Rolling-bouncing ball - Dynamik eines Balles

Helene Rößler, Norbert Hammer

Bewegungsgleichungen

Massenpunkt auf einer Kurve

- Ball als Massepunkt modelliert
- Bewegung auf Kurve gegeben durch $G(q) = 0$
- Lösungskurve $q(t)$
- Das Variationsprinzip

$$0 = \delta \int_0^T L(q, \dot{q}) \boldsymbol{+\lambda G(q)} \; dt$$

- führt zu

$$\begin{aligned} m\ddot{q} &= F + \lambda \nabla G(q) \\ 0 &= G(q). \end{aligned}$$

Massenpunkt auf einer Kurve

- In zweiten Ableitungen ausgedrückt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:M \text{ (Massenmatrix)}} \begin{pmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F + \lambda \nabla G(q) \\ G(q) \end{pmatrix}$$

Massenpunkt im freien Fall

- ohne Nebenbedingung $G(q) = 0$
- Das Obige wird zu

$$F = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \ddot{q}.$$

Krümmung einer impliziten Kurve

Krümmung einer Kurve

- Sei $\varphi(t)$ Parameterdarstellung einer Kurve.
- Krümmung ist gegeben durch

$$\kappa = \frac{\varphi_1'(t)\varphi_2''(t) - \varphi_2'(t)\varphi_1''(t)}{\|\varphi'(t)\|^3}.$$

Krümmung einer Kurve

- Sei $\varphi(t)$ Parameterdarstellung einer Kurve.
- Krümmung ist gegeben durch

$$\kappa = \frac{\varphi_1'(t)\varphi_2''(t) - \varphi_2'(t)\varphi_1''(t)}{\|\varphi'(t)\|^3}.$$

- Problem: Wir kennen φ nicht!
- Beachten Sie: κ nicht von Wert von φ abhängig, nur von Ableitungen
- Lösung des Problems: Hauptsatz über implizite Funktionen

Krümmung einer Kurve

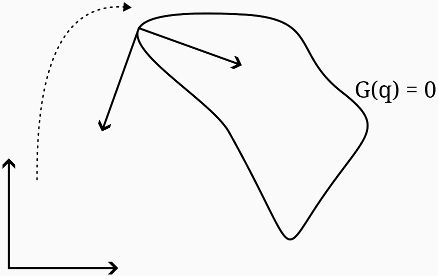
- Hauptsatz liefert erste (und damit auch zweite) Ableitung von Funktion, die mit Kurve übereinstimmt

Krümmung einer Kurve

- Hauptsatz liefert erste (und damit auch zweite) Ableitung von Funktion, die mit Kurve übereinstimmt
- Problem: Kurve muss lokal als Funktion darstellbar sein

Krümmung einer Kurve

- Hauptsatz liefert erste (und damit auch zweite) Ableitung von Funktion, die mit Kurve übereinstimmt
- Problem: Kurve muss lokal als Funktion darstellbar sein
- Lösung:



$$\nu = \frac{\nabla G(x_0)}{\|\nabla G(x_0)\|}$$

$$\tau = (-\nu_2, \nu_1)$$

Krümmung einer Kurve

- Krümmung des Graphen der Funktion $f(t)$:

$$\kappa = \frac{f''(t)}{(1+f'(t)^2)^{3/2}}.$$

Zentrifugalkraft auf einer Kurve

- Massepunkt mit Position q, Masse m
- offizielle Vektorform:
$$\hat{F}_c = m\,\omega \times (q \times \omega).$$
- für eine