1.证明：

B可以由A经过行列变换得到：$B=E_1AE_2$

E_1,E_2均为由0与1组成的矩阵，且每一行、每一列至多有1个1

$\|E_1\|_p=\max\limits_{\|x\|_p=1}\|E_1x\|_p$　　E_1x,E_2y分别为x,y删去0个或多个分量组成的向量

$\|E_2\|_p=\max\limits_{\|y\|_p=1}\|E_2y\|_p$　　$\because 1\le p\le+\infty$

故 $\|E_1\|_p\le 1$　$\|E_2\|_p\le 1$

$\therefore \|A\|_p\ge\|E_1\|_p\|A\|_p\|E_2\|_p\ge\|E_1AE_2\|_p=\|B\|_p$

证毕

9.5 W

2.证明

设$X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$

则 $f(X)f(Y) = \|P^{-1}XP\|\|P^{-1}YP\|$

$$\geq \|(P^{-1}XP)(P^{-1}YP)\| = \|P^{-1}X(PP^{-1})YP\|$$

$$= \|P^{-1}(XY)P\| = f(XY)$$

No.

Date

$\therefore f(X)$ 也是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的相容范数

3. 证明：

$$\|A^{-1}\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|}$$

由于A是非奇异阵　故 $x\neq 0 \Leftrightarrow Ax\neq 0$

故 $\|A^{-1}\| = \sup_{Ax\neq 0} \frac{\|A^{-1}Ax\|}{\|Ax\|} = \sup_{Ax\neq 0} \frac{\|x\|}{\|Ax\|}$

$$= \sup_{x\neq 0} \frac{1}{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$$

$$= \frac{1}{\inf\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$$

$$= \frac{1}{\min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|}$$

$$\therefore \|A^{-1}\|^{-1} = \min_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

4. 证明:

不妨设 $A_{m\times n}$，$B_{n\times k}$

记

$A=\cancel{[a_1\ a_2\ \cdots\ a_n]}$，$B=[b_1\ b_2\ \cdots\ b_k]$

$(\|AB\|_F)^2=\sum_{s=1}^{k}(\|Ab_s\|_2)^2$ $\quad (\|B\|_F)^2=\sum_{t=1}^{k}(\|b_t\|_2)^2$

由于 $\|A\|_2=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$ 故 $\frac{\|Ab_s\|_2}{\|b_s\|_2}\le\|A\|_2$ $(s=1,2,\ldots,k)$.

故 $(\|AB\|_F)^2\le\|A\|_2^2\sum_{s=1}^{k}(\|b_s\|_2)^2$

$\therefore \frac{(\|AB\|_F)^2}{(\|B\|_F)^2}\le\|A\|_2^2$ $\quad\therefore \|AB\|_F\le\|A\|_2\|B\|_F$

记 $A^H=[a_1\ a_2\ \cdots\ a_m]$

同理 记 $\cancel{A=\begin{bmatrix}-a_1-\\-a_2-\\ \vdots\\ -a_m-\end{bmatrix}}$ $\quad(\|AB\|_F)^2=\sum_{s=1}^{m}(\|B^Ha_s\|_2)^2=(\|B^HA^H\|_F)^2$ $\quad(\|A\|_F)^2=\sum_{t=1}^{m}(\|a_t\|_2)^2=(\|A^H\|_F)^2$

由于 $\|B^H\|_2=\sup_{x\neq 0}\frac{\|B^Hx\|_2}{\|x\|_2}$

故 $\frac{\|B^Ha_s\|_2}{\|a_s\|_2}\le\|B^H\|_2$ $\quad$ 故 $(\|AB\|_F)^2\le(\|B^H\|_2)^2\sum_{s=1}^{m}(\|a_s\|_2)^2$

$\therefore \frac{(\|AB\|_F)^2}{(\|A\|_F)^2}\le(\|B^H\|_2)^2$ $\quad$ 即 $\|AB\|_F\le\|A\|_F\|B^H\|_2$

No.
Date

由于 B^HB 与 BB^H 有共同的非零特征值

故 $\rho(B^HB) = \rho(BB^H)$

故 $\|B^H\|_2 = \|B\|_2$

$\therefore \|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_2$.

5.

证明:

若 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 则 $AB=\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

此时 $\|A\|_{max}=2$ $\|B\|_{max}=2$ $\|AB\|_{max}=8$

$\|AB\|_{max} > \|A\|_{max}\cdot\|B\|_{max}$

所以 $\|\cdot\|_{max}$是不相容的范数

要使 $\alpha\|AB\|_{max} \leq \alpha^2\|A\|_{max}\|B\|_{max}$ 恒成立

设$\|A\|_{max}=a$ $\|B\|_{max}=b$

由于 $\|AB\|_{max} = \max\limits_{1\leq i,j\leq n}\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right|$

删去?

两个"="可以同时取到

$\leq \max\limits_{1\leq i,j\leq n}\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|$

$\leq nab$

No.

Date

故只需 $\alpha nab \leq \alpha^2 ab$

由于 α 为满足条件的最小实数，故 $\alpha = n$