**Vorlesungszusammenfassung**

# Homologische Algebra

**gelesen von Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen**

Maximilian Huber Stefan Hackenberg

Sommersemester 2014

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Simpliziale Mengen

## 1.1 Triangulierte Räume

### 1.1.1 Definitionen

**Definition 1.1** Ein *Triangulierter Raum* besteht aus

- Punkten,
- Kanten,
- Dreiecke,
- Tetraeder,
- ...
- $n$-dimensionale Simplizes

und einer kombinatorischen Verklebevorschrift.

**Definition 1.2 (topologischer $n$-Simplex, Ecke, $I$-Fläche)** Der *$n$-dimensionale topologische Simplex* (oder *topologischer $n$-Simplex*) ist der topologische Raum

$$\Delta_n \ := \ \left\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0\right\}.$$

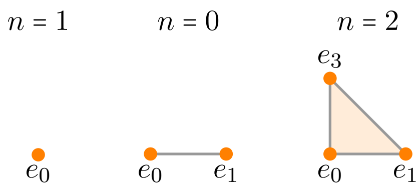
Der Punkt $e_i \in \Delta_n$ mit $x_i = 1$ heißt die *$i$-te Ecke von $\Delta_n$*.
Für $I \subseteq [n] := \{0, \ldots, n\}$ ist die *$I$-Fläche von $\Delta_n$* durch

$$\left\{(x_0, \ldots, x_n) \in \Delta_n \mid x_i = 0 \ \forall i \notin I\right\}$$

gegeben.

*Bemerkung 1.3* Durch obige Definition einer Ecke erhält man eine Anordnung der Ecken!

*Beispiel 1.4 (Veranschaulichung verschiedener topologischer $n$-Simplizes)*



*Bemerkung 1.5* Jedes $I \subseteq [n]$ mit $|I| = m+1$ definiert genau eine streng monoton wachsende Abbildung $f : [m] \to [n]$ mit $\operatorname{im} f = I$. Diese Konstruktion ist umkehrbar.

**Definition 1.6** Die Abbildung

$$\Delta_f : \Delta_m \to \Delta_n$$

ist diejenige lineare Abbildung, welche die Ordnung der Ecken berücksichtigt und die $I$-Seite von $\Delta_n$ als Bild hat, wobei $f$ und $I$ nach obiger Bemerkung korrespondieren.

*Beispiel 1.7* Für

$$\begin{array}{rcccl} f: & [1] & \to & [2] & \quad\leftrightarrow\quad I = \{0,2\} \\ & 0 & \mapsto & 0 & \\ & 1 & \mapsto & 2 & \end{array}$$

erhalten wir $\Delta_f : \Delta_1 \to \Delta_2$: **Bild**

**Definition 1.8** Ein *Verklebedatum* $X$ ist eine Folge $X_{(0)}, X_{(1)}, \ldots$ von Mengen, wobei man $X_{(0)}$ als *Punkte*, $X_{(1)}$ als *Kanten*, $X_{(2)}$ als *Flächen*, ... bezeichnet und für jede streng monotone Abbildung $f : [m] \to [n]$ eine Abbildung

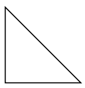
$$X(f) : X_{(n)} \to X_{(m)}\,,$$

so dass Folgendes gilt:

(1) $X(\mathrm{id}_{[n]}) = \mathrm{id}_{X_{(n)}}$,

(2) $X(g \circ f) = X(f) \circ X(g)$.

*Beispiel 1.9* Für $\Delta_2$ haben wir:

**Bild** 

$$\begin{aligned} X_{(0)} &:= \{\textbf{Bild}\} \\ X_{(1)} &:= \{\textbf{Bild}\} \\ X_{(2)} &:= \{\textbf{Bild}\} \end{aligned}$$

Alle weiteren $X_{(3)} = X_{(4)} = \varnothing$ sind leer.

**Definition 1.10 (topologische Realisierung)** Die *topologische Realisierung $|X|$ von $X$* ist der topologische Raum, dessen zugrunde liegende Menge durch

$$\Big(\coprod_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times X_{(n)})\Big) \,/\, R$$

gegeben ist, wobei $R$ die schwächste Äquivalenzrelation ist, für die

$$(s,x)\ R\ (t,y) \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} y = X(f)(x) \text{ und} \\ s = \Delta_f(t) \text{ für ein } f : [m] \to [n]\,. \end{cases}$$

Für $(s,x)R(t,y)$ schreibe auch $(s,x) \overset{f}{\mapsto} (t,y)$. Die Topologie von $|X|$ ist die feinste Topologie, so dass

$$\coprod_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times X_{(n)}) \xrightarrow{\tau} \left(\coprod_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times X_{(n)})\right) / R = X$$

stetig ist, d.h. $\mathcal{U} \subseteq |X|$ offen $\Leftrightarrow$ $\tau^{-1}(\mathcal{U})$ offen $\Leftrightarrow$ $\tau^{-1}(\mathcal{U})$ in allen $\Delta_n$ offen.

*Bemerkung 1.11* Die definierende Gleichung der Relation $R$ in Definition 1.10 definiert zwar eine reflexive und transitive Relation, jedoch keine symmetrische!

### 1.1.2 Beispiele

*Beispiel 1.12 ($n$-dimensionaler Simplex)*

$$\begin{aligned} X_{(i)} &= \{I \subseteq [n] \mid |I| = i+1\} \\ &\cong \{f : [i] \to [n] \text{ streng monoton}\} \end{aligned}$$

$$X([i] \xrightarrow{f} [j]) : \ (g : [j] \to [n]) \ \longmapsto \ (g \circ f : [i] \to [n])\,.$$

Damit ist der $n$-dimensionale Simplex also nichts anderes, als die geometrische Realisierung von obigem Verklebedatum: $\Delta_n \approx |X|$.

*Beispiel 1.13 ($n$-dimensionale Sphäre)* Die Einheitsspähre $S^n$ lässt sich durch $\partial\Delta_n$ triangulieren und erhält damit als Verklebedatum:

$$X_{(i)} \ := \begin{cases} X_{(i)}^{\Delta_n} = \{[i] \to [n] \text{ streng monoton wachsend}\} & i < n\,, \\ \varnothing & i \geq n\,, \end{cases}$$

wobei $X^{\Delta_n}$ das Verklebedatum des $n$-Simplex meint. Damit erhalten wir wiederum $S^n \approx |X|$.

**Definition 1.14 (Inneres, induzierte Abbildung)** Das *Innere von $\Delta_n$* ist

$$\begin{aligned} \mathring{\Delta}_n \ &:= \begin{cases} \text{top. Inneres von } \Delta_n & n \geq 1 \\ \Delta_0 & n = 0 \end{cases} \\ &= \{(x_0, \ldots, x_n) \in \Delta^n \mid x_i > 0\} \end{aligned}$$

Ferner heißt

$$\mathring{\tau} : \coprod_{n \geq 0} \mathring{\Delta}_n \times X_{(n)} \to |X|$$

die *durch $\tau$ induzierte Abbildung.*

### 1.1.3 Proposition

**Proposition 1.15** *$\mathring{\tau}$ ist eine mengentheoretische Bijektion.*

*Beweis* Für ein $(s,x) \in \Delta_n \times X_{(n)}$ sei sein *Index* $k(s,x)$ als die minimale Dimension einer Seite gegeben, die $s$ enthält. $R$-äquivalente Punkte haben den selben Index. Damit ist $k : |X| \to \mathbb{N}_0$ eine wohldefinierte Abbildung. Es gilt $k(s,x) = k$, wenn $s \in \mathring{\Delta}_k$.

Ist dann $p \in |X|$ mit $k(p) = k$, so gibt es (mind.) einen Repräsentanten $(s,x)$ mit $(s,x) \in \mathring{\Delta}_k \times X_{(k)}$. Damit ist gezeigt, dass $\mathring{\tau}$ surjektiv ist.

Bleibt noch die Injektivität von $\mathring{\tau}$ zu zeigen: Seien $(s,x), (s',x') \in \coprod_{n \geq 0} \mathring{\Delta}_n \times X_{(n)}$ mit $(s,x) \overset{R}{\sim} (s',x')$. Zu zeigen ist damit $(s,x) = (s',x')$. Nach obiger Vorüberlegung ist $k(s,x) = k(s',x')$, d.h. $x, x' \in X_{(k)}$. Wir haben

$$\begin{tikzcd} & (s_1,x_1) & & (s_3,x_3) & & \ldots & \\ (s,x) \arrow[ur, mapsto, "f_1"] & & (s_2,x_2) \arrow[ul, mapsto, "f_2"'] \arrow[ur, mapsto, "f_3"] & & \ldots \arrow[ul, mapsto] \arrow[ur, mapsto] & & (s',x') \arrow[ul, mapsto] \end{tikzcd}$$

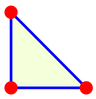
mit $(s_i, x_i) \in \Delta_{l_i} \times X_{(l_i)}$ und $l_i \geq k$. Aus dieser Kette können wir eine Kette kleinerer Länge konstruieren $f_1 : [k] \to [l_1]$, $f_2 : [l_2] \to [l_1]$ streng monoton mit $s_1 = \Delta_{f_1}(s) = \Delta_{f_2}(s_2)$. Da $s \in \mathring{\Delta}_k$, liegt $s_1$ im Inneren der $f_1$-Seite von $\Delta_{l_1}$. Damit ist $\operatorname{im} f_2 \supseteq \operatorname{im} f_1$ und ergo $f_1 = f_2 \circ f$ für (genau) ein streng monotones $f : [k] \to [l_2]$.

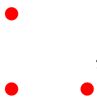
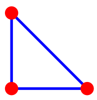
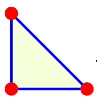
Es gilt dann
$$\Delta_{f_2} \Delta_f(s) = \Delta_{f_2 \circ f}(s) = \Delta_{f_1}(s) = s_1 = \Delta_{f_2}(s_2)\,.$$
Da $\Delta_{f_2}$ injektiv ist, folgt $\Delta_f(s) = s_2$. Außerdem ist
$$X(f)(x_2) = X(f)\big(X(f_2)(x_1)\big) = X(f_2 \circ f)(x_1) = X(f_1)(x_1) = x\,.$$
Also folgt:
$$\begin{tikzcd}
(s,x) \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, mapsto, bend right, "f_3 \circ f"'] & (s_2, x_2) \arrow[r, mapsto, "f_3"] & (s_3, x_3) & (s_4, x_4) \arrow[l, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \dots
\end{tikzcd}$$

Nach endlich vielen Schritten erhalten wir also $(s,x) \xmapsto{f} (s', x')$ mit $x, x' \in X_{(k)}$. Folglich ist $f : [k] \to [k]$ und damit die Identität, woraus die Injektivität folgt. □

### 1.1.4 Skelett

**Definition 1.16 ($k$-Skelett)** Das *$k$-Skelett* einer Triangulierung $(X_{(i)}, X(f))$ ist die Triangulierung
$$(X_{(i)}, i \leq k; X(f))\,.$$
Der zugehörige topologische Raum $\operatorname{sk}_k |X|$ ist das *$k$-Skelett von $|X|$*.

*Beispiel 1.17* Sei $(X_{(i)}, X(f))$  so ist

- das 0-Skelett  ,
- das 1-Skelett  und
- das 2-Skelett  .

**Korollar 1.18** *Es gilt:*

*(1)* $|X| = \operatorname{sk}_\infty |X| = \bigcup_{k \geq 0} \operatorname{sk}_k |X|$

*(2) Die natürlichen Abbildungen $\operatorname{sk}_k |X| \to \operatorname{sk}_l |X|$ für $k \leq l$ sind abgeschlossene Einbettungen.*

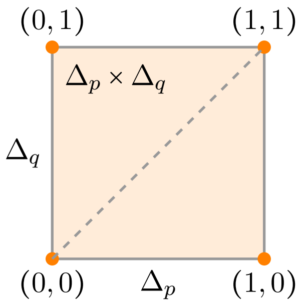
*(3) $\operatorname{sk}_{k+1} |X|$ entsteht aus $\operatorname{sk}_k |X|$ durch Hinzufügen offener $(k+1)$-Simplizes, deren Ränder mit $\operatorname{sk}_k |X|$ verklebt werden.*

*Beweis* Klar mit Proposition 1.15. □

### 1.1.5 Triangulation des Produktes zweier Simplizes

Wir wollen eine kanonische Triangulierung $(X_{(n)}, X(f))$ von $\Delta_p \times \Delta_q$ explizit angeben.

*Beispiel 1.19* Für $p = 1$ und $q = 1$ können wir uns anschaulich folgende Triangulierung überlegen:




**Definition 1.20 (kanonische Triangulierung von $\Delta_p \times \Delta_q$)** Die *kanonische Triangulierung* $(X_{(n)}, X(f))$ *von* $\Delta_p \times \Delta_q$ ist gegeben durch:

(1) Ein Element von $X_{(n)}$ (multidimensionale Diagonale) ist eine Menge von $(n+1)$ paarweise verschiedenen Paaren
$$\{(i_0, j_0), (i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n)\}$$
mit $0 \le i_0 \le i_1 \le \dots \le i_n \le p$ und $0 \le j_0 \le j_1 \le \dots \le j_n \le q$.

(2) Für $f : [m] \to [n]$ streng monoton sei
$$X(f)(\{(i_0, j_0), \dots, (i_n, j_n)\}) \;=\; \{(i_{f(0)}, j_{f(0)}), \dots, (i_{f(m)}, j_{f(m)})\}\,.$$

**Definition 1.21** Sei
$$\vartheta_n : \Delta_n \times X_{(n)} \to \Delta_p \times \Delta_q$$
so, dass $\vartheta_n(\_\_, x) : \Delta_n \to \Delta_p \times \Delta_q \subseteq \mathbb{R}^{p+q+2}$ diejenige lineare, ordnungserhaltende Abbildung ist, deren Bild $\tilde{\Delta}_n$ ist, wobei $\tilde{\Delta}_n \subseteq \mathbb{R}^{p+q+2}$ derjenige $n$-Simplex ist, der durch $(e_{ik}, e'_{jk})$ aufgespannt wird für $x = \{(i_0, j_0), \dots, (i_n, j_n)\}$.

**Lemma 1.22** *Sei $|X|$ die geometrische Realisierung von $(X_{(n)}, X(f))$. Dann existiert ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
 & \coprod \Delta_n \times X_{(n)} \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\coprod \vartheta_n =: \vartheta"] & \\
{|X|} \arrow[rr, dashed, "\exists!\,\cong", "\varphi"'] & & \Delta_p \times \Delta_q
\end{tikzcd}$$

*wobei das eindeutige $\varphi$ eine Bijektion ist.*

*Beweis* (a) Da $\tau$ surjektiv, existiert höchstens ein $\varphi$. Sei $(t, y) \xmapsto{f} (s, x)$, d.h. $s = \Delta_f(t)$, $y = X(f)(x)$.
$$\vartheta(s, x) = \vartheta(\Delta_f(t), x) = \vartheta(t, X(f)(x)) = \vartheta(t, y)\,.$$
Also existiert genau ein $\varphi$.

(b) Wir zeigen nun, dass $\vartheta$ surjektiv ist, damit ist auch $\varphi$ surjektiv. Sei $\Delta_p = \{(x_0, \dots, x_p) \mid x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$ und $\Delta_q = \{(y_0, \dots, y_p) \mid y_j \geq 0, \sum y_j = 1\}$ Führe nun neue Koordinaten ein:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_0, & \xi_2 &= x_0 + x_1, & &\dots, & \xi_p &= x_0 + \dots + x_{p-1} \\ \eta_1 &= y_0, & \eta_2 &= y_0 + y_1, & &\dots, & \eta_q &= y_0 + \dots + y_{q-1} \end{aligned}$$

In diesen Koordinaten gilt:

$$e_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p-i}), \quad e_j = (\underbrace{0, \dots, 0}_{j}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-j})$$

Sei $x = \{(i_0, j_0), \dots, (i_{p+p}, j_{p+q})\} \in X_{(p+q)}$ mit $(i_0, j_0) = (0, 0)$ und $(i_{p+q}, j_{p+q}) = (p, q)$. Das Bild $\vartheta(\Delta_{p+q}, x)$ besteht aus allen Paaren $\big((\xi_1, \dots, \xi_p), (\eta_1, \dots, \eta_q)\big) \in \Delta_p \times \Delta_q$ mit $0 \leq \xi_i, \eta_j \leq 1$, wobei alle $\xi_i, \eta_j$ angeordnet sind und gilt:

(i) Ist $i < j$, so steht $\xi_i$ vor $\xi_j$ und $\eta_i$ vor $\eta_j$ und ist $j_{k+1} = j_k$, so steht an $(k+1)$-ter Stelle ein $\xi$, sonst ein $\eta$.

(c) Sei $r = ((\xi_1, \dots, \xi_p), (\eta_1, \dots, \eta_q) \in \Delta_p \times \Delta_q$. Wir konstruieren dasjenige Element in $\coprod \mathring{\Delta}_n \times X_{(n)}$, welches von $\vartheta$ auf $r$ abgebildet wird. (Damit ist $\varphi$ injektiv). Das partioniere die $p + q + 2$ Zahlen $0, \xi_i, \eta_i, 1$ in Pakete jeweils gleicher Zahlen, nummeriert durch $0, 1, \dots, l + 1$ mit $0 \leq l \leq p + q$ in aufsteigender Reihenfolge. Die Werte seien $0 = \gamma_0 < \gamma < \dots < \gamma_{l+1} = 1$. Sei $x := \{(i_0, j_0), \dots, (i_l, j_l\} \in X_{(l)}$ gegeben durch

$$i_k := \begin{cases} 0 & k = -1, \\ i_{k-1} & \text{kein } \xi \text{ in } k\text{-ter Gruppe}, \\ \max\{i \mid \xi_i \text{ liegt in der } k\text{-ten Gruppe}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

□

**Bild** zur Veranschaulichung der Tupel für $\Delta_1 \times \Delta_1$

Verwaltung von Übungsaufgaben?

und $j_k$ analog zu $i_k$ mit $\eta$ anstatt $\xi$. Sei $s = (z_0, \dots, z_l) \in \mathring{\Delta}_l$ mit $z_i = \gamma_{i+1} - \gamma_i$, $0 \leq i \leq l$. Nach Übungsaufgabe 1 Übungsblatt 1 gilt nun $\vartheta^{-1}(r) = \{(s, x)\}$

## 1.2 Simpliziale Mengen

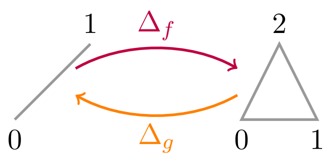
**Definition 1.23 (simpliziale Menge, $f$-Seite)** Eine *simpliziale Menge* ist eine Familie $X_\bullet = (X_n)_{n\geq 0}$ von Mengen und von Abbildungen $X(f) : X_n \to X_m$ für jede monotone Abbildung $f : [m] \to [n]$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) $X(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$,

(2) $X(f \circ g) = X(g) \circ X(f)$.

Für jede monotone Abbildung $f : [m] \to [n]$ ist die $f$-*Seite* die lineare Abbildung $\Delta_f : \Delta_m \to \Delta_n$ mit $e_i \mapsto e_{f(i)}$.

*Beispiel 1.24*




$$
\begin{array}{rccc}
f: & [1] & \to & [2] \\
& 0 & \mapsto & 0 \\
& 1 & \mapsto & 2 \\
\\
g: & [2] & \to & [1] \\
& 0 & \mapsto & 0 \\
& 1 & \mapsto & 0 \\
& 2 & \mapsto & 1
\end{array}
$$

*Bemerkung 1.25* $\Delta_f$ ist im Allgemeinen keine Einbettung mehr!

**Definition 1.26** Die *geometrische Realisierung* $|X_\bullet|$ einer simplizialen Menge $X_\bullet$ ist der topologische Raum mit zugrundeliegender Menge

$$\left(\coprod \Delta_n \times X_n\right)/R,$$

wobei $R$ die schwächste Äquivalenzrelation ist, für die

$$(s,x)R(t,y) \quad \Longleftarrow \quad y = X(f)(x),\; s = \Delta_f(t)$$

für alle monotonen Abbildungen $f:[m]\to[n]$ gilt. Die Topologie auf $|X|$ ist wieder die Quotiententopologie.

### 1.2.1 Beispiele

#### 1.2.1.1 Nerv einer Überdeckung

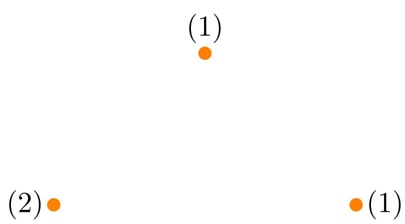
Sei $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Überdeckung eines topologischen Raumes $Y$ durch offene (bzw. abgeschlossene Teilmengen). Sei

$$X_n := \{(\alpha_0,\dots,\alpha_n)\in A^{n+1} \mid \mathcal{U}_{\alpha_0}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{\alpha_n}\neq\varnothing\}.$$

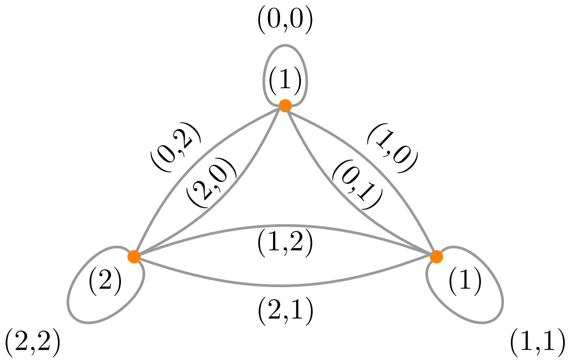
**Definition 1.27** $X_\bullet$ heißt *Nerv von* $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$.

*Beispiel 1.28* **Bild** Überdeckung der $S^1$. ... mit der geometrischen Realisierung:

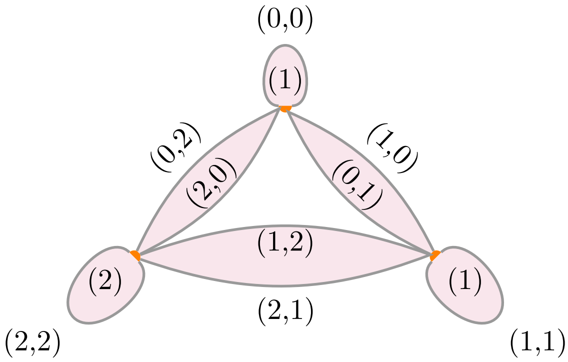
(1) Das 0-Skelet



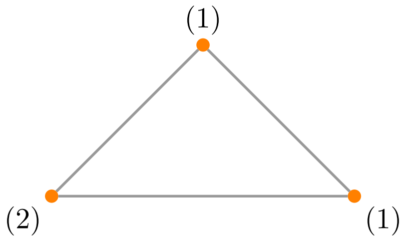

(2) Das 1-Skelet




(3) Das 2-Skelet




(4) welches nach einfügen noch höherer Simplizes vereinfacht gemalt wie folgt aussieht




*Bemerkung 1.29* Ist die Überdeckung lokal endlich und sind die nicht-leeren Durchschnitte zusammenziehbar, so ist $|X|$ homotopieäquivalent zu $Y$.

#### 1.2.1.2 Singuläre Simplizes

**Definition 1.30** Sei $Y$ ein topologischer Raum. Ein *singulärer $n$-Simplex von $Y$* ist eine stetige Abbildung $\varphi : \Delta_n \to Y$.

$$X_n := \{\varphi : \Delta_n \to Y \text{ sing. } n\text{-Simplizes}\}$$

und

$$X(f)(\varphi) := \varphi \circ \Delta_f$$

für alle $f : [m] \to [n]$ monoton. Dies definiert eine simpliziale Menge $X_\bullet$.

*Bemerkung 1.31* $X_\bullet$ ist riesig!

*Bemerkung 1.32* In einem gewissen Sinn sind *singuläre simpliziale Mengen eines topologischen Raums bilden* und *geometrische Realisierung einer simplizialen Menge bilden* zusammengehörige Prozesse; sie lösen jeweils ein Optimierungsproblem, das der andere Prozess stellt. Das Schlagwort dazu ist die allgemeine *Adjunktion zwischen Nerv und Realisierung*, und vielleicht werden wir dazu später mehr erfahren.

#### 1.2.1.3 Die simpliziale Menge $\Delta[p]$

**Definition 1.33** Sei

$$\begin{aligned}\Delta[p]_n &:= \{g : [n] \to [p] \text{ monoton}\},\\ \Delta[p](f)(g) &:= g \circ f.\end{aligned}$$

$\Delta[p]_\bullet$ heißt *simplizialer $p$-Simplex.*

**Lemma 1.34** *Es existiert ein kanonischer Homöomorphismus $\Delta_p \to |\Delta[p]|$.*

*Beweis* Übungsaufgabe. □

#### 1.2.1.4 Die einem Verklebedatum zugeordnete simpliziale Menge

Sei $(X_{(n)}, X(f))$ ein Verklebedatum. Dazu gehört die simpliziale Menge $\tilde{X}_\bullet$ mit

$$\begin{aligned}\tilde{X}_n &:= \{(x,g) \mid x \in X_{(k)},\ g : [m] \to [k] \text{ monoton, surjektiv}\}\\ \tilde{X}(f) &:= \tilde{X}_m \to \tilde{X}_n,\ (x,g) \mapsto (X(f_1)(x), f_2)\end{aligned}$$

für $f : [n] \to [m]$ monoton, mit $g \circ f = f_1 \circ f_2$ für $f_1, f_2$ monoton, $f_1$ injektiv, $f_2$ surjektiv.

**Lemma 1.35** *$\tilde{X}_\bullet$ ist in der Tat eine simpliziale Menge.*

*Beweis* Übungsaufgabe. □

*Bemerkung 1.36* Später werden wir sehen, dass

$$|\tilde{X}_\bullet| = |X|.$$

**Proposition 1.37** *Eine simpliziale Menge $\tilde{X}$ kann genau dann aus einem Verklebedatum $X$ erhalten werden, wenn für jeden nicht-degenerierten Simplex $x \in \tilde{X}_n$ und für jede streng monotone Abbildung $f : [m] \to [n]$ der Simplex $\tilde{X}(f)(x)$ ebenfalls nicht-degeneriert ist. In diesem Fall ist $X$ im Wesentlichen durch $\tilde{X}$ bestimmt.*

*Beweis* Übungsaufgabe. □

#### 1.2.1.5 Der klassifizierende Raum einer Gruppe

Sei $G$ eine Gruppe. Setze $(BG)_n \coloneqq G^n$ und für $f:[m]\to[n]$ monoton, setzen wir $BG(f): G^n \to G^m$, $(g_1,\dots,g_n)\mapsto(h_1,\dots,h_m)$, wobei

$$h_i \coloneqq \prod_{j=f(i-1)+1}^{f(i)} g_j\,.$$

*Beispiel 1.38* $f:[3]\to[4], 0\mapsto 0, 1, 2\mapsto 2, 3\mapsto 4$ **Bild**

**Definition 1.39** Die geometrische Realisierung $|BG|$ heißt der *klassifizierende Raum von $G$*.

#### 1.2.1.6 Nicht-ausgeartete Simplizes

**Definition 1.40 (ausgearteter Simplex)** Sei $X$ eine simpliziale Menge. Ein $n$-Simplex $x\in X_n$ heißt *ausgeartet*, falls $x = X(f)(y)$ für $f:[n]\to[m]$ mit $m<n$, $y\in X_m$ und $f$ surjektiv.

Ist $x$ nicht-ausgeartet und $x = X(f)(y)$ für ein $f$ und $y$, so ist $f$ eine Injektion. Ansonsten zerlege $f = f_1\circ f_2$ mit $f_1$ injektiv und $f_2$ surjektiv. Damit $x = X(f_1\circ f_2)(y) = X(f_2)(X(f_1)(y))$.

Ist $X$ eine simpliziale Menge, so sei $X_{(n)} \coloneqq \{x\in X_n \mid x \text{ nicht-ausgeartet}\}$ und

$$\begin{tikzcd}
\tau : \coprod_{n\geq 0} \Delta_n \times X_n \arrow[r] & {|X|} \\
\coprod_{n\geq 0} \mathring{\Delta}_n \times X_{(n)} \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\mathring{\tau}"] &
\end{tikzcd}$$

**Proposition 1.41** *$\mathring{\tau}$ ist eine Bijektion.*

Um diese Proposition zu beweisen, brauchen wir einige Lemmas.

**Lemma 1.42** *Für jedes $x\in X_n$ existiert ein eindeutiges Paar $(f,y)$, mit $y\in X_{(m)}$, $f:[n]\to[m]$ monoton, surjektiv, so dass $x = X(f)(y)$.*

*Beweis* Die Existenz folgt aus der Definition von $X_{(m)}$. Zur Eindeutigkeit: Seien $(f,y)$, $f:[n]\to[m]$ und $(f',y')$, $f':[n]\to[m']$ zwei solcher Paare mit $x = X(f)(y) = X(f')(y')$. Sei $g:[m]\to[n]$ ein monotoner Schnitt von $f$, d.h. $f\circ g = \mathrm{id}_{[m]}$. Dann ist

$$y = X(\mathrm{id})(y) = X(f\circ g)(y) = X(g)X(f)(y) = X(g)(x).$$

Damit $y = X(g)X(f')(y') = X(f'\circ g)(y')$. Da $y$ nicht-entartet ist, ist $f'\circ g:[m]\to[m']$ eine Injektion, so dass $m\leq m'$. Analog $m'\leq m$, also $m = m'$. Damit ist $f'\circ g$ eine monotone Injektion von $[m]$ nach $[m]$, also $f'\circ g = \mathrm{id}_{[m]}$, also $y = y'$. Da $f'\circ g = \mathrm{id}$ für alle Schnitte $g$ von $f$, folgt $f' = f$. □

**Folgerung 1.43** *Sei $x\in X_n$ ein $n$-Simplex, $y\in X_m$ nicht-entartet, $f:[n]\to[m]$ eine monotone Surjektion mit $x = X(f)(y)$. Sei weiter $z\in X_l$ und $g:[n]\to[l]$ eine monotone Surjektion mit $x = X(g)(z)$. Dann faktorisiert $f$ als $f = h\circ g$ mit einem $h:[l]\to[m]$, so dass $z = X(h)(y)$.*

*Beweis* Sei $(h',y')$ das Paar aus Satz 1.42 mit $z = X(h')(y')$. Dann ist $x = X(g)(z) = X(g)(X(h')(y')) = X(h'\circ g)(y')$. Damit ist $h'\circ g = f$ und $y = y'$. Setze $h \coloneqq h'$. □

#### 1.2.1.6.1 Beweis von Satz 1.41

*Beweis (von Satz 1.41)* (1) $\mathring{\tau}$ ist surjektiv: Sei $p \in |X|$. Sei $k$ die kleinste Dimension, so dass ein $(s,x) \in \Delta_k \times X_k$ mit $\tau(s,x) = p$ existiert. Wir wollen nun zeigen, dass $(s,x) \in \mathring{\Delta}_k \times X_{(k)}$: Ist $k = 0$, so ist $\Delta_0 = \mathring{\Delta}_0$ und $X_{(0)} = X_0$, also nichts zu zeigen. Ist $x$ uasgeartet, so ist $x = X(f)(y)$, $f : [k] \to [l]$ monoton, $l < k$. Dann ist $\tau(s,x) = \tau(\Delta_f(s), y)$. Widerspruch zur Minimalität von $k$. Also $x \in X_{(k)}$. Ist $s \notin \mathring{\Delta}_k$, so existiert ein injektives $f : [l] \to [k]$ monoton mit $s = \Delta_f(t)$ für $t \in \Delta_l$. Damit $\tau(s,x) = \tau(\Delta_f(t), x) = \tau(t, X(f)(x))$ im Widerspruch zu $l < k$.

(2) $\mathring{\tau}$ ist injektiv: Seien $(s,x) \in \mathring{\Delta}_k \times X_{(k)}$, $(s',x') \in \mathring{\Delta}_l \times X_{(l)}$ mit $\tau(s,x) = \tau(s',x')(*)$, so ist zu zeigen, dass $s = s'$ und $x = x'$. Wegen $(*)$ existiert

$$(s,x) = (s_0,x_0) \sim (s_1,x_1) \sim \ldots \sim (s_N,x_N) = (s',x')$$

wobei $\sim$ für $(s_i,x_i) \overset{f_i^+}{\mapsto} (s_{i+1},x_{i+1})$ oder $(s_i,x_i) \overset{f_i^-}{\mapsfrom} (s_{i+1},x_{i+1})$ steht. Ohne Einschränkung können wir "Zickzack" annehmen. Wir zeigen: Ist $N = 1$, so ist $f_0 = \mathrm{id}$ und ist $N > 1$, so existiert eine kürzere Kette.

(3) Beh: Da $(s,x) \in \mathring{\Delta}_k \times X_{(k)}$, so ist $f_0^+$ eine Injektion und $f_0^-$ eine Surjektion. Im Fall $f_0^+$ ist $x = X(f_0^+)(x_1)$. Dann ist $f_0^+$ eine Injektion nach Unterunterabschnitt 1.2.1.6. Im Fall $f_0^-$ ist $s = \Delta_{f_0^-}(s_1)$. Da $s \in \mathring{\Delta}_k$, muss $f_0^-$ surjektiv sein. Wir folgern: $N = 1$.Unterunterabschnitt 1.2.1.6. Im Fall $f_0^-$ sit $s = \Delta_{f_0^-}(s_1)$. Da $s \in \mathring{\Delta}_k$, muss $f_0^-$ surjektiv sein. Wir folgern: Für $N = 1$ ist $f_0^-/f_0^+$ ist injektiv und surjektiv, also gleich id.

(4) Für $N \geq 2$ betrachte

$$\begin{tikzcd}
(s_i,x_i) \arrow[r, mapsto, "f_i^+"] & (s_{i+1},x_{i+1}) & (s_{i+2},x_{i+2}) \arrow[l, mapsto, "f_{i+1}^-"'] \\
{[m_i]} \arrow[r] & {[m_{i+1}]} & {[m_{i+2}]} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Sei außerdem $f_i^+$ injektiv. Wir zeigen, dass dann folgende Kette existiert:

$$\begin{tikzcd}
(s_i,x_i) & (s_{i+1},x_{i+1}) \arrow[l, mapsto, "g"'] \arrow[r, mapsto, "h"] & (s_{i+2},x_{i+2}) \\
{[m_i]} \arrow[r] & {[m_{i+1}]} & {[m_{i+2}]} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Sei $I := (f_{i+1}^-)^{-1}(f_i^+([m_i]))$, $l := |I|-1$. Sei $h : [l] \to [m_{i+2}]$ die injektive monotone Abbildung mit Bild $I$ Dann existiert genau ein $g : [l] \to [m_i]$ mit $f_i^+ \circ g = f_{i+1}^- \circ h$. Da $\operatorname{im} h = I$, ist $\operatorname{im} \Delta_h = (\Delta_{f_{i+1}^-})^{-1}(\Delta_{f_i^-}(\Delta_{m_i}))$. Da $\Delta_{f_{i+1}^-}(s_{i+2}) = s_{i+1} = \Delta_{f_i^+}(s_i)$, existiert ein $t \in \Delta_l$ mit $\Delta_h(t) = s_{i+2}$. Außerdem:

$$\Delta_{f_i^+}(\Delta_g(t)) = \Delta_{f_{i+1}^-}(\Delta_h(t)) = s_{i+1} = \Delta_{f_i^+}(s_i)$$

Da $\Delta_{f_i^+}$ injektiv, folgt $\Delta_g(t) = s_i$. Setze $y := X(h)(x_{i+2}) = X(g)(x_i)$.

(5) Sei $N \geq 2$, so beginnt die Kette mit $(s,x) \overset{f_0^+}{\mapsto} (s_1,x_1) \overset{f_1^-}{\hookleftarrow} (s_2,x_2)$, so ist $f_0^+$ nach (4) eine Injektion. Nach (3) erhalten wir dann eine Kette der Länge 2 (für $N = 2$ oder $N-1$ für $N \geq 3$) der Form

$$(s_0,x_0) \overset{f_0^-}{\hookleftarrow} (s_1,x_1) \overset{f_1^+}{\mapsto} (s_2,x_2)$$

Nach (4) ist $f_0^-$ eine Surjektion.

(6) Ist $N = 2$, also $(s_2,x_2) \in \mathring{\Delta}_l \times X_{(l)}$, so ist $f_1^+$ surjektiv nach (3). Da $x_0, x_2$ nicht-ausgeartet, folgt nach Satz 1.42, dass $f_0^- = f_1^+$ und $x_0 = x_2$, also $s_0 = s_2$.

(7) Sei also $N \geq 3$. Schreibe $f_1^+ = i \circ p$, wobei $p : [m_1] \to [l]$ monotone Surjektion und $i : [l] \to [m_2]$ monotone Injektion. Da $x_0$ nicht-ausgeartet und $f_0^-$ surjektiv, existiert nach Satz 1.43 eine Faktorisierung $f_0^- = g \circ p$ für ein $g : [l] \to [k]$. Damit ersetzen wir $(s_0,x_0) \overset{f_0^-}{\hookleftarrow} (s_1,x_1) \overset{f_1^+}{\mapsto} (s_2,x_2)$ durch

$$(s_0,x_0) \overset{g}{\hookleftarrow} (\Delta_p(s_1, X(g)(x_0)) \overset{i}{\mapsto} (s_2,x_2)\,,$$

d.h. ohne Einschränkung ist $f_1^+$ eine Injektion. Nach (4) können wir also $(s_1,x_1) \overset{f_1^+}{\mapsto} (s_2,x_2) \overset{f_2^-}{\hookleftarrow} (s_3,x_3)$ durch $(s_1,x_1) \overset{f_1^-}{\hookleftarrow} (s_2,x_2) \overset{f_2^+}{\mapsto} (s_3,x_3)$ ersetzen und wir erhalten eine Kette der Länge $N-2$. □

**Folgerung 1.44** *Sei $|X|$ ein triangulierter Raum mit Verklebedatum $(X_{(n)}, X(f))$. Sei $\tilde{X}$ die dazugehörige simpliziale Menge Dann $|\tilde{X}| = |X|$.*

*Beweis*

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{n\geq 0} \Delta_n \times \tilde{X}_n \arrow[r, "{(s,\tilde{x})=(s,g)\mapsto(\Delta_g(s),x)}"] \arrow[d] & \coprod_{n\geq 0} \Delta_n \times X_{(n)} \arrow[d] \\
|\tilde{X}| \arrow[r, dashed, "\varphi"] & |X|
\end{tikzcd}$$

Dann ist nach Übungsaufgabe $\varphi$ ein Homöomorphismus. □

#### 1.2.1.7 Skelett und Dimension

#### 1.2.1.8 Abbildungen simplizialer Mengen

#### 1.2.1.9 Verfeinerung von Überdeckungen

#### 1.2.1.10 Stetige Abbildungen

#### 1.2.1.11 Gruppenhomomorphismen

### 1.2.2 Simpliziale Topologische Räume und Eilenberg-Zilber

#### 1.2.2.1 Drei Beschreibungen von $\Delta_p \times \Delta_q$

#### 1.2.2.2 Definition

#### 1.2.2.3 Definition

#### 1.2.2.4 Beispiel

#### 1.2.2.5 Definition

#### 1.2.2.6 Die geometrische Realisierung einer bisimplizialen Menge

#### 1.2.2.7 Satz von Eilenberg und Zilber

#### 1.2.2.8 Beweisidee

#### 1.2.2.9 Aufeinanderfolgende Faktorisierungen

Tiefe der Nummerierung unklar!

$Z$ sei beliebige Menge, $R_1, R_2$ zwei Äquivalenzrelationen auf $Z$. Sei $R$ die von $R_1, R_2$ erzeugte Äquivalenzrelationen. Sei $R_1/R_2$ folgende Äquivalenzrelationen auf $Z/R_1$:

$$(x \bmod R_1) \overset{R_2/R_1}{\sim} (y \bmod R_1) \;:\Leftrightarrow\; \exists x', y' \in Z :\; x' \sim y' \bmod R_2,\; x' \sim x \bmod R_1\; y' \sim y \bmod R_1\,.$$

Dann sind

a) $(Z/R_1)\big/(R_2/R_1)$,

b) $(Z/R_2)\big/(R_1/R_2)$ und

c) $Z/R$

kanonisch bijektiv und falls a),b),c) die Quotiententopologie bzgl. einer Topologie auf $Z$ tragen, sind diese Bijektionen Homöomorphismen.

**Lemma 1.45** *Sei $R$ die von $R^{\mathrm{I}}$, $R^{\mathrm{II}}$ erzeugte Äquivalenzrelationen. Dann ist*

$$Z/R \;\cong\; \coprod_{k\geq 0}(X_{kk} \times \Delta_k) \quad \textit{und} \quad (Z/R)\big/(R^{\mathrm{D}}/R) \cong |X|^{\mathrm{D}}$$

*Beweis* Sei $\tilde{p} : Z \to \coprod_{k\geq 0}(X_{kk} \times \Delta_k),\ (x,(f,g),s) \mapsto (X(f,g)(x),s)$. $R^{\mathrm{I}}$ und $R^{\mathrm{II}}$-äquivalente Punkte haben das selbe Bild unter $\tilde{p}$. Damit erhalten wir ein wohldefiniertes $p : Z/R \to \coprod_{k\geq 0}(X_{kk} \times \Delta_k)$. Betrachte

$$\tilde{i} : \coprod_{k\geq 0}(X_{kk} \times \Delta_k) \to Z,\ (x,s) \mapsto (x,(\mathrm{id},\mathrm{id}),s)\,.$$

und $i = (Z \to Z/R) \circ i$. Dann ist $p \circ i = \mathrm{id}$. Damit ist $p$ surjektiv. Jeder Punkt $(x,(f,g),s)$ ist $R$-äquivalent zu $(X(f,g)x,(\mathrm{id},\mathrm{id}),s)$. Damit ist $p$ auch injektiv, also ein Homöomorphismus.

Berechnung von $R^{\mathrm{D}}/R$ auf $Z/R$:

$$\begin{tikzcd}
(x,(f,g),s) \arrow[r, mapsto, "p"] \arrow[d, leftrightarrow, "\sim_h"] & (X(f,g)(x),s) = (X(h,h) \circ X(f',g')(x),s) \arrow[d, leftrightarrow, "\sim_{R^{\mathrm{D}}/R}"] \\
(X,(f',g'),s') \arrow[r, mapsto, "p"] & (X(f',g')(x),s') = (X(f',g')(x),\Delta_h(s))
\end{tikzcd}$$

D.h. $R^{\mathrm{D}}/R : (X(h,h)(x),s) \sim (x,\Delta_h(s))$ und es folgt $\coprod_{k\geq 0} X_{kk} \times \Delta_k = |X|^{\mathrm{D}}$. □

**Lemma 1.46** *Die geometrische Relaisierung $|D[m,n]|$ ist kanonisch homöomorph zu $\Delta_m \times \Delta_n$.*

*Beweis* Einem $k$-Simplex in $D[m,n]$, d.h. einem Paar $(f,g)$ monotoner Abbildungen $f : [k] \to [m]$, $g : [k] \to [n]$, ordnen wir das $(k+1)$-Tupel $((i_0,j_0),\ldots,(i_k,j_k))$ mit $i_l = f(l)$, $j_l = g(l)$ für $0 \leq l \leq k$ zu. Der Simplex $(f,g)$ ist genau dann nicht-degeneriert, wenn alle Paare verschieden sind. Außerdem: Ist $h : [k'] \to [k]$ injektiv und $(f,g)$ nicht ausgeartet, so ist $D[m,n](h)(f,g) = (f \circ h, g \circ h)$ ebenfalls nicht ausgeartet. Damit ist

$$|D[m,n]| = |\text{Verklebedatum der nicht-ausgearten Simplizes}| \cong \Delta_m \times \Delta_n$$ □

**Folgerung 1.47** *Es gilt:*

$$Z/R^{\mathrm{D}} \ \cong \ \coprod_{m,n} X_{m,n} \times \Delta_m \times \Delta_n$$

*und*

$$R^{\mathrm{I}}/R^{\mathrm{D}} : (x,s,t) \sim (x',s',t),\ \textit{falls}\ s' = \Delta_h(s),\ x = X(h,\mathrm{id})(x')\,,$$

*für ein monotones $h$. $R^{\mathrm{II}}/R^{\mathrm{D}}$ analog.*

*Beweis* $Z/R^{\mathrm{D}} \cong \coprod_{m,n\geq 0} X_{m,n} \times (\Delta_m \times \Delta_n)$ ist Lemma 1.46.

$$F_h : D[m,n]_h \to D[m',n]_h,\ (f,g) \mapsto (h \circ f, g)$$

so ist

$$|F_h| : \quad \begin{tikzcd}
{|D[m,n]|} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & {|D[m',n]|} \arrow[d, "\cong"] \\
\Delta_m \times \Delta_n \arrow[r, "\Delta_n \times \Delta_{\mathrm{id}}"] & \Delta_{m'} \times \Delta_n
\end{tikzcd}$$ □

**Notation 1.48**
- $\tilde{Z} := Z/R^{\mathrm{D}}$

- $\tilde{R}^{\mathrm{I}} := R^{\mathrm{I}}/R^{\mathrm{D}}$
- $\tilde{R}^{\mathrm{II}} := R^{\mathrm{II}}/R^{\mathrm{D}}$

**Folgerung 1.49** *Es gilt*

$$(\tilde{Z}/\tilde{R}^{\mathrm{I}})\big/(\tilde{R}^{\mathrm{II}}/\tilde{R}^{\mathrm{I}}) \;=\; |X|^{\mathrm{I}} \quad \textit{und} \quad (\tilde{Z}/\tilde{R}^{\mathrm{II}})\big/(\tilde{R}^{\mathrm{I}}/\tilde{R}^{\mathrm{II}}) \;=\; |X|^{\mathrm{II}}.$$

## 1.3 Homologie und Kohomologie

### 1.3.1 Ketten und Koketten

**Definition 1.50** Eine *$n$-dimensionale Kette* (*$n$-Kette*) einer simplizialen Menge $X$ ist ein Element der freien abelschen Gruppe $C_n(X)$, welche von allen $n$-Simplizes erzeugt wird.

# Literatur

[1] S.I. Gelfand und Y. Manin. *Methods of Homological Algebra: Springer monographs in mathematics*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2003. ISBN: 9783540435839. URL: http://books.google.de/books?id=pv94ATbagxEC.