

Vorlesungszusammenfassung

Homologische Algebra

gelesen von Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen

Maximilian Huber

Stefan Hackenberg

Sommersemester 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Simpliziale Mengen	1
1.1	Triangulierte Räume	1
1.1.1	Definitionen	1
1.1.2	Beispiele	3
1.1.3	Proposition	3
1.1.4	Skelett	4
1.1.5	Triangulation des Produktes zweier Simplizes	5
	Literatur	7

Kapitel 1

Simpliziale Mengen

1.1 Triangulierte Räume

1.1.1 Definitionen

Definition 1.1 Ein *Triangulierter Raum* besteht aus

- Punkten,
- Kanten,
- Dreiecke,
- Tetraeder,
- ...
- n -dimensionale Simplizes

und einer kombinatorischen Verklebevorschrift.

Definition 1.2 (topologischer n -Simplex, Ecke, I -Fläche) Der n -dimensionale topologische Simplex (oder topologischer n -Simplex) ist der topologische Raum

$$\Delta_n := \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}.$$

Der Punkt $e_i \in \Delta_n$ mit $x_i = 1$ heißt die i -te Ecke von Δ_n .

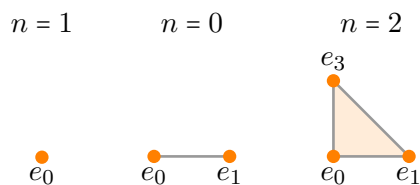
Für $I \subseteq [n] := \{0, \dots, n\}$ ist die I -Fläche von Δ_n durch

$$\left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \Delta_n \mid x_i = 0 \ \forall i \notin I \right\}$$

gegeben.

Bemerkung 1.3 Durch obige Definition einer Ecke erhält man eine Anordnung der Ecken!

Beispiel 1.4 (Veranschaulichung verschiedener topologischer n -Simplizes)



Bemerkung 1.5 Jedes $I \subseteq [n]$ mit $|I| = m + 1$ definiert genau eine streng monoton wachsende Abbildung $f : [m] \rightarrow [n]$ mit $\text{im } f = I$. Diese Konstruktion ist umkehrbar.

Definition 1.6 Die Abbildung

$$\Delta_f : \Delta_m \rightarrow \Delta_n$$

ist diejenige lineare Abbildung, welche die Ordnung der Ecken berücksichtigt und die I -Seite von Δ_n als Bild hat, wobei f und I nach obiger Bemerkung korrespondieren.

Beispiel 1.7 Für

$$\begin{array}{ccc} f : [1] & \rightarrow & [2] \\ 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 2 \end{array} \quad \leftrightarrow \quad I = \{0, 2\}$$

erhalten wir $\Delta_f : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$: **Bild**

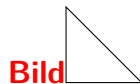
Definition 1.8 Ein *Verklebedatum* X ist eine Folge $X_{(0)}, X_{(1)}, \dots$ von Mengen, wobei man $X_{(0)}$ als *Punkte*, $X_{(1)}$ als *Kanten*, $X_{(2)}$ als *Flächen*, \dots bezeichnet und für jede streng monotone Abbildung $f : [m] \rightarrow [n]$ eine Abbildung

$$X(f) : X_{(n)} \rightarrow X_{(m)},$$

so dass Folgendes gilt:

- (1) $X(\text{id}_{[n]}) = \text{id}_{X_{(n)}}$,
- (2) $X(g \circ f) = X(f) \circ X(g)$.

Beispiel 1.9 Für Δ_2 haben wir:



$$\begin{aligned} X_{(0)} &:= \{\text{Bild}\} \\ X_{(1)} &:= \{\text{Bild}\} \\ X_{(2)} &:= \{\text{Bild}\} \end{aligned}$$

Alle weiteren $X_{(3)} = X_{(4)} = \emptyset$ sind leer.

Definition 1.10 (topologische Realisierung) Die *topologische Realisierung* $|X|$ von X ist der topologische Raum, dessen zugrunde liegende Menge durch

$$\left(\coprod_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times X_{(n)}) \right) / R$$

gegeben ist, wobei R die schwächste Äquivalenzrelation ist, für die

$$(s, x) R (t, y) \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} y = X(f)(x) \text{ und} \\ s = \Delta_f(t) \text{ für ein } f : [m] \rightarrow [n]. \end{cases}$$

Für $(s, x) R (t, y)$ schreibe auch $(s, x) \xrightarrow{f} (t, y)$. Die Topologie von $|X|$ ist die feinste Topologie, so dass

$$\coprod_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times X_{(n)}) \xrightarrow{\tau} \left(\coprod_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times X_{(n)}) \right) / R = X$$

stetig ist, d.h. $\mathcal{U} \subseteq |X|$ offen $\Leftrightarrow \tau^{-1}(\mathcal{U})$ offen $\Leftrightarrow \tau^{-1}(\mathcal{U})$ in allen Δ_n offen.

Bemerkung 1.11 Die definierende Gleichung der Relation R in Definition 1.10 definiert zwar eine reflexive und transitive Relation, jedoch keine symmetrische!

1.1.2 Beispiele

Beispiel 1.12 (n -dimensionaler Simplex)

$$\begin{aligned} X_{(i)} &= \{I \subseteq [n] \mid |I| = i + 1\} \\ &\cong \{f : [i] \rightarrow [n] \text{ streng monoton}\} \end{aligned}$$

$$X([i] \xrightarrow{f} [j]) : (g : [j] \rightarrow [n]) \longmapsto (g \circ f : [i] \rightarrow [n]).$$

Damit ist der n -dimensionale Simplex also nichts anderes, als die geometrische Realisierung von obigem Verklebedatum: $\Delta_n \approx |X|$.

Beispiel 1.13 (n -dimensionale Sphäre) Die Einheitssphäre S^n lässt sich durch $\partial\Delta_n$ triangulieren und erhält damit als Verklebedatum:

$$X_{(i)} := \begin{cases} X_{(i)}^{\Delta_n} = \{[i] \rightarrow [n] \text{ streng monoton wachsend}\} & i < n, \\ \emptyset & i \geq n, \end{cases}$$

wobei X^{Δ_n} das Verklebedatum des n -Simplex meint. Damit erhalten wir wiederum $S^n \approx |X|$.

Definition 1.14 (Inneres, induzierte Abbildung) Das *Innere von Δ_n* ist

$$\begin{aligned} \mathring{\Delta}_n &:= \begin{cases} \text{top. Inneres von } \Delta_n & n \geq 1 \\ \Delta_0 & n = 0 \end{cases} \\ &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta^n \mid x_i > 0\} \end{aligned}$$

Ferner heißt

$$\mathring{\tau} : \coprod_{n \geq 0} \Delta_n \times X_{(n)} \rightarrow |X|$$

die durch τ induzierte Abbildung.

1.1.3 Proposition

Proposition 1.15 $\mathring{\tau}$ ist eine mengentheoretische Bijektion.

Beweis Für ein $(s, x) \in \Delta_n \times X_{(n)}$ sei sein *Index* $k(s, x)$ als die minimale Dimension einer Seite gegeben, die s enthält. R -äquivalente Punkte haben den selben Index. Damit ist $k : |X| \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine wohldefinierte Abbildung. Es gilt $k(s, x) = k$, wenn $s \in \mathring{\Delta}_k$.

Ist dann $p \in |X|$ mit $k(p) = k$, so gibt es (mind.) einen Repräsentanten (s, x) mit $(s, x) \in \mathring{\Delta}_k \times X_{(k)}$. Damit ist gezeigt, dass $\mathring{\tau}$ surjektiv ist.

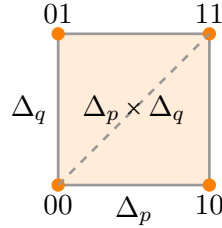
Bleibt noch die Injektivität von $\mathring{\tau}$ zu zeigen: Seien $(s, x), (s', x') \in \coprod_{n \geq 0} \mathring{\Delta}_n \times X_{(n)}$ mit $(s, x) \stackrel{R}{\sim} (s', x')$. Zu zeigen ist damit $(s, x) = (s', x')$. Nach obiger Vorüberlegung ist $k(s, x) = k(s', x')$, d.h. $x, x' \in X_{(k)}$. Wir haben

$$(s, x) \xrightarrow{f_1} (s_1, x_1) \xleftarrow{f_2} (s_2, x_2) \xrightarrow{f_3} (s_3, x_3) \longleftarrow \dots \longleftarrow (s', x')$$

1.1.5 Triangulation des Produktes zweier Simplexes

Wir wollen eine kanonische Triangulierung $(X_{(n)}, X(f))$ von $\Delta_p \times \Delta_q$ explizit angeben.

Beispiel 1.19 Für $p = 1$ und $q = 1$ können wir uns anschaulich folgende Triangulierung überlegen:



Definition 1.20 (kanonische Triangulierung von $\Delta_p \times \Delta_q$) Die kanonische Triangulierung $(X_{(n)}, X(f))$ von $\Delta_p \times \Delta_q$ ist gegeben durch:

- (1) Ein Element von $X_{(n)}$ (multidimensionale Diagonale) ist eine Menge von $(n+1)$ paarweise verschiedenen Paaren

$$\{(i_0, j_0), (i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n)\}$$

mit $0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq p$ und $0 \leq j_0 \leq j_1 \leq \dots \leq j_n \leq q$.

- (2) Für $f: [m] \rightarrow [n]$ streng monoton sei

$$X(f)(\{(i_0, j_0), \dots, (i_n, j_n)\}) = \{(i_{f(0)}, j_{f(0)}), \dots, (i_{f(m)}, j_{f(m)})\}.$$

Definition 1.21

$$\vartheta_n: \Delta_n \times X_{(n)} \rightarrow \Delta_p \times \Delta_q$$

sodass $\vartheta_n(_, x): \Delta_n \rightarrow \Delta_p \times \Delta_q \subseteq \mathbb{R}^{p+q+2}$ diejenige lineare, ordnungserhaltende Abbildung ist, deren Bild Δ_n ist, wobei $\Delta_n \subseteq \mathbb{R}^{p+q+2}$ derjenige n -Simplex ist, der durch (e_{i_k}, e'_{j_k}) aufgespannt wird für $x = \{(i_0, j_0), \dots, (i_n, j_n)\}$.

Lemma 1.22 Sei $|X|$ die geometrische Realisierung von $(X_{(n)}, X(f))$. Dann existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \coprod \Delta_n \times X_{(n)} & \\ \swarrow \tau & & \searrow \coprod \vartheta_n := \vartheta \\ |X| & \xrightarrow[\varphi]{\exists!} & \Delta_p \times \Delta_q \end{array}$$

wobei ϕ eine Bijektion ist.

Beweis Da τ surjektiv, existiert höchstens ein φ . Sei $(t, y) \xrightarrow{f} (s, x)$, d.h. $s = \Delta_f(t)$, $y = X(f)(x)$.

$$\vartheta(s, x) = \vartheta(\Delta_f(t), x) = \vartheta(t, X(f)(x)) = \vartheta(t, y).$$

Also existiert genau ein φ .

Wir zeigen nun, dass ϑ surjektiv ist, damit ist auch φ surjektiv. Sei $\Delta_p = \{(x_0, \dots, x_p) \mid x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$ und $\Delta_q = \{(y_0, \dots, y_q) \mid y_j \geq 0, \sum y_j = 1\}$. Führe nun neue Koordinaten ein:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= x_0, & \xi_2 &= x_0 + x_1, & \dots, & \xi_p &= x_0 + \dots + x_{p-1} \\ \eta_1 &= y_0, & \eta_2 &= y_0 + y_1, & \dots, & \eta_q &= y_0 + \dots + y_{q-1}\end{aligned}$$

In diesen Koordinaten gilt:

$$e_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_i, \underbrace{1, \dots, 1}_{p-i}), \quad e_j = (\underbrace{0, \dots, 0}_j, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-j})$$

Sei $x = \{(i_0, j_0), \dots, (i_{p+q}, j_{p+q})\} \in X_{(p+q)}$ mit $(i_0, j_0) = (0, 0)$ und $(i_{p+q}, j_{p+q}) = (p, q)$. Das Bild $\vartheta(\Delta_{p+q}, x)$ besteht aus allen Paaren $((\xi_1, \dots, \xi_p), (\eta_1, \dots, \eta_q)) \in \Delta_p \times \Delta_q$ mit $0 \leq \xi_i, \eta_j \leq 1$, wobei alle ξ_i, η_j angeordnet sind und gilt:

- (i) Ist $i < j$, so steht ξ_i vor ξ_j und η_i vor η_j und ist $j_{k+1} = j_k$, so steht an $(k+1)$ -ter Stelle ein ξ , sonst ein η . □

Literatur

- [1] S.I. Gelfand und Y. Manin. *Methods of Homological Algebra: Springer monographs in mathematics*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2003. ISBN: 9783540435839. URL: <http://books.google.de/books?id=pv94ATbagxEC>.