No.

Date

1\. 记 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{bmatrix}$

则 $|1|=1>0$ $\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1>0$ $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{vmatrix}=1>0$

$\det(A)=1>0$ ∴存在非奇异阵 $C\in R^{4\times4}$, 使 $C^TAC=I_4$

故A是正定阵 即 $A^{-1}=CC^T$ $C^{-1}A^{-1}(C^{-1})^T=I_4$ ∴A^{-1}也是正定阵

由行列式降阶公式

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\det(A)(0-x^TA^{-1}x)$$
$$=-\det(A)(x^TA^{-1}x)$$

其中 $x=[x_1,x_2,x_3,x_4]^T$

∵A^{-1}正定 ∴$x^TA^{-1}x$是正定型 ∴f是负定型

∴ f的负惯性指数为4，正惯性指数和零惯性指数均为0.

∴ f的惯性指数为 $(0,4,0)$

2\. 证明:

取A的主子式 $(i\neq j)$ $\begin{vmatrix}a_{ii}&a_{ij}\\a_{ji}&a_{jj}\end{vmatrix}=0-|a_{ij}|^2$

∵A是半正定矩阵 ∴ $-|a_{ij}|^2\geq0$

∴ $|a_{ij}|=0$

∴$a_{ij}=0$ 对任意 $j\neq i$ $1\leq j\leq n$ 均成立 ∴A的第i行所有元素都为0

No.

Date

3. 证明：由题可知 $A, B, A-B$ 均可逆

先证 $B^{-1}-A^{-1}=(B+B(A-B)^{-1}B)^{-1}$

$(B+B(A-B)^{-1}B)(B^{-1}-A^{-1})$

$= I_n + B(A-B)^{-1} - BA^{-1} - B(A-B)^{-1}BA^{-1}$

$= (A-B)(A-B)^{-1} + B(A-B)^{-1} - (A-B)(A-B)^{-1}BA^{-1} - B(A-B)^{-1}BA^{-1}$

$= (A-B+B)(A-B)^{-1} - (A-B+B)(A-B)^{-1}BA^{-1}$

$= A(A-B)^{-1} - A(A-B)^{-1}BA^{-1}$

$= A(A-B)^{-1}(AA^{-1}-BA^{-1}) = A(A-B)^{-1}(A-B)A^{-1} = I_n$

$\because$ $A-B$ 正定 $\quad (A-B)^{-1}$ 也正定

$\therefore$ 存在非奇异阵 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使 $X^*(A-B)X = I_n$ $\quad \therefore X^{-1}(A-B)^{-1}(X^{-1})^* = I_n$

$\therefore$ $B(A-B)^{-1}B = B(A-B)^{-1}B^* = (BX)(BX)^*$

$\therefore$ $B(A-B)^{-1}B$ 也正定

$\therefore$ 对任意非零向量 $x \in \mathbb{C}^n$

$x^*(B+B(A-B)^{-1}B)x$

$= x^*Bx + x^*[B(A-B)^{-1}B]x$

>0

$\therefore$ $B+B(A-B)^{-1}B$ 正定 $\quad \therefore (B+B(A-B)^{-1}B)^{-1}$ 正定

即 $B^{-1}-A^{-1}$ 是 Hermite 正定矩阵

4. 令 $|A-\lambda I|=0$

解得 A 的特征值为 $\lambda_1=9 \quad \lambda_2=4 \quad \lambda_3=0$

对应的特征向量分别为 $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]^T$, $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^T$,

$\left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right]^T$

$$令 Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \qquad \Lambda=\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则 Q 为正交矩阵 Λ 为对角矩阵

且 $A=Q\Lambda Q^T$

5. 证明:

$\because$ B 是 Hermite 正定矩阵

$\therefore$ 存在非奇异阵 $\cancel{X}$ $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$

使得 $\cancel{X^*BX}$ $M^*BM = I_n$

而此时 $(M^*AM)^* = M^*A^*M = M^*AM$

$\therefore$ M^*AM 是 Hermite 矩阵

由谱分解定理 存在酉阵 $Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 和实对角阵 Λ

使得 $M^*AM = Q\Lambda Q^*$

即 $(MQ)^*A(MQ)=\Lambda$.

No.
Date

而 $(MQ)^*B(MQ)=Q^*(M^*BM)Q=Q^*Q=I_n$

∴存在非奇异阵 $X=MQ\in\mathbb{C}^{n\times n}$，使得 X^*AX 和 X^*BX 都是对角矩阵

6. 证明：

∵ $A\in R^{n\times n}$ 是对称正定矩阵

∴ ∃ 非奇异矩阵 $C\in R^{n\times n}$

使得 $C^TAC=I_n$

要证明 $\det(A+B)>0$

只需证 $\det(C^T(A+B)C)>0$

∵ $\det(C^T(A+B)C)$

$=\det(C^TAC+C^TBC)$

$=\det(I_n+C^TBC)$

∵ $(C^TBC)^T=C^TB^TC=-C^TBC$

∴ C^TBC 也是反对称矩阵　令 $D=C^TBC$

先证 $\det(I_n+D)\neq 0$　即 $(I_n+D)x=0$ 只有~~非平凡~~解

由 $x^T(I_n+D)x=0$ 与 $[x^T(I_n+D)x]^T$

$=x^T(I_n-D)x=0$

得 $x^TI_nx=x^Tx=0$

得 $x=\vec{0}$

∴ $\det(I_n+D)\neq 0$

∴ $\forall t\in R$　tD 是反对称矩阵　$\det(I_n+tD)\neq 0$

由连续性及 $\det(I_n)>0$　得 $\det(I_n+tD)>0$　令 $t=1$ 得 $\det(I_n+D)>0$

∴证毕