Тема : Множества на числовой оси

$\mathbf{1^0}$. Точные верхняя и нижняя грани числового множества. Теорема существования. $\mathbf{2^0}$. Определение покрытия промежутка числовой оси. Примеры. Лемма Гейне-Бореля о покрытии. Компактность замкнутого числового отрезка. $\mathbf{3^0}$. Несчетность множества вещественных чисел. $\mathbf{4^0}$. Открытые и замкнутые множества. Граничные и предельные точки.

2^0. Одним из важнейших свойств числовых множеств является их компактность. Дадим неоходимые сведения перед определением этого свойства.

Определение. *Семейство интервалов называют покрытием промежутка числовой оси, если любая точка этого промежутка принадлежит некоторому интервалу из рассматриваемого семейства.*

Иными словами, промежуток должен содержаться в объединении всех интервалов его покрытия.

Приведем пример покрытия. Пусть $a_n = 10^{-n}$ и $b_n = 1-10^{-n}$. Тогда последовательность интервалов $\{(a_n, b_n) \mid n = 1, 2, \ldots\}$ является покрытием интервала $(0, 1)$, но не отрезка $[0, 1]$.

Лемма (о покрытии). *Из любого покрытия интервалами конечного отрезка числовой прямой всегда можно выделить конечное подпокрытие.*

Доказательство. Предположим противное, то есть пусть существует непустой конечный отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и некоторое его покрытие интервалами, никакая конечная совокупность которых не покрывает $[a, b]$.

Необходимым следствием этого предположения является строгое неравенство $a < b$. (Если $a = b$, то отрезок состоит из единственной точки и покрывается одним интервалом семейства).

Полагаем теперь, что $\frac{a+b}{2} = c_0$. Согласно предположению по меньшей мере один из отрезков $[a, c_0]$ или $[c_0, b]$ не покрывается никакой конечной совокупностью интервалов из рассматриваемого покрытия. Если этим свойством обладает отрезок $[a, c_0]$, то полагаем $[a_1, b_1] = [a, c_0]$. В противном случае полагаем $[a_1, b_1] = [c_0, b]$.

Дальнейшие построения проведем по индукции: середину отрезка $[a_1, b_1]$ обозначим через $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, а через $[a_2, b_2]$ обозначим либо отрезок $[a_1, c_1]$, если он не покрывается никакой конечной совокупностью интервалов из рассматриваемого покрытия, либо $[c_1, b_1]$ в противном случае.

В результате получим последовательность $\{[a_n, b_n] \mid n = 1, 2, \ldots\}$ отрезков, вложенных друг в друга, каждый из которых не покрывается никакой конечной совокупностью исходных интервалов.

Эти вложенные отрезки стягиваются в единственную их общую точку

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n. \qquad (1)$$

При этом $a \leqslant c \leqslant b$ и, как это следует из определения покрытия, найдется интервал (α, β), принадлежащий исходному покрытию отрезка $[a, b]$ и такой, что $\alpha < c < \beta$.

Из равенства (1) следует также, что

$$\exists\, N: \quad \alpha < a_N < b_N < \beta.$$

Таким образом, отрезок $[a_N, b_N]$ покрывается в точности одним интервалом (α, β), принадлежащим исходному покрытию отрезка $[a, b]$. Но это противоречит свойствам построенной по индукции последовательности

$$\{[a_n, b_n] \mid n = 1, 2, \dots\}.$$

Таким образом, исходное предположение о существовании отрезка $[a, b]$, для которого не существует конечного подпокрытия, не является верным. $\square$

Доказанную лемму о покрытии называют также леммой Гейне — Бореля. Сформулированное в лемме свойство любого конечного отрезка на числовой прямой называется компактностью этого отрезка.

Компактность относят к топологическим свойствам числовых множеств.

Заметим, что в условии леммы Гейне — Бореля нельзя заменить семейство интервалов на семейство отрезков. Например, отрезок $[0, 1]$ покрывается последовательностью отрезков

$$[10^{-n}, 1 - 10^{-n}], \quad [-10^{-n}, 0], \quad [1, 1 + 10^{-n}],$$

где $n = 1, 2, \ldots$. Однако никакая конечная подпоследовательность из этих отрезков исходный отрезок $[0, 1]$ не покрывает.

3^0. Одной из универсальных характеристик любого числового множества является его мощность. Множества натуральных, целых и рациональных чисел счетные. При переходе к множеству вещественных чисел эта характеристика утрачивается.

Теорема (о мощности $\mathbb{R}$). *Множество вещественных чисел несчетно.*

Доказательство. Предположим, что множество $\mathbb{R}$ счетно, то есть все его элементы можно перенумеровать натуральными числами:

$$x_n = p_{0n}, \alpha_{1n}\alpha_{2n}\dots\alpha_{kn}\dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

Как обычно, будем предполагать, что среди бесконечных десятичных дробей нет периодических с периодом 9.

Рассмотрим теперь вещественное число x, построенное по следующему правилу:

$$x = 0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots,$$

где $\alpha_1 \neq 9$ и $\alpha_1 \neq \alpha_{11}$, $\alpha_2 \neq 9$ и $\alpha_2 \neq \alpha_{22}$, и вообще $\alpha_k \neq \alpha_{kk}$ для всех $k = 1, 2, \ldots$.

В соответствии с этим построением не существует номера n, для которого $x_n = x$, то есть $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\} \neq \mathbb{R}$. Это соотношение противоречит сделанному предположению о счетности множества вещественных чисел. $\square$

4^0. Точка x_0 из числового множества $G \subset \mathbb{R}$ называется внутренней точкой множества G, если существует ее окрестность $O(x_0)$, целиком лежащая в G, $O(x_0) \subset G$.

Совокупность всех внутренних точек множества G образуют его внутренность, обозначаемую как $\overset{\circ}{G}$.

Множество чисел G называется открытым, если все его точки внутренние, то есть если $G = \overset{\circ}{G}$.

Пустое множество $\emptyset$ по определению считается открытым.

Множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел — это открытое множество.

Любой интервал (a, b) числовой прямой — это открытое множество.

Объединение любых двух открытых множеств снова открытое множество. Пересечение любых двух открытых множеств снова открытое множество.

Промежутки $[a, b)$ и $(a, b]$ не являются открытыми множествами: один из их концов не имеет ни одной окрестности целиком лежащей в промежутке. Промежутки $[a, b)$ и $(a, b]$ называют полуоткрытыми интервалами.

Для любого отрезка $[a, b]$ его крайние точки не имеют ни одной окрестности целиком лежащей в нем самом. Следовательно, отрезок не является открытым множеством.

Теорема. *Если* $X \subset \mathbb{R}$ *и* X *— открытое множество, то среди его элементов нет ни наибольшего, ни наименьшего.*

Теорема доказывается методом от противного.

Определение. *Пусть множество* G *вложено в* $\mathbb{R}$*. Точка* x_0 *из* $\mathbb{R}$ *называется предельной точкой* G*, если*

$$\forall\, O(x_0) \quad \exists\, x_1 \in O(x_0): \quad x_1 \in G \text{ и } x_1 \neq x_0.$$

Любая внутренняя точка множества является его предельной точкой. Любая точка отрезка $[a, b]$ является его предельной точкой.

Предельная точка множества может ему не принадлежать. Например, интервал (a, b) имеет предельными свои конечные точки a и b, которые ему не принадлежат.

Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел не имеет ни одной конечной предельной точки.

Определение. *Множество чисел G называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.*

Пустое множество $\emptyset$ по определению считается замкнутым.

Множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел замкнутое множество.

Любой отрезок $[a, b]$ числовой прямой — это замкнутое множество.

Теорема. *Пусть* $X \subset \mathbb{R}$ *и* X *— замкнутое множество. Если* X *ограничено сверху, то его точная верхняя грань ему принадлежит, то есть* X *имеет наибольший элемент. Если* X *ограничено снизу, то его точная нижняя грань ему принадлежит, то есть* X *имеет наименьший элемент.*

Пусть $G \subset \mathbb{R}$. Точка x_0 из $\mathbb{R}$ называется граничой точкой G, если в любой ее окрестности имеется хотя бы одна точка из G и хотя бы одна точка из $\mathbb{R} \setminus G$ (то есть не принадлежащая G):

$$x_0 - \text{граничная точка } G \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\, O(x_0)\ \exists\, x_1 \in G \cap O(x_0) \text{ и } \exists\, x_2 \in (\mathbb{R} \setminus G) \cap O(x_0).$$

Определение. *Границей множества G называется множество всех его граничных точек.*

Границу множества G принято обозначать символом ∂G. Если множество чисел G замкнуто, то $\partial G \subset G$. Если множество чисел G открыто, то $\partial G \cap G = \emptyset$.

Граница отрезка $[a, b]$ — это его крайние точки, граница интервала (a, b) — это также его крайние точки:

$$\partial \{[a, b]\} = \partial \{(a, b)\} = \{a\} \cup \{b\}.$$

Пусть X обозначает все рациональные точки из интервала $(0, 1)$. Тогда $\partial X = [0, 1]$. В этом случае $X \subset \partial X$ и $X \neq \partial X$.

Любая точка числового множества G — это либо внутренняя точка этого множества, либо его граничная точка.

Любая точка границы ∂G числового множества G либо принадлежит этому множеству, либо является его предельной точкой.

Определение. *Объединение числового множества G с множеством всех его предельных точек называется замыканием множества G и обозначается символом $\overline{G}$.*

Для любого числового множества G справедливы равенства

$$\overline{G} = \overline{\overline{G}} \quad \text{и} \quad \overline{G} = G \cup \partial G.$$

Точка x_0 принадлежит замыканию $\overline{G}$ тогда и только тогда когда существует последовательность $\{x_n\}$ точек из G стремящаяся в пределе к x_0:

$$x_0 \in \overline{G} \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad \text{где } x_n \in G.$$

Тема : Функции одной переменной

$\mathbf{1^0}$. Числовые функции: определения, обозначения примеры. $\mathbf{2^0}$. Обратимые и обратные функции. Обратимость строго монотонных функций. $\mathbf{3^0}$. Сложные функции (композиции, суперпозиции). Примеры. $\mathbf{4^0}$. Показательная и логарифмическая функции. Экспонента и натуральный логарифм. $\mathbf{5^0}$. Основные элементарные функции. Классификация множества функций одной переменной.

1^0. Одно из основных понятий математического анализа — это понятие функции, или зависимой переменной.

Определение. *Пусть* X *— заданное числовое множество, каждому элементу* x *которого по некоторому правилу* f *сопоставляется число* $y = f(x)$. *Тогда множество пар* $(x, f(x))$, *где* $x \in X$, *называется числовой функцией и обозначается как* f, *либо как* $f(x)$, $x \in X$, *либо как* $y = f(x)$, $x \in X$.

Множество X при этом называется областью определения функции f и обозначается как D_f. Множество

$$\{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in X : y = f(x)\}$$

называется множеством значений функции f и обозначается как $f(X)$.

Определение. *Графиком функции f называется множество точек плоскости с декартовыми координатами $(x, f(x))$, где $x \in X$.*

Если задана функция $y = f(x)$, $x \in X$, то говорят, что переменная y является функцией независимой переменной x. При этом пишут $y = y(x)$, а y называют зависимой переменной.

Числовую функцию $f : X \mapsto \mathbb{R}$ называют также отображением множества X в числовую ось.

Если $\boldsymbol{Y} \equiv \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$, то $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{Y}$ называют отображением множества $\boldsymbol{X}$ на множество $\boldsymbol{Y}$. Точка $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ из $\mathbb{R}$ называется образом точки $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{X}$, а точку $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{X}$ называют прообразом точки $\boldsymbol{y}$ из $\boldsymbol{Y}$.

Пусть множество $\boldsymbol{M}$ вложено в $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{X}$. Тогда множество

$$\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R} \mid \exists\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\}$$

называется образом множества M при отображении f.

Часто числовую функцию задают формулой, не указывая при этом явно ее область определения. В этом случае предполагается, что функция задана на так называемой естественной области определения, то есть на множестве всех тех чисел, для которых исходная формула задания имеет смысл.

Например, естественная область определения функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ — это отрезок $[-1, 1]$ числовой прямой. Функция же $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ имеет естественной областью определения объединение интервалов $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$.

2^0. Пусть задана функция $y = f(x)$, $x \in X$, и $Y = f(X)$ — образ множества X. Тогда для любой точки y из Y уравнение $f(x) = y$ имеет по крайней мере одно решение x.

Определение. *Функция* $y = f(x)$, $x \in X$, *называется обратимой, если для любого* $y \in Y$ *уравнение* $f(x) = y$ *имеет единственное решение* $x = \varphi(y)$. *При этом функция* $x = \varphi(y)$, $y \in Y$, *называется обратной к функции* f *и обозначается как* f^{-1}.

Например, функция $y = x^2$, $x \in [0, +\infty)$, имеет обратную $x = \sqrt{y}$, $y \in [0, +\infty)$.

Функция $y = x^2$, $x \in (-\infty, 0]$, также имеет обратную $x = -\sqrt{y}$, $y \in [0, +\infty)$.

Но на всей числовой прямой функция $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, не имеет обратной.

Функция $y = f(x)$, $x \in X$, называется строго возрастающей на X, если выполняется условие

$$\forall\, x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Аналогично, функция $y = f(x)$, $x \in X$, называется строго убывающей на X, если выполняется условие

$$\forall\, x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Если функция строго возрастающая или строго убывающая на X, то ее называют строго монотонной на X.

Теорема. *Любая строго монотонная на множестве* X *функция* $y = f(x)$, $x \in X$, *имеет обратную, которая также является строго монотонной на множестве* $y \in f(X)$.

Докажите эту теорему в качестве упражнения.

Функции, имеющие обратные на множестве X, называют обратимыми на этом множестве.

3^0. Функция, определяемая равенством $y = g(f(x))$, где f и g — это данные функции, называется сложной функцией, или композицией функций f и g.

Иногда сложную функцию называют также суперпозицией f и g.

Область определения суперпозиции $y = g(f(x))$ — это ее естественная область определения, то есть множество

$$\{x \in D_f : \quad y = f(x) \in D_g\}.$$

Если естественная область определения сложной функции — это пустое множество, то говорят, что рассматриваемая композиция не имеет смысла.

Для наглядности при задании сложной функции $y = g(f(x))$ независимую переменную функции g и зависимую переменную функции f обозначают одной и той же буквой:

$$y = g(u), \quad \text{где} \quad u = f(x).$$

Рассмотрим пример. Пусть $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$. Тогда $y = g(f(x))$ задается формулой

$$y = g(u) \equiv \sqrt{u}, \quad \text{где} \quad u = 1 - x^2,$$

то есть $y = \sqrt{1 - x^2}$. При этом сложная функция $y = f(g(x))$ это совсем другая функция:

$$y = 1 - z^2, \quad \text{где} \quad z = \sqrt{x},$$

то есть $= 1 - x$, где $x > 0$.

В частности, в общем случае $g(f(x)) \neq f(g(x))$.

Если $y = f(x)$, $x \in X$ — обратимая функция, то имеет место равенство

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall\, x \in D_f.$$

Отметим, что понятие “сложная функция” определяет лишь способ задания, но не реальную сложность итоговой функции.

Например, стандартная степенная функция $y = x^{\alpha}$, $x > 0$, может быть записана как сложная функция в виде $y = e^{\alpha \ln x}$.