1. 证明:

$\forall a,b\in R \quad x,y\in R^n$

① 若 $a+b\neq 0$

则 $G(ax+by)=F(ax+by)-F(0)$

$$=F\left(\frac{a}{a+b}(a+b)x+\frac{b}{a+b}(a+b)y\right)-F(0)$$

$$=\frac{a}{a+b}F((a+b)x)+\frac{b}{a+b}F((a+b)y)-F(0)$$

$$=\frac{a}{a+b}\left[F((a+b)x)-F(0)\right]+\frac{b}{a+b}\left[F((a+b)y)-F(0)\right]$$

$$=\frac{a}{a+b}\left[F((a+b)x+(1-a-b)\cdot 0)-F(0)\right]+\frac{b}{a+b}\left[F((a+b)y+(1-a-b)\cdot 0)-F(0)\right]$$

$$=\frac{a}{a+b}\left[(a+b)F(x)-(a+b)F(0)\right]+\frac{b}{a+b}\left[(a+b)F(y)-(a+b)F(0)\right]$$

$$=aF(x)-aF(0)+bF(y)-bF(0)$$

$$=aG(x)+bG(y)$$

② 若 $a+b=0$ 且 $a-b=0$，即 $a=b=0$

则 $G(ax+by)=G(0)=F(0)-F(0)=0=aG(x)+bG(y)$.

No.
Date

③若$a+b=0$ 且$a-b\neq 0$

则$G(ax+by)=G(ax+(-b)(-y))$

$=aG(x)-bG(-y)$

$\because G(-y)=F(-y)-F(0)$

$=F(-y+2\times 0)-F(0)$

$=-F(y)+2F(0)-F(0)$

$=-F(y)+F(0)$

$=-G(y)$

$\therefore G(ax+by)=aG(x)+bG(y)$

$\therefore G(\cdot)$是R^n上的线性变换

2.证明:

设$F: R^n\to R^n$为仿射变换，Ω是凸集，$\Omega\subset R^n$

$F(\Omega)=V$ 下证V是凸集

$\forall x,y\in V$ 设$F(u)=x$ $F(v)=y$ $u,v\in\Omega$

则$\forall \alpha\in[0,1]$

$\alpha x+(1-\alpha)y=\alpha F(u)+(1-\alpha)F(v)$

$=F(\alpha u+(1-\alpha)v)$

$\because \Omega$是凸集 $\therefore \alpha u+(1-\alpha)v\in\Omega$

$\therefore F(\alpha u+(1-\alpha)v)\in V$

即$\alpha x+(1-\alpha)y\in V$

$\therefore V$是凸集

证毕

3.

No.
Date

3. 证明:

$\because$ A是正规矩阵 $\therefore A=Q\Lambda Q^*$ $Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为酉阵

Λ为实对角阵 $\Lambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$ $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$为A的特征值

$$w(A)=w(Q\Lambda Q^*)=\left\{\frac{(x^*Q)\Lambda(Q^*x)}{x^*x}:x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}\right\}$$

$$=\left\{\frac{(Q^*x)^*\Lambda(Q^*x)}{(Q^*x)^*(Q^*x)}:Q^*x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}\right\}$$

$$=w(\Lambda)$$

① 证 $\forall\lambda_k$, $k=1,2,\dots,n$ $\lambda_k\in w(\Lambda)=w(A)$ 设 $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$

$$w(\Lambda)=\left\{\frac{x^*\Lambda x}{x^*x}:x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}\right\}=\left\{\frac{\sum_{i=1}^n\lambda_i|x_i|^2}{\sum_{j=1}^n|x_j|^2}:x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}\right\}$$

$$=\left\{\sum_{i=1}^n\lambda_i\frac{|x_i|^2}{\sum_{j=1}^n|x_j|^2}:x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}\right\}$$

$$=\left\{\sum_{i=1}^n m_i\lambda_i:m_i\in[0,1]\text{且}\sum_{i=1}^n m_i=1\right\}$$

$\therefore$ 显然 $\forall\lambda_k$, $k=1,2,\dots,n$ $\lambda_k\in w(\Lambda)=w(A)$

② 证 $w(A)$是凸集, 即证 $w(\Lambda)$是凸集

$\forall x,y\in w(\Lambda)$ 设 $x=\sum_{i=1}^n m_i\lambda_i$, $m_i\in[0,1]$且$\sum_{i=1}^n m_i=1$

$y=\sum_{i=1}^n c_i\lambda_i$ $c_i\in[0,1]$ 且 $\sum_{i=1}^n c_i=1$

$\forall\alpha\in[0,1]$

$$\alpha x+(1-\alpha)y=\alpha\sum_{i=1}^n m_i\lambda_i+(1-\alpha)\sum_{i=1}^n c_i\lambda_i$$

$$=\sum_{i=1}^n[\alpha m_i+(1-\alpha)c_i]\lambda_i$$

No.
Date

$\because \sum_{i=1}^{n}[\alpha m_i+(1-\alpha)c_i] = \alpha+(1-\alpha)=1$

且 $0 \leq \alpha m_i+(1-\alpha)c_i \leq \alpha+(1-\alpha)=1$

$\therefore \alpha x+(1-\alpha)y \in w(\Lambda)$

$\therefore w(A)=w(\Lambda)$是凸集

③ 若Ω_n是凸集且 $\forall \lambda_k, k=1,2,\ldots,n$ $\lambda_k \in \Omega_n$

下证 $w(A)=w(\Lambda) \subseteq \Omega_n$

对n归纳

i. $n=1$时

$w(\Lambda)=\{\lambda_1\} \subseteq \Omega_1$

ii 假设 $n \leq k$时

$w(\Lambda)=\{\sum_{i=1}^{k} m_i\lambda_i : m_i \in [0,1]$ 且 $\sum_{i=1}^{k} m_i=1\} \subseteq \Omega_k$

则当 $n=k+1$时

$w(\Lambda)=\{\sum_{i=1}^{k+1} m_i\lambda_i : m_i \in [0,1]$ 且 $\sum_{i=1}^{k+1} m_i=1\}$.

① 当 $\sum_{i=1}^{k} m_i=0$时 $\sum_{i=1}^{k+1} m_i\lambda_i = \lambda_{k+1} \in \Omega_{k+1}$

② 当$\sum_{i=1}^{k} m_i>0$时 $\sum_{i=1}^{k+1} m_i\lambda_i = \sum_{i=1}^{k} m_i\lambda_i + m_{k+1}\lambda_{k+1}$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right)\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(\frac{m_j}{\sum_{i=1}^{k} m_i}\right) + m_{k+1}\lambda_{k+1}$$

$\because \sum_{j=1}^{k}\lambda_i\left(\frac{m_j}{\sum_{i=1}^{k} m_i}\right) \in \Omega_k$ $\sum_{j=1}^{k}\lambda_i\left(\frac{m_j}{\sum_{i=1}^{k} m_i}\right) \in \Omega_{k+1}$

且 $\lambda_{k+1} \in \Omega_{k+1}$

且 $\sum_{i=1}^{k} m_i + m_{k+1}=1$ $\sum_{i=1}^{k} m_i, m_{k+1} \in [0,1]$

又 $\because \Omega_{k+1}$是凸集 $\therefore \sum_{i=1}^{k+1} m_i\lambda_i \in \Omega_{k+1}$ $\therefore w(\Lambda) \subseteq \Omega_{k+1}$

No.
Date

$\therefore$ 对一切正整数 n，均成立 $w(A)=w(\Lambda)\subseteq\Omega_n$

综上，$w(A)$ 是 A 的特征值的凸包

4. $\because A$ 是实对称矩阵 $\therefore A=Q\Lambda Q^T$ Q 为实正交矩阵

Λ 为实对角阵 $\Lambda=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$ 不妨设 $\lambda_1,\dots,\lambda_r<0$ $\lambda_{r+1},\dots,\lambda_n\ge 0$

对于 $B\in S_+^n$

$$\|A-B\|_F=\|Q^T(A-B)Q\|_F$$
$$=\|\Lambda-Q^TBQ\|_F$$

令 $Q^TBQ=D$ $\because B=CC^T$ $\therefore D=Q^TCC^TQ=Q^TC(Q^TC)^T\in S_+^n$

则 $\|\Lambda-Q^TBQ\|_F=\|\Lambda-D\|_F\ge\sqrt{\sum_{i=1}^n(\lambda_i-d_{ii})^2}$

$\because D$ 是半正定实对称阵 $\therefore d_{ii}\ge 0$ $i=1,2,\dots,n$

则 $\|\Lambda-Q^TBQ\|_F\ge\sqrt{\sum_{i=1}^r\lambda_i^2}$

当 $D=\begin{bmatrix}0&&&&&\\&0&&&&\\&&\ddots&&&\\&&&0&&\\&&&&\lambda_{r+1}&\\&&&&&\ddots\\&&&&&&\lambda_n\end{bmatrix}$ 时 即 $B=Q\begin{bmatrix}0&&&&&\\&0&&&&\\&&\ddots&&&\\&&&0&&\\&&&&\lambda_{r+1}&\\&&&&&\ddots\\&&&&&&\lambda_n\end{bmatrix}Q^T$

时，取到等号，$\|A-B\|_F$ 最小

5. 证明：

记 $M=\begin{bmatrix}x_A&x_B&x_C&x_D\\y_A&y_B&y_C&y_D\\z_A&z_B&z_C&z_D\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ $N=\begin{bmatrix}p_1&q_1&r_1&s_1\\p_2&q_2&r_2&s_2\\p_3&q_3&r_3&s_3\\p_4&q_4&r_4&s_4\end{bmatrix}$ $X=\begin{bmatrix}x_p&x_q&x_r&x_s\\y_p&y_q&y_r&y_s\\z_p&z_q&z_r&z_s\\1&1&1&1\end{bmatrix}$

则 $MN=X$ $\because ABCD$ 是四面体 $\therefore \det M\neq 0$

No.

Date

① 若 P,Q,R,S 共面

则 $\det X=0$

$\because \det(X)=\det M\cdot\det N \quad \det M\neq 0$

$\therefore \det N=0$

② 若 $\det N=0$

则 $\det X=\det M\cdot\det N=0$

$\therefore P,Q,R,S$ 共面

证毕