Analytische Berechnung der spontanen Magnetisierung von isotropen homogenen Ising Ferromagneten unter der Verwendung von Graßmann Zahlen

Joachim Pomper

Technische Universität Graz

21.10.2020

Warum das 2d Modell exakt lösen?

- Einfachstes statistisches Modell, welches einen Phasenübergang zweiter Ordnung aufweist.

Warum das 2d Modell exakt lösen?

- Einfachstes statistisches Modell, welches einen Phasenübergang zweiter Ordnung aufweist.
- Exakte Lösungen geben neue Einsicht in das System.

Warum das 2d Modell exakt lösen?

- Einfachstes statistisches Modell, welches einen Phasenübergang zweiter Ordnung aufweist.
- Exakte Lösungen geben neue Einsicht in das System.
- Kann als Test-Modell für numerische Näherungsverfahren verwendet werden.

Historisches

1948 Formel ohne Beweis

Historisches

1948 Formel ohne Beweis

1952 Sehr komplizierter Beweis

Historisches

1948 Formel ohne Beweis

1952 Sehr komplizierter Beweis

1962 Untersuchung mit Pfaffscher Determinante

Historisches

1948 Formel ohne Beweis

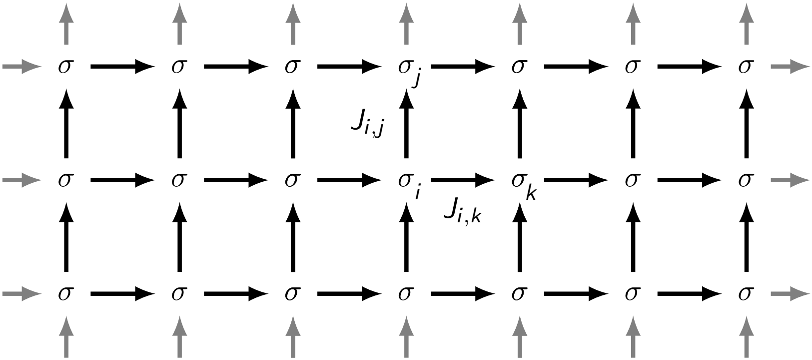
1952 Sehr komplizierter Beweis

1962 Untersuchung mit Pfaffscher Determinante

1980 Untersuchung mit Graßmann Variablen

Grundlagen

Periodisches Ising-Gitter



Hamiltonfunktion des 2d Ising-Gitters

$$H(S) := -J \sum_{(i,j)} \sigma_i(S)\sigma_j(S)$$

$$S \in \{(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \mid \sigma_i \in \{-1, 1\}\}$$

Annahmen für das behandelte Modell :

- Nur nächste Nachbar Wechselwirkung
- Isotropie und Homogenität des Modells
- Ferromagnetischer Austausch d.h. $J > 0$
- Kein externes Magnetfeld
- Periodische Randbedingungen

Zentrale Größen der Statistischen Physik

Zustandssumme

$$Z := \sum_{\{S\}} \mathrm{e}^{-\beta H(S)}$$

$$\beta := \frac{1}{k_B T}$$

Spin-Spin-Korrelation

$$\langle \sigma_p \sigma_q \rangle$$

Thermodynamischer Limes

Endliche System werden auf ein beliebig großes System extrapoliert.

$$\lim_{V,N\to\infty}{}^{*} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} N \longrightarrow \infty \\ V \longrightarrow \infty \\ n = N/V = konst. < \infty \end{array}$$

Spontane Magnetisierung

Definition

$$\mathcal{M}_S := n\mu \langle \sigma \rangle$$

Mittleres magnetisches Moment pro Volumen ohne externes Magnetfeld

Spontane Magnetisierung

Definition

$$\mathcal{M}_S := n\mu \langle \sigma \rangle$$

$$\lim_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\to\infty} \langle \sigma_{\boldsymbol{x}} \sigma_{\boldsymbol{y}} \rangle = \langle \sigma \rangle^2$$

Spontane Magnetisierung

Definition

$$\mathcal{M}_S := n\mu \left\langle \sigma \right\rangle$$

$$\lim_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\to\infty} \left\langle \sigma_{\boldsymbol{x}} \sigma_{\boldsymbol{y}} \right\rangle = \left\langle \sigma \right\rangle^2$$

Verwendeter Ausdruck

$$\mathcal{M}_S = n\mu \lim_{m\to\infty} \sqrt{\left\langle \sigma_{(0,0)} \sigma_{(m,0)} \right\rangle}$$

Graßmann Algebra

$(\mathcal{A}, \cdot, +, \wedge)$ heißt Graßmann Algebra, falls gilt:

- $(\mathcal{A}, \cdot, +)$ ist ein Vektorraum
- $\wedge : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ist assoziativ
- Es gibt ein neutrales Elemtent 1 bzgl. $\wedge : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$
- Es gibt ein Familie $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, welche $\mathcal{A}$ generiert
- Die Generatoren erfüllen die Eigenschaft $\eta_i \wedge \eta_j = -\eta_j \wedge \eta_i$

Ein Objekt $\eta \in \mathcal{A}$ heißt dann Graßmann-Zahl.

Generatoren

Generatoren antikommutieren

$$\eta_i \, \eta_j = -\eta_j \, \eta_i$$

Generatoren

Generatoren antikommutieren

$$\eta_i \, \eta_j = -\eta_j \, \eta_i$$

Quadrate von Generatoren verschwinden

$$\eta_i^2 = 0$$

Generatoren

Generatoren antikommutieren

$$\eta_i \, \eta_j = -\eta_j \, \eta_i$$

Quadrate von Generatoren verschwinden

$$\eta_i^2 = 0$$

Paare von Generatoren kommutieren

$$(\eta_i \, \eta_j)(\eta_l \, \eta_k) = (\eta_l \, \eta_k)(\eta_i \, \eta_j)$$

Graßmann Zahlen

Für jede Graßmann Zahl f gibt es eine eindeutige Darstellung

$$f = f_0 \, 1 + \sum_i f_i \, \eta_i + \sum_{i_1 < i_2} f_{i_1, i_2} \, \eta_{i_1} \, \eta_{i_2} + \sum_{i_1 < i_2 < i_3} \ldots + f_{1,2,\ldots,n} \, \eta_1 \, \eta_2 \cdots \eta_n$$

Graßmann Zahlen

Für jede Graßmann Zahl f gibt es eine eindeutige Darstellung

$$f = f_0\, 1 + \sum_i f_i\, \eta_i + \sum_{i_1 < i_2} f_{i_1, i_2}\, \eta_{i_1}\, \eta_{i_2} + \sum_{i_1 < i_2 < i_3} \ldots + f_{1,2,\ldots,n}\, \eta_1\, \eta_2 \cdots \eta_n$$

Spur einer Graßmann Zahl

$$\mathrm{Sp}\,(f) = f_{1,2,\ldots,n} \in \mathbb{C}$$

Graßmann Funktionen

Quadratische Wirkung

$$\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = -2\eta_2\eta_1 + 2\eta_1\eta_2 = 4\eta_1\eta_2$$

Graßmann Funktionen

Quadratische Wirkung

$$\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = -2\eta_2\eta_1 + 2\eta_1\eta_2 = 4\eta_1\eta_2$$

Exponentialfunktion

$$\exp(\eta_1) = 1 + \eta_1 + \frac{\eta_1^2}{2} + \cdots = 1 + \eta_1$$

Pfaffsche Determinante

Definition

Für $\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{M}^T \in \mathbb{C}^{2k \times 2k}$

$$\mathrm{pf}\left(\boldsymbol{M}\right) = \frac{1}{2^n\, n!} \sum_{P \in S_{2n}} \mathrm{sign}\left(P\right) \prod_{i=1}^{n} M_{P(2i-1),P(2i)}$$

Pfaffsche Determinante

Definition

Für $\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{M}^T \in \mathbb{C}^{2k \times 2k}$

$$\mathrm{pf}\left(\boldsymbol{M}\right) = \frac{1}{2^n\, n!} \sum_{P \in S_{2n}} \mathrm{sign}\left(P\right) \prod_{i=1}^{n} M_{P(2i-1),P(2i)}$$

$$\mathrm{pf}\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} = af - be + dc$$

Zentrale Größen im Beweis

Graßmann Zustandssumme

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Sp}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\eta}\right)\right)$$

Graßmann Korrelation

$$\langle \eta_i \eta_j \rangle = \frac{\mathrm{Sp}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\eta}\right)\eta_i \eta_j\right)}{\mathrm{Sp}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\eta}\right)\right)}$$

Zentrale Größen im Beweis

Graßmann Zustandssumme

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Sp}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{\eta}\right)\right) = \mathrm{pf}\,(\boldsymbol{A})$$

Graßmann Korrelation

$$\langle \eta_i \eta_j \rangle = \frac{\mathrm{Sp}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\eta}\right)\eta_i \eta_j\right)}{\mathrm{Sp}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\eta}\right)\right)} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)_{i,j}$$

Die Berechnung

Ausgangspunkt

Hochtemperatur Darstellung

$$Z = \cosh(\beta J)^{2N} \sum_{\{S\}} \prod_{(i,j)} (1 + t\,(\sigma_i \sigma_j))$$

$$t = \tanh(\beta J) \in [0,1]$$

Ausgangspunkt

Hochtemperatur Darstellung

$$Z = \cosh(\beta J)^{2N} \sum_{\{S\}} \prod_{(i,j)} (1 + t\,(\sigma_i \sigma_j))$$

$$= \cosh(\beta J)^{2N}\, 2^N \sum_{\{G\}} t^{N_k(G)}$$

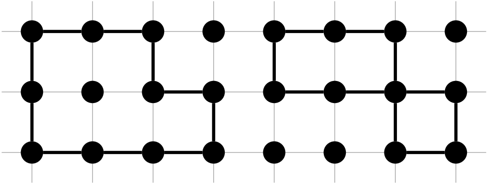
$$t = \tanh(\beta J) \in [0,1]$$

Graphische Darstellung der Zustandssumme

$$\Xi[t_{i,j}] = \sum_{\{G\}} \prod_{(i,j)\in K_G} t_{i,j}$$

Die Graphen $G = (V_G, K_G)$ besitzen die Eigenschaften:

i) Alle Vertices des Graphen liegen auf dem Gitter
ii) G ist geschlossen (auch über periodischen Rand)
iii) G kann durchlaufen werden, ohne eine Kante zweimal zu nutzen.



Hochtemperatur-Darstellung Zustandssumme

Zustandssumme

$$Z = \cosh(\beta J)^{2N}\, 2^N\, \Xi[t]$$

Mit uniformer Kantengewichtung :

$$t = \tanh(\beta J) \in [0, 1]$$

Hochtemperatur-Darstellung Korrelation

Spin-Spin-Korrelation

$$\langle \sigma_{0,0}\, \sigma_{0,m} \rangle = \frac{t^m \Xi[\tilde{t}_{i,j}]}{\Xi[t]}$$

Mit modifizierter Kantengewichtung :

$$\tilde{t}_{i,j} = \begin{cases} t^{-1} & \text{Kante auf x-Achse zwischen 0 und } m \\ t & \text{Sonst} \end{cases}$$

Grundlegende Idee

- Graphen als Produkte von Graßmann Zahlen darstellen.

Grundlegende Idee

- Graphen als Produkte von Graßmann Zahlen darstellen.
- Finde Graßmann Wirkung A sodass

$$\mathrm{Sp}\left(e^{A}\right) \stackrel{!}{=} \Xi[t] = \sum_{\{G\}} t^{N_K(G)}$$

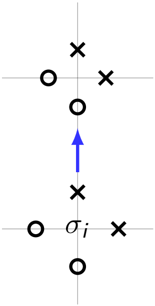
Graphen mit Graßmann Zahlen

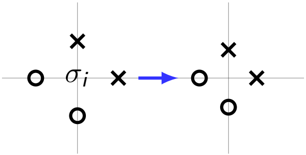
Ordnen jedem Gitterpunkt 4 Graßmann Generatoren zu.

$$\begin{array}{ccccc} & & v_i^x & & \\ & & \times & & \\ h_i^o & \circ & \sigma_i & \times & h_i^x \\ & & \circ & & \\ & & v_i^o & & \end{array}$$

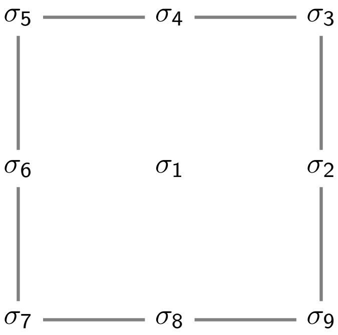
Graphen mit Graßmann Zahlen

$$P^{(v)}_{\boldsymbol{x}_i} = v^{x}_{\boldsymbol{x}_i}\, v^{o}_{\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{e_y}} \qquad P^{(h)}_{\boldsymbol{x}_i} = h^{x}_{\boldsymbol{x}_i}\, h^{o}_{\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{e_x}}$$

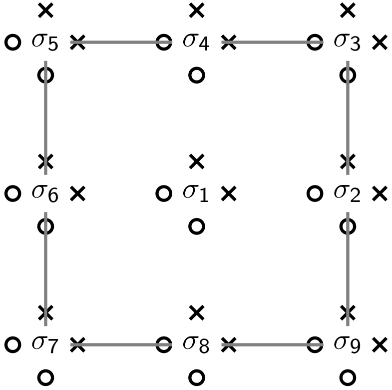




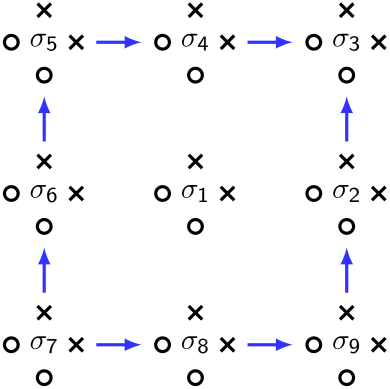
Graphen mit Graßmann Zahlen



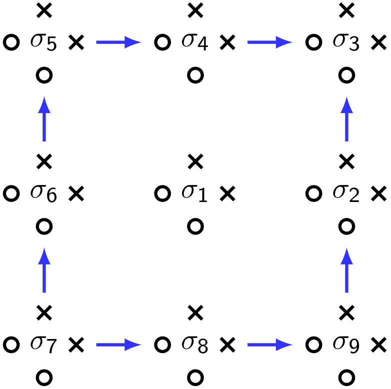
Graphen mit Graßmann Zahlen



Graphen mit Graßmann Zahlen



Graphen mit Graßmann Zahlen



$$G = P^{(v)}_{\mathbf{x}_7} P^{(v)}_{\mathbf{x}_6} P^{(v)}_{\mathbf{x}_2} P^{(v)}_{\mathbf{x}_9} P^{(h)}_{\mathbf{x}_5} P^{(h)}_{\mathbf{x}_4} P^{(h)}_{\mathbf{x}_7} P^{(h)}_{\mathbf{x}_8}$$

Graphen mit Graßmann Zahlen

Jeder Graph auf dem Gitter lässt sich darstellen als

$$G = \prod_{(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{e}_y) \in K_G} P^{(v)}_{\boldsymbol{x}_i} \prod_{(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{e}_x) \in K_G} P^{(h)}_{\boldsymbol{x}_i}$$

Graphen mit Graßmann Zahlen

Jeder Graph auf dem Gitter lässt sich darstellen als

$$G = \prod_{(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{e}_y) \in K_G} P^{(v)}_{\boldsymbol{x}_i} \prod_{(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{e}_x) \in K_G} P^{(h)}_{\boldsymbol{x}_i}$$

Spur der Graßmann Graphen

$$\mathrm{Sp}\,(G) \stackrel{!}{=} t^{N_k(G)}$$

Graphen mit Graßmann Zahlen

Jeder Graph auf dem Gitter lässt sich darstellen als

$$G = \prod_{(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{e}_y) \in K_G} \mathbf{t}\, P_{\boldsymbol{x}_i}^{(v)} \prod_{(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{e}_x) \in K_G} \mathbf{t}\, P_{\boldsymbol{x}_i}^{(h)}$$

Spur der Graßmann Graphen

$$\mathrm{Sp}\,(G) \stackrel{!}{=} t^{N_k(G)}$$

Graphen mit Graßmann Zahlen

Jeder Graph auf dem Gitter lässt sich darstellen als

$$G = \prod_{(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{e}_y)\in K_G} t\; P^{(v)}_{\boldsymbol{x}_i} \prod_{(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{e}_x)\in K_G} t\; P^{(h)}_{\boldsymbol{x}_i}$$

Spur der Graßmann Graphen

$$\mathrm{Sp}\,(G) = 0$$

Graphen mit Graßmann Zahlen

Jeder Graph auf dem Gitter lässt sich darstellen als

$$G = \prod_{(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{e}_y)\in K_G} t\ P^{(v)}_{\boldsymbol{x}_i} \prod_{(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{e}_x)\in K_G} t\ P^{(h)}_{\boldsymbol{x}_i}$$

Spur der Graßmann Graphen

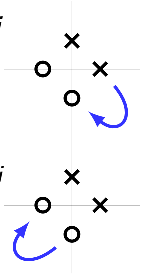
$$\mathrm{Sp}\,(G) = 0$$

Es müssen noch mehr Paare angehängt werden !

Graphen mit Graßmann Zahlen

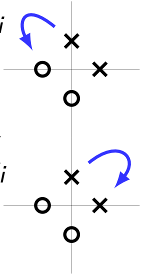
$$P_{\mathbf{x}_i}^{(a)} = h_{\mathbf{x}_i}^{x}\, v_{\mathbf{x}_i}^{o}$$

$$P_{\mathbf{x}_i}^{(c)} = v_{\mathbf{x}_i}^{o}\, h_{\mathbf{x}_i}^{o}$$



$$P_{\mathbf{x}_i}^{(b)} = v_{\mathbf{x}_i}^{x}\, h_{\mathbf{x}_i}^{o}$$

$$P_{\mathbf{x}_i}^{(d)} = v_{\mathbf{x}_i}^{x}\, h_{\mathbf{x}_i}^{x}$$



Graphen mit Graßmann Zahlen

$$P^{(a)}_{\mathbf{x}_i} = h^{x}_{\mathbf{x}_i} \, v^{o}_{\mathbf{x}_i}$$

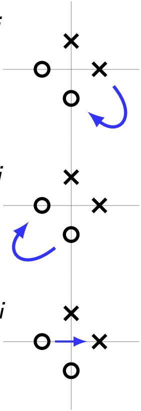
$$P^{(b)}_{\mathbf{x}_i} = v^{x}_{\mathbf{x}_i} \, h^{o}_{\mathbf{x}_i}$$

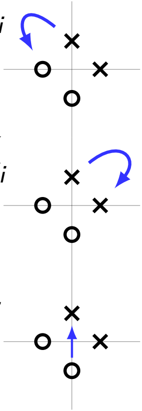
$$P^{(c)}_{\mathbf{x}_i} = v^{o}_{\mathbf{x}_i} \, h^{o}_{\mathbf{x}_i}$$

$$P^{(d)}_{\mathbf{x}_i} = v^{x}_{\mathbf{x}_i} \, h^{x}_{\mathbf{x}_i}$$

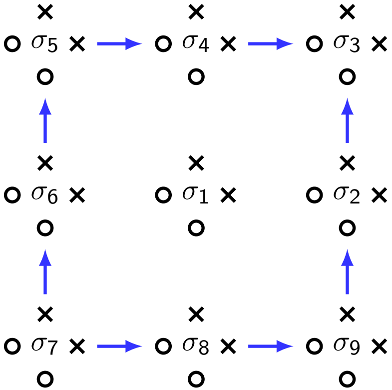
$$P^{(e)}_{\mathbf{x}_i} = h^{o}_{\mathbf{x}_i} \, h^{x}_{\mathbf{x}_i}$$

$$P^{(f)}_{\mathbf{x}_i} = v^{o}_{\mathbf{x}_i} \, v^{x}_{\mathbf{x}_i}$$

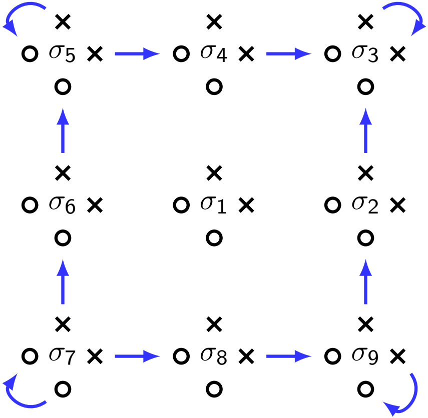




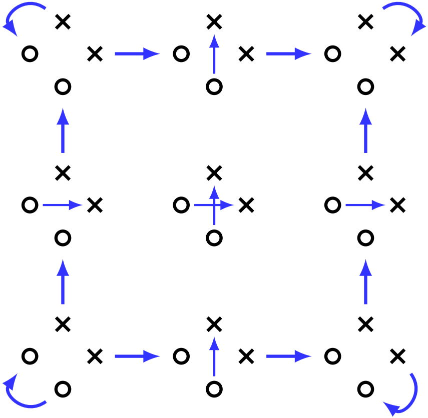
Graphen mit Graßmann Zahlen



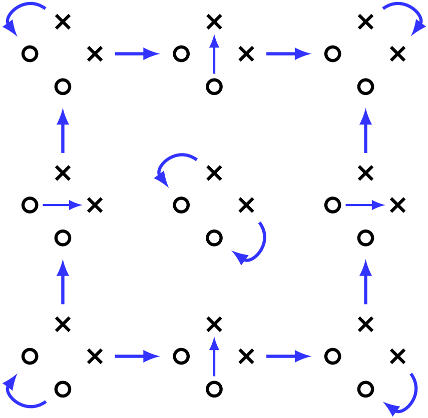
Graphen mit Graßmann Zahlen



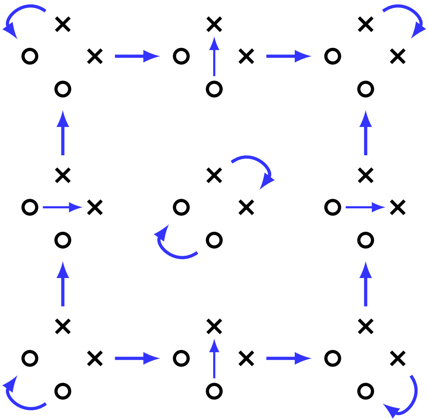
Graphen mit Graßmann Zahlen



Graphen mit Graßmann Zahlen



Graphen mit Graßmann Zahlen



Graphen mit Graßmann Zahlen

- Jeder Graph auf Gitter als Graßmann Monom darstellbar

Graphen mit Graßmann Zahlen

- Jeder Graph auf Gitter als Graßmann Monom darstellbar
- Darstellung ist nicht eindeutig

Graphen mit Graßmann Zahlen

- Jeder Graph auf Gitter als Graßmann Monom darstellbar
- Darstellung ist nicht eindeutig
- Paar-Gewichte müssen so gewählt werden, dass die Spur das Graphen-Gewicht ergibt.

Graphen mit Graßmann Zahlen

$\mathrm{Sp}\,(G)$ verschwindet, wenn:

i) eine Kante im Graphen doppelt durchlaufen wird

Graphen mit Graßmann Zahlen

$\mathrm{Sp}\,(G)$ verschwindet, wenn:

i) eine Kante im Graphen doppelt durchlaufen wird

ii) der Graph nicht geschlossen ist

Graphen mit Graßmann Zahlen

$\mathrm{Sp}\,(G)$ verschwindet, wenn:

i) eine Kante im Graphen doppelt durchlaufen wird

ii) der Graph nicht geschlossen ist

Die Graßmann Graphen haben genau die gesuchten Eigenschaften!

Exponentialfunktion als Generator aller Graphen

$$\exp\left(\sum_{i\in\Lambda} a_i P_i\right)$$

Exponentialfunktion als Generator aller Graphen

$$\exp\left(\sum_{i\in\Lambda} a_i P_i\right) = \prod_{i\in\Lambda} \exp\left(a_i P_i\right) = \prod_{i\in\Lambda} 1 + a_i P_i$$

Exponentialfunktion als Generator aller Graphen

$$\exp\left(\sum_{i\in\Lambda} a_i P_i\right) = \prod_{i\in\Lambda} \exp\left(a_i P_i\right) = \prod_{i\in\Lambda} 1 + a_i P_i$$

- Explizites Ausmultiplizieren liefert alle Produkte von Paaren

Exponentialfunktion als Generator aller Graphen

$$\exp\left(\sum_{i\in\Lambda} a_i P_i\right) = \prod_{i\in\Lambda} \exp\left(a_i P_i\right) = \prod_{i\in\Lambda} 1 + a_i P_i$$

- Explizites Ausmultiplizieren liefert alle Produkte von Paaren
- Nur für Produkte, in denen jeder Generator vertreten ist, gilt

$$\mathrm{Sp}\left(G\right) \neq 0$$

Graßmann Wirkung

Definieren Graßmann Wirkungen:

$$A_{hv} = \sum_{\boldsymbol{x}_i} t\, P^{(h)}_{\boldsymbol{x}_i} + t\, P^{(v)}_{\boldsymbol{x}_i}$$

$$A_{abcd} = -\sum_{\boldsymbol{x}_i} P^{(a)}_{\boldsymbol{x}_i} + P^{(b)}_{\boldsymbol{x}_i} + P^{(c)}_{\boldsymbol{x}_i} + P^{(d)}_{\boldsymbol{x}_i}$$

$$A_{ef} = -\sum_{\boldsymbol{x}_i} P^{(e)}_{\boldsymbol{x}_i} + P^{(f)}_{\boldsymbol{x}_i}$$

Graßmann Wirkung

Definieren Graßmann Wirkungen:

$$A_{hv} = \sum_{\boldsymbol{x}_i} t\, P^{(h)}_{\boldsymbol{x}_i} + t\, P^{(v)}_{\boldsymbol{x}_i}$$

$$A_{abcd} = -\sum_{\boldsymbol{x}_i} P^{(a)}_{\boldsymbol{x}_i} + P^{(b)}_{\boldsymbol{x}_i} + P^{(c)}_{\boldsymbol{x}_i} + P^{(d)}_{\boldsymbol{x}_i}$$

$$A_{ef} = -\sum_{\boldsymbol{x}_i} P^{(e)}_{\boldsymbol{x}_i} + P^{(f)}_{\boldsymbol{x}_i}$$

Zustandssumme mit Graßmann Variablen

$$\sum_{\{G\}} t^{N_K(G)} \approx (-1)^N \,\mathrm{Sp}\left(\mathrm{e}^{A_{hv}+A_{abcd}+A_{ef}}\right)$$

Transformation der Wirkung

Transformieren

$$A = A_{gh} + A_{abcd} + A_{ef}$$

mit Fouriertransformation U

$$\boldsymbol{x}_i \overset{U}{\longleftrightarrow} \boldsymbol{k}_i$$

$$h^x_{\boldsymbol{x}_i}, h^o_{\boldsymbol{x}_i}, v^x_{\boldsymbol{x}_i}, v^o_{\boldsymbol{x}_i} \xrightarrow{U} \hat{h}^x_{\boldsymbol{k}_i}, \hat{h}^o_{\boldsymbol{k}_i}, \hat{v}^x_{\boldsymbol{k}_i}, \hat{v}^o_{\boldsymbol{k}_i}$$

$$A \xrightarrow{U} \hat{A}$$

Die Spur bleibt erhalten

$$\mathrm{Sp}\left(e^{A}\right) = \mathrm{Sp}\left(e^{\hat{A}}\right)$$

Darstellende Matrix

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|ccc|ccc}
\hat{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{k}_0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\hline
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{k}_1} & \cdots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \hat{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{k}_{2M(M+1)}} \\
\hline
\mathbf{0} & -\hat{\boldsymbol{A}}^T_{\boldsymbol{k}_1} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\hat{\boldsymbol{A}}^T_{\boldsymbol{k}_{2M(M+1)}} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}
\end{array}\right)$$

$\hat{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{k}}$ sind komplexe 4×4 Matrizen

Spin-Spin Korrelation

$$\langle \sigma_{0,0} \sigma_{m,0} \rangle = \frac{t^m \Xi[\tilde{t}_{i,j}]}{\Xi[t]} \approx \frac{t^m \, \mathrm{Sp}\left(\mathrm{e}^{A_D}\right)}{\mathrm{Sp}\left(\mathrm{e}^{A}\right)}$$

$$A_D = A - \sum_{\boldsymbol{x}} t \, h^x_{\boldsymbol{x}} \, h^o_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_x} + \sum_{\boldsymbol{x}} t^{-1} \, h^x_{\boldsymbol{x}} \, h^o_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_x}$$

Spin-Spin Korrelation als Toeplitz Determinante

$$\frac{t^m \,\mathrm{Sp}\left(\mathrm{e}^{A_D}\right)}{\mathrm{Sp}\left(\mathrm{e}^{A}\right)} = \cdots = \det\left(\boldsymbol{C}^{(m)}\right)$$

$$C^{(m)}_{l,l'} = t\delta_{l,l'} + (1-t^2)\sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-i\,(l-l'-1)\,k_1} \left\langle \hat{h}^x_{\boldsymbol{k}}\,\hat{h}^o_{-\boldsymbol{k}}\right\rangle \frac{\Delta k_1}{2\pi}\frac{\Delta k_2}{2\pi}$$

$\boldsymbol{C}^{(m)}$ ist eine $m \times m$ Toeplitz Matrix

Graßmann Korrelationen berechnen

$$\left\langle \hat{h}^x_{\boldsymbol{k}}\, \hat{h}^o_{-\boldsymbol{k}} \right\rangle_{\Lambda_N} = \frac{\mathrm{Sp}\left(\mathrm{e}^{\hat{A}} \quad \hat{h}^x_{\boldsymbol{k}}\, \hat{h}^o_{-\boldsymbol{k}}\right)}{\mathrm{Sp}\left(\mathrm{e}^{\hat{A}}\right)} = \left(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{-1}\right)_{2,1}$$

Thermodynamischer Limes

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\bar{\Lambda}} \mathrm{e}^{-i\,(l-l')\,k_1} \left\langle \hat{h}^{x}_{\boldsymbol{k}}\, \hat{h}^{o}_{-\boldsymbol{k}} \right\rangle_{\Lambda_N} \frac{\Delta k_1}{2\pi}\,\frac{\Delta k_2}{2\pi}$$

$$\begin{matrix} \Delta k_1 \\ \downarrow \\ 0 \end{matrix} \Bigg\downarrow \begin{matrix} \Delta k_2 \\ \downarrow \\ 0 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2\; \mathrm{e}^{-i\,(l-l')\,k_1} \left\langle \hat{h}^{x}_{\boldsymbol{k}}\, \hat{h}^{o}_{-\boldsymbol{k}} \right\rangle$$

Korrelationsmatrix in Fourierdarstellung

$$\left(\frac{\mathcal{M}_S}{n\mu}\right)^2 = \lim_{m\to\infty}\left\langle \sigma_{(0,0)}\sigma_{(m,0)}\right\rangle = \lim_{m\to\infty}\det\left(\boldsymbol{C}^{(m)}\right)$$

Korrelationsmatrix in Fourierdarstellung

$$\left(\frac{\mathcal{M}_S}{n\mu}\right)^2 = \lim_{m\to\infty} \left\langle \sigma_{(0,0)}\sigma_{(m,0)} \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \det\left(\boldsymbol{C}^{(m)}\right)$$

$$C^{(m)}_{l,l+r} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\omega \; \mathrm{e}^{-ir\omega}\mathrm{e}^{i\delta^*}$$

Korrelationsmatrix in Fourierdarstellung

$$\left(\frac{\mathcal{M}_S}{n\mu}\right)^2 = \lim_{m\to\infty}\left\langle \sigma_{(0,0)}\sigma_{(m,0)}\right\rangle = \lim_{m\to\infty}\det\left(\boldsymbol{C}^{(m)}\right)$$

$$C^{(m)}_{l,l+r} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\omega\ \mathrm{e}^{-ir\omega}\mathrm{e}^{i\delta^*}$$

$$i\delta^*(\omega) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(1-tt^*\mathrm{e}^{i\omega})(1-\frac{t^*}{t}\mathrm{e}^{-i\omega})}{(1-tt^*\mathrm{e}^{-i\omega})(1-\frac{t^*}{t}\mathrm{e}^{i\omega})}\right)$$

$$t = \tanh(\beta J) \qquad t^* = \frac{1-t}{1+t} \qquad \omega = -k_1$$

Starker Grenzwertsatz von Szegö

Für

$$f(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \mathrm{e}^{ik\omega}$$

Starker Grenzwertsatz von Szegö

Für

$$f(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \mathrm{e}^{ik\omega}$$

gilt mit

$$D_m(f) = \det(\boldsymbol{M}) \quad \text{mit } M_{i,j} = \hat{f}(i-j) \ , \ 1 < i,j < m$$

im Limes $m \to \infty$

Starker Grenzwertsatz von Szegö

Für

$$f(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\mathrm{e}^{ik\omega}$$

gilt mit

$$D_m(f) = \det(\boldsymbol{M}) \quad \text{mit } M_{i,j} = \hat{f}(i-j) \ , \ 1 < i,j < m$$

im Limes $m \to \infty$

$$\ln(D_m(f)) = (m+1)\hat{s}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} k\ \hat{s}(k)\ \hat{s}(-k) + \mathcal{O}(1)$$

$$\hat{s}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln(f(\omega))\,\mathrm{e}^{-ik\omega}d\omega$$

Kritische Temperatur

$$f(\omega) = \mathrm{e}^{i\delta^*(\omega)} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(f(\omega)\right) = i\delta^*(\omega)$$

Kritische Temperatur

$$f(\omega) = \mathrm{e}^{i\delta^*(\omega)} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(f(\omega)\right) = i\delta^*(\omega)$$

$$\begin{aligned} 2i\delta^*(\omega) =& \ln\left(1 - tt^*\mathrm{e}^{i\omega}\right) + \ln\left(1 - \frac{t^*}{t}\mathrm{e}^{-i\omega}\right) \\ & - \ln\left(1 - tt^*\mathrm{e}^{-i\omega}\right) - \ln\left(1 - \frac{t^*}{t}\mathrm{e}^{i\omega}\right) \end{aligned}$$

Kritische Temperatur

$$f(\omega) = \mathrm{e}^{i\delta^*(\omega)} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(f(\omega)\right) = i\delta^*(\omega)$$

$$\begin{aligned} 2i\delta^*(\omega) =& \ln\left(1 - tt^*\mathrm{e}^{i\omega}\right) + \ln\left(1 - \frac{t^*}{t}\mathrm{e}^{-i\omega}\right) \\ &- \ln\left(1 - tt^*\mathrm{e}^{-i\omega}\right) - \ln\left(1 - \frac{t^*}{t}\mathrm{e}^{i\omega}\right) \end{aligned}$$

Kritische Temperatur

$$f(\omega) = \mathrm{e}^{i\delta^*(\omega)} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(f(\omega)\right) = i\delta^*(\omega)$$

$$\begin{aligned} 2i\delta^*(\omega) = &\ln\left(1 - tt^*\mathrm{e}^{i\omega}\right) + \ln\left(1 - \frac{t^*}{t}\mathrm{e}^{-i\omega}\right) \\ &- \ln\left(1 - tt^*\mathrm{e}^{-i\omega}\right) - \ln\left(1 - \frac{t^*}{t}\mathrm{e}^{i\omega}\right) \end{aligned}$$

$$T_C := \frac{2J}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right) k_B}$$

Magnetisierung für $T < T_C$

$$
\begin{aligned}
2i\delta^*(\omega) =& \ln\left(1 - tt^* \mathrm{e}^{i\omega}\right) + \ln\left(1 - \frac{t^*}{t}\mathrm{e}^{-i\omega}\right) \\
& - \ln\left(1 - tt^* \mathrm{e}^{-i\omega}\right) - \ln\left(1 - \frac{t^*}{t}\mathrm{e}^{i\omega}\right)
\end{aligned}
$$

$\downarrow$ Szegö Grenzwertsatz $\downarrow$

$$
\frac{\mathcal{M}_S^2}{n\mu} = \lim_{m\to\infty} \det\left(\boldsymbol{C}^{(m)}\right) = \left(1 - \frac{1}{\sinh(\frac{2J}{k_B T})^4}\right)^{\frac{1}{4}}
$$

Magnetisierung für $T > T_C$

$$2i\delta^*(\omega) = \ln\left(1 - tt^*\mathrm{e}^{i\omega}\right) + \ln\left(1 - \frac{t}{t^*}\mathrm{e}^{-i\omega}\right)$$
$$- \ln\left(1 - tt^*\mathrm{e}^{-i\omega}\right) - \ln\left(1 - \frac{t}{t^*}\mathrm{e}^{i\omega}\right)\right) + \ln\left(\mathrm{e}^{-2i\omega}\right)$$

$$\Big\downarrow \text{ Szegö Grenzwertsatz } \Big\downarrow$$

$$\frac{\mathcal{M}_S^2}{n\mu} = \lim_{m\to\infty} \det\left(\boldsymbol{C}^{(m)}\right) = 0$$

Zusammenfassung

Resultat - Was wurde gezeigt?

Spontane Magnetisierung des 2d Ising-Modells

$$\mathcal{M}_S = \begin{cases} n\mu \left(1 - \frac{1}{\sinh(\frac{2J}{k_B T})^4}\right)^{\frac{1}{8}} & \text{für } T < T_c \\ 0 & \text{für } T > T_c \end{cases}$$

$$T_C := \frac{2J}{\ln\left(1 + \sqrt{2}\right) k_B}$$

Zusammenfassung - Wie wurde es gemacht?

- Graphisch kombinatorisches Problem auf algebraisches Problem abgebildet (Graßmann Zahlen)
- Periodizität erlaubt Vereinfachung (Fouriertransformation, Toeplitz Determiante)
- Starke Szegö Grenzwertsatz für langreichweitigen Limes

Zusammenfassung - Qualität der vorgeführten Methode

- Transkription des Modells in handhabbares algebraisches Problem
- Berechnung der Zustandssumme
- Berechnung der Spin-Spin-Korrelationen
- Erweiterung auf größere Spin-Korrelationen
- Anwendbar auf andere Probleme wie " free-fermion ferroelectric vertex models" oder " planar closed-packed dimer problems"

Danke für ihre Aufmerksamkeit!

Vorraussetzungen Grenzwertsatz von Szegö

- Konvergenz der Fourier-Koeffizienten

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| < \infty \quad , \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 |k| < \infty$$

- Keine Nullstellen im Definitionsbereich

$$\forall \omega \in [-\pi, \pi] \quad : \quad f(\omega) \neq 0$$

- Verschwindende Windungszahl

$$[\arg(f)]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Graphische Interpretation der Zustandssumme

$$\sum_{\{S\}} \prod_{(i,j)} (1 + t_{i,j}\,(\sigma_i \sigma_j))$$

$$= \sum_{\{S\}} 1 + \sum_{(i,j)} t_{i,j}\,(\sigma_i \sigma_j) + \sum_{(i,j)} \sum_{(k,l)} t_{i,j}\, t_{k,l}\,(\sigma_i \sigma_j)(\sigma_k \sigma_l) \ldots$$

$$= \sum_{\{S\}} \sum_{\{(i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n)\}} t_{i_1, j_1} \cdots t_{i_n, j_n}\,(\sigma_{i_1} \sigma_{j_1})(\sigma_{i_2} \sigma_{i_2}) \cdots (\sigma_{i_n} \sigma_{j_n})$$