1. 证明：

$\because$ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 是 V 的一组基 且 $x \in V$

$\therefore$ $x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$ （$c_1, c_2, \ldots, c_n$ 是常数）

$\because$ x 与 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 的每个向量都正交

$\therefore$ $\langle v_1, x \rangle = 0$. $\langle v_2, x \rangle = 0$ $\cdots$ $\langle v_n, x \rangle = 0$

No.
Date

$\because \langle x, x\rangle$

$= \langle c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n, x\rangle$

$= c_1\langle v_1, x\rangle + c_2\langle v_2, x\rangle + \cdots + c_n\langle v_n, x\rangle$

$= 0$

$\therefore x = 0$ 证毕

2. 证明:

① $\det(A)=0$ 时 显然成立

② $\det(A)\neq 0$ 时

记 $l_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2$ 则 $l_i \neq 0$

设 $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的 (i,j) 元素为 $\frac{a_{ij}}{\sqrt{l_i}}$ $\therefore \operatorname{trace}(BB^*) = n\times 1 = n$

则 $\det(A) = \det(B)\cdot\prod_{i=1}^{n}\sqrt{l_i}$ $\therefore \det(B)\neq 0$

$$|\det(A)|^2 = |\det(B)|^2 \prod_{i=1}^{n} l_i$$

$\therefore$ 要证 $|\det(A)|^2 \leq \prod_{i=1}^{n} l_i$

只需证 $|\det(B)|^2 \leq 1$ 即 ~~$|\det(B)| \leq 1$~~

$\forall x\in\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

$x^*(BB^*)x = (B^*x)^*(B^*x) > 0$

$\because BB^*$ 为 Hermite 正定矩阵

$\therefore \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R$

且 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$

设 BB^* 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

则 $|\det(B)|^2 = |\det(BB^*)|$

$= |\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n|$

$\leq \left(\frac{\operatorname{trace}(BB^*)}{n}\right)^n = 1$ 证毕

No.

Date

3. 证明:

要证 $\exists v \in R^3 \setminus \{0\}$ 使 $Qv=v$

只需证 Q 有特征值 1

即证 $Q-I$ 有特征值 0

只需证 $\det(Q-I)=0$

$$\begin{aligned}\det(Q-I) &= \det(Q-QQ^T) = \det Q \cdot \det(I-Q^T) \\ &= (-1)^3 \det(Q^T-I) \\ &= -\det[(Q^T-I)^T] \\ &= -\det(Q-I)\end{aligned}$$

故 $\det(Q-I)=0$ 证毕

4. 证明:

(1) $\Rightarrow$ (2)

由 Schur 分解, 存在酉阵 $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使得

$$T = Q^*AQ = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{nn} \end{bmatrix} \quad 则 \ Q^*A^*Q = \begin{bmatrix} \bar{t}_{11} & & & \\ \bar{t}_{12} & \bar{t}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \bar{t}_{1n} & \bar{t}_{2n} & \cdots & \bar{t}_{nn} \end{bmatrix}$$

由 $(Q^*AQ)(Q^*A^*Q) = Q^*AA^*Q = Q^*A^*AQ = (Q^*A^*Q)(Q^*AQ)$

仅比较两侧矩阵的对角线上元素, 可得

$$|t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + \cdots + |t_{1n}|^2 = |t_{11}|^2$$

$$|t_{22}|^2 + \cdots + |t_{2n}|^2 = |t_{12}|^2 + |t_{22}|^2$$

$$\vdots$$

$$|t_{nn}|^2 = |t_{1n}|^2 + |t_{2n}|^2 + \cdots + |t_{nn}|^2$$

No.

Date

则 T 的主对角线的右上方元素(对角线除外)均为 0

∴ T 是对角阵

∴ A 可以酉对角化

(2) ⇒ (6)

∵ A 可以酉对角化

∴ 存在酉阵 $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$，使得

$$Q^*AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

由相似可知

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 均为 A 的特征值

$$Q^*A^*Q = \begin{bmatrix} \overline{\lambda_1} & & & \\ & \overline{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

记 $Q = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ 则 $Aq_i = \lambda_i q_i \quad A^* q_i = \overline{\lambda_i} q_i$

∴ A 的任何特征向量都是 A^* 的特征向量

(2) ⇒ (4)

∵ A 可以酉对角化

∴ 存在酉阵 $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$，使得

$$Q^*AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 均为 A 的特征值

$$Q^*A^*Q = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{bmatrix}$$

$$Q^*(AA^*)Q = \begin{bmatrix} |\lambda_1|^2 & & & \\ & |\lambda_2|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\lambda_n|^2 \end{bmatrix}$$

由相似变换的性质可知

$$tr(AA^*) = tr(Q^*(AA^*)Q) = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2$$

又 $\because tr(AA^*) = \|A\|_F^2$

$$\therefore \|A\|_F^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2$$

(4) $\Rightarrow$ (2)

由Schur分解 存在酉阵 $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$，使得

$$T = Q^*AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & \lambda_2 & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

则 $tr(TT^*) = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 + \sum_{1\le i<j\le n} |t_{ij}|^2$

又 $\because tr(TT^*) = tr(Q^*AA^*Q) = tr(AA^*) = \|A\|_F^2$

$\|A\|_F^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2$ $\therefore \sum_{1\le i<j\le n} |t_{ij}|^2 = 0$

$\therefore$ T是对角阵 $\therefore$ A可以酉对角化

No.
Date

(6)⇒(1) 如何知道 A 有n个线性无关的特征向量

$Ax=\lambda x \quad x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$

∵ x 也是 A^* 的特征向量

∴ $A^*x=\lambda' x$

∴ $AA^*x=\lambda'\lambda x=A^*Ax$

x 是 A 的任意特征向量

∴ $AA^*=A^*A$ A是正规阵

(5)⇒(1)

若存在复数域上的多项式 $f(\lambda)$ 使得 $A^*=f(A)$

则 $AA^*=Af(A)=f(A)A=A^*A$

∴ A是正规阵

(3)⇒(1)

$A=X+iY \quad A^*=X^*-iY^*=X-iY$

$AA^*=(X+iY)(X-iY)$

$=X^2+Y^2+iYX-iXY$

$=X^2+Y^2+iXY-iYX$

$=(X-iY)(X+iY)$

$=A^*A$

∴ A是正规阵

(1)⇒(3)

令 $X=\frac{1}{2}(A+A^*)$ $Y=\frac{1}{2i}(A-A^*)$ 则 $A=X+iY$

$X^*=\frac{1}{2}(A^*+A)=X$ $Y^*=-\frac{1}{2i}(A^*-A)=Y$

∴ X和Y是Hermite阵 又 $XY=\frac{1}{4i}(A^2-AA^*+A^*A-(A^*)^2)$

$=\frac{1}{4i}(A^2-A^*A+AA^*-(A^*)^2)$

$=YX$

∴(1)可推出(3)

(2)⇒(5) ∵A可酉对角化 ∴存在酉阵 $Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$

使得 $Q^*AQ=\begin{bmatrix}\lambda_1 I_{r_1} & & \\ & \lambda_2 I_{r_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_s I_{r_s}\end{bmatrix}=\Lambda$ 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s$ 为A的全部互异特征值

由lagrange插值公式，存在多项式 $f(x)=\sum_{i=1}^{s}\frac{\overline{\lambda_i}(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_{i-1})(x-\lambda_{i+1})\cdots(x-\lambda_s)}{(\lambda_i-\lambda_1)\cdots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i-\lambda_s)}$

满足 $f(\lambda_i)=\overline{\lambda_i}$ $\therefore f(\Lambda)=\Lambda^*$

$\therefore f(A)=f(Q\Lambda Q^*)=Qf(\Lambda)Q^*=Q\Lambda^*Q^*=A^*$ ∴(2)⇒(5)成立

5.证明： ∴证毕

设 $m,n\in N$

$T_m(x)T_n(x)=\cos(m\arccos x)\cos(n\arccos x)$

$=\frac{1}{2}[\cos[(m-n)\arccos x]+\cos[(m+n)\arccos x]]$

$\langle T_m(x),T_n(x)\rangle=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\cos[(m-n)\arccos x]+\cos[(m+n)\arccos x])\,d\arccos x$

令 $t=\arccos x$

则 $m\neq n$时 上式 $=-\frac{1}{2}\int_{\pi}^{0}(\cos(m-n)t+\cos(m+n)t)\,dt$

$=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sin(m-n)t}{m-n}+\frac{\sin(m+n)t}{m+n}\right)\Big|_{\pi}^{0}$

$=0$ ∴第一类Chebyshev多项式在该内积下两两正交

$m=n$时 $\langle T_n(x),T_n(x)\rangle=-\frac{1}{2}\int_{\pi}^{0}(1+\cos 2nt)\,dt$ 7.5w

∴范数为 $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $n=0$? $=-\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2nt}{2n}\right)\Big|_{\pi}^{0}=\frac{\pi}{2}$