

Vorlesungszusammenfassung

Homologische Algebra

gelesen von Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen

Maximilian Huber

Stefan Hackenberg

Sommersemester 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Simpliziale Mengen	1
1.1	Triangulierte Räume	1
1.1.1	Definitionen	1
1.1.2	Beispiele	3
1.1.3	Proposition	3
1.1.4	Skelett	4
1.1.5	Triangulation des Produktes zweier Simplizes	5
1.2	Simpliziale Mengen	6
1.2.1	Beispiele	7
	Literatur	13

Kapitel 1

Simpliziale Mengen

1.1 Triangulierte Räume

1.1.1 Definitionen

Definition 1.1 Ein *Triangulierter Raum* besteht aus

- Punkten,
- Kanten,
- Dreiecke,
- Tetraeder,
- ...
- n -dimensionale Simplizes

und einer kombinatorischen Verklebevorschrift.

Definition 1.2 (topologischer n -Simplex, Ecke, I -Fläche) Der n -dimensionale topologische Simplex (oder topologischer n -Simplex) ist der topologische Raum

$$\Delta_n := \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}.$$

Der Punkt $e_i \in \Delta_n$ mit $x_i = 1$ heißt die i -te Ecke von Δ_n .

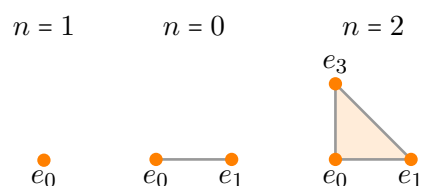
Für $I \subseteq [n] := \{0, \dots, n\}$ ist die I -Fläche von Δ_n durch

$$\left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \Delta_n \mid x_i = 0 \ \forall i \notin I \right\}$$

gegeben.

Bemerkung 1.3 Durch obige Definition einer Ecke erhält man eine Anordnung der Ecken!

Beispiel 1.4 (Veranschaulichung verschiedener topologischer n -Simplizes)



Bemerkung 1.5 Jedes $I \subseteq [n]$ mit $|I| = m + 1$ definiert genau eine streng monoton wachsende Abbildung $f : [m] \rightarrow [n]$ mit $\text{im } f = I$. Diese Konstruktion ist umkehrbar.

Definition 1.6 Die Abbildung

$$\Delta_f : \Delta_m \rightarrow \Delta_n$$

ist diejenige lineare Abbildung, welche die Ordnung der Ecken berücksichtigt und die I -Seite von Δ_n als Bild hat, wobei f und I nach obiger Bemerkung korrespondieren.

Beispiel 1.7 Für

$$\begin{array}{ccc} f : [1] & \rightarrow & [2] \\ 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 2 \end{array} \quad \leftrightarrow \quad I = \{0, 2\}$$

erhalten wir $\Delta_f : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$: **Bild**

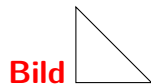
Definition 1.8 Ein *Verklebedatum* X ist eine Folge $X_{(0)}, X_{(1)}, \dots$ von Mengen, wobei man $X_{(0)}$ als *Punkte*, $X_{(1)}$ als *Kanten*, $X_{(2)}$ als *Flächen*, \dots bezeichnet und für jede streng monotone Abbildung $f : [m] \rightarrow [n]$ eine Abbildung

$$X(f) : X_{(n)} \rightarrow X_{(m)},$$

so dass Folgendes gilt:

- (1) $X(\text{id}_{[n]}) = \text{id}_{X_{(n)}}$,
- (2) $X(g \circ f) = X(f) \circ X(g)$.

Beispiel 1.9 Für Δ_2 haben wir:



$$\begin{aligned} X_{(0)} &:= \{\text{Bild}\} \\ X_{(1)} &:= \{\text{Bild}\} \\ X_{(2)} &:= \{\text{Bild}\} \end{aligned}$$

Alle weiteren $X_{(3)} = X_{(4)} = \emptyset$ sind leer.

Definition 1.10 (topologische Realisierung) Die *topologische Realisierung* $|X|$ von X ist der topologische Raum, dessen zugrunde liegende Menge durch

$$\left(\coprod_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times X_{(n)}) \right) / R$$

gegeben ist, wobei R die schwächste Äquivalenzrelation ist, für die

$$(s, x) R (t, y) \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} y = X(f)(x) \text{ und} \\ s = \Delta_f(t) \text{ für ein } f : [m] \rightarrow [n]. \end{cases}$$

Für $(s, x) R (t, y)$ schreibe auch $(s, x) \xrightarrow{f} (t, y)$. Die Topologie von $|X|$ ist die feinste Topologie, so dass

$$\coprod_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times X_{(n)}) \xrightarrow{\tau} \left(\coprod_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times X_{(n)}) \right) / R = X$$

stetig ist, d.h. $\mathcal{U} \subseteq |X|$ offen $\Leftrightarrow \tau^{-1}(\mathcal{U})$ offen $\Leftrightarrow \tau^{-1}(\mathcal{U})$ in allen Δ_n offen.

Bemerkung 1.11 Die definierende Gleichung der Relation R in Definition 1.10 definiert zwar eine reflexive und transitive Relation, jedoch keine symmetrische!

1.1.2 Beispiele

Beispiel 1.12 (n -dimensionaler Simplex)

$$\begin{aligned} X_{(i)} &= \{I \subseteq [n] \mid |I| = i + 1\} \\ &\cong \{f : [i] \rightarrow [n] \text{ streng monoton}\} \end{aligned}$$

$$X([i] \xrightarrow{f} [j]) : (g : [j] \rightarrow [n]) \longmapsto (g \circ f : [i] \rightarrow [n]).$$

Damit ist der n -dimensionale Simplex also nichts anderes, als die geometrische Realisierung von obigem Verklebedatum: $\Delta_n \approx |X|$.

Beispiel 1.13 (n -dimensionale Sphäre) Die Einheitssphäre S^n lässt sich durch $\partial\Delta_n$ triangulieren und erhält damit als Verklebedatum:

$$X_{(i)} := \begin{cases} X_{(i)}^{\Delta_n} = \{[i] \rightarrow [n] \text{ streng monoton wachsend}\} & i < n, \\ \emptyset & i \geq n, \end{cases}$$

wobei X^{Δ_n} das Verklebedatum des n -Simplex meint. Damit erhalten wir wiederum $S^n \approx |X|$.

Definition 1.14 (Inneres, induzierte Abbildung) Das *Innere von Δ_n* ist

$$\begin{aligned} \mathring{\Delta}_n &:= \begin{cases} \text{top. Inneres von } \Delta_n & n \geq 1 \\ \Delta_0 & n = 0 \end{cases} \\ &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta^n \mid x_i > 0\} \end{aligned}$$

Ferner heißt

$$\mathring{\tau} : \coprod_{n \geq 0} \mathring{\Delta}_n \times X_{(n)} \rightarrow |X|$$

die durch τ induzierte Abbildung.

1.1.3 Proposition

Proposition 1.15 $\mathring{\tau}$ ist eine mengentheoretische Bijektion.

Beweis Für ein $(s, x) \in \mathring{\Delta}_n \times X_{(n)}$ sei sein *Index* $k(s, x)$ als die minimale Dimension einer Seite gegeben, die s enthält. R -äquivalente Punkte haben den selben Index. Damit ist $k : |X| \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine wohldefinierte Abbildung. Es gilt $k(s, x) = k$, wenn $s \in \mathring{\Delta}_k$.

Ist dann $p \in |X|$ mit $k(p) = k$, so gibt es (mind.) einen Repräsentanten (s, x) mit $(s, x) \in \mathring{\Delta}_k \times X_{(k)}$. Damit ist gezeigt, dass $\mathring{\tau}$ surjektiv ist.

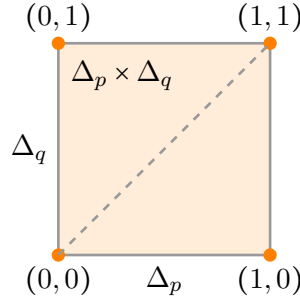
Bleibt noch die Injektivität von $\mathring{\tau}$ zu zeigen: Seien $(s, x), (s', x') \in \coprod_{n \geq 0} \mathring{\Delta}_n \times X_{(n)}$ mit $(s, x) \stackrel{R}{\sim} (s', x')$. Zu zeigen ist damit $(s, x) = (s', x')$. Nach obiger Vorüberlegung ist $k(s, x) = k(s', x')$, d.h. $x, x' \in X_{(k)}$. Wir haben

$$\begin{array}{ccccccc} & & (s_1, x_1) & & (s_3, x_3) & & \dots \\ & \nwarrow f_1 & & \nwarrow f_2 & & \nwarrow f_3 & \\ (s, x) & & & & & & (s', x') \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ & & (s_2, x_2) & & \dots & & \end{array}$$

1.1.5 Triangulation des Produktes zweier Simplexes

Wir wollen eine kanonische Triangulierung $(X_{(n)}, X(f))$ von $\Delta_p \times \Delta_q$ explizit angeben.

Beispiel 1.19 Für $p = 1$ und $q = 1$ können wir uns anschaulich folgende Triangulierung überlegen:



Definition 1.20 (kanonische Triangulierung von $\Delta_p \times \Delta_q$) Die *kanonische Triangulierung* $(X_{(n)}, X(f))$ von $\Delta_p \times \Delta_q$ ist gegeben durch:

- (1) Ein Element von $X_{(n)}$ (multidimensionale Diagonale) ist eine Menge von $(n+1)$ paarweise verschiedenen Paaren

$$\{(i_0, j_0), (i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n)\}$$

mit $0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq p$ und $0 \leq j_0 \leq j_1 \leq \dots \leq j_n \leq q$.

- (2) Für $f: [m] \rightarrow [n]$ streng monoton sei

$$X(f)(\{(i_0, j_0), \dots, (i_n, j_n)\}) = \{(i_{f(0)}, j_{f(0)}), \dots, (i_{f(m)}, j_{f(m)})\}.$$

Definition 1.21 Sei

$$\vartheta_n: \Delta_n \times X_{(n)} \rightarrow \Delta_p \times \Delta_q$$

so, dass $\vartheta_n(_, x): \Delta_n \rightarrow \Delta_p \times \Delta_q \subseteq \mathbb{R}^{p+q+2}$ diejenige lineare, ordnungserhaltende Abbildung ist, deren Bild $\tilde{\Delta}_n$ ist, wobei $\tilde{\Delta}_n \subseteq \mathbb{R}^{p+q+2}$ derjenige n -Simplex ist, der durch (e_{ik}, e'_{jk}) aufgespannt wird für $x = \{(i_0, j_0), \dots, (i_n, j_n)\}$.

Lemma 1.22 Sei $|X|$ die geometrische Realisierung von $(X_{(n)}, X(f))$. Dann existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \coprod \Delta_n \times X_{(n)} & \\ \tau \swarrow & & \searrow \coprod \vartheta_n =: \vartheta \\ |X| & \xrightarrow[\varphi]{\exists!} & \Delta_p \times \Delta_q \end{array}$$

wobei das eindeutige φ eine Bijektion ist.

Beweis (a) Da τ surjektiv, existiert höchstens ein φ . Sei $(t, y) \xrightarrow{f} (s, x)$, d.h. $s = \Delta_f(t)$, $y = X(f)(x)$.

$$\vartheta(s, x) = \vartheta(\Delta_f(t), x) = \vartheta(t, X(f)(x)) = \vartheta(t, y).$$

Also existiert genau ein φ .

- (b) Wir zeigen nun, dass ϑ surjektiv ist, damit ist auch φ surjektiv. Sei $\Delta_p = \{(x_0, \dots, x_p) \mid x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$ und $\Delta_q = \{(y_0, \dots, y_p) \mid y_j \geq 0, \sum y_j = 1\}$. Führe nun neue Koordinaten ein:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= x_0, & \xi_2 &= x_0 + x_1, & \dots, & \xi_p &= x_0 + \dots + x_{p-1} \\ \eta_1 &= y_0, & \eta_2 &= y_0 + y_1, & \dots, & \eta_q &= y_0 + \dots + y_{q-1}\end{aligned}$$

In diesen Koordinaten gilt:

$$e_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_i, \underbrace{1, \dots, 1}_{p-i}), \quad e_j = (\underbrace{0, \dots, 0}_j, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-j})$$

Sei $x = \{(i_0, j_0), \dots, (i_{p+q}, j_{p+q})\} \in X_{(p+q)}$ mit $(i_0, j_0) = (0, 0)$ und $(i_{p+q}, j_{p+q}) = (p, q)$. Das Bild $\vartheta(\Delta_{p+q}, x)$ besteht aus allen Paaren $((\xi_1, \dots, \xi_p), (\eta_1, \dots, \eta_q)) \in \Delta_p \times \Delta_q$ mit $0 \leq \xi_i, \eta_j \leq 1$, wobei alle ξ_i, η_j angeordnet sind und gilt:

- (i) Ist $i < j$, so steht ξ_i vor ξ_j und η_i vor η_j und ist $j_{k+1} = j_k$, so steht an $(k+1)$ -ter Stelle ein ξ , sonst ein η .
- (c) Sei $r = ((\xi_1, \dots, \xi_p), (\eta_1, \dots, \eta_q)) \in \Delta_p \times \Delta_q$. Wir konstruieren dasjenige Element in $\coprod \Delta_n \times X_{(n)}$, welches von ϑ auf r abgebildet wird. (Damit ist φ injektiv). Das partioniere die $p+q+2$ Zahlen $0, \xi_i, \eta_i, 1$ in Pakete jeweils gleicher Zahlen, nummeriert durch $0, 1, \dots, l+1$ mit $0 \leq l \leq p+q$ in aufsteigender Reihenfolge. Die Werte seien $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_{l+1} = 1$. Sei $x := \{(i_0, j_0), \dots, (i_l, j_l)\} \in X_{(l)}$ gegeben durch

$$i_k := \begin{cases} 0 & k = -1, \\ i_{k-1} & \text{kein } \xi \text{ in } k\text{-ter Gruppe,} \\ \max\{i \mid \xi_i \text{ liegt in der } k\text{-ten Gruppe}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

□

und j_k analog zu i_k mit η anstatt ξ . Sei $s = (z_0, \dots, z_l) \in \Delta_l$ mit $z_i = \gamma_{i+1} - \gamma_i$, $0 \leq i \leq l$. Nach Übungsaufgabe 1 Übungsblatt 1 gilt nun $\vartheta^{-1}(r) = \{(s, x)\}$

Bild zur Veranschaulichung der Tupel für $\Delta_1 \times \Delta_1$
Verwaltung von Übungsaufgaben?

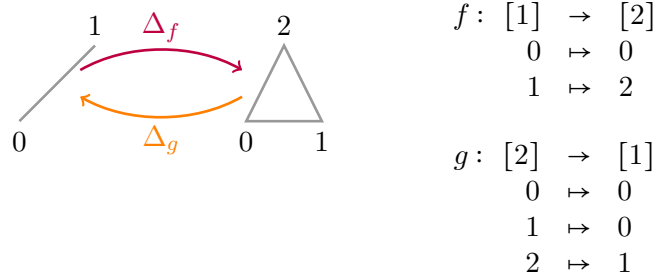
1.2 Simpliziale Mengen

Definition 1.23 (simpliziale Menge, f -Seite) Eine *simpliziale Menge* ist eine Familie $X_\bullet = (X_n)_{n \geq 0}$ von Mengen und von Abbildungen $X(f) : X_n \rightarrow X_m$ für jede monotone Abbildung $f : [m] \rightarrow [n]$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) $X(\text{id}) = \text{id}$,
- (2) $X(f \circ g) = X(g) \circ X(f)$.

Für jede monotone Abbildung $f : [m] \rightarrow [n]$ ist die f -Seite die lineare Abbildung $\Delta_f : \Delta_m \rightarrow \Delta_n$ mit $e_i \mapsto e_{f(i)}$.

Beispiel 1.24



Bemerkung 1.25 Δ_f ist im Allgemeinen keine Einbettung mehr!

Definition 1.26 Die *geometrische Realisierung* $|X_\bullet|$ einer simplizialen Menge X_\bullet ist der topologische Raum mit zugrundeliegender Menge

$$\left(\coprod \Delta_n \times X_n \right) / R,$$

wobei R die schwächste Äquivalenzrelation ist, für die

$$(s, x)R(t, y) \iff y = X(f)(x), \quad s = \Delta_f(t)$$

für alle monotonen Abbildungen $f: [m] \rightarrow [n]$ gilt. Die Topologie auf $|X|$ ist wieder die Quotiententopologie.

1.2.1 Beispiele

1.2.1.1 Nerv einer Überdeckung

Sei $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Überdeckung eines topologischen Raumes Y durch offene (bzw. abgeschlossene Teilmengen). Sei

$$X_n := \{(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in A^{n+1} \mid \mathcal{U}_{\alpha_0} \cap \dots \cap \mathcal{U}_{\alpha_n} \neq \emptyset\}.$$

Definition 1.27 X_\bullet heißt *Nerv von* $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Beispiel 1.28 Bild Überdeckung der S^1 mit der geometrischen Realisierung:

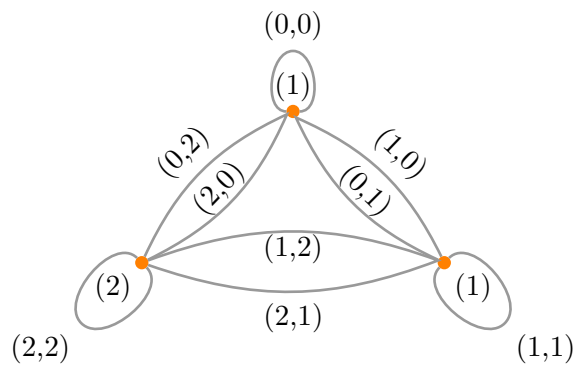
(1) Das 0-Skelet

(1) ●

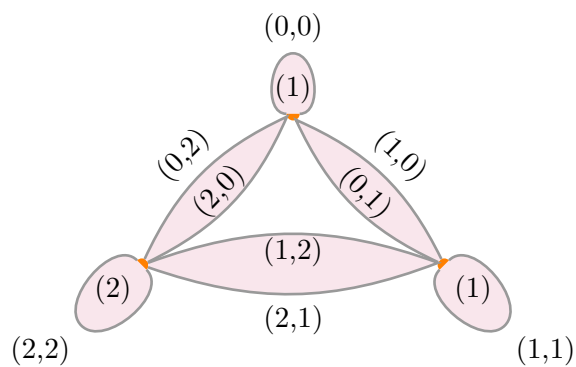
(2) ●

● (1)

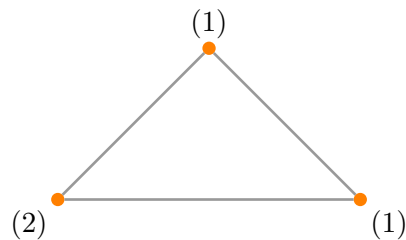
(2) Das 1-Skelet



(3) Das 2-Skelet



welches vereinfacht gemalt wie folgt aussieht



Bemerkung 1.29 Ist die Überdeckung lokal endlich und sind die nicht-leeren Durchschnitte zusammenziehbar, so ist $|X|$ homotopieäquivalent zu Y .

1.2.1.2 Singuläre Simplizes

Definition 1.30 Sei Y ein topologischer Raum. Ein *singulärer n -Simplex* von Y ist eine stetige Abbildung $\varphi : \Delta_n \rightarrow Y$.

$$X_n := \{\varphi : \Delta_n \rightarrow Y \text{ sing. } n\text{-Simplizes}\}$$

und

$$X(f)(\varphi) := \varphi \circ \Delta_f$$

für alle $f : [m] \rightarrow [n]$ monoton. Dies definiert eine simpliziale Menge X_\bullet .

Bemerkung 1.31 X_\bullet ist riesig!

Bemerkung 1.32 In einem gewissen Sinn sind *singuläre simpliciale Mengen eines topologischen Raums bilden* und *geometrische Realisierung einer simplicialen Menge bilden* zusammengehörige Prozesse; sie lösen jeweils ein Optimierungsproblem, das der andere Prozess stellt. Das Schlagwort dazu ist die allgemeine *Adjunktion zwischen Nerv und Realisierung*, und vielleicht werden wir dazu später mehr erfahren.

1.2.1.3 Die simpliciale Menge $\Delta[p]$

Definition 1.33 Sei

$$\begin{aligned}\Delta[p]_n &:= \{g : [n] \rightarrow [p] \text{ monoton}\}, \\ \Delta[p](f)(g) &:= g \circ f.\end{aligned}$$

$\Delta[p]_\bullet$ heißt *simplicialer p -Simplex*.

Lemma 1.34 *Es existiert ein kanonischer Homöomorphismus $\Delta_p \rightarrow |\Delta[p]|$.*

Beweis Übungsaufgabe. □

1.2.1.4 Die einem Verklebedatum zugeordnete simpliciale Menge

Sei $(X_{(n)}, X(f))$ ein Verklebedatum. Dazu gehört die simpliciale Menge \tilde{X}_\bullet mit

$$\begin{aligned}\tilde{X}_n &:= \{(x, g) \mid x \in X_{(k)}, g : [n] \rightarrow [k] \text{ monoton, surjektiv}\} \\ \tilde{X}(f) &:= \tilde{X}_m \rightarrow \tilde{X}_n, (x, g) \mapsto (X(f_1)(x), f_2)\end{aligned}$$

für $f : [n] \rightarrow [m]$ monoton, mit $g \circ f = f_1 \circ f_2$ für f_1, f_2 monoton, f_1 injektiv, f_2 surjektiv.

Lemma 1.35 *\tilde{X}_\bullet ist in der Tat eine simpliciale Menge.*

Beweis Übungsaufgabe. □

Bemerkung 1.36 Später werden wir sehen, dass

$$|\tilde{X}_\bullet| = |X|.$$

Proposition 1.37 *Eine simpliciale Menge \tilde{X} kann genau dann aus einem Verklebedatum X erhalten werden, wenn für jeden nicht-degenerierten Simplex $x \in \tilde{X}_n$ und für jede streng monotone Abbildung $f : [m] \rightarrow [n]$ der Simplex $\tilde{X}(f)(x)$ ebenfalls nicht-degeneriert ist. In diesem Fall ist X im wesentlichen durch \tilde{X} bestimmt.*

Beweis Übungsaufgabe. □

1.2.1.5 Der klassifizierende Raum einer Gruppe

Sei G eine Gruppe. Setze $(BG)_n := G^n$ und für $f : [m] \rightarrow [n]$ monoton, setzen wir $BG(f) : G^m \rightarrow G^n$, $(g_1, \dots, g_m) \mapsto (h_1, \dots, h_m)$, wobei

$$h_i := \prod_{j=f(i-1)+1}^{f(i)} g_j.$$

Beispiel 1.38 $f : [3] \rightarrow [4], 0 \mapsto 0, 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 4$ **Bild**

Definition 1.39 Die geometrische Realisierung $|BG|$ heißt der *klassifizierende Raum* von G .

1.2.1.6 Nicht-ausgeartete Simplexes

Definition 1.40 (ausgearteter Simplex) Sei X eine simpliciale Menge. Ein n -Simplex $x \in X_n$ heißt *ausgeartet*, falls $x = X(f)(y)$ für $f : [n] \rightarrow [m]$ mit $m < n$, $y \in X_m$ und f surjektiv.

Ist x nicht-ausgeartet und $x = X(f)(y)$ für ein f und y , so ist f eine Injektion. Ansonsten zerlege $f = f_1 \circ f_2$ mit f_1 injektiv und f_2 surjektiv. Damit $x = X(f_1 \circ f_2)(y) = X(f_2)(X(f_1)(y))$.

Ist X eine simpliciale Menge, so sei $X_{(n)} := \{x \in X_n \mid x \text{ nicht-ausgeartet}\}$ und

$$\begin{array}{ccc} \tau : \coprod_{n \geq 0} \Delta_n \times X_n & \xrightarrow{\quad} & |X| \\ \uparrow & \nearrow \hat{\tau} & \\ \coprod_{n \geq 0} \hat{\Delta}_n \times X_{(n)} & & \end{array}$$

Proposition 1.41 $\hat{\tau}$ ist eine Bijektion.

Um diese Proposition zu beweisen, brauchen wir einige Lemmas.

Lemma 1.42 Für jedes $x \in X_n$ existiert ein eindeutiges Paar (f, y) , mit $y \in X_{(m)}$, $f : [n] \rightarrow [m]$ monoton, surjektiv, so dass $x = X(f)(y)$.

Beweis Die Existenz folgt aus der Definition von $X_{(m)}$. Zur Eindeutigkeit: Seien (f, y) , $f : [n] \rightarrow [m]$ und (f', y') , $f' : [n] \rightarrow [m']$ zwei solcher Paare mit $x = X(f)(y) = X(f')(y')$. Sei $g : [m] \rightarrow [n]$ ein monotoner Schnitt von f , d.h. $f \circ g = \text{id}_{[m]}$. Dann ist

$$y = X(\text{id})(y) = X(f \circ g)(y) = X(g)X(f)(y) = X(g)(x).$$

Damit $y = X(g)X(f')(y') = X(f' \circ g)(y')$. Da y nicht-entartet ist, ist $f' \circ g : [m] \rightarrow [m']$ eine Injektion, so dass $m \leq m'$. Analog $m' \leq m$, also $m = m'$. Damit ist $f' \circ g$ eine monotone Injektion von $[m]$ nach $[m]$, also $f' \circ g = \text{id}_{[m]}$, also $y = y'$. Da $f' \circ g = \text{id}$ für alle Schnitte g von f , folgt $f' = f$. \square

Folgerung 1.43 Sei $x \in X_n$ ein n -Simplex, $y \in X_m$ nicht-entartet, $f : [n] \rightarrow [m]$ eine monotone Surjektion mit $x = X(f)(y)$. Sei weiter $z \in X_l$ und $g : [n] \rightarrow [l]$ eine monotone Surjektion mit $x = X(g)(z)$. Dann faktorisiert f als $f = h \circ g$ mit einem $h : [l] \rightarrow [m]$, so dass $z = X(h)(y)$.

Beweis Sei (h', y') das Paar aus Satz 1.42 mit $z = X(h')(y')$. Dann ist $x = X(g)(z) = X(g)(X(h')(y')) = X(h' \circ g)(y')$. Damit ist $h' \circ g = f$ und $y = y'$. Setze $h := h'$. \square

1.2.1.6.1 Beweis von Satz 1.41

Beweis (von Satz 1.41) (1) $\hat{\tau}$ ist surjektiv: Sei $p \in |X|$. Sei k die kleinste Dimension, so dass ein $(s, x) \in \Delta_k \times X_k$ mit $\tau(s, x) = p$ existiert. Wir wollen nun zeigen, dass $(s, x) \in \dot{\Delta}_k \times X_{(k)}$: Ist $k = 0$, so ist $\Delta_0 = \dot{\Delta}_0$ und $X_{(0)} = X_0$, also nichts zu zeigen. Ist x uasgeartet, so ist $x = X(f)(y)$, $f : [k] \rightarrow [l]$ monoton, $l < k$. Dann ist $\tau(s, x) = \tau(\Delta_f(s), y)$. Widerspruch zur Minimalität von k . Also $x \in X_{(k)}$. Ist $s \notin \dot{\Delta}_k$, so existiert ein injektives $f : [l] \rightarrow [k]$ monoton mit $s = \Delta_f(t)$ für $t \in \Delta_l$. Damit $\tau(s, x) = \tau(\Delta_f(t), x) = \tau(t, X(f)(x))$ im Widerspruch zu $l < k$.

(2) $\hat{\tau}$ ist injektiv: Seien $(s, x) \in \dot{\Delta}_k \times X_{(k)}$, $(s', x') \in \dot{\Delta}_l \times X_{(l)}$ mit $\tau(s, x) = \tau(s', x')(*)$, so ist zu zeigen, dass $s = s'$ und $x = x'$. Wegen $(*)$ existiert

$$(s, x) = (s_0, x_0) \sim (s_1, x_1) \sim \dots \sim (s_N, x_N) = (s', x')$$

wobei \sim für $(s_i, x_i) \xrightarrow{f_i^+} (s_{i+1}, x_{i+1})$ oder $(s_i, x_i) \xleftarrow{f_i^-} (s_{i+1}, x_{i+1})$ steht. Ohne Einschränkung können wir "Zickzack" annehmen. Wir zeigen: Ist $N = 1$, so ist $f_0 = \text{id}$ und ist $N > 1$, so existiert eine kürzere Kette.

(3) Beh: Da $(s, x) \in \dot{\Delta}_k \times X_{(k)}$, so ist f_0^+ eine Injektion und f_0^- eine Surjektion. Im Fall f_0^+ ist $x = X(f_0^+)(x_1)$. Dann ist f_0^+ eine Injektion nach Unterunterabschnitt 1.2.1.6. Im Fall f_0^- ist $s = \Delta_{f_0^-}(s_1)$. Da $s \in \dot{\Delta}_k$, muss f_0^- surjektiv sein. Wir folgern: $N = 1$. Unterunterabschnitt 1.2.1.6. Im Fall f_0^- ist $s = \Delta_{f_0^-}(s_1)$. Da $s \in \dot{\Delta}_k$, muss f_0^- surjektiv sein. Wir folgern: Für $N = 1$ ist f_0^-/f_0^+ ist injektiv und surjektiv, also gleich id .

(4) Für $N \geq 2$ betrachte

$$(s_i, x_i) \xrightarrow{f_i^+} (s_{i+1}, x_{i+1}) \xleftarrow{f_{i+1}^-} (s_{i+2}, x_{i+2})$$

$$[m_i] \longrightarrow [m_{i+1}] \longleftarrow [m_{i+2}]$$

Sei außerdem f_i^+ injektiv. Wir zeigen, dass dann folgende Kette existiert:

$$(s_i, x_i) \xleftarrow{g} (s_{i+1}, x_{i+1}) \xrightarrow{h} (s_{i+2}, x_{i+2})$$

$$[m_i] \longrightarrow [m_{i+1}] \longleftarrow [m_{i+2}]$$

Sei $I := (f_{i+1}^-)^{-1}(f_i^+([m_i]))$, $l := |I| - 1$. Sei $h : [l] \rightarrow [m_{i+2}]$ die injektive monotone Abbildung mit Bild I . Dann existiert genau ein $g : [l] \rightarrow [m_i]$ mit $f_i^+ \circ g = f_{i+1}^- \circ h$. Da $h = I$, ist $\text{im } \Delta_h = (\Delta_{f_{i+1}^-})^{-1}(\Delta_{f_i^+}(\Delta_{m_i}))$. Da $\Delta_{f_{i+1}^-}(s_{i+2}) = s_{i+1} = \Delta_{f_i^+}(s_i)$, existiert ein $t \in \Delta_l$ mit $\Delta_h(t) = s_{i+2}$. Außerdem:

$$\Delta_{f_i^+}(\Delta_g(t)) = \Delta_{f_{i+1}^-}(\Delta_h(t)) = s_{i+1} = \Delta_{f_i^+}(s_i)$$

Da $\Delta_{f_i^+}$ injektiv, folgt $\Delta_g(t) = s_i$. Setze $y := X(h)(x_{i+2}) = X(g)(x_i)$.

- (5) Sei $N \geq 2$, so beginnt die Kette mit $(s, x) \xrightarrow{f_0^+} (s_1, x_1) \xleftarrow{f_1^-} (s_2, x_2)$, so ist f_0^+ nach (4) eine Injektion. Nach (3) erhalten wir dann eine Kette der Länge 2 (für $N = 2$ oder $N - 1$ für $N \geq 3$) der Form

$$(s_0, x_0) \xleftarrow{f_0^-} (s_1, x_1) \xrightarrow{f_1^+} (s_2, x_2)$$

Nach (4) ist f_0^- eine Surjektion.

- (6) Ist $N = 2$, also $(s_2, x_2) \in \mathring{\Delta}_l \times X_{(l)}$, so ist f_1^+ surjektiv nach (3). Da x_0, x_2 nicht-ausgeartet, folgt nach Satz 1.42, dass $f_0^- = f_1^+$ und $x_0 = x_2$, also $s_0 = s_2$.
- (7) Sei also $N \geq 3$. Schreibe $f_1^+ = i \circ p$, wobei $p : [m_1] \rightarrow [l]$ monotone Surjektion und $i : [l] \rightarrow [m_2]$ monotone Injektion. Da x_0 nicht-ausgeartet und f_0^- surjektiv, existiert nach Satz 1.43 eine Faktorisierung $f_0^- = g \circ p$ für ein $g : [l] \rightarrow [k]$. Damit ersetzen wir $(s_0, x_0) \xleftarrow{f_0^-} (s_1, x_1) \xrightarrow{f_1^+} (s_2, x_2)$ durch

$$(s_0, x_0) \xrightarrow{g} (\Delta_p(s_1, X(g)(x_0))) \xrightarrow{i} (s_2, x_2),$$

d.h. ohne Einschränkung ist f_1^+ eine Injektion. Nach (4) können wir also $(s_1, x_1) \xrightarrow{f_1^+} (s_2, x_2) \xleftarrow{f_2^-} (s_3, x_3)$ durch $(s_1, x_1) \xleftarrow{f_1^-} (s_2, x_2) \xrightarrow{f_2^+} (s_3, x_3)$ ersetzen und wir erhalten eine Kette der Länge $N - 2$. \square

Folgerung 1.44 Sei $|X|$ ein triangulierter Raum mit Verklebedatum $(X_{(n)}, X(f))$. Sei \tilde{X} die dazugehörige simpliziale Menge Dann $|\tilde{X}| = |X|$.

Beweis

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{n \geq 0} \Delta_n \times \tilde{X}_n & \xrightarrow{(s, \tilde{x}) = (s, g) \mapsto (\Delta_g(s), x)} & \coprod_{n \geq 0} \Delta_n \times X_{(n)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ |\tilde{X}| & \xrightarrow{\varphi} & |X| \end{array}$$

Dann ist nach Übungsaufgabe φ ein Homöomorphismus. \square

Literatur

- [1] S.I. Gelfand und Y. Manin. *Methods of Homological Algebra: Springer monographs in mathematics*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2003. ISBN: 9783540435839. URL: <http://books.google.de/books?id=pv94ATbagxEC>.