最优值为 $-a^T\alpha^{-1}b - \sqrt{(b^T\alpha^{-1}b-c)\cdot(a\alpha a)}$

Assignment 7

5.6

(a) 证明:

$$\|Ax_{ls}-b\|_\infty \le \|Ax_{ls}-b\|_2 \le \|Ax_{ch}-b\|_2 \le \sqrt{m}\,\|Ax_{ch}-b\|_\infty$$

$$\therefore \|Ax_{ls}-b\|_\infty \le \sqrt{m}\,\|Ax_{ch}-b\|_\infty$$

(b) 证明:

$$\because A^T r_{ls} = A^T(b-Ax_{ls})$$

$$= A^Tb - (A^TA)(A^TA)^{-1}A^Tb$$

$$= 0$$

$$\therefore A^T\hat{\nu} = -\frac{A^Tr_{ls}}{\|r_{ls}\|_1} = 0 \qquad A^T\tilde{\nu} = \frac{A^Tr_{ls}}{\|r_{ls}\|_1} = 0$$

又 $\because \|\hat{\nu}\|_1 = \|\tilde{\nu}\|_1 = 1$

$\therefore$ $\hat{\nu}$ 和 $\tilde{\nu}$ 都是问题 (5.104) 的可行解

$$b^T\hat{\nu} = -\frac{b^Tr_{ls}}{\|r_{ls}\|_1} = \frac{x_{ls}^TA^Tr_{ls} - b^Tr_{ls}}{\|r_{ls}\|_1} = \frac{(x_{ls}^TA^T - b^T)r_{ls}}{\|r_{ls}\|_1}$$

$$= \frac{(Ax_{ls}-b)^Tr_{ls}}{\|r_{ls}\|_1}$$

$$= -\frac{\|r_{ls}\|_2^2}{\|r_{ls}\|_1}$$

同理可得 $b^T\tilde{\nu} = \frac{\|r_{ls}\|_2^2}{\|r_{ls}\|_1}$

∴易知，$\tilde{\nu}$ 给出的下界更好

(a)中给出的下界为 $\frac{\|Ax_{ls}-b\|_\infty}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{m}}\|r_{ls}\|_\infty$

∵ $\|r_{ls}\|_\infty \leq \|r_{ls}\|_2$

设 $r_{ls} = [r_1, r_2, \dots, r_m]^T$

则 $\sqrt{m}\cdot\|r_{ls}\|_2 = \sqrt{m}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^m r_i^2} \geq \sum_{i=1}^m |r_i| = \|r_{ls}\|_1$

∴ $\frac{1}{\sqrt{m}} \leq \frac{\|r_{ls}\|_2}{\|r_{ls}\|_1}$ ∴ $\frac{1}{\sqrt{m}}\|r_{ls}\|_\infty \leq \frac{\|r_{ls}\|_2^2}{\|r_{ls}\|_1}$

∴与(a)中给出的下界相比，$\tilde{\nu}$ 更好

5.11

原问题等价于：

$$\min_{y_1,\dots,y_N} \sum_{i=1}^N \|y_i\|_2 + \frac{1}{2}\|x-x_0\|_2^2$$
$$\text{s.t.} \quad y_i = A_i x + b_i \qquad i=1,2,\dots,N$$

$$L(x, y_1,\dots,y_N, u_1, u_2, \dots, u_N) = \sum_{i=1}^N \|y_i\|_2 + \frac{1}{2}\|x-x_0\|_2^2 + \sum_{i=1}^N u_i^T(y_i - A_i x - b_i)$$

① 若 $\|u_i\|_2 \leq 1$

则由 Cauchy-Schwarz 不等式

$-u_i^T y_i \leq \|u_i\|_2\|y_i\|_2 \leq \|y_i\|_2$，即 $\|y_i\|_2 + u_i^T y_i \geq 0$

(当 $y_i=0$ 时等号取到)

② 若 $\|u_i\|_2 > 1$ 取 $y_i = t u_i$ ∴ $\|y_i\|_2 + u_i^T y_i = |t|\,\|u_i\|_2 + t\|u_i\|_2^2$

$\to -\infty \quad (t\to-\infty)$

No.

Date

故 $\inf_{y_i}(\|y_i\|_2 + u_i^T y_i) = \begin{cases} 0 & \|u_i\|_2 \le 1 \\ -\infty, & \|u_i\|_2 > 1 \end{cases}$

令 $\frac{\partial L}{\partial x} = x - x_0 - \sum_{i=1}^{N} A_i^T u_i = 0$

得 $x = x_0 + \sum_{i=1}^{N} A_i^T u_i$

对偶函数为

故 $\theta(u_1, u_2, \dots, u_N) = \begin{cases} \frac{1}{2}\|\sum_{i=1}^{N} A_i^T u_i\|_2^2 - \sum_{i=1}^{N} u_i^T(A_i x_0 + b_i + A_i \sum_{j=1}^{N} A_j^T u_j) & \|u_i\| \le 1,\ i=1,2,\dots,N \\ -\infty, & \text{otherwise} \end{cases}$

∴ 对偶问题为

$$\max \quad \frac{1}{2}\|\sum_{i=1}^{N} A_i^T u_i\|_2^2 - \sum_{i=1}^{N} u_i^T(A_i x_0 + b_i + A_i \sum_{j=1}^{N} A_j^T u_j)$$

$$\text{s.t} \quad \|u_i\|_2 \le 1 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N$$

2.

(a) ∵ $p^* = \infty$ ∴ 原始问题的可行域为空

即 $\forall x \in R^n$，$\exists i$，s.t $(Ax)_i > b_i$

即 $b \notin \{Ax + s \mid s \ge 0\}$

∵ $\{Ax+s \mid s \ge 0\}$ 是一个闭凸集，则存在将 b 和 $\{Ax+s \mid s \ge 0\}$

严格分离的超平面 即 $\exists v \in R^m$ 且 $v \ne 0$，s.t $v^T b < v^T(Ax+s)$

对一切 $x \in R^n$ 和 $s \ge 0$ 恒成立

∴ 可得 $v^T b < 0$，$v \ge 0$，$v^T A = 0$

∵ 对偶问题是可行的，设 z_0 为一个可行点

即 $A^T z_0 + c = 0 \quad z_0 \ge 0$

则对 $t \ge 0$，$c + A^T(z_0 + tv) = A^T z_0 + tA^T v + c = 0$

$z_0 + tv \ge 0$

No.

Date

$\because$ z_0+tv 也是对偶问题的可行点

此时 $-b^T(z_0+tv)=-b^Tz_0-tb^Tv$

$\because b^Tv<0$ $\therefore$ 若 $t\to\infty$, $-b^T(z_0+tv)\to\infty$

即在方向 v 上无界 $\therefore d^*=\infty$

(b) $L(x,\lambda)=x+\lambda^T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}x-\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)$

$=\left(1+\lambda^T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)x-\lambda^T\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

$\theta(\lambda)=\inf\limits_{x}L(x,\lambda)=\begin{cases}-\lambda^T\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, & \text{if } 1+\lambda^T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=0\\ -\infty, & \text{otherwise}\end{cases}$

$\therefore$ 对偶问题为 $\max\ \lambda_1-\lambda_2$

$\text{s.t.}\ \ 1+\lambda_2=0$

$\lambda_1,\lambda_2\geq 0$

显然，原问题以及对偶问题均不可行，$\therefore p^*=\infty$ 且 $d^*=-\infty$

A+