

高斯積分程式

01057033 洪銘均

Monday 28th October, 2024

Contents

1	檔案與功能	2
1.1	C++ 標頭檔案	2
1.2	C++ 實作檔案	2
2	函式功能描述	2
2.1	func.cpp	2
2.2	tabulation.cpp	2
2.3	main.cpp	3
3	運行結果	3
3.1	積分正確答案與函數圖形	3
3.2	P-Refinement	4
3.3	H-Refinement	5
3.4	Refinement	5
3.5	Visualize	6
4	心得	6
5	參考資料	6

1 檔案與功能

以下是每個原始碼檔案的簡要描述：

1.1 C++ 標頭檔案

- `func.h`：定義函數 $f(x)$ ，並新增以下常數：
 - `PI`：定義 `PI` 常數，使用 `cmath.h` 的 `acos()`，傳入參數-1。
 - `FUNCSTR`：定義函數 $f(x)$ 的字串表示，用於 `GnuPlot` 繪圖。
- `tabulation.h`：定義計算高斯積分的權重和採樣點

1.2 C++ 實作檔案

- `func.cpp`：實作函數 $f(x)$
- `tabulation.cpp`：實作高斯積分的權重和採樣點。
- `main.cpp`：主程式，呼叫 `compute_weights` 計算權重及採樣點，並計算積分值。

2 函式功能描述

以下是主要函式的功能說明：

2.1 `func.cpp`

- `double F(double, double)`: 計算函數 $F(x, y)$ 的值。

2.2 `tabulation.cpp`

使用 `Pomax` 所提供的方法計算 [1]

1. 取得 Legendre Polynomial 的值。
$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n}x * P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}P_{n-2}(x) \quad (n \geq 2)$$
2. 使用牛頓法計算根。
$$x_0 = \cos(\pi * (n - i - 0.25)/(n + 0.5))$$
$$x_{j+1} = x_j - P_n(x_j)/P'_n(x_j)$$
3. 計算權重。
$$w_i = 2/((1 - x_i^2) * (P'_n(x_i))^2)$$

- `double legendre(int, double)`: 計算勒讓德多項式的值。
- `double legendre_derivative(int, double)`: 計算勒讓德多項式的導數值。
- `std::vector<double> legendre_roots(int, int, double)`: 計算勒讓德多項式的根。
- `std::vector<double> compute_weights(int, const std::vector<double>)`: 計算高斯積分的權重。

2.3 main.cpp

- `main()`: 主程式，呼叫 `compute_weights` 計算權重及採樣點，並計算積分值，最後使用 `gnuplot` 繪圖。
- `gauss_quadrature_2D(int, double (*)(double, double), double, double, double, double)`: 計算二維高斯積分。

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n w_i w_j f(x_i, y_j) * \frac{b-a}{2} * \frac{d-c}{2}$$
- `gauss_quadrature_2D_grid(int, double (*)(double, double), double, double, double, double)`: 計算二維高斯積分，並使用網格量分段積分的方式。

$$\begin{aligned}
 g_x &= \frac{|a-b|}{G} & g_y &= \frac{|c-d|}{G} \\
 \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy &\approx \sum_{i=0}^{\frac{b-a}{g_x}-1} \sum_{j=0}^{\frac{d-c}{g_y}-1} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n w_k w_l f \left(x_k \cdot \frac{(a+g_x(i+1))-(a+g_x i)}{2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(a+g_x(i+1))+(a+g_x i)}{2}, y_l \cdot \frac{(c+g_y(j+1))-(c+g_y j)}{2} + \frac{(c+g_y(j+1))+(c+g_y j)}{2} \right) \\
 &\quad \cdot \frac{(a+g_x(i+1))-(a+g_x i)}{2} \cdot \frac{(c+g_y(j+1))-(c+g_y j)}{2} \\
 &= \sum_{i=0}^{\frac{b-a}{g_x}-1} \sum_{j=0}^{\frac{d-c}{g_y}-1} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n w_k w_l f \left(x_k \cdot \frac{g_x}{2} + (a+g_x i + \frac{g_x}{2}), y_l \cdot \frac{g_y}{2} + (c+g_y j + \frac{g_y}{2}) \right) \cdot \frac{g_x}{2} \cdot \frac{g_y}{2}
 \end{aligned}$$

3 運行結果

3.1 積分正確答案與函數圖形

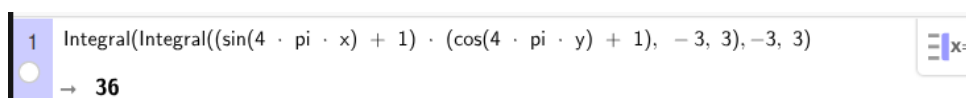
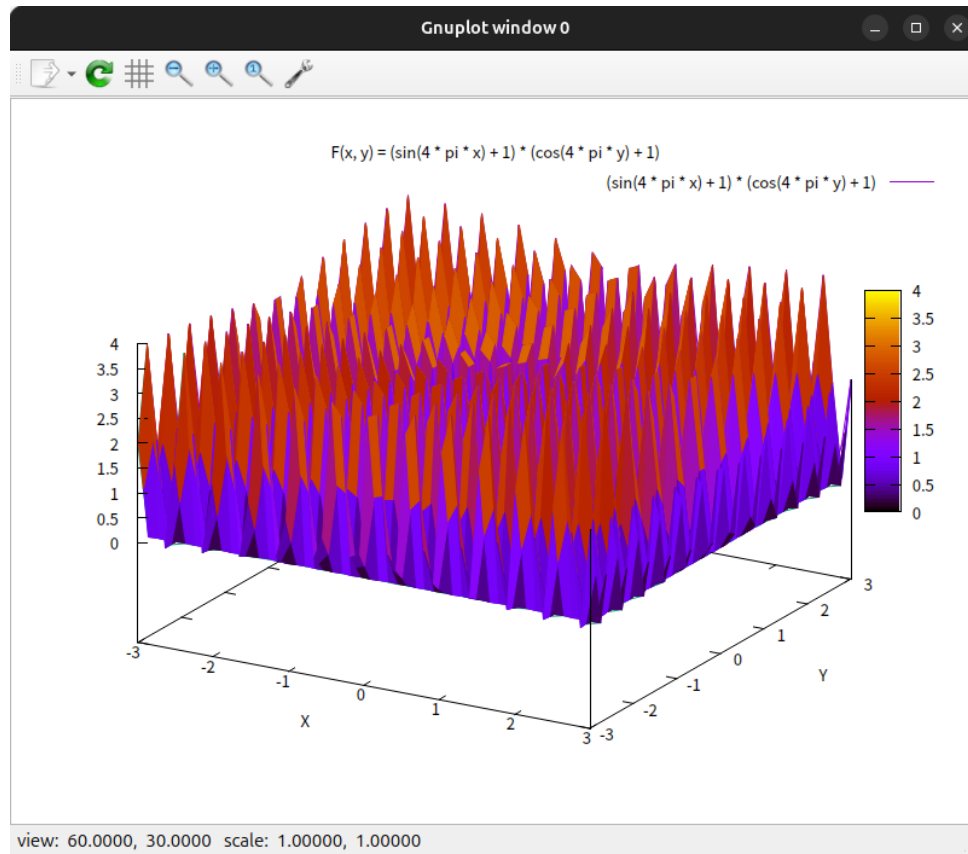


Figure 1: 積分正確答案-使用 Geogebra 計算

Figure 2: $f(x, y) = (\sin(4 * \pi * x) + 1) * (\cos(4 * \pi * y) + 1)$

3.2 P-Refinement

N 為 Legendre 多項式次數， $Result$ 為積分值， $Error$ 為誤差。

N	Result	Error	N	Result	Error
2	9.1188491146e-01	9.7466986357e+01%	18	1.8413133260e+01	4.8852407611e+01
3	3.9999637870e+01	1.1110105195e+01%	19	4.6208395774e+01	2.8356654927e+01
4	6.4994893227e+01	8.0541370074e+01%	20	3.1395581187e+01	1.2790052258e+01
5	4.0440463347e+01	1.2334620409e+01%	21	3.7696229819e+01	4.7117494972e+00
6	2.8290249855e+01	2.1415972625e+01%	22	3.5473701296e+01	1.4619408447e+00
7	1.9756218686e+01	4.5121614760e+01%	23	3.6140478205e+01	3.9021723688e-01
8	5.4755662235e+01	5.2099061764e+01%	24	3.5967235045e+01	9.1013762715e-02
9	5.6083021904e+01	5.5786171957e+01%	25	3.6006759412e+01	1.8776144287e-02
10	4.6797642332e+01	2.9993450921e+01%	26	3.5998754483e+01	3.4597698470e-03
11	3.4682639395e+01	3.6593350129e+00%	27	3.6000206651e+01	5.7403063130e-04
12	2.4753251334e+01	3.1240968516e+01%	28	3.5999968916e+01	8.6343174408e-05
13	3.5058279612e+01	2.6158899661e+00%	29	3.6000004264e+01	1.1843070978e-05
14	5.0119759982e+01	3.9221555506e+01%	30	3.5999999464e+01	1.4888544521e-06
15	3.1362156500e+01	1.2882898610e+01%	31	3.6000000062e+01	1.7231989662e-07
16	2.2474694991e+01	3.7570291692e+01%	32	3.5999999993e+01	1.8434715483e-08
17	5.7341100010e+01	5.9280833361e+01%	33	3.6000000001e+01	1.8293712224e-09

3.3 H-Refinement

$G * G$ 為 Grid 數量， $Result$ 為積分值， $Error$ 為誤差， $N = 8$ 。

G	Result	Error	G	Result	Error
1	5.4755662235e+01	5.2099061764e+01%	17	3.6000000000e+01	1.9737298216e-14%
2	1.0081204098e+01	7.1996655284e+01%	18	3.6000000000e+01	3.9474596431e-14%
3	3.4499874630e+01	4.1670149171e+00%	19	3.6000000000e+01	5.9211894647e-14%
4	3.6043462043e+01	1.2072789761e-01%	20	3.6000000000e+01	0.0000000000e+00%
5	3.6000000000e+01	0.0000000000e+00%	21	3.6000000000e+01	1.9737298216e-14%
6	3.5999864294e+01	3.7696000360e-04%	22	3.6000000000e+01	1.3816108751e-13%
7	3.6000000000e+01	1.9737298216e-14%	23	3.6000000000e+01	7.8949192862e-14%
8	3.6000000000e+01	7.8949192862e-14%	24	3.6000000000e+01	1.3816108751e-13%
9	3.6000000000e+01	3.9474596431e-14%	25	3.6000000000e+01	5.9211894647e-14%
10	3.6000000000e+01	3.9474596431e-14%	26	3.6000000000e+01	9.8686491078e-14%
11	3.6000000000e+01	3.9474596431e-14%	27	3.6000000000e+01	7.8949192862e-14%
12	3.6000000003e+01	8.7320965273e-09%	28	3.6000000000e+01	1.9737298216e-14%
13	3.6000000000e+01	1.9737298216e-14%	29	3.6000000000e+01	3.9474596431e-14%
14	3.6000000000e+01	1.9737298216e-14%	30	3.6000000000e+01	1.9737298216e-14%
15	3.6000000000e+01	1.1842378929e-13%	31	3.6000000000e+01	9.8686491078e-14%
16	3.6000000000e+01	2.7632217502e-13%	32	3.6000000000e+01	3.5527136788e-13%

3.4 Refinement

橫軸為網格數量，縱軸為 N ，表格內容為誤差值。

	3	4	5	6	7	8	9	10
2	56.36%	66.61%	0.00%	88.42%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
3	8.48%	73.65%	0.00%	53.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
4	33.81%	74.10%	0.00%	12.57%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
5	79.87%	30.40%	0.00%	1.67%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
6	50.84%	7.10%	0.00%	0.14%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
7	17.91%	1.09%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
8	4.17%	0.12%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
9	0.70%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
10	0.09%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
11	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

3.5 Visualize

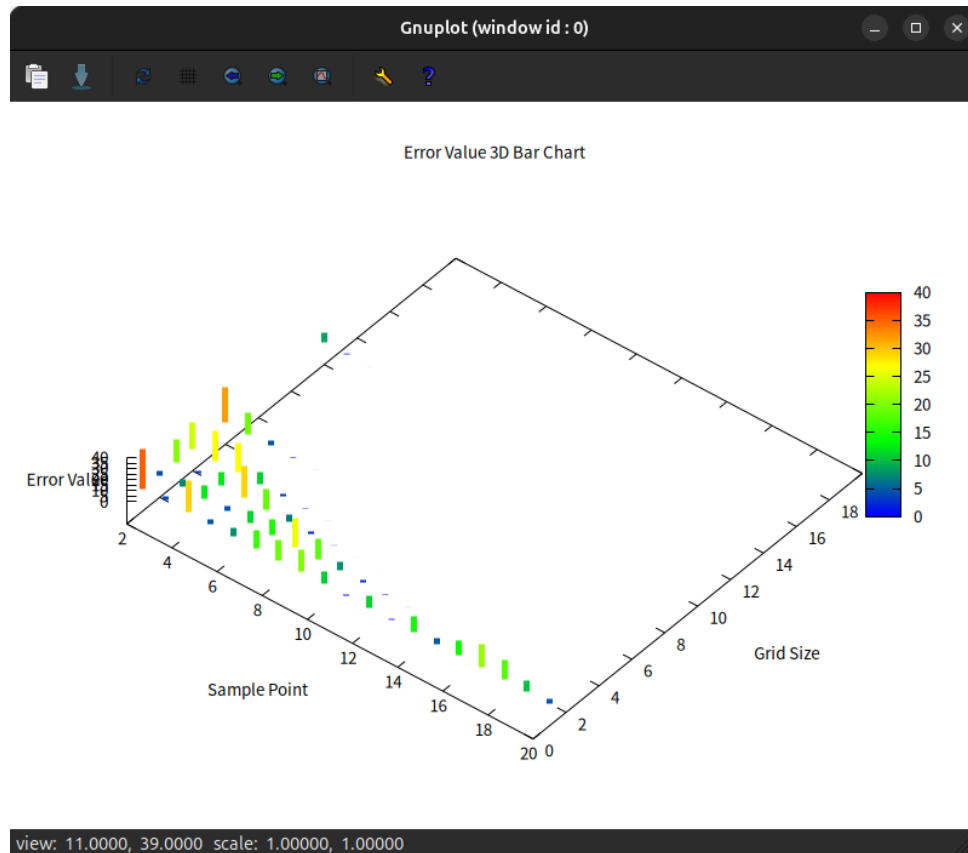


Figure 3: Visualize

4 心得

這次作業實做了高斯積分，並透過網格量分段積分的方式 (H-Refinement) 和多項式次數的增加 (P-Refinement) 來進行誤差分析，最後透過 Refinement 來找比較哪個方法的誤差較小。

在實做過程中，原本是打算使用建表的方式來計算高斯積分的權重和採樣點，但在上網尋找資源時看到有人提供計算權重和採樣點的 psuedo code，因此改用這個方法來計算，得到相比建表的方法更精確且彈性的結果。

在結果視覺化中，原本打算使用 OpenGL，但後來想說嘗試看看使用 gnuplot，因此最後使用 gnuplot 來繪製函數圖形以及誤差。

5 參考資料

References

- [1] Pomax, "Gaussian Quadrature Weights and Abscissae", <https://pomax.github.io/bezierinfo/legendre-gauss.html>