1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-1}{2x^2+3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{5}{2}$$

$\frac{1}{x^2}\to 0$, $\frac{3}{x}\to 0$, $\frac{4}{x^2}\to 0$

$\frac{\infty}{\infty}$ — неопределённость; поделим числитель и знаменатель на x в старшей степени

2. $$\lim_{x\to 5}\frac{5+14x-3x^2}{x^2-2x-15}=\lim_{x\to 5}\frac{\frac{5}{x^2}+\frac{14}{x}-3}{1-\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}}=-3$$

$\to 0$ $\quad \to 0$

3. $$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}=\frac{\sqrt[3]{\frac{1+2x}{x^3}}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{2+x}{x^2}}+1}=\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}}+1}=0$$

8. $$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2-x+1)}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{x}\to 0$, $\frac{1}{x^2}\to 0$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
+	+	$+_0$	0	+	0	+	+	$+_0$	0

4ш

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+2}\right)^{x+2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2+2}{3x+2}\right)^{x+2} =$ 5.

II от замечательный предел

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x+2}\right)^{x+2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\left(\frac{2}{3x+2}\right)^{\to 0}\right)^{\frac{3x+2}{2}}\right)^{\frac{2}{3x+2}\cdot(x+2)} =$

e =

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(x+2)}{3x+2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+4}{3x+2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\left(\frac{4}{x}\right)^{\to 0}}{3+\left(\frac{2}{x}\right)^{\to 0}}} = e^{\frac{2}{3}}$ 2.

8. Доказать сходимость при $n\to\infty$:

$x_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)} = 1-\frac{1}{2^{n+1}} < 1 \Rightarrow$ 3.

$\Rightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow$ последовательность x_n является убывающей

x_n стремится к 0 (при $n=0$: $1-\frac{1}{2^0}=1$

при $n=1$: $1-\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2}$

при $n=2$: $\left(1-\frac{1}{2^1}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{3}{8}$

при $n=3$: $\left(1-\frac{1}{2^1}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^3}\right)=\frac{5}{16}$

и т.д.)

$x_n \searrow$ и ограничена снизу (нулём) $\Rightarrow x_n$ – сходящаяся последовательность (по т. В.)

Этот вывод можно сделать из вида x_n – т.к. каждая скобка >0, то и $x_n>0$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(1-2\sin^2 x)}{x\sin x} =$

$\to \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \to$ I замечательный предел

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 x}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x}{x} = 2$

2. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{5+14x-3x^2}{x^2-2x-15} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(-3x-1)\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x+3)} =$

$= \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{-3x-1}{x+3} = \dfrac{-16}{8} = -2$

3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(\sqrt[3]{1+2x}+1)(\sqrt{2+x}-x)}{-x^2+x+2} =$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(\sqrt[3]{1+2x}+1)((\sqrt[3]{1+2x})^2-\sqrt[3]{1+2x}+1)(\sqrt{2+x}-x)}{(2-x)(x+1)((\sqrt[3]{1+2x})^2-\sqrt[3]{1+2x}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(1+2x+1)(\sqrt{2+x}-x)}{(2-x)(x+1)(\sqrt[3]{1+2x}^2-\sqrt[3]{1+2x}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2(\sqrt{2+x}-x)}{(2-x)((\sqrt[3]{1+2x})^2-\sqrt[3]{1+2x}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2(\sqrt{2-1}+1)}{(2+1)(\sqrt[3]{(1-2)^2}-\sqrt[3]{(1-2)}+1)} = \dfrac{4}{3\cdot\cancel{1}\,3} = \dfrac{4}{3}$