Тема : Полнота множества вещественных чисел и её следствия

$\mathbf{2^0}$. Последовательность стягивающихся отрезков (аксиома непрерывности Кантора). $\mathbf{3^0}$. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании сходящийся подпоследовательности в ограниченной последовательности. $\mathbf{4^0}$. Частичные пределы ограниченных последовательностей. Верхний и нижний пределы. Верхний предел неограниченной сверху последовательности. Критерий существования предела последовательности в терминах верхнего и нижнего пределов. $\mathbf{5^0}$. Необходимость условия Коши для сходящейся числовой последовательности. Теорема о сходимости фундаментальной последовательности. Критерий Коши. $\mathbf{6^0}$. Расходимость частичных сумм гармонического ряда. $\mathbf{7^0}$. Критерий сходимости последовательности частичных сумм ряда из обратных степеней.

2^0. Среди всевозможных последовательностей вложенных отрезков выделяются *стягивающиеся*.

Определение. *Последовательность вложенных отрезков* $[a_n, b_n]$ *называется стягивающейся, если последовательность* $L_n = b_n - a_n$ *их длин стремится к нулю:*

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

Теорема (аксиома непрерывности Кантора). *Любая последовательность стягивающихся отрезков числовой прямой имеет единственную общую точку.*

Доказательство. По предыдущей теореме найдется отрезок $[a, b]$ такой, что

$$[a, b] \subset [a_n, b_n], \qquad n = 1, 2, \dots.$$

При этом $a_n \leqslant a$ и $b \leqslant b_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно,

$$0 \leqslant b - a \leqslant b_n - a_n, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем $b = a$. Это и есть точка, общая для всех стягивающихся отрезков.

Докажем, что общих точек, отличающихся от точки $b = a$, у отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, нет. Предположим противное, пусть $c \in [a_n, b_n]$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и при этом $c \neq a = b$.

Если $c < a = b$, то справедливо $a_n \leqslant c < b$. Следовательно, отрезок $[c, b]$ вложен в отрезок $[a_n, b_n]$ и поэтому имеют место неравенства

$$0 < b - c \leqslant b_n - a_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$ получаем противоречие условию, что отрезки стягиваются.

Аналогично, если $c > a = b$, то справедливо $a < c \leqslant b_n$. Следовательно, отрезок $[a, c]$ вложен в отрезок $[a_n, b_n]$ и поэтому имеют место неравенства

$$0 < c - a \leqslant b_n - a_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$ снова приходим к противоречию условию, что отрезки стягиваются. $\square$

Таким образом, любая последовательность стягивающихся отрезков сжимается в некоторую точку на числовой прямой.

Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, в отличие от числовой прямой $\mathbb{R}$, свойством непрерывности Кантора не обладает. Пусть, например, a_n обозначает нижнее десятичное приближение числа $\sqrt{2}$, а b_n — верхнее его десятичное приближение. Тогда $[a_n, b_n]$ — последовательность стягивающихся отрезков. При этом не существует рационального числа $q \in \mathbb{Q}$, принадлежащего пересечению

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Отрезки $[a_n, b_n]$ стягиваются в точку $\sqrt{2}$ из $\mathbb{R}$, которая рациональным числом не является.

3^0. Как уже доказано, всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Обратное неверно: $x_n = (-1)^n$ — это ограниченная последовательность, которая не сходится.

При этом сходится ее подпоследовательность $x_{2n} = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, а также подпоследовательность $x_{2n+1} = -1$.

Теорема (Больцано—Вейерштрасса). *Любая ограниченная последовательность вещественных чисел содержит в себе сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — ограничена и не сходится. Тогда существуют конечные числа a и b такие, что

$$a < b \quad \text{и} \quad a \leqslant x_n \leqslant b, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Точка $c_0 = \frac{a+b}{2}$ — это середина отрезка $[a, b]$. При этом хотя бы один из отрезков $[a, c_0]$ или $[c_0, b]$ содержит *бесконечное* число элементов $\{x_n\}$ исходной последовательности.

Если это отрезок $[a, c_0]$, то переобозначим его через $[a_1, b_1]$. Если же отрезок $[a, c_0]$ содержит лишь конечное число элементов $\{x_n\}$, то полагаем $[a_1, b_1] = [c_0, b]$.

Далее, точка $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ — это середина отрезка $[a_1, b_1]$. Полагаем $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$, если $[a_1, c_1]$ содержит бесконечное количество элементов x_n. В противном случае полагаем $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$.

Проводя дальнейшие построения по индукции, получим в результате последовательность $\left[a_k, b_k\right]$ вложенных отрезков:

$$\left[a_{k+1}, b_{k+1}\right] \subset \left[a_k, b_k\right], \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Длина отрезка с номером k при этом вычисляется по формуле

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\lim_{k \to \infty} \left(b_k - a_k\right) = 0.$$

Таким образом, отрезки $\{[a_k, b_k]\}$ — *стягивающиеся*.

По предыдущей теореме, существует единственная точка c, принадлежащая одновременно всем отрезкам $[a_k, b_k]$. При этом имеют место равенства

$$c = \lim_{k\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} b_n.$$

Искомую сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ построим по индукции, пользуясь соотношениями

$$\{x_n\} \cap \left[a_k,\, b_k\right] \neq \emptyset, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

В отрезке $[a_1,\, b_1]$ по условию содержится бесконечное количество элементов x_n. Выберем среди них элемент с наименьшим номером n_1, тогда имеем вложение

$$x_{n_1} \in [a_1,\, b_1].$$

Далее, отрезок $[a_2, b_2]$ по условию также содержит бесконечное количество элементов x_n. Среди них обязательно найдется элемент с номером $n_2 > n_1$. При этом

$$x_{n_2} \in [a_2, b_2]\,, \qquad n_2 > n_1\,.$$

Пусть элементы x_{n_1}, ..., x_{n_k} с номерами

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k$$

найдены, причем

$$x_{n_k} \in \left[a_k, b_k\right], \quad n_k > n_{k-1}.$$

В отрезке $\left[a_{k+1}, b_{k+1}\right]$ по условию содержится бесконечное количество элементов x_n. Среди них обязательно найдется элемент с номером $n_{k+1} > n_k$. При этом

$$x_{n_{k+1}} \in \left[a_{k+1}, b_{k+1}\right], \quad n_{k+1} > n_k.$$

По построению имеем неравенства

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$ и пользуясь теоремой о зажатой последовательности, получаем

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c.$$

Таким образом, подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходящаяся. $\square$

4^0. Таким образом, числовая последовательность может расходиться, но содержать в себе сходящиеся подпоследовательности. В этой связи вводится понятие частичных пределов.

Определение. *Предел любой подпоследовательности заданной числовой последовательности называется частичным пределом этой последовательности.*

По теореме Больцано-Вейерштрасса любая ограниченная последовательность *имеет хотя бы один частичный предел*.

Определение. *Наибольший частичный предел последовательности $\{x_n\}$ называется её верхним пределом.*

Обозначение верхнего предела: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Определение. *Наименьший частичный предел последовательности* $\{x_n\}$ *называется её* *нижним* *пределом.*

Обозначение нижнего предела: $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

Любая ограниченная последовательность имеет как верхний, так и нижний пределы.

Заметим, что любая числовая последовательность имеет хотя бы один частичный предел, *конечный или бесконечный*. Если $\{x_n\}$ неограничена сверху, то $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Если же $\{x_n\}$ — неограниченная снизу числовая последовательность, то $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел (конечный или бесконечный), то

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Верно и обратное: если

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

то $\{x_n\}$ сходится к x_0:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

5^0.Сформулируем необходимое условие, которому удовлетворяют все сходящиеся числовые последовательности.

Лемма. *Если последовательность* x_n *сходится, то ее элементы удовлетворяют следующему условию Коши:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) :\ \forall\, n, m \geqslant N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon. \quad \textbf{(Cau)}$$

Доказательство. Пусть $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда по определению предела для $\forall\, \varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что

$$\forall\, n \geqslant N \qquad |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ и $m > N(\varepsilon)$ справедливы неравенства

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - x_0| + |x_0 - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и есть искомое условие. $\square$

Определение. *Последовательность* $\{x_n\}$ *вещественных чисел сходится в себе, если*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\, N = N(\varepsilon) : \forall\, n \geqslant N, \forall\, m \geqslant N \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |x_n - x_m| < \varepsilon. \qquad \text{(Cau)}$$

Любая последовательность $\{x_n\}$ с условием (Cau) называется также *фундаментальной*.

Теорема. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *вещественных чисел удовлетворяет условию Коши* $(\mathbf{Cau})$, то она сходится к конечному пределу.

Доказательство. Убедимся, что если последовательность $\{x_n\}$ вещественных чисел удовлетворяет условию Коши $(\mathbf{Cau})$, то она ограничена.

Полагаем $\varepsilon = 1$ в условии $(\mathbf{Cau})$ и возьмем $m = N_1 = N(1)$. Тогда для всех $n \geqslant N_1$ имеем

$$\left|x_n - x_{N_1}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_{N_1} - 1 < x_n < x_{N_1} + 1.$$

Обозначим

$$a = \min\{x_1, x_2, ..., x_{N_1}, x_{N_1} - 1\},$$

$$b = \max\{x_1, x_2, ..., x_{N_1}, x_{N_1} + 1\}.$$

Тогда справедливо

$$a \leqslant x_{N_1} - 1 < x_n < x_{N_1} + 1 \leqslant b.$$

Следовательно,

$$a \leqslant x_n \leqslant b \quad \text{для} \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, $\{x_n\}$ ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса существует её сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Пусть $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Убедимся, что исходная последовательность $\{x_n\}$ сходится к этому же пределу:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, найдем затем такой номер $N_\varepsilon = N(\varepsilon)$, что

$$\forall\, n \geqslant N_\varepsilon\,, \forall\, m \geqslant N_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Существование номера N_ε с указанным свойством следует из фундаментальности последовательности $\{x_n\}$.

Далее из равенства $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ и определения предела следует существование такого номера $M_\varepsilon = M(\varepsilon)$, что

$$\forall\, k \geqslant M_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|x_{n_k} - x_0\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Пусть $P = \max\{N_\varepsilon, M_\varepsilon\}$. Тогда

$$P \geqslant M_\varepsilon \quad \text{и} \quad n_P \geqslant P \geqslant N_\varepsilon.$$

Взяв теперь любой номер $n \geqslant P$, воспользуемся затем неравенством треугольника, а также оценками (1) и (2). Тогда получим

$$|x_n - x_0| \leqslant \left|x_n - x_{n_P}\right| + \left|x_{n_P} - x_0\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. □

Следствие (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ вещественных чисел сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.*

Отметим, что на множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел критерий Коши не выполняется. Например, последовательность нижних десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ сходится к $\sqrt{2}$ и, следовательно, предела в $\mathbb{Q}$ не имеет, хотя и удовлетворяет условию Коши.

Теорема о сходимости фундаментальной последовательности вещественных чисел допускает следующую эквивалентную формулировку.

Множество $\mathbb{R}$ *вещественных чисел является полным относительно введенной на нем сходимости*.

Множество $\mathbb{Q}$, в отличие от $\mathbb{R}$ указанным свойством полноты не обладает.

$\mathbf{6^0}$. В качестве примера использования критерия Коши исследуем на сходимость следующую числовую последовательность

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Лемма. *Последовательность* H_n *при* $n \to \infty$ *неограниченно возрастает , то есть*

$$\lim_{n\to\infty} H_n = +\infty.$$

Доказательство. Для любого номера $n \geqslant 1$ справедлива оценка

$$H_{2n} - H_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для положительного числа $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и любого номера N существуют два таких номера $n = N$ и $m = 2N$, что

$$|H_n - H_m| \geqslant \frac{1}{2}.$$

Это означает, что последовательность $\{H_n\}$ не фундаментальна, то есть не удовлетворяет условию ($\mathbf{Cau}$).

Согласно критерию Коши у последовательности $\{H_n\}$ не может существовать конечного предела. Но $\{H_n\}$ монотонно возрастает:

$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0 \quad \Rightarrow \quad H_{n+1} > H_n.$$

Следовательно, по теореме Вейерштрасса, у неё есть предел.

Этот предел не может быть конечным и, следовательно, он бесконечен, т.е. имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} H_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) = +\infty.$$

Величину $\{H_n\}$ называют частичной суммой гармонического ряда.

Полученное выше предельное равенство означает, что *гармонический ряд расходится*. $\square$

7^0. Исследуем на сходимость следующую числовую последовательность частичных сумм ряда из обратных степеней:

$$H_n(\alpha) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^{1+\alpha}}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Здесь α — числовой параметр. Докажем, что при $\alpha \leqslant 0$ последовательность $\{H_n(\alpha)\}$ расходится, имея пределом при $n \to +\infty$ точку $+\infty$. Если же $\alpha > 0$, то $\{H_n(\alpha)\}$ сходится к конечному пределу.

Доказательство. При $\alpha = 0$ последовательность $\{H_n(0)\}$ — это последовательность частичных сумм гармонического ряда:

$$H_n(0) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

В этом случае, как уже установлено, $H_n(0)$ расходится к бесконечности при $n \to +\infty$.

При $\alpha < 0$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{m^{1+\alpha}} \geqslant \frac{1}{m}, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Следовательно, $H_n(\alpha) \geqslant H_n(0)$ при $n = 1, 2, \ldots$. Переходя здесь к пределу при $n \to +\infty$, получаем в результате

$$\lim_{n\to\infty} H_n(\alpha) \geqslant \lim_{n\to\infty} H_n(0) = +\infty.$$

Пусть теперь $\alpha > 0$. Тогда монотонно возрастающая последовательность $\{H_n(\alpha)\}$ по теореме Вейрштрасса имеет предел (конечный или бесконечный).

Докажем, что этот предел не может быть бесконечным. Для этого укажем явно ограниченную подпоследовательность

$$H_{n_k}(\alpha), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

которая также монотонно возрастает и имеет предел, который в силу ограниченности $H_{n_k}(\alpha)$ конечен.

Для $k = 1, 2, \ldots$ полагаем $n_k = 2^k - 1$ и далее

$$H_{n_k}(\alpha) = \sum_{m=1}^{n_k} \frac{1}{m^{1+\alpha}} = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{m=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{m^{1+\alpha}} \right).$$

При этом внутренняя сумма допускает следующую оценку сверху:

$$\sum_{m=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{m^{1+\alpha}} \leqslant \frac{1}{(2^{j-1})^{1+\alpha}} + \cdots + \frac{1}{(2^{j-1})^{1+\alpha}}.$$

В правой части всего $2^j - 2^{j-1} = 2^{j-1}$ одинаковых слагаемых. Поэтому

$$\sum_{m=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{m^{1+\alpha}} \leqslant \frac{1}{(2^{j-1})^\alpha}.$$

Подставляя эту оценку в полученное выше представление элемента $H_{n_k}(\alpha)$ подпоследовательности, получаем следующую оценку:

$$H_{n_k}(\alpha) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(2^{j-1})^\alpha} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(2^\alpha)^{j-1}} < \frac{1}{1-2^{-\alpha}}.$$

В последнем неравенстве использована формула для суммы геометрической прогрессии.

Таким образом, установлено, что подпоследовательность $\boldsymbol{H_{n_k}(\alpha)}$, $\boldsymbol{k = 1, 2, \ldots}$, ограничена и монотонно возрастает. Следовательно, она имеет конечный предел. $\square$

Тема : Множества на числовой оси

$\mathbf{1^0}$. Точные верхняя и нижняя грани числового множества. Теорема существования. $\mathbf{2^0}$. Определение покрытия промежутка числовой оси. Примеры. Лемма Гейне-Бореля о покрытии. Компактность замкнутого числового отрезка. $\mathbf{3^0}$. Несчетность множества вещественных чисел. $\mathbf{4^0}$. Открытые и замкнутые множества. Граничные и предельные точки.

1^0. Для любого подмножества числовой прямой вводятся различные его числовые характеристики.

Определение. *Множество* $\boldsymbol{X}$ *вещественных чисел называют ограниченным сверху, если найдется такое вещественное число* $\boldsymbol{b}$*, что любой элемент* $\boldsymbol{x}$ *из* $\boldsymbol{X}$ *не превосходит этого числа:*

$$\exists\, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R} : \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}.$$

Множество X вещественных чисел называют ограниченным снизу, если найдется такое вещественное число a, что любой элемент x из X не меньше этого числа:

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : \forall\, x \in X \;\Rightarrow\; a \leqslant x.$$

Множество X вещественных чисел называют ограниченным, если оно ограничено как сверху так и снизу:

$$\exists\, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R} : \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \;\Rightarrow\; |\boldsymbol{x}| \leqslant \boldsymbol{c}.$$

Определение. *Вещественное число* $\boldsymbol{b}$ *называют верхней гранью множества* $\boldsymbol{X}$*, если любой элемент* $\boldsymbol{x}$ *из* $\boldsymbol{X}$ *не превосходит этого числа:*

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}.$$

Аналогично определяется нижняя грань множества вещественных чисел.

Определение. *Наименьшая из верхних граней множества $X \subset \mathbb{R}$ называется его точной верхней гранью и обозначается как $\sup X$.*

Согласно этому определению,

$$M = \sup X \Leftrightarrow \begin{cases} 1. \quad \forall\, x \in X \quad \Rightarrow \quad x \leqslant M, \\ 2. \ \forall\, M_0 < M \ \ \exists\, x_0 \in X\colon \ x_0 > M_0. \end{cases}$$

Если множество X имеет наибольший элемент, то он и будет точной верхней гранью этого множества.

Определение. *Наибольшая из нижних граней множества $X \subset \mathbb{R}$ называется его точной нижней гранью и обозначается как* $\inf X$.

Согласно этому определению,

$$m = \inf X \Leftrightarrow \begin{cases} 1. \quad \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad x \geqslant m, \\ 2. \ \forall m_0 > m \quad \exists x_0 \in X : \ x_0 < m_0. \end{cases}$$

Если множество X имеет наименьший элемент, то этот элемент и есть точная нижняя грань этого множества.

Если множество X неограничено сверху, то полагается $\sup X = +\infty$.

Если же X неограничено снизу, то полагается $\inf X = -\infty$.

Любое множество вещественных чисел может иметь лишь одну точную верхнюю грань, а также одну точную нижнюю грань. (Докажите это в качестве упражнения.)

Теорема (существования супремума). *Любое непустое множество вещественных чисел, ограниченное сверху, имеет точную верхнюю грань, являющуюся вещественным числом.*

Доказательство. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}$ не пусто. Тогда существует хотя бы один элемент a из X.

Если множество X ограничено сверху, то существует такое вещественное число b, что любой элемент x из X не превосходит b. В частности, $a \leqslant b$.

Таким образом, отрезок $[a, b]$ содержит хотя бы один элемент из множества X. Если $a = b$, то искомая точная верхняя грань задается равенством $\sup X = a = b$.

Пусть $a < b$. Тогда найдем отрезок $[a_1, b_1]$, обладающий следующими свойствами

$$[a_1, b_1] \subset [a, b], \qquad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2},$$

$$\forall\, x \in X \Rightarrow\ x \leqslant b_1.$$

Построение отрезка $[a_1, b_1]$ проведем по следующей схеме.

1. Рассмотрим середину отрезка $[a, b]$, то есть точку $c_0 = \frac{a+b}{2}$.

Если любой элемент x из X не превосходит c_0, то возьмем $a_1 = a$, $b_1 = c_0$.

Если же найдется элемент x из X, который строго больше c_0, то возьмем $a_1 = c_0$, $b_1 = b$ и далее снова получим отрезок $[a_1, b_1]$.

2. На втором шаге полагаем $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Далее по той же схеме, что и на первом шаге найдем следующий отрезок $[a_2, b_2]$, обладающий следующими свойствами:

$$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1], \qquad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2},$$

$$a_2 \leqslant b_2, \qquad [a_2, b_2] \cap X \neq \emptyset, \qquad \forall x \in X \Rightarrow x \leqslant b_2.$$

Продолжая построения по описанной выше схеме, найдем последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, обладающих следующими свойствами:

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}], \qquad b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2},$$

$$a_n \leqslant b_n, \qquad [a_n, b_n] \cap X \neq \emptyset, \qquad \forall\, x \in X \Rightarrow\ x \leqslant b_n.$$

Длина отрезка $[a_n, b_n]$ меньше длины исходного отрезка $[a, b]$ в 2^n раз:

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, последовательность отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, является стягивающейся.

Согласно аксиоме непрерывности Кантора, эти отрезки имеют одну общую точку

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

При этом переходя к пределу в неравенстве $x \leqslant b_n$, справедливом для всех x из X, получаем, что $x \leqslant c$ также для всех x из X.

Таким образом, c — это верхняя грань множества X. Докажем, что c — это точная верхняя грань.

Пусть $c_0 < c$. Тогда существует такой номер n_0, что $a_{n_0} > c_0$. Кроме того существует элемент x_{n_0} из X такой что $x_{n_0} > a_{n_0} > c_0$. Следовательно, c_0 не может верхней гранью множества X и поэтому $c = \sup X$. $\square$

Аналогично доказывается существование у любого ограниченного снизу множества чисел точной нижней грани (инфимума).

В множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел точные верхняя и нижняя грани ограниченного множества могут не существовать.

Например, ограниченное множество нижних десятичных приближений иррационального числа $\sqrt{2}$ не имеет в $\mathbb{Q}$ точной верхней грани.