二维晶体群的 C^*-代数

算子代数 K 理论报告

柴昊

2022.6.1

目录

晶体群简介

晶体群定义

■ 定义 1.1 晶体群 (crystallographic groups) 指的是欧氏空间 E^n 的刚体运动群 $\mathrm{SO}(n) \ltimes \mathrm{E}^n$ 的离散子群 C 使得基本区域 $C \backslash E^n$ 有界。根据维数 n 的不同称为 n-维晶体群。分类晶体群在仿射变换下 (保持定向或不要求保持定向，分别对应于 $\mathrm{GL}_+(n) \ltimes \mathrm{E}^n$ 和 $\mathrm{GL}(n) \ltimes \mathrm{E}^n$) 的共轭等价类称为晶体群的分类。已知的结果是二维晶体群在这两种分类下有十七种。三维晶体群在仿射变换下的等价类有 219 种，在保定向的仿射变换下的共轭类有 230 种。对于一般情况的分类也可操作但是非常复杂。
晶体群也有一个别名 wallpapaer groups。这个名字可能来自于二维情形时其基本区域在平面的呈现像壁纸的周期性图样。

注释 1.1 俄国晶体学家 E.S. Fedorov(1885–1889) 和德国数学家 A. Schoenflies(1891) 分别给出了二维和三维晶体群的分类，由于他们采用的记号不同，一个规范的分类表在仔细对比他们的结果后得到，可以参考 R.L.E. Schwartzenberger, "n-dimensional crystallography" , Pitman (1980)。
更早些法国物理学家 A.Bravais 确定了保持三维空间某一个点阵 (几何中的格 L) 的所有整系数正交变换 $\mathrm{Stab}(L)(1848)$，根据此结果他将三维空间中的格 L 分成 14 种，在晶体学中常称为 Bravais 格子 (Bravais Type Lattice)。
高维空间中的格往往和正定二次型 Q 对应。更一般地 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 中的保持某些正定二次型的稳定子群被称为 Bravais 子群，极大有限子群都是 Bravais 子群。对 Bravais 子群的研究也和表示理论数论联系密切。

考虑如下的刻画。

■ **定义 1.2** 一个晶体群 Γ 的平移群义如其名，即其中的所有平移构成的群

$$L(\Gamma) := \{t_v \in \Gamma : v \in E^n\} \xleftrightarrow{1-1} V \subset E^n$$

注意到如果 t_v 是 Γ 的一个平移，则 $t_{g(v)}, g \in \Gamma$ 也是 Γ 的一个平移。根据离散群的性质，L 上可以有加减法从而会有一个 (多个) 最短的平移。

■ **定义 1.3** 考虑晶体群 $\Gamma \subset E^n \rtimes (n)$ 根据半直性质存在群同态

$$\pi :\subset E^n \rtimes (n) \to (n)$$

定义如 $\pi(t_v s) = s$。记 $\pi(\Gamma)$ 是 Γ 的点群。点群提取了晶体群里的" 旋转" 信息。

注释 1.2 平移群具有格性质，代数上都同构于 $\mathbb{Z}^n$，但是几何上它们的自同构群可能很不一样，这也是高维晶体群分类的困难之处，参考之前提到过的 Bravais 格子。
点群也很复杂，在群同构的意义下可能无法区分两个不几何等价的点群 (看作刚体运动群的子群)。例如在三维点群中有四种等价类作为群都同构于二面体群 D_6。

三维空间的点群

注释 1.3　上述表格给出了三维空间点群的分类，可以看到代数同构和几何等价是不一样的。
二维情形的点群比较简单，可以作为抽象代数的习题，也就是只有 $C_n, D_n, n = 1,2,3,4,6$。这里 C_n 是 n 阶循环群，D_n 指的是 $2n$ 阶二面体群。

abstract group	order	point groups
$\mathcal{C}_1$	1	1
$\mathcal{C}_2$	2	$2,\ m,\ \bar{1}$
$\mathcal{C}_3$	3	3
$\mathcal{C}_4$	4	$4,\ \bar{4}$
$\mathcal{C}_6 \cong \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_2$	6	$\bar{3},\ 6,\ \bar{6}$
$\mathcal{C}_{4h} \cong \mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_2$	8	$4/m$
$\mathcal{C}_{6h} \cong \mathcal{C}_6 \times \mathcal{C}_2$	12	$6/m$
$\mathcal{D}_2 \cong \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2$	4	$2/m,\ 222,\ mm2$
$\mathcal{D}_3$	6	$32,\ 3m$
$\mathcal{D}_4$	8	$422,\ 4mm,\ \bar{4}2m$
$\mathcal{D}_6 \cong \mathcal{D}_{3h} \cong \mathcal{D}_3 \times \mathcal{C}_2$	12	$\bar{3}m,\ 622,\ 6mm,\ \bar{6}2m$
$\mathcal{D}_{2h} \cong \mathcal{D}_2 \times \mathcal{C}_2 \cong \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2$	8	mmm
$\mathcal{D}_{4h} \cong \mathcal{D}_4 \times \mathcal{C}_2$	16	$4/mmm$
$\mathcal{D}_{6h} \cong \mathcal{D}_6 \times \mathcal{C}_2$	24	$6/mmm$
$\mathcal{T}$	12	23
$\mathcal{T}_h \cong \mathcal{T} \times \mathcal{C}_2$	24	$m\bar{3}$
$\mathcal{O}$	24	$432,\ \bar{4}3m$
$\mathcal{O}_h \cong \mathcal{O} \times \mathcal{C}_2$	48	$m\bar{3}m$

Table 1: Isomorphism classes of point groups as abstract groups

二维情形

一共在保定向或一般共轭下，只有十七种平面晶体群。不同的学科对它们有不同的记号，一个简单的表格如下

Conway, Coxeter and crystallographic correspondence

Conway	o	××	*×	**	632	*632
Coxeter	$[\infty^+,2,\infty^+]$	$[(\infty,2)^+,\infty^+]$	$[\infty,2^+,\infty^+]$	$[\infty,2,\infty^+]$	$[6,3]^+$	$[6,3]$
Crystallographic	*p*1	*pg*	*cm*	*pm*	*p*6	*p*6*m*

Conway	333	*333	3*3	442	*442	4*2
Coxeter	$[3^{[3]}]^+$	$[3^{[3]}]$	$[3^+,6]$	$[4,4]^+$	$[4,4]$	$[4^+,4]$
Crystallographic	*p*3	*p*3*m*1	*p*31*m*	*p*4	*p*4*m*	*p*4*g*

Conway	2222	22×	22*	*2222	2*22
Coxeter	$[\infty,2,\infty]^+$	$[((\infty,2)^+,(\infty,2)^+)]$	$[(\infty,2)^+,\infty]$	$[\infty,2,\infty]$	$[\infty,2^+,\infty]$
Crystallographic	*p*2	*pgg*	*pmg*	*pmm*	*cmm*

注释 1.4　表中含有三种不同的记号方式。晶体学上比较通用的是第三种 Hermann-Mauguin 记号，也是教材采用的记号。这里的三种记号的每一个符号都有固定的意思，代表所对应晶体群包含的对称信息。

一个有关群论的经典方法是用上同调的办法可以研究形如 $1 \to L \to \square \to G \to 1$ 的群扩张，这里 G 是任何群，L 是一个 $\mathbb{Z}[G]$-模。事实上 $\mathrm{H}^2(G, L)$ 可以确定出所有这样的扩张，精确到同构。那么最初的抽象化尝试是进行如下工作。

1. 首先分类平移群 L 和点群 D。点群的表格可以列出来，L 同构到 $\mathbb{Z}^2$。但是需要仔细研究出 D 在 L 上的不同作用。
2. 对于给定的平移群 L 和点群 D 此时此时任何一个晶体群都是一个形如
$$1 \to L \overset{\subseteq}{\to} \square \overset{\pi}{\to} D \to 1$$
的扩张。用 $\mathrm{H}^2(D, L)$ 即群的同调理论研究这样的扩张的个数。
3. 最后分类所有这样的晶体群。

注释 1.5 点群的同构类通常不难得到，但是靠 (L, D) 无法决定晶体群 (同构意义下或等价意义下都不行)。因为不同的 D 的同构类在 L 上的作用会有很大差别，进而计算出的上同调会有很大差别。(考虑 $\mathbb{I}_2$ 作为旋转或反射在 L 的作用，它们会给出同样的扩张吗？)
这样做到的分类只是在群扩张的等价下，也就是同构类。我们并不清楚此时两个晶体群的同构是通过仿射变换群 $E^3 \rtimes \mathrm{GL}(3, E)$ 或者 $E^3 \rtimes \mathrm{GL}(3, E)$ 的共轭给出的。这时需要更强的定理来保证这一点。

针对更高维的晶体群在 1910 年左右 L. Bieberbach 证明了以下基础性结论

1. 任何一个 n-维晶体群 Γ 都包含有 n-个线性无关的平移，特别的它们的平移群都同构于一个 E^n 上的格。$\pi(\Gamma)$ 是有限的。
2. 两个晶体群 Γ_1, Γ_2 作为群同构当且仅当它们在 $E^n \rtimes \mathrm{GL}_n(E)$ 上互为共轭子群。
3. 在每一个维度 n 上晶体群的等价类 (或者说同构类) 都是有限多的。(Hilbert 18th 问题)

特别的前二条结论可以保证在上一页中用同调代数方法分类的有效性。因为根据第一条所有的晶体群都逃不出利用上同调研究群扩张的适用范围。第二条说明比较" 粗糙" 的没有几何的代数分类就足够精确到提取出晶体群的几何信息 (代数同构类也是几何等价类)。

将三维情形的方法发扬光大可以得到如下的代数分类方法。

代数方法

一个线性空间 V 上的晶体群一一对应于如下资料 $\{D, L, \alpha\}$

- L 是一个 V 的一个格。
- D 是一个 $\mathrm{GL}_n(V)$ 的有限子群而且保持 L。
- α 是一个取值在 V/L 的一维上同调类 $(\mathrm{H}^1(D, V/L)$ 中元素)。

注释 1.6 这里可以采用一维上同调类是因为通过长正合列可以有 $\mathrm{H}^1(D, V/L) \simeq \mathrm{H}^2(D, L)$。
一般而言代数结构的上同调/同调越高维越难计算，一维上同调可以用群的标准消解或者杠构造" 理论地" 算出。

几何方法

只需要抽象代数和线性代数的知识就能进行的部分分类方法可以参考 Artin,"Algebra,Second Edition" 的 Chap6。
对于二维情形可以分类 $\Gamma\backslash E^2$。这些对象实际上是一些二维轨道流形，可以计算欧拉类 $\chi(M)$。
只有当 $\chi(M)=0$ 时才有可能具有零曲率的抛物度量。只有这时对应着晶体群。计算出恰好有十七种这样闭曲面。
更高维的推广: 某些高维流形的几何性质? 曲率? 度量?

对于物理学家或者晶体学家而言能做到上述对晶体群的等价分类已经是伟大成就了。但是对几何学家和数学工作者而言可能还想研究晶体群的表示信息。
以下对晶体群表示的刻画参考自
G.Ya. Lyubarskii, "Anwendung der Gruppentheorie in der Physik" , Deutsch. Verlag Wissenschaft. (1962) (Translated from Russian)
D.K. Faddeev, "Tables of the fundamental unitary representations of Fedorov groups" , Moscow-Leningrad (1961) (In Russian)

晶体群表示

设一个有限维晶体群 Γ 有平移群 L 和点群 D 考虑 $\chi \in \widehat{L}$ 记

$$\Gamma_\chi = \{s \in \Gamma : \chi(sls^{-1}) = \chi(l), \forall l \in L\}$$

取 σ 是 Γ_χ 的不可约表示而且 $\sigma|_L = \chi I_{\dim\sigma}$。那么诱导表示 $\mathrm{Ind}_{\Gamma_\chi}^{\Gamma}\sigma$ 是不可约的，而且 Γ 的所有不可约表示来自此类诱导。

$\mathfrak{pg}$ 的群代数 (pg) 和表示

(对于熟悉晶体学的人而言可以知道这里研究的 $\mathfrak{pg}$ 对应了晶体群的标准记号 pm) 固定一个二维的晶体群如 G，这是一个 $\mathbb{Z}^2$ 和有限群给出的扩张如

$$0 \to \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{i} \mathfrak{pg} \xrightarrow{p} \langle \bar{\sigma} \rangle \simeq \mathbb{I}_2 \to 0$$

也可把 G 看作平面的刚体运动群中由以下元素生成的子群 $\mathfrak{pg} = \langle \sigma, \tau_1, \tau_2 \rangle$ 这里

$$\sigma(x, y) = (x + \frac{1}{2}, -y)$$
$$\tau_1(x, y) = (x + 1, y), \quad \tau_2(x, y) = (x, y + 1)$$

典范的共轭作用给出平移群 $\mathbb{Z}^2$ 作为 $\mathbb{I}_2$-模的结构如

$$\overline{\sigma} \cdot \tau_{m,n} := \sigma \tau_{m,n} \sigma^{-1} = \tau_{m,-n}$$

注意到这个群不同构于任何半直积 $\mathbb{Z}^2 \rtimes_\phi \mathbb{I}_2$，因为不难看出 $\mathfrak{pg}$ 是无挠的，而半直积总会有二阶元。
事实上在第一部分就已经说明所有的晶体群都是一个交换群 A 通过一个有限群 D 扩张得到的。

根据群扩张的理论这种扩张通过上同调类 $\mathrm{H}^2(D, A)$ 确定。通常来说可以取一个陪集代表元 $\gamma : D \to A$ 使得 $G = \sqcup_{d \in D} \gamma(d) A$。但是通常 $\gamma(-)$ 不是群同态 (这时对应半直积情形，而此时对于没有旋转对称性的晶体群都不是半直积) 那么由于 $A \triangleleft G$ 存在一个函数 $\alpha : D \times D \to A$ 衡量其和群同态之间的差距，如

$$\gamma(c)\gamma(d) = \gamma(cd)\alpha(c, d), \quad \forall c, d \in D$$

利用群运算的交换性可以得到 α 满足如下的 cocycle 条件

$$\alpha(b, cd)\alpha(c, d) = \alpha(bc, d)\theta_{d^{-1}}(\alpha(b, c)) \quad \forall b, c, d \in D$$

例 1

如果将偏移刻画 α 考虑成左陪集，则 cocycle 条件形式有所不同。如

$$\theta_x(\alpha(y, z))\alpha(x, yz) = \alpha(x, y)\alpha(xy, z), \quad \forall x, y, z \in D$$

但给出的同调信息是一致的。而且可以通过上同调类的变换对应。

既然有了关于群的 C^*-代数理论，现在的问题变成了如何确定这样一个晶体群的群代数信息，由于约化群代数相对简单，先考虑刻画约化群代数 $C_r^*(G)$。上述的实例中我们知道了这样的晶体群都是一个交换正规子群 A 和一个有限群 $D = G/A$ 的扩张。这时利用陪集分解 $G = \sqcup_{\alpha \in D} \gamma(\alpha) A$ 是有限开集的无交并那么就有典范的等距同构如

$$L^2(G) \xrightarrow{[h_d]_{d\in D}} L^2(A)^n \quad h_d(-) := h(\gamma(d)-) \in L^2(A),\ n = |D|$$

再根据 Planchenrel 定理，有等距嵌入 $U : L^2(A) \to L^2(\widehat{A})$ 这里 $\widehat{A} := \mathrm{Hom}_{tg}(A, \mathbb{T})$ 是 A 的对偶群，由于交换群上的不可约酉表示都是一维的，此时可以写成特征标的集合，此时的拓扑就自动是紧开拓扑 (内闭一致收敛的网给出的拓扑)。一般情况 $\widehat{G}$ 是 G 的不可约酉表示的酉等价类的集合，其上有 Fell 拓扑。

至此获得了一个 Hilbert 空间之间的等距嵌入 $\Psi : L^2(G) \to L^2(\widehat{A})^n$。也就是如下的交换图表

$$\begin{tikzcd}
L^2(A)^n \arrow[d, "U^{(n)}"] & L^2(G) \arrow[l, "{[h_d]_{d\in D}}"'] \arrow[dl, "\Psi"] & L^2(G) \arrow[l, "\lambda(f)"'] & L^2(A)^n \arrow[l, "{[h_d]^*_{d\in D}}"'] \\
L^2(\widehat{A})^n & & & L^2(\widehat{A})^n \arrow[u, "U^{(n)*}"'] \arrow[ul, "\Psi^*"]
\end{tikzcd}$$

这里 $(-)^*$ 是内积等式

$$\langle fx, y\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, f^* y\rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$$

通过 Riesz 表示定理给出的典范的对偶映射。由于 Ψ 是等距，那么根据唯一性可知 $\Psi^*\Psi = 1$。对 $\mathcal{B}(L^2(G))$ 的研究可以移植到 $\mathcal{B}(L^2(\widehat{A})^n)$ 上，这是因为 $\Psi a \Psi^*$ 完全确定了 a。

Plancherel 定理

对于局部紧交换的拓扑群 (LCA,locally compact abelian groups) G。Fourier 变换或者说 Gelfand 变换诱导了如下 Hilbert 空间的等距同构

$$\Gamma : L^2(G) \longrightarrow L^2(\widehat{G})$$

其中 $\widehat{G}$ 上的使得上述变换是等距同构的测度可以被 G 上的 Haar 测度唯一确定。

例 2

注意到上述证明会有一个十分有用的副产品

$$\langle x, \Gamma^{-1} y\rangle_{L^2(G)} = \langle \Gamma x, y\rangle_{L^2(\widehat{G})}$$

进而说明 Γ 是酉的。

证明梗概

第一步构造 $\widehat{G}$ 上的 Haar 测度 $\widehat{\mu}$，这里比较简单的做法依赖于局紧拓扑群的结构定理 (局紧拓扑群都形如 $\mathbb{R}^n \times H$ 且 H 局部紧有紧开子群)，在 $\mathbb{R}^d$ 的部分通过普通的 Fourier 变换给出，$\widehat{H}$ 的部分通过正规化紧开子群唯一确定。

第二步构造逆变换 $\Gamma^{-1}(t) := \int_{L^2(\widehat{G})} \chi(t)\, d\widehat{\mu}(\chi)$，验证 Γ, Γ' 的代数同态和单性 (对测度定义和对函数定义)。

第三步和实数上的 Fourier 分析类似需要建立 LCA 上的逼近单位元的函数族，还要保证 $G, \widehat{G}$ 上的逼近单位元族通过 Γ 联系。为了对一般函数进行逼近，这一步还需建立 LCA 上的 Stone-Weierstrass 定理的推过，涉及到拓扑群和测度论中很多复杂概念。这一步也是证明中最复杂最技术性的部分。

第四步验证 Γ, Γ^{-1} 确实互为逆。需要用到 Fubini 定理交换积分次序和 LCA 上的逼近恒等。

第五步验证 $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ 则 $\Gamma(f) \in C(\widehat{G}) \cap L^2(\widehat{G})$，以及 Γ^{-1} 的对偶命题。同样用 Fubini 定理和逼近单位元进行估计。

最后用 Fubini 定理和逼近性质估计范数。希望得到 $|f| = |\Gamma^{-1}\Gamma(f)| \leq |\Gamma(f)| \leq |f|$。从而得出等距同构。

一板一眼的证明可以参考 Hewitt& Ross ”Abstract Hartnonic Analysis Volume II” 的 Chap31。

事实上

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_\Psi &: \mathcal{B}(L^2(G)) \hookrightarrow \mathcal{B}(L^2(\widehat{A})^n) \\ \mathrm{Ad}_\Psi(\phi) &:= \Psi\phi\Psi^* \end{aligned}$$

是一个单 $*$-同态。只需说明这是单的，考虑 $\Psi a\Psi^* = \Psi b\Psi^*$。那么两边左复合 Ψ^* 给出 $a\Psi^* = b\Psi^*$。但是有

$$a = a1 = (a\Psi^*)\Psi = (b\Psi^*)\Psi = b$$

(这是一个同构，考虑 Ψ 的逆是 Ψ^*) 那么研究一个交换群的对偶群的 L^2-函数空间似乎更好处理些，对 $C^*_r(G)$ 的刻画相当于刻画 $\mathrm{Ad}_\Psi\lambda(f), f \in L^1(G)$。后者我们下面会看到，相当于一个由 $\widehat{A}$ 上连续函数构成的矩阵代数。

以下定理刻画了如上的群扩张 (一个交换群和一个有限群给出的扩张)，进而描述了一般维数的晶体群的群代数信息。

定理 3 (定理 7.4.1)

假设 G 是一个交换群 A 和有限群 D 给出的群扩张 ($D \simeq G/A,\ A \triangleleft G$)。则有 G 的约化群代数同构于如下矩阵代数的子代数

$$C^*_r(G) \subset \mathbf{M}_n(C(\widehat{A})), \quad n = |D|$$

其矩阵形如 $F = [F_{c,d}]_{c,d \in D}$ 满足

$$F_{c,d}(\chi) = \chi(\alpha(cd^{-1}, d))F_{cd^{-1},e}(\theta^*_d(\chi)) \quad \forall \chi \in \widehat{A}$$

这里 $\vartheta^*_d \chi := \chi(\theta_d^{-1}(-))$ 以及 $\alpha : D \times D \to A$ 是这个群扩张对应的闭链 (可以将其视作 $\mathrm{H}^2(D, A)$ 的一个同调类)。

证明

这里列出详细的计算，需要了解一些关于群扩张的性质。首先 $L^2(G)$ 由其在陪集 $\sqcup_{d\in D}\gamma(d)$ 上的限制确定，这给一个向量 $L^2(A)^n$。而计算左正则作用的表现形式

$$\langle\lambda(f)g_1, g_2\rangle = \int_G f(t)\langle\lambda_t g_1, g_2\rangle d\mu_G(t) = \int_G (f*g_1)(s)\overline{g_2}(s)d\mu_G(s) = \langle f*g_1, g_2\rangle$$

根据 Fubini 定理是成立的。但是根据 Young 不等式存在常数 $C(2,1,2)$ 满足 $|f*g_1|_2 \leq C(2,1,2)|f|_1|g|_2$ 从而卷积后函数还处在 $f*g_1 \in L^2(G)$。
由于此时都是离散群，那么测度是计数测度，卷积相当于求和。进而考虑 $C_r^*(G)$ 的结构只需计算一个线性作用

$$\lambda(f)h := [(f*h)_c]_{c\in D} = [\sum_{s\in G} f(s)h(s^{-1}\gamma(c)-)]_{c\in D}$$

做变量代换 $s=\gamma(c)a\gamma(d)^{-1}, d\in D, a\in A$ 利用 α 的定义和 θ_d 的同态性质计算

$$\begin{aligned}\sum_{s\in G} f(s)h(s^{-1}\gamma(c)-) &= \sum_{d\in D}\sum_{a\in A} f(\gamma(c)a\gamma(d)^{-1})h(\gamma(d)a^{-1}-)\\ &= \sum_{d\in D}\sum_{a\in A} f(\gamma(cd^{-1})\theta_d(\alpha(cd^{-1},d))\theta_d(a))h(\gamma(d)a^{-1}-)\\ &= \sum_{d\in D}\sum_{a\in A} f(\gamma(cd^{-1})\theta_d(\alpha(cd^{-1},d)a))h(\gamma(d)a^{-1}-) = \sum_{d\in D}(g_{c,d}*h_d)(-)\end{aligned}$$

这里 $g_{c,d}$ 是取值在 A 的函数如

$$g_{c,d}(a) := f(\gamma(cd^{-1})\theta_d(\alpha(cd^{-1},d)a)) = f_{cd^{-1}}(\theta_d(\alpha(cd^{-1},d)a))$$

这里用到了调和分析中的范数控制:Young 不等式。

Young 不等式

对于任何的 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ 和指标满足

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

都有 $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ 和范数控制

$$|f * g|_r \leq C(p, q, r)|f|_p|g|_q$$

下面提供一个比较巧妙的证明，几乎可以没有障碍地移植到局紧交换群上。

For dimensional reasons, the indices must be related by

$$1+\frac{1}{r'}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\,.$$

$rr' = r + r'$

令 $h(x) = (f*g)^{r'-1}$

An equivalent version involves three functions

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} h(x)f(x-y)g(y)dxdy \le C(p,q;n)\|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r \tag{1}$$

where

$(r'-1)r$

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1\,.$$

Thus

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=2\,.$$

The constant $C(p,q;n)$ denotes the sharp constant. It will depend, of course on p,q and the dimension n.

I looked up some of the papers of W.H. Young in the Proc. London Math. Soc. 1912 and 1913, but never found the inequality quoted in that particular way, although it is proved for some particular indices.

A proof of (1) without the sharp constant is relatively easy to achieve using Hölder's inequality. Clearly the functions f,g,h can be replaced by their magnitudes. Noting that

$$\frac{p}{q'}+\frac{p}{r'}=1 \quad \text{etc}$$

we

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} h(x)f(x-y)g(y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^{2n}} h(x)^{\frac{r}{q'}} f(x-y)^{\frac{p}{q'}} h(x)^{\frac{r}{p'}} g(y)^{\frac{q}{p'}} f(x-y)^{\frac{p}{r'}} g(y)^{\frac{q}{r'}} dxdy$$

$$\le \left[\int_{\mathbb{R}^{2n}} [h(x)^{\frac{r}{q'}} f(x-y)^{\frac{p}{q'}}]^{q'} dxdy\right]^{1/q'} \left[\int_{\mathbb{R}^{2n}} [h(x)^{\frac{r}{p'}} g(y)^{\frac{q}{p'}}]^{p'} dxdy\right]^{1/p'} \left[\int_{\mathbb{R}^{2n}} [f(x-y)^{\frac{p}{r'}} g(y)^{\frac{q}{r'}}]^{r'} dxdy\right]^{1/p'}.$$

$$= \|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r\,.$$

Date: May 4, 2009.

1

写成矩阵形式就是

$$(\lambda(f)h)_c = \sum_{d \in D} g_{c,d} * h_d, \quad \forall h \in L^2(G), \quad \lambda(f)(-) = [g_{c,d}]_{(c,d) \in D \times D} * (-)$$

那么写成分量并且取 Fourier 变换，注意到 Ψ 是等距，根据 Planchenrel 定理有 $\Psi^* \Psi = 1, \Psi \Psi^* = 1$。(这里服从书上的记号，用 $\widehat{F}$ 表示 Gelfand 变换确定的 Fourier 变换和通常的 Fourier 变换会相差一个指标的正负号) 从而取 Fourier 变换后卷积变成乘积。那么酉等价下有矩阵表示

$$\Psi \lambda(f) \Psi^* = [\widehat{g_{c,d}}]_{c,d \in D \times D} := [F_{c,d}]_{(c,d) \in D \times D}$$

计算 Fourier 变换是

$$\begin{aligned}
\widehat{g_{c,d}}(\chi) &= \sum_{a \in A} g_{c,d}(a)\chi(a) = \sum_{a \in A} g_{c,d}(\alpha(cd^{-1}, d)a)\chi(\alpha(cd^{-1}, d)a) \\
&= \sum_{a \in A} f_{cd^{-1}}(\theta_d(a))\chi(\alpha(cd^{-1}, d)a) = \sum_{a \in A} f_{cd^{-1}}(\theta_d(a))\chi(\alpha(cd^{-1}, d))\chi(a) \\
&= \chi(\alpha(cd^{-1}, d)) \sum_{a \in A} f_{cd^{-1}}(\theta_d(a))\chi(a) = \chi(\alpha(cd^{-1}, d))\widehat{g_{cd^{-1}, e}}(\theta_d^* \chi)
\end{aligned}$$

从而根据定理的记号就写成

$$F_{c,d}(\chi) = \chi(\alpha(cd^{-1}, d))F_{cd^{-1}, e}(\theta_d^*(\chi)) \quad \forall \chi \in \widehat{A}$$

把 7.4.1 应用到 $\mathfrak{pg}$ 上可以具体刻画出 $\mathfrak{pg}$ 的约化群代数。

推论 4 (推论 7.4.2)

如果记 $\mathbb{T}$ 是一维环面就是 $\mathbb{S}^1$ 那么 $\mathfrak{pg}$ 的约化群代数可以通过上述构造的 λ' 映射 C^*-同构于如下代数

$$C_r^*(G) \xrightarrow{\lambda'} \mathfrak{A} := \{F \in C(\mathbb{S}^1 \times [0,1], \mathbf{M}_2(\mathbb{C})) : F(z,0), F(z,1) \in \mathfrak{R}_z, \quad \forall z \in \mathbb{S}^1\}$$

这里 $\mathfrak{R}_z$ 是一个二阶矩阵的子代数形如

$$\mathfrak{R}_z := \{\begin{bmatrix} a & zb \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C}) : \forall a, b, \in \mathbb{C}\}$$

更进一步，可以将 $\mathfrak{pg}$ 的生成元表示成

$$\lambda'(\sigma)(z,t) = \begin{bmatrix} & z \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad \lambda'(\tau_{0,1})(z,t) = \begin{bmatrix} e^{\pi\sqrt{-1}t} & \\ & e^{-\pi\sqrt{-1}t} \end{bmatrix}$$

直接利用第一个定理进行计算。
取 $\mathfrak{pg}$ 对应的上同调类如 $\alpha : \mathbb{I}_2 \times \mathbb{I}_2 \to \mathbb{Z}^2$，对应一个截面是 $\gamma(1) = e, \gamma(-1) = \sigma$

$$\alpha(1,1) = \alpha(1,-1) = \alpha(-1,1) = e, \quad \alpha(-1,-1) = \sigma^2 = \tau_{1,0}$$

此时 $\widehat{\mathbb{Z}^2} = \mathbb{T}^2$。共轭作用具体写出如下

$$\theta^*_{-1}(z,w) = (z,\overline{w}), \quad (z,w) \in \mathbb{T}^2$$

那么用上一个定理确定矩阵元素的形式，有

$$F_{1,-1}(z,w) = (z,w)(\alpha(-1,-1))F_{-1,1}(\theta^*_{-1}(z,w)) = zF_{-1,1}(z,\overline{w})$$
$$F_{-1,-1}(z,w) = (z,w)(\alpha(1,-1))F_{1,1}(\theta^*_{-1}(z,w)) = F_{1,1}(z,\overline{w})$$

从而有

$$F(z,w) = \begin{bmatrix} f(z,w) & zg(z,\overline{w}) \\ g(z,w) & f(z,\overline{w}) \end{bmatrix} \quad f,g \in C_0(\mathbb{T}^2)$$

注意到此时 $F(z,\pm 1)\in \mathfrak{R}_z$ 而且如果取如下的酉相似可知

$$U_z = \begin{bmatrix} 0 & z \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_z^* F(z,w)\, U_z = F(z,\overline{w})$$

从而 $F(z,w)$ 只由 $\{(z,w) : z\in\mathbb{T}^1, w\in\mathbb{T}^1, \mathrm{Im}\, w\geq 0\}$ 上的取值确定。所以同胚到 $\mathbb{T}\times[0,1]$ 就有

$$F(z,t) := \begin{bmatrix} f(z, e^{\pi\sqrt{-1}t}) & zg(z, e^{-\pi\sqrt{-1}t}) \\ g(z, e^{\pi\sqrt{-1}t}) & f(z, e^{-\pi\sqrt{-1}t}) \end{bmatrix} \quad f, g\in C_0(\mathbb{T}^2)$$

满足推论中的刻画。
分别取 $f=\delta_\sigma, \delta_{\tau_{1,0}}, \delta_{\tau_{0,1}}$ 可以直接计算对应的 $\widehat{g_{i,j}}$

$$\widehat{g_{i,j}} = \chi(\alpha(cd^{-1}, d))\widehat{g_{ij^{-1},e}}(\theta_d^*\chi)$$

不难得到对应的矩阵表示。

几点观察

考虑代数 $\mathfrak{R}_z$ 的结构。假设 $\alpha^2 = z, \mathrm{Im}\alpha > 0$。这个子代数是二维的，由如下的两个正交投影生成

$$\mathfrak{R}_z = \mathbb{C}P_\alpha + \mathbb{C}P_{-\alpha}, \quad P_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad P_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

不难算出展开的系数分别是 $a + \alpha b$ 和 $a - \alpha b$。考虑连续变化的投影 $\alpha \to P_\alpha \in \mathfrak{R}_{\alpha^2}$。根据上面的观察，函数 F 在边界圆周的性质最为特殊。例如 $F|_{\mathbb{T}\times\{0\}}$ 是一个圆周上的连续函数，取值在 $\mathfrak{R}_z$ 上。那么取值在 $\mathfrak{R}_z$ 上投影的路径 r 由基点唯一确定。特别地有唯一一个在基点取 P_1 的投影，在半周后第一次以值 P_{-1} 回到 $\mathfrak{R}_1$ 中。

定理 5 (定理 7.4.3) 记 π 是 $\mathfrak{pg}$ 的不可约表示。则有如下的两种情况

- 在精确到酉等价的意义下，π 是一个由两个参数 $z \in \mathbb{S}^1, t \in [0,1]$ 确定的二维不可约复表示，其在生成元取值形如

$$\pi(\sigma) = \begin{bmatrix} & z \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad \pi(\tau_{0,1}) = \begin{bmatrix} e^{\pi\sqrt{-1}t} & \\ & e^{-\pi\sqrt{-1}t} \end{bmatrix}$$

- 一维特征标形如 $\omega(\sigma) = \alpha \in \mathbb{S}^1, \omega(\tau_{0,1}) = \pm 1$ 的意义下 π 是一维不可约复表示。

特别地，如果 π, π' 是 $\mathfrak{pg}$ 的两个不可约表示，$\ker \pi = \ker \pi'$ 则 $\pi \simeq_u \pi'$ 是酉等价。

证明

考虑 π 是一个不可约酉表示。记 $U=\pi(\sigma)$, $V=\pi(\tau_{0,1})\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$。根据酉表示的性质和 $\mathfrak{pg}$ 的关系 (注意到 $\sigma^2=\tau_{1,0}$ 在群的中心里，根据 C^*-代数的表示的性质不可约表示的中心元素都是一些数乘)

$$U^2=\alpha^2 I,\quad V^*=UVU^*,\quad UU^*=VV^*=I,\quad \alpha\in\mathbb{T}$$

利用谱定理，可知 $\sigma(U)=\{\pm\alpha\}$ 从而用谱测度可以将 U 分解成 $U=\alpha E_\alpha-\alpha E_{-\alpha}$。这里 E_- 对应的是谱投影。那么 $\mathcal{H}=E_\alpha\mathcal{H}\oplus E_{-\alpha}\mathcal{H}$ 考虑 V 在这个分解上的表示如下

$$V=\begin{bmatrix} A & B\\ C & D\end{bmatrix}$$

代入 $V^*=UVU^*$ 计算。不难得到有如下关系

$$A=A^*, D=D^*, B+C^*=0,\quad A^2+BB^*=D^2+B^*B+D^2=I$$

这时 V 是自伴的酉元，考虑极分解

$$B=\begin{bmatrix} & B\\ & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & W\\ & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & \\ & |B|\end{bmatrix}$$

证明

利用 U, V 的关系可知 WW^* 是 $\mathrm{im}B$ 到自身的正交投影。那么以下三个投影

$$\begin{bmatrix} I - WW^* & \\ & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & \\ & I - W^*W \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} WW^* & \\ & W^*W \end{bmatrix}$$

的象都是 $\pi(\mathfrak{pg})$ 不变的子空间。它们的和是 I 所以至少有一个是全空间，其余两个是零。
前两个投影若为全空间则 U 是一个数乘，对应了 ω 是特征标。
如果最后一个是全空间，说明 W 是从 $E_{-\alpha}\mathcal{H}$ 到 $E_{\alpha}\mathcal{H}$ 的等距同构。用算子 $I \oplus W^* : E_{\alpha}\mathcal{H} \oplus E_{\alpha}\mathcal{H} \to E_{\alpha}\mathcal{H} \oplus E_{-\alpha}\mathcal{H}$ 给出变换后的矩阵表达式中可假设 $B > 0$。那么此时 $A, D \in \{B\}'$。而且 $A = D$。考虑二次换位子不难得到 A, B 都是数乘进而只能是一维。用 $A^2 + B^2 = 1$ 给出角度参数 t。取基 $[1, \sqrt{-1}], [\alpha, -\alpha\sqrt{-1}]$ 就得到定理中的表达式。

推论 6 (推论 7.4.4) 此时左正则作用给出的典范提升 $\lambda : C^*(\mathfrak{pg}) \to C^*_r(\mathfrak{pg})$ 是 C^*-代数同构而且谱空间 $\mathrm{Spec}(C^*(\mathfrak{pg}))$ 和本原理想空间 $\mathrm{Prim}(C^*(\mathfrak{pg}))$ 是同胚的，具体地刻画是它们拓扑同胚于一个不可定向的二维闭曲面

$$2\mathbb{P}^2$$

也就是向二维球面和两个射影平面的连通和构成的闭曲面。

证明. 根据 $C^*(-)$ 的万有性质，λ 总是一个满 $*$-同态。验证同构只需说明 $\ker\lambda = 0$。这一点是因为根据定理 7.4.3 和推论 7.4.2 进行比较 $C^*(\mathfrak{pg})$ 是 $L^1(\mathfrak{pg})$ 关于所有不可约酉表示的范数上确界构成的范数给出的完备化，而 $C^*_r(\mathfrak{pg})$ 有具体刻画。比较所有的不可约酉表示的范数可知此时

$$\lambda : C^*(\mathfrak{pg}) \to C^*_r(\mathfrak{pg})$$

是等距。从而两者作为 C^*-代数是同构的。 □

注释 2.1 这里值得一提的是作为矩阵值的函数的 C^*-范数和作为函数值的矩阵的 C^*-范数是一致的，也就是可以把 $C(X, \mathbf{M}_n(\mathbb{C}))$ 和 $\mathbf{M}_n(C(X, \mathbb{C}))$ 在 C^*-代数层面看作同一件事。这个事情也隐含在第一个定理的证明中。

对一个 C^*-代数 $\mathfrak{A}$ 出于各种数学的需要总希望研究清楚 $\mathfrak{A}$ 上的所有不可约酉表示的等价类 (酉等价，近似酉等价等等) 构成的范畴 $\mathrm{Repn}(\mathfrak{A})$ 。参考教材 7.3 节有如下定义。

定义 2.1 考虑 $\mathfrak{A}$ 的所有不可约酉表示的近似酉等价类 $[\pi]$ 的核 $\ker\pi$ 构成的一个空间记成 $\mathrm{Prim}(\mathfrak{A})$。其上有 Hull-Kernel 拓扑 (非交换环上的 Zariski 拓扑，也叫 Jacobson 拓扑) 如下定义

$$\overline{J} = \mathrm{Hull}(\ker(J)), \quad \mathrm{Hull}(s) := \{b \in \mathrm{Prim}(\mathfrak{A}) : b \supset s\}, \quad \ker(J) = \cap_{j\in J} j$$

一般而言这样得到的拓扑空间只能是 T_0 的，也就是任何两点可以被一个开集分开。

定义 2.2 $\mathfrak{A}$ 的所有不可约酉表示的酉等价类构成一个空间 $\mathrm{Spec}(\mathfrak{A})$ (教材中记成 $\widehat{\mathfrak{A}}$ 可能是为了和交换群的对偶群以及 Gelfand 变换时的谱空间保持一致)。这上拓扑是通过映射

$$\ker : \mathrm{Spec}(\mathfrak{A}) \to \mathrm{Prim}(\mathfrak{A})$$

拉回得到的，也就是使得 ker 在 Hull-Kernel 拓扑下连续的最弱拓扑。

注释 2.2 集合论问题可以通过一些十分抽象的办法解决，如 Scott’s Trick 和超限归纳，可以说明上述的等价类构成的类是某一个序数 α 对应的 V_α 的子集从而是一个集合。这里 V_α 是超限归纳定义出的层垒谱系 (cumulative hierarchy)。但是在应用中只关心一些具体的空间，从而不会是非常困扰的问题。

注释 2.3 $\mathrm{Spec}(\mathfrak{A})$ 上的拓扑很难研究，根据教材上的说明有一个原因是很难拓扑上区分两个近似酉等价但是不酉等价的不可约表示。Glimm 的工作表示如果 $\mathfrak{A}$ 不是 GCR 代数 ($\mathrm{Prim}(\mathfrak{A})$ 和 $\mathrm{Spec}(\mathfrak{A})$ 不同) 则在谱空间上不存在 Borel 测度。这应该增加了问题的复杂度。特别地单 GCR 代数只有矩阵代数 $\mathbf{M}_n$ 和 Hilbert 空间上的紧算子代数 $\mathfrak{K}$。

注释 2.4 为了对 Spec 和 Prim 有更直观的了解可以参考教材 7.3 节中计算 Toeplitz 代数 $\mathcal{T}(C(\mathbb{T}))$ 的结构。
$\mathrm{Prim}(\mathcal{T}(C(\mathbb{T})))$ 不是 T_1 空间，集合上相当于 $\mathbb{S}^1 \sqcup \mathrm{pt}$，但是例外单点的闭包是全集。
$\mathrm{Spec}(\mathcal{T}(C(\mathbb{T})))$ 和 $\mathrm{Prim}(\mathcal{T}(C(\mathbb{T})))$ 是同胚的。

证明

证明. 继续来说明推论 7.4.4 的最后的结论。首先需要知道通过表示 π 可以确定 Prim 的拓扑。也就是教材的 7.3.5。
Prim 上的开集有如下一组基

$$\mathcal{O}_A := \{\pi \in \mathrm{Spec}(\mathfrak{A}) : |\pi(A)| > 1\}, \quad A \in \mathfrak{A}$$

而且 $\lim_\alpha \sigma_\alpha \ni \rho$ 当且仅当 $\underline{\lim}_\alpha |\sigma_\alpha(A)| \geq |\rho(A)|, \forall A \in \mathfrak{A}$。按照这个定理以及已经知道了 $\mathfrak{pg}$ 的所有不可约表示就可以确定 Prim 的拓扑。
对于每一个 $(\alpha^2, \pm 1)$ 对应了 Prim 中的两个点。
在内部考虑用范数刻画的 Prim 的拓扑，用表示 $\pi(\sigma), \pi(\tau_{0,1})$ 计算发现和通常的欧式拓扑一致。直观上大概看出两者拓扑上没有区别。
最后因为 ker 酉等价可以推出表示酉等价，那么说明映射 $\ker : \mathrm{Spec}(\mathfrak{A}) \to \mathrm{Prim}(\mathfrak{A})$ 是同胚。 $\square$

还能做的事情

- 是否可以对一般的晶体群甚至离散群 G 重复定理 7.4.1。
- 哪些离散群 (或者更一般的局部紧群或者有限生成群) 的不可约复表示都是有限维的。以至于能计算 $||_{\text{sup}}$ 和 $||_{\text{regular}}$ 从而比较约化群代数和万有群代数的差别。
  有限群和紧群的不可约表示都是有限维的。
  某些特殊的群扩张，例如本节的 $\mathfrak{pg}$ 具有这样的性质。
- 如果某一个离散群 G 有非平凡的不可约表示。那么是否有办法把这些不可约表示 (类似于 7.4.4) 用参数空间完全刻画出来。
  复 Lie 代数的 Dynkin 图，Verma 模 $\Rightarrow$ 一些李群如 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$ 或 heisenberg 群的有限维不可约表示有参数刻画。
  自守表示的理论，或者算子代数的理论 $\Rightarrow$ 给出一些矩阵群的无穷维表示的具体刻画 (admissible, K-finite 等条件)

还能做的事情

这些事情都不怎么容易。而且很依赖于具体选择的群。不像之前讨论的 Toeplitz 代数或者极小动力系统那样有比较统一的理论。或者说这里的方法可能更加多元。

> **注释 2.5** 限制到考虑复表示上。E.Thomas 的一个结果是说，一个离散群 G 的所有不可约酉表示都是有限维当且仅当 G 是 virtually abelian 的。就是说 G 有一个有限指数的交换子群 $H, |G/H| < +\infty$。
> 所以如果想要限制到有限维表示上 A 的交换性和 D 的有限性都是很难去掉的。
> Snider 和 Wehrfritz 说明对于可解群而言不可约复表示都有限维推出 virtually abelian。
> 也有很多人研究了有限生成群的情形下不可约表示的维数有限性，一个社区的讨论参考https://mathoverflow.net/questions/309993/groups-whose-complex-irreducible-representations-are-finite-dimensional。

Kadison-Kaplansky 猜想

回顾 pg 无挠，这个结果可以看作如下约化群代数的猜想的一个佐证。

> 猜想 (Kadison-Kaplansky)[猜想 7.4.5] 对于无挠的离散群 G 其约化的 C^*-代数 $C_r^*(G)$ 中没有非平凡的投影。

注释 3.1 根据书上的信息，这个猜想还是猜想。而且自从提出以来人们对很大一类群都进行了验证而没有发现反例。例如 Ronghui Ji 的"Smooth Dense Subalgebras of Reduced Group C *-Algebras, Schwartz Cohomology of Groups,and Cyclic Cohomology" 对多项式增长的群验证了上述猜想。文章比较长。

注释 3.2 群代数没有非平凡投影的性质大概是比较常见的，一个不恰当的类比是 $C(X)$ 这里 X 是紧 Hausdorff 空间。如果 X 上有拓扑群结构，这两者可能会体现某些共同点。之后提到的 Kaplansky 猜想也有涉及。
Cohen 证明了 $C^*(\langle x, y\rangle)$ 没有非平凡投影。用代数 K 理论方法可以说明 $C_r^*(\langle x, y\rangle)$ 也没有非平凡投影。
而且 $C_r^*(\langle x, y\rangle)$ 还是单代数。所以这给出了一个单无投影的 C^*-代数的例子。
回顾之前提到的 Blackadar's example(映射环，里程表表示，Bott 投影) 和 Jiang-Su 代数。

一个不太有说服力的佐证

定理 7 (定理 7.4.6)
考虑 $\mathfrak{pg}$ 如上所示，则约化群代数 $C^*_r(\mathfrak{pg})$ 没有非平凡投影。

这里说不太有说服力是因为只对一个非常特殊的群 $\mathfrak{pg}$ 做了验证，更优地至少按照第二部分给出的思路考察二维或者三维晶体群中无挠的那些是不是无投影。
单个特殊的例子可能确实不太有说服力，而且注意到 $\mathfrak{pg}$ 只有两个生成元，群结构比较简单。

佐证的证明

证明.
照搬书中证明。假设 $P(z,t)$ 是一个非平凡投影，先要说明其是常秩的。考虑到 $\mathbb{T}\times[0,1]$ 是连通的，只需说明

$$\mathbb{T}\times[0,1]=U_0\sqcup U_1\sqcup U_2,\quad U_i:=\{(z,t)\in\mathbb{T}\times[0,1]:\mathrm{rank}P(z,t)=i\}$$

中 U_1,U_2,U_0 都是开集，根据连通性恰好有一个 U_i 是全部的柱面。U_2 是开集是根据行列式函数的连续性，而 U_0 可以看作 $1-P$ 的秩为二从而也是开集。而且根据矩阵元素的连续性可知 U_0,U_2 是闭集，所以 $U_1=\mathbb{T}\times[0,1]$。但是这会导致矛盾。因为 $P(z,0)$ 是 $\mathbb{T}$ 上连续变化的投影，而且 $\mathfrak{R}_z=\mathbb{C}P_\alpha+\mathbb{C}P_{-\alpha}$。如果

$$P(1,0)=P_1$$

根据 $\alpha^2=z$ 用连续性和 $\dim\mathfrak{R}_z=2$ 可知此时有 $P(z,0)=P_{\sqrt{z}}$，但是平方根在 $\mathbb{T}$ 上不能良定义。绕 $\mathbb{T}$ 一周得到 $P(1,0)=P_{-1}$ 矛盾。
所以投影只能是 $0,1$。 □

比 Kadison 这个猜想更早的是关于群代数的一个版本。

假设 k 是一个数域 G 是无挠群 (torsion-free)。有如下三个比较有名的猜想
Kaplansky 单位猜想 (unit conjecture)：对于群代数 $k[G]$ 中只有 $k^\times g, g \in G$ 是可逆元。
Kaplansky 零因子猜想 (zero divisor conjecture)：$k[G]$ 中没有零因子，即 $k[G]$ 是整环。
Kaplansky 幂等元猜想 (idempotent conjecture)：$k[G]$ 中没有非平凡幂等元，也就是说如果 $a^2 = a \in k[G]$ 则 $a = 0, 1$。

注意到上述猜想只能对无挠群提才有效。

注释 3.3　上面猜想中的 torsion-free 是十分必要的。因为不难对 torsion 群不难构造出以下反例

$$(a-1) \in \mathbb{F}_3(\mathbb{I}_2), \quad a^2 = 1, \quad (a-1)^2 = 2 - 2a = (a-1)$$
$$(a-1)(a^{n-1} + \cdots + 1) = 0 \in \mathbb{C}(\mathbb{I}_n), \quad a^n = 1, a-1, a^{n-1} + \cdots + 1 \neq 0$$
$$\frac{(2-a)}{\sqrt{3}} \frac{(2+a)}{\sqrt{3}} = 1 \in \mathbb{C}(\mathbb{I}_2), \quad 2+a, 2-a \neq 0, 1$$

上面的猜想的强度不是一样，例如单位猜想推出零因子猜想，零因子猜想推出幂等元猜想。
但是单位猜想在 2021 年末被 Giles Gardam 证伪，他构造了一个当 $\mathrm{char}k = 2$ 时的反例。
论文可见 Annals 如下。https://annals.math.princeton.edu/2021/194-3/p09
群是非常非常复杂的，某某一类群都是极其复杂的。所以有人说一般这样对很大一类群的断言都差不多是错的。

注释 3.4 而且有集合论的相关研究说明这些猜想可能是 **ZFC** 不可判定。
尽管如此，对很大一类群而言零因子猜想和幂等元猜想都是成立的，例如某种可解群的推广而对于单位猜想就复杂些，如现在仍不清楚某些三维晶体群的群代数是否有非平凡的单位。

注释 3.5 Kaplansky 还有一些关于 Hopf 代数的猜想。见 http://homepages.math.uic.edu/~radford/NIU2012.pdf。

报告结束 感谢聆听