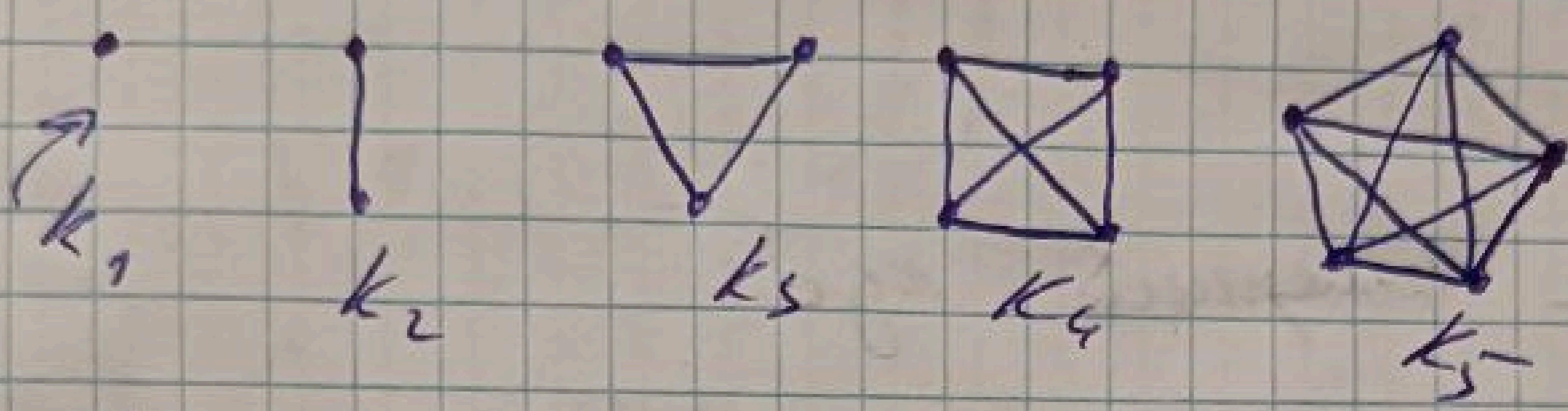
Виды графов.

→ K_n — полный граф на n вершин

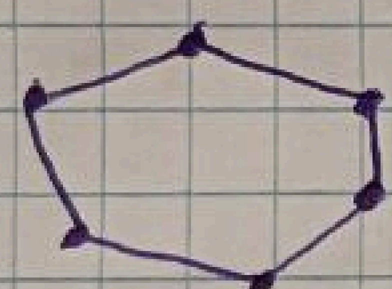
$\langle \{1, \dots, n\}, \{1, \dots, n\}^2 \setminus id_{\{1 \dots n\}} \rangle$



$K_{n+1} = K_n + K_1$

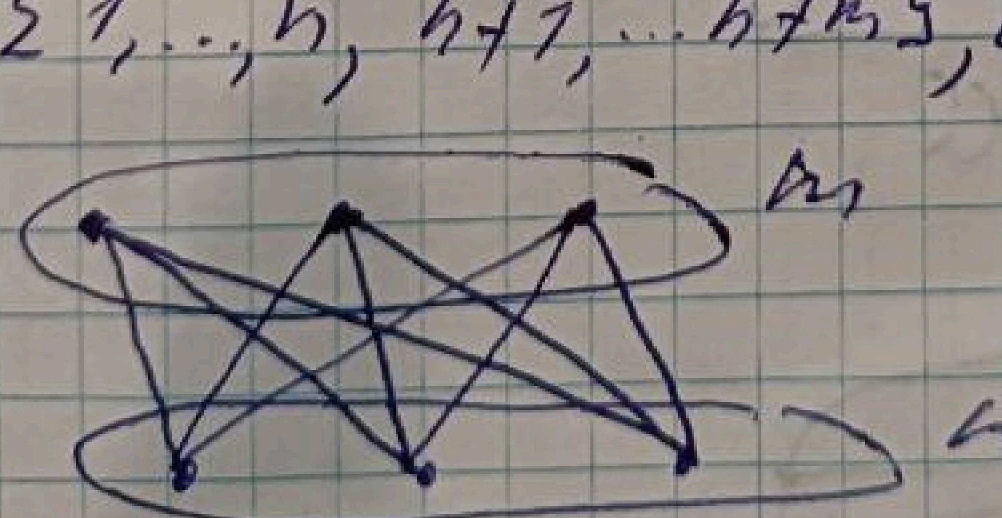
→ C_n — простой цикл на n вершин

$\langle \{1, \dots, n\}, \{[i, i+1 \ (\mathrm{mod}\ n)] \mid i = 1, \dots, n\} \rangle$



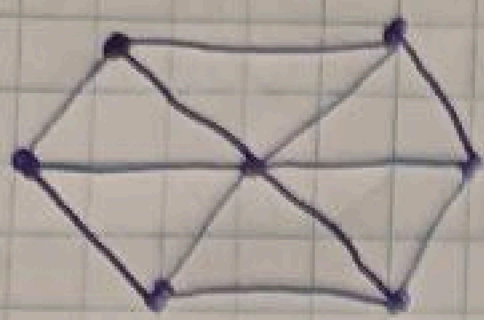
→ $K_{m,n}$ — полный двудольный граф

$\langle \{1, \dots, n, n+1, \dots n+m\}, \{[i, j] \mid i \le n, j > n\} \rangle$



$E_n = \overline{K_n}$ $\qquad$ $K_{m,n} = E_m + E_n$

→ W_n – колесо на n вершин



$W_n = C_n + C_1$

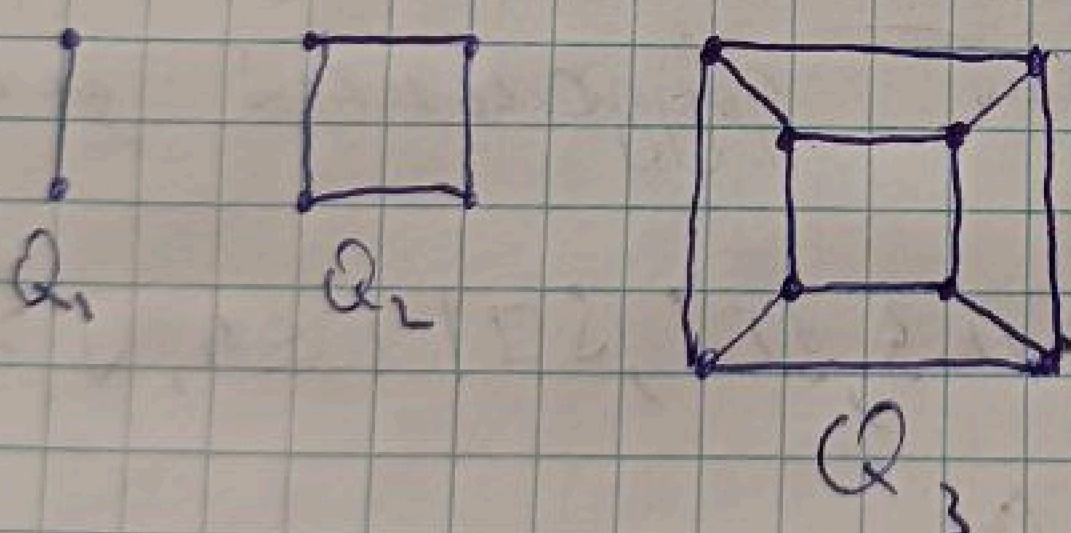
→ Q_n – n-мерный куб

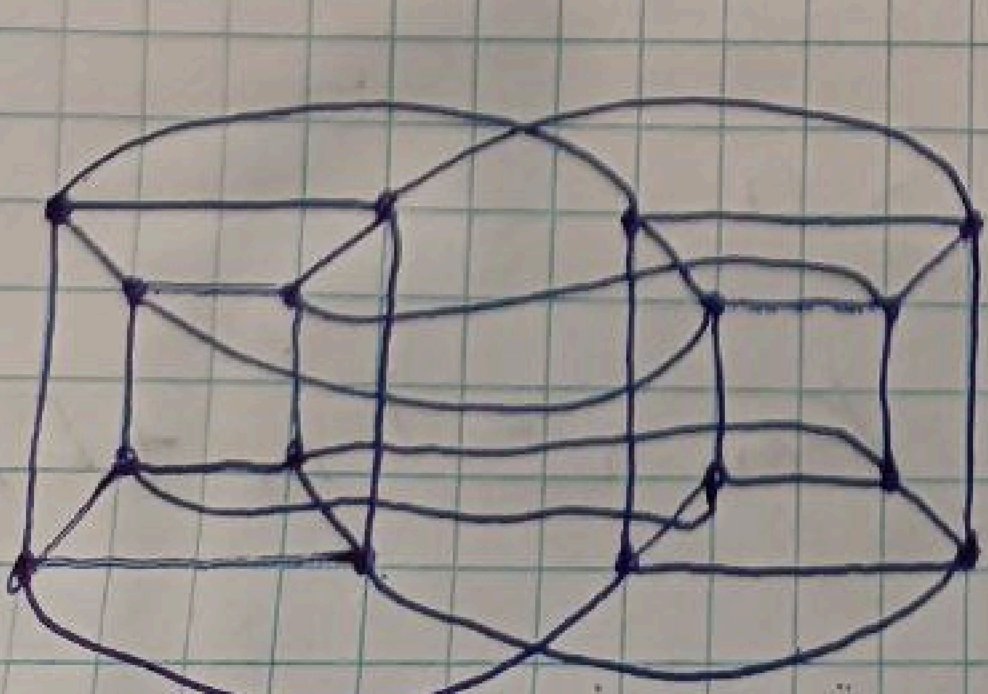
$Q_n = \langle \{0,1\}^n, \{((u_1,\dots,u_n),(v_1,\dots,v_n)) \mid \exists! j\ u_1 = v_1, \dots, u_j \neq v_j, \dots$

$\rho((u_1 \dots u_n),(v_1 \dots v_n)) = 1\} \rangle$

Или же

$Q_{n+1} = Q_n \times Q_1$





Матрицы смежности стандартных графов:

а) K_n

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

б) C_n

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

в) W_n

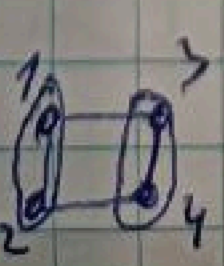
$$\left(\begin{array}{c|c} [\,C_n\,] & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ \hline 1\ 1 \dots 1 & 0 \end{array}\right)$$

г) $K_{m,n}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad}^{n} & \overbrace{\qquad}^{m} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{matrix} & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \big\}\, n \\ \big\}\, m \end{matrix} \end{array}$$

д) $Q_n \longrightarrow Q_{n+1} = \begin{pmatrix} Q_n & E \\ E & Q_n \end{pmatrix}$

$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  $= \begin{pmatrix} Q_1 & E \\ E & Q_1 \end{pmatrix}$

Двудольные графы

G – двуд.

$G \subset K_{m,n}$

$G = \langle V, E \rangle$

$V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

$\forall i \; \forall u, v_1 \in V_i \quad (u, v) \notin E$

Доказательство того что в G нет циклов нечётной длины, если G – двудольный граф:

$\Rightarrow$

Пусть $v_1 \ldots v_{2k+1}$ – цикл в G

$v_1 \in V_1 \Rightarrow v_2 \in V_2 \Rightarrow \ldots$

$v_{2k} \in V_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow v_{2k+1} \in V_1$

$(v_{2k+1}, v_1) \in E \quad \perp$

противоречие

$\Leftarrow$

$v \in V$

$v \in V_1 \quad Nb(v) \subset V_2$

$Nb(Nb(v)) \subseteq V_1$

$V_1 = \{u \mid \rho(v, u) - \text{чёт}\}$

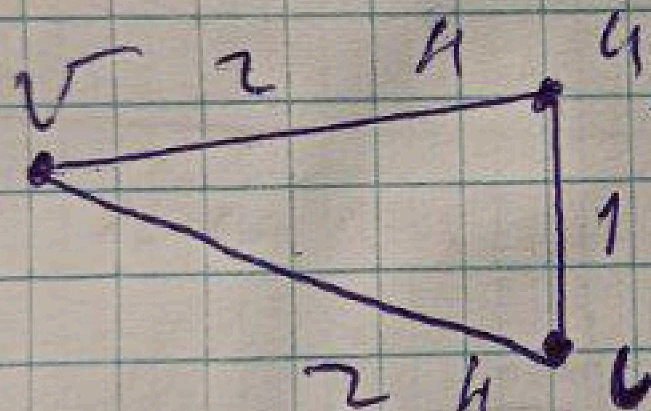
$V_2 = \{u \mid \rho(v, u) - \text{нечёт}\}$

$V = V_1 \cup V_2$

$V_1 \cap V_2 = \varnothing$

$u, w \in V_1$

$(u, w) \in E$



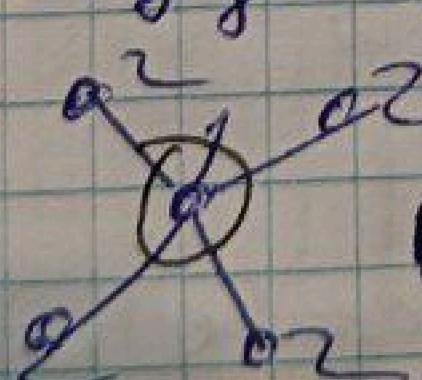
если внутри одной доли вершины связаны, то там будет цикл нечётной длины

$\perp$

---

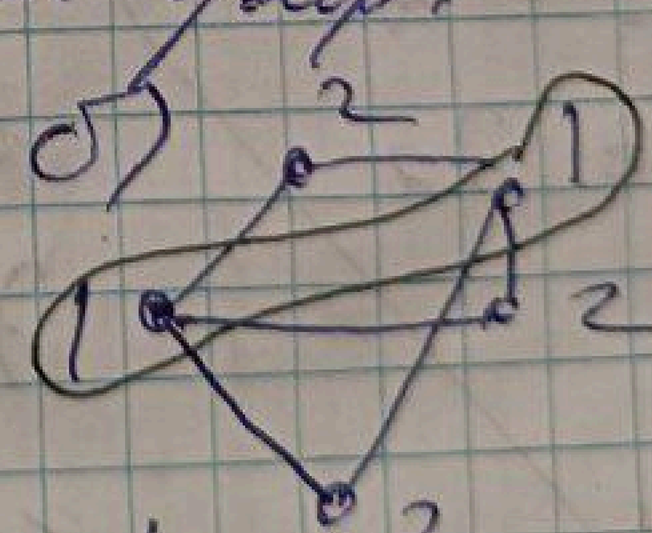
3. Двудольный ли граф?

а)



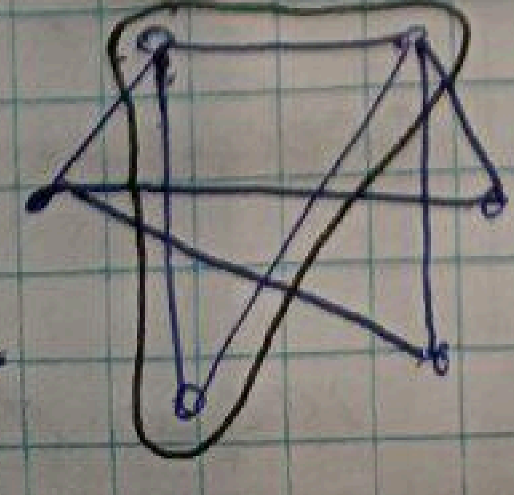
✓

б)



✓

в)



—

г) K_n:

K_2 +

$K_n, n \geq 3$ —

g) C_n:

n – чёт ✓

n – нечёт —

e) W_n:

W_1 ✓

$W_{n, n \geq 2}$ —

ж) Q_n:

✓ (всегда)

Спектр графа. Спектр матрицы.

$[G] = A$

$Ax = \lambda x$

Собственные числа

$x \neq 0$

λ – собственное число

x – собств. вектор

У изоморфных графов собственные числа совпадают

$\mathrm{Spec}\, A = \{ \lambda \mid \lambda \text{ – собств. число } A \}$

$\det(A - tE) = \chi(t)$

↳ характеристический полином A

$\chi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \operatorname{spec} A$

Кол-во собств. чисел не превышает размер матрицы.

спектр. вещ.

Пусть $A = A^T$, тогда $\operatorname{spec} A \subseteq \mathbb{R}$

и тогда $\exists$ ортонормированный базис из собственн. вект.

4. Найти собственные числа

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda-1 & 1+\lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1+\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1+\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda+1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+\lambda)\left((-\lambda)(1-\lambda)-2\right) =$$

$$= -(1+\lambda)\left(\lambda^2-\lambda-2\right) =$$

$$= -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

Собств. числа:

-1 кратности 2

2 кратности 1

размерности подпространства, образованного независимыми собственными векторами

Собств. векторы:

$\lambda = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

тут матрица должна быть транспонирована (хотя частный случай, матрица уже тр.)

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\lambda = -1$:

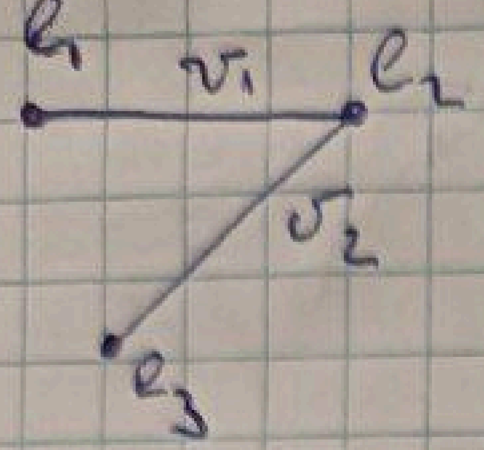
$$\boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

б)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \cdot (-1)^2 \cdot (\lambda^2 - 1) +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^4 \cdot (1 + \lambda)$$

Умножение матриц



Матр. смеж.:

$$\begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & 0 & 1 & 0 \\ e_2 & 1 & 0 & 1 \\ e_3 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$(A-\lambda E)=0$

Собст. числа:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda = 0$$

$$-\lambda(\lambda^2 + 2) = 0$$

$$\lambda = 0 \qquad \lambda = \pm\sqrt{2}$$

Матр. инц.:

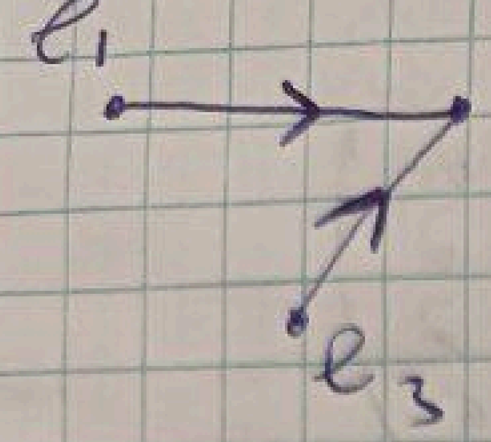
$$\begin{array}{c|cc} & v_1 & v_2 \\ \hline e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 1 & 1 \\ e_3 & 0 & 1 \end{array}$$

Трансп. матр.:

$$M^T = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$M \cdot M^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$D + A$



М. инц.:

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\boxed{D - A}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$C = A \cdot B$; $c_{ij} = \sum a_{ik} b_{kj}$ – для об.

$a_{ik} = \sum_{n=1}^{m} a_{in} \cdot a_{jn}$ → для трансп. матр.

$a_{ik} \neq 0$

$a_{jk} \neq 0$ ⇒

Произведение не равно нулю

№2 Найти кол-во путей длины n между двумя разными вершинами в K_4, если n равно:

а) $n = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

б) $n=3$

$$\begin{pmatrix} 3&2&2&2\\ 2&3&2&2\\ 2&2&3&2\\ 2&2&2&3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&1&1\\ 1&0&1&1\\ 1&1&0&1\\ 1&1&1&0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6&7&7&7\\ 7&6&7&7\\ 7&7&6&7\\ 7&7&7&6 \end{pmatrix}$$

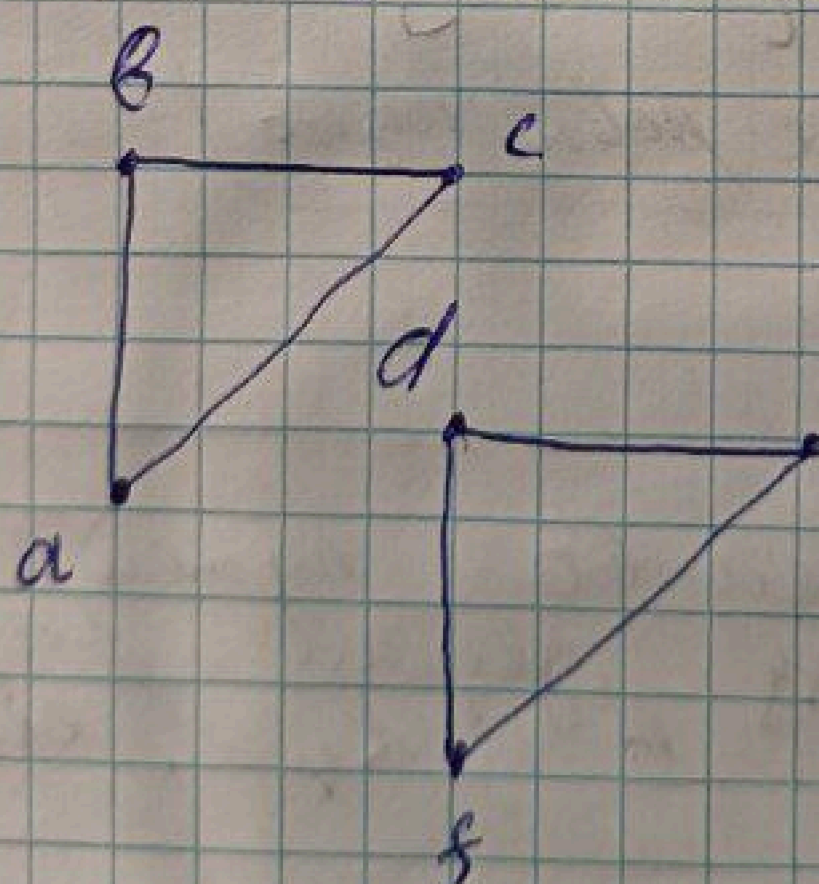
в) $n=4$

$$\begin{pmatrix} 6&7&7&7\\ 7&6&7&7\\ 7&7&6&7\\ 7&7&7&6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&1&1\\ 1&0&1&1\\ 1&1&0&1\\ 1&1&1&0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 21&20&20&20\\ 20&21&20&20\\ 20&20&21&20\\ 20&20&20&21 \end{pmatrix}$$

Д/з
Табл.
N3,
N6,

Табл:
N4 (на 5
или
N16 на 6)

7. Описать матрицу смежности графа с n компонентами связности

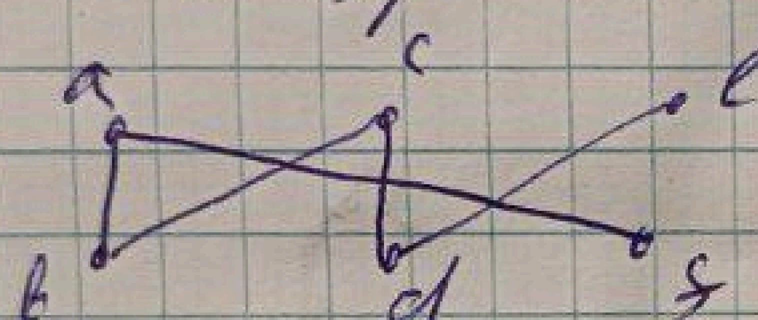


	a	в	c	d	e	f
a	0	1	1	0	0	0
в	1	0	1	0	0	0
c	1	1	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1	1
e	0	0	0	1	0	1
f	0	0	0	1	1	0

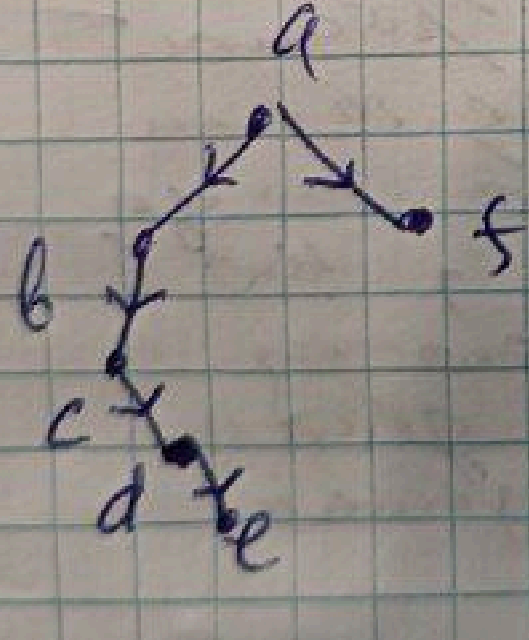
8. Как с помощью теоремы про длины путей найти длину кратчайшего пути из вершины s в вершину t?

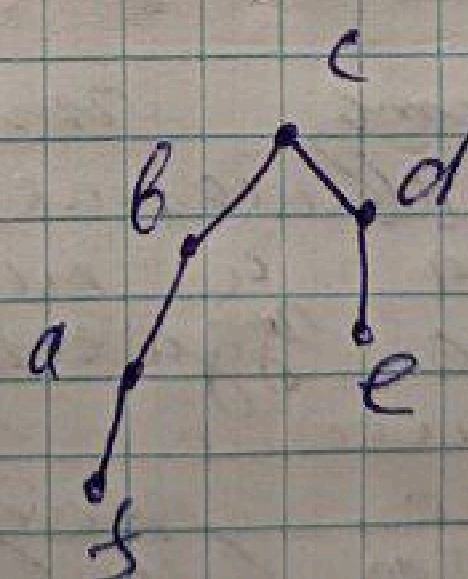
Деревья

Есть неориентированное дерево:



Из него можно сделать ориентированное, выбрав произвольную вершину в качестве корня:

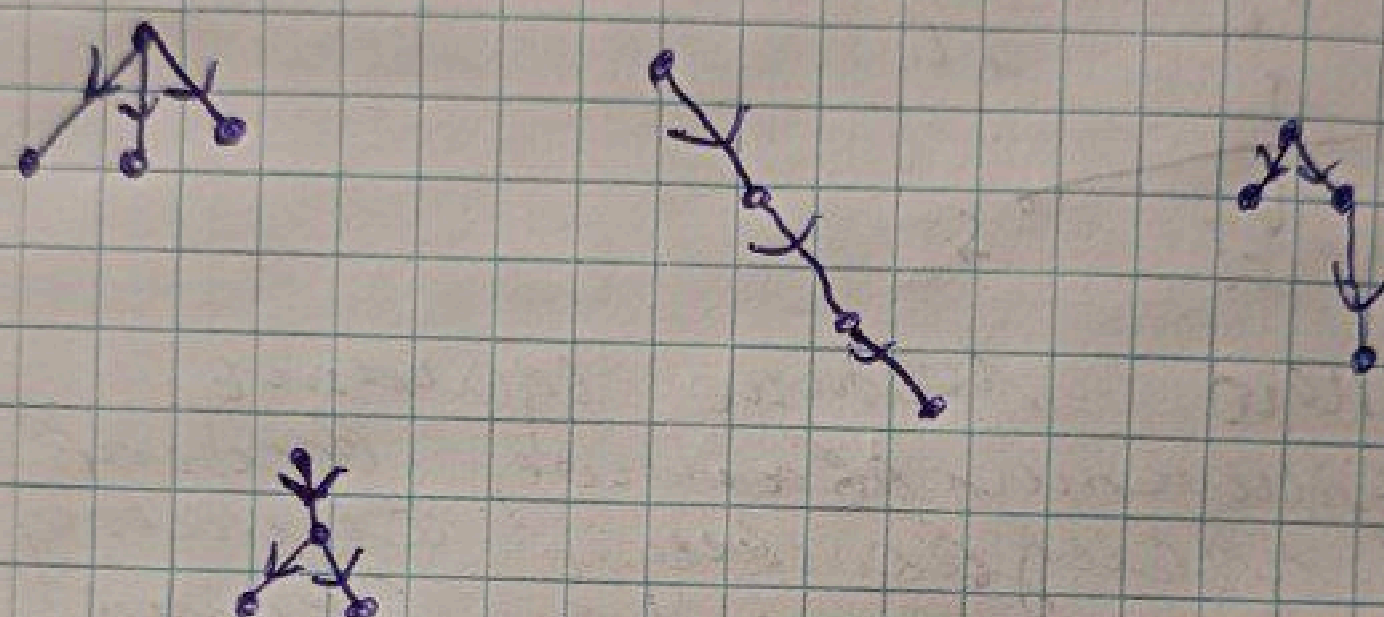




№3

а) Сколько существует неизоморфных деревьев с четырьмя вершинами?

Изоморфных:



№6

Дерево — связный ациклический граф

Показать, что простой граф является деревом тогда и только тогда когда он связен, но удаление любого из его рёбер делает граф не связным

№7

а) Удалили 0 рёбер, т.е. граф был без циклов т.е. граф ациклический т.е. дерево

G явл. деревом ⇔ G связен и имеет n-1 рёбер

б)

G явл деревом ⇔ G ацикличн. и имеет n-1 рёбер

$k_1 \; k_2 \ldots k_n$

$n_1 \; n_2 \ldots n_n$

$n_1 - 1 \; n_2 - 1 \ldots n_n - 1 = \underbrace{(n_1 + n_2 + \ldots n_n)}_{n} - k$

$n - k \geq n - 1$

№13

$i = 100$

$m = 5$

$n = m i + 1 = 501$

№15

$m = 3$

$n = 100$

$i = [(m-1)n + 1] / m =$

$= 201 / 3 = 67$

№16

$i = 76$ $\quad i = \frac{i-1}{m-1}$

$n = 3$

$m > 0$

$i = \frac{75}{m-1}$ $\quad 75 = 3 \times 25$

5×15

Нарисовать все варианты решений.