения двух функций, получим

$$y^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k+1)} v^{(n-k)}.$$

В первом слагаемом в правой части выделим отдельно слагаемое, соответствующее $k = 0$, а во втором — слагаемое, соответствующее

$k = n$. Тогда получим

$$y^{(n+1)} = u^{(0)}v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n+1-k)} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k u^{(k+1)} v^{(n-k)} + u^{(n+1)} v^{(0)}.$$

В первой сумме второй строки от суммирования по индексу k перейдем к суммированию по индексу $j = k + 1$, то есть сделаем замену $k = j - 1$. Тогда получим

$$y^{(n+1)} = u^{(0)}v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n+1-k)} + \\ + \sum_{j=1}^{n} C_n^{j-1} u^{(j)} v^{(n+1-j)} + u^{(n+1)} v^{(0)}.$$

Перейдем в полученных суммах к суммированию по общему индексу, в качестве которого выберем k, то есть в сумме второй строки сделаем замену $j = k$ и затем вынесем сумму по k за скобки:

$$y^{(n+1)} = u^{(0)}v^{(n+1)} + u^{(n+1)}v^{(0)} + \\ + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1} \right) u^{(k)}v^{(n+1-k)}.$$

Биномиальные коэффициенты связаны между собой следующим рекуррентным соотношением:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Учитывая это, получаем

$$y^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} u^{(k)} v^{(n+1-k)}.$$

Таким образом, формула Лейбница имеет место и для производной порядка $n+1$. Шаг индукции завершен. $\square$

Тема : Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

$\mathbf{1^0}$. Теорема Ферма. $\mathbf{2^0}$. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Следствия. Формула конечных приращений. $\mathbf{3^0}$. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. $\mathbf{4^0}$. Формула Маклорена и разложения по этой формуле основных элементарных функций.

1^0. Пусть есть функция $f = f(x)$, $x \in D_f$, и точка x_0 из области D_f.

Определение. *Точка x_0 называется точкой локального максимума функции $f = f(x)$, если существует окрестность $O(x_0)$ этой точки, в которой все возможные значения функции $f(x)$ не превосходят ее значения в x_0:*

$$\forall\, x \in O(x_0) \cap D_f \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0). \qquad (\mathrm{Max})$$

Слово "локальный" при ссылке на точку максимума зачастую опускается.

Аналогично определяется точка *локального минимума* функции: отличие в том, что вместо неравенства в условии $(\mathbf{Max})$ используется ему противоположное:

$$\forall\, x \in O(x_0) \cap D_f \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_0). \qquad (\mathbf{Min})$$

Точки максимума и минимума функции называются ее *экстремальными точками*, или *экстремумами*, значения же функции в ее экстремальных точках называются *экстремальными значениями* этой функции.

Определение. *Функция f называется дифференцируемой на интервале (a, b), если она определена на этом интервале и имеет в каждой его точке x_0 конечную производную в $f'(x_0)$.*

Теорема (Ферма). *Если функция* $f(x)$, $x \in D_f$, *дифференцируема во внутренней точке* x_0 *области* D_f, *и при этом* x_0 *— это точка экстремума для* $f(x)$, *то имеет место равенство*

$$f'(x_0) = 0. \tag{FC}$$

Доказательство. По условию функция $f(x)$ определена во всех точках некоторой окрестности $O(x_0)$ точки x_0 и имеет в ней конечную производную $f'(x_0)$.

Если x_0 — это точка максимума функции $f(x)$, то существует окрестность $O_1(x_0) \subset O(x_0)$ и обладающая тем свойством, что

$$\forall\, x \in O_1(x_0) \cap D_f \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0).$$

Для любой точки x, лежащей в окрестности $O_1(x_0)$ левее x_0, $x < x_0$, справедливо неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

Переходя здесь к пределу при $x \to x_0 - 0$, получаем

$$f'_-(x_0) = f'(x_0) \geqslant 0.$$

Аналогично, для любой точки x, лежащей в окрестности $O_1(x_0)$ правее x_0, $x > x_0$, справедливо неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0.$$

Переходя здесь к пределу при $x \to x_0 + 0$, получаем

$$f'_+(x_0) = f'(x_0) \leqslant 0.$$

Следовательно, все три производных $f'_0(x_0)$, $f'_+(x_0)$ и $f'(x_0)$ обязаны быть нулевыми во внутренней точке максимума.

Случай внутренней точки минимума рассматривается аналогично. $\square$

Существенно, что экстремальная точка x_0 в условии теоремы Ферма внутренняя для области D_f. Если $D_f = [a, b]$ и точка экстремума $x_0 = a$ или $x_0 = b$, то производная $f'(x_0)$ может и не обратиться в нуль.

Простая геометрическая интерпретация теоремы Ферма формулируется следующим образом: если x_1 и x_2 — экстремальные точки функции $y = f(x)$, то график этой функции имеет в x_1 и x_2 горизонтальные касательные.

Теорема (Ролля). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и при этом $f(a) = f(b)$, то существует точка ξ из (a, b) такая, что $f'(\xi) = 0$.*

Доказательство. Будем предполагать, что f на отрезке $[a, b]$ не является тождественно постоянной функцией. В противном случае в качестве искомой точки ξ из (a, b) годится любая точка этого интервала.

Отрезок $[a, b]$ — это замкнутое ограниченное множество на числовой прямой, то есть компакт. По теореме Вейерштрасса непрерывная функция $f(x)$ достигает на этом компакте своих наибольшего M_f и наименьшего m_f

значений. Точнее

$$\exists\, \xi_1 \in [a,b]: \qquad f(\xi_1) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) = M_f,$$

$$\exists\, \xi_2 \in [a,b]: \qquad f(\xi_2) = \min_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) = m_f.$$

Заметим, что из двух точек ξ_1 и ξ_2, $\xi_1 \neq \xi_2$, по крайней мере одна лежит внутри интервала (a,b). В противном случае из условия $f(a) = f(b)$ следуют равенства

$$M_f = f(\xi_1) = f(a) = f(b) = f(\xi_2) = m_f.$$

Но если $M_f = m_f$, то функция $f(x)$, значения которой подчинены условиям $m_f \leqslant f(x) \leqslant M_f$, тождественно постоянна на отрезке $[a, b]$, а это противоречит исходному предположению.

Искомую точку ξ из интервала (a, b) зададим теперь следующим образом: если $a < \xi_1 < b$, то полагаем $\xi = \xi_1$; иначе возьмем $\xi = \xi_2$.

Заданная таким образом точка ξ является внутренней для интервала (a, b) и экстремальной для функции $f(x)$. Применяя к $f(x)$ теорему Ферма, получаем требуемое равенство $f'(\xi) = 0$. $\square$

Теорема (Лагранжа). *Пусть функция* $f = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и дифференцируема на интервале* (a, b). *Тогда существует точка* ξ *из* (a, b) *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \lambda x$, где постоянная λ находится из условия

$$F(b) = F(a) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и при этом $F(a) = F(b)$. Таким образом, функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Следовательно, найдется точка ξ из (a, b)

такая, что $F'(\xi) = 0$. Подставляя в это равенство выражение $F(x) = f(x) - \lambda x$, получаем

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(\xi) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Таким образом, точка ξ с нужными свойствами действительно существует. $\square$

Следствие (формула Лагранжа). *Пусть* $f(x)$ *непрерывна в окрестности* $O(x_0)$ *точки* x_0 *и* *дифференцируема в проколотой окрестности $\dot{O}(x_0)$. Тогда для любого x из $\dot{O}(x_0)$ существует точка ξ из $(x_0, x) \cup (x, x_0)$ такая, что*

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0). \qquad \text{(L)}$$

Доказательство. Пусть точка x лежит в окрестности $O(x_0)$ и при этом $x > x_0$. Тогда на отрезке $[x_0, x]$ функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа. Следовательно, существует точка ξ из интервала (x_0, x) такая, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi).$$

Домножая обе части этого равенства на $x - x_0$, получаем формулу $(\mathbf{L})$.

В случае $x < x_0$ все аналогично. $\square$

Формула Лагранжа $(\mathbf{L})$, или *формулу конечных приращений*, часто используют в несколько ином виде.

Следствие (формула Лагранжа'). *Пусть $f(x)$ непрерывна в $\overline{O}(x_0)$ и дифференцируема в проколотой окрестности $\dot{O}(x_0)$ точки x_0. Тогда для любого x из $\dot{O}(x_0)$ существует точка θ из интервала $(0, 1)$ такая, что*

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x) \cdot \Delta x, \qquad (\mathbf{L}')$$

где $\boldsymbol{\Delta x = x - x_0}$.

Для обоснования равенства $(\mathbf{L'})$ достаточно найти $\boldsymbol{\theta}$ из условия $\boldsymbol{x_0 + \theta\Delta x = \xi}$, где $\boldsymbol{\xi}$ — это параметр из формулы $(\mathbf{L})$.

Приведем пример применения формулы конечных приращений для решения простейшего дифференциального уравнения $\boldsymbol{y' = 0}$ на отрезке.

Лемма. *Пусть функция $f = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Если при этом производная $f'(x)$ равна нулю всюду внутри (a, b), то эта функция тождественно постоянна на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку x_0 из интервала (a, b). Тогда для любой другой точки x из (a, b) получаем по формуле конечных приращений

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = 0.$$

Здесь использовано условие, что производная $f'(\xi)$ тождественно равна нулю внутри интервала (a, b).

Таким образом, для любой точки x из (a, b) справедливо равенство $f(x) = f(x_0)$. $\square$

Определение. *Функция $f(x)$ называется кусочно-дифференцируемой на отрезке $[\alpha, \beta]$ числовой оси, если $f(x)$ имеет конечную производную во всех внутренних точках этого отрезка за возможным исключением некоторого конечного подмножества $\{x_1, \ldots, x_N\}$ его точек:*

$$\exists\, \{x_1, \ldots, x_N\} : \quad \forall\, x \in [\alpha, \beta] \setminus \{x_1, \ldots, x_N\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ \exists\, f'(x) : |f'(x)| < \infty.$$

Лемма. *Пусть функция* $f = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и кусочно-дифференцируема на интервале* (a, b).

Если всюду внутри (a, b), *кроме конечного числа точек, производная* $f'(x)$ *равна нулю, то функция* $f(x)$ *тождественно постоянна на всем отрезке* $[a, b]$.

Доказательство. По условию найдутся точки $\{x_1, \ldots, x_N\}$, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < b$, обладающие тем свойством, что

$$f'(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \bigcup_{j=0}^{N} (x_j, x_{j+1}).$$

Здесь $x_0 = a$ и $x_{N+1} = b$. Применяя предыдущую лемму, заключаем, что на каждом из интервалов (x_j, x_{j+1}) функция $f(x)$ постоянна, то есть

$$f(x) = C_j \quad \text{при} \quad \forall\, x \in (x_j, x_{j+1}).$$

По условию $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Следовательно, в каждой из точек множества $\{x_1, \ldots, x_N\}$ существуют оба ее односторонних предела и эти пределы равны. Это возможно лишь при условии, что

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_N.$$

Это и означает, что функция $f(x)$ тождественно постоянна на всем отрезке $[a, b]$. $\square$

Теорема (Коши). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на (a, b). Тогда существует точка ξ из (a, b) такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{Cau}$$

Доказательство. Из условия $g'(x) \neq 0$ на (a, b) заключаем по теореме Ролля, что $g(b) \neq g(a)$.

Таким образом, знаменатель в левой части равенства ($\mathbf{Cau}$) заведомо ненулевой.

Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$, где постоянная λ находится из условия

$$F(b) = F(a) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и при этом $F(a) = F(b)$. Таким образом, функция

$F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Следовательно, найдется точка ξ из (a,b) такая, что $F'(\xi)=0$. Подставляя в это равенство выражение $F(x)=f(x)-\lambda g(x)$, получаем

$$f'(\xi)-\lambda g'(\xi)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Таким образом, точка ξ с нужными свойствами действительно существует. $\square$

3^0. Пусть функция $f = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производную порядка n. Тогда $f(x)$ имеет в x_0 производные всех предшествующих n порядков $n-1$, $n-2$, ..., 1.

Определение. *Полином*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

называется полиномом Тейлора функции $f(x)$ *в точке* x_0.

Полином Тейлора функции $f(x)$ обладает следующими интерполяционными свойствами в точке x_0:

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Проверьте эти равенства в качестве упражнения.

Для того чтобы оценить качество приближения функции $f(x)$ полиномом Тейлора рассматривается разность их значений

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Функцию $r_n(x)$ называют *погрешностью приближения* $f(x)$ ее полиномом Тейлора.

Определение. *Равенство*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x) \qquad \textbf{(TF)}$$

называется формулой Тейлора для функции $f(x)$ *в точке* x_0 *с остаточным членом* $r_n(x)$.

Теорема (об остатке формулы (TF)). *Пусть функция* $f(x)$ *определена в окрестности* $O(x_0)$ *точки* x_0, *имеет в* x_0 *непрерывную производную порядка* n *и при этом* $f^{(n)}(x)$ *дифференцируема в проколотой окрестности* $\dot{O}(x_0)$. *Тогда для любой точки* x *из* $\dot{O}(x_0)$ *существует лежащая строго между* x *и* x_0 *точка* $\xi = \xi(x)$ *такая, что имеет место равенство*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Доказательство. Пусть $x \in O(x_0)$ и $x < x_0$. На интервале (x, x_0) рассмотрим пару функций

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad \text{и} \quad \varphi(x) = (x - x_0)^{n+1}.$$

В точке x_0 для них выполняются следующие равенства:

$$r_n^{(k)}(x_0) = 0, \quad \varphi^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Кроме того функции $r_n(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируемы на (x, x_0), а

$$\varphi'(x) = (n+1)(x-x_0)^n \neq 0 \quad \text{при} \quad x < x_0.$$

Пользуясь теоремой Коши и формулой (Cau) в применении к паре $r_n(x)$ и $\varphi(x)$, находим точку ξ_1 из интервала (x, x_0), удовлетворяющую условию

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)} = \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{r_n'(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)}. \tag{1}$$

На непустом интервале (ξ_1, x_0) применим теорему Коши к паре первых производных $r'_n(x)$ и $\varphi'(x)$ и находим точку ξ_2, $\xi_1 < \xi_2 < x_0$, обладающую следующим свойством:

$$\frac{r'_n(x)}{\varphi'(x)} = \frac{r'_n(x) - r'_n(x_0)}{\varphi'(x) - \varphi'(x_0)} = \frac{r''_n(\xi_2)}{\varphi''(\xi_2)}. \qquad (2)$$

Аналогичные равенства справедливы для отношений вторых производных функций $r_n(x)$ и $\varphi(x)$, их третьих производных и т.д. вплоть до отношения производных порядка $n-1$ от этих же функций.

Последнее из указанной цепочки равенств получим, применив на непустом интервале $\xi_{n-1} < x < x_0$ теорему Коши к паре производных $r_n^{(n-1)}(x)$ и $\varphi^{(n-1)}(x)$, непрерывных и дифференцируемых на этом интервале.

В результате найдем точку ξ_n, $\xi_{n-1} < \xi_n < x_0$, обладающую следующим свойством:

$$\frac{r_n^{(n-1)}(x) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{\varphi^{(n-1)}(x) - \varphi^{(n-1)}(x_0)} = \frac{r_n^{(n)}(\xi_n)}{\varphi^{(n)}(\xi_n)}.$$

Учитывая здесь, что $r_n^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0$, для всех $\xi_n < x < x_0$ получаем

$$\frac{r_n^{(n-1)}(x)}{\varphi^{(n-1)}(x)} = \frac{r_n^{(n)}(\xi_n)}{\varphi^{(n)}(\xi_n)}. \qquad \mathbf{(n)}$$

Воспользуемся теперь равенствами

$$r_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x),$$

$$\varphi^{(n)}(x) = (n+1)!(x - x_0)$$

и применим на непустом интервале

$$\xi_n < x < x_0$$

теорему Коши к паре производных $r_n^{(n)}(x)$ и $\varphi^{(n)}(x)$, непрерывных и дифференцируемых на этом интервале.

Тогда найдем точку ξ, $\xi_n < \xi < x_0$, обладающую следующим свойством:

$$\frac{r_n^{(n)}(x_0) - r_n^{(n)}(\xi_n)}{\varphi^{(n)}(x_0) - \varphi^{(n)}(\xi_n)} = \frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)}.$$

Учитывая здесь, что $r_n^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0) = 0$, получаем еще одно равенство

$$\frac{r_n^{(n)}(\xi_n)}{\varphi^{(n)}(\xi_n)} = \frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \qquad (\mathbf{n+1})$$

Пользуясь последовательно равенствами $(\mathbf{1})$, $(\mathbf{2})$, ..., $(\mathbf{n})$ и $(\mathbf{n+1})$, приходим к соотношению

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \text{где} \quad \xi \in (x, x_0).$$

Окончательно получаем из этого равенства

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\varphi(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Это и есть искомое представление остатка.

Если $x > x_0$, то все аналогично. $\square$

Определение. *Равенство*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad (\mathbf{TLF})$$

где точка $\xi = \xi(x)$ *лежит строго между* x *и* x_0, *называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.*

Как следует из формулы $(\mathbf{TLF})$ любой полином $Q_n(x)$ степени n допускает в произвольной точке x_0 числовой прямой следующее точное разложение по формуле Тейлора

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

4^0. Формулу Тейлора в начале координат называют также формулой Маклорена.

Определение. *Равенство*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x) \qquad \text{(MF)}$$

называется формулой Маклорена для функции $f(x)$ *с остаточным членом* $r_n(x)$.

Найдем разложения по этой формуле некоторых элементарных функций.

1) Пусть $f(x) = e^x$ и $x_0 = 0$. Тогда $f^{(k)}(x) = e^x$ при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, $f^{(k)}(0) = 1$ и по доказанной теореме существует θ из интервала $0 < \theta < 1$ со свойством

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{\theta x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2) Пусть $f(x) = \sin x$ и $x_0 = 0$. Тогда

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} \cos(\theta x) \cdot x^{2n+3},$$

где $0 < \theta < 1$. Аналогично, справедливо равенство

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} \sin(\theta x) \cdot x^{2n+2}.$$

3) Пусть $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, где $\alpha > 0$, причем по-

казатель степени $\alpha > 0$ может быть и дробным. Взяв $x_0 = 0$, получаем равенства

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

и далее для всех $k = 2, 3, \ldots$:

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1).$$

Следовательно, по доказанной теореме существует θ из интервала $0 < \theta < 1$ со свойством

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}.$$

Для сокращения этой записи используются

следующие обозначения:

$$\binom{\alpha}{k} \equiv \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} \equiv C_{\alpha}^{k}.$$

Предыдущая формула Маклорена при этом записывается в виде

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{\alpha}{k} x^{k} + \\ + \binom{\alpha}{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}.$$

Отметим, что для натуральной степени α это равенство представляет собой формулу бинома Ньютона.

4) Пусть $f(x) = \ln(1+x)$ и $x_0 = 0$. Тогда получаем равенства

$$f'(x) = (1+x)^{-1},\ f''(x) = -(1+x)^{-2},$$

и далее для всех $k = 2, 3, \dots$:

$$f^{(k)}(x) = (-1)\dots(-k+1)(1+x)^{-k}.$$

Таким образом, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ и формула Маклорена принимает вид

$$\ln(1+x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \\ + \frac{(-1)^n}{n+1}(1+\theta x)^{-n-1} x^{n+1}.$$

Здесь $0 < \theta < 1$.