一个对角超平面均值的凸性不等式

柴昊 chai199905@163.com

摘要

本文主要阐明一个关于对角超平面上均值与各投影均值的不等式，这个不等式表现出某种凸性。为解释证明思路在论证中添加了一些图。本文最后部分给出该不等式连续情形的推广猜想，并且尝试给出这一猜想的正确性证明。

目录

1 主要结论

有一个看起来较为简单的论断如下：

> **算术级数性质** 对于有限实数序列 $\mathbf{a} := \{a_0, .., a_m\}$, $\mathbf{b} = \{b_0, .., b_n\}$, $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 则其满足
>
> $$\frac{1}{m+n+1}\sum_{k=0}^{k=m+n} c_k \geq \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{i=m} a_i + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{j=n} b_j, \quad c_k = \max_{i+j=k}\{a_i + b_j\} \tag{C0}$$
>
> 上式等号成立当且仅当 $a_i + b_j = a_{i'} + b_{j'},\ \forall i, i', j, j',\ i+j = i'+j'$

证明. 记 $[m] := \{0, .., m\}$ 在整数格点 $\mathbb{Z}^2$ 上考虑如下从原点到 (m, n) 的 "凸折线" 构成的集合

$$\Gamma_{(m,n)} := \left\{ \gamma : [m+n] \to [m] \times [n] \,\middle|\, \begin{array}{l} \gamma(0) = (0,0), \qquad \gamma(m+n) = (m,n) \\ \forall t \in [m+n], \gamma(t+1) - \gamma(t) = (1,0) \text{或} (0,1) \end{array} \right\} \tag{Def1}$$

考虑在 $m+n$ 中选择 n 个向上的向量 $(0,1)$ 或 m 个向右的向量 $(1,0)$ 得到

$$\left|\Gamma_{(m,n)}\right| = \binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}$$

进一步考虑在 $\Gamma_{(m,n)}$ 中经过点 (p,q), $0 \leq p \leq m$, $0 \leq q \leq n$ 的那些路径集合记为 $\Gamma_{(m,n)}^{(p,q)}$ 同样可以计算出其基数

$$\Gamma_{(m,n)}^{(p,q)} := \left\{ \gamma \in \Gamma_{(m,n)} \,\middle|\, \gamma(p+q) = (p,q) \right\} \quad \left|\Gamma_{(m,n)}^{(p,q)}\right| = \binom{p+q}{p}\binom{m+n-p-q}{m-p}$$

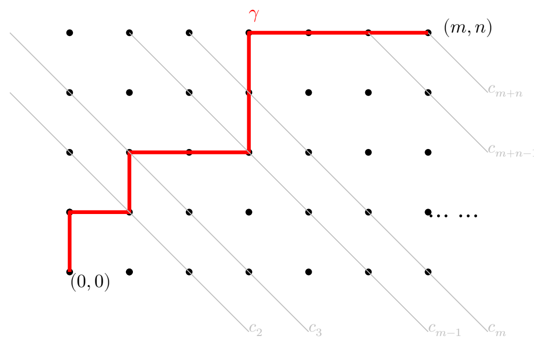

图 1: γ 作为 $\Gamma_{(m,n)}$ 中的折线与 $m+n+1$ 条对角线均交于一点

对每一个路径 γ 其 $m+n+1$ 个取值点恰好经过每一条对角线如下图所示。

由定义 $c_k \geq a_i + b_j$, $(i,j) = \gamma(k), \forall k = 0,..,m+n$, $\gamma \in \Gamma_{(m,n)}$。于是对所有 $\Gamma_{(m,n)}$ 上的路径求和得到

$$\sum_{k=0}^{k=m+n} c_k \geq \sum_{\substack{0\leq k\leq m+n \\ \gamma(k)=(i,j)}} (a_i + b_j), \quad \forall \gamma \in \Gamma_{(m,n)}, \tag{aux0}$$

$$\Rightarrow \left|\Gamma_{(m,n)}\right| \sum_{k=0}^{k=m+n} c_k \geq \sum_{\substack{0\leq k\leq m+n \\ \gamma(k)=(i,j)}} \sum_{\gamma\in\Gamma_{(m,n)}} (a_i + b_j) \tag{aux1}$$

辅助等式(aux1)右端的 a_i 在每一条经过点 $(i,0),..,(i,n)$ 的 $\Gamma_{(m,n)}$ 中路径上均被计数一次，b_j 类似，右端对 a_i, b_j 的计数重数是

$$N(a_i) = \sum_{j=0}^{j=n} |\Gamma_{(m,n)}^{(i,j)}| = \sum_{j=0}^{j=n} \binom{i+j}{j}\binom{m+n-i-j}{n-j} = \binom{m+n+1}{m+1}$$
$$N(b_j) = \sum_{i=0}^{i=m} |\Gamma_{(m,n)}^{(i,j)}| = \sum_{i=0}^{i=m} \binom{i+j}{j}\binom{m+n-i-j}{m-i} = \binom{m+n+1}{n+1}$$
$$\forall 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n,\ i,j \in \mathbb{Z}, \qquad (\text{应用下述引理中组合恒等式(S)})$$

代入得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{k=m+n} c_k &\geq \sum_{\substack{0\leq k\leq m+n \\ \gamma(k)=(i,j)}} \sum_{\gamma\in\Gamma_{(m,n)}} (a_i + b_j) = \sum_{i=0}^{i=m} N(a_i) a_i + \sum_{j=0}^{j=n} N(b_j) b_j \\ &= \frac{\binom{m+n+1}{m+1}}{\binom{m+n}{m}} \sum_{i=0}^{i=m} a_i + \frac{\binom{m+n+1}{n+1}}{\binom{m+n}{n}} \sum_{j=0}^{j=n} b_j = \frac{m+n+1}{m+1} \sum_{i=0}^{i=m} a_i + \frac{m+n+1}{n+1} \sum_{j=0}^{j=n} b_j\end{aligned} \tag{aux2}$$

两侧除去系数即得题目不等式。等号成立当且仅当式(aux1)取等，即任何对角线上 $a_i + b_j$ 为常值，即

$$a_i + b_j = c_k, \quad \forall i+j = k, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$$

引理 1.0.1 (Extend Fermat Relation)**.** 有如下组合恒等式

$$\sum_{k=0}^{k=l} \binom{a+k}{k}\binom{r+l-k}{l-k} = \binom{a+r+l+1}{l}, \quad \forall a,r,l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{S}$$

证明. 当 $r=0$ 时此即 Hockey-stick 关系 (也称 Fermat Relation、Chu's Theorem) $\sum_{i=0}^{i=l}\binom{a+i}{i}=\binom{a+l+1}{l}$。对于 $r\geq 0$ 的情况可以反复使用 Hockey-stick 关系得到。记 $A_{a,k}=\binom{a+k}{k}, S_{a,l}=\sum_{k=0}^{k=l}A_{a,k}=\binom{a+l+1}{l}, a,k,l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 且存在负值时 $A_{a,k}=S_{a,l}=0$ 使用 Abel 变换

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{k=l}\binom{a+k}{k}\binom{r+l-k}{l-k}&=\sum_{k=0}^{k=l}A_{a,k}S_{r-1,l-k}=\sum_{k=0}^{k=l}\left(S_{a,k}-S_{a,k-1}\right)S_{r-1,l-k}=S_{a,l}+\sum_{k=0}^{k=l-1}A_{a+1,k}A_{r-1,l-k}\\&=\sum_{k=0}^{k=l}\binom{a+1+k}{k}\binom{r-1+l-k}{l-k}=\cdots=\sum_{k=0}^{k=l}\binom{a+r+k}{k}=\binom{a+r+l+1}{l}\end{aligned}$$

从而在式(S)中取 $a=p,q$ 和 $(r,l)=(m,n),(n,m)$ 得到以下组合恒等式用于题目的计数重数计算

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{j=n}\binom{i+j}{j}\binom{m+n-i-j}{n-j}=\binom{m+n+1}{m+1},\\&\sum_{i=0}^{i=m}\binom{i+j}{j}\binom{m+n-i-j}{m-i}=\binom{m+n+1}{n+1},\qquad\forall 0\leq p\leq m,\ m,n,p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\end{aligned}$$

□

注：上述不等式可以如法炮制地推广到高维。只需归纳证明关于 (S) 的推广版本的组合恒等式。见下节高维推广。 □

2 高维推广

定理 2.1 (对角最值的数学期望不等式)**.** 对于 n 个有限长度实数序列 $\mathbf{a}^{(1)},\cdots,\mathbf{a}^{(n)}$ 其中 $\mathbf{a}^{(i)}=\left\{a_1^{(i)},\cdots a_{x_i}^{(i)}\right\}\subset\mathbb{R}$, $x_1,..,x_n\in\mathbb{N}_+$。记对角超平面的最大和是

$$\mathbf{c}=\left\{c_0,\cdots,c_{\sum_{k=1}^{k=n}x_k}\right\},\quad c_k=\max_{i_1+\cdots+i_n=k}\left\{a_{i_1}^{(1)}+\cdots+a_{i_n}^{(n)}\right\},\ k=0,1,..,\sum_{k=1}^{k=n}x_k$$

则有上节结论的推广不等式成立：

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\mathbf{c}\geq\mathbb{E}\mathbf{a}^{(1)}+\cdots+\mathbb{E}\mathbf{a}^{(n)}\\&\text{其中}\mathbb{E}\mathbf{c}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{k=n}x_i+1}\sum_{k=0}^{k=x_1+..+x_n}c_k\\&\mathbb{E}\mathbf{a}^{(k)}=\frac{1}{x_k+1}\sum_{i=0}^{i=x_k}a_i^{(k)}\end{aligned}\tag{C1}$$

而且(C1)式取等当且仅当 $\mathbf{a}^{(1)},\cdots,\mathbf{a}^{(n)}$ 是公差相同的算术级数。

注意到 $n=2$ 时即此文的主要结果。

证明. 用同样的凸折线路径进行估计。和(Def1)类似定义高维版本的从原点到点 $(x_1,..,x_n)\in\mathbb{N}_+^n$ 的“凸折线”集合形如

$$\Gamma_{(x_1,..,x_n)}^{(0,..,0)} := \left\{ \gamma : [\sum_{i=1}^{i=n} x_i+1] \to \prod_{i=1}^{i=n}[x_i] \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma(0)=(0,0), \qquad \gamma(\sum_{i=1}^{i=n} x_i)=(x_1,...,x_n) \\ \forall t\in[m+n], \gamma(t+1)-\gamma(t)\in\{\vec{e_1},..,\vec{e_n}\} \end{array} \right\} \tag{Def2}$$

其中 $\vec{e_1},..,\vec{e_n}$ 是对应的正向单位向量。同样对于 $0\le y_i\le x_i$, $y_i\in\mathbb{Z}, i=1,..,n$ 考虑经过点 $(y_1,..,y_n)$ 的折线构成的子集

$$\Gamma_{(x_1,..,x_n)}^{(y_1,..,y_n)} := \left\{ \gamma\in\Gamma_{(x_1,..,x_n)}^{(0,..,0)} \middle| \gamma(\sum_{i=1}^{i=n} y_i)=(y_1,...,y_n) \right\}$$

在三维时如下图所示：

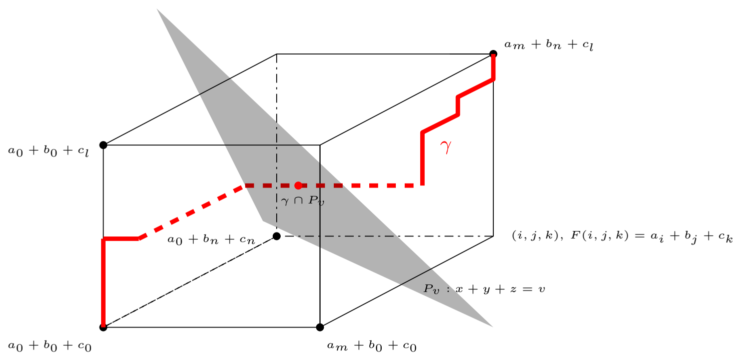

图 2: γ 与每个对角超平面 P_v 均交于一点

重复前面论证仍然可以得到类似(aux2)的权重与折线路径数目有关的估计如下

$$\sum_{k=0}^{k=x_1+..+x_n} c_k \ge \sum_{i=0}^{i=x_1} \frac{N(i,1)}{\left|\Gamma_{(x_1,..,x_n)}^{(0,..,0)}\right|} a_i^{(1)} + \cdots + \sum_{i=0}^{i=x_n} \frac{N(i,n)}{\left|\Gamma_{(x_1,..,x_n)}^{(0,..,0)}\right|} a_i^{(n)} \tag{aux3}$$

其中 $\left|\Gamma_{(x_1,..,x_n)}^{(0,..,0)}\right|$ 可以通过多重组合数计算出来形如

$$\left|\Gamma_{(x_1,..,x_n)}^{(0,..,0)}\right| = \mathrm{C}_{(x_1,..,x_n)} = \frac{(x_1+\cdots+x_n)!}{x_1!\cdots x_n!}$$

每一个 $N(i,k)$ 通过(S)式的计算方式归纳地计算如下

$$\begin{aligned} N(n,r) &= \sum_{\substack{0\le y_i\le x_i, i=1,...,n \\ y_1,..,y_n\in\mathbb{Z}, y_n=r}} \left|\Gamma_{(y_1,..,y_n)}^{(0,..,0)}\right| \left|\Gamma_{(x_1,..,x_n)}^{(y_1,..,y_n)}\right| \\ &= \sum_{\substack{0\le y_i\le x_i, i=2,...,n \\ y_2,..,y_n\in\mathbb{Z}, y_i=k}} \left|\Gamma_{(y_2,..,y_n)}^{(0,..,0)}\right| \left|\Gamma_{(x_2,..,x_n)}^{(y_2,..,y_n)}\right| \binom{\sum_{k=1}^{k=n} x_k+1}{x_1}, \quad \text{利用(S)和多重组合数性质} \\ \cdots &= \binom{\sum_{k=1}^{k=n} x_k+1}{x_1} \binom{\sum_{k=2}^{k=n} x_k+1}{x_2} \cdots \binom{x_n+1}{x_n} = \frac{(x_1+\cdots+x_n+1)!}{x_1!\cdots x_i!\cdots(x_n+1)!} \end{aligned}$$

(注意 $N(i,r)$ 和 $N(n,r)$ 计算方式一致，不妨交换顺序)。从而代入(aux3)得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{k=x_1+..+x_n} c_k &\geq \sum_{i=0}^{i=x_1} \frac{N(i,1)}{\left|\Gamma_{(x_1,..,x_n)}^{(0,..,0)}\right|} a_i^{(1)} + \cdots + \sum_{i=0}^{i=x_n} \frac{N(i,n)}{\left|\Gamma_{(x_1,..,x_n)}^{(0,..,0)}\right|} a_i^{(n)} \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\frac{(x_1+\cdots+x_n+1)!}{x_1!\cdots(x_i+1)!\cdots x_n!}}{\frac{(x_1+\cdots+x_n)!}{x_1!\cdots x_n!}} \sum_{j=1}^{j=x_i} a_j^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_1+\cdots+x_n+1}{x_i+1} \sum_{j=1}^{j=x_i} a_j^{(i)} \\ &\Rightarrow \mathbb{E}\mathbf{c} \geq \mathbb{E}\mathbf{a}^{(1)} + \cdots + \mathbb{E}\mathbf{a}^{(n)}\end{aligned}$$

即为所求。而且等号成立当且仅当每条折线路径上求和相同，即任何超平面 $P_v : s_1 + \cdots + s_n = v$ 上格点 $(y_1,..,y_n)$ 代表的值 $a_{y_1}^{(1)} + \cdots + a_{y_n}^{(n)}$ 相同。等价地说 $\mathbf{a}^{(1)}, \cdots, \mathbf{a}^{(n)}$ 是公差相同的算术级数。 $\square$

3　连续版本

猜想 考虑 $m,n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 以及连续函数 $a : [0,m] \to \mathbb{R}$ 和 $b : [0,n] \to \mathbb{R}$，定义其对角最大值为

$$c(k) = \max_{\substack{s+t=k \\ s\in[0,m] \\ t\in[0,n]}} \{a(s) + b(t)\}$$

则猜想存在 $c(k)$ 的控制不等式

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}c \geq \mathbb{E}a + \mathbb{E}b, \\ &\text{其中}\quad \mathbb{E}c = \frac{\int_0^{m+n} c(r)dr}{m+n}, \mathbb{E}a = \frac{\int_0^m a(s)ds}{m}, \mathbb{E}b = \frac{\int_0^n b(t)dt}{n}\end{aligned} \tag{C3}$$

且上述不等式取等当且仅当 $a(s) = ks + a(0),\ b(t) = kt + b(0),\quad k, a(0), b(0) \in \mathbb{R}$。
此处 $\mathbb{E}f$ 表示函数 f 的期望 (或一阶矩)。

若按前两节证明思路，需要考虑连续变化的凸折线集合，其中每条凸折线上对函数 $f(s,t) := a(s) + b(t)$ 的积分均被 $\mathbb{E}c$ 控制。由于此集合中有无穷多个元素，试图将此集合 $\Gamma_{(0,0)}^{(m,n)}$ 参数化。

问题 上述不等式是否可以推广到 a,b 分别定义在两个正交的凸方体 $L_1 \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \{0\}$ 和 $L_2 \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 的情形？其中 $d_1, d_2 \in \mathbb{N}_{\geq 0}$。

这时如何合理定义它们的对角超平面最大值函数 $\operatorname{diagmax}\{a,b\}$？(即原不等式中的序列/函数 c)