复分析习题解答

匿名

2023 年 2 月 17 日

第一章: 共形映射

正规族

题 1(1.1-1 正规族) 证明: 具有正实部的解析函数族是正规族，或者每一个序列的存在子列内闭趋于正无穷。

解答: 这里的正规是指广义的正规。记 $\mathbb{H}$ 是上半平面。此处可以采用共形映射

$$\Phi : -\sqrt{-1}\mathbb{H} \to \mathbb{D}$$
$$\Phi(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

将原来的函数族 $\mathcal{F}$ 映射到象集包含在单位圆盘上的解析函数族 $\mathcal{G}$，然后利用 Montel 定理得到 $\mathcal{G}$ 的正规性和导数的内闭一致有界性。从而

$$f \in \mathcal{F}; \quad f^{\#} = \frac{2|f'|}{1+|f|^2} \leq 4\frac{|f'|}{(1+|f|)^2} = 2|\Phi^{-1} f|$$

内闭一致有界。然后利用 Marty 定理说明原来的解析函数族是正规的。

但是此时我们希望不用没有详细说明的 Marty 定理来证明这个结论。假设 $\{f_i\}_{i\in I}$ 是区域 Ω 上实部为正的解析函数族，定义如下的解析函数族

$$\mathcal{G} = \{e^{-f_i}\}_{i\in I}$$

如果 f_i 的实部都是正的，那么 $|e^{-f_i}| < |e^0| = 1$ 从而 $\mathcal{F}$ 在 Ω 上一致有界，根据 Montel 定理说明 $\mathcal{G}$ 是正规族。为了说明 $\mathcal{F}$ 正规，只需要取其中一个函数序列，考虑是否存在内闭一致收敛的子列。利用 $\mathcal{G}$ 的正规性，考虑两种情况，如果有子列

$$g_n = e^{-f_n}$$

内闭一致趋于零。此时 $|g_n(z)| = e^{-\mathrm{Re} f_n(z)}$ 在每一个紧集上一致趋于零，从而 $\{f_n\}_n$ 内闭一致趋于无穷远点。所以不妨设 $\{g_n\}_n$ 是一个内闭一致收敛到非零函数 g 的子列。此时对每一个固定的 $z_0 \in \Omega$，如果 $\{f_n(z_0)\}_n$ 有界，必要时取子列不妨假设

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = w_0 \quad \exists w_0 \in \mathbb{C}$$

那么在 w_0 的附近可以取对数的一个解析分支满足 $\ln e^{-w_0} = -w_0$。那么根据此处对数分支的解析性 $\{f_n\}_n$ 就在 z_0 的一个邻域内一致收敛到 $-\ln g$。如果 $f_n(z_0) \to \infty$，存在整数序列 $|k_n| \to +\infty$ 满足 $f_n(z_0) - 2\pi\sqrt{-1}k_n \to \ln g(z_0)$。这使得回到第一种情况，$f_n$ 在 z_0 附近都趋于无穷远点，也就是无界。考虑到

$$A := \{z \in \Omega : \sup\{|f_n(z)|\}_n < +\infty\}; \quad B := \{z \in \Omega : \sup\{|f_n(z)|\}_n = +\infty\}$$

那么上面的论证说明 A, B 都是 $\Omega = A \sqcup B$ 中的开集而且两者不交。从而根据 Ω 连通，有 $\Omega = A$ 或 $\Omega = B$。这分别对应内闭一致收敛的列紧和内闭一致趋于正无穷。

题 1 注此题为 Ahlfors 的复分析书中的 P227.1。构造指数函数也是来自于该书此处的提示。

题 2(1.1-2) 证明函数族 $\{z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在单位圆内部是正规族；在单位圆外部是亚纯函数正规族；但是在单位圆上任何一点都不正规。

解答: 首先利用 Montel 定理。由于在任何单位圆内部的紧集上总有半径小于一的开圆盘覆盖此紧集。那么此时 $|z^n| = |z|^n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$，根据 Montel 定理可知函数族 $\{z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在单位圆内部正规。

在单位圆外的任何紧集上都有 $|z| > 1 + \epsilon$ 对某一个 ϵ 成立。于是此函数族在单位圆外内闭一致趋于无穷远点，从而是亚纯函数的正规族。

在单位圆上的任何一点 z_0 附近的任何邻域 $B(z_0, \epsilon)$ 里总有模长小于一的点 w_1 和模长大于一的点 w_2 而此函数族的任何子列 $\{f_{n_k}\}_k$ 都有

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(w_1) = 0; \quad \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(w_2) = \infty$$

这和正规性的定义矛盾。

题 2 注或者直接用 Marty 定理说明在单位圆上

$$f_n^{\#} = n \to \infty$$

题 3(1.1-3) 设 f 是整函数 (在复平面解析)，证明 $\{f(cz)\}_{c\in\mathbb{R}}$ 是环形区域 $\{z : r_1 < |z| < r_2\}$ 上正规族当且仅当 f 是多项式函数。

解答: 不妨设 $1 < r_1 < r_2$。

$\Rightarrow$: 如果此函数族正规，取 $c_n \to \infty$ 那么 f 或在全平面都一致有界，或在 $A(|c|r_1, |c|r_2)$ 的闭包上或随 $|c_n| \to \infty$ 一致趋于无穷远点。前一种情况由于 f 在 $\mathbb{C}$ 上解析而且有界，根据 Liouville 定理说明 f 是常数 (也是多项式)。第二种情况下不妨取 $c_n \to +\infty$，满足

$$|f(c_n z)| \geq M_n, \qquad \lim_{n\to\infty} M_n = +\infty$$

如果 $c_n r_2 > c_{n+1} r_1$，那么相邻的两个环形区域的并集就是一个更大的环，$|f|$ 在其上恒大于 M_n。此时如果 $G_n = A(c_n r_1, c_{n+1} r_2)$，如果 f 在 G_n 上非零，根据极大模原理 $|\frac{1}{f}|$ 的最小值在边界取到，可以推出 $|f|$ 在 G_n 上都大于 M_n。只有有限个 G_n 包含 f 的零点，否则有一系列 $b_m \to +\infty$ 满足 $f(b_m z)$ 恒有零点，根据正规性 f_{b_m} 的子列不一致趋于无穷从而根据上文推出 f 为常数。那么说明

$$\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = \infty$$

这就足够说明 f 是一个多项式。根据 f 是整函数，又存在足够大的圆盘使得 f 的零点包含其中。那么根据孤立零点定理，f 只有有限个零点 $z_1, .., z_k$，设它们的阶数是 $n_1, .., n_k$。则

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_1)^{n_1} \cdots (z - z_k)^{n_k}}$$

是没有零点的整函数，注意到 $|\frac{1}{f}|$ 有界，那么对足够大的 z 而言存在常数 $K > 0$ 满足

$$|\frac{1}{g(z)}| \le K |z|^{n_1 + \cdots + n_k}$$

那么取 $m > n_1 + \cdots + n_k$，利用柯西积分公式，对任何的 $z \in \mathbb{C}$

$$|(\frac{1}{g(z)})^{(m)}| = |\lim_{R \to +\infty} \oint_{C(0,R)} \frac{1/g(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} d\zeta| \le \lim_{R \to +\infty} \frac{2\pi}{R} = 0$$

从而 $1/g$ 是没有零点的多项式，那么只能是常数，推出 g 也是常数，所以

$$f(z) = K_0 \prod_{i=1}^{i=k} (z - z_i)^{n_i}$$

是多项式。

$\Leftarrow$: 如果 f 是多项式，当 f 为常数时，$f(cz)$ 都是常数从而是正规族，当

$$f(z) = a_k z^k + \cdots + a_0, \quad a_k \neq 0, k \ge 1$$

时，如果 $c_n \to +\infty$，利用对多项式的估记有

$$\begin{aligned}
|f(c_n z)| &\ge |a_k||c_n|^{k-1} r_1^n - k|c_n|^{k-1} \max\{|a_i| : i = 0, .., k-1\} |r_2|^{n-1} \\
&\ge |c_n|^{k-1} (A|c_n| - B)
\end{aligned}$$

这里 A, B 是不依赖于 c_n 的常数，所以此时有 $f(c_n z) \to \infty$ 是内闭一致收敛。如果 $c_n \to c$，连续性给出

$$
\begin{aligned}
|f(c_n z) - f(cz)| &\leq (k+1) \max_{i=o,..,k} \{|a_i|\} \max\{|c_n^k - c^k| : k = 0,..,1\}|r_2|^k \\
&\leq D \max\{|c_n^k - c^k| : k = 0,..,1\}
\end{aligned}
$$

所以此时 $f(c_n z)$ 内闭一致收敛到 $f(cz)$。从而综上可知 $f(cz)$ 是正规族。

题 4(1.1-4 复球面的 Weierstrass 定理) 如果区域 Ω 上的亚纯函数序列 $\{f_n\}$ 在球面距离下内闭一致收敛到 f，则 f 亚纯或 $f \equiv \infty$ 而且 $f_n^{\#}$ 内闭一致收敛到 $f^{\#}$。

解答: 根据球面距离公式

$$
d_C(s_1, s_2) := \frac{|s_1 - s_2|}{\sqrt{1+|s_1|^2}\sqrt{1+|s_2|^2}}, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{C};
$$
$$
d_C(z_{1,\infty}) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} \quad z \neq \infty
$$

记扩充复平面也就是 Riemann 球面是 $\widehat{C}$。由上可以推出

$$
d_C(z, w) = d_C(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}) \quad \forall z, w \in \widehat{C}
$$

那么 $\frac{1}{f_n}$ 也内闭一致收敛到 $\frac{1}{f}$。假设 $f \not\equiv \infty$ 。

不妨固定一个紧集 K。如果 $f(z_0) \neq \infty$，根据一致收敛性 f 是 K 上的连续函数，f 在 z_0 的一个球面度量邻域内有限，此时在 f 作为复函数在 z_0 附近连续所以有界，f_n 也如此。由复平面的 Weierstrass 定理 f 在 z_0 的一个邻域解析。如果 $f(z_0) = \infty$，那么 $\frac{1}{f(z_0)} = 0$，对 $\{\frac{1}{f_n}\}$ 重复上述讨论可知 $\frac{1}{f}$ 在 z_0 附近解析，从而 z_0 是 f 的极点。

只有极点的复函数是亚纯的，从而 f 亚纯。

下面说明球面导数内闭一致收敛。根据定义得到

$$
f^{\#}(z) = \lim_{w \to z} \frac{d_C(f(w), f(z))}{|w - z|}
$$

写成

$$d_C(f(z),f(z_0))=f^{\#}|z-z_0|+o(|z-z_0|)$$

利用球面距离的三角不等式，可以得到对任何的 $z,z_0\in K$

$$\begin{aligned}f_n^{\#}(z_0)|z-z_0|-\epsilon(n)+o(|z-z_0|)&\leq f^{\#}(z_0)|z-z_0|+o(|z-z_0|)\\&\leq f_n^{\#}(z_0)|z-z_0|-\epsilon(n)+o(|z-z_0|)\\ \epsilon(n)&=2\max_{w\in K}\{d_C(f_n(w),f(w))\}\end{aligned}$$

$\epsilon(n)$ 只依赖于 n 来自于球面距离下一致收敛。此时取 $z\to z_0$ 可以得到

$$|f_n^{\#}(z_0)-f^{\#}(z_0)|\leq 2\epsilon(n),\qquad \forall z_0\in K$$

从而球面导数在任何紧集下一致收敛，即内闭一致收敛。

题 5(1.1-5 Marty 定理) 区域 Ω 上亚纯函数族 $\mathcal{M}$ 是正规族的充要条件是 $\mathcal{M}$ 上函数的球面导数内闭一致有界.

解答: 这里是解答。$\Rightarrow$: 如果亚纯函数族 $\mathcal{M}$ 正规，那么其在球面距离意义下内闭一致收敛，根据 Arzela-Ascoli 引理不妨固定一个紧集 K 从而 $\mathcal{M}$ 在球面距离意义下等度连续和一致有界。如果 $f^{\#}$ 不一致有界，对任何正整数 n 都存在 $f_n^{\#}$ 在 z_n 附近大于 n，那么

$$\begin{aligned}d_C(f_n(z_n),f_n(z_n+\frac{1}{n}))&=\frac{2|f_n'(z_n)|\frac{1}{n}+o(n)}{1+|f_n(z_n)|^2}\\&\geq |f_n^{\#}(z_n)|\frac{1}{n}+o(n)\geq\frac{1}{2}\quad n>>N\end{aligned}$$

这和等度连续矛盾，从而 $\mathcal{M}$ 的球面导数内闭一致有界。

$\Leftarrow$: 如果球面导数内闭一致有界，那么固定一个紧集，对于在其中的点有

$$d_C(f(z),f(z'))\leq\oint_{\overline{zz'}}f^{\#}(s)|ds|\leq M|z-z'|$$

从而函数族等度连续，而且由于紧集的直径有限，函数族一致有界，那么根据 Arzela-Ascoli 引理推出亚纯函数族 $\mathcal{M}$ 正规。

Riemann 映射定理

题 6(1.2-1 正规性的局部性质) 证明正规性是一个局部性质即解析函数族 $\mathcal{F}$ 在区域 Ω 上正规等价于 $\mathcal{F}$ 在 Ω 中任一点的某个邻域上都正规。

解答: $\Rightarrow$: 根据正规性的定义，对任何点可以找到一个邻域在 Ω 的某个包含该点的紧子集中。从而显然。

$\Leftarrow$:（用对角线法则取收敛子列）如果 Ω 在任一点的某一个领域上正规，那么对任何紧集 K 中的点 x 都有一个邻域 U_x 使得 $\mathcal{F}$ 在 U_x 上正规，必要时缩小 U_x 到某个开球，不妨假设 $\mathcal{F}$ 在 U_x 上一致列紧 (存在一致收敛的子列)。那么考虑覆盖

$$K \subset \bigcup_{x \in K} U_x$$

有有限子覆盖 $U_{x_1}, .., U_{x_n}$，对于任何函数序列 $\{f_k\}_k \subset \mathcal{F}$，根据正规性可以找出子列 F_1 在 U_{x_1} 上一致收敛，继续根据正规性从 F_1 中找出子列在 U_{x_2} 上一致收敛，以此类推可以取出子列 F_n 在 K 上一致收敛。从而在 $\mathcal{F}$ 在紧集上一致列紧，推出任何序列有子列内闭一致收敛，进而 $\mathcal{F}$ 正规。

题 7(1.2-2) 证明如果 $f \in \mathcal{A}$ 单叶则 $r(f) \leq r(\Omega, a)$ 且等号成立当且仅当 $f = f_0$。

解答: 根据定义

$$r(f) := \inf\{|w| : w \in \partial f(\Omega)\}$$

根据 Riemann 映射定理存在共形映射 $g : f(\Omega) \to \mathbb{D}$ 满足 $g(0) = 0, g'(0) = \varphi'(a)$。利用唯一性得到

$$g \circ f = \varphi$$

这里 φ 是满足 $\phi(a)=0$ 和 $\phi'(a)>0$ 的 Ω 到 $\mathbb{D}$ 的 Riemann 映射。从而只需证明

$$\varphi'(a)=g'(0)\le\frac{1}{r(f)}$$

由于 $D(0,r(f))\subset f(\Omega)$ 从而函数 $\frac{g(z)}{z}$ 在 $\mathbb{D}(0,r(f))$ 解析。由极大模原理得到

$$\varphi'(a)=g'(0)=\lim_{z\to0}\frac{g(z)}{z}\le\max_{z\to\partial D(0,r(f))}\{\frac{|g(z)|}{|z|}\}\le\frac{1}{r(f)}$$

当且仅当 $g(z)=kz,k\in\mathbb{C}$ 时等号成立，也就是 $f=f_0$。

题 8(1.2-3) 固定共形等价于单位原盘的区域 Ω。如果取 $a\in\Omega$ 定义

$$\mathcal{A}:=\{f:\Omega\to\mathbb{C}:f\text{单叶解析},f(a)=0,f'(a)=1\}$$

定义面积函数

$$M(f)=\int_\Omega|f'(z)|^2dxdy$$

说明 $M(f)\ge M(f_0)$ 当且仅当 $f=f_0=\frac{\phi}{\phi'(a)}$ 时等号成立。这里 ϕ 是从 Ω 到 $\mathbb{D}$ 的满足 $\phi(a)=0,\phi'(a)>0$ 的唯一的黎曼映射。

解答: 面积具有平移不变性，不妨假设 $a=0$。根据变量替换公式当 $f=f_0$ 时如果记 $R=\frac{1}{|\phi'(a)|}$

$$M(f_0)=\frac{1}{|\phi'(a)|^2}\pi=\pi R^2$$

考虑 $\phi^{-1}:\mathbb{D}\to\Omega$ 是 ϕ 的逆，记复微分为 D。那么此时利用变量替换

$$M(f)=\iint_\Omega|\frac{d}{dw}f(w)|^2d\sigma=\iint_{\mathbb{D}}|Df(\phi^{-1}(w))|^2|D\phi^{-1}(w)|^2d\sigma$$

将 $Df(\phi^{-1}(w))D\phi^{-1}(w)$ 在 $\mathbb{D}$ 上展开成幂级数有

$$Df(\phi^{-1}(re^{\sqrt{-1}\theta}))D\phi^{-1}(re^{\sqrt{-1}\theta})=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nr^ne^{\sqrt{-1}n\theta}$$

取 $r=0$ 有 $a_0=R$，那么计算面积有

$$M(f)=\pi\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|a_n|^2}{n+1}\geq\pi|a_0|^2=M(f_0)$$

当且仅当 $a_{\geq 1}=0$ 时等号成立，此时 $f=f_0$。

题 9(1.2-4 Schwarz 引理应用) 设 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 是解析函数，其中 $f(0)=0, a\notin f(\mathbb{D}), a\in(0,1)$。此时求证

$$|f'(0)|\leq\frac{2a\ln(\frac{1}{a})}{1-a^2}$$

当且仅当

$$f(z)=\frac{a-h(z)}{1-ah(z)},\quad h(z)=e^{\frac{1-e^{\sqrt{-1}\theta}z}{1+e^{\sqrt{-1}\theta}z}\ln a}$$

时等号成立。

解答: 本问题是极大模原理或者说 Schwartz 引理的应用。首先反解出 $h(z)$ 也就是

$$h=\frac{a-f}{1-af}\quad 0\notin h(\mathbb{D})$$
$$f'=-\frac{1-a^2}{(1-ah)^2}h'$$

可以定义一个单叶解析分支 $\omega=\ln h:\mathbb{D}\to(-\infty,0)\times[0,2\pi)$ 是全纯的。参考 Stein 书中的方法，这可以通过定义

$$\omega(z):=\int_{\gamma_{0z}}\frac{h'(w)}{h(w)}dw+\ln a$$

上式中 γ_{0z} 是开单位原盘中任何从 0 到 z 的光滑曲线，由于 $\frac{h'}{h}$ 在此单连通区域解析，上述定义不依赖于曲线的选择而且确实满足对数条件，那么

$$h'=h\omega'$$

利用莫比乌斯变换取 $g:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 是如下的全纯映射

$$\frac{\omega}{\ln a}=\frac{1-g}{1+g}\Rightarrow g=\frac{\ln a-\omega}{\ln a+\omega}$$

根据定义有 $|g|<1, g(0)=0$ 那么求导得到

$$g'=-\frac{2\ln a}{(\ln a+\omega)^2}\omega'=-\frac{2\ln a}{(\ln a+\omega)^2}\frac{h'}{h}=\frac{2\ln a}{(\ln a+\omega)^2}\frac{1-a^2}{(1-af)(a-f)}f'$$

Schwartz 引理说明，如果取 $G(z)=\frac{g(z)}{z}1_{0<|z|<1}+g'(0)1_{\{0\}}$ 是全纯的，其最大值在边界取到，从而

$$|g'(0)|\le\lim_{r\to 1}\max_{|z|=r}|G(z)|\le\frac{1}{r}\le 1$$

这根据导数关系等价于

$$|f'(0)|\le\frac{2a\ln\frac{1}{a}}{1-a^2}$$

等号成立当且仅当 $g=e^{\sqrt{-1}\theta}z$ 是一个旋转，对应此时的函数 f 正好是题中的

$$f(z)=\frac{a-h(z)}{1-ah(z)},\quad h(z)=e^{\frac{1-e^{\sqrt{-1}\theta}z}{1+e^{\sqrt{-1}\theta}z}\ln a}$$

证毕。

题 10(1.2-5) 设 E 是有限连通区域 Ω 的一个有界余分支。证明存在 Ω 中的简单闭曲线 γ 使得对任意 $c\in E$，γ 关于 c 点的绕数 $n(\gamma,c)=1$ 而对 Ω 的其他任意余分支中的点 c (即 $c\in\mathbb{C}-(\Omega\cap E)$)，$n(\gamma,c)=0$。

解答: 设 $E,E_1,..,E_n$ 是 Ω 的全部有限余分支，E_∞ 是根据 Jordan 曲线确定的无界余分支。那么如果 $A\subset E$ 是连通稠密集，则 A 和 E 中所有开集相交，那么如果 E 可以分成两个非空开集的无交并，与 A 相交给出 A 等于两个非空开集的无交并，这和 A 连通矛盾。从而说明 E 连通。所以 E 是有界闭集。那么所有的有界余分支都是紧集。

如果 E 是单点，此时根据 $\mathbb{C}$ 是 T_4 空间存在 E 的邻域和 E_i 均不相交，那么取此邻域内的一个开圆盘 $D(e,r)$，那么 $\gamma = C(e,r) \subset \Omega$ 满足题目条件。如果 E 非单点，那么也可以找到上述的开邻域 $U_1 \supset E$ 和其他余分支不交。那么 E 在 U_1 中为紧集，存在一些 U_1 中的开圆盘覆盖 E，那么根据紧性存在有限个开圆盘覆盖 E，这些开圆盘并集构成一个开集 $D_2 \supset E$，那么 $\partial D_2 = \overline{D_2} - D_2 \subset E^c$。所以 ∂D_2 在 Ω 中。而且 D_2 是有限个开圆盘的并集其边界长度有限，而且根据 E 连通这些开圆盘无法分成不相交的两组。这些开圆盘的边界记为 $c_i, i = 1, .., n$，当 $n = 1$ 时 c_1 给出一条满足条件的简单闭曲线，假设当 $n = k$ 时存在满足由 $c_i, i \leq k$ 组成的一条简单闭曲线 γ_k，加入一个圆盘 A_{k+1} 后，考虑 c_{k+1} 和 γ_k 相交部分是一些离散的点 (因为它们是不同圆周的交点)。从而有有限多个。将 γ_k 在 A_{k+1} 外部的片段用 c_{k+1} 连接成一条简单闭曲线，从而归纳地说明

$$\bigcup_i c_i$$

中存在一条简单闭曲线 γ 其内部是 D_2，而且其是有限段圆弧的并集，γ 长度有限，此时 γ 满足题目的条件。

题 11(1.2-6 Riemann 映射构造) 考虑 $\Omega \subsetneq \mathbb{D}$ 是包含原点的单连通区域，假设 $f_0(z) \neq z$，如果 $f_n(0) = 0, f_n(\Omega) \neq \mathbb{D}$，取 $z_{n+1} \in \mathbb{D} - f_n(\Omega)$ 归纳定义

$$\varphi_{n+1}(z) = \frac{f_n(z) - z_{n+1}}{1 - \overline{z_{n+1}} f_n(z)}$$

取 $\psi_{n+1}(z)$ 是 $\sqrt{\varphi_{n+1}(z)}$ 的一个解析分支，定义

$$f_{n+1}(z) = e^{\sqrt{-1}\theta_{n+1}} \frac{\psi_{n+1}(z) - \psi_{n+1}(0)}{1 - \overline{\psi_{n+1}(0)}\psi_{n+1}(z)}$$

这里 θ_{n+1} 是使得 $f'_{n+1}(0) > 0$ 的辅角值。那么单叶函数序列 $\{f_n\}_n$ 内闭一致收敛到 Riemann 映射 $f : \Omega \to \mathbb{D}, f(0) = 0, f'(0) > 0$。

解答: 首先 $f_n(0)=0$ 从而说明极限函数 $f(0)=0$。根据反演的性质，f_n 是一致有界的解析函数列。从而有内闭一致收敛的子列

边界对应——Jordan 曲线情形

题 12(1.3-1) 设 E 是 $\mathbb{C}$ 的一个连通紧集，而 D 是 $\mathbb{C}-E$ 的一个有界连通分支，证明

$$\mathrm{diam}(D)\le \mathrm{diam}(E)$$

解答: 考虑任何的 $x,y\in D$ ，考虑道路连通子集

$$l_x^-=\{t\le 0:(1-t)x+ty\};\quad l_y^+=\{t\ge 1:(1-t)x+ty\}$$

则 $l_x^-\cap E,l_y^+$ 非空，否则 l_+^-,l_y^+ 是 $\mathbb{C}-E$ 的无界道路连通子集作为连通集 $[0,+\infty)$ 的同胚象也是连通子集。那么这推出 x,y 在 $\mathbb{C}-E$ 的某个无界连通分支上。和 D 有界矛盾。从而可以取 $x'\in l_x^-\cap E,y'\in l_y^+\cap E$，对应的参数为 t_1,t_2。那么

$$|x-y|<|x'-y'|=|t_2-t_1||x-y|\le \mathrm{diam}(E)$$

左边对所有的 x,y 取上确界，得到

$$\mathrm{diam}(D)=\sup\{|x-y|:x,y\in D\}\le \mathrm{diam}(E)$$

题 13(1.3-2) 设 Ω,Ω' 是有界区域而且 $f:\Omega\to\Omega'$ 是共形映射。则当 $\mathrm{dist}(z,\partial\Omega)\to 0$ 时 $\mathrm{dist}(f(z),\partial\Omega')\to 0$。

解答: 对于 $z\to\partial\Omega$，不妨任取其中一列点 z_n 趋于边界，这等价于对任何的 $z\in\Omega$，都存在开圆盘 $B(z,\epsilon_z)\subset\Omega$ 和正整数 N_z 满足当 $n>N_z$ 时，

$z_n \notin B(z, \frac{1}{2}\epsilon_z)$。因为有界序列都收敛到某一个点，此时 z_n 不收敛到 Ω 中的点，只能收敛到边界。而

$$\bigcup_{z\in\Omega} B(z, \frac{1}{2}\epsilon_z)$$

构成了 Ω 的一组开覆盖，对任何的紧集 $K \subset \Omega$，都存在上面覆盖的有限子覆盖，那么存在 N_K 使得 $n > N_K$ 后 $z_n \notin K$。这和 $z_n \to \partial\Omega$ 是等价的。反过来的推导是因为 $\mathbb{C}$ 上点的开邻域里有闭包紧的开邻域 (Ω 是局部紧空间) 我们说明了一列点趋于一个有界区域当且仅当其不落在任何该区域的紧子集上。从而只需说明如果 $\{z_n\}$ 满足此条件，$\{f(z_n)\}$ 也满足。但是 f^{-1} 也是连续映射，如果 $K \subset \Omega'$ 是紧集，$f^{-1}(K)$ 在 Ω 中也是紧集，而 z_n 不全落在 $f^{-1}(K)$ 中，那么 $f(z_n)$ 也不全落在 K 中，从而

$$\mathrm{dist}(z, \partial\Omega) \to 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{dist}(f(z), \partial\Omega') \to 0$$

题 14(1.3-3 Darboux-Picard 引理) 设 Ω 是一个 Jordan 区域。f 在 Ω 上解析，在 $\bar{\Omega}$ 上连续且在 $\partial\Omega$ 上是单射。证明 f 在 Ω 是单叶函数而且 $f(\Omega)$ 是 Jordan 曲线 $f(\partial\Omega)$ 的内部区域。

解答: 利用 Jordan 区域间的 Riemann 映射可以连续延拓到闭包的同胚 (Caratheodory 定理) 不妨设 $\Omega = \mathbb{D}$。根据辅角原理，解析函数在 Jordan 区域 $\mathbb{D}$ 上的零点个数满足公式

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{\partial\mathbb{D}} \frac{f'}{f} = \sum_{z\in\mathbb{D}, f(z)=0} \mathrm{ord}_f(z) = \mathrm{Ind}_0 f(\partial\mathbb{D})$$

那么 f 在 ∂D 上为单射，考虑 $f - w, w \in f(\bar{\mathbb{D}})$ 的辅角公式给出

$$\sum_{z\in\mathbb{D}, f(z)=w} \mathrm{ord}_{f-w}(z) = \mathrm{Ind}_w f(\partial\mathbb{D})$$

由于 f 在边界上是单射，$f(\partial\mathbb{D})$ 是简单闭曲线，取定方向后其环绕数只能

是 0 或者 1。根据环绕数的计算有

$$f-w\text{在}\mathbb{D}\text{上没有零点}\quad \text{当}w\text{在}f(\partial\mathbb{D})\text{的外部} \tag{1}$$

$$f-w\text{在}\mathbb{D}\text{上有唯一的零点}\quad \text{当}w\text{在}f(\partial\mathbb{D})\text{的内部} \tag{2}$$

而根据开映射定理 $f(\mathbb{D})$ 是开集从而 (1) 说明了 $f(\mathbb{D})$ 一一对应到 $f(\partial\mathbb{D})$ 的内部。根据 f 在 $\partial\mathbb{D}$ 上也是单射而且 $f(\mathbb{D})\cap f(\partial\mathbb{D})=\emptyset$ 可知 f 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上是单射，而且 $f(\mathbb{D})$ 是 $f(\partial\mathbb{D})$ 的内部。

题 15(1.3-4 Riemann 映射的 3-传递性) 证明注 1.1。也就是对 $\partial\mathbb{D}$ 上逆时针排列的三个点 w_1,w_2,w_3 和 Jordan 区域 (单连通的由简单闭曲线围成的区域) Ω 边界上顺时针排列的三个点 z_1,z_2,z_3 而言有唯一的 Riemann 映射 $\phi_{z,w}:\Omega\to\mathbb{D}$ 满足其到边界的连续延拓有如下传递性

$$\phi_{z,w}(z_i)=w_i \qquad i=1,2,3$$

解答: 根据边界对应，只需要考虑 $\mathbb{D}$ 上的具有在边界上的 3-传递性的映射既可。因为存在 Riemann 映射 $f:\mathbb{D}\to\Omega$ 可以连续延拓到闭包的拓扑同胚满足 $f(z_i')=w_i, i=1,2,3$，只需找到 $\mathbb{D}$ 的可以连续延拓成闭包同胚的共形映射 ψ 满足 $\psi(z_i)=z_i', i=1,2,3$ 那么取 $\phi=f\circ\psi$ 即可。考虑共形等价

$$p(z):\mathbb{D}\to\mathbb{H}; p(z)=\sqrt{-1}\frac{1+z}{1-z}$$

而根据 Schwarz-Pick 引理推出 (需要补充)

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H})\simeq \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})=\{\frac{az+b}{cz+d}:a,b,c,d\in\mathbb{R},ad-bc=1\}$$

$\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ 在边界具有 3-传递性，也就是对于不同的 $x=\{x_1,x_2,x_3\}\subset\mathbb{R}$ 和 $y=\{y_1,y_2,y_3\}\subset\mathbb{R}$ 存在唯一的自同构 $\phi_{x,y}$ 将 x_i 映射到 y_i $(i=1,2,3)$。这是因为存在自同构 $\phi_{x,(0,1,\infty)}$ 将 x_1 映到 0，x_2 映到 1，x_3 映到 ∞ 如下

$$\phi_{x,(0,1,\infty)}(z)=\frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}\frac{z-x_1}{z-x_3}$$

那么定义 $\phi_{x,y}=\phi^{-1}_{y,(0,1,\infty)}\circ\phi_{x,(0,1,\infty)}$ 即可。至于唯一性，只需考虑如果自同构固定 $0,1,\infty$，利用分式线性变换的表达式则给出 $b=c=0,a=d=1$ 从而说明此映射是恒同映射。

注意到 $p(z)$ 和 $p(z)^{-1}$ 是显式写出的，不难说明 (几乎显然地) 它们到边界的延拓是在边界上连续的双射 (上半平面的边界包含无穷远点)，取不同的 $\theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}\subset C(0,1)$ 和不同的 $\xi=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}\subset C(0,1)$ 那么存在唯一的 3-传递的映射

$$\psi_{\theta,\xi}=p^{-1}\circ\phi_{p(\theta),p(\xi)}\circ p$$

唯一性由 $\phi_{-,-}$ 的唯一性保证。那么记连续延拓到边界的 Riemann 映射为 $f:\mathbb{D}\to\Omega$，如果记 $z=\{z_1,z_2,z_3\}$ 和 $w=\{w_1,w_2,w_3\}$ 存在唯一的 3-传递共形映射为

$$f\circ\psi_{z,\phi^{-1}(w)}$$

分式线性变换可以通过三个点取值确定这是 3-传递性.

题 16(1.3-5) 设 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 是单连通区域以及 $g:\Omega\to D$ 是共形映射。$\gamma:[0,1)\to\Omega$ 是一条半开曲线，使得 $\lim_{t\to 1^-}\gamma(t)=w_0\in\partial\Omega$ 存在。证明 $\lim_{t\to 1^-}g(\gamma(t))=z_0\in\partial D$ 存在。

解答: 只需要说明 $g\circ\gamma([0,1))$ 的聚点只有单点即可，根据共形映射性质记这个聚点集合为 D，那么

$$D\subset\partial\mathbb{D}$$

如果 D 包含多于一个点，那么存在 $z_1,z_2\in\partial D$ 满足任何 $D(z_1,r),D(z_2,r)$ 和 $g\circ\gamma([0,1))$ 相交非空，考虑 g^{-1} 并记 $\Gamma_{1,r}=g^{-1}(C(z_1,r)\cap\mathbb{D}),\Gamma_{2,r}=g^{-1}(C(z_2,r)\cap\mathbb{D})$。根据 Wolff 引理存在序列 $r_n\to 0$ 满足

$$\lim_{n\to+\infty}|\Gamma_{1,r_n}|=\lim_{n\to+\infty}|\Gamma_{2,r_n}|=0$$

当 n 足够大时 $\Gamma_{1,r_n}\cap\Gamma_{2,r_n}=\emptyset$，它们和 $\partial\Omega$ 围成的区域也不相交。但这和 $\lim_{t\to 1-}\gamma(t)=w_0$ 矛盾。所以 $D=\{z_0\}$ 是单点集，那么

$$\lim_{t\ to 1-} g\circ\gamma(t)=z_0$$

边界对应——局部连通性

题 17(1.4-1 引理 1.13 的证明) 设 $A\subset\mathbb{C}$ 是局部连通的连通紧集，设 $\phi:A\to\mathbb{C}$ 是连续映射，证明其连续象 $B=\phi(A)$ 也是局部连通的连通紧集。

解答: 首先根据拓扑理论 B 的开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$ 给出 A 的开覆盖 $\{\phi^{-1}U_i\}_{i\in I}$，利用紧性取出有限子覆盖的指标集如 I_0，那么 $\{U_i\}_{i\in I_0}$ 是 B 的有限子覆盖。从而 B 是紧的，我们无非是重新证明了紧集的连续象是紧集；其次如果 $B=U_1\sqcup U_2$ 那么 $A=(A\cap\phi^{-1}U_1)\sqcup(A\cap\phi^{-1}U_2)$ 和 A 连通矛盾，我们无非重新证明了连通集的连续象是连通的。
最困难是说明 B 局部连通。这里由于 ϕ 是从紧集到 Hausdroff 空间的映射，如果 $Z\subset A$ 是闭集，紧空间的闭子集也是紧的，所以 $\phi(Z)$ 是紧集，而 Hausdroff 空间中的紧集都是闭集，从而 ϕ 将闭集映射到闭集，是一个闭映射。此时对于任何 $y\in U_y\subset B$ 希望找到 U_y 中包含 y 的连通邻域，取 C 是 y 在 U_y 的连通分支。利用 A 局部连通，任取 $x\in\phi^{-1}(C)$ 在 $\phi^{-1}(U_y)$ 中的开连通分支 C_x，那么

$$\phi(x)\in\phi(C_x),\quad \phi(C_x)\subset C$$

包含关系是因为 $\phi(C_x)$ 是连通集而且 C 是包含 $\phi(x)$ 的连通分支。根据选取的任意性 $C_x\subset f^{-1}(C)$ 说明后者是开集。ϕ 是闭映射给出

$$B-C=\phi(A-\phi^{-1}(C))$$

是闭集，从而 C 是开集。那么 B 局部连通。

此结果来自于局部连通空间的连续开映射或连续闭映射的象都是局部连通的。

题 18(1.4-2 Torhorst 定理) 设 $A \subset \mathbb{C}$ 是局部连通的连通紧集，利用定理 1.14 的方法说明 $\mathbb{C} - A$ 的每一个连通分支的边界都是局部连通的。

解答: 此处采用 Riemann 映射的边界连续延拓性质。考虑 $\mathbb{C} - A$ 的每一个分支是单连通的。

第二章: 单叶函数

偏差定理

题 19(2.1-1 裂纹映射) 验证 Koebe 函数 k_0 将 $\mathbb{D}$ 共形地映成 $\mathbb{C}-(-\infty, -\frac{1}{4}]$。

解答: 首先根据定义

$$k_0 = \frac{z}{(1-z)^2}$$

尝试将 Koebe 函数分解成一些映射的复合。如果我们此时记上半平面是 $\mathbb{H} := \{a + b\sqrt{-1} : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+\}$。那么考虑以下解析函数

$$\begin{aligned}
f_1 &: \mathbb{D} \to -\sqrt{-1}\mathbb{H} \\
f_1(z) &:= \frac{1+z}{1-z} \\
f_2 &: -\sqrt{-1}\mathbb{H} \to \mathbb{C} - (-\infty, 0] \\
f_2(z) &:= z^2 \\
f_3 &: \mathbb{C} - (-\infty, 0] \to \mathbb{C} - (-\infty, -\frac{1}{4}] \\
f_3(z) &:= \frac{1}{4}(z-1)
\end{aligned}$$

注意到 f_1, f_2 都是双解析同胚 (逆映射存在而且解析)，而 f_2 在 $\mathbb{C}-(-\infty,0]$ 的逆 $f_2^{-1}(z)=\sqrt{z}$ 也是解析的 (可取其单叶解析分支)。从而它们都是共形映射。那么

$$k_0 = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

从而 $k_0(\mathbb{D})=\mathbb{C}-(-\infty,-\frac{1}{4}]$ 而且 k_0 将 $\mathbb{D}$ 共形地映成 $\mathbb{C}-(-\infty,-\frac{1}{4}]$。

题 20(2.1-2) 证明 $\mathcal{S}$-类函数族是正规族，举例说明 Σ-类函数族不是正规族。

解答: 根据 Koebe 偏差定理 (2.5)，如果 $f\in\mathcal{S}$ 那么

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

从而 f 在单位圆盘上内闭一致有界。那么根据，根据 Montel 定理可知 $\mathcal{S}$-类函数族在单位圆上正规。

考虑解析函数列 $\{z+n\}_{n\in\mathbb{Z}}\subset\Sigma$，但是其中无子列在 $\mathbb{C}-\overline{\mathbb{D}}$ 上内闭一致收敛。所以 Σ-类函数族不是正规族。

题 21(2.1-3) 设 $f\in\Sigma$，$g:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ 是单叶函数有泰勒展开

$$g(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots$$

如果 $f(\mathbb{C}-\bar{\mathbb{D}})\cap g(\mathbb{D})=\emptyset$，证明 $|a_1|\le 1$ 当且仅当 $f(z)=z, g(z)=e^{\sqrt{-1}\phi}z$。

解答: 假设 $f(z)=z+b_0+\frac{b_1}{z}+\cdots$。利用面积定理可知

$$\mathrm{A}(f(\mathbb{C}-\overline{\mathbb{D}}))^c=\pi(1-\sum_{n=1}^{+\infty}n|b_n|^2)$$

用同样的方式计算 $g(\mathbb{D})$ 的面积如

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(g(\mathbb{D})) &= \int_{\mathbb{D}} g'(re^{\sqrt{-1}\theta})\overline{g'(re^{\sqrt{-1}\theta})}rdrd\theta \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2\pi|a_n|^2 \int_0^1 n^2 r^{2n-1}dr = \pi\sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n|^2\end{aligned}$$

有了这些准备可以证明上述命题。

如果 $f(\mathbb{C}-\bar{\mathbb{D}})\cap g(\mathbb{D})=\emptyset$ ，根据面积定理有

$$\pi(1-\sum_{n=1}^{+\infty} n|b_n|^2) \geq \pi\sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n|^2$$

那么有 $|a_1|\leq 1$。等号成立当且仅当 $a_{\geq 2}=0, b_{\geq 1}=0$，此时根据不相交条件只能 $b_0=0$，从而 $f(z)=z, g(z)=e^{\sqrt{-1}\theta}z$。

题 22(2.1-4 Koebe $\frac{1}{4}$-定理) 证明推论 2.8。

解答: 利用几何方法首先说明 $f\in\mathcal{S}$ 则有

$$\frac{1}{4} \leq d(0,\partial f(\mathbb{D})) \leq 1 \tag{1}$$

左半部分来自 Koebe $\frac{1}{4}$-定理，右半部分考虑 $R=d(0,\partial f(\mathbb{D}))$，此时有 $D(0,R)\subset f(\mathbb{D})$，那么考虑反函数 $f^{-1}: D(0,R)\to\mathbb{D}$ 满足 $g^{-1}(0)=0$，利用 Schwarz 引理计算

$$|\frac{d}{dz}g^{-1}(0)| \leq \frac{1}{R} \Rightarrow 1=|g'(0)|\geq R$$

所以不等式成立。对于 $f\in\mathcal{S}$ 考虑 Koebe 变换

$$g(\zeta)=\frac{f(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta})-f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)} \in\mathcal{S}$$

根据此变换的性质不难得到

$$d(f(z),\partial f(\mathbb{D})) = d(0,\partial g(\mathbb{D}))(1-|z|^2)|f'(z)|$$

带入 (1) 中得到

$$\frac{1}{4}(1-|z|^2)|f'(z)| \le d(f(z), \partial f(\mathbb{D})) \le (1-|z|^2)|f'(z)|$$

题 23(2.1-5 偏差定理) 设 $f \in \mathcal{S}$，证明

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le |\frac{zf'(z)}{f(z)}| \le \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

解答: 利用 Koebe 变换

$$h(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z_0}\zeta}\right) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)}$$

可知 $h(0)=0, h'(0)=1$ 从而 $h \in \mathcal{S}$，那么根据 $\mathcal{S}$-族的 Koebe 偏差定理有

$$\frac{|\zeta|}{(1+|\zeta|)^2} \le |h(\zeta)| \le \frac{|\zeta|}{(1-|\zeta|)^2}$$

令 $\zeta = -z$ 即得

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le |\frac{zf'(z)}{f(z)}| \le \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

题 24(2.1-6) 设 $a \in \mathbb{D} - \{0\}$。记

$$\mathcal{F}_a = \{f : f\text{是}\mathbb{D}\text{上单叶函数，}f(z) \in \mathbb{D} - \{a\}, f(0) = 0\}$$

计算 $A = \sup_{f\in\mathcal{F}_a} |f'(0)|$ 并说明此上界是可达的。

解答: 考虑 $g = k_0 \circ f$，这里 $k_0(z)$ 是 Koebe 函数如下

$$k_0(z) = \frac{z}{(1+z)^2}$$

那么此时 $g \in \mathcal{F}_{\frac{a}{(1+a)^2}}$ 而且

$$|g'(0)| = |f'(0)|$$

那么根据 Koebe-$\frac{1}{4}$ 定理可知

$$\mathbb{D}(0,\frac{1}{4}|f'(0)|)=\mathbb{D}(0,\frac{1}{4}|g'(0)|)\subset \mathrm{img}$$

从而推出 $\frac{a}{(1+a)^2}\notin \mathrm{img}$ 给出

$$|f'(0)|\le \frac{4a}{(1+a)^2}$$

下面来说明此就是上确界，考虑 $f_0:\mathbb{D}\to\mathbb{D}-[a,1)$ 是共形映射，那么根据 Koebe distortion theorem 得到此时

$$|(k_0\circ f_0)'(0)|=\frac{4a}{(1-a)^2}$$

单叶函数序列

题 25(2.2-1) 证明引理 2.11。

解答: (1): 区域是连通开集。如果 $\{\Omega_n\}_n$ 单调递增，那么根据讲义可知对任何子列 $\{\Omega_{n_k}\}_k$ (也为单调递增) 都有

$$\Omega_*=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Omega_{n_k}=\Omega$$

特别地 $\omega_0\in\Omega_*$ 这说明 $\Omega_n\to\Omega$。
(2): 根据 Ω_* 的定义，在单调递减的区域列下取不同子列 $\{\Omega_{n_k}\}_k$ 有

$$\begin{aligned}\{w\in\mathbb{C}:\text{存在}w\text{的邻域}U\text{使得除有限个}\Omega_n\text{外均有}U\subset\Omega_n\}&=\mathrm{int}(\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n)\\&=\mathrm{int}(\bigcap_{k=1}^{\infty}\Omega_{n_k})\end{aligned}$$

那么根据定义也有 $\Omega_n\to\Omega$。

题 26(2.2-2) 设 $\{\Omega_n\}$ 为区域序列，满足对任何的 $n \in \mathbb{N}^+, w_0 \in \Omega_n$。求证 $\ker_{w_0}\{\Omega_n\} = \{w_0\}$ 或者 $\ker_{w_0}\{\Omega_n\}$ 是空间

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{int}(\bigcap_{n\geq m} \Omega_n)$$

中包含 w_0 的连通分支。

解答: 根据 Ω_* 的定义有

$$\begin{aligned}\Omega_* &= \{w \in \mathbb{C} : 存在w的邻域U使得除有限个\Omega_n外均有U \subset \Omega_n\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{int}(\bigcap_{m\geq n} \Omega_m)\end{aligned}$$

那么此命题无非是 ker 的定义的复述。

Loewner 方程

题 27(2.3-1) 验证由裂纹映射生成的 Loewner 链确实是一个 Loewner 链。

解答: 只需要验证 (3) 也就是 $f(z, t)$ 是连续函数。当 $t_k \to t$ 时 $\Omega_{t_k} \to \Omega_t$ 核收敛 (单调递增情况，利用 2.2.1)，从而根据单叶函数序列的内闭一致收敛条件得到 $f_{t_k} \to f_t$ 内闭一致收敛。从而说明 $\{f_t\}_t$ 是 Loewner 链。

题 28(2.3-2) 证明 $\beta(t) = f_t'(0)$ 是严格单调递增的。

解答: 当 $s < t$ 时根据 $f_t^{-1} \circ f_s$ 是 $\mathbb{D}$ 到自身的解析函数，那么利用 Schwarz 引理得到 $f_s'(0) \leq f_t'(0)$，如果两种相等，那么利用 Riemann 映射的唯一性可知 $f_s(\mathbb{D}) = f_t(\mathbb{D})$ 和 Loewner 链的定义 (2) 矛盾，从而

$$\beta(s) < \beta(t)$$

即 β 严格单调递增。

题 29(2.3-3) 证明命题 2.15。

解答: 其中只有 (2) 需要形式地说明，也就是圆盘上的 Schwarz 引理。

题 30(2.3-4) 证明当 t 单调下降趋于 s 时 C_{st} 收缩为 $\lambda(s)$；当 s 单调增加趋于 t 时 J_{st} 收缩为 $\lambda(t)$。

解答:

题 31(2.3-5) 设 ϕ_{st} 是规范化 Loewner 链 $\{f_t\}$ 的转移函数，则

$$|\phi_{su}(z)-\phi_{tu}(z)| \le |t-s|\frac{2|z|}{(1-|z|)^2}, \quad 0\le s\le t\le u<\infty$$
$$|\phi_{st}(z)-\phi_{su}(z)| \le |u-t|\frac{2|z|}{(1-|z|)}, \quad 0\le s\le t\le u<\infty$$

解答:

题 32(2.3-6) 设 f 是单位圆 $\mathbb{D}$ 上的单叶函数且满足 $|f(z)|<1, f(0)=0, f'(0)>0$，证明存在 $\partial\mathbb{D}$ 上的有限 Borel 测度 μ 使得

$$f(z)=z\exp(-\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{\zeta+z}{\zeta+z}d\mu(\zeta))$$

解答:

题 33(2.3-7) 设 $\{f_t\}$ 是由曲线 $\gamma(t)$ 生成的规范化 Loewner 链，记 $f = f_0, g_t = f_t^{-1}$ 求证

(1) $\lim_{t\to\infty} e^t g_t(f(z)) = f(z)$。

(2) 令 $h(z,t) = g_t(f(z))$ 则其满足如下的 Loewner 方程

$$\dot{h}(z,t) = h'(z,t)\frac{\lambda(t)+h(z,t)}{\lambda(t)-h(z,t)}$$

这里 $\lambda(t) \in \partial\mathbb{D}$ 连续。

解答:

题 34(2.3-8) 设 $\{f_t\}_{t\in I}$ 是规范化 Loewner 链，定义

$$f(t) = f_0(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

$f_t(z)$ 满足如下 Loewner 方程

$$\dot{f}_t(z) = zp(z,t)f_t'(t)$$

其中 $p(t,z) \in \mathcal{P}$。求证 $|a_2| \leq 2, |a_3| \leq 3$。

解答:

题 35(2.3-9) 验证 Loewner 方程

$$\dot{f}_t(z) = z\frac{1+z}{1-z}f_t'(z)$$

的规范化 Loewner 链解 $\{f_t\}_{t\in I}$ 是

$$f_t(z) = \frac{e^t z}{(1+z)^2}$$

解答:

第三章: 调和函数

调和函数和共轭调和函数

题 36(3.1-1 Jensen 公式) 如果 $f(z)$ 在区域 Ω 上解析而且非零，则 $\ln|f(z)|$ 是调和函数。

解答: 此时 $\ln|f|$ 是光滑函数，取 $\ln f, \ln\overline{f}$ 的某一个分支计算出

$$\Delta \ln|f| = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\ln|f| = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\frac{f'}{f}) + 2\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\frac{f'}{f}}) = 0$$

题 37(3.1-2 调和函数的性质) 证明复平面的正调和函数一定是常数。

解答: 设这个正的调和函数是 u。考虑任何的 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$，根据平均值性质取圆盘 $D(z_1, r_1), D(z_2, r_2)$ 满足 $r_1 - r_2 = |z_1 - z_2|$ 从而使得 $D(z_1, r_1) \supset D(z_2, r_2)$。根据平均值性质

$$u(z_1) = \frac{\int_{D(z_1,r_1)} u}{\pi r_1^2} \geq \frac{\int_{D(z_2,r_2)} u}{\pi r_1^2} = \frac{\pi r_2^2}{\pi r_1^2}u(z_2)$$

令 $r_1 \to +\infty$ 从而得到

$$u(z_1) \geq u(z_2)$$

利用对称性重复上述论证得到

$$u(z_2) \geq u(z_1)$$

从而任两点 u 的取值相同，即 u 是常数。

单连通区域调和函数存在单值共轭 v, 则 $f = u + iv \equiv \text{const} \;\Rightarrow\; u \equiv \text{const}.$

题 38(3.1-3 同调基的存在性) 有限连通区域 Ω 上一定存在一组同调基。

解答: 利用 1.2-5 找到闭曲线 $\gamma_1, ...\gamma_n$。

题 39(3.1-4) 有限连通区域 Ω 上解析函数 $f(z)$ 有原函数的充要条件是 $f(z)$ 在 Ω 的一组同调基上的积分均为零。

解答: 只需要说明任何环路可以同伦到同调基的线性组合，也就是

$$s = \sum_i n_i[\gamma_i], \quad n_i$$

然后说明同伦的路径上解析函数有相同的积分。

题 40(3.1-5) 设 Ω 是单连通区域，γ 是 Ω 中的一条闭曲线，函数 u_1, u_2 在 Ω 上调和。证明

$$\int_\gamma u_1 d^* u_2 - u_2 d^* u_1 = 0$$

试将此结论推广到多连通区域。

解答: 利用格林公式计算。

题 41(3.1-6) 设函数 $u(z)$ 在 $D(0,R) - \{0\}$ 上调和，在 $\overline{D(0,R)} - \{0\}$ 上连续有界，且 $u(Re^{\sqrt{-1}\theta}) = 0, \forall\theta \in [0, 2\pi]$。证明 $u(z) \equiv 0$。

解答: 此时 0 是 u 的可去奇点。利用 Possion 积分和极大极小原理。

题 42(3.1-7) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ 上的正调和函数都是常数。

解答: 假设 u 是 $\mathbb{C}^*$ 上的正调和函数，考虑指数映射 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*, f(z)=e^z$，那么复合映射

$$\mathbb{C}\xrightarrow{e^z}\mathbb{C}^*\xrightarrow{u}\mathbb{R}_{>0}$$

是 $\mathbb{C}$ 上的正调和函数，因为此时 $\Delta u\circ f=|f'|^2\Delta u=0$。所以根据 3.1-2 可知复合映射是常数，从而根据 f 是满射得到 u 是常数。

$f=e^{A(u+iv)}$ 在 C^* 解析且无法取到 $w\in C^\infty$ 任三个点故为常值 (假设 $P=\int_\gamma d^*u>0$)。

均值公式和 Poisson 公式

题 43(3.2-1) 证明定理 3.9 并对定理后面的注给出一个例子。

解答: 利用滚圆法，对任何 $z,z_0\in\Omega$ 有道路 γ 连接 z,z_0。作有限个开圆盘 $D(s_k,r_k)\subset\Omega$ 满足 $s_k\in\gamma,\gamma\subset\cup_k D(s_k,r_k), s_0=z_0, r_0=r, s_n=z$。由于 u 在 $D(z_0,r_0)$ 上有共轭调和函数，那么这给出一个纯虚的解析函数。只能是常数，那么此时

$$u|_{D(s_0,r_0)\cap D(s_1,r_1)}=0$$

u 在 $D(s_1,r_1)$ 上可以作为解析函数的实部，而这个解析函数在 $D(s_0,r_0)\cap D(s_1,r_1)$ 是纯虚的，所以在相交部分 f 是常数，那么 $f^{(1)}$ 有稠密的零点，推出 f 在 $D(s_1,r_1)$ 上是常数，只能是纯虚的常数。从而 u 在 $D(s_1,r_1)$ 上恒为零。

归纳可知 u 在 $D(s_n,r_n)$ 上恒为零，从而 $u(z)=0$。推出 $u|_\Omega\equiv 0$。这样的例子有很多，例如

$$u(x,y)=xy,\quad u(x,y)=x,\quad u(x,y)=y$$

题 44(3.2-2) 证明 $\int_0^\pi \ln(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta = 0, \forall 0<r<1$。

解答: 如果考虑 $z = re^{\sqrt{-1}\theta}$，在圆周 $D(0,r)=\{z\in\mathbb{C}:|z|=r\}$ 上积分，就有

$$\int_0^\pi \ln(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta = \frac{1}{2}\int_{D(0,r)} \ln|1-z|\frac{dz}{\sqrt{-1}z} = \frac{1}{2}\ln|1-0| = 0$$

利用了 $\ln|1-z|$ 在 $D(0,r)$ 调和导出的平均值性质。

题 45(3.2-3 Schwartz 公式) 证明 Schwarz 公式 (3.20) 和 (3.21)。

解答: 不失一般性不妨设 $z_0=0$。一般的公式可利用平移给出。根据 Possion 公式

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{\sqrt{-1}\theta})\frac{\rho^2-|z|}{|\rho e^{\sqrt{-1}\theta}-z|}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\oint_{C(0,\rho)} f(\zeta)\mathrm{Re}(\frac{\zeta-z}{\zeta+z})\frac{d\zeta}{\sqrt{-1}\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{C(0,\rho)} f(\zeta)\mathrm{Re}(\frac{\zeta-z}{\zeta+z})\frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned}$$

令 $f(z)=u(z)+\sqrt{-1}v(z), u(z)=\mathrm{Re}f$，那么计算得到

$$g(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{C(0,\rho)} u(\zeta)\frac{\zeta-z}{\zeta+z}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

那么 $f-g$ 是纯虚的解析函数，一定为常值，从而

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{\sqrt{-1}\theta})\frac{\rho e^{\sqrt{-1}\theta}-z}{\rho e^{\sqrt{-1}\theta}+z}d\theta + \sqrt{-1}v$$

取 $z=0$ 此时对比等式两边的实部虚部可知 $v=v(0)$，从而

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{\sqrt{-1}\theta})\frac{\rho e^{\sqrt{-1}\theta}-z}{\rho e^{\sqrt{-1}\theta}+z}d\theta + \sqrt{-1}v(0)$$

这就是 $z_0=0$ 时的 (3.20)。我们将其写成更加紧凑的形式如下

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|\zeta|=\rho}u(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}+\sqrt{-1}\mathrm{Im}f(0) \tag{SI}$$

对于 $z_0\neq 0$ 可以取 $g(z)=f(z_0+z)$ 在 $D(0,\rho)$ 上解析，利用上式给出

$$\begin{aligned}
f(z)=g(z-z_0)&=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|\zeta|=\rho}\mathrm{Re}g(\zeta)\frac{\zeta+(z-z_0)}{\zeta-(z-z_0)}\frac{d\zeta}{\zeta}+\sqrt{-1}\mathrm{Im}g(0)\\
&=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|\zeta|=\rho}\mathrm{Re}g(\zeta)\frac{\zeta+(z-z_0)}{\zeta-(z-z_0)}\frac{d\zeta}{\zeta}+\sqrt{-1}\mathrm{Im}f(z_0)\\
&=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\mathrm{Re}f(\zeta)\frac{(\zeta-z_0)+(z-z_0)}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}\frac{d\zeta}{\zeta-z_0}+\sqrt{-1}\mathrm{Im}f(z_0)\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+\rho e^{\sqrt{-1}\theta})\frac{\rho e^{\sqrt{-1}\theta}+(z-z_0)}{\rho e^{\sqrt{-1}\theta}-(z-z_0)}d\theta+\sqrt{-1}\mathrm{Im}f(z_0) \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

即一般形式的 Schawarz 公式 (3.20)。另一方面考虑 $f(z)+\overline{f}(z)=2u(z)$，定义解析函数 $f^\vee(z)=\overline{f}(\overline{z})$ 有

$$f(z)+f^\vee(\overline{z})=2u(z)$$

用 $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$ 在 $|\zeta|=\rho$ 上积分上式

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{|\zeta|=\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{|\zeta|=\rho}\frac{f^\vee(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\oint_{|\zeta|=\rho}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

考虑 $f^\vee$ 的 Taylor 展开

$$f^\vee(\zeta)=\overline{f(0)}+\overline{\frac{df}{dz}(0)}\frac{\rho}{\zeta}+\frac{1}{2!}\overline{\frac{d^2f}{d^2z}(0)}\frac{\rho^2}{\zeta^2}+\frac{1}{3!}\overline{\frac{d^3f}{d^3z}(0)}\frac{\rho^3}{\zeta^3}+\cdots$$

逐项积分，利用

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{|\zeta|=\rho}\frac{d\zeta}{\zeta^n(\zeta-z)}=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$$

并且利用柯西积分公式得到

$$f(z)+\overline{f(0)}=\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\oint_{|\zeta|=\rho}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

也就是 (3.21) 的原点处版本

$$f(z)=\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\oint_{|\zeta|=\rho}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\overline{f(0)}\quad\forall z\in D(0,\rho)\tag{SII}$$

仍然取 $g(z)=f(z_0+z-z_0)$，带入上式得到一般的 (3.21) 式

$$\begin{aligned}f(z)=g(z-z_0)&=\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\oint_{|\zeta|=\rho}\frac{u(z_0+\zeta)}{\zeta-(z-z_0)}d\zeta-\overline{g(0)}\quad\forall z\in D(z_0,\rho)\\&=\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\oint_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\overline{f(z_0)}\quad\forall z\in D(z_0,\rho)\end{aligned}$$

题 46(3.2-4) 设 $u(z)$ 是有界区域 Ω 上的有界调和函数，除去 $\partial\Omega$ 上有限多个点 $\zeta_1,..,\zeta_m$ 外对任何的 $\zeta\in\partial\Omega,\zeta\neq\zeta_k,k=1,..,m$，均有 $\overline{\lim}_{z\to\zeta}u(z)\leq M$ 则 $u(z)\leq M$ 对一切 $z\in\Omega$ 成立。

解答: 记 $M=\mathrm{diam}(\Omega)$。对每一个 ζ_k 考虑如下的次调和函数

$$v_k(z)-\varepsilon\log\frac{M}{|z-\zeta_k|}\leqslant 0,\qquad k=1,..,m$$

在边界成立。之后使用最大值原理得到结论。

题 47(3.2-5) 设 $\phi(e^{\sqrt{-1}\theta})=1,\theta\in[0,\pi),\phi(e^{\sqrt{-1}\theta})=0,[\pi,2\pi)$。求 ϕ 在单位圆上的 Possion 积分。

解答: 根据 Poisson 公式计算如下

$$\begin{aligned}u_\phi(r,\theta)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(w-\theta)}dw=\frac{1}{2\pi}\int_\theta^{\pi+\theta}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x}dx\\&=\frac{1}{2\pi}(2\arctan(\frac{1+r}{1-r}\tan(\frac{x}{2})))|_{x=-\theta}^{x=\pi-\theta}\\&=\frac{1}{\pi}[\arctan(\frac{1+r}{1-r}\tan(\frac{\theta}{2}))+\arctan(\frac{1+r}{1-r}\cot(\frac{\theta}{2}))]\end{aligned}$$

题 48(3.2-6) 设函数 $u(z)$ 在上半平面 $\mathbb{H}$ 上调和，在 $\overline{\mathbb{H}}$ 上连续有界，证明上半平面的 Possion 积分公式

$$u(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}u(t)dt,\quad z=x+\sqrt{-1}y\in\mathbb{H}$$

解答: 模仿 Poisson 公式的证明，考虑共形映射 $\varphi:\mathbb{H}\to\mathbb{D}$

$$\varphi(z)=\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}},\forall z_0\in\mathbb{H}$$
$$\psi(\zeta)=\varphi^{-1}(\zeta)=\frac{z_0-\overline{z_0}\zeta}{1-\zeta}$$

计算出

$$\Delta u\circ\psi=(\Delta u\circ\psi)(|\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}|^2)+(\Delta\psi)\mathrm{Grad}u\circ\psi=0$$

得到 $u\circ\psi(w)$ 是 $\mathbb{D}$ 上的调和函数。设 $z_0=x+y\sqrt{-1}$ 利用单位圆上均值公式再做变量替换

$$\begin{aligned}u(z_0)=u\circ\psi(0)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\circ\psi(e^{\sqrt{-1}\theta})d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}u(t)\frac{d\theta}{dt}dt,\quad d\theta=\frac{2y}{(x-t)^2+y^2}dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}u(t)dt\end{aligned}$$

题 49(3.2-7) 设函数 ϕ 在 $C(z_0,\rho)$ 上连续，则由 (3.14) 定义的函数 $u_\phi(z)$ 在 $\mathbb{C}-C(z_0,\rho)$ 上有定义而且是调和函数，计算

$$\overline{\lim}_{\substack{z\in\mathbb{C}-\overline{D(z_0,\rho)},\\ z\to\zeta}}u_\phi(z),\quad \zeta\in C(z_0,\rho)$$

解答:

题 50(3.2-8 Sokhotski-Plemeli 定理) 设函数 ϕ 在 $C(z_0,\rho)$ 上 Hölder 连续，则 Cauchy 型积分

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{\phi(z)}{\zeta-z}d\zeta,\quad z\in\mathbb{C}-C(z_0,\rho)$$

在 $\mathbb{C}-C(z_0,\rho)$ 上解析。证明对于 $\zeta=z_0+\rho e^{\sqrt{-1}\theta}\in C(z_0,\rho)$，下列极限

$$f_+(z_0+\rho e^{\sqrt{-1}\theta})=\lim_{r\to\rho^-}f(z_0+re^{\sqrt{-1}\theta})$$
$$f_-(z_0+\rho e^{\sqrt{-1}\theta})=\lim_{r\to\rho^+}f(z_0+re^{\sqrt{-1}\theta})$$

存在而且满足

$$f_+(\zeta)-f_-(\zeta)=\phi(\zeta),\quad\forall\zeta\in C(z_0,\rho)$$

解答:

第四章:Dirichlet 问题

次调和函数

题 51(4.1-1) 证明定理 4.5 中的 (1) 和 (2)。

解答: (1) 根据共形映射的性质，对任何 $\overline{B(z,r)}\subset\Omega$ 和 $B(z,r)$ 上的调和函数 v，$v\circ\phi^{-1}$ 是 $\phi(B(z,r))$ 上的调和函数，那么

$$u-v\circ\phi^{-1}$$

是次调和函数，满足最大值原理，从而在共形映射下 $u\circ\phi-v$ 在 $B(z,r)$ 上满足最大值原理。那么根据等价定义，$u\circ\phi$ 是次调和函数。

(2) 考虑 $u=\max\{u_1,..,u_m\}$ 对任何 $\overline{B(z,r)}\subset\Omega$ 根据次调和性质

$$u(z)=u_i(z)\leq\frac{1}{2\pi}\int_{C(z,r)}u_i\leq\frac{1}{2\pi}\int_{C(z,r)}u$$

从而说明 u 是次调和函数。

题 52(4.1-2) 证明 $e^{|z|}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的次调和函数。

解答: 只需计算 Laplace 算子的作用

$$\Delta e^{|z|}=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})e^{\sqrt{x^2+y^2}}=e^{|z|}+e^{|z|}\Delta|z|=e^{|z|}>0$$

题 53(4.1-3) 如果 u 在区域 Ω 上调和，则 $|u|^\alpha,\alpha>1$ 在 Ω 上次调和；如果 f 在 Ω 上解析，则 $|f|^\alpha,\alpha>0$ 在 Ω 上调和。

解答: 注意到 $g(x)=|x|^p,x>0,p>1$ 是连续单调递增的下凸函数。u 是调和函数，根据下一题 (4.1.4) 的结论得到

$$|u|^p=g\circ u$$

是次调和函数。

如果 f 解析。根据 3.1.1 可知 $\ln|f|$ 是调和函数 (也是次调和)。而 $g(x)=e^{\alpha x},\alpha>0$ 是单调递增的下凸函数，根据下一题 (4.1.4) 的结论

$$|f|^\alpha=e^{\alpha\ln|f|}=g\circ\ln|f|$$

是次调和函数。

题 54(4.1-4) 设 $u(z)$ 是区域 Ω 上的次调和函数，$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续单调递增的下凸函数，则 $g\circ u$ 是次调和函数。

解答: 首先回顾一下积分形式的 Jensen 不等式。由于凸性和单调收敛原理，(下) 凸函数存在左右导数，而且在定义域中的点 x_0 有次微分 $Dg|_{x_0}$ 满足

$$g(x) \geq g(x_0) + Dg|_{x_0}(x - x_0)$$

如果取 $x_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$，对上述不等式在 $x = f(t), a \leq t \leq b$ 上积分就得到

$$g(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g \circ f(t)dt$$

将此不等式应用到 $b - a = 2\pi$ 的圆周积分上则对任何的 $\overline{B(z,r)} \subset \Omega$

$$g(\int_{C(z,r)} u(z + e^{\sqrt{-1}\theta})\frac{d\theta}{2\pi}) \leq \int_{C(z,r)} g \circ u(z + e^{\sqrt{-1}\theta})\frac{d\theta}{2\pi}$$

那么对于 u 是次调和函数而且 g 是单调递增的下凸函数时

$$g \circ u(z) \leq g(\int_{C(z,r)} u(z + e^{\sqrt{-1}\theta})\frac{d\theta}{2\pi}) \leq \int g \circ u(z + e^{\sqrt{-1}\theta})\frac{d\theta}{2\pi}$$

对任何的 $\overline{B(z,r)} \subset \Omega$ 成立，从而 $g \circ u$ 是 Ω 上次调和函数。

题 55(4.1-5) 设 $\{u_\alpha\}$ 是区域 Ω 上的次调和函数族，如果 $u = \sup_\alpha u_\alpha < +\infty$ 连续则 u 在 Ω 上次调和。

解答: 对任何的 $\overline{B(z,r)} \subset \Omega$ 可以取子列 u_k 使得 $u(z) = \lim_k u_k(z) < +\infty$，如果取 $v_N = \max_{k \leq N}\{u_k\}$ 根据 4.1.1 可知 v_N 是递增的次调和函数，那么此时

$$u(z) \leq v_N(z) + \epsilon(N) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{C(z,r)} v_N + \epsilon(N) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{C(z,r)} u + \epsilon(N)$$

这里 $\lim_{N\to+\infty}\epsilon(N) \to 0$。从而令上式中 $N \to +\infty$ 有

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{C(z,r)} u$$

推出 u 是次调和函数。

题 56(4.1-6) 利用定理 4.2 的等价定义证明定理 4.4。

解答: 一个启发性的方法是计算

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\int_{D(x_0,r)} u}{2\pi}|_{r=0} = \Delta u|_{x_0}$$

从而最大值性质说明上述的径向导数是非负的从而说明此时 $\Delta u \geq 0$。反之也是如此。利用 Stokes 公式得到。

题 57(4.1-7) 证明复平面上有上界的次调和函数是常值函数。

解答: 考虑 u 是这样一个有上界的次调和函数，记 M 是 u 的上确界。考虑

$$v_\epsilon(z) := u(z) - \epsilon \ln|z|, \epsilon > 0$$

那么 $|z| > 1$ 时有 $v_\epsilon(z) < u(z) \leq M$，而此时 v_ϵ 也是次调和的，由于 u 有界，那么

$$\lim_{|z|\to+\infty} v_\epsilon(z) = -\infty$$

存在正数 R 满足对所有的 $|z| \geq R$ 函数值 $v_\epsilon(z) < u(1)$ 此时利用最大值性质得到

$$\sup_{|z|\geq 1} v_\epsilon(z) = \max\{\sup_{|z|\geq R} v_\epsilon(z), \sup_{1\leq|z|\leq R} v_\epsilon(z)\} = \sup_{1\leq|z|\leq R} v_\epsilon(z) = \sup_{|z|=1} v_\epsilon(z)$$

利用 u 的最大值性质得到

$$\sup_{|z|\geq 1} v_\epsilon(z) = \sup_{|z|=1} v_\epsilon = \sup_{|z|=1} u(z) = \sup_{\mathbb{D}} u(z)$$

从而有

$$u(z) = v_\epsilon(z) + \epsilon \ln|z| \leq \sup_{\mathbb{D}} u(z) + \epsilon \ln|z| \quad \forall |z| > 1$$

取 $\epsilon \to 0$ 得到

$$u(z) \leq \sup_{\mathbb{D}} u(z), \quad |z| > 1$$

从而 u 可以在 $\mathbb{C}$ 内部取最大值，那么只有 $u \equiv u(0)$。

Perron 方法

题 58(4.2-1) 设 $\Omega=\mathbb{D}-\{0\},\varphi|_{|\zeta|=1}=0,\varphi(0)=1$，求 Ω 上关于 φ 的 Perron 函数 u。

解答: 此 Perron 函数是 $u=0$。因为有如下结论:

如果 $\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}}\varphi\leq\varphi(0)<+\infty$，上述问题的 Perron 函数是 $\varphi|_{\partial\mathbb{D}}$ 的 Poisson 积分。

证明如下，取

$$h_p(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\varphi(z)P(\zeta,z)dz$$

注意到 $\widetilde{h_p}=h_p|_{\mathbb{D}-0}$ 在 Perron 族中，所以 $\widetilde{h_p}\leq u(z)$。只需要说明 $\widetilde{h_p}(z)\geq u(z)$。考虑 $\lambda(z)=\log|z|$ 是 Ω 上调和函数以及 $\lambda(z)=0$ 当且仅当 $|z|=1$，当 $z\to 0$ 时 $\lambda(z)\to-\infty$。构造

$$v(z)-(\widetilde{h_p}+C\lambda(z)),\quad C>0,v\in\mathcal{P}(\varphi,\Omega)$$

根据次调和函数的最大值原理，对足够小的 $\delta>0$ 有

$$v(z)-(\widetilde{h_p}+C\lambda(z))\leq 0,\forall z\in A(\delta,1)$$

此时取 $C\to 0$ 得到 $u(z)\leq h_p$。

题 59(4.2-2) 证明一个有界区域对任意 Dirichlet 问题都有解的充要条件是其边界上每一点都有闸函数。

解答:

Green 函数和调和测度

题 60(4.3-1) 验证 (4.9) 并求上半平面的格林函数。

解答: 根据共形不变形只需要找出 $G \to \mathbb{D}$ 的 Riemann 映射，再根据已知单位圆上以 $z=0$ 为奇点的 Green 函数

$$D(c,\rho) \to \mathbb{D} : \zeta = \frac{\rho(z-z_0)}{\rho^2 - \overline{(z_0-c)}(z-c)}$$

利用共形等价

$$\mathbb{H}^* \to \mathbb{D} : \zeta = \frac{z-i}{z+i}$$

代入 $-\log|\zeta|$ 即得上半平面的 Green 函数为

$$g_{\mathbb{H}}(z,w) = -\ln\frac{|z-w|}{|z-\overline{w}|}$$

题 61(4.3-2) 证明格林函数有对称性，也就是 $g(z,w)=g(w,z), \forall z,w\in\Omega$。

解答:

题 62(4.3-3) 验证调和测度的性质 (1)-(4)。

解答:

题 63(4.3-4) 记上半圆盘是 $\mathbb{D}^+ = \mathbb{D}\cap\mathbb{H}$、一维球 $E=[-1,1]$、环形区域 $A(r_1,r_2)=\{z : r_1<|z|<r_2\}$ 和圆周 $C(0,r)=\{z : |z|=r\}$，计算如下调和测度

$$\omega_{\mathbb{D}^+}(z,E); \quad \omega_{A(r_1,r_2)}(z,C(0,r))$$

解答: 对于上半单位圆盘，考虑用共形映射 $z\to(z+\frac{1}{z})$ 映射到上半平面并且考虑“补”问题 E 为上半圆弧（因为映射到 $[-2,2]$ 可以利用上半平面调和函数的结论，即

$$\omega_{w,E}=\frac{1}{\pi}\left(\arg(w-T)-\arg(w+T)\right)$$

其中 $E=[-T,T]$，故

$$\omega_{z,[-1,1]}=1-\frac{1}{\pi}\arg\left(\frac{z+1/z+2}{z+1/z-2}\right)$$

以及

$$\omega_{z,A}=1-\frac{\log|z|-\log r_1}{\log r_2-\log r_1}$$

题 64(4.3-5) 设 Ω 是一个有界区域，$\{\Omega_n\}$ 是一列区域下降到 Ω 的区域。对于 $z_0\in\Omega$ 记 $g(z,z_0)$ 是 Ω 上的格林函数，$g_n(z,z_0)$ 是 Ω_n 上的格林函数。证明 $g_n(z,z_0)$ 在 $\Omega-\{z_0\}$ 上内闭一致收敛到 $g(z,z_0)$。

解答: 取 $u_n=g_n(z,z_0)+\log|z-z_0|$,利用 g_n 的正调和性与区域的单增说明调和函数: $u_n(z)\le u_{n+1}(z),z\in\partial\Omega_n$，由最小值原理可知 $u_n(z)\le u_{n+1}(z),z\in\Omega_n$ ，由 Harnark 定理即得。

题 65(4.3-6 Green 公式) 设 Ω 是由光滑曲线围成的区域，$g(z,w)$ 是 Ω 上的 Green 函数。设 f 在 Ω 上解析，在 $\overline{\Omega}$ 上连续，证明

$$f(z)=-\frac{2}{\pi}\iint_\Omega f(w)\frac{\partial^2 g(z,w)}{\partial z\partial\bar{w}}dxdy$$

解答: 利用 Stokes 公式构造 $f(w)\frac{\partial^2 g(z,w)}{\partial z\partial\bar{w}}$ 到 $\mathrm{d}(fh)$ 使得 (这里 $d:\bigwedge(\mathbb{C}dw+\mathbb{C}d\overline{w})\to\bigwedge(\mathbb{C}dw+\mathbb{C}d\overline{w})$ 是关于 ω 形式的微分)

$$\iint_\Omega \mathrm{d}(fh)=\int_{\partial\Omega}fh \tag{A1}$$

于是应该取 $h=\frac{\partial g}{\partial z}(z,w)dw$ 利用 f 解析 $\overline{\partial}f=0$ 有

$$\begin{aligned} d(fh) &= (\frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(w)\frac{\partial^2 g(z,w)}{\partial z\partial \bar{w}}+f(w)\frac{\partial^2 g(z,w)}{\partial z\partial \bar{w}})d\overline{w}\wedge dw \\ &= f(w)\frac{\partial^2 g(z,w)}{\partial z\partial \bar{w}}2\sqrt{-1}dx\wedge dy \end{aligned}$$

从而利用 (A1) 计算出在挖去一个圆盘区域 $\Omega\setminus D(z,\delta_0)$ 上 $g(z,w)=0, w\in \partial\Omega$

$$2\sqrt{-1}\iint_G f(w)\frac{\partial^2 g(z,w)}{\partial z\partial \bar{w}}dxdy=\int_{\partial\Omega-\partial D(z,\delta)} f(w)\frac{\partial g}{\partial z}(z,w)\mathrm{d}w$$

利用 Green 函数的性质

$$g(z,w)=-\ln|z-w|+u(z,w)$$

其中 $u(z,w)$ 关于 z 在 Ω 上调和则

$$\begin{aligned} &\iint_G f(w)\frac{\partial^2 g(z,w)}{\partial z\partial \bar{w}}dxdy=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_{\partial\Omega-\partial D(z,\delta)} f\frac{\partial g}{\partial z}\mathrm{d}w \\ &=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial z}\mathrm{d}w+\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_{\partial D(z,\delta)}\frac{f(w)}{w-z}dw+\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_{-\partial D(z,\delta)} f\frac{\partial g}{\partial z}dw \\ &=0+-\frac{\pi}{2}\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_{\partial D(z,\delta)}\frac{f(w)}{w-z}dw)-\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_{\partial D(z,\delta)} f\frac{\partial g}{\partial z}dw \\ &\qquad \text{因为} g(z,\partial\Omega)=0 \\ &=-\frac{\pi}{2}f(z)-0 \quad \text{根据 Cauchy 积分公式和积分绝对连续性} \end{aligned}$$

从而给出

$$f(z)=-\frac{2}{\pi}\iint_\Omega f(w)\frac{\partial^2 g(z,w)}{\partial z\partial \bar{w}}dxdy$$

上式中的 $-\partial D(z,\delta)$ 表示顺时针，不加负号表示逆时针。此记号为了符合 Stokes 公式的一般形式。

多连通 Riemann 映射定理

题 66(4.4-1) 设 $A(r,R)=\{z\in\mathbb{C}: r\le|z|\le R\}$，证明不存在 $A(r,R)$ 上的解析函数 f 使得 $\mathrm{Re}f|_{|z|=r}=0, \mathrm{Re}f|_{|z|=R}=1$。

解答:

题 67(4.4-2 多连通调和函数) 设 Ω 是有分段光滑边界的有限连通有界区域，$E_1,E_2,\cdots,E_{n-1}$ 是 Ω 的有界余分支的边界。记 $\omega_k(z)=\omega_\Omega(z;E_k), k=1,2,\cdots,n-1$。证明调和函数 $\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\omega_k$ 有共轭调和函数的充要条件是 $\lambda_k=0, \forall k=1,2,\cdots,n-1$。

解答: 直接验证。

题 68(4.4-3) 证明二连通区域的共形模的定义不依赖于共形映射的选取且它是一个共形不变量。

解答:

第五章: 极值长度和共形模

极值长度

题 69(5.1-1 极值长度的区域无性) 设区域 Ω_1,Ω_2 满足 $\Omega_1\cap\Omega_2\neq\emptyset$。曲线族 $\Gamma\subset\Omega_1\cap\Omega_2$。证明 $\lambda_{\Omega_1}(\Gamma)=\lambda_{\Omega_2}(\Gamma)=\lambda_{\Omega_1\cap\Omega_2}(\Gamma)$。

解答: 对于 $\mathcal{A}(\Omega_1)$ 和 $\mathcal{A}(\Omega_1\cap\Omega_2)$ 存在对应关系

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\Omega_1) & \leftrightarrows & \mathcal{A}(\Omega_1\cap\Omega_2) \\ \rho & \to & \rho|_{\Omega_1\cap\Omega_2} \\ \rho' 1_{\Omega_1\cap\Omega_2} & \leftarrow & \rho' \end{array}$$

这给出不等式

$$\lambda_{\Omega_1} \le \lambda_{\Omega_1\cap\Omega_2} \le \lambda_{\Omega_1}$$

从而分别对 Ω_1, Ω_2 进行上述论证得到

$$\lambda_{\Omega_1} = \lambda_{\Omega_2} = \lambda_{\Omega_1\cap\Omega_2}$$

题 70(5.1-2) 证明注 5.2。

解答: 此时定义了如下容许度量的子集

$$\mathcal{A}_1(\Omega,\Gamma) := \{\rho \in \mathcal{A}(\Gamma) : \mathrm{A}_\rho(\Omega) \le 1\}$$
$$\mathcal{A}_2(\Omega,\Gamma) := \{\rho \in \mathcal{A}(\Gamma) : l_\rho(\Gamma) \ge 1\}$$
$$\mathcal{A}_3(\Omega,\Gamma) := \{\rho \in \mathcal{A}(\Gamma) : \mathrm{A}_\rho(\Omega) = l_\rho(\Gamma)\}$$

那么根据上确界的定义和上述子集的性质就有

$$\lambda(\Gamma) \ge \sup_{\rho\in\mathcal{A}_1(\Omega,\Gamma)} \frac{l_\rho(\Gamma)^2}{\mathrm{A}_\rho(\Omega)} \ge \sup_{\rho\in\mathcal{A}_1(\Omega,\Gamma)} l_\rho(\Gamma)^2$$
$$\lambda(\Gamma) \ge \sup_{\rho\in\mathcal{A}_2(\Omega,\Gamma)} \frac{l_\rho(\Gamma)^2}{\mathrm{A}_\rho(\Omega)} \ge \sup_{\rho\in\mathcal{A}_2(\Omega,\Gamma)} \frac{1}{\mathrm{A}_\rho(\Omega)}$$
$$\lambda(\Gamma) \ge \sup_{\rho\in\mathcal{A}_1(\Omega,\Gamma)} \frac{l_\rho(\Gamma)^2}{\mathrm{A}_\rho(\Omega)} \ge \sup_{\rho\in\mathcal{A}_1(\Omega,\Gamma)} l_\rho(\Gamma)$$

于是只需要证明反向的不等式。取一列 ρ_k 使得 $\lambda(\Gamma) = \overline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{l_{\rho_k}(\Gamma)^2}{A_{\rho_K}(\Omega)}$。将这些度量数乘适当倍数就有如下关系

$$\rho_{1k} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}_{\rho_k}(\Omega)}}\rho_k \qquad \in \mathcal{A}_1(\Omega,\Gamma)$$
$$\rho_{2k} = \frac{1}{l_{\rho_k}(\Gamma)}\rho_k \qquad \in \mathcal{A}_2(\Omega,\Gamma)$$
$$\rho_{3k} = \frac{l_{\rho_k}(\Gamma)}{\mathrm{A}_{\rho_k}(\Omega)} l_{\rho_k}(\Gamma)\rho_k \qquad \in \mathcal{A}_3(\Omega,\Gamma)$$

由于数乘不改变 ρ-长度的平方与 ρ-面积的比值。从而就有

$$\sup_{\rho\in\mathcal{A}_1(\Omega,\Gamma)} l_\rho(\Gamma)^2 \geq \overline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{l_{\rho_k}(\Gamma)^2}{A_{\rho_K}(\Omega)} = \lambda(\Gamma)$$
$$\sup_{\rho\in\mathcal{A}_2(\Omega,\Gamma)} \frac{1}{\mathrm{A}_\rho(\Omega)} \geq \overline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{l_{\rho_k}(\Gamma)^2}{A_{\rho_K}(\Omega)} = \lambda(\Gamma)$$
$$\sup_{\rho\in\mathcal{A}_3(\Omega,\Gamma)} l_\rho(\Gamma) \geq \overline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{l_{\rho_k}(\Gamma)^2}{A_{\rho_K}(\Omega)} = \lambda(\Gamma)$$

于是给出

$$\lambda(\Gamma) = \sup_{\rho\in\mathcal{A}_1(\Omega,\Gamma)} l_\rho(\Gamma)^2 = \sup_{\rho\in\mathcal{A}_2(\Omega,\Gamma)} \frac{1}{\mathrm{A}_\rho(\Omega)} = \sup_{\rho\in\mathcal{A}_3(\Omega,\Gamma)} l_\rho(\Gamma)$$

题 71(5.1-3) 如果 Γ 只包含一条曲线 γ 求 $\lambda(\Gamma)$。

解答: 使用 Schwarz-Cauchy 不等式计算可知当 $\Gamma=\{\gamma\}$ 时取区域是 $\Omega_n = \gamma+[-\sqrt{-1}\frac{1}{n},\sqrt{-1}\frac{1}{n}]$，取度量 $\rho_n = 2n\frac{1}{l(\gamma)}$。从而有 $A_{\rho_n}(\Omega_n)\leq 1$。从而根据定义有

$$\lambda(\Gamma)\geq 2n \qquad \forall n\in\mathbb{Z}$$

推出

$$\lambda(\Gamma) = +\infty$$

题 72(5.1-4) 设 $\Omega=\{z: 0<\mathrm{Re}z<1\}$，$\Gamma$ 是由 Ω 中所有连接 $\mathrm{Re}z=0$ 和 $\mathrm{Re}z=1$ 的可求长曲线组成的曲线族。求 $\lambda(\Gamma)$。

解答: 使用共形映射将区域 Ω 分别映射到 $\{z:0<\mathrm{Re}z<\frac{1}{2}\}$ 和 $\{z:1/2<\mathrm{Re}z<1\}$，这给出极值长度的关系 $\lambda\geq 2\lambda$ 从而 $\lambda=0$。

题 73(5.1-5) 设 Ω 是上半单位圆 $\mathbb{D}_+ = \{z : |z| < 1, \mathrm{Im}z > 0\}$。$\Gamma$ 是 Ω 中连接原点和上半圆周的所有可求长曲线组成的曲线族。求 $\lambda(\Gamma)$。

解答: 此时可以利用比较原理，也就是如果取曲线族 Γ_1, Γ_2 如果对任何的 $\gamma \in \Gamma_2$ 都有 $\gamma' \in \Gamma_1$ 满足 $\gamma' \subset \gamma$ 那么就有极值长度的关系如下

$$\lambda(\Gamma_1) \leq \lambda(\Gamma_2)$$

此时取 $\Gamma_2 = \{\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}_+ : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = 1\}$ 是题目中的曲线族，对正整数 n 取环形区域 $A(\frac{1}{n}, 1)$ 上的曲线族是

$$\Gamma_1 = \{\gamma' : [0,1] \to A(\frac{1}{n}, 1) : |\gamma'(0)| = \frac{1}{n}, |\gamma'(1)| = 1\}$$

那么根据连续性，Γ_1, Γ_2 满足使用比较原理的条件，也就是从原点出发到上半圆周的曲线可以包含一段连接 $\mathrm{C}(0, \frac{1}{n})$ 到 $\mathrm{C}(0, 1)$ 的曲线。利用比较原理

$$\lambda(\Gamma) = \lambda(\Gamma_2) \geq \lambda(\Gamma_1) = \frac{1}{2\pi}(\ln 1 - \ln \frac{1}{n}) = \frac{1}{2\pi} \ln n$$

上面环形区域连接内外边界的曲线族的极值长度是已经知道的。那么取 $n \to +\infty$ 得到

$$\lambda(\Gamma) = +\infty$$

共形模

题 74(5.2-1) 证明由 Christoffel 公式 (7.5) 定义的映射是上半平面到矩形 R 的共形映射。

解答:

题 75(5.2-2) 证明拓扑四边形的共形模定义的无歧义性和共形不变性。

解答: 设共形映射 $\varphi : Q \to R(ib_1, 0, 1, 1 + ib_1)$, $\psi : Q \to R(ib_2, 0, 1, 1 + ib_2)$, 下面说明共形映射 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 是恒等映射。由于矩形边界，可以用 Schwarz 对称原理把定义域与值域延拓为 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 且保持共形，故 $\varphi = \psi$.

题 76(5.2-3) 设 $\Omega = \{z : 1 < |z| < R\}$，$\rho$ 是 Ω 上可允许度量。证明存在 Ω 中分离 Ω 的两条边界圆周的 Jordan 闭曲线 γ 使得

$$l_\rho(\gamma)^2 \le \frac{A_\rho(\Omega)}{\mathrm{mod}\Omega}$$

解答: 根据课本定理可知环域 Ω 的共形模也有

$$\mathrm{mod}(\Omega) = \inf{}_\rho \frac{A_\rho(\Omega)}{l_\rho(\gamma)^2}$$

这里 Γ_1 是分离两个边界圆周的 Jordan 闭曲线族，Γ_2 是连接两个边界圆周的曲线族。根据定理 5.5(待证)

$$\mathrm{mod}(\Omega) = \frac{1}{\lambda(\Gamma_1)} = \lambda(\Gamma_2)$$

此时取某一个 γ 满足

$$\frac{A_\rho(\Omega)}{l_\rho(\gamma)^2} \ge \frac{1}{\mathrm{mod}(\Omega)}$$

即可

题 77(5.2-4) 设 $R(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 是矩形，γ 是 R 中连接对边上点 $w_1 \in [z_1, z_2]$ 和 $w_2 \in [z_3, z_4]$ 的一条 Jordan 弧，将 R 划分称两个拓扑四边形 $R_1(z_1, w_2, w_3, z_4)$ 和 $R_2(w_1, z_2, z_3, w_2)$。证明 $\mathrm{mod}R_1 + \mathrm{mod}R_2 = \mathrm{mod}R$ 的充要条件是 γ 是平行于边 $[z_2, z_3]$ 的直线段。

解答: 必要性: 由拓扑四边形共形模定义可得

充分性: 由 Rental 不等式可知

$$\mathrm{mod}R_1+\mathrm{mod}R_2\le\frac{A(R_1)}{d_1^2}+\frac{A(R_2)}{d_1^2}$$

注意到 $\mathrm{mod}(R)=\frac{A(R_1)+A(R_2)}{d_1^2}$ 表示 R_1,R_2 是矩形。

题 78(5.2-5) 设 $\Omega=\{z:r_1<|z|<r_2\}$ 是圆环，γ 是 Ω 内分隔 Ω 的两条边界圆周的 Jordan 闭曲线，则 γ 将 Ω 划分称两个环域 Ω_1,Ω_2。证明 $\mathrm{mod}\Omega_1+\mathrm{mod}\Omega_2=\mathrm{mod}\Omega$ 的充要条件是 γ 为圆周 $\{|z|=r\}(r_1<r<r_2)$。

解答:

共形模的极值问题

题 79(5.3-1) 证明 Grötzsch 函数 $\mu(r)$ 是 $(0,1)$ 上单调递减连续函数而且

$$\lim_{r\to0+}\mu(r)=\infty,\quad\lim_{r\to1-}\mu(r)=0$$

解答: 下面找到区域 G_r 到圆环 $z:1<|z|<R$ 的共形映射中的 R 关于 r 的关系式，注意到只用考虑上半平面:

先用共形映射把 G_r 映射到上半平面边界点关系是

$(-1,0,r,1)\to(-\frac{1}{r},-1,1,\frac{1}{r})$。

次使用 Christoffel 映射将上半平面映射为开矩形其中边界点如下对应

$(-K+iK',-K,K,K+iK')\to(i\pi,0,x,x+\pi i)$

最后使用 e^z 映射到上半环域并注意

$$R=e^{\frac{\pi}{2}\frac{K'}{K}}$$

及 $\mu(r)=\frac{1}{2\pi}\log R$。给出

$$\mu(r)=\frac{1}{4}\frac{K\left(\sqrt{1-r^2}\right)}{K(r)}$$

分别取 $r\to 0+,1-$ 即可。

由此易得 $\mu\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4}$ (较讲义更易)

题 80(5.3-2) 求分离单位圆周和 $\{-a,a\}$ 的二连通区域的共形模的极值问题，其中 $a\in(0,1)$。求出极值区域以及极值区域的共形模 (用 Grötzsch 函数表示)。

解答: 先把原区域共形映射为去掉 $[0,\frac{2a}{1+a^2}]$ 的区域即得。

题 81(5.3-3) 设 是单位圆 $\mathbb{D}$ 内二连通区域。其共形模 $\mathrm{mod}\Omega\geq M>0$。求其有界余分支的直径的上确界 (用 Grötzsch 函数表示)。并求出达到该上确界的极值区域。

解答:

题 82(5.3-4) 证明推论 5.13。

解答: 模仿定理 5.12 的证明，在寻找最优表示时遇到 $z_1,z_2,0$ 不共线的问题可以通过旋转 $\mathbb{D}\setminus\{[0,r]\}$ 使之经过 φ^{-1} 映射后与 $[z_2,\infty]$ 共线，然后根据两点关于圆周的对称性 $R^2=|z_1||z_1+z_2|$ 构造一个以 z_1 为圆心，R 为半径的圆。

第六章:Riemann 曲面简介

Riemann 曲面定义

题 83(6.1-1 黎曼曲面上的解析函数) 证明黎曼曲面上解析函数的定义是合理的而且不依赖于坐标图册的选择。

解答: 首先说明良定义。这是因为黎曼曲面上的坐标变换都是全纯的。
不同的坐标图册 (Atlas) 之间的坐标变换是全纯的，而且满足层性质

$$t_{ab} \circ t_{bc} = t_{ac}, \quad t_{ab} = \phi_a \phi(b)^{-1}$$

所以选择不同的坐标计算解析函数在黎曼曲面上一点的值都是一致的。

题 84(6.1-2 孤立零点定理) 设 f 是黎曼曲面 S 上的解析函数，求证其零点如果存在聚点则 f 恒为零。

解答: 和复平面的情况类似。注意到本讲义中定义的 Riemann 曲面有连通和局部道路连通性质。从而 S 道路连通，那么在零点的聚点附近 $f \equiv 0$，任何一个点都与此聚点通过道路相连，取一些道路上的点的有限个邻域 $U_1, .., U_k$ 覆盖此道路，而且 $U_i \cap U_{i+1}$ 非空，利用解析函数的唯一性得到 $f|_S = 0$。

题 85(6.1-3 复结构) 如果 S, R 是两个 Riemann 曲面，$f : S \to R$ 是解析映射。考虑 σ, τ 分别是 S, R 上的复结构，则有

$$\sigma = f^* \tau$$

解答: 这无非是根据 Riemann 曲面的定义 (不区分共形等价的全纯坐标图册)。此时根据 Riemann 曲面的定义，恒同映射

$$\mathrm{Id} : (S,\sigma) \to (S, f^*\tau)$$

是共形等价，于是

$$\sigma = f^*\tau$$

题 86(6.1-4) 证明有如下双射

$$1-1 : \{[S] : \text{S 是复环面，[] 表示其在共形映射下的等价类}\}$$
$$\updownarrow$$
$$1-1 : \{\omega : 0 \le \mathrm{Re}\omega < 1, |\omega| > 1\} \cup \{e^{\sqrt{-1}t} : 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\}$$

解答: 考虑映射

$$\phi : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, \quad \phi(w_1, w_2) = \frac{w_1}{w_2}$$

注意到 w_1, w_2 和 w_2, w_1 生成同一个环面，$w_1 + w_2, w_2$ 和 w_1, w_2 也生产同一个环面，那么 ϕ 是满射，而且 $\phi^{-1}(z)$ 是彼此共形等价的环面。那么如果 w_1, w_2 和 z_1, z_2 生成同一个环面，则

$$z_1 = A_{11}w_1 + A_{12}w_2, z_2 = A_{21}w_1 + A_{22}w_2, \quad A_{ij} \in \mathbb{Z}$$

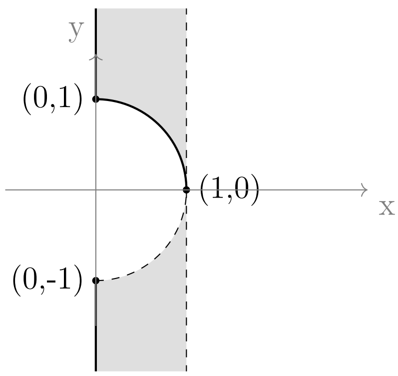
根据可逆性 w_i 也可以用 z_1, z_2 整系数线性表出，那么事实上就有 w 和 z 相差了一个 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 中的元素。而特殊线性群有生成元

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rangle$$

考虑 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 在 $\mathbb{C}$ 上分式线性变换的作用，记 $\mathcal{T}$ 是环面的共形等价类构成的集合。有 ϕ 给出的双射

$$\phi_*: \mathcal{T} \to \mathbb{C}/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$$

利用平移生成元可以得到商空间 $\mathbb{C}/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 可以被限制在带状区域 $0 \leq \mathrm{Re}\omega < 1$ 中，再使用反射将 $|w| < 1$ 的部分变为 $|w| > 1$ 的部分。而此时 $|w| = 1$ 的部分作为边界将共轭的复数粘合，$\mathrm{Re}\omega = 0$ 和 $\mathrm{Re}\omega = 1$ 作为边界粘合。如图。



解析覆盖和模函数

题 87(6.2-1) 证明任何 Riemann 曲面总存在解析万有覆盖。

解答: 利用万有覆盖存在定理 (这里使用一个弱版本)。由于 Riemann 曲面 S 连通而且局部道路连通且局部单连通。考虑如下路径空间

$$\widetilde{S} := \{\gamma_x : \gamma : [0,1] \to S, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \in U_x\}$$

题 88(6.2-2) 证明覆盖变换群的性质 1 和性质 2。

解答: 1. 离散性: 反证法，如果有聚点 $\widetilde{z}^*$，那么在聚点的小邻域内都有

$$\pi^{-1}(\pi(\widetilde{z}^*)) = \{\gamma(\widetilde{z}_k) : \widetilde{z}_k \to \widetilde{z}^*\} \supsetneq \widetilde{z}^*$$

于是覆盖 π 不是单射，与局部共形矛盾。

2. 覆叠变换和覆叠次数的对应: 如果 γ 有不动点 $\widetilde{z}_0$ ，那么考虑覆盖映射 π 对应的提升如下

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{S}, \widetilde{z}_0) \arrow[d, "\pi"] \\ (\widetilde{S}, \widetilde{z}_0) \arrow[r, "\pi"] \arrow[ur, dashed, "\exists!\gamma"] & (S, \pi(\widetilde{z}_0)) \end{tikzcd}$$

那么 γ 和 $\mathrm{Id}_{\widetilde{S}}$ 都给出了上述交换图提升的解，根据覆盖空间的映射提升定理，提升是唯一的，只能有

$$\gamma = \mathrm{Id}_{\widetilde{S}}$$

题 88 注覆盖空间的映射提升的唯一性来自于拓扑，注意到在基点处覆盖映射是局部同胚，那么提升在此局部就被唯一确定。而 Riemann 面是道路连通空间，任何点都可以通过连续道路和基点相连，在这样的道路上考虑提升在局部的唯一性就给出结论。事实上也就是说将一个点映射到基点原象 $\pi^{-1}(x)$ 中的某点的提升都是唯一的。

题 89(6.2-3) 设 $\pi : \widetilde{S} \to S$ 是解析覆盖，Γ 是覆盖变换群。求证 $\widetilde{S}/\Gamma$ 是 Riemann 曲面且共形等价于 S。

解答:

题 90(6.2-4) 设 $\pi : \widetilde{S} \to S$ 是解析万有覆盖，给定 $\widetilde{z}_0 \in \widetilde{S}, z_0 = \pi(\widetilde{z}_0) \in S$。证明对任何的 $\widetilde{z}_0' \in \pi^{-1}(z_0)$ 存在唯一的覆盖变换 γ 使得 $\gamma(\widetilde{z}_0) = \widetilde{z}_0'$。

解答: 设 γ_1, γ_2 同时将 $\widetilde{z_0}$ 映射到 $\widetilde{z_0}$ 则

$$\gamma_2^{-1}\gamma_1\widetilde{z_0} = \widetilde{z_0}$$

根据 6.2.2 的对应关系有 $\gamma_2^{-1}\gamma_1 = id$ 从而 $\gamma_1 = \gamma_2$。

题 91(6.2-5) 证明下列解析映射都是常值映射:

$$(1)\, f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}; (2)\, f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_{0,1}; (3)\, f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}_{0,1}$$

解答:

- f 在 ∞ 处解析相当于在坐标变换下 $f(\frac{1}{z})$ 在原点附近解析，也就是 f 在 $\mathbb{C} - D(0,R)$ 外有界，事实上就是说明 $f|_C : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是有界解析函数，从而 f 只能是常数。
- 我们已经知道 $\varphi : \mathbb{D} \to C_{0,1}$ 是覆盖映射，考虑映射提升 $\widetilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 结合 Liouville 定理得 $\varphi \circ \widetilde{f} = f$ 为常数。
- 考虑 $\mathbb{C} \xrightarrow{e^{2\pi\sqrt{-1}z}} \mathbb{C} - \{0\}$ 是解析覆盖，如果有 $f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}_{0,1}$ 那么复合给出解析映射如

  $$\mathbb{C} \xrightarrow{e^{2\pi\sqrt{-1}z}} \mathbb{C} - \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{C}_{0,1}$$

  根据上一项可知这只能是常数函数。

题 92(6.2-6) 确定是否存在非常值解析映射 $f : \mathbb{C}_{0,1} \to \mathbb{D}$。

解答: 不存在。

首先考虑 Riemann 可去奇点定理，也就是如果 z_0 是解析函数 f 的孤立奇

点，而且 f 在 z_0 附近有界，则 z_0 是 f 的可去奇点。证明可以通过定义

$$F(z)=\begin{cases}(z-z_0)^2f(z) & z\neq z_0\\ 0 & z=z_0\end{cases}$$

那么根据 f 在 z_0 附近有界，设 f 在 Ω 上解析，那么此时 F 在 $\Omega\cup\{z_0\}$ 上解析，而且

$$F(z_0)=F'(z_0)=0$$

从而 $F(z)=(z-z_0)^2h(z)$，这里 h 是 $\Omega\cup\{Z_0\}$ 上的解析函数，显然 h 是 f 的解析延拓。于是 z_0 是 f 的可去奇点。如果存在解析函数 $f:\mathbb{C}_{0,1}\to\mathbb{D}$，根据 Riemann 可去奇点定理说明 $0,1$ 都是 f 的可去奇点，从而其存在解析延拓

$$\widetilde{f}:\mathbb{C}\to\mathbb{D}$$

那么根据 Liouville 定理只能有 f 为常数。

第七章: 双曲度量

单位圆上的 Poincaré 度量

题 93(7.1-1) 验证 (6.1) 和 (6.2)。

解答: 此时根据单位圆盘上的双曲距离表达式

$$d_{\mathbb{D}}(z,z_0)=\ln(\frac{1+\delta(z,z_0)}{1-\delta(z,z_0)}),\quad \delta(z,z_0)=\frac{|z-z_0|}{|1-\overline{z_0}z|}$$

当 $|z|\to 1$ 时，根据连续性

$$1+\delta(z,z_0)\le 2$$

而

$$1-\delta(z)=\frac{1}{1-|z|}$$

验证双曲圆是欧式圆只需要考察

$$\delta(z,z_0)\leq\frac{e^R-1}{e^R+1}$$

相当于集合。。。

题 94(7.1-2) 在上半平面 $\mathbb{H}$ 上定义 Poincaré 度量。

解答: 利用共形映射 $\phi:\mathbb{H}\to\mathbb{D}$

$$\phi(z)=\frac{z-\sqrt{-1}}{z+\sqrt{-1}}$$

保持双曲度量，那么

$$\rho_{\mathbb{H}}(z)=\rho_{\mathbb{D}}(\phi(z))|\phi'(z)|=\frac{2|z+\sqrt{-1}|^2}{|z+\sqrt{-1}|^2-|z-\sqrt{-1}|^2}\frac{2}{|z+\sqrt{-1}|^2}=\frac{1}{\mathrm{Im}z}$$

题 95(7.1-3) 设 $\phi:\mathbb{D}\to\mathbb{C}_{0,1}$ 是模函数，取 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}_{0,1}$ 解析且 $f(0)=\phi(0)$。证明对任何的 $0<r<1$

$$\sup_{|z|\leq r}|f(z)|\leq\sup_{|z|\leq r}|\phi(z)|$$

解答:

一般区域上的双曲度量

题 96(7.2-1 提升映射保持测地性质) 设 $f:\Omega_1\to\Omega_2$ 是解析覆盖映射，γ 是 Ω_2 内关于双曲度量 $\rho_{\Omega_2}(z)|dz|$ 的一条测地线。证明 γ 在 Ω_1 中的提升 $\widetilde{\gamma}$ 是 Ω_1 中关于双曲度量 $\rho_{\Omega_1}(\zeta)|d\zeta|$ 的测地线。

解答: 记 $f:\Omega_1\to\Omega_2,\zeta\to z$

取 Γ 是连接 z_1 和 z_2 的曲线族有

$$\int_\gamma \rho_2(z)|dz|\le\int_\Gamma \rho_2(z)|dz|$$

利用讲义定理 6.6 的 $\rho_1(\zeta)|d\zeta|=\rho_2(f(\zeta))|dz|$ 代入得到

$$\int_{f^{-1}(\gamma)}\rho(\zeta)|d\zeta|\le\int_{f^{-1}(\Gamma)}\rho_1(\zeta)|d\zeta|$$

这给出 $\widetilde{\gamma}$ 是测地线 (geodesic)。

题 97(7.2-2) 设 Ω 是双曲区域并取定 $z_0\in\Omega$。证明对 $z\in\Omega, z\to\partial\Omega$ 都有 $d_\Omega(z,z_0)\to\infty$。

解答: 根据上一题，选取测地线 γ (depends on z) 并且提升映射到单位圆盘，于是

$$d_\Omega(z,z_0)=\int_\gamma\rho(z)|dz|=\int_{\widetilde{\gamma}}\frac{2|d\zeta|}{1-|\zeta|^2}$$

从而当 $z\to\partial\Omega, |\zeta|\to 1$ 有 $d_\Omega(z,z_0)\to\infty$.

题 98(7.2-3) 验证例 6.1 中各区域的双曲度量的显式表达式。

解答: 根据共形映射 1，2，4 是一类，根据 $e^{\sqrt{-1}z}:\mathbb{H}\to\mathbb{D}\setminus\{0\}$ 得到穿孔单位圆的双曲度量，再根据 3 得到 5。

题 99(7.2-4) 设 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 是单连通双曲区域，证明对任何的 $z_1,z_2\in\Omega$ 都有

$$|\ln\rho_\Omega(z_1)-\ln\rho_\Omega(z_2)|\le 2d_\Omega(z_1,z_2)$$

解答: 问题转化到单位圆上计算双曲距离：

$$\ln\frac{\left(1-|\zeta_2|^2\right)|\varphi'(\zeta_2)|}{\left(1-|\zeta_1|^2\right)|\varphi'(\zeta_1)|}\leqslant 2d_{\mathbb{D}}(\zeta_1,\zeta_2)$$

取 $\zeta_1=0$ 用 Koebe distortion theorem 估计 $\frac{\varphi'(\zeta_2)}{\varphi'(0)}$ 得到

$$\left|\frac{\phi'(\zeta_2)}{\phi'(0)}\right|\le\frac{1+|\zeta_2|}{(1-|\zeta_2|)^3}$$

给出

$$\ln\frac{\left(1-|\zeta_2|^2\right)|\varphi'(\zeta_2)|}{\left(1-|\zeta_1|^2\right)|\varphi'(\zeta_1)|}\le 2\ln\frac{1+|\zeta_2|}{1-|\zeta_2|}\le 2d_{\mathbb{D}}(0,\zeta_2)$$

这里在双曲圆盘上采用的是经典度量

$$d_{\mathbb{D}}(z_1,z_2):=\ln R(z_1,z_2;w_1,w_2)=\ln\frac{|z_2-w_1||z_1-w_2|}{|z_1-w_1||z_2-W_2|}$$

题 100(7.2-5) 设 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 是单连通双曲区域，$\mathbb{D}_\Omega(z)=\{\zeta\in\Omega:d_\Omega(\zeta,z)<1\}$ 是以 z 为中心的双曲圆，记 $\delta(z)=d(z,\partial\Omega)$ 是 z 到 Ω 边界的欧式距离，$\mathrm{diam}\mathbb{D}_\Omega(z)$ 是 $\mathbb{D}_\Omega(z)$ 的欧式直径。证明存在常数 $0<k_1<k_2<+\infty$ 使得

$$k_1\delta(z)\le\mathrm{diam}\mathbb{D}_\Omega(z)\le k_2\delta(z)$$

解答:

题 101(7.2-6) 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是单连通双曲区域，给定 $a \in \Omega$。设 $\phi : \Omega \to \mathbb{D}, \phi(a) = 0$ 是 Riemann 映射:

(1) 写出 Ω 上以 a 为奇点的格林函数 g;

(2) 设 $\Omega^* = \Omega - \{a\}$，求出 Ω^* 上的双曲度量 $\rho_{\Omega^*}(z)|dz|$;

(3) 证明对于任何的 $z_1, z_2 \in \Omega^*$

$$d_{\Omega^*}(z_1, z_2) \geq |\ln g(z_1, a) - \ln g(z_2, a)|$$

解答:

超双曲度量

题 102(7.3-1) 求当 $z \in \Omega_\infty$ 时 $\rho_{0,1}(z)$ 的一个下界，并求出当 z 趋于无穷时 $\rho_{0,1}(z)$ 的渐近行为。

解答:

题 103(7.3-2) 证明推论 6.16。

解答:

题 104(7.3-3) 证明: $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{C}^*$ 上不存在超双曲度量.

解答:

题 105(7.3-4) 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是双曲区域 $\rho_\Omega(z)|dz|$ 是双曲度量，$\rho_S(z)|dz|$ 是球面度量，求证

$$\lim_{z\to\zeta\in\partial\Omega} \frac{\rho_\Omega(z)}{\rho_S(z)} = \infty$$

这里 $\partial\Omega$ 包含无穷远点。

解答:

题 106(7.3-5) 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是双曲区域 $D(z)$ 是 Ω 内以 z 为圆心的双曲单位圆, 记 $\mathrm{diam}_S D(z)$ 是 $D(z)$ 在球面距离下的直径。则

$$\lim_{z\to\partial\Omega} \mathrm{diam}_S D(z) = 0$$

解答:

题 107(7.3-6) 利用 Schottkey 定理证明 Picard 小定理。

解答:

第八章:Riemann zeta 函数

题 108(8.0-1 证) 明

$$\ln\zeta(s) = \sum_{p,m} \frac{p^{-ms}}{m}$$

解答: 根据欧拉乘积和泰勒展开 $\ln(1+x)=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 形式计算

$$\begin{aligned}\ln\zeta(s)&=\ln\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}=\sum_p-\ln(1-p^{-s})\\&=\sum_{p,m}\frac{p^{-ms}}{m}\end{aligned}$$

收敛性由于 $|\mathrm{Re}s|>1$ 得到。

补充题目

题 109(9.0-1 2012-26) 如果 Ω 是一个共形等价于 $A(R_1,R_2)$ 的区域，那么取其有限余分支是 D_2，其无界余分支的补集记成 D_1 则

$$\frac{\mathrm{A}(D_1)}{\mathrm{A}(D_2)}\geq\frac{R_2^2}{R_1^2}$$

等号成立当且仅当 $\Omega=A(R_1,R_2)$。而且有如下面积不等式

$$\mathrm{A}(D_2)\leq\frac{\mathrm{A}(D_1)}{e^{\pi(\ln R_2-\ln R_1)}-1}$$

解答: