Date.　　Page.

Assignment 6

1. $L(x,\lambda)=x_1^2+0.5x_2^2+x_1x_2-2x_1-3x_2+\lambda(x_1+x_2-1)$

$\theta(\lambda)=\inf_x L(x,\lambda)$

令 $\frac{\partial L}{\partial x}=0$ 得 $\begin{cases}2x_1+x_2-2+\lambda=0\\x_1+x_2-3+\lambda=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=-1\\x_2=4-\lambda\end{cases}$

$\therefore \theta(\lambda)=\inf_x L(x,\lambda)=-0.5\lambda^2+2\lambda-5$

$\therefore$ 对偶问题为 $\sup_\lambda -0.5\lambda^2+2\lambda-5$

s.t. $\lambda\geq 0$

显然，对于对偶问题，最优解为 $\lambda=2$，最优值 $v_d^*=-3$

对原问题，利用KKT条件

$\begin{cases}\nabla_x L=0\\\lambda\geq 0\\\lambda(x_1+x_2-1)=0\\x_1+x_2\leq 1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=-1\\x_2=2\end{cases}$

故对于原问题，最优解为 $x=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$，

最优值 $v_p^*=-3$

2. 设 $f(x)=x_1^4-2x_2^2-x_2$　$g(x)=x_1^2+x_2^2+x_2$

(i) $\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix}12x_1^2 & 0\\0 & -4\end{bmatrix}$ 不是半正定矩阵

即 $f(x)$ 非凸，故问题非凸

(ii) 显然，$f(x)$是一个连续函数，$\{x\in R^2 \mid x_1^2+(x_2+\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{4}\}$为非空紧集，由Weierstrass定理，这个问题一定存在最优解

(iii) $L(x,\lambda)= x_1^4-2x_2^2-x_2+\lambda(x_1^2+x_2^2+x_2)$

令$\nabla_x L=0$ 得 $\begin{cases}4x_1^3+2\lambda x_1=0\\(2\lambda-4)x_2+\lambda-1=0\end{cases}$ $\because \lambda\ge 0$ $\therefore \begin{cases}x_1=0\\x_2=\frac{1-\lambda}{2\lambda-4}\end{cases}$ 且$\lambda\ne 2$

$\therefore \theta(\lambda)=\inf\limits_x L(x,\lambda)=\begin{cases}\frac{-(\lambda-1)^2}{2\lambda-4}+\frac{(\lambda-1)^2}{4\lambda-8}=\frac{(\lambda-1)^2}{8-4\lambda}, & 当\lambda>2时\\-\infty, & 当0\le\lambda<2时\end{cases}$

$\therefore$ 对偶问题为 $\sup\limits_{\lambda} \frac{(\lambda-1)^2}{8-4\lambda}$

s.t. ~~$\lambda\ge 0$且$\lambda\ne 2$~~ $\lambda>2$

$\because \theta(\lambda)=-\frac{1}{4}\left[(\lambda-2)+\frac{1}{\lambda-2}+2\right]$ $\therefore \lambda=3$时 $\sup\limits_{\lambda}\theta(\lambda)=-1$

$\therefore$ 对偶问题最优解为$\lambda=3$，最优值$v_D^*=-1$

(iv)

对原问题由KKT条件，

$\begin{cases}\nabla_x L=0\\\lambda\ge 0\\\lambda(x_1^2+x_2^2+x_2)=0\\x_1^2+x_2^2+x_2\le 0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=0\\x_2=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=0\\x_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$

将三组解分别代入$f(x)$，比较得

原始问题最优解为$x=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$，最优值$v_P^*=-1$

$\therefore$ 对偶问题的最优值与原始问题的最优值相等.

Date. Page.

3.

$$L(x,\gamma) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i x_i^2 + \cancel{(2b_i+\gamma)}\, x_i + e^{\alpha_i x_i}\right) - \gamma$$

令 $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 2a_i x_i + 2b_i + \cancel{\gamma + \alpha_i e^{\alpha_i x_i}} = 0$

设 $f_1(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i x_i^2 + 2b_i x_i)$ $\quad f_2(x) = \sum_{i=1}^{n} e^{\alpha_i x_i}$

则原问题等价于: $\min f_1(y) + f_2(z)$

$$\text{s.t.} \quad y = z$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$$

$L(y,z,u,w) = f_1(y) + f_2(z) + u^T(y-z) + w\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - 1\right)$

令 $\frac{\partial L}{\partial y_i} = 2a_i y_i + 2b_i + w + u_i = 0$

得 $y_i = \frac{-u_i - w - 2b_i}{2a_i}$

再令 $\frac{\partial L}{\partial z_i} = \alpha_i e^{\alpha_i z_i} - u_i = 0$ 得 $z_i = \frac{1}{\alpha_i}\ln\frac{u_i}{\alpha_i}$

$\therefore \theta(u,w) = \sup_{y,z} L(y,z,u,w)$

$$= -w + \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{u_i^2 + w^2 + 4b_i^2 + 4b_i w + 2u_i w + 4u_i b_i}{4a_i} + \frac{u_i}{\alpha_i}\left(1 - \ln\frac{u_i}{\alpha_i}\right)\right.$$

$\therefore$ 对偶问题为

$\sup_{u,w} \theta(u,w)$, $\theta(u,w)$ 见上

Date.　　　　Page.

第4题见最后

5.

记 $A=[a_1, a_2, \dots, a_n]$

$$L(x,\lambda,u)=\sum_{j=1}^{n} x_j \ln\frac{x_j}{c_j}+\lambda^T(b-Ax)+u\left(\sum_{j=1}^{n}x_j-1\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n} x_j \ln\frac{x_j}{c_j}-\sum_{j=1}^{n}x_j\lambda^T a_j+u\sum_{j=1}^{n}x_j+\lambda^T b-u$$

$$=\sum_{j=1}^{n} x_j\left(\ln\frac{x_j}{c_j}-\lambda^T a_j+u\right)+\lambda^T b-u$$

令 $\frac{\partial L}{\partial x_j}=\ln\frac{x_j}{c_j}+1+u-\lambda^T a_j=0$ 　则 $x_j=c_j e^{\lambda^T a_j-u-1}$

故 $\theta(\lambda,u)=\inf\limits_{x} L(x,\lambda,u)=-\sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda^T a_j-u-1}+\lambda^T b-u$

$$=-e^{-u-1}\sum_{j=1}^{n}c_j e^{\lambda^T a_j}+\lambda^T b-u$$

令 $\frac{\partial\theta}{\partial u}=e^{-u-1}\cdot\sum_{j=1}^{n}c_j\cdot e^{\lambda^T a_j}-1=0$ 　令 $S=\sum_{j=1}^{n}c_j e^{\lambda^T a_j}$

则 $e^{-u-1}\cdot S-1=0$

$$e^{u+1}=S$$

$$u=\ln S-1$$

故对偶问题为 $\sup\ \lambda^T b-\ln\left(\sum_{j=1}^{n}c_j\cdot e^{\lambda^T a_j}\right)$
(化简后)

$\text{s.t.}\ \ \lambda\geq 0$

Date.　　　Page.

4.

(a) 设 $f(q,\alpha)=\alpha$　　$g(q,\alpha)=\|q\|_2^2-\varepsilon$　　$h(q,\alpha)=Aq-\alpha f$

显然f和g均为凸函数，h为仿射函数

∴原问题为凸问题

又∵取$q'=0$　则$g(q',\alpha)=-\varepsilon<0$

即 Slater 条件满足

∴强对偶成立

(b) $L(q,\alpha,u)=\alpha+u^T(Aq-\alpha f)$

设 $X=\{q \mid \|q\|_2^2\le\varepsilon,\ q\in R^n\}$

$\theta(u)=\inf\limits_{q\in X,\alpha\in R} L(q,\alpha,u)$

$=\inf\limits_{\|q\|_2^2\le\varepsilon,\alpha\in R}[(1-u^Tf)\alpha+u^TAq]$

$=\begin{cases} \quad , & 1-u^Tf=0 \\ -\infty, & 1-u^Tf\ne 0\end{cases}$ X.

B+.

扫描全能王 创建