Vorlesungszusammenfassung

Homologische Algebra

gelesen von Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen

Maximilian Huber Stefan Hackenberg

Sommersemester 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Simpliziale Mengen

1.1 Triangulierte Räume

1.1.1 Definitionen

Definition 1.1 Ein *Triangulierter Raum* besteht aus

- Punkten,
- Kanten,
- Dreiecke,
- Tetraeder,
- ...
- n-dimensionale Simplizes

und einer kombinatorischen Verklebevorschrift.

Definition 1.2 (topologischer n-Simplex, Ecke, I-Fläche) Der *n-dimensionale topologische Simplex* (oder *topologischer n-Simplex*) ist der topologische Raum

$$\Delta_n \;:=\; \left\{(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 1,\; x_i \geq 0\right\}.$$

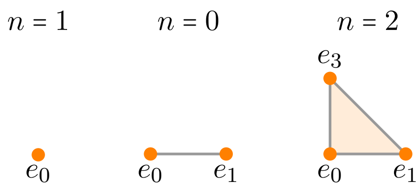
Der Punkt $e_i \in \Delta_n$ mit $x_i = 1$ heißt die *i-te Ecke von Δ_n*.
Für $I \subseteq [n] := \{0,\dots,n\}$ ist die *I-Fläche von Δ_n* durch

$$\left\{(x_0,\dots,x_n) \in \Delta_n \mid x_i = 0 \;\; \forall i \notin I\right\}$$

gegeben.

Bemerkung 1.3 Durch obige Definition einer Ecke erhält man eine Anordnung der Ecken!

Beispiel 1.4 (Veranschaulichung verschiedener topologischer n-Simplizes)



Bemerkung 1.5 Jedes $I \subseteq [n]$ mit $|I| = m + 1$ definiert genau eine streng monoton wachsende Abbildung $f : [m] \to [n]$ mit $\operatorname{im} f = I$. Diese Konstruktion ist umkehrbar.

Definition 1.6 Die Abbildung

$$\Delta_f : \Delta_m \to \Delta_n$$

ist diejenige lineare Abbildung, welche die Ordnung der Ecken berücksichtigt und die I-Seite von Δ_n als Bild hat, wobei f und I nach obiger Bemerkung korrespondieren.

Beispiel 1.7 Für

$$\begin{array}{rccccc} f: & [1] & \to & [2] & \leftrightarrow & I = \{0,2\} \\ & 0 & \mapsto & 0 & & \\ & 1 & \mapsto & 2 & & \end{array}$$

erhalten wir $\Delta_f : \Delta_1 \to \Delta_2$: **Bild**

Definition 1.8 Ein *Verklebedatum* X ist eine Folge $X_{(0)}, X_{(1)}, \dots$ von Mengen, wobei man $X_{(0)}$ als *Punkte*, $X_{(1)}$ als *Kanten*, $X_{(2)}$ als *Flächen*, ... bezeichnet und für jede streng monotone Abbildung $f : [m] \to [n]$ eine Abbildung

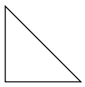
$$X(f) : X_{(n)} \to X_{(m)} ,$$

so dass Folgendes gilt:

(1) $X(\mathrm{id}_{[n]}) = \mathrm{id}_{X_{(n)}}$,

(2) $X(g \circ f) = X(f) \circ X(g)$.

Beispiel 1.9 Für Δ_2 haben wir:

Bild 

$$\begin{aligned} X_{(0)} &:= \{\textbf{Bild}\} \\ X_{(1)} &:= \{\textbf{Bild}\} \\ X_{(2)} &:= \{\textbf{Bild}\} \end{aligned}$$

Alle weiteren $X_{(3)} = X_{(4)} = \varnothing$ sind leer.

Definition 1.10 (topologische Realisierung) Die *topologische Realisierung $|X|$ von X* ist der topologische Raum, dessen zugrunde liegende Menge durch

$$\Big(\coprod_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times X_{(n)}) \Big) \,/\, R$$

gegeben ist, wobei R die schwächste Äquivalenzrelation ist, für die

$$(s,x) \; R \; (t,y) \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} y = X(f)(x) \text{ und} \\ s = \Delta_f(t) \text{ für ein } f : [m] \to [n] . \end{cases}$$

Für $(s,x)R(t,y)$ schreibe auch $(s,x) \overset{f}{\mapsto} (t,y)$. Die Topologie von $|X|$ ist die feinste Topologie, so dass

$$\coprod_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times X_{(n)}) \xrightarrow{\tau} \Big(\coprod_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times X_{(n)}) \Big) / R = X$$

stetig ist, d.h. $\mathcal{U} \subseteq |X|$ offen $\Leftrightarrow$ $\tau^{-1}(\mathcal{U})$ offen $\Leftrightarrow$ $\tau^{-1}(\mathcal{U})$ in allen Δ_n offen.

Bemerkung 1.11 Die definierende Gleichung der Relation R in Definition 1.10 definiert zwar eine reflexive und transitive Relation, jedoch keine symmetrische!

1.1.2 Beispiele

Beispiel 1.12 (n-dimensionaler Simplex)

$$\begin{aligned} X_{(i)} &= \{I \subseteq [n] \mid |I| = i+1\} \\ &\cong \{f : [i] \to [n] \text{ streng monoton}\} \end{aligned}$$

$$X([i] \xrightarrow{f} [j]) : \ (g : [j] \to [n]) \ \longmapsto \ (g \circ f : [i] \to [n])\,.$$

Damit ist der n-dimensionale Simplex also nichts anderes, als die geometrische Realisierung von obigem Verklebedatum: $\Delta_n \approx |X|$.

Beispiel 1.13 (n-dimensionale Sphäre) Die Einheitsspähre S^n lässt sich durch $\partial\Delta_n$ triangulieren und erhält damit als Verklebedatum:

$$X_{(i)} := \begin{cases} X^{\Delta_n}_{(i)} = \{[i] \to [n] \text{ streng monoton wachsend}\} & i < n\,, \\ \varnothing & i \geq n\,, \end{cases}$$

wobei X^{Δ_n} das Verklebedatum des n-Simplex meint. Damit erhalten wir wiederum $S^n \approx |X|$.

Definition 1.14 (Inneres, induzierte Abbildung) Das *Innere von Δ_n* ist

$$\begin{aligned} \mathring{\Delta}_n &:= \begin{cases} \text{top. Inneres von } \Delta_n & n \geq 1 \\ \Delta_0 & n = 0 \end{cases} \\ &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta^n \mid x_i > 0\} \end{aligned}$$

Ferner heißt

$$\mathring{\tau} : \coprod_{n \geq 0} \mathring{\Delta}_n \times X_{(n)} \to |X|$$

die *durch τ induzierte Abbildung.*

1.1.3 Proposition

Proposition 1.15 *$\mathring{\tau}$ ist eine mengentheoretische Bijektion.*

Beweis Für ein $(s, x) \in \Delta_n \times X_{(n)}$ sei sein *Index* $k(s, x)$ als die minimale Dimension einer Seite gegeben, die s enthält. R-äquivalente Punkte haben den selben Index. Damit ist $k : |X| \to \mathbb{N}_0$ eine wohldefinierte Abbildung. Es gilt $k(s, x) = k$, wenn $s \in \mathring{\Delta}_k$.

Ist dann $p \in |X|$ mit $k(p) = k$, so gibt es (mind.) einen Repräsentanten (s, x) mit $(s, x) \in \mathring{\Delta}_k \times X_{(k)}$. Damit ist gezeigt, dass $\mathring{\tau}$ surjektiv ist.

Bleibt noch die Injektivität von $\mathring{\tau}$ zu zeigen: Seien $(s, x), (s', x') \in \coprod_{n \geq 0} \mathring{\Delta}_n \times X_{(n)}$ mit $(s, x) \overset{R}{\sim} (s', x')$. Zu zeigen ist damit $(s, x) = (s', x')$. Nach obiger Vorüberlegung ist $k(s, x) = k(s', x')$, d.h. $x, x' \in X_{(k)}$. Wir haben

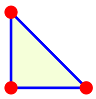
$$\begin{tikzcd}
 & (s_1, x_1) & & (s_3, x_3) & & \cdots & \\
(s, x) \arrow[ur, mapsto, "f_1"] & & (s_2, x_2) \arrow[ul, mapsto, "f_2"'] \arrow[ur, mapsto, "f_3"] & & \cdots \arrow[ul, mapsto] \arrow[ur, mapsto] & & (s', x') \arrow[ul, mapsto]
\end{tikzcd}$$

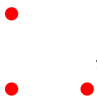
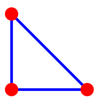
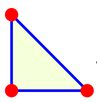
mit $(s_i, x_i) \in \Delta_{l_i} \times X_{(l_i)}$ und $l_i \geq k$. Aus dieser Kette können wir eine Kette kleinerer Länge konstruieren $f_1 : [k] \to [l_1]$, $f_2 : [l_2] \to [l_1]$ streng monoton mit $s_1 = \Delta_{f_1}(s) = \Delta_{f_2}(s_2)$. Da $s \in \mathring{\Delta}_k$, liegt s_1 im Inneren der f_1-Seite von Δ_{l_1}. Damit ist im $f_2 \supseteq$ im f_1 und ergo $f_1 = f_2 \circ f$ für (genau) ein streng monotones $f : [k] \to [l_2]$.

Es gilt dann
$$\Delta_{f_2}\Delta_f(s) = \Delta_{f_2 \circ f}(s) = \Delta_{f_1}(s) = s_1 = \Delta_{f_2}(s_2)\,.$$
Da Δ_{f_2} injektiv ist, folgt $\Delta_f(s) = s_2$. Außerdem ist
$$X(f)(x_2) = X(f)\big(X(f_2)(x_1)\big) = X(f_2 \circ f)(x_1) = X(f_1)(x_1) = x\,.$$
Also folgt:
$$\begin{tikzcd}
(s,x) \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, mapsto, bend right, "f_3 \circ f"'] & (s_2,x_2) \arrow[r, mapsto, "f_3"] & (s_3,x_3) & (s_4,x_4) \arrow[l, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \ldots
\end{tikzcd}$$
Nach endlich vielen Schritten erhalten wir also $(s,x) \xmapsto{f} (s', x')$ mit $x, x' \in X_{(k)}$. Folglich ist $f : [k] \to [k]$ und damit die Identität, woraus die Injektivität folgt. □

1.1.4 Skelett

Definition 1.16 (k-Skelett) Das *k-Skelett* einer Triangulierung $(X_{(i)}, X(f))$ ist die Triangulierung
$$(X_{(i)}, i \leq k; X(f))\,.$$
Der zugehörige topologische Raum $\operatorname{sk}_k |X|$ ist das *k-Skelett von $|X|$*.

Beispiel 1.17 Sei $(X_{(i)}, X(f))$  so ist

- das 0-Skelett  ,
- das 1-Skelett  und
- das 2-Skelett  .

Korollar 1.18 *Es gilt:*

(1) $|X| = \operatorname{sk}_\infty |X| = \bigcup_{k \geq 0} \operatorname{sk}_k |X|$

(2) Die natürlichen Abbildungen $\operatorname{sk}_k |X| \to \operatorname{sk}_l |X|$ *für* $k \leq l$ *sind abgeschlossene Einbettungen.*

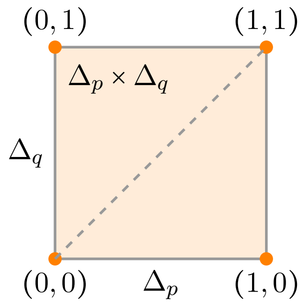
(3) $\operatorname{sk}_{k+1} |X|$ *entsteht aus* $\operatorname{sk}_k |X|$ *durch Hinzufügen offener* $(k+1)$*-Simplizes, deren Ränder mit* $\operatorname{sk}_k |X|$ *verklebt werden.*

Beweis Klar mit Proposition 1.15. □

1.1.5 Triangulation des Produktes zweier Simplizes

Wir wollen eine kanonische Triangulierung $(X_{(n)}, X(f))$ von $\Delta_p \times \Delta_q$ explizit angeben.

Beispiel 1.19 Für $p = 1$ und $q = 1$ können wir uns anschaulich folgende Triangulierung überlegen:



Definition 1.20 (kanonische Triangulierung von $\Delta_p \times \Delta_q$) Die *kanonische Triangulierung* $(X_{(n)}, X(f))$ *von* $\Delta_p \times \Delta_q$ ist gegeben durch:

(1) Ein Element von $X_{(n)}$ (multidimensionale Diagonale) ist eine Menge von $(n+1)$ paarweise verschiedenen Paaren
$$\{(i_0, j_0), (i_1, j_1), \ldots, (i_n, j_n)\}$$
mit $0 \le i_0 \le i_1 \le \ldots \le i_n \le p$ und $0 \le j_0 \le j_1 \le \ldots \le j_n \le q$.

(2) Für $f : [m] \to [n]$ streng monoton sei
$$X(f)(\{(i_0, j_0), \ldots, (i_n, j_n)\}) = \{(i_{f(0)}, j_{f(0)}), \ldots, (i_{f(m)}, j_{f(m)})\}.$$

Definition 1.21 Sei
$$\vartheta_n : \Delta_n \times X_{(n)} \to \Delta_p \times \Delta_q$$
so, dass $\vartheta_n(\_, x) : \Delta_n \to \Delta_p \times \Delta_q \subseteq \mathbb{R}^{p+q+2}$ diejenige lineare, ordnungserhaltende Abbildung ist, deren Bild $\tilde{\Delta}_n$ ist, wobei $\tilde{\Delta}_n \subseteq \mathbb{R}^{p+q+2}$ derjenige n-Simplex ist, der durch (e_{ik}, e'_{jk}) aufgespannt wird für $x = \{(i_0, j_0), \ldots, (i_n, j_n)\}$.

Lemma 1.22 *Sei $|X|$ die geometrische Realisierung von $(X_{(n)}, X(f))$. Dann existiert ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
& \coprod \Delta_n \times X_{(n)} \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\coprod \vartheta_n =: \vartheta"] & \\
{|X|} \arrow[rr, dashed, "\exists!\,\cong"', "\varphi"] & & \Delta_p \times \Delta_q
\end{tikzcd}$$

wobei das eindeutige φ eine Bijektion ist.

Beweis (a) Da τ surjektiv, existiert höchstens ein φ. Sei $(t, y) \overset{f}{\longmapsto} (s, x)$, d.h. $s = \Delta_f(t)$, $y = X(f)(x)$.
$$\vartheta(s, x) = \vartheta(\Delta_f(t), x) = \vartheta(t, X(f)(x)) = \vartheta(t, y).$$
Also existiert genau ein φ.

(b) Wir zeigen nun, dass ϑ surjektiv ist, damit ist auch φ surjektiv. Sei $\Delta_p = \{(x_0,\dots,x_p) \mid x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$ und $\Delta_q = \{(y_0,\dots,y_p) \mid y_j \geq 0, \sum y_j = 1\}$ Führe nun neue Koordinaten ein:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_0, & \xi_2 &= x_0 + x_1, & \dots, && \xi_p &= x_0 + \dots + x_{p-1} \\ \eta_1 &= y_0, & \eta_2 &= y_0 + y_1, & \dots, && \eta_q &= y_0 + \dots + y_{q-1} \end{aligned}$$

In diesen Koordinaten gilt:

$$e_i = (\underbrace{0,\dots,0}_{i}, \underbrace{1,\dots,1}_{p-i}), \quad e_j = (\underbrace{0,\dots,0}_{j}, \underbrace{1,\dots,1}_{q-j})$$

Sei $x = \{(i_0,j_0),\dots,(i_{p+p},j_{p+q})\} \in X_{(p+q)}$ mit $(i_0,j_0) = (0,0)$ und $(i_{p+q},j_{p+q}) = (p,q)$. Das Bild $\vartheta(\Delta_{p+q},x)$ besteht aus allen Paaren $\big((\xi_1,\dots,\xi_p),(\eta_1,\dots,\eta_q)\big) \in \Delta_p \times \Delta_q$ mit $0 \leq \xi_i,\eta_j \leq 1$, wobei alle ξ_i,η_j angeordnet sind und gilt:

(i) Ist $i < j$, so steht ξ_i vor ξ_j und η_i vor η_j und ist $j_{k+1} = j_k$, so steht an $(k+1)$-ter Stelle ein ξ, sonst ein η.

(c) Sei $r = ((\xi_1,\dots,\xi_p),(\eta_1,\dots,\eta_q) \in \Delta_p \times \Delta_q$. Wir konstruieren dasjenige Element in $\coprod \mathring{\Delta}_n \times X_{(n)}$, welches von ϑ auf r abgebildet wird. (Damit ist φ injektiv). Das partioniere die $p+q+2$ Zahlen $0,\xi_i,\eta_i,1$ in Pakete jeweils gleicher Zahlen, nummeriert durch $0,1,\dots,l+1$ mit $0 \leq l \leq p+q$ in aufsteigender Reihenfolge. Die Werte seien $0 = \gamma_0 < \gamma < \dots < \gamma_{l+1} = 1$. Sei $x := \{(i_0,j_0),\dots,(i_l,j_l\} \in X_{(l)}$ gegeben durch

$$i_k := \begin{cases} 0 & k = -1, \\ i_{k-1} & \text{kein } \xi \text{ in } k\text{-ter Gruppe}, \\ \max\{i \mid \xi_i \text{ liegt in der } k\text{-ten Gruppe}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

□

Bild zur Veranschaulichung der Tupel für $\Delta_1 \times \Delta_1$

Verwaltung von Übungsaufgaben?

und j_k analog zu i_k mit η anstatt ξ. Sei $s = (z_0,\dots,z_l) \in \mathring{\Delta}_l$ mit $z_i = \gamma_{i+1} - \gamma_i$, $0 \leq i \leq l$. Nach Übungsaufgabe 1 Übungsblatt 1 gilt nun $\vartheta^{-1}(r) = \{(s,x)\}$

1.2 Simpliziale Mengen

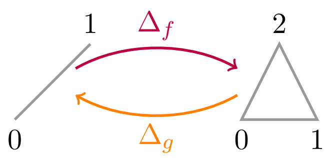
Definition 1.23 (simpliziale Menge, f-Seite) Eine *simpliziale Menge* ist eine Familie $X_\bullet = (X_n)_{n\geq 0}$ von Mengen und von Abbildungen $X(f): X_n \to X_m$ für jede monotone Abbildung $f: [m] \to [n]$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) $X(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$,

(2) $X(f \circ g) = X(g) \circ X(f)$.

Für jede monotone Abbildung $f: [m] \to [n]$ ist die f-*Seite* die lineare Abbildung $\Delta_f: \Delta_m \to \Delta_n$ mit $e_i \mapsto e_{f(i)}$.

Beispiel 1.24



$$\begin{array}{rccc} f: & [1] & \to & [2] \\ & 0 & \mapsto & 0 \\ & 1 & \mapsto & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g: & [2] & \to & [1] \\ & 0 & \mapsto & 0 \\ & 1 & \mapsto & 0 \\ & 2 & \mapsto & 1 \end{array}$$

Bemerkung 1.25 Δ_f ist im Allgemeinen keine Einbettung mehr!

Definition 1.26 Die *geometrische Realisierung* $|X_\bullet|$ einer simplizialen Menge $X_\bullet$ ist der topologische Raum mit zugrundeliegender Menge

$$\left(\coprod \Delta_n \times X_n\right)/R,$$

wobei R die schwächste Äquivalenzrelation ist, für die

$$(s,x)R(t,y) \quad \Longleftarrow \quad y = X(f)(x),\; s = \Delta_f(t)$$

für alle monotonen Abbildungen $f : [m] \to [n]$ gilt. Die Topologie auf $|X|$ ist wieder die Quotiententopologie.

1.2.1 Beispiele

Nerv einer Überdeckung

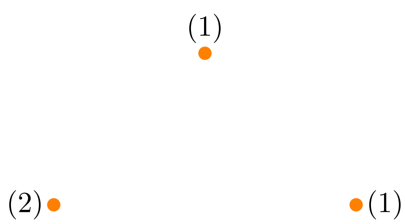
Sei $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Überdeckung eines topologischen Raumes Y durch offene (bzw. abgeschlossene Teilmengen). Sei

$$X_n := \{(\alpha_0,\ldots,\alpha_n) \in A^{n+1} \mid \mathcal{U}_{\alpha_0} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{\alpha_n} \neq \varnothing\}.$$

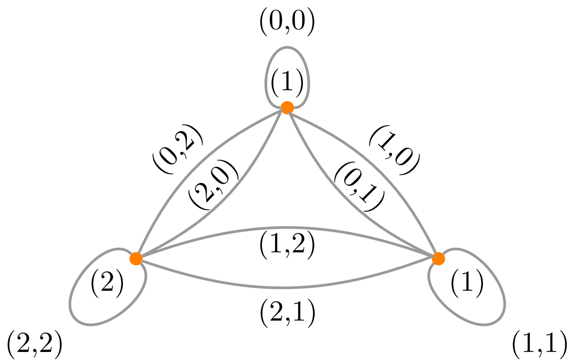
Definition 1.27 $X_\bullet$ heißt *Nerv von* $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Beispiel 1.28 **Bild** Überdeckung der S^1. ... mit der geometrischen Realisierung:

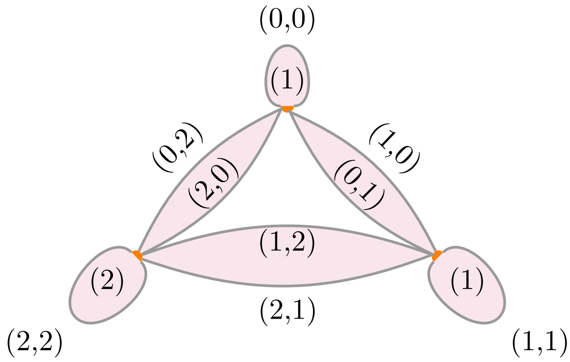
(1) Das 0-Skelet



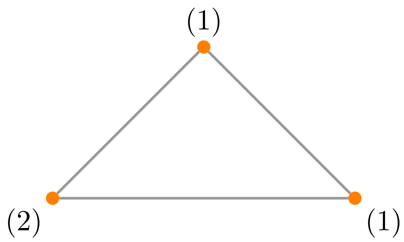
(2) Das 1-Skelet



(3) Das 2-Skelet



welches vereinfacht gemalt wie folgt aussieht



Bemerkung 1.29 Ist die Überdeckung lokal endlich und sind die nicht-leeren Durchschnitte zusammenziehbar, so ist $|X|$ homotopieäquivalent zu Y.

Singuläre Simplizes

Definition 1.30 Sei Y ein topologischer Raum. Ein *singulärer n-Simplex von Y* ist eine stetige Abbildung $\varphi : \Delta_n \to Y$.

$$X_n := \{\varphi : \Delta_n \to Y \text{ sing. } n\text{-Simplizes}\}$$

und

$$X(f)(\varphi) := \varphi \circ \Delta_f$$

für alle $f : [m] \to [n]$ monoton. Dies definiert eine simpliziale Menge $X_\bullet$.

Bemerkung 1.31 $X_\bullet$ ist riesig!

Bemerkung 1.32 In einem gewissen Sinn sind *singuläre simpliziale Mengen eines topologischen Raums bilden* und *geometrische Realisierung einer simplizialen Menge bilden* zusammengehörige Prozesse; sie lösen jeweils ein Optimierungsproblem, das der andere Prozess stellt. Das Schlagwort dazu ist die allgemeine *Adjunktion zwischen Nerv und Realisierung*, und vielleicht werden wir dazu später mehr erfahren.

Die simpliziale Menge $\Delta[p]$

Definition 1.33 Sei

$$\begin{aligned} \Delta[p]_n &:= \{g : [n] \to [p] \text{ monoton}\}, \\ \Delta[p](f)(g) &:= g \circ f. \end{aligned}$$

$\Delta[p]_\bullet$ heißt *simplizialer p-Simplex.*

Lemma 1.34 *Es existiert ein kanonischer Homöomorphismus $\Delta_p \to |\Delta[p]|$.*

Beweis Übungsaufgabe. □

Die einem Verklebedatum zugeordnete simpliziale Menge

Sei $(X_{(n)}, X(f))$ ein Verklebedatum. Dazu gehört die simpliziale Menge $\tilde{X}_\bullet$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{X}_n &:= \{(x,g) \mid x \in X_{(k)},\ g : [m] \to [k] \text{ monoton, surjektiv}\} \\ \tilde{X}(f) &:= \tilde{X}_m \to \tilde{X}_n,\ (x,g) \mapsto (X(f_1)(x), f_2) \end{aligned}$$

für $f : [n] \to [m]$ monoton, mit $g \circ f = f_1 \circ f_2$ für f_1, f_2 monoton, f_1 injektiv, f_2 surjektiv.

Lemma 1.35 $\tilde{X}_\bullet$ *ist in der Tat eine simpliziale Menge.*

Beweis Übungsaufgabe. □

Bemerkung 1.36 Später werden wir sehen, dass

$$|\tilde{X}_\bullet| = |X|.$$

Literatur

[1] S.I. Gelfand und Y. Manin. *Methods of Homological Algebra: Springer monographs in mathematics*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2003. ISBN: 9783540435839. URL: http://books.google.de/books?id=pv94ATbagxEC.