$\therefore$ 即证 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n+1)^2 \le (\ldots)$

由Cauchy不等式知上式显然成立

$\therefore f(x)$ 在 R^n 上是凸函数

A

Assignment 5

1. 设 $f(x)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-3x_1+x_2$ $h(x)=x_1+x_2-1$

(i) $\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix} \succ 0$ $\therefore f(x)$ 是凸函数

由于该问题是最大化一个凸函数，故该问题不是凸问题

(ii) $L(x,\lambda,\nu)=-x_1^2-2x_1x_2-2x_2^2+3x_1-x_2+\lambda_1(-x_1)+\lambda_2(-x_2)+\nu(x_1+x_2-1)$

令 $\nabla L=0$ 可得 $\begin{cases}-2x_1-2x_2+3-\lambda_1+\nu=0\\ -4x_2-2x_1-1-\lambda_2+\nu=0\end{cases}$

又 $\lambda_1\ge0$，$\lambda_2\ge0$， $-\lambda_1x_1=0$，$-\lambda_2x_2=0$，$x_1+x_2=1$，$x_2\ge0$，$x_1\ge0$

① 若 $\lambda_1=\lambda_2=0$，则 $x_2=-2$，与 $x_2\ge0$ 矛盾

② 若 $\lambda_1=0$，$\lambda_2>0$，则 $x_2=-2-\frac{\lambda_2}{2}<0$，与 $x_2\ge0$ 矛盾

③ 若 $\lambda_1>0$ 且 $\lambda_2>0$，则 $x_1=x_2=0$，与 $x_1+x_2=1$ 矛盾

④ 若 $\lambda_1>0$，$\lambda_2=0$ 则得 $x_1=0$，$x_2=1$

故KKT点为 $[0,1]^T$

(iii) $\because f(x)$ 是连续函数，且 $\{x\in R_+^2 \mid h(x)=0\}$ 是非空紧集，故 $f(x)$ 的全局最优值存在

$\therefore$ 最优解为 $[0,1]^T$，最优值为 3

2. 设 $f(x)=x_1-4x_2+x_3$ $g(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-1$ $h(x)=x_1+2x_2+2x_3+2$

(i) 易知 $f(x)$ 和 $h(x)$ 均为仿射函数 $g(x)=x^Tx-1$ 是凸函数

故问题(P)是凸问题

∴给定(P)的一个KKT点，它一定定为最优解.

(ii) $L(x,\lambda,\gamma)=f(x)+\lambda g(x)+\gamma h(x)$

$$=x_1-4x_2+x_3+\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)+\gamma(x_1+2x_2+2x_3+2)$$

令 $\nabla_x L=0$

得 $\begin{cases}2\lambda x_1+\gamma+1=0\\2\lambda x_2+2\gamma-4=0\\2\lambda x_3+2\gamma+1=0\end{cases}$ 又 $\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)=0$，$\lambda\geq 0$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\leq 0$，$x_1+2x_2+2x_3+2=0$

显然，$\lambda>0$，$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$

$$2\lambda x_1+\gamma+1+2(2\lambda x_2+2\gamma-4)+2(2\lambda x_3+2\gamma+1)=2\lambda(x_1+2x_2+2x_3)+9\gamma-5$$

$$=-4\lambda+9\gamma-5=0$$

又∵ $x_1=\frac{-1-\gamma}{2\lambda}$，$x_2=\frac{4-2\gamma}{2\lambda}$，$x_3=\frac{-1-2\gamma}{2\lambda}$

得KKT点为 $\left[\frac{-70-2\sqrt{685}}{9\sqrt{685}},\frac{130-4\sqrt{685}}{9\sqrt{685}},\frac{-95-4\sqrt{685}}{9\sqrt{685}}\right]^T$ 或 $\cancel{\left[\frac{70-2\sqrt{685}}{9\sqrt{685}},\frac{-130-4\sqrt{685}}{9\sqrt{685}},\frac{95-4\sqrt{685}}{9\sqrt{685}}\right]^T}$

此KKT点即为最优解，最优值为 $\frac{10-\sqrt{685}}{9}$

3. (i) 要使问题可行，$x^TQx+2b^Tx+c\leq 0$ 需有解

即 $(Q^{\frac{1}{2}}x+Q^{-\frac{1}{2}}b)^T(Q^{\frac{1}{2}}x+Q^{-\frac{1}{2}}b)-b^TQ^{-1}b+c\leq 0$ 有解

即 $\left[(Q^{\frac{1}{2}}x+Q^{-\frac{1}{2}}b)^T(Q^{\frac{1}{2}}x+Q^{-\frac{1}{2}}b)\right]_{min}\leq b^TQ^{-1}b-c$

当 $x=-Q^{-1}b$ 时，左取到最小值。

∴问题可行需满足 $b^TQ^{-1}b-c\geq 0$

(ii) 设 $f(x)=a^Tx \quad g(x)=x^TQx+2b^Tx+c$

∵ $f(x)$ 是仿射的（所以是凸的） ~~g~~

$\nabla^2 g(x)=2Q\succ 0$ ∴ $g(x)$ 也是凸的 ∴ (P) 是凸问题

可行域中仅有 $-Q^{-1}b$ 点，且 $g(-Q^{-1}b)=0$

由 Slater 条件，当 $c-b^TQ^{-1}b=0$ 时，不存在 x'，使得

$g(x')=(Q^{\frac{1}{2}}x+Q^{-\frac{1}{2}}b)^T(Q^{\frac{1}{2}}x+Q^{-\frac{1}{2}}b)<0$ ∴ KKT 条件不是必要的

当 $c-b^TQ^{-1}b<0$ 时

存在 $x'=-Q^{-1}b$，使得 $g(x')=c-b^TQ^{-1}b<0$ ∴ KKT 条件必要

∴ 综上可得，$c-b^TQ^{-1}b<0$ 时，KKT 条件必要

(iii) (i) 中已证 (P) 是凸问题，故 KKT 点一定为最优解

即 KKT 条件是充分的 ∴ 只需问题可行即可 ∴ $c-b^TQ^{-1}b\le 0$

∴ $Q\in R^{n\times n}$ 且正定，$b\in R^n$，$c\in R$ 即可

$\boxed{\text{第 (iv) 问见最后}}$

4. 设 $f(x)=x_1^2-x_2^2-x_3^2 \qquad g(x)=x_1^4+x_2^4+x_3^4-1$

(i) ∵ $\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$ 并非半正定矩阵

∴ $f(x)$ 不是凸函数

∴ 该问题不是凸问题

(ii) $L(x,\lambda)=x_1^2-x_2^2-x_3^2+\lambda(x_1^4+x_2^4+x_3^4-1)$

令 $\nabla_x L=0$

可得 $\begin{cases}4\lambda x_1^3+2x_1=0\\4\lambda x_2^3-2x_2=0\\4\lambda x_3^3-2x_3=0\end{cases}$ 又 $\lambda(x_1^4+x_2^4+x_3^4-1)=0$，$\lambda\ge 0$

$x_1^4+x_2^4+x_3^4-1\le 0$

① $\lambda=0$ 时，$x_1=x_2=x_3=0$

② $\lambda>0$ 时，$x_1^4+x_2^4+x_3^4=1$，由 $2x_1(1+2\lambda x_1^2)=0$ 知，$x_1=0$

1) 若 $x_2\neq 0$ 且 $x_3\neq 0$，则 $\begin{cases}2\lambda x_2^2=1\\ 2\lambda x_3^2=1\end{cases}$ 即 $x_2^2=x_3^2=\frac{1}{2\lambda}$

又∵ $x_2^4+x_3^4=\frac{1}{2\lambda^2}=1$ ∴ $\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ∴ $x_2=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$，$x_3=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

2) 若 $x_2=0$ 且 $x_3\neq 0$，则 $2\lambda x_3^2=1$ 且 $x_3^4=1$，得 $\lambda=\frac{1}{2}$，$x_3=\pm 1$

3) 若 $x_2\neq 0$ 且 $x_3=0$，同理得，$x_2=\pm 1$

综上，所有KKT点为 $[0,0,0]^T$，$[0,\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}]^T$，$[0,-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}]^T$
$[0,-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}]^T$，$[0,\frac{1}{\sqrt[4]{2}},-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}]^T$，$[0,0,1]^T$，$[0,0,-1]^T$，
$[0,1,0]^T$，$[0,-1,0]^T$

(iii) ∵ $f(x)$ 是连续函数，$\{x\mid g(x)\leq 0, x\in\mathbb{R}^3\}$ 是非空紧集.
∴ 全局最小解存在

将 (ii) 中求得的KKT点代入 $f(x)$，可得最优解为 $[0,\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}]^T$，
$[0,-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}]^T$，$[0,\frac{1}{\sqrt[4]{2}},-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}]^T$，$[0,-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}]^T$，最优值为 $-\sqrt{2}$

3. (iv) $L(x,\lambda)=a^Tx+\lambda(x^TQx+2b^Tx+c)$
令 $\nabla_x L=0$ 即 $a+2\lambda b+2\lambda Qx=0$，又 $\lambda\geq 0$，$\lambda(x^TQx+2b^Tx+c)=0$
$x^TQx+2b^Tx+c\leq 0$
∵ $a\neq 0$ ∴ $\lambda>0$ ∴ $x^TQx+2b^Tx+c=0$ ①，$x=-Q^{-1}\cdot\frac{a+2\lambda b}{2\lambda}$ ②
将②代入①可得：$\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^TQ^{-1}a}{b^TQ^{-1}b-c}}$ ∴ $x=-Q^{-1}b-\sqrt{\frac{b^TQ^{-1}b-c}{a^TQ^{-1}a}}\cdot Q^{-1}a$.

No.

Date

$\therefore$ 最优解为 $x = -Q^{-1}b - \sqrt{\dfrac{b^TQ^{-1}b-c}{a^TQ^{-1}a}} \cdot Q^{-1}a$

最优值为 $-a^TQ^{-1}b - \sqrt{(b^TQ^{-1}b-c)\cdot(a^TQ^{-1}a)}$

A