Тема : Определители матриц. Системы линейных уравнений

$\mathbf{1^0}$. Определители второго порядка и их свойства. $\mathbf{2^0}$. Определители третьего порядка. Определители произвольного порядка. $\mathbf{3^0}$. Миноры и алгебраические дополнения (адъюнкты). Лемма о разложении определителя по строке. Разложение определителя по столбцу. $\mathbf{4^0}$. Лемма об ортогональности строки определителя адъюнктам другой строки. Определитель произведения матриц. $\mathbf{5^0}$. Общий вид системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера. $\mathbf{6^0}$. Однородная система линейных алгебраических уравнений: общий вид и пространство решений. $\mathbf{7^0}$. Определение ранга матрицы. Теорема Кронекера — Капелли.

□ На множестве M_n квадратных матриц размера $n \times n$ с элементами из поля $\mathbb{R}$ вещественных чисел определено специальное отображение в множество $\mathbb{R}$. Значение этого отображения на матрице A из M_n обозначается одним из символов

$$\det A, \quad |A|, \quad \Delta(A)$$

и называется <u>определителем</u> матрицы A (детерминантом матрицы A).

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то её определитель — это число

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Справедливы следующие его свойства.

(а) $\det A$ не изменится, если строки матрицы A заменить на соотв. столбцы: $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

б) Определитель матрицы меняет знак при перестановке строк:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

в) $$\begin{vmatrix} k a_{11} & a_{12} \\ k a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

г) $$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

д) $$\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0.$$

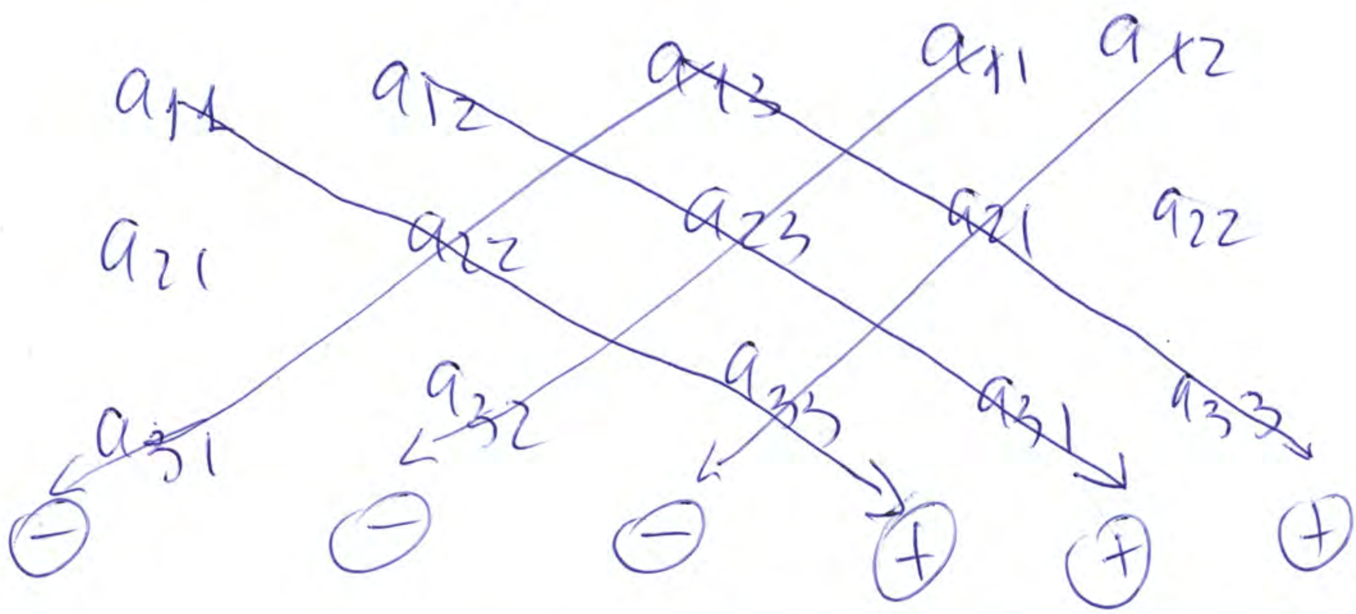
свойства а) – д) определителей остаются справедливыми для матриц размера $n \times n$ при $n \geq 3$.

2°. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Тогда

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (|A|)$$

Структура этого выражения просто запоминается с помощью следующего графического приема!



(правило Саррюса).

Среди входящих в произведения в правой части (|A|) имеются представители от каждой строки и каждого столбца матрицы A.

В каждом слагаемом из правой части равенства (|A|) элементы-сомножители расположены в порядке возрастания первого индекса, т.е. номеров строк, к которым эти элементы принадлежат. Номера столбцов, к которым принадлежат элементы-сомножители, указаны в следующих таблицах:

$$\left.\begin{matrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{matrix}\right\}\qquad(+)$$

$$\left.\begin{matrix}3&2&1\\1&3&2\\2&1&3\end{matrix}\right\}\qquad(-)$$

Вместе таблицы (+) и (−) исчерпывают всевозможные перестановки из чисел 1, 2, 3. Перестановка (1, 2, 3) называется основной.

говорят, что в перестановке произведена транспозиция двух её определенных элементов, если эти элементы поменялись местами. После транспозиции перестановка переходит в другую перестановку.

Пример. Перестановка (3,2,1) получена транспозицией первого и третьего элемента перестановки (1,2,3).

Если некоторая перестановка получена из основной применением N транспозиций, а также ~~путем~~ другим путем с помощью N_1 транспозиций, то числа N и N_1 либо одновременно четные, либо одновременно нечетные.

Опр. Перестановка (j_1, j_2, j_3) чисел (1,2,3) называется четной, если она получена из (1,2,3) при помощи четного числа транспозиций

Пусть $\vec{j} = (j_1, j_2, j_3)$ — это перестановка чисел $(1,2,3)$. Число транспозиций, с помощью которых можно получить (j_1, j_2, j_3) из основной $(1,2,3)$, условимся обозначать через $t(\vec{j})$. При этом если $t(\vec{j})$ — четное, то $\vec{j}$ также четная; если же $t(\vec{j})$ — нечетное число, то $\vec{j}$ — нечетная перестановка.

Отметим, что перестановки в таблице ($\oplus$) — четные, а в таблице ($\ominus$) — нечетные. Используя это наблюдение, дадим эквивалентное определение ~~опре~~ детерминанта матрицы третьего порядка.

<u>Опр.</u> Детерминантом квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ размера 3×3 называется вещ. число Δ, равное сумме

$$\Delta = \sum_{\vec{j}} (-1)^{t(\vec{j})} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

где $\vec{j} = (j_1, j_2, j_3)$ — всевозможные различные перестановки чисел $(1, 2, 3)$.

□ Это определение легко распространить на случай матриц размеров $n \times n$ в случае любого $n \geq 3$.

<u>Опр.</u> Детерминантом квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$ называется число, записываемое в виде

$$\Delta = \sum_{\vec{j}} (-1)^{t(\vec{j})} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}, \qquad (\det A)$$

где $\vec{j} = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ — это всевозможные различные перестановки чисел $(1, 2, \dots, n)$. Число $t(\vec{j})$ в формуле $(\det A)$ равно числу транспозиций, которые нужно сделать для перехода от $(1, 2, \dots, n)$ к перестановке $\vec{j} = (j_1, j_2, \dots, j_n)$.

Детерминант матрицы размера $n \times n$ (9)
обладает свойствами а), б), в), г), д),
перечисленными ранее в применении к определителям второго порядка.

$\square$ Проведем в определителе

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

следующее преобразование: вычеркнем у соответствующей матрицы строку с номером i и столбец с номером k. В результате получим определитель порядка $(n-1)$, обозначаемый как M_{ik} и называемый <u>минором</u> элемента a_{ik} матрицы. При этом величина $A_{ik}=(-1)^{i+k} M_{ik}$ называется <u>алгебраичес-</u>

<u>ким дополнением</u> (или адъюнктом) элемента a_{ik}.

<u>Лемма</u> (о разложении по строке).
Сумма произведений элементов a_{ik} некоторой строки определителя на алгебраические дополнения этих элементов равна величине $\det A$:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

<u>Док-во.</u> Установим это свойство для определителя третьего порядка, разложив его по третьей строке.
Имеем

$$a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33} =$$

$$= a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) + a_{32}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})$$

$$+ a_{33}(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{21}) = \det A. \quad \#$$

Аналогично определитель можно разложить по столбцу:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

<u>Пример.</u> 1) Пусть $a_{21} = a_{31} = \dots = a_{n1} = 0$. Тогда $\Delta = a_{11} A_{11}$. Таким образом, вычисление сводится к нахождению определителя порядка $(n-1)$.

2). Если все элементы A, стоящие <u>ниже</u> главной диагонали, равны нулю, то есть $a_{kl} = 0$ при $k < l$, то

$$\Delta = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

$\boxed{14}$

Лемма (об ортогональности строк адъюнктам). Сумма произведений элементов a_{ik} некоторой строки определителя на соответствующие адъюнкты ~~элементов~~ другой строки равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Аналогичное условие ортогональности справедливо для столбцов определителя:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0, \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Определитель ~~матрицы не изменится,~~ если к его строке прибавить другую строку, умноженную на число, Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей сомножителей:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

---

15 Рассмотрим систему линейных уравнений в следующем общем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases} \quad (I)$$

Число уравнений здесь равно числу неизвестных. Вводя векторы $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, можем записать эту систему в матричном виде $A\vec{x} = \vec{y}$, где $A = (a_{ij})$

Выясним, когда эта СЛАУ разрешима
и как находить её решения.

Теорема (формулы Крамера).
Если $\det A \neq 0$, то СЛАУ $A\vec{x} = \vec{y}$ имеет для $\forall$ правой части $\vec{y}$ единственное решение, компоненты которого вычисляются по формулам

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \qquad (K)$$

где $\Delta = \det A \neq 0$, а определитель Δ_j получается из Δ заменой в последнем j-го столбца на вектор $\vec{y}$:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,j-1} & y_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n,j-1} & y_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Док-во. Умножим первое уравнение системы (I) на A_{11}, второе — на A_{21}, …, последнее (n)-е уравнение — на A_{n1}, а затем сложим все эти равенства. В результате получим

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k1} x_1 \cdot A_{k1} = x_1 \sum_{k=1}^{n} a_{k1} A_{k1} = x_1 \cdot \Delta;$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_j A_{k1} = x_j \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{k1} = x_j \cdot 0 = 0$$

при $j \neq 1$.

Таким образом, имеем

$$x_1 \cdot \Delta = \sum_{s=1}^{n} y_s A_{s1} = \begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ y_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

или, учитывая, что $\Delta = \det A \neq 0$:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Аналогично получаем

равенства $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$ для $j=2,3,\dots,n$.

Таким образом, мы установили, что если решение системы (I) существует, то компоненты $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ обязаны подчиняться формулам (K).

Проверим теперь, что задаваемые равенствами (K) числа x_j удовлетворяют уравнениям системы (I).

Имеем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\left(\sum_{s=1}^{n} y_s A_{sj}\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\sum_{s=1}^{n} y_s \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{sj}\right)}_{\substack{\shortparallel \\ \Delta \text{ при } s=k \\ 0 \text{ при } s\neq k}} = \frac{1}{\Delta}y_k\Delta = y_k.$$

#

□ Система уравнений вида $A\vec{x} = \vec{0}$ называется <u>однородной</u> ($\vec{y} = \vec{0}$). Её решение существует всегда и задаётся равенствами

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Может оказаться, что однородная система $A\vec{x} = \vec{0}$ удовлетворяется некоторым не нулевым вектором $\vec{x}$, т.е. вектором, у которого хотя бы одна компонента $x_i \neq 0$. Если это случается, то $\vec{x} \neq \vec{0}$ называют <u>нетривиальным решением</u> системы $A\vec{x} = \vec{0}$. Вектор же $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ называют <u>тривиальным решением</u>.

<u>Теорема</u>. Если $\det A \neq 0$, то система $A\vec{x} = \vec{0}$ имеет только тривиальное решение.

Утверждение теоремы сразу следует

из формул Крамера.

<u>Следствие</u>. Если система $A\vec{x} = \vec{o}$ имеет нетривиальное решение, то $\det A = 0$.

$\square$ Правило решения системы $A\vec{x} = \vec{y}$ в общем случае использует важное понятие <u>ранга матрицы</u>.

Пусть есть матрица A размеров $m \times n$ (прямоугольная) и k – натуральное число, $k \leq m$ и $k \leq n$. Вычеркнем из матрицы

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \vdots & a_{1n} \\ - & \vdots & - \\ a_{m1} & \vdots & a_{mn} \end{array}\right)$$

любые k столбцов и k строк. Элементы a_{js}, находящиеся на пересечении зачеркнутых столбцов и строк, образуют квадратную матрицу, которая имеет определитель порядка (k). Условимся называть любой такой определитель порожденным матрицей A.

Опр. Рангом матрицы A называется наибольшее натуральное число (k), для которого существует не равный нулю определитель порядка (k), порождаемый матрицей A.

Если хотя бы один элемент матр. A не равен нулю, то её ранг ≥ 1.

Сформулируем теорему Кронекера-Капелли, дающую критерий совместности системы $A\vec{x} = \vec{y}$. Сопоставим этой системе её расширенную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & y_n \end{pmatrix}.$$

Теорема (Кронекера-Капелли).
Если $rang(B) > rang(A)$, то система $A\vec{x} = \vec{y}$ не имеет решений.
Система имеет решение $\Longleftrightarrow$ $rang(A) = rang(B)$.

Отметим, что если $rang(A) = rang(B) = k$ и при этом $k < n$, то решение системы неединственно.