1、证明：　且第k列替换为$[\underbrace{0\ 0 \cdots 0}_{k-1个0}\ a_{k,k}, 0, \cdots, 0]^T$

记A_k是将A的第k行替换为$[\underbrace{0\ 0 \cdots 0}_{k-1个0}\ a_{k,k}\ 0 \cdots 0]$后的矩阵$(k=1,2,\ldots,n)$

由$\det(A_k - a_{k,k} I) = 0$可知，$a_{k,k}$是$A_k$的特征值

$\lambda_i(A_k) = a_{k,k}$

No.

Date

由 Weyl不等式

$$|\lambda_i(A)-\lambda_i(A_k)| \leq \|A-A_k\|_2 \leq \|A-A_k\|_F$$

又∵ $\|A-A_k\|_1 = \|A-A_k\|_\infty = \sqrt{\sum_{s\neq k}|a_{k,s}|^2}$

即 $(\lambda_i(A)-a_{k,k})^2 \leq \sum_{s\neq k}|a_{k,s}|^2$

∴ 每个圆盘中都至少含有 A 的一个特征值

2. 证明:

即证 $\min\{\|E\|_2 : \det(A+E)=0\} = \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}$

设 $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \cdots \geq \sigma_n(A)$

则 $\frac{1}{\|A^{-1}\|_2} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_n(A)}} = \sigma_n(A)$

令 $B = A+E$

则 $\min\{\|E\|_2 : \det(A+E)=0\}$

$= \min\{\|B-A\|_2 : \det(B)=0\}$

$= \min\{\|B-A\|_2 : \text{rank}(B) \leq n-1\}$

由最佳低秩逼近

上式 $= \sigma_n(A)$

$\therefore$ 证毕

No.

Date

3. 证明: $n>1$

$\because \operatorname{rank}(vv^*)=1<n$

$\therefore \det(vv^*)=0$

$\therefore 0$ 是 vv^* 的特征值

又 $\because$ rank(vv^*) ~~=1~~ $\because (vv^*)x=0$ 必有 $n-1$ 个线性无关解向量

$\therefore 0$ 至少为 $n-1$ 重特征根

又 $\because \operatorname{tr}(vv^*)=$ vv^* 的所有特征值之和

$\quad\quad\; \| \\ v^*v$

$\therefore$ v^*v 是 vv^* 的特征值

由 Weyl 不等式

$$\lambda_i(A+vv^*) \geq \lambda_i(A)+\lambda_1(vv^*)$$

$$= \lambda_i(A)$$

且 $\lambda_i(A+vv^*) \leq \lambda_{i+1}(A)+\lambda_{n-1}(vv^*)$

$$= \lambda_{i+1}(A)$$

$$\therefore \lambda_i(A) \leq \lambda_i(A+vv^*) \leq \lambda_{i+1}(A)$$

证毕

4. 证明：

∵ A是 Hermite 矩阵

∴ 由奇异值分解

$A = U\Sigma U^*$，其中 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是酉阵

令 $B = U\begin{bmatrix} \sigma_1(A) & & & & & \\ & \sigma_2(A) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_k(A) & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}U^*$

则 $B^* = B$ 且 $\mathrm{rank}(B) \le k$

∴ $A-B = U\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \sigma_{k+1}(A) & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \sigma_n(A) \end{bmatrix}U^*$

则 $\|A-B\|_2 = \sigma_{k+1}(A) = \min\limits_{\mathrm{rank}(X)\le k} \|A-X\|_2$

5.

下证在 R^n 中，两两夹角为钝角的向量不超过 $n+1$ 个

反证：

假设在 R^n 中有 $n+2$ 个两两夹角为钝角的向量 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n+2}$

则存在不全为0的实数 $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$，使得 $c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_{n+1}v_{n+1}=0$

$\therefore <c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_nv_n+c_{n+1}v_{n+1}, v_{n+2}>$

$= c_1<v_1, v_{n+2}>+c_2<v_2, v_{n+2}>+\dots+c_{n+1}<v_{n+1}, v_{n+2}>=0$

$\because <v_1, v_{n+2}><0 \quad <v_2, v_{n+2}><0 \quad \dots \quad <v_{n+1}, v_{n+2}><0$

$\therefore$ 不妨设 $c_1, c_2, \dots c_i>0 \quad c_{i+1}, c_{i+2}, \dots, c_j<0 \quad c_{j+1}, c_{j+2}, \dots, c_{n+1}=0$

则 $c_1<v_1, v_{n+2}>+c_2<v_2, v_{n+2}>+\dots+c_i<v_i, v_{n+2}>$

$= -c_{i+1}<v_{i+1}, v_{n+2}>-\dots-c_j<v_j, v_{n+2}>=a$

$\therefore <a, a> = <c_1<v_1, v_{n+2}>+\dots+c_i<v_i, v_{n+2}>, -c_{i+1}<v_{i+1}, v_{n+2}>-\dots$

$-c_j<v_j, v_{n+2}>>$

则 $c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_iv_i=-c_{i+1}v_{i+1}-c_{i+2}v_{i+2}-\dots-c_jv_j=a$

$<a, a> = <c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_iv_i, -c_{i+1}v_{i+1}-c_{i+2}v_{i+2}-\dots-c_jv_j>$

$= -c_1c_{i+1}<v_1, v_{i+1}>-c_1c_{i+2}<v_1, v_{i+2}>-\dots$

<0 这与 $<a, a>\geq 0$ 矛盾，假设不成立

$\therefore$ 在 R^n 中，两两夹角为钝角的向量不超过 $n+1$ 个