交换代数报告

诺特局部环的维数理论和完备局部环的结构定理

柴昊 1700010670 北京大学数学科学学院

1. 介绍

我们下面的讨论中环都默认是交换的有单位元的。

这篇报告主要介绍诺特局部环和其上的有限生成模的维数，并且通过古典不变量理论的方法诱导特征多项式来建立诺特局部环上的维数定理。然后引入同调维数来陈述一些局部代数理论里的基本事实，最后我们给出完备局部环结构定理的部分证明，和一些关于完备局部环的讨论作为结束。

2. 一些基本的代数工具

首先我们讨论一些在基础的交换代数课上熟悉的定理，证明都是经典的，有的会略去，我们试图在维数的观点下观察这些先导的定理，来体现维数理论的统一能力。

有限性条件

诺特条件 如果一个交换环的每一个理想升链(严格上升)都有限长, 那么称这个交换环满足诺特条件,也称这个环是诺特环。类似地如果一个交换环上的模的每一个由子模构成的严格上升的升链都有限长,则称这个模是诺特模, 满足诺特条件。

阿廷条件 如果一个交换环的每一个理想降链(严格下降)都有限长, 那么称这个交换环满足阿廷条件,也称这个环是阿廷环。类似地如果一个交换环上的模的每一个由子模构成的严格下降的降链都有限长,则称这个模是阿廷模, 满足阿廷条件。

我们默认关于这些环的一些最基本的性质，这些性质的证明都不太复杂，在必要的时候我们会在定理的证明过程中给出一定的解释：例如诺特环的理想都有限生成；诺特模的子模都有限生成；阿廷环是克鲁尔维数为零的诺特环；诺特环的理想可以进行准素分解，写成准素理想的交集等等。

正规化引理

在研究一般的有限型代数的结构时通常可以把它约化成某个多项式代数的商环或者多项式代数上的有限型代数，这样在使用归纳法时会使得问题得到一定程度的简化。

> **诺特正规化引理** 设 A 是一个交换环，那么 B 是有限生成的 A 代数，存在 B 的子代数 A_0 使得 B 是有限生成的 A_0 代数，而 A_0 是 A 上的多项式代数。

如果对交换环加一些限制条件，我们还有更强版本的正规化方法。

希尔伯特零点定理

最为简单的希尔伯特零点定理建立了代数闭域上的多项式环的极大理想和仿射簇的点的一一对应。

而作为现代代数学中极为重要的定理，希尔伯特零点定理也有以下几个不同性状的版本，下面陈述两例。

> **古典形式的希尔伯特零点定理** 设k为代数闭域，A为k的多项式代数

> $$A = k[z_1, \ldots, z_n]$$
>
> 那么如果有
>
> $$f_1, \ldots, f_m \in A, \quad (f_1, \ldots, f_m) \neq A$$
>
> 则 $f_1, \ldots, f_m$ 在仿射空间 k^n 上至少有一个公共零点。

以及：

> **交换代数形式的希尔伯特零点定理** 设 k 是一个域，那么设 A 是有限生成的 k-代数，记 $\mathfrak{m}$ 是 A 的一个极大理想，那么 $A/\mathfrak{m}$ 是 k 的有限扩张。

不同版本的希尔伯特零点定理在代数几何的发展历史上具有十分重要的意义，零点定理建立了代数和几何的联系，启发人们开发出更多的工具集中研究各种类型的代数簇。

Krull主理想定理

对于交换环中的素理想我们定义其高度是最长的严格上升到其本身的素理想升链的长度，定义其深度是对应商环的高度。克鲁尔给出了如下重要的刻画。

> **Krull主理想定理** 设A是一个诺特环，x 既不是可逆元也不是零因子，那么主理想 (x) 的每一个极小素理想的高度都小于等于1，特别地如果 x 是一个正则元那么 (x) 的每一个极小素理想的高度就是1。

完备化

课上通过诱导分次环和诱导分次模的方式给出了诺特环或者诺特环上的有限生成模的完备化的正式定义，相比于定义在这篇报告中更为重要的可能是完备化和其他操作的相容性等一系列良好的性质。

> **性质1** 诺特局部环进行关于其唯一极大理想的完备化之后还是一个诺特局部环，而且完备化后的环的唯一的极大理想正好是原来的唯一的极大理想的完备化。
>
> 证明：直接利用定义证明即可。

> **性质2** 对诺特环关于其理想进行任何次完备化和进行一次完备化是相同的，即 $\hat{\hat{A}} = \hat{A}$
>
> 证明：利用$\hat{\mathfrak{a}} = \hat{A}\mathfrak{a}$ 等关系。

> **性质3** 诺特环关于其某个理想做完备化保持短正合列（正合函子），即
>
> $$0 \to A \to B \to C \to 0 \quad \text{正合} \quad \Rightarrow \quad 0 \to \hat{A} \to \hat{B} \to \hat{C} \to 0 \quad \text{正合}$$
>
> 证明：这本质上是投射极限的正合性质，利用同调理论中的蛇形引理来获得长正合列。

3. 交换环和其上模的维数理论简介

一些关于多项式的引理

首先我们需要**差分**的概念：对于一个定义在实数上的函数 f 定义其一阶差分为 $(\Delta f)(x) := f(x+1) - f(x)$ ，注意到这样可以定义出任意整数阶的差分，记作 Δ^n 。很容易注意到一个环上的多项式差分后是一个比之前次数少1的环上的多项式，而且差分后的是一个环上的多项式的函数在整数值上取值也一定具有环上的某个多项式的形式，如果说一个定义在整数上的函数 f 满足当 $n \in \mathbb{N}$ 足够大时 $f(n)$ 是某个关于 n 的多项式则称这个 f 是**类多项式的函数（polynomial-like）**。从这个定义出发我们直接可以知道一个函数是类多项式的当且仅当它的一阶差分是类多项式的，也当且仅当它的足够高阶差分在足够大的正整数上取值是零。

回顾组合多项式 $Q_n(x)=\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{n!}$ 是关于 x 的 n 次多项式而且$\{Q_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 构成了有理系数多项式作为有理数域上的线性空间的一组基，我们尝试把一个一般的多项式在这组基下展开：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{k=n}e_k(f)Q_k(x)=e_N(f)\frac{x^n}{n!}+\dots=\Delta^n(f)\frac{x^n}{n!}+\dots$$
$$\Delta Q_k=Q_{k-1},\quad e_k(f)=e_{k-1}(\Delta f)$$

下面的对特征多项式的次数估计会用到这些简单的关系。

特征多项式或特征函数

在考虑有限维线性空间之间的线性算子的特征值时可以通过定义线性算子的特征多项式来计算，而特征多项式的系数作为矩阵的主子式行列式的对称和在相似变换下不变；考虑有限表现的纽结的基本群时我们可以通过道路类的关系定义一个交换环上矩阵的行列式作为纽结的亚历山大多项式，其系数也表征了纽结的一些拓扑的性质（十分平凡，同痕等价类等等），在概率论和离散的动力系统里也会有生成幂级数的概念用来求解一些递归问题，所以用一个自然的多项式环的元素来作为我们寻找不变量的载体是十分顺畅的，下面就介绍一些刻画环结构的著名多项式。

首先我们来定义

> **庞加莱级数** 设$A=\oplus_{n=0}^{\infty}A_n$ 是一个诺特分次环，$M=\oplus_{n=0}^{\infty}M_n$ 是一个有限生成的分次A-模，设λ 是有限生成A-模上的加性整数值函数，即对任何短正合列
>
> $$0\to M'\to M\to M''\to 0$$
>
> 都有$\lambda(M')-\lambda(M)+\lambda(M'')=0$ 成立。这样我们可以定义一个关于模 M 和加性函数 λ 的整系数幂级数，即我们将
>
> $$P(M,t):=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(M_n)t^n\qquad\in\mathbb{Z}[[t]]$$
>
> 定义为模 M 关于加性函数 λ 的庞加莱级数（Poincare Series）。

回顾一个模 M 的长度是从 0 到 M 的子模的严格升链的最大长度。同样我们把问题限制在定义庞加莱级数的情况来得到希尔伯特多项式：

> **希尔伯特多项式** 设$A=\oplus_{n=0}^{\infty}A_n$ 是一个诺特分次环，$M=\oplus_{n=0}^{\infty}M_n$ 是一个有限生成的分次A-模，对于一个 A 中的理想 $\mathfrak{q}$ 定义一个希尔伯特特征函数（假设长度有限）：
>
> $$\chi_{\mathfrak{q}}^{M}(n)=\mathrm{l}(M/\mathfrak{q}^nM)$$
>
> 另外在Serre的局部代数的书上采用下面的另一种定义方法： 考虑一个分次交换环 $A=\oplus_{n=0}^{\infty}A_n$ 满足 A_0 是阿廷环而且 A 可以由 A_0，$u_1,\dots,u_r\quad u_i\in A_1,i=1,\dots,m$ 生成（这时 A 作为 $A_0[x_1,\dots,x_r]$ 的商环是诺特环），设 $M=\oplus_{n=0}^{\infty}M_n$ 是一个有限生成的分次A-模。这时每个分次分量 M_n 是有限生成的 A_0-模所以作为A_0-模长度有限，我们定义如下的希尔伯特特征函数：
>
> $$\chi(M,n)=\mathrm{l}_{A_0}(M_n)$$
>
> 从定义看出这样的特征函数确实是依赖于环的，所以我们会在不引起歧义的情况下使用上面的记号，当有必要区分时在括号内加上环的信息来表示不同环上的有限生成分次模的希尔伯特特征。

如果推广上面的第一个关于希尔伯特特征的定义，可以得到下面的类多项式的特征：

> **Samuel多项式** 如果考虑 A 是一个诺特交换环，让 M 是一个有限生成的 A-模，$\mathfrak{q}$ 是 A 的一个理想，$\left(M_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 M 的一个递降的滤子，作如下的假设：
>
> （1）$M/\mathfrak{q}M$ 关于 A 的长度有限
>
> （2） $\left(M_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$满足 $\quad M_i\supset M_{i+1}\supset\mathfrak{q}M_i,\quad i=0,1,\dots$ 而且当 n 充分大时 $M_{n+1}=\mathfrak{q}M_n$

我们知道 $M/\mathfrak{q}^n M$ 关于 A 都是有限长度的根据上面假设 M/M_n 关于A 也是有限长度的，那么我们定义 如下的特征函数为：

$$P((M_i)_{i\in\mathbb{N}}, n) := \mathrm{l}(M/M_n)$$

特别地如果 $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 取成 $(\mathfrak{q}^i M)_{i\in\mathbb{N}}$ 那么这就是我们上面定义的第一个希尔伯特特征函数。通常记成：

$$P_{\mathfrak{q}}(M) = \chi_{\mathfrak{q}}^M$$

下面的一些定理刻画了我们刚才定义的这些特征的一些性质。

次数刻画（Hilbert-Serre） 设 A 是分次交换环 $A = \oplus_{n=0}^{\infty} A_n$ 满足 A_0 是阿廷环而且 A 可以由 A_0，$u_1, \ldots, u_r \quad u_i \in A_1, i = 1, \ldots, m$ 生成（这时 A 作为 $A_0[x_1, \ldots, x_r]$ 的商环是诺环），$M = \oplus_{n=0}^{\infty} M_n$ 是一个有限生成的分次$A[x_1, \ldots, x_r]$-模，那么分次分量 M_n 看作A-模是有限长的。对于足够大的 n，希尔伯特特征函数 $\chi(M, n)$ 作为关于 n 的多项式次数最多为 $r-1$。

证明：对于 r 作归纳，不妨设 $A = A_0[x_1, \ldots, x_r]$。

当 $r = 0$ 时 M 是有限生成 A_0-模所以有限长，那么类似地 M_n 只有有限个非零这时定理自然成立。如果 $r > 0$ 假设 $r-1$ 时定理已经成立那么用 x_r 左乘 M_n 就会得到下面的正合序列：

$$0 \to \ker(x_r \cdot |_{M_n}) \to M_n \xrightarrow{x_r \cdot} M_{n+1} \to \operatorname{coker}(x_r \cdot |_{M_n}) \to 0$$

如果记 $N_n = \ker(x_r \cdot |_{M_n})$ 和 $R_{n+1} = \operatorname{coker}(x_r \cdot |_{M_n})$ 并且 $N = \oplus_{n=0}^{\infty} N_n$，$R = \oplus_{n=0}^{\infty} R_n$ 利用模的长度是加性函数，把上面的长正合列典范地拆成短正合列 （中间加上 $\operatorname{im}(x_r \cdot |_{M_n})$），我们有：

$$\Delta\chi(M, n) = \chi(M, n+1) - \chi(M, n) = \chi(R, n+1) - \chi(N, n)$$

注意到 $x_r R = x_r N = 0$，所以R, N 是 $A_0[x_1, \ldots, x_{r-1}]$-模，利用归纳假设可知 $\chi(R, n+1)$ 和 $\chi(N, n)$ 都是类多项式函数而且当n 充分大的时候那个多项式的次数小于等于 $r-2$，那么自然地 $\Delta\chi(M, n)$ 是一个类多项式函数，而在整数点的差分可以求和成那个点的函数值，对于多项式差分的次数会严格减一我们得到：

对于足够大的 n，希尔伯特特征函数 $\chi(M, n)$ 作为关于 n 的多项式次数最多为 $r-1$。

下面的引理在证明维数定理中起到了关键作用。

次数刻画（Samuel） 设 A 是一个诺特局部环，$\mathfrak{m}$ 是其极大理想，$\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{m}$-准素理想，M 是一个有限生成的 A-模而且 $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 M 的 $\mathfrak{q}$-稳定滤子即满足

$M_i \supset M_{i+1} \supset \mathfrak{q}M_i, \quad i = 0, 1, \ldots$ 且当 n 充分大时 $M_{n+1} = \mathfrak{q}M_n$，那么我们有如下结论：

（1）每一个 M/M_n 关于 A 是有限长度的

（2）对足够大的 n，$\mathrm{l}(M/M_n)$ 是一个关于 n 的次数小于 s 的多项式，这里 s 是 $\mathfrak{q}$ 的生成元个数的最小值

（3）（2）中的多项式的次数只依赖于 M 和 $\mathfrak{q}$

证明：我们使用诱导的分次结构：

令 $G(A) = \bigoplus_{n=0} \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$ 和 $G(M) = \bigoplus_{n=0} M^n/M^{n+1}$，注意 $G_0(A) = A/\mathfrak{q}$ 是一维诺特环（这里是只素理想链的最大长度）所以是阿廷环（(0) 可以写成极大理想的乘积这时候考虑降链 $A \supset \mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supset \ldots \supset (0)$ 是数域 $A/\mathfrak{m}$ 上的线性空间的降链，所以这时候诺特条件等价于阿廷条件），那么继续有 $G_n(M) = M_n/M_{n+1}$ 是一个被 $\mathfrak{q}$ 零化的诺特 A-模，所以是一个诺特 c-

> 模，进而有限长（ $A/\mathfrak{q}$ 是降链有限的考虑模上升链的零化理想链）进而我们有：
>
> $$\mathrm{l}_n = \mathrm{l}(M/M_n) = \sum_{r=1}^{r=n} \mathrm{l}(M_{r-1}/M_r)$$
>
> 有限长。
>
> 由于诺特性质我们不妨取 $x_1, \ldots, x_s$ 生成 $\mathfrak{q}$ 这时 x_i 在 $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2$ 中的象 $\overline{x_i}$ 生成 $G(A)$ （作为 $A/\mathfrak{q}$ 上的代数）而且每一个 $\overline{x_i}$ 在 $G(A)$ 中都有分次次数 1 。利用上面的引理刻画我们知道
>
> $$\mathrm{l}_{n+1} - \mathrm{l}_n = \chi(M, n) = f(n)$$
>
> 当 n 足够大的时候 $f(n)$ 是一个次数小于等于 $s-1$ 的多项式，那么利用差分的性质当 n 足够大的时候我们有 l_n 是一个次数小于等于 s 的多项式。
>
> 最后我们考察这个多项式不依赖于这种滤子的选择，取另外的满足定理条件的滤子 $\left(\widetilde{M}_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ 而且取 $\tilde{g}(n) = \mathrm{l}(M/\widetilde{M}_n)$ 由于如果取 $\left(\mathfrak{q}^i M\right)_{i\in\mathbb{N}}$ 作为滤子分别和上面两个滤子比较可以得到有足够大的 n_0 使得 $M_{n+n_0} \subset \widetilde{M}_n, \widetilde{M}_{n+n_0} \subset M_n$ 对任何 $n \geq 0$ 成立。取 $g(n) = \mathrm{l}(M/M_n)$ 立刻得到
>
> $$\tilde{g}(n+2n_0) \geq g(n+n_0) \geq \tilde{g}(n)$$
>
> 立刻得到 l_n 在 n 足够大时候的关于 n 的多项式次数不依赖于滤子的选择。

对于最一般的庞加莱级数我们也有下面的刻画。

> **引理（Hilbert-Serre）** 设 $A = \oplus_{n=0}^{\infty} A_n$ 是一个诺特分次环，M是一个有限生成的分次A-模，那么庞加莱级数$P(M,t)$具有以下形式
>
> $$P(M,t) = \frac{f(t)}{\Pi_{i=1}^{i=s}(1-t^{k_i})}$$
>
> 这里 $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ 而且 k_i 为正整数。特别的如果每一个 k_i 都是1，那么对于 $n \in \mathbb{Z} \quad n >> 1$ 有 $\lambda(M_n)$ 关于 n 是一个有理系数的 $s-1$ 阶多项式。这里 s 是 A 作为 A_0 的有限生成代数的无关生成元个数。
>
> 证明：首先$A_0 \simeq A/A_+$ 是一个诺特环，我们需要首先证明下面的结论：
>
> > 结论1： A 是一个有限生成的 A_0-代数。
> >
> > 证明：由于所有正次数的元素构成 A 的理想 A_+ 由 A 是诺特环可知 A_+ 有限生成，我们可以取一组 A_+ 的齐次生成元 $x_1, \ldots, x_s$，次数分别是 $k_1, \ldots, k_s > 0$ 。记 $A' = A_0(x_1, \ldots, x_s)$，我们有 $A_0 \subset A'$，如果说 $A_n \subset A'$，对于某个 $y \in A_{n+1}$ 有表达式 和归纳假设 $y = \sum_{i=1}^{i=s} a_i x_i, \quad a_i \in A_{n+1-k_i} \subset A'$ 那么自然地 $y \in A'$，所以对 n 归纳可知每一个 A_n 都是 A' 的子集，所有 $A = A' = A_0(x_1, \ldots, x_s)$ 。
> >
> > 下面我们自然地对A 作为 A_0 的有限生成代数的生成元个数作归纳。当 $s=0$ 时 $A = A_0$ 这时 M 是有限生成的 A_0 代数，M_n 只有有限个非零，有加性函数在零模上取值为零可知这时庞加莱级数就是一个整系数多项式，下面假设 $s-1$，$s>0$ 时这个命题成立，我们考察 s 时利用下面的正合列（余核是商掉象集得到的商模）：
>
> $$0 \to \ker(x_s \cdot |_{M_n}) \to M_n \xrightarrow{x_s \cdot} M_{n+k_s} \to \mathrm{coker}(x_s \cdot |_{M_n}) \to 0$$
>
> 首先如果把长正合列分割称短正列不难证明加性函数在长正合列的交错和也是零，根据上面的正合列有：
>
> $$\lambda(\ker(x_s \cdot |_{M_n})) - \lambda(M_n) + \lambda(M_{n+k_s}) - \lambda(\mathrm{coker}(x_s \cdot |_{M_n})) = 0$$

> 如果我们写出 $K=\bigoplus_n \ker(x_s\cdot|_{M_n}), L=\bigoplus_n \operatorname{coim}(x_s\cdot|_{M_n})$，他们都是有限生成的$A$-模（$K$ 作为 M 的子模而 L 作为 M 的商模），而且更细致地都是 $A_0[x_1,...,x_s]$-模（被 x_s 零化），所以对上式乘以 t^{n+k_s} 并且对于 n 求和我们得到：
>
> $$(1-t^{k_s})P(M,t)=P(L,t)-t^{k_s}P(K,t)+\sum_{i=0}^{i=k_s-1}[\lambda(\operatorname{coker}(x_s\cdot|_{M_i}))-\lambda(M_i)]t^i$$
>
> 利用归纳假设可以知道庞加莱级数确实有下面的形式：
>
> $$P(M,t)=\frac{f(t)}{\Pi_{i=1}^{i=s}(1-t^{k_i})}$$
>
> 而如果每一个 k_i 均为1，那么利用幂函数的泰勒展开：
>
> $$(1-t)^{-s}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{s+k-1}{s-1}t^k$$
>
> 多项式 $f(t)=\sum_{k=1}^{k=N}a_kt^k$ 所以这时对所有的 $n\geq N$ 都有：
>
> $$\lambda(M_n)=\sum_{k=0}^{k=N}a_k\binom{s+n-k-1}{s-1}$$
>
> 这是一个关于 n 的多项式，首项是 $(\sum_{k=0}^{k=N}a_k)\frac{n^{s-1}}{(s-1)!}$ 值得注意的是这个引理可以直接推出上面的希尔伯特特征是类多项式函数的性质（取我们的加性函数为模的长度即可）。

我们其实还有更加细致的刻画和这些特征之间的函数方程，但是利用上面的性质我们就足够证明关于诺特局部环的维数定理了。

维数定理

对于一个诺特环我们可以在谱空间的点上对其进行局部化，然后可以将一些关于理想链的问题转换到局部环上，而经过了前面对于诺特环的特征多项式的细致刻画我们现在可以证明如下的关于诺特局部环的维数定理：

> **诺特局部环的维数定理** 对于任何的诺特局部环A，以下三个自然数相等：
>
> (1) 克鲁尔维数：A中素理想升链（严格上升）的最大长度（极大理想的高度）$\mathrm{ht}(\mathfrak{m})$
>
> (2) 特征多项式
>
> $$\chi_{\mathfrak{m}}(n)=\chi_{\mathfrak{m}}^A(n)=l(A/\mathfrak{m}^n)$$
>
> 的次数 $d(A)$
>
> (3) A中 $\mathfrak{m}$-准素理想的最小生成元个数 $\delta(A)$
>
> 这个正整数被定义成诺特局部环A的维数，即 $\dim(A)$ 。
>
> 证明：我们首先证明 $\delta(A)\geq d(A)$：
>
> 首先我们取一个 $\mathfrak{m}$-准素理想 $\mathfrak{q}$，根据上面的结果（Samuel的次数刻画）我们知道如果取滤子是 $(\mathfrak{q}^i)_{i\in\mathbb{N}}$ 把 A 看作自身的模我们有当 n 足够大的时候 $\mathrm{l}(A/\mathfrak{q}^n)$ 和 $\mathrm{l}(A/\mathfrak{m}^n)$ 都是关于 n 的多项式而且次数分别小于等于 $\mathfrak{q}$ 和 $\mathfrak{m}$ 的最小生成元个数。我们来证明在 A 是诺特局部环情况下这两个多项式的次数是相等的。因为如果我们设 $\mathfrak{m}$ 由 $x_1,...,x_n$ 生成那么利用 $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{m}$-准素的我们有一些正整数 n_i 使得 ${x_i}^{n_i}\in\mathfrak{q}$ 这时取一个 $r=\sum_{i=1}^{i=n}(n_i-1)+1$ 那么 $\mathfrak{m}^r$ 就由$x_1^{r_1}\cdots x_n^{r_n},r_i\in\mathbb{N}$ 生成而且 $\sum_{i=1}^{i=n}r_i=r$，利用容斥原理可知一定有某个 $r_i\geq n_i$ 这时那个对应的生成元在 $\mathfrak{q}$ 里面，我们就得到包含关系：$\mathfrak{m}\supset\mathfrak{q}\supset\mathfrak{m}^r$ 那么反映在特征上有，当 n 足够大的时候：

$$\mathfrak{l}(A/\mathfrak{m}^n) \le \mathfrak{l}(A/\mathfrak{q}^n) \le \mathfrak{l}(A/\mathfrak{m}^{rn})$$

让 n 趋于正无穷可知他们的次数必须一致，那么这样得到 $\delta(A) \ge \deg(\chi_{\mathfrak{q}}^A) = \deg(\chi_{\mathfrak{m}}^A) = d(A)$

接着我们来说明 $d(A) \ge \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$：

需要一个归纳的工具性引理：

> 引理1：如果 A 是诺特局部环而 M 是有限生成的 A-模，$\mathfrak{m}$ 是其唯一的极大理想以及取 $\mathfrak{m}$-准素理想 $\mathfrak{q}$，设 $x \in A$ 是 M 正则元（可推出 $xM \simeq M$）那么如果取 $M' = M/xM$ 我们有如下的关系：
>
> $$\deg(\chi_{\mathfrak{q}}^{M'}) \le \deg(\chi_{\mathfrak{q}}^M) - 1$$
>
> 证明：我们取 $N = xM$ 这时有 $N \simeq M$ 作为 A-模同构。令 $N_n = N \cap \mathfrak{q}^n M$ 有正合列
>
> $$0 \to N/N_n \xrightarrow{insert} M/\mathfrak{q}^n M \xrightarrow{quotient} M'/\mathfrak{q}^n M' \to 0$$
>
> 那么利用长度的加性我们有
>
> $$\mathfrak{l}(N/N_n) - \chi_{\mathfrak{q}}^M(n) + \chi_{\mathfrak{q}}^{M'}(n) = 0$$
>
> 对足够大的 n 成立。而注意到根据 $N_n = N \cap \mathfrak{q}^n M$ 我们知道 $\left(N_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ 满足 $\mathfrak{q}$-滤子条件;
>
> $$N_i \supset N_{i+1} \supset \mathfrak{q}N_i, \quad i = 0, 1, \ldots$$
>
> 对于任何有限生成的 A-模 N 的$\mathfrak{q}$-滤子 $\left(N_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ 我们声明下面的事实（这个声明和声明的证明里的直和都是外直和）：
>
> " $\oplus_{n=0}^{\infty} N_n$ 是有限生成的 $\oplus_{n=0}^{\infty}\mathfrak{q}^n$-模 $\Leftrightarrow$ 当 n 充分大时 $N_{n+1} = \mathfrak{q}N_n$ "
>
> 原因：每一个 N_n 作为 N 子模是有限生成的 A-模，那么有限直和 $Q_n = \oplus_{k=0}^{k=n} N_k$ 也是有限生成的 A-模。令（外直和）
>
> $$N_n^* := Q_n \oplus (\oplus_{n=1}^{\infty}\mathfrak{q}^n N_n)$$
>
> 这个时候 $Q_n = \oplus_{k=0}^{k=n} N_k$ 是有限生成的 A-模，自然地 N_n^* 是有限生成的的 A^*-模，$\left(N_i^*\right)_{i\in\mathbb{N}}$ 是降链而且 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_n^* = \oplus_{n=0}^{\infty} N_n$ ，注意到 $A^* = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathfrak{q}^n$ 是诺特环（设 $\mathfrak{q}$ 由 $x_1, \ldots, x_n$生成，A^* 就是以$x_1, \ldots, x_n$ 为未定元的多项式环 $A[x_1, \ldots, x_n]$ 由希尔伯特基定理可知是诺特环）这时候" $\oplus_{n=0}^{\infty} N_n$ 是有限生成的 $\oplus_{n=0}^{\infty}\mathfrak{q}^n$-模 "就等价于$\left(N_i^*\right)_{i\in\mathbb{N}}$ 有限个后都稳定不再严格变大，这就是说有某一个 n_0 使得 $\oplus_{n=0}^{\infty} N_n = N_{n_0}^*$ 这就是说 $N_{n_0+r} = \mathfrak{q}^r M_{n_0}$ 等价地说就是当 n 充分大时 $N_{n+1} = \mathfrak{q}N_n$ 。
>
> 利用上面的事实$\mathfrak{q}$-滤子$\left(\mathfrak{q}^i M\right)_{i\in\mathbb{N}}$ 满足后边的条件所以说$\oplus_{n=0}^{\infty}\mathfrak{q}^n M$ 是有限生成的 $\oplus_{n=0}^{\infty}\mathfrak{q}^n$-模，那么对于$\mathfrak{q}$-滤子 $\left(N_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ ， $\oplus_{n=0}^{\infty} N_n$ 是作为$\oplus_{n=0}^{\infty}\mathfrak{q}^n M$ 的 $\oplus_{n=0}^{\infty}\mathfrak{q}^n$-子模，自然是有限生成的 $\oplus_{n=0}^{\infty}\mathfrak{q}^n$-模，那么当 n 充分大时 $N_{n+1} = \mathfrak{q}N_n$ ，利用上面的引理（Samuel的次数刻画）我们知道 $\chi_{\mathfrak{q}}^M$ 的次数和稳定滤子的选择无关，那么
>
> $$\mathfrak{l}(N/N_n) - \chi_{\mathfrak{q}}^M(n) = \chi_{\mathfrak{q}}^N(n) - \chi_{\mathfrak{q}}^M(n)$$
>
> 那么 $N \simeq M$ 我们知道上面的差在 n 很大的时候是有相同的首项，那么做差次数会最少下降 1 。我们由此得到关系：
>
> $$\deg(\chi_{\mathfrak{q}}^{M'}) \le \deg(\chi_{\mathfrak{q}}^M) - 1$$
>
> 那么对于 $M = A$ 和 x 在 A 中不是零因子应用这个引理我们有：
>
> $$d(A/(x)) \le d(A) - 1$$

现在我们可以对于 $d=d(A)$ 作归纳，当 $d=0$ 时 $\mathrm{l}(A/\mathfrak{m}^n)$ 在 n 很大的时候是一个常数，那么我们有 $\mathfrak{m}^n=\mathfrak{m}^{n+1}$ 对于足够大的 n 成立，那么利用Nakayama引理有对这些 n ，$\mathfrak{m}^n=0$。这时 A 是一个阿廷环所以 $\mathfrak{m}=0$ （当零理想可以写成极大理想的乘积的时候诺特条件就是阿廷条件，而阿廷环中素理想都是极大理想所以唯一的极大理想高度是 0）。我们假设 $d>0$ 对于 $d-1$ 的情况已经成立，这个时候取 $\mathfrak{p}_0\subsetneq\mathfrak{p}_1\subsetneq\ldots\subsetneq\mathfrak{p}_r$ 是 A 中任一素理想链，取 $x\in\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_0$ ，令A' 是 $A/\mathfrak{p}_0$ ， x' 是 x 在 A' 中的象，注意到 A' 是整环而且 $x'\neq 0$ 那么 x' 不是零因子。这个时候用上面的结果我们有

$$d(A'/(x'))\leq d(A')-1$$

如果 $\mathfrak{m}'$ 是 A' 的极大理想，那么 $A'/\mathfrak{m'}^n$ 是 $A/\mathfrak{m}^n$ 在商映射的同态象那么作为模有长度关系：

$$\mathrm{l}(A'/\mathfrak{m'}^n)\leq\mathrm{l}(A/\mathfrak{m}^n)$$

由特征多项式的定义我们得到：$d(A)\geq d(A')$，从而 $d(A'/(x'))\leq d(A')-1\leq d-1$ 。

而由归纳假设可知在 $A'/(x')$ 中的素理想链的长度不超过 $d-1$ ，这个时候 $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_r$ 在商同态下的象构成了 $A'/(x')$ 中的长度是 $r-1$ 的素理想链那么 $r-1\leq d-1, r\leq d$ 。我们这时对于这样的素理想链取一个上确界得到 $\mathrm{ht}(\mathfrak{m})\leq d$，由归纳法有 $d(A)\geq\mathrm{ht}(\mathfrak{m})$ 。

最后我们来说明 $\mathrm{ht}(\mathfrak{m})\geq\delta(A)$:

首先我们设 $\mathrm{ht}(\mathfrak{m})=d$ 归纳构造 $x_1,\ldots,x_d$ 使得每一个包含 $x_1,\ldots,x_i$ 的素理想有高度大于等于 i （这里自然 $i=1,\ldots,d$ ）。假设 $i>0$ （$i=1$ 显然存在）而且这样的 $x_1,..,x_i$ 已经构造出来了，令 p_j 是那些由$x_1,\ldots,x_{i-1}$ 生成的理想的高度确实为 $i-1$ 的极小素理想（这是有限的不妨设 $1\leq j\leq s$）。$i-1<\mathrm{ht}(\mathfrak{m})=d$ 所以 $\mathfrak{m}\neq\mathfrak{p}_j, j=1,..,s$ ，一定有 $\mathfrak{m}\neq\bigcup_{1\leq j\leq s}\mathfrak{p}_j$ （覆盖性质，不妨对 s 归纳，当 $s=1$ 时显然成立，设 $s-1$ 时成立取 $y_i\in\mathfrak{m}-\bigcup_{j\neq i}\mathfrak{p}_j$ 这里取 $i=1,\ldots,s$ 那么如果有某一个 $y_{i_0}\notin\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}_0}$ 那么我们就找到了这样的元素 y_{i_0} ，否则每一个 $y_i\in\mathfrak{p}_i$ 我们取 $y=\sum_{1\leq i\leq s}y_1\cdots\hat{y}_i\cdots y_s$ （上标尖角表示删去那个元素）是 $\mathfrak{m}-\bigcup_{1\leq j\leq s}\mathfrak{p}_j$ 中元素）那么我们取 $x_i\in\mathfrak{m}-\bigcup_{1\leq j\leq s}\mathfrak{p}_j$ 设 $\mathfrak{q}$ 是一个包含 $x_1,\ldots,x_i$ 的素理想则其包含 $(x_1,\ldots,x_{i-1})$ 的某个极小素理想 $\mathfrak{p}$ 。如果 $\mathfrak{p}$ 等于某个 $\mathfrak{p}_{j_0}$ 那么我们有$x_i\in\mathfrak{q}, x_i\notin\mathfrak{p}_{j_0}$ 这个时候 $\mathfrak{q}\supsetneq\mathfrak{p}_{j_0}$ 自然有 $\mathfrak{q}$ 的高度是大于等于 i 的，如果不然有 $\mathfrak{p}$ 的高度大于等于 i 那么自然也有 $\mathfrak{q}$ 的高度也大于等于 i 。

这样我们考虑上面构造出来的 $x_1,\ldots,x_d$ 如果说 $\mathfrak{p}$ 是包含这些元素的一个素理想那么它高度大于等于 d 。这时只能有 $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}$ 。所以说 $x_1,\ldots,x_d$ 生成一个 $\mathfrak{m}$-准素理想。

至此我们终于证明了关于诺特局部环的维数定理，即 $\delta(A)=d(A)=\mathrm{ht}(\mathfrak{m})$ 。

维数定理的模版本 对于任何的诺特局部环A，$\mathfrak{m}$ 是 其唯一的极大理想，设 M 是有限生成 A-模， 那么以下三个自然数相等：

(1) 自然维数 $\dim(M)=\sup\{\dim(A/\mathfrak{p}):\quad\mathfrak{p}\in\mathrm{supp}(M)\}$ （$\mathfrak{p}\in\mathrm{supp}(M)$ 表示 $\mathfrak{p}$ 是素理想且 $M_{\mathfrak{p}}\neq 0$ ）

(2) 特征多项式 （这里 $\mathfrak{q}$ 是 A 的理想满足 $\mathfrak{m}\supset\mathfrak{q}\supset\mathfrak{m}^n$ 对某个 n 成立）

$$\chi_{\mathfrak{q}}(n)=l(M/\mathfrak{q}^nM)$$

的次数 $d(M)$ （由Samuel的次数刻画可知不依赖于这种理想的选取）

(3) 使得 M/AM 有限长的 $\mathfrak{M}$ 中有限子集 A 的最小基数 $s(M)$

这个正整数被定义成 M 的维数，即 $\dim(M)$ 。

证明：这个思路和我们证明上面关于诺特环的结果的思路是一样的，这里参考Serre的局部代数。

> 以下的几个事实是有用的，利用定义我们有当 $x\in\mathfrak{m}$ 则 $s(M)\le s(M/xM)+1$；如果存在素理想 $\mathfrak{p}_i\in\operatorname{supp}(M)$ 使 $\dim(M)=\dim(A/\mathfrak{p}_i)$ 则对 $x\notin\mathfrak{p}_i$ 都有 $\dim(M/xM)\le\dim(M)-1$。令 $\operatorname{Ann}(x)=\{m\in M: xm=0\}$ $\mathfrak{q}$ 是 A 的理想满足 $\mathfrak{m}\supset\mathfrak{q}\supset\mathfrak{m}^n$ 对某个 n 成立，考虑正合列
>
> $$0\longrightarrow\operatorname{Ann}(x)\xrightarrow{i}M\xrightarrow{x\cdot}xM\longrightarrow 0$$
>
> 和
>
> $$0\longrightarrow xM\xrightarrow{i}M\xrightarrow{\pi}M/xM\longrightarrow 0$$
>
> 利用我们证明次数估计的方法可以得到
>
> $\chi_{\mathfrak{q}}^{\operatorname{Ann}(x)}(n)-\chi_{\mathfrak{q}}^{M/xM}(n)$ 在 n 足够大的时候是一个次数小于 $d(M)-1$ 的多项式。
>
> 首先我们证明 $\dim(M)\le d(M)$：
>
> 对 $d(M)$ 归纳，如果 $d(M)$ 是零那么结论显然成立。所有假设 $d(M)\ge 1$ 取 $\mathfrak{p}_0\in\operatorname{supp}(M)$ 使得
>
> $\dim(M)=\dim(A/\mathfrak{p}_0)$ 而且不妨取 $\operatorname{supp}(M)$ 中的极小素理想，则 M 中有子模 N 同构于 $A/\mathfrak{p}_0$，这时 $d(M)\ge d(N)$ 只需对 N 来证明，取 $\mathfrak{p}_0\subsetneq\mathfrak{p}_1\subsetneq\ldots\subsetneq\mathfrak{p}_r$ 是 A 中任一素理想链，这时取 $x\in(\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{m})-\mathfrak{p}_0$ $\mathfrak{p}_1\subsetneq\ldots\subsetneq\mathfrak{p}_r$ 则在 $\operatorname{supp}(N/xN)$ 中，$\dim(N/xN)\le\dim(N)-1$，而且利用次数刻画，$d(N/xN)\le d(N)-1$ 这时对 N/xN 使用归纳假设可以知道对所有的 $d(M)$ 都有 $\dim(M)\le d(M)$。
>
> 然后我们证明 $d(M)\le s(M)$：
>
> 如果取 $\mathfrak{a}=(x_1,\ldots,x_r)\subset\mathfrak{m}$ 而且 $M/\mathfrak{a}M$ 有限长，那么 $\mathfrak{q}=\mathfrak{a}+\operatorname{Ann}(M)$ 满足 $\mathfrak{m}\supset\mathfrak{q}\supset\mathfrak{m}^N$ 对某个 N 成立，那么 $\chi_{\mathfrak{a}}^M(n)$ 和 $\chi_{\mathfrak{q}}^M(n)$ 在 n 很大时作为多项式是相等的，再次利用Samuel的次数刻画我们知道这个次数是小于等于 r 的，所有说 $d(M)\le s(M)$。
>
> 最后说明 $s(M)\le\dim(M)$：
>
> 由于 $\dim(M)$ 已经是有限的了我们对 $n=\dim(M)$ 作归纳，如果 $n\ge 1$ 取 $\operatorname{supp}(M)$ 中的极小素理想 $\mathfrak{p}_i$ 使得 $\dim(A/\mathfrak{p}_i)=n$ 这些 $\mathfrak{p}_i$ 作为 $\operatorname{supp}(M)$ 的极小素理想只有有限个，而且都不是极大理想，所以利用之前提到的覆盖性质，有 $x\in\mathfrak{m}-\bigcup_i\mathfrak{p}_i$
>
> （覆盖性质，不妨对 s 归纳，当 $s=1$ 时显然成立，设 $s-1$ 时成立取 $y_i\in\mathfrak{m}-\bigcup_{j\neq i}\mathfrak{p}_j$ 这里取 $i=1,\ldots,s$ 那么如果有某一个 $y_{i_0}\notin\mathfrak{p}_{i_0}$ 那么我们就找到了这样的元素 y_{i_0}，否则每一个 $y_i\in\mathfrak{p}_i$ 我们取 $y=\sum_{1\le i\le s}y_1\cdots\hat{y_i}\cdots y_s$ （上标尖角表示删去那个元素）是 $\mathfrak{m}-\bigcup_{1\le j\le s}\mathfrak{p}_j$ 中元素），
>
> 利用我们在证明最开始的观察，得到 $s(M)\le s(M/xM)+1$ 和 $\dim(M/xM)\le\dim(M)-1$。由归纳假设我们知道 $s(M)\le s(M/xM)+1\le\dim(M/xM)+1\le\dim(M)$。所以对所有的 M 都有 $s(M)\le\dim(M)$。

维数定理联系了克鲁尔维数，模的长度和诺特维数，有很重要的应用，例如：

> **推论（Krull 主理想定理）** 设A是一个诺特环，x 不是可逆元，那么主理想 (x) 的每一个极小素理想的高度都小于等于1，特别地如果 x 是一个正则元那么我们有 (x) 的每一个极小素理想的高度就是1。更一般地如果 A 中的一个理想 $\mathfrak{a}$ 有限生成，$\mathfrak{a}=(a_1,\ldots,a_r)$，那么对于 $\mathfrak{a}$ 中的极小素理想 $\mathfrak{p}$，其高度小于等于 r。
>
> 证明：这次我们利用维数定理，不同于直接证明的启发性。我们关于 $\mathfrak{p}$ 作局部化有在 $A_{\mathfrak{p}}$ 中由 $a_1,\ldots,a_r$ 的象生成的理想是 $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$-准素的，那么利用维数定理中关于 $\operatorname{ht}(\mathfrak{m})\ge\delta(A)$ 的证明可知 $r\ge\dim(A_{\mathfrak{p}})=\operatorname{ht}(\mathfrak{p})$。至于严格相等的部分利用反向的不等式也容易得到。

下面的推论说明诺特局部环的完备化不改变维数。

> **推论（完备化保持维数不变）** 如果 A 是一个诺特局部环，m 是其唯一的极大理想，那么记 $\hat{A}$ 是其m-完备化，我们有维数不变的关系：
>
> $$\dim(A)=\dim(\hat{A})$$
>
> 证明：我们知道特征多项式的次数是不依赖于完备化的（完备化后的唯一的极大理想就是原来极大理想的完备化，而且 $\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}\simeq A/\mathfrak{m}$），利用维数定理得到结论。

利用维数定理也很容易知道诺特环的素谱空间有诺特性质。

> **推论（诺特环的素理想也满足降链的有限性条件）** 诺特环的素谱空间有有限的Krull维数。
>
> 证明：作局部化并且利用维数定理，准素理想总是有限生成的，所以命题成立。

维数定理还可以刻画商环维数的变化。

> **推论（商环的维数）** 设 A 是一个诺特局部环，x 是其唯一的极大理想 m 中的一个元素且不是零因子，那么 $A/(x)$ 是诺特局部环而且 $\dim(A/(x))=\dim(A)-1$ 。
>
> 证明：利用维数定理里的关于希尔伯特特征的次数的刻画我们知道 $\dim(A/(x))\leq\dim(A)-1$ 而考察如果有$x_1,...,x_d\in A$ 在 $A/(x)$ 中的象生成了一个 $\mathfrak{m}/(x)$-准素理想，那么 $x_1,...,x_d,x$ 在 A 中生成了一个 $\mathfrak{m}$-准素理想这时有反向的不等式成立：$\dim(A/(x))\geq\dim(A)-1$，故得证。

关于诺特局部环的维数定理自然地引发出**参数系**的概念，我们称 $x_1,...,x_d$ 是一个 d 维诺特局部环的一个参数系当它们生成了 A 的一个 $\mathfrak{m}$-准素理想。如果 A 还是分次环而且这些$x_1,...,x_d$ 还是齐次元，则称为**齐次参数系**。

参数系的概念和代数几何中的一些问题有联系。

诺特局部环上的有限生成模的同调维数

下面我们给出诺特局部环上模的同调维数的一般概念。

> **投射模** 我们称一个左R-模 M （我们这里的模都是考虑的左模，而关于右 R-模也可以类似定义）是投射模：
>
> 如果对于任何左R-模满同态 $p:A\to A'$ 和任何模同态 $f:M\to A'$ 都有关于 f 的拉回 $\tilde{f}:M\to A$ 使得 $p\circ\tilde{f}=f$。

对偶地定义一个完全对称的概念。

> **内射模** 我们称一个左R-模 M （我们这里的模都是考虑的左模，而关于右 R-模也可以类似定义）是内射模：
>
> 如果对于任何左R-模单同态 $i:A\to A'$ 和任何模同态 $f:A\to M$ 都有关于 f 的推出 $\tilde{f}:A'\to M$ 使得 $\tilde{f}\circ i=f$。

自由模到某一个模的映射完全由自由模的一组基来决定，我们只需要在这组基上适当安排提升或者延拓就能得到：1.所有自由模都是投射模。2.所有自由模都是平坦模。

对于没有投射性质或者内射性质的模通常需要用消解链（resolution）来研究。

> **投射消解** 一个关于 A-模 M 的投射消解是一些投射 A-模 $\{P_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 构成的正合列：
>
> $$...\to P_n\to...\to P_1\to P_0\to M\to 0$$

> 通常我们记成 P_M 。

> **内射消解** 根据上面类似地定义，一个关于 A-模 N 的投射消解是一些内射 A-模 $\{I_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 构成的正合列：
>
> $$0\to N\to I_0\to I_1\to\ldots\to I_n\to\ldots$$
>
> 通常我们记成 I_N 。

回避掉一般的导出函子的定义我们直接来定义下面的代数结构。

> **Tor和Ext的定义** 如果取特殊的协变函子和反变函子我们可以得到不同的导出函子，而这里取 $\mathrm{Hom}(\bullet,A)$ 的左导出函子和 $A\otimes_A\bullet$ 的右导出函子，我们可以得到一系列和同调群上同调群有关的结构，这里定义：
>
> $$\mathrm{Tor}_n^A(M,N):=\mathrm{H}_n(\mathbf{P}_M\otimes_A N),\quad \mathrm{Ext}_A^i(M,N):=\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}(M,\mathbf{I}_N))$$
>
> 这里 $\mathbf{P}_M\otimes_A N$ 代表链复形
>
> $$\ldots\to P_n\otimes_A N\to\ldots\to P_1\otimes_A N\to P_0\otimes_A N\to M\otimes_A N\to 0$$
>
> $\{P_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是某一个投射消解。
>
> $\mathrm{Hom}(M,\mathbf{I}_N)$ 代表链复形
>
> $$0\to\mathrm{Hom}(M,N)\to\mathrm{Hom}(M,I_0)\to\mathrm{Hom}(M,I_1)\to\ldots\to\mathrm{Hom}(M,I_n)\to\ldots$$
>
> $\{I_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是某一个内射消解。

我们需要下面的性质保证上面的定义良好和可计算。

> **良定义（Tor和Ext的定义不依赖于消解方式的选择）** 设两个不同的投射消解为 P_A^1 和 P_A^2 ，通过他们计算出的 $\mathrm{Tor}_i^A(M,A)$ 是同构的，类似地设两个不同的内射消解为 I_A^1 和 I_A^2 ，通过他们计算出的 $\mathrm{Ext}_A^i(A,M)$ 也是同构的。这样我们可以通过选择简单的消解方式来简化 Tor 和 Ext 的计算。
>
> 证明：我们将一般的同调代数的方法特殊化到有限生成的模的范畴里，首先我们说明有限生成模有投射消解，甚至是自由消解（自由模都是投射模，而且是平坦模）：将一个有限生成模看成自由模 A^n 的商模，从而将短正合列延长成一个自由消解链。至于内射模的存在性，引用结论"任何 A-模可以嵌入一个内射模"。
>
> 然后我们可以利用消解链上每一个模的投射性质和内射性质做出同伦链的同伦方程：
>
> 最后我们回顾同调群和上同调群的同伦不变性，得到上述定义的合法性。

之所以用同调的语言描述维数，在于下面的重要的诱导长正合列的性质。

> **短正合列诱导的长正合列** 设 $0\to M'\to M\to M''\to 0$ 是一个有限生成的右（左）A-模的短正合列，对于每一个左（右）A-模 N 我们会分别诱导出以下两个长正合列：
>
> 关于左导出函子：
>
> $$\ldots\to\mathrm{Tor}_{i+1}^A(M',N)\to\mathrm{Tor}_{i+1}^A(M,N)\to\mathrm{Tor}_{i+1}^A(M'',N)\to\mathrm{Tor}_i^A(M',N)\to\mathrm{Tor}_i^A(M,N)\to\ldots$$
> $$\to\mathrm{Tor}_1^A(M',N)\to\mathrm{Tor}_1^A(M,N)\to\mathrm{Tor}_1^A(M'',N)\to M'\otimes_A N\to M\otimes_A N\to M''\otimes_A N\to 0$$
>
> (
>
> $$\ldots\to\mathrm{Tor}_{i+1}^A(N,M')\to\mathrm{Tor}_{i+1}^A(N,M)\to\mathrm{Tor}_{i+1}^A(N,M'')\to\mathrm{Tor}_i^A(N,M')\to\mathrm{Tor}_i^A(N,M)\to\ldots$$
> $$\to\mathrm{Tor}_1^A(N,M')\to\mathrm{Tor}_1^A(N,M)\to\mathrm{Tor}_1^A(N,M'')\to N\otimes_A M'\to N\otimes_A M\to N\otimes_A M''\to 0$$

>)
>
> 关于右导出函子：
>
> $$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}(N, M') \to \mathrm{Hom}(N, M) \to \mathrm{Hom}(N, M'') \\ \to \mathrm{Ext}^1_A(N, M') \to \mathrm{Ext}^1_A(N, M) \to \mathrm{Ext}^1_A(N, M'') \to \dots \\ \to \mathrm{Ext}^i_A(N, M') \to \mathrm{Ext}^i_A(N, M) \to \mathrm{Ext}^i_A(N, M'') \to \mathrm{Ext}^{i+1}_A(N, M') \to \mathrm{Ext}^{i+1}_A(N, M) \to \dots \end{aligned}$$
>
> （
>
> $$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}(M'', N) \to \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M', N) \\ \to \mathrm{Ext}^1_A(M'', N) \to \mathrm{Ext}^1_A(M, N) \to \mathrm{Ext}^1_A(M', N) \to \dots \\ \to \mathrm{Ext}^i_A(M'', N) \to \mathrm{Ext}^i_A(M, N) \to \mathrm{Ext}^i_A(M', N) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_A(M'', N) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_A(M, N) \to \dots \end{aligned}$$
>
>)
>
> 证明：这不过是对于同调群和上同调群（同调函子和上同调函子）的短正列诱导长正合列的结论的特殊化。

> **局部化和导出函子的交换性**
>
> 如果p是A的一个素理想，M，N是有限型A模，那么下面的关系成立：
>
> $$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^i_A(M, N)_p \simeq \mathrm{Ext}^i_{A_p}(M, N) \\ \mathrm{Tor}^A_i(M, N)_p \simeq \mathrm{Tor}^{A_p}_i(M, N) \end{aligned}$$
>
> 证明：这个证明冗长而且乏味，为了简洁性不妨略过。

下面我们将利用张量函子和同态函子的导出函子来推广模的维数。

首先定义一个模的投射维数，抽象来看这个量表示了模的“不自由”程度，设 A 是一个诺特局部环，m 是其唯一的极大理想，$k := A/m$ 是其典范的剩余域，那么剩余域是左A-模也是右A-模，对于一个左A-模我们定义下面的两个量：

内射维度（投射深度）：$\mathrm{Idim}_A(M)\quad(\mathrm{dp}_A(M))\quad := \sup\{n : \mathrm{Ext}^n_A(M, N) \neq 0 \quad \exists N\}$

投射维数：$\mathrm{Pdim}_A(N) := \sup\{n : \mathrm{Tor}^A_n(M, N) \neq 0 \quad \exists M\}$

全局维数：$\mathrm{Globdim}(A) := \sup\{n : \mathrm{Ext}^n_A(M, N) \neq 0, \quad \exists M, N\}$

这里参考了Serre的局部代数一书，书中的定义和课上给出的定义有些不同，课上将投射深度定义成

$$\sup\{n : \mathrm{Ext}^n_A(M, k) \neq 0\}$$

把投射维数定义成

$$\sup\{n : \mathrm{Tor}^A_n(k, M) \neq 0\}$$

这显然会比Serre的书中定义的同调维数小一些，但是它们细致的关系并没有仔细考察，注意这时课上的相关结论在这里都是成立的。

类似我们给出一些关于同调维数的刻画。

> **定理（维数关系）** 设 A 是全局维数有限的局部环，那么对于所有有限生成 A-模我们有下面的关系：
>
> $$\mathrm{Idim}_A(M) + \mathrm{Pdim}_A(M) = \mathrm{Globdim}(A)$$

这里我们称一个交换环是正则的当它具有有限的全局维数（Serre在局部代数书中的定义）。

> **定理（维数关系）** 设 A 正规（全局维数有限），那么其全局维数等于克鲁尔维数。即
>
> $$\mathrm{Globdim}(A)=\dim(A)=\sup\{\mathrm{ht}(\mathfrak{m}):\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}(A)\}$$
>
> 这也说明了同调维数和我们定义的自然维数的联系。

下面的定理说明了这两个同调维数在刻画诺特局部环上的模的性质时的作用。

> **定理（Serre）** 每一个投射维数有限的环的关于每一个素理想的局部化是正则局部环。

利用同调维数可以给出正规环的著名判别法。

> **定理（Serre-Krull判别法）** 一个诺特局部环 A 是正规的当且仅当以下两个条件成立：
>
> （1）任一A 中的的高度小于 1 的素理想 $\mathfrak{p}$ ，局部环 $A_{\mathfrak{p}}$ 是正则环
> （2）如果 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})\geq 2$ 那么作为 A-模有 $\mathrm{Idim}_A(A_{\mathfrak{p}})\geq 2$
>
> 进而每一个正则环都是正规的。

4. 完备局部环的结构定理

拥有了来自多项式理论和同调方法的一些工具后让我们再回到交换代数理论的中心问题上来：对交换代数结构的分类。代数结构错综复杂，想要有一个统一的方法是几乎不可能的。分类的首要想法是对要分类的对象提一些良好的限制条件使得我们已知的工具可以使用，并且去掉那些极端恶劣的反例，比如对有限单群的分类，二维闭曲面的分类，代数闭域上的一般矩阵的若当标准型分类等等。限制条件的提出和分类方法的选择都需要十分艰难的尝试和猜测，所以数学中的分类定理往往重要稀有和困难。这里只详细讨论一类交换环的结构—即完备局部环的结构定理，离完全分类还有一定距离，但是这里的复杂性和理论的优美性很有启发意义。

Hensel引理

我们知道完备性的缺失会导致一些拓扑上的困难，这里我们限制讨论在完备局部环上，对于一般的环，商上的多项式提升到原来的环上的多项式通常不能保证一些好的性质的不变性（例如不可约性，容度等等）而下面的Hensel引理确保了我们可以在完备局部环的商环的多项式环上“较好”地选择适当的提升，使得原来商环上多项式的一些重要性质得到保持。

> **Hensel引理** 设 A 是一个完备局部环，$\mathfrak{m}$ 是其唯一的极大理想，$f(x)\in A[x]$ 是一个首一的n次多项式，对任何的A系数多项式 p 记 $\tilde{p}$ 为其系数商掉极大理想得到的同态象，如果存在互素的首一多项式 $g,h\in(\frac{A}{\mathfrak{m}})[x]$ 使得 $\tilde{f}(x)=g(x)h(x)$ ，那么就一定存在首一多项式 $G(x),H(x)\in A[x]$ 使得
>
> $$f(x)=G(x)H(x),\quad \tilde{G}(x)=g(x),\quad \tilde{H}(x)=h(x),\quad \deg(\tilde{H})=\deg(h)\quad \deg(\tilde{G})=\deg(g)$$
>
> 证明：首先证明一个引理：
>
> > 引理1：如果设 A 为交换环，$\mathfrak{m}$ 是 A 的一个理想，E,E',F 都是有限生成的 A-模，假设 $E,\ E',\ F$ 在滤子 $\left(\mathfrak{m}^iM\right)_{i\in\mathbb{N}}$ 诱导下的拓扑是豪斯多夫的，而且 A 是 $\mathfrak{m}$-完备的，如果 $f:E\times E'\to F$ 是一个双线性映射记 $\overline{f}$ 是模去理想的映射 $\overline{f}:E/\mathfrak{m}E\times E'/\mathfrak{m}E'\to F/\mathfrak{m}F$ 。取 $y\in F,\alpha\in E/\mathfrak{m}E,\alpha'\in E'/\mathfrak{m}E'$ 使得：
> >
> > $$y\equiv\overline{f}(\alpha,\alpha')\mod(\mathfrak{m}F)$$
> > $$F/\mathfrak{m}F=\overline{f}(\alpha,E'/\mathfrak{m}E')+\overline{f}(E/\mathfrak{m}E,\alpha')$$
> >
> > 那么存在 $a\in E,a'\in E'$ 使得
> >
> > $$\alpha=a\operatorname{mod}(\mathfrak{m}E)\quad \alpha'=a'\operatorname{mod}(\mathfrak{m}E')$$
> > $$y=f(a,a')$$

证明：对于滤子 $(\mathfrak{m}^i M)_{i\in\mathbb{N}}$ 作归纳。

如果存在 $a_n \in E, a'_n \in E'$ 使得
$\alpha = a_n \bmod(\mathfrak{m}E) \quad \alpha' = a'_n \bmod(\mathfrak{m}E') \quad y \equiv f(a_n, a'_n) \bmod(\mathfrak{m}^n F)$ 则我们下面归纳构造
$a_n \in E, a'_n \in E'$ 使得 （注意 $n=1$ 时由条件已经构造出 ）：
$\alpha = a_{n+1} \bmod(\mathfrak{m}E) \quad \alpha' = a'_{n+1} \bmod(\mathfrak{m}E') \quad y \equiv f(a_{n+1}, a'_{n+1}) \bmod(\mathfrak{m}^{n+1}F)$ 。

将 $y - f(a_n, a'_n) \in \mathfrak{m}^n F$ 写成 $y - f(a_n, a'_n) = \sum_j m_j z_j, m_j \in \mathfrak{m}^n z_j \in F$ 那么利用条件有 $\omega_j \in E$ 和 $\omega'_j \in E'$ 使得对于每一个 z_j：$z_j - f(a_n, \omega'_j) - f(\omega_j, a'_n) \in \mathfrak{m}F$ 这样我们有：

$$y - f(a_n + \sum_j m_j\omega_j, a'_n + \sum_j m_j\omega'_j) =$$

$$y - f(a_n, a'_n) - \sum_j m_j z_j + \sum_j m_j\{z_j - f(a_n, \omega'_j) - f(\omega_j, a'_n)\} - \sum_{i,j} m_i m_j f(\omega_i, \omega'_j)$$

在 $\mathfrak{m}^{n+1}F + \mathfrak{m}^{2n}F = \mathfrak{m}^{n+1}F$ 中，这样我们令
$a_{n+1} = a_n + \sum_j m_j\omega_j, a'_{n+1} = a'_n + \sum_j m_j\omega'_j$ 就得到
$a_{n+1} \equiv a_n \quad \bmod(\mathfrak{m}^n E), \quad a'_{n+1} \equiv a'_n \quad \bmod(\mathfrak{m}^n E') \quad (n = 1, \ldots)$ ，这个时候把每一个 a_n 和 a'_n 写成关于 E 和 E' 的一组生成元的 A-系数线性组合 $\sum_j a_{nj}e_j$, $\sum_j a'_{nj}e'_j$，那么在某一个固定的生成元的系数 $\{a_{nj}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 和 $\{a_{nj}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 就构成了一个 A 中的柯西列，利用 A 完备就有对应的极限 b_j, b'_j，那么$\sum_j b_j e_j$

和 $\sum_j b'_j e'_j$ 就是 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 和 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 的极限，那么取 $a = \sum_j b_j e_j$ ，$a' = \sum_j b'_j e'_j$ 就满足要求。

利用这个引理我们将 E, E', F 都取成 $A[x]$ 那么取 $y = f(x), \alpha = g(x), \alpha' = h(x)$ ，双线性映射自然取成多项式的乘法，这自然地满足引理的第一个条件，而第二个条件来自于 g, h 互素并利用域上多项式的欧几里得除法，所以我们用上面引理得到 G, H 的存在性，而且注意到 G, H 取出来的首项系数都是可逆的而且它们互逆，于是简单除去首项系数我们就得到了想要的首一的 G, H 。

利用Hensel引理我们得到如下推论。

推论1： 设 A 是一个完备局部环，m 是其唯一的极大理想，$f(x)$ 是 A 上首一的多项式，如果 $\tilde{f}(x)$ 在 $A/\mathfrak{m}$ 上有一个代数重数是1的零点 α ，那么这个零点可以提升到 A 上的 $f(x)$ 的某个代数重数是1的零点 a 。

证明：在 $(A/\mathfrak{m})[x]$ 写出 $\tilde{f}(x) = (x-\alpha)\phi(x)$ ，这里 $\phi(x) \in (A/\mathfrak{m})[x]$ 而且 $\phi(x)$ 和 $x - \alpha$ 互素，利用上面的Hensel引理我们可以得到一个 $x - \alpha$ 的提升具有 $x - a$ 的形式，这时有 $f(a) = 0$ ，如果 a 是 $f(x)$ 的重根那么投射到剩余类域上就会得到 α 也是一个重根，矛盾。所以定理得证。

推论2： 设 A 是一个完备局部环而且具有和其剩余类域相等的特征（即 $\mathrm{char}(A) = \mathrm{char}(A/\mathfrak{m})$ ），那么 A 中包含一个子域 L 使得 $A/\mathfrak{m}$ 是 $L/L\cap\mathfrak{m}$ 纯不可分扩张。

证明：首先记 $\phi: A \to A/\mathfrak{m}$ 是典范的商映射，首先A 中至少包含一个域：$\mathbb{Z}1_A \subset A$ 如果 $\mathrm{char}(A) \neq 0$ 那么 $\mathbb{Z}1_A$ 是一个数域，如果 $\mathrm{char}(A) = 0$ 而且 $\mathrm{char}(A/\mathfrak{m}) = 0$ 我们有 $\mathbb{Z}1_A - \{0\}$ 是在环中可逆的，即 A 包含一个同构于有理数的数域。接下来利用Zorn引理我们得到一个 A 中子数域的极大元 L 。

如果说 $A/\mathfrak{m}$ 在 $\phi(L)$ 上是超越扩张那就存在 $\phi(x)$ 是 $\phi(L)$ 上超越元，那么 $L[x] \cap \mathfrak{m} = \emptyset$ 这时候就有 A 包含 L 系数的关于 x 的有理函数域 $L(x)$ 这与 L 极大矛盾。

> 那么 $A/\mathfrak{m}$ 是 $\phi(L)$ 的代数扩张，如果说 $\eta \in A/\mathfrak{m}$ 是一个 $\phi(L)$ 上的可分元，我们写出其在 $\phi(L)$ 上极小多项式：
>
> $$f(y)=y^n+\beta_{n-1}y^{n-1}+\ldots+\beta_0,\ \beta_i\in\phi(L),\ i=1,\ldots,n$$
>
> 利用可分性质可知 η 是 $\overline{f}$ 在 $A/\mathfrak{m}$ 上的代数重数是一的根，那么利用上面的推论1我们把这个零点提升到 A 中去，利用极大性和商映射限制在极大域上是同构我们得到这个提升上去的零点还在 L 中，矛盾。所以说这是一个纯不可分的扩张。

Cohen结构定理（完备局部环的结构）

我们现在考虑一个完备局部环的结构，这类环可以通过完备化和局部化得到，也有一些具体的例子，这里采取一种比较古典的方式证明，首先给出一些概念。

我们称一个局部环是**等特征**的（equicharacterisitic）当其特征和其剩余域特征相等即 $\mathrm{char}(A)=\mathrm{char}(A/\mathfrak{m})$ 这里$\mathfrak{m}$ 为唯一的极大理想。根据Hensel引理一个局部环是等特征的当且仅当它包含一个数域。

引入**表示域**（representative field）的概念：一个局部环 A 的表示域是包含在 A 中的一个数域，它在典范的商映射 $\pi: A\to A/\mathfrak{m}$ 下映满 $A/\mathfrak{m}$ 。由于典范商映射限制在这样的表示域下是数域之间的满同态，所以这样的表示域都典范同构于 $A/\mathfrak{m}$ 。

这样我们可以叙述完备局部环的结构定理：

> **Cohen定理** 一个等特征的完备局部环一定有表示域。
>
> 证明：首先如果剩余域的特征是零，利用上面的Hensel引理的推论2可以找到一个表示域。故设特征非零。
>
> 我们首先证明一种特殊情况：$\mathfrak{m}^2=(0)$ 时：这时 $\mathfrak{m}^p=0,\quad p=\mathrm{char}(A/\mathfrak{m})$，令 $A^p=\{x^p: x\in A\}$ 是一个 A 的子环，如果 $x^p\neq 0$，有 $x\notin\mathfrak{m}$，局部环的极大理想是其所有极大理想的交集所以我们知道这时 x 在 A 中是可逆的，所以我们得到 A^p 实际上是包含在 A 中的一个数域，利用Zorn引理我们从包含A^p 的数域选出一个极大数域 L 。我们下面证明在典范商映射$\pi: A\to A/\mathfrak{m}$ 下有 $\pi(L)=A/\mathfrak{m}$。 如果有 $\alpha\in A/\mathfrak{m}$ 而且$\alpha\notin\pi(L)$，由于 $\alpha^p\in\pi(A^p)\subset\pi(L)$ 可知其极小多项式是 $x^p-\alpha^p$。取某个 α 在 A 的代表元 a （$\pi(a)=\alpha$），那么 $x^p-\alpha^p$ 在 L 上不可约否则有某个 a_1 使得 $(a-a_1)^p=0$ 并且 $\pi(a_1)=\alpha$ 推出$\alpha\in\pi(L)$ 。这是便有 $L\subsetneq L[a]\subsetneq A$ 而且 $L[a]$ 是数域，这与 L 的极大性矛盾。
>
> 然后我们证明一般的情况：当 $p\geq 2$ 时 $A/\mathfrak{m}^2$ 的极大理想 $\bar{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 满足条件 $\bar{\mathfrak{m}}^p=0$ 所有根据上面的证明 $A/\mathfrak{m}^2$ 有一个表示域 K_2。下面我们归纳证明对每一个$A/\mathfrak{m}^n$ 都有一个表示域 K_n 。
>
> 令 $\psi_n: A/\mathfrak{m}^{n+1}\to A/\mathfrak{m}^n$ 是自然的商映射假设 K_n 已经构造出来，那么$\psi_n^{-1}(K_n)$ 是一个包含 $\ker(\psi_n)$ 的 $A/\mathfrak{m}^{n+1}$ 的子环，如果 $\xi\in\psi_n^{-1}(K_n),\quad \xi\notin\ker(\psi_n)$ 那么 $\xi'=\psi_n(\xi)\neq 0\in K_n$ 。由于 K_n 是数域所以这时 ξ' 在 K_n 上可逆推出 $\xi'\notin\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$ 那么 $\xi\notin\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{n+1}$ ，即 ξ 在 $A/\mathfrak{m}^{n+1}$ 上可逆，设 $\xi\eta=1\in A/\mathfrak{m}^{n+1}$ 而且 $\eta'=\psi_n(\eta)\in K_n$ 推出 $\eta\in\psi_n^{-1}(K_n)$ 所以说 ξ 在 $\psi_n^{-1}(K_n)$ 上可逆。注意到 $\ker(\psi_n)$ 是 $\psi_n^{-1}(K_n)$ 唯一的极大理想而且 $\ker(\psi_n)=\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1\,2}=\mathfrak{m}^{2n}/\mathfrak{m}^{n+1}=(0)$ 那么我们知道就存在着 $\psi_n^{-1}(K_n)$ 的一个表示域 K_{n+1} ，利用典范的商同态的性质我们知道 $\psi_n(K_{n+1})=K_n)$ 而且 K_{n+1} 是 $A/\mathfrak{m}^{n+1}$ 的表示域。
>
> 下面我们利用完备化条件，由于 A 是 $\left(A/\mathfrak{m}^n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ 的逆向极限所以说任意给出极限系统里的一个元素（一个柯西列）$\{\eta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足 $\eta_n=\psi_n(\eta_{n+1}), n=0,1,\ldots$ 都有唯一的 $y\in A$ 使得 $y-\eta_n\in\mathfrak{m}^n, n=0,1,\ldots$ 唯一性是来自于 $\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathfrak{m}^n=(0)$ 。现在如果取 $K_1=A/\mathfrak{m}$ 利用上面证明的表示域的关系我们对于任何的 K_1 中元素 η_1 取柯西列是 $\{\eta_i\}_{i\in\mathbb{N}},\eta_2=\psi_1^{-1}(\eta_1),\ldots,\eta_{n+1}=\psi_n^{-1}(\eta_n),\ldots$ 取那个唯一的表征这个柯西列的 A 中元素

> $u(\eta_1)$ 使得 $u(\eta_1)-\eta_n\in\mathfrak{m}^n, n=0,1,...$ 那么利用上面的结果和逆向极限系统的运算法则我们知道对于任何的 $\eta,\eta'\in A/\mathfrak{m}$ 都有
>
> $$u(\eta+\eta')=u(\eta)+u(\eta')\quad u(\eta\eta')=u(\eta)u(\eta')$$
>
> 而且注意 $u(A/\mathfrak{m})$ 是 A 的子环，讨论在每一个剩余类环的表示域的可逆元的情况告诉我们 $u(A/\mathfrak{m})$ 是 A 的子域，而且由这些映射的定义就能得到 $\pi(u(A/\mathfrak{m}))=A/\mathfrak{m}$ 所以$u(A/\mathfrak{m})$ 就是我们要找的表示域。

对于一般的完备局部环，Cohen还证明了更强的结果，现在陈述如下，首先需要预备一些概念。

系数环 令 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个完备局部环，一个子环 $\Lambda\subset R$ 称为一个系数环当其满足下面的几个条件：

(1) Λ 是一个完备局部环，其唯一的极大理想是 $\Lambda\cap\mathfrak{m}$

(2) $\Lambda/\Lambda\cap\mathfrak{m}\simeq R/\mathfrak{m}$ 而且 $\Lambda\cap\mathfrak{m}=p\Lambda$ 这里 $p=\mathrm{char}(A/\mathfrak{m})$

Cohen环 我们称一个完备的离散赋值环是一个Cohen环，当它有一个生成元为素数 p 的极大理想。

这样我们可以叙述如下的完备局部环的结构定理。

> **Cohen结构定理** 设 $(R,\mathfrak{m})$ 为一个完备局部环，则：
>
> (1) R有系数环。
>
> (2) 如果极大理想是有限生成的，那么有
>
> $$R\simeq\Lambda[[x_1,\dots,x_n]]/I$$
>
> 这里的 Λ 是一个数域或者是一个Cohen环。
>
> 证明：我们需要下面诸多引理。这个证明需要微分模等先进的概念，我没有读明白所以就给出梗概，具体的证明细节参考网站https://stacks.math.columbia.edu/。

不同于同调维数那部分关于正则性的定义我们这里称一个诺特局部环 A 是正则的如果 $d=\dim(\mathrm{A})$ 而且 A 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 可以由 d 个元素生成。生成极大理想的这样的 d 个元素构成的集合，叫做环 A 的一个**正则参数系**。

> **定理（等特征完备正则局部环的刻画）** 一个等特征的完备正则局部环 A 同构于一个数域上的形式幂级数环。
>
> 证明：利用上面的定理我们先取这样的表示域 K。 然后取一个正则参数系 $x_1,\dots,x_d$ 那么我们需要下面的引理来构造一个这样的形式幂级数环。
>
> > 引理1：$x_1,\dots,x_d$ 在 K 上代数无关，也解析无关。（即$K[[x_1,\dots,x_d]]$ 是 A 的子环）
> >
> > 证明：自然我们分两步证明。
> >
> > 代数无关：
> >
> > 如果有 K 系数的多元多项式 G 使得 $G(x_1,\dots,x_d)=0$ 如果我们取 G 的最低非常数齐次项的和 F 并且记 $\deg(F)=s$ 。那么利用 $G(x_1,\dots,x_d)=0$ 我们知道 $F(x_1,\dots,x_d)\in\mathfrak{m}^{s+1}$ 那么 F 的系数必须都在极大理想 $\mathfrak{m}$ 中，否则与生成元的极小个数矛盾。而其系数是在一个表示域 K 中所以都是零，矛盾。所以说 $x_1,\dots,x_d$ 在 K 上代数无关。
> >
> > 解析无关：
> >
> > 如果有一个非零的 K 上的形式幂级数 G 使得 $G(x_1,\dots,x_d)=0$ 那么把 G 写成齐次项的和即写成 $G=\sum_{j=s}^{\infty}F_j,\deg(F_j)=j,F_s\neq 0$ 那么这个时候就有

> > $$F_s(x_1,\dots,x_d)=-\sum_{j=s+1}^{\infty}F_j(x_1,\dots,x_d)\in\mathfrak{m}^{s+1}$$
> >
> > 利用和上面证明代数无关性一样的原因得到 F_s 的系数在 $\mathfrak{m}\cap K$ 中所以 $F_s=0$ 与假设矛盾。
>
> 这样我们得到了 $K[[x_1,\dots,x_d]]$ 是 A 的子环，取 $K[[x_1,\dots,x_d]]$ 的极大理想 $\mathfrak{M}$ 利用正则参数系的定义我们知道 $A\mathfrak{M}=\mathfrak{m}$ 那么利用表示域的定义我们知道如下关系：
>
> $$K[[x_1,\dots,x_d]]/\mathfrak{M}=K[[x_1,\dots,x_d]]/\mathfrak{m}\cap K[[x_1,\dots,x_d]]\simeq A/\mathfrak{m}$$
>
> 注意到 A 和 $K[[x_1,\dots,x_d]]$ 都是完备的，那么用完备化的诱导分次的结构就能证明
>
> $$A=K[[x_1,\dots,x_d]]$$

下面的定理在代数几何中有重要的作用，但是我并不是很清楚。

> **定理（正则性在局部化下保持）** 如果 A 是一个等特征的完备正则局部环，$\mathfrak{p}$ 是 A 的一个素理想那么 $A_{\mathfrak{p}}$ 是一个正则局部环。

> **定理** 设 A 是一个 d 维等特征诺特正则局部环，$\mathfrak{a}=(a_1,..,a_r)$ 是 A 的理想且使得 $\dim(A/\mathfrak{a})=d-r$ ，那么 $\mathfrak{a}$ 包含的素理想具有相同的高度。（$\mathfrak{a}$ 是非混合的。）

下面的定理说明了正则局部环的一些性质。

> **定理（唯一分解性质）** 一个等特征的正则局部环一定是唯一分解整环。
>
> 证明：我们参考Zariski的证明，由于我们证明了等特征的完备局部环一定有表示域，那么设定理里的等特征的正则局部环是 A ，那么 A 的 m-完备化 $\hat{A}$ 是一个等特征的完备局部环，所以 $\hat{A}$ 是一个域（表示域）上的幂级数环（定理（等特征完备正则局部环的刻画）），我们这里的证明是古典的，首先证明一个类似于多项式的欧几里得除法的Weierstrass引理：
>
> > 引理1：设 k 为数域，$F\in k[[x_1,\dots,x_n]]$ 不可逆且有 ax_n^s 的单项式（$a\neq 0$），那么对于任何 $G\in k[[x_1,\dots,x_n]]$ ，都存在 $U\in k[[x_1,\dots,x_n]]$ 和 $R_0,..,R_{s-1}\in k[[x_1,\dots,x_{n-1}]]$ 使得下面的欧几里得除法式成立：
> >
> > $$G=UF+\sum_{i=0}^{i=s-1}R_ix_n^i$$
> >
> > 而且 $U,R_0,\dots,R_{s-1}$ 选择是唯一的。
> >
> > 证明：我们把任何的幂级数关于最后一个变元分次，写成
> >
> > $$G=r(G)+X_n^sh(G)$$
> >
> > 这样映射 $G\to r(G)$ 和 $G\to h(G)$ 都是 k-线性的。由于 $F=ax_n^s+\dots,a\neq 0$ 所以说 $h(F)$ 可逆，（逆可以迭代写出来）而且 $r(F)$ 的系数在 $k[[x_1,\dots,x_n]]$ 中，记 $\mathfrak{m}$ 是包含这些系数的一个 $k[[x_1,\dots,x_n]]$ 的极大理想，我们就只需要找到一个形式幂级数 U 使得 $h(G)=h(UF)$ 。一方面我们有
> >
> > $$UF=Ur(F)+x_n^sUh(F)$$
> >
> > 我们就只需找到 U 满足 $h(G)=h(Ur(F))+Uh(F)$ 。注意 $h(F)$ 可逆，我们只需要找到 V 满足这样的关系，$V=Uh(F)$ ，令 $M=-r(F)[h(F)]^{-1}$ ，上面的条件就变成 $h(G)=h(MV)+V$ 。那么注意到 $G\to m(G)=h(MG)$ 还是一个线性映射，注意到 M 不可逆，那么如果 P 看作 x_n 的幂级数的系数都在 $\mathfrak{m}^j$ 中那么 $m(P)$ 的系数都在 $\mathfrak{m}^{j+1}$ 中我们只需要找到 V 满足：
> >
> > $$V=h(G)+h(MV)$$

不断利用线性性质得到对于 $q \geq 0$，都有：

$$V = h(G) + m(h(G)) + m^2(h(G)) + \ldots + m^q(h(G)) + m^{q+1}(V)$$

注意到 $m^j(h(G))$ 的最低单项式次数至少是 j，$m^{q+1}(V)$ 的最低单项式次数至少也是 $q-1$ 那么这样的 V 只能是 $h(G) + m(h(G)) + m^2(h(G)) + \ldots + m^n(h(G)) + \ldots$ 而这个幂级数显然满足方程，所以我们找到了唯一的 U

$$U = [h(F)]^{-1}(\sum_{i=0}^{\infty} m^i(h(G)))$$

进而 $R_0, .., R_{s-1}$ 也是通过 $G - UF$ 唯一决定的。

由此我们可以得到：

引理2：数域上的形式幂级数环是唯一分解整环。（所以上面得到的 $\hat{A}$ 是唯一分解整环）

证明：我们知道 $k[[x_1, ..., x_n]]$ 是诺特环

（诺特环系数的形式幂级数环都是诺特环，简述原因，取 A 是诺特环，$\mathfrak{a}$ 是 $A[[x]]$ 的一个理想，

取一族 A 中的理想 $\mathfrak{L}_i(\mathfrak{a})$ 定义成包含 (0) 和 $\mathfrak{a}$ 中以 x_i 单项式为首项的系数的集合，那么有包含关系$\mathfrak{L}_0(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{L}_1(\mathfrak{a}) \subset \ldots \subset \mathfrak{L}_n(\mathfrak{a}) \subset \ldots$ 取 $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}) = \bigcup_i \mathfrak{L}_i(\mathfrak{a})$ 是 A 的理想我们有其生成元记成（有限个）$a_1, \ldots, a_q$，取一些 $F_i \in A[[x]]$ 使得 F_i 的首项系数就是 a_i。设这些 F_i 的首项的最高次数是 d，取 $\{b_{j1}, \ldots, b_{jn(j)}\}$ 生成 $\mathfrak{L}_j(\mathfrak{a})$ $(0 \leq j < d)$，同样取一些 $G_{jk} \in A[[x]]$ 使得其首项系数就是 b_{jk} $(0 \leq j < d, 1 \leq k \leq n(j))$ 下面说明我们选出的 $\{F_i, G_{jk}\}_{1 \leq i \leq q, 0 \leq j < d, 1 \leq k \leq n(j)}$ 就生成了 $\mathfrak{a}$。

首先对于每一个 $P \in A[[x]]$ 如果 P 的首项次数 s 小于 d 那就存在一些 $\{G_{sk}\}_{k \leq n(s)}$ 的 A 系数线性组合使得其具有和 P 一样的首项式，作差使得差的首项式的次数升高 1，这样下去我们就会有两个多项式的差值 $P - \sum_{j=s}^{j=d-1} \sum_{k=1}^{k=n(j)} c_{jk} G_{jk}$ 的首项次数大于等于 d。接下来用同样的策略一步步用 F_i 的多项式系数组合来升高首项次数，最终得到

$$P = \sum_{j=s}^{j=d-1} \sum_{k=1}^{k=n(j)} c_{jk} G_{jk} + \sum_{i=1}^{i=q} R_i F_i,\ R_i \in A[[x]]$$

所以说 $\mathfrak{a}$ 有限生成那么 $A[[x]]$ 是诺特环，归纳可知 $A[[x_1, .., x_d]]$ 也是诺特环。）

所以现在只需要证明 $k[[x_1, \ldots, x_n]]$ 中的不可约元素都是素元。我们取 $F \in k[[x_1, \ldots, x_n]]$

是一个不可约元，我们只需要证明主理想 (F) 是素理想，如果$GH \in (F)$，设 $GH = DF$，我们不妨设 F 非零那么其最低次的单项式构成的齐次式 F_q 也不是零，记这个齐次式的次数是 q 那么有 k^n 中的一个点$(a_1, .., a_{n-1}, 1)$ 使得 $F_q(a_1, .., a_{n-1}, 1) \neq 0$，自同构 $x_i \to x_i + a_i x_n, i = 1, .., n-1, x_n \to x_n$ 使得平移后n的 F 有最低次数的单项式构成的齐次式包含一个 $F_q(a_1, .., a_{n-1}, 1)x_n^q$ 的单项式，而注意到这个自同构保持最后一个变元和幂级数环的唯一分解性质那么我们不妨假设 G, H, D, F 都含有一个这种非零的关于 x_n 的幂次的单项式而且都不可逆，那么利用维尔斯特拉斯的除法定理我们取被除式是对应的 x_n 的幂次，除式分别是 G, H, D, F，得到唯一的 $G^*, H^*, D^*, F^* \in k[[x_1, \ldots, x_n]]$ 使得

$$GG^* = G' = x_n^{s(G)} + R_{s(G)-1}^G x_n^{s(G)-1} + \ldots + R_0^G$$
$$HH^* = H' = x_n^{s(H)} + R_{s(H)-1}^H x_n^{s(H)-1} + \ldots + R_0^H$$
$$DD^* = D' = x_n^{s(D)} + R_{s(D)-1}^D x_n^{s(D)-1} + \ldots + R_0^D$$
$$FF^* = F' = x_n^{s(F)} + R_{s(f)-1}^F x_n^{s(f)-1} + \ldots + R_0^F$$
$$R_k^G, R_k^H, R_k^D, R_k^F \in k[[x_1, \ldots, x_{n-1}]]$$

> 把前 $n-1$ 个未定元设成 0 我们知道这些 G^*,H^*,D^*,F^* 可逆而且这些 $R_k^\bullet$ 是不可逆的，那么我们由唯一性会有 $G'H'=D'F'$ 。如果把 F' 看作是 $k[[x_1,\dots,x_{n-1}]][x_n]$ 的一个不可约多项式，如果 $n=1$ 我们就可以用一个 k 上不可约多项式 F' 来换掉 F （$(F)=(F')$）,这样就可以利用数域上的多项式环都是唯一分解整环得到 $k[[x]]$ 是唯一分解整环，那么我们不妨对 n 作归纳，假设 $k[[x_1,\dots,x_{n-1}]]$ 是唯一分解整环，利用环论里基本结论知道一个唯一分解整环的多项式环也是唯一分解的得到 $k[[x_1,\dots,x_{n-1}]][x_n]$ 是唯一分解整环，那么这样 G' 或 H' 是 F' 的倍数，自然地有 G 或 H 在主理想 (F) 里面，从而 F 是素元，进而归纳得到一切 n 为正整数，$k[[x_1,\dots,x_n]]$ 是唯一分解整环。（诺特性质保证了不可约分解的有限性，不可约元是素元保证了分解的唯一性。）

为了证明 A 是唯一分解整环我们只需要说明下面的定理成立。

> 引理3：如果一个局部整环 A 的完备化（$\mathfrak{m}$-完备化）是一个唯一分解整环，那么 A 本身也是唯一分解整环。
>
> 证明：只需说明每一个 A 的极小素理想 $\mathfrak{p}$ 是主理想（因为这样如果说 b 是 A 中的不可约元则 (b) 包含在某个极小素理想 (c) 中，而由于这时 b 是 c 的倍数而且 b 不可约所以有 $(b)=(c)$ 所以说 b 是素元。这样诺特条件保证了不可约的分解的有限性，不可约元都是素元保证了这样的分解的唯一性，所以是唯一分解整环。）那么我们只需要证明 $\hat{A}\mathfrak{p}$ 是主理想。
>
> 若 $\hat{A}\mathfrak{p}=\hat{A}a',a'\in\hat{A}$ ，取一组基 $\{b_1,\dots,b_n\}$ 生成素理想 $\mathfrak{p}$：
>
> 有 $b_i=a'b_i',b_i'\in\hat{A}$ 这时 $a'=\sum_i c_i'b_i=(\sum_i c_i'b_i')a',c_i'\in\hat{A}$ 由于 $\hat{A}$ 是整环，那么 $\sum_i c_i'b_i'=1$ ，注意到 $\hat{A}$ 是局部环所以至少有某一个（不妨写成）b_1' 可逆，所以说 $\hat{A}\mathfrak{p}=\hat{A}a'=\hat{A}b_1b_1'^{-1}=\hat{A}b_1$ 那么利用完备化的性质我们就有 $\mathfrak{p}=\hat{A}\mathfrak{p}\cap A=\hat{A}b_1\cap A=Ab_1$ 。
>
> 而 $\hat{A}$ 是唯一分解整环，我们就只需要证明所有 $\hat{A}\mathfrak{p}$ 的高度是一，可以经过诱导分次的方法转化成证明 $\mathfrak{p}\hat{A}_\mathfrak{p}$ 的所有诱导素理想的高度为一。
>
> 注意到 A 是整闭的，因为如果设 K 是 A 的分式域利用完备化的完备化的性质得到 $A=\hat{A}\cap K$ 所以有如果 $x/y\in\hat{A}\cap K$ 那么就有 $x/y\in A$。在注意到 $\hat{A}$ 是唯一分解整环是整闭的，所以得到 A 整闭。
>
> 而 $A_\mathfrak{p}$ 是一个一维整闭的局部环，是离散赋值环，那么 $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ 是一个主理想，进而 $\mathfrak{p}\hat{A}_\mathfrak{p}$ 也是主理想，利用 $\hat{A}_\mathfrak{p}$ 整闭（分式化不改变整闭性质），可以知道 $\mathfrak{p}\hat{A}_\mathfrak{p}$ 的所有诱导素理想的高度为一，所以引理成立。

所以说 A 是一个唯一分解整环。