Assignment 3

1.

解：① 若 A 可逆，则 $x=A^{-1}b$

即当 $x=A^{-1}b$ 时，$\min c^Tx = c^TA^{-1}b$

② 若 A 不可逆

1) 若 $Ax=b$ 无解（即 $b\notin C(A)$）

则可行域为空， $\min \cancel{c^Tx=\infty}$ 最优值为 ∞ （空集的下确界为 ∞）

2) 若 $Ax=b$ 有解（即 $b\in C(A)$）

设 x_0 为一解，即 $Ax_0=b$

则 $Ax=b$ 的解集为 $\{x \mid x=x_0+u,\ u\in N(A)\}$.

此时 $\min c^Tx = \min c^T(x_0+u)$

$$=\min(c^Tx_0+c^Tu)$$

$c=0$时，显然可行域中任一点均是最优点，最优值为0

$c\neq0$时，$\min c^Tx=\min(c^Tx_0+c^Tu)=-\infty$

c^Tu无下界，最优值为$-\infty$

2.解：

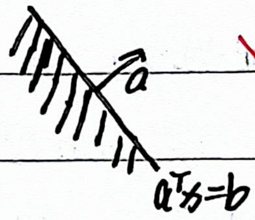
① $c=0$时，可行域中的任一点都是最优点，最优值为0

② $c\neq0$时

1) $a=0$时，若$b<0$，可行域为空，最优值为∞（空集的下确界为∞）；若$b\geq0$，可行域为R^n，最优值为$-\infty$?

2) $a\neq0$时

$a^Tx\leq b$所表示的区域如右所示



设$a^Tx_0=b$

由图知，若c与a反向平行，

则$x=x_0$时，$\min c^Tx=c^Tx_0$

否则，最优值为$-\infty$（即问题无下界）?

3.解 ① $c=0$时，同上题① ② $c\neq0$时

设$A_i=\mathrm{diag}\{0,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0\}$（其中，1为第$i$个对角元）

$i=1,2,\cdots,n$ $b_i=A_i(u-l)$

则满足$l\leq x\leq u$的x可表示为 $x=l+\alpha_1b_1+\alpha_2b_2+\cdots+\alpha_nb_n$

$0\leq\alpha_i\leq1$，$i=1,2,\cdots,n$

则$c^Tx=c^Tl+\alpha_1c^Tb_1+\alpha_2c^Tb_2+\cdots+\alpha_nc^Tb_n$

Date. Page.

$\therefore$ 令 $x_i = \begin{cases} 1, & 当 c^T b_i \le 0 时 \\ 0, & 当 c^T b_i > 0 时 \end{cases}$

此时取到最优值

4.解:

$\because e^T x = 1, \ x \ge 0$

$\therefore \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad 0 \le x_i \le 1$

不妨设 $\min\limits_{i} c_i = c_k$

下证当 $x_k = 1$，x 的其余分量均为0时，$c^T x$ 最小

反证：设 $\min c^T x = c^T p$，$p_j > 0 \ (j \ne k)$

则 $c_1 p_1 + \cdots + c_k p_k + \cdots + c_j p_j + \cdots + c_n p_n$

$\ge c_1 p_1 + \cdots + c_k (p_k + p_j) + \cdots + c_j \cdot 0 + \cdots + c_n p_n$

这与 $c^T p$ 最小矛盾

$\therefore$ 最优解为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ (1在第k个位置上)，最优值为 c_k

5.解：设c的n个分量 $c_{i_1} \le c_{i_2} \le \cdots \le c_{i_n}$

$\because e^T x = \alpha, \ 0 \le x \le 1 \quad \therefore \sum_{i=1}^{n} x_i = \alpha$

要使 $c^T x$ 最小

可令 $x_{i_1} = \min\{\alpha, 1\}$ $\quad x_{i_k} = \begin{cases} \min\{\alpha - k + 1, 1\} & 若 x_{i(k-1)} = 1 \\ 0 & ，若 x_{i_{k-1}} \ne 1 \end{cases}$

$(2 \le k \le n)$

此时问题取得最优值

若α非整数但仍满足 $0\le\alpha\le n$，上述结论仍成立

若将 $e^Tx=\alpha$ 改为 $e^Tx\le\alpha$

设 $I=\{i \mid c_i\ge 0,\ 1\le i\le n\}$

则令对 $\forall i\in I$，令 $x_i=0$

设 $J=\{1,2,\dots,n\}-I$

对 c_j $(j\in J)$ 重新排序 $c_{j_1}\le c_{j_2}\le\cdots\le c_{j_p}$

当 $x_{j_1}=\min\{\alpha,1\}$　$x_{j_k}=\begin{cases}\min\{\alpha-k+1,1\}, & 若\ x_{j_{k-1}}=1\\ 0 & 若\ x_{j_{k-1}}\ne 1\end{cases}$ $(2\le k\le n)$

时，问题取得最优值

A-

6 解：由 $d^Tx=\alpha$ 知 $\sum_{i=1}^{n}d_ix_i=\alpha$

$c^Tx=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{d_i}\cdot(d_ix_i)=\sum_{i=1}^{n}p_i(d_ix_i)$ [设 $p_i=\frac{c_i}{d_i}$]

设 $p_{i_1}\le p_{i_2}\le\cdots\le p_{i_n}$

则当 $d_{i_1}x_{i_1}=\min\{\alpha,d_{i_1}\}$　$d_{i_k}x_{i_k}=\begin{cases}\min\{\alpha-\sum_{j=1}^{k-1}d_{i_j},\ d_{i_k}\}, & 当\ d_{i_{k-1}}x_{i_{k-1}}=d_{i_{k-1}}\\ 0, & 若\ d_{i_{k-1}}x_{i_{k-1}}\ne d_{i_{k-1}}\end{cases}$ $(2\le k\le n)$

即

当 $x_{i_1}=\min\{\frac{\alpha}{d_{i_1}},1\}$　$x_{i_k}=\begin{cases}\min\{\frac{\alpha-\sum_{j=1}^{k-1}d_{i_j}}{d_{i_k}},1\}, & 若\ x_{i_{k-1}}=1\\ 0, & 若\ x_{i_{k-1}}\ne 1\end{cases}$ $(2\le k\le n)$

时

问题取得最优值