Vorlesungszusammenfassung

Homologische Algebra

gelesen von Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen

Maximilian Huber Stefan Hackenberg

Sommersemester 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Simpliziale Mengen

1.1 Triangulierte Räume

1.1.1 Definitionen

Definition 1.1 Ein *Triangulierter Raum* besteht aus

- Punkten,
- Kanten,
- Dreiecke,
- Tetraeder,
- ...
- n-dimensionale Simplizes

und einer kombinatorischen Verklebevorschrift.

Definition 1.2 (topologischer n-Simplex, Ecke, I-Fläche) Der *n-dimensionale topologische Simplex* (oder *topologischer n-Simplex*) ist der topologische Raum

$$\Delta_n \ := \ \left\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0\right\}.$$

Der Punkt $e_i \in \Delta_n$ mit $x_i = 1$ heißt die *i-te Ecke von* Δ_n.
Für $I \subseteq [n] := \{0, \ldots, n\}$ ist die *I-Fläche von* Δ_n durch

$$\left\{(x_0, \ldots, x_n) \in \Delta_n \mid x_i = 0 \ \forall i \notin I\right\}$$

gegeben.

Bemerkung 1.3 Durch obige Definition einer Ecke erhält man eine Anordnung der Ecken!

Beispiel 1.4 (Veranschaulichung verschiedener topologischer n-Simplizes) $n = 0$ **Bild**

$n = 1$ **Bild**

$n = 2$ **Bild**

Bemerkung 1.5 Jedes $I \subseteq [n]$ mit $|I| = m + 1$ definiert genau eine streng monoton wachsende Abbildung $f : [m] \to [n]$ mit $\operatorname{im} f = I$. Diese Konstruktion ist umkehrbar.

Definition 1.6 Die Abbildung

$$\Delta_f : \Delta_m \to \Delta_n$$

ist diejenige lineare Abbildung, welche die Ordnung der Ecken berücksichtigt und die I-Seite von Δ_n als Bild hat, wobei f und I nach obiger Bemerkung korrespondieren.

Beispiel 1.7 Für

$$\begin{array}{rccc} f: & [1] & \to & [2] \\ & 0 & \mapsto & 0 \\ & 1 & \mapsto & 2 \end{array} \quad \leftrightarrow \quad I = \{0, 2\}$$

erhalten wir $\Delta_f : \Delta_1 \to \Delta_2$: **Bild**

Definition 1.8 Ein *Verklebedatum* X ist eine Folge $X_{(0)}, X_{(1)}, \dots$ von Mengen, wobei man $X_{(0)}$ als *Punkte*, $X_{(1)}$ als *Kanten*, $X_{(2)}$ als *Flächen*, ... bezeichnet und für jede streng monotone Abbildung $f : [m] \to [n]$ eine Abbildung

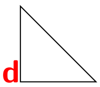
$$X(f) : X_{(n)} \to X_{(m)} \,,$$

so dass Folgendes gilt:

(1) $X(\mathrm{id}_{[n]}) = \mathrm{id}_{X_{(n)}}$,

(2) $X(g \circ f) = X(f) \circ X(g)$.

Beispiel 1.9 Für Δ_2 haben wir:

Bild 

$$\begin{aligned} X_{(0)} &:= \{\textbf{Bild}\} \\ X_{(1)} &:= \{\textbf{Bild}\} \\ X_{(2)} &:= \{\textbf{Bild}\} \end{aligned}$$

Alle weiteren $X_{(3)} = X_{(4)} = \varnothing$ sind leer.

Definition 1.10 (topologische Realisierung) Die *topologische Realisierung $|X|$ von X* ist der topologische Raum, dessen zugrunde liegende Menge durch

$$\Big(\coprod_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times X_{(n)}) \Big) \,/\, R$$

gegeben ist, wobei R die schwächste Äquivalenzrelation ist, für die

$$(s, x) \; R \; (t, y) \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} y = X(f)(x) \text{ und} \\ s = \Delta_f(t) \text{ für ein } f : [m] \to [n] \,. \end{cases}$$

Für $(s, x) R (t, y)$ schreibe auch $(s, x) \overset{f}{\mapsto} (t, y)$. Die Topologie von $|X|$ ist die feinste Topologie, so dass

$$\coprod_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times X_{(n)}) \xrightarrow{\tau} \Big(\coprod_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times X_{(n)}) \Big) / R = X$$

stetig ist, d.h. $\mathcal{U} \subseteq |X|$ offen $\Leftrightarrow$ $\tau^{-1}(\mathcal{U})$ offen $\Leftrightarrow$ $\tau^{-1}(\mathcal{U})$ in allen Δ_n offen.

Bemerkung 1.11 Die definierende Gleichung der Relation R in Definition 1.10 definiert zwar eine reflexive und transitive Relation, jedoch keine symmetrische!

1.1.2 Beispiele

Beispiel 1.12 (n-dimensionaler Simplex)

$$\begin{aligned} X_{(i)} &= \{I \subseteq [n] \mid |I| = i+1\} \\ &\cong \{f : [i] \to [n] \text{ streng monoton}\} \end{aligned}$$

$$X([i] \xrightarrow{f} [j]) : \ (g : [j] \to [n]) \ \longmapsto \ (g \circ f : [i] \to [n]) \,.$$

Damit ist der n-dimensionale Simplex also nichts anderes, als die geometrische Realisierung von obigem Verklebedatum: $\Delta_n \approx |X|$.

Beispiel 1.13 (n-dimensionale Sphäre) Die Einheitsspähre S^n lässt sich durch $\partial\Delta_n$ triangulieren und erhält damit als Verklebedatum:

$$X_{(i)} \ := \ \begin{cases} X_{(i)}^{\Delta_n} = \{[i] \to [n] \text{ streng monoton wachsend}\} & i < n \,, \\ \varnothing & i \geq n \,, \end{cases}$$

wobei X^{Δ_n} das Verklebedatum des n-Simplex meint. Damit erhalten wir wiederum $S^n \approx |X|$.

Literatur

[1] S.I. Gelfand und Y. Manin. *Methods of Homological Algebra: Springer monographs in mathematics*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2003. ISBN: 9783540435839. URL: http://books.google.de/books?id=pv94ATbagxEC.