

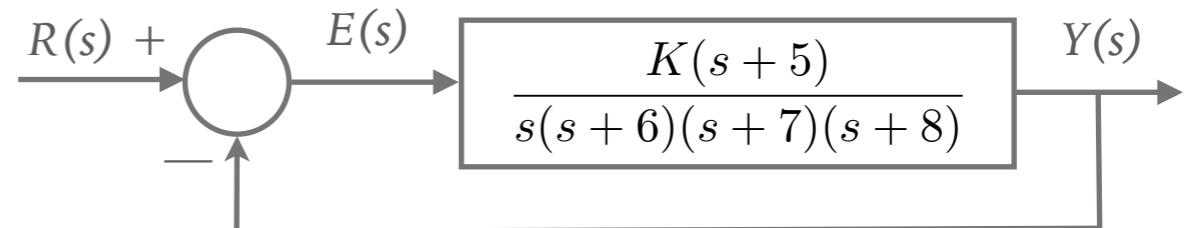
ROOT LOCUS

INTRO...

*Controle Automático II
Prof. Fernando Passold
Engenharia Elétrica — UPF*

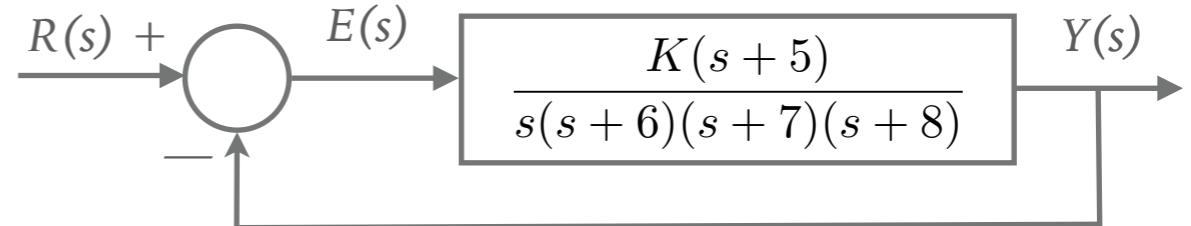
EXEMPLO 7.6

- Dado o sistema de controle mostrado na figura ao lado, encontre o valor de K para limitar o valor do erro de regime permanente à 10%.



EXEMPLO 7.6

- Dado o sistema de controle mostrado na figura ao lado, encontre o valor de K para limitar o valor do erro de regime permanente à 10%.



Solução:

Como o sistema ($FTMA(s)$) é do tipo 1 (um integrador presente), o erro estabelecido no problema só faz sentido para entrada rampa; somente uma entrada rampa leva a um erro constante para sistemas do tipo 1.

$$e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{K_v}, \quad \text{onde:} \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)$$

$$e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0,1 \quad \therefore \quad K_v = 1/0,1 = 10$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = \frac{K \times 5}{6 \times 7 \times 8} = 10 \quad \therefore \quad K = 672$$

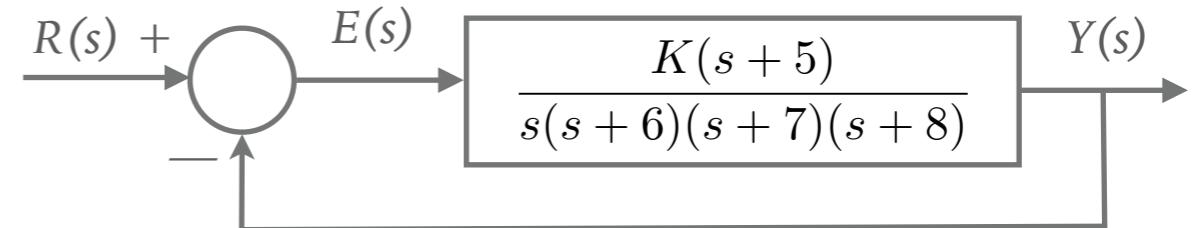
Simulando no MATLAB:

```
>> G=tf([1 5],poly([0 -6 -7 -8]));
>> zpk(G)
      (s+5)
-----
      s (s+8) (s+7) (s+6)
>> K=672;
>> ftmf=feedback(K*G,1)
```

```
>> t=0:0.01:9; % criando vetor tempo
>> u=length(t) % qtdade termos gerados
u = 901
>> slope=1/5 % declive da rampa
slope = 0.2000
>> ramp=0.2*t; % criando rampa
>> 5/0.01 % t= 5 (seg) = índice ?
ans = 500
>> t(500)
ans = 4.9900
>> ramp(501:u)=1; % limitando rampa p/ t>=5
>> plot(t,ramp) % opcional
>> figure; lsim(ftmf, ramp, t)
```

EXEMPLO 7.6

- Dado o sistema de controle mostrado na figura ao lado, encontre o valor de K para limitar o valor do erro de regime permanente à 10%.



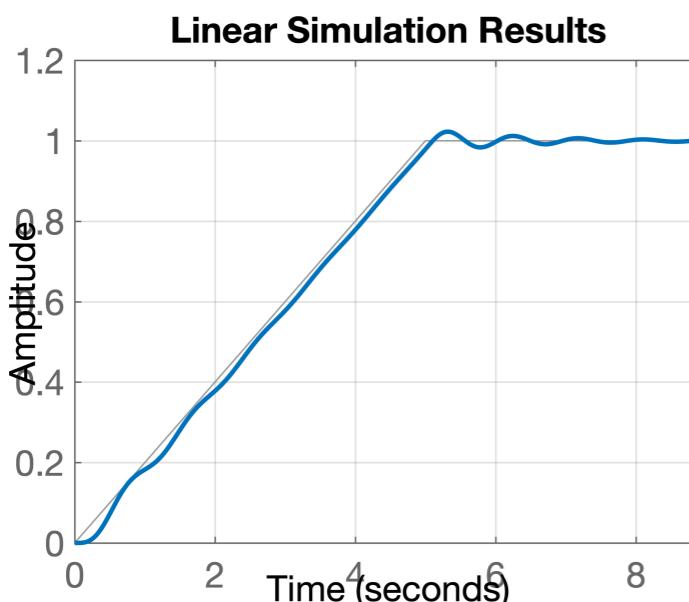
Solução:

Como o sistema ($FTMA(s)$) é do tipo 1 (um integrador presente), o erro estabelecido no problema só faz sentido para entrada rampa; somente uma entrada rampa leva a um erro constante para sistemas do tipo 1.

$$e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{K_v}, \quad \text{onde: } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)$$

$$e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0,1 \quad \therefore \quad K_v = 1/0,1 = 10$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = \frac{K \times 5}{6 \times 7 \times 8} = 10 \quad \therefore \quad K = 672$$

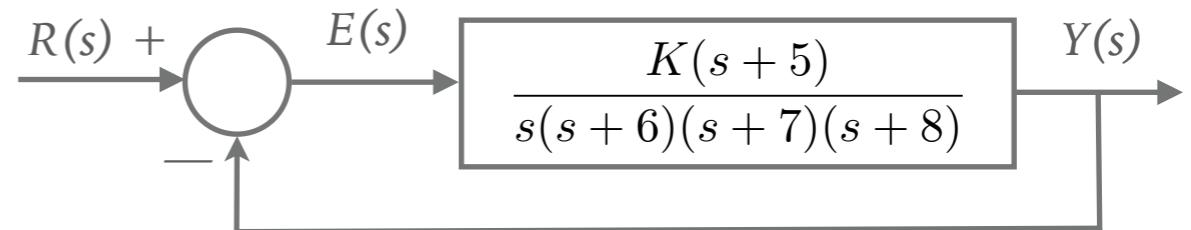


));

```
>> t=0:0.01:9; % criando vetor tempo
>> u=length(t) % qtdade termos gerados
u = 901
>> slope=1/5 % declive da rampa
slope = 0.2000
>> ramp=0.2*t; % criando rampa
>> 5/0.01 % t= 5 (seg) = índice ?
ans = 500
>> t(500)
ans = 4.9900
>> ramp(501:u)=1; % limitando rampa p/ t>=5
>> plot(t,ramp) % opcional
>> figure; lsim(ftmf, ramp, t)
```

EXEMPLO 7.6

- Dado o sistema de controle mostrado na figura ao lado, encontre o valor de K para limitar o valor do erro de regime permanente à 10%.

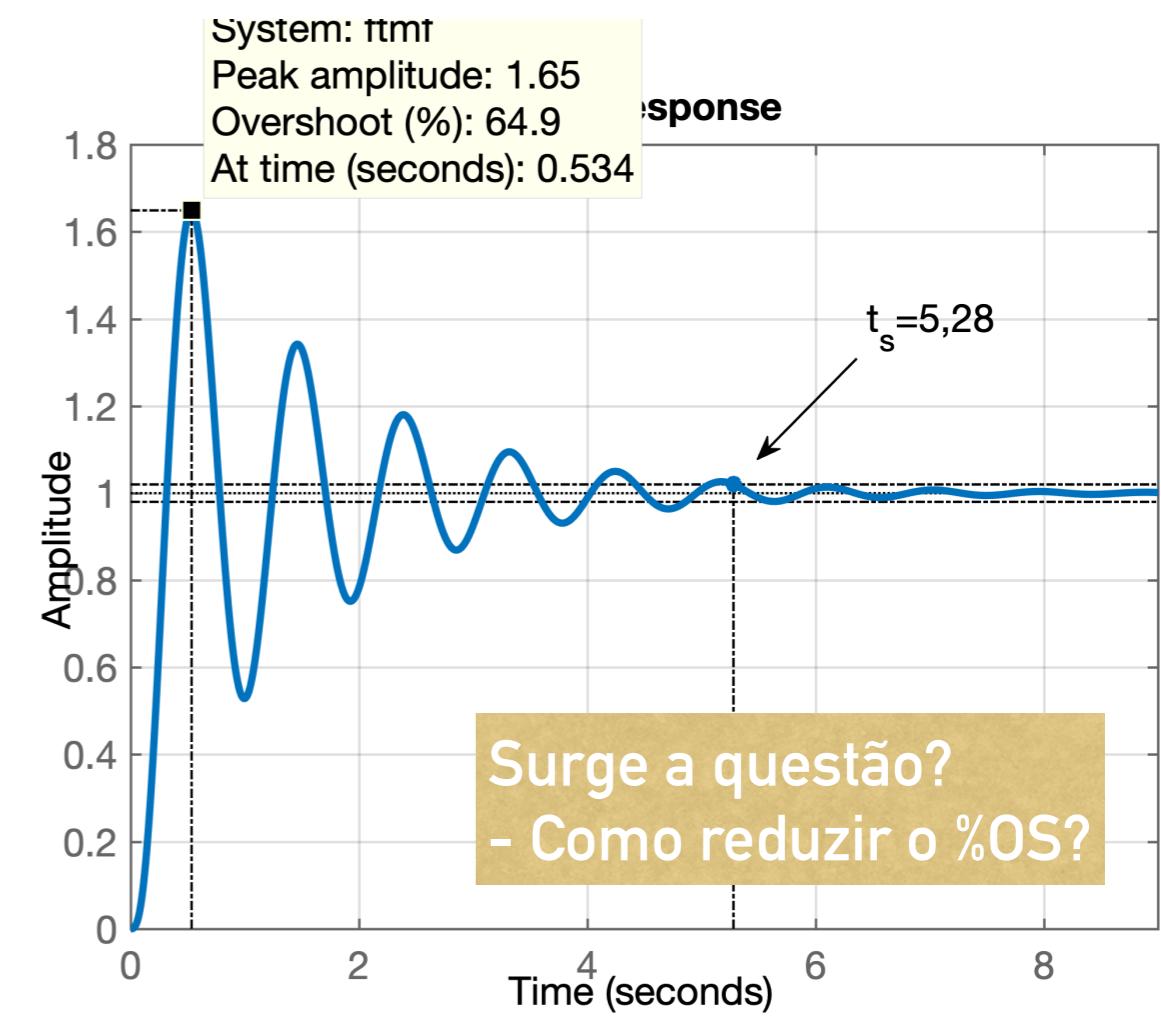
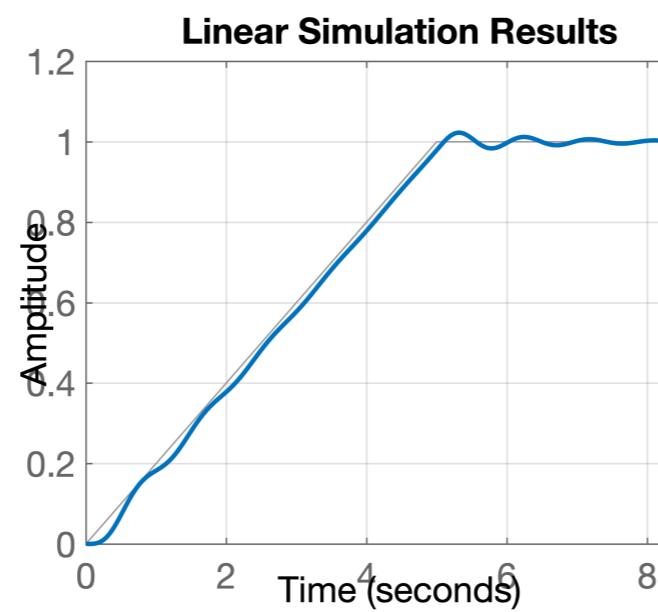


Detalhes:

O erro para entrada rampa pode ter ficado limitado à 10%, porém observe a dinâmica do sistema para uma entrada degrau (apesar do erro nulo em regime permanente):

Simulando no MATLAB:

```
>> G=tf([1 5],poly([0 -6 -7 -8]));
>> zpk(G)
      (s+5)
-----
      s (s+8) (s+7) (s+6)
>> K=672;
>> ftfmf=feedback(K*G,1)
```



POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

- Seja o seguinte sistema:
- A resposta a uma entrada degrau unitário leva à:

Degrado: $\mathcal{L}\{u(t)\} = 1/s$

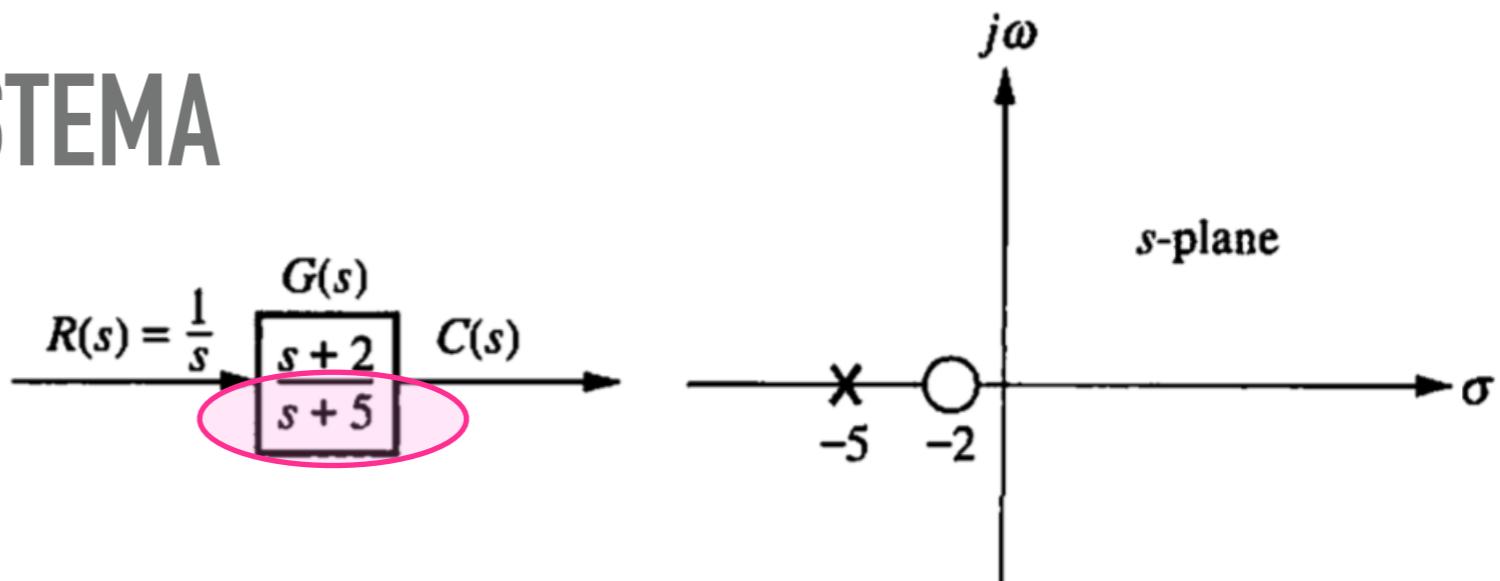
$$C(s) = \frac{(s+2)}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} = \frac{2/5}{s} + \frac{3/5}{s+5}$$

$$A = \left. \frac{(s+2)}{(s+5)} \right|_{s=0} = \frac{2}{5}$$

$$B = \left. \frac{(s+2)}{s} \right|_{s=-5} = \frac{3}{5}$$

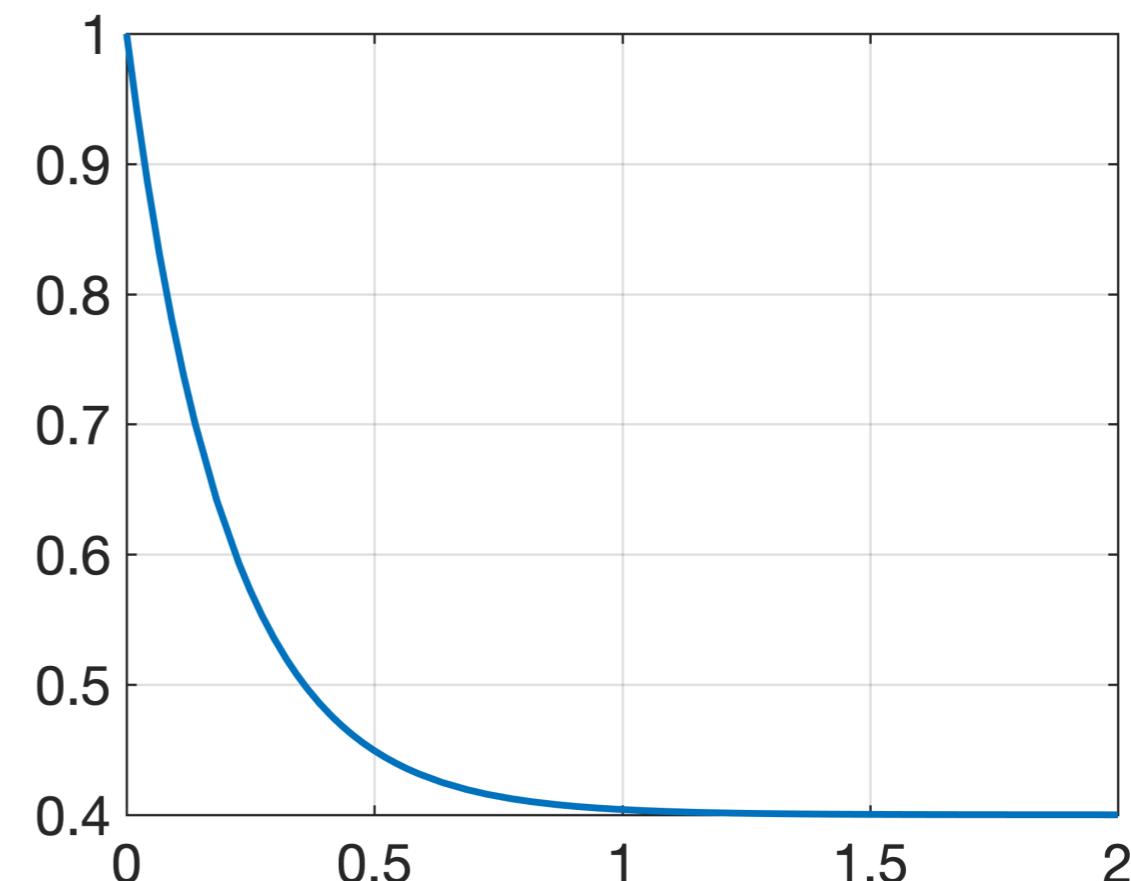
$$c(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} e^{-5t}$$

```
>> fplot(@(t) (2/5)+(3/5)*exp(-5*t), [0 2])
>> grid
```



(a) Sistema em MA.

(b) Pólos e zeros de MA no plano-s



ps.: Note que o pôlo em $s = -5$ é estável (resposta converge no tempo)

POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

- Seja o seguinte sistema:
- A resposta a uma entrada degrau unitário leva à:

Degrado: $\mathcal{L}\{u(t)\} = 1/s$

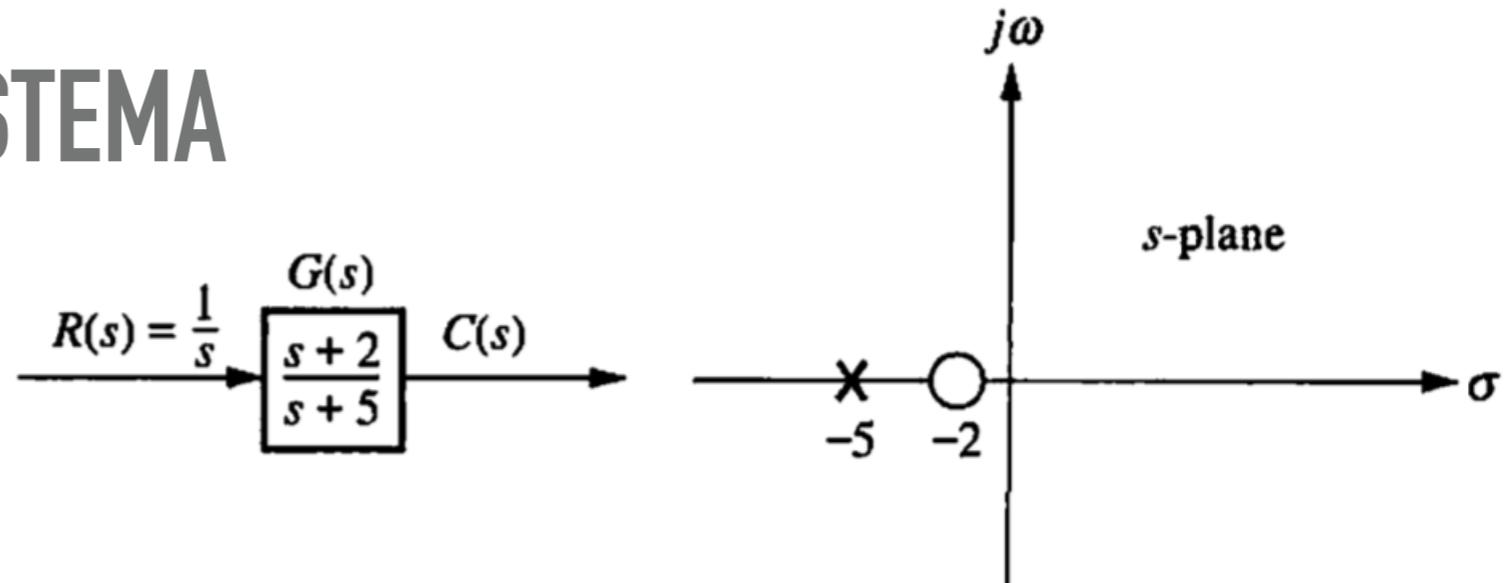
$$C(s) = \frac{(s+2)}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} = \frac{2/5}{s} +$$

$$A = \left. \frac{(s+2)}{(s+5)} \right|_{s=0} = \frac{2}{5}$$

$$B = \left. \frac{(s+2)}{s} \right|_{s=-5} = \frac{3}{5}$$

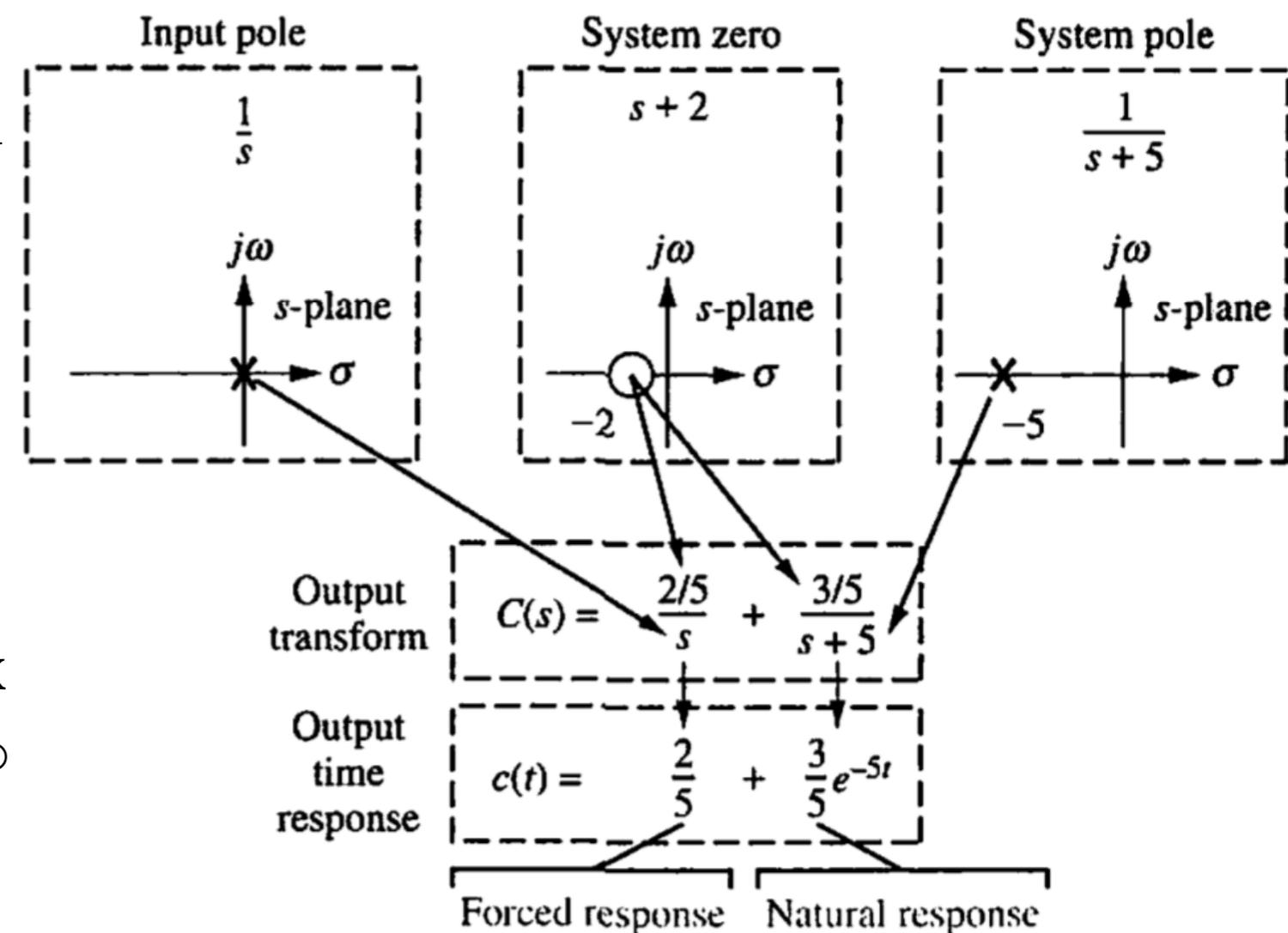
$$c(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^{-5t}$$

zeros → X
polos → O



(a) Sistema em MA.

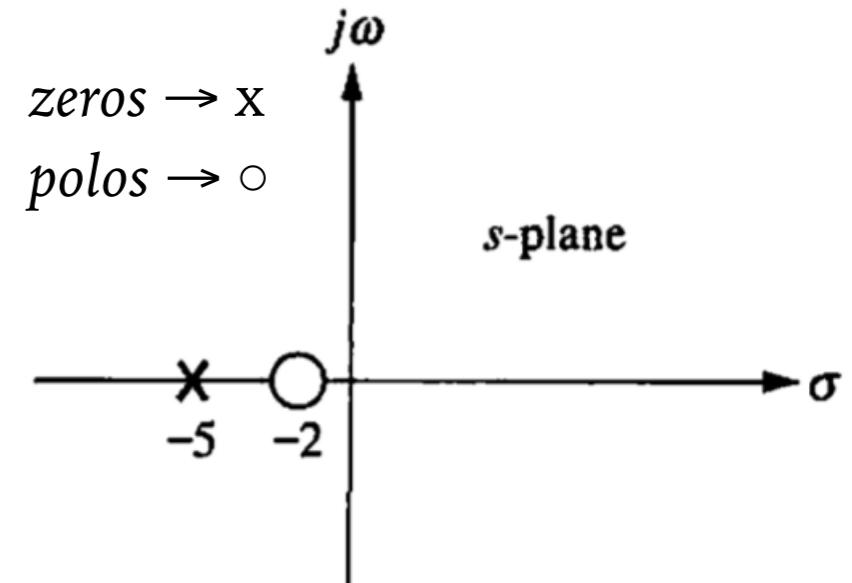
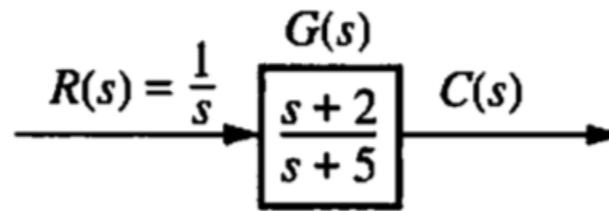
(b) Pólos e zeros de MA no plano-s



POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

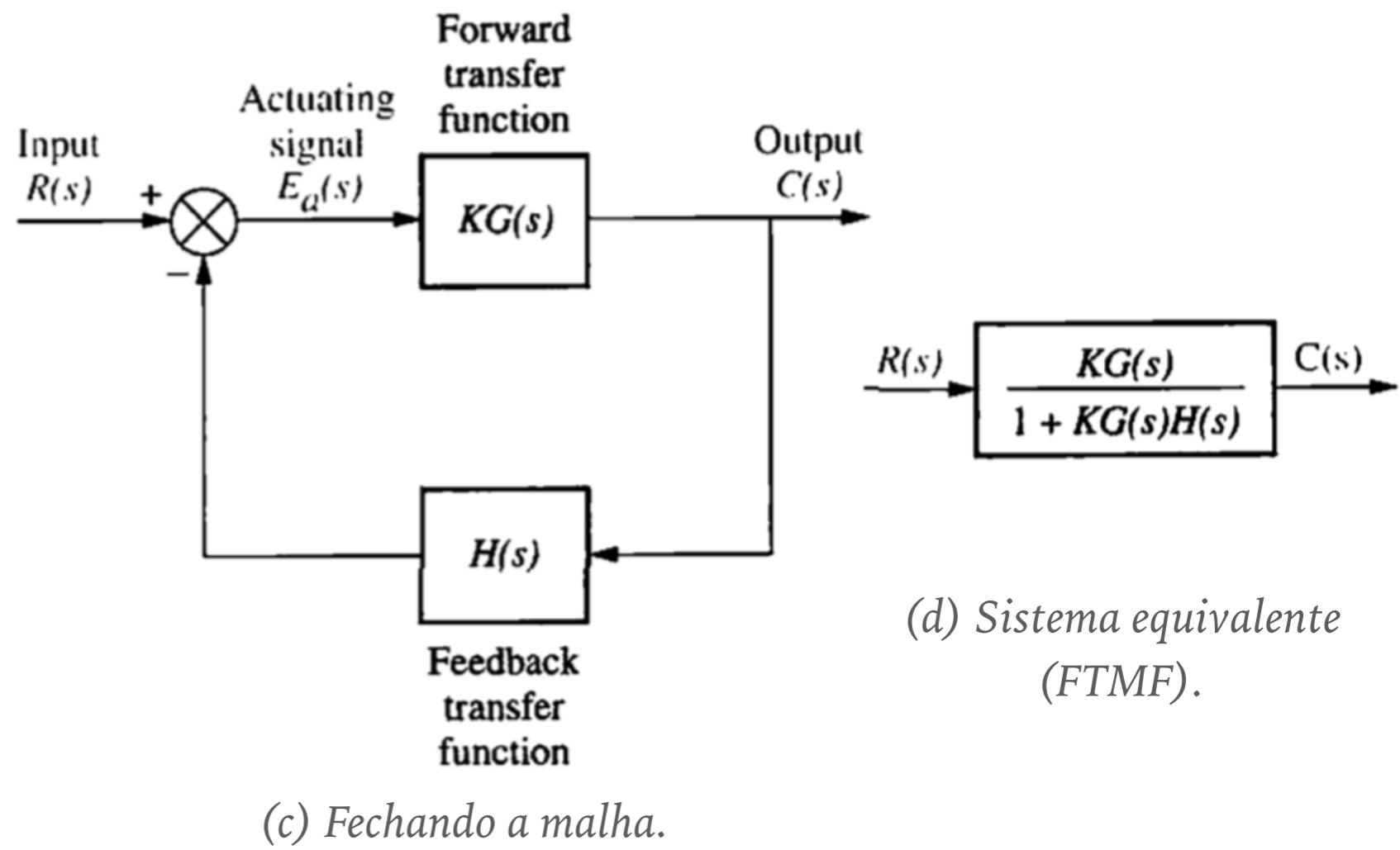
- Seja o seguinte sistema:
- A resposta a uma entrada degrau unitário leva à:
- O que acontece quando fechamos a malha com controlador proporcional?

Vamos perceber que a medida que aumentamos K, os pólos em MF mudam de local.



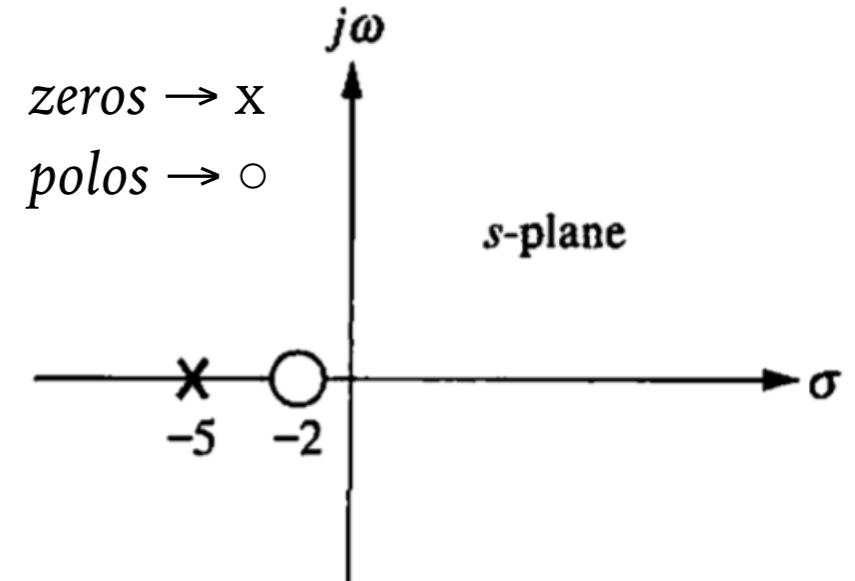
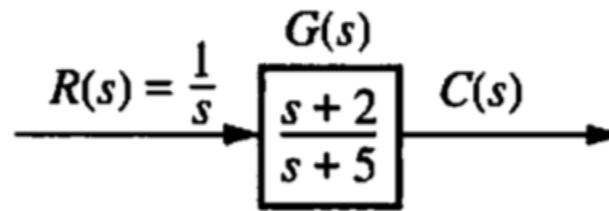
(a) Sistema em MA.

(b) Pólos e zeros de MA no plano-s



POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

- Seja o seguinte sistema:
- A resposta a uma entrada degrau unitário leva à:
- O que acontece quando fechamos a malha com controlador proporcional



(a) Sistema em MA.

(b) Pólos e zeros de MA no plano-*s*

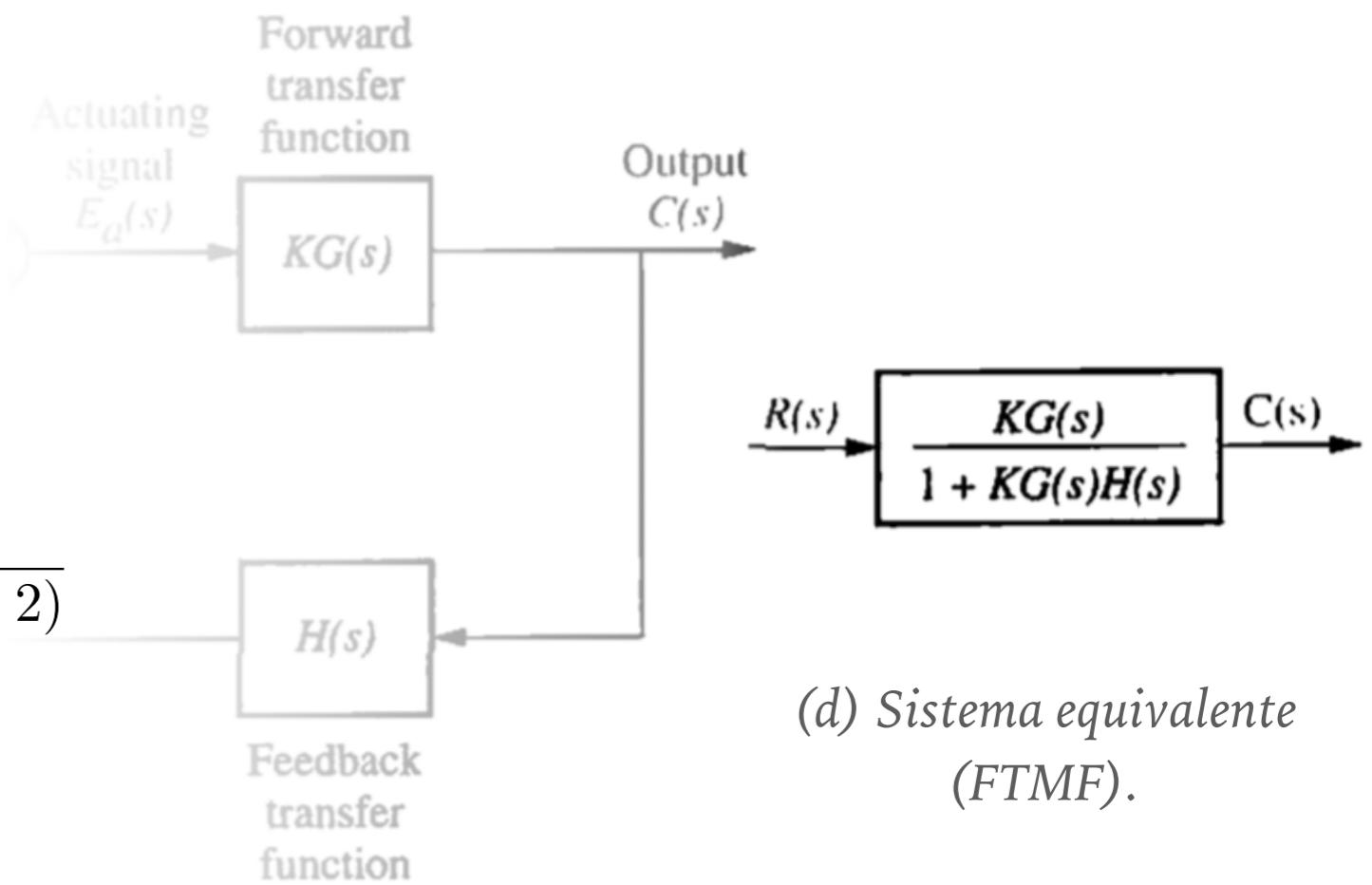
(c) Fechando a malha:

$$FTMF(s) = \frac{K G(s)}{1 + K G(s)} = \frac{R(s)}{C(s)}$$

$$FTMF(s) = \frac{\frac{K(s+2)}{(s+5)}}{1 + \frac{K(s+2)}{(s+5)}} = \frac{K(s+2)}{(s+5) + K(s+2)}$$

$$FTMF(s) = \frac{K(s+2)}{(K+1)s + (2K+5)}$$

EC(s)



(d) Sistema equivalente
(FTMF).

POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

- Seja o seguinte sistema:
- O que acontece quando fechamos a malha com controlador proporcional?

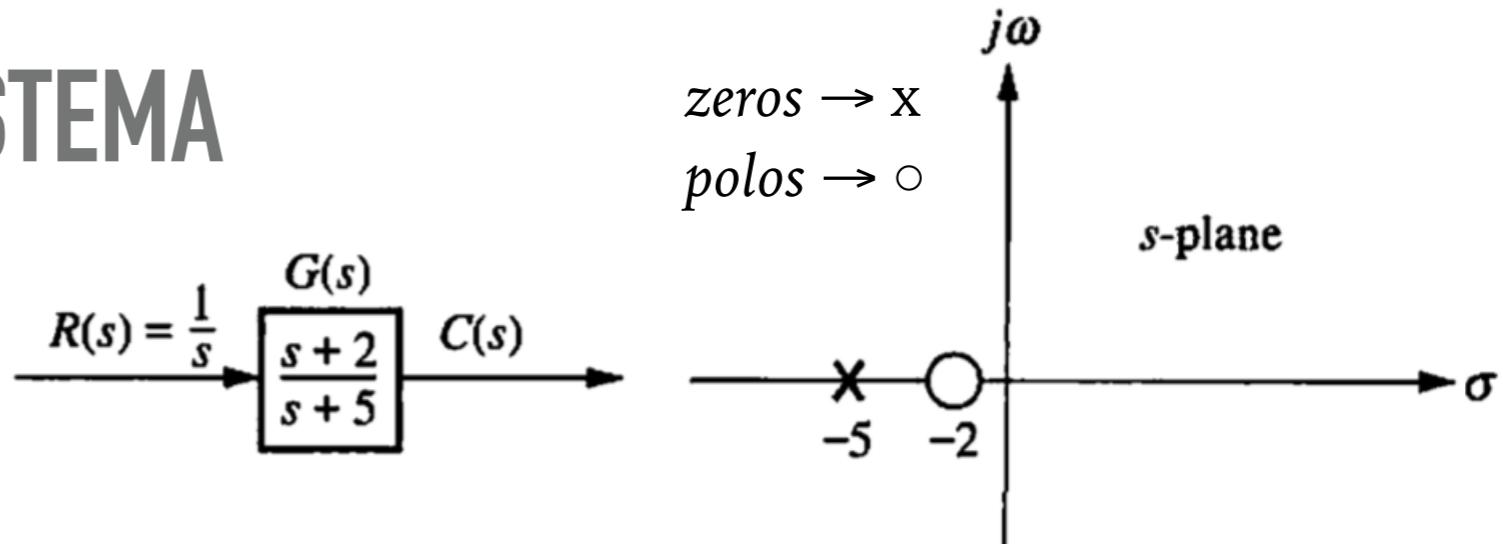
(c) Fechando a malha:

$$FTMF(s) = \frac{K G(s)}{1 + K G(s)} = \frac{R(s)}{C(s)}$$

$$FTMF(s) = \frac{K(s+2)}{(K+1)s + (2K+5)}$$

Calculando pôlos de MF, variando K:

K	EC(s)=0	Polo em (s=)
0.0	$1 s + 5 = 0$	-5.00
0.1	$1.1 s + 5.2 = 0$	-4.73
0.5	$1.5 s + 6 = 0$	-4.00
1.0	$2 s + 7 = 0$	-3.50
1.5	$2.5 s + 8 = 0$	-3.20
2.0	$3 s + 9 = 0$	-3.00
4.0	$5 s + 13 = 0$	-2.60
10.0	$11 s + 25 = 0$	-2.27
50.0	$51 s + 105 = 0$	-2.06
100.0	$101 s + 205 = 0$	-2.03



(a) Sistema em MA.

(b) Pólos e zeros de MA no plano-s

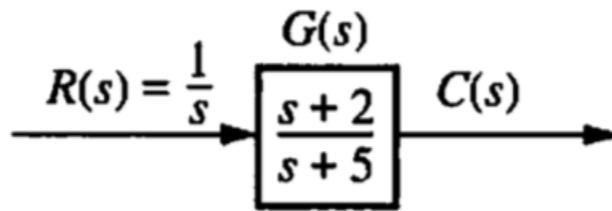
```
% Determinando faixa de polos em MF,
% variando ganho para fig. 4.1 NISE
% Fernando Passold, em 01.04.2019
K=[0 0.1 0.5 1 1.5 2 4 10 50 100];
u=length(K);
fprintf(' K | EC(s)=0 | Polo em (s=)\n');
for i=1:u
    EC = [(K(i)+1) (2*K(i)+5)]; % monta EC(s)
    polo = roots(EC);
    fprintf('%5.1f | %g s + %g = 0 | %7.2f\n', K(i),
    EC(1), EC(2), polo);
end
```

Feedback
transfer
function

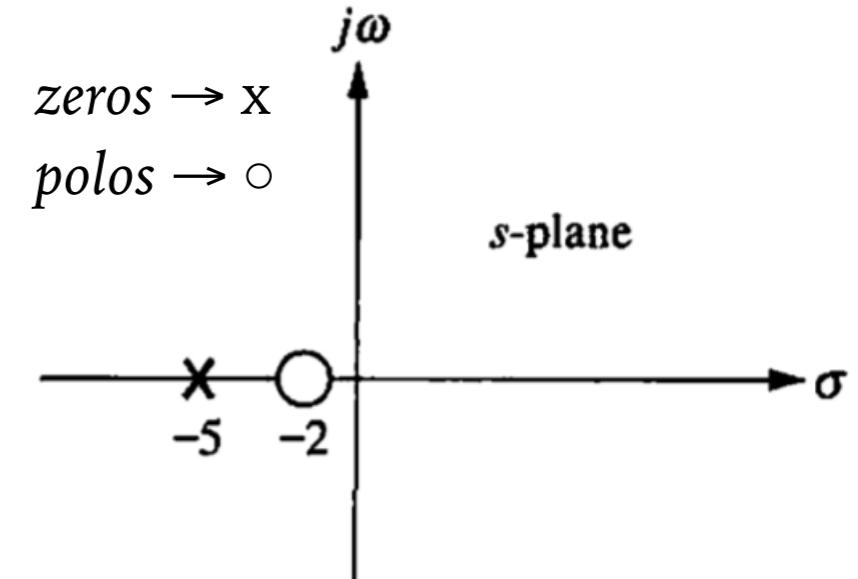
(d) Sistema equivalente
(FTMF).

POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

- Seja o seguinte sistema:
- O que acontece quando fechamos a malha com controlador proporcional?



(a) Sistema em MA.



(b) Pólos e zeros de MA no plano-s

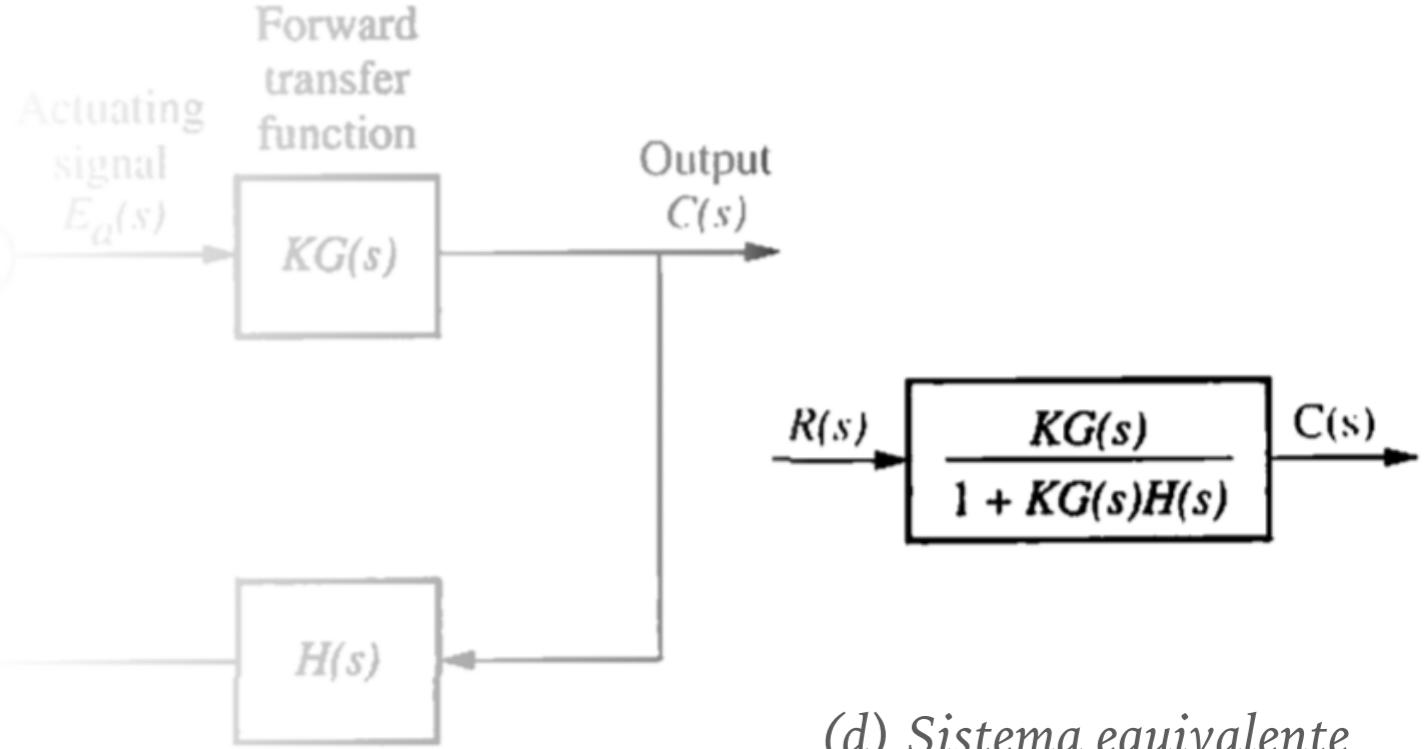
(c) Fechando a malha:

$$FTMF(s) = \frac{K G(s)}{1 + K G(s)} = \frac{R(s)}{C(s)}$$

$$FTMF(s) = \frac{K(s+2)}{(K+1)s + (2K+5)}$$

Calculando pólos de MF, variando K :

K	$EC(s) = 0$	Polo em $(s=)$
0.0	$1 s + 5 = 0$	-5.00
0.1	$1.1 s + 5.2 = 0$	-4.73
0.5	$1.5 s + 6 = 0$	-4.00
1.0	$2 s + 7 = 0$	-3.50
1.5	$2.5 s + 8 = 0$	-3.20
2.0	$3 s + 9 = 0$	-3.00
4.0	$5 s + 13 = 0$	-2.60
10.0	$11 s + 25 = 0$	-2.27
50.0	$51 s + 105 = 0$	-2.06
100.0	$101 s + 205 = 0$	-2.03



(d) Sistema equivalente
(FTMF).

Note: o polo de MA "caminha" na direção do zero (mais próximo)

POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

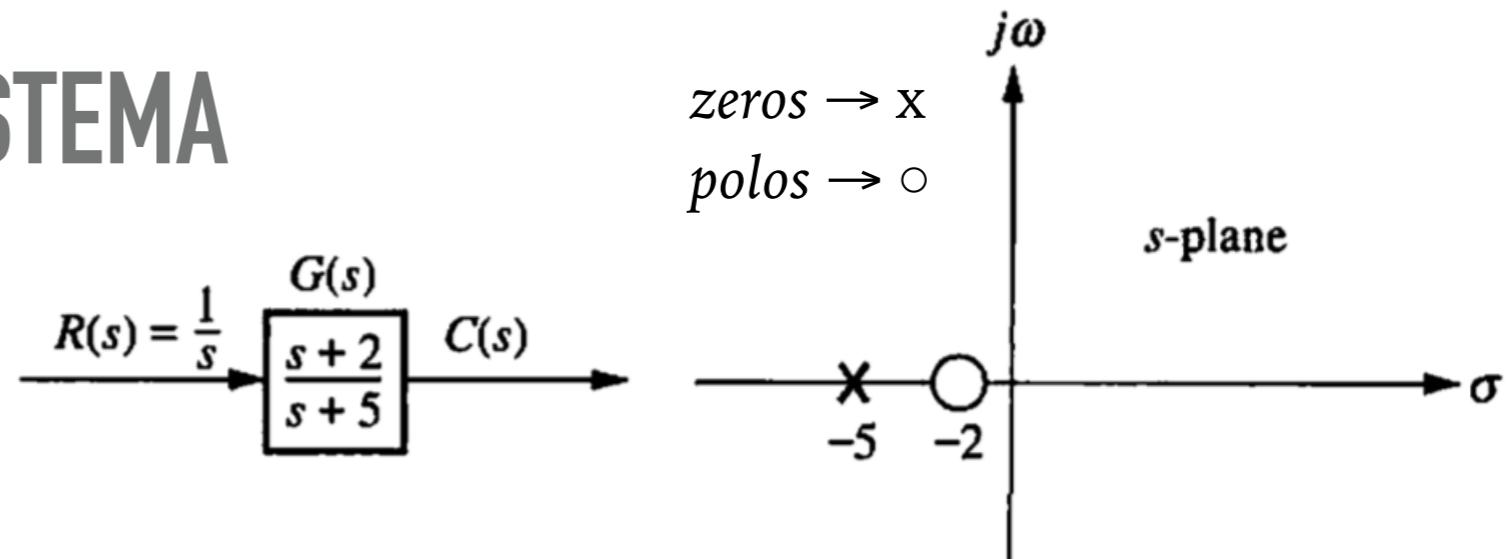
```
>> G=tf([1 2],[1 5])
G =
s + 2
-----
s + 5
>> rlocus(G)
```

$$FTMF(s) = \frac{K G(s)}{1 + K G(s)} = \frac{R(s)}{C(s)}$$

$$FTMF(s) = \frac{K(s+2)}{(K+1)s + (2K+5)}$$

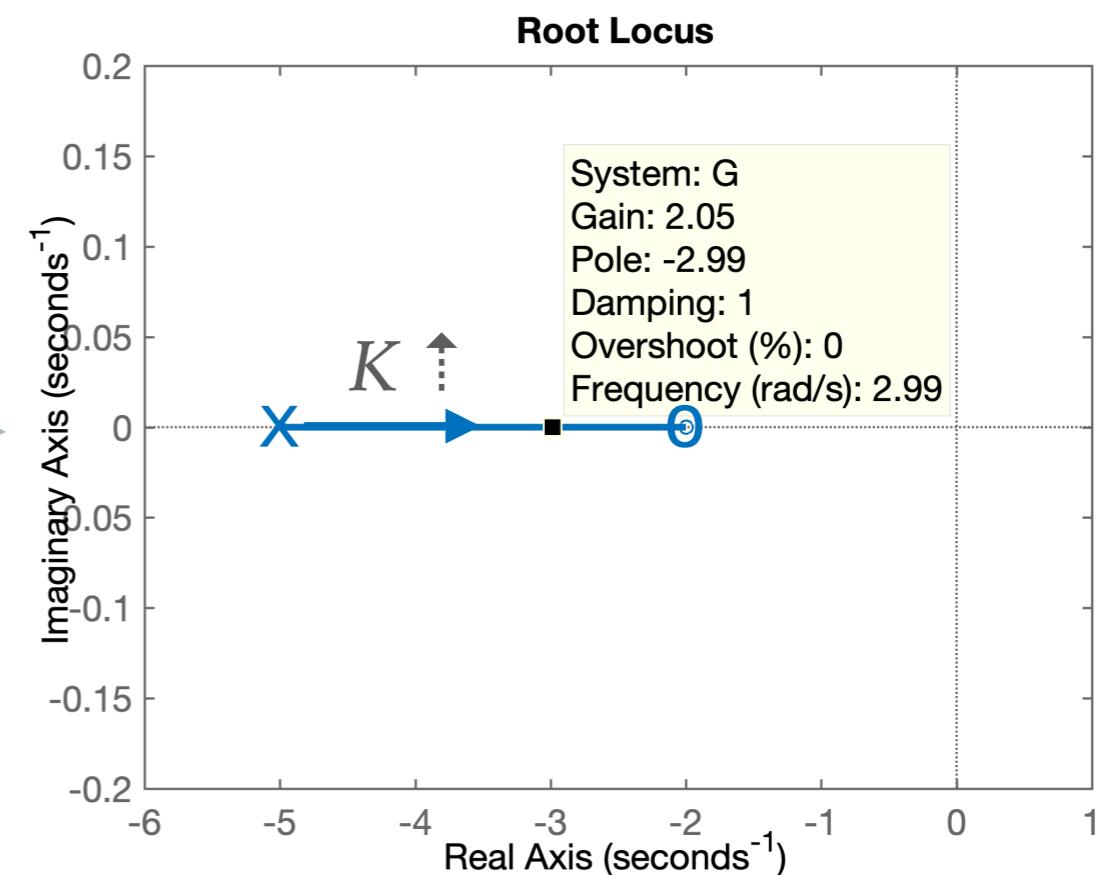
Calculando pólos de MF, variando K :

K	$EC(s)=0$	Polo em $(s=)$
0.0	$1 s + 5 = 0$	-5.00
0.1	$1.1 s + 5.2 = 0$	-4.73
0.5	$1.5 s + 6 = 0$	-4.00
1.0	$2 s + 7 = 0$	-3.50
1.5	$2.5 s + 8 = 0$	-3.20
2.0	$3 s + 9 = 0$	-3.00
4.0	$5 s + 13 = 0$	-2.60
10.0	$11 s + 25 = 0$	-2.27
50.0	$51 s + 105 = 0$	-2.06
100.0	$101 s + 205 = 0$	-2.03



(a) Sistema em MA.

(b) Pólos e zeros de MA no plano-s



Note: o polo de MA "caminha" na direção do zero (mais próximo)

EX_2: SISTEMA DE 2^a-ORDEM (SOMENTE 2 POLOS)

- Seja o seguinte sistema:

Pólos de MA em $s=0$ e $s=-10$.

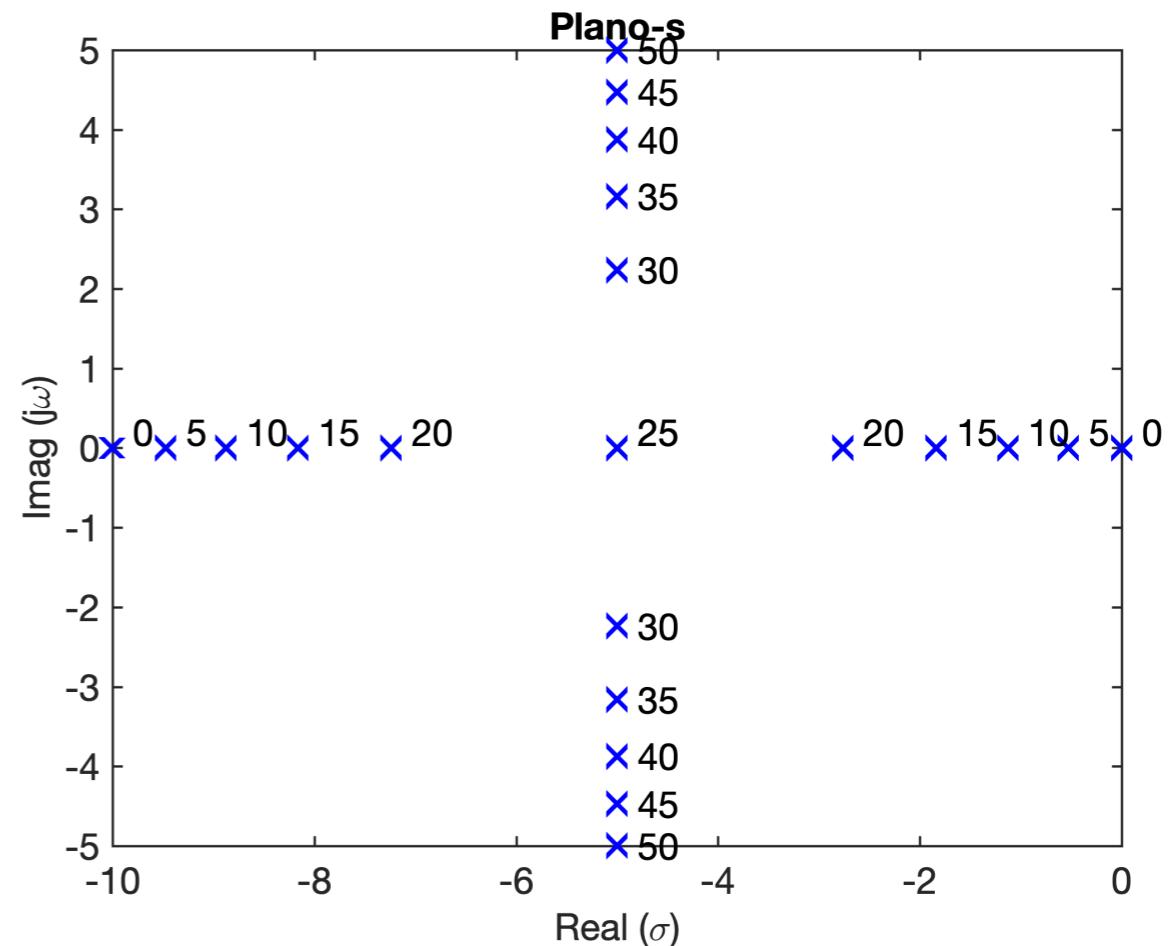
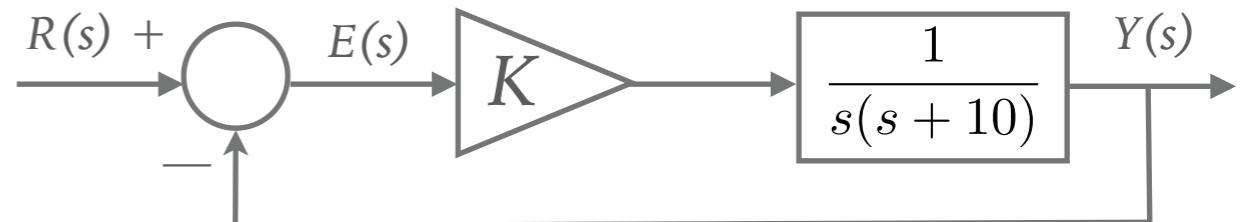
$$FTMF(s) = \frac{K G(s)}{1 + K G(s)} = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

$$FTMF(s) = \frac{\frac{K}{s(s+10)}}{1 + \frac{K}{s(s+10)}} = \frac{K}{s(s+10) + K}$$

$$FTMF(s) = \frac{K}{s^2 + 10s + K}$$

Variando K obteremos os pólos de MF em:

K	Polo 1	Polo 2
0	0	-10
5	-9.47214	-0.527864
10	-8.87298	-1.12702
15	-8.16228	-1.83772
20	-7.23607	-2.76393
25	-5	-5
30	$-5 + j2.23607$	$-5 - j2.23607$
35	$-5 + j3.16228$	$-5 - j3.16228$
40	$-5 + j3.87298$	$-5 - j3.87298$
45	$-5 + j4.47214$	$-5 - j4.47214$
50	$-5 + j5$	$-5 - j5$



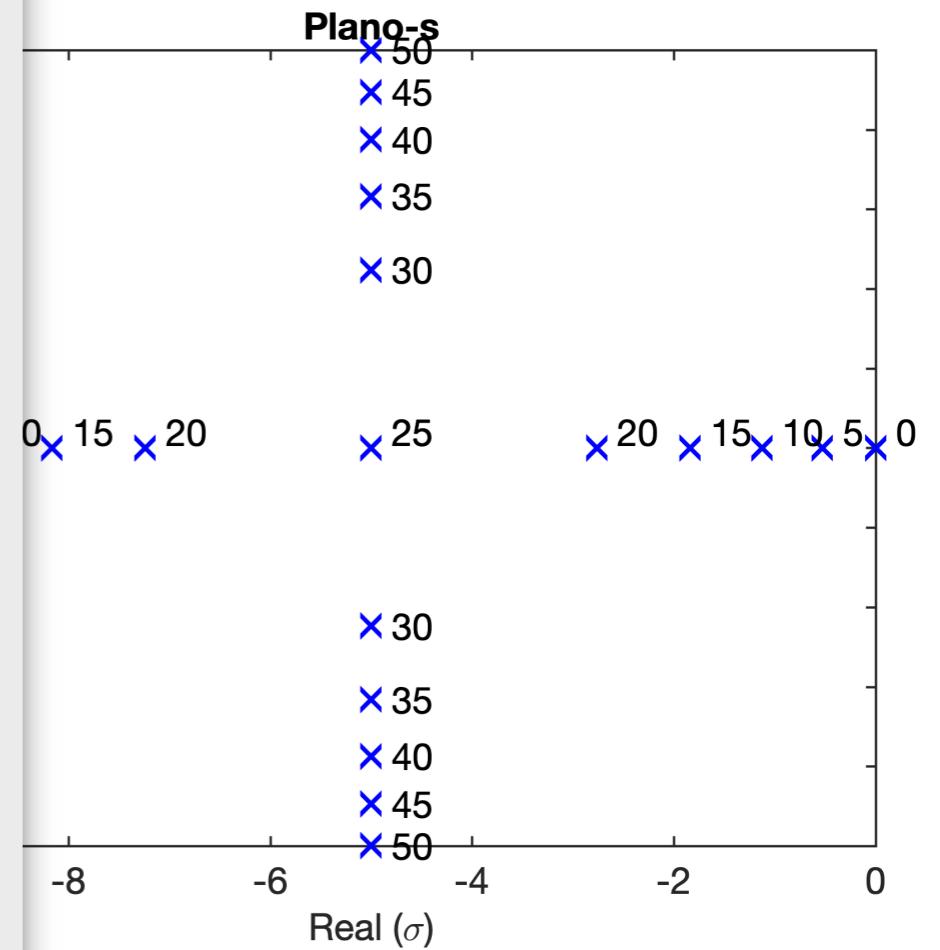
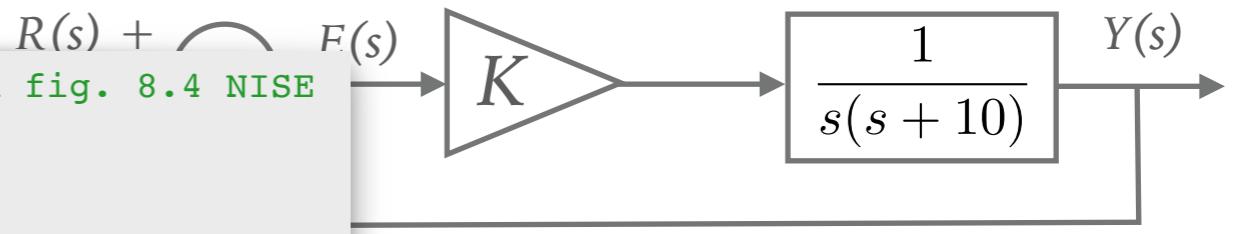
EX_2: SISTEMA DE 2^a-ORDEM (SOMENTE 2 POLOS)

→ Sóis o seguinte sistema:

% Determinando faixa de p?los em MF, variando ganho para fig. 8.4 NISE
% Fernando Passold, em 01.04.2019

```
K=0:5:50;
u=length(K);
fprintf(' K & \text{Polo 1} & \text{Polo 2} \\\n');
figure;
for i=1:u
    fprintf('%2g & ', K(i));
    EC = [1 10 K(i)]; % monta EC(s) (e mostra polin?mio)
    polo = roots(EC);
    fprintf('%g ', real(polo(1)));
    aux=num2str(K(i));
    if ~isreal(polo(1))
        plot(real(polo),imag(polo),'bx','LineWidth',2,'MarkerSize',12)
        text(real(polo)+.2,imag(polo),aux);
        aux=abs(imag(polo(j)));
        fprintf('+ j%g ', aux);
    else
        plot(real(polo),[0 0],'bx','LineWidth',2,'MarkerSize',12)
        text(real(polo)+.2,[0.2 0.2],aux);
    end
    fprintf(' & %g ', real(polo(2)));
    if ~isreal(polo(1))
        fprintf('- j%g ', aux);
    end
    if i==1
        hold on
    end
    fprintf(' \\\n');
end
title('Plano-s');
xlabel('Real (\sigma)');
ylabel('Imag (j\omega)');

```



EX_3: VOLTANDO AO EXEMPLO DO INÍCIO DA AULA

- Seja o sistema:

```
>> G=tf([1 5],poly([0 -6 -7 -8]));  
>> zpk(G)
```

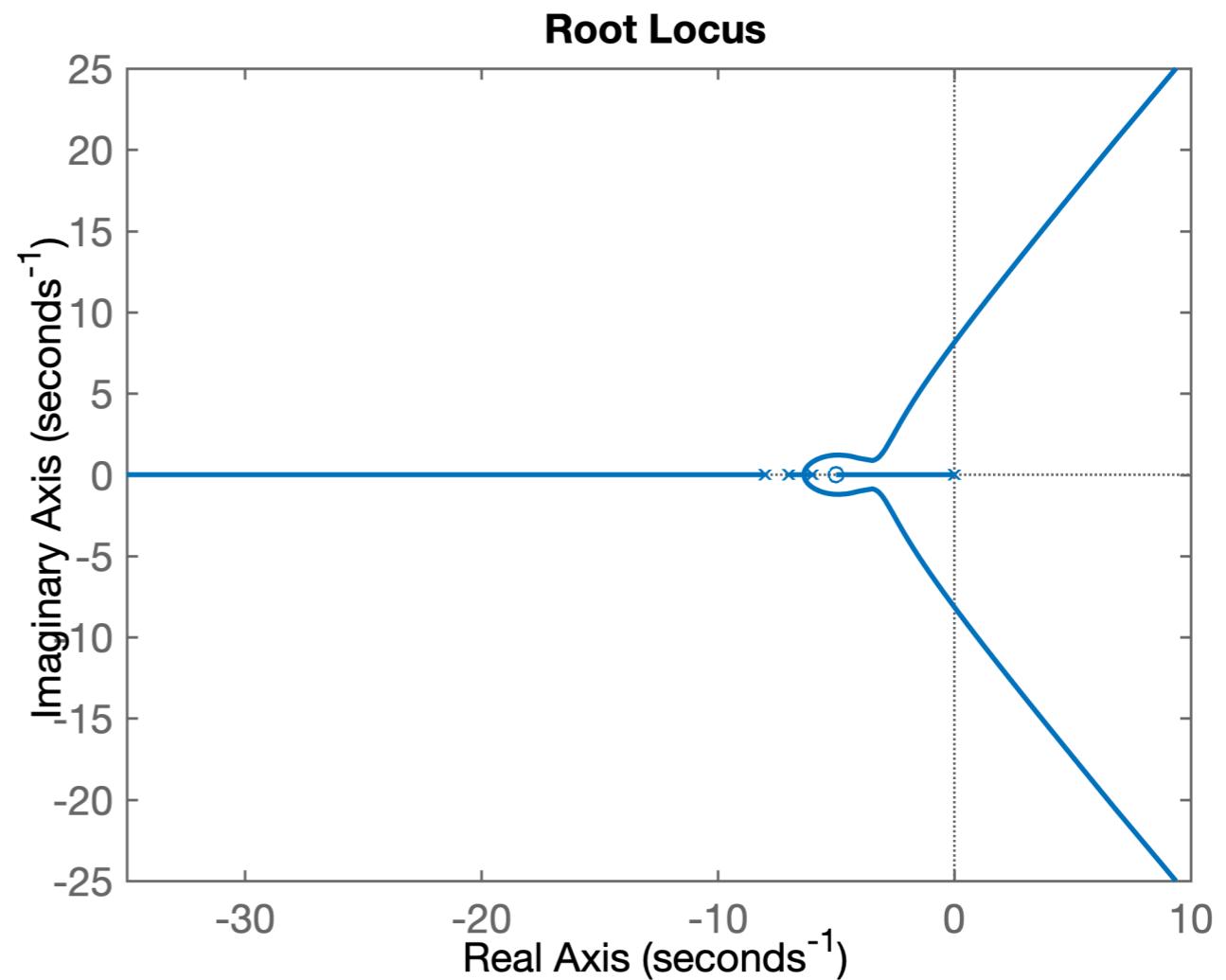
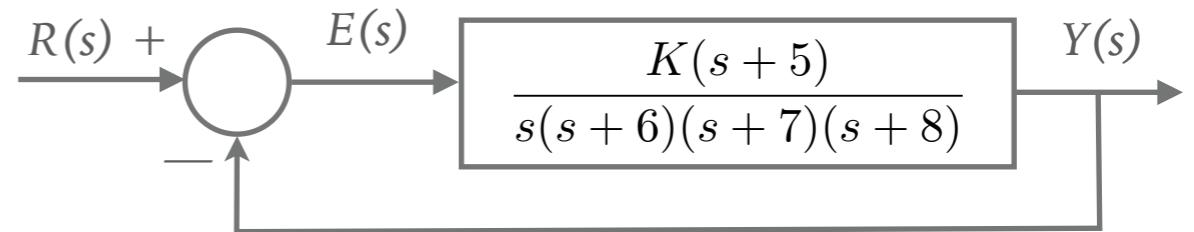
ans =

$$\frac{(s+5)}{s(s+8)(s+7)(s+6)}$$

Continuous-time zero/pole/gain model.

```
>> rlocus(G)
```

Ganho máximo, $K_u=1056,9$



EX_3: VOLTANDO AO EXEMPLO DO INÍCIO DA AULA

- Seja o sistema:

```
>> G=tf([1 5],poly([0 -6 -7 -8]));
>> zpk(G)
```

$$\frac{(s+5)}{s^4 + 21s^3 + 146s^2 + 336s}$$

```
>> rlocus(G)
>> G
G =

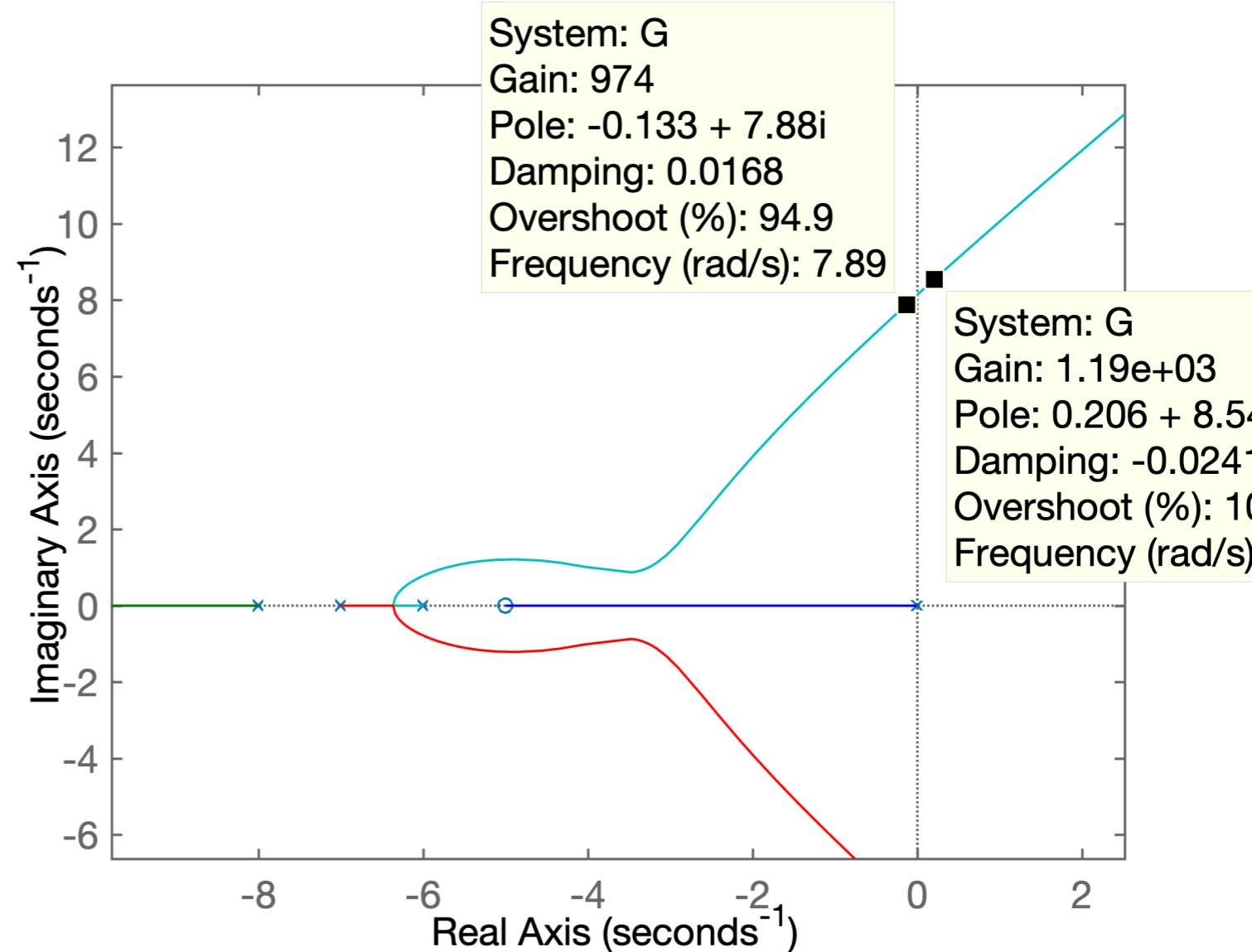
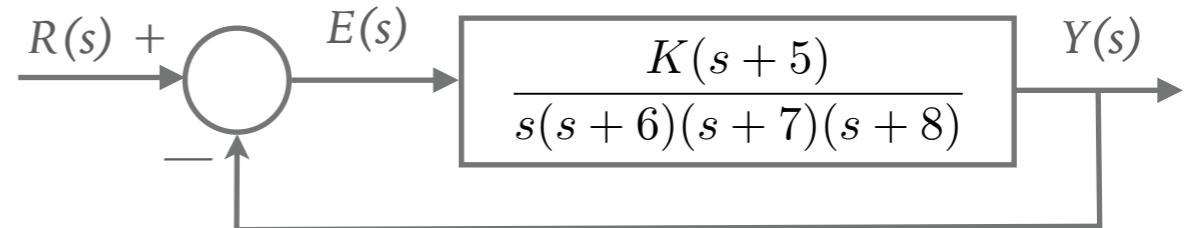
```

Ganho máximo, $K_u = 1056,9$

$$FTMF(s) = \frac{K(s+5)}{s^4 + 21s^3 + 146s^2 + 336s + K(s+5)}$$

$$EC(z) = s^4 + 21s^3 + 146s^2 + (K + 336)s + 5K = 0$$

$$\begin{array}{rcccl} s^4 & 1 & 146 & 5K \\ s^3 & 21 & (K + 336) & 0 \\ \hline s^2 & b_1 & b_2 \\ s^1 & c_1 \\ s^0 & d_1 \end{array}$$



EX_3: VOLTANDO AO EXEMPLO DO INÍCIO DA AULA

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$b_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3}$	$b_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3}$	$\frac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$c_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}$	$\frac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\frac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$d_1 = \frac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1}$	$\frac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$\frac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

>>

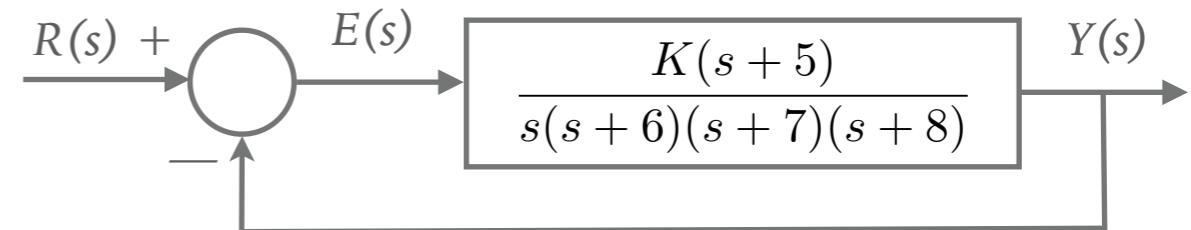
Ganho máximo, $K_u = 1056,9$

$$FTMF(s) = \frac{K(s+5)}{s^4 + 21s^3 + 146s^2 + 336s + K(s+5)}$$

$$EC(z) = s^4 + 21s^3 + 146s^2 + (K+336)s + 5K = 0$$

Condições preliminares $\Rightarrow K > -336$ e $K > 0 \therefore K > 0$

$$\begin{array}{rcccc} s^4 & 1 & 146 & 5K \\ s^3 & 21 & (K+336) & 0 \\ \hline s^2 & b_1 & b_2 \\ s^1 & c_1 \\ s^0 & d_1 \end{array}$$



System: G

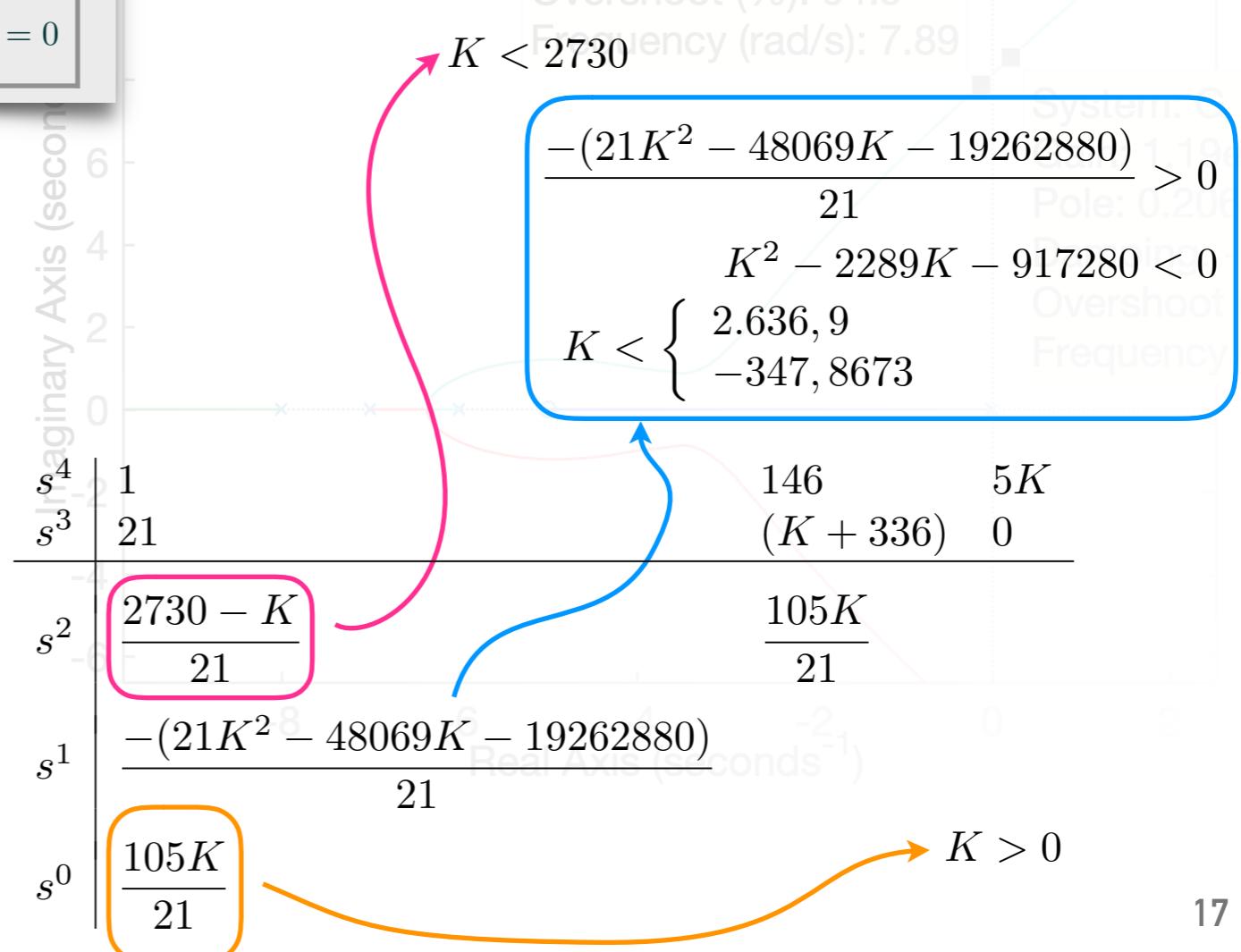
Gain: 974

Pole: -0.133 + 7.88i

Damping: 0.0168

Overshoot (%): 94.9

Frequency (rad/s): 7.89





PROPRIEDADES (REGRAS) DO ROOT LOCUS (RL)

$$FTMF(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)H(s)}$$

$$EC(z) = 1 + K \cdot G(s)H(s) = 0$$

$$K \cdot G(s)H(s) = -1 \quad = 1 \angle[(2k+1) \cdot 180^\circ], \quad \text{onde: } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$|K \cdot G(s)H(s)| = 1$$

$$\angle K \cdot G(s)H(s) = (2k+1) \cdot 180^\circ$$

Para um ponto no plano-s pertencer ao traço do RL:

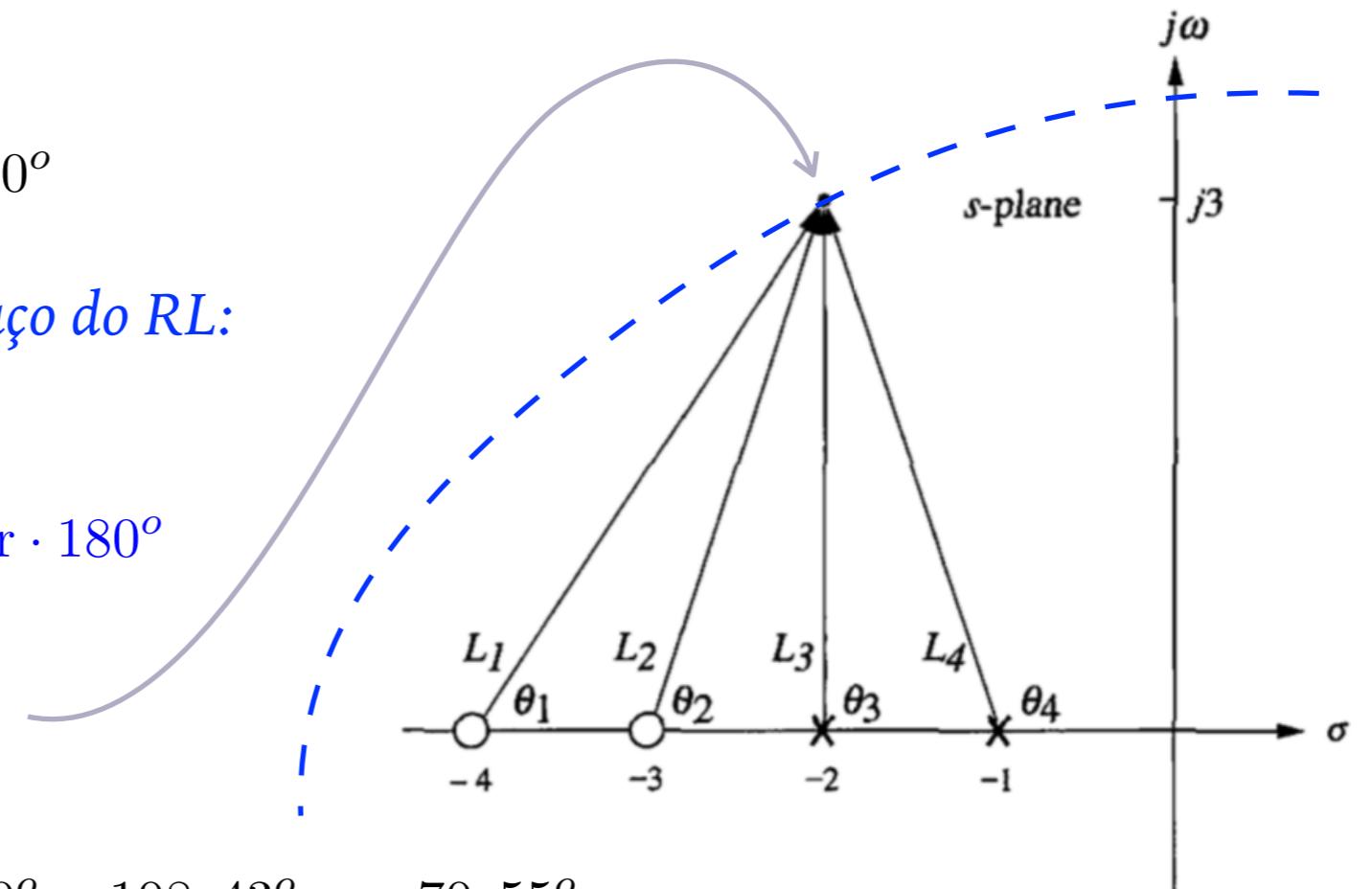
Somatório dos ângulos = 180° :

$$\sum \angle(\text{Zeros}) - \sum \angle(\text{Polos}) = \text{No. Ímpar} \cdot 180^\circ$$

Exemplo: ponto $s = -2 + j3$ pertence ao RL
(para certo valor de K) ?

$$\theta_1 + \theta_2 - (\theta_3 + \theta_4) = 56,31^\circ + 71,57^\circ - 90^\circ - 108,43^\circ = -70,55^\circ$$

\Rightarrow Conclusão: Não pertence ao RL (não pode ser um pólo de MF).



PROPRIEDADES (REGRAS) DO ROOT LOCUS (RL)

$$FTMF(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)H(s)}$$

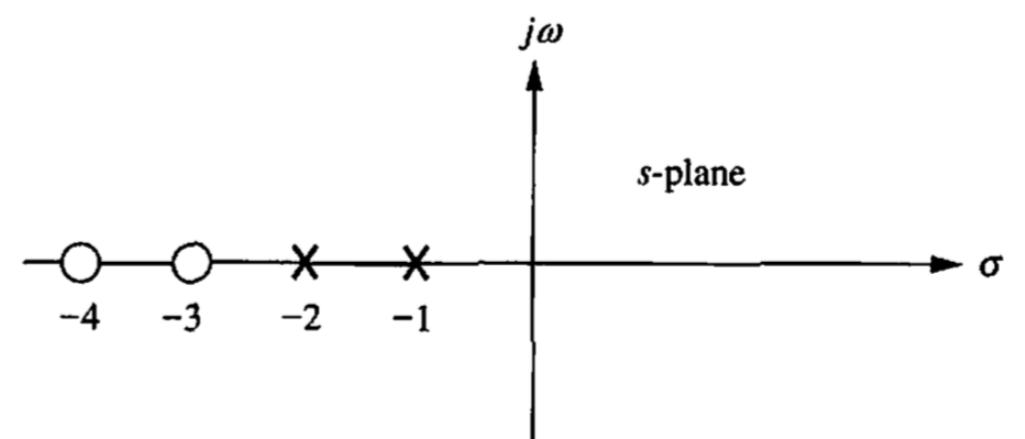
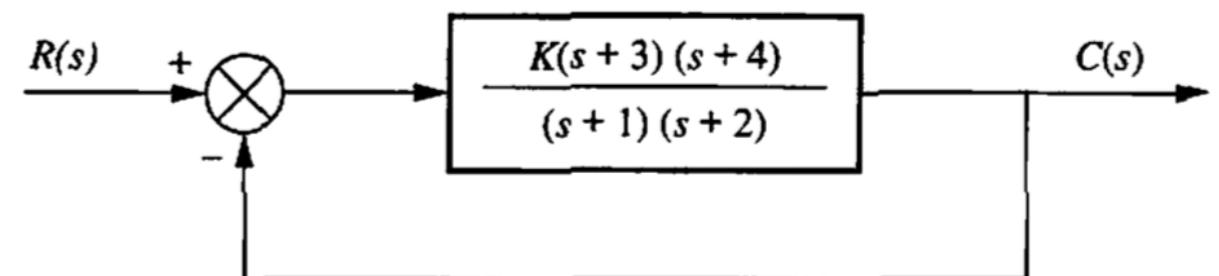
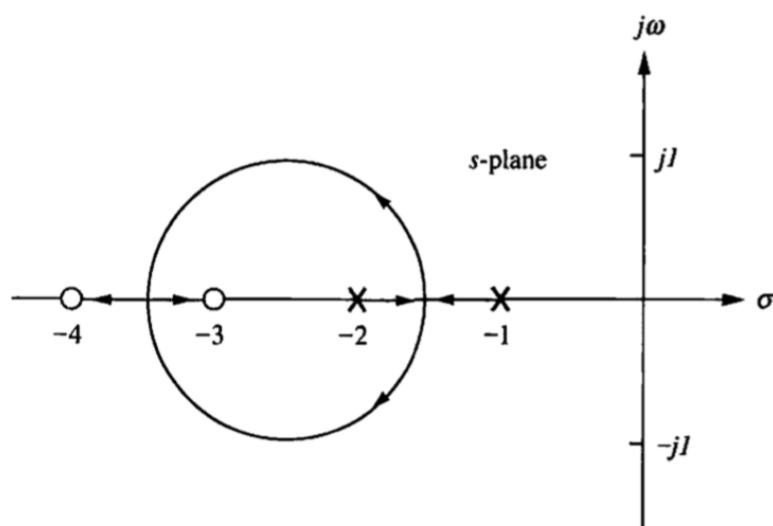
$$EC(z) = 1 + K \cdot G(s)H(s) = 0$$

$$K \cdot G(s)H(s) = -1 \quad = 1 \angle[(2k+1) \cdot 180^\circ], \quad \text{onde: } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$|K \cdot G(s)H(s)| = 1$$

$$\angle KG(s)H(s) = (2k+1) \cdot 180^\circ$$

No eixo real, para $K > 0$, o RL existe à esquerda de um número ímpar de pólos de MA finitos (no eixo real) e/ou à esquerda de um número de zeros de MA finitos.



De acordo com a regra, os segmentos do eixo real do RL estão entre -1 e -2 e entre -3 e -4.

PROPRIEDADES (REGRAS) DO ROOT LOCUS (RL)

$$FTMF(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)H(s)}$$

$$EC(z) = 1 + K \cdot G(s)H(s) = 0$$

$$K \cdot G(s)H(s) = -1 \quad = 1 \angle[(2k + 1) \cdot 180^\circ], \quad \text{onde: } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$|K \cdot G(s)H(s)| = 1$$

$$\angle KG(s)H(s) = (2k + 1) \cdot 180^\circ$$

Ponto de partida da assíntota:

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{Polos finitos} - \sum \text{zeros finitos}}{\text{No. Polos finitos} - \text{No. Zeros finitos}}$$

Ângulo de partida das assíntotas:

$$\theta_a = \frac{(2k + 1) \cdot 180^\circ}{\text{No. Polos finitos} - \text{No. Zeros finitos}}, \quad \text{onde: } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

PROPRIEDADES (REGRAS) DO ROOT LOCUS (RL)

Ponto de partida da assíntota:

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{Polos finitos} - \sum \text{zeros finitos}}{\text{No. Polos finitos} - \text{No. Zeros finitos}}$$

Ângulo de partida das assíntotas:

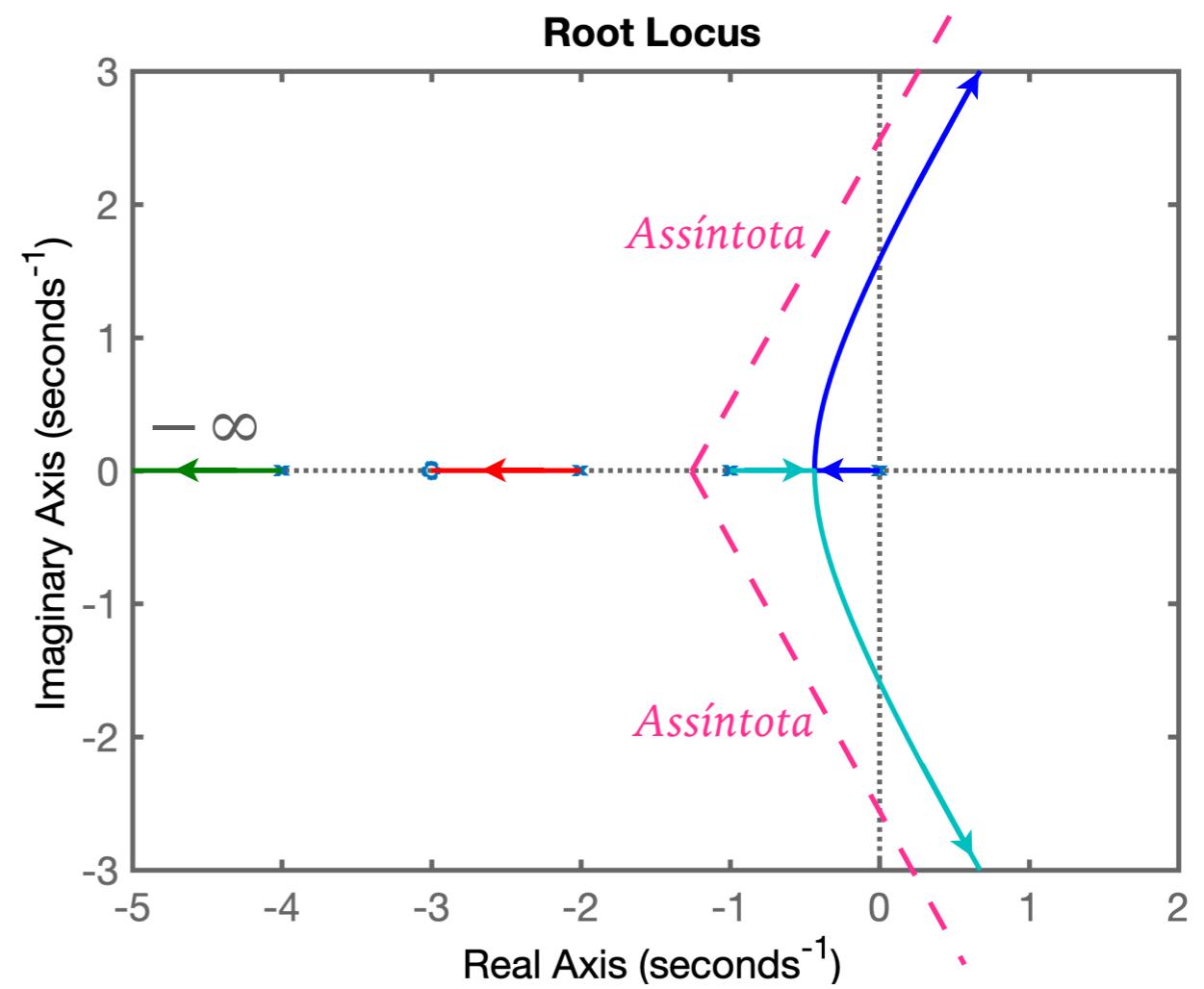
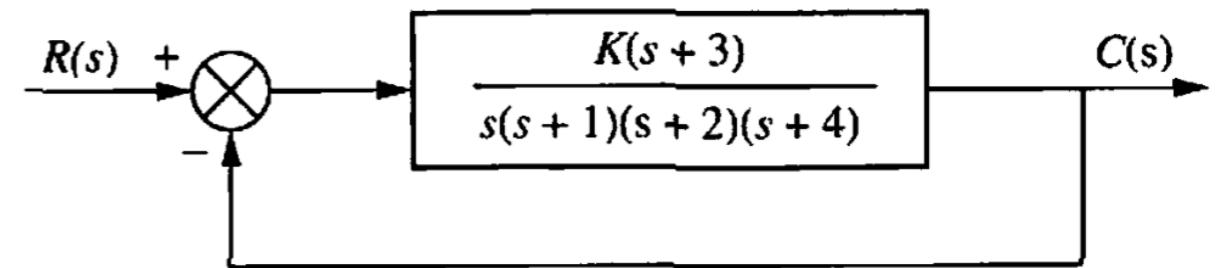
$$\theta_a = \frac{(2k + 1) \cdot 180^\circ}{\text{No. Polos finitos} - \text{No. Zeros finitos}}, \quad \text{onde: } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\sigma_a = \frac{(-1 - 2 - 4) - (-3)}{4 - 1} = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \theta_a &= \frac{(2k + 1) \cdot 180^\circ}{4 - 1} \\ &= \frac{1 \cdot 180^\circ}{3} = 60^\circ \quad , \text{ para } k = 0; \end{aligned}$$

$$= \frac{3 \cdot 180^\circ}{3} = 0^\circ \quad , \text{ para } k = 1;$$

$$= \frac{5 \cdot 180^\circ}{5} = 300^\circ = -60^\circ \quad , \text{ para } k = 2;$$



ALGUNS EXEMPLOS DE RL

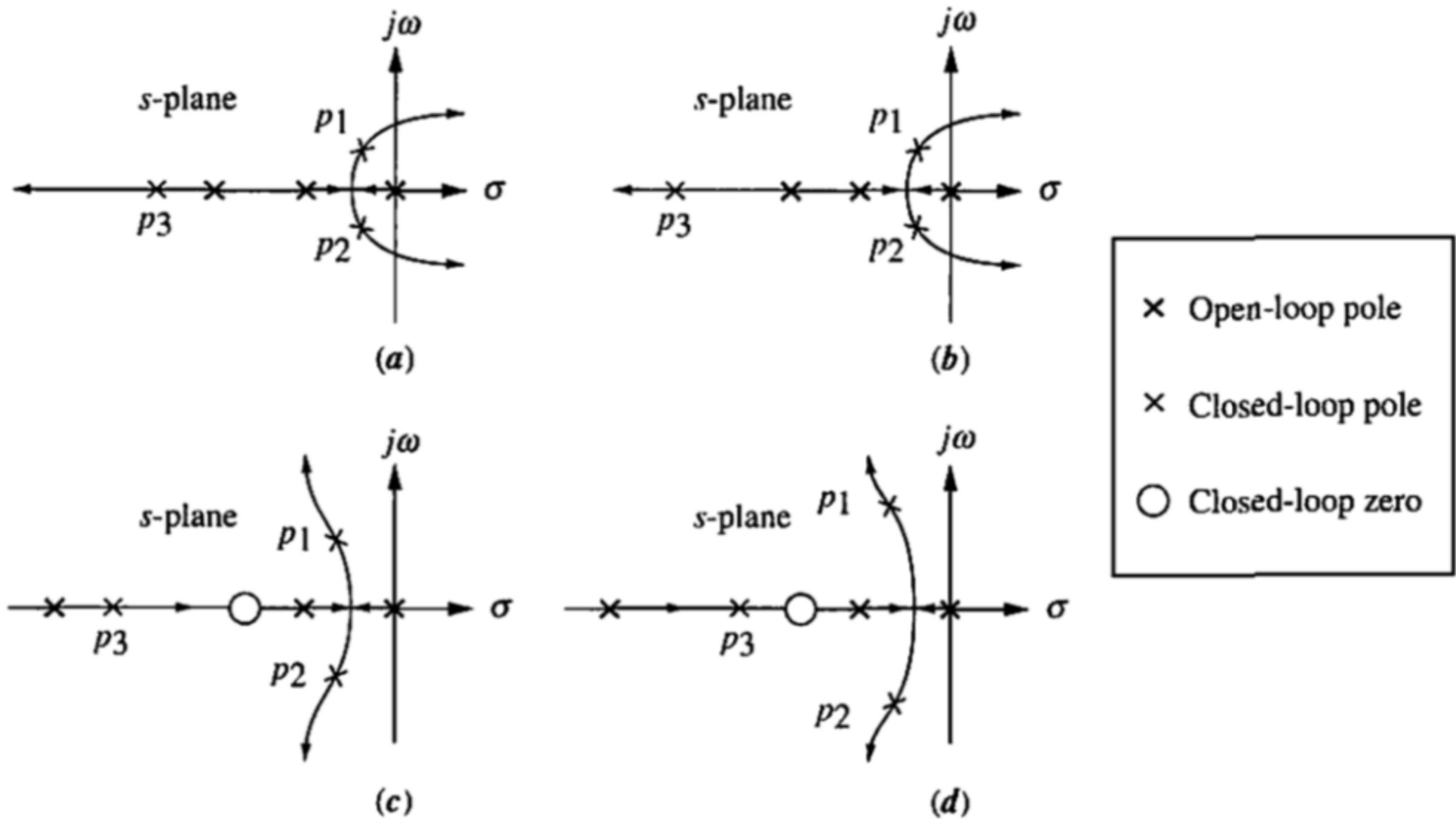


FIGURE 8.20 Making second-order approximations

REVISANDO...

- RL × respostas temporais de sistemas com múltiplos pólos simples reais;
- RL × respostas temporais de sistemas de 2^a-ordem (pólos complexos conjugados);
- Equações típicas prevendo respostas de sistemas de 2^a-ordem com pólos complexos (sub-amortecidos);
- Linhas guias no RL para valores constantes de:
 - σ (parte real)
 - ω (parte imaginária)
 - $\%OS$ (overshoot)
 - ζ (fator amortecimento)
 - t_s (tempo de assentamento)
 - t_p (tempo do pico).