

Def

Опр. n - натуральное число,
 A - множество

n -арное отношение
на A - это произвольное
подмножество $P \subseteq A^n$

- если $n=1$, то унарное отношение
- если $n=2$, то бинарное
- если $n=3$, то тернарное

Синтаксис Σ - это тройка

$\Sigma = (P, F, \mu)$, где

- P - предикативные символы
- F - функциональные символы

• $\mu: P \cup F \rightarrow \omega$ - отображение
арности символов
из $P \cup F$

• $P \cap F = \emptyset$

$\mu(\epsilon) = 0$
↑ константа

Отношения
между объектами

Операции
между объектами

Семантика теории множеств

$$\sigma_{set} = (\{ \in, \emptyset, \subseteq \}, \{ \cup, \cap, \times, \neg, \wedge, \vee \})$$

Структура (алгебраическая система)

$$\sigma = (P, F, \mu) \text{ — это пара } M = (M, \nu)$$

ν — это отображение такое, что
 $\forall s \in P \cup F, \mu(s) = n$
 $\mu(s) = n$

интерпретаций
 ν
 ν — это отображение
 ν — это отображение
 ν — это отображение

$$\bullet \text{ если } s \in F, \text{ то } \nu(s) \subseteq M^{n+1}$$

$$+^2 \quad \nu(+)^2 \subseteq M^3$$

$$\bullet \text{ если } s \in P, \text{ то } \nu(s) \subseteq M^n$$

ν — это
 ν — это

$$M = (M, \nu)$$

\Downarrow

$$M = (M, \sigma)$$

\Uparrow

$$(P, F, \mu)$$

семантика

— описание структур

структура

Кольцо

(nonunoue)

$$\mathcal{R} = (R, \sigma_{mg})$$

$$\sigma_{mg} = \{ +^2, \cdot^2, -^1, 0^0, 1^0 \} \Leftrightarrow$$

\Leftrightarrow 1) $(R, \{ +, -, 0 \})$ - абелева группа

2) $(R, \{ \cdot, 1 \})$ - моноид

3) $\forall a, b, c \in R$: 1. $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

$$2. (b+c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$$

левая коммутативность
правая коммутативность

Тело

$$\mathcal{F} = (F, \sigma_{fld})$$

$$\sigma_{fld} = \sigma_{mg} \cup \{ (-1)^1 \} \Leftrightarrow$$

\Leftrightarrow 1) \mathcal{F} - кольцо

2) $(F \setminus \{0\}, \{ \cdot, -^1, 1 \})$ - абелева группа

Конгруэнция

Отношение эквивалентности по модулю

Гомоморфизм

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

↑
отображение

→ Если f сюръективна (если у каждого образа есть хотя бы один прообраз) — Эпи-морфизм

(сюр. + инъек.)

→ Если f биективна — изоморфизм

$$1 + 2 = 3$$

$$3 \rightarrow -3$$

$$1 \rightarrow -1$$

$$2 \rightarrow -2$$

$$-1 + (-2) = -3$$

Гомоморфизм

Ядро гомоморфизма — элемент, который при отображении переходит в нейтральный элемент.

Семантика.

$$\Sigma = (F, P, V), \{x_i\} - \text{переменная}$$

$$\tau(\Sigma): x_i - \text{терм}$$

$$f \in F, \tau(f) = n, t_1, t_n - \text{термы} \Rightarrow$$

$$\tau(f(t_1, \dots, t_n)) - \text{терм}$$

$$t_1 = t_2 \quad P(t_1, \dots, t_n) - \text{формула}$$

t_i — термы, P — предик. символ

φ, ψ — формулы

$(\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), \neg \varphi$ — формулы