• Beweis: $pf\left(\begin{pmatrix} 0 & M \\ -M^T & 0 \end{pmatrix}\right) = (-1)^{m(m-1)\frac{1}{2}} \det(M)$ mit $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ und $m = 2n$

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ -M^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ M^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & M \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\mathbb{1} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ ist einheitsmatrix

$$pf\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \int d\eta_{2n} \dots d\eta_1 \; e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} -\eta_i\eta_{i+n} + \eta_{i+n}\eta_i}$$

$$= \int d\eta_{2n} \dots d\eta_1 \; e^{-\sum_{i=1}^{n} \eta_i \eta_{i+n}}$$

$$= \int d\eta_{2n} \dots d\eta_1 \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \exp(-\eta_i\eta_{i+n})}_{= \prod_{i=1}^{n} (1-\eta_i\eta_{i+n})}$$

$$= \int d\eta_{2n} \dots d\eta_1 \; \Sigma' + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \eta_i \eta_{i+n}$$

$$= \int d\eta_{2n} \dots d\eta_1 \; \eta_1 \eta_{1+n} \eta_2 \eta_{2+n} \eta_3 \eta_{3+n} \dots \eta_n \eta_{2n} \cdot (-1)^n$$

$$= \int d\eta_{2n} \dots d\eta_1 \; (-1)^{\sum_{k=1}^{n-1} k} \eta_1 \dots \eta_{2n} \cdot (-1)^n$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)\cdot n}{2}} \cdot (-1)^n$$

Mithilfe des Blockmatrizensatzes ergibt sich da alle η gleich groß und paarweise kommutierend

$$\det\begin{pmatrix} 0 & M \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \det(-M) = (-1)^n \det(M)$$

somit gilt $pf\begin{pmatrix} 0 & M \\ -M^T & 0 \end{pmatrix} = \det(-M) \cdot pf\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$

$$= (-1)^{2n} \cdot (-1)^{\frac{(n-1)\cdot n}{2}} \det(M)$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)\cdot n}{2}} \det(M)$$

$\square$

• Beweis $\quad pf(A)^2 = \det(A)$

Für $A \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ $\exists U$ unitär sodass $\quad U^T A U = \bigoplus_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_i \\ -\lambda_i & 0 \end{pmatrix}$

$U^+ = -U$

hier ist explizit zu unterscheiden zwischen adjungieren und Transponieren

$$pf(U^T A U) = \det(U)\, pf(A)$$

$\Rightarrow$

$$\det(U^T A U) = \det(U^T)\det(A)\det(U) = \det(U)^2 \det(A)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{pf(A)^2}{\det(A)} = \frac{pf(U^T A U)^2}{\det(U^T A U)} = \frac{pf^2\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} 0 & \lambda_i \\ -\lambda_i & 0\end{pmatrix}\right)}{\det\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} 0 & \lambda_i \\ -\lambda_i & 0\end{pmatrix}\right)} = \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^2}{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i^2} = 1$$

$\square$

Alternativbeweis

$$\bullet\ pf(A)^2 = pf\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A\end{pmatrix} = pf\left(T^T \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0\end{pmatrix} T\right) = \det(T)\, pf\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0\end{pmatrix}$$

$$= \det(T)\, 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \det(A) = \underbrace{(-1)^{n}\, 2^{\frac{n(n-1)}{2}}}_{=1\ ?} \det(A)$$

mit $T = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & i\mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & -i\mathbb{1}_n \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\det(T) \overset{\text{Blockmatrixsatz}}{=} \det\left((-i\mathbb{1}_n - i\mathbb{1}_n)\frac{1}{2}\right) = (-i)^n$

Beweis: $\quad pf(A^{-1}) = (-1)^n (pf(A))^{-1}$

$$pf(A^T) = pf(A A^{-1} A^T) = pf(A^{-1}) \cdot \det(A)$$

$$(-1)^n pf(A) = pf(-A) = pf(A^T) = pf(A^{-1})\, pf(A)^2$$

$$(-1)^n pf(A)^{-1} = pf(A^{-1})$$

Beweis:

$$pf(-A) = pf(i\mathbb{1}^T A\, i\mathbb{1}) = \det(i\mathbb{1})\, pf(A)$$

$$= i^{2n} pf(A) = (-1)^n pf(A)$$