

倒立振子の制御

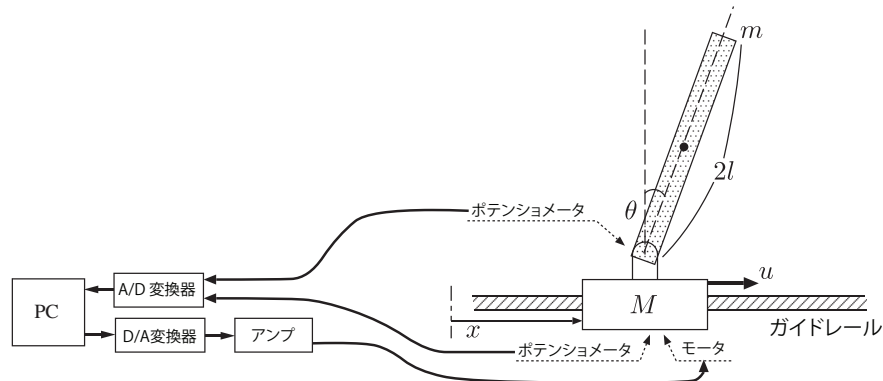
1 目的

倒立振子等の制御を通して，現代制御理論の基礎を習得する．

2 実験装置

下の図に示すように，倒立振子とは，ガイドレール上を水平に移動可能な台車に自由関節で連結された振子を取りつけたものである．台車には，D/A 変換器・アンプ・DC サーボモータ・ラック-ピニオンギヤを介することによって水平方向の力 u を加えることができる．また，ポテンシオメータ・A/D 変換器によって台車の水平位置および振子の角度を計測することができる．制御器は，制御用パーソナルコンピュータ (PC) 内に実装されており，A/D 変換器から入力される計測値にもとづいて，台車に加える力を求める．これは D/A 変換器を通じて出力される．

振子はアルミニウムの均一な中実円柱であり，その長さを 2ℓ ，質量を m とする．また台車の質量を M とする．自由関節の粘性摩擦係数を D_θ ，台車の水平移動に関する粘性摩擦係数（ベアリング，ラック-ピニオンギヤ，ポテンシオメータ等の摩擦の総合）を D_x とする．



3 モデリング

3.1 運動方程式の導出

倒立振子系の運動方程式を Lagrange の方法によって導出する．まず振子系の運動エネルギー，ポテンシャルエネルギーと散逸エネルギー関数を求めよう．

1. 振子系全体の運動エネルギー \mathcal{J} は，つぎの J_θ, J_t, J_x の和として与えられる．

$$\text{振子の重心回りの回転エネルギー: } J_\theta = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

$$\begin{aligned}\text{振子の重心の並進エネルギー: } J_t &= \frac{1}{2}m\{(\dot{x} + \ell\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (\ell\dot{\theta}\sin\theta)^2\} \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\ell\cos\theta\dot{x}\dot{\theta} + \ell^2\dot{\theta}^2)\end{aligned}$$

$$\text{台車の並進エネルギー: } J_x = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

$$\mathcal{J} = J_\theta + J_t + J_x = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2 + m\ell\cos\theta\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2$$

2. つぎに、振子系のポテンシャルエネルギー \mathcal{U} を求める。この系では台車のポテンシャルは変化しないので、振子の重力ポテンシャルのみを考えれば良い。振子が垂下した状態 ($\theta = \pi$) がポテンシャルの基準 ($\mathcal{U} = 0$ の状態) になるようにすると、次式によって与えられる。

$$\mathcal{U} = mgl(1 + \cos \theta)$$

3. つづいて損失エネルギー (Rayleigh の散逸関数) \mathcal{D} を求める。台車と床の粘性摩擦係数が D_x 、振子のジョイントの粘性摩擦係数が D_θ であるので、

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}D_x\dot{x}^2 + \frac{1}{2}D_\theta\dot{\theta}^2$$

以上をもとに、一般化座標 $q = (q_1, q_2)$ を $q_1 = x, q_2 = \theta$ と設定して、Euler-Lagrange の運動方程式を導こう。この計算に現れる偏微分においては、 $q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2$ をそれぞれ独立な変数と考える。例えば、 q_1 で偏微分するときには $q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2$ は定数と考えるので、 $\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1} = 0$ のようになることに注意してほしい。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{q}_1} &= m\ell\dot{\theta}\cos\theta + (M+m)\dot{x}, & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{q}_1}\right) &= m\ell\ddot{\theta}\cos\theta - m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta + (M+m)\ddot{x} \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} + m\ell\dot{x}\cos\theta, & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{q}_2}\right) &= \frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} + m\ell\ddot{x}\cos\theta - m\ell\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_1} &= D_x\dot{x} \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial q_2} &= -m\ell\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta, & \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_2} &= -mgl\sin\theta, & \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_2} &= D_\theta\dot{\theta} \end{aligned}$$

入力として加えられるのは台車への力 u だけであることに注意すると、Euler-Lagrange の運動方程式はつぎの2式で表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial q_1} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_1} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_1} &= u \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial q_2} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_2} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_2} &= 0 \end{aligned}$$

上の計算結果を代入すると、以下の倒立振子系の運動方程式を得る。

$$m\ell\ddot{\theta}\cos\theta - m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta + (M+m)\ddot{x} + D_x\dot{x} = u \quad (1)$$

$$\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} + m\ell\ddot{x}\cos\theta - mgl\sin\theta + D_\theta\dot{\theta} = 0 \quad (2)$$

【設問 1】 Newton の方法で同じ運動方程式を導出してみよ。(ヒント：中間変数として台車と振子の間に働く作用の水平成分 H と垂直成分 V を使って並進・回転に関する慣性力のつりあいの式を4つ導き、そこから V と H を消去する。)

3.2 非線形状態方程式の導出

運動方程式 (1), (2) は2本の2階微分方程式であるが、4次の状態変数ベクトル $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T$ を導入すると4本の1階微分方程式で記述することができる。すなわち

$$\xi_1 = x, \xi_2 = \theta, \xi_3 = \dot{x}, \xi_4 = \dot{\theta}$$

とにおいて、非線形状態方程式 $\dot{\xi} = f(\xi, u)$ の形に書き直してみよう。ここで $f(\xi, u)$ とは

$$f(\xi, u) = \begin{pmatrix} f_1(\xi, u) \\ \vdots \\ f_4(\xi, u) \end{pmatrix}$$

のように4つの関数を要素にもつベクトル値関数である。

まず非線形運動方程式 (1), (2) を状態変数 ξ を使って書き直してみると

$$m\ell\dot{\xi}_4 \cos \xi_2 - m\ell\xi_4^2 \sin \xi_2 + (M+m)\dot{\xi}_3 + D_x \xi_3 = u \quad (3)$$

$$\frac{4}{3}m\ell^2\dot{\xi}_4 + m\ell\dot{\xi}_3 \cos \xi_2 - mg\ell \sin \xi_2 + D_\theta \xi_4 = 0 \quad (4)$$

となる。非線形状態方程式 $\dot{\xi} = f(\xi, u)$ を求めるとは、上式を $\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_4$ について解き、 $f_1(\xi, u), \dots, f_4(\xi, u)$ にあたる部分を求めるということである。状態変数の定義より $\dot{\xi}_1 = \xi_3, \dot{\xi}_2 = \xi_4$ であるから計算するまでもなく

$$f_1(\xi, u) = \xi_3$$

$$f_2(\xi, u) = \xi_4$$

であることはわかる。あとは $\dot{\xi}_3, \dot{\xi}_4$ について解けばよい。この計算は煩雑になるが、途中に現れる $(M+m) \cdot \frac{4}{3}m\ell^2 - m^2\ell^2 \cos^2 \xi_2$ を Δ とおくと、すっきりする。

まず (3), (4) 式から $\dot{\xi}_4$ を消去すると

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_3 &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{4}{3}m^2\ell^3 \sin \xi_2 \xi_4^2 - \frac{4}{3}D_x m\ell^2 \xi_3 - m^2\ell^2 g \sin \xi_2 \cos \xi_2 + D_\theta m\ell \xi_4 \cos \xi_2 + \frac{4}{3}m\ell^2 u \right] \\ &=: f_3(\xi, u) \end{aligned}$$

というように ξ, u で表された式を得る。(記号 $A =: B$ は B を A と定義する、の意味。逆に $A := B$ は A を B と定義する、の意味。) 同様に $\dot{\xi}_3$ の方を消去すれば

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_4 &= \frac{1}{\Delta} \left[-m^2\ell^2 \xi_4^2 \sin \xi_2 \cos \xi_2 + D_x m\ell \xi_3 \cos \xi_2 + (M+m)mg\ell \sin \xi_2 \right. \\ &\quad \left. - (M+m)D_\theta \xi_4 - m\ell \cos \xi_2 u \right] \\ &=: f_4(\xi, u) \end{aligned}$$

を得る。

3.3 状態方程式の近似線形化

非線形状態方程式を平衡点（倒立状態）の近傍で**近似線形化**することによって、行列 $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, B \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ を用いた線形状態方程式

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu$$

の形に変換しよう。状態方程式の右辺 $f(\xi, u)$ の $\xi = 0, u = 0$ のまわりでの線形化はつぎのように行なう。

$$A = \left. \frac{\partial f(\xi, u)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0, u=0} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_4}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial f_4}{\partial \xi_4} \end{array} \right) \bigg|_{\xi=0, u=0}, \quad B = \left. \frac{\partial f(\xi, u)}{\partial u} \right|_{\xi=0, u=0} = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{array} \right) \bigg|_{\xi=0, u=0}$$

上式より、 A と B は、次式によって与えられる。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\Delta_0}m^2\ell^2g & -\frac{1}{\Delta_0} \cdot \frac{4}{3}D_x m\ell^2 & \frac{1}{\Delta_0}D_\theta m\ell \\ 0 & \frac{1}{\Delta_0}(M+m)mg\ell & \frac{1}{\Delta_0}D_x m\ell & -\frac{1}{\Delta_0}(M+m)D_\theta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\Delta_0} \cdot \frac{4}{3}m\ell^2 \\ -\frac{1}{\Delta_0}m\ell \end{pmatrix}$$

ここで、 Δ_0 は Δ に $\xi = 0$ を代入したもので、すなわち $(M+m) \cdot \frac{4}{3}m\ell^2 - m^2\ell^2$ である。

線形状態方程式をラプラス変換すると、 $s\xi(s) = A\xi(s) + Bu \rightarrow (sI - A)\xi(s) = Bu \rightarrow \xi(s) = (sI - A)^{-1}Bu$ なので、 u から ξ までの伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s) = (sI - A)^{-1}B$$

と求まる．簡単のために， $A = a$ ， $B = b$ とすると，

$$G(s) = \frac{b}{s - a}$$

となる．このシステムが安定となるには $G(s)$ の極の実部が負であればよく，つまり， $a < 0$ であればよい．伝達関数から線形状態方程式を得る問題は実現問題と呼ばれる．

3.4 モータのダイナミクス

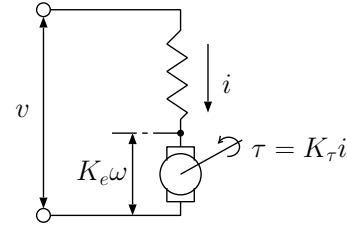
さて，ここまでは簡単のためにモータに水平方向の力 $u[\text{N}]$ が直接加えられるとしてきたが，実際に PC から指令値として出力できるのは，DC モータに印加する電圧 v である．したがって，モータのダイナミクスを考慮して v を入力とした状態方程式を導いておく必要がある．

DC モータの内部パラメータは，以下の通りである．

パラメータ	記号	値	単位
内部ギア比	K_g	1	
モータのトルク定数	K_τ	2.3×10^{-2}	Nm/A
逆起電力定数	K_e		V/(rad/s)
ピニオンギア半径	ρ	6.35×10^{-3}	m
電機子抵抗	R	8.3	Ω

印加電圧を v ，電機子電流を i ，モータ軸の角速度を $\omega[\text{rad/s}]$ ，モータが発生するトルクを τ とおく．下図のような DC モータの等価回路を考え，つぎの 4 つの関係式を用いる．

1. 逆起電力が角速度に比例: $v = iR + K_e\omega$
2. トルクが電機子電流に比例: $\tau = K_\tau i$
3. 回転 \Leftrightarrow 直線運動の変換: $\omega = \frac{K_g \dot{x}}{\rho}$, $u = \frac{K_g \tau}{\rho}$



さて，モータ内部において電機子抵抗以外にパワー損失がない（モータ軸受けの摩擦等が無視できる）と仮定すると， K_e と K_τ は等しくなる．

以上をまとめると

$$u = \frac{K_e K_g}{R \rho} v - \frac{K_e^2 K_g^2}{R \rho^2} \dot{x}$$

なる関係式が得られる．したがって，右辺の第 2 項は台車の水平方向の粘性摩擦と等価に働くことがわかる．入力を v にとり直した線形状態方程式は

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv \tag{5}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\Delta_0} m^2 \ell^2 g & -\frac{1}{\Delta_0} \cdot \frac{4}{3} \hat{D}_x m \ell^2 & \frac{1}{\Delta_0} D_\theta m \ell \\ 0 & \frac{1}{\Delta_0} (M + m) m g \ell & \frac{1}{\Delta_0} \hat{D}_x m \ell & -\frac{1}{\Delta_0} (M + m) D_\theta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\Delta_0} \frac{4}{3} m \ell^2 \\ -\frac{K}{\Delta_0} m \ell \end{pmatrix} \tag{6}$$

となる．ここで

$$K := \frac{K_e K_g}{R \rho}, \quad \hat{D}_x := D_x + \frac{K_e^2 K_g^2}{R \rho^2}$$

とする．以下では，上の (5) 式を，制御する対象である倒立振り系のモデルとして扱う．

4 システム同定

前節で求めた倒立振り子系のモデルは、慣性モーメントや粘性摩擦係数といった系の物理パラメータを用いて記述されている。今回の実験で行う状態フィードバック制御は典型的な**モデルに基づいた制御**であって、その設計に先だって物理パラメータ（あるいは状態方程式）の正確な情報を知っておく必要がある。

物理パラメータを求めようとするとき、例えば振子の長さや質量など、装置を各部品に分解し、各要素の材質や形状を総合して算出できるものもある。一方で、粘性摩擦係数など、物性値等から単独に算出が困難なパラメータもあり、むしろシステムに既知の入力（同定信号）を加え、それに対して得られたレスポンスと突き合わせて間接的にパラメータを推定する方が適切なものもある。このようなパラメータの推定手法をシステム同定と呼ぶ。

4.1 台車のパラメータ同定

まず装置から振子を取り外し、台車部分に関する物理パラメータを同定しよう。このときの台車の振る舞いは、つぎの微分方程式で記述される。

$$M\ddot{x} + \hat{D}_x\dot{x} = Kv, \quad (\hat{D}_x := D_x + \frac{K_e^2 K_g^2}{R\rho^2}) \quad (7)$$

よって、入力 $v(t)$ から台車の位置 $x(t)$ までの伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s) = \frac{K}{s(Ms + \hat{D}_x)}$$

となる。ここで、 K は、 K_e, K_g, R, ρ より求まる既知パラメータである。以下では、残りの未知パラメータ M, \hat{D}_x を同定する方法を紹介する。

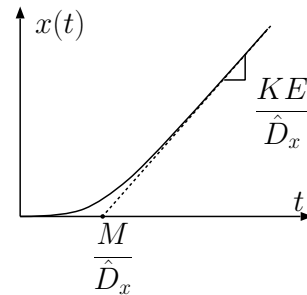
ステップ応答による同定法 初期条件を $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ とし、 $G(s)$ に大きさ E のステップ入力を加える。このときの応答は

$$x(t) = \frac{K}{\hat{D}_x} E \left(\frac{M}{\hat{D}_x} e^{-\frac{\hat{D}_x}{M}t} - \frac{M}{\hat{D}_x} + t \right) \quad (8)$$

となる（確認せよ）。すなわち $t \rightarrow \infty$ のときには直線

$$x(t) = \frac{KE}{\hat{D}_x} \left(t - \frac{M}{\hat{D}_x} \right)$$

に漸近する。右図のように時定数と定常応答における傾きを調べることで M, \hat{D}_x を求めることができる。



【実験1】 ステップ応答による同定法により台車のパラメータを同定せよ。

注：「エラー: close_system (line 37) モデル 'cart_simulator' は変更されたため閉じることができません。コマンド 'save_system' を使用して、最初にモデルを閉じてください」とコマンドウィンドウに表示されて図が表示されない場合は、simulink が開かれているはずなのでまずその simulink を保存する。そして再度実行すれば図が表示されるはず。以降すべての実験においても同様に対応する。

【MATLAB Code】 cart_identification.m

4.2 振子のパラメータの同定

つぎに m, ℓ を既知として D_θ を求める。ここでは、長さ $2\ell = 0.42\text{m}$ 、質量 $m = 0.057\text{kg}$ の振子を用いる。台車を固定し、振子が垂れ下がった状態で自由振動させて応答 $\theta(t)$ を測定したとする。ここで、平衡点 $\theta = \pi$ からの

変位角を $\delta\theta(t)$ と表記すると $\theta(t) = \pi + \delta\theta(t)$ となる．このときの振子の挙動は， $\sin(\pi + \delta\theta) = -\sin(\delta\theta) \approx -\delta\theta$ という関係と $\delta\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(t)$ ， $\delta\ddot{\theta}(t) = \ddot{\theta}(t)$ を用いると

$$(I + m\ell^2)\delta\ddot{\theta}(t) = -mg\ell\delta\theta(t) - D_\theta\delta\dot{\theta}(t)$$

という運動方程式で表わされる．ここで， I は振子の重心周りの慣性モーメントである．この方程式の解は，

$$\delta\theta(t) = He^{-ct} \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$c = \frac{D_\theta}{2(I + m\ell^2)}, \quad \omega = \sqrt{\frac{mg\ell}{I + m\ell^2} - c^2} \quad (9)$$

となる．ただし， H, θ_0 は初期状態に依存して決まる定数である．以上の計算から，自励振動の実験を行い，その減衰値を測定して c を得る．その c の値から，(9) を用いて D_θ を求める．

[実験 2] 実験結果から振子のパラメータ D_θ を同定せよ．また，実験結果から得られた c と ω を用いて慣性モーメント I も同定し，定義から計算した $I = \frac{1}{3}m\ell^2$ と比較せよ．

[MATLAB Code] pend_identification.m

5 制御系設計

5.1 状態フィードバック則の設計

(5) 式のシステムの状態方程式に対して，状態フィードバック則

$$v = F\xi \quad (10)$$

を用いると，閉ループ系は

$$\dot{\xi} = (A + BF)\xi \quad (11)$$

と表わされる．この系が安定となるように $F \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ を設計することを考える．

5.1.1 極配置法

極配置法は，行列 $A + BF$ が実軸対称な任意の固有値を持つように F を定める方法である．極配置が可能であることの必要十分条件は (A, B) が可制御であることである．すべての固有値の実部が負になるように配置することによって閉ループ系 (11) を安定にできる．

極配置のアルゴリズム

1. 行列 A の特性多項式 $|sI - A| = s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$ の係数を用いて以下の正則行列を求める．

$$T = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

つづいて，求めた行列 T を用いて可制御正準形 (\bar{A}, \bar{B}) を求める．

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = T^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. 指定された固有値を p_1, \dots, p_4 とする．対応する閉ループ系の特性多項式を考えて

$$(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)(s - p_4) = s^4 + \gamma_3 s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0$$

となるように右辺の係数 $\gamma_0, \dots, \gamma_3$ を定める．

3. 状態フィードバックを $\bar{F} = \begin{pmatrix} \alpha_0 - \gamma_0 & \alpha_1 - \gamma_1 & \alpha_2 - \gamma_2 & \alpha_3 - \gamma_3 \end{pmatrix}$ とすると, $\bar{A} + \bar{B}\bar{F}$ の固有値は指定されたものとなる. また $F = \bar{F}T^{-1}$ とすると, $A + BF$ の固有値も同様である.

[実験 3] 極の組み合わせを色々試して, 倒立振り子の挙動の変化を考察せよ.

[MATLAB Code] cartpend.PoleAssignment.m

5.1.2 最適レギュレータ

最適レギュレータとは, つぎのような 2 次形式評価関数 J を考えたとき, これを最も小さくするような状態フィードバック則のことである.

$$J = \int_0^\infty (\xi^T Q \xi + v^T R v) dt \quad (12)$$

ただし, Q は非負定対称行列, R は正定対称行列である. 右辺の最初の項の $\xi^T Q \xi$ は, できるだけ早く状態 ξ を 0 に収束させるため, また 2 番目の項の $v^T R v$ は, 制御入力 v が過大にならないようにするためである.

(12) 式を最小にするような状態フィードバックは, つぎのようにして求められる.

$$F = -R^{-1}B^T P$$

ただし, 行列 P はつぎの Riccati 方程式の正定解である.

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

最適レギュレータとして得られる F を用いると, $A + BF$ はかならず安定になる.

[実験 4] Q, R を色々試して, 倒立振り子の挙動の変化を考察せよ.

[MATLAB Code] cartpend.OptimalRegulator.m

[設問 2] 極配置法と最適レギュレータの設計法にはそれぞれどのような特徴があるか.

5.2 オブザーバの設計

状態フィードバック則 (10) を実現するためには, 常にすべての状態 ξ がわかっていなければならない. この倒立振り子系では, 直接観測できるのは x, θ のみであって, その微分 $\dot{x}, \dot{\theta}$ は観測できない. そこで, 状態変数の推定値を求めることを考えるが, そのためにオブザーバ (状態観測器) を構成する.

状態方程式 (5) に加えて, 観測出力と状態の関係を表わす出力方程式

$$\eta = C\xi \quad (13)$$

を考える. ただし

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$$

である.

オブザーバとは,

$$\dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi} + Bv - L(\eta - C\hat{\xi}), \quad \hat{\xi}(0) = 0 \quad (14)$$

で表わされる線形システムのことであって, このシステムの状態変数である $\hat{\xi}$ を状態の推定値, $L \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ をオブザーバゲインという. オブザーバは以下のような性質を持っている.

- もしある時刻で状態 ξ とその推定値 $\hat{\xi}$ が一致していたならば, その後のオブザーバの振る舞いは $\dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi} + Bv$ となるので, $\hat{\xi}$ はずっと ξ と等しくなる.

- 推定誤差 $\bar{\xi} := \hat{\xi} - \xi$ の振る舞い（誤差ダイナミクス）は，(5), (13), (14) 式より，

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\xi}} &= A\bar{\xi} - L(C\xi - C\hat{\xi}) \\ &= (A + LC)\bar{\xi}\end{aligned}\tag{15}$$

となる．したがって，行列 $A + LC$ の固有値の実部がすべて負であれば誤差ダイナミクスは安定であり，推定誤差 $\bar{\xi}$ は指数的に 0 に収束していくことになる．

- オブザーバによる状態の推定値 $\hat{\xi}$ を用いて状態フィードバック $v = F\hat{\xi}$ を行った場合，もとのシステム (5) 式と誤差ダイナミクス (15) 式を併せた系全体は

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\xi + Bv \\ (A + LC)\bar{\xi} \end{pmatrix} \quad \leftarrow v = F\hat{\xi}, \hat{\xi} = \xi + \bar{\xi} \text{を代入} \tag{16}$$

$$= \begin{pmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A + LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} \tag{17}$$

という 8 次の線形システムとなる．右辺の行列の固有値は $A + BF$ の固有値と $A + LC$ の固有値からなっている．

[設問 3] (17) 式において，右辺の行列の固有値が $A + BF$ の固有値と $A + LC$ の固有値からなっていることを確かめ，その意味を考えよ．

5.2.1 オブザーバゲインの設計法

オブザーバゲイン L の設計問題は，状態フィードバック則の設計問題と以下の意味で**双対**となっている．

- $A + LC$ に任意の実軸対称な固有値を配置できるための必要十分条件は， (A, C) が可観測であることである．この条件は， (A^T, C^T) が可制御であることと等価である．したがって， (A^T, C^T) に対して極配置法を実行することによって L^T が設計できる．
- (A^T, C^T) に対して最適レギュレータの設計法を適用することによっても L^T が設計できる．このようにして設計されたオブザーバは，定常カルマンフィルタとよばれるものと一致する．

[実験 5] $A + LC$ の固有値により倒立振り系の挙動がどのように変化するか考察せよ．

注：simulinkfiles にある cartpend_obs_simulator.slx の Observer ブロックをダブルクリックし，中にあるブロック同士を正しく接続することで式 (14) のオブザーバを完成させること．

注：線を分岐させたい場合は，分岐させたい線の上で右クリックしながらカーソルを動かすことで分岐させることができる．その他にも，ブロックが選択された状態で Ctrl+R によりそのブロックを回転させたり，Space でブロックの内部全体をディスプレイに表示させることもできる．

[MATLAB Code] cartpend_obs_PAOR.m

[実験 6] 設計した F と L を実機に適用して挙動を確認せよ．また，シミュレーションとの違いを考察せよ．

参考文献

- [1] 片山：新版 フィードバック制御の基礎，朝倉書店 (2002)
- [2] 吉川，井村：現代制御論，昭晃堂 (1994)
- [3] 美多，原，近藤：基礎ディジタル制御，コロナ社 (1987)