No.

Date

Assignment 2

1. 令 $C=\{x\in R^2 \mid x_2\le 0\}$ $D=\{x\in R^2_+ \mid x_1x_2\ge 1\}$

则 C、D是满足条件的两个闭凸集

2.

(a) C_1不是凸集.

若 $a\in C_1$ 则 $\|a\|^2=1$, $\|-a\|^2=\|(-1)\cdot a\|^2=1$ $\therefore -a\in C_1$

$\|\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}(-a)\|^2=\|0\|^2=0\ne 1$

$\therefore \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}(-a)\notin C_1$ $\therefore C_1$不是凸集.

(b) C_2是凸集

$\forall a,b\in C_2$, $\forall u\in[0,1]$ $ua_i+(1-u)b_i\le u\cdot 1+(1-u)\cdot 1=1$

$\therefore \max_{i=1,2,\dots,n}(ua+(1-u)b)\le 1$ $\therefore ua+(1-u)b\in C_2$

$\therefore C_2$是凸集

(c) C_3不是凸集

令 $a=(1,2,2,\dots,2)^T$ $b=(2,2,2,\dots,2,1)^T$

则 $a\in C_3$ 且 $b\in C_3$ 而 $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b=(\frac{3}{2},2,2,\dots,2,\frac{3}{2})^T\notin C_3$

$\therefore C_3$不是凸集

(d) C_4不是凸集

令 $a=(2,\frac{1}{2},1,1,\dots,1)^T$ $b=(\frac{1}{10},10,1,1,\dots,1)^T$

则 $\prod_{i=1}^{n}a_i=1$ $\prod_{i=1}^{n}b_i=1$ $\therefore a\in C_4$ 且 $b\in C_4$

$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b=(\frac{21}{20},\frac{21}{4},1,1,\dots,1)^T$

$\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b)_i=\frac{441}{80}>1$ $\therefore \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\notin C_4$

$\therefore C_4$不是凸集

扫描全能王 创建

3. 证明：

令 $h=f+g$ 　h 的定义域为 C，C 为凸集

$\forall x,y\in C$ 且 $x\neq y$，$\forall\, 0<\lambda<1$

$$\lambda x+(1-\lambda)y\in C$$

$$\begin{aligned}
h[\lambda x+(1-\lambda)y] &= f[\lambda x+(1-\lambda)y]+g[\lambda x+(1-\lambda)y]\\
&< \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)\\
&= \lambda[f(x)+g(x)]+(1-\lambda)[f(y)+g(y)]\\
&= \lambda h(x)+(1-\lambda)h(y)
\end{aligned}$$

$\therefore$ h（即 $f+g$）是 C 上的严格凸函数

4. 证明：

(a) 求得 f 的 Hessian 矩阵为

$$H=\begin{bmatrix} 4+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_2}{x_1^3}} & -2-\frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}} & 0\\ -2-\frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}} & 4+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_1}{x_2^3}} & -2\\ 0 & -2 & 6\end{bmatrix}$$

$\because$ $4+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_2}{x_1^3}}>0$ 　$4+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_1}{x_2^3}}>0$ 　$6>0$

$$\begin{vmatrix} 4+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_2}{x_1^3}} & -2-\frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}}\\ -2-\frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}} & 4+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_1}{x_2^3}}\end{vmatrix}=12+\frac{x_1^2+x_2^2-x_1x_2}{\sqrt{x_1^3x_2^3}}\geq 12+\frac{x_1x_2}{\sqrt{x_1^3x_2^3}}>0$$

$$\begin{vmatrix} 4+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_2}{x_1^3}} & 0\\ 0 & 6\end{vmatrix}>0 \qquad \begin{vmatrix} 4+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_1}{x_2^3}} & -2\\ -2 & 6\end{vmatrix}=20+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2^3}}>0$$

扫描全能王 创建

No.

Date

$$|H| = 56 + \frac{6x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2}{\sqrt{x_1^3 x_2^3}} \geq 56 + \frac{(2\sqrt{30} - 6)x_1x_2}{\sqrt{x_1^3 x_2^3}} > 0$$

$\therefore$ H是正定矩阵　又 $\because R_{++}^3$ 显然为凸集

$\therefore f$ 在 R_{++}^3 上是凸函数

(b) 设 $g(x)=\|x\|$　$\mathrm{dom}\, g = R^n$　$h(x)= \max\{x,0\}^4$　$\mathrm{dom}\, h = R$

对 $\forall x,y \in R^n$，$\alpha \in [0,1]$

$\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\|$

$\therefore g(x)$ 是凸函数

又 $\because$ 显然 h 是凸函数且非减

$f(x) = h(g(x))$　$\therefore f(x)$ 在 R^n 上是凸函数

(c) 要证 $f(x)$ 在 R^n 上是凸函数，只需证对 $\forall x,y \in R^n$，$\forall \alpha \in [0,1]$

$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$

即 $\sqrt{(\alpha x + (1-\alpha)y)^T Q (\alpha x + (1-\alpha)y) + 1} \leq \alpha\sqrt{x^TQx+1} + (1-\alpha)\sqrt{y^TQy+1}$

① 当 $\alpha=0$ 或 1 时显然成立

② 当 $\alpha \in (0,1)$ 时

需证 $(\alpha x + (1-\alpha)y)^T Q (\alpha x + (1-\alpha)y) + 1 \leq \alpha^2(x^TQx+1) + 2\alpha(1-\alpha)\sqrt{(x^TQx+1)(y^TQy+1)}$
$+ (1-\alpha)^2(y^TQy+1)$

即 $(x^TQy+1)^2 \leq (x^TQx+1)(y^TQy+1)$

$\because Q \succeq 0$　$\therefore$ 设 $Q = C^TC$　C是 $n\times n$ 实矩阵

$\therefore$ 即证 $((Cx)^TCy+1)^2 \leq ((Cx)^TCx+1)((Cy)^TCy+1)$　设 $Cx = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$
$Cy = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$

扫描全能王 创建

No.

Date

$\therefore$ 即证 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n+1)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+1)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2+1)$

由 Cauchy 不等式知上式显然成立

$\therefore f(x)$ 在 R^n 上是凸函数

A

扫描全能王 创建