Determinante der 2D-Fourier-Matrix

Sei $W^L_{k,e} = e^{i\frac{2\pi}{L}k\cdot e}$ die Matrix der 1-dimensionalen Fouriertrafo

Es gilt $\det(W^L) \in \{-1, i, -i, 1\}$

der Beweis ist einfach indem man zeigt $(W^L)^4 = \mathbb{1}_{L\times L}$

Für die 2-dim Fouriertransformation geht man nun von einem Matrix-Signal aus

$$x[n,k] = \sum_m \sum_e \hat{x}[m,e]\, e^{i\frac{2\pi}{L}n\cdot m}\; e^{i\frac{2\pi}{L}e\cdot k}$$

$$= \sum_m \hat{X}[m,k]\, e^{i\frac{2\pi}{L}m\cdot n} \quad \text{mit } \hat{X}[m,k] = \sum_e \hat{x}[m,e]\, e^{i\frac{2\pi}{L}ek}$$

Matrixsignal im Ortsraum

$$\Rightarrow x = W^L \hat{X} = W^L \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Matrixsignal im k-Raum}}}{\hat{x}} W^L$$

Mithilfe des Kroneckerproduktes und der Vectorisierungs-Operation

$$\mathrm{vec}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix}}_{=B} = \begin{pmatrix} a\cdot B & b\cdot B \\ c\cdot B & d\cdot B \end{pmatrix}$$

folgt unter Ausnutzung der Identitäten

$$AXB = C \quad \Leftrightarrow \quad (B^T \otimes A)\,\mathrm{vec}(X) = \mathrm{vec}(C)$$

$$(W^L)^T = W^L \qquad \text{Symmetrie der Fourier-matrix}$$

dass gilt

$$\mathrm{vec}(x) = \underbrace{(W^L \otimes W^L)}_{=:\, U \text{ ist}}\,\mathrm{vec}(\hat{x})$$

Mit der Identität $\det(\underset{n\times n}{A} \otimes \underset{m\times m}{B}) = \det(A)^m \cdot \det(B)^n$ folgt dann

$$\det(U) = \det(W^L)^{2\cdot L} \in \{-1, 1\}$$