1. 记 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$

则 $A^TA=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

令 $|A^TA-\lambda I|=0$ 得 A^TA 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=6$ $\lambda_3=2$ $\lambda_4=0$

λ_1、λ_2、λ_3、λ_4 对应的特征向量分别为 $[0,0,-1,0]^T$、$[\frac{\sqrt2}{2},0,0,\frac{\sqrt2}{2}]^T$、$[0,1,0,0]^T$、$[\frac{\sqrt2}{2},0,0,-\frac{\sqrt2}{2}]^T$

分别记为 α_1、α_2、α_3、α_4.

No.

Date

令 $Q=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

则 $Q^TA^TAQ=diag\{6,6,2,0\}$

令 $\sigma_1=\sigma_2=\sqrt{6}\quad \sigma_3=\sqrt{2}$

$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{6}}A\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{6}}[1,-1,2]^T\quad \beta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}A\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]^T$

$\beta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}A\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1,0]^T$

~~添加单位向量 β_4~~

则A的奇异值分解为

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

第2题呢?

3. 设P的特征值为λ，则P^2的特征值为λ^2

$\because P^2=P\quad \therefore \lambda^2=\lambda\quad \therefore$ P的特征值为0或1

$\because P(I-P)=P-P^2=O$

$\therefore rank(I-P)\le n-rank(P)$ 即 $rank(I-P)+rank(P)\le n$

又 $\because rank(I-P)+rank(P)\ge rank(I-P+P)=n$

$\therefore rank(I-P)+rank(P)=n$

设 0的代数重数为 a_0，1的代数重数为 a_1
0的几何重数为 g_0，1的几何重数为 g_1

No.
Date

则 $\left.\begin{array}{l} g_1 = \dim(P-I) = \operatorname{rank}(I-P) \\ g_0 = \dim(P) = \operatorname{rank}(P) \end{array}\right\} \Rightarrow g_0+g_1=n$

又∵ $a_0+a_1=n$ 且 $g_0 \le a_0$，$g_1 \le a_1$ ∴ $\begin{cases} g_0=a_0 \\ g_1=a_1 \end{cases}$

又∵ $1 \le \operatorname{rank}(P) < n$ ∴ $1 \le \operatorname{rank}(I-P) < n$

∴ a_0, a_1 均大于0 即1和0均为P的特征值

$\|P\|_2 = (\rho(P^*P))^{\frac{1}{2}} = 1$ $\quad \|I-P\|_2 = (\rho((I-P)^*(I-P)))^{\frac{1}{2}} = 1$

4. ∴ $\|P\|_2 = \|I-P\|_2$

证明:

$$A^*A(A^+b) = A^*(AA^+)b = A^*(A^+)^*A^*b$$
$$= (AA^+A)^*b$$
$$= A^*b$$

∴ $\min\|b-Av\|_2 = \|b-AA^+b\|_2 = \|(I_n-AA^+)b\|_2$
$= \|b-Ax\|_2$

∴ x 和 A^+b 均为最小二乘解

∴ $A^*(b-Ax)=0$ 即 $A^*Ax = A^*b$

又∵ $A^*b = (AA^+A)^*b = A^*AA^+b$

∴ $A^*A(x-A^+b)=0$

∴ $x-A^+b \in \operatorname{Ker}(A^*A) = \ker(A) = \operatorname{Range}(I_n-A^+A)$

∴ $\exists \alpha \in \mathbb{C}^n$ s.t. $x-A^+b = (I_n-A^+A)\alpha$.

即 $x = A^+b + (I_n-A^+A)\alpha$.

∵ $A^+b \in \operatorname{Range}(A^+) = \operatorname{Range}^{\perp}(I_n-A^+A)$

∴ $(I_n-A^+A)\alpha \perp A^+b$

$\le n$

No.
Date

$$\therefore \|x\|_2^2 = \|A^+ b\|_2^2 + \|(I_n - A^+A)\alpha\|_2^2$$
$$\geq \|A^+ b\|_2^2$$
$$\therefore \quad \|x\|_2 \geq \|A^+ b\|_2$$

5.

(a)

取 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 则 $A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

取 $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 则 $B^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(AB)^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$B^+A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ 此时 $(AB)^+ \neq B^+A^+$

(b) 取 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 则 $A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(A^2)^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$(A^+)^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \neq (A^2)^+$

(c) 取 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 由 $|A-\lambda I|=0$ 知 A的特征值为1, 0

$A^{+}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$ A^{+}的特征值为$\frac{1}{2}$, 0

显然此时A^{+}的非零特征值的倒数不是A的特征值

8

12.9

Z