1. 证明:

假设 K 是介于实数域和复数域之间的域

即 $R \subsetneq K \subsetneq C$

则 $\exists\, a+bi \in K \setminus R$, $b \neq 0$ 且 $\exists\, c+di \in C \setminus K$, $d \neq 0$

又 $\because a \in R \subsetneq K$ $b \in R \subsetneq K$ 故 $i = \dfrac{(a+bi)-a}{b} \in K$

又 $\because c \in R \subsetneq K$ $i \in K$ 若 $d \in K$ 则 $c+di \in K$, 矛盾

若 $d \notin K$, 又与 $d \in R \subsetneq K$ 矛盾, 故不存在介于 R 和 C 之间的域

$\therefore$ 若 K 是 C 的子域且 R 是 K 的子域, 则 $K=R$ 或 $K=C$

No.
Date

2. 证明：

$\forall x, y, z \in K^2$ 记 $x = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ $y = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ $z = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}$

① $x \boxplus y = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 + a_1 a_2 \end{bmatrix} \in K^2$ $y \boxplus x = \begin{bmatrix} a_2 + a_1 \\ b_2 + b_1 + a_2 a_1 \end{bmatrix}$

$\therefore x \boxplus y = y \boxplus x$

② $(x \boxplus y) \boxplus z = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 + a_1 a_2 \end{bmatrix} \boxplus \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) + a_3 \\ (b_1 + b_2 + a_1 a_2) + b_3 + (a_1 + a_2) a_3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ b_1 + b_2 + b_3 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 \end{bmatrix}$

$x \boxplus (y \boxplus z) = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \boxplus \begin{bmatrix} a_2 + a_3 \\ b_2 + b_3 + a_2 a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + (a_2 + a_3) \\ b_1 + (b_2 + b_3 + a_2 a_3) + a_1 (a_2 + a_3) \end{bmatrix}$

$\therefore (x \boxplus y) \boxplus z = x \boxplus (y \boxplus z)$ $= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ b_1 + b_2 + b_3 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 \end{bmatrix}$

③ 对 $\forall x \in K^2$ $x = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ 存在 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in K^2$

使 $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \boxplus \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$

④ 对 $\forall x \in K^2$ $x = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ 存在 $\begin{bmatrix} -a_1 \\ a_1^2 - b_1 \end{bmatrix} \in K^2$

使 $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \boxplus \begin{bmatrix} -a_1 \\ a_1^2 - b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

CamScanner

No.
Date . .

⑤ 对 $\forall x \in K^2$ $x = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ 存在 $1 \in K$

使 $1 ⊠ \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$

⑥ $\forall m \in K$

$$m ⊠ (x ⊞ y) = m ⊠ \begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2+a_1a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m(a_1+a_2) \\ m(b_1+b_2+a_1a_2)+m(m-1)\frac{(a_1+a_2)^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ma_1+ma_2 \\ \left(mb_1+m(m-1)\frac{a_1^2}{2}\right)+\left(mb_2+m(m-1)\frac{a_2^2}{2}\right)+m^2a_1a_2 \end{bmatrix}$$

$$= m ⊠ x ⊞ m ⊠ y$$

⑦ $\forall m,n \in K$ $\forall x \in K^2$ $x = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$

$(m+n) ⊠ x$

$$= \begin{bmatrix} (m+n)a_1 \\ (m+n)b_1+(m+n)(m+n-1)\frac{a_1^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma_1+na_1 \\ \left(mb_1+m(m-1)\frac{a_1^2}{2}\right)+\left(nb_1+n(n-1)\frac{a_1^2}{2}\right)+mna_1^2 \end{bmatrix}$$

$$= m ⊠ x ⊞ n ⊠ x$$

⑧ $\forall m,n \in K$ $\forall x \in K^2$ $x = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$

$$(mn) ⊠ x = \begin{bmatrix} mna_1 \\ mnb_1+mn(mn-1)\frac{a_1^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(na_1) \\ m\left(nb_1+n(n-1)\frac{a_1^2}{2}\right)+m(m-1)\frac{n^2a_1^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= m ⊠ (n ⊠ x)$$

No.
Date

$\therefore K^2$在⊕和⊙这两个运算下构成K上的向量空间

3. 证明:

设$V_1, V_2, \cdots, V_s$均为K^n的真子空间

故问题转化为$V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_s \neq K^n$对一切正整数s均成立

① $s=1$时，显然$V_1 \neq K^n$

② 假设

$V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{s-1} \neq K^n$

则$\exists \alpha \in K^n \quad \alpha \notin V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{s-1}$

1) 若$\alpha \notin V_s$ 则$\alpha \notin V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{s-1} \cup V_s$

则$V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_s \neq K^n$

2) 若$\alpha \in V_s$

$\because V_s \neq K^n \quad \therefore \exists \beta \in K^n, \beta \notin V_s$

i) 若$\beta \notin V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{s-1}$

则$\beta \notin V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{s-1} \cup V_s$

即$V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_s \neq K^n$

ii) 若$\beta \in V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{s-1}$

记$W = \{k\alpha + \beta \mid k \in K\} \subseteq K^n$

则$\forall k \in K \quad k\alpha + \beta \notin V_s$，否则$\beta = (k\alpha+\beta) - k\alpha \in V_s$，矛盾

下证存在$k_0 \in K$，使$k_0\alpha + \beta \notin V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{s-1}$

假设 $k_1\alpha+\beta$，$k_2\alpha+\beta\in V_i$，$i=1,2,\dots,s-1$，且 $k_1\neq k_2$

则 $(k_1\alpha+\beta)-(k_2\alpha+\beta)=(k_1-k_2)\alpha\in V_i$

$\because k_1-k_2\neq 0$ 故 $\alpha\in V_i$ 这与 $\alpha\notin V_1\cup V_2\cup\cdots V_{s-1}$ 矛盾.

故每个 V_i ($i=1,2,\dots,s-1$) 中至多含有 W 中的一个向量

$V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_{s-1}$ 中至多含有 W 中的 $s-1$ 个向量

$\because K$ 是 C 的子域 故 $\mathrm{char}(K)=0$ $\therefore K$ 中含有无穷多个元素

$\because \alpha\neq 0$ $\therefore W$ 中有无穷多个向量

$\therefore \exists k_0\alpha+\beta\in W$，使 $k_0\alpha+\beta\notin V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_{s-1}$

又 $\because k_0\alpha+\beta\notin V_s$

$\therefore k_0\alpha+\beta\notin V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_s$

$\therefore V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_{s-1}\cup V_s\neq K^n$

由数学归纳法知，$V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_s\neq K^n$ 对一切正整数 s 均成立 $\therefore$ 证毕

4 证明：

记 $V=\{f(x)\in Q[x]:(x-1)f(x+1)-(x+2)f(x)=0\}$

则 $\forall f_1(x), f_2(x)\in V$，$\forall k\in Q$

$\because (x-1)f_1(x+1)-(x+2)f_1(x)=0$

$(x-1)f_2(x+1)-(x+2)f_2(x)=0$

$\therefore (x-1)[f_1(x+1)+f_2(x+1)]-(x+2)[f_1(x)+f_2(x)]=0$

故 $f_1(x)+f_2(x)\in V$

$(x-1)(kf_1(x+1))-(x+2)(kf_1(x))=0$ 故 $kf_1(x)\in V$

No.

Date

显然 $(0 = 0 \times f_1(x))$

又∵① $f_1(x)+f_2(x) = f_2(x)+f_1(x)$ ② $\exists\, 0 \in V$ 使 $f_1(x)+0 = f_1(x)$

③ $\forall f_3 \in V$

$[f_1(x)+f_2(x)]+f_3(x) = f_1(x)+[f_2(x)+f_3(x)]$

④ $\exists\, -f_1(x) \in V$ $[-f_1(x) = (-1)\times f_1(x)]$

使 $f_1(x)+[-f_1(x)] = 0$

⑤ $k(f_1(x)+f_2(x)) = kf_1(x)+kf_2(x)$

⑥ $\forall k, k' \in Q$

$(k+k')f_1(x) = kf_1(x)+k'f_1(x)$

⑦ $\forall k, k' \in Q$

$(kk')f_1(x) = k(k'f_1(x))$

⑧ $\exists\, 1 \in Q$

使 $1\times f_1(x) = f_1(x)$

故 V是Q上的向量空间

由 $(x-1)f(x+1)-(x+2)f(x)=0$ ※

令 $x=1$ 得 $f(1)=0$

令 $x=-2$ 得 $f(-1)=0$

令 $x=0$ 得 $-f(1)-2f(0)=0$ 即 $f(0)=0$

可设 $f(x)=x(x+1)(x-1)g(x)$，代入※可得

$(x-1)(x+1)(x+2)x\,g(x+1) = (x+2)x(x+1)(x-1)g(x)$

$\therefore g(x+1)=g(x)$

$x \neq -1,0,1,2$

又由于 $g(x)\in Q[x]$

$\therefore g(x) = c$，$c\in Q$

故 $f(x) = c(x-1)x(x+1)$

$= c(x^3-x)$

No.
Date

(x)

$x)]$

下证 $\{x^3-x\}$ 为V的一组基

① $\forall f(x)\in V$ $f(x)=c(x^3-x)$. $c\in\mathbb{Q}$.

② $c(x^3-x)\equiv 0 \Leftrightarrow c=0$.

$\therefore$ $\{x^3-x\}$ 为V的一组基，V的维数为1.

5. 证明：

先证 $f(nx)=nf(x)$，$n\in\mathbb{Z}^+$

① $n=1$时 显然成立

② 假设 $n=k$ 时 $f(kx)=kf(x)$

则 $n=k+1$ 时 $f((k+1)x)=f(kx+x)$

$=f(kx)+f(x)$

$=(k+1)f(x)$.

$\therefore$ 归纳得 $f(nx)=nf(x)$，$n\in\mathbb{Z}^+$

$\because f(x+y)=f(x)+f(y)$ $x,y\in\mathbb{Q}$

令 $y=0$ 得 $f(0)=0$

令 $y=-x$ 得 $f(-x)=-f(x)$

$\therefore f(0\cdot x)=f(0)=0=0\times f(x)$

$f[(-n)x]=f[-(nx)]=-f(nx)=(-n)f(x)$. $n\in\mathbb{Z}^+$

$\therefore f(nx)=nf(x)$ 对于一切 $n\in\mathbb{Z}$ 均成立

令 $y=nx$，$n\in\mathbb{Z}$ 且 $n\neq 0$

则 $\frac{f(y)}{n}=f(\frac{y}{n})$

$\forall a\in\mathbb{Q}$ $a=\frac{p}{q}$ ($p\in\mathbb{Z}$，$q\in\mathbb{Z}^+$ 且 $\frac{p}{q}$ 是既约分数)

$f(ax)=f(\frac{px}{q})=\frac{1}{q}f(px)=\frac{p}{q}f(x)=af(x)$.

又 $\because f(x+y)=f(x)+f(y)$ $x,y\in\mathbb{Q}$ $\therefore f$ 是线性映射

10