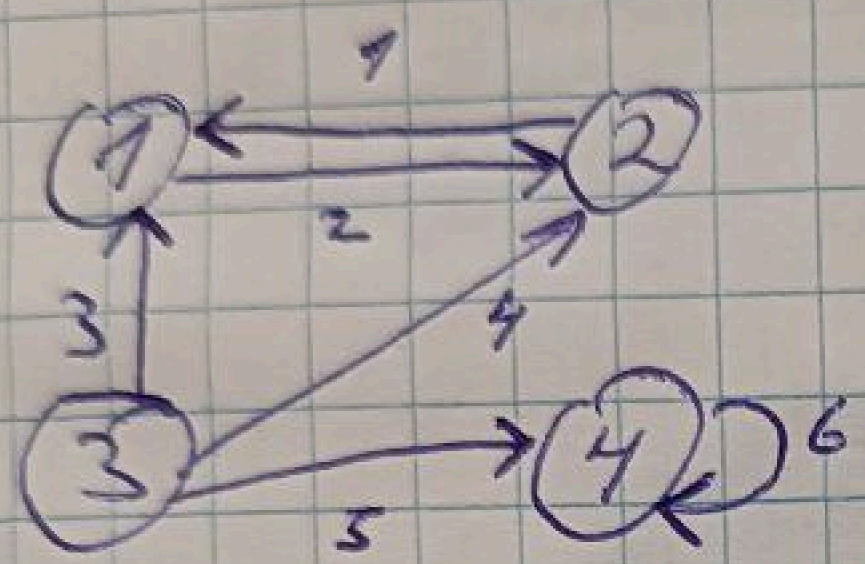
Способы представления графов 2.0

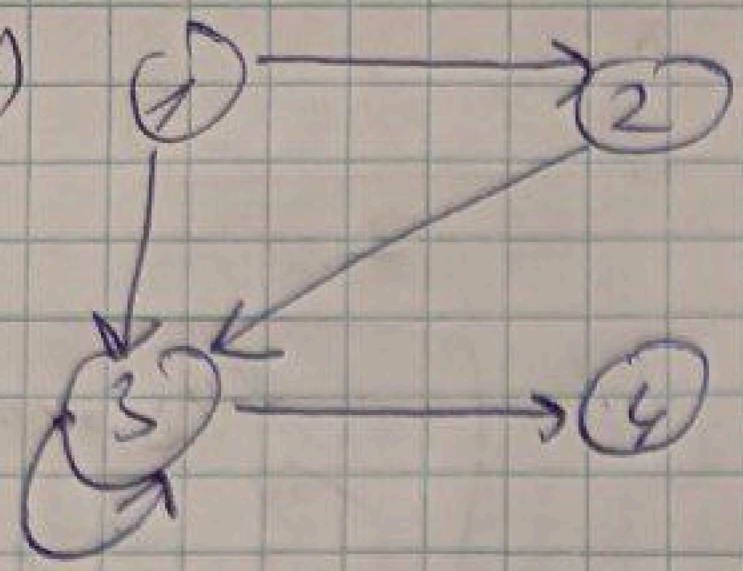
Матрица инцидентности



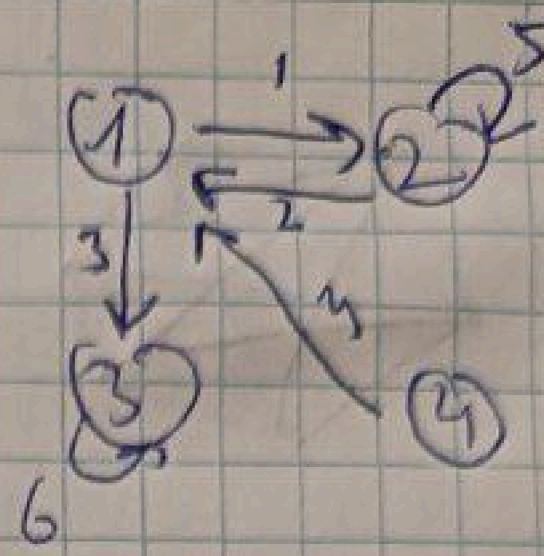
$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{array}$$

1. Постр. граф

а)



б)



Бывают изоморфные графы!

$G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$

$G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$

$\varphi: V_1 \to V_2$, φ – биекция

$(a, b) \in E_1 \leftrightarrow (\varphi(a), \varphi(b)) \in E_2$

2. а)

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Изоморф.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

б) $$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{matrix} \end{array}$$

Не изоморф.

в) $$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{matrix} \end{array}$$

Не изоморф.

3. а)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ Изоморф.

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2, 3, 6, 3 степени

Не изоморф.

3, 4, 5, 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

в)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 3, 3, 5, 3$$

5, 3, 3, 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Изоморф.}$$

Компоненты связности. Компоненты сильной связности.

$G = \langle V, E \rangle$

$P = a_0 v_1 a_1 v_2 \ldots v_n a_n$ $\quad v_i = (a_{i-1}, a_i)$

, если $a_i \in V$, $v_i \in E$

$a_i \neq a_j$ $\quad$ P – простой путь

$i \neq j$, $\{i, j\} \neq \{0, n\}$

$a_0 = a_n$ – цикл

простой + цикл = простой цикл

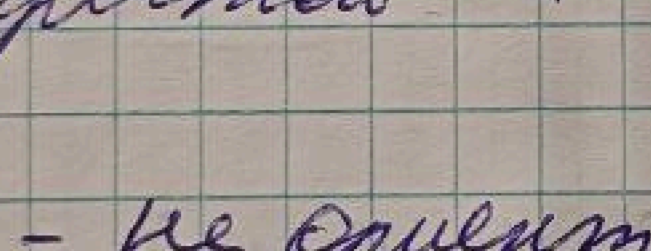
G – не ориент.

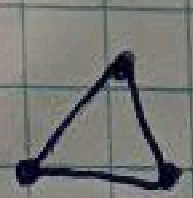
Рефл., транз. замыкание

Компоненты связности G – такой неориентированный подграф, что из каждой вершины можно попасть в каждую, т. е. что

$\forall a, b \; \exists$ путь из a в b

Максимальных много, наибольший один (про элементы множ-ва)





G – ориент. граф

$$\bar{G} = \langle V, E \cup E^{-1} \rangle$$

Опр. аналогично как для неориент. г.

Рефл., сим., транз. замыкание

Компоненты сильной связности:

такой максимальный подграф, что $\forall a, b \; \exists$ путь из a в b.

Как считать:

Матрицы достижимости

→ кол-во вершин минус один

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ за 2 шага

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ за 3 шага

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = E + A + A^2 + A^3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&1&1&1 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1&1&1&1 \\ 1&2&1&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&1&1&1 \end{pmatrix} =$$

из любой вершины за 0 шагов можно оказаться в этой же вершине

$$= \begin{pmatrix} 2&3&2&2 \\ 2&5&3&3 \\ 0&0&1&0 \\ 1&2&1&2 \end{pmatrix}$$

Матрица достижимости:

$$C = Sg\, B = \begin{pmatrix} 1&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \\ 0&0&1&0 \\ 1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

Если $A = A^T$, то C — матрица комп. связ.

$D = C^T$ — матрица контрдостижимости

$$\begin{pmatrix} 1&1&0&1 \\ 1&1&0&1 \\ 1&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

$\{1, 2, 4\}$

$\{3\}$

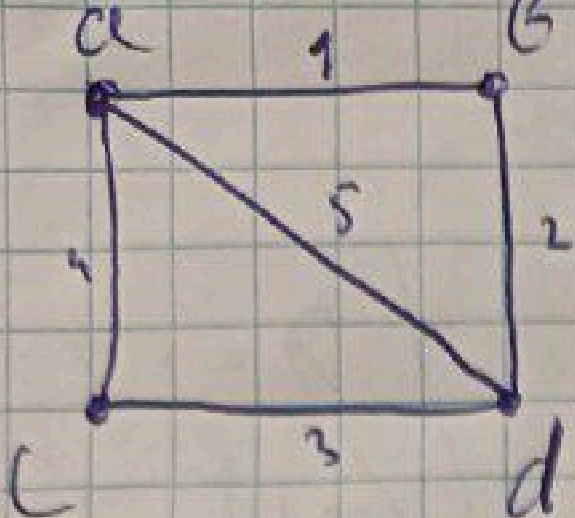
$$S = C \cap D = \begin{pmatrix} 1&1&0&1 \\ 1&1&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 1&1&0&1 \end{pmatrix}$$

комп. сильн. связн.

Файл №2:

№1

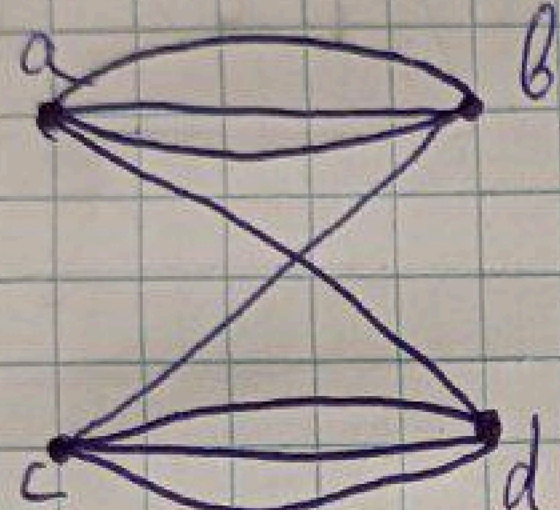
1)



Список смежности:

a: b, c, d
b: a, d
c: a, d
d: a, b, c

2)



a: b, b, b, d
b: a, a, a, c
c: b, d, d, d
d: a, c, c, c

Матрица смежности

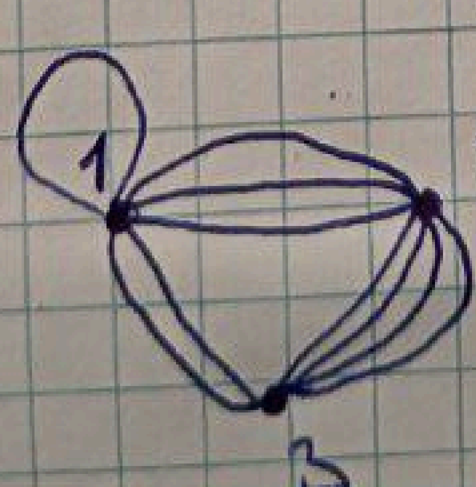
	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	1	0	0	1
c	1	0	0	1
d	1	1	1	0

Матрица инцидентности

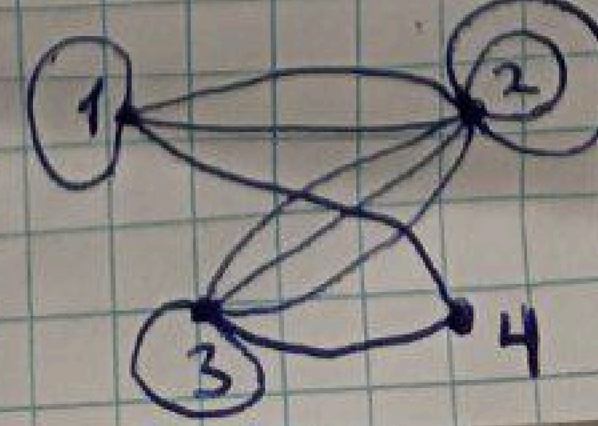
	1	2	3	4	5
a	1	0	0	1	1
b	1	1	0	0	0
c	0	0	1	1	0
d	0	1	1	0	1

№3

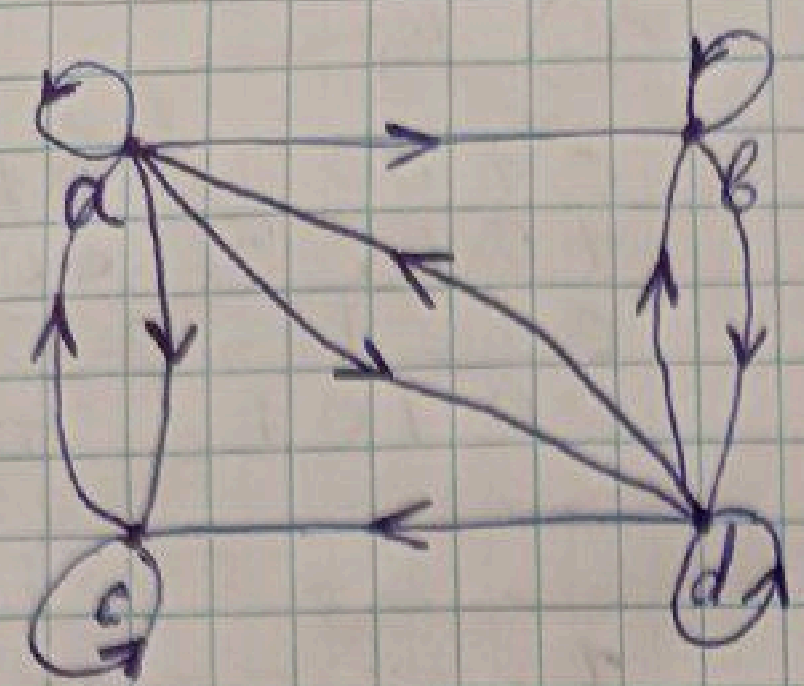
1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$



2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



4.



	a	b	c	d
a	2	1	1	1
b	0	2	0	1
c	1	0	2	0
d	1	1	1	2

7.

a) K_4

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

b) $K_{\underset{m}{1}, \underset{n}{4}}$

$$\begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}^{n} \ \overbrace{1}^{m} \end{array}$$

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\} n \qquad \left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right\} m$$

c) $K_{\underset{m}{2}, \underset{n}{3}}$

$$\begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\quad}^{n} & \overbrace{\quad}^{m} \end{array}$$

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right\} n$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\} m$$

d) C_4

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

e) W_4

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

f) Q_3

$$\begin{array}{c|c} \overbrace{\overbrace{Q_1}\ \overbrace{E_1}}^{Q_2} & \overbrace{\qquad}^{E_2} \end{array}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$E_1 \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right.$$

$$E_2 \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \underbrace{0 & 1 & 1 & 0}_{Q_2} \end{matrix}\right.$$

g) K_n

$$\overbrace{\hphantom{0\ 1\ 1\ \dots\ 1}}^{n}$$
$$\left.\begin{matrix}0&1&1&\dots&1\\1&0&1&\dots&1\\\vdots&&0&&\vdots\\\vdots&&&\ddots&\vdots\\&&&0&1\\1&\dots&&1&0\end{matrix}\right\}n$$

h) C_n

$$\begin{matrix}0&1&0&0&\dots&0&0&1\\1&0&1&0&0&\dots&0&0\\0&1&0&1&\dots&&0&0\\0&0&1&0&1&\dots&&0\\\dots&&&&&&&\dots\\\dots&&&&&&0&1\\1&\dots&&&&&1&0\end{matrix}$$

i) W_n

$$\begin{array}{c|c}[C_n]&\begin{matrix}1\\1\\1\\\vdots\end{matrix}\\\hline 1\,1\dots1&0\end{array}$$

j) $K_{m,n}$

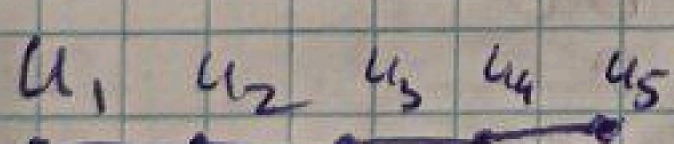
$$\begin{array}{r|c|c|l}&n&m&\\ n&\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\end{matrix}&\begin{matrix}1&1\\1&1\end{matrix}&n\\\hline m&\begin{matrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\end{matrix}&\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\end{matrix}&m\\&n&n&\end{array}$$

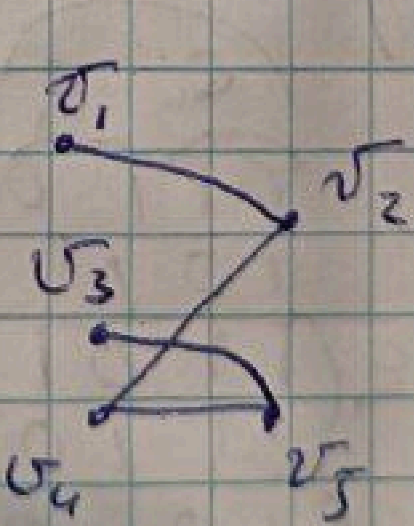
k) Q_n

$$\begin{array}{c|c}Q_{n-1}&E_{n-1}\\\hline E_{n-1}&Q_{n-1}\end{array}$$

№9 Изоморфизм

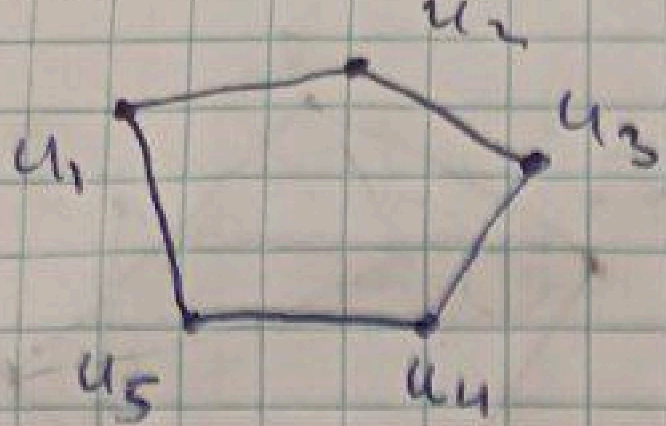
1)

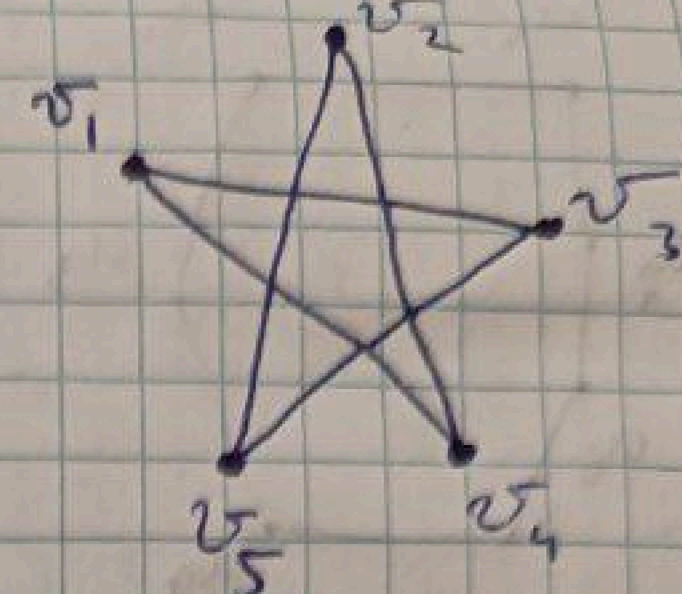




$f(u_1) = v_1,$
$f(u_2) = v_2,$
$f(u_3) = v_4,$
$f(u_4) = v_5,$
$f(u_5) = v_3$

2)





$f(u_1) = v_2$

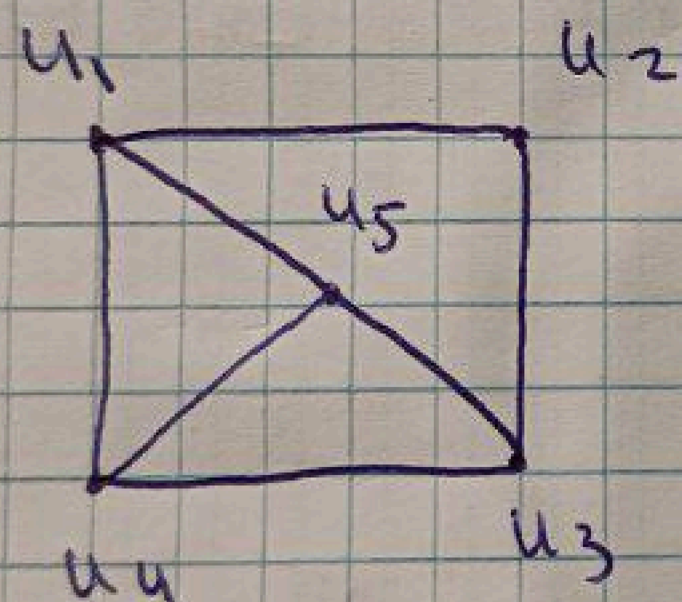
$f(u_2) = v_5$

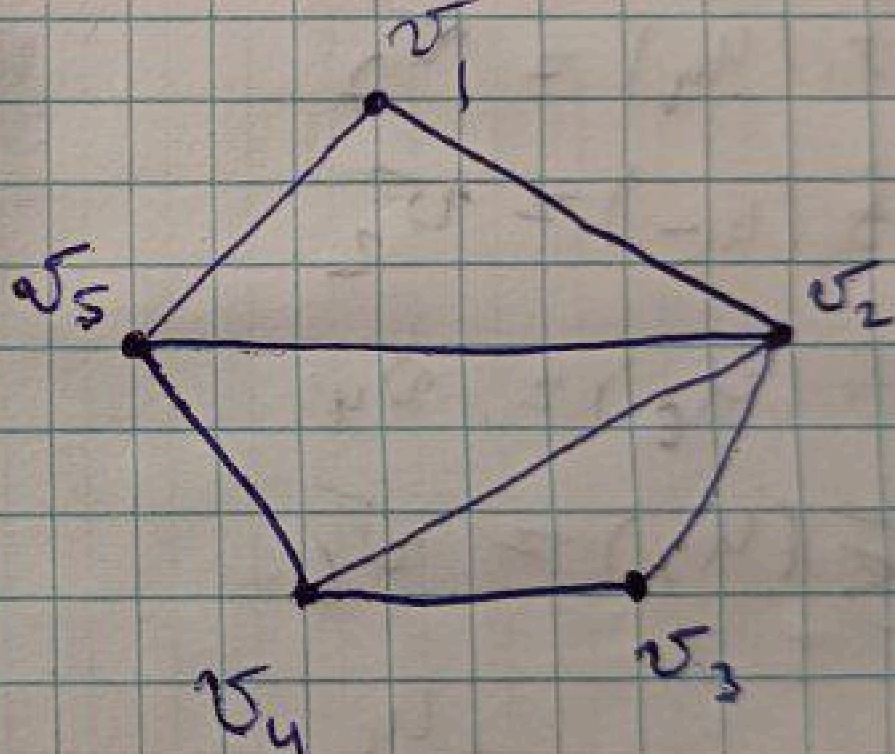
$f(u_3) = v_3$

$f(u_4) = v_1$

$f(u_5) = v_5$

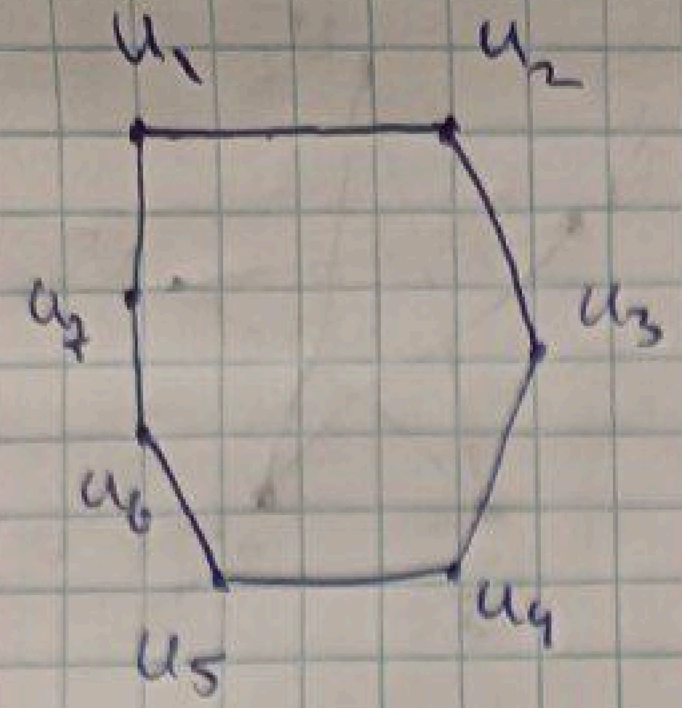
3)

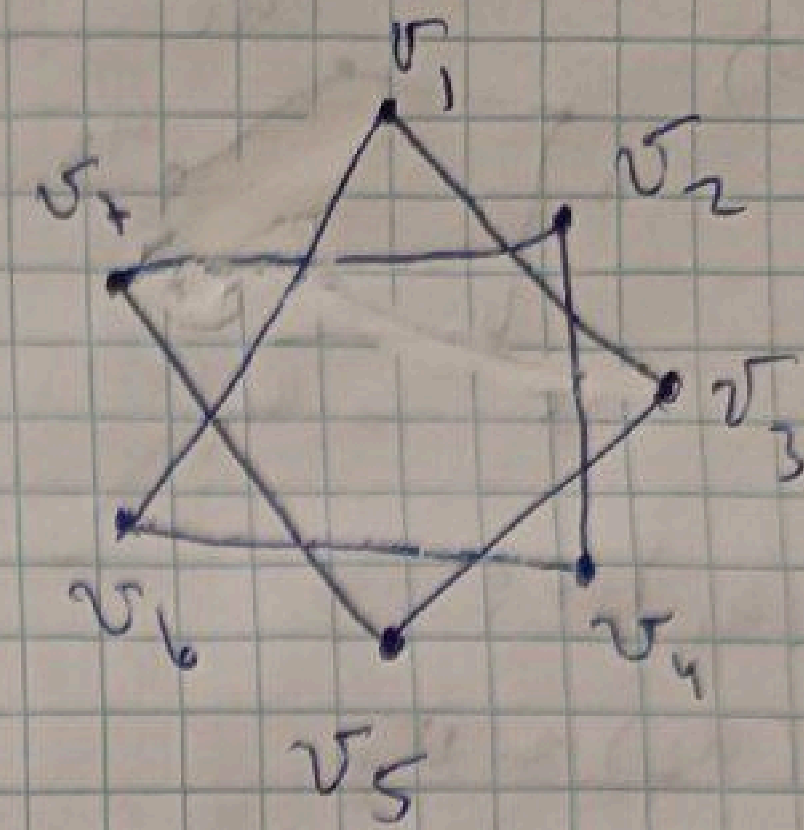




У второго графа есть вершина v_2 степени 4, у первого графа макс. степень вершины равна 3 $\Rightarrow$ графы не могут быть изоморфны.

4)





$f(u_1) = v_1$

$f(u_2) = v_3$

$f(u_3) = v_5$

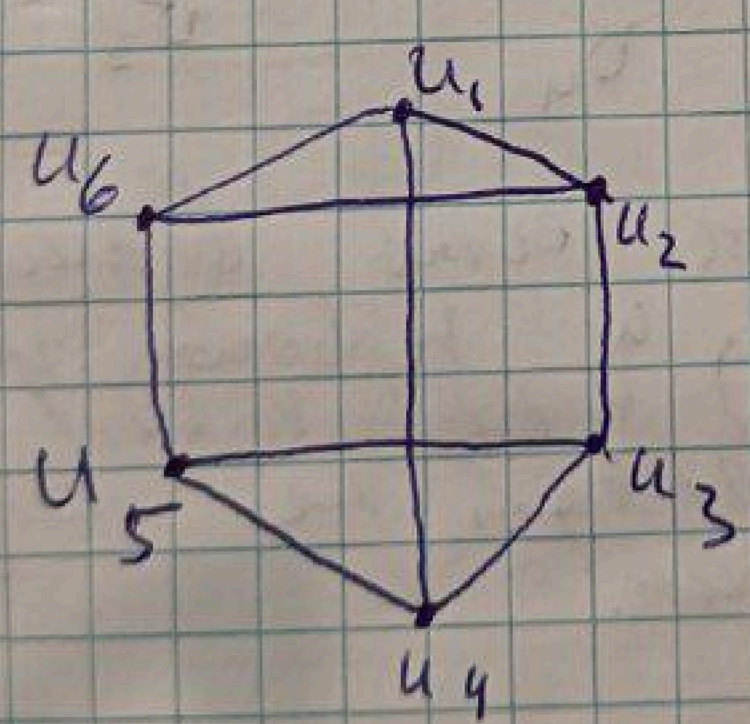
$f(u_4) = v_7$

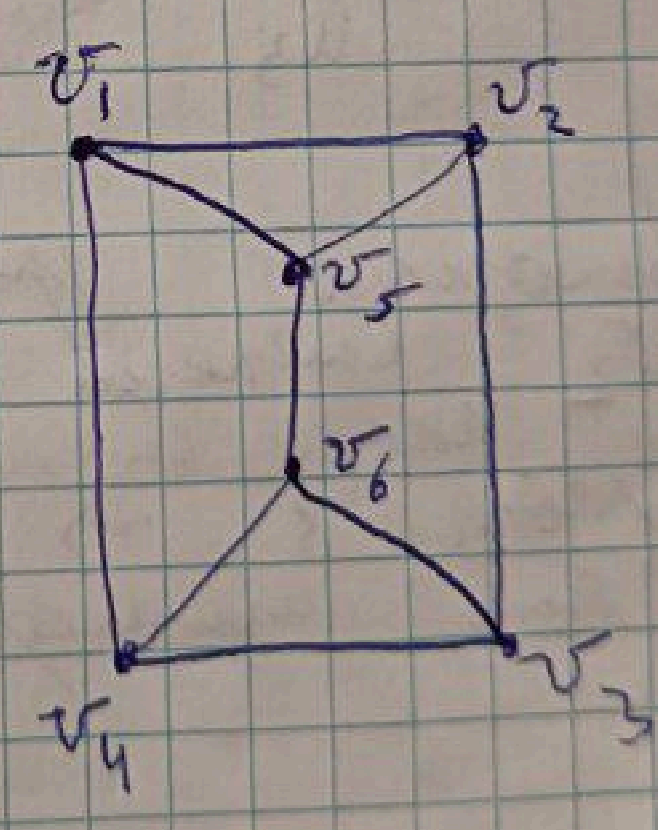
$f(u_5) = v_2$

$f(u_6) = v_4$

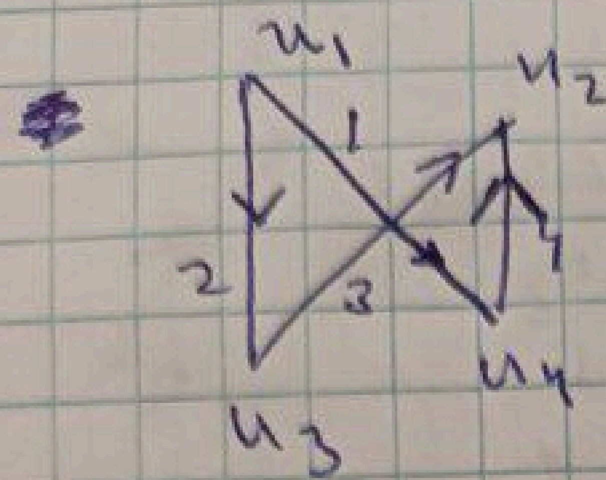
$f(u_7) = v_6$

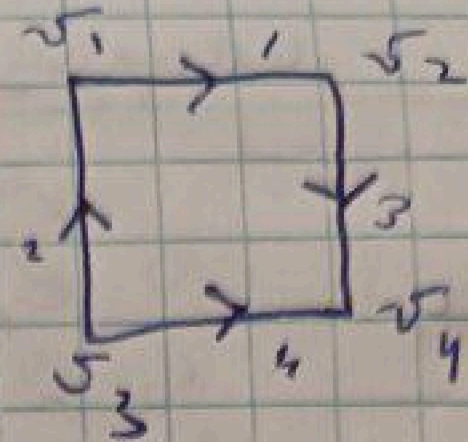
5)





9, 11, 24





	1	2	3	4
u_1	1	1	0	0
u_2	0	0	-1	-1
u_3	0	-1	1	0
u_4	-1	0	0	1

	1	2	3	4
v_1	1	-1	0	0
v_2	-1	0	1	0
v_3	0	1	0	1
v_4	0	0	-1	-1

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	0	0	1	1
u_2	0	0	0	0
u_3	0	1	0	0
u_4	0	1	0	0

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	0	0	0
v_2	0	0	0	1
v_3	1	0	0	1
v_4	0	0	0	0