Assignment 1

Date. Page.

1、证明:

记 $S_0 = \{(x,t) \in R^n \times R : \|x\|_2 \leq t\}$

$\forall (x_1,t_1) \in S_0,\ (x_2,t_2) \in S_0,\quad \forall \alpha \in [0,1]$

$$\|\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\|_2 \leq \alpha \|x_1\|_2 + (1-\alpha)\|x_2\|_2$$

$$\leq \alpha t_1 + (1-\alpha) t_2$$

又 $\because \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in R^n$ 且 $\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2 \in R$

$\therefore (\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2,\ \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \in S_0$

即 $\alpha(x_1, t_1) + (1-\alpha)(x_2, t_2) \in S_0$

$\therefore$ S是凸锥

记 $S_+^n = \{Z \in S^n : Z \succeq 0\}$

$\forall A, B \in S_+^n \quad \forall \alpha \in [0,1]$

$$[\alpha A + (1-\alpha)B]^T = \alpha A^T + (1-\alpha)B^T = \alpha A + (1-\alpha)B$$

$\therefore \alpha A + (1-\alpha)B \in S^n$

又 $\because \forall c \in R^n$

$$c^T(\alpha A + (1-\alpha)B)c = \alpha \cdot c^T A c + (1-\alpha) \cdot c^T B c$$

$$\geq 0$$

$\therefore \alpha A + (1-\alpha)B \succeq 0$

$\therefore \alpha A + (1-\alpha)B \in S_+^n \qquad \therefore S_+^n$ 是凸锥

2. 解: 要使 S_u 是凸集, 只需对 ~~$\forall x, y \in R^n$~~, $\lambda \in [0,1]$: $\lambda x + (1-\lambda)y \in S_u$

即 $\|\lambda x+(1-\lambda)y-a\|_2 \le u\|\lambda x+(1-\lambda)y-b\|_2$

$S_u=\{x\in R^n: \|x-a\|_2 \le u\|x-b\|_2\}$

$\quad =\{x\in R^n: \|x-a\|_2^2 \le u^2\|x-b\|_2^2\}$

$\quad =\{x\in R^n: (x-a)^T(x-a) \le u^2(x-b)^T(x-b)\}$

$\quad =\{x\in R^n: (1-u^2)x^Tx+2(u^2b-a)^Tx+a^Ta-u^2b^Tb\le 0\}$

① 当 $u=1$ 时 $\quad S_u=S_1=\{x\in R^n: 2(b-a)^Tx+a^Ta-b^Tb\le 0\}$

$\because b\ne a \quad \therefore S_u$ 是半空间，是凸的

② 当 $0<u<1$ 时：

$$S_u=\left\{x\in R^n: \left(x-\frac{a-u^2b}{1-u^2}\right)^T\left(x-\frac{a-u^2b}{1-u^2}\right)\le \left\|\frac{a-u^2b}{1-u^2}\right\|_2^2+\frac{u^2\|b\|_2^2-\|a\|_2^2}{1-u^2}\right\}$$

$\therefore$ 此时 S_u 是球，是凸的

③ 当 $u>1$ 时

$$S_u=\left\{x\in R^n: \left(x-\frac{a-u^2b}{1-u^2}\right)^T\left(x-\frac{a-u^2b}{1-u^2}\right)\ge \left\|\frac{a-u^2b}{1-u^2}\right\|_2^2+\frac{u^2\|b\|_2^2-\|a\|_2^2}{1-u^2}\right\}$$

$\therefore$ 此时 S_u 显然不凸

综上可知，$0<u\le 1$

3 证明：

① $\forall x\in C$，$\forall w_1,w_2\in N_C(x)$ $\quad \forall u\in[0,1]$，$y\in C$

$[uw_1+(1-u)w_2]^T(y-x)$

$\quad = uw_1^T(y-x)+(1-u)w_2^T(y-x)\le 0$

$\therefore uw_1+(1-u)w_2\in N_C(x) \quad \therefore N_C(x)$ 是凸集

② 反设 $N_C(x)$ 不是闭集，则 $\exists w' \notin N_C(x)$，且 $w_0, w_1, w_2, \cdots, w_n, \cdots$ 收敛于 w'，$w_i \in N_C(x)$，$i=0,1,2,\ldots,n,\ldots$

由上述假设可知，$\exists y_0 \in C$ 使得 $(w')^T(y_0-x) > 0$ ⊗

又 $\because |(w')^T(y_0-x) - w_n^T(y_0-x)|$

$= |(w'-w_n)^T(y_0-x)|$ （Cauchy 不等式）

$\leq \|w'-w_n\|_2 \|y_0-x\|_2 \to 0 \quad (n\to\infty)$

$\therefore w_n^T(y_0-x) \to (w')^T(y_0-x) \quad (n\to\infty)$

又 $\because w_n^T(y_0-x) \geq 0$ 对于 $n=0,1,2,3,\ldots$

×　$\therefore (w')^T(y_0-x) \geq 0$，这与 ⊗ 式矛盾

$\therefore$ 假设不成立，$N_C(x)$ 是闭集.

③ 当 $x \in \mathrm{int}(C)$ 时，$\exists \varepsilon > 0$，若 $t \in R^n$ 满足 $\|t-x\|_2 \leq \varepsilon$，则 $t \in C$

任取 $v \in R^n \setminus \{0\}$，满足 $\|v\|_2 < \varepsilon$，则 $\|(x+v)-x\|_2 < \varepsilon$，$\|(x-v)-x\|_2 < \varepsilon$

则 $x+v \in C$ 且 $x-v \in C$

$\forall w \in N_C(x)$ $\begin{cases} w^T(x+v-x) = w^Tv \leq 0 \\ w^T(x-v-x) = -w^Tv \leq 0 \end{cases} \Rightarrow w^Tv = 0$ 又 $\because v \neq 0$ $\therefore w = 0$

$\therefore$ 可得 $N_C(x) = \{0\}$，证毕

4.(a) 解：令 $x_1x_2 = 1$ 则 $x_2 = \frac{1}{x_1}$ $(x_2)' = -\frac{1}{x_1^2}$

$x_1 = v, x_2 = \frac{1}{v}$ 时，在 x 处支撑超平面为 $x_1 + x_2v^2 = 2v$

$\therefore \{x \in R_+^n \mid x_1x_2 \geq 1\} = \bigcap_{v>0} \{x \in R_+^n \mid x_1 + x_2v^2 \geq 2v\}$

Date. Page.

(b) 设在 $\hat{x}$ 点 C 的支撑超平面为 $a^T x = a^T \hat{x}$，$a \neq 0$ 且 $a \in R^n$

不妨设对 $\forall x \in C$ $a^T x \geq a^T \hat{x}$

~~可令~~ $\cancel{a_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}}$，~~若 或~~

差

设 a_i 是 a 的第 i 个分量，$\hat{x}_i$ 为 $\hat{x}$ 的第 i 个分量

若 $\hat{x}_i = 1$，令 $a_i < 0$，若 $\hat{x}_i = -1$，令 $a_i > 0$，若 $-1 < \hat{x}_i < 1$，

则令 $a_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ $\because \|\hat{x}\|_\infty = 1$，故所得的 $a \neq 0$

即可得到所求支撑超平面

A-