

Rolling-bouncing ball - Dynamik eines Balles

Helene Rößler, Norbert Hammer

Bewegungsgleichungen

Hello, world!

Newmark-Verfahren

Ausgangssituation ist eine Bewegungsgleichung der Form:

$$F = M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx$$

- $x(t) \in \mathbb{R}^m$: generalisierter Ortsvektor
- $M, C, K \in \mathbb{R}^{m \times m}$: Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix

- Ausgangswerte zum Zeitpunkt t_n

$$x_n, \quad v_n := \dot{x}_n, \quad a_n := \ddot{x}_n.$$

- Näherung für $t_{n+1} = t_n + h$ ist allgemein gegeben durch:

$$F_{n+1} = Ma_{n+1} + Cv_{n+1} + Kq_{n+1}$$

$$v_{n+1} = v_n + h((1 - \gamma) a_n + \gamma a_{n+1})$$

$$x_{n+1} = x_n + hv_n + \frac{h^2}{2} ((1 - 2\beta) a_n + 2\beta a_{n+1})$$

- $\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow$ quadratische Genauigkeit
- $K = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Führt zu

$$F(x_{n+1}) = Ma_{n+1} + Cv_{n+1}$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}(a_n + a_{n+1})$$

$$x_{n+1} = x_n + hv_n + \frac{h^2}{4}(a_n + a_{n+1}).$$

Fall: Ball befindet sich in der Flugphase, wir lösen eine ODE

Annahmen:

- Dämpfung: $C = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$
- Massenmatrix:

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

- Kraftvektor (Gravitation): $F = mg$, wobei $g \in \mathbb{R}^2$
- Anfangswerte: x_0, v_0 und a_0 werden vom Algorithmus direkt als aktueller Zustand des Balls übernommen.

Fall: Ball befindet sich in der Rollphase, wir lösen eine DAE

Annahmen:

- Dämpfung (durch Dämpfungsfaktor $c \in \mathbb{R}$) und Masse:

$$C := \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Kraftvektor:

$$F = \begin{pmatrix} mg + \lambda \nabla G(q) \\ G(q) \end{pmatrix}.$$

Anfangswerte für die DAE

- x_0 : aktuelle Position des Balls
- v_0 : Tangentialgeschwindigkeit
- a_0 : Formel für Beschleunigung entlang einer Kurve:

$$a_0 = a\tau + \kappa v^2\nu$$

mit Tangentialvektor τ , Normalvektor ν und Krümmung der Bahn κ :

- kein Startwert für λ benötigt