No.
Date

1. 证明：

取 $Q_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & +\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $Q_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

则 $\|A\|_1=\|A\|_\infty=1$

$Q_1AQ_2=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & +\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ $\|Q_1AQ_2\|_1=\|Q_1AQ_2\|_\infty=\sqrt{2}$

$\|A\|_1\neq\|Q_1AQ_2\|_1$

$\|A\|_\infty\neq\|Q_1AQ_2\|_\infty$

故 $C^{m\times n}$ 上的1-范数和 ∞-范数不是酉不变范数

最好对任意给定的 $m\times n$ 上证明，而非 2×2

2. 证明：

记 $A=\begin{bmatrix}z_1 & z_2\\ z_3 & z_4\end{bmatrix}\in C^{2\times 2}$ 记 A^*A 的特征值为 λ_1,λ_2

$\|A\|_2^2=\rho(A^*A)=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|\}$

$A^*A=\begin{bmatrix}\bar{z}_1 & \bar{z}_3\\ \bar{z}_2 & \bar{z}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1 & z_2\\ z_3 & z_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\|z_1\|_2^2+\|z_3\|_2^2 & \bar{z}_1z_2+\bar{z}_3z_4\\ z_1\bar{z}_2+z_3\bar{z}_4 & \|z_2\|_2^2+\|z_4\|_2^2\end{bmatrix}$

No.

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = tr(A^*A) = \|z_1\|_2^2+\|z_2\|_2^2+\|z_3\|_2^2+\|z_4\|_2^2 = \|A\|_F^2 \\ \lambda_1\lambda_2 = det(A^*A) = det(A^*)\cdot det(A) = |det(A)|^2 \end{cases}$$

即 λ_1、λ_2 为方程 $\lambda^2 - tr(A^*A)\lambda + det(A^*A)=0$

的解.

$$\lambda_1 = \frac{\|A\|_F^2 - \sqrt{\|A\|_F^4 - 4|det(A)|^2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\|A\|_F^2 + \sqrt{\|A\|_F^4 - 4|det(A)|^2}}{2}$$

$$|\lambda_1| \le |\lambda_2|.$$

故 $$\|A\|_2 = \sqrt{\frac{\|A\|_F^2 + \sqrt{\|A\|_F^4 - 4|det(A)|^2}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\|A\|_F^2+2|det(A)|} + \sqrt{\|A\|_F^2 - 2|det(A)|}}{2}$$

3. 证明：由于 A 的每行所有元素之和均为 1

易知 $\|A^k\|_\infty = 1$.

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|_\infty = 1.$$

即 $A^k(k\to\infty)$ 的 ~~每行~~ ∞-范数为 1

即 $A^k(k\to\infty)$ 的所有元素的绝对值均不超过 1.

故序列 $(A^k)_{k=1}^{\infty}$ 收敛.

令 $|A-\lambda I|=0$ 解得 A 的特征值为 $1, -0.1, 0.6$

对应的特征向量分别为 $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt3} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{4}{9} \\ -\frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{29}} \\ 0 \\ \frac{5}{\sqrt{29}} \end{bmatrix}$

记 $S=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 1 & 0 & -7\\ 1 & 5 & 4\end{bmatrix}$ $\cancel{S^{-1}=}$ $\cancel{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\\ -\frac{2}{\sqrt{29}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{29}}\\ \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{4}{9}\end{bmatrix}}$ $\leftarrow$ $S^{-1}=\frac{1}{71}\begin{bmatrix}35 & 28 & 14\\ -11 & 0 & 11\\ 5 & -7 & 2\end{bmatrix}$

$\Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.6 & 0\\ 0 & 0 & -0.1\end{bmatrix}$ 则 $A=S\Lambda S^{-1}$

$A^k=S\Lambda^kS^{-1}=S\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.6^k & 0\\ 0 & 0 & (-0.1)^k\end{bmatrix}S^{-1}$

$\lim\limits_{k\to\infty}A^k=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{71}\begin{bmatrix}35 & 28 & 14\\ -11 & 0 & 11\\ 5 & -7 & 2\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}5 & 4 & 2\\ 5 & 4 & 2\\ 5 & 4 & 2\end{bmatrix}$

4. 证明

$\because \sum\limits_{k=0}^{\infty}\|A_k\|$ 收敛

$\therefore \sum\limits_{k=0}^{\infty}\|A_k\|_F$ 收敛

设 A_k 的第 i 行第 j 列元素为 $a_{ij}^{(k)}$ $0\le i,j\le n$

由于 $|a_{ij}^{(k)}|\le\|A_k\|_F$

故 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_{ij}^{(k)}|$ 收敛

故 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{ij}^{(k)}$ 收敛

$\therefore \sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k$ 收敛.

记 $S_n=\|\sum\limits_{k=0}^{n}A_k\|$ $T_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\|A_k\|$

下证 $S_n\le T_n$

① $n=0,1$ 时 显然成立

② 假设 $n\le p-1$ 时 结论成立

则 $n=p$ 时 $S_p=\|\sum\limits_{k=0}^{p-1}A_k+A_p\|$

$\le S_{p-1}+\|A_p\|\le T_{p-1}+\|A_p\|$

$=T_p$.

故 $S_n\le T_n$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}S_n\le\lim\limits_{n\to\infty}T_n$ $\therefore \|\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k\|\le\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|A_k\|$

5. 证明:

A adj(A+B)B

= (A+B) adj

B adj(A+B) A

= B adj(A+B

故 A adj(A+

1. 设 rank(

由满秩分解

∴ ran

ran

由 Syl

ran

5. 证明：

$A\,\mathrm{adj}(A+B)B + B\,\mathrm{adj}(A+B)B$

$= (A+B)\,\mathrm{adj}(A+B)B = \det(A+B)\cdot B$

$B\,\mathrm{adj}(A+B)A + B\,\mathrm{adj}(A+B)B$

$= B\,\mathrm{adj}(A+B)(A+B) = \det(A+B)\cdot B$

故 $A\,\mathrm{adj}(A+B)B = B\,\mathrm{adj}(A+B)A$.

10

6.17