2211
2216 (а, в)
2212
2237(б)
2242
2246
2251(а, б)
2252
2258

Определённый интеграл

! Для $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ должна выполняться непрерывность

№ 2211

$$\int_0^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 = \left(0 + \frac{1}{2}\right) - \left(\left(-\frac{1}{2}\right) - 0\right) = 1$$

$F(2) - F(0)$

№ 2216

$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ не является непрерывной на отрезке (несобств. инт.)

$\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)dx$ также не определена при x 0, но при $x \neq 0$ $\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}, & x \neq 0 \\ \text{несущ.}, & x = 0 \end{cases}$

Можно доопределить функцию, тогда:

$$-\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=-\operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^{1}=-\frac{\pi}{2}$$

№ 2212

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1},=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2\cos\alpha\cdot x+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+1}=$$

$(0<\alpha<\pi)$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\int_{-1}^{1}\frac{d\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)}{1+\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)}{\sin\alpha}-\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{-1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)}{\sin\alpha}$$

N 22376

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le t \\ t \cdot \dfrac{1-x}{1-t}, & t \le x \le 1 \end{cases}$$

$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b, \ c \in [a, b]$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^t x\,dx + \frac{t}{1-t}\int_t^1 (1-x)\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^t + \frac{t}{1-t}\left(x - \frac{x^2}{2}\Big|_t^1\right) =$$

$$= \frac{t^2}{2} + \left(\frac{t}{1-t}\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{t}{1-t}\left(t - \frac{t^2}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{t^2}{2} + \frac{t\left(\frac{1}{2} - t + \frac{t^2}{2}\right)}{1-t} = \frac{t^2}{2}$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{t\,(t^2 - 2t + 1)}{1-t} =$$

$$= \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{t\,(1-t)^{\cancel{2}}}{\cancel{1-t}} = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}t - \frac{t^2}{2} = \frac{t}{2}$$

№2242 $$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x\, dx + \int_{1}^{e} \ln x\, dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = dx \\ du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{array} \right\} = -x \cdot \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{1} dx +$$

$$+ \ln x \cdot x \Big|_{1}^{e} - \int_{1}^{e} dx = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} + e -$$

$$-e + 1 = 2 - \frac{2}{e}$$

$$d[f(t)] = f'(t) \cdot dt$$

№2246 $$\int_{0}^{a} x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} x = a \sin t \\ dx = a \cos t\, dt \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t \\ x = 0 \to t = 0 \\ x = a \to t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (a \sin t)^2 \cdot (a \cos t) \cdot (a \cos t\, dt) = a^4 \cdot$$

$$\cdot \int$$

№2251

а) нет однозначной замены:

$$\int_{-1}^{1} dx, \quad t = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$$

$$x = \pm t^{\frac{3}{2}}$$

б) Замена не является непрерывной на интервале

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}, \quad x = \frac{1}{t}$$

разрыв в 0

№2252

$$\int_{0}^{3} x \sqrt[3]{1-x^2}\, dx$$

$x = \sin t$ X, т.к.

$x = \sin t \in [-1, 1]$

$$\boxed{x = \varphi(t) \in [a, b]}$$

№2258 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

Ok:

$x = \sin t$

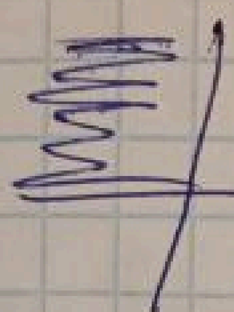
$x = 0 \to t = 0$

$x = 1 \to t = \frac{\pi}{2}$

Можно ли t: π и $\frac{\pi}{2}$

$\pi \to x = 0$, $\frac{\pi}{2} \to x = 1$

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ ВО ВСЕХ БИЛЕТАХ



Теперь нужен $-\cos$, чтобы сохранить знаки!

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t)\cos t\,dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos t)\cos t\,dt$$

№2258 $f(x) \in C[-l, l]$

C — множество непрерывных функций

→ если $f(x)$ — чётная, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_0^{l} f(x)\,dx$$

→ если $f(x)$ — нечётная, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0$$

Функции

чётные: $f(x) = f(-x)$

нечётные: $f(x) = -f(-x)$

Док-во

→ для нечётных ф.:

$$\int_{-l}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{l} f(x)\,dx =$$

$$\boxed{\int_{-l}^{0} f(-x)\,dx = -\int_{0}^{-l} f(-x)\,dx}$$

$=$