分析学习题

第一题

> 证明对于一个正实数序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$，设 e 是自然对数的底。记上极限是如下在现代数学中比较常用的符号 $\overline{\lim}$ (这相当于是 $\limsup$，类似下极限在现代数学文献中常记作 $\underline{\lim}$)。那么有如下结论
>
> $$\overline{\lim}_{n\to+\infty}(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n})^n \geq e$$

证明：首先结论部分求上极限的序列可以上下除以正数 x_1 而不改变上极限的值，可设 $x_1=1$，回顾到自然常数 e 的诸多等价表示有

$$e=\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

而上极限的定义是

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}\max_{k\geq n}\{x_k\}$$

考虑到如下关系

$$\frac{(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n})}{(1+\frac{1}{n})}=\frac{\frac{x_1}{n+1}+\frac{x_{n+1}}{n+1}}{\frac{x_n}{n}}=\frac{\frac{1}{n+1}+\frac{x_{n+1}}{n+1}}{\frac{x_n}{n}}\quad x_1=1$$

利用上极限的定义，只需要证明有无穷多个 $n_k, k\in\mathbb{N}^+$ 满足上式大于等于一即可。此时利用反证法，如果不然，那么存在足够大的正整数 N 使得所有的 $n\geq N$ 后

$$\frac{1}{n+1}+\frac{x_{n+1}}{n+1}<\frac{x_n}{n}\qquad\forall n\geq N$$

那么对于正整数 $m\in\mathbb{N}^+$ 不断代入上式的关系就有

$$\frac{x_{N+m}}{N+m}<\frac{x_{N+m-1}}{N+m-1}-\frac{1}{N+m}<\frac{x_{N+m-2}}{N+m-2}-(\frac{1}{N+m}+\frac{1}{N+m-1})<\cdots<\frac{x_N}{N}-\sum_{N<i\leq N+m}\frac{1}{i}$$

我们知道调和级数是发散的，也就是 $\sum_{i\in\mathbb{N}^+}\frac{1}{i}=+\infty$，从而将上式中的 m 趋于正无穷，不等式左边一定是大于零的数，而右边会在 m 足够大的时候小于零，这时矛盾的，于是只能有无穷多个 $n_k, k\in\mathbb{N}^+$ 满足

$$\frac{1}{n+1}+\frac{x_{n+1}}{n+1}\geq\frac{x_n}{n}\qquad n\in\{n_k\}_{k=1,2,3,..}$$

也就是

$$(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n})\geq(1+\frac{1}{n})\quad n\in\{n_k\}_{k=1,2,3,...}\Rightarrow(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n})^n\geq(1+\frac{1}{n})^n\quad n\in\{n_k\}_{k=1,2,3,...}$$

利用极限的保序性质（或直接证明）

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty}(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n})^n\geq\overline{\lim}_{n\in\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}}(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n})^n\geq\overline{\lim}_{n\in\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}}(1+\frac{1}{n})^n=e$$

便得到结论。

第二题

> (樊畿不等式-Ky Fan's Inequality) 设 $0\leq x_1,..,x_n\leq\frac{1}{2}$，那么有如下的数量关系成立
>
> $$\frac{\prod_{i=1}^{i=n}x_i}{(\sum_{i=1}^{i=n}x_i)^n}\leq\frac{\prod_{i=1}^{i=n}(1-x_i)}{(\sum_{i=1}^{i=n}(1-x_i))^n}\tag{1}$$
>
> 或者写成更具启发式的形式和均值不等式进行比较
>
> $$(\prod_{i=1}^{i=n}(\frac{x_i}{1-x_i}))^{\frac{1}{n}}\leq\frac{\sum_{i=1}^{i=n}x_i}{\sum_{i=1}^{i=n}(1-x_i)}\tag{2}$$
>
> 上述不等式当且仅当所有的 x_i 都相等时取等。

证明：此一大类不等式几乎都可以用凸函数的性质(Jensen不等式)或者均值不等式得到。这里用向前向后的数学归纳法证明，然后构造凸函数证明一个更一般的代权的樊畿不等式。

向前归纳：假设不等式在 $n=2^k, k\in\mathbb{N}$ 时成立，要证明其在 $n=2^{k+1}$ 时成立，为此记 $n_0=2^k$，那么对 $0\le x_1,..,x_n\le\frac{1}{2}$ 定义

$$y_1=\frac{x_1+x_2}{2}, y_2=\frac{x_3+x_4}{2},\dots,y_{n_0}=\frac{x_{2n_0-1}+x_{2n_0}}{2}$$

根据不等式的运算性质有 $0\le y_1,..,y_{n_0}\le\frac{1}{2}$，代入归纳假设的 (2) 式中并且取适当幂次得到

$$(\prod_{i=1}^{i=n_0}y_i^2)\le(\frac{\sum_{i=1}^{i=2n_0}x_i}{\sum_{i=1}^{i=2n_0}(1-x_i)})^{2n_0} \tag{3}$$

这里来说明不等式在 $n=2$ 时成立，也就是如果 $0\le a,b\le\frac{1}{2}$ 则

$$(\frac{\frac{a+b}{2}}{1-\frac{a+b}{2}})^2\ge(\frac{a}{1-a})(\frac{b}{1-b}) \tag{4}$$

这等价于说明此时 $\frac{4ab}{(a+b)^2}\le\frac{4(1-a)(1-b)}{((1-a)+(1-b))^2}$ 成立，当 a,b 有某一个为零时显然成立于是不妨设 $a,b\neq 0$，所以 等价于说明

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge\frac{1-a}{1-b}+\frac{1-b}{1-a}\quad\forall 0<a,b\le\frac{1}{2}$$

移项并且化简等价于

$$\frac{(a-b)^2(1-(a+b))}{ab(1-a)(1-b)}\ge 0\quad\forall 0<a,b\le\frac{1}{2}$$

这显然正确，于是 (4) 成立，那么将 a,b 取成 x_{2i-1},x_{2i} 就得到

$$y_i^2\ge(\frac{x_{2i-1}}{1-x_{2i-1}})(\frac{x_{2i}}{1-x_{2i}}),\quad i=1,..,n_0$$

代入 (3) 推出

$$(\prod_{i=1}^{i=2n_0}(\frac{x_i}{1-x_i}))\le(\frac{\sum_{i=1}^{i=2n_0}x_i}{\sum_{i=1}^{i=2n_0}(1-x_i)})^{2n_0}$$

从而完成了向前归纳。

向后归纳：如果不等式对于 $n=n_0+1$ 成立，要证明不等式对 $n=n_0$ 成立。对于任何的 $0\le x_1,\dots,x_{n_0}\le\frac{1}{2}$ 取 n_0+1 项是其算术平均数

$$x_{n_0+1}=\frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{i=n_0}x_i$$

代入 $x_1,..,x_{n_0+1}$ 得到

$$\frac{n_0^{n_0}}{(n_0+1)^{n_0+1}}\frac{\prod_{i=1}^{i=n_0}x_i}{(\sum_{i=1}^{i=n_0}x_i)^n}=(\frac{n_0}{n_0+1})^{n_0+1}\frac{\prod_{i=1}^{i=n_0}x_i(\frac{\sum_{i=1}^{i=n_0}x_i}{n_0})}{(\sum_{i=1}^{i=n_0}x_i)^{n_0+1}}$$
$$\le(\frac{n_0}{n_0+1})^{n_0+1}\frac{\prod_{i=1}^{i=n_0}(1-x_i)(\frac{\sum_{i=1}^{i=n_0}(1-x_i)}{n_0})}{(\sum_{i=1}^{i=n_0}(1-x_i))^{n_0+1}}=\frac{n_0^{n_0}}{(n_0+1)^{n_0+1}}\frac{\prod_{i=1}^{i=n_0}(1-x_i)}{(\sum_{i=1}^{i=n_0}(1-x_i))^{n_0}}$$

归一化系数就是 $n=n_0$ 时的不等式，也就是向后归纳成立。

那么对于一般的 n 一定小于某一个 2^{k0}，根据向前归纳在 $n=2^k$ 时不等式成立，利用向后归纳就得到对所有的 n 不等式成立。而取等条件也在向前向后归纳的证明中被遗传下来，从而就证明了代数上的樊畿不等式。

事实上这个不等式可以推广到带权的情形，取权 $0\le\gamma_1,..,\gamma_n\le 1$ 满足 $\sum_{i=1}^{i=n}\gamma_i=1$，则对于任何的 $0<x_1,..,x_n\le\frac{1}{2}$ 有不等式

$$\frac{\prod_{i=1}^{i=n}{x_i}^{\gamma_i}}{(\sum_{i=1}^{i=n}\gamma_i x_i)^n}\le\frac{\prod_{i=1}^{i=n}(1-x_i)^{\gamma_i}}{(\sum_{i=1}^{i=n}\gamma_i(1-x_i))^n}$$

此处用凸函数的性质，也就是下凸函数在一些点的算术平均上的取值大于等于这些点取值的算术平均，上凸函数在一些点的算术平均上的取值小于等于这些点取值的算术平均(Jensen不等式)，设

$$f(t)=\ln\left(\frac{t}{1-t}\right)\quad\forall 0<t\leq\frac{1}{2}$$
$$f''(t)=-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{(1-t)^2}\leq 0$$

是一个上凸函数，于是根据Jensen不等式

$$\ln\frac{\prod_{i=1}^{i=n}{x_i}^{\gamma_i}}{\left(\sum_{i=1}^{i=n}(1-x_i)^{\gamma_i}\right)^n}=\sum_{i=1}^{i=n}\gamma_i f(x_i)\leq f(\sum_{i=1}^{i=n}\gamma_i x_i)=\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{i=n}\gamma_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=n}\gamma_i(1-x_i)}\right)$$

取反函数得到带权的樊畿不等式成立，取等条件来自于Jensen不等式的取等条件以及 f 的在 $\frac{1}{2}$ 点以外的严格凸性。不难看出在推广的樊畿不等式中取权 $\gamma_i\equiv\frac{1}{n}$ 就得到原来的樊畿不等式。

第三题

> 设 $y_0\geq 2$，给出迭代格式的序列：$y_n=y_{n-1}^2-2,n\geq 1$，设一个倒数和
>
> $$S_n=\frac{1}{y_0}+\frac{1}{y_0y_1}+\cdots+\frac{1}{y_0y_1\cdots y_n}$$
>
> 则其极限满足
>
> $$\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{y_0-\sqrt{{y_0}^2-4}}{2}$$

证明：根据此问题的结论，猜测这问题联系着某一个一元二次方程。注意到当 $y_0=2$ 时所有的 y_n 都等于 2 此时 S_n 的极限趋近于 1 从而结论成立。于是设 $y_0>2$ 令 $y_0=x+\frac{1}{x}$，则设 x_1,x_2 是其对应的二次方程

$$x^2-y_0x+1=0$$

的两个根，那么根据二次方程的求根公式，有

$$x_1=\frac{y_0+\sqrt{{y_0}^2-4}}{2},\quad x_2=\frac{y_0-\sqrt{{y_0}^2-4}}{2},x_1>1,x_1>x_2$$

韦达定理给出 $y_0=x_1+x_2,1=x_1x_2$，利用迭代方程就得到

$$y_n={x_1}^{2^n}+{x_2}^{2^n}$$
$$\frac{1}{y_0y_1\cdots y_n}=(\frac{x_1-x_2}{(x_1+x_2)(x_1-x_2)})(\frac{{x_1}^2-{x_2}^2}{({x_1}^2+{x_2}^2)({x_1}^2-{x_2}^2)})\cdots(\frac{{x_1}^{2^n}-{x_2}^{2^n}}{({x_1}^{2^n}-{x_2}^{2^n})({x_1}^{2^n}-{x_2}^{2^n})})=\frac{x_1-x_2}{{x_1}^{2^{n+1}}-{x_2}^{2^{n+1}}}$$
$$=(x_1-\frac{1}{x_1})(\frac{{x_1}^{2^{n+1}}}{{x_1}^{2^{n+2}}-1})=(x_1-\frac{1}{x_1})(\frac{1}{{x_1}^{2^{n+1}}-1}-\frac{1}{{x_1}^{2^{n+2}}-1})$$

从而利用错位相减得到

$$S_n=(x_1-\frac{1}{x_1})(\frac{1}{{x_1}^2-1}-\frac{1}{{x_1}^{2^{n+2}}-1})$$

此时 x_1 大于一，那么

$$\lim_{n\to\infty}S_n=(x_1-\frac{1}{x_1})(\frac{1}{{x_1}^2-1})=\frac{1}{x_1}=x_2=\frac{y_0-\sqrt{{y_0}^2-4}}{2}$$

第四题

> 设 $x_1,..,x_n$ 是实数，考虑相邻两项的算术平均迭代
>
> $$x_i^{(1)}=\frac{x_i+x_{i+1}}{2},1\leq i\leq n-1,\quad x_n^{(1)}=\frac{x_n+x_1}{2}$$
> $$x_i^{(k)}=\frac{x_i^{(k-1)}+x_{i+1}^{(k-1)}}{2},1\leq i\leq n-1,x_n^{(k)}=\frac{x_n^{(k-1)}+x_1^{(k-1)}}{2},k\geq 2$$
>
> 那么这迭代值会收敛到这 n 个数的算术平均
>
> $$\lim_{k\to+\infty}x_i^{(k)}=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n},\quad i=1,\ldots,n$$

证明：我们采用两种方法来说明这个问题，首先一种较为直接的方法是计算 $x_i^{(k)}$，根据周期性，只需要说明 $x_1^{(k)}$ 的极限是对应的算术平均即可，设 $\vec{x}$ 是 $x_1,..,x_n$ 组成的列向量， $\vec{x}^{(k)},k\geq 1$ 是 $x_1^{(k)},..,x_n^{(k)}$ 组成的列向量，那么根据迭代方程，有

$$\vec{x}^{k+1}=A\vec{x}^{(k)}$$

这里 A 是一个 n 阶方阵，设 E_{ij} 是只在 ij 处为一其余位置为零的基底矩阵，表示 A 如下

$$A=\frac{1}{2}(E_{11}+\cdots+E_{nn}+E_{12}+E_{23}+\cdots+E_{n1})=\frac{1}{2}(I+\sigma_n)$$

这里 $\sigma_n=E_{12}+\cdots+E_{n1}$ 是一个置换矩阵，阶为 n，也就是 $\sigma_n^n=I$。所以问题就变成了证明

$$\lim_{k\to\infty}A^k=\frac{1}{n}1_{n\times n}=\frac{1}{n}\sum_{i,j}E_{ij}$$

而计算 A^k 得到

$$A^k=\frac{1}{2^k}(I+\sigma_n)^k=\sum_i\frac{1}{2^k}\binom{k}{i}\sigma_n^i$$

那么只需要说明

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{s=1}^{\lfloor\frac{k-i}{n}\rfloor}\frac{1}{2^k}\binom{k}{sn+i}=\frac{1}{n}\quad i=1,..,n$$

这在 $n=1,2$ 时是二项式定理的结果。对于更高的 n 的情况，采用一种幂级数分割的技术可以求出组合数求和项的简化表达，这种技术被称为 series multisection，最早来源于 Thomas Simpson 在 1757年的文章，可参考维基百科的 Series multisection 词条。此处将此技术的核心证明，也就是对于一个形式幂级数

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m+\cdots$$

取其等间隔的分割后的形式幂级数定义如下

$$f_{n,i}=a_ix^i+a_{n+i}x^{n+i}+\cdots+a_{kn+i}x^{kn+i}+\cdots$$

那么取 $\omega_n=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$ 是 n 次单位根，这些 $f_{n,i}$ 形式上可以表示成

$$f_{n,i}(x)=\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{q=n-1}\omega_n^{-iq}f(\omega_n^qx)\tag{5}$$

(5) 式的证明只需要考虑右侧展开成形式幂级数的各项系数和左侧相等，利用单位根的性质计算如下

$$\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{q=n-1}\omega_n^{-iq}f(\omega_n^qx)=\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{q=n-1}\sum_{m=0}^{+\infty}a_m\omega_n^{(m-i)q}x^m=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\sum_{q=0}^{q=n-1}\omega_n^{(m-i)q}}{n}a_mx^m=\sum_{m=0}^{+\infty}\mathbf{1}_{n\mathbb{Z}+i}(m)a_mx^m=f_{n,i}$$

利用 (5) 和二项式定理 $(1+x)^k=\sum_{i=0}^{i=k}\binom{k}{i}x^i$，取 n 等距的分割以及令 $x=1$ 就可以得到

$$\sum_{s=1}^{\lfloor\frac{k-i}{n}\rfloor}\frac{1}{2^k}\binom{k}{sn+i}=\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{q=n-1}\omega_n^{-iq}(\frac{1+\omega_n^q}{2})^k=\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{q=n-1}\omega_{2n}^{-2iq}\cos^k(\frac{q\pi}{n})\omega_{2n}^{kq}=\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{q=n-1}\cos\frac{(k-2i)q\pi}{n}\cos^k(\frac{q\pi}{n})$$

此时令 $k\to+\infty$ 得到 $q\neq0$ 的项都趋于零，而 $q=0$ 的项为一，那么就直接得到

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{s=1}^{\lfloor\frac{k-i}{n}\rfloor}\frac{1}{2^k}\binom{k}{sn+i}=\frac{1}{n}\quad i=1,..,n$$

第五题

> 设 $\{na_n\}_n$ 是单调递减到零数列，$\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ 收敛，证明 $\lim_{n\to+\infty}(n\ln n)a_n=0$

证明：由于 $\{na_n\}_n$ 单调递减趋于零，有 $\{a_n\}_n$ 是趋于零的非负数列，由于单调递减，有

$$na_n\geq(n+1)a_{n+1}\Rightarrow a_n\geq\frac{n+1}{n}a_{n+1}\geq\frac{n+1}{n}\frac{n+2}{n+1}a_{n+2}\geq\cdots\geq\frac{m}{n}a_m\quad\forall m\geq n\tag{1}$$

注意到 $n(a_n-a_{n+1})\geq a_{n+1}\geq0$ 推出 $\{a_n\}_n$ 是单调递减的非负数列，如果其中有 $a_{n_0}=0$ 则命题显然成立，所以不妨设 $a_n>0$。

而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛（记这个极限为 S），记 $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}a_n,S_0=0$，则 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$。利用(1)给出

$$S_n\geq ma_m\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\geq ma_m\int_1^n\frac{1}{x}dx=ma_m\ln n\quad\forall m\geq n\tag{2}$$

和(2)类似考虑如下的估计

$$S_m-S_{n-1}\ge ka_k\sum_{i=n}^{i=m}\frac{1}{i}\ge ka_k\int_n^m\frac{dx}{x}=ka_k(\ln m-\ln n)\quad\forall k\ge m\ge n \tag{3}$$

在上式中令 $k=m,n=\lfloor\sqrt{m}\rfloor$，这里符号 $\lfloor-\rfloor$ 表示向下取整，此时 $\ln n\le\ln\sqrt{k}$，代入中(3)

$$S_k-S_{\lfloor\sqrt{k}\rfloor-1}\ge ka_k(\ln k-\ln\sqrt{k})=\frac{1}{2}ka_k\ln k\quad\forall k\in\mathbb{Z}_{\ge1}$$

从而两边对 k 取上极限，利用 $S_k\to S$，有

$$\frac{1}{2}\overline{\lim}_{k\to+\infty}ka_k\ln k\le\overline{\lim}_{k\to+\infty}(S_k-S_{\lfloor\sqrt{k}\rfloor-1})\le S-S=0$$

注意到 $\{(n\ln n)a_n\}$ 是正项数列，下极限大于等于零，从上式立刻得出

$$\lim_{n\to+\infty}(n\ln n)a_n=0$$

第六题

> 如果序列 $\{x_n\}_n$ 的前 n-项平均值序列收敛而且 $|x_n-x_{n+1}|\le\frac{c}{n}$ 对某一个常数 c 成立，则 $\{x_n\}_n$ 收敛。

证明：首先定义 $\{a_n\}_n$ 的前 n-项平均数 $\sigma_n=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$，根据题目条件 $\{\sigma_n\}_n$ 收敛，不妨设其收敛到零，那么 $\frac{a_n}{n}=\sigma_n-\frac{n-1}{n}\sigma_{n-1}$，取极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=0-1\cdot0=0 \tag{1}$$

此时令 $a_1=t_1,a_n=t_1+t_2+\cdots+t_m$，那么考虑将 σ_n 写成 t_i 求和的形式，并且划分成两部分估计如下

$$\begin{aligned}\sigma_n=\frac{\sum_{k=1}^{k=n}a_k}{n}=\frac{\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=k}t_i}{n}=\frac{\sum_{k=1}^{k=n}(n-k+1)t_k}{n}&=(-\frac{\sum_{k=1}^{k=m}(k-1)t_k}{n})+(-\frac{\sum_{k=m+1}^{k=n}(k-1)t_k}{n})+a_n\\&=S_{m,n}+T_{m,n}+a_n\quad\forall m\le n\end{aligned} \tag{2}$$

根据题目条件有 $|t_n|\le\frac{c}{n-1}$ 对某个常数成立，利用此来估计 $S_{m,n}=-\frac{\sum_{k=1}^{k=m}(k-1)t_k}{n}$，有

$$|S_{m,n}|\le\frac{\sum_{k\le m}|k-1||t_k|}{n}=\frac{cm}{n}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}S_{m,n}=0 \tag{3}$$

下面来估计 $T_{m,n}=-\frac{\sum_{k=m+1}^{k=n}(k-1)t_k}{n}$，利用(1)计算出 $T_{m,n}$ 的极限

$$T_{m,n}=\frac{\sum_{k=m+1}^{k=n}(k-1)t_k}{n}=\frac{-a_n-ma_m}{n}+\frac{\sum_{k=m+1}^{k=n}a_k}{n}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}T_{m,n}=0 \tag{4}$$

从而只需要固定 $m=m_0$，对(2)取极限并且利用(3)和(4)得到

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\sigma_n+\lim_{n\to+\infty}S_{m_0,n}+\lim_{n\to+\infty}T_{m_0,n}=0+0+0=0$$

从而 $\{a_n\}_n$ 收敛。

第七题：绝对连续函数和李氏连续函数(北京大学2020实变)

> 有一个比较强的前提，取 I_0,I_1,I_2,I_3 是 $\mathbb{R}$ 上有界闭区间和 $\phi:I_1\to I_2$ 是 Lipschiz 函数，f 是绝对连续函数，其复合不一定好。
>
> 这里将构造一个绝对连续函数 f 和 Lipschiz 函数 ϕ 满足 $f\circ\phi$ 不是绝对连续，甚至不是有界变差的(BV)。
>
> 如果 $g:I_0\to I_1$ 是绝对连续函数，则 $\phi\circ g$ 也绝对连续

证明：首先如果 ϕ Lipschiz连续，那么对于有限个不相交开区间 $u_1=(x_{u_1},y_{u_1}),..,u_n$ 有 $m((\phi(x_{u_i}),\phi(y_{u_i}))\le|\phi|m(u_1)$，如果记 ϕu_1 就是对应的开区间，以及广义的变差记号为 $\mathrm{V}_u(\phi),u=\{u_1,..,u_n\}$ 则有

$$V_u(\phi)\le|\phi|V_u(1)\quad\forall u,$$

那么 $V_u(\phi\circ g)\le|\phi|V_u(g),\forall u$，所以根据 g 的绝对连续性，只要 $V_u<\delta_g(\epsilon/|\phi|)$，就有 $V_u(\phi\circ g)<\epsilon$。根据不交开区间的选择和 ϵ 的选择的任意性可知此时 $\phi\circ g$ 绝对连续。

反之这里直接构造反例，取 $f:[0,1]\to[0,1],f(x)=\sqrt{x}$，$\phi$ 将仔细地构造如，期望 ϕ 的导数能恒为一，于是构造其是分段线性的斜率为1的函数，并且使其是锯齿状使得可以选择很多个不交的开区间 u_i，但是每一个 ϕu_i 都是一样的，如

$$\phi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{2n}}-t & x\in[1-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{m}{2^{2n}},1-\frac{1}{2^n}+\frac{m+1}{2^{2n}}],t=x-((1-\frac{1}{2^n})+\frac{m}{2^{2n}}),m\text{偶数}\\ t & x\in[1-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{m}{2^{2n}},1-\frac{1}{2^n}+\frac{m+1}{2^{2n}}],t=x-((1-\frac{1}{2^n})+\frac{m}{2^{2n}}),m\text{奇数}, \quad m=0,..,2^n,n=1,2,3,..\\ 0 & x=1\end{cases}$$

这直观来说就是把$[0,1]$ 分成可数个区间 $[0,\frac{1}{2}],[\frac{1}{2},\frac{3}{4}],..,[1-\frac{1}{2^n},1-\frac{1}{2^{n+1}}],..$ 然后在每一个这样的小区间上寻找合适的开区间族使得 $f\phi$ 在上面的变差总是大于1。ϕ 的图形大概如下

显然大部分时候 ϕ 的Lipschiz常数都是1，只需考虑某一个点是1的时候，但是此时另一个点(非1)就位于某 $[(1-\frac{1}{2^n}),1-\frac{1}{2^{n+1}}]$ 中，它们的距离大于 $\frac{1}{2^{2n}}$，但是值的差距不超过 $\frac{1}{2^{2n}}$，所以 ϕ 是Lipschiz的。

取 $f=\sqrt{x}$，根据Newton-Lebniz法则可知 f 绝对连续，但是可以稍微证明一下，假设 u 是一些不交的开区间的有限族，那么

$$V_u(f)=V_{u,\sup u_i<M^2}(f)+V_{u,\sup u_i\geq M^2}(f)\leq\frac{1}{M}+MV_u(1)$$

对于 $\epsilon>0$ 取 $M=\frac{1}{2\epsilon}+1>0$ 和 $V_u<\frac{\epsilon}{2M}$ 就有 $V_u(f)<\epsilon$ 从而 f 绝对连续。

最后取一些特定的开区间族 Δ_n 正是定义 ϕ 时的那些集合的划分

$$\Delta_n=\{(1-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{m}{2^{2n}},1-\frac{1}{2^n}+\frac{m+1}{2^{2n}}):m=0,..,2^n-1\}$$

计算出 $f\circ\phi$ 在 Δ_n 中区间的端点不是取零就是取 $\frac{1}{2^n}$，所以对这些区间族

$$V_{\Delta_n}(f\circ\phi)=1$$
$$V_{\Delta_n}(1)=\frac{1}{2^n}\to 0$$

那么 $f\circ\phi$ 不是绝对连续的，甚至由于这里取的每一个开区间端点构成一个划分，这复合函数都不是有界变差的。

第八题 Riemann和Lebesgue

对角线法把$[0,1]$ 的有理数排一个顺序 $[0,1]\cap\mathbb{Q}=\{q_1,..,q_2\}$ 然后取

$$f_n=\mathbf{1}_{A_n}\quad A_n:=\bigcup_{k=1}^{k=n}(q_k-\frac{1}{2^{k+2}},q_k+\frac{1}{2^{k+2}})\cap[0,1]\subset[0,1]$$

说明 $\{f_n\}_n$ 是 $\mathcal{R}^p[0,1]$ 的柯西列，但是在 $\mathcal{R}^p[0,1]$ 中不收敛。由于 f_n 的间断点有限，它们都是Riemann可积的，而且

$$\int_{\mathcal{R}}|f_n-f_m|^p\leq 2^{-\min\{m,n\}}\to 0\quad m,n\to+\infty$$

说明 $\{f_n\}_n$ 确实是Riemann可积函数空间的柯西列。有两种办法说明 f_n 在 $\mathcal{R}^p[0,1]$ 中不收敛，第一种比较高级文明，就是我们把 $\mathcal{R}^p[0,1]$ 完备化得到 $\mathcal{L}^p[0,1]$，证明 f_n 在 $\mathcal{L}^p[0,1]$ 的极限函数 $f=1_{\cup_n A}$ 不在 $\mathcal{R}^p[0,1]$ 中。为什么这么做是可以的呢？因为 $\mathcal{R}^p[0,1]$ 看作赋范线性空间是可以等距嵌入到 $\mathcal{L}^p[0,1]$ 中的，而 $\mathcal{L}^p[0,1]$ 是完备的，所有的柯西列都是有极限函数的，而且是唯一的极限函数(在刨除一个零测集的意义下)，如果我们说明了这个极限函数(实际上是相差一个零测集相等的等价类)不可能是Riemann可积的，那么任何的候选极限函数，通过把它们放在 $\mathcal{L}^p[0,1]$ 中考虑都落在之前的那个等价类里面，所以不是Riemann可积的，所以 $\mathcal{R}^p[0,1]$ 中找不到我们想要的极限函数。

单调收敛定理告诉我们 $f_n\to 1_{\cup_n An}$ 是 L^1。但是很难想象 $\mathbf{1}_{\cup_n A_n}$ 是Riemann可积的，因为它和Dirichlet函数的差会非常小，而后者不是Riemann可积的。事实上对任何区间 $\mathbf{1}_{\cup_n A_n}$ 在上面都取零和一，所以考虑 $x\notin\cup_n A_n$ 的一个区间 $B(x,c_0)$计算Riemann积分的Darboux上和与下和的时候总有

$$U(\mathbf{1}_{\cup_n A_n},[0,1])-L(\mathbf{1}_{\cup_n A_n},[0,1])\geq 2c_0$$

所以 $\mathbf{1}_{\cup_n A_n}$ 不是Riemann可积的。考虑它的一个零测集的等价类 f，$\mathbf{1}_{\cup_n A_n}$ 在任何区间上都在某一个子区间上恒为一，所以 f 在任何区间上都必须取到一，考虑 $m(\cup_n A_n)\leq\frac{1}{2}$ 说明 $m({\cup_n A_n}^c)>0$ 所以 f 在这个集合上必须取到零，考虑 $x\notin\cup_n A_n$ 的一个区间 $B(x,c_0)$计算Riemann积分的Darboux上和与下和也给出 f 不可积。

另一种比较直接，我们说明对任何的 $g\in\mathcal{R}^p[0,1]$ 都有 $\int_{\mathcal{R}}|g-f_n|^p\nrightarrow 0$。这样从定义出发就说明了 $\mathcal{R}^p[0,1]$ 中找不到我们想要的那个极限函数。我们接下来实现这两种方法

首先考虑比较直接的那种，假设 $g\in\mathcal{R}^p[0,1]$ 是 f_n 的极限，那么应该有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathcal{R}}|g-f_n|^p=0,\quad I_n=\int_{\mathcal{R}}|f_n|^p\leq\frac{1}{2}$$

g 是Riemann可积的，上面的等式说明 g 不可能是零，而且可积性告诉我们上和和下和的差别 $\sum_{P=\{\Delta_i\}_i} w_i(g)\Delta_i \to 0$ 总是随着分割的加细一致地趋于零，取那个最小的振幅 $w_{min}(g) \to 0$ 说明可以找到一个小区间 I 使得 g 在上面的振幅任意小。考虑如果存在区间 $[a,b]$ 使得 $|g-1| > c_0 > 0$ 那么有理数在 $[0,1]$ 上稠密，存在足够多的有理数
$q_N, .., \in [a+\frac{1}{2^{N_0}}, b-\frac{1}{2^{N_0}}], N > N_0$。而考虑 $n > N$ 时

$$(q_N - \frac{1}{2^{N+2}}, q_N + \frac{1}{2^{N+2}}) \subset [a,b] \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{R}} |g-f_n|^p \geq \frac{c_0}{2^{N+1}}$$

和收敛性矛盾。所以根据Riemann可积的定义有 $\int_{\mathcal{R}} |g|^p = 1$ 但是此时

$$\int_{\mathcal{R}} |g|^p - \int_{\mathcal{R}} |g-f_n|^p \leq \int_{\mathcal{R}} f_n^p \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 = 1 - \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathcal{R}} |g-f_n|^p \leq \sup \int_{\mathcal{R}} |f_n|^p \leq \frac{1}{2}$$

矛盾。所以不存在这样的 g。

第九题 Shannon采样(Nyquist-Shannon Sampling Thm)

工程学中常用傅里叶分析假设 $\mathcal{H}_a := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f^\wedge(\xi) = 0, |\xi| < a\}, a > 0$ 是一个希尔伯特空间。注意到可以使用光滑函数逼近可积函数，从而下属使用傅里叶变换是总假设函数的光滑性正则性良好。这里记

$$(\mathcal{F}f),\ f^\wedge(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi\sqrt{-1}\xi\cdot x} dx$$

$$(\mathcal{F}^{-1}f),\ f^\vee(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi\sqrt{-1}\xi\cdot x} dx$$

以下几点刻画出了工程采样中的香农采样定理。

- 对于正数 $a > 0$ 而言有 $\chi^\wedge_{[-a,a]} = \chi^\vee_{[-a,a]} = \frac{\sin 2a\pi\xi}{\pi\xi} = 2a\mathrm{sinc}(2a\xi), \quad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin\pi x}{\pi x}$。
- 对于频率范围在 a 内的数据 $f \in \mathcal{H}_a$ 总有 $\mathcal{H}_a$ 的一族标准正交基 $\{\sqrt{2a}\frac{\sin\pi(2a\xi-k)}{\pi(2a\xi-k)}\}_{k\in\mathbb{Z}}$。
- 对于 $f \in \mathcal{H}_a$ 只需要采样 $\{\frac{k}{2a}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 处的数据就可以恢复 f 即有关系
  $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\frac{k}{2a})\mathrm{sinc}(2ax-k),\ \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin\pi x}{\pi x}$

最后一条被称为采样定理，也就说为了收集频率小于 a 的数据只需要取采样频率 $2a$ (采样间隔 $\frac{1}{2a}$) 的离散采样即可完全恢复数据

第一条来自于直接计算，利用 $\chi_{[-a,a]}$ 的对称性可知傅里叶变换和其逆变换结果相同

$$\chi^\wedge_{[-a,a]}(\xi) = \int_{-a}^{a} e^{-2\pi\sqrt{-1}\xi\cdot x} dx = \frac{e^{-2a\pi\sqrt{-1}\xi} - e^{2a\pi\sqrt{-1}\xi}}{2\pi\sqrt{-1}\xi} = \frac{\sin 2a\pi\xi}{\pi\xi}$$

第二条回顾 $(-)^\vee, (-)^\wedge$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 空间上的酉算子，从而不难计算出 $\sqrt{2a}\frac{\sin\pi(2a\xi-k)}{\pi(2a\xi-k)} = \sqrt{2a}\mathrm{sinc}(2a\xi-k) = v_k(\xi)$

$$v_k^\wedge = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{k\pi\sqrt{-1}}{a}x}\chi_{[-a,a]}, \quad \langle \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{k_1\pi\sqrt{-1}}{a}x}\chi_{[-a,a]}, \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{k_2\pi\sqrt{-1}}{a}x}\chi_{[-a,a]} \rangle = \delta_{k_1,k_2}$$

利用Stone-Weierstrass逼近可知后者是 $L^2([-a,a])$ 的标准正交基，从而前者是 $\mathcal{H}_a$ 的标准正交基。

最后一条只需要处理 $f \in \mathcal{H}_a$ 足够光滑的情况。正交分解的系数项 $C_k := \langle f, \sqrt{2a}\mathrm{sinc}(2ax-k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2a}}\langle f(\frac{x+k}{2a}), \mathrm{sinc(x)}\rangle$
这时只需说明

$$\langle f(\frac{x+k}{2a}), \mathrm{sinc(x)}\rangle = f(\frac{k}{2a})$$

利用逆变换的紧支性质 $f^\wedge = f^\wedge\chi_{[-a,a]} = (f * \chi^\vee_{[-a,a]})^\wedge$ 得到 $f = f * \chi^\vee_{[-a,a]}, \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\frac{\sin 2a\pi y}{\pi y} dy$ 从而取 $x = \frac{k}{2a}, y = \frac{t}{2a}$ 得到

$$f(\frac{k}{2a}) = \int_{\mathbb{R}} f(\frac{t}{2a} + \frac{k}{2a})\mathrm{sinc}(t) dt = \langle f(\frac{x+k}{2a}), \mathrm{sinc(x)}\rangle$$

第十题

首先利用 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty}(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x dy)dx = \int_0^\infty(\int_0^\infty e^{-xy}\sin x dx)dy = \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}dy = \frac{\pi}{2}$ 可知
$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{sinc} = 1$。计算

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{sinc}x dx = \lim_{a\to 0+} \int_{\mathbb{R}} f(ax)\mathrm{sinc}(ax)$$