群上同调理论简介

柴昊

2021.5

目录

摘要

本文是北京大学数学科学学院基础数学系的毕业论文。从内容上看，本文可以看作对 Serre 的局部域一书 [25] 的第 7 章到第 11 章的不完整的拙劣中文翻译，包含了对群的同调理论的自洽解释和部分类域论的内容。同调理论的数学证明主要参考了 Rotman 的 [20]，经典教材 [5] 以及 [3]；类域论方面的证明主要参考自 [14] 和 [2]；而其他方面的结论证明多是笔者查找杂家文献而从中找到的较为易懂或者凸显数学本质的证明。本文主要思想是首先阐述同调代数中导出函子的基本概念和其他与群的同调理论相关的结果 (第零部分)，然后利用此基础构造群的同调理论以及 Galois 上同调理论 (第一部分)，最后选择合适对象进行具体计算 (第二部分)。

如对本文的内容有任何疑问，欢迎邮件联系chaihao790@gmail.com。

Abstract

This paper is an underguaduate dissertation in school of mathematical science, Peking University. According to context, this chinese paper actually translates chapter 7 to 11 in [25] a little clumsy, attaching a self-contained illustration of general homology theory and some topics in class field theory. As for references, Proofs in homology theory mainly refer to Rotman's book [20], classic textbook [5] and [3]; topics in class field theory refer to [14] and [2]; other methods,calculations and proofs all come from miscellaneous websites,books and materials,etc. They are chose for sake of showing essence and basepoint of math theory or simplifying the ways from which theorems are derived. Here is the plotline of this passage: first introduce some important prerequest knowledge such as derived functor and advanced algebra (Part zero), then use these elements to bulid Galois cohomology,group homology theory and some applications (Part one), finally do some classic calculations by using all tools above (Part two).

If having any questions about this paper, welcome to communicate with chaihao790@gmail.com.

特殊符号注记

$\gcd(A,B),(A,B)$	自然数 A 和 B 的最小公因子
$a\|b$	交换环中的整除符号，即 a 生成的理想包含 b 生成的理想
$p^n \mid b$	恰整除符号，也就是 $p^n\|b, p^n \nmid b$
$\mathrm{Tor}_{-}(A,B)$	张量函子的左导出函子 (挠群)
$\mathrm{Ext}^{-}(A,B)$	同态函子的右导出函子
$\mathrm{H}^{-},\mathrm{H}_{-}$	上同调函子和同调函子
$\hookrightarrow,\hookleftarrow$	单射 (单态射、单同态)
$\twoheadrightarrow,\twoheadleftarrow$	满射 (满态射，满同态)
$\ker,\mathrm{coker},\mathrm{im}$	映射或范畴中的核，余核，象构造
Id	恒同映射
$\bar{k}$	数域 k 的代数闭包 $\bar{k}$
$k_{\mathbf{sp}}$	数域 k 的可分闭包
$k_{\mathbf{nor}}$	数域 k 的正规闭包
$\mathbf{M}_n(k)$	k 中元素组成的 n 维方阵的矩阵代数
$\mathrm{Sp}(2n,K)$	辛群，在 K-线性空间 K^{2n} 上保持标准辛形式的线性同构群
$\mathrm{SL}(n,K)$	数域 K 上的特殊线性群，K^n 上行列式为一的线性变换群
$\mathrm{GL}(n,K)$	数域 K 上的一般线性群，K^n 上线性同构群
$\mathrm{O}(n,K)$	数域 K 上的正交群，K^n 上的正交变换群
$\mathrm{SO}(n,K)$	数域 K 上的特殊正交群，也就是 $\mathrm{O}(n,K)\cap\mathrm{SL}(n,K)$
$\mathrm{PGL}(n,K)$	数域 K 上的射影线性群，也就是 $\mathrm{GL}(n,K)$ 商取中心 K
$\mathrm{PSL}(n,K)$	数域 K 上的射影一般线性群，也就是 $\mathrm{SL}(n,K)$ 商取中心 K
$\mathbf{F}_{p^n},\mathbf{F}_q$	有限域，下标表示有限域的元素个数
$\mathrm{End}_R(A),\mathrm{Aut}_R(A)$	代数 A 的 R-自同态环和 R-自同构环

群上同调理论简介 0

第零部分 预备知识

本部分为后续章节的预备知识，囿于篇幅限制不再叙述更基础的数学概念和定理，诸如线性代数-行列式定义和性质、线性空间和线性变换、特征值和特征向量、矩阵的秩和克拉默法则、矩阵群的基本性质等；实分析的结果-微积分基本定理、Lebesgue 可积性定理等；拓扑学基本概念-分离公理和可数公理、紧性和连通性、度量化定理、商拓扑和商映射、拓扑群的基本概念、基本群的概念和性质等；有限群的基本理论-子群和 Lagrange 定理、正规子群和商群、群作用的计数原理、合成群列和幂零群可解群等；环和模代数的知识-投射模和单射模、商模和子模的性质、(半) 单环和 (半) 单模、正合列、张量积和同态函子的性质等；交换代数中的主要结果-Noether 环和模的性质、Nakayama 引理、Hilbert 基定理和推论、分式环等；数域的基本理论-有限域结构、域扩张的类型和性质、代数闭包存在性等；经典范畴理论的知识-经典范畴和函子的概念和性质、米田嵌入、范畴等价和自然变换、始对象和终对象、基本范畴构造如乘积、余积、等化子、余等化子，推出，拉回，极限等。针对上述内容 Bourbaki 的数学原理系列可供参考，中文内容可以参考高等教育出版社的现代数学基础丛书。如需各部分的精细参考，则代数相关内容中文力推 [28]，英文材料可以参考 Lang 的经典教材 [13]，更具体和易读的内容可参看 Rotman 的 [20]；范畴理论可参考 [12, 15]，拓扑学移步 [1, 16, 11, 4]。

基本代数事实 | 0.1

首先陈述一些代数学的基本命题，这对后文证明的基础和理论的进行十分必要。

正规基引理 从 Galois 扩张出发，这里介绍一些后文用到的较为深刻的数域理论的定理。

定义 0.1 (Galois 扩张). *称数域 K 是 k 的* **Galois 扩张**，*当且仅当 $K|k$ 是有限正规可分扩张。在后文的某些情景会稍微解除对有限性的限制。*

如下的引理最早源自 Dedekind，本意是说 Galois 群的元素作为域同态是线性无关的，透过原始证明也不难推广成广义的 Artin-Dedekind 引理。

定理 0.1 (Artin-Dedekind). *设 E 是数域，$E^{\times}$ 是其乘法群，设 G 是群，则任何群同态的有限子集 $\{\sigma_1, .., \sigma_n\} \subset \mathrm{Hom}(G, E^{\times})$ 在 E 上线性无关。*

证明. 不妨假设存在最小个数 n 个非零的 $a_1,..,a_n\in E$，满足

$$\sum_{1\le i\le n} a_i\sigma_i(g)=0\quad \forall g\in G \tag{0.1a}$$

当 $n=1$ 时命题显然成立，通过除以 a_n 不妨设 $a_n=1$ 进行归纳，由于 $\sigma_n\ne\sigma_1$，存在 $g'\in G$ 使得 $\sigma_1(g')\ne\sigma_n(g')$，在上式中带入 $g'g$ 有

$$\sum_{1\le i\le n} a_i\sigma_i(g')\sigma_i(g)=0\quad \forall g\in G \tag{0.1b}$$

(0.1a) 除以 $\sigma_n(g')$ 与(0.1b) 作差得到

$$a_1(1-\sigma_1(g')\sigma_n^{-1}(g'))\sigma_1(g)+\cdots+a_{n-1}(1-\sigma_{n-1}(g')\sigma_n^{-1}(g'))\sigma_{n-1}(g)=0\quad \forall g\in G$$

注意到 $a_1(1-\sigma_1(g')\sigma_n^{-1}(g'))$ 这个系数不全为零的线性关系至多有 $n-1$ 项，这和 n 是最小的矛盾，于是定理得证。 □

考虑可分扩张的性质，有如下著名的本原元定理。

定理 0.2 (单扩张引理 (本原元定理)). 对于任何的有限可分域扩张 $E|F$，都存在 E 中的某一个元素 α 满足 $E=F(\alpha)$，这样的元素称为本原元。

证明. 首先我们考虑正特征的情况，这时候 E,F 都是有限域，而且 $E^\times$ 是有限循环群，取其生成元作为本原元即可 (事实上所有有限域都同构于 $\mathbb{F}_p(x)$, $x^{p^n}-x=0$)。

其次考虑零特征的情况，这里采取 Kronecker 的证明方法。既然是有限扩张，不妨假设 $E=F(\alpha_1,..,\alpha_n)$ 取有理函数域

$$E(X_1,..,X_n)=F(X_1,..,X_n)(\alpha_1,..,\alpha_n)$$

此时 $E(X_1,..,X_n)$ 便是 $F(X_1,..,X_n)$ 的有限可分扩张，考虑其中的一个元素 $\alpha=\alpha(X_1,..,X_n):=X_1\alpha_1+\cdots+X_n\alpha_n$ 在 $F(X_1,..,X_n)$ 中的极小多项式记作 $F(X)$，那么由于零特征假设 $\partial_X F(X)\ne 0$ 从而存在多项式 $G(X_1,..,X_n)\in F[X_1,..,X_n]$ 满足 $GF\in F[X,X_1,..,X_n]$，那么取

$$H(X_1,..,X_n):=G(X_1,..,X_n)F(\alpha(X_1,..,X_n),X_1,..,X_n)\in E[X_1,..,X_n]$$

这时由于 H 作为 E 上的多元多项式恒为零，从而取形式导数得到

$$\partial_{X_k}H=(\partial_{X_k}G)(F\circ\alpha)+(\alpha_k\partial_X F\circ\alpha+\partial_{X_k}F\circ\alpha)G\quad k=1,..,n$$

零特征数域是无穷域 (比方可以把 $\mathbb{Q}$ 嵌入其中)，从而总可以找到 $c_1,..,c_n\in E$ 使得 $G(\partial_X F\circ\alpha)$ 在 $(c_1,..,c_n)$ 处非零，于是考虑如下的 α

$$\alpha=\sum_{1\le i\le n}c_i\alpha_i$$

得到

$$\begin{aligned}\alpha_k&=-\frac{F(\alpha,c_1,..,c_n)\partial_{X_k}G(c_1,..,c_n)+G(c_1,..,c_n)\partial_{X_k}F(\alpha,c_1,..,c_n)}{G(c_1,..,c_n)\partial_X F(\alpha,c_1,..,c_n)}\\&\in F(\alpha)\quad k=1,.,n\end{aligned}$$

从而有 $E=F(\alpha)$，至此我们已经对所有有限可分扩张完成了证明。 □

本原元定理对研究 Galois 扩张起到了十分重要的简化作用。为后文奠定数论上的代数基础，仍旧引经据典给出 Galois 基本理论的证明。

定理 0.3 (Galois 主定理)**.** *设 $E|F$ 是 Galois 扩张，则有如下性质：*

1) $E|F$ 的中间域和 Galois 群 $\mathrm{Gal}(E|F)$ 的子群有一一对应，记存在如下互逆的函子：

$$\begin{array}{llcll} E^{-}: & \textbf{Subgroups}(\mathrm{Gal}(E|F)) & \leftrightarrows & \textbf{IntermediateFields}(E|F) & :\mathrm{Gal}(E|-) \\ E^{-}: & H & \to & E^H := \{e \in E : \forall h \in H, he = e\} & \\ & \mathrm{Gal}(E|L) := \{\sigma \in \mathrm{Gal}(E|F) : \sigma|_L = \mathrm{Id}\} & \leftarrow & L & :\mathrm{Gal}(E|-) \end{array}$$

2) 对于中间域 L 有 $\dim_F L = \frac{|\mathrm{Gal}(E|F)|}{|\mathrm{Gal}(E|L)|}$，对于子群 H 有 $\dim_F E^H = \frac{|G|}{|H|}$。

3) 如果 H 是 $\mathrm{Gal}(E|F)$ 的正规子群，当且仅当 E^H 是 F 的正规扩张，从而是 Galois 扩张。

4) 存在格代数 $(\textbf{Subgroups}(\mathrm{Gal}(E|F)), \leq, \wedge, \vee)$ 和 $(\textbf{IntermediateFields}(E|F), \leq, \wedge, \vee)$ 它们关于 E^{-} 和 $\mathrm{Gal}(E|-)$ 的运算律如下。

$$\begin{aligned} &E^{H\vee K} = E^H \wedge E^K \\ &E^{H\wedge K} = E^H \vee E^K \quad \forall H, K \in \textbf{Subgroups}(\mathrm{Gal}(E|F)) \\ &\mathrm{Gal}(E|L\vee M) = \mathrm{Gal}(E|L) \wedge \mathrm{Gal}(E|M) \\ &\mathrm{Gal}(E|L\wedge M) = \mathrm{Gal}(E|L) \vee \mathrm{Gal}(E|M) \quad \forall L, M \in \textbf{IntermediateFields}(E|F) \end{aligned}$$

证明. 此证明溯源至 Rotman 的科普书籍 [19]。格代数是指一个带有偏序的集合 $(L, \leq)$，配备两种运算 $\wedge, \vee : L \times L \to L$ 满足如下条件

$$\begin{aligned} &a\wedge b \leq a, \quad a \wedge b \leq b \quad \forall a, b \in L \\ &c \leq a, c \leq b \Rightarrow c \leq a \wedge b \quad \forall a, b, c \in L \\ &a \vee b \geq a, \quad a \vee b \geq b \quad \forall a, b \in L \\ &c \geq a, c \geq b \Rightarrow c \geq a \vee b \quad \forall a, b, c \in L \\ &a \leq b, \quad b \leq a \Leftrightarrow a = b \quad \forall a, b \in L \end{aligned}$$

这时我们称 $(L, \leq, \wedge, \vee)$ 是一个格代数 (lattice algebra)。考虑子群构成的集合 $\textbf{Subgroups}(\mathrm{Gal}(E|F))$，定义其偏序是群结构的包含关系，取 $H, K \in \textbf{Subgroups}(\mathrm{Gal}(E|F))$，定义 $H \wedge K := H \cap K$，$H \vee K$ 定义为由 H, K 生成的群 $\langle H, K\rangle$，不难验证此时的 $(\textbf{Subgroups}(\mathrm{Gal}(E|F)), \leq, \wedge, \vee)$ 是格代数，对于中间域

IntermediateFields$(E|F)$ 也类似,定义偏序关系是中间域的包含关系,取 $L, M \in$ **IntermediateFields**$(E|F)$,定义 $L \vee M$ 是由 L, M 生成的域 LM,定义 $L \wedge M := L \cap M$,此时 (**IntermediateFields**$(E|F), \leq, \wedge, \vee)$ 是格代数。

为了刻画不动域的性质,还需要如下引理。

引理 0.3.1 (Galois). *考虑域 E 的自同构群 $\mathrm{Aut}(E)$,设 G 是 $\mathrm{Aut}(E)$ 的有限子群,$E^G := \{e \in E : \forall g \in G, ge = e\}$ 是被 G 固定的不动域,则有*

$$\dim_{E^G} E = |G|$$

证明. 由于等式两边都是自然数,假设 $r = \dim_{E^G} E < |G| = n$,取一族 E^G 基 $a_1, .., a_r \in E$,设 $G = \{\sigma_1, .., \sigma_n\}$ 考虑线性方程组

$$\sigma_1(a_1)x_1 + \cdots + \sigma_n(a_1)x_n = 0$$
$$\cdots$$
$$\sigma_1(a_r)x_1 + \cdots + \sigma_n(a_r)x_n = 0$$

由于 $r < n$ 方程组在 E 上有非平凡解 $(x_1, .., x_n)$,这时 $\sum_i x_i\sigma(i)(-)$ 是零映射,和特征线性无关 (定理 0.1-Artin-Dedekind,取 $G = E^\times$) 矛盾,于是 $r \geq n$。

再假设 $r = \dim_{E^G} E > |G| = n$,符号同上,考虑 $n+1$ 个 E^G 无关向量 $v_1, .., v_{n+1} \in E$,考虑线性方程组

$$\sigma_1(v_1)x_1 + \cdots + \sigma_1(v_{n+1})x_{n+1} = 0$$
$$\cdots$$
$$\sigma_n(v_1)x_1 + \cdots + \sigma_n(v_{n+1})x_{n+1} = 0$$

有非平凡解 $(x_1, .., x_{n+1})$,相差一些置换的情况下取一个含有最少非零分量的解 $(x_1, .., x_s, 0, .., 0)$,前 s 项非零,那么 $s \neq 1$,否则推出 $x_1 = 0$ 矛盾,必要时取逆不妨设 $x_s = 1$,那么至少存在 $x_i \notin E^G$,否则 $\sigma = \mathrm{Id}$ 推出 $v_1, .., v_s$ 是 E^G-相关的,于是不妨设 $x_1 \notin E^G$,从而存在 $\sigma_k(x_1) \neq x_1$,用 σ_k 作用得到如下的关系

$$\sigma_k\sigma_j(v_1)\sigma_k(x_1) + \cdots + \sigma_k\sigma_j(v_s) = 0, \quad j = 1, .., n$$
$$\sigma_i(v_1)x_1 + \cdots + \sigma_i(v_s) = 0 \quad i = 1, .., n$$

而乘以 σ_k 是 G 的自同构,对每一个 j 都有唯一的 i 使得 $\sigma_k\sigma_j = \sigma_i$,于是上面两式相减,得到

$$\sigma_i(v_1)(x_1 - \sigma_k(x_1)) + \cdots + \sigma_i(v_{s-1})(x_{s-1} - \sigma_k(x_{s-1})) \quad i = 1, .., n$$

注意到 $x_1 - \sigma_k(x_1) \neq 0$,从而 $(x_1 - \sigma_k(x_1), .., x_{s-1} - \sigma_k(x_{s-1}), 0.., 0)$ 是比 $(x_1, .., x_s, 0, .., 0)$ 非零分量个数更小的非平凡解,这和 s 的最小性矛盾,于是 $r \leq n$。

综上两点有 $r = n$,也就是 $\dim_{E^G} E = |G|$。 $\square$

首先考虑 (1)。至少从定义出发能够得到 $E^{-}, \mathrm{Gal}(E|-)$ 在格代数层面上都是反序的映射，也就是 $H \le K$ 推出 $E^H \ge E^K$；$L \le M$ 推出 $\mathrm{Gal}(E|L) \ge \mathrm{Gal}(E|M)$。不妨先说明 E^{-} 是单射，假如 $E^H = E^{H'}$，如果 $h \in H$，那么 $h|_{E^H} = h|_{E^{H'}} = \mathrm{Id}$，则 $E^{H'} = E^{H' \cup \{h\}}$，由上面的引理 $|H'| = |H' \cup \{h\}|$，从而 $h \in H'$，那么 $H \subset H' \subset H$ 推出 $H = H'$，E^{-} 是单射。用单扩张定理不难得到复合 $E^{-} \circ \mathrm{Gal}(E|-) = \mathrm{Id}$，这说明 E^{-} 是满射，于是 E^{-} 是双射，由于

$$\mathrm{Gal}(E|-) \circ E^{-} = \mathrm{Id}_{\textbf{Subgroups}(\mathrm{Gal}(E|F))}$$

有限情况下这是有限集之间的映射，等式左作用 E^{-} 右作用 E^{-} 的逆就得到

$$E^{-} \circ \mathrm{Gal}(E|-) = \mathrm{Id}_{\textbf{IntermediateFields}(E|F)}$$

考虑 (2)，利用 (1) 和不动域的引理，计算

$$\begin{aligned} \dim_F L &= \frac{\dim_F E}{\dim_L E} = \frac{\dim_{E^{\mathrm{Gal}(E|F)}} E}{\dim_{E^{\mathrm{Gal}(E|L)}} E} = \frac{|\,\mathrm{Gal}(E|F)|}{|\,\mathrm{Gal}(E|L)|} \\ \dim_F E^H &= \frac{\dim_F E}{\dim_{E^H} E} = \frac{|G|}{|H|} \end{aligned}$$

考虑 (3)，一方面如果 E^H 是 F 的正规扩张，考虑 $gHg^{-1}, g \in G$ 在 E^H 上的作用是恒同映射，从而 $gHg^{-1} \subset H$，H 是正规子群，另一方面如果 H 是正规子群，设 $e \in E^H$ 在 F 上极小多项式是 f，根据 $E|F$ 的正规性 f 的另外的根是某一个 $g(e), g \in G$，那么 $g(e) \in E^{gHg^{-1}} = E^H$，从而 E^H 正规。

考虑 (4)，这只需要利用 $E^{-}, \mathrm{Gal}(E|-)$ 都是格代数之间的反序双射，而且它们互逆，一个一般但是不困难的结果就是格代数 $L \to L'$ 之间的反序双射 ϕ 都满足如下条件

$$\phi(a \vee b) = \phi(a) \wedge \phi(b), \phi(a \wedge b) = \phi(a) \vee \phi(b) \quad a, b \in L$$

利用 $\vee, \wedge$ 的性质和 ϕ 的反序性质不难得到 $\phi(a \vee b) \le \phi(a) \wedge \phi(b), \phi(a \wedge b) \ge \phi(a) \vee \phi(b)$，由于 ϕ 是满射，存在 $c \in L$ 满足 $\phi(c) = \phi(a) \wedge \phi(b)$，取 ϕ^{-1} 也是反序双射作用于前，得到 $a \le c \le a \vee b, b \le c \le a \vee b$ 那么 $a \vee b \le c \le a \vee b$ 从而 $c = a \vee b$，于是得到 $\phi(a \vee b) = \phi(a) \wedge \phi(b)$，另一个对偶的等式无非是靠和 $\le$ 相反的偏序 $\le'$ 得到。将 ϕ 分别取成 $E^{-}, \mathrm{Gal}(E|-)$，就是 (4) 的结论。 □

下面介绍正规基引理。

定理 0.4 (正规基引理)**.** *设 $E|F$ 是 Galois 扩张，$G = \mathrm{Gal}(E|F)$，则存在 E 中的元素 $s \in E$，对任何的 $e \in E$ 都可以写成 F-线性组合*

$$e = \sum_{\sigma \in G} f_\sigma \sigma(s) \quad f_\sigma \in F$$

也就是说 $E = G \otimes_F s$。

证明. 首先考虑正特征，此时 E, F 是有限域，不妨设素数 p 使得 $F \simeq \mathbb{F}_{p^m}, E \simeq \mathbb{F}_{p^{mn}}$，此时 $\dim_F E = n$，正规基就是取 $E^{\times}$ 的某个生成元 x，所有的 Frobenius 同构组成的基 $\{\mathrm{Fr}_{p^m}^k(x), k = 0, .., n-1\}$。

其次考虑零特征情况，利用 Galois 主定理可知，Galois 群的元素个数和域扩张维数 $\dim_F E$ 相等 (记为 n)。从而只需要证明存在元素 $s \in E$ 使得 $\{\sigma(s)\}_{\sigma \in G}$ 是 F-线性无关的即可，这里采用古典的 Artin 的

证明方法。根据定理 0.2-本原元定理，就假设 $E=F(\alpha), \alpha\in E$，考虑 α 的极小多项式 f，以及 G 中元素 $\sigma_i(\alpha)=\alpha_i, i=1,..,n, \alpha=\alpha_1$，于是取

$$g(x)=\frac{f(x)}{(x-\alpha)f'(\alpha)}, \quad g_i(x)=\sigma_i(g(x))=\frac{f(x)}{(x-\alpha_i)f'(\alpha_i)}$$

从而 g_i 是 E 中以 $\{\alpha_j\}_{j\neq i}$ 为根的多项式，那么对于 $i\neq j$ 有 $f(x)|g_ig_j$。

根据 g_i 的定义有 $g_1+\cdots+g_n=1$ 。这是因为 $g_1+\cdots+g_n$ 是 $n-1$ 次多项式却在 n 处 $\alpha_1,..,\alpha_n$ 不同的点取 1，利用上述等式乘以 $g_k, k=1,..,n$，就有 $f|g_k^2-g_k, k=1,..,n$，那么考虑多项式环上的矩阵 $\{\sigma_i\sigma_jg(x)\}_{1\leq i,j\leq n}$，计算其行列式如下

$$\begin{aligned}
|\det(\{\sigma_i\sigma_jg(x)\}_{1\leq i,j\leq n})|^2 &= \det\left\{\sum_j(\sigma_j\sigma_ig(x))(\sigma_j\sigma_kg(x))\right\}_{ik} = \det\left\{\sum_j \sigma_j(g_ig_k)\right\} \\
&\equiv \det\left\{\sum_j \sigma_j(\delta_{ik}g_k)\right\}_{ik} \mod f \\
&\equiv \det\left\{\delta_{ik}\sum_j \sigma_j\sigma_kg\right\}_{ik} \mod f \\
&\equiv \det\left\{\delta_{ik}\sum_{1\leq j\leq n} g_j\right\}_{ik} \equiv \det\{\delta_{ik}\}_{ik}\equiv 1 \mod f
\end{aligned}$$

从而如果记 $D(x)=|\det(\{\sigma_i\sigma_jg(x)\}_{1\leq i,j\leq n})|$，有 $f|D^2-1$，在零特征的情况下 D 在 F 上只有有限多个零点，从而可以取 $a\in F$ 满足 $D(a)\neq 0$，这时令 $\theta=g(a)$，有

$$\det\{\sigma_i\sigma_j\theta\}_{1\leq i,j\leq n}\neq 0, \quad P=\{\sigma_i\sigma_j\theta\}_{1\leq i,j\leq n}$$

则存在 F-线性关系 $x_1\sigma_1(\theta)+\cdots+x_n\sigma_n(\theta)=0, \quad x_1,..,x_n\in F$，用 $\sigma_i, i=1,..,n$ 作用此等式就会得到 $\mathbf{x}=[x_1,..,x_n], \mathbf{x}P=\mathbf{0}$，只能有 $x_1=\cdots=x_n=0$，于是 $\{\sigma_i(\theta)\}_i$ 是一组正规基。 □

正规基引理是 Galois 表示理论的基础，其表明 Galois 群 G 在数域 K 上的典范作用是诱导的，这可以得到有关 Galois 上同调的信息，在Galois 上同调有进一步的论述。

有限群的 Sylow 定理 考虑 G 是有限群，于是其基数 $|G|$ 是一个自然数，考虑其关于某一个素数 p 的子群的性质，Sylow 得到了如下的结果。

定理 0.5 (Sylow 定理). *设 G 是有限群，对素数 p 考虑 $|G|=mp^n, n>0, (m,p)=1$，那么有以下结论。*

1) G 对所有 $i=1,..,n$ 存在子群 $G_{p,i}$ 满足 $|G_{p,i}|=p^i$。

2) G 的极大 p-群 $G_{p,n}$ 称为 G 的 Sylow p-子群，取一个这样的 Sylow p-子群 P，则 G 的任何 p^i 阶子群包含在 P 某一个共轭 $gPg^{-1}, g\in G$ 里。特别地这些 Sylow 子群是彼此共轭的，也就是对任何两个 Sylow 子群 $G_{p,n}, G'_{p,n}$，存在 $g\in G$ 使得 $G_{p,n}=gG'_{p,n}g^{-1}$。

3) G 的 p^i 阶子群的个数记为 N_{p^i}，则 $N_{p^i} \equiv 1 \mod p$，特别地 N_{p^n} 是 m 的因子。

证明. 首先考虑 (1)，这里采用直接构造的方法，通过 p-群的中心非平凡的事实也可以对此进行证明，参考 [22]。我们需要如下算数的引理

引理 0.5.1. *设 $(m,p)=1, n>0$，p 是某一个素数，那么有*

$$\binom{mp^n}{p^n} \equiv m \mod p$$

证明. 考虑有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的二元多项式环 $\mathbb{F}_p(X,Y)$ 上的二项式展开

$$\sum_{i=0}^{i=mp^n} \binom{mp^n}{i} X^{mp^n-i}Y^i = (X+Y)^{mp^n}$$
$$= ((X+Y)^{p^n})^m = (X^{p^n}+Y^{p^n})^m = \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i} X^{(m-i)p^n}Y^{ip^n}$$

两边比较 $X^{(m-1)p^n}Y^{p^n}$ 的系数立刻得到结论。 □

下面来构造 G 的 p^i 阶子群 ($0<i\le n$)，取 G 的所有元素个数为 p^i 的子集构成的集合为 $\Omega_i = \{S \subset G : |S| = p^i\}$，$G$ 在 G 上左乘是双射，于是 G 可作用于 Ω_i 上，根据上述引理 $p^{n-i} \mid |\Omega| = \binom{mp^n}{p^n}p^{n-i}$ 群作用有如下的计数公式

$$\binom{mp^n}{p^i} = \sum_{\substack{t:S_k\neq gS_j \\ \forall g\in G, j\neq k}} \frac{mp^n}{|\mathrm{Stab}_G(S_t)|} \quad \mathrm{Stab}_G(S_t) = \{g\in G: gS_t = S_t\}, S_\bullet \in \Omega_i$$

从而至少有某一个轨道满足 p^{n-i+1} 不是 $|\mathrm{Orb}_G(S_0)|$，这时 p^i 是 $|\mathrm{Stab}_G(S_0)|$ 的因子，另一方面考虑 S_0 中元素右乘 $\mathrm{Stab}_G(S_0)$ 是双射保持元素个数，又因为 $\mathrm{Stab}_G(S_0) = \{gs : g\in \mathrm{Stab}_G(S_0), s\in S_0\} \subset S_0$，于是 $|\mathrm{Stab}_G(S_0)| \le |\mathrm{Stab}_G(S_0)| \le |S_0| = p^i$，从而构造出子群

$$\mathrm{Stab}_G(S_0) < G \quad |\mathrm{Stab}_G(S_0)| = p^i$$

其次考虑 (2)，从 (1) 我们得到了有限群的 p^i 阶子群的存在性，设 P 是 Sylow p-子群，H 是 $p^i, i\le n$ 阶子群，考虑 P 的 G-左陪集 $\Omega = \{gP : g\in G\}$ 根据计数法则 (Lagrange 定理) $|\Omega| = m$。考虑 H 在 Ω 上的左乘作用，利用群作用的计数公式得到

$$|\Omega| = \sum_{gP\in\Omega} |\mathrm{Orb}_H(gP)| = \sum_{gP\in\Omega} \frac{|H|}{|\mathrm{Stab}_H(gP)|} \quad \mathrm{Stab}_H(gP) = \{h\in H : h(gP) = gP\}$$

上式求和项都是 p 的幂次，但是 $p \nmid |\Omega| = m$，所以一定存在单点轨道 g_0P，满足 $Hg_0P = g_0P$，从而 $g_0^{-1}Hg_0 \subset P$。尤其取 P, P' 是两个 Sylow p-子群，那么 $P \subset gP'g^{-1}$ 对某一个 $g\in G$ 成立，比较元素个数得到 $P = gP'g^{-1}$。

最后考虑 (3)，不妨陈述如下更一般的性质。

引理 **0.5.2.** 设 G 是有限群，取素数 p 满足 $p^n \mid G$，G 的 p^i 阶子群的个数记为 N_{p^i}，有如下关系

$$\frac{|G|}{p^i}N_{p^i} \equiv \binom{|G|}{p^i} \mod \frac{|G|}{p^{i-1}}$$
$$\frac{|G|}{p^i} \equiv \binom{|G|}{p^i} \mod \frac{|G|}{p^{i-1}}$$

证明. 记 $m = \frac{|G|}{p^i}$，此时 m, p 不一定互素，那么同样考虑 $\Omega_i = \{S \subset G : |S| = p^i\}$，有 $|\Omega_i| = \frac{|G|}{p^i}$。进一步讨论 G 右作用于 Ω_i 的计数公式

$$\binom{|G|}{p^i} = \sum_{\substack{t:S_k \neq gS_j \\ \forall g \in G, j \neq k}} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}_G(S_t)|} \quad \mathrm{Stab}_G(S_t) = \{g \in G : gS_t = S_t\}, S_\bullet \in \Omega_i \tag{0.5c}$$

首先 $|\mathrm{Stab}_G(S_t)|$ 是 p 的方幂，由于取 G 的右作用，根据定义 $\sqcup_{s_j \in G:\mathrm{Stab}_G(S_t)} s_j \mathrm{Stab}_G(S_t) = S_t \mathrm{Stab}_G(S_t) = S_t$，有 $|\mathrm{Stab}_G(S_t)| \mid |S_t| = p^i$。由于阶数小于 p^i 的稳定子群对应的轨道长度模 $\frac{|G|}{p^{i-1}}$ 是零，那么根据上面的计数公式(0.5c)有

$$\binom{|G|}{p^i} \equiv \sum_{\substack{\mathrm{Orb}_G(S_t): \\ |\mathrm{Stab}_G(S_t)| = p^i}} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}_G(S_t)|} \mod \frac{|G|}{p^{i-1}} \tag{0.5d}$$

进而促使计算出 $|\{\mathrm{Orb}_G(S_t) : |\mathrm{Orb}_G(S_t)| = \frac{|G|}{p^i}\}|$ 的值，事实上这等于 N_{p^i}，因为可以证明如下映射是一一对应。

$$\begin{array}{lcccr}
\phi: & \{\mathrm{Orb}_G(S_t) : |\mathrm{Orb}_G(S_t)| = \frac{|G|}{p^i}\} & \leftrightarrows & \{P < G : |P| = p^i\} & :\psi \\
\phi: & \mathrm{Orb}_G(S_t) & \to & s_t \mathrm{Stab}_G(S_t) s_t^{-1} : (\forall s_t \in S_t) & \\
 & \{Pg : g \in G\} & \leftarrow & P & :\psi
\end{array}$$

ϕ 是良定义的，这是因为对任何轨道里的 $|S_t|$ 此时 $|S_t| = |\mathrm{Stab}_G(S_t)|$，根据 $S_t \mathrm{Stab}_G(S_t) = S_t$，对任何 $s_t \in S_t$，都有 $s_t \mathrm{Stab}_G(S_t) = S_t$，于是一下两点保证了 ϕ 的良定：

$\mathrm{im}(\phi)$ 不依赖于 $s_t \in S_t$ 的选取: 根据上面论证，任何 $s_t, s_t' \in S_t$，都有 $s_t^{-1}s_t' \in \mathrm{Stab}_G(S_t)$，那么这时 $s_t \mathrm{Stab}_G(S_t) s_t = s_t' \mathrm{Stab}_G(S_t) s_t'^{-1}$。

ϕ 不依赖于轨道代表元的选取：取 $S_t, S_t g$ 是两个不同的代表元，那么 $\mathrm{Stab}_G(S_t g) = g^{-1}\mathrm{Stab}_G(S_t) g$，从而某一个 $s_t g \mathrm{Stab}_G(S_t g)(s_t g)^{-1} = s_t \mathrm{Stab}_G(S_t) s_t{}^{-1}$。

而 ψ 确实定义出一个 $\frac{|G|}{p^i}$ 长的轨道。容易验证 $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}, \psi \circ \phi = \mathrm{Id}$，于是两个集合一一对应，带入(0.5d)得到

$$\frac{|G|}{p^i}N_{p^i} \equiv \binom{|G|}{p^i} \mod \frac{|G|}{p^{i-1}}$$

注意到上面的公式对一切有限群 G 成立，取 G 是循环群，其只有一个 p^i 阶子群，$N_{p^i} = 1$，得到第二个关系

$$\frac{|G|}{p^i} \equiv \binom{|G|}{p^i} \mod \frac{|G|}{p^{i-1}}, G \simeq \langle g \rangle$$

而这公式只和 G 的元素个数有关，从而对一切有限群 G 成立。 □

考虑 (3)，在上述引理中得到 $N_{p^i}\frac{|G|}{p^i} \equiv \frac{|G|}{p^i} \mod \frac{|G|}{p^{i-1}}$，有 $\frac{|G|}{p^i}(N_{p^i}-1) \mid p\frac{|G|}{p^i}$ 推出 $(N_{p^i}-1) \mid p$ 也就是

$$N_{p^i} \equiv 1 \mod p$$

而由于 (2)Sylow p-子群互相共轭，记 $\mathrm{Syl}_p(G)$ 是 G 的所有 Sylow p-子群构成的集合 G 在 $\mathrm{Syl}_p(G)$ 上的共轭作用是传递的，那么轨道长度就是 $N_{p^n} = \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}_G(P)|}$ 对某一个 Sylow p-子群 P，而 N_{p^n} 和 p 互素，所以只能 $N_{p^n} \mid m$。 $\square$

Sylow 理论作为研究群的重要技术，也是可以研究无限群的有限子群或者素数挠群的信息，取素数 p，广义的 p-群是指元素的阶都是 p 的幂次的群，广义的 Sylow 子群是指极大的广义的 p-子群。在其上的 Sylow 理论和有限群上的大同小异，通常利用下文介绍的投射极限的技术从有限情况提升到所谓 porfinite 的情况。

蛇形引理 蛇形引理可能不止在同调代数中常用，于是这里将其陈述为一个基本的代数事实。

定理 0.6 (蛇形引理). 设 R 是环，考虑左 R-模同态的交换图如下。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker i \arrow[r] & \ker f \arrow[r] \arrow[d] & \ker g \arrow[r] \arrow[d] & \ker h \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-2ex]$(\tikztostart)!0.5!(\tikztotarget)$) -| ([xshift=-8ex]\tikztotarget.west) |- (\tikztotarget)}, "\partial = i'^{-1}\circ g\circ p^{-1}"] & & \\
& & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 & \\
& 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"] \arrow[d] & B' \arrow[r, "p'"] \arrow[d] & C' \arrow[d] & & \\
& & \operatorname{coker} f \arrow[r] & \operatorname{coker} g \arrow[r] & \operatorname{coker} h \arrow[r] & \operatorname{coker} p' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中 A, B, C, A', B', C' 是左 R-模，图中所有映射都是 R-同态（后文中涉及模的交换图时将始终默认这一点），交换图的行是正合的那么在灰色曲线上的序列也是正合的，也就是存在如下正合列

$$0 \to \ker i \to \ker f \xrightarrow{i|_{\ker f}} \ker g \xrightarrow{p|_{\ker g}} \ker h \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker} f \xrightarrow{\pi i'} \operatorname{coker} g \xrightarrow{\pi p'} \operatorname{coker} h \to \operatorname{coker} p' \to 0$$

进一步如果 i 是单射，那么 $i|_{\ker f}$ 也是单射；如果 p' 是满射，商映射 $\pi p'$ 也是满射。

证明. 首先说明连接同态 ∂ 良定义，设 $c \in \ker h$ 由 p 满存在 $p(b) = c$，那么 $0 = h(c) = hp(b) = p'g(b)$，由 B' 处正合 $g(b) \in \ker p' = \mathrm{im} i'$，由 i' 单存在唯一的 $a' \in A'$ 满足 $i'(a') = g(b)$，这样定义 $\partial(c) = a'\mathrm{im} f \in \operatorname{coker} f$。要说明这种定义不依赖于 p' 原象的选择，由 p 满，如果两个原象 $b_1, b_2 \in p^{-1}(c) \subset B, p(b_1 - b_2 = 0)$，则 B 处正合得到 $a \in A$ 满足 $i(a) = b_1 - b_2 \in \ker p = \mathrm{im} i$，则 $g(b_1) - g(b_2) = gi(a) = i'f(a)$，由 i' 单，

$i'^{-1}g(b_1-b_2)=f(a)$，从而在商去 $\mathrm{im}f$ 后是满足 $i'^{-1}g(b_1)=i'^{-1}g(b_2)\in\operatorname{coker}f$，$\partial$ 确实和 $p^{-1}(c)$ 的选择无关。于是 ∂ 良定义。

$\ker g$ 处正合：由 $p\circ i=0$，有 $\mathrm{im}i|_{\ker f}\subset\ker p|_{kerg}$，利用 B 处正合以及 $i^{-1}(\ker g)\subset kerf$(由于交换性和 i' 单) 得到 $\mathrm{im}i|_{\ker f}\supset\ker p|_{kerg}$。

$\ker h$ 处正合：由定义 $\partial\circ p|_{\ker h}=0$，有 $\mathrm{im}p|_{\ker h}\subset\ker\partial$，其次因为 i' 单，由定义 $\ker\partial\subset pg^{-1}(\mathrm{im}i'f\cap\mathrm{img})\cap\ker h$，由 $gi=i'f$ 有 $pg^{-1}(\mathrm{im}i'f\cap\mathrm{img})\cap\ker h\subset\mathrm{im}p|_{kerg}$ 从而 $\ker\partial=\mathrm{im}p|_{kerg}$。

$\operatorname{coker}f$ 处正合：由定义 $\pi i'\circ\partial=0$，有 $\mathrm{im}\partial\subset\ker\pi i'$，其次由 i' 单 $\ker\pi i'=i'^{-1}(\ker p'\cap\mathrm{img})\mod\mathrm{im}f$，由 $p'g=hp$，$\ker i'\subset\mathrm{im}\partial$，从而 $\ker\pi i'=\mathrm{im}\partial$。

$\operatorname{coker}g$ 处正合：由 $p'\circ i'=0$，在商模有 $\mathrm{im}\pi i'\subset\ker\pi p'$，利用 B' 处正合以及 $\ker\pi p'\subset p'^{-1}(\mathrm{im}h)\mod\mathrm{img}$，由 p 满和 $hp=p'g$，有 $p'^{-1}(\mathrm{im}h)=p'^{-1}(\mathrm{im}p'g)$，由 B' 正合，$\ker\pi p'\subset\ker p'\mod\mathrm{img}=\mathrm{im}i'\mod g=\mathrm{im}\pi i'$。

$\ker i$ 处正合是 $\ker i\in\ker f$，这是因为 $ig=i'f$ 和 i' 的单性。$\operatorname{coker}p'$ 处的正合无非是 $\mathrm{im}h\subset\mathrm{im}p'$，这是因为 $hp=p'g$ 和 p' 的满性。延长的性质来自于：从定义出发如果 i 是单射，其限制映射也是单射；如果 p' 是满射，其商映射也是满射。也可以从 $\ker i,\operatorname{coker}p'$ 中得到。 □

证明蛇形引理发方法常叫做交换图追踪 (commutative diagram chasing)，只要给出了交换图的信息，往往证明是直接从定义出发于沿映射追踪元素结合，本质的构造来自于交换图，于是下文 (诸如如下的 5-引理) 不再详细进行追踪的琐碎细节。

定理 0.7 (5-引理 (five lemma))**.** *设 Abel 范畴上的短正合列 $A_1\xrightarrow{a_1}A_2\xrightarrow{a_2}A_3\xrightarrow{a_3}A_4\xrightarrow{a_4}A_5$ 和 $B_1\xrightarrow{b_1}B_2\xrightarrow{b_2}B_3\xrightarrow{b_3}B_4\xrightarrow{b_4}B_5$ 构成如下的交换图。*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "a_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "a_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\ B_1 \arrow[r, "b_1"] & B_2 \arrow[r, "b_2"] & B_3 \arrow[r, "b_3"] & B_4 \arrow[r, "b_4"] & B_5 \end{tikzcd}$$

则下面结论成立。

1) f_1 是满态射，f_2,f_4 是单态射，则 f_3 是单态射。

2) f_5 是单态射，f_2,f_4 是满态射，则 f_3 是满态射。

3) f_1,f_2,f_4,f_5 是同构，则 f_3 是同构。

证明. 只需证明前两条，便可推出第三条。和蛇形引理一样进行图追踪固然可以解决此问题。下给出一种更“像”Abel 范畴中证明的证明，考虑第一条，此时 $\ker f_2=\ker f_4=0,\operatorname{coker}f_5=0$，结合交换性和正

合性计算如下的 Abel 对象

$$
\begin{aligned}
f_2\ker f_3a_2 = f_2\ker b_2f_2 = f_2\ker b_2f_2 \quad (\text{交换性}) \quad &= \ker b_2 \quad (f_2\text{单}) \\
= \mathrm{im}b_1 \quad (\text{正合性}) \quad &= \mathrm{im}b_1f_1 \quad (f_1\text{满}) \\
= \mathrm{im}f_2a_1 \quad (\text{交换性}) \quad &= f_2\mathrm{im}a_1 = f_2\ker a_2 \quad (\text{正合性})
\end{aligned}
$$

于是根据 f_2 单得到 $\ker f_3 \subset \ker f_3a_2 = \ker a_2$，但是另一方面 $\ker f_3 \subset \ker b_3f_3 = \ker f_4a_3 = \ker a_3 = \mathrm{im}a_2$，那么就有 $\ker f_3 = 0$，f_3 单。

考虑第二条，此时 $\mathrm{coker}\, f_2 = \mathrm{coker}\, f_4 = 0, \ker f_5 = 0$，再结合交换性和正合性计算如下的 Abel 对象

$$
\begin{aligned}
\mathrm{im}(b_3f_3) = \mathrm{im}(f_4a_3) &= f_4\mathrm{im}a_3 \quad (\text{交换性}) \\
&= f_4\ker a_4 \quad (\text{正合性}) \quad = f_4\ker f_5a_4 \quad (f_5\text{单}) \\
&= f_4\ker b_4f_4 \quad (\text{交换性}) \quad = \ker b_4 \quad (f_4\text{满}) \quad = \mathrm{im}b_3 \quad (\text{正合性})
\end{aligned}
$$

于是 $\mathrm{coker}\, f_3 \subset \ker b_3 = \mathrm{im}b_2 = \mathrm{im}b_2f_2 = \mathrm{im}f_3a_2 \subset \mathrm{im}f_3$，从而 $\mathrm{coker}\, f_3 = 0$，f_3 是满态射。

□

值得一提的是，经典的蛇形引理和 5-引理等结果都可以毫无困难地推广到 Abel 范畴上。于是在陈述定理时总是取 Abel 范畴的假设。

同调代数相关内容 | 0.2

本节主要来解决同调代数的理论性问题，以构建后文的基础，一个较为友好的参考是 [21]，更为经典的选择是 [5] 或 [27]。不再详尽叙述一些关于范畴和函子的定义，经典范畴论的基本概念参考 [28]。笼统地说一个经典的范畴 $\mathfrak{C}$ 包含了三部分信息：对象，态射和复合，对象的全体不一定构成集合，对任何两个范畴中对象 A, B，其态射 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ 作为 A 到 B 的映射的抽象被限制为集合，复合是满足结合律的态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, C), \forall A, B, C \in \mathfrak{C}$ 的运算法则，对象到自己的态射总要求包含一个类比于恒同映射的复合运算下的单位元。经典的函子 $\mathcal{F}$ 是指范畴间保持态射运算结构的对应关系，协变的函子保持态射的方向，反变的函子将态射反向。自然变换是一种函子的函子，"自然性"会在下文定理中体现 (至于经典范畴涉及到的集合论困难，可以通过元图表 (metagraph) 或者宇宙 (universe) 的概念解难，参看 [12] 和 [28, Chap 1])。相比于研究一般的范畴，同调代数上更关注在可加范畴或者 Abel 范畴上的特殊运算属性，近几十年来在 Abel 范畴上定义同调理论是较为主流的方法。

定义 0.2 (Abel 范畴)**.** *一个 Abel 范畴是指如下资料。*

1) 一个范畴 $\mathfrak{C}$，满足态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ 对任何两个对象 $A, B \in \mathfrak{C}$ 而言都是交换群，态射的复合是群同态且左右分配律成立。

2) $\mathfrak{C}$ 中存在有限乘积对象和有限余积对象，以及零对象。

3) $\mathfrak{C}$ 中任何态射都存在 ker 和 coker，而且 ker 代表的态射是单态射，coker 代表的态射是满态射。

只满足前两条的范畴被称为**可加范畴**。第三条在东北文章中被称为 $(AB1)$ 和 $(AB2)$，该文中为了定义 Abel 范畴上的无穷乘积和余积还引入了 $(AB3)-(AB6)$，于本文无用这里就不再赘述了。

环上的左 (右) 模和其间的模同态和其上的同调代数曾经被较为系统的研究例如 [21, Chap 3, 4][5, Chap IV]，Abel 范畴的作用在于某种公理化方法：提取出此类理论中的最简的公理，使得模上的同调代数结果适用于一切满足提取出的公理的范畴。仔细研究如下对应就可以发现此节所有证明都可以毫无困难地推广到 Abel 范畴上。从而在假设上可以只要求 Abel 范畴的前提。事实上可以将满足某些 Abel 范畴嵌入模范畴，参看 Mithchell 嵌入定理 [15, Chap 1, 2]。

R-模范畴的构件	Abel 范畴的对应物
有限直和	有限余积和有限乘积 (两者同构)
0	零对象
$\ker f$	$(f,0)$ 的等化子 (记作 $\ker f, i_f$)
coker f	$(f,0)$ 的余等化子 (记作 coker f, π_f)
im$f$	$\ker(\text{coker } f, \pi_f), i_{\pi_f}$
单射	单态射 ($u: A\to B$ 的诱导映射 $u_*: \mathrm{Hom}(-,A)\to\mathrm{Hom}(-,B)$ 是单射)
满射	满态射 ($u: A\to B$ 的诱导映射 $u_*: \mathrm{Hom}(-,A)\to\mathrm{Hom}(-,B)$ 是单射)
$A\subset B$	存在单态射 $u\in\mathrm{Hom}(A,B)$ 或存在满态射 $p\in\mathrm{Hom}(B,A)$
投射模	投射对象 (将投射模定义中出现的模范畴构建替换到 Abel 范畴的对应物)
单射模	单射对象 (将单射模定义中出现的模范畴构建替换到 Abel 范畴的对应物)
正合性	$\ker p$ 和 im$i$ 同构

有了上面的对应表，简述一二对应：例如考虑左 R-模范畴 Mod_R，对象由左 R-模构成，态射由 R-模同态构成，复合即正常的函数复合，于是这个范畴是一个 Abel 范畴，其中的投射对象称为投射模，也就是满足对于所有满射 $p: A\to B$，$p_*: \mathrm{Hom}(M,A)\to\mathrm{Hom}(M,B)$ 也是满射的模 M；单射对象称为单射模，也就是满足对于所有单射 $i: A\to B$，$i^*: \mathrm{Hom}(B,M)$ 是满射的模 M。很多在模范畴上成立的同调代数结果便通过上面的对应几乎毫无困难地推广到一般的 Abel 范畴上，例如以下的导出函子和卫星函子便采用这样的策略，陈述相关定理时总推广到一般的 Abel 范畴上，而在证明中为了方便某些细节采用 R-模的语言论证。

$\boxed{\text{导出函子}}$ 为了描述同调群所具有函子性质和一些万有结构，从导出函子的角度描述代数系统的同调群可以把不同的同调理论的共性提取出来。特别地用投射对象或者单射对象来研究某一个 Abel 范畴中的对象的方法通常称为消解方法 (resolution)，其优点是体现在如下的定理。

定理 0.8 (消解存在性). *如果 Abel 范畴 $\mathfrak{C}$ 中有足够的单射对象，就是对于任何的 $C \in \mathfrak{C}$，都有单射对象 I_C 满足*

$$0 \to C \to I_C$$

正合中。那么就存在单射对象 $I_k, k = 0, 1, 2, ...$ 构成单射消解的长正合列

$$0 \to C \to I_0 \to I_1 \to I_2 \to \cdots$$

对偶地，如果 Abel 范畴 $\mathfrak{C}$ 中有足够的投射对象，就是对于任何的 $C \in \mathfrak{C}$，都有投射对象 I_C 满足

$$P_C \to C \to 0$$

正合。那么就存在投射对象 $P_k, k = 0, 1, 2, ...$ 构成投射消解的长正合列

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to C \to 0$$

证明. 利用交换图和投射单射的性质逐步延长正合序列，例如延长单射对象，已经假设单射对象足够多，那就存在单射对象 I_0 使得 $0 \to C \xrightarrow{i_0} I_0 \xrightarrow{\pi i_0} \operatorname{coker} i \to 0$ 正合，再将 I_0 用 i_1 嵌入到单射对象 I_1 中，取 coker 并依次类推得到如下的交换图。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & 0 \arrow[dr] & & 0 & \\
& C \arrow[dr, "i_0"] & & & & I_1' \arrow[ur] \arrow[dr, "i_2"] & & \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "i_0"] & I_0 \arrow[rr, dashed, "i_1 \circ \pi i_0"] \arrow[dr, "\pi i_0"] & & I_1 \arrow[ur, "\pi i_1"] \arrow[rr, dashed, "i_2 \circ \pi i_1"] & & I_2 \arrow[r, dashed] \arrow[dr] & \cdots \\
& & & I_0' \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr] & & & & \cdots \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

$(I_k' = \operatorname{coker} i_k, k \geq 0)$

斜线全部是正合列，只需要证明中间虚线序列的正合性，这里 i_- 都是单态射，πi_- 都是满态射，于是在 I_0 处 $\ker i_1 \circ \pi i_0 = \ker \pi i_0 = \mathrm{im} i_0$，在 $I_k, k > 0$ 处 $\ker i_{k+1}\, circ \pi i_k = \ker \pi i_k = \mathrm{im} i_k = \mathrm{im} i_k \circ \pi i_{k-1}$，从而虚线序列是正合的。至于投射对象，证明完全对称，只需将交换图的箭头全部反向，coker 替换成 ker，单态射 i_- 替换成满态射 p_- 即可。

上述证明可以推广成：广义地讲如果 Abel 范畴 $\mathfrak{C}$ 有足够多的 $\mathcal{X}$-嵌入对象是指 $\mathfrak{C}$ 的每一个对象都能嵌入某一个 $\mathcal{X}$-对象，那么对任何 $\mathfrak{C}$ 中的对象都能如单射消解那样用 $\mathcal{X}$-对象向右消解；如果 Abel 范畴 $\mathfrak{C}$ 有足够多的 $\mathcal{X}$-嵌入对象是指 $\mathfrak{C}$ 的每一个对象都能作为某一个 $\mathcal{X}$-对象的商，那么对任何 $\mathfrak{C}$ 中的对象都能如投射消解那样用 $\mathcal{X}$-对象向左消解。 □

投射消解和单射消解能够同伦唯一地延拓，这使得可以在具有足够多的投射和单射对象的 Abel 范畴上定义导出函子，特别考虑 R-模范畴中是存在足够多的投射对象和单射对象的，例如 R-模 A 可作为投射模 $\otimes_{a\in A}A$ 的商模，也可以嵌入单射模 $\frac{\otimes_{|A|}\mathbb{Q}}{\ker A}$(可以直接验证)。

定理 0.9 (同伦唯一延拓). 考虑左 R-模 A 的投射消解

$$\cdots P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to A \to 0$$

和单射消解

$$0 \to A \to I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_n \to \cdots$$

这样的消解具有如下的延拓性质，如果有模同态 $f : A \to B$，这个映射可以延拓到 A 和 B 的消解链复形上，也就是对 $n \geq 0$ 存在交换图如下。

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P'_n \arrow[r] & P'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P'_0 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

和交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & I_0 \arrow[r] \arrow[d, "f^0"] & I_1 \arrow[r] \arrow[d, "f^1"] & \cdots \arrow[r] & I_n \arrow[r] \arrow[d, "f^n"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & I'_0 \arrow[r] & I'_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & I'_n \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

特别要说明的是，如果这些延拓记成 $\mathbf{P}_{-}(f)$ 和 $\mathbf{I}_{-}(f)$，那么它们具有同伦唯一性，也就是说对相同的 f 的不同的延拓作为链映射彼此同伦。

证明. 延拓是利用投射和单射性质得到的，首先由 I'_0 的单射性质存在如下的虚线映射 f^0，由 P_0 的投射性质存在虚线映射 f_0。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "d'^0\circ f"] & I_0 \arrow[d, dashed, "f^0"] \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "d'^0"] & I'_0
\end{tikzcd}
\quad \text{和} \quad
\begin{tikzcd}
P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, dashed, "f_0"] \arrow[dr, "f\circ d_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
P'_0 \arrow[r, "d'_0"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

然后进行归纳,假设对于 $n \geq 0$ 已经找到了 f^n 和 f_n 使得图表交换,不妨记 $A = P_{-1} = I_{-1}, B = P'_{-1} = I'_{-1}$ 以及 $f = f^{-1} = f_{-1}$，考虑如下交换图

$$
\begin{tikzcd}
I_{n-1} \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "f^{n-1}"] & I_n \arrow[r, "d^{n+1}"] \arrow[d, "f^n"'] \arrow[dr, "d'^{n+1}\circ f^n"] & I_{n+1} \\
I'_{n-1} \arrow[r, "d'^n"] & I'_n \arrow[r, "d'^{n+1}"] & I'_{n+1}
\end{tikzcd}
\quad \text{和} \quad
\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[dr, "d'_{n+1}\circ f_n"'] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
P'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & P'_n \arrow[r, "d'_n"] & P'_{n-1}
\end{tikzcd}
$$

由于交换性上列正合性 $d'_n \circ f_n \circ d_{n+1} = f_{n-1} \circ d_n \circ d_{n+1} = 0$，从而 $\mathrm{im} f_n \circ d_{n+1} \subset \ker d'_n = \mathrm{im} d_{n+1}$；以及 $d'^{n+1} \circ f^n \circ d^n = 0$ 从而 $\ker d'^{n+1} \circ f^n \supset \mathrm{im} d^n = \ker d^{n+1}$，那么存在如下的交换图

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{coker} d^{n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "d'^n\circ f^n"'] & I_{n+1} \arrow[dl, dashed, "f^{n+1}"] \\
 & I'_n &
\end{tikzcd}
\quad \text{和} \quad
\begin{tikzcd}
 & P_{n+1} \arrow[dl, dashed, "f_{n+1}"'] \arrow[d, "d'_{n+1}\circ f_n"] & \\
P'_{n+1} \arrow[r, "p"] & im \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

根据 I_{n+1} 的单射性和 P'_{n+1} 的投射性可知 f_{n+1}, f^{n+1} 存在，而且其使得交换图可以延长，从而一直归纳下去就得到所有的延拓。

下面来证明两个延拓 $(\{f_n\}_n, \{f'_n\}_n)$ 或 $(\{f^n\}_n, \{f'^n\}_n)$ 是彼此同伦的。这无非是构造出反向的 $s_n : P_n \to P'_{n+1}, s^n : I_{n-1} \to I'_n$ 满足

$$
\begin{aligned}
s^n \circ d^{n+1} + d'^n \circ s^{n-1} &= f^n - f'^n \\
s_{n-1} \circ d_n + d'_{n+1} \circ s_n &= f_n - f'_n \quad n \geq 1
\end{aligned}
$$

仍然是归纳地寻找 $\{s^n, s_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq -1}}$。例如做记号 $I_{-2} = I'_{-2} = P_{-2} = P'_{-2} = 0$，序号小于 0 的微分映射 d, d' 都是零，那么取 $s_{-1} = s_{-2} = s^{-1} = s^{-2} = 0$ 满足同伦方程，如今假设对于小于等于 n 的整数找到了 s_-, s^-，那么在 $n+1$ 时，考虑

$$
\begin{aligned}
d'_{n+1}(f_{n+1} - f'_{n+1} - s_n d_{n+1}) &= d'_{n+1}(f_{n+1} - f'_{n+1}) - d'_{n+1} s_n d_{n+1} \\
&= d'_{n+1}(f_{n+1} - f'_{n+1}) - (f_n - f'_n - s_{n-1} d_n) d_{n+1} \\
&= d'_{n+1}(f_{n+1} - f'_{n+1}) - (f_n - f'_n) d_{n+1} = 0 \\
(f^{n+1} - f'^{n+1} - d'^{n+1} s^n) d^{n+1} &= (f^{n+1} - f'^{n+1}) d^{n+1} - d'^{n+1}(s^n d^{n+1}) \\
&= (f^{n+1} - f'^{n+1}) d^{n+1} - d'^{n+1}(f^n - f'^n - d'^n s^{n-1}) \\
&= (f^{n+1} - f'^{n+1}) d^{n+1} - d'^{n+1}(f^n - f'^n) = 0
\end{aligned}
$$

从而 $\mathrm{im} f_{n+1} - f'_{n+1} - s_n d_{n+1} \subset \ker d'_{n+1} = \mathrm{im} d'_{n+2}$ 以及 $\ker d^{n+2} = \mathrm{im} d^{n+1} \subset \ker f^{n+1} - f'^{n+1} - d'^{n+1} s^n$，从而根据投射和单射性质存在 s_{n+1}, s^{n+1} 构成如下的交换图

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{coker} d^{n+2} \arrow[r, "d^{n+2}"] \arrow[d, "f^{n+1}-f'^{n+1}-d'^{n+1}s^n"'] & I_{n+1} \arrow[dl, dashed, "s^{n+1}"] \\
 & I'_{n+1} &
\end{tikzcd}
\quad \text{和} \quad
\begin{tikzcd}
 & P_{n+1} \arrow[dl, dashed, "s_{n+1}"'] \arrow[d, "f_{n+1}-f'_{n+1}-s_n d_{n+1}"] & \\
P'_{n+2} \arrow[r, "d'_{n+2}"] & \mathrm{im} d'_{n+2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

根据交换性这 s^{n+1}, s_{n+1} 满足同伦方程，也就是 $s^{n+1}\circ d^{n+2}+d'^{n+1}\circ s^{n}=f^{n+1}-f'^{n+1}$ 和 $s_n\circ d_{n+1}+d'_{n+2}\circ s_{n+1}=f_{n+1}-f'_{n+1}$，至此就完成了证明。这个定理说明从不同的投射消解和内设消解计算同调是一致的，也就是

$$\mathrm{H}_\bullet(\mathbf{P}(A))=\mathrm{H}_\bullet(\mathbf{P}'(A))\quad \mathrm{H}^\bullet(\mathbf{I}(A))=\mathrm{H}^\bullet(\mathbf{I}'(A))$$

□

利用消解的同伦唯一性才能正确定义导出函子。

定义 0.3 (导出函子 (Derived Functor)). 对于协变函子 T，取 A 的投射消解 $\mathbf{P}(A)=\cdots P_i\to\cdots\to P_0\to A\to 0$，有链复形

$$\cdots T(P_i)\to T(P_{i-1})\to\cdots T(P_0)\to 0\to 0$$

定义协变函子的左导出函子

$$L_nT(A)=\frac{\ker(T(P_n)\to T(P_{n-1}))}{\operatorname{im}(T(P_{n+1})\to T(P_n))}, L_nT(f)=\pi T(\mathbf{P}_n(f)), n\geq 0$$

取 A 的单射消解 $\mathbf{I}(A)=0\to A\to I_0\to\cdots\to I_n\to\cdots$ 同样有链复形

$$0\to 0\to T(I_0)\to T(I_1)\to\cdots T(P_i)\to\cdots$$

定义协变函子的右导出函子

$$R^nT(A)=\frac{\ker(T(I_n)\to T(I_{n+1}))}{\operatorname{im}(T(I_{n-1})\to T(I_n))}, R^nT(f)=\pi T(\mathbf{I}_n(f)), n\geq 0$$

如果 T 是一个反变函子，和上面类似，对 Abel 范畴中对象 A 同样取投射消解和单射消解 $\mathbf{P}(A),\mathbf{I}(A)$，定义反变函子的左右导出函子是

$$L_nT=\frac{\ker(T(I_n)\to T(I_{n-1}))}{\operatorname{im}(T(I_{n+1})\to T(I_n))}, L_nT(f)=\pi T(\mathbf{I}_n(f))$$
$$R^nT=\frac{\ker(T(P_n)\to T(P_{n+1}))}{\operatorname{im}(T(P_{n-1})\to T(P_n))}, R^nT(f)=\pi T(\mathbf{P}_n(f))$$

如果为了统一性，可以拓展定义 $R^{-n}T=L_{-n}T=0\quad n>0$。

这样定义的合法性来自于如果我们选择不同的消解 $\mathbf{P}(A),\mathbf{P}'(A)$ 或 $\mathbf{I}(A),\mathbf{I}'(A)$，通过定理 0.9-同伦唯一延拓，考虑 $A\xrightarrow{\mathrm{Id}_A}A\xrightarrow{\mathrm{Id}_A}A$ 诱导同伦唯一的链映射 $\mathbf{P}(A)\to\mathbf{P}'(A)\to\mathbf{P}(A)$ 和 $\mathbf{I}(A)\to\mathbf{I}'(A)\to\mathbf{I}(A)$，根据同伦唯一性这个复合同伦于恒同映射，互换 $\mathbf{P}(A),\mathbf{P}'(A)$ 和 $\mathbf{I}(A),\mathbf{I}'(A)$ 的位置就可以得到所有的投射消解彼此同伦等价，所有的单射消解也彼此同伦等价，那么它们在 T 下的象也是彼此同伦等价的，于是诱导出同构的同调。

下面的定理是后文中维数移动思想的来源。

定理 0.10 (导出函子沿消解列移动)**.** 对 Abel 范畴中投射消解 $\mathbf{P}(A): \cdots P_n \xrightarrow{d_n} \cdots P_0 \to A \to 0$ 和单射消解 $\mathbf{I}(A): 0 \to A \xrightarrow{d^0} I_0 \to \cdots \xrightarrow{d^n} I_n \to \cdots$，记 $K_i = \ker d_i, i = 0, 1, 2....$ 和 $V_i = \mathrm{im} d^i$ 则对任何正整数 n 有如下同构

$$
\begin{aligned}
&T \quad 协变: \\
&L_nT(A) \simeq L_{n-1}T(K_0) \simeq \cdots (\simeq L_1T(K_{n-2}), \quad n \geq 2) \\
&R^nT(A) \simeq R^{n-1}T(V_0) \simeq \cdots (\simeq R^1T(V_{n-2}), \quad n \geq 2) \\
&T \quad 反变: \\
&L_nT(A) \simeq L_{n-1}T(V_0) \simeq \cdots (\simeq L_1T(V_{n-2}), \quad n \geq 2) \\
&R^nT(A) \simeq R^{n-1}T(K_0) \simeq \cdots (\simeq R^1T(K_{n-2}), \quad n \geq 2)
\end{aligned}
$$

证明. 注意到同伦唯一延拓性质使得可任选投射消解计算导出函子，先考虑 T 协变，根据正合性 $\mathrm{im} d_1 = \ker d_0 = K_0$，从而

$$\mathbf{P}(K_0): \cdots P_n \xrightarrow{d_n} \cdots P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} K_0 \to 0$$

是正合的 K_0 的一个投射消解。于是考虑指标的移动计算同调

$$L_nT(A) = \frac{\ker Td_n}{\mathrm{im} Td_{n+1}} = L_{n-1}T(K_0)$$

不断迭代就得到第一个关系。类似根据正合性 $\mathrm{im} d^0 = \ker d^1 = V_0$，从而

$$\mathbf{I}(V_0): 0 \to V_0 \xrightarrow{d^1} I_1 \xrightarrow{d^2} I_2 \to \cdots \xrightarrow{d_n} I_n \to \cdots$$

是 V_0 的单射消解。取这个消解考虑指标移动计算同调

$$R^nT(A) = \frac{\ker Td^{n+1}}{\mathrm{im} Td^n} = R^{n-1}T(V_0)$$

不断迭代就得到第二个关系。至于 T 为反变函子的情况，无非是用单射消解计算左导出函子，投射消解计算右导出函子，利用上面移动消解序列的办法不难得到证明。 □

以下源自于链复形的短正合列导出长正合列性质，也是主要的计算方法。

定理 0.11 (短正合列诱导长正合列)**.** 如果有左 R-模的短正和列 $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$，对于协变函子 T：左导出函子 $\{L_nT\}_n$ 诱导出如下典范的长正合列：

$$\cdots \to L_{n+1}T(A) \xrightarrow{L_{n+1}Ti} L_{n+1}T(B) \xrightarrow{L_{n+1}Tp} L_{n+1}T(C) \xrightarrow{\delta_n} L_nT(A) \to \cdots$$

右导出函子 $\{R^nT\}_n$ 诱导出如下的长正合列：

$$\cdots \to R^nT(A) \xrightarrow{R^nTi} R^nT(B) \xrightarrow{R^nTp} R^nT(C) \xrightarrow{\delta^n} R^{n+1}T(A) \to \cdots$$

对于反变函子 T：左导出函子 $\{L_{n+1}T\}_n$ 诱导出如下的长正合列：

$$\cdots \to L_{n+1}T(C) \xrightarrow{L_{n+1}Tp} L_{n+1}T(B) \xrightarrow{L_{n+1}Ti} L_{n+1}T(A) \xrightarrow{\delta_n} L_nT(C) \to \cdots$$

右导出函子 $\{R^nT\}_n$ 诱导出如下的长正合列：

$$\cdots \to R^nT(C) \xrightarrow{R^nTp} R^nT(B) \xrightarrow{R^nTi} R^nT(A) \xrightarrow{\delta^n} R^{n+1}T(C) \to \cdots$$

证明. 不妨回顾同调代数中链复形的短正合列诱导长正合列。

引理 **0.11.1** (链复形的长正合列). 设 $0 \to \mathbf{A} \xrightarrow{i} \mathbf{B} \xrightarrow{p} \mathbf{C} \to 0$ 是链复形范畴上的正合列（链复形和其间的链映射可视作构成 Abel 范畴，即此时正合意味着每行正合每列是链复形的交换图）。其上同调理论根据微分指标的升降定义成下同调 $\mathrm{H}_n(\mathbf{A}) := \frac{\ker(A_n \to A_{n-1})}{\mathrm{im}(A_{n+1} \to A_n)}$ 或上同调 $\mathrm{H}^n(\mathbf{A}) := \frac{\ker(A_n \to A_{n+1})}{\mathrm{im}(A_{n-1} \to A_n)}$，则对下同调存在长正合列

$$\cdots \to \mathrm{H}_n(\mathbf{A}) \xrightarrow{\mathrm{H}_n(i)} \mathrm{H}_n(\mathbf{B}) \xrightarrow{\mathrm{H}_n(p)} \mathrm{H}_n(\mathbf{C}) \xrightarrow{\delta_n} \mathrm{H}_{n-1}(\mathbf{A}) \xrightarrow{\mathrm{H}_{n-1}(i)} \mathrm{H}_{n-1}(B) \xrightarrow{\mathrm{H}_{n-1}(p)} \mathrm{H}_{n-1}(\mathbf{C}) \to \cdots$$

对于上同调有

$$\cdots \to \mathrm{H}^n(\mathbf{A}) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(i)} \mathrm{H}^n(\mathbf{B}) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(p)} \mathrm{H}^n(\mathbf{C}) \xrightarrow{\delta^n} \mathrm{H}^{n+1}(\mathbf{A}) \xrightarrow{\mathrm{H}^{n+1}(i)} \mathrm{H}^{n+1}(B) \xrightarrow{\mathrm{H}^{n+1}(p)} \mathrm{H}^{n+1}(\mathbf{C}) \to \cdots$$

证明. 这引理一个巧妙的证明来自对蛇形引理的使用。指标的升降没有本质区别，链复形的微分记作 $d_n : A_n \to A_{n-1}, n \in \mathbb{Z}$，为了简便不区分 A, B, C 的微分，考虑下同调情形的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{H}_n(\mathbf{A}) \arrow[r, "\mathrm{H}_n(i)"] \arrow[d, "\subset"] & \mathrm{H}_n(\mathbf{B}) \arrow[r, "\mathrm{H}_n(p)"] \arrow[d, "\subset"] & \mathrm{H}_n(\mathbf{C}) \arrow[d, "\subset"] \arrow[dddll, rounded corners, "\delta_n"] & \\
0 \arrow[r] & \frac{A_n}{\mathrm{im}(A_{n+1}\to A_n)} \arrow[r, "\pi i"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & \frac{B_n}{\mathrm{im}(B_{n+1}\to B_n)} \arrow[r, "\pi p"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & \frac{C_n}{\mathrm{im}(C_{n+1}\to C_n)} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{A_n}{\mathrm{im}(A_{n+1}\to A_n)} \arrow[r, "\pi i"] \arrow[d] & \frac{B_n}{\mathrm{im}(B_{n+1}\to B_n)} \arrow[r, "\pi p"] \arrow[d] & \frac{C_n}{\mathrm{im}(C_{n+1}\to C_n)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \mathrm{H}_{n-1}(\mathbf{A}) \arrow[r, "\mathrm{H}_{n-1}(i)"] & \mathrm{H}_{n-1}(\mathbf{B}) \arrow[r, "\mathrm{H}_{n-1}(p)"] & \mathrm{H}_{n-1}(\mathbf{C}) &
\end{tikzcd}$$

对于上同调的情形，指标下降改成指标上升即可。为了得到长正合列，对每一个 n 根据上面的交换图可以得到六项的长正合列，再将这些六项长正合列依次首尾拼接起来即可 (相邻六项长正合列有三项相交，恰可以根据定义相连)。 □

和 5-引理类似，短正合列两边的投射消解或单射消解可以诱导出中间项的投射消解或单射消解，自然要要求它们视作链复形是短正合列，也就是横竖均是正合列的交换图。这被形象地称为马蹄引理

引理 **0.11.2** (马蹄引理 (Horseshoe)). 考虑 Abel 范畴上的短正合列 $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$，假设 A, C 有投射消解 $\mathbf{P}(A) : \cdots \to P_{A,n} \xrightarrow{d_{A,n}} \cdots P_{A,0} \xrightarrow{d_{A,0}} A \to 0$ 和 $\mathbf{P}(C) : \cdots \to P_{C,n} \xrightarrow{d_{C,n}} \cdots P_{C,0} \xrightarrow{d_{C,0}} C \to 0$ 而

且 A, C 有单射消解 $\mathbf{I}(A): 0 \to A \xrightarrow{d^{A,0}} I_{A,0} \to \cdots \xrightarrow{d^{A,n}} I_{A,n} \to \cdots$ 和 $\mathbf{I}(C): 0 \to C \xrightarrow{d^{C,0}} I_{C,0} \to \cdots \xrightarrow{d^{C,n}} I_{C,n} \to \cdots$。那么总可以找到 B 的相应的投射消解 $\mathbf{P}(B): \cdots \to P_{B,n} \xrightarrow{d_{B,n}} \cdots P_{B,0} \xrightarrow{d_{B,0}} B \to 0$ 与单射消解 $\mathbf{I}(B): 0 \to B \xrightarrow{d^{B,0}} I_{B,0} \to \cdots \xrightarrow{d^{B,n}} I_{B,n} \to \cdots$ 满足

$$0 \to \mathbf{I}(A) \xrightarrow{\mathbf{i}} \mathbf{I}(B) \xrightarrow{\mathbf{p}} \mathbf{I}(C) \to 0$$
$$0 \to \mathbf{P}(A) \xrightarrow{\mathbf{i}} \mathbf{P}(B) \xrightarrow{\mathbf{p}} \mathbf{P}(C) \to 0$$

是作为链复形的短正合列，即每行正合每列是链复形的交换图。

证明. 仍然是归纳的办法试图延长消解序列。和维数移动的证明中记号类似，记 $K_{A,i} = \ker d_{A,i}, V_{A,i} = \mathrm{im} d^{A,i}, i \geq 0$ 以及 $K_{C,i} = \ker d_{C,i}, V_{C,i} = \mathrm{im} d^{C,i}, i \geq 0$，特例是 $K_{A,-1} = A = V_{A,-1}$ 和 $K_{C,-1} = C = K_{C,-1}$。证明的思路是填充短正合列 $0 \to K_{-,i} \to P_{-,i} \to K_{-,i-1} \to 0$ 和 $0 \to V_{-,i} \to I_{-,i} \to V_{-,i+1} \to 0$ 得到如下的 3×3 交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_{A,0} \arrow[r, "i'_0"] \arrow[d] & K_{B,0} \arrow[r, "p'_0"] \arrow[d] & K_{C,0} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_{A,0} \arrow[r, "i_0"] \arrow[d] & P_{B,0} \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, dashed, "d_{B,0}"] & P_{C,0} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\sigma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & V_{A,0} \arrow[r, "i'^0"] \arrow[u] & V_{B,0} \arrow[r, "p'^0"] \arrow[u] & V_{C,0} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_{A,0} \arrow[r, "i^0"] \arrow[u] & I_{B,0} \arrow[r, "p^0"] \arrow[u] & I_{C,0} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[u] & B \arrow[r, "p"] \arrow[u, dashed, "d^{B,0}"'] \arrow[ul, dashed, "\delta"] & C \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

此时定义 $P_{B,0} = P_{A,0} \oplus P_{C,0}, I_{B,0} = I_{A,0} \oplus I_{C,0}$，根据 $P_{C,0}$ 的投射性以及 $I_{A,0}$ 的投射性可以得到虚线映射 σ, δ 的存在性，定义

$$\begin{aligned}
d_{B,0}: P_{B,0} = P_{A,0} \oplus P_{C,0} \to B \\
d_{B,0}(a, c) = d_{A,0}a + \sigma c \\
d^{B,0}: B \to I_{B,0} = I_{A,0} \oplus I_{C,0} \\
d^{B,0}b = (\delta b, d^{C,0}pb)
\end{aligned}$$

根据定理 0.7得到这样定义的 $d_{B,0}$ 是满射以及 $d^{B,0}$ 是单射。于是定义 $K_{B,0} = \ker d_{B,0}, V_{B,0} = \mathrm{im} d^{B,0}$，映射上 i_0, i^0, i'_0, i'^0 是自然的嵌入，p_0, p^0, p'_0, p'^0 是向第二个分量的投影。从而这交换图已经有了全部列的正合性和最下两行的正合性，从构造直接证明不难得到最上行的正合性。

这样假设我们已经对小于等于 n 的情形构造出了上述的 3×3 的行列均正合的交换图，考虑 $n+1$ 时，和上面类似定义 $P_{B,n+1} = P_{A,n+1} \oplus P_{C,n+1}, I_{B,n+1} = I_{A,n+1} \oplus I_{C,n+1}$，根据 $P_{C,n+1}$ 的投射性以及 $I_{A,n+1}$ 的投射性可以得到如下虚线映射 σ, δ 的存在性，

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_{A,n+1} \arrow[r, "i'_{n+1}"] \arrow[d] & K_{B,n+1} \arrow[r, "p'_{n+1}"] \arrow[d] & K_{C,n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_{A,n+1} \arrow[r, "i_{n+1}"] \arrow[d] & P_{B,n+1} \arrow[r, "p_{n+1}"] \arrow[d] & P_{C,n+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\sigma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_{A,n} \arrow[r, "i'_n"] \arrow[d] & K_{B,n} \arrow[r, "p'_n"] \arrow[d] & K_{C,n} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

和

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & V_{A,n+1} \arrow[r, "i'^{n+1}"] \arrow[u] & V_{B,n+1} \arrow[r, "p'^{n+1}"] \arrow[u] & V_{C,n+1} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_{A,n+1} \arrow[r, "i^{n+1}"] \arrow[u] & I_{B,n+1} \arrow[r, "p^{n+1}"] \arrow[u] & I_{C,n+1} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & V_{A,n} \arrow[r, "i'^n"] \arrow[u] & V_{B,n} \arrow[r, "p'_n"] \arrow[u] \arrow[ul, dashed, "\delta"] & V_{C,n} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

类似定义

$$
\begin{aligned}
d_{B,n+1} : P_{B,n+1} = P_{A,n+1} \oplus P_{C,n+1} \to K_{B,n} \\
d_{B,n+1}(a,c) = d_{A,n+1}a + \sigma c \\
d^{B,n+1} : V_{B,n} \to I_{B,n+1} = I_{A,n+1} \oplus I_{C,n+1} \\
d^{B,n+1}b = (\delta b, d^{C,n+1}pb)
\end{aligned}
$$

和上面类似定义 $K_{B,0} = \ker d_{B,n+1}, V_{B,n+1} = \operatorname{im} d^{B,n+1}$，根据相同的原因，这也是 3×3 的行列均正合的交换图。从而拼接 $d_{B,n}$ 和 $d^{B,n}$ 得到由 $I_{B,-}, P_{B,-}$ 构成的消解如下

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(B) : \cdots P_{B,n} \xrightarrow{\subset \circ d_{B,n}} P_{B,n-1} \to \cdots \to P_{B,0} \xrightarrow{d_{B,0}} B \to 0 \\
\mathbf{I}(B) : 0 \to B \xrightarrow{d^{B,0}} I_{B,0} \to \cdots I_{B,n-1} \xrightarrow{d^{B,n} \circ \supset} I_{B,n} \to \cdots
\end{aligned}
$$

可以给出链复形的短正合列

$$
\begin{aligned}
0 \to \mathbf{I}(A) \xrightarrow{\mathbf{i}} \mathbf{I}(B) \xrightarrow{\mathbf{p}} \mathbf{I}(C) \to 0 \\
0 \to \mathbf{P}(A) \xrightarrow{\mathbf{i}} \mathbf{P}(B) \xrightarrow{\mathbf{p}} \mathbf{P}(C) \to 0
\end{aligned}
$$

$\square$

有上述的两个引理，取 A,C 的投射消解或单射消解，先用 Horseshoe 引理得到投射消解或者单射消解作为链复形的短正合列，由于投射对象构成的短正合列是可裂的，经过 T 作用后保持正合性，单射对象构成的短正合列也是可裂的，经过 T 作用后还是正合的，再根据链复形短正合列的诱导长正合列的性质立刻得到上面四个典范的长正合列。一个需要辨明的事实是所谓的典范性，选择不同的投射或者单射消解时如下链映射构成的图表不一定交换：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{P}(A) \arrow[r, "i"] \arrow[d, shift left, "1_A"] & \mathbf{P}(B) \arrow[r, "p"] \arrow[d, shift left, "1_B"] & \mathbf{P}(C) \arrow[r] \arrow[d, shift left, "1_B"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{P}'(A) \arrow[r, "i'"] \arrow[u, shift left, "1'_A"] & \mathbf{P}'(B) \arrow[r, "p'"] \arrow[u, shift left, "1'_B"] & \mathbf{P}'(C) \arrow[r] \arrow[u, shift left, "1'_C"] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{I}(A) \arrow[r, "i"] \arrow[d, shift left, "1_A"] & \mathbf{I}(B) \arrow[r, "p"] \arrow[d, shift left, "1_B"] & \mathbf{I}(C) \arrow[r] \arrow[d, shift left, "1_B"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{I}'(A) \arrow[r, "i'"] \arrow[u, shift left, "1'_A"] & \mathbf{I}'(B) \arrow[r, "p'"] \arrow[u, shift left, "1'_B"] & \mathbf{I}'(C) \arrow[r] \arrow[u, shift left, "1'_C"] & 0
\end{tikzcd}$$

但是根据延拓唯一性其在同伦的意义下是交换的，也就是对应的映射是同伦等价的链映射，那么在同调群或者上同调群上诱导的映射是同构的 $(L_{-}i = L_{-}i', R^{-}i = R^{-}i')$ 且同调群或上同调群是在同伦下同构。那么上述四个长正合列在链复形同构意义下不依赖于消解的选择，即为典范的。 $\square$

同调代数的长正合列是计算同调信息的强大工具，称得上代数拓扑和示性类理论中的核心工具。导出函子的更原始的雏形是以下二点被称为一类卫星函子的构造。

$\boxed{\text{卫星函子 (satellite functor)}}$ 对于一个有足够多的投射对象和足够多的单射对象的 Abel 范畴，卫星函子的技术能够从半正合的序列诱导链复形。取 A 是 Abel 范畴中对象，将其嵌入单射模 Q 以及投于投射模 P 中得到如下的短正合列

$$0 \to M \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} A \to 0$$

$$0 \to A \xrightarrow{i} Q \xrightarrow{p} N \to 0$$

和同伦延拓类似，如果取 $f : A \to B$ 做上述短正合列，投射性质和单射性质给出下交换图。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "f_2"] & P_A \arrow[r, "p_A"] \arrow[d, dashed, "f_1"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_B \arrow[r, "i_B"] & P_B \arrow[r, "p_B"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

P_A 的投射性给出虚线出 f_1 的存在性，由于 $p_B f_1 i_A = f p_A i_A = 0$ 可知 $\mathrm{im} f_1 i_A \subset \ker p_B = \mathrm{im} i_B$，$i_B$ 是单射给出 f_2 的存在性。考虑在协变函子 T 作用后，选择不同的延拓 f_1, f_1'，则 $p_B(f_1 - f_1') = f p_A - f p_A = 0$，从而 $\mathrm{im}(f_1 - f_1') \subset \ker p_B = \mathrm{im} i_B$，给出某一个 $h : P_A \to M_B$ 使得 $f_1 - f_1' = i_B h$，根据交换性 $i_B(f_2 - f_2') = (f_1 - f_1') i_A = i_B h i_A$，利用 i_B 单得到 $f_2 - f_2' = h i_A$，如果定义 $S_1T(A) = \ker T i_A$，$T(f_2), T(f_2')$ 在 S_1T 上的作用是一致的，那么存在唯一的延拓记成 $S_1T(f)$，特别地取 $1_A : A \leftrightarrows A : 1_A$，这样的延拓 $S_1T(1_A)$ 只能是同构，不依赖于短正合列的选择。至此定义出了左卫星函子 S_1T。至于右卫星函子，用带有单射模的短正合列定义 $S^1T(A) := \mathrm{coker}(T(Q_A) \xrightarrow{Tp_A} T(N_A))$，经过和上面对左卫星函子

完全对偶的论证便得到函子构造。

如果 T 是反变的，那么就用带单射对象的短正合列定义 $S_1T(A) := \ker(T(N_A) \xrightarrow{Tp_A} T(Q_A))$，用带投射对象的短正合列定义 $S^1T(A) := \operatorname{coker}(T(P_A) \xrightarrow{Ti_A} T(M_A))$。归纳地把上面的对卫星函子定义延拓到整数指数。

$$S_{n+1}T(A) := (S_1(S_nT))(A) \quad n \geq 0, \quad (S_0T = T)$$
$$S^{n+1}T(A) := (S^1(S^nT))(A) \quad n \geq 0, \quad (S^0T = T)$$
$$S_{-n}T := S^nT, \quad S^{-n}T := S_nT \quad n \geq 0$$

定义 0.4 (卫星函子 (satellite)). *在具有足够多单射对象和投射对象的 Abel 范畴中，上述归纳定义的结构自然具有函子性，称 S^nT 是 T 的右卫星函子，S_nT 是 T 的左卫星函子。*

卫星函子会具有一些简单的零化性质，例如如果 A 投射，协变函子的正的左卫星函子在 A 上都是零，反变函子的正的右导出函子在 A 上都是零；如果 A 单射，协变函子的正的右卫星函子在 A 上都是零，反变函子的正的左导出函子在 A 上都是零。

定理 0.12 (卫星函子诱导链复形). *如果 Abel 范畴中的短正合列 $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ 若 T 协变，诱导卫星函子的链复形*

$$\cdots \to S^nT(C) \xrightarrow{S^nTp} S^nT(B) \xrightarrow{S^nTi} S^nT(A) \xrightarrow{\delta^n} S^{n+1}T(C) \to \cdots \quad n \in \mathbb{Z}$$

或者写成

$$\cdots \to S_nT(A) \xrightarrow{S_nTi} S_nT(B) \xrightarrow{S_nTp} S^nT(C) \xrightarrow{\delta_n} S_{n-1}T(A) \to \cdots \quad n \in \mathbb{Z}$$

若 T 反变，诱导卫星函子的链复形

$$\cdots \to S^nT(A) \xrightarrow{S^nTi} S^nT(B) \xrightarrow{S^nTp} S^nT(C) \xrightarrow{\delta^n} S^{n+1}T(A) \to \cdots \quad n \in \mathbb{Z}$$

或者写成

$$\cdots \to S_nT(C) \xrightarrow{S_nTp} S_nT(B) \xrightarrow{S_nTi} S^nT(A) \xrightarrow{\delta_n} S_{n-1}T(C) \to \cdots \quad n \in \mathbb{Z}$$

证明. 不妨取定短正合列，函子性给出不含连接部分的链复形条件，只需考虑连接处，首先构造 $D_1 : S_1T(C) \to T(A)$ 和 $D^1 : T(C) \to S^1T(A)$(针对协变函子 T)，构造 $D_1 : S_1T(A) \to T(C)$ 和 $D^1 : T(A) \to S^1T(C)$(针对反变函子 T)，这些连接完全是根据如下交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, shift left, "1"] & Q_A \arrow[r, "p_A"] & N_A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[u, shift left, "1"] & B \arrow[r, "p"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \quad \text{或} \quad \begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_C \arrow[r, "i_C"] & P_C \arrow[r, "p_C"] & C \arrow[r] \arrow[d, shift right, "1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "p"] & C \arrow[r] \arrow[u, shift right, "1"'] & 0
\end{tikzcd}$$

利用 P_-, Q_- 的投射性或者单射性得到延拓，再经过 T 作用得到 D_1, D^1，其技术和定义卫星函子时如出一辙。更高阶的连接函子无非是用 S^-, S_- 作用得到，这里也不再赘述。于是只需要证明在零附近 $S_1T \to S_1T \xrightarrow{D} T$ 和 $T \xrightarrow{D} S_{-1}T \to S_{-1}T$ 的链复形条件。这无非在下图是取合适的虚线处的投射延拓和单射延拓，使得

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_B \arrow[r, "i_B"] & P_B \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, dashed, "p_B"] & B \arrow[r] \arrow[d, "p"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "p"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

或

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "i_B"] & Q_B \arrow[r, "p_B"] & B \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[u, "i"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[u, dashed, "i_B"] & C \arrow[r] \arrow[u, "p"] & 0
\end{tikzcd}$$

是交换图，而且导出 n 附近的链复形条件。上两图分别用于 T 协变和反变的情形，注意到 $S_nT = S^{-n}T, n \in \mathbb{Z}$，对左卫星函子的链复形指标取负就得到右卫星函子的链复形。这结论便证毕。 □

以下对于连接同态的刻画将在下文多次使用。

定理 0.13 (连接同态的万有性质). *在有足够多的投射对象和单射对象的 Abel 范畴上考虑带有协变（反变）的上同调连接函子 $\{(T^n, \delta^n)\}_n$ 满足上同调连接性质如下*

1) 短正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 诱导链复形 $\cdots \to T^n(C) \to T^n(B) \to T^n(A) \xrightarrow{\delta} T^{n+1}(C) \to \cdots$。

2) δ^n 和链映射交换。

类似可以定义同调连接函子，只是要求上面条件 (1) 诱导反向的长正合列。定义如下的条件

i) 如果短正合列 $0 \to M \to P \to A \to 0$ 中 P 投射，那么对 $n < 0$ 而言 $0 \to T^n(A) \to T^{n+1}(M) \to T^{n+1}(P)$ 正合。

ii) 如果短正合列 $0 \to A \to Q \to N \to 0$ 中 Q 单射，那么对 $n > 0$ 而言 $T^{n-1}(Q) \to T^{n-1}(N) \to T^n(A) \to 0$ 正合。

和

i') 如果短正合列 $0 \to A \to Q \to N \to 0$ 中 Q 单射，那么对 $n < 0$ 而言 $0 \to T^n(A) \to T^{n+1}(N) \to T^{n+1}(Q)$ 正合。

ii') 如果短正合列 $0 \to M \to P \to A \to 0$ 中 P 投射，那么对 $n > 0$ 而言 $T^{n-1}(P) \to T^{n-1}(M) \to T^n(A) \to 0$ 正合。

考虑两族这样满足上同调连接性质的协变（反变）函子 $\{(T^n, \delta_1^n)\}_n$ 和 $\{(U^n, \delta_2^n)\}_n$，设它们在 $n = 0$ 处有和连接函子交换的自然变换 $\phi^0 : T^0 \to U^0$，如果 $\{(U^n, \delta_2^n)\}_n$ 满足条件 i（条件 i'），则 ϕ 可以向 $n < 0$ 方向唯一地延拓；如果 $\{(T^n, \delta_1^n)\}_n$ 满足条件 ii(条件 ii')，则 ϕ 可以向 $n > 0$ 方向唯一地延拓。这样的延拓仍然给出连接函子交换的自然变换。类似可以建立同调连接函子的万有性质。

证明. 这命题来自于 [5, p.46]。归纳地构造 ϕ^n ，例如满足条件 A 时向负方向延拓，取短正合列 $0 \to M \to P \to A \to 0$ 中 P 投射，那么假设对 $n+1$ 以上的指标已经构造处自然变换 ϕ^- ，考虑如下交换图的补全

$$\begin{tikzcd} & T^n(A) \arrow[r, "\delta_1^n"] & T^{n+1}(M) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\phi^{n+1}(M)"] & T^{n+1}(P) \arrow[d, dashed, "\phi^{n+1}(P)"] \\ 0 \arrow[r] & U^n(A) \arrow[r, "\delta_2^n"] & U^{n+1}(M) \arrow[r] & U^{n+1}(P) \end{tikzcd}$$

根据条件 i 这交换图底部列是正合的，而且顶部两个映射复合是零，根据单射性 $\phi^{n+1}(M)\circ\delta_1^n$ 唯一地诱导出映射 $\phi^n(A):T^n(A)\to U^n(A)$ 。下面验证这是自然变换而且不依赖于 P,M 的选择，对 $f:A\to B$ 取如下图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, dashed, "f_2"] & P_A \arrow[r, "p_A"] \arrow[d, dashed, "f_1"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_B \arrow[r, "i_A"] & P_B \arrow[r, "p_B"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

根据定义 0.4-卫星函子定义时的论述，上图每行正合，存在虚线的延拓 f_1,f_2 使得图表交换。用 M_B,P_B 定义 $\phi^n(B)$，计算

$$\begin{aligned}\delta_2^nU^n(f)\phi^n(B)&=U^{n+1}(f_2)\delta_2^n\phi^n(B)=U^{n+1}(f_2)\phi^n(M_B)\delta_2^n=\phi^{n+1}(M_A)T^{n+1}(f_2)\delta_1^n\\&=\phi^{n+1}(M_A)\delta_1^nT^n(f)=\delta_2^n\phi^n(A)T^n(f)\end{aligned}$$

根据 δ_2^n 单，那么 $U^n(f)\phi^n(B)=\phi^n(A)T^n(f)$，于是这映射确实是自然变换，也说明选择不同的 P_-,M_- 定义的 ϕ^n 是同构的，于是归纳得到了良定的 ϕ^n。

只需再证实这样的 ϕ^n 确实和连接函子交换，这无非是补全

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_C \arrow[r, "i_C"] \arrow[d, dashed, "1_2"] & P_C \arrow[r, "p_C"] \arrow[d, dashed, "1_1"] & C \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "p"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

作为每行正合的交换图表。考虑映射链 $C\xrightarrow{\delta}M_C\xrightarrow{1_2}A$ 在自然变换 ϕ 下得到的如下交换图

$$\begin{tikzcd} T^n(C) \arrow[r, "\delta_1^n"] \arrow[d, dashed, "\phi^n(C)"] & T^{n+1}(M_C) \arrow[r, "T^{n+1}(1_2)"] \arrow[d, dashed, "\phi^{n+1}(M_C)"] & T^{n+1}(A) \arrow[d, dashed, "\phi^{n+1}(A)"] \\ U^n(C) \arrow[r, "\delta_2^n"] & U^{n+1}(C) \arrow[r, "U^{n+1}(1_2)"] & U^{n+1}(A) \end{tikzcd}$$

左侧小方块的交换性来自于 ϕ^- 的归纳定义，右侧小方块的交换性来自于 ϕ^- 的自然性，两行的映射链复合恰好是对应的连接函子来自于连接函子是链映射，于是导出的大的交换性就是自然变换与连接函子交换。

至于条件 ii 相关的证明无非和上述对偶，采用内射对象的短正合列唯一地延拓定义自然变换，再根据连接函子的满射性计算交换律，不予冗陈。反变函子的情形无非也是对偶。 □

利用此万有性质，不难得到卫星函子 S^nT 和所有满足定理中条件 i，ii 的上同调连接函子族都自然同构于 $\{S^kT^0\}_{k\in\mathbb{Z}}$，这也是卫星函子的强大之处，至于卫星函子的双函子版本 (bifunctor) 参考 [5, Chap 3]。有了导出函子和卫星函子的工具，注意到右 R-模和左 R-模的张量积可以自然成为 $\mathbb{Z}$-模 (定义 $s(a\otimes b)=$

$a \otimes sb = as \otimes b, s \in R$)，而 R-同态也具有 $\mathbb{Z}$-模结构。考虑 R-模范畴的张量函子 (R 非交换时必要使其为右模张量左模) 和同态函子

$$\begin{aligned} - \otimes - : & \quad \mathrm{Mod}^R \times \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}} \\ \mathrm{Hom}(-,-) : & \quad \mathrm{Mod}_R \times \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

取定 M 我们会得到四个函子 $M \otimes -, - \otimes M, \mathrm{Hom}(M,-), \mathrm{Hom}(-,M)$，这是模理论中较为重要的函子，其中前两个右正合，后两个左正合，$\mathrm{Mod}^R, \mathrm{Mod}_R, \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$ 都是 Abel 范畴，$\mathbb{Z}$-模上的同调理论给出

$$\begin{aligned} & T^A = A \otimes_R -, \quad T_A = - \otimes_R A, \quad S^A = \mathrm{Hom}_R(A,-), \quad S_A = \mathrm{Hom}_R(-,A) \\ & \mathrm{Tor}_n(A,B) := L_n T^A(B) (\simeq L_n T_B(A)) \quad n \geq 0 \\ & \mathrm{Ext}^n(A,B) := R^n S_B(A) (\simeq R^n S^A(B)) \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

上面括号中的等式来自于张量函子和同态函子的特殊性质。张量函子是右正合的，同态函子是左正合的，在 $n=0$ 计算有 $L_0 T^A = T^A, L_0 T_B = T_B$ 和 $R^0 S^A = S^A, R^0 S_B = S_B$，根据定义有 $T^A(B) = T_B(A), S^A(B) = S_B(A)$。更高维数的同构利用维数移动，记号和证明定理 0.10时一致，对 $i,j \geq 0$ 考虑如下交换图

$$\begin{tikzcd}
 & L_1 T_{K_{B,j}}(K_{A,i-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & L_1 T_{K_{B,j-1}}(K_{A,i-1}) \arrow[d] & \\
L_1 T^{K_{A,i}}(K_{B,j-1}) \arrow[r] \arrow[d] & T^{K_{A,i}}(K_{B,j}) \arrow[r] \arrow[d] & T^{K_{A,i}}(P_{B,j}) \arrow[r] \arrow[d] & T^{K_{A,i}}(K_{B,j-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T^{P_{A,i}}(K_{B,j}) \arrow[r] \arrow[d] & T^{P_{A,i}}(P_{B,j}) \arrow[r] \arrow[d] & T^{P_{A,i}}(K_{B,j-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
L_1 T^{K_{A,i-1}}(K_{B,j-1}) \arrow[r] & T^{K_{A,i-1}}(K_{B,j}) \arrow[r] \arrow[d] & T^{K_{A,i-1}}(P_{B,j}) \arrow[r] \arrow[d] & T^{K_{A,i-1}}(K_{B,j-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

根据左导出函子的性质上图 1,3 行和 1,3 列均正合，$P_{-,i}$ 的投射性使得 2 行和 2 列是短正合的。对上两行应用蛇形引理得到 $L_1 T_{K_{B,j-1}}(K_{A,i-1}) \simeq L_1 T^{K_{A,i-1}}(K_{B,j-1})$，考虑左上部分的交换性得到 $L_1 T_{K_{B,j}}(K_{A,i-1}) \simeq L_1 T^{K_{A,i}}(K_{B,j-1})$。利用维数移动计算 $n \geq 1$ 时

$$\begin{aligned} & L_n T^A(B) \simeq L_1 T^A(K_{B,n-2}) = L_1 T^{K_{A,-1}}(K_{B,n-2}) \simeq L_1 T_{K_{B,n-3}}(K_{A,0}) \simeq \cdots \\ & L_n T_B(A) \simeq L_1 T_B(K_{A,n-2}) = L_1 T_{K_{B,-1}}(K_{A,n-2}) \simeq \\ & L_1 T^{K_{A,-1}}(K_{B,n-2}) \simeq L_1 T_{K_{B,n-3}}(K_{A,0}) \simeq \cdots \simeq L_1 T_{K_{B,-1}}(K_{A,n-3}) \simeq L_1 T_{K_{B,-1}}(K_{A,n-2}) \\ & \Rightarrow L_n T^A(B) \simeq L_n T_B(A) \end{aligned}$$

至于右导出函子的关系，考虑类似的交换图如下

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & S^{V_{A,i}}(K_{B,j}) \arrow[r] \arrow[d] & S^{V_{A,i}}(P_{B,j}) \arrow[r] \arrow[d] & S^{V_{A,i}}(K_{B,j-1}) \arrow[r] \arrow[d] & R^1S^{V_{A,i}}(K_{B,j-1}) \\
0 \arrow[r] & S^{I_{A,i}}(K_{B,j}) \arrow[r] \arrow[d] & S^{I_{A,i}}(P_{B,j}) \arrow[r] \arrow[d] & S^{I_{A,i}}(K_{B,j-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & S^{V_{A,i-1}}(K_{B,j}) \arrow[r] \arrow[d] & S^{V_{A,i-1}}(P_{B,j}) \arrow[r] \arrow[d] & S^{V_{A,i-1}}(K_{B,j-1}) \arrow[r] \arrow[d] & R^1S_{V_{A,i-1}}(K_{B,j-1}) \\
 & R^1S_{K_{B,j}}(V_{A,i-1}) & 0 \arrow[r] & R_1S_{K_{B,j-1}}(V_{A,i-1}) &
\end{tikzcd}
$$

类似的原因有 $i,j \geq 0$ 时 $R^1S_{K_{B,j}}(V_{A,i-1}) \simeq R^1S^{V_{A,i}}(K_{B,j-1})$ 和 $R_1S_{K_{B,j-1}}(V_{A,i-1}) \simeq R^1S_{V_{A,i-1}}(K_{B,j-1})$，用维数移动的方法类似得到 $R^-S_A(B) \simeq R^-S^B(A)$。事实上这一结论可以用谱序列的方法更简洁地给出。

拓扑相关内容 | 0.3

这部分需要一定的拓扑学知识，例如关于分离公理和可数公理，紧性，连通性，乘积拓扑等基本概念。

范畴中的极限 在实数上或者完备的拓扑空间上可以定义通常意义的极限，在某一个范畴 $\mathfrak{F}$ 中的一个图 (diagram) 定义成某一个小范畴 $\mathfrak{D}$ 到 $\mathfrak{F}$ 的 (协变或者反变) 函子 $\mathcal{F} \in \mathbf{Fun}(\mathfrak{D}, \mathfrak{F})$。

定义 0.5 (范畴中的极限). 设 $(I, \geq)$ 是一个偏序集并且用序关系视作小范畴 $\mathfrak{I}$，称范畴 $\mathfrak{C}$ 的一个图 $\mathcal{I}_C \in \mathbf{Fun}(\mathfrak{I}^{\mathrm{op}}, \mathfrak{C})$ 的正向极限存在，如果存在 $C \in \mathfrak{C}$ 以及态射族 $\{c_i \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{I}(i), C)\}_{i \in \mathfrak{I}}$，对任何 $X \in \mathfrak{C}$，任何 $i < j \in I$，下面的实线交换图

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, dashed, "\exists!\theta"] & & X \\
 & \mathcal{I}(i) \arrow[ul, "c_i"'] \arrow[ur, "f_i"] & \\
 & \mathcal{I}(j) \arrow[u, "\mathcal{I}\,\mathrm{Hom}(i,j)"] \arrow[uul, bend left, "c_j"] \arrow[uur, bend right, "f_j"'] &
\end{tikzcd}
$$

有唯一的虚线处的态射 θ 使得整个图表交换。取 C' 也满足类似的万有性质，考虑 $X = C', f_i = c_i'$，不断延长态射得到 $C \to C' \to C \to C'$ 的复合，根据唯一性不难证明这种极限在同构意义下唯一，记作 $\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{I}(i)$。

称范畴 $\mathfrak{C}$ 的一个图 $\mathcal{I}_C \in \mathbf{Fun}(\mathfrak{I}, \mathfrak{C})$ 的逆向极限（投射极限）存在，如果存在 $C \in \mathfrak{C}$ 以及态射族 $\{c_i \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{I}(i), C)\}_{i \in \mathfrak{I}}$，对任何 $X \in \mathfrak{C}$，任何 $i < j \in I$，下面的实线交换图

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "c_i"] \arrow[ddr, bend right, "c_j"'] & & X \arrow[ll, dashed, "\exists!\theta"'] \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, bend left, "f_j"] \\
 & \mathcal{I}(i) \arrow[d, "\mathcal{I}\,\mathrm{Hom}(i,j)"] & \\
 & \mathcal{I}(j) &
\end{tikzcd}
$$

有唯一的虚线处的态射 θ 使得整个图表交换。取 C' 也满足类似的万有性质，考虑 $X = C', f_i = c'_i$，不断延长态射得到 $C \to C' \to C \to C'$ 的复合，根据唯一性不难证明这种极限在同构意义下唯一，记作 $\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{I}(i)$。

很多范畴上都存在极限，例如连续拓扑空间范畴，R-模范畴，群范畴等。如需时将阐明其具体构造。利用极限的语言可以统一很多术语，I 的偏序信息和函子信息将使得极限系统足够复杂，一些有益的形式化思考是范畴的乘积和余积，推出和拉回，核和余核，等化子和余等化子等基本构造都可以写成某些偏序集的极限。建立一些经典函子和极限的运算律会大大简化很多数学操作。这一考量也是范畴理论作为重构数学理论的有力工具的体现。本文将在后续证明中略微使用这些运算性质。

吉洪诺夫定理 Tychonoff 引理是一个依赖于选择公理 (事实上等价于选择公理) 的拓扑学定理，其本质上是说明任何紧拓扑的乘积拓扑还是紧拓扑。

定理 **0.14** (Tychonoff 引理). 设 I 是任何一个指标集，$\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ 是一族紧空间，那么配备乘积拓扑的乘积空间 $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I}\tau_i)$ 也是紧空间。

证明. 称开集族 $\{O_i\}_{i\in I}$ 是 (X,τ) 的一个子基如果 $\{O_i\}_{i\in I}$ 中有限交构成 τ 的一族拓扑基。以下引理描述了子基的对紧性的某种“控制”。

引理 **0.14.1** (Alexander 子基定理). 设 $\mathcal{E}$ 是 (X,τ) 的一个子基，如果由 $\mathcal{E}$ 中元素构成的开覆盖都有有限子覆盖，那么 (X,τ) 是紧集。

证明. 这里将不得不承认选择公理，或其等价形式的 Zorn 引理。反证法假若 X 不是紧的，存在开覆盖 O 没有有限子覆盖，那么定义

$$\mathcal{F} := \{O = \{O_i\}_{i\in I_O} : O \quad \text{是一族没有有限子覆盖的开覆盖}\}$$

是一个非空集合。考虑 $\mathcal{F}$ 中的包含关系作为偏序的全序子集 $\{E_\alpha\}_\alpha$，那么 $E := \cup_\alpha E_\alpha$ 是它们的上界，而且是开覆盖，E 中也没有有限子覆盖，否则根据全序性那些有限的开集 $O_{i_1},..,O_{i_n}$ 必定都属于某一个最大的 E_m，而定义要求 E_m 没有有限子覆盖，于是 $E \in \mathcal{F}$。

从而 $\mathcal{F}$ 的每一个全序子集都有上界，根据选择公理，$\mathcal{F}$ 中有极大元 $\mathcal{M}$。考虑 $S = \mathcal{M}\cap\mathcal{E}$，断言 S 是一个开覆盖。否则有 $x \in X$ 使得 x 不在任何 S 中的开集里。注意到 $\mathcal{M}$ 覆盖 X，有 $O \in \mathcal{M}$ 满足 $x \in M$，由于 $\mathcal{E}$ 是子基，有一些有限个 $V_1,..,V_n$ 使得 $x \in \cap_{i=1}^{i=n} V_i \subset O$，根据定义这些 V_i 不在 $\mathcal{M}$ 中，否则和 $x \notin S$ 矛盾。但是由于 $\mathcal{M}$ 的极大性，$\mathcal{M} \cup \{V_1,..,V_n\}$ 中有有限子覆盖。那么就有一些有限个 $U_{j_1},..,U_{j_{m_j}} \in \mathcal{M}$ 使得 $x \subset V_j \cup \cup_{i=1}^{i=m_j} U_{j_i}$，于是

$$X \subset \cap_{j=1}^{j=n}(V_j \cup \cup_{i=1}^{i=m_j} U_{j_i}) \subset (\cap_{j=1}^{j=n} V_j) \cup (\cup_{i=1,j=1}^{j=n,i=m_j} U_{j_i}) \subset O \cup (\cup_{i=1,j=1}^{j=n,i=m_j} U_{j_i})$$

但是这和 $\mathcal{F}$ 中元素没有有限子覆盖的定义矛盾，从而 $\mathcal{F}$ 是空集，(X,τ) 紧。 □

考虑乘积空间中的 $\{\pi_i^{-1}(U_i) : i \in I, U_i \in \tau_i\}$ 是乘积拓扑的一个子基。这个子基的开覆盖都有有限子覆盖，这是因为考虑一个这样的覆盖 $\mathcal{U}$，定义

$$U_i = \{O \in \tau_i : \pi^{-1}(O) \in \mathcal{U}\}, \quad i \in I$$

至少有某一个 U_i 覆盖 X_i，否则对每一个 X_i 都有 $x_i \in X_i$ 不再任何 U_i 中的开集里。考虑 $\Pi_{i\in I} x_i \in X$ 在某个 $\mathcal{U}$ 中的开集里，但是投射到每一个分量上又不在相应的 U_i 里，矛盾。假设 U_{i_0} 覆盖 X_{i_0}，根据 X_{i_0} 的紧性可以找到有限个 $O_1, .., O_n \in U_{i_0}$ 使得 $\cup_{i=1}^{i=n} O_i \supset X_{i_0}$，从而 $\pi_{i_0}^{-1}(O_1), .., \pi_{i_0}^{-1}(O_n)$ 是 X 的开覆盖。

于是应用 Alexander 子基定理立刻得出结论。 □

这个定理往往用来制造奇怪的紧空间，以及确保某类空间的紧性，例如下面的一类拓扑群。

$\boxed{\text{Profinite 群的刻画}}$ 如果一个拓扑群是有限离散拓扑群的投射极限 (用群的笛卡尔积商去一个投射系统的关系构成的极大正规子群得到的群)，就称这个拓扑群是 **profinite 群**，以下定理给出此类拓扑群的刻画。

定理 0.15 (pro-有限群的刻画)**.** *设 G 是一个拓扑群，以下三条命题是相互等价的。*

1) $G = \varprojlim_{i\in I} G_i$，$G_i$ 是有限的离散拓扑群，I 是某一个指标集，这等价于说 G 是 profinite 的。

2) G 作为拓扑空间是紧 Hausdorff 的和全不连通的（连通分支都是单点）。

3) G 作为拓扑空间是紧 Hausdorff 的，$\{e\}$ 有开正规子群构成的邻域基。

证明. (3) ⇒ (1)：要具体构造出 G，考虑 $\{e\}$ 附近开正规子群构成的邻域基 U_i, 考虑商群构成的 profinite 群

$$\phi : G \to \varprojlim_{U_i \lhd G} \frac{G}{U_i}$$

不难验证 ϕ 是同构。

(1) ⇒ (2)：紧性来自于 Tychonoff 引理以及投射极限在乘积空间中闭，紧空间的闭子集也一定是紧的；对两个不同的点 x, y 只需要取到某一个不同的分量 G_{i_0}，利用有限集拓扑的全不连通性可以说明 x, y 不在同一连通分支上，进而全不连通；Hausdorff 性质来自于离散拓扑的 Hausdorff 性。

(2) ⇒ (3)：无非是构造开子群。注意到紧 Hasdorff 空间一点的连通分支是所有包含这一点的既开又闭子集的交集，这是因为如果取 x 的连通分支是 C_x，任何包含 x 的既开又闭的子集 U_x 和 C_x 的交集是 C_x 中既开又闭的子集，由于 C_x 连通，只能 $U_x \cap C_x = C_x$，从而 $C_x \subset U_x$，那么 x 的连通分支 C_x 包含于所有包含 x 的既开又闭子集的交集 $\cap_t U_t$，另一方面 $\cap_t U_t$ 紧，如果其拆成两个既开又闭集 U, V 的无交并，那么 $(U \sqcup V)^c$ 和 $\cap_t U_t$ 不交，$\{U_t^c\}_t, U, V$ 是全空间的一族开覆盖，有有限子覆盖使得 $(U \sqcup V)^c$ 和某有限个 U_t 的交集 B 非空。那么 $B \cap U$ 和 $B \cap V$ 是不交的既开又闭子集而且 $(B \cap U) \sqcup (B \cap V) = \cap_t U_t$，那么 $\cap_t U_t = B \cap U \subset U$ 或者 $\cap_t U_t = B \cap V \subset V$ 只有一个成立，于是 $\cap_t U_t$ 连通，进而 $C_x = \cap_t U_t$。

于是此时的全不连通性说明对任何子集 $x \in W$ 都有既开又闭的子集族 $U_t, \cap_t U_t = \{x\}$，于是对任何开邻域 $W \ni x$，$X - W$ 紧，$\{U_t^c\}_t$ 是 $X - W$ 的开覆盖进而有有限子覆盖 $U_1^c, .., U_k^c$, 从而 $x \in \cap_{i=1}^{i=k} U_i \subset W$，那么 x 有既开又闭的邻域基。尤其考虑 e 的某一个 e 的既开又闭邻域 U，如下构造给出一个开子群

$$N_U := \{n \in U : Un \subset U\} \quad H_U := N_U \cap N_U^{-1} = \{h \in N : h^{-1} \in N\}$$

固定 $n \in N$，U 的开性和群运算的连续性可以推出对 $u \in U$ 存在开集 $n \in N_u, U_u$ 满足 $u \in U_u U_u N_u \subset U$。$U$ 是紧空间的闭集所以也是紧的，所以有限个 $N_{U1}, .., N_{Un}, U_1, .., U_k \subset U$ 满足 $U_i N_{Ui} \subset U$，根据紧性 U 是这些 U_i 的并，这时 $n \in \cap_{i=1}^{i=k} N_{Ui} \subset N_U$ 从而 N 是开集。因为取逆运算连续 H_U 也是开集，根据定义 H_U 在乘法下封闭，而且 $H_U \subset U$。于是如果有了开子群构成的邻域基，用这些开子群对 G 进行陪集分解，根据紧性可知开子群都是有限指数的，进而也是闭子群。考虑 $\cap_{g \in \{G:G_i\}} g G_i g^{-1}$ 就是开正规子群，用这个方法加细邻域基，就得到开正规子群构成的邻域基。 □

数论和拓扑的结合体现在利用 pro-有限性质研究无穷扩张 Galois 群。透过 Krull 等人的思想来考虑带拓扑的 Galois 群。

拓扑 Galois 群 考虑 Galois 群 $G = \mathrm{Aut}(E|F)$，如果 $E|F$ 是有限域扩张，那么 G 在离散拓扑下自然是拓扑群，这部分的意图是定义一种无穷 Galois 扩张，利用上述提到的正向极限，考虑一族 Galois 扩张 $E_i|F$，对应的 Galois 群是 G_i，如果设 $i < j$ 当且仅当 $E_i \subset E_j$，此时在 Galois 群层面就有限制映射 $G_j \to G_i$，根据Galois 理论的基本内容这个映射的核就是 $\mathrm{Gal}(E_i|E_i)$ 是正规子群。定义无穷的 Galois 群是

$$\mathrm{Gal}(E|F) := \varprojlim_{\substack{E_i|F\text{有限} \\ \text{Galois}}} \mathrm{Gal}(E_i|F)$$

在有限 Galois 群上取离散拓扑，这无穷 Galois 群就自然成为 profinite 群：一类由上面定理 0.15刻画的拓扑群。这样定义无穷 Galois 群上的拓扑是为了推广定理 0.4-Galois 对应。也就是此时 $E|F$ 的中间域和 $\mathrm{Gal}(E|F)$ 的闭子群一一对应。此对应完全是有限形式在拓扑群下的移植，只需要关注 pro-有限拓扑的性质。

群上同调理论简介 1

第一部分 数域的上同调理论

本部分是群上同调理论的核心内容，旨在严格定义群的上同调理论和同调理论，第一节将利用导出函子的技术定义群的同调代数，并讨论一些重要的相关性质；第二节简述 Galois 上同调的基本结论，给出非交换的上同调理论以及 Galois 下降的基本方法；第三节将介绍 Brauer 群并证明其与中心单代数分类的关系，略论几何 Brauer 等价的相关事实。相关记号的确定如下：假设 G 是扩域 $K|k$ 的 Galois 群，$K|k$ 一般默认是有限 Galois 扩张。而且为了叙述方便在不作说明的情况下都考虑有限的域扩张。此处还沿袭了对于矩阵群等的传统记号，具体可回查卷首关于记号约定的表格。

群的同调理论 1.1

考虑一个简单的情况，假设 R 是一个环，如果在有限和构成的模 $\oplus_{g\in G}Rg = \{\sum_{g\in G} a_g g : a_g \in R, |\{a_g \neq 0\}| < \infty\}$ 上定义如下的加法和乘法

$$\begin{aligned}\oplus_{g\in G} Rg \times \oplus_{g\in G}Rg &\to \oplus_{g\in G}Rg\\ +:(\sum_{g\in G} a_g g, \sum_{g\in G} b_g g) &\to \sum_{g\in G}(a_g+b_g)g\\ \cdot:(\sum_{g\in G} a_g g, \sum_{g\in G} b_g g) &\to \sum_{g\in G}\sum_{s,t\in G, st=g} a_s b_t g\end{aligned}$$

由于有限性上面的定义是合法的，从而在 $\oplus_{g\in G}Rg$ 上建立了环的代数结构，称 $R[G] = (\oplus_{g\in G}Rg, +, \cdot)$ 是环 R 上 G 的**群代数**。对于群的表示理论和上同调理论的研究往往从这一个代数结构出发。而对代数结构的研究 (交换代数，数域，非结合代数) 的本质进一步体现在对其作用域 (模，向量空间，表示) 的结构和性质的研究上，如果考虑群代数的模，例如 A 作为 $R[G]$-模，这些模连同它们之间的同态映射构成了一个 Abel 范畴，这上的同调代数将给出群的同调理论。即取 $\mathbb{Z}$ 作为平凡 G-模，所以 $\mathbb{Z}$ 既可以看成左平凡 $\mathbb{Z}[G]$-模又可以看成右平凡 $\mathbb{Z}[G]$-模，利用前面给出

$$\mathrm{H}^n(-,-): \mathrm{H}^n(G,A) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A) \quad n \geq 0$$

和

$$\mathrm{H}_n(-,-): \mathrm{H}_n(G,A) = \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}[G]}_n(\mathbb{Z}, A) \quad n \geq 0$$

正整数 n 一般称为这些同调群 (上同调群) 的维数 (有人也称其为阶数)。进一步考虑群的同调代数的一些基本性质。

$\boxed{\text{群同调理论的基本性质}}$ 设 A 是 $\mathbb{Z}$-模，**相对投射**的 G-模 (relative projective)是指那些同构于 $\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}A$ 的直和分量的左 $\mathbb{Z}[G]$-模，$\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}A$ 上左 $\mathbb{Z}[G]$-模结构由 $g(a\otimes_{\mathbb{Z}}b):=ga\otimes_{\mathbb{Z}}b$ 给出；**相对单射**的 G-模 (relative injective)是指那些同构于 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G],A)$ 的直和分量的左 $\mathbb{Z}[G]$-模。$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G],A)$ 的左 $\mathbb{Z}[G]$-模结构由 G 的右作用在 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,A)$ 的象给出，即 $g(f)=f(-\cdot g)$。这些术语也被叫做弱投射，弱单射。下面的定理说明此类模的同调信息较为简单。

定理 1.1 (投射和单射性质)**.** *取 G-模 A 如果 A 是相对投射的，那么 $\mathrm{H}_q(G,A)=0,q\geq 1$；如果 A 是相对单射的，那么 $\mathrm{H}^q(G,A)=0,q\geq 0$。*

证明. 此结果的原因来自于同调代数的基本性质：投射模的高于一阶的同调平凡，单射模的高于一阶的上同调平凡。不妨考虑 X 是某一个 $\mathbb{Z}$-模，$A=\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}X$ 的下同调，对任何左 $\mathbb{Z}[G]$-模 (G-模) B，张量积给出 $\mathbb{Z}$-模同构 $B\otimes_{\mathbb{Z}[G]}A=B\otimes_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}X)=B\otimes_{\mathbb{Z}}X$，取左导出函子就有

$$\mathrm{H}_q(G,A)=\mathrm{Tor}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},X)=\mathrm{H}^q(\{1\},X)=0,\quad q\geq 1$$

因为 $\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 上投射模，取投射消解 $\cdots\to 0\to\cdots\to 0\to\mathbb{Z}\to 0$ 得到 $\mathrm{Tor}_{\geq 1}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},X)=0$。当 A 确实是直和分量时，如果 $\mathrm{H}_q(G,A)$ 非零，那么嵌入到 $\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}X$ 上的上同调也非零，矛盾。于是得到结论。

相对单射的情形假设 $A=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G],X)$,$X$ 是某一个 $\mathbb{Z}$-模。那么对其他的 G-模 B,有 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(B,A)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(B,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G],X))\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}[G]}B,X)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B,X)$，从而取 $B=\mathbb{Z}$ 用投射消解得到

$$\mathrm{H}^q(G,A)=\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^q(\mathbb{Z},X)=\mathrm{H}^q(\{1\},X)=0,\quad q\geq 1$$

因为 $\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 上单射模，取单射消解 $0\to\mathbb{Z}\to 0\to\cdots\to 0\to\cdots$ 得到 $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^{\geq 1}(\mathbb{Z},-)=0$。当 A 确实是直和分量时，如果 $\mathrm{H}^q(G,A)$ 非零，那么嵌入到 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G],X)$ 上上同调也非零，矛盾，于是得到结论。 □

导出函子定义的时候，在 $n=0$ 处的基点信息被截断的零映射保留，也就是我们在消解列构成的链复形中，P_{-1} 或 I_{-1} 实际上是 $T(A)$ 或者 $T(B)$，但在取同调时总把第 -1 项截断成零，这里注意是由于张量函子和同态函子的半正合性，使得如果不作截断定义出的零阶同调上同调总是平凡。那么在这样的定义下，群的情形 H^0 和 H_0 作为基点总有如下关系。

定理 1.2 (基点)**.** *对于群上同调而言，对任何群 G 以及任何 G-模 A，都有*

$$\mathrm{H}^0(G,A)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A)=A^G=\{a\in A:ga=a\forall g\in G\}$$
$$\mathrm{H}_0(G,A)=\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[G]}A=\frac{A}{\mathbf{I}_GA},\mathbf{I}_G=\{s=\sum_{g\in G}m_gg\in\mathbb{Z}[G]:\sum_{g\in G}m_g=0\}\subset\mathbb{Z}[G]$$

证明. 对于上同调，无论如下选择 $\mathbb{Z}$ 的 G-投射消解，由于 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(-,A)$ 保持 $\mathbb{Z}$ 处的正合性，那么

$$\mathrm{H}^0(G,A)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A)\simeq A^G$$

同构是由 $f\to f(1)$ 和 $a\to -\cdot a$ 给出，其实进一步这给出函子的自然同构 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},-)\simeq -^G$。

对于下同调，由于 $-\otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ 保持投射消解中 $\mathbb{Z}$ 处的正合性，$\mathrm{H}_0(G,A)=\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$，考虑 $\epsilon:\mathbb{Z}[G]\to Z,\quad \epsilon(\sum_{g\in G} m_g g)=\sum_{g\in G} m_g$，有短正合列

$$0\to \mathbf{I}_G \xrightarrow{\subseteq} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}\to 0$$

用 $-\otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ 作用上式，张量函子的右正合性给出 $\mathbf{I}_G A \xrightarrow{\subseteq} A \xrightarrow{\epsilon\otimes_{\mathbb{Z}[G]}1_A} \mathbb{Z}\otimes A\to 0$ 是 $\mathbb{Z}$-模正合列，于是 $\mathrm{H}_0(G,A)=\frac{A}{\mathbf{I}_G A}$。 □

如果定义 $(-)^G$ 如上，定义 $(-)_G:=\frac{-}{\mathbf{I}_G -}$，根据上面的定理的证明，群的同调理论可以等价定义成如下形式：

$$\mathrm{H}^n(G,A):=R^n(-)^G(A)$$
$$\mathrm{H}_n(G,A):=L_n(-)_G(A)$$

这样定义的好处就是完全可以在左 $\mathbb{Z}[G]$-模上进行计算，不需要考虑 $\mathbb{Z}$ 的所谓投射的右 $\mathbb{Z}[G]$-模消解。上同调和下同调的连接如同定义 0.4-卫星函子那般，也有相应的同构性质。类比于代数拓扑中的对偶，以及表示理论的特征标给出的对偶，有如下的 Pontryagin 对偶。

定理 1.3 (庞特里亚金对偶(Pontryagin Duality)). *考虑有限群 G 上的 G-模 A，定义其庞特里亚金对偶是*

$$A^\star=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

则有同构

$$\mathrm{H}^n(G,A)^\star=\mathrm{H}_n(G,A^\star),\quad n\geq 0$$

证明. 选择 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的原因是这是一个经典的单射 $\mathbb{Z}$-模。对于 A 而言，其交换群结构可以看作右 $\mathbb{Z}$-模结构，其 G-模结构无非是左 $\mathbb{Z}[G]$ 模结构，这两者兼容，也就是左作用和右作用满足结合律 $(ga)m=g(am),\forall g\in\mathbb{Z}[G],a\in A,m\in\mathbb{Z}$，于是 A 可以看作双模 ${}_{\mathbb{Z}[G]}A_{\mathbb{Z}}$。和定理 1.1类似用 A 的左 $\mathbb{Z}[G]$-作用给出 $A^\star$ 的右 $\mathbb{Z}[G]$-模结构 $(fg:=f\circ g,\ g\in G,f\in A^\star)$，其左 $\mathbb{Z}[G]$ 模结构由取逆诱导，$gf:=fg^{-1},g\in G,f\in A^\star$。于是 $A^\star$ 作为左 $\mathbb{Z}[G]$-模右 $\mathbb{Z}$-模，$A^{\star\star}$ 的左和右 $\mathbb{Z}[G]$-模结构也类似给出。将 $\mathbb{Z}$ 视作左平凡 $\mathbb{Z}[G]$-模，此对偶来自于将声明的如下 $\mathbb{Z}$-模的函子同构

$$(-)^\star\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},-),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},-)^\star$$

同构的建立方式的确是非平凡的，首先考虑相等

$$(-)^\star\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}[G]=(-)^\star=(-)^\star=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],-)^\star$$

对于有限左 $\mathbb{Z}[G]$-自由模 $\mathbb{Z}[G]^n=\oplus_n\mathbb{Z}[G]$ 而言，考虑 $\star$ 和直和交换也有等价

$$(-)^\star\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}[G]^n\simeq((-)^\star\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}[G])^n=((-)^\star)^n=(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],-)^\star)^n\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G]^n,-)^\star$$

对于平凡 G-模 $\mathbb{Z}$，有很多方式自由消解之，由于 G 有限，$\mathbb{Z}$ 事实上是有限表现左 $\mathbb{Z}[G]$-模。例如考虑和定理 1.2类似的有限表现形式

$$\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}} g^{\oplus_{g\in G}} \xrightarrow{\oplus_{g\in G}-\cdot(g-1)} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}\to 0$$

如果设 $|G|=n$，就存在左 $\mathbb{Z}[G]$-模的正合列

$$\mathbb{Z}[G]^n \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$$

注意到自然变换

$$\tau : A^\star \otimes_{\mathbb{Z}[G]} - \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(-,A)^\star, \tau(a^\star \otimes m) = f \to ma^\star f(1)$$

这自然变换对 A 也有自然性，从而给出自然变换的交换图

$$\begin{tikzcd}
(-)^\star \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G]^n \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\tau_{\mathbb{Z}[G]^n}"] & (-)^\star \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G] \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{\mathbb{Z}[G]}"] & (-)^\star \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\tau_{\mathbb{Z}}"] & 0 \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G]^n,-)^\star \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],-)^\star \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},-)^\star \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

这交换图上下两行均正合，张量函子 $T^{(-)^\star \otimes_{\mathbb{Z}[G]}}$ 右正合给出第一行的正合性，由于 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是单射模，$(-)^\star$ 是左正合的，同态函子 S_- 是左正合的，从而它们复合是右正合的，这给出第二行的正合性。$\tau_{\mathbb{Z}[G]}, \tau_{\mathbb{Z}[G]^n}$ 是同构于是根据定理 0.7得到 $\tau_{\mathbb{Z}}$ 是一个自然同构。在 G 上的取逆运算给出了 $\mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]^{\mathrm{op}}$ 的同构，从而根据对 $(-)^\star$ 的左右 $\mathbb{Z}[G]$-模结构的定义，有自然同构

$$(-)_*^{-1} : (-)^\star \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} (-)^\star$$

取 $\mathbb{Z}$ 的投射消解，利用导出函子的定义有

$$\mathrm{H}_n(G,A^\star) = L_n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} (-)^\star(A) = L_n(-)^\star \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}(A) \simeq R^n \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},-)(A)^\star = \mathrm{H}^n(G,A)^\star$$

□

如下的 Shapiro 引理可以将复杂的同调或者上同调约化的简单的群上来，其思想来自于表示论中诱导表示函子和限制函子的伴随性，参考 [24]。

定理 1.4 (Eckmann-Shapiro 引理). *设 S 是 G 的子群，A 是 S-模，有如下同构*

$$\mathrm{H}^n(S,A) \simeq \mathrm{H}^n(G, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[S]}(\mathbb{Z}[G],A)), n \geq 0$$

$$\mathrm{H}_n(S,A) \simeq \mathrm{H}_n(G, \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[S]} A), n \geq 0$$

证明. 此证明考虑张量函子和同态函子的伴随对 $\langle - \otimes A, \mathrm{Hom}(A,-)\rangle$ 和张量运算的结合律，立刻给出 $n=0$ 时定理关系成立。如果 $\mathbf{P}(\mathbb{Z}) : \cdots \to P_n \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ 是 $\mathbb{Z}$ 的投射消解，可以和定理 1.3类似在取逆同构下看作彼此同构的左 $\mathbb{Z}[G]$-模和右 $\mathbb{Z}[G]$-模，从而可以用 T_-, S_- 作用。限制在子群 S 上，$\mathbf{P}(\mathbb{Z})$ 也是 S-投射消解，再利用伴随对有

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^n(G, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[S]}(\mathbb{Z}[G],A)) &= \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbf{P}(\mathbb{Z})), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[S]}(\mathbb{Z}[G],A))) \simeq \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[S]}(\mathbf{P}(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G],A)) \\ &= \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[S]}(\mathbf{P}(\mathbb{Z})),A)) = \mathrm{H}^n(S,A), \quad n > 0\end{aligned}$$

下同调的情形也是类似，利用张量函子的结合性，计算

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_n(G, \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[S]} A) &= \mathrm{H}_n(\mathbf{P}(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} (\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[S]} A)) \simeq \mathrm{H}_n((\mathbf{P}(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G]) \otimes_{\mathbb{Z}[S]} A) \\ &= \mathrm{H}_n(\mathbf{P}(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[S]} A) = \mathrm{H}_n(S,A), \quad n > 0\end{aligned}$$

于是定理得证。 □

下面是一些具体计算的方法。核心思想是用不同的消解方式来截取不同层面的同调信息，从而使得抽象的代数理论和一些实际的算术和代数问题产生联系。

$\boxed{\text{Bar 消解和单纯消解}}$ 自由模都是投射的，这是因为可以选取生成元 $\{m_1,..,m_n\}$ ，构造映射 m_i 的线性延拓就可以得到所要的延拓。Bar 提出用一些特殊的自由 G-模来消解 $\mathbb{Z}$ ，从而能够具体计算出同调群和上同调群。取 B_i 是 G^i 作为集合生成的自由左 $\mathbb{Z}[G]$-模。考虑

$$B_i \xrightarrow{d'_i} B_{i-1} \xrightarrow{d'_{i-1}} B_{i-2} \to \cdots \to B_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$
$$d'_n : B_n \to B_{n-1}$$
$$d'_n(g_1,..,g_n) = g_1(g_2,..,g_n) + \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^i (g_1,..,g_i g_{i+1},..,g_n) + (-1)^n (g_1,..,g_{n-1}), \quad g_i \in G, 1 \le i \le n$$

ϵ 将在后文中一直代表取 $\mathbb{Z}[G]$ 中各项系数和的增广映射。根据自由模性质，d' 只需如上在生成元上定义然后作 $\mathbb{Z}[G]$ 延拓。一个复杂但无困难的计算可以得到上述映射链是链复形，更为神秘的是上述映射链给出一个投射消解，这来自于 Bar 消解和更为自然的标准消解 (或称单纯消解) 的同伦性，取 P_i 是 G^{i+1} 作为 G-集合生成的自由 $\mathbb{Z}[G]$-模。容许 G 在 G^{i+1} 上左乘和右乘从而有 $\mathbb{Z}[G]$-双模结构

$$g(g_0,..,g_i) := (gg_0,..,gg_i) \quad g, g_k \in \mathbb{Z}[G], k = 0,..,i$$
$$(g_0,..,g_i)g := (g_0 g,..,g_i g) \quad g, g_k \in \mathbb{Z}[G], k = 0,..,i$$

和上面 Bar 消解类似在生成元上定义 d，可以得到如下投射消解

$$P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} P_{i-2} \to \cdots \to P_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$
$$d_n : P_n \to P_{n-1}$$
$$d_n(g_0,..,g_n) = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i (g_0,..,\hat{g}_i,..,g_n), \quad g_i \in G, i = 1,..,n$$

这是因为首先根据交错性 $d_n d_{n+1} = 0, \epsilon \circ d_1 = 0$，其次可以构造如下的同伦

$$s_n : P_n \to P_{n+1} \quad n > 0$$
$$s_n(x_0,..,x_n) = (1, x_0, x_1,..,x_n)$$
$$s_{-1} : \mathbb{Z} \to P_0, s_{-1}(m) = m(e)$$

满足

$$s_{n-1}\partial_n + \partial_{n+1}s_n = \mathrm{Id}_{P_n}, n \ge 0$$

于是这个链复形就是零伦的，各阶同调群都是零，(可以直接证明，如果 $\partial a = 0$ 代入同伦方程得到 $a = \partial(sa)$)。事实上 $\mathbf{B}(\mathbb{Z})$ 和上面的标准消解是同伦的，因为存在互逆的链映射 ($\mathbb{Z}[G]$-同态)

$$\begin{array}{ccccc}
\tau_n : & P_n & \leftrightarrows & B_n & : \sigma_n \\
\tau_n & (g_0,..,g_n) & \to & g_0(g_0^{-1}g_1, g_1^{-1}g_2.., g_{n-1}^{-1}g_n) & \\
 & (1, g_1, g_1 g_2, ..., g_1 \cdots g_n) & \leftarrow & (g_1,..,g_n) & : \sigma_n
\end{array}$$

τ 和 σ 互逆根据上面的构造可以直接得到，简单计算了解到还有 $d'\tau = \sigma d$ 的交换关系，从而 $d'_n = \sigma_n^{-1} \circ d_n \circ \sigma_n$。故 Bar 链复形和标准消解 (或者叫单纯消解) 是同伦等价的，自然是正合列，进而是投射消解，用 Bar 消解来看上同调群可以得到低阶上同调和同调的具体刻画，例如 $\mathrm{H}^1, \mathrm{H}^2$，如果把 $B_n \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ (B_n 右模结构由左模结构在取逆映射的诱导下给出) 嵌入到 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(B_n, A)$ 中计算微分，还能得到 $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2$ 等的刻画如下

$$\mathrm{H}^1(G,A) = \frac{\ker d_2'^*}{\mathrm{im} d_1'^*} = \frac{\{f : G \to A, f(gg') = gf(g') + f(g), \forall g, g' \in G\}}{\{f : G \to A, \exists a \in A, f(g) = ga - a, \forall g \in G\}}$$
$$\mathrm{H}^2(G,A) = \frac{\{f : G \times G \to A, g_1 f(g_1, g_2) - f(g_1g_2, g_3) + f(g_1, g_2g_3) - f(g_1, g_2) = 0, \forall g_1, g_2, g_3 \in G\}}{\{f : G \times G \to A, \exists h : G \to A, f(g_1, g_2) = g_1 h(g_2) - h(g_1g_2) + h(g_1)\}}$$
$$\mathrm{H}_1(G,A) = \frac{\ker d'_1 \otimes \mathrm{Id}_A}{\mathrm{im} d'_2 \otimes \mathrm{Id}_A}$$
$$\mathrm{H}_2(G,A) = \frac{\ker d'_2 \otimes \mathrm{Id}_A}{\mathrm{im} d'_3 \otimes \mathrm{Id}_A}$$

更为有趣的是 $\mathrm{H}^1, \mathrm{H}^2$ 和群扩张的关系，参考 [21, Chap 9] 和 [22] 的上同调部分。而下一步的目标在于研究上同调群和同调群之间的经典映射。

$\boxed{\text{Res 和 Cor}}$ 一般而言，如果存在群同态 $f : G' \to G$(线性延拓后不妨假设成是群代数同态)，A 作为 G-模，可以有典范的 G'-模结构 fA 定义如下

$$s'a := f(s')a \quad a \in A, s' \in G$$

如果对某一个 G'-模 A' 上还有 G' 同态 $g : fA \to A'$，就可以利用这些映射将同调函子中的群对象和模对象同时变化 $((G,A) \to (G',A'))$，注意到这些映射都具有很好的“兼容性”，它们诱导了消解链上的映射并且通过导出函子作用后得到

$$(f,g)_*^q : \mathrm{H}^q(G,A) \xrightarrow{R^q S_A(f)} \mathrm{H}^q(G', fA) \xrightarrow{R^q T^{\mathbb{Z}}(g)} \mathrm{H}^q(G', A')$$
$$(f,g)_q^* : \mathrm{H}_q(G',A) \xrightarrow{L_q T_A(f)} \mathrm{H}_q(G, fA) \xrightarrow{R^q T^{\mathbb{Z}}(g)} \mathrm{H}_q(G, A')$$

考虑 G 的子群 H 和某个 G-模 A，自然有嵌入映射 $i : H \hookrightarrow G$ 和 $\mathrm{Id} : A \to A$，于是定义限制映射

$$\mathrm{Res}^n := (i, \mathrm{Id})_*^n : \mathrm{H}^q(G,A) \to \mathrm{H}^q(H,A)$$

这还能诱导出同调群 $\mathrm{H}_q(H,A) \to \mathrm{H}_q(G,A)$ 的类似映射 Cor_n，在 Serre 的书中 [25] 被叫做 Corestriction 的映射，但是由于我们主要处理上同调群，更重要的是一类被称作转移 (transfer) 的上同调群的“余限制”的类似物，这在 Eckmann 的文章中 [8] 被称为 transfer，而 Serre[25] 仍旧把这类映射成为 Correstriction，本文尊重 Serre 的记号，而采用更易懂的方式处理这一类映射。

考虑 G 的有限指数子群 H (H 在 G 的陪集个数有限，陪集空间记成 G/H)，定义

$$\mathbf{N}_{G/H} : \mathrm{H}^0(H,A) = A^H \to \mathrm{H}^0(G,A) = AG$$
$$\mathbf{N}_{G/H}(a) = \sum_{s \in G/H} sa$$

通过定理 0.13-连接同态的万有性质把这个范数映射延拓到所有上同调群上，得到

$$\mathrm{Cor}^n_{G/H} := \mathbf{N}_{G/H}{}^n : \mathrm{H}^n(H,A) \to \mathrm{H}^n(G,A)$$

有趣的是在这一思路指导下还可以得到 Res 在同调群上的映射 $\mathrm{Res}_n : \mathrm{H}_n(G,A) = A_G \to \mathrm{H}_n(H,A) = A_H$。可以定义自然变换

$$\mathbf{N}'_{G/H} : A_G \to A_H \mathbf{N}'_{G/H} a = \sum_{s \in G/H} s^{-1} a$$

是合法的，因为如果 s, s' 在同一 H 的左陪集上，那么 $s = s'h^{-1}$, $h \in H$，$s^{-1}a - s'^{-1}a = (h-1)s'^{-1} \in \mathbf{I}_H A$，从而 $s^{-1}a = s'^{-1}a \in A_H$，用连接函子延拓这个自然变换给出

$$\mathrm{Res}^{G/H}_n := \mathbf{N}'_{G/H}{}_n : \mathrm{H}^n(H,A) \to \mathrm{H}^n(H,A)$$

定理 1.5. *设 $n = |G/H|$，那么有 $\mathrm{Cor} \circ \mathrm{Res} = n\,\mathrm{Id}$*

证明. 注意到在 H^0 时，$\mathrm{Cor} \circ \mathrm{Res} = n\,\mathrm{Id}$，利用定理 0.13，其在高阶上同调的延拓是唯一的，$n\,\mathrm{Id}$ 确实是延拓，那么就只能有 $\mathrm{Cor} \circ \mathrm{Res} = n\,\mathrm{Id}$。也可以用归纳的办法来证明，假设对于小于等于 k 阶的上同调已经得到结论，考虑将 A 嵌入某一个相对单射模 A^*，取 $B = \frac{A^*}{A}$，根据定理 0.11短正合列诱导出长正合列，定理 1.1-单射性质给出 A^* 的高于一阶的上同调平凡，从而有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}^k(G,B) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{H}^{k+1}(G,A) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle n\,\mathrm{Id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Cor}^{k+1} \circ \mathrm{Res}^{k+1}} & & \\
\mathrm{H}^k(G,B) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{H}^{k+1}(G,A) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

这个定理中取 G 有限，$H = \{e\}$ 是单位元，就得到有限群的上同调群总是被数乘 $|G|$ 零化。那么根据满射条件和交换性，得到 $\mathrm{Cor}^{k+1} \circ \mathrm{Res}^{k+1} = n\,\mathrm{Id}$。从而对一切的 k 定理都成立。 □

有益的是按照 [5, p.254] 的方法用具体投射消解写出 Res, Cor 在高维具体形式，本文如有需要再详细描述。总之有四个自然变换 (忽略了模的标量限制映射)，详细写成如下形式

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}^n_{G/H} &: \mathrm{H}^n(G,-) \to \mathrm{H}^n(H,-) \\
\mathrm{Cor}^n_{G/H} &: \mathrm{H}^n(H,-) \to \mathrm{H}^n(G,-) \\
\mathrm{Res}^{G/H}_n &: \mathrm{H}_n(G,-) \to \mathrm{H}_n(H,-) \\
\mathrm{Cor}^{G/H}_n &: \mathrm{H}_n(H,-) \to \mathrm{H}_n(G,-) \quad n \geq 0
\end{aligned}$$

一般而言本文倾向于研究 Res^- 和 Cor^-，在不引起歧义的情况下就把它们简记成 Res 和 Cor。

$\boxed{\text{膨射 (Inflation)}}$ 摒弃指数有限条件，取 H 作为 G 的正规子群，从而在商群 G/H 上自然拥有模结构 $A^H = \{a \in A : \forall h \in H, ha = a\}$，这时可以定义兼容的映射对

$$\begin{aligned}
\pi_{G/H} &: G \twoheadrightarrow G/H \\
i_A &: A^H \hookrightarrow A
\end{aligned}$$

定义膨射 Inf 为

$$\mathrm{Inf}^- := (\pi_{G/H}, i_A)_*^- : \mathrm{H}^-(G/H, A^H) \to \mathrm{H}^-(G, A)$$

同样地在不引起歧义的情况下简记成 Inf。此映射会给出如下的短正合列。

定理 1.6. 设 H 是 G 的正规子群，A 是 G-模，限制下自然是 H-模，则存在如下的正合列。

$$0 \to \mathrm{H}^1(G/H, A^H) \xrightarrow{\mathrm{Inf}^1} \mathrm{H}^1(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}^1} \mathrm{H}^1(H, A)$$

更一般地，如果 $q > 1$ 是一个正整数，$\mathrm{H}^i(H, A) = 0$ 对 $1 \leq i \leq q-1$ 成立，那么存在如下短正合列。

$$0 \to \mathrm{H}^q(G/H, A^H) \xrightarrow{\mathrm{Inf}^q} \mathrm{H}^q(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}^q} \mathrm{H}^q(H, A)$$

证明. 首先证明 Inf^1 是单射。如果 $f \in \ker \mathrm{Inf}^1$，那么根据 H^1 的刻画存在 $a \in A$ 满足

$$\mathrm{Inf}(f)(g) = f(gH) = ga - a \quad \forall g \in G$$

那么对任何 $h \in H$，有

$$\mathrm{Inf}(f)(gh) = f(ghH) = gha - a = f(gH) = ga - a \quad \forall g \in G, h \in H$$

从而 $ha = a, \forall h \in H$，那么 $a \in A^H$，根据 Bar 消解的刻画，$f = 0$，从而 Inf^1 是单射。

其次由于 $\mathrm{Res} \circ \mathrm{Inf}(f)(h) = f(H) = f(eH) = 0$，得到 $\mathrm{im}\,\mathrm{Inf}^1 \subset \ker \mathrm{Res}^1$，如果 $f \in \ker \mathrm{Res}^1$，那么存在 $a \in A$ 满足

$$f(h) = ha - a \quad \forall h \in H$$

成立，此时定义 $\delta_a(g) = ga - a \in \mathrm{H}^1(G, A)$ 是边缘，于是 $f - \delta_a|_H = 0$，根据上链性质，$(f - \delta_a)(gh) = (f - \delta_a)(g), \forall h \in H$，而且

$$h(f - \delta_a)(g) = (f - \delta_a)(gh) - (f - \delta_a)(h) = (f - \delta_a)(g) \in A^H, \quad \forall g \in G, h \in H$$

从而可以定义 $F(gH) = (f - \delta_a)(g)\, g \in G$ 是 $\mathrm{H}^1(G/H, A^H)$ 中元素满足 $\mathrm{Inf}^1(F) = f - \delta_a$，那么

$$\mathrm{Inf}^1(F) = f \in \mathrm{H}^1(G, A)$$

从而 $\mathrm{im}\,\mathrm{Inf}^1 \supset \ker \mathrm{Res}^1$ 得到第一个正合列。当 $q > 1$ 时考虑把 A 嵌入一个相对单射模 A^* (例如 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], A)$) 中，和定理 1.1类似规定 G-模结构有短正合列

$$0 \to A \xrightarrow{\subseteq} A^* \to \frac{A^*}{A} \to 0$$

由于条件 $\mathrm{H}^1(H, A) = 0$ 用 $(-)^H$ 的导出函子诱导出的长正合列片段有

$$0 \to A^H \to A^{*H} \to \frac{A^*}{A}^H \to 0$$

那么如果取 $A^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], A)$，那么 $A^{*H} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G/H], A)$ 是 G/H 的相对单射模而且 $A^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[H] \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{G}{H}, A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[H], \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\frac{G}{H}, A))$ 也是 H-相对单射的。作归纳，假设当 $q-1$ 及以下的指数定理成立

$$0 \to \mathrm{H}^{q-1}(G/H, A^H) \xrightarrow{\mathrm{Inf}^{q-1}} \mathrm{H}^{q-1}(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}^{q-1}} \mathrm{H}^{q-1}(H, A)$$

由定理 1.1-相对单射性质得到 $\mathrm{H}^{\geq 1}(H, A^*) = \mathrm{H}^{\geq 1}(G, A^*) = \mathrm{H}^{\geq 1}(G/H, A^*) = 0$，考虑长正合列和上述正合列构成的交换图如下

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^{q-1}(G/H, \frac{A^*}{A}^H) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[d, dashed, "\delta"] & \mathrm{H}^{q-1}(G, \frac{A^*}{A}) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d, dashed, "\delta"] & \mathrm{H}^{q-1}(H, \frac{A^*}{A}) \arrow[d, dashed, "\delta"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^q(G/H, A^H) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] & \mathrm{H}^q(G, A) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] & \mathrm{H}^q(H, A)
\end{tikzcd}$$

根据 A^* 的上述性质，这里的连接同态 δ 都是同构，交换性可以直接验证，也可以通过上同调连接函子 $\{\mathrm{H}^n(G/H, (-)^H)\}_n, \{\mathrm{H}^n(G, -)\}_n, \{\mathrm{H}^n(H, -)\}_n$ 的万有性质给出。如果 $\mathrm{H}^{1\leq i\leq q-1}(H, A) = 0$，透过短正合列也得到 $\mathrm{H}^{1\leq i\leq q-2}(H, C) = 0$ 根据归纳假设得到上一行正合，在同构传递下下一行也是正合列，从而定理证毕。

这也推出此时 Inf 在 $i \leq q-1$ 时是同构。 □

如果取 $g \in G$ 设 $(-)^g : G \to G$ 是共轭作用 $x \to gxg^{-1}$，在 G-模 A 上有和 $(-)^g$ 兼容的映射 $f_g : A \to A, f_g a = g^{-1}a$，利用Res 和 Cor 中的办法作移动。此时 G/H 作为商群在 $\mathrm{H}^-(H, A)$ 上有共轭作用如下定义

$$gH := ((-)^g, f_g)_*^- : \mathrm{H}^-(G, A) \to \mathrm{H}^-(G, A)$$

考虑这作用的不动点集合 $\mathrm{H}^-(H, A)^{G/H}$，给出一个更长的正合列。

定理 1.7. 越出映射诱导五项正合列 设 H 是 G 的正规子群，A 是 G-模，限制下自然是 H-模，对于 $n \geq 0$ 存在如下的正合列。

$$0 \to \mathrm{H}^1(G/H, A^H) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \mathrm{H}^1(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{H}^1(H, A)^{G/H} \xrightarrow{\tau} \mathrm{H}^2(G/H, A^H) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \mathrm{H}^2(G, A)$$

更一般地，如果 $q > 1$ 是一个正整数，$\mathrm{H}^i(H, A) = 0$ 对 $1 \leq i \leq q-1$ 成立，那么存在如下的短正合列。

$$0 \to \mathrm{H}^q(G/H, A^H) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \mathrm{H}^q(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{H}^q(H, A)^{G/H} \xrightarrow{\tau} \mathrm{H}^{q+1}(G/H, A^H) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \mathrm{H}^{q+1}(G, A)$$

这里定义的映射 τ 对于 G-模变量 A 具有自然性（$\tau_{i,-} : \mathrm{H}^q(H, -)^{G/H} \to \mathrm{H}^{q+1}(G/H, (-)^H)$ 是自然变换）。

证明. 在一些文献例如 [18, p90] 中上述 τ 被称为 transgression，本文暂时翻译成越出映射。此正合列确实有利用 Lynton-Hochschild-Serre 谱序列得到的办法如 [21, th10.53]，这里还是用经典的方式给出证明。当 $n = 1$ 时上一个定理给出前两项的正合性，首先考虑的是

$$\operatorname{im} \mathrm{Res}^n \subset \mathrm{H}^n(H, A)^{G/H}$$

这是因为如果取单纯消解计算，用 g 在 P_i 上左乘是 P_i 到 $(-)^g P_i$ 的 G-同构，而且是 $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$ 上的一个链映射，根据延拓唯一性 τ_g 和 P_i 的恒同映射同伦。那么 g 在 h^- 上的共轭作用就是

$$g\xi = ((-)^g, f_g)\xi = f_{g*}\xi\,\mathrm{Id}_{-\to(-)^g-} = f_{g*}\xi\tau_g = g^{-1}\xi g$$

如果 ξ 来自 $\operatorname{im}\operatorname{Res}^n$，根据 ξ 是 G-映射得到 $g\xi = xi$，从而 $\operatorname{im}\operatorname{Res}^n \subset \mathrm{H}^n(H,A)^{G/H}$。从而上述的五项映射列可以定义。

然后还是依照上一个定理的思想，把 A 嵌入一个相对单射模中，此处就取 $A^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], A)$，令 $C = \frac{A^*}{A}$ 有如下短正合列

$$0 \to A \xrightarrow{i^*} A^* \xrightarrow{p^*} C \to 0$$

记 $B = \mathrm{im} p^{*H}$，由 $h^\bullet(H,-)$ 诱导出的长正合列因为 A^* 的高于一阶的上同调平凡，截断成如下短正合列

$$0 \to A^H \xrightarrow{i^*} A^{*H} \xrightarrow{p^*} B \to 0 \tag{1.7e}$$

$$0 \to B \xrightarrow{\subseteq} C^H \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(H,A) \to 0 \tag{1.7f}$$

根据共轭作用的性质，(1.7e)和(1.7f)也是 G/H-模的短正合列。用 $h^\bullet(H,-)$ 诱导得到正合列

$$0 \to A^G \xrightarrow{i^*} A^{*G} \xrightarrow{p^*} B^{G/H} \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(G/H, A^H) \to \mathrm{H}^1(G/H, A^{*H}) = 0$$

最后一个群平凡来自于上一个定理，即 A^{*H} 是 G/H-相对单射模 (诱导模)。用 $h^\bullet(G/H,-)$ 诱导(1.7f)得到第一个正合列

$$0 \to B^{G/H} \xrightarrow{\subseteq} C^G \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(H,A)^{G/H} \xrightarrow{\delta'} \mathrm{H}^1(G/H, B^{G/H})$$

这两者连同 G 的上同调正合列给出如下行列正合的交换图。

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A^G \arrow[r] \arrow[d, "1_{A^G}"] & A^{*G} \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, "1_{A^{*G}}"] & B^{G/H} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\subset"] & \mathrm{H}^1(G/H, A^H) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^G \arrow[r] & A^{*G} \arrow[r, "p^*"] & C^G \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"] & \mathrm{H}^1(G,A) \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\beta"] & 0 \\
 & & & \mathrm{H}^1(H,A)^{G/H} \arrow[d, "\delta'"] & & \\
 & & & \mathrm{H}^1(G/H, B^H) & &
\end{tikzcd}$$

虚线处的映射可以用图追踪的方法得到，并且仔细考察 α, β 的具体形式和列正合性得到正合列

$$0 \to \mathrm{H}^1(G/H, A^H) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{H}^1(G,A) \xrightarrow{\beta} \mathrm{H}^1(H,A)^{G/H} \xrightarrow{\delta'} \mathrm{H}^1(G/H, B^H)$$

下面来说明 $\alpha = \mathrm{Inf}, \beta = \mathrm{Res}$，首先 A^H, B 在 $G \twoheadrightarrow G/H$ 下可看作 G 模，根据 Inf 的定义 Inf 的分解使得如下图表交换

$$
\begin{tikzcd}
B^G \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "1"] & \mathrm{H}^1(G/H, A^H) \arrow[d, "\pi^*: G \twoheadrightarrow G/H"] \\
B^G \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\subset"] & \mathrm{H}^1(G, A^H) \arrow[d, "\iota^*: A^H \hookrightarrow A"] \\
C^G \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{H}^1(G, A)
\end{tikzcd}
\qquad \mathrm{Inf} = \iota^* \circ \pi^*
$$

从而考虑到 α, Inf 都是连接同态下 1_- 的延拓，根据定理 0.13，$\alpha = \mathrm{Inf}$。至于 $\beta = \mathrm{Res}$，考虑如下交换图

$$
\begin{tikzcd}
C^G \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\subset"] \arrow[dr, "\delta"] & \mathrm{H}^1(H, A) \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \\
C^H \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{H}^1(H, A)
\end{tikzcd}
$$

那么 β, Res 都是连接上同调函子 $\mathrm{H}^\bullet(G, -)$ 和 $\mathrm{H}^\bullet(H, -)$ 的自然变换，仍根据定理 0.13得到 $\beta = \mathrm{Res}$。

现在只剩下后半段的正合性亟待验证，续写(1.7f)并利用 A^*, A^{*H} 对 $G, G/H$ 的相对单射性和 Inf 的自然性得到如下交换图

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(H, A)^{G/H} \arrow[r, "\delta'"] & \mathrm{H}^1(G/H, B) \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\delta:\simeq"] & \mathrm{H}^1(G/H, C^H) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] & \mathrm{H}^1(G, C) \arrow[d, "\delta:\simeq"] \\
& \mathrm{H}^2(G/H, A^H) \arrow[rr, "\mathrm{Inf}"] & & \mathrm{H}^2(G, A)
\end{tikzcd}
$$

于是定义越出映射 $\tau_1 : \delta \circ \delta'$，就有第一项五项正合列

$$
0 \to \mathrm{H}^1(G/H, A^H) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \mathrm{H}^1(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{H}^1(H, A)^{G/H} \xrightarrow{\tau} \mathrm{H}^2(G/H, A^H) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \mathrm{H}^2(G, A)
$$

更高维的结果无疑是用维数移动作归纳，假设指标小于等于 $q-1$ 时定理成立，考虑在 q 时利用上文的(1.7e)和(1.7f)诱导长正合得到如下第一行正合的交换图

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^{q-1}(G/H, C^H) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{H}^{q-1}(G, C) \arrow[d, "\simeq"] \arrow[ddl, "\mathrm{Res}"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^q(G/H, A^H) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] & \mathrm{H}^q(G, A) \arrow[ddl, "\mathrm{Res}"] & \\
& \mathrm{H}^{q-1}(H, C)^{G/H} \arrow[r, "\tau_{i,C}"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{H}^q(G/H, C^H) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{H}^q(G, C) \arrow[d, "\simeq"] \\
& \mathrm{H}^q(H, A)^{G/H} & \mathrm{H}^{q+1}(G/H, A^H) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] & \mathrm{H}^{q+1}(G, A)
\end{tikzcd}
$$

这里竖线都是连接同态，并利用 A^*, A^{*G}, A^{*H} 的诱导性质可以得到这些连接同态都是同构，注意到

$$
\mathrm{H}^{1 \le i \le q-1}(H, A) = 0
$$

所以长正合列图追踪得到 $\mathrm{H}^{1\leq i\leq q-2}(H,C)=0$，根据归纳假设上图第一行正合，于是归纳定义

$$\tau_{i,A}:\mathrm{H}^i(H,A)^{G/H}\to\mathrm{H}^{i+1}(G/H,A^H)\quad \tau_{i,A}f(gH):=\delta\circ\tau_{i,C}\circ\delta$$

这映射 $\tau_{i,-}$ 的自然性由定义立刻得到，并且将下行修饰成正合列，于是定理得证。值得一提的是 transgression 可以在上链上具体写出，例如 [17]。 □

下面算是群上同调理论的一个有趣的应用。更准确和全面的论述可以直接考虑 Schur 和 Artin 的历史文章 [25, p122] 以及零起点的同调代数教材 [21, Chap 9]。

转移映射 利用限制映射 Res 可以把同调群所关注的群限制到更小的子群上，取 G 子群 H，记 $[G,G]$ 是由 $g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$ 生成的正规子群，也就是换位子群 (commutator)。短正合列 $0\to\mathbf{I}_G\xrightarrow{\subseteq}\mathbb{Z}[G]\xrightarrow{\epsilon}\mathbb{Z}\to 0$ 诱导出同调群的长正合列的一段如下

$$\mathrm{H}_1(G,\mathbb{Z}[G])\xrightarrow{L_0T^{\mathbb{Z}}\epsilon}\mathrm{H}_1(G,\mathbb{Z})\xrightarrow{\delta_0}\mathrm{H}_0(G,\mathbf{I}_G)=\mathbf{I}_{GG}\to\mathrm{H}_0(G,\mathbb{Z}[G])$$

由于 $\mathbb{Z}[G]$ 相对投射，有 $\mathrm{H}_1(G,\mathbb{Z}[G])=0$，而且 $\mathbf{I}_{GG}=\frac{\mathbf{I}_G}{\mathbf{I}_G{}^2}$，于是有正合列如下

$$0\to\mathrm{H}_1(G,\mathbb{Z})\xrightarrow{\delta_0}\frac{\mathbf{I}_G}{\mathbf{I}_G{}^2}\to 0$$

这得到同构 $\mathrm{H}_1(G,\mathbb{Z})\simeq\frac{\mathbf{I}_G}{\mathbf{I}_G{}^2}$，这一个同构可以利用定理 0.6-蛇形引理加 Bar 消解计算处理，这样得到的同构是 $z\to -z+\mathbf{I}_G{}^2$。事实上作为 $\mathbb{Z}$-模有同构 $\frac{\mathbf{I}_G}{\mathbf{I}_G{}^2}\simeq\frac{G}{[G,G]}$，这由如下的映射对的线性延拓给出

$$\begin{array}{rccccl} p: & \frac{\mathbf{I}_G}{\mathbf{I}_G{}^2} & \leftrightarrows & \frac{G}{[G,G]} & :q \\ p: & (g-1)+\mathbf{I}_G{}^2 & \to & g[G,G] & \\ & (g-1)+\mathbf{I}_G{}^2 & \leftarrow & g[G,G] & :q \end{array}$$

上述映射的互逆性是显然的，只需要验证定义的合法性，以及 p,q 确实是 G-模同态，首先说明同态性，利用线性延拓只需对 G 中的元素验证如下

$$q(gg')=gg'-1+\mathbf{I}_G{}^2=g-1+g'-1+(g-1)(g'-1)+\mathbf{I}_G{}^2=g-1+g'-1+\mathbf{I}_G{}^2=q(g)+q(g'),\quad\forall g,g'\in G$$

p 根据定义和线性延拓自然是同态。下面只需验证 $\ker p=\mathbf{I}_G{}^2$ 和 $\ker q=[G,G]$。注意到 $q(xyx^{-1}y^{-1})=q(x)+q(y)-q(x)-q(y)=0$，有 $[G,G]\subset\ker q$，另一方面如果

$$u=(\sum_{g\in G}m_g(g-1))(\sum_{g\in G}n_g(g-1))=\sum_{s,t\in G}m_sn_t(st-1-s+1-t+1)\in\mathbf{I}_G{}^2$$

根据定义 $p(u)=st[G,G]-s[G,G]-t[G,G]=0$，从而 $\mathbf{I}_G{}^2\subset\ker p$，这样 p,q 良定义，反方向的包含关系也类似得到，于是得到 $\mathbb{Z}$-模同构 $\mathrm{H}_1(G,\mathbb{Z})\simeq\frac{G}{[G,G]}$。于是考虑上文中给出的 Res_-，有如下映射

$$\mathrm{Ver}=\mathrm{Res}_1:\mathrm{H}_1(G,\mathbb{Z})=G/[G,G]\to\mathrm{H}_1(H,\mathbb{Z})=H/[H,H]$$

这里 Ver 取自德语“转移”一词”Verlagerung” 的首字母，更细致地描写此映射有如下的定理。

定理 1.8 (转移映射)**.** 取 $\theta:\{Hg:g\in G\}\to G$ 是右陪集的一族代表元，对任何的 $s\in G$ 和右陪集 Ht，定义 $x_{t,s}\in H$ 满足

$$\theta(t)s=x_{t,s}\theta(ts)$$

那么上面定义的 Ver 可以具体写成

$$\mathrm{Ver}(s)=\prod_{\{Ht:t\in G\}}x_{t,s}$$

证明. 此定理只是算术问题。这里用上面给出的同构对 (p,q) 计算转移映射。考虑短正合

$$0\to \mathbf{I}_G\xrightarrow{\subseteq}\mathbb{Z}[G]\xrightarrow{\epsilon}\mathbb{Z}\to 0$$

分别用 $\mathrm{H}_\bullet(G,-)$ 和 $\mathrm{H}_\bullet(H,-)$ 诱导同调群的长正合列中有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
\frac{G}{[G,G]} \arrow[d, "\mathrm{Ver}"] \arrow[r, shift left, leftarrow, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & \mathrm{H}_1(G,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \mathrm{H}_0(G,\mathbf{I}_G) \arrow[d, "\mathrm{Res}=\mathbf{N}_{G/H}"] \\
\frac{H}{[H,H]} \arrow[r, shift left, leftarrow, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & \mathrm{H}_1(H,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial"] & \mathrm{H}_0(H,\mathbf{I}_G)
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{Z}[G]$ 的高于一阶同调是零，那么 ∂ 是单射，这样如果 $\{H\theta(t)\}_t$ 是一组右陪集表示的话，$\{\theta(t)^{-1}H\}_t$ 就是一组右陪集。取 $s\in\frac{\mathbf{I}_G}{\mathbf{I}_G{}^2}$，计算得到

$$\begin{aligned}\partial q\circ\mathrm{Ver}(s)=\mathbf{N}_{G/H}\circ\partial p(s)&=\sum_t\theta(t)(s-1)=\sum_t x_{t,s}\theta(ts)-\sum_t\theta(t)\\&=\sum_t x_{t,s}\theta(t,s)-\sum_t\theta(ts)=\sum_t(x_{t,s}-1)\theta_{ts}\\&\equiv\sum_t(x_{t,s}-1)\mod \mathbf{I}_H\mathbf{I}_G\end{aligned}$$

根据 ∂ 的单性，这在 $\frac{G}{[G,G]}$ 上就体现成

$$\mathrm{Ver}(s)=\prod_{\{Ht:t\in G\}}x_{t,s}$$

于是证毕。 □

设 S 是 G 中元素 s 生成的循环群，考虑双陪集空间 $H\backslash G/S=\{HgS:g\in G\}$，可以计算出如下的双陪集刻画。

定理 1.9 (双陪集刻画)**.** 设 $\{x_i\}_i$ 是双陪集空间 $H\backslash G/S$ 的一族代表元，那么

$$\mathrm{Ver}(s)=\frac{|Hx_i|}{|Hx_iS|}\prod_i x_is^{\frac{|Hx_i|}{|Hx_iS|}}x_i^{-1}$$

证明. 仔细考虑 Ver 的定义。利用定理 1.8，找到一组 $H\backslash G$ 的一族代表元即可。如果取 $f_i=\frac{|Hx_i|}{|Hx_iS|}$，$S$ 在 $H\backslash G$ 上的右作用在每一个 Hx_i 的轨道长度就是 f_i。这样的 $\{x_is^j\}_{i,j\le f_i}$ 就给出了 $H\backslash G$ 的一族右陪集表示。下面只需要按照定理 1.8计算对应的 $x_{t,s}$ 即可。此时

$$x_is^js=x_is^{j+1}=(x_is^{f_i}x_i^{-1})x_is^{|\mathrm{ord}(s)|-f_i+j+1}$$

在上一个定理计算时条件可以弱化成 $\theta(t)s \equiv x_{t,s}\theta(ts) \mod H$ 也成立那个算式，于是此时可以取 $x_{t,s} = x_i s^{f_i} x_i^{-1}$，于是

$$\mathrm{Ver}(s) = \frac{|Hx_i|}{|Hx_iS|}\prod_i x_i s^{\frac{|Hx_i|}{|Hx_iS|}} x_i^{-1}$$

□

上述两个看似无聊的定理却可以导出不少有趣的结论，例如二次互反律和 Krull 主理想定理，参见 [25, 2]。这里简述一二，如果取奇素数 p 和乘法群 $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$，在 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ 上定义二次剩余符号 (Legendre 符号) 如下

$$(\frac{a}{p}) := \begin{cases} 1 & \exists r \in \mathbb{Z}, a = r^2 \mod p \\ -1 & \forall r \in \mathbb{Z}, a \neq r^2 \mod p \end{cases}$$

如果 a 是二次剩余，那么 $(\frac{a}{p}) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \mod p$，如果 a 不是二次剩余，那么 $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}^\times$ 中两两互逆元素配对和通过 $xy \equiv a$ 配对得到如下关系

$$-1 = (\frac{a}{p}) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} = (x_1y_1)\cdots(x_{\frac{p-1}{2}}y_{\frac{p-1}{2}}) = (z_1z_1^{-1})\cdots(1(p-1)) = (p-1)! \equiv -1 \mod p$$

所以总有 $(\frac{a}{p}) = a^{\frac{p-1}{2}} \mod p$，这推出 $(\frac{ab}{p}) = (\frac{a}{p})(\frac{b}{p}), \forall a, b \in \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}^\times$。此时取 $H = \{\pm 1\}$ 是 G 的子群，对任何 $a \in G$，根据定理 1.8选择陪集

$$H, 2H, ..., \frac{p-1}{2}H$$

来计算转移映射。由于交换性，可以取 $x_{t,a} = a$，也可以取 $x_{t,a} = \pm 1$，此时 $x_{t,a} = -1$ 需要满足 a 乘以陪集代表后模 p 要大于 $\frac{p}{2}$，记这样的陪集个数是 $n(a,p)$，那么有

$$\mathrm{Ver}_{G/H}\, a = a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{n(a,p)} \mod p$$

利用 Legendre 符号的性质，转移映射给出

$$(\frac{a}{p}) = (-1)^{n(a,p)}$$

此即数论中著名的 Gauss 引理，区别于抽象代数中唯一分解整环的多项式环唯一分解代表的高斯引理。取两个互素的奇素数 p, q，记 $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n < x\}$ 是下取整符号。定义

$$m(q,p) = \sum_{i=1}^{i=\frac{p-1}{2}} \lfloor \frac{ia}{p} \rfloor$$

由于 $i = 1, .., \frac{p-1}{2}$ 时，$iq = q\lfloor \frac{iq}{p} \rfloor + r_i$，余数 $r_i \in (0,p)$，从而根据定义有 $n(q,p)$ 个 $r_i > \frac{p}{2}$，$p-1-n(q,p)$ 个 $r_i < \frac{p}{2}$。那么 $q(1 + \cdots + \frac{p-1}{2}) = mp + \sum_i r_i$，从而计算奇偶信息给出

$$1 = (-1)^{q(1+\cdots+\frac{p-1}{2})} = (-1)^{m+2n(q,p)+pn(q,p)}$$

这推出 $m(q,p) \equiv n(q,p) \mod 2$。注意到根据下取整的定义，在二维平面的直线 $y = \frac{q}{p}x$ 的上下估计 $R = [0, \frac{p}{2}] \times [0, \frac{q}{2}]$ 的整点个数给出

$$m(q,p) + m(p,q) = \frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}$$

根据上面的 Gauss 引理立刻得到著名的二次互反律：当 p,q 是不同的奇素数时成立如下关系

$$(\frac{p}{q})(\frac{q}{p})=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

Galois 上同调 | 1.2

这部分的主要结果完全来自 [25, Chap X]，主要是一些经典的上同调结果。Galois 上同调无非是 Galois 群的上同调理论，此讨论便完全限制在第一部分给出的框架里进行，Galois 上同调也是群的同调理论在具体数论问题上的主要实践。

古典事实 假设 K/k 是有限 Galois 扩张而且其对应的 Galois 群是 $\mathrm{Gal}(K/k)=G$，自然而言据上可导出 G 在 $K,K^\times,\mathrm{GL}(n,K),\mathrm{Sp}(2n,K)$ 上的作用，本节的主要内容即为考察这些上同调的基本性质。

定理 1.10. *对任何正整数 n，K 在 Galois 群作用下可看作左 $\mathbb{Z}[G]$-模记为 K^+，有*

$$\mathrm{H}^{\geq 1}(G,K^+)=0,\quad \mathrm{H}_{\geq 1}(G,K^+)=0$$

证明. 可采用 [5] 中的办法。此处用 Galois 理论中的定理 0.4得到 K^+ 作为左 $\mathbb{Z}[G]$-模同构于某一个 $\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}\{s\},s\in K^\times$ 是相对投射的。根据第一节的定理 1.1，相对投射模的上同调所有大于等于一阶的上同调都是平凡的。另一方面根据定理 0.3 G 是有限群，有左 $\mathbb{Z}[G]$-模同构

$$\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}\{s\}\simeq\oplus_{g\in G}(\mathbb{Z}g\otimes_{\mathbb{Z}}\{s\})\simeq\oplus_{g\in G}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}g,\{s\})\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G],\{s\})$$

从而 K^+ 也是相对单射的，根据定理 1.1的单射性质得到结果。 □

考虑第一阶的上同调，可以得到经典的代数结论-Hilbert 定理 90。

定理 1.11 (Hilbert 定理 90)**.** *乘法群 $K^\times$ 作为 G-模的一阶上同调平凡，也就是*

$$\mathrm{H}^1(G,K^\times)=0$$

证明. 考虑 $K^\times$ 时，利用 Bar 消解对于 H^1 的刻画。取某上链 $a:G\to K^\times\in\mathrm{H}^1(G,K^\times)$，$G$ 有限，根据特征线性无关，那么存在 $c\in K^\times$ 使得

$$b=\sum_{g\in G}a(g)g(c)\neq 0$$

于是利用 a 是上链，$a(g_1g_2)=g_1a(g_2)a(g_1)$，计算

$$g(b)=\sum_{g_i\in G}g(a(g_i))gg_i(c)=\sum_{gg_i\in G}a(g)^{-1}a(gg_i)gg_i(c)=a(g)^{-1}b,\quad\forall g\in G$$

那么存在 $b'=b^{-1}\in K^\times$，$a(g)=g(b')b'^{-1}$，从而 a 是上边缘，推出 H^1 平凡。 □

进一步得到如下非交换情形的 Galois 上同调信息。

非交换情形 下面的定理需要用到非交换情形的 Galois 上同调，此时取 G 是群，A 是 G-群，也就是 G 在群 A 上有 A-自同态作用。事实上我们只需要定义低阶的上同调群，在不引起歧义的情况下均用形式一致的符号表示 G, A 的乘法以及用 ${}^g a, g \in G, a \in A$ 表示 G 在 A 上的作用，定义

$$\mathrm{H}^0(G,A) := A^G = \{a \in A : ga = a, \forall g \in G\} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$$
$$\mathrm{H}^1(G,A) := \frac{\{f \in \mathrm{Hom}(G,A) : f(st) = f(s)^s f(t), \forall s,t \in G\}}{\sim : f \sim g \Leftrightarrow \exists a \in A, f(s) = a^{-1} g(s)^s a, \forall s \in G}$$

回顾群代数的模的上同调理论不难发现，这种定义无非就是将 A 作为模的交换的加法向非交换的乘法的推广，如果 A 交换，上述定义和先前的上同调群 $\mathrm{H}^{-}(G,A)$ 是一致的，这样定义的优势在于我们仍可以得到低维部分的正合列。

定理 1.12 (非交换长正合列). *在上述定义下如 $1 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 1$ 作为 G-群是正合列，那么存在长正合列如下*

$$1 \to \mathrm{H}^0(G,A) \xrightarrow{i_0} \mathrm{H}^0(G,B) \xrightarrow{p_0} \mathrm{H}^0(G,C) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(G,A) \xrightarrow{i_1} \mathrm{H}^1(G,B) \xrightarrow{p_1} \mathrm{H}^1(G,C)$$

如果 A 含于 B 的中心，A 可作为 G-模定义通常的上同调群 $\mathrm{H}^2(G,A)$，此时我们可以构造映射 $\Delta : \mathrm{H}^1(G,B) \to \mathrm{H}^2(G,A)$ 延长出如下的正合序列

$$1 \to \mathrm{H}^0(G,A) \xrightarrow{i_0} \mathrm{H}^0(G,B) \xrightarrow{p_0} \mathrm{H}^0(G,C) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(G,A) \xrightarrow{i_1} \mathrm{H}^1(G,B) \xrightarrow{p_1} \mathrm{H}^1(G,C) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{H}^2(G,A)$$

证明. 首先写出连接同态 δ 的具体形式。根据定义取 $c \in C^G = \mathrm{H}^0(G,C)$，由 p 满可以取某一个 $pb = c, b \in B$。对任何 $g \in G$，有 $p(b^{-1}g(b)) = c^{-1}pg(b) = c^{-1}gpb = c^{-1}c = 1$，从而 $b^{-1}g(b) \in \ker p = \mathrm{im} i$。于是可以根据 i 单定义

$$\delta c_b(g) = i^{-1}(b^{-1}g(b)) \quad \forall g \in G$$

下面来说明这里定义的 δ 确实满足导子条件从而可以定义在 $\mathrm{H}^1(G,A)$ 中，而且其同调类不依赖于 b 的选择，从而 δ 确实可以定义从 $\mathrm{H}^0(G,C)$ 到 $\mathrm{H}^1(G,A)$ 的连接映射。首先

$$\delta c_b(st) = i^{-1}(b^{-1}st(b)) = i^{-1}(b^{-1}s(b)s(b^{-1}t(b))) = \delta c_b(s)^s(\delta c_b(t)) \quad \forall s,t \in G$$

从而 $\mathrm{im}\delta$ 是上链。另一方面如果存在 $pb = pb' = c$，那么根据正合性存在 $a \in A, b' = ba$。此时两个不同的选择有

$$\delta c_{b'}(s) = a^{-1}i^{-1}(b^{-1s}b^s a) = a^{-1}\delta c_b({}^s a) \quad \forall s \in G \Rightarrow \delta c_b \simeq \delta c_{b'}$$

从而 δ 良定义。

当 A 交换时再给出 Δ 的定义，取 $c \in \mathrm{H}^1(G,C)$，根据 p 满对每一个 $c(g) \in C, g \in G$，取相应的 $b_g \in B$ 满足 $pb_g = c(g)$。计算

$$p(b_{st}^{-1} b_s {}^s b_t) = c(st)^{-1}c(s)^s c(t) = c(st)^{-1}c(st) = 0 \Rightarrow b_{st}^{-1} b_s {}^s b_t \in \ker p \in \mathrm{im} i, \quad \forall s,t \in G$$

从而对所有的 $s,t\in G$ 可以定义出

$$a(s,t):=i^{-1}(b_s{}^sb_tb_{st}^{-1})$$

在 A 计算时由于交换性不妨写成加法形式。下面验证这里定义的 a 确实在交换意义下满足上链条件也就是如下计算

$$\begin{aligned}{}^xa(y,z)-a(xy,z)+a(x,yz)-a(x,y)&=a(x,y)^{-1}a(x,yz)a(xy,z)^{-1x}a(y,z)\\&=i^{-1}(b_{xy}{}^xb_y^{-1}b_x^{-1})(b_x{}^xb_{yz}b_{xyz}^{-1})(b_{xyz}{}^{xy}b_z^{-1}b_{xy}^{-1})({}^xb_y{}^{xy}b_z{}^xb_{yz}^{-1})\\&=i^{-1}(b_{xy}{}^xb_y^{-1x}b_{yz}{}^{xy}b_z^{-1}b_{xy}^{-1x}b_y{}^{xy}b_z^{-1}b_{xy}^{-1})({}^xa(y,z))\\&=i^{-1}(b_{xy}{}^xb_y^{-1}({}^xa(y,z))^xb_{yz}{}^{xy}b_z^{-1}b_{xy}^{-1x}b_y{}^{xy}b_z^{-1}b_{xy}^{-1})\\&=i^{-1}(b_{xy}{}^xb_y^{-1x}b_y{}^{xy}b_z{}^xb_{yz}^{-1x}b_{yz}{}^{xy}b_z^{-1}b_{xy}^{-1x}b_y{}^{xy}b_z^{-1}b_{xy}^{-1})\\&=0\quad\forall x,y,z\in G\end{aligned}$$

还需要验证此定义在同调上不依赖 b_- 和 c 的同调类的选择，假设 $c\simeq c',\exists c_0\in C,c'(-)=c_0^{-1}c(-)^-c_0$，此时选择 $b_s'=b_0^{-1}b_s{}^sb_0,pb_0=c_0$。于是计算此时的 a,a' 如下

$$\begin{aligned}a'(x,y)=b'_x{}^xb'_yb'^{-1}_{xy}&=b^{-1}b_x{}^xb^xb^{-1x}b_y{}^{xy}b^{xy}b^{-1}b_{xy}^{-1}b\\&=b^{-1}a(x,y)b=a(x,y),\quad\forall x,y\in G\end{aligned}$$

如果更改 b_s 的选择根据正合性有一族 $a_s,s\in G$ 满足 $b_s'=a_sb_s,\forall s\in G$，从而

$$\begin{aligned}a'(x,y)=b'_x{}^xb'_yb'^{-1}_{xy}&=a_xb_x{}^xa_y{}^xb_yb_{xy}^{-1}a_{xy}^{-1}\\&=a_x+{}^xa_y-a_{xy}^{-1}+a(x,y),\quad\forall x,y\in G\end{aligned}$$

在上同调上 $a=a'$，至此已经完整地叙述了 Δ 的定义。

$\mathrm{H}^0(G,A)=A^G$ 处：单射的限制还是单射。

$\mathrm{H}^0(G,B)=B^G$ 处：一方面来自于 $pi=0$，另一方面如果 $b\in B^G\cap\ker p=B^G\cap\mathrm{im}i$，从而有 $a\in A,b=ia$，那么 $ia=b=gb=gia=iga,\forall g\in G$，由于 i 单射，$a\in A^G$。

$\mathrm{H}^0(G,C)$ 处：如果 $\delta c=0$，那么根据定义存在 $b,pb=c$ 而且有 $a\in Aa^{-1g}a=b^{-1g}b,\forall g\in G$，于是 ${}^g(ba^{-1})=ba^{-1}$ 对所有 $g\ inG$ 成立，那么 $c=p(ba)\in\mathrm{im}p_0$。另一方面如果 $c=pb,b\in B^G$，根据定义 $1=b^{-1g}b$ 对所有 $g\in G$ 成立，于是 $\delta c=0$。

$\mathrm{H}^1(G,A)$ 处：如果 $a\in\ker i_1$，那么存在 $b\in B$ 满足 $a(g)=b^{-1g}b,\forall g\in G$，此时 $a=\delta pb\in\mathrm{im}\delta$。另一方面如果 $a=\delta c\in\mathrm{im}\delta$，那么取 $b\in p^{-1}c$ 得到 $a\in\ker i_1$。

$\mathrm{H}^1(G,B)$ 处：一方面因为 $pi=0$，另一方面如果 $b\in\ker p_1$，存在 $c\in C$ 使得 $pb(-)=c^{-1-}c$ 从而有 $pb'=c$ 使得 $p(b(-)-b'^{-1-}b')=0$，那么 $b-b'^{-1-}b'\in\mathrm{im}i_1$，但是 $b'^{-1-}b'$ 是边缘，于是 $b\in\mathrm{im}i_1$。

如果假设 A 交换。

$\mathrm{H}^1(G,C)$ 处：根据定义如果 $c\in\mathrm{im}p_1$ 来自 B，那么可以取 $b\in\mathrm{H}^1(G,B),pb(g)=c(g),\forall g\in G$，从而定义 $a(x,y)=b(x)^xb(y)b_{xy}^{-1}\equiv0,\forall s,t\in G$，因为 b 满足上链性质，所有 $\Delta\circ p_1=0$。另一方面如果 $c\in\ker\Delta$，取 $pb_g=c(g),g\in G$，Δc 有如下形式

$$\Delta c(s,t)=b_s{}^sb_tb_{st}^{-1}=a(s)+{}^sa(t)-a(st)\quad\exists a:G\to A,\forall s,t\in G$$

推出

$$(a(s)^{-1}b_s)^s(a(t)^{-1}b_t)(a(st)^{-1}b_{st})^{-1} = 1, \forall s, t \in G$$

从而说明 $b' = a(-)^{-}b(-)$ 是上链，而且 $p_1b' = c$，从而 $c \in \mathrm{im} p_1$。至此定理全部证毕。 □

考虑非交换形式的 Galois 上同调，由于 G 可以作用在 K 上，那么 G 自然可以作用在 $\mathbf{M}_n(K)$ 上，也就是作用在每一个矩阵元上，此时这样的作用保持矩阵的加法和乘法，考虑 G 在一些典范的矩阵群上的作用有如下结果。

定理 1.13. 对于 $n \in \mathbb{Z}$，同上面记号有限 Galois 扩张 $K|k$ 的 Galois 群是 $G = \mathrm{Gal}(K|k)$，则如下关系成立。

$$\mathrm{H}^1(G, \mathrm{GL}(n, K)) = 0$$

$$\mathrm{H}^1(G, \mathrm{SL}(n, K)) = 0$$

证明. 注意这里面 GL, SL 上作为群都配备乘法作用。此处的证明来自 Cartier[25]。取 $x \in K^n$ 是一个向量，取 $a \in \mathrm{H}^1(G, \mathrm{GL}(n, K))$，那么考虑如下的线性子空间

$$V_a = \{b(x) = \sum_{g\ inG} a(g)g(x) \in K^n : x \in K^n\} \subset K^n$$

如果某一个线性泛函或者说 K^{n*} 上的元素 u 在 V_a 上消失，对任何的 $h \in K$，有

$$0 = u(b(hx)) = u(h \sum_{g\ inG} a(g)g(x)) = \sum_{g \in G} \langle u^*, a(g)g(x) \rangle g(h)$$

注意到定理 0.1，从而 $\langle u^*, a(g)g(x) \rangle = 0, \forall g \in G, \forall x \in K^n$。由于 $a(g)$ 可逆，$u = 0$，根据线性空间的理论，此时就有 $V_a = K^n$。于是可以寻找到 $x_1, .., x_n \in K^n$ 使得 $b(x_1), .., b(x_n)$ 线性无关，取 K^n 一组标准基 $\{e_1, .., e_n\}$ 和映射 $c : e_i \to x_i$，此时有 $b(c)$ 将 $\{e_i\}_i$ 映射到 $\{x_i\}_i$ 可逆，于是和定理 1.11类似对 $g \in G$ 有

$$g(b) = \sum_{g' \in G} g(a(g'))gg'(c) = \sum_{gg' \in G} a(g)^{-1}a(gg')gg'(c) = a(g)^{-1}b \quad b \in \mathrm{GL}(n, K), \forall g \in G$$

于是由定义 $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{GL}(n, K)) = 0$，第二个结论是因为有行列式映射给出的正合列

$$0 \to \mathrm{SL}(n, K) \xrightarrow{\subseteq} \mathrm{GL}(n, K) \xrightarrow{\det} K^\times \to 0$$

这根据定理 1.12诱导的长正合列和上面计算的 $\mathrm{GL}(n, K)$ 的上同调得到正合列片段

$$\mathrm{H}^0(G, \mathrm{GL}(n, K)) = \mathrm{GL}(n, k) \xrightarrow{\det} \mathrm{H}^0(G, K^\times) = k^\times \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(G, \mathrm{SL}(n, K)) \xrightarrow{\subseteq} \mathrm{H}^1(G, \mathrm{GL}(n, K)) = 0$$

两端的计算来自定理 0.3-Galois 理论和定理 1.11-Hilbert 定理 90。由于 det 满，正合性给出 $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{SL}(n, K)) = 0$。 □

继续来计算一些经典的 Galois 上同调。

$\boxed{\text{Galois 下降}}$ 通过 Galois 群可以对线性空间的基域作不同的调整，这在对数域的研究中十分重要，这一类方法称为 Galois 下降。这里仍然考虑 $G=\mathrm{Gal}(K|k)$。取 k-线性空间 V 和其上固定的一个 (p,q)-型张量 $x\in\otimes^p V\otimes^q V^*$，做自然的标量扩张 $V_K=K\otimes_k V$ 是 K-线性空间，那么利用嵌入 $V\hookrightarrow V_K$ 和 $V^*\hookrightarrow V_K^*$ 得到 x 在 $\otimes^p V_K\otimes^q V^*$ 上的嵌入记作 x_K。我们称这样的两个标有张量的 k-线性空间 $(V,x),(V,x')$ 是 k-同构的，如果存在 k-线性同构 $f:V\to V'$ 满足 $f(x)=x'$；称它们是 K-同构的，如果 $(V_K,x_K),({V'}_K,{x'}_K)$ 是 K 同构的。固定这样的一个对 (V,x)，把 (V,x) 的不同的 k-同构类中的 K-同构类构成的集合记作 $\mathrm{E}_{(V,x)}(K|k)$，下面要建立这个集合和一阶上同调的关系。记 $A_{(V,x),K|k}$ 是所有 (V_K,x_K) 的 K-自同构群，将 V_K,A_K 改造成 G-模，定义其在 V_K 上的作用是 $g(x\otimes\lambda):=x\otimes g(\lambda),g\in G$，其在 A_K 上的作用定义成 $g(f)=gfg^{-1},g\in G$，这里的 gfg^{-1} 便可看作 $\mathrm{End}_K(V_K)$ 的映射复合，这样有下面的定理。

定理 1.14 (Galois 下降). *固定 Galois 扩张 $K|k$ 和其 Galois 群 G。取 $(V',x')\in\mathrm{E}_{(V,x)(K|k)}$，于是存在 K-线性同构 $f:V_K\to {V'}_K$，定义同构类 $\mathrm{E}_{(V,x)}(K|k)$ 到一阶上同调群 $\mathrm{H}^1(G,A_{(V,x),K|k})$ 的映射 $\theta:({V'}_K,{x'}_K)\to(p_f:s\to f^{-1}sfs^{-1},s\in G)$ 诱导如下作为集合的一一对应*

$$\theta:\mathrm{E}_{(V,x)}(K|k)\xrightarrow{\phi}\mathrm{H}^1(G,A_{(V,x),K|k})$$

是双射。

证明. 首先说明 p_f 确实是满足上链条件

$$p_f(st)=f^{-1}stft^{-1}s^{-1}=(f^{-1}sfs^{-1}sf^{-1})(s(ftf^{-1}t^{-1})s)=p_f(s)^s p_f(t),\quad \forall s,t\in G$$

其次说明 θ 的良定性，其一这上同调类不依赖于 K-同构的选择，如果有 f_1,f_2 都是 K-同构，那么 $f_0=f_2^{-1}f_1$ 就是 V_K 的 K-自同构，有 $f_0\in A_{(V,x),K|k}$，于是只相差边缘

$$p_{f_1}(g)=p_{f_2f_0}(g)=f_0^{-1}f_2^{-1}gf_2f_0g^{-1}=f_0^{-1}f_2^{-1}gf_2g^{-1}gf_0g^{-1}=f_0^{-1}p_{f_2}(g)^g f_0,\quad \forall g\in G$$

于是 θ 定义是合法的，那么现在证明 θ 是双射。

单射:如果两个同构 f_1,f_2 给出同一个上链 p_f,那么在相差一个 V_K 的 K-自同构下可假设 $f_1^{-1}gf_1g^{-1}=f_2^{-1}gf_2g^{-1},\quad\forall g\in G$，这给出

$$g(f_2f_1^{-1})=f_2f_1^{-1},\quad \forall g\in G$$

根据定理 0.3-Galois 主定理推出此时 $f_2f_1^{-1}$ 是 k-同构，于是 $f_2f_1^{-1}:(V_1,x_1)\to(V_2,x_2)$ 是 k-等价的，从而在 $E_{(V,x)}(K|k)$ 中相等。

满射：取 $p\in\mathrm{H}^1(G,A_{(V,x),K|k})$，因为上一个定理得到 $GL(n,K)$ 的一阶上同调平凡，而且对某一个 n 有 $A_{(V,x),K|k}\subset\mathrm{GL}(n,K)$。于是存在 V_K 的 K-自同构 f 满足如下条件

$$p(g)=f^{-1}\circ g\circ f\quad\forall g\in G$$

把 f 延拓到 (p,q) 张量场上也就是 $\bar f=\otimes^p f\otimes^q f^*$，是张量空间的自同构，不区分 $f,\bar f$ 计算得到

$$g(f(x))=g(f)g(x)=g(f)(x)=fp_g(x)=f(x)\forall g\in G$$

根据定理 0.3得到 $f(x)$ 是 k-张量空间的张量，从而 $(V,x)\simeq_K(V,f(x))$，而且 $(V,f(x))\in\mathrm{E}_{(V,x)}(K|k)$，从而 $\theta(f)=p$，于是 θ 是满射。兹证毕。 □

通过 Galois 下降，得到正交群的一阶上同调。

定理 1.15. *对于 $n\in\mathbb{Z}$，记号同定理 1.14，正交群的一阶上同调如下。*

$$\mathrm{H}^1(G,\mathrm{O}(n,K))=\{K\text{-平凡的秩 } n \text{ 的 } k\text{-二次型}\}$$

证明. 根据Galois 下降对照 $E_{(V,x)}(K|k)$ 和 $A_{(V,x),K|k}$ 立刻得到此结论。 □

以及我们如果选择合适的交错 $(0,2)$ 型张量，就可以计算辛群的一阶上同调如下。

定理 1.16. *对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$*

$$\mathrm{H}^1(G,\mathrm{Sp}(2n,K))=0$$

证明. 考虑 ω 是 k-线性空间 V 上的 $(0,2)$ 型非退化反对称张量，熟知外代数者立刻了解 ω 是一个辛形式，有 $\omega\in\wedge^2V$。根据辛群的定义此时在定理 1.14中 $A_{(V,\omega),K|k}\simeq\mathrm{Sp}(2n,K)$。只需说明此时的 $\mathrm{E}_{(V,\omega)}(K|k)=0$。这是因为如果两个辛形式在 K 上等价，它们就在 k 上等价。事实上任何 k-向量空间上只有一个标准的辛形式，在一组合适的坐标 $(x_1,..,x_n,y_1,..,y_n)$ (Darboux 坐标) 下写成 $\omega=\sum_i x_i^*\wedge y_i^*$。这结果完全根据反对称张量的性质和非退化性得到，即归纳地找到这些特征平面 $kx+ky$，没有本质困难。 □

如果 G 不是有限群，可以通过拓扑 Galois 群的办法研究上同调。此时的上同调群也是投射极限下的拓扑群，这部分理论可以参考 [25, Chap X] 和 [18] 的相关章节。数论和拓扑的交集多汇聚在此。此时可以把无穷 Galois 群的上同调定义成有限 Galois 群的上同调的投射极限，例如取

$$G=\varprojlim_{i\in I}G_i,|G_i|<+\infty$$

对于 G-模 A 期望 A 是连续的，也就是可以写成一些 G 作为 pro-有限群的开正规子群 H 的不动点的并集

$$A=\cup_{H\lhd G}A^H=\varinjlim_{H\lhd G}A^H$$

这样利用导出函子和极限的运算性质合理定义出带有拓扑的上同调群是

$$\mathrm{H}^\bullet(G,A):=\varprojlim_{H\lhd G}\mathrm{H}^\bullet(G/H,A^H)$$

极限的映射用相对的膨射 Inf 连接，进而可以定义连续的上边缘，连续的 G-态射等等。以及此无穷情形的上同调也会和有限情况分享诸多性质，见 [23]。

关于 Brauer 群 | 1.3

Brauer 群是十分重要的代数结构，这一子节试图简述 Brauer 群和二阶上同调的联系。

中心单代数分类 考虑数域 k 上的有限维代数 (作为 k-线性空间是有限维的, 作为环是 k-代数)，称其为**单代数**，如果其不存在非平凡的双边理想；称其为**半单代数**，如果其作为 k-线性空间是单代数的直和；称

其为**中心单**的，如果是中心为基域 k 的单代数。不妨考虑有限维 k-代数范畴 $\mathrm{Alg}_{k,fin}$，这看成 k-模范畴就已经是一个 Abel 范畴了，更进一步其上存在 k-张量积，也就是在 $A\otimes_k B, A, B\in \mathrm{Alg}_{k,fin}$ 上的映射

$$\begin{aligned}\cdot:(A\otimes_k B)\times(A\otimes_k B)&\to A\otimes_k B\\(a\otimes b)(a'\otimes b')&=aa'\otimes bb'\quad\forall a,a'\in A,b,b'\in B\end{aligned}$$

在 $(A\otimes_k B)\otimes(A\otimes_k B)$ 的双线性提升 (利用张量积的万有性质，这种提升是唯一的)。于是已定义出有限维 k-代数的张量运算。中心单代数的结构较为清楚，利用上述的张量结构，有下面的定理完全描写。

定理 1.17 (k-中心单代数的结构)**.** *设 k 是完满的数域（有限扩张都可分）而且 A 是有限维 k-代数，以下命题互相等价。*

1) A 是 k-中心单代数。

2) A 同构于 n 维矩阵代数 $\mathbf{M}_n(D)$，D 是中心为 k 的可除代数（非零元素有逆元）。

3) $\bar{k}\otimes_k A$ 作为 $\bar{k}$-代数同构于某一个 $\bar{k}$ 上的矩阵代数 $\mathbf{M}_m(\bar{k})$。

4) 存在有限 Galois 扩张 $K|k$ 满足存在 K-代数同构 $K\otimes_k A\simeq\mathbf{M}_l(K)$。

证明. 证明来自对单代数的研究，最早可追溯到 Wedderburn、Burnside 和 Frobenius。事实上只有 (1) 和 (2) 的等价性是困难的。而 (2) 推 (1) 又相对简单，因为如果记 E_{ij} 是矩阵代数 $\mathbf{M}_n(D)$ 中只在 (i,j) 处为一其他处为零的矩阵，e_i 是只在第 i 行全是一其余位置全是零的矩阵，那么根据 D 可除，如果 $I\subset\mathbf{M}_n(D)$ 是一个非零双边理想，那么存在某一个 $x\in I$ 且有某一个矩阵元 x_{i_0,j_0}，必要时乘上其逆和一些置换矩阵和初等变换矩阵，不妨设 $x_{11}=1,x_{1i}=0,i\neq 1$。于是

$$E_{11}=e_1^t x e_1\in\mathbf{M}_n(D)I\mathbf{M}_n(D)=I$$

由双边理想的性质

$$E_{ij}=E_{i1}E_{11}E_{1j}\in I\quad\forall 1\le i,j\le n$$

由于这些 E_{ij} 作为线性空间的一组基生成了全部的矩阵，就有 $I=\mathbf{M}_n(D)$，而且考虑左乘和右乘 E_{ij} 不难得到和所有矩阵交换的矩阵只能是 $C(D)=k$ 中元素的数乘，所以 $\mathbf{M}_n(D)$ 是 k-中心单代数。

下面来证明 (1) 推 (2)，要分三部刻画单代数的结构。

第一步：Schur 引理。此引理用来得到定理中的可除代数 D。

引理 1.17.1 (Schur 引理)**.** *单模或单代数的自同态环可除。*

证明. 设 A 是单代数，记其自同态环是 $\mathrm{End}(A)$。那么对任何 $f\in\mathrm{End}(A)$，$\ker f$ 是 A 的非零双边理想。如果 $\ker f=0$，f 就是有限维线性空间到自身的单射，是同构从而有逆，否则 $\ker f=A$，$f=0$，所以 $\mathrm{End}(A)$ 可除。单模的情况也类似。 □

还需要进一步探测 k-代数上的模的自同态的自由度。

引理 1.17.2 (密度定理). 设 A 是 k-代数，V 是忠实半单 A-模，忠实的意思是

$$\mathrm{Ann}(V) := \{a \in A : av = 0 \quad \forall v \in V\} = 0$$

也就是 A 在 V 的数乘作用是忠实的。如果记 $B = \mathrm{End}_A(V)$，$C = \mathrm{End}_B(\mathrm{End}_k(V))$。对任何有限集

$$\{v_1, ..., v_n\} \subset V$$

和任何的 $f \in c$，都存在一个 $a \in A$ 满足

$$f(v_i) = av_i \quad i = 1, .., n$$

证明. 首先考虑 $n = 1$，此时根据半单模的性质有直和分解 $V = Av_1 \oplus F$，定义 $\pi : V \to V$ 是到 Av_1 的投射，从而 $\pi \in B$，那么

$$\pi(f(v_1)) = f(\pi(v_1)) = f(v_1) = av_1 \in Av_1$$

忠实性保证 a 存在。对于 $n > 1$ 时考虑 A 在 $W = \times^n V$ 上的对角作用

$$a(v_1, .., v_n) = (av_1, .., av_n)$$

显然根据定义 W 是忠实的，而且每一个分量上的直和分解给出 W 的直和分解，W 也是半单的。而此时

$$B = \mathrm{End}_A(W) = \mathbf{M}_n(B = \mathrm{End}_A(V))$$

和论证 $\mathbf{M}_n(D)$ 的单性类似利用忠实性可以得到此时的

$$C = \mathrm{End}_B(\mathrm{End}_k(V)) = \mathrm{diag}(n)(C = \mathrm{End}_B(\mathrm{End}_k(V)))$$

于是取 $(v_1, .., v_n) \in W$ 和 $f\,\mathrm{Id}_W \in C$ 便得到结论。 □

第二步：双中心引理。此引理用来给出定理中的矩阵代数。

引理 1.17.3 (双中心引理). 设 A 是有限 k-代数，V 是有限生成的忠实半单 A-模。如果记 $V^* = \mathrm{End}_k(V)$ 以及 $B = \mathrm{End}_A(V)$ 和 $C = \mathrm{End}_B(\mathrm{End}_k(V))$。则 $C = A$，“双中心的意思也就是 k 自同态中和与 A 交换的自同态这个集合交换的自同态就只有 A ”。写成函子形式就是

$$C_{V^*}C_{V^*} = 1, \quad C_B(A) = \{b \in B : ab = ba, \quad \forall a \in A\}$$

证明. 证明来自如上的宽度定理。根据定义对所有的 A 都有 $C_{V^*}C_{V^*}(A) \supset A$，只需要说明反向，根据密度定理，此时的 $C_{V^*}C_{V^*}(A)$ 就相当于密度定理的 C，取 $v_1, ..., v_n$ 是 V 的一组 k-基就可以得到

$$C_{V^*}C_{V^*}(A) \supset A \supset C_{V^*}C_{V^*}(A)$$

于是 $C_{V^*}C_{V^*}(A) = A$。 □

第三步：考虑中心单代数 A 的某一个有限维单模，例如其极小左理想 S，左乘给出嵌入

$$A \mapsto \mathrm{End}_k(S)$$

这确实是嵌入，否则 ker 给出 A 的非平凡双边理想。从而 $\mathrm{End}_k(S)$ 是忠实半单 A 模。取

$$D = C_{S^*}(A)$$

Schur 引理保证 D 可除。根据双中心引理，

$$A = C_{S^*}D = \mathrm{End}_D(S)$$

注意到 S 是有限生成的 D-模，从而根据 D 可除，S 是有限生成的自由 D-模，对某一个 n 有 $S \simeq D^n$，从而有

$$A = \mathrm{End}_D(S) \simeq \mathrm{End}_D(D^n) \simeq \mathbf{M}_n(D)$$

至于中心平凡的性质，两边取中心并利用 S 的忠实性得到

$$k = C(A) = \mathrm{diag}_n(C(D)) \Rightarrow C(D) = k$$

有 (1) 和 (2) 的等价性，下面证明 (2) 推 (3)、(3) 推 (4) 和 (4) 推 (2)。

(2) 推 (3) 是显然的，因为如果取 A 一组 k-基，张量可以唯一表示，取中心操作和张量是交换的 (这在下文中定义 Brauer 群会更详细论述)

$$C(\bar{k} \otimes_k A) = C(\bar{k}) \otimes_k C(A) = \bar{k} \otimes_k k = \bar{k}$$

且根据下文对 Brauer 群的论述利用 $\bar{k}$ 是除环得到 $\bar{k} \otimes_k A$ 的非平凡双边理想会诱导出 A 的非平凡双边理想。所以 $\bar{k} \otimes_k A$ 是 $\bar{k}$ 上的中心单代数，根据 (1)(2) 等价性

$$\bar{k} \otimes_k A \simeq \mathbf{M}_m(D)$$

D 的中心为 $\bar{k}$ 的有限维 $\bar{k}$ 可除代数，那么对任何 $x \in D$，集合 $\{1, x, .., x^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 对足够大的 k 而言一定 $\bar{k}$ 线性相关，这给出 x 的 $\bar{k}$ 系数代数方程 f，那么取 f 是极小多项式有数域的包含关系如下

$$\frac{\bar{k}[x]}{(f)} \supset \bar{k}$$

从而根据 $\bar{k}$ 代数闭，那么 $x \in \bar{k}$ 从而 $D = \bar{k}$。

(3) 推 (4) 是用到有限维条件，取足够大的代数扩域 (根据 k 完满这也是 Galois 扩张) K 使得

$$\bar{k} \otimes_k A \simeq_{\bar{k}} \mathbf{M}_n(\bar{k})$$

中的一组典范的 k-基 $\{e_1, .., e_{n^2}\}$ 在 K 中，而且结构方程

$$e_i e_j = \sum_{ijk} a_{ijk} e_k \quad 1 \leq i, j \leq n^2$$

也在 K 中，如此在 $\bar{k}$ 上的同构就可以下降到 K 上得到

$$\bar{k} \otimes_k A \simeq_K \mathbf{M}_n(\bar{k})$$

(4) 推 (2) 是根据 Galois 理论，在等价两边取 $\mathrm{Gal}(K|k)$ 作用下的不动点。

$$A = k \otimes_k A = K^{\mathrm{Gal}(K|k)} \otimes A = (K \otimes_k A)^{\mathrm{Gal}(K|k)} \simeq \mathbf{M}_l(K)^{\mathrm{Gal}(K|k)} = \mathbf{M}_l(K^{\mathrm{Gal}(K|k)}) = \mathbf{M}_l(k)$$

$K^{\mathrm{Gal}(K|k)} = k$ 是经典 Galois 对应的结果，参考定理 0.3。 □

在上述定理启发下考虑 k-中心单代数的 k-相似等价类 $[-]$，也就是 $A \sim B$ 当且仅当存在 m, n 维矩阵代数 $\mathbf{M}_m(k), \mathbf{M}_n(k)$ 满足 $A \otimes_k \mathbf{M}_m(k) \simeq B \otimes_k \mathbf{M}_n(k)$ 是 k-线性同构，由于 $\mathbf{M}_m(k) \otimes_k \mathbf{M}_n(k) \simeq \mathbf{M}_{mn}(k)$ 是 k-线性同构，所以这个关系确实是等价，那么定义乘法如矩阵的 Kronecker 乘积

$$[A][B] := [A \otimes_k B]$$

下面说明这个运算在中心单代数的等价类上封闭。也就是如果 A, B 是中心单代数，那么 $A \otimes_k B$ 是中心单代数。首先对任何有限维 k-代数 A, B，都有取中心操作和张量运算交换

$$C_{A \otimes_k B}(A \otimes_k B) = C_A(A) \otimes_k C_B(B)$$

根据乘法定义 $C_{A \otimes_k B}(A \otimes_k B) \supset C_A(A) \otimes_k C_B(B)$ 显然，如果取 $\{e_i\}_i$ 是 A 的一组有限 k-基以及 $\{f_i\}_i$ 是 B 的一组有限 k-基，取

$$a = \sum_{i,j} a_{ij} e_i \otimes_k f_j \in C_{A \otimes_k B}(A \otimes_k B), \quad a_{ij} \in k$$

那么考虑 a 和任何 $1 \otimes_k b, b \in B$ 以及 $a \otimes_k 1, a \in A$ 的交换性，注意到 e_i, f_i 作为基使得张量表示有唯一性，这得到 $e_i \in C_A(A), f_j \in C_B(B)$ 对所有 i, j 成立。于是有限维 k-代数上张量和取中心交换。那么 A, B 的中心是 k，从而计算出 $A \otimes_k B$ 的中心

$$C_{A \otimes_k B}(A \otimes_k B) = C_A(A) \otimes_k C_B(B) = k \otimes_k k = k$$

又因为 A, B 是单代数，根据定理 1.17存在可除代数 D' 使得 $A \simeq \mathbf{M}_n(D')$。于是计算如下

$$A \otimes_k B \simeq \mathbf{M}_n(D') \otimes_k B = \mathbf{M}_n(D' \otimes_k B)$$

如果 $D' \otimes_k B$ 有非平凡双边理想 J，取 $\{e_i\}_{1 \le i \le n}$ 是 B 的一组 k-基，注意到 D' 可除，从而 $1 \otimes_k e_i, i = 1, .., n$ 是 $D' \otimes_k B$ 的一组 D'-基。不妨假设 ω 是 J 中元素里表示成 $1 \otimes_k e_i$ 的 D'-线性组合时非零 D' 系数最少的元素，而且在乘上一些元素和一些排列后不妨假设

$$\omega = \sum_{1 \le i \le n} d_i \otimes_k e_i \quad d_i \in D'$$

注意到对任何 $d' \in D'$，元素 $\omega d'$ 和 ω 在表示成上述基的线性组合时非零系数个数一致，那么如果相差一个合适的数乘时 $\omega d' - d\omega$ 的非零系数会严格少一个，这通常记成

$$\mathrm{Supp}(\omega) = \{d_i \neq 0 : \omega = \sum_i d_i(1 \otimes_k e_i)\}, \quad \mathrm{Supp}(\omega d' - d\omega) \subset \mathrm{Supp}(\omega)$$

这里取的 ω 是使得支撑集是极小的，所以只能 $\omega d' - d\omega = 0$，那么在基底上看就是 d_i 和 D' 中元素都交换，于是根据 $C(D') = k$，那么 $d_i \in k$ 从而 $\omega \in 1 \otimes_k B$，事实上证明了那些所有使得 $|\mathrm{Supp}(\omega)|$ 在 J 中是极小的 ω 都在 $1 \otimes_k B$ 中。但是如果任取 $a \in J$，总可以将其写成两个支撑集更小的元素的和，那么归纳就可以得到 J 可以用那些支撑集最小的元素生成，从而有

$$1 \otimes_k b_1, .., 1 \otimes_k b_m, \quad b_1, .., b_m \in B$$

生成 J，那么诱导出非平凡理想

$$\mathfrak{b} := \{b \in B : 1 \otimes_k b \in J\} \supset \{b_1, .., b_m\}$$

根据 B 单这并不存在，于是非平凡理想 J 不存在。从而 $D' \otimes_k B$ 是单代数。取中心发现是中心单代数。于是根据结构定理

$$\mathbf{M}_n(D' \otimes_k B) \simeq \mathbf{M}_n(\mathbf{M}_m(D)) = \mathbf{M}_{mn}(D)$$

对某一个中心是 k 的可除代数 D 成立，根据定理 1.17 $A \otimes_k B$ 是中心单代数。于是两个中心单代数的 k-相似等价类的乘积还是中心单代数的 k-相似等价类。这给出经典的 Brauer 群的定义：所有 k-中心单代数的 k-相似等价类在上述的乘法下构成一个交换半群，记作 $\mathrm{Br}(k)$。注意到 $[\mathbf{M}_n(k)]$ 是这个群的单位元，而考虑中心单代数 A 的反环 A^{opp}，映射 $(a, a^{opp}) : x \to axa^{opp}$ 在张量积上的提升给出

$$\phi : A \otimes_k A^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{End}_k(A) = \mathbf{M}_n(k) \quad n = \dim_k A$$

由于 $A \otimes_k A^{\mathrm{opp}}$ 是单代数，上述 ϕ 是同构，从而半群 $\mathrm{Br}(k)$ 是群，每一个元素 $[A]$ 的逆元是 $[A^{\mathrm{opp}}]$。将这个代数结构称为 k 的 Brauer 群。考虑 Galois 扩张 $K|k$ ，标量提升可以得到典范的映射

$$\theta_{K|k} = [K \otimes_k -] : \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(K)$$

定义相对版本的 Brauer 群 $\mathrm{Br}(K/k) = \ker \theta_{K|k}$，这无非就是在说那些在 K 上相似于矩阵代数的 k-中心单代数等价类，这常被称为在 K 上**分裂** (splitting over K)。而且根据定理 1.17有

$$\mathrm{Br}(k) = \bigcup_{\substack{K|k\, Galois \\ \dim_k K < +\infty}} \mathrm{Br}(K|k) = \varinjlim_{\substack{K|k\, Galois \\ \dim_k K < +\infty}} \mathrm{Br}(K|k)$$

一个不平凡的结论是可以用二阶上同调来刻画 Brauer 群，即如下定理。

定理 1.18 (Brauer 群的等价定义). *考虑 Galois 扩张 $K|k$，$G = \mathrm{Gal}(K|k)$ 是 Galois 群，那么存在 $\mathbb{Z}$-模同构*

$$\delta : \mathrm{Br}(K|k) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{H}^2(G, K^\times)$$

证明. 为了应用 Galois 下降和构造相应的中心单代数，如下的 Noether-Skolem 定理异常重要。

引理 **1.18.1** (Noether-Skolem 引理). 取数域 k。所有 k-中心单代数的自同构都是内自同构，也就是由共轭映射 $s \to gsg^{-1}$ 给出。更进一步，所有从 k-单代数到 k-中心单代数的同态都相差一个内自同构。

证明. 此结论是对矩阵代数的推广，沿袭定理 1.17的记号。考虑数域 K 上的矩阵代数 $\mathbf{M}_n(K)$ 的自同构 ρ，由于对任何矩阵 M 可以将其相似三角化，考虑 ρ 在上三角矩阵的对角元上的作用保持 K 的乘法，计算特征多项式就能得到 $\rho(M)$ 和 M 有相同的特征多项式。进而 ρ 保持特征值的代数重数，所以 ρ 将秩一投影映射到秩一投影。根据特征多项式和矩阵的秩一分解有非零向量 v_1, w_1 满足

$$\rho(E_{11}) = v_1 w_1^T, \quad \langle v_1, w_1 \rangle = 1$$

定义 $v_j = \rho(E_{j1})v_1, j = 1, .., n$，都是非零向量，因为 $v_1 = \rho(E_{1j})v_j$ 非零。而且 $v_1, .., v_n$ 线性无关，这可以取一个线性关系然后在左边作用 $\rho(E_{1k})$ 得到。从而定义

$$P = [v_1, .., v_n]$$

是一个可逆矩阵，那么

$$\rho(E_{ij})P = [\rho(E_{ij})v_1, .., \rho(E_{ij})v_n] = [\delta_{j1}v_i, ..., \delta_{jn}v_i] = [v_1, .., v_n]E_{ij} = PE_{ij} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$$

注意到这些 E_{ij} 线性地生成了 $\mathbf{M}_n(K)$，于是 $\rho(-) = P^{-1}(-)P$。所以矩阵代数的所有自同构都是内自同构。那么考虑 A 是中心单代数，可以利用定理 1.17中那样找一个代数正规扩张 $K|k$ (不一定可分) 使得 $K \otimes_k A \simeq \mathbf{M}_n(K)$，于是可逆的共轭作用给出正合列

$$0 \to K^\times \xrightarrow{\otimes_k 1} (K \otimes_k A)^\times \xrightarrow{\text{conj}} \text{Aut}(K \otimes_k A) \to 0$$

上述代数有 $G = \text{Gal}(K|k)$ 作用 (这里不一定是 Galois 群)，根据定理 0.3的证明事实上任何代数扩张的不动域都是本身的基域。计算诱导的长正合列是

$$0 \to k^\times \xrightarrow{\otimes_k 1} A^\times \xrightarrow{\text{conj}} \text{Aut}(A) \xrightarrow{\delta} \text{H}^1(G, K^\times)$$

由于Hilbert 定理 90的证明中没有用到可分扩张的性质，也可以得到 $\text{H}^1(G, K^\times) = 0$，于是 conj 是满射，故所用自同构都来自 $A^\times$ 的共轭。

事实上所有的单代数到中心单代数的自同态之间都相差一个共轭作用，比如 $f, g : A \to B$ 是这样的自同态。根据上面对 Brauer 群的论述，$B \otimes_k B^{\text{opp}}$ 是一个 k 矩阵代数，于是

$$f \otimes_k \text{Id}, g \otimes_k \text{Id} : A \otimes_k B^{\text{opp}} \to B \otimes_k B^{\text{opp}} \simeq \mathbf{M}_n(k)$$

是两个代数同态。根据上文的论证 $A \otimes_k B^{\text{opp}}$ 单而且 $\mathbf{M}_n(k)$ 中心单。由于 ker 会给出非平凡双边理想，那么非平凡的上述两个同态必定是单嵌入。$(g \otimes_k \text{Id})(f \otimes_k 1\,\text{Id})^{-1}$ 是矩阵代数的某一个子代数的自同构。

那么 $(g \otimes_k \text{Id})(f \otimes_k 1\,\text{Id})^{-1}$ 是矩阵代数中某一个单代数的自同构，根据结构定理这相当于一个可除代数的矩阵代数 $\mathbf{M}_l(D)$ 的自同构。但是 $C(\mathbf{M}_l(D)) = C(D)$ 是 k 的代数扩张，这个同构能诱导出 $C(D)$-中心单代数的同构，于是根据前面的结论这是内自同构。可以取可逆矩阵 $C \in \mathbf{M}_n(k)$ 满足

$$(g \otimes_k \text{Id})(a \otimes_k b) = (g \otimes_k \text{Id})(f \otimes_k 1\,\text{Id})^{-1}(f \otimes_k 1\,\text{Id})(a \otimes_k b) = C(fa \otimes_k b)C^{-1}$$

对一切 $a\in A, b\in B^{\text{opp}}$ 成立。固定 $a=1$，C 和 $1\otimes_k B^{\text{opp}}$ 的元素都交换，但是

$$C_{B\otimes_k B^{\text{opp}}}(1\otimes_k B^{\text{opp}}) = C_B(1)\otimes_k C_{B^{\text{opp}}}(B^{\text{opp}}) = B\otimes_k k = B\otimes_k 1 = B$$

从而在同构下 $C = b\otimes_k 1, \exists b\in B$，在 $A\otimes_k 1$ 上取值得到

$$g(a) = bf(a)b^{-1}, \quad \forall a\in A$$

所以所有中心单代数间的自同构都相差一个内自同构。这和 H^1 的同调平凡类似，启发去证明中心单代数同构类和上同调的联系。 □

固定 Galois 扩张 $K|k$ 开始构造性证明。

第一步：根据中心单代数构造上同调类。取 A 是 k-中心单代数而且 $K\subset A$ 和 $C_A(K)=K$。这类的代数记成 $A(K|k)$ 下面来证明这类代数作为 k-线性空间的维数是给定的。

引理 1.18.2 (维数公式). 设 A 是 k-中心单代数。如果 B 是 A 的 k-子代数，如果 B 是单的，则其在 A 的中心 $C_A(B)$ 是单代数而且有如下的维数公式

$$\dim_k A = (\dim_k B)(\dim_k C_A(B))$$

而且还可推出 $C_A(C_A(B)) = B$。

证明. 因为 B 在 B 上的左乘作用相当于 B^{opp} 在 B 的右乘作用，这均可看成 B 作为 k-线性空间的 k-线性同态。考虑 B 作为 k-线性空间的 k-线性同态构成的 k-代数是 $\mathrm{End}_k(B)$ 不难得到

$$C_{\mathrm{End}_k(B)}(B^{\text{opp}}) = B, \quad C_{\mathrm{End}_k(B)}(B) = B^{\text{opp}},$$

由于 A 是中心单的，$\mathrm{End}_k(B)$ 是矩阵代数故是单代数。重复一遍定义 Brauer 群的论证得到 $A\otimes_k \mathrm{End}_k(B)$ 是 k-中心单代数。利用取中心和张量交换，计算出

$$\begin{aligned} C_{A\otimes_k \mathrm{End}_k(B)}(B\otimes_k 1) &= C_A(B)\otimes_k \mathrm{End}_k(B) \\ C_{A\otimes_k \mathrm{End}_k(B)}(1\otimes_k B) &= A\otimes_k B^{\text{opp}} \end{aligned}$$

取 $b\to b\otimes_k 1$ 和 $b\to 1\otimes_k b$ 是两个从 k-单代数 B 到 k-中心单代数 $A\otimes_k \mathrm{End}_k(B)$ 的同态，根据Noether-Skolem 引理的论证存在可逆元 $u\in A\otimes_k \mathrm{End}_k(B)$ 满足

$$b\otimes_k 1 = u(1\otimes_k b)u^{-1} \quad \forall b\in B$$

取中心得到

$$C_{A\otimes_k \mathrm{End}_k(B)}(B\otimes_k 1) = uC_{A\otimes_k \mathrm{End}_k(B)}(1\otimes_k B)u^{-1} = uA\otimes_k B^{\text{opp}}u^{-1}$$

因为 $A\otimes_k B^{\text{opp}}$ 是中心单代数，所以共轭后根据前面计算前者等于 $C_A(B)\otimes_k \mathrm{End}_k(B)$ 也是中心单代数。那么反证法推出 $C_A(B)$ 是单代数。计算维数

$$\dim_k C_A(B)\otimes_k \mathrm{End}_k(B) = (\dim_k C_A(B))(\dim_k B)^2$$

以及

$$\dim_k A \otimes_k B^{\mathrm{opp}} = (\dim_k A)(\dim_k B)$$

两者是共轭的 k-代数，维数相等推出

$$\dim_k A = (\dim_k B)(\dim_k C_A(B))$$

最后考虑 $B' = C_A(C_A(B))$，那么有 $B' \supset B$。对 $C_A(B)$ 这一 k-单代数应用上述已经证实的结果有维数公式

$$\dim_k A = (\dim_k C_A(B))(\dim_k C_A(C_A(B)))$$

从而 B, B' 作为 k-线性空间维数相等，于是 $B' = C_A(C_A(B)) = B$。 □

根据此引理取 $B = K$ 可知这样的代数的 k-维数均是

$$\dim_k A = (\dim_k K)^2$$

考虑 $\sigma : K \to A$ 是 Galois 作用，这是一个 k-单代数到 k-中心单代数间的同态，根据 Noether-Skolem 引理的证明存在 $e_\sigma \in A$ 满足

$$\sigma(a) = e_\sigma a e_\sigma^{-1} \quad \forall a \in K$$

这等价于

$$e_\sigma a = \sigma(a) e_\sigma \quad \forall a \in K$$

注意到对任何 $\sigma, \tau \in G$，因为 $\sigma\tau$ 是 A 的自同构，计算得 $e_{\sigma\tau}$ 和 $e_\sigma e_\tau$ 的关系是

$$e_\sigma e_\tau = \phi(\sigma, \tau) e_{\sigma\tau} \quad \forall \sigma, \tau \in G$$

这里 ϕ 是一个 $G \times G$ 到 $K^\times$ 的函数，下面来检查这是一个 2-上链，利用 Bar 消解检查上链条件，对任何的 $x, y, z \in G$ 检查

$$\begin{aligned} e_x(e_y e_z) &= e_x(\phi(y,z)e_{yz}) = {}^x\phi(y,z)e_x e_{yz} = {}^x\phi(y,z)\phi(x,yz)e_{x,yz} \\ &= (e_x e_y)e_z = \phi(x,y)e_{xy}e_z = \phi(x,y)\phi(xy,z)e_{xyz} \end{aligned}$$

所以由于 K 是域，这给出

$${}^x\phi(y,z)\phi(xy,z)^{-1}\phi(x,yz)\phi^{-1}(x,y) = 0 \quad \forall x, y, z \in G$$

于是 ϕ 确实是 $\mathrm{H}^2(G, K^\times)$ 中的元素。而且如果取不同的 e'_σ, e_σ，它们相差一个 $f : G \to K^\times$，重复上述计算写成加法形式就是

$$\phi'(x,y) - \phi(x,y) = f(x) + {}^x f(y) - f(xy) \quad \forall x, y \in G$$

确实给出相同的同调类，从而定义出从中心单代数到上同调的映射

$$\chi : A_{K|k} \to \mathrm{H}^2(G, K^\times)$$

下面想说明这是单射。注意到 e_σ 是 A 的一组 K-基，因为应用Galois 理论计算维数得到

$$\dim_L A = \frac{\dim_k A}{\dim_k L} = \dim_k L = |G|$$

但是 $e_\sigma, \sigma \in G$ 是线性无关的，因为如果其线性相关，取某一个 e_τ 写成不含 τ 的 $e_\sigma, \sigma \in G$ 的线性组合，对于任何 $a \in K$ 计算 $e_\tau a$ 比较系数给出 e_τ 必须在出现求和式中，于是矛盾。从而 A 由 $e_\sigma, \sigma \in G$ 左乘 L 生成。但是 A 的代数结构完全由 $\{e_\sigma, \sigma \in G\} \cup L$ 之间规定的乘法决定。所以如果 $\chi(A) = \chi(A')$，就可以和上面论证类似选择两组基使得规定的乘法是一样的，于是 $A \simeq A'$，从而 χ 是单射。

第二步：根据上同调类构造中心单代数。有了第一步，反其道而行之取 $\phi \in \mathrm{H}^2(G, K^\times)$ 定义一个中心单代数 $A(\phi)$ 是由 $e_\sigma\, \sigma \in G$ 生成的 k-线性空间，并且定义乘法

$$e_\sigma e_\tau := \phi(\sigma, \tau) e_{\sigma\tau}, \quad \forall \sigma, \tau \in G$$

和关于 K 的乘法

$$e_\sigma a = \sigma(a) e_\sigma, \quad a e_\sigma := e_\sigma \sigma^{-1}(a) \quad \forall a \in K$$

利用上链条件重复上面计算可以得到 $A(\phi)$ 满足结合律。取 $e_1 = 1$ 是 $A(\phi)$ 的单位元，利用上述定义的乘法将 K 嵌入 $Ke_1 \subset A(\phi)$ 中。而且同一个同调类给出同构的中心单代数，因为如果 $\phi \simeq \phi'$，存在 $f : G \to K^\times$ 满足

$$\phi'(x, y) - \phi(x, y) = f(x) + {}^x f(y) - f(xy) \quad \forall x, y \in G$$

则和上面的计算一致 $e'_\sigma \leftrightarrows f(\sigma) e_\sigma$ 给出 $A(\phi') \simeq A(\phi)$。下面来验证 $A(\phi)$ 是 k-中心单代数，如果 $a \in C(A(\phi))$，那么

$$a = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma e_\sigma, \quad a_\sigma \in K$$

和 $A(\phi)$ 交换，那么 a 和 K 交换，对任何 $l \in K$ 计算

$$al = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma e_\sigma l = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma(l) e_\sigma = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma l e_\sigma = la$$

考察系数说明 $a = a_1 e_1$，但是 a 和 K 交换说明 $a_1 \in K$，从而 $a \in K$。还剩下说明 $A(\phi)$ 是单代数。假设 $\mathfrak{I}$ 是 $A(\phi)$ 的非平凡双边理想，那么 $\mathfrak{I}$ 是 K-子空间，取 $\{e_\sigma\}_{\sigma \in G}$ 是一组基，和论述可除代数与单代数的张量还是单代数类似，考虑 a 是 $\mathfrak{I}$ 中使得 $|\mathrm{Supp}(a)|$ 最小的元素，写成

$$a = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma e_\sigma$$

如果求和大于一项，必要时乘以一些元素的逆可以找到 $\sigma_1 \neq \sigma_0 \in G$ 满足 $a_{\sigma_1}, a_{\sigma_0} = 1 \in K^\times$。考虑一个 $s \in K$ 满足 $\sigma_1(s) \neq s$ 则

$$\sigma_1(s) a - as = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma (\sigma_1(a) - \sigma(a)) e_\sigma \in \mathfrak{I}$$

的 Supp 更小，这和 a 的支撑集极小性矛盾，于是 $a = a_\sigma e_\sigma$，乘以一些 e_τ 和 K 中的元素就得到 $\mathfrak{I} = A(\phi)$。至此说明了 $A(\phi)$ 是中心单代数。

已经建立了两个映射

$$\begin{array}{llcll}\chi: & A(K|k) := \dfrac{\{A\text{是 }k\text{-中心单代数而且 }K\subset A\text{ 和 }C_A(K)=K\}}{\{\simeq:k\text{-代数同构}\}} & \leftrightarrows & \mathrm{H}^2(G,K^\times) & :\psi \\ \chi: & A & \to & \phi & \\ & A(\phi) & \leftarrow & \phi & :\psi\end{array}$$

满足 $\psi\circ\chi=\mathrm{Id}$。但是已经得知 χ 是单射，那么这推出 χ 是满射，从而这两个映射给出一一对应。值得一提的是上面构造的 $A(\phi)$ 是一类颇被研究的代数，称为交叉积代数 (crossed-product algebra)。

下面将这个同构提升到 Brauer 群上。这只需要说明有双射 $p:A(K|k)\to\mathrm{Br}(K|k)$。但是总可以更改同构等价关系到相似等价关系。有自然的映射

$$p:A(K|k)\to\mathrm{Br}(K|k)$$

取 A 和 A' 是 k-相似的 k-中心单代数，那么根据定理 1.17得到存在某一个可除的中心为 k 的代数 D' 满足

$$A\simeq\mathbf{M}_n(D)\simeq D\otimes_k M_n(k)$$

所以 A 和 D 相似，从而类似也有中心为 k 的可除代数 D' 和 A' 相似，所以相似等价无非是在分类可除的中心单代数的相似等价。但是如果 A 和 A' 相似，它们对应的除环也相似，从而 $D\simeq\mathbf{M}_m(D')$，但是如果 A,A' 都来自 $A(K|k)$ 那么它们作为 k-线性空间的维数相等，利用

$$A\simeq\mathbf{M}_n(D)\simeq\mathbf{M}_{nm}(D'),\quad A'\simeq\mathbf{M}_l(D')$$

那么只能有 $l=mn$，从而 A 和 A' 同构，这说明 p 是单射。为了说明其是满射，需要下面的存在性定理。

引理 1.18.3 (分裂条件)**.** *设 A 是 k-中心单代数，A 在 K 上分裂当且仅当存在一个 k-相似于 A 的 k-代数 B 满足维数条件*

$$\dim_k B=(\dim_k K)^2$$

证明. 如果 A 在 K 上分裂，那 A^{opp} 也在 K 上分裂，假设

$$K\otimes_k A^{\mathrm{opp}}\simeq_K\mathbf{M}_n(K)=\mathrm{End}_K(K^n)$$

取中心给出

$$C_{K\otimes_k A^{\mathrm{opp}}}(K\otimes_k A^{\mathrm{opp}})=C_{\mathrm{End}_K(K^n)}(\mathrm{End}_K(K^n))=K$$

定义 $B=C_{\mathrm{End}_k(K^n)}(A^{\mathbf{opp}})$，则有 $K\subset B$。而且 A^{opp} 是 k-中心单代数 $\mathrm{End}_k(K^n)$ 的 k-单子代数，根据维数公式得到 B 作为 A^{opp} 在 k-中心单代数 $\mathrm{End}_k(K^n)$ 的中心是 k-单代数。根据定义和引理 1.18.2

$$k=C_{A^{\mathrm{opp}}}(A^{\mathrm{opp}})=C_{B\cap A^{\mathrm{opp}}}(A)\cap A=B\cap A=B\cap C_{B\cap A^{\mathrm{opp}}}(B)=C_B(B)$$

所以 B 是中心单代数，所以 $B\otimes_k A^{\mathrm{opp}}$ 也是一个中心单代数。乘法给出双线性的映射

$$F:B\otimes_k A^{\mathrm{opp}}\to\mathrm{End}_k(K^n)$$
$$F(b\otimes a^{opp})=ba^{opp}$$

根据单性是单射，而维数公式给出两边的维数相等，所以 F 是 k-同构，于是

$$B \otimes_k A^{\mathrm{opp}} \otimes_k A \simeq \mathrm{End}_k(K^n) \otimes_k A \simeq M_m(k) \otimes_k A \tag{1.18g}$$

由于 Brauer 群的可逆性给出存在矩阵代数 $\mathbf{M}_l(k)$ 满足

$$A^{\mathrm{opp}} \otimes_k A \simeq \mathbf{M}_l(k)$$

于是

$$B \otimes_k \mathbf{M}_l(k) \simeq A \otimes_k \mathbf{M}_m(k), \exists m, l \in \mathbb{Z}_{>0}$$

所以 B 和 A 相似。用引理 1.18.2-维数公式计算此时 B 的维数，根据(1.3)和(1.18g)计算出

$$(\dim_k A)(\dim_k K) = n^2 \dim_k K$$
$$(\dim_k B)(\dim_k A) = n^2$$

这立即给出

$$\dim_k B = (\dim_k K)^2$$

另一个方向，如果存在这样的 B，只需说明 B 在 K 上分裂。根据相似性可以推出 K 在 A 上分裂。因为 K 交换所以

$$K = K^{\mathrm{opp}} \subset B^{\mathrm{opp}}$$

根据维数公式计算出 $K = C_{B^{\mathrm{opp}}}(K)$，那么取中心运算给出

$$C_{B^{\mathrm{opp}} \otimes_k B}(K \otimes_k 1) = K \otimes_k B$$

但是 $B^{\mathrm{opp}} \otimes_k B$ 是矩阵代数 $\mathrm{End}_k(V)$，所以

$$C_{B^{\mathrm{opp}} \otimes_k B}(K \otimes_k 1) \simeq \mathrm{End}_K(V) \simeq \mathbf{M}_l(K)$$

从而 $K \otimes_k B \simeq \mathbf{M}_l(K)$ 得到 B 在 K 上分裂。 □

这个定理说明 k-中心单代数 A 在所有维数是 $\sqrt{\dim_k A}$ 的扩域上分裂，于是 p 是满射，复合后已经建立出双射

$$\delta : \mathrm{Br}(K|k) \xrightarrow{1:1} \mathrm{H}^2(G, K^\times)$$

最后说明同构性，这无非是计算出关系 $A(\phi\phi') = A(\phi) \otimes_k A(\phi')$ 对所有上同调类 ϕ, ϕ' 成立。根据构造 $A(\phi), A(\phi')$ 可以看作 K-模。定义一个 $A(\phi)$ 和 $A(\phi')$ 的 K-张量积

$$M = \frac{\mathbb{Z}(A \times B)}{\mathbb{Z}(\{(xa, b) - (a, xb), x(ya, b) - (xya, b) : \forall x, y \in K, a \in A(\phi'), b \in A(\phi')\})}$$

这是商去那些 K-双线性关系后满足张量的万有性质的最大商模。

定义 $A(\phi)\otimes_k A(\phi')$ 在 M 上的右乘和张量代数的乘法一致，下面来引入 $A(\phi\phi')$ 在 M 的一种左乘并证明这两种乘法兼容，给出 M 的双模结构。根据构造可以去 $\{u_\sigma\}_{\sigma\in G}$、$\{v_\sigma\}_{\sigma\in G}$ 和 $\{w_\sigma\}_{\sigma\in G}$ 分别是 $A(\phi),A(\phi'),A(\phi+\phi')$ 的一组 K-基，满足上述的交叉积代数的乘法，定义

$$(xw_\sigma)(a\otimes_K b):=xu_\sigma a\otimes_K v_\sigma b=u_\sigma a\otimes_K xv_\sigma b\forall x\in K,a\in A(\phi),b\in A(\phi'),\sigma\in G$$

先验证这确实是左作用，也就是 $(cc')(-)=c(c'(-))$ 对所有 $c,c'\in A(\phi+\phi')$ 成立，对任何 $x,y\in K,\sigma,\tau\in G$ 取分量验证

$$\begin{aligned}(xw_\sigma yw_\tau)(a\otimes_K b)&=x\sigma(y)w_\sigma w_\tau(a\otimes_K b)=x\sigma(y)(\phi\phi')(\sigma,\tau)w_{\sigma\tau}(a\otimes_K)b\\&=x\sigma(y)(\phi\phi')(\sigma,\tau)u_{\sigma\tau}a\otimes_K v_{\sigma\tau}b=x\sigma(y)\phi(\sigma,\tau)u_{\sigma\tau}a\otimes_K\phi'(\sigma,\tau)v_{\sigma\tau}b\\&=x\sigma(y)u_\sigma u_\tau a\otimes_K v_\sigma v_\tau b=xu_\sigma yu_\tau a\otimes_K v_\sigma v_\tau b\\&=xw_\sigma(yu_\tau a\otimes_K v_\tau b)\\&=xw_\sigma(xw_\tau(a\otimes_K b))\quad\forall a\in A(\phi),b\in A(\phi')\end{aligned}$$

兼容性来自于交叉积代数的结合性，良定义无非是取一组基检查系数。于是兼容性给出 k-代数同态

$$\begin{aligned}&f:(A(\phi)\otimes_k A(\phi'))^{\mathrm{opp}}\to\mathrm{End}_{A(\phi\phi')}(M)\\&f(x)m=mx\forall m\in M\end{aligned}$$

$(A(\phi)\otimes_k A(\phi'))^{\mathrm{opp}}$ 是单代数，从而 f 是单嵌入，考察两边维数

$$\dim_k(A(\phi)\otimes_k A(\phi'))^{\mathrm{opp}}=(\dim_k K)^4$$

以及

$$\dim_k\mathrm{End}_{A(\phi\phi')}(M)=(\dim_{A(\phi\phi')}M)^2\dim_k\mathrm{End}_{A(\phi\phi')}(A(\phi\phi'))=\frac{\dim_k M)^2}{\dim_k A(\phi\phi'))^2}\dim_k A(\phi\phi')=(\dim_k K)^4$$

所以 f 是 k-代数同构，从而取 $n=\dim_k K$ 则有

$$\mathrm{End}_{A(\phi\phi')}(M)\simeq\mathrm{End}_{A(\phi\phi')}(A(\phi\phi')^n)=\mathbf{M}_n(A(\phi\phi')^{\mathrm{opp}})\simeq A(\phi\phi')^{\mathrm{opp}}\otimes_k\mathbf{M}_n(k)$$

从而有相似 $(A(\phi)\otimes_k A(\phi'))^{\mathrm{opp}}\simeq A(\phi\phi')^{\mathrm{opp}}$ 得到在 Brauer 群上

$$[A(\phi\phi')]=[A(\phi)\otimes_k A(\phi')]$$

于是证毕。 □

中心单代数的结构信息之所以重要，在于其涵盖了一类十分重要的代数：实中心单代数四元数代数 $\mathbb{H}$。一些有益的计算可以加深对 Brauer 的第一印象，例如根据定理 1.17-半单代数结构定理得到

$$\mathrm{Br}(\bar{k})=0$$

Brauer 群的平凡性还能推广到 C_1 性质的数域，初始定义来自曾炯之。下面的 Brauer 群的应用要用到代数几何的常识，可以在 [18] 找到其来源，[7] 的相关文章也值得参考。

几何 Brauer 等价 经典代数几何的术语和基本结论参看 [10] 或者更高深的开源书籍the rising sea:...。从代数几何的观点出发，考虑一个完满的基域 k，其上的有限扩张都是可分的 (例如零特征数域或者有限域)。于是根据正规化引理射影空间 $\mathbb{P}_{n+1}(k)$ 上 $\bar{k}$-同构于 $\mathbb{P}_n(\bar{k})$ 的射影代数簇也会在某一个有限的 Galois 扩张 K 上 K-同构于 $\mathbb{P}_n(K)$，这一类代数簇被称作在 K 上分裂的 Severi-Brauer 簇。

考虑射影线性群的短正合列 $0 \to K^\times \xrightarrow{\cdot \mathrm{Id}} \mathrm{GL}(n, K) \xrightarrow{\pi} \mathrm{PGL}(n, K) \to 0$ 诱导出的长正合列和定理 1.11给出单射

$$\delta : \mathrm{H}^1(G, \mathrm{PGL}(n, K)) \simeq \mathrm{H}^2(G, K^\times)$$

考虑 $\mathrm{PGL}(n, K)$ 自然嵌入 $\mathrm{PGL}(nm, K)$，这些嵌入诱导一个正向极限系统，指标相当于整数的完备化 $\hat{\mathbb{Z}}$。如果记这个极限是

$$\mathrm{PGL}_\infty(K) = \varinjlim_{n \in \hat{\mathbb{Z}}} \mathrm{PGL}(n, K)$$

对映射取极限给出

$$\delta_\infty : \mathrm{H}^1(G, \mathrm{PGL}_\infty(K)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{H}^2(G, K^\times)$$

事实上这是同构，而且 $\mathrm{PGL}_\infty(K)$ 可以用来分类 Severi-Brauer 簇，参考 [6] 和 [18]。此类内容涉及到一定的代数簇的理论这里就不再论述。

群上同调理论简介 2

第二部分 一些经典计算

本部分假设 $G = \mathrm{Gal}(K|k)$ 是 Galois 扩张 $K|k$ 的 Galois 群，考虑 G 是有限群，有限循环群时上同调群的各种性质。第一节给出有限群的 Tate 上同调构造和一些判断上同调平凡性质的定理，其主要技术来自导出函子的运算和有限群的 Sylow 定理；第二节详细计算带有周期律的循环群上同调和 Herbrand quotient 的相关性质，或许最为精妙；第三节则承袭 [25] 的第九章最后一节内容，涉及上积在上同调群间构造映射的应用。主要的记号假设例如 $\epsilon, \mathbf{I_G}, (-)^G, (-)_G$ 等顺遂了第一部分的约定，也尽量尊重了 [25, 5, 21, 14] 等书中的记号。

有限群和 Tate 上同调 | 2.1

不妨限定群上同调的中所研究的群（或说 Galois 群）G 是一个有限群，类比于用代数方法研究代数数，有限维线性代数理论在这种限制下可以合法使用，定义

$$\mathbf{N}a = \sum_{s\in G} sa, \quad {}_{\mathbf{N}}A := \ker \mathbf{N}$$

回顾第一部分中的记号

$$\mathbf{I}_G = \{\sum_{g\in G} m_g g \in \mathbb{Z}[G], \sum_{g\in G} m_g = 0\} = \ker \epsilon \subset \mathbb{Z}[G]$$

是一个双边理想，也是 G-模。于是 Tate 在其文章 [26] 和其后的一些出版物中定义了如下的“双向延长”的上同调群并导出了一些相关性质，如果 G 是有限群，A 是 G-模，定义 **Tate 上同调群**

$$\hat{\mathrm{H}}^q(G,A) = \begin{cases} \mathrm{H}^q(G,A) & q \geq 1 \\ A^G/\mathbf{N}(A) & q = 0 \\ {}_{\mathbf{N}}A/\mathbf{I}_G A & q = -1 \\ \mathrm{H}_{-q-1}(G,A) & q < -1 \end{cases}$$

这样定义的好处之一在于同调群也在此意义下变成了负指数的上同调群，其中思想多和第零部分的卫星函子的定义方式类似。不知出于什么原因，代数上或数论上，甚至拓扑上都更喜欢研究上同调，那么 Tate

的办法就把所有群的同调代数都集成到上同调一种语言上；好处之二在于用短正合列诱导长正合列时序列不会像定理 0.11那样在左端或者右端终止，而是指标在 $\mathbb{Z}$ 上双向地无限延长。也就是如下的基本定理。

定理 2.1 (Tate)**.** *Tate 上同调对 G-模短正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 诱导出双向延长的长正合列。*

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \hat{\mathrm{H}}^{-2}(G,C) \arrow[r, "\delta"] & \hat{\mathrm{H}}^{-1}(G,A) \arrow[r] & \hat{\mathrm{H}}^{-1}(G,B) \arrow[r] & \hat{\mathrm{H}}^{-1}(G,C) \arrow[dlll, rounded corners, to path={-- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-2ex]\tikztostart.south) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) \tikztonodes -- (\tikztotarget)}, "\delta"'] & & \\
 & \hat{\mathrm{H}}^{0}(G,A) \arrow[r] & \hat{\mathrm{H}}^{0}(G,B) \arrow[r] & \hat{\mathrm{H}}^{0}(G,C) \arrow[r, "\delta"] & \hat{\mathrm{H}}^{1}(G,A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

证明. 应用定理 0.6-蛇形引理得到如下交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & & \hat{\mathrm{H}}^{-1}(G,A) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \hat{\mathrm{H}}^{-1}(G,B) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \hat{\mathrm{H}}^{-1}(G,C) \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, rounded corners, "\delta"] & & \\
\cdots \arrow[r] & \hat{\mathrm{H}}^{-2}(G,C) \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\delta"] & \mathrm{H}_0(G,A) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\mathbf{N}^*"] & \mathrm{H}_0(G,B) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\mathbf{N}^*"] & \mathrm{H}_0(G,C) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\mathbf{N}^*"] & 0 & \\
 & 0 \arrow[r] & \mathrm{H}^{0}(G,A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^{0}(G,B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^{0}(G,C) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\mathrm{H}}^{1}(G,A) \arrow[r] & \cdots \\
 & & \hat{\mathrm{H}}^{0}(G,A) \arrow[r, dashed] & \hat{\mathrm{H}}^{0}(G,B) \arrow[r, dashed] & \hat{\mathrm{H}}^{0}(G,C) \arrow[ur, dashed, "\delta"] & &
\end{tikzcd}
$$

这里中间两行是正合列来自于同调群和上同调群的性质，参考定理 0.11引出长正合。略需要辨明的是从 -2 到 -1 的映射就是连接同态，因为根据正合性

$$
\delta\hat{\mathrm{H}}^{-2}(G,C) = \ker(\mathrm{H}_0(G,A) \to \mathrm{H}_0(G,B))
$$

这根据定理 0.6-蛇形引理可以嵌入到 $\hat{\mathrm{H}}^{-1}(G,A)$ 中且保持正合性。从 0 到 1 处的映射因也是连接同态，同样因为正合性

$$
\ker(\mathrm{H}^0(G,C) \to \hat{\mathrm{H}}^1(G,A)) = \mathrm{im}(\mathrm{H}^0(G,B) \to \mathrm{H}^0(G,C)) \supset \mathrm{im}\mathbf{N}^*
$$

所有根据定理 0.6连接同态确实可以定义在 $\hat{\mathrm{H}}^0(G,C)$ 上而且维持正合。于是长正合列确实可以如定理中那样拼接起来。 □

Tate 上同调也对相对投射和相对单射模不敏感。如下。

定理 2.2 (相对投射平凡性)**.** *如果 A 是有限群 G 的相对单射模或相对投射模，那么*

$$
\hat{\mathrm{H}}^q(G,A) = 0 \quad \forall q \in \mathbb{Z}
$$

证明. 在 G 有限的情况下，对任何 $\mathbb{Z}$-模 (交换群) X 而言，都有

$$
\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} X = (\oplus_{g\in G}\mathbb{Z}g) \otimes_{\mathbb{Z}} X \simeq= \oplus_{g\in G}(\mathbb{Z}g \otimes_{\mathbb{Z}} X) \simeq \oplus_{g\in G}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}g, X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], X)
$$

上面推导用到了有限直和和张量的交换性，以及直和作为投射极限和正向极限关于 Hom 的交换性 ($\mathrm{Hom}(\varinjlim_i X_i, Y) \simeq \varprojlim_i \mathrm{Hom}(X_i, Y)$)。于是有限群上的相对投射模和相对单射模是同一个概念。根据定理 1.1可知 Tate 上同调在 $q \neq 0, -1$ 时都是零。至于在 $q = 0, -1$ 处的平凡性，原因在于根据 A 的相对投射性和相对单射性此时范数映射诱导同构 $\mathbf{N}^* : \mathrm{H}_0(G,A) \to \mathrm{H}^0(G,A)$。 □

Tate 的构造使得只需留心上同调，下文着手定义 Tate 上同调上的上积，并建立唯一性。

$\boxed{\text{上积}}$ **上积 (cup product)**作为上同调理论的基本架构，其各种定义可以参考 [5]。不同的例子譬如光滑流形的德拉姆上同调理论中对微分形式的外积运算，奇异上同调理论的连续映射的上积，层上同调的覆盖形式的上积等等。分异到不同的上同调理论特别是本文着重考虑的群上同调，其具体形式有些和代数拓扑中的构造的区别。

定理 2.3 (Cartan). *$A \otimes_Z B$ 上定义对角的 G-作用 $g(a\otimes b) = ga \otimes gb, \forall a \in A, b \in B, g \in G$，这时 $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ 是左 $\mathbb{Z}[G]$-模，在 Tate 上同调理论中存在唯一的一族 $\mathbb{Z}$-模同态*

$$\cup_{p,q} : \hat{\mathrm{H}}^p(G, A) \times \hat{\mathrm{H}}^q(G, B) \to \hat{\mathrm{H}}^{p+q}(G, (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^{\mathrm{diag}})$$

关于 $p, q \in \mathbb{Z}$ 满足如下的条件

1) $\cup_{p,q}$ 对 A, B 都有自然性。

2) $\cup_{0,0}$ 就是嵌入 $i : A^G \otimes_{\mathbb{Z}} B^G \to (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^{\mathrm{diag}}$ 的自然的商映射。

3) 如果 $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ 是 G-模正合列。记 δ 是 Tate 上同调函子中相应的连接同态，而且简记 $\cup^{p,q}$ 为 $\cup$。如果右张量上 G-模 B 后还有正合列

$$0 \to A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} B \to A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} B \to A_3 \otimes_{\mathbb{Z}} B \to 0$$

则

$$(\delta a_3) \cup b = \delta(a_3 \cup b) \in \hat{\mathrm{H}}^{p+q+1}(G, (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^{\mathrm{diag}}) \quad \forall a_3 \in \hat{\mathrm{H}}^p(G, A_3), b \in \hat{\mathrm{H}}^q(G, B)$$

如果左张量上 G-模 B 后还有正合列

$$0 \to B \otimes_{\mathbb{Z}} A_1 \to B \otimes_{\mathbb{Z}} A_2 \to B \otimes_{\mathbb{Z}} A_3 \to 0$$

则

$$b \cup (\delta a_3) = (-1)^p \delta(b \cup a_3) \in \hat{\mathrm{H}}^{p+q+1}(G, (B \otimes_{\mathbb{Z}} A)^{\mathrm{diag}}) \quad \forall b \in \hat{\mathrm{H}}^p(G, B), a_3 \in \hat{\mathrm{H}}^q(G, A_3)$$

此映射称为上积，简单写成 $a \cup b$ 和 $x \cup y$。其运算性质还包括以下几条

$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$$
$$a \cup b = (-1)^{\deg(a)\deg(b)} b \cup a, \quad \forall a, b, c$$

证明. 首先来考虑唯一性。分析的工具就是把任何的 G-模 A 嵌入一个相对单射模 $A^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], A)$ 中，有正合列

$$0 \to A \xrightarrow{i} A^* \xrightarrow{p} A' \to 0$$

根据定理 2.1得知 A^* 的 Tate 上同调都是零。于是诱导出长正合列有连接同态给出的同构。

$$\delta : \hat{\mathrm{H}}^n(G, A') \leftrightarrows \hat{\mathrm{H}}^{n+1}(G, A) : \delta^{-1}$$

注意到已经明确了 $p = 0, q = 0$ 时的定义，注意到正合列(2.1)作为 $\mathbb{Z}$-模是分裂的，于是无论左张量还是右张量任何 G-模还是正合列。这样根据条件 (3) 给出的

$$\begin{aligned}(\delta a) \cup b &= \delta(a \cup b) \\ b \cup (\delta a) &= (-1)^p \delta(b \cup a) \\ a \cup b &= \delta^{-1}((\delta a) \cup b) \\ b \cup a &= (-1)^p \delta^{-1}(b \cup (\delta a))\end{aligned}$$

就给出从 (p, q) 到 $(p+1, q), (p, q+1), (p-1, q), (p, q-1)$ 的延拓。于是这样的映射完全取决于 $p = q = 0$ 时的形态。但这基点的情形被条件 (2) 完全决定，从而唯一性得证。

由于 $p = 0 = q$ 时的映射 (看作函子的自然变换可能更加准确) 显然存在，那么根据条件 (3) 进行延拓即可。运算性质也来自于上文的维数移动。

在 [5, Chap XI] 中有具体构造，用Bar 消解的方式写出上同调群，此时定义

$$\cup^{p,q} : \mathrm{H}^p(G, A) \otimes \mathrm{H}^q(G, B) \to \mathrm{H}^{p+q}(G, (A \otimes_Z B)^{\mathrm{diag}})$$

$$(a \cup b)(g_1, .., g_{p+q}) := a(g_1, .., g_p) \otimes_{\mathbb{Z}} g_1 \cdots g_p b(g_{p+1}, .., g_{p+q})$$

计算此时可以取 $(A \otimes_Z B)^{\mathrm{diag}}$ 的投射消解是由 A, B 的 Bar 消解张量出的消解

$$P_n := \otimes_{i+j=n}(B_i(A) \otimes_{\mathbb{Z}} B_j(B))^{\mathbf{diag}}$$

微分映射需要改成 $d_n = \sum_{i+j=n}(d_i, -d_j)$ 。 □

回顾本文在第零部分定理 0.5时复原了 Sylow 理论的基本框架，下述些许定理混合 Sylow 理论和群上同调理论，在研究有限群的上同调时颇为有力。

p-群的上同调性质 先考虑 Res 映射的性质。

定理 2.4. *取定素数 p，考虑有限群 G 的一个 Sylow p-子群 G_p，那么对于任何 G-模 A 和整数 n，限制映射*

$$\mathrm{Res}^n : \hat{\mathrm{H}}^n(G, A) \to \hat{\mathrm{H}}^n(G_p, A)$$

在 $\hat{\mathrm{H}}^n(G, A)$ 的p-**准素分量**上是单射。

证明. p-准素是指那些阶是 $p^n, n \geq 0$ 的元素构成的挠子群。考虑 $q = \frac{|G|}{|G_p|}$，根据定理 0.5-Sylow 定理得到 p, q 互素，设 $x \in \ker \mathrm{Res}$ 根据定理 1.5 的计算

$$qx = \mathrm{Cor} \circ \mathrm{Res}(x) = 0$$

但是又存在某一个 $p^n x = 0$，从而根据互素性质有整数 a, b 满足 $ap^n + bq = 1$，于是

$$x = 1x = (ap^n + bq)x = 0$$

□

取素数 p 记 $\mathbf{F}_p$ 是有 p 个元素的有限域，这种数域全部同构于 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。有下面的定理。

定理 2.5. 取素数 p 对于有限 p-群 G 和 G-模 A 满足 $pA=0$，下列陈述是彼此等价的。

1) A 是自由 $\mathbf{F}_p[G]$-模。

2) A 是诱导 G-模，即 $A\simeq\mathbb{Z}[G]_{\mathbb{Z}}X$ 对某一个 $\mathbb{Z}$-模 X 成立（诱导和余诱导的概念在有限群上是一致的，参考相对投射和相对单射）。

3) $\hat{\mathrm{H}}^n(G,A)=0$ 对所有的 $n\in\mathbb{Z}$ 成立。

4) $\hat{\mathrm{H}}^q(G,A)=0$ 对某一个整数的 $q\in\mathbb{Z}$ 成立。

证明. 首先来 (1) 推 (2)，根据 $pA=0$ 显然；其次来 (2) 推 (3)，根据定理 2.2和诱导模是投射的亦显然；再次 (3) 推 (4) 完全显然。

最后来 (4) 推 (1)。把 A 看作一个诱导模的商模，存在 A_1 满足

$$\hat{\mathrm{H}}^n(G,A)=\hat{\mathrm{H}}^{n-1}(G,A_1),\quad\forall n\in\mathbb{Z}$$

不断做这样的维数移动，可取出 G-模 B 满足

$$\hat{\mathrm{H}}^n(G,A)=\hat{\mathrm{H}}^{n-q-2}(G,B),\quad\forall n\in\mathbb{Z}$$

如果 $\hat{\mathrm{H}}^q(G,A)=0$ 则 $\mathrm{H}_1(G,B)=0$。考虑 B 作为 $\mathbb{Z}$-模生成的自由 $\mathbb{Z}[G]$-模 B' 和 B 有同构的 H_0，下同调的长正合列给出

$$0=\mathrm{H}_1(G,B)\to\mathrm{H}_0(G,\ker(B\to B'))\overset{\subseteq}{\to}\mathrm{H}_1(G,B')\overset{\simeq}{\to}\mathrm{H}_1(G,B)$$

从而 $\mathrm{H}_1(G,\ker(B\to B'))=0$，但是这时记 $C=\ker(B\to B')$，意味着 $C=\mathbf{I}_GC$，这推出 $C^G=0$，如果 $C\neq 0$ 则 C^G 的某一个有限子模的元素个数根据计数是 G 的因子，从而 C^G 应该非平凡，矛盾。只能 $C=0$ 从而 B 是自由 $\mathbf{F}_p[G]$-模，B 的 Tate 上同调平凡，于是

$$\mathrm{H}_1(G,A)=\hat{\mathrm{H}}^{-q-4}(G,B)=0$$

根据上面的论证 A 是自由 $\mathbf{F}_p[G]$-模。 □

进一步考虑有如下定理。

定理 2.6. 对于有限 p-群 G 和 p-无挠的 G-模 A，下列陈述是彼此等价的。

1) $\hat{\mathrm{H}}^n(G,A)=0$ 对所有的 $n\in\mathbb{Z}$ 成立。

2) $\hat{\mathrm{H}}^n(G,A)=0$ 对某连续整数的 $q,q+1\in\mathbb{Z}$ 成立。

3) A/pA 作为 $\mathbb{F}_p[G]$-模是自由的。

证明. (1) 推 (2) 是显然的。

考虑 (2) 推 (3)，因为 A 是 p-无挠的，也就是 $p\cdot : A \to A$ 是单射，于是 G-模短正合列 $0 \to A \xrightarrow{p} A \xrightarrow{\pi} \frac{A}{pA} \to 0$ 可以诱导出 Tate 上同调的长正合列

$$\cdots \to \hat{\mathrm{H}}^n(G,A) \xrightarrow{p} \hat{\mathrm{H}}^n(G,A) \xrightarrow{\pi} \hat{\mathrm{H}}^n(G,\frac{A}{pA}) \xrightarrow{\delta} \hat{\mathrm{H}}^{n+1}(G,A) \to \cdots \quad n \in \mathbb{Z}$$

如果 (2) 满足，长正合列取 $n = q$ 得到 $\hat{\mathrm{H}}^q(G, \frac{A}{pA}) = 0$，根据上一个定理推出 (3)。

最后来 (3) 推 (1)。根据上一个定理可以得到 $\frac{A}{pA}$ 上同调平凡，那么用上面的正合列得到数乘

$$p\cdot : \hat{\mathrm{H}}^n(G,A) \to \hat{\mathrm{H}}^n(G,A)$$

对一切的 n 都是双射。但是利用 $\mathrm{Cor}\circ\mathrm{Res}$ 的性质取 $\{e\}$ 是子群可以得知有限群的上同调群总是被数乘 $|G|$ 零化，此时 $|G| = p^m = 0$。由于这是同构只能有

$$\hat{\mathrm{H}}^n(G,A) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

从而证毕。 □

根据定理 2.2可知相对投射模 (也是相对单射模) 的 Tate 上同调都是平凡的，在具体计算中特别是使用长正合列时这样上同调平凡的模可以将长正合列截短，这一性质特别有用。下面就来考虑这样的模的刻画。

有限群的上同调平凡模 仍然限定有限群，称一个 G-模 A 是**上同调平凡**的，如果对所以 G 的子群 H，其所有 Tate 上同调群 $\hat{\mathrm{H}}^\bullet(H,A)$ 都是平凡群。例如诱导模或者余诱导模 (同构于 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G],X)$ 的 G-模 G 有限时和诱导模等价) 是上同调平凡的。以下定理刻画了这一类 G-模的性质。

定理 **2.7** (上同调平凡刻画)**.** *设 $|G|$ 有限，则以下陈述是等价的。*

1) 存在正合列 $0 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$，其中 P_0, P_1 是投射 $\mathbb{Z}[G]$-模。

2) 存在长正合列 $0 \to P_k \to P_{k-1} \to \cdots \to P_0 \to A \to 0$，其中 P_i 都是投射 $\mathbb{Z}[G]$-模。

3) 存在正合列 $0 \to A \to I_0 \to I_1 \to 0$，其中 I_0, I_1 是单射 $\mathbb{Z}[G]$-模。

4) 存在长正合列 $0 \to A \to I_0 \to \cdots \to I_{k-1} \to I_k \to 0$，其中 I_i 都是单射 $\mathbb{Z}[G]$-模。

5) A 作为 G-模是上同调平凡的。

证明. 直接验证 (1) 推 (2) 和 (3) 推 (4) 是显然的。只需要说明 (2) 推 (5)、(5) 推 (1)、(4) 推 (5)、(5) 推 (3)。

首先，证明 (2) 推 (5) 和 (4) 推 (5) 需要一个关于上同调平凡性质的引理。

引理 **2.7.1.** 如果 $0 \to X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_n \to 0$ 是 $\mathbb{Z}[G]$-模的正合列而且 $X_i, i=1,..,n$ 中有 $n-1$ 个上同调平凡，则 $X_i, i=1,..,n$ 全部都是上同调平凡的。

证明. 记 $X_0 = 0, X_{n+1} = X_{n+2} = 0$ 考虑上述长正合列断开的 $n+1$ 个短正合列如下

$$E_i : 0 \to N_i = \ker(X_i \to X_{i+1}) \to X \to N_{i+1} = \ker(X_{i+1} \to X_{i+2}) \to 0 \quad 0 \le i \le n$$

假设 $X_1,..,X_{q-1},X_{q+1},..,X_n$ 上同调平凡，那么用任何子群 H 诱导的长正合列得到如果短正合列中的任何两个 G-模上同调平凡则第三个也上同调平凡，从而根据 $N_0 = N_{n+1} = 0$ 得到 $N_1,..,N_q,N_{q+1},..,N_n$ 上同调平凡考虑 E_q 这个短正合列就得到 X_q 上同调平凡。 □

注意到对任何子群 H，投射 $\mathbb{Z}[G]$-模也是投射 $\mathbb{Z}[H]$-模，这可以用 $\mathbb{Z}[G]\otimes_k -$ 把 $\mathbb{Z}[H]$-模诱导成 $\mathbb{Z}[G]$-模然后利用投射条件证实，类似单射 $\mathbb{Z}[G]$-模也是单射 $\mathbb{Z}[H]$-模，从而根据定理 2.2得到定理中的 P_i, I_i 都是上同调平凡的，根据上述引理得到 A 是上同调平凡模。

最后是 (5) 推 (1) 和 (5) 推 (3)。首先可以把 A 作为 $\mathbb{Z}$-模嵌入一个单射 $\mathbb{Z}$-模 I 中，技术和第一部分中类似，那么 A 作为 $\mathbb{Z}[G]$-模可以嵌入到单射 $\mathbb{Z}[G]$-模 $I_0 = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], I)$，此单射性质由 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(-, I_0) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, I)$ 和 I 的单射性保证。而取 A 作为集合生成的自由 $\mathbb{Z}[G]$-模是 P_0，那么自由模都是投射的，于是 A 可以作为投射 $\mathbb{Z}[G]$-模的商模。那么取核与余核就得到两个 $\mathbb{Z}[G]$-模的短正合列

$$0 \to A \to I_0 \to I_1 \to 0, \quad 0 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

根据上面的论述，A, P_0, I_0 都是上同调平凡的，这推出 I_1, P_1 是上同调平凡的。先来证明 (5) 推 (1)，也就是证明 P_1 是投射 $\mathbb{Z}[G]$-模。注意到 P_1 是自由 $\mathbb{Z}[G]$-模，由那些 A 中的关系生成，根据 G 有限，这可看作 P_1 是自由 $\mathbb{Z}$-模，那么考虑 P_1 作为某些自由 $\mathbb{Z}[G]$-模的商模，得到 $\mathbb{Z}[G]$-模的短正合列如下

$$0 \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to 0$$

由于 P_1 是 $\mathbb{Z}$-投射的，函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_1, -)$ 正合，得到 $\mathbb{Z}$-模的正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_1, P_3) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_1, P_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_3, P_3) \to 0$$

考虑 G 在 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ 上的共轭作用 $gf := g \circ f \circ g^{-1}$ 则上面的 $\mathbb{Z}$-模正合列是 $\mathbb{Z}[G]$-模正合列 (只需注意 A, B 间的 G-同态在此共轭作用下不变)。但是 P_1 上同调平凡，类似论述 P_3 是无挠的，考虑 $\mathbb{Z}[G]$-模短正合列

$$0 \to P_3 \xrightarrow{p} P_3 \xrightarrow{\pi} \frac{P_3}{pP_3} \to 0$$

同样靠函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_1, -)$ 的正合性给出 $\mathbb{Z}$-模正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_1, P_3) \xrightarrow{p} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_1, P_3) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_1, \frac{P_3}{pP_3}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\frac{P_1}{pP_1}, \frac{P_3}{pP_3}) \to 0$$

注意到 P_3 是无挠的 $\mathbb{Z}[G]$-模而且满足定理 2.6 的上同调平凡条件，于是 $\frac{P_1}{pP_1}$ 是自由 $\mathbf{F}_p[G]$-模，进而是诱导模 $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} X$，计算

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\frac{P_1}{pP_1}, \frac{P_3}{pP_3}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} X, \frac{P_3}{pP_3}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \frac{P_3}{pP_3}))$$
$$\simeq \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \frac{P_3}{pP_3})$$

也是一个诱导模，从而通过定理 2.2得到其上同调平凡，这给出 p 在 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_1,P_3)$ 的上同调上是同构，和上一个定理的证明类似推出 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_1,P_3)$ 关于任何 Sylow p-子群 G_p 的 Tate 上同调都是零，根据限制映射 $G\to G_p$ 在 p-准素分量上是单射给出其关于 G 的 Tate 上同调也平凡。在 H^1 处给出如下正合列

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_1,P_2)\xrightarrow{\pi}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_1,P_1)\to 0$$

这是满射说明 $A\xrightarrow{1}A$ 延拓到某一个 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_1,P_2)$。从而 P_1 是 P_2 的直因子。那么 P_2 是 $\mathbb{Z}[G]$-投射推出 P_1 是投射 $\mathbb{Z}[G]$-模。

最后说明 I_1 是 $\mathbb{Z}[G]$-单射模。由于这里取的 I_0 是单射 $\mathbb{Z}[G]$-模，由于 $\mathbb{Z}[G]$ 是自由 $\mathbb{Z}$-模，通过 $\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}$ 诱导 $\mathbb{Z}$-模到 $\mathbb{Z}[G]$-模，根据有限性是有限直和。利用 I_0 的 $\mathbb{Z}[G]$-单射性和有限直和的投影映射和嵌入映射就可以得到 I_0 是 $\mathbb{Z}$-单射模。考虑任何 $a\in I_0,m\in\mathbb{Z}$，定义 $f:rm\to ra$ 是 $\mathbb{Z}m$ 到 I_0 的映射，$i:rm\to r$ 是 $\mathbb{Z}m$ 到 $\mathbb{Z}$ 的嵌入，那么单射性给出延拓 $\bar{f}:\mathbb{Z}\to E$ 满足

$$a=f(m)=\bar{f}i(m)=\bar{f}mi(1)=m\bar{f}(m)$$

从而可以有元素 $\frac{1}{m}a\in I_0$，那么 I_0 可除。从而 I_1 作为其商模也是可除的 (对任何的 $a\in I_1,m\in\mathbb{Z}$，$\frac{1}{m}a$ 也在 I_1 中)。那么利用单射模的 Baer 判据方法，对任何单射 $i:A\to B$ 和 $f:A\to I_1$，试图延拓 f 到 B 上，这给出一个偏序集 $(S,f_s),A\subset S\subset B,f_si=f$，那么如果由于这个偏序集的全序子集在并集下有上界，从而有最大元 (A_0,f_0)，如果有 $b\in B-iA_0$ 考虑

$$\mathfrak{a}=\{m\in\mathbb{Z}:mb\in iA_0\}$$

是 $\mathbb{Z}$ 的理想，从而有最小的 m_0 满足 $m_0b\in iA_0,\mathfrak{a}=\mathbb{Z}m_0$，不妨设 m_0 非零，否则定义 $f_{iA_0+\mathbb{Z}b}=f_{iA_0}$ 给出更大的延拓。此时根据 I_1 可除，存在 $x\in I_1$ 满足 $f_0(m_0b)=m_0x$。于是在 $iA_0+\mathbb{Z}b$ 上定义

$$f':iA_0+\mathbb{Z}b\to I_1\quad f'(ia_0+mb)=f_0(a_0)+mx$$

这确实在 $iA_0+\mathbb{Z}b$ 良好定义的映射，如果 $a_1+r_1b=a_2+r_2b$，则 $b_1-b_2=rm_0\in\mathfrak{a}$，从而计算

$$f_0(a_1-a_2)=f_0((r_2-r_2)b)=rf_0(m_0b)=rm_0x$$

从而

$$f'(a_1+r_1b)=f'(a_2+r_2b)$$

所以 f' 确实是更大的延拓，这和 f_0 的极大性矛盾，于是 $A_0=B$。从而大费周章之后相当于证明了 $\mathbb{Z}$-单射等价于 $\mathbb{Z}$-可除，于是 I_1 是单射 $\mathbb{Z}$-模。考虑 I_1 嵌入某一个单射 $\mathbb{Z}[G]$-模 I_2 给出短正合列

$$0\to I_1\to I_2\to I_3\to 0$$

利用 I_1 是 $\mathbb{Z}$-单射，函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,I_1)$ 正合，从而有 $\mathbb{Z}$-模正合列

$$0\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_3,I_1)\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_2,I_1)\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_1,I_1)\to 0$$

和验证 P_1 投射类似上述 $\mathbb{Z}$-模正合列在考虑 G-共轭作用后是 $\mathbb{Z}[G]$-正合列，根据 I_1 的上同调平凡性质可以取投射消解 $0 \to V_1 \to V_0 \to I_1$。考虑 $\mathrm{Ext}(I_3, -)$ 引出长正合列和导出性质得到 $\mathbb{Z}[G]$-模短正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_3, V_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_3, V_0) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_3, I_1) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(I_3, V_1) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(I_3, V_0) \to 0$$

根据投射性质 V_0, V_1 是相对投射的，再利用有限直和与 $\mathrm{Ext}, \mathrm{Hom}$ 的运算性质得到

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_3, V_1), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_3, V_0), \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(I_3, V_1), \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(I_3, V_0)$$

都是相对投射 $\mathbb{Z}[G]$ 模，下降到子群上也是相对投射的，从而是上同调平凡的。从而根据引理 2.7.1 得到 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_3, I_1)$ 上同调平凡。和上面论证类似给出满射

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(I_2, I_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(I_1, I_1) \to 0$$

那么 I_1 作为 $\mathbb{Z}[G]$-单射模 I_2 的直分量是 $\mathbb{Z}[G]$-单射的。 $\square$

循环群上同调的计算 | 2.2

如果 Galois 群 G 是有限循环群而且 $|G| = n$，取一个生成元 g，于是在 $\mathbb{Z}[G]$ 上给出下面的公式

$$\mathbf{N}a = \sum_{i=0}^{i=n-1} g^i a$$
$$\mathbf{D}a = (g-1)a$$

这两个映射给出一系列 $\mathbb{Z}$ 的 G-自由模长正合列，也就是 G-模的一个投射消解如下

$$\mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\mathbf{D}} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\mathbf{N}} \mathbb{Z}[G] \to \cdots \xrightarrow{\mathbf{D}} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

这是投射消解的原因也不复杂，由于此时 $\mathbb{Z}[G]$ 是交换环，$g^n - 1 = 0$ 推出 $\mathbf{ND} = \mathbf{DN} = 0$，至于反向的包含，如果 $a = \sum_{i=1}^{i=n-1} a_i g^i \in \ker \mathbf{N}$，那么

$$\epsilon(a) = \frac{1}{n}\epsilon(\mathbf{N}a) = 0$$
$$a = \mathbf{D} \sum_{i=0}^{i=n-1} (-\sum_{j=0}^{j=i} a_j) g^i \in \mathrm{im}\mathbf{D}$$

如果 $a = \sum_{i=1}^{i=n-1} a_i g^i \in \ker \mathbf{D}$，那么 $(g-1)a = \sum_{i=0}^{i=n-1}(a_{i-1} - a_i)g^i = 0, a_{-1} = a_{n-1}$，推出所有 a_i 都等于 a_0，于是 $a = \mathbf{N}a_0 \in \mathrm{im}\mathbf{N}$。在 ϵ 处，也有 $\epsilon \circ \mathbf{D} = 0$，如果 $\epsilon(a) = 0$，那么也有

$$a = \mathbf{D} \sum_{i=0}^{i=n-1} (-\sum_{j=0}^{j=i} a_j) g^i \in \mathrm{im}\mathbf{D}$$

从而这说明上述映射链确实是投射消解。这给出有限循环群的全部同调信息如下。

定理 2.8 (周期律). *设 G 是有限循环群，A 是 G-模，回顾第一节定义 ${}_{\mathbf{N}}A = \{a \in A : \mathbf{N}a = 0\}$，其同调群和上同调群可以计算出来*

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{H}^0(G, A) = A^G\\
&\mathrm{H}^{2n-1}(G, A) = \frac{{}_{\mathbf{N}}A}{\mathbf{D}(A)}, \mathrm{H}^{2n}(G, A) = \frac{A^G}{\mathbf{N}(A)}, \quad n \geq 1\\
&\mathrm{H}_0(G, A) = A_G\\
&\mathrm{H}_{2n-1}(G, A) = \frac{A^G}{\mathbf{N}(A)}, \mathrm{H}_{2n}(G, A) = \frac{{}_{\mathbf{N}}A}{\mathbf{I}_G A}, \quad n \geq 1
\end{aligned}
$$

证明. 考虑上面的消解，因为 A 是 $\mathbb{Z}[G]$-模。用 $T_A = - \otimes A, S_A = \mathrm{Hom}(-, A)$ 作用后注意 $\ker, \mathrm{im}$ 的具体关系

$$
\begin{aligned}
\ker \mathbf{N}^* &= {}_{\mathbf{N}}A, & \mathrm{im}\mathbf{N}^* &= \mathbf{N}(A)\\
\ker \mathbf{D}^* &= A^G, & \mathrm{im}\mathbf{D}^* &= \mathbf{D}(A)\\
\ker \mathbf{N} \otimes \mathrm{Id} &= {}_{\mathbf{N}}A, & \mathrm{im}\mathbf{N} \otimes \mathrm{Id} &= \mathbf{N}(A)\\
\ker \mathbf{D} \otimes \mathrm{Id} &= \mathbf{I}_G A, & \mathrm{im}\mathbf{D} \otimes \mathrm{Id} &= \mathbf{I}_G A
\end{aligned}
$$

就得到这周期性的同调和上同调。 □

特别地考虑 A 是有限 G-模的情况，Herbrand 得到了下面一些结论。

$\boxed{\text{Herbrand 商}}$ 设 G 是有限群，如果 A 是有限 G-模，利用第一部分 Bar 消解对上同调的刻画，此时各阶上同调群都是有限集合，于是定义如下的 Herbrand 商。

定义 2.1 (Herbrand 商). *对于有限循环群 G 和有限 G-模 A，定义如下数*

$$
h_G(A) := \frac{|\mathrm{H}^2(G, A)|}{|\mathrm{H}^1(G, A)|} \in \mathbb{Q}
$$

于是有六边形的正合列。

定理 2.9 (Herbrand 六边形 (H-Hexgon)). *设 G 是有限循环群，短正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 诱导出如下的六边形正合序列。*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{H}^1(G, A) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(G, B) \arrow[dr] & \\
\mathrm{H}^2(G, C) \arrow[ur] & & & \mathrm{H}^1(G, C) \arrow[dl] \\
 & \mathrm{H}^2(G, B) \arrow[ul] & \mathrm{H}^2(G, A) \arrow[l] &
\end{tikzcd}
$$

证明. 应用定理 2.8的计算结果，由于周期性正奇数阶上同调都同构，正偶数阶上同调都同构，长正合列就收缩成上面的六边形正合列。 □

进一步得到有限循环群的 $h_G(A)=1$。这是因为有如下的 $\mathbb{Z}$-模短正合列

$$0 \to {}_{\mathbf{N}}A \xrightarrow{\subseteq} A \xrightarrow{\mathbf{N}} \mathbf{N}(A) \to 0$$
$$0 \to A^G = \ker \mathbf{D} \xrightarrow{\subseteq} A \xrightarrow{\mathbf{D}} \mathrm{im}\mathbf{D} \to 0$$

上面都是有限模，和计算 Betti 数类似给出元素个数的关系

$$|A| = |{}_{\mathbf{N}}A| \cdot |\mathbf{N}(A)| = |A^G| \cdot |\mathbf{D}(A)|$$

于是应用定理 2.8的结果计算出

$$h_G(A) = \frac{|\mathrm{H}^2(G,A)|}{|\mathrm{H}^1(G,A)|} = \frac{|A^G|}{|\mathbf{N}(A)|} \cdot \frac{|\mathbf{D}(A)|}{|{}_{\mathbf{N}}A|} = 1$$

进一步如果 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是 G-模的短正合列，A, C 是有限 G-模，那么用定理 2.9的结果计算 Herbrand 商有

$$h_G(B) = h_G(A) h_G(C)$$

还有一些有趣的结论，例如考虑如下正合列

$$0 \to A^G \xrightarrow{\subseteq} A \xrightarrow{\mathbf{D}} A \xrightarrow{\pi} A_G \to 0$$

分裂成两个短正合列给出 $h_G(A_G) = h_G(A^G)$。对于 G 是素数阶循环群且 A 是平凡 G-模的情况，还可以定义平凡 Herbrand 商 (trivial Herbrand quotient)

$$\phi_G(A) = h_G(A) = |\frac{{}_pA}{A_p}|, \quad |G| = p$$

于是根据对循环群同调的定理 2.8的计算出

$$_pA := \{a \in A : pa = 0\}$$

以及

$$A_p := \frac{A}{pA}$$

随之而来的一系列结果是上面的一类推广，此方面内容或许过于繁复，不在这里继续论证。参看 Serre 的局部域 [25, Chap VIII]。此时的推广和一些更多的代数关系往往都是从经典的数论计算中提炼出来的，具体和系统的研究只得移步 [2]。介绍 Herbrand 商更多的算术性质此处也就只能作罢。

Tate-Nakayama 的结果 | 2.3

针对有限群的上同调，Tate 和 Nakayama 建立了不同阶数上同调群的联系。也就是同调代数中维数移动的思想 (dimension shift)，以下的比较定理是 Tate 的结果的主要手段。

定理 2.10 (N-T1)**.** *取 G 是有限群，A, A' 是 G-模由 G-不变同态 $f : A' \to A$ 关联。对每一个素数 p 对应的 G 的 Sylow 子群 G_p 而言假设存在整数 n_p 满足如下条件。*

1) $f_*^{n_p}: \hat{\mathrm{H}}^{n_p}(G_p, A') \to \hat{\mathrm{H}}^{n_p}(G_p, A)$ *是满射。*

2) $f_*^{n_p+1}: \hat{\mathrm{H}}^{n_p+1}(G_p, A') \to \hat{\mathrm{H}}^{n_p+1}(G_p, A)$ *是双射。*

3) $f_*^{n_p+2}: \hat{\mathrm{H}}^{n_p+2}(G_p, A') \to \hat{\mathrm{H}}^{n_p+2}(G_p, A)$ *是单射。*

那么对任何的 i*，任何* G *的子群* H *和满足* $\mathrm{Tor}(A,B)=\mathrm{Tor}(A',B)=0$ *的* G*-模* B *而言有*

$$f_*^i \otimes \mathrm{Id}_*^i : \hat{\mathrm{H}}^i(H, (A' \otimes_{\mathbb{Z}} B)^{\mathrm{diag}}) \to \hat{\mathrm{H}}^i(H, (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^{\mathrm{diag}})$$

都是双射。

证明. 考虑类似于代数拓扑中映射锥的构造。重复之前的滥觞将 A' 嵌入一个余诱导模 (有限群时也是诱导模) A_0 中并用 i 表示这个嵌入，考虑短正合列

$$0 \to A' \xrightarrow{(f,i)} A \oplus A_0 \xrightarrow{\pi} \mathrm{coker}(f,i) = A_2 \to 0$$

注意到 A_0 上同调平凡，那么

$$\hat{\mathrm{H}}^{\bullet}(H, A \oplus A_0) = \hat{\mathrm{H}}^{\bullet}(H, A), \quad \forall H < G$$

根据定理中条件用 G_p 诱导长正合列得到对任何 Sylow 子群 G_p 都有两个连续的上同调为零

$$\hat{\mathrm{H}}^{n_p}(G_p, A_2) = \hat{\mathrm{H}}^{n_p+1}(G_p, A_2) = 0$$

将 A_2 写成 $Z[G]$-自由模的商模，考虑商调的关系 R 构成 $\mathbb{Z}[G]$-模是 $\mathbb{Z}$-自由的而且也满足对任何 Sylow 子群的上同调总有两个连续的整数处为零，那么考虑 R 写出 $\mathbb{Z}[G]$ 自由模的短正合列

$$0 \to R_2 \to L_2 \to R \to 0$$

用定理 2.7中 (5) 推 (1) 推 (5) 的论证和定理 2.6 的证明可以得到 A_2 是上同调平凡的。而且根据定理 2.7最后的论证 A_0 的 $\mathbb{Z}$-单射性给出 $\frac{A_0}{A'}$ 是 $\mathbb{Z}$-单射模，而 A_0 也是诱导的从而 $\mathbb{Z}$-投射，这给出 $\frac{A_0}{A'}$ 的 $\mathbb{Z}$-投射性从而 A' 是 A_0 作为 $\mathbb{Z}$-模的直分量。根据 G 有限性计算

$$A_0 = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], A') = \otimes_{g\in G} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(g, A') \simeq \otimes_{g \in G} A'$$

如果记 $A^* = A \oplus A_0$，那么由于 $\mathrm{Tor}(A,B) = \mathrm{Tor}(A',B) = 0$ 根据 Tor 的和有限直和运算交换得到 $\mathrm{Tor}(A^*, B) = 0$，从而根据正合列计算 $\mathrm{Tor}(A_2, B) = 0$。这推出 $\mathbb{Z}$-模正合列 (G-共轭作用下的 $\mathbb{Z}[G]$-模正合列)

$$0 \to (A' \otimes_{\mathbb{Z}} B)^{\mathrm{diag}} \to (A^* \otimes_{\mathbb{Z}} B)^{\mathrm{diag}} \to (A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} B)^{\mathrm{diag}} \to 0$$

考虑 A_2 上同调平凡，于是根据定理 2.7有两项的投射消解 P_0, P_1，为了简洁忽略共轭作用 (对角作用的上标 diag) 有 $\mathbb{Z}[G]$-模正合列

$$0 \to P_1 \otimes_{\mathbb{Z}} B \to P_0 \otimes_{\mathbb{Z}} B \to A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} B \to 0$$

但是 $P_1 \otimes_{\mathbb{Z}} B$ 和 $P_1 \otimes_{\mathbb{Z}} B$ 都是诱导模从而是上同调平凡的。根据引理 2.7.1 给出 $A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} B$ 是上同调平凡 $\mathbb{Z}[G]$-模。从而给出双射

$$\phi^i : \hat{\mathrm{H}}^i(G, (A' \otimes_{\mathbb{Z}} B)^{\mathrm{diag}}) \to \hat{\mathrm{H}}^i(G, (A^* \otimes_{\mathbb{Z}} B)^{\mathrm{diag}}) \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

但是根据 A_0 诱导性有双射

$$\psi^i : \hat{\mathrm{H}}^i(G, (A^* \otimes_{\mathbb{Z}} B)^{\mathrm{diag}}) \to \hat{\mathrm{H}}^i(G, (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^{\mathrm{diag}}) \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

复合就给出结论。 □

以下是更进一步的结果。

$\boxed{\textbf{维数移动}}$ 进一步应用上积作维数移动得到更细致的结果。

定理 2.11 (N-T2)**.** *取 G 是有限群，A, B, C 是 G-模且 $\phi : A \times B \to C$ 是 G-不变双线性映射，取 $q \in \mathbb{Z}, a \in \hat{\mathrm{H}}^q(G, A)$，对任何 G 的子群 H 和任何的 G-模 D，考虑用同调类 $a_H = \mathrm{Res}_{G/H}(a)$ 定义的同态映射*

$$f(n, H, D) : \hat{\mathrm{H}}^n(H, (B \otimes_{\mathbb{Z}} D)^{\mathrm{diag}}) \to \hat{\mathrm{H}}^{n+q}(H, (C \otimes_{\mathbb{Z}} D)^{\mathrm{diag}})$$

如果对每一个素数 p 对应的 G 的 Sylow 子群 G_p 而言，都存在一个整数 n_p 满足

1) $f(n_p, G_p, \mathbb{Z})$ 是满射。

2) $f(n_p + 1, G_p, \mathbb{Z})$ 是双射。

3) $f(n_p + 2, G_p, \mathbb{Z})$ 是单射。

那么对于所有整数 $n \in \mathbb{Z}$，所有 G 的子群 H 和所有 $\mathrm{Tor}_-(B, D) = \mathrm{Tor}_-(C, D) = 0$ 的 G-模 D，$f(n, H, D)$ 都是双射。

证明. 首先考虑 $q = 1$ 的情形。对于 $a \in A^G$ 定义

$$f : B \to C, \quad f(b) = \phi(a, b)$$

那么此时

$$f(n, H, D) : \hat{\mathrm{H}}^n(H, (B \otimes_{\mathbb{Z}} D)^{\mathrm{diag}}) \to \hat{\mathrm{H}}^n(H, (C \otimes_{\mathbb{Z}} D)^{\mathrm{diag}})$$

是 $f \otimes 1$ 诱导的映射，根据N-T1得到 $f(n, C, D)$ 是双射。

如果 $q > 0$，使用归纳法。假设对 $n \leq q$ 都证毕，使用维数移动，和N-T1那样把 A 嵌入诱导模 $\bar{A}$ 中并记 $A_1 = \frac{\bar{A}}{A}$ 类似定义 $\bar{C}, C_1$，和 $\phi_1 : A_1 \times B \to C_1$。那么由长正合以及诱导模性质 $a \in \hat{\mathrm{H}}^q(G, A)$ 可以看作 $a = \delta(a_1), a_1 \in \hat{\mathrm{H}}^{q-1}(G, A_1)$，根据归纳假设

$$f_1(n, H, D) : \hat{\mathrm{H}}^n(H, (B \otimes_{\mathbb{Z}} D)^{\mathrm{diag}}) \to \hat{\mathrm{H}}^{n+q-1}(H, (C_1 \otimes_{\mathbb{Z}} D)^{\mathrm{diag}})$$

是双射，这复合上连接同态 $\delta : \hat{\mathrm{H}}^{n+q-1}(H, (B \otimes_{\mathbb{Z}} D)^{\mathrm{diag}}) \to \hat{\mathrm{H}}^{n+q}(H, (C_1 \otimes_{\mathbb{Z}} D)^{\mathrm{diag}})$ 并利用 δ 和上积的定理 2.3得到如果这个定理对 a_1 成立，那么也对 a 成立。 □

这个定理的特殊情形可能更为重要。

定理 2.12 (N-T3). 取 G 是有限群，A 是 G-模且取 $a \in \mathrm{H}^2(G, A)$，设 G_p 是 G 的一个 Sylow p-子群如果对每一个素数 p 都满足如下条件。

1) $\mathrm{H}^1(G_p, A)$ 平凡。

2) $\mathrm{H}^2(G_p, A)$ 由 $\mathrm{Res}_{G/G_p}(a)$ 生成且阶数等于 G_p 的阶数。

那么对于一切的整数 n，G 的子群 H 和 $\mathrm{Tor}_\bullet(A, D) = 0$ 的 G-模 D，和同调类 $a_H = \mathrm{Res}_{G/H}(a)$ 诱导同构

$$\hat{\mathrm{H}}^n(H, D) \to \hat{\mathrm{H}}^{n+2}(H, D)$$

特别地，取 $D = \mathbb{Z}$ 作为 G-模，有

$$\hat{\mathrm{H}}^n(H, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} \hat{\mathrm{H}}^{n+2}(H, D) \quad n \in \mathbb{Z}$$

证明. 利用上述定理N-T2，取 $B = \mathbb{Z}, C = A, q = 2$，$G$-不变双线性映射 ϕ 就取成

$$\phi : A \times \mathbb{Z} \to A, \qquad \phi(a, m) = ma \quad \forall m \in \mathbb{Z}, a \in A$$

而且在 $n_p = -1$ 时条件 (1) 说明在 $n = n_p$ 时 f 是满射；条件 (2) 说明在 $n = n_p + 1$ 时 f 是双射；$\mathrm{H}^1(G_p, \mathbb{Z})$ 说明在 $n = n_p + 2$ 时 f 是满射。从而可以应用上述定理。 □

致谢部分

笔者首先要表达对本文的指导老师，北京大学数学科学学院阳恩林老师真诚的感谢和由衷的敬意。阳恩林老师十分认真和及时地与笔者讨论并为笔者指点迷津，最终促成了本文的形成。此外笔者还要表示对北京大学数学科学学院及北京国际数学中心李文威教授的感谢，此文的电子形式和结构精神参考了他《代数学方法第一卷》的开源代码，从而使得本文得以按现在方式和外观呈现于读者。笔者还想特别感谢叶展宏同学对本文排版的帮助、邱添同学江元旸同学对本文部分定理证明的指导、吴金泽同学对文献 [9] 的英文翻译的提供，等等。原谅笔者记忆有限无非一一举出。

其次，笔者还要做一些常规的致谢程序，即对本文完成截止时刻为止，所有对笔者的行文，学识和习惯产生积极影响的个人和实体表示感谢，包括但不限于笔者的家人和朋友，笔者所遇到的形形色色的帮助过笔者行文的同学老师甚至其他人，stackexchange,wikipedia,nLab 等网站上有关数学和 LaTeX 的无数优质回答和专业用户，本文参考文献的众多作者以及本文受之启发的诸多数学工作者和科学工作者，北京大学高品质的学术服务和环境等等。最后笔者想表示对一个人的感谢，一个虚拟的笔者的倾听者和理解者，他或她曾经笔者主观地依附在某一些特殊的实际存在的人身上，并且曾经给予笔者巨大的希望和动力，笔者在此衷心地感谢他或她。

由于本文篇幅较小，又成文仓促，为了结构上的整齐和排版上的便利，行文结构上严格按照章-节-段落的三层结构进行，数学定理结构按照定义-定理-引理展开，也就是预先阐明基本的概念的定义，然后陈述主要定理，在定理证明过程中不断引述引理的证明，命题和定理不再作区分。有关于注解和实例的内容不再单独编号，从属于主要定理的编号。笔者希望这样的安排可以增强本文的可读性，也或许能扩展本文的意义。

本致谢完。

参考文献

[1] M. A. Armstrong. *Basic Topology*. New York, NY: Springer New York, 1983. ISBN: 9781475717938.
↑ 5

[2] Emil Artin and John Tate. *Class field theory*. Providence, R.I: AMS Chelsea Pub, 2009. ISBN: 9780821844267.
↑ 2–3, 47, 77

[3] N. Bourbaki. *Algebra II*. Springer Berlin Heidelberg, Apr. 2003. 464 pp. ISBN: 3540007067. URL: https://www.ebook.de/de/product/2316232/n_bourbaki_algebra_ii.html.
↑ 2–3

[4] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 à 4*. Hermann, Paris, 1971, xv+357 pp.
↑ 5

[5] Henry Cartan. *Homological Algebra (PMS-19)*. Princeton University Press, June 2016. 408 pp. ISBN: 9781400883844. URL: https://www.ebook.de/de/product/26175627/henry_cartan_homological_algebra_pms_19.html.
↑ 2–3, 15–16, 27–28, 40, 48, 67, 69–70

[6] François Châtelet. "Géométrie diophantienne et théorie des algèbres". fr. In: *Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres* 8 (1954-1955). talk:17. URL: http://www.numdam.org/item/SD_1954-1955__8__A8_0/.
↑ 66

[7] François Châtelet. "Variations sur un thème de H. Poincaré". fr. In: *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 3e série, 61 (1944), pp. 249–300. DOI: 10.24033/asens.918. URL: http://www.numdam.org/item/ASENS_1944_3_61__249_0/.
↑ 66

[8] Beno Eckmann. "Cohomology of Groups and Transfer". In: *Annals of Mathematics* 58.3 (1953), pp. 481–493. ISSN: 0003486X. DOI: 10.1007/978-3-642-61708-9_21. URL: http://www.jstor.org/stable/1969749.
↑ 39

[9] Alexander Grothendieck. "Sur quelques points d'algèbre homologique, I". In: *Tohoku Mathematical Journal* 9.2 (Jan. 1957), pp. 119–221. DOI: 10.2748/tmj/1178244839. URL: https://doi.org/10.2748/tmj/1178244839.
↑ 81

[10] Klaus Hulek. *Elementary algebraic geometry*. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2003. ISBN: 0821829521.
↑ 66

[11] John L. Kelley. *General Topology*. Springer New York, June 1975. 316 pp. ISBN: 0387901256. URL: https://www.ebook.de/de/product/3750866/john_l_kelley_general_topology.html.
↑ 5

[12] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer New York, Nov. 2010. 332 pp. ISBN: 1441931236. URL: https://www.ebook.de/de/product/13632118/saunders_mac_lane_categories_for_the_working_mathematician.html.
↑ 5, 15

[13] Serge Lang. *Algebra*. Springer New York, Nov. 2012. 960 pp. ISBN: 1461265517. URL: https://www.ebook.de/de/product/21350013/serge_lang_algebra.html.
↑ 5

[14] J.S. Milne. *Class Field Theory (v4.03)*. Available at www.jmilne.org/math/. 2020.
↑ 2–3, 67

[15] Barry Mitchell. *Theory of categories*. New York: Academic Press, 1965. ISBN: 9780124992504.
↑ 5, 16

[16] James Munkres. *Topology (Classic Version)*. Pearson Education (US), Dec. 2017. 560 pp. ISBN: 0134689518. URL: https://www.ebook.de/de/product/28133022/james_munkres_topology_classic_version.html.
↑ 5

[17] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg. *Cohomology of Number Fields*. Springer-Verlag GmbH, Sept. 2013. 826 pp. ISBN: 3540378898. DOI: 10.1007/978-3-540-37889-1. URL: https://www.ebook.de/de/product/21989623/juergen_neukirch_alexander_schmidt_kay_wingberg_cohomology_of_number_fields.html.
↑ 45

[18] Tamás Szamuely Philippe Gille. *Central Simple Algebras and Galois Cohomology*. Cambridge University Press, Mar. 2019. 430 pp. ISBN: 131660988X. URL: https://www.ebook.de/de/product/29022805/philippe_gille_tamas_szamuely_central_simple_algebras_and_galois_cohomology.html.
↑ 42, 53, 66

[19] Joseph Rotman. *Galois Theory*. Springer New York, July 2001. 176 pp. ISBN: 0387985417. URL: https://www.ebook.de/de/product/3789447/joseph_rotman_galois_theory.html.
↑ 7

[20] Joseph J Rotman. *Advanced modern algebra*. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2010. ISBN: 9780821847411.
↑ 2–3, 5

[21] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Springer-Verlag GmbH, Nov. 2008. ISBN: 0387245278. DOI: 10.1007/b98977. URL: https://www.ebook.de/de/product/6284718/joseph_j_rotman_an_introduction_to_homological_algebra.html.
↑ 15–16, 39, 42, 45, 67

[22] Joseph J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*. Springer New York, Jan. 2014. 536 pp. ISBN: 1461286867. DOI: 10.1007/978-1-4612-4176-8. URL: https://www.ebook.de/de/product/22707049/joseph_j_rotman_an_introduction_to_the_theory_of_groups.html.
↑ 11, 39

[23] Serre. *Galois cohomology*. Berlin New York: Springer, 1997. ISBN: 3540619909.
↑ 53

[24] Jean-Pierre Serre. *Linear Representations of Finite Groups*. Springer New York, July 2012. 184 pp. ISBN: 1468494600. URL: https://www.ebook.de/de/product/21067506/jean_pierre_serre_linear_representations_of_finite_groups.html.
↑ 37

[25] Jean-Pierre Serre. *Local Fields*. Springer New York, 1979. DOI: 10.1007/978-1-4757-5673-9.
↑ 2–3, 39, 45, 47–48, 51, 53, 67, 77

[26] John Tate. "The Higher Dimensional Cohomology Groups of Class Field Theory". In: *Annals of Mathematics* 56.2 (1952), pp. 294–297. ISSN: 0003486X. URL: http://www.jstor.org/stable/1969801.
↑ 67

[27] Charles A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1994. DOI: 10.1017/CBO9781139644136.
↑ 15

[28] 李文威. *代数学方法: 基础架构*. Chinese. 北京: 高等教育出版社, 2018. ISBN: 9787040507256.
↑ 5, 15

名词索引