Coxeter 元素的性质

设 Φ 的基本根系是 $\{\alpha_i\}_i$，考虑最高元素$\theta_l=\sum_{\alpha_i\in\Pi}n_i\alpha_i$ 以及基本权向量ω_i 满足

$$\omega_j(h_i)=2\frac{\langle\alpha_i,\omega_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}=\delta_{ij}$$
$$\rho=\sum_i\omega_i=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\alpha$$

定义$n(\alpha,\beta)=2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle}$，根据根系的关系

$$n(\alpha,\beta)=|\Phi\cap\{\mathbb{Z}\alpha+\beta\}|$$
$$2\frac{\langle\rho,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}=1\quad\forall i$$

（参考第八章第八节长短根的系数关系）考虑伸缩后的根系$\Phi^\vee$ 如下定义

$$\alpha^\vee=\frac{2\alpha}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$$

$\Phi^\vee$ 的基本根是 $\{\alpha_i^\vee\}$ （参考第八章第八节长短根的系数关系）设全半根是如下的元素

$$\rho^\vee=\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\langle\alpha,\alpha\rangle}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha^\vee\in\Phi_+^\vee}\alpha^\vee=\sum_i c_i\omega_i^\vee$$

这里 $\omega_i^\vee$ 是一组基满足 $2\frac{\langle\alpha_i^\vee,\omega_i^\vee\rangle}{\langle\alpha_i^\vee,\alpha_i^\vee\rangle}=\delta_{ij}$，考虑Weyl变换 $s_{\alpha_i^\vee}(a)=a-2\frac{\langle\alpha_i^\vee,a\rangle}{\langle\alpha_i^\vee,\alpha_i^\vee\rangle}\alpha_i^\vee$ 满足

$$s_{\alpha_i^\vee}(\omega_j^\vee)=\omega_j^\vee-\delta_{ij}\alpha_i^\vee$$
$$s_{\alpha_i^\vee}(\rho^\vee)=\rho^\vee-c_i\alpha_i^\vee\quad\forall i$$

根据Weyl群的生成元 $s_{\alpha_i^\vee}$ 将 $\alpha_i^\vee$ 变为 $-\alpha_i^\vee$ 把其他 $\Phi^\vee$ 中的正根映射成正根，于是

$$s_{\alpha_i^\vee}(\rho^\vee)=\rho^\vee-\alpha_i^\vee\quad\forall i$$

从而 $c_i=1\quad\forall i$，于是

$$\rho^\vee=\frac{1}{2}\sum_{\alpha^\vee\in\Phi_+^\vee}\alpha^\vee=\sum_i\omega_i^\vee$$

这样得到了

$$\alpha_i^{\vee\vee}=\frac{2\alpha_i^\vee}{\langle\alpha_i^\vee,\alpha_i^\vee\rangle}=\frac{2\frac{2\alpha_i}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}}{\langle\frac{2\alpha_i}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle},\frac{2\alpha_i}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}\rangle}=\alpha_i$$
$$\omega_i^\vee=2\frac{\omega_i}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}$$

其高度有如下公式

$$\mathrm{ht}\theta_l=\sum_i n_i=\sum_{ij}n_i\delta_{ij}=\sum_i n_i\sum_j 2\frac{\langle\alpha_i,\omega_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}=\sum_i n_i\langle\alpha_i,\sum_j\omega_j^\vee\rangle$$
$$=\sum_i n_i\langle\alpha_i,\rho^\vee\rangle=\langle\theta_l,\rho^\vee\rangle$$

其实对任何根 α 都有

$$\mathrm{ht}\alpha=\langle\alpha,\rho^\vee\rangle$$

用带有正根的公式得到

$$\mathrm{ht}\theta_l=\frac{1}{2}\sum_{\alpha^\vee\in\Phi_+^\vee}\langle\theta_l,\alpha^\vee\rangle=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}n(\theta_l,\alpha)=1+\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+\alpha\neq\theta_l}n(\theta_l,\alpha)=1+\sum_{\alpha\in\Phi^+\alpha\neq\theta_l}\frac{\langle\theta_l,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$$

由于$\theta_l,-\theta_l+\alpha$才可能是根，那么就有$n(\theta_l,\alpha)=0,1$，于是 $n(\theta_l,\alpha)^2=n(\theta_l,\alpha)$，代入得到

$$1+\mathrm{ht}\theta_l=2+2\sum_{\alpha\in\Phi^+\alpha\neq\theta_l}\frac{\langle\theta_l,\alpha\rangle^2}{\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\theta_l,\theta_l\rangle}=2\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{\langle\theta_l,\alpha\rangle^2}{\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\theta_l,\theta_l\rangle}=\sum_{\alpha\in\Phi}\frac{\langle\theta_l,\alpha\rangle^2}{\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\theta_l,\theta_l\rangle}$$

考虑 Φ 上的二次函数

$$f(x)=B(x,x)=\sum_{\alpha\in\Phi}\langle x,\frac{\alpha}{||\alpha||}\rangle^2$$
$$B(x,y)=\sum_{\alpha\in\Phi}\langle x,\frac{\alpha}{||\alpha||}\rangle\langle y,\frac{\alpha}{||\alpha||}\rangle$$

注意到对于所有外尔群的元素 $w\in W$，$B(wx,wy)=B(x,y)\quad\forall x,y$，作为二次型，$B(x,y)=\langle\phi(x),y\rangle$，这样根据内积非退化有这样的同态$\phi$ 满足

$$\phi\cdot w=w\cdot\phi\quad\forall w\in W$$

注意到单李代数的根空间可作为其Weyl群的不可约表示，从而由Schur引理得到 $\phi=t\mathrm{Id}$，另一方面可以根据 Dykin 图选择正交的根反射$s_{i_1},..,s_{i_r};s_{j_1},..,s_{j_{n-r}}$，可知 ϕ 在这两个空间上作用都是伸缩的，Dykin diagram的二步分解是唯一的，在 A_l,D_l,E_6,E_7,E_8 上考虑根的置换，在 B_l,C_l,G_2,F_4 上考虑图的对称置换可知，在单根系上 ϕ 是一致的伸缩，于是

$$f(x)=\sum_{\alpha\in\Phi}\langle x,\frac{\alpha}{||\alpha||}\rangle^2=t||x||^2$$

进一步得到

$$t|\Pi|=\sum_{\omega_i\in\Pi}t\langle\omega_i,\omega_i\rangle=\sum_{\omega_i\in\Pi}f(\omega_i)=\sum_{\omega_i\in\Pi}\sum_{\alpha\in\Phi}\langle\omega_i,\frac{\alpha}{||\alpha||}\rangle^2=\sum_{\alpha\in\Phi}1=|\Phi|$$

于是由于 $\mathrm{ord}c=\frac{|\Phi|}{|\Pi|}=t$，计算 $f(\theta_l)=\mathrm{ord}c||\theta_l||^2$ 得到

$$1+\mathrm{ht}\theta_l=\mathrm{ord}c$$

对于所有的根甚至 H^* 的元素 λ,μ，则有 $e_\lambda e_\mu=e_{\lambda+\mu}$

$$s_i(\alpha)=\alpha-2\frac{\langle\alpha,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}\alpha_i=\alpha-n(\alpha,\alpha_i)\alpha_i$$

I 是 Weyl 群的一个交换子集，$s_is_j=s_js_i$，$s_i\alpha_j=\alpha_j-2\delta_{ij}\alpha_i$

假设$\alpha=\sum_{i\in I}n_i\alpha_i$ 是一个正根（$n_1\neq 0$），那么有 $\omega=s_{i_1}\dots s_{i_k}$ 满足 $\omega\alpha=-\alpha$ 那么就有所有的 n_i 都相等，于是假设 $|I|>1,n_i>0$，考虑 $s_1\alpha$ 是根但是 $s_1\alpha=-n_1\alpha_1+\sum_{i\in I-\{1\}}n_1\alpha_i$ 不满足根向量条件，所以只有 $\alpha_i,i\in I$ 是根。

$$wL:\frac{2\pi}{h}\mathbb{Z}+\frac{\pi}{h}\quad wM:\frac{2\pi}{h}\mathbb{Z}\quad\mod\ \mathbb{Z}\pi$$
$$h=2s+1:\quad wL\to wM\quad t\to t-s$$
$$h=2s:\quad wL-wM\neq 0\quad\mod\ \pi$$

$$e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}=x+\frac{2}{3!}x^3+\dots$$

例外李代数的基本模维数计算

G_2：正根系为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+2\alpha_2, \alpha_1+3\alpha_2, 2\alpha_1+3\alpha_2$，且$w_1=3, w_2=1$，利用 Weyl 特征公式计算得到

$$\dim L(\omega_1) = \prod_{\alpha=\sum_i k_i\alpha_i \quad \in\Phi^+} (1+\frac{3k_1}{3k_1+k_2}) = 2\frac{7}{4}\frac{8}{5}\frac{3}{2}\frac{15}{9} = 14$$
$$\dim L(\omega_2) = \prod_{\alpha=\sum_i k_i\alpha_i \quad \in\Phi^+} (1+\frac{k_2}{3k_1+k_2}) = 2\frac{5}{4}\frac{7}{5}\frac{3}{2}\frac{4}{3} = 7$$

F_4：正根系是

$$\beta_i : \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4$$
$$\beta_i-\beta_j : \alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4, \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4$$
$$\beta_i+\beta_j : \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3, 2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4,$$
$$\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4, \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4$$
$$\frac{1}{2}(\pm\beta_1\pm\beta_2\pm\beta_3\pm\beta_4) : \alpha_4, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4,$$
$$\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4, \alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4$$

计算基本模的维数

$$\dim L(\omega_1) = \prod_{\alpha=\sum_i k_i\alpha_i \quad \in\Phi^+} (1+\frac{2k_1}{2k_1+2k_2+k_3+k_4}) = \frac{7}{5}\frac{13}{11}\frac{9}{2}\frac{25}{9}\frac{11}{5}\frac{8}{7} = 13\cdot 4 = 52$$
$$\dim L(\omega_2) = \prod_{\alpha=\sum_i k_i\alpha_i \quad \in\Phi^+} (1+\frac{2k_2}{2k_1+2k_2+k_3+k_4}) = 2\frac{5}{11}7^3\frac{11}{7}5\frac{2}{5^2}13 = 13\cdot 2\cdot 49 = \binom{52}{2} - 52$$
$$\dim L(\omega_3) = \prod_{\alpha=\sum_i k_i\alpha_i \quad \in\Phi^+} (1+\frac{k_3}{2k_1+2k_2+k_3+k_4}) = \frac{2^5}{5}\frac{7}{11}3\frac{5^2}{7}\frac{7}{2^5}\frac{13}{5}11 = 13\cdot 3\cdot 7 = \binom{26}{2} - 52$$
$$\dim L(\omega_4) = \prod_{\alpha=\sum_i k_i\alpha_i \quad \in\Phi^+} (1+\frac{k_4}{2k_1+2k_2+k_3+k_4}) = \frac{13}{11}2\frac{3}{2}\frac{11}{3}2 = 13\cdot 4 = 52$$

考虑 D_4 的正根有12个，如果考虑$\sigma=(1,3,4)(2)$是在单根的置换作用，分别写成 $\sigma-$轨道是

$$|\Phi_\sigma| = 1 : \{\alpha_2\}, \{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\},$$
$$\{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\}$$
$$|\Phi_\sigma| = 3 : \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}, \{\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_4\},$$
$$\{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_4\}$$

较难验证的是E_2E_1的关系注意到$[e_i[e_ie_j]]=0$和正根的关系：

$$[E_2E_1] = [e_1e_2]+[e_3e_2]+[e_4e_2]$$
$$[E_2[E_2E_1]] = [([e_1e_3]+[e_1e_4]+[e_3e_4])e_2]$$
$$[E_2[E_2[E_2E_1]]] = [e_1[[e_3e_4]e_2]]+[e_3[[e_1e_4]e_2]]+[e_4[[e_1e_3]e_2]]$$
$$[E_2[E_2[E_2[E_2E_1]]]] = 0 \quad 1-A_{21} = 4$$

$$\pm\beta_3\pm\beta_j$$

$$\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_8)$$

通过 E_6 中的 $\pm\beta_k\pm\beta_j \quad 3\le k\ne j$ 对 $\Phi^+(E_7)-\Phi^+(E_6)$ 进行李代数乘法

$$(\beta_2\pm\beta_j)+(\pm\beta_k\mp\beta_j) = \beta_2\pm\beta_k \quad (k\ne j)$$
$$\frac{1}{2}(-\beta_1-\beta_2+\ldots-\beta_8)+\ldots=$$

对于 E 型李代数，单根有如下表示

$$\alpha_1=\beta_1-\beta_2 \quad \beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\frac{1}{2}\alpha_6+\frac{1}{2}\alpha_7$$

$$\alpha_2=\beta_2-\beta_3 \quad \beta_2=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\frac{1}{2}\alpha_6+\frac{1}{2}\alpha_7$$

$$\alpha_3=\beta_3-\beta_4 \quad \beta_3=\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\frac{1}{2}\alpha_6+\frac{1}{2}\alpha_7$$

$$\alpha_4=\beta_4-\beta_5 \quad \beta_4=\alpha_4+\alpha_5+\frac{1}{2}\alpha_6+\frac{1}{2}\alpha_7$$

$$\alpha_5=\beta_5-\beta_6 \quad \beta_5=\alpha_5+\frac{1}{2}\alpha_6+\frac{1}{2}\alpha_7$$

$$\alpha_6=\beta_6-\beta_7 \quad \beta_6=\frac{1}{2}\alpha_6+\frac{1}{2}\alpha_7$$

$$\alpha_7=\beta_6+\beta_7 \quad \beta_7=-\frac{1}{2}\alpha_6+\frac{1}{2}\alpha_7$$

$$\alpha_8=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=8}\beta_i \quad -\beta_8=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+5\alpha_5+\frac{5}{2}\alpha_6+\frac{7}{2}\alpha_7+2\alpha_8$$

则E_8正根系(共120 = 56 + 64个)：

$$\begin{aligned}
\alpha_i+..+\alpha_j \quad (\beta_i-\beta_{j+1}) \quad 1\le i\le j\le 6 &\qquad 21\\
(i+1)\alpha_i+...+6\alpha_5+3\alpha_6+4\alpha_7+2\alpha_8 \quad (\beta_i-\beta_8) \quad i=1,..,5 &\qquad 5\\
\alpha_1+2\alpha_2+...+5\alpha_5+3\alpha_6+4\alpha_7+2\alpha_8 \quad (\beta_i-\beta_8) \quad i=6,7 &\qquad 2\\
\alpha_i+..+2\alpha_j+\alpha_6+\alpha_7 \quad (\beta_i+\beta_j) \quad 1\le i<j\le 6 &\qquad 15\\
\alpha_i+..+\alpha_5+\alpha_7 \quad (\beta_i+\beta_7) \quad i=1,..,6 &\qquad 6\\
\alpha_1+2\alpha_2+...+5\alpha_5+3\alpha_6+3\alpha_7+2\alpha_8 \quad -(\beta_7+\beta_8) &\qquad 1\\
\alpha_1+2\alpha_2+..+(i-1)\alpha_i+...+4\alpha_5+2\alpha_6+3\alpha_7+2\alpha_8 \quad -(\beta_i+\beta_8) \quad i=1,..,6 &\qquad 6\\
\\
&\qquad 64
\end{aligned}$$

$$\alpha_i+._k.+\alpha_j \quad 1\le i\le k\le j\le 6\to\frac{1}{j-i+1}$$

$$\alpha_i+._k.+2\alpha_j+..+2\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7 \quad 1\le i\le k<j\le 6\to\frac{1}{14-j-i}$$

$$\alpha_i+..+2\alpha_j+._k.+2\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7 \quad 1\le i<j\le k\le 5\to\frac{2}{14-j-i}$$

$$\alpha_{i_1}+._k.+2\alpha_{i_2}+..+3\alpha_{i_3}+..+4\alpha_{i_4}+..+2\alpha_6+2\alpha_7 \quad i_1\le k<i_2<i_3<i_4$$

$$\alpha_{i_1}+..+2\alpha_{i_2}+._k.+3\alpha_{i_3}+..+4\alpha_{i_4}+..+2\alpha_6+2\alpha_7 \quad i_1<i_2\le k<i_3<i_4$$

$$\alpha_{i_1}+..+2\alpha_{i_2}+..+3\alpha_{i_3}+._k.+4\alpha_{i_4}+..+2\alpha_6+2\alpha_7 \quad i_1<i_2\le k<i_3<i_4$$

$$\alpha_{i_1}+..+2\alpha_{i_2}+..+3\alpha_{i_3}+..+4\alpha_{i_4}+._k.+2\alpha_6+2\alpha_7 \quad i_1<i_2<i_3<i_4\le k$$

维数可以分解成如下的形式

$$30380=2^2 5^1 7^2 31$$

$$2450240=2^6 5^1 13^1 19^1 31$$

$$146325270=2^1 3^1 5^1 7^2 13^2 19^1 31^1$$

$$6899079264=2^5 3^1 7^2 11^2 17^2 23^1 31$$

$$6696000=2^6 3^3 5^3 31$$

$$3875=5^3 31$$

$$147250=2^1 5^3 19^1 31$$

Kac-Moody 代数的在结合代数上的表示

$$\theta_\lambda(e_j)v_{i_1}\cdots v_{i_r} = \sum_{i_k}\delta_{i_k j}(\lambda+\alpha_{i_k} - \sum_{i_k}\alpha_{i_l})v_{i_1}\cdots v_{\hat{i_k}}\cdots v_{i_r}$$
$$\theta_\lambda(e_j)1 = 0$$

这和第十四章的θ_0一致。(Cambridge的介绍李代数的书籍)

李代数 $\mathfrak{gl}_n$ 的非平凡理想

在一般的文献中普遍将那个最常见的李代数记成如下的形式 $\mathfrak{gl}_n(k) := \mathrm{M}_{n\times n}(k), [a,b] = ab - ba$。这里 k 通常指一个数域，李括号的定义就是类似于换位子的方式。那么在矩阵李代数 $\mathfrak{gl}_n(k)$ 中存在一个非常常见的子代数(这里说的"代数"的意思是其作为集合关于李括号是封闭的) $\mathfrak{sl}_n(k)$，也就是 $\mathfrak{gl}_n(k)$ 中对角线元素之和为零(这在抽象的数学中称为迹)的那些元素构成的集合。恒等式

$$\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA), \qquad \forall A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(k)$$

和迹函数的线性立刻证实 $\mathfrak{sl}_n(k)$ 是一个李代数（甚至其还是一个李理想）。通常一个李代数(有限维)会对应一个李群，反过来也有某一个李群也对应一个李代数，前者是通过指数映射(需要处理几个例外情况 E_6, E_7, E_8, F_4, G_2)，后者是典范的构造(考虑那个李群在单位元处的切向量场自然具有的李代数结构)。在这个层面上会说 $\mathfrak{gl}_n(k)$ 是一般线性群 $\mathrm{GL}_n(k)$ 的李代数，而 $\mathfrak{sl}_n(k)$ 是特殊线性群(行列式为一的可逆矩阵在矩阵乘法下构成的群)的李代数。有关有限维李代数的抽象理论诸如 Cartan 分解、Dynkin 图、Weyl 特征公式、Verma 模等都可以通过考虑上面那些具体的李代数被更好地理解。此处的注记是想说明两点：$\mathfrak{sl}_n(k)$ **是 $\mathfrak{gl}_n(k)$ 的唯一一个非平凡理想；此外 $\mathfrak{sl}_n(k)$ 还是一个单李代数("单"的意思是没有非平凡子理想。事实上在分类中其被称为 A-型李代数，通常记成 A_n)。**

假设