No.

Date

1.

证明:

$$\begin{vmatrix} \lambda I_m & A \\ \lambda B & \lambda I_n \end{vmatrix} \xlongequal{col_1 - col_2 \times B} \begin{vmatrix} \lambda I_m - AB & A \\ O & \lambda I_n \end{vmatrix} = |\lambda I_m - AB||\lambda I_n|$$

$$= \lambda^n |\lambda I_m - AB|$$

$$\begin{vmatrix} \lambda I_m & A \\ \lambda B & \lambda I_n \end{vmatrix} \xlongequal{row_2 - B \times row_1} \begin{vmatrix} \lambda I_m & A \\ O & \lambda I_n - BA \end{vmatrix} = \lambda^m |\lambda I_n - BA|$$

故 $\lambda^n |\lambda I_m - AB| = \lambda^m |\lambda I_n - BA|$

∴ AB和BA有完全相同的非零特征值

当$m=n$时 AB和BA不一定相似

如:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则 $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\text{rank}(AB) = 1 \qquad \text{rank}(BA) = 0$

∴ AB和BA不相似

No.
Date

2. 证明：

$\because Q_K$ 为酉阵 $\therefore Q_K$ 中每个元素均有界 记 $Q_K=(q_{ij}^{(K)})$

$\therefore$ 存在 $(Q_K)_{K=1}^{\infty}$ 的~~收敛~~子列 使得 ~~[illegible]~~ 该子列的第 ~~[illegible]~~ 1行第1列元素收敛，同理，存在该子列的一个子列，使得第1行第2列元素收敛 …… 不断进行下去直到找到子列 $(Q_{kn})_{n=1}^{\infty}$，使得每一个元素都收敛（这一过程只重复有限次）

记 $Q=\lim_{n\to\infty} Q_{kn}$

$\because Q^*Q=\lim\limits_{n\to\infty} Q_{kn}^* \cdot \lim\limits_{n\to\infty} Q_{kn}=\lim\limits_{n\to\infty} Q_{kn}^* Q_{kn}=I$

故 Q 是酉阵

$\because A_K=Q_K T_K Q_K^*$

$\therefore T_K=Q_K^* A_K Q_K \qquad T_{kn}=Q_{kn}^* A_{kn} Q_{kn}$

$Q^*AQ=\lim\limits_{n\to\infty} Q_{kn}^* A_{kn} Q_{kn}=\lim\limits_{n\to\infty} T_{kn}=T$

$\because T_{kn}$ 为上三角阵 $\quad\therefore T$ 为上三角阵

$\therefore Q^*AQ$ 是上三角阵

3. 证明：

由Jordan分解 ~~[illegible]~~ $A=PJP^{-1} \qquad J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$

J_i 为 λ_i 对应的块

对于每个 i 均有 $J_i=A_i+B_i$，$A_i=\lambda_i I$ 为对角阵

B_i 为幂零阵且 $A_iB_i=B_iA_i$

记 $A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{bmatrix}$ 则 $J=A+B$，

A 为对角阵，B 为幂零阵

且 $AB=BA$

CamScanner

No.
Date

则 $A=PJP^{-1}=P(A+B)P^{-1}$

$=PAP^{-1}+PBP^{-1}$

令 $S=PAP^{-1}$ ， $N=PBP^{-1}$

则 $A=S+N$

显然 S 为可对角化矩阵，N 为幂零矩阵

$SN=P(AB)P^{-1}=P(BA)P^{-1}=NS$

证毕

4.

$$f(J)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(\mu_0)}{k!}(J-\mu_0 I)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(\mu_0)}{k!}[(\lambda-\mu_0)I+N]^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(\mu_0)}{k!}\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}(\lambda-\mu_0)^{k-s}I\cdot N^{s}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(\mu_0)}{k!}\sum_{s=0}^{\min\{k,n-1\}}\binom{k}{s}(\lambda-\mu_0)^{k-s}N^{s}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{f^{(k)}(\mu_0)}{k!}\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}(\lambda-\mu_0)^{k-s}N^{s}$$

$$+\sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(\mu_0)}{k!}\sum_{s=0}^{n-1}\binom{k}{s}(\lambda-\mu_0)^{k-s}N^{s}$$

$$f(J)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(\mu_0)}{k!}(J-\mu_0 I)^k$$

$$(J-\mu_0 I)^k=\begin{bmatrix}(\lambda-\mu_0)^k & C_k^1(\lambda-\mu_0)^{k-1} & C_k^2(\lambda-\mu_0)^{k-2} & \cdots & \cdots \\ & (\lambda-\mu_0)^k & C_k^1(\lambda-\mu_0)^{k-1} & \cdots & \vdots \\ & & (\lambda-\mu_0)^k & \ddots & \vdots \\ & & & & (\lambda-\mu_0)^k\end{bmatrix}$$

CamScanner

故 $f(J)=\begin{bmatrix} f(\lambda) & \frac{1}{1!}f'(\lambda) & \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda) \\ & f(\lambda) & \frac{1}{1!}f'(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(\lambda) \\ & & f(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(n-3)!}f^{(n-3)}(\lambda) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & f(\lambda) \end{bmatrix}$

No.

Date

5. $J=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 由 Jordan 分解 $X=PJ'P^{-1}$

若 X 的特征值为 λ，代数重数为 3，几何重数为 1，则 $J'=\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$

$(J')^2=\begin{bmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{bmatrix}$ $X^2=PJ'^2P^{-1}=J$

由于 J 和 $(J')^2$ 相似，故取 $\lambda=1$

则 $(J')^2=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ 设 $P=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}$

则根据 $P(J')^2=JP$ 解得 $a_2=a_3=b_3=0$ $c_3=2b_2=4a_1$

$a_1+2b_1=c_2$ 不妨令 $a_1=1$ $b_1=0$ $c_1=0$

则 $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&4\end{bmatrix}$ $P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$ $X=PJ'P^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}$ 则 X 满足题意

6. $\begin{cases}\alpha_{n+1}+2=\dfrac{5(\alpha_n+2)}{\alpha_n+3}\\ \alpha_{n+1}-2=\dfrac{\alpha_n-2}{\alpha_n+3}\end{cases}$ $\therefore \dfrac{\alpha_{n+1}+2}{\alpha_{n+1}-2}=5\,\dfrac{\alpha_n+2}{\alpha_n-2}$

又 $\because \dfrac{\alpha_0+2}{\alpha_0-2}=-3$

$\therefore \dfrac{\alpha_n+2}{\alpha_n-2}=(-3)\cdot 5^n$

$\therefore \alpha_n=\dfrac{6\cdot 5^n-2}{3\cdot 5^n+1}$

10

11.20

Z