Семинар „Логика нулевого порядка"

- Формула – x
- Если φ и ψ – формулы, то

$(\varphi \to \psi)$

$(\varphi \wedge \psi)$

$(\varphi \vee \psi)$ – формулы

$\neg \varphi$

$\neg \psi$

$\Phi(x_1, \dots x_n)$

$\gamma : \{x_1, \dots x_n\} \to \{0, 1\}$

2^n интерпретаций для n

$\gamma(\Phi) = \Phi(\gamma(x_1) \dots \gamma(x_n))$

$\gamma(x) = \gamma(x)$

$\gamma(\varphi \to \psi) = \begin{cases} 0, & \gamma(\varphi) = 1,\ \gamma(\psi) = 0 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$ $\quad \gamma(\neg\varphi)$

$\gamma(\varphi \vee \psi)$

$\gamma(\varphi \wedge \psi)$

Функция истинности (для каждой интерпретации выдаёт значение)

$f_\varphi : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$

1. а) $(p \to q) \vee (p \to (p \wedge q))$ — **Табл. ист.**

p	q	1	2	3	4
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

б) $((p \to q) \to \neg(r \to (p \wedge q)))$

p	q	r	1	2	3	4	5
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0

в) $(p \to \neg(q \to \neg(r \to q)))$

p	q	r	1	2	3	4	5
0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1

2. Тавт.

тождественно истинные – все 1 (тавтология), тожд. ложные – все 0

а) $\left(\left(p \overset{1}{\to} q\right) \overset{5}{\to} \left(\left(p \overset{3}{\to} \left(q \overset{2}{\to} r\right)\right) \overset{6}{\to} \left(p \overset{4}{\to} r\right)\right)\right)$

p	q	r	1	2	3	4	5	6
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

б) $\left(\left(p \overset{1}{\to} q\right) \overset{4}{\to} \left(r \overset{3}{\to} \left(q \overset{2}{\to} p\right)\right)\right) \overset{6}{\to} \left(p \overset{5}{\to} r\right)$

p	q	r	1	2	3	4	5	6
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

3. Эквивалентность

а) $\neg(p \to q) \sim p \wedge \neg q$ — верно

I

p	q	1	2
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0

II

p	q	1	2
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

$\varphi \sim \psi$

$\varphi \equiv \psi$ — эквивалентность

$f_\varphi = f_\psi$

б) $p \wedge (q \vee \neg q) \sim p$ — верно

I

p	q	1	2	3
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1

II

p	q	.
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

в) $p \vee (q \wedge \neg q) \sim p$ — верно

I

p	q	1	2	3
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1

II

p	q	.
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

4. Экв.

а) $x \overset{2}{\to} (y \overset{1}{\lor} z)$; $(x \overset{1}{\to} y) \overset{3}{\lor} (x \overset{2}{\to} z)$

I

x	y	z	1	2
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

II

x	y	z	1	2	3
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

I и II экв.

б) $\overset{2}{\neg} (x \overset{1}{\land} y) \overset{3}{\lor} z$; $\neg((x \overset{1}{\lor} z) \overset{3}{\land} (y \overset{2}{\lor} z))$

I

x	y	z	1	2	3
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1

II

x	y	z	1	2	3
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

I и II не экв.

Можно доказать

$\varphi \to \psi \equiv \overline{\varphi} \vee \psi$

$\overline{\varphi \vee \psi} \equiv \overline{\varphi} \wedge \overline{\psi}$

$\overline{\varphi \wedge \psi} \equiv \overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$

$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$

$(\varphi \vee \psi) \wedge \chi = (\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)$

$(\varphi \wedge \psi) \vee \chi = (\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$

φ фи

ψ пси

χ хи

ξ кси

ζ дзета

Греческие буквы

---

x – переменная

$x, \neg x$ – литералы
↳ $\overline{x}$

$A_1 \vee \ldots \vee A_n$ – элементарная дизъюнкция
дизъюнкт

A_i – литерал

$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ – конъюнкт (элем. кон.)

ДНФ – дизъюнктивная нормальная форма (дизъюнкция конъюнктов):

$D_1 \vee \ldots \vee D_m$, D_i – конъюнкт

↳ может быть разной для одной и той же формулы (т.е. не однозначна)

Как привести к днф:

1) избавиться от импликации

2) все отрицание сделать внутренними
(используя закон де Моргана)

3) избавление от двойного отрицания

5. Привести к днф:

а) $x \to (y \vee \neg z) \equiv \overline{x} \vee y \vee \overline{z}$

в этот случае
это и днф,
и кнф

б) $((x \to y) \to \neg z) \to x \equiv$

$\equiv \overline{\overline{(\overline{x} \vee y)} \vee \overline{z}} \vee x \equiv \overline{(x \wedge \overline{y}) \vee \overline{z}} \vee x \equiv$

$\equiv (\overline{(x \wedge \overline{y})} \wedge z) \vee x \equiv ((\overline{x} \vee y) \wedge z) \vee x \equiv$

$\equiv (\overline{x} \wedge z) \vee (y \wedge z) \vee x$