BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÁO CÁO TỔNG KẾT

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CẤP CƠ SỞ

HỌC KHÁI NIỆM ĐỐI VỚI CÁC CƠ SỞ TRI THỨC TRONG LOGIC MÔ TẢ DỰA VÀO MÔ PHỎNG HAI CHIỀU

Mã số: DHH2013-01-41

Chủ nhiệm đề tài: ThS. TRẦN THANH LƯƠNG

Thừa Thiên Huế, 11/2014

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÁO CÁO TỔNG KẾT

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CẤP CƠ SỞ

HỌC KHÁI NIỆM ĐỐI VỚI CÁC CƠ SỞ TRI THỨC TRONG LOGIC MÔ TẢ DỰA VÀO MÔ PHỎNG HAI CHIỀU

Mã số: DHH2013-01-41

Xác nhận của cơ quan chủ trì đề tài **Chủ nhiệm đề tài**

ThS. TRẦN THANH LƯƠNG

Thừa Thiên Huế, 11/2014

DANH SÁCH THÀNH VIÊN THAM GIA NGHIÊN CỨU:

• **TS. Hoàng Thị Lan Giao**,
Khoa Công nghệ Thông tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế
77 Nguyễn Huệ, Thành phố Huế, Tỉnh Thừa Thiên Huế, Việt Nam

ĐƠN VỊ PHỐI HỢP NGHIÊN CỨU:

• **Viện Tin học**,
Khoa Toán - Tin học và Cơ học, Trường Đại học Tổng hợp Vác-xa-va, Ba Lan
Banacha 2, 02-097 Warsaw, Poland

MỤC LỤC

DANH MỤC HÌNH VẼ

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung:

- Tên đề tài: **HỌC KHÁI NIỆM ĐỐI VỚI CÁC CƠ SỞ TRI THỨC TRONG LOGIC MÔ TẢ DỰA VÀO MÔ PHỎNG HAI CHIỀU**
- Mã số: DHH-2013-01-41
- Chủ nhiệm đề tài: ThS. Trần Thanh Lương
  Điện thoại: `091 4145414` E-mail: `ttluong@hueuni.edu.vn`
- Cơ quan chủ trì đề tài: Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế
- Cơ quan và cá nhân phối hợp thực hiện:

  - TS. Hoàng Thị Lan Giao,
  Khoa Công nghệ Thông tin Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế
  77 Nguyễn Huệ, Thành phố Huế, Tỉnh Thừa Thiên Huế, Việt Nam

  - Viện Tin học,
  Khoa Toán, Tin học và Cơ học, Trường Đại học Tổng hợp Vác-xa-va, Ba Lan
  Banacha 2, 02-097 Warsaw, Poland
- Thời gian thực hiện: Từ tháng 01 năm 2013 đến tháng 12 năm 2013

2. Mục tiêu

Mở rộng lý thuyết mô phỏng hai chiều và phương pháp học khái niệm cho cơ sở tri thức trong logic mô tả với một số điều kiện cho trước. Đề xuất thuật toán học khái niệm dựa trên mô phỏng hai chiều để giải quyết bài toán phân lớp các đối tượng trong logic mô tả.

3. Tính mới và sáng tạo

Xây dựng mô phỏng hai chiều để mô hình hóa tính không phân biệt của các đối tượng được trên một lớp lớn các logic mô tả. Từ đó đề xuất thuật toán phân hoạch miền và học khái niệm cho cơ sở tri thức trong logic mô tả sử dụng mô phỏng hai chiều.

4. Kết quả nghiên cứu

- Xây dựng ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ dựa trên logic mô tả $\mathcal{ALC}_{reg}$ với tập các đặc trưng logic mô tả mở rộng gồm $\mathcal{I}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{U}$, Self. Ngoài ra ngôn ngữ được xây dựng còn cho phép sử dụng các thuộc tính (mỗi thuộc tính có thể là rời rạc hoặc số) như là các phần tử cơ bản của ngôn ngữ. Cách tiếp cận này rất phù hợp đối với các hệ thống thông tin trong thực tế.

- Xây dựng mô phỏng hai chiều trên lớp các logic mở rộng đang nghiên cứu. Các định lý, bổ đề, hệ quả, mệnh đề liên quan đến mô phỏng hai chiều và tính bất biến đối với mô phỏng hai chiều cũng được phát triển và chứng minh trên lớp các logic mở rộng này.
- Dựa vào mô phỏng hai chiều, xây dựng thuật toán để phân hoạch miền của mô hình của cơ sở tri thức và thuật toán BBCL2 để học khái niệm cho cơ sở tri thức trong logic mô tả.

5. Sản phẩm

- Hướng dẫn 01 luận văn Thạc sĩ Khoa học chuyên ngành Khoa học Máy tính (Người hướng dẫn: TS. Hoàng Thị Lan Giao, thành viên đề tài).
- Hướng dẫn 02 khóa luận Tốt nghiệp Đại học ngành Tin học (Người hướng dẫn: ThS. Trần Thanh Lương, chủ trì đề tài).
- Công bố 04 bài báo trên các tạp chí/hội thảo khoa học trong nước và quốc tế.
- Báo cáo đề tài.

6. Hiệu quả, phương thức chuyển giao kết quả nghiên cứu và khả năng áp dụng

- Phương pháp học khái niệm cho cơ sở tri thức trong logic mô tả sử dụng mô phỏng hai chiều có thể áp dụng để tìm kiếm, xây dựng các định nghĩa khái của các niệm phù hợp cho hệ thống ngữ nghĩa nói chung và Web ngữ nghĩa nói riêng.
- Báo cáo làm tài liệu tham khảo cho sinh viên đại học, học viên cao học và những người nghiên cứu trong chuyên ngành Khoa học Máy tính nói chung cũng như logic mô tả và học máy nói riêng.
- Địa chỉ ứng dụng: Khoa Công nghệ Thông tin, Khoa Tin học của các trường Đại học trong cả nước.

Ngày 25 tháng 11 năm 2014

Cơ quan chủ trì **Chủ nhiệm đề tài**

ThS. TRẦN THANH LƯƠNG

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General information

- Project title: **CONCEPT LEARNING FOR KNOWLEDGE BASES IN DESCRIPTION LOGIC USING BISIMULATION**
- Code number: DHH-2013-01-41
- Coordinator: Msc. Tran Thanh Luong
- Implementing institution: College of Sciences, Hue University
- Cooperating institution(s):

  - Dr. Hoang Thi Lan Giao,
  Department of Information Technology, College of Sciences, Hue University
  77 Nguyen Hue, Hue City, Thua Thien Hue Province, Vietnam

  - Institution of Informatics,
  Faculty of Mathematics, Informatics and Mechanics, Warsaw University, Poland
  Banacha 2, 02-097 Warsaw, Poland
- Duration: from January 2014 to December 2015

2. Objective(s)

- Extend the theory of bisimulation and method of concept learning for knowledge bases in description logics (DLs) using given conditions.
- Propose a bisimulation-based concept learning algorithm for classifying objects in DLs.

3. Creativeness and innovativeness

We built bisimulation to model indiscernibility of objects in a large class of DLs. We also proposed algorithms for partitioning and leaning concepts for knowledge bases in DLs using bisimulation.

4. Research results

A report consists of information about:

- Consider the language $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$, where $\mathcal{L}$ stands for $\mathcal{ALC}_{reg}$, with the set of DL-features, including $\mathcal{I}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{U}$, Self. In addition, this language allows to use attributes as basic elements (each attribute may be discrete or numeric). This approach is suitable for practical information systems based on DLs.

- Study bisimulation for the considered class of DLs. Theorems, lemmas, corollaries, propositions related to bisimulations and invariant results for bisimulation are developed and proved for the considered class of DLs.

- Develop bisimulation-based algorithms to partition the domain of model of knowledge bases and learn concepts for knowledge bases in DLs (Algorithm BBCL2).

5. Products

- 01 Master thesis, major: Computer Science
  (Supervisor: Dr. Hoang Thi Lan Giao, a co-applicant)

- 02 Bachelor theses, major: Informatics
  (Supervisor: Msc. Tran Thanh Luong, the coordinator)

- 04 papers published national/international journals/conferences

- A report of project.

6. Effects, transfer alternatives of research results and applicability

Bisimulation-based concept learning method for knowledge bases in DLs can be applied to find and build definitions of suitable concepts for ontologies and Semantic Webs.

This project is a material for students and researchers in the computer science major in general as well as DLs and machine learning in particular.

Application address: Department of Information Technology, Department of Informatics and Department of Computer Science in Universities of Vietnam.

MỞ ĐẦU

Theo khuyến cáo của tổ chức tiêu chuẩn quốc tế W3C (*World Wide Web Consortium*), ngôn ngữ OWL (*Web Ontology Language*) là ngôn ngữ thích hợp nhất cho việc mô hình hóa các ontology. Về cơ bản, OWL là một ngôn ngữ dựa trên các logic mô tả [27, 29, 30]. Phiên bản đầu tiên của OWL dựa trên logic mô tả $\mathcal{SHOIQ}$ [27, 30] được giới thiệu vào năm 2004, phiên bản thứ hai của OWL là OWL 2 dựa trên logic mô tả $\mathcal{SROIQ}$ [29] được giới thiệu năm 2009. Hiện nay, các bộ suy luận ontology thế hệ thứ ba là FaCT, FaCT++ [26], RACER [21], Pellet [67], KAON2 [48] và HermiT [28] đều hỗ trợ $\mathcal{SHOIQ}$ hoặc $\mathcal{SROIQ}$. Logic mô tả $\mathcal{SHOIQ}$ và $\mathcal{SROIQ}$ có khả năng biểu diễn rất tốt nhưng lại có độ phức tạp tính toán đối với các thuật toán suy luận rất cao (tương ứng là NExpTime-đầy đủ và NExpTime-khó) và độ phức tạp dữ liệu cũng cao (NP-khó) đối với những bài toán suy luận cơ bản. Do đó W3C cũng khuyến khích sử dụng OWL 2 EL, OWL 2 QL và OWL 2 RL là những ngôn ngữ con của OWL 2 Full với độ phức tạp dữ liệu đa thức tương ứng với miền quan tâm mô để hình hóa các hệ thống ngữ nghĩa.

Logic mô tả (*Description Logics*) là một họ các ngôn ngữ hình thức rất thích hợp cho việc biểu diễn và suy luận tri thức trong một miền quan tâm cụ thể. Nó có tầm quan trọng đặc biệt trong việc cung cấp mô hình lý thuyết cho các hệ thống ngữ nghĩa và ontology. Trong logic mô tả, miền quan tâm được mô tả thông qua các thuật ngữ về cá thể, khái niệm và vai trò. Một cá thể đại diện cho một đối tượng, một khái niệm đại diện cho một tập các đối tượng và một vai trò đại diện cho một quan hệ hai ngôi giữa các đối tượng. Các khái niệm phức được xây dựng từ các tên khái niệm, tên vai trò và tên cá thể bằng cách kết hợp với các tạo tử.

Đặc tả các khái niệm phù hợp cho các hệ thống ngữ nghĩa là một trong những vấn đề rất được quan tâm. Do vậy, vấn đề đặt ra là cần tìm được các khái niệm quan trọng và xây dựng được định nghĩa của các khái niệm đó. Học khái niệm trong logic mô tả nhằm mục đích kiểm tra, suy luận và tìm ra được các khái niệm này phục vụ cho các ứng dụng cụ thể.

Học khái niệm trong logic mô tả tương tự như việc phân lớp nhị phân trong học máy truyền thống. Tuy nhiên, việc học khái niệm trong ngữ cảnh logic mô tả khác với học máy truyền thống ở chỗ, các đối tượng không chỉ được đặc tả bằng các thuộc tính mà còn được đặc tả bằng các mối quan hệ giữa các đối tượng. Các mối quan hệ này là một trong những yếu tố làm giàu thêm ngữ nghĩa của hệ thống huấn luyện. Do đó các phương pháp học khái niệm trong logic mô tả cần phải tận dụng được chúng như là một lợi thế.

Vấn đề học khái niệm trong logic mô tả được đặt ra theo ba ngữ cảnh chính như sau:

Ngữ cảnh 1: Cho cơ sở tri thức $\mathcal{KB}$ trong logic mô tả L và các tập các cá thể E^+, E^-. Học khái niệm C trong L sao cho:

1. $\mathcal{KB} \models C(a)$ với mọi $a \in E^+$, và
2. $\mathcal{KB} \models \neg C(a)$ với mọi $a \in E^-$,

trong đó, tập E^+ chứa các mẫu dương và E^- chứa các mẫu âm của C.

Ngữ cảnh 2: Ngữ cảnh này khác với ngữ cảnh đã đề cập ở trên là điều kiện thứ hai được thay bằng một điều kiện yếu hơn $\mathcal{KB} \not\models C(a)$ với mọi $a \in E^-$.

Ngữ cảnh 3: Cho một diễn dịch $\mathcal{I}$ và các tập các cá thể E^+, E^-. Học khái niệm C trong logic mô tả L sao cho:

1. $\mathcal{I} \models C(a)$ với mọi $a \in E^+$, và
2. $\mathcal{I} \models \neg C(a)$ với mọi $a \in E^-$.

Chú ý rằng $\mathcal{I} \not\models C(a)$ tương đồng với $\mathcal{I} \models \neg C(a)$.

Học khái niệm trong logic mô tả đã được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu [61, 11, 38, 4, 35, 17, 15, 40, 16, 41, 55, 68, 20]. Cùng với học khái niệm trong logic mô tả, các vấn đề liên quan đến học máy trong logic mô tả cũng được nhiều công trình đề cập đến [1, 36, 62, 37, 12].

Quinlan [61] nghiên cứu việc học các định nghĩa của mệnh đề Horn từ các dữ liệu được biểu diễn thông qua các quan hệ và đề xuất thuật toán học FOIL. Cohen và Hirsh [11] nghiên cứu lý thuyết về khả năng học (*Probably Approximately Correct - PAC*) trong logic mô tả và đề xuất thuật toán học khái niệm LCSLearn dựa trên các "bao hàm chung nhỏ nhất" (*least common subsumers*). Trong [38] Lambrix và Larocchia đã đề xuất một thuật toán học khái niệm đơn giản dựa trên việc chuẩn hóa khái niệm và lựa chọn khái niệm thông qua các thể hiện của dạng chuẩn hóa.

Badea và Nienhuys-Cheng [4], Fanizzi cùng cộng sự [17, 15], Iannone cùng cộng sự [35], Lehmann và Hitzler [40, 41] đã nghiên cứu học khái niệm trong logic mô tả bằng cách sử dụng các toán tử làm mịn (*refinement operators*) như trong lập trình logic đệ quy (*Inductive Logic Programming - ILP*). Ngoài việc sử dụng các toán tử làm mịn, các hàm tính điểm và chiến lược tìm kiếm cũng đóng vai trò quan trọng đối với các thuật toán đã được đề xuất trong các công trình này.

Iannone cùng cộng sự [35] đã nghiên cứu việc mô tả các khái niệm đệ quy theo phương pháp bán tự động và xây dựng các thuật toán suy luận trong logic mô tả $\mathcal{ALC}$. Fanizzi và các cộng sự [16] đã đề xuất cây quyết định thuật ngữ như một cấu trúc thay thế cho việc học khái niệm trong logic mô tả và một phương pháp dựa trên thuật toán đệ quy của cây trên-xuống chuẩn.

Nguyen và Szałas [55] đã áp dụng mô phỏng hai chiều (*bisimulation*) trong logic mô tả để mô hình hóa tính không phân biệt được của các đối tượng. Đây là công trình tiên phong trong việc sử dụng mô phỏng hai chiều cho việc học khái niệm trong logic mô tả. Tran cùng các đồng nghiệp [68], Ha cùng các đồng nghiệp [20] đã mở rộng [55] và xem xét bài toán học khái niệm trên một lớp logic mô tả lớn hơn.

Mô phỏng hai chiều được J. van Benthem giới thiệu lần đầu dưới tên gọi *p-quan hệ* (*p-relation*) và *quan hệ zig-zag* (*zig-zag relation*) [71, 6, 7]. Nó được phát triển trong logic hình thái (*modal logic*) [71, 6, 72] và trong các hệ thống chuyển trạng thái (*state transition systems*) [56, 23]. Mô phỏng hai chiều phản ánh tính không phân biệt được giữa hai trạng thái. Logic mô tả là một biến thể gần gũi của logic hình thái. Do đó, mô phỏng hai chiều trong logic mô tả cũng đặc trưng cho tính không phân biệt giữa hai đối tượng [14]. Đây là một tính chất quan trọng trong phân lớp phục vụ cho bài toán học khái niệm trong logic mô tả.

Ngoại trừ các công trình [55, 68, 20] sử dụng mô phỏng hai chiều trong logic mô tả để hướng dẫn việc tìm kiếm khái niệm kết quả, tất cả các công trình nghiên cứu còn lại [61, 11, 38, 4, 35, 17, 15, 40, 16, 41, 55] đều sử dụng toán tử làm mịn như trong lập trình logic đệ quy và/hoặc các chiến lược tìm kiếm dựa vào các hàm tính điểm mà không sử dụng mô phỏng hai chiều. Các công trình này chủ yếu tập trung vào vấn đề học khái niệm trên các logic mô tả đơn giản như $\mathcal{ALER}$, $\mathcal{ALN}$, $\mathcal{ALC}$. Việc nghiên cứu học khái niệm trong các logic mô tả phức tạp hơn như $\mathcal{ALCN}$, $\mathcal{ALCQ}$, $\mathcal{ALCIQ}$, $\mathcal{SHIQ}$, $\mathcal{SHOIQ}$, $\mathcal{SROIQ}$ chưa được các công trình trên đề cập đến vì độ phức tạp về dữ liệu và tính toán của các logic mô tả này là rất lớn. Trong khi đó logic mô tả $\mathcal{SHOIQ}$ và $\mathcal{SROIQ}$ là các logic mô tả có vai trò đặc biệt quan trọng vì chúng là cơ sở tương ứng của ngôn ngữ OWL và OWL 2 - những ngôn ngữ được W3C khuyến nghị sử dụng để biểu diễn và suy luận tri thức cho Web ngữ nghĩa.

Chúng tôi tiến hành nghiên cứu bài toán học khái niệm cho các cơ sở tri thức trong logic mô tả theo ngữ cảnh (2), gọi tắt là *học khái niệm cho các cơ sở tri thức trong logic mô tả*. Từ các khảo sát như đã trình bày ở trên trên, mục tiêu chính của đề tài đặt ra là:

- Nghiên cứu cú pháp và ngữ nghĩa đối với một lớp lớn các logic mô tả, trong đó có những logic mô tả hữu ích như $\mathcal{SHOIQ}$, $\mathcal{SROIQ}$,... và xây dựng mô phỏng hai chiều cho lớp các logic mô tả đó.
- Xây dựng phương pháp làm mịn phân hoạch miền của các diễn dịch trong logic mô tả sử dụng mô phỏng hai chiều và các độ đo dựa trên entropy.
- Đề xuất các thuật toán học khái niệm dựa trên mô phỏng hai chiều cho các cơ sở tri thức trong logic mô tả với ngữ cảnh (2) sử dụng mô phỏng hai chiều.

Với mục tiêu đó, nội dung của đề tài được trình bày trong ba chương:

Chương 1 trình bày cú pháp và ngữ nghĩa logic mô tả, khả năng biểu diễn của logic mô tả. Xây dựng ngôn ngữ logic mô tả lấy các thuộc tính làm thành phần cơ bản của ngôn ngữ cũng như mở rộng tập các đặc trưng của logic mô tả so với các công trình đã có. Trên cơ sở đó, chương này đề cập đến cơ sở tri thức và những vấn đề cơ bản về suy luận trong logic mô tả.

Chương 2 trình bày mô phỏng hai chiều trên lớp các logic mô tả đã đề cập ở Chương 1. Dựa trên các kết quả của [13], chúng tôi phát biểu các định lý về sự tồn tại của mô phỏng hai chiều và chứng minh tính bất biến đối với mô phỏng hai chiều cho các khái niệm, bộ tiên đề thuật ngữ, bộ khẳng định và cơ sở tri thức đối với lớp các logic này. Đặc biệt tính bất biến của khái niệm là nền tảng cho phép mô hình hóa tính không phân biệt được của các đối tượng thông qua ngôn ngữ con. Đây là cơ sở cho việc sử dụng ngôn ngữ con trong quá trình xây dựng kỹ thuật phân lớp dữ liệu.

Chương 3 trình bày thuật toán phân hoạch miền của diễn dịch trong logic mô tả sử dụng mô phỏng hai chiều. Chúng tôi đã sử dụng các bộ chọn cơ bản kết hợp với độ đo gia lượng thông tin để phân chia các khối trong quá trình làm mịn các phân hoạch. Dựa trên thuật toán phân hoạch miền của diễn dịch, đề tài đã giới thiệu thuật toán học khái niệm BBCL2. Thuật toán này sử dụng các mô hình của cơ sở tri thức kết hợp với mô phỏng hai chiều trong mô hình đó (để mô hình hóa tính không phân biệt được) và cây quyết định (để phân lớp dữ liệu) cho việc tìm kiếm khái niệm cần học. Chúng tôi cũng chứng minh tính đúng đắn của thuật toán thông qua các mệnh đề liên quan.

Cuối cùng phần kết luận trình bày tóm tắt những đóng góp chính của đề tài, hướng phát triển và những vấn đề cần phải giải quyết trong tương lai.

Chương 1.

LOGIC MÔ TẢ VÀ CƠ SỞ TRI THỨC

1.1. Giới thiệu về logic mô tả

1.1.1. Tổng quan về logic mô tả

Các nghiên cứu về việc biểu diễn tri thức được đặt ra từ những năm 70 của thế kỷ XX. Những công trình nghiên cứu đầu tiên về lĩnh vực này dựa trên hướng tiếp cận phi logic. Hướng tiếp cận này sử dụng đồ thị làm nền tảng, trong đó tri thức được biểu diễn bằng những cấu trúc dữ liệu đặc biệt và việc suy luận được thực hiện thông qua các thủ tục thao tác trên những cấu trúc đó. Năm 1967, Quillian [59] đã sử dụng *mạng ngữ nghĩa* (*semantic networks*) để biểu diễn và suy luận tri thức thông qua các cấu trúc nhận thức dạng mạng lưới. Sau đó, năm 1974, Minsky giới thiệu *hệ thống khung* (*frame systems*) dựa trên các khái niệm về một “khung” như một giao thức và khả năng biểu diễn các mối quan hệ giữa các khung [46]. Hướng tiếp cận này đã không trang bị ngữ nghĩa dựa trên logic hình thức. Để khắc phục nhược điểm về ngữ nghĩa, người ta biểu diễn tri thức theo hướng tiếp cận dựa trên logic. Đối với hướng tiếp cận này ngôn ngữ biểu diễn thường là một biến thể của logic vị từ bậc nhất và việc tính toán, suy luận thường dựa vào các hệ quả logic.

Logic mô tả được thiết kế như là một sự mở rộng của mạng ngữ nghĩa và hệ thống khung với ngữ nghĩa dựa trên logic. Thuật ngữ “*logic mô tả*” được sử dụng rộng rãi từ những năm 80 của thế kỷ XX. Logic mô tả là một họ các ngôn ngữ hình thức rất thích hợp cho việc biểu diễn và suy luận tri thức trong một miền quan tâm cụ thể [2]. Ngày nay, cùng với sự phát triển của các hệ thống biểu diễn tri thức, logic mô tả đã trở thành một nền tảng quan trọng của Web ngữ nghĩa do nó được sử dụng để cung cấp mô hình lý thuyết trong việc thiết kế các ontology.

Năm 1985, hệ thống biểu diễn tri thức dựa trên logic mô tả đầu tiên KL-ONE [66, 8] ra đời đánh dấu một sự khởi đầu mạnh mẽ về nghiên cứu logic mô tả. Một số hệ thống biểu diễn tri thức dựa trên logic mô tả khác tiếp tục xuất hiện sau đó là LOOM (1987), BACK (1988), CLASSIC (1991). Các hệ thống này có bộ suy luận sử dụng các *thuật toán bao hàm cấu trúc*. Gần đây, các hệ thống biểu diễn tri thức sử dụng các ngôn ngữ logic mô tả có khả năng biểu diễn tốt hơn như $\mathcal{SHOIN}$, $\mathcal{SHOIQ}$, $\mathcal{SROIQ}$, ... và các bộ suy luận hiệu quả hơn như FaCT (1998), RACER (2001), CEL (2005) và

KAON 2 (2005) [63]. Các bộ suy luận này sử dụng các *thuật toán tableaux*.

Logic mô tả được xây dựng dựa vào ba thành phần cơ bản gồm tập các *cá thể* (có thể hiểu như là các đối tượng), tập các *khái niệm nguyên tố* (có thể hiểu như là các lớp, các vị từ một đối) và tập các *vai trò nguyên tố* (có thể hiểu như là các quan hệ hai ngôi, các vị từ hai đối). Các logic mô tả khác nhau được đặc trưng bởi tập các *tạo tử khái niệm* và *tạo tử vai trò* mà nó được phép sử dụng để xây dựng các *khái niệm phức*, *vai trò phức* từ các khái niệm nguyên tố (còn được gọi là *tên khái niệm*) và vai trò nguyên tố (còn được gọi là *tên vai trò*).

Ví dụ 1.1. Giả sử chúng ta có các cá thể, khái niệm nguyên tố và vai trò nguyên tố như sau:

$\mathsf{LAN}, \mathsf{HAI}, \mathsf{HUNG}$	là các cá thể,
$Human$	là khái niệm chỉ các đối tượng là người,
$Female$	là khái niệm chỉ các đối tượng là giống cái,
$Rich$	là khái niệm chỉ những đối tượng giàu có,
$hasChild$	là vai trò chỉ đối tượng này có con là đối tượng kia,
$hasDescendant$	là vai trò chỉ đối tượng này có con cháu là đối tượng kia,
$marriedTo$	là vai trò chỉ đối tượng này kết hôn với đối tượng kia.

Với những khái niệm nguyên tố, vai trò nguyên tố đã cho ở trên và các tạo tử *phủ định của khái niệm* ($\neg$), *giao của các khái niệm* ($\sqcap$), *hợp của các khái niệm* ($\sqcup$), *lượng từ hạn chế tồn tại* ($\exists$), *lượng từ hạn chế với mọi* ($\forall$), chúng ta có thể xây dựng các khái niệm phức như sau:

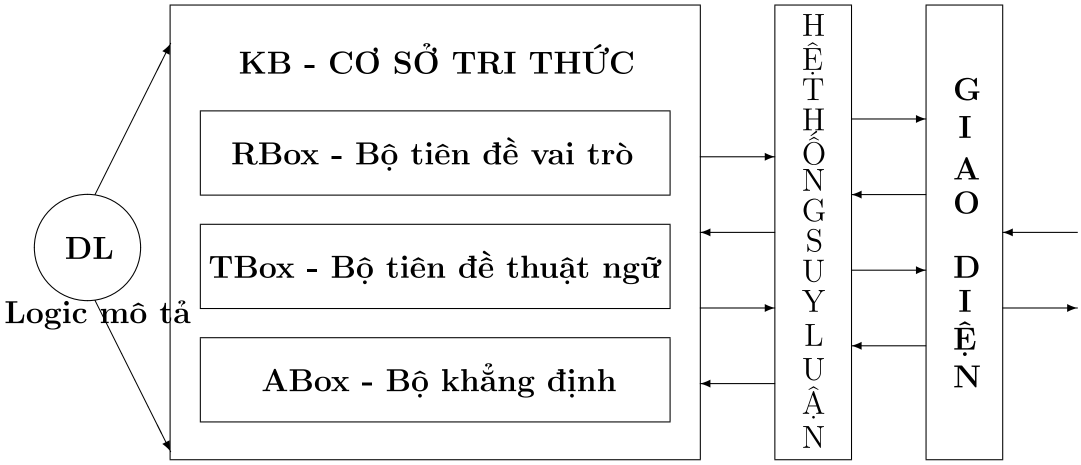
$Human \sqcap Female$	là khái niệm chỉ các đối tượng là người phụ nữ,
$\neg Female$	là khái niệm chỉ các đối tượng là giống đực,
$Human \sqcap \neg Female$	là khái niệm chỉ các đối tượng là người đàn ông,
$Human \sqcap \exists hasChild.Female$	là khái niệm chỉ các đối tượng là người có con gái,
$Human \sqcap \exists marriedTo.Human$	là khái niệm chỉ những người đã kết hôn,
$Human \sqcap Female \sqcap Rich$	là khái niệm chỉ những người phụ nữ giàu có,
$Human \sqcap \forall hasChild.Female$	là khái niệm chỉ những người chỉ có toàn con gái hoặc người không có con.

Ngoài ra chúng ta có thể dùng *khái niệm đỉnh* (ký hiệu $\top$), khái niệm đại diện cho tất cả các đối tượng, và *khái niệm đáy* (ký hiệu $\bot$), khái niệm không đại diện cho bất kỳ đối tượng nào, để xây dựng các khái niệm phức. Chẳng hạn như sau:

$Human \sqcap \exists hasChild.\top$	là khái niệm chỉ các đối tượng là người có con,
$Human \sqcap \forall hasChild.\bot$	là khái niệm chỉ những người không có con. ■

1.1.2. Biểu diễn tri thức trong logic mô tả

Từ các cá thể, các khái niệm và các vai trò, người ta có thể xây dựng một hệ thống để biểu diễn và suy luận tri thức dựa trên logic mô tả. Thông thường, một hệ thống biểu diễn và suy luận tri thức gồm có các thành phần sau [2]:



Hình 1.1: Kiến trúc của một hệ cơ sở tri thức trong logic mô tả

• **Bộ tiên đề vai trò (*Role Box - RBox*)**: Bộ tiên đề vai trò chứa các tiên đề về vai trò bao gồm các tiên đề bao hàm vai trò và các khẳng định vai trò. Thông qua bộ tiên đề vai trò, chúng ta có thể xây dựng các vai trò phức từ các vai trò nguyên tố và các tạo tử vai trò mà logic mô tả được phép sử dụng.

Ví dụ 1.2. Với các vai trò nguyên tố đã cho trong Ví dụ 1.1, chúng ta có thể xây dựng bộ tiên đề vai trò như sau:

$hasParent \equiv hasChild^-$,

$hasChild \sqsubseteq hasDescendant$,

$hasDescendant \circ hasDescendant \sqsubseteq hasDescendant$,

$\mathtt{Irr}(hasChild)$,

$\mathtt{Sym}(marriedTo)$.

Phát biểu đầu tiên của bộ tiên đề vai trò dùng để định nghĩa vai trò mới $hasParent$ là một vai trò nghịch đảo của vai trò $hasChild$. Tiên đề thứ hai là một tiên đề bao hàm vai trò dùng để chỉ nếu một đối tượng này là con của đối tượng kia thì nó cũng là con cháu của đối tượng kia. Phát biểu thứ ba là một tiên đề thể hiện rằng $hasDescendant$ là một vai trò bắc cầu (chúng ta cũng có thể thể hiện tiên đề này qua phát biểu khẳng định vai trò $\mathtt{Tra}(hasDescendant)$). Phát biểu thứ tư để khẳng định vai trò $hasChild$ là vai trò không phản xạ và phát biểu cuối cùng để khẳng định rằng $marriedTo$ là một vai trò đối xứng. ■

• **Bộ tiên đề thuật ngữ (*Terminology Box - TBox*)**: Bộ tiên đề thuật ngữ chứa các tiên đề về thuật ngữ, nó cho phép xây dựng các khái niệm phức từ những khái niệm nguyên tố và vai trò nguyên tố, đồng thời bộ tiên đề thuật ngữ cho biết mối quan hệ giữa các khái niệm thông qua các tiên đề bao hàm tổng quát. Ngoài ra, bộ tiên đề thuật ngữ còn chứa các tri thức tiềm ẩn ở dưới dạng thuật ngữ và xác định ý nghĩa của các thuật ngữ trong miền xem xét. Chúng ta xét ví dụ sau về mối quan hệ giữa các con người với nhau thông qua bộ tiên đề thuật ngữ.

Ví dụ 1.3. Với các khái niệm nguyên tố, vai trò nguyên tố đã cho trong Ví dụ 1.1, chúng ta có thể xây dựng bộ tiên đề thuật ngữ như sau:

$Human \equiv \top$,

$Parent \equiv Human \sqcap \exists hasChild.Human$,

$Male \equiv \neg Female$,

$Husband \equiv Male \sqcap \exists marriedTo.Female$,

$Husband \sqsubseteq \forall marriedTo.Female$,

$Male \sqcap Female \equiv \bot$.

Phát biểu đầu tiên của bộ tiên đề thuật ngữ dùng để nói lên rằng miền quan tâm chỉ gồm các đối tượng là con người. Ba phát biểu tiếp theo dùng để định nghĩa các khái niệm mới đó là $Parent$, $Male$ và $Husband$ tương ứng dùng để chỉ những đối tượng là bố mẹ, giống đực và chồng. Các phát biểu này được gọi là *định nghĩa khái niệm* (vế trái của dấu "$\equiv$" là một tên khái niệm). Phát biểu thứ năm yêu cầu mọi thể hiện của $Husband$ phải thỏa mãn khái niệm $\forall marriedTo.Female$, nghĩa là, mọi người đàn ông đã kết hôn (được gọi là chồng) thì phải kết hôn với một người phụ nữ. Phát biểu này được gọi là một *bao hàm khái niệm*. Phát biểu cuối cùng để biểu diễn hai khái niệm $Male$ và $Female$ không giao nhau. Phát biểu này được gọi là một *tương đương khái niệm* (vế trái của dấu "$\equiv$" là một biểu thức, không phải là một tên khái niệm). ■

• **Bộ khẳng định (*Assertion Box - ABox*)**: Bộ khẳng định dùng để chứa những tri thức đã biết thông qua các khẳng định về các cá thể bao gồm khẳng định khái niệm, khẳng định vai trò (vai trò dương tính và vai trò âm tính), khẳng định đẳng thức, khẳng định bất đẳng thức,... Chúng ta xét ví dụ sau đây với các khẳng định về thông tin của con người.

Ví dụ 1.4. Với các khái niệm nguyên tố, vai trò nguyên tố đã cho trong Ví dụ 1.1 và các khái niệm được định nghĩa thêm trong Ví dụ 1.3, chúng ta có thể cung cấp những khẳng định sau đây:

$Human(\mathsf{LAN})$,
$Male(\mathsf{HUNG})$,
$Husband(\mathsf{HAI})$,
$hasChild(\mathsf{LAN}, \mathsf{HUNG})$,
$(\neg Female \sqcap Rich)(\mathsf{HUNG})$.

Khẳng định thứ nhất cho biết cá thể LAN là một con người, khẳng định thứ hai cho biết cá thể HUNG là một đối tượng giống đực, khẳng định thứ ba cho biết cá thể HAI là một người chồng, khẳng định thứ tư cho biết cá thể LAN có con là cá thể HUNG và khẳng định cuối cùng cho biết cá thể HUNG là một người đàn ông giàu có. ■

Ngoài ra, một hệ thống biểu diễn tri thức còn có thêm các thành phần bổ trợ để thực hiện các chức năng mà hệ thống đó hướng tới. Thông thường, hệ thống biểu diễn tri thức còn có thêm những thành phần sau [2]:

• **Hệ thống suy luận (*Inference System - IS*)**: Hệ thống suy luận cho phép trích rút ra những tri thức tiềm ẩn từ những tri thức đã có được thể hiện trong RBox, TBox và ABox. Một trong những bài toán suy luận phổ biến trong logic mô tả là kiểm tra thể hiện của một khái niệm. Nghĩa là xác định xem một cá thể có phải là một thể hiện của một khái niệm hay không. Thông qua Ví dụ 1.3 và 1.4, chúng ta có thể suy luận ra rằng cá thể LAN là một thể hiện của khái niệm $Parent$. Ta cũng có thể suy luận cá thể HAI không phải là thể hiện của khái niệm $Female$. Lý do đưa ra khẳng định này là: HAI là thể hiện của $Husband$, mà $Husband$ là khái niệm được định nghĩa thông qua phát biểu $Husband \equiv Male \sqcap \exists marriedTo.Human$. Trong lúc đó, $Male \sqcap Female \equiv \bot$ chứa trong TBox. Một bài toán suy luận khác cũng phổ biến của logic mô tả là kiểm tra tính bao hàm của các khái niệm. Thông qua Ví dụ 1.3, chúng ta thấy rằng cả $Male$ và $Female$ đều được bao hàm trong $Human$.

Một điểm lưu ý là, chúng ta không xem xét một cơ sở tri thức theo *giả thiết thế giới đóng* (*Closed World Assumption - CWA*) mà xem xét nó theo *giả thiết thế giới mở* (*Open World Assumption - OWA*). Nghĩa là, những khẳng định xuất hiện trong ABox thì được cho là đúng. Ngược lại, những khẳng định không xuất hiện trong ABox và không thể suy luận được thông qua bộ suy luận thì không được kết luận là sai mà phải được xem như là chưa biết, ngoại trừ chúng ta suy luận ra được khẳng định đó là sai.

• **Giao diện người dùng (*User Interface - UI*)**: Giao diện người dùng được sử dụng để giao tiếp với người sử dụng. Thông qua giao diện này, người sử dụng có thể trích rút ra những thông tin từ cơ sở tri thức. Giao diện người dùng được thiết kế tùy thuộc vào từng ứng dụng cụ thể.

1.1.3. Khả năng biểu diễn của logic mô tả

Logic mô tả được sử dụng trong việc biểu diễn và suy luận tri thức. Do vậy, nhiều công trình tập trung nghiên cứu khả năng biểu diễn của logic mô tả. Khả năng biểu diễn của logic mô tả có quan hệ mật thiết với độ phức tạp của các bài toán suy luận. Theo đó, thông thường nếu logic mô tả càng diễn cảm (có khả năng biểu diễn tốt) thì có độ phức tạp trong suy luận càng cao. Khả năng biểu diễn của logic mô tả được thể hiện thông qua các tạo tử khái niệm và tạo tử vai trò mà nó được phép sử dụng để xây dựng các khái niệm phức và vai trò phức. Hiện nay, logic mô tả $\mathcal{ALC}$ được xem là logic mô tả cơ bản nhất. Nó cho phép các khái niệm phức được xây dựng thông qua các tạo tử phủ định của khái niệm ($\neg$), giao của các khái niệm ($\sqcap$), hợp của các khái niệm ($\sqcup$), lượng từ hạn chế tồn tại ($\exists$) và lượng từ hạn chế với mọi ($\forall$). Trong mục này chúng tôi điểm qua thêm một số nét cơ bản của các tạo tử khái niệm và tạo tử vai trò dùng để xây dựng các logic mô tả mở rộng thông qua logic mô tả cơ bản $\mathcal{ALC}$.

1.1.3.1. Hạn chế số lượng

Tạo tử hạn chế số lượng thực sự đóng một vai trò quan trọng đối với khả năng biểu diễn của logic mô tả. Nó cho phép xây dựng những khái niệm có các ràng buộc về bản số của các đối tượng trong khái niệm đó. Trong logic mô tả, người ta sử dụng hai loại hạn chế số lượng:

- *Hạn chế số lượng có định tính* (*qualified number restrictions*), ký hiệu là $\mathcal{Q}$, là hạn chế số lượng trên các vai trò có chỉ ra tính chất của các đối tượng cần hạn chế. Chẳng hạn, để xây dựng khái niệm đại diện cho "*đối tượng là người có ít nhất hai con gái*", chúng ta sử dụng biểu thức $Human \sqcap (\geq 2\, hasChild.Female)$. Ở đây, khái niệm $Female$ đặt sau vai trò $hasChild$ dùng để chỉ tính chất mà nó cần định tính thông qua vai trò. Tương tự như thế, chúng ta có thể xây dựng khái niệm $Human \sqcap (\leq 3\, hasChild.(\neg Female))$ để đại diện cho "*đối tượng là người có nhiều nhất ba con trai*"
- *Hạn chế số lượng không định tính* (*unqualified number restrictions*), ký hiệu là $\mathcal{N}$, là hạn chế số lượng trên các vai trò nhưng không chỉ ra tính chất của các đối tượng cần hạn chế. Đây là một dạng đặc biệt của hạn chế số lượng có định tính bằng cách thay khái niệm thể hiện tính chất cần định tính bằng khái niệm đỉnh. Chẳng hạn, để xây dựng khái niệm đại diện cho "*những đối tượng là người có nhiều nhất ba con*", chúng ta sử dụng biểu thức $Human \sqcap (\leq 3\, hasChild)$ (là cách viết ngắn gọn của $Human \sqcap (\leq 3\, hasChild.\top)$). Chúng ta thấy rằng sau

vai trò $hasChild$ không yêu cầu chỉ ra tính chất cần thỏa mãn (khái niệm $\top$ nói lên rằng tất cả các đối tượng đều phù hợp). Để xây dựng khái niệm đại diện "*những đối tượng là người có đúng hai con*", chúng ta có thể viết $Human \sqcap (\leq 2\, hasChild) \sqcap (\geq 2\, hasChild)$.

Chúng ta có thể nhận thấy rằng, khả năng biểu diễn của logic mô tả có sử dụng các tạo tử hạn chế số lượng không định tính và hạn chế số lượng có định tính phong phú hơn so với chỉ sử dụng lượng từ hạn chế tồn tại ($\exists$) và lượng từ hạn chế với mọi ($\forall$). Bằng cách dùng các tính chất về hạn chế số lượng, chúng ta có thể xây dựng khái niệm phức để biểu diễn "*những người có nhiều nhất ba con, trong đó có ít nhất hai người con gái và có ít nhất hai người con giàu có.*" như sau:

$Human \sqcap (\leq 3\, hasChild) \sqcap (\geq 2\, hasChild.Female) \sqcap (\geq 2\, hasChild.Rich)$

Khi một đối tượng là thể hiện của khái niệm trên, chúng ta có thể suy ra được rằng đối tượng này phải có ít nhất một người con gái và người con gái đó là người giàu có.

1.1.3.2. Tính chất hàm

Ràng buộc *tính chất hàm* (*functionality*), ký hiệu là $\mathcal{F}$, là một dạng đơn giản của ràng buộc hạn chế số lượng không định tính trong logic mô tả. Nó cho phép chỉ ra tính chất hàm cục bộ của các vai trò, nghĩa là các thể hiện của các khái niệm có quan hệ tối đa với một cá thể khác thông qua vai trò được chỉ định. Ví dụ, để quy định "*một đối tượng chỉ có thể được kết hôn với một đối tượng khác*", chúng ta có thể sử dụng ràng buộc $\top \sqsubseteq\, \leq 1\, marriedTo$.

1.1.3.3. Định danh

Tạo tử *định danh* (*nominal*), ký hiệu là $\mathcal{O}$, cho phép xây dựng khái niệm dạng $\{a\}$ từ một cá thể đơn lẻ a. Khái niệm này biểu diễn cho tập có thể hiện chỉ là một cá thể. Bằng cách sử dụng tạo tử định danh, chúng ta có thể xây dựng cấu trúc $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ để biểu diễn cho khái niệm gồm chính xác các thể hiện là những cá thể $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ví dụ, để biểu diễn "*các nước thành viên thường trực của Hội đồng Bảo an Liên hiệp quốc*", chúng ta sử dụng khái niệm $\{\mathsf{ANH}, \mathsf{MY}, \mathsf{NGA}, \mathsf{PHAP}, \mathsf{TRUNGQUOC}\}$. Logic mô tả với sự cho phép của tạo tử định danh sẽ làm cho các bài toán suy luận trở nên phức tạp hơn.

1.1.3.4. Nghịch đảo vai trò

Một logic mô tả với *vai trò nghịch đảo* (*inverse role*), ký hiệu là $\mathcal{I}$, cho phép người sử dụng định nghĩa các vai trò là nghịch đảo của nhau nhằm tăng sự ràng buộc đối với các đối tượng trong miền biểu diễn. Nghịch đảo của vai trò r được viết là r^-. Nghĩa là, nếu s là một vai trò nghịch đảo của r ($s \equiv r^-$) thì $r(a,b)$ thỏa mãn khi và chỉ khi $s(b,a)$ thỏa mãn. Chẳng hạn, chúng ta có thể định nghĩa vai trò $hasParent$ (*vai trò để chỉ đối tượng này có cha mẹ là đối tượng kia*) là vai trò nghịch đảo của vai trò $hasChild$ và ký hiệu là $hasParent \equiv hasChild^-$. Rõ ràng, nếu đối tượng a có con là đối tượng b, tức là $hasChild(a,b)$ thỏa mãn, thì lúc đó đối tượng b có cha/mẹ là đối tượng a, tức là $hasParent(b,a)$ thỏa mãn và ngược lại.

1.1.3.5. Vai trò bắc cầu

Tạo tử *vai trò bắc cầu* (*transitive role*), ký hiệu là $\mathcal{S}$, được đưa vào logic mô tả nhằm tăng khả năng biểu diễn của logic mô tả đó. Một vai trò r được gọi là bắc cầu nếu $r \circ r \sqsubseteq r$. Nghĩa là, khi r là một vai trò bắc cầu, lúc đó nếu $r(a,b)$ và $r(b,c)$ thỏa mãn thì $r(a,c)$ cũng thỏa mãn. Để thể hiện một vai trò r là bắc cầu trong một logic mô tả cụ thể, người ta ký hiệu là $\mathtt{Tra}(r)$. Thông qua vai trò bắc cầu, một số vai trò được thể hiện một cách tự nhiên theo bản chất của nó. Chẳng hạn, xét vai trò $hasDescendant$ (*vai trò để chỉ đối tượng này có con cháu là đối tượng kia*), giả sử rằng đối tượng a có con cháu là đối tượng b và đối tượng b có con cháu là đối tượng c. Một cách tự nhiên, chúng ta thấy đối tượng a có con cháu là đối tượng c. Nghĩa là, $hasDescendant \circ hasDescendant \sqsubseteq hasDescendant$. Như vậy, vai trò $hasDescendant$ có tính chất bắc cầu.

1.1.3.6. Phân cấp vai trò

Tạo tử *phân cấp vai trò* (*role hierarchive*), ký hiệu là $\mathcal{H}$, cho phép người sử dụng biểu diễn mối quan hệ giữa các vai trò theo phương cách cụ thể hóa hoặc theo phương cách tổng quát hóa. Vai trò r là cụ thể hóa của vai trò s (hay nói cách khác, vai trò s là tổng quát hóa của vai trò r) và được viết là $r \sqsubseteq s$. Khi đó nếu $r(a,b)$ thỏa mãn thì $s(a,b)$ cũng thỏa mãn. Xét hai vai trò $hasChild$ và $hasDescendant$. Chúng ta thấy nếu đối tượng a có con là đối tượng b thì đối tượng a cũng có con cháu là đối tượng b. Vì vậy, vai trò $hasChild$ được bao hàm trong vai trò $hasDescendant$ và được ký hiệu là $hasChild \sqsubseteq hasDescendant$.

1.1.3.7. Bao hàm vai trò phức

Tạo tử *bao hàm vai trò phức* (*complex role inclusion*), ký hiệu là $\mathcal{R}$, cho phép người sử dụng biểu diễn các tiên đề bao hàm dạng $r \circ s \sqsubseteq r$ (hoặc $r \circ s \sqsubseteq s$). Nghĩa là, nếu $r(a,b)$ và $s(b,c)$ thỏa mãn thì $r(a,c)$ (hoặc $s(a,c)$) cũng thỏa mãn. Ví dụ, với vai trò $hasChild$ và $hasDescendant$, giả sử đối tượng a có con là đối tượng b và đối tượng b có con cháu là đối tượng c, lúc đó đối tượng a cũng có con cháu là đối tượng c. Rõ ràng chúng ta có $hasChild \circ hasDescendant \sqsubseteq hasDescendant$.

1.2. Cú pháp và ngữ nghĩa của logic mô tả

1.2.1. Ngôn ngữ logic mô tả $\mathcal{ALC}$

Logic mô tả cơ bản $\mathcal{ALC}$ được Schmidt-Schaubß và Smolka giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1991 [65]. Tên $\mathcal{ALC}$ đại diện cho "**A**ttribute concept **L**anguage with **C**omplements". Logic mô tả $\mathcal{ALC}$ là một mở rộng của logic mô tả $\mathcal{AL}$ bằng cách cho phép sử dụng thêm tạo tử phủ định ($\neg$). Các khái niệm phức của $\mathcal{ALC}$ được xây dựng từ các khái niệm đơn giản hơn và các tên vai trò bằng cách kết hợp với các tạo tử mà nó được phép sử dụng. Trên cơ sở logic mô tả cơ bản $\mathcal{ALC}$, người ta mở rộng nó để có các logic mô tả khác có khả năng biểu diễn tốt hơn bằng cách thêm vào các tạo tử khái niệm và tạo tử vai trò. Các định nghĩa sau đây trình bày cú pháp và ngữ nghĩa của logic mô tả cơ bản $\mathcal{ALC}$ [39, 41].

Định nghĩa 1.1 (Cú pháp của $\mathcal{ALC}$)**.** Cho Σ_C là tập các *tên khái niệm* và Σ_R là tập các *tên vai trò* ($\Sigma_C \cap \Sigma_R = \emptyset$). Các phần tử của Σ_C được gọi là *khái niệm nguyên tố*. *Logic mô tả* $\mathcal{ALC}$ cho phép các khái niệm được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- nếu $A \in \Sigma_C$ thì A là một khái niệm của $\mathcal{ALC}$,
- nếu C, D là các khái niệm và $r \in \Sigma_R$ là một vai trò thì $\top$, $\bot$, $\neg C$, $C \sqcap D$, $C \sqcup D$, $\exists r.C$ và $\forall r.C$ cũng là các khái niệm của $\mathcal{ALC}$. ∎

Các ký hiệu và các tạo tử khái niệm trong Định nghĩa 1.1 có ý nghĩa như sau:

- $\top$ biểu diễn *khái niệm đỉnh*,
- $\bot$ biểu diễn *khái niệm đáy*,
- $\neg C$ biểu diễn *phủ định* của khái niệm C,
- $C \sqcap D$ biểu diễn *giao* của khái niệm C và D,
- $C \sqcup D$ biểu diễn *hợp* của khái niệm C và D,
- $\exists r.C$ biểu diễn *hạn chế tồn tại* của khái niệm C bởi vai trò r.
- $\forall r.C$ biểu diễn *hạn chế phổ quát* của khái niệm C bởi vai trò r.

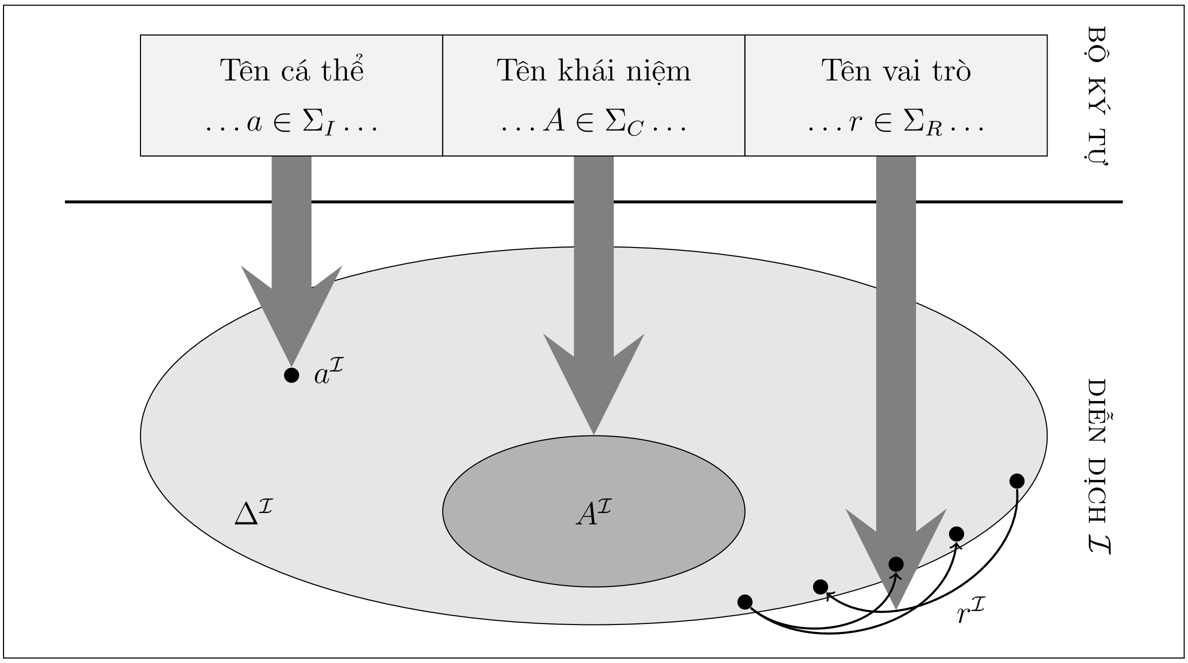
Cú pháp của logic mô tả $\mathcal{ALC}$ có thể mô tả một cách vắn tắt bằng các luật sau:

$$C, D \quad \longrightarrow \quad A \mid \top \mid \bot \mid \neg C \mid C \sqcap D \mid C \sqcup D \mid \exists r.C \mid \forall r.C$$

Định nghĩa 1.2 (Ngữ nghĩa của $\mathcal{ALC}$)**.** Một *diễn dịch* trong logic mô tả $\mathcal{ALC}$ là một bộ $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$, trong đó $\Delta^{\mathcal{I}}$ là một tập không rỗng được gọi là *miền* của $\mathcal{I}$ và $\cdot^{\mathcal{I}}$ là một ánh xạ, được gọi là *hàm diễn dịch* của $\mathcal{I}$, cho phép ánh xạ mỗi cá thể $a \in \Sigma_I$ thành một phần tử $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$, mỗi tên khái niệm $A \in \Sigma_C$ thành một tập $A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$ và mỗi tên vai trò $r \in \Sigma_R$ thành một quan hệ nhị phân $r^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$. Diễn dịch của các khái niệm phức được xác định như sau:

$$\begin{aligned}
\top^{\mathcal{I}} &= \Delta^{\mathcal{I}},\\
\bot^{\mathcal{I}} &= \emptyset,\\
(\neg C)^{\mathcal{I}} &= \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}},\\
(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} &= C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}},\\
(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} &= C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}},\\
(\exists r.C)^{\mathcal{I}} &= \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y \in \Delta^{\mathcal{I}}\ [r^{\mathcal{I}}(x,y) \wedge C^{\mathcal{I}}(y)]\},\\
(\forall r.C)^{\mathcal{I}} &= \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \forall y \in \Delta^{\mathcal{I}}\ [r^{\mathcal{I}}(x,y) \Rightarrow C^{\mathcal{I}}(y)]\}.
\end{aligned}$$ ■

Hình 1.2 là một minh họa ngắn gọn cho diễn dịch trong logic mô tả. Mỗi cá thể được diễn dịch thành một đối tượng, mỗi tên khái niệm được diễn dịch thành một tập các đối tượng và mỗi tên vai trò được diễn dịch thành một quan hệ nhị phân giữa các đối tượng [22].



Hình 1.2: Minh họa diễn dịch của logic mô tả

Ví dụ 1.5. Cho tập các cá thể, khái niệm và vai trò như trong Ví dụ 1.1. Xét diễn dịch $\mathcal{I}$ như sau:

$$\begin{aligned}
\mathsf{LAN}^{\mathcal{I}} &= \mathsf{LAN},\\
\mathsf{HAI}^{\mathcal{I}} &= \mathsf{HAI},\\
\mathsf{HUNG}^{\mathcal{I}} &= \mathsf{HUNG},\\
\Delta^{\mathcal{I}} &= \{\mathsf{LAN}, \mathsf{HAI}, \mathsf{HUNG}\},\\
Human^{\mathcal{I}} &= \{\mathsf{LAN}, \mathsf{HAI}, \mathsf{HUNG}\},\\
Female^{\mathcal{I}} &= \{\mathsf{LAN}\},\\
Rich^{\mathcal{I}} &= \{\mathsf{HUNG}\},\\
hasChild^{\mathcal{I}} &= \{\langle \mathsf{LAN}, \mathsf{HUNG}\rangle, \langle \mathsf{HAI}, \mathsf{HUNG}\rangle\},\\
marriedTo^{\mathcal{I}} &= \{\langle \mathsf{LAN}, \mathsf{HAI}\rangle, \langle \mathsf{HAI}, \mathsf{LAN}\rangle\},
\end{aligned}$$

Lúc đó ta có:

$$\begin{aligned}
(Human \sqcap Female)^{\mathcal{I}} &= \{\mathsf{LAN}\},\\
(\neg Female)^{\mathcal{I}} &= \{\mathsf{HAI}, \mathsf{HUNG}\},\\
(Human \sqcap \neg Female)^{\mathcal{I}} &= \{\mathsf{HAI}, \mathsf{HUNG}\},\\
(Human \sqcap \exists hasChild.Female)^{\mathcal{I}} &= \emptyset,\\
(Human \sqcap \exists marriedTo.Human)^{\mathcal{I}} &= \{\mathsf{LAN}, \mathsf{HAI}\}.
\end{aligned}$$

■

Logic động mệnh đề (*Propositional Dynamic Logics*) là một biến thể của logic hình thái được Fischer và Ladner giới thiệu vào năm 1979 [18]. Nó được thiết kế chuyên biệt cho việc biểu diễn và suy luận trong các chương trình. Trong [64], Schild đã chỉ ra rằng có sự tương ứng giữa các logic mô tả và một số logic động mệnh đề. Sự tương ứng dựa trên tính tương tự giữa các cấu trúc diễn dịch của hai logic. Theo đó, mỗi đối tượng trong logic mô tả tương ứng với một trạng thái trong logic động mệnh đề và các kết nối giữa hai đối tượng tương ứng với các dịch chuyển trạng thái. Các khái niệm tương ứng với các mệnh đề và các vai trò tương ứng với các chương trình [19, 9]. Định nghĩa sau đây trình bày logic mô tả $\mathcal{ALC}$ tương ứng với logic động mệnh đề, được gọi là *logic mô tả động* và được ký hiệu là $\mathcal{ALC}_{reg}$.

Định nghĩa 1.3 (Cú pháp của $\mathcal{ALC}_{reg}$)**.** Cho Σ_C là tập các *tên khái niệm* và Σ_R là tập các *tên vai trò* ($\Sigma_C \cap \Sigma_R = \emptyset$). Các phần tử của Σ_C được gọi là *khái niệm nguyên tố* và các phần tử của Σ_R được gọi là *vai trò nguyên tố*. *Logic mô tả động* $\mathcal{ALC}_{reg}$ cho phép các khái niệm và các vai trò được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- nếu $r \in \Sigma_R$ thì r là một vai trò của $\mathcal{ALC}_{reg}$,
- nếu $A \in \Sigma_C$ thì A là một khái niệm của $\mathcal{ALC}_{reg}$,
- nếu C, D là các khái niệm và R, S là các vai trò thì

– ε, $R \circ S$, $R \sqcup S$, R^*, $?C$ là các vai trò của $\mathcal{ALC}_{reg}$,

– $\top$, $\bot$, $\neg C$, $C \sqcap D$, $C \sqcup D$, $\exists R.C$ và $\forall R.C$ là các khái niệm của $\mathcal{ALC}_{reg}$. ∎

Cú pháp $\mathcal{ALC}_{reg}$ có thể mô tả một cách vắn tắt bằng các luật sau:

$$R, S \longrightarrow \varepsilon \mid r \mid R \circ S \mid R \sqcup S \mid R^* \mid C?$$

$$C, D \longrightarrow A \mid \top \mid \bot \mid \neg C \mid C \sqcap D \mid C \sqcup D \mid \exists R.C \mid \forall R.C$$

Các ký hiệu và các tạo tử vai trò có ý nghĩa như sau:

- ε biểu diễn *quan hệ đồng nhất*,
- $R \circ S$ biểu diễn *hợp thành tuần tự* của R và S,
- $R \sqcup S$ biểu diễn *hợp* của R và S,
- R^* biểu diễn cho vai trò *phản xạ và bắc cầu đóng* của R,
- $C?$ biểu diễn cho *toán tử kiểm tra*.

Tạo tử khái niệm $\forall R.C$ và $\exists R.C$ tương ứng với các toán tử hình thái $[R]C$ và $\langle R \rangle C$ trong logic động mệnh đề [55].

Diễn dịch của các vai trò phức trong $\mathcal{ALC}_{reg}$ được xác định như sau:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\mathcal{I}} &= \{\langle x, x\rangle \mid x \in \Delta^{\mathcal{I}}\},\\
(R \circ S)^{\mathcal{I}} &= R^{\mathcal{I}} \circ S^{\mathcal{I}},\\
(R \sqcup S)^{\mathcal{I}} &= R^{\mathcal{I}} \cup S^{\mathcal{I}},\\
(R^*)^{\mathcal{I}} &= (R^{\mathcal{I}})^*,\\
(C?)^{\mathcal{I}} &= \{\langle x, x\rangle \mid C^{\mathcal{I}}(x)\}.
\end{aligned}$$

1.2.2. Ngôn ngữ logic mô tả $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$

Một *bộ ký tự logic mô tả* là một tập hữu hạn $\Sigma = \Sigma_I \cup \Sigma_{dA} \cup \Sigma_{nA} \cup \Sigma_{oR} \cup \Sigma_{dR}$, trong đó Σ_I là tập các *cá thể*, Σ_{dA} là tập các *thuộc tính rời rạc*, Σ_{nA} là tập các *thuộc tính số*, Σ_{oR} là tập các *tên vai trò đối tượng* và Σ_{dR} là tập các *vai trò dữ liệu*.[1] Tất cả các tập Σ_I, Σ_{dA}, Σ_{nA}, Σ_{oR} và Σ_{dR} rời nhau từng đôi một.

Đặt $\Sigma_A = \Sigma_{dA} \cup \Sigma_{nA}$. Khi đó mỗi thuộc tính $A \in \Sigma_A$ có một miền giá trị là $range(A)$. Miền $range(A)$ là một tập không rỗng đếm được nếu A là thuộc tính rời rạc và có thứ tự "$\leq$" nếu A là thuộc tính liên tục.[2] (Để đơn giản, chúng ta không ghi ký

[1] Các tên vai trò đối tượng là các vai trò đối tượng nguyên tố.

[2] Có thể giả sử rằng nếu A là một thuộc tính số thì $range(A)$ là tập các số thực và "$\leq$" là một quan hệ thứ tự tuyến giữa các số thực.

hiệu "$\leq$" kèm theo thuộc tính A.) Một thuộc tính rời rạc được gọi là *thuộc tính Bool* nếu $range(A) = \{\mathsf{true}, \mathsf{false}\}$. Chúng ta xem các thuộc tính Bool như là các tên khái niệm. Gọi Σ_C là tập các tên khái niệm của Σ, lúc đó ta có $\Sigma_C \subseteq \Sigma_{dA}$.

Một tên vai trò đối tượng đại diện cho một vị từ hai ngôi giữa các cá thể. Một vai trò dữ liệu σ đại diện cho một vị từ hai ngôi giữa các cá thể với các phần tử của tập $range(\sigma)$. Để đơn giản trong việc biểu diễn các công thức, chúng tôi ký hiệu các ký tự chữ cái thường như a, $b, \ldots$ cho các cá thể; các ký tự hoa như A, $B, \ldots$ cho các thuộc tính; các chữ cái như r, $s, \ldots$ cho các tên vai trò đối tượng; các ký tự như σ, $\varrho, \ldots$ cho các vai trò dữ liệu; và các ký tự c, $d, \ldots$ cho các phần tử của tập $range(A)$ hoặc $range(\sigma)$.

Xét các *đặc trưng của logic mô tả* gồm $\mathcal{I}$ (*nghịch đảo vai trò*), $\mathcal{O}$ (*định danh*), $\mathcal{F}$ (*tính chất hàm*), $\mathcal{N}$ (*hạn chế số lượng không định tính*), $\mathcal{Q}$ (*hạn chế số lượng có định tính*), $\mathcal{U}$ (*vai trò phổ quát*), Self (*tính phản xạ cục bộ của vai trò*). *Tập các đặc trưng của logic mô tả* Φ là một tập rỗng hoặc tập chứa một số các đặc trưng nêu trên. Chẳng hạn như $\Phi = \{\mathcal{I}, \mathcal{O}, \mathcal{Q}\}$ để chỉ tập các đặc trưng của logic mô tả gồm: nghịch đảo vai trò, định danh và hạn chế số lượng có định tính.

Trong [13, 55], các tác giả đã đề cập đến logic mô tả $\mathcal{ALC}_{reg}$ với tập các đặc trưng gồm $\mathcal{I}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{U}$ và Self. Trong [68, 20], ngoài những đặc trưng đã đề cập ở [13, 55], các tác giả đã mở rộng lớp các logic mô tả bằng cách xem xét thêm các đặc trưng $\mathcal{F}$ và $\mathcal{N}$. Ngoài ra, các tác giả cũng xem xét các thuộc tính như là các thành phần cơ bản của ngôn ngữ, bao gồm thuộc tính rời rạc và thuộc tính số. Cách tiếp cận này phù hợp đối với các hệ thống thông tin, cơ sở tri thức trong logic mô tả thường có trong thực tế và tổng quát hơn so với [55]. Trong đề tài này, chúng tôi tiếp cận với logic mô tả $\mathcal{ALC}_{reg}$ với tập các đặc trưng gồm $\mathcal{I}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{U}$ và Self. Các kết quả trình bày trong các định nghĩa, định lý tiếp theo là những mở rộng của các định nghĩa, định lý trong [13, 55] và kế thừa những kết quả trong [68, 20] trên một lớp lớn các logic mô tả rộng hơn.

Định nghĩa 1.4 (Ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$)**.** Cho Σ là bộ ký tự logic mô tả, Φ là tập các đặc trưng của logic mô tả và $\mathcal{L}$ đại diện cho $\mathcal{ALC}_{reg}$. Ngôn ngữ logic mô tả $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ cho phép các *vai trò đối tượng* và các *khái niệm* được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- nếu $r \in \Sigma_{oR}$ thì r là một vai trò đối tượng của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$,
- nếu $A \in \Sigma_C$ thì A là một khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$,
- nếu $A \in \Sigma_A \setminus \Sigma_C$ và $d \in range(A)$ thì $A = d$ và $A \neq d$ là các khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$,

- nếu $A \in \Sigma_{nA}$ và $d \in range(A)$ thì $A \leq d$, $A < d$, $A \geq d$ và $A > d$ là các khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$,
- nếu R và S là các vai trò đối tượng của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$, C và D là các khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$, $r \in \Sigma_{oR}$, $\sigma \in \Sigma_{dR}$, $a \in \Sigma_I$ và n là một số tự nhiên thì
  - ε, $R \circ S$, $R \sqcup S$, R^* và $C?$ là các vai trò đối tượng của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$,
  - $\top$, $\bot$, $\neg C$, $C \sqcap D$, $C \sqcup D$, $\exists R.C$ và $\forall R.C$ là các khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$,
  - nếu $d \in range(\sigma)$ thì $\exists \sigma.\{d\}$ là một khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$,
  - nếu $\mathcal{I} \in \Phi$ thì R^- là một vai trò đối tượng của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$,
  - nếu $\mathcal{O} \in \Phi$ thì $\{a\}$ là một khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$,
  - nếu $\mathcal{F} \in \Phi$ thì $\leq 1\, r$ là một khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$,
  - nếu $\{\mathcal{F}, \mathcal{I}\} \subseteq \Phi$ thì $\leq 1\, r^-$ là một khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$,
  - nếu $\mathcal{N} \in \Phi$ thì $\geq n\, r$ và $\leq n\, r$ là các khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$,
  - nếu $\{\mathcal{N}, \mathcal{I}\} \subseteq \Phi$ thì $\geq n\, r^-$ và $\leq n\, r^-$ là các khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$,
  - nếu $\mathcal{Q} \in \Phi$ thì $\geq n\, r.C$ và $\leq n\, r.C$ là các khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$,
  - nếu $\{\mathcal{Q}, \mathcal{I}\} \subseteq \Phi$ thì $\geq n\, r^-.C$ và $\leq n\, r^-.C$ là các khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$,
  - nếu $\mathcal{U} \in \Phi$ thì U là một vai trò đối tượng của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$,
  - nếu $\mathsf{Self} \in \Phi$ thì $\exists r.\mathsf{Self}$ là một khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. ■

Trong định nghĩa trên, các tạo tử khái niệm $\geq n\, R.C$ và $\leq n\, R.C$ được gọi là hạn chế số lượng có định tính. Các tạo tử này tương ứng với các toán tử hình thái $\Box_n$ và $\Diamond_n$ trong logic hình thái [47, 13]. Các tạo tử khái niệm $\geq n\, R$ và $\leq n\, R$ được gọi là hạn chế số lượng không định tính.

Định nghĩa 1.5 (Ngữ nghĩa của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$)**.** Một *diễn dịch* trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ là một bộ $\mathcal{I} = \langle \Delta^\mathcal{I}, \cdot^\mathcal{I} \rangle$, trong đó $\Delta^\mathcal{I}$ là một tập không rỗng được gọi là *miền* của $\mathcal{I}$ và $\cdot^\mathcal{I}$ là một ánh xạ được gọi là *hàm diễn dịch* của $\mathcal{I}$ cho phép ánh xạ mỗi cá thể $a \in \Sigma_I$ thành một phần tử $a^\mathcal{I} \in \Delta^\mathcal{I}$, mỗi tên khái niệm $A \in \Sigma_C$ thành một tập $A^\mathcal{I} \subseteq \Delta^\mathcal{I}$, mỗi thuộc tính $A \in \Sigma_A \setminus \Sigma_C$ thành một hàm từng phần $A^\mathcal{I} : \Delta^\mathcal{I} \to range(A)$, mỗi tên vai trò đối tượng $r \in \Sigma_{oR}$ thành một quan hệ nhị phân $r^\mathcal{I} \subseteq \Delta^\mathcal{I} \times \Delta^\mathcal{I}$ và mỗi vai trò dữ liệu $\sigma \in \Sigma_{dR}$ thành một quan hệ nhị phân $\sigma^\mathcal{I} \subseteq \Delta^\mathcal{I} \times range(\sigma)$. Hàm diễn dịch $\cdot^\mathcal{I}$ được mở rộng cho các vai trò đối tượng phức và các khái niệm phức như trong Hình 1.3, trong đó $\#\Gamma$ ký hiệu cho lực lượng của tập Γ. ■

$$
\begin{array}{lll}
(R \circ S)^{\mathcal{I}} = R^{\mathcal{I}} \circ S^{\mathcal{I}} & (R^*)^{\mathcal{I}} = (R^{\mathcal{I}})^* & (C?)^{\mathcal{I}} = \{\langle x, x\rangle \mid C^{\mathcal{I}}(x)\} \\
(R \sqcup S)^{\mathcal{I}} = R^{\mathcal{I}} \cup S^{\mathcal{I}} & (R^-)^{\mathcal{I}} = (R^{\mathcal{I}})^{-1} & \varepsilon^{\mathcal{I}} = \{\langle x, x\rangle \mid x \in \Delta^{\mathcal{I}}\} \\
U^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}} & \top^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \quad \bot^{\mathcal{I}} = \emptyset & (\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}} \\
(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} & (C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}} & \{a\}^{\mathcal{I}} = \{a^{\mathcal{I}}\} \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(A \leq d)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid A^{\mathcal{I}}(x) \text{ xác định và } A^{\mathcal{I}}(x) \leq d\} & \\
(A \geq d)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid A^{\mathcal{I}}(x) \text{ xác định và } A^{\mathcal{I}}(x) \geq d\} & \\
(A = d)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid A^{\mathcal{I}}(x) = d\} & (A \neq d)^{\mathcal{I}} = (\neg(A = d))^{\mathcal{I}} \\
(A < d)^{\mathcal{I}} = ((A \leq d) \sqcap (A \neq d))^{\mathcal{I}} & (A > d)^{\mathcal{I}} = ((A \geq d) \sqcap (A \neq d))^{\mathcal{I}} \\
(\forall R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \forall y\, [R^{\mathcal{I}}(x, y) \Rightarrow C^{\mathcal{I}}(y)]\} & (\exists r.\mathsf{Self})^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid r^{\mathcal{I}}(x, x)\} \\
(\exists R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y\, [R^{\mathcal{I}}(x, y) \wedge C^{\mathcal{I}}(y)]\} & (\exists \sigma.\{d\})^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \sigma^{\mathcal{I}}(x, d)\} \\
(\geq n\, R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \#\{y \mid R^{\mathcal{I}}(x, y) \wedge C^{\mathcal{I}}(y)\} \geq n\} & (\geq n\, R)^{\mathcal{I}} = (\geq n\, R.\top)^{\mathcal{I}} \\
(\leq n\, R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \#\{y \mid R^{\mathcal{I}}(x, y) \wedge C^{\mathcal{I}}(y)\} \leq n\} & (\leq n\, R)^{\mathcal{I}} = (\leq n\, R.\top)^{\mathcal{I}}
\end{array}
$$

Hình 1.3: Diễn dịch của các vai trò phức và khái niệm phức.

Như chúng ta thấy ở Định nghĩa 1.5, mỗi cá thể được diễn dịch như là một đối tượng, mỗi tên khái niệm được diễn dịch như là một tập các đối tượng, mỗi thuộc tính được diễn dịch như là một hàm thành phần từ miền quan tâm vào tập các giá trị của thuộc tính, mỗi tên vai trò đối tượng được diễn dịch như là một quan hệ nhị phân giữa các đối tượng và mỗi vai trò dữ liệu được diễn dịch như là một quan hệ nhị phân giữa các đối tượng với các phần tử trong miền giá trị của vai trò dữ liệu đó.

Chúng ta nói $C^{\mathcal{I}}$ (tương ứng, $R^{\mathcal{I}}$) là *diễn dịch* của khái niệm C (tương ứng, vai trò R) trong diễn dịch $\mathcal{I}$. Một khái niệm C được gọi là *thỏa mãn được* nếu tồn tại một diễn dịch $\mathcal{I}$ sao cho $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$. Nếu $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$, lúc đó chúng ta nói a là một *thể hiện* của C trong diễn dịch $\mathcal{I}$. Để ngắn gọn, ta viết $C^{\mathcal{I}}(x)$ (tương ứng, $R^{\mathcal{I}}(x, y)$, $\sigma^{\mathcal{I}}(x, d)$) thay cho $x \in C^{\mathcal{I}}$ (tương ứng, $\langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{I}}$, $\langle x, d\rangle \in \sigma^{\mathcal{I}}$).

Cho diễn dịch $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. Chúng ta nói rằng đối tượng $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ có *độ sâu* là k nếu k là số tự nhiên lớn nhất sao cho tồn tại các đối tượng $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \Delta^{\mathcal{I}}$ khác nhau từng đôi một thỏa mãn:

- $x_k = x$ và $x_0 = a^{\mathcal{I}}$ với $a \in \Sigma_I$,
- $x_i \neq b^{\mathcal{I}}$ với mọi $1 \leq i \leq k$ và với mọi $b \in \Sigma_I$,
- với mỗi $1 \leq i \leq k$ tồn tại một vai trò đối tượng R_i của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ sao cho $R_i^{\mathcal{I}}(x_{i-1}, x_i)$ thỏa mãn.

Chúng ta ký hiệu $\mathcal{I}_{|k}$ là diễn dịch thu được từ diễn dịch $\mathcal{I}$ bằng cách hạn chế miền $\Delta^{\mathcal{I}}$ của diễn dịch $\mathcal{I}$ chỉ bao gồm tập các đối tượng có độ sâu không lớn hơn k và hàm diễn dịch $\cdot^{\mathcal{I}}$ được hạn chế một cách tương ứng.

1.3. Các dạng chuẩn

Để biểu diễn các khái niệm và vai trò theo một dạng thống nhất trong logic mô tả nhằm phù hợp với quá trình xử lý khái niệm và vai trò đó, người ta sử dụng các dạng chuẩn của khái niệm và vai trò. Dạng chuẩn của khái niệm C (tương ứng, vai trò R) là một khái niệm C' (tương ứng, vai trò R') tương đương với khái niệm C (tương ứng, vai trò R). Nghĩa là khái niệm C' (tương ứng, vai trò R') có cùng ý nghĩa với khái niệm C (tương ứng, vai trò R), nhưng khác nhau về cú pháp biểu diễn.

1.3.1. Dạng chuẩn phủ định của khái niệm

Dạng chuẩn phủ định của khái niệm (*Negation Normal Form - NNF*) [2, 39] được đề xuất nhằm phục vụ cho việc xử lý các bài toán suy luận của cơ sở tri thức trong logic mô tả. Khái niệm C được gọi là ở *dạng chuẩn phủ định* nếu toán tử phủ định chỉ xuất hiện trước các tên khái niệm xuất hiện trong C.

Để chuyển một khái niệm về dạng chuẩn phủ định, chúng ta sử dụng luật De Morgan và các phép biến đổi tương đương, cụ thể như sau:

$$\begin{array}{rclrcl}
\neg\neg C & \longrightarrow & C & & & \\
\neg\top & \longrightarrow & \bot & \neg\bot & \longrightarrow & \top \\
\neg(C \sqcap D) & \longrightarrow & \neg C \sqcup \neg D & \neg(C \sqcup D) & \longrightarrow & \neg C \sqcap \neg D \\
\neg(\exists R.C) & \longrightarrow & \forall R.\neg C & \neg(\forall R.C) & \longrightarrow & \exists R.\neg C \\
\neg(\geq n\, R) & \longrightarrow & \leq (n-1)\, R & \neg(\leq n\, R) & \longrightarrow & \geq (n+1)\, R \\
\neg(\geq n\, R.C) & \longrightarrow & \leq (n-1)\, R.C & \neg(\leq n\, R.C) & \longrightarrow & \geq (n-1)\, R.C
\end{array}$$

Ví dụ 1.6. Cho A và B là các tên khái niệm, r và s là các tên vai trò đối tượng và khái niệm $C \equiv \neg(\exists r.\neg A \sqcap (B \sqcup \forall s.A)) \sqcap \neg(\geq 3\, r.A \sqcup \neg B)$. Dạng chuẩn phủ định của khái niệm C là $(\forall r.A \sqcup (\neg B \sqcap \exists s.\neg A)) \sqcap (\leq 2\, r.A \sqcap B)$. ■

1.3.2. Dạng chuẩn nghịch đảo của vai trò

Vai trò đối tượng R được gọi là một vai trò ở *dạng chuẩn nghịch đảo* (*Converse Normal Form - CNF*) nếu tạo tử nghịch đảo chỉ áp dụng cho các tên vai trò đối tượng xuất hiện trong R (không xét đến vai trò đối tượng phổ quát U) [13]. Rõ ràng, tất cả các vai trò đối tượng đều có thể chuyển đổi tương đương thành vai trò đối tượng ở dạng chuẩn nghịch đảo. Trong đề tài này, chúng ta sử dụng các vai trò được biểu diễn ở dạng chuẩn nghịch đảo.

Để chuyển một vai trò về dạng chuẩn nghịch đảo, chúng ta sử dụng các phép biến đổi tương đương sau:

$$(R^-)^- \longrightarrow R \qquad\qquad (R \sqcup S)^- \longrightarrow R^- \sqcup S^-$$

$$(R^*)^- \longrightarrow (R^-)^* \qquad\qquad (R \circ S)^- \longrightarrow S^- \circ R^-$$

Ví dụ 1.7. Cho r, s là các tên vai trò đối tượng và vai trò $R \equiv ((r \circ s^-) \sqcup (r^* \circ s) \sqcup s^-)^-$. Dạng chuẩn nghịch đảo của vai trò R là $(s \circ r^-) \sqcup (s^- \circ (r^-)^*) \sqcup s$. ∎

Đặt $\Sigma_{oR}^{\pm} = \Sigma_{oR} \cup \{r^- \mid r \in \Sigma_{oR}\}$. Một *vai trò đối tượng cơ bản* là một phần tử thuộc $\Sigma_{oR}^{\pm}$ nếu ngôn ngữ được xem xét cho phép vai trò nghịch đảo hoặc một phần tử thuộc Σ_{oR} nếu ngôn ngữ được xem xét không cho phép vai trò nghịch đảo [13].

1.4. Cơ sở tri thức trong logic mô tả

Cơ sở tri thức trong logic mô tả thường bao gồm ba thành phần: bộ tiên đề vai trò chứa các tiên đề vai trò, bộ tiên đề thuật ngữ chứa các tiên đề thuật ngữ và bộ khẳng định chứa các khẳng định về cá thể [2, 13].

1.4.1. Bộ tiên đề vai trò

Định nghĩa 1.6 (Tiên đề vai trò)**.** Một *tiên đề bao hàm vai trò* trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ là một biểu thức có dạng $\varepsilon \sqsubseteq r$ hoặc $R_1 \circ R_2 \circ \cdots \circ R_k \sqsubseteq r$, trong đó $k \geq 1$, $r \in \Sigma_{oR}$ và $R_1, R_2, \ldots, R_k$ là các vai trò đối tượng cơ bản của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ khác với vai trò phổ quát U. Một *khẳng định vai trò* trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ là một biểu thức có dạng $\mathtt{Ref}(r)$, $\mathtt{Irr}(r)$, $\mathtt{Sym}(r)$, $\mathtt{Tra}(r)$ hoặc $\mathtt{Dis}(R, S)$, trong đó $r \in \Sigma_{oR}$ và R, S là các vai trò đối tượng của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ khác với vai trò phổ quát U. Một *tiên đề vai trò* trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ là một tiên đề bao hàm vai trò hoặc một khẳng định vai trò trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. ∎

Ý nghĩa của các khẳng định vai trò trong Định nghĩa 1.6 được hiểu như sau:

- $\mathtt{Ref}(r)$ được gọi là một *khẳng định vai trò phản xạ*,
- $\mathtt{Irr}(r)$ được gọi là một *khẳng định vai trò không phản xạ*,
- $\mathtt{Sym}(r)$ được gọi là một *khẳng định vai trò đối xứng*,
- $\mathtt{Tra}(r)$ được gọi là một *khẳng định vai trò bắc cầu*,
- $\mathtt{Dis}(R, S)$ được gọi là một *khẳng định vai trò không giao nhau*.

Ngữ nghĩa của các tiên đề vai trò được xác định thông qua diễn dịch $\mathcal{I}$ như sau:

$\mathcal{I} \models \varepsilon \sqsubseteq r$ nếu $\varepsilon^{\mathcal{I}} \subseteq r^{\mathcal{I}}$,

$\mathcal{I} \models R_1 \circ R_2 \circ \cdots \circ R_k \sqsubseteq r$ nếu $R_1^{\mathcal{I}} \circ R_2^{\mathcal{I}} \circ \cdots \circ R_k^{\mathcal{I}} \sqsubseteq r^{\mathcal{I}}$,

$\mathcal{I} \models \mathtt{Ref}(r)$ nếu $r^{\mathcal{I}}$ phản xạ,

$\mathcal{I} \models \mathtt{Irr}(r)$ nếu $r^{\mathcal{I}}$ không phản xạ,

$\mathcal{I} \models \mathtt{Sym}(r)$ nếu $r^{\mathcal{I}}$ đối xứng,

$\mathcal{I} \models \mathtt{Tra}(r)$ nếu $r^{\mathcal{I}}$ bắc cầu,

$\mathcal{I} \models \mathtt{Dis}(R, S)$ nếu $R^{\mathcal{I}}$ và $S^{\mathcal{I}}$ không giao nhau.

Giả sử φ là một tiên đề vai trò. Chúng ta nói rằng $\mathcal{I}$ *thỏa mãn* φ nếu $\mathcal{I} \models \varphi$.

Định nghĩa 1.7 (Bộ tiên đề vai trò)**.** *Bộ tiên đề vai trò* (*RBox*) trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ là một tập hữu hạn các tiên đề vai trò trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. ∎

1.4.2. Bộ tiên đề thuật ngữ

Định nghĩa 1.8 (Tiên đề thuật ngữ)**.** Một *tiên đề bao hàm khái niệm tổng quát* trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ là một biểu thức có dạng $C \sqsubseteq D$, trong đó C và D là các khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. Một *tiên đề tương đương khái niệm* trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ là một biểu thức có dạng $C \equiv D$, trong đó C và D là các khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. Một *tiên đề thuật ngữ* trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ là một tiên đề bao hàm khái niệm tổng quát hoặc một tiên đề tương đương khái niệm trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. ∎

Đối với tiên đề tương đương khái niệm $C \equiv D$, trong đó C và D là các khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. Nếu C là một tên khái niệm thì chúng ta nói $C \equiv D$ là một *định nghĩa khái niệm* và khái niệm C được gọi là *khái niệm định nghĩa*. Một tiên đề tương đương khái niệm $C \equiv D$ có thể được chuyển đổi tương đương thành hai tiên đề bao hàm khái niệm tổng quát là $C \sqsubseteq D$ và $D \sqsubseteq C$.

Ngữ nghĩa của các tiên đề thuật ngữ được xác định thông qua diễn dịch $\mathcal{I}$ như sau:

$\mathcal{I} \models C \sqsubseteq D$ nếu $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$,

$\mathcal{I} \models C \equiv D$ nếu $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$.

Giả sử φ là một tiên đề thuật ngữ. Chúng ta nói rằng $\mathcal{I}$ *thỏa mãn* φ nếu $\mathcal{I} \models \varphi$.

Định nghĩa 1.9 (Bộ tiên đề thuật ngữ)**.** *Bộ tiên đề thuật ngữ* (*TBox*) trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ là một tập hữu hạn các tiên đề thuật ngữ trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. ∎

1.4.3. Bộ khẳng định cá thể

Định nghĩa 1.10 (Khẳng định cá thể)**.** Một *khẳng định cá thể* trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ là một biểu thức có dạng $C(a)$, $R(a,b)$, $\neg R(a,b)$, $a = b$, $a \neq b$, trong đó C là một khái niệm và R là một vai trò đối tượng của $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. ∎

Ý nghĩa của các khẳng định cá thể trong Định nghĩa 1.11 được hiểu như sau:

- $C(a)$ được gọi là một *khẳng định khái niệm*,
- $R(a,b)$ được gọi là một *khẳng định vai trò đối tượng dương*,
- $\neg R(a,b)$ được gọi là một *khẳng định vai trò đối tượng âm*,
- $a = b$ được gọi là một *khẳng định bằng nhau*,
- $a \neq b$ được gọi là một *khẳng định khác nhau.*

Ngữ nghĩa của các khẳng định cá thể được xác định thông qua diễn dịch $\mathcal{I}$ như sau:

$\mathcal{I} \models C(a)$ nếu $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$,

$\mathcal{I} \models R(a,b)$ nếu $\langle a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}} \rangle \in R^{\mathcal{I}}$,

$\mathcal{I} \models \neg R(a,b)$ nếu $\langle a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}} \rangle \notin R^{\mathcal{I}}$.

$\mathcal{I} \models a = b$ nếu $a^{\mathcal{I}} = b^{\mathcal{I}}$,

$\mathcal{I} \models a \neq b$ nếu $a^{\mathcal{I}} \neq b^{\mathcal{I}}$.

Giả sử φ là một khẳng định cá thể. Chúng ta nói rằng $\mathcal{I}$ *thỏa mãn* φ nếu $\mathcal{I} \models \varphi$.

Định nghĩa 1.11 (Bộ khẳng định cá thể)**.** *Bộ khẳng định cá thể* (*ABox*) trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ là một tập hữu hạn các khẳng định cá thể trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. ■

1.4.4. Cơ sở tri thức và mô hình của cơ sở tri thức

Định nghĩa 1.12 (Cơ sở tri thức)**.** Một *cơ sở tri thức* trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ là một bộ ba $\mathcal{KB} = \langle \mathcal{R}, \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$, trong đó $\mathcal{R}$ là một RBox, $\mathcal{T}$ là một TBox và $\mathcal{A}$ là một ABox trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. ■

Định nghĩa 1.13 (Mô hình)**.** Một diễn dịch $\mathcal{I}$ là một *mô hình* của RBox $\mathcal{R}$ (tương ứng, TBox $\mathcal{T}$, ABox $\mathcal{A}$), ký hiệu là $\mathcal{I} \models \mathcal{R}$ (tương ứng, $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$, $\mathcal{I} \models \mathcal{A}$), nếu $\mathcal{I}$ thỏa mãn tất cả các tiên đề vai trò trong $\mathcal{R}$ (tương ứng, tiên đề thuật ngữ trong $\mathcal{T}$, khẳng định cá thể trong $\mathcal{A}$). Một diễn dịch $\mathcal{I}$ là một *mô hình* của cơ sở tri thức $\mathcal{KB} = \langle \mathcal{R}, \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$, ký hiệu là $\mathcal{I} \models \mathcal{KB}$, nếu nó là mô hình của cả $\mathcal{R}$, $\mathcal{T}$ và $\mathcal{A}$. ■

Cơ sở tri thức $\mathcal{KB}$ được gọi là *thỏa mãn* nếu $\mathcal{KB}$ có mô hình. Một cá thể a được gọi là *thể hiện* của một khái niệm C dựa trên cơ sở tri thức $\mathcal{KB}$, ký hiệu là $\mathcal{KB} \models C(a)$, nếu với mọi diễn dịch $\mathcal{I}$ là mô hình của $\mathcal{KB}$ thì $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$. Cá thể a không phải thể hiện của khái niệm C dựa trên cơ sở tri thức $\mathcal{KB}$ được ký hiệu là $\mathcal{KB} \not\models C(a)$. Khái niệm D được gọi là *bao hàm* khái niệm C dựa trên cơ sở tri thức $\mathcal{KB}$, ký hiệu là $\mathcal{KB} \models C \sqsubseteq D$, nếu với mọi diễn dịch $\mathcal{I}$ là mô hình của $\mathcal{KB}$ thì $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$.

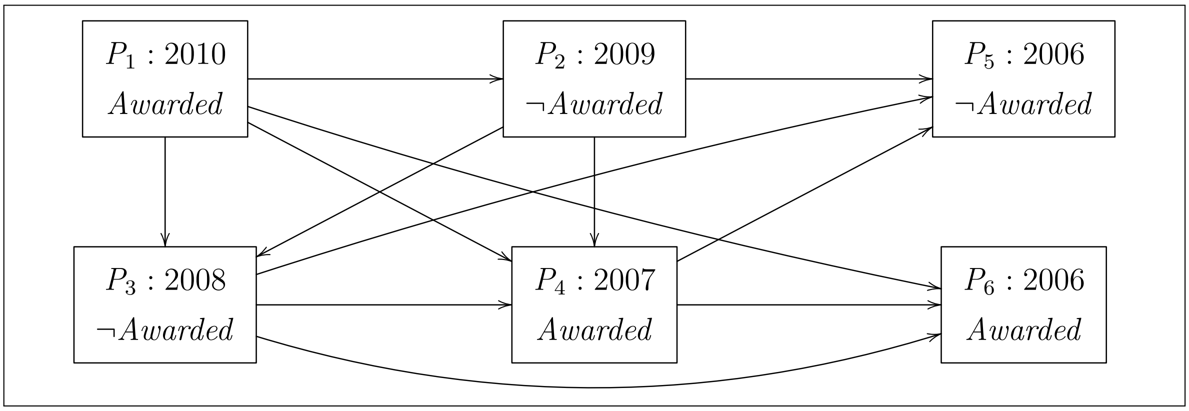
Một logic $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ được xác định thông qua một số hạn chế cụ thể đối với ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. Ta nói rằng logic L là quyết định được nếu bài toán kiểm tra tính thỏa của một cơ sở tri thức trong L là quyết định được. Một logic L được xem là có *tính chất mô hình hữu hạn* nếu với mọi cơ sở tri thức thỏa mãn được trong L đều có mô hình hữu hạn. Một logic L được xem là có *tính chất mô hình nữa hữu hạn* nếu với mọi cơ sở tri thức thỏa mãn được trong L đều có mô hình $\mathcal{I}$ sao cho với mọi số tự nhiên k, $\mathcal{I}_{|k}$ là hữu hạn và có thể xây dựng được.

Trong [5], Baldoni và các cộng sự đã chỉ ra rằng các logic dựa trên các văn phạm cảm ngữ cảnh và văn phạm phi ngữ cảnh nói chung là không quyết định được. Logic $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ tổng quát nhất (không có hạn chế nào) là logic không quyết định được. Tuy nhiên, lớp các logic chúng ta đang xem xét trong đề tài này có nhiều logic quyết định được và là những logic rất hữu ích thường được áp dụng trong các ứng dụng thực tế. Một trong số đó là $\mathcal{SROIQ}$ - logic làm cơ sở cho ngôn ngữ OWL 2 [29]. Logic này có tính chất mô hình nữa hữu hạn.

Ví dụ 1.8. Ví dụ sau đây là một cơ sở tri thức đề cập về các ấn phẩm khoa học.

$$\begin{aligned}
\Phi &= \{\mathcal{I}, \mathcal{O}, \mathcal{N}, \mathcal{Q}\},\\
\Sigma_I &= \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\},\\
\Sigma_C &= \{\mathit{Pub}, \mathit{Awarded}, \mathit{UsefulPub}, A_d\}, \qquad \Sigma_{dA} = \Sigma_C, \quad \Sigma_{nA} = \{\mathit{Year}\},\\
\Sigma_{oR} &= \{\mathit{cites}, \mathit{cited_by}\}, \quad \Sigma_{dR} = \emptyset,\\
\mathcal{R} &= \{\mathit{cites}^- \sqsubseteq \mathit{cited_by}, \mathit{cited_by}^- \sqsubseteq \mathit{cites}, \mathtt{Irr}(\mathit{cites})\},\\
\mathcal{T} &= \{\top \sqsubseteq \mathit{Pub}, \mathit{UsefulPub} \equiv \exists \mathit{cited_by}.\top\},\\
\mathcal{A}_0 &= \{\mathit{Awarded}(P_1), \neg\mathit{Awarded}(P_2), \neg\mathit{Awarded}(P_3), \mathit{Awarded}(P_4),\\
&\quad \neg\mathit{Awarded}(P_5), \mathit{Awarded}(P_6), \mathit{Year}(P_1) = 2010, \mathit{Year}(P_2) = 2009,\\
&\quad \mathit{Year}(P_3) = 2008, \mathit{Year}(P_4) = 2007, \mathit{Year}(P_5) = 2006, \mathit{Year}(P_6) = 2006,\\
&\quad \mathit{cites}(P_1, P_2), \mathit{cites}(P_1, P_3), \mathit{cites}(P_1, P_4), \mathit{cites}(P_1, P_6), \mathit{cites}(P_2, P_3),\\
&\quad \mathit{cites}(P_2, P_4), \mathit{cites}(P_2, P_5), \mathit{cites}(P_3, P_4), \mathit{cites}(P_3, P_5), \mathit{cites}(P_3, P_6),\\
&\quad \mathit{cites}(P_4, P_5), \mathit{cites}(P_4, P_6)\}.
\end{aligned}$$

Lúc đó $\mathcal{KB}_0 = \langle \mathcal{R}, \mathcal{T}, \mathcal{A}_0 \rangle$ là cơ sở tri thức trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. Tiên đề $\top \sqsubseteq \mathit{Pub}$ để chỉ ra rằng miền của bất kỳ mô hình nào của $\mathcal{KB}_0$ đều chỉ gồm các ấn phẩm khoa học. Cơ sở tri thức $\mathcal{KB}_0$ được minh họa như trong Hình 1.4. Trong hình này, các nút ký hiệu cho các ấn phẩm và các cạnh ký hiệu cho các trích dẫn (khẳng định của vai trò *cites*). Hình này chỉ biểu diễn những thông tin về các khẳng định *Year*, *Awarded* và *cites*. ∎



Hình 1.4: Một minh họa cho cơ sở tri thức của Ví dụ 1.8

Ví dụ 1.9. Cho $\Sigma_I = \{a, b, c\}$, $\Sigma_{nA} = \{BirthYear\}$, $\Sigma_C = \{Human, Male, Female\}$, $\Sigma_{dA} = \{NickName\} \cup \Sigma_C$, $\Sigma_{oR} = \{hasChild, marriedTo\}$ và $\Sigma_{dR} = \emptyset$. Chúng ta có thể xem cá thể a là ALICE, b là BOB và c là CALVIN và các diễn dịch $\mathcal{I}_1$ và $\mathcal{I}_2$ được xây dựng như sau:

• **Diễn dịch $\mathcal{I}_1$:**

$$\Delta^{\mathcal{I}_1} = \{a^{\mathcal{I}_1}, b^{\mathcal{I}_1}, c^{\mathcal{I}_1}, x_1, x_2, x_3, x_4\}, Human^{\mathcal{I}_1} = \{a^{\mathcal{I}_1}, b^{\mathcal{I}_1}, c^{\mathcal{I}_1}, x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

$$Male^{\mathcal{I}_1} = \{b^{\mathcal{I}_1}, x_1, x_2, x_3\}, Female^{\mathcal{I}_1} = \{a^{\mathcal{I}_1}, c^{\mathcal{I}_1}, x_4\},$$

$$BirthYear^{\mathcal{I}_1}(a^{\mathcal{I}_1}) = 1925, BirthYear^{\mathcal{I}_1}(b^{\mathcal{I}_1}) = 1920, BirthYear^{\mathcal{I}_1}(c^{\mathcal{I}_1}) = 1955,$$

$$BirthYear^{\mathcal{I}_1}(x_1) = 1957, BirthYear^{\mathcal{I}_1}(x_2) = 1956, BirthYear^{\mathcal{I}_1}(x_3) = 1987,$$

$$BirthYear^{\mathcal{I}_1}(x_4) = 1984,$$

$$NickName^{\mathcal{I}_1}(a^{\mathcal{I}_1}) = \text{“Allie”}, NickName^{\mathcal{I}_1}(b^{\mathcal{I}_1}) = \text{“Bo”}, NickName^{\mathcal{I}_1}(c^{\mathcal{I}_1}) = \text{“Cal”}$$

$$NickName^{\mathcal{I}_1}(x_1) = \text{“Dell”}, NickName^{\mathcal{I}_1}(x_2) = \text{“Eddy”}, NickName^{\mathcal{I}_1}(x_3) = \text{“Fae”},$$

$$NickName^{\mathcal{I}_1}(x_4) = \text{“Garry”},$$

$$hasChild^{\mathcal{I}_1} = \{\langle a^{\mathcal{I}_1}, c^{\mathcal{I}_1}\rangle, \langle a^{\mathcal{I}_1}, x_1\rangle, \langle b^{\mathcal{I}_1}, c^{\mathcal{I}_1}\rangle, \langle b^{\mathcal{I}_1}, x_1\rangle, \langle c^{\mathcal{I}_1}, x_3\rangle, \langle c^{\mathcal{I}_1}, x_4\rangle,$$
$$\langle x_2, x_3\rangle, \langle x_2, x_4\rangle\},$$

$$marriedTo^{\mathcal{I}_1} = \{\langle a^{\mathcal{I}_1}, b^{\mathcal{I}_1}\rangle, \langle b^{\mathcal{I}_1}, a^{\mathcal{I}_1}\rangle, \langle c^{\mathcal{I}_1}, x_2\rangle, \langle x_2, c^{\mathcal{I}_1}\rangle\}.$$

Diễn dịch $\mathcal{I}_2$:

$$\Delta^{\mathcal{I}_2} = \{a^{\mathcal{I}_2}, b^{\mathcal{I}_2}, c^{\mathcal{I}_2}, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}, Human^{\mathcal{I}_2} = \{a^{\mathcal{I}_2}, b^{\mathcal{I}_2}, c^{\mathcal{I}_2}, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\},$$

$$Male^{\mathcal{I}_2} = \{b^{\mathcal{I}_2}, y_1, y_2, y_3, y_5\}, Female^{\mathcal{I}_2} = \{a^{\mathcal{I}_2}, c^{\mathcal{I}_2}, y_4\},$$

$$BirthYear^{\mathcal{I}_2}(a^{\mathcal{I}_2}) = 1925, BirthYear^{\mathcal{I}_2}(b^{\mathcal{I}_2}) = 1920, BirthYear^{\mathcal{I}_2}(c^{\mathcal{I}_2}) = 1955,$$

$BirthYear^{\mathcal{I}_2}(y_1) = 1957, BirthYear^{\mathcal{I}_2}(y_2) = 1956, BirthYear^{\mathcal{I}_2}(y_3) = 1987,$

$BirthYear^{\mathcal{I}_2}(y_4) = 1984, BirthYear^{\mathcal{I}_2}(y_5) = 1987,$

$NickName^{\mathcal{I}_2}(a^{\mathcal{I}_2})=$"Allie", $NickName^{\mathcal{I}_2}(b^{\mathcal{I}_2})=$"Bo", $NickName^{\mathcal{I}_2}(c^{\mathcal{I}_2})=$"Cal"

$NickName^{\mathcal{I}_2}(y_1)=$"Dell", $NickName^{\mathcal{I}_2}(y_2)=$"Eddy", $NickName^{\mathcal{I}_2}(y_3)=$"Fae",

$NickName^{\mathcal{I}_2}(y_4)=$"Garry", $NickName^{\mathcal{I}_2}(y_5)=$"Jay",

$$hasChild^{\mathcal{I}_2} = \{\langle a^{\mathcal{I}_2}, c^{\mathcal{I}_2}\rangle, \langle a^{\mathcal{I}_2}, y_1\rangle, \langle b^{\mathcal{I}_2}, c^{\mathcal{I}_2}\rangle, \langle b^{\mathcal{I}_2}, y_1\rangle, \langle c^{\mathcal{I}_2}, y_3\rangle, \langle c^{\mathcal{I}_2}, y_4\rangle, \langle c^{\mathcal{I}_2}, y_5\rangle, \langle y_2, y_3\rangle, \langle y_2, y_4\rangle, \langle y_2, y_5\rangle\},$$

$$marriedTo^{\mathcal{I}_2} = \{\langle a^{\mathcal{I}_2}, b^{\mathcal{I}_2}\rangle, \langle b^{\mathcal{I}_2}, a^{\mathcal{I}_2}\rangle, \langle c^{\mathcal{I}_2}, y_2\rangle, \langle y_2, c^{\mathcal{I}_2}\rangle\}.$$

Hình 1.3 biểu diễn hai diễn dịch $\mathcal{I}_1$ và $\mathcal{I}_2$ của ví dụ này, trong đó các nút thể hiện các cá thể, các cạnh liền nét thể hiện cho vai trò *hasChild*, các cạnh đứt nét thể hiện cho vai trò *marriedTo*. Khái niệm *Male* được ký hiệu bằng chữ cái M, khái niệm *Female* ký hiệu bằng chữ cái F. Giá trị của thuộc tính *BirthYear* được viết bằng chỉ số trên của các nút thể hiện cá thể. Giá trị của thuộc tính *NickName* được viết phía dưới mỗi cá thể.

Hai diễn dịch $\mathcal{I}_1$ và $\mathcal{I}_2$ nêu trên đều là mô hình của RBox $\mathcal{R}$, TBox $\mathcal{T}$ và ABox $\mathcal{A}$ trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ với $\Phi = \{\mathcal{I}, \mathcal{O}, \mathcal{Q}\}$. Cụ thể các $\mathcal{R}, \mathcal{T}, \mathcal{A}$ như sau:

$$\mathcal{R} = \{\mathtt{Sym}(marriedTo), \mathtt{Irr}(hasChild)\}$$

$$\mathcal{T} = \{Human \equiv \top, \neg Female \sqsubseteq Male, \exists marriedTo.Male \sqsubseteq Female, \{c\} \sqsubseteq (\geq 2\, hasChild.Human)\}$$

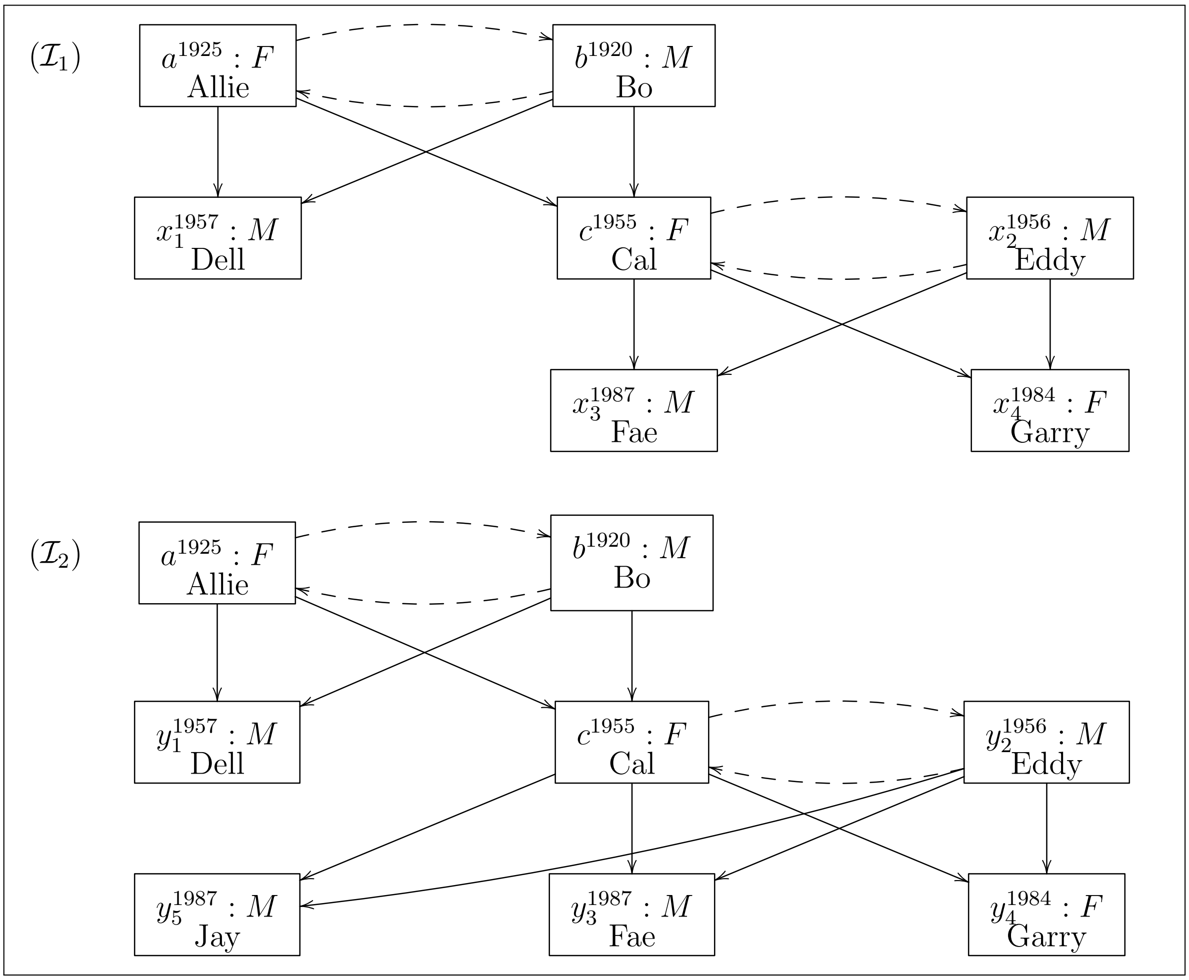
$$\mathcal{A} = \{Female(a), Male(b), Female(c), (\geq 2\, hasChild.Human)(a), marriedTo(a, b), marriedTo(b, a), hasChild(a, c), hasChild(b, c)\}$$ ■

1.5. Suy luận trong logic mô tả

1.5.1. Giới thiệu

Mục đích của các hệ thống biểu diễn tri thức ngoài việc lưu trữ các định nghĩa khái niệm và các khẳng định còn có việc thực hiện các suy luận các tri thức tiềm ẩn. Chẳng hạn, từ bộ tiên đề thuật ngữ trong Ví dụ 1.3 và bộ khẳng định trong Ví dụ 1.4, chúng ta có thể kết luận rằng cá thể HAI là một người đàn ông mặc dù tri thức này không được khẳng định một cách rõ ràng.

Có nhiều bài toán suy luận được đặt ra trong các hệ thống biểu diễn tri thức dựa trên logic mô tả. Bài toán suy luận quan trọng nhất trong logic mô tả là bài toán kiểm tra tính *thỏa mãn/không thỏa mãn* của một khái niệm trong một cơ sở tri thức.



Hình 1.5: Các diễn dịch trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ của Ví dụ 1.9

Lý do bài toán này được xem là quan trọng bởi vì các bài toán suy luận khác có thể được chuyển đổi một cách tương đương về bài toán kiểm tra tính thỏa mãn/không thỏa mãn của một khái niệm [2].

1.5.2. Các thuật toán suy luận

1.5.2.1. Thuật toán bao hàm theo cấu trúc

Thuật toán bao hàm theo cấu trúc thực hiện quá trình suy luận dựa trên việc so sánh cấu trúc cú pháp của các khái niệm (thường đã được chuyển về ở dạng chuẩn phủ định). Thuật toán này tỏ ra hiệu quả đối với các ngôn ngữ logic mô tả đơn giản có khả năng biểu diễn yếu như $\mathcal{FL}_0$, $\mathcal{FL}_\perp$, $\mathcal{ALN}$. Với lớp ngôn ngữ logic mô tả rộng hơn, chẳng hạn như $\mathcal{ALC}$, $\mathcal{ALCI}$, $\mathcal{ALCIQ}$, $\mathcal{SHIQ}$, $\mathcal{SHOIQ}$, thuật toán bao hàm theo cấu trúc không thể giải quyết được các bài toán suy luận như đã đề cập trong Mục 1.5.1.

Thuật toán bao hàm theo cấu trúc được thực hiện theo hai pha [2]. Pha thứ nhất, chuyển các khái niệm về dạng chuẩn tương ứng với từng loại ngôn ngữ. Pha thứ hai, so sánh cấu trúc cú pháp của các khái niệm. Chẳng hạn, xét ngôn ngữ logic mô tả $\mathcal{FL}_0$, ngôn ngữ chỉ cho phép phép giao ($C \sqcap D$) và lượng từ hạn chế tồn tại ($\forall R.C$), một khái niệm trong ngôn ngữ $\mathcal{FL}_0$ được gọi là ở dạng chuẩn nếu nó có dạng:

$$A_1 \sqcap A_2 \sqcap \cdots \sqcap A_m \sqcap \forall R_1.C_1 \sqcap \forall R_2.C_2 \cdots \sqcap \forall R_n.C_n,$$

trong đó $A_1, A_2, \ldots, A_m$ là các tên khác niệm phân biệt nhau, $R_1, R_2, \ldots, R_n$ là các tên vai trò phân biệt nhau, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ là các khái niệm ở dạng chuẩn.

Việc so sánh cấu trúc cú pháp trong pha thứ hai của thuật toán bao hàm theo cấu trúc thực hiện dựa trên mệnh đề sau [2]:

Mệnh đề 1.1. *Cho* $C \equiv A_1 \sqcap A_2 \sqcap \cdots \sqcap A_m \sqcap \forall R_1.C_1 \sqcap \forall R_2.C_2 \cdots \sqcap \forall R_n.C_n$ *và* $D \equiv B_1 \sqcap B_2 \sqcap \cdots \sqcap B_k \sqcap \forall S_1.D_1 \sqcap \forall S_2.D_2 \cdots \sqcap \forall S_l.D_l$ *là các khái niệm ở dạng chuẩn trong ngôn ngữ* $\mathcal{FL}_0$*. Lúc đó* $C \sqsubseteq D$ *khi và chỉ khi hai điều kiện sau đây thỏa mãn:*

1. *với mọi* $1 \leq i \leq k$*, tồn tại* $j, 1 \leq j \leq m$ *sao cho* $A_j \equiv B_i$*,*
2. *với mọi* $1 \leq i \leq l$*, tồn tại* $j, 1 \leq j \leq n$ *sao cho* $R_j \equiv S_i$ *và* $C_j \sqsubseteq D_i$*.* ■

Thuật toán bao hàm theo cấu trúc trong các ngôn ngữ khác như $\mathcal{FL}_\perp$, $\mathcal{ALN}$ thực hiện một cách tương tự.

1.5.2.2. Thuật toán tableaux

Để khắc phục những nhược điểm của thuật toán bao hàm theo cấu trúc, năm 1991, Schmidt-Schauß và Smolka [65] đề xuất thuật toán tableaux để kiểm tra tính thỏa mãn của một khái niệm trong logic mô tả $\mathcal{ALC}$. Hướng tiếp cận này sau đó đã được áp dụng trên một lớp lớn các logic mô tả là logic mở rộng của $\mathcal{ALC}$ [2, 3, 24, 25, 50, 52, 51, 53] và được áp dụng để cài đặt các bộ suy luận FaCT, FaCT^{++}, RACER, CEL và KAON 2.

Quá trình thực hiện thuật toán tableaux dùng để kiểm tra tính thỏa mãn của một khái niệm trong cơ sở tri thức, kiểm tra tính nhất quán của bộ khẳng định. Thuật toán này trải qua hai giai đoạn. Giai đoạn thứ nhất là chuyển các khái niệm về dạng chuẩn phủ định. Giai đoạn thứ hai là áp dụng các luật chuyển đổi tương ứng với từng logic mô tả cụ thể để tìm mâu thuẫn.

Độ phức tạp của thuật toán suy luận tableaux phụ thuộc vào từng logic mô tả. Logic mô tả càng có nhiều tạo tử với khả năng biểu diễn tốt sẽ dẫn đến độ phức tạp càng cao trong quá trình suy luận. Độ phức tạp đối với bài toán suy luận trong logic mô tả $\mathcal{ALC}$, $\mathcal{ALCI}$, $\mathcal{ALCIQ}$ và $\mathcal{S}$ là PSpace-đầy đủ (đối với trường hợp TBox rỗng hoặc TBox không vòng) và ExpTime-đầy đủ (đối với trường hợp TBox tổng quát); $\mathcal{SH}$, $\mathcal{SHI}$, $\mathcal{SHIN}$ và $\mathcal{SHIQ}$ là ExpTime-đầy đủ; $\mathcal{SHOIN}$ và $\mathcal{SHOIQ}$ là NExpTime-đầy đủ; $\mathcal{SROIQ}$ là NExpTime-khó [31, 33, 29, 32, 49, 55, 53, 73].

Tiểu kết Chương 1

Chương này đã giới thiệu khái quát về logic mô tả, khả năng biểu diễn tri thức của các logic mô tả. Thông qua cú pháp và ngữ nghĩa của logic mô tả, các kiến thức chủ yếu về cơ sở tri thức, mô hình của cơ sở tri thức trong logic mô tả và những vấn đề cơ bản về suy luận trong logic mô tả cũng đã được trình bày một cách hệ thống. Ngoài việc trình bày ngôn ngữ logic mô tả một cách tổng quát dựa trên logic $\mathcal{ALC}_{reg}$ với các đặc trưng mở rộng $\mathcal{I}$ (*nghịch đảo vai trò*), $\mathcal{O}$ (*định danh*), $\mathcal{F}$ (*tính chất hàm*), $\mathcal{N}$ (*hạn chế số lượng không định tính*), $\mathcal{Q}$ (*hạn chế số lượng có định tính*), $\mathcal{U}$ (*vai trò phổ quát*), Self (*tính phản xạ cục bộ của vai trò*), chúng tôi còn xem xét các thuộc tính như là các thành phần cơ bản của ngôn ngữ, bao gồm thuộc tính rời rạc và thuộc tính. Cách tiếp cận này phù hợp đối với các hệ thống thông tin dựa trên logic mô tả thường có trong thực tế.

Chương 2.

MÔ PHỎNG HAI CHIỀU TRONG LOGIC MÔ TẢ VÀ TÍNH BẤT BIẾN ĐỐI VỚI MÔ PHỎNG HAI CHIỀU

2.1. Giới thiệu

Mô phỏng hai chiều được J. van Benthem giới thiệu lần đầu dưới tên gọi *p-quan hệ* (*p-relation*) và *quan hệ zig-zag* (*zig-zag relation*) [69, 70]. Nó được phát triển trong logic hình thái (*modal logic*) [71, 6, 7, 72] và trong các hệ thống chuyển trạng thái (*state transition systems*) [56, 23]. Mô phỏng hai chiều là một quan hệ nhị phân cho phép đặc tả tính tương tự giữa hai trạng thái cũng như tính tương tự giữa các mô hình Kripke. Divroodi và Nguyen [13] đã nghiên cứu mô phỏng hai chiều cho một số logic mô tả cụ thể. Trong công trình [55], Nguyen và Szałas đã nghiên cứu về mô phỏng hai chiều và tính không phân biệt được của các đối tượng để áp dụng vào việc học khái niệm trong logic mô tả. Các công trình này tập trung nghiên cứu đối với lớp các logic mô tả $\mathcal{ALC}_{reg}$ với tập các đặc trưng là $\mathcal{I}, \mathcal{O}, \mathcal{Q}, \mathcal{U}, \mathsf{Self}$. Ngoài những đặc trưng đã đề cập ở các nghiên cứu trên [13, 55], trong chương này, chúng tôi tổng quát hóa và mở rộng các kết quả về mô phỏng hai chiều cho một lớp lớn hơn các logic mô tả với các đặc trưng $\mathcal{F}, \mathcal{N}$. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng đề cập đến các thuộc tính như là các phần tử cơ bản của ngôn ngữ cần xem xét.

2.2. Mô phỏng hai chiều trong logic mô tả

2.2.1. Mô phỏng hai chiều

Định nghĩa 2.1 (Mô phỏng hai chiều)**.** Cho Σ và $\Sigma^\dagger$ là các bộ ký tự logic mô tả sao cho $\Sigma^\dagger \subseteq \Sigma$, Φ và $\Phi^\dagger$ là tập các đặc trưng của logic mô tả sao cho $\Phi^\dagger \subseteq \Phi$, $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là các diễn dịch trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. Một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$*-mô phỏng hai chiều* giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là một quan hệ nhị phân $Z \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}'}$ thỏa các điều kiện sau với mọi $a \in \Sigma_I^\dagger$, $A \in \Sigma_C^\dagger$, $B \in \Sigma_A^\dagger \setminus \Sigma_C^\dagger$, $r \in \Sigma_{oR}^\dagger$, $\sigma \in \Sigma_{dR}^\dagger$, $d \in range(\sigma)$, $x, y \in \Delta^{\mathcal{I}}$, $x', y' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$:

$$Z(a^{\mathcal{I}}, a^{\mathcal{I}'}) \tag{2.1}$$

$$Z(x, x') \Rightarrow [A^{\mathcal{I}}(x) \Leftrightarrow A^{\mathcal{I}'}(x')] \tag{2.2}$$

$$Z(x, x') \Rightarrow [B^{\mathcal{I}}(x) = B^{\mathcal{I}'}(x') \text{ hoặc đều không xác định}] \tag{2.3}$$

$$[Z(x, x') \wedge r^{\mathcal{I}}(x, y)] \Rightarrow \exists y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid [Z(y, y') \wedge r^{\mathcal{I}'}(x', y')] \tag{2.4}$$

$$[Z(x,x') \wedge r^{\mathcal{I}'}(x',y')] \Rightarrow \exists y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid [Z(y,y') \wedge r^{\mathcal{I}}(x,y)] \quad (2.5)$$
$$Z(x,x') \Rightarrow [\sigma^{\mathcal{I}}(x,d) \Leftrightarrow \sigma^{\mathcal{I}'}(x',d)], \quad (2.6)$$

nếu $\mathcal{I} \in \Phi^{\dagger}$ thì

$$[Z(x,x') \wedge r^{\mathcal{I}}(y,x)] \Rightarrow \exists y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid [Z(y,y') \wedge r^{\mathcal{I}'}(y',x')] \quad (2.7)$$
$$[Z(x,x') \wedge r^{\mathcal{I}'}(y',x')] \Rightarrow \exists y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid [Z(y,y') \wedge r^{\mathcal{I}}(y,x)], \quad (2.8)$$

nếu $\mathcal{O} \in \Phi^{\dagger}$ thì

$$Z(x,x') \Rightarrow [x = a^{\mathcal{I}} \Leftrightarrow x' = a^{\mathcal{I}'}], \quad (2.9)$$

nếu $\mathcal{N} \in \Phi^{\dagger}$ thì

$$Z(x,x') \Rightarrow \#\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid r^{\mathcal{I}}(x,y)\} = \#\{y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid r^{\mathcal{I}'}(x',y')\}, \quad (2.10)$$

nếu $\{\mathcal{N},\mathcal{I}\} \subseteq \Phi^{\dagger}$ thì

$$Z(x,x') \Rightarrow \#\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid r^{\mathcal{I}}(y,x)\} = \#\{y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid r^{\mathcal{I}'}(y',x')\}, \quad (2.11)$$

nếu $\mathcal{F} \in \Phi^{\dagger}$ thì

$$Z(x,x') \Rightarrow [\#\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid r^{\mathcal{I}}(x,y)\} \leq 1 \Leftrightarrow \#\{y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid r^{\mathcal{I}'}(x',y')\} \leq 1], \quad (2.12)$$

nếu $\{\mathcal{F},\mathcal{I}\} \subseteq \Phi^{\dagger}$ thì

$$Z(x,x') \Rightarrow [\#\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid r^{\mathcal{I}}(y,x)\} \leq 1 \Leftrightarrow \#\{y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid r^{\mathcal{I}'}(y',x')\} \leq 1], \quad (2.13)$$

nếu $\mathcal{Q} \in \Phi^{\dagger}$ thì

nếu $Z(x,x')$ thỏa mãn thì với mọi $r \in \Sigma^{\dagger}_{oR}$, tồn tại một song ánh $h : \{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid r^{\mathcal{I}}(x,y)\} \to \{y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid r^{\mathcal{I}'}(x',y')\}$ sao cho $h \subseteq Z$, (2.14)

nếu $\{\mathcal{Q},\mathcal{I}\} \subseteq \Phi^{\dagger}$ thì

nếu $Z(x,x')$ thỏa mãn thì với mọi $r \in \Sigma^{\dagger}_{oR}$, tồn tại một song ánh $h : \{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid r^{\mathcal{I}}(y,x)\} \to \{y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid r^{\mathcal{I}'}(y',x')\}$ sao cho $h \subseteq Z$, (2.15)

nếu $\mathcal{U} \in \Phi^{\dagger}$ thì

$$\forall x \in \Delta^{\mathcal{I}},\ \exists x' \in \Delta^{\mathcal{I}'}, Z(x,x') \quad (2.16)$$
$$\forall x' \in \Delta^{\mathcal{I}'},\ \exists x \in \Delta^{\mathcal{I}}, Z(x,x'), \quad (2.17)$$

nếu $\mathsf{Self} \in \Phi^{\dagger}$ thì

$$Z(x,x') \Rightarrow [r^{\mathcal{I}}(x,x) \Leftrightarrow r^{\mathcal{I}'}(x',x')], \quad (2.18)$$

trong đó $\#\Gamma$ ký hiệu cho lực lượng của tập hợp Γ. ■

Bổ đề 2.1 sau đây nói lên sự tồn tại của mô phỏng hai chiều, tính nghịch đảo của mô phỏng hai chiều, tính chất hợp thành của mô phỏng hai chiều và hợp của các mô phỏng hai chiều. Bổ đề này được phát triển dựa trên Bổ đề 3.1 của Divroodi và Nguyen [13] với điểm khác biệt là nó được áp dụng cho một lớp lớn hơn các logic mô tả khác nhau như đã đề cập trong Mục 1.2.2 Chương 1.

Bổ đề 2.1.

1. *Quan hệ* $\{\langle x, x\rangle \mid x \in \Delta^{\mathcal{I}}\}$ *là một* $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$*-mô phỏng hai chiều giữa* $\mathcal{I}$ *và* $\mathcal{I}$.

2. *Nếu* Z *là một* $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$*-mô phỏng hai chiều giữa* $\mathcal{I}$ *và* $\mathcal{I}'$ *thì* Z^{-1} *cũng là một* $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$*-mô phỏng hai chiều giữa* $\mathcal{I}'$ *và* $\mathcal{I}$.

3. *Nếu* Z_1 *là một* $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$*-mô phỏng hai chiều giữa* $\mathcal{I}_0$ *và* $\mathcal{I}_1$, Z_2 *là một* $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$*-mô phỏng hai chiều giữa* $\mathcal{I}_1$ *và* $\mathcal{I}_2$ *thì* $Z_1 \circ Z_2$ *là một* $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$*-mô phỏng hai chiều giữa* $\mathcal{I}_0$ *và* $\mathcal{I}_2$.

4. *Nếu* $\mathcal{Z}$ *là một tập các* $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$*-mô phỏng hai chiều giữa* $\mathcal{I}$ *và* $\mathcal{I}'$ *thì* $\bigcup \mathcal{Z}$ *là một* $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$*-mô phỏng hai chiều giữa* $\mathcal{I}$ *và* $\mathcal{I}'$. ■

Chứng minh. Để chứng minh bổ đề này, chúng ta chứng minh lần lượt các khẳng định 1–4 của bổ đề. Với mỗi khẳng định, ta cần phải chỉ ra rằng quan hệ đó thỏa mãn 18 điều kiện của mô phỏng hai chiều theo Định nghĩa 2.1.

- Xét khẳng định (1) và giả sử có $\Sigma^\dagger \subseteq \Sigma$, $\Phi^\dagger \subseteq \Phi$. Xét $a \in \Sigma_I^\dagger$, $A \in \Sigma_C^\dagger$, $B \in \Sigma_A^\dagger \setminus \Sigma_C^\dagger$, $r \in \Sigma_{oR}^\dagger$, $\sigma \in \Sigma_{dR}^\dagger$, $d \in \mathit{range}(\sigma)$, $x, y \in \Delta^{\mathcal{I}}$, $x', y' \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Gọi Z là quan hệ $\{\langle x, x\rangle \mid x \in \Delta^{\mathcal{I}}\}$. Lúc đó, nếu $Z(x, x')$ thỏa mãn thì $x = x'$, và khi cần chúng ta chọn $y' = y$ thì quan hệ Z thỏa tất cả các điều kiện (2.1)–(2.18).

- Xét khẳng định (2) và giả sử Z là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$. Lúc đó $Z(x, x')$ thỏa mãn khi và chỉ khi $Z^{-1}(x', x)$ thỏa mãn. Bằng cách hoán vị x và x' cho nhau chúng ta dễ dàng thấy rằng quan hệ Z^{-1} thỏa tất cả các điều kiện (2.1)–(2.18).

- Xét khẳng định (3) và giả sử Z_1 là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều giữa $\mathcal{I}_0$ và $\mathcal{I}_1$, Z_2 là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều giữa $\mathcal{I}_1$ và $\mathcal{I}_2$. Giả sử có $\Sigma^\dagger \subseteq \Sigma$, $\Phi^\dagger \subseteq \Phi$. Xét $a \in \Sigma_I^\dagger$, $A \in \Sigma_C^\dagger$, $B \in \Sigma_A^\dagger \setminus \Sigma_C^\dagger$, $r \in \Sigma_{oR}^\dagger$, $\sigma \in \Sigma_{dR}^\dagger$, $d \in \mathit{range}(\sigma)$, $x_0, y_0 \in \Delta^{\mathcal{I}_0}$ và $x_2, y_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$. Đặt $Z = Z_1 \circ Z_2$. Chúng ta chứng minh Z là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều bằng cách chỉ ra rằng Z thỏa mãn tất cả các điều kiện (2.1)–(2.18).

- Xét điều kiện (2.1) và giả sử $Z_1(a^{\mathcal{I}_0}, a^{\mathcal{I}_1})$, $Z_2(a^{\mathcal{I}_1}, a^{\mathcal{I}_2})$ thỏa mãn. Vì $Z_1(a^{\mathcal{I}_0}, a^{\mathcal{I}_1})$ và $Z_2(a^{\mathcal{I}_1}, a^{\mathcal{I}_2})$ thỏa thỏa mãn nên ta có $(Z_1 \circ Z_2)(a^{\mathcal{I}_0}, a^{\mathcal{I}_2})$ thỏa mãn. Vậy $Z(a^{\mathcal{I}_0}, a^{\mathcal{I}_2})$ thỏa mãn.

- Xét điều kiện (2.2) và giả sử $Z(x_0, x_2)$ thỏa mãn. Vì $Z = Z_1 \circ Z_2$ nên tồn tại $x_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ sao cho $Z_1(x_0, x_1)$ và $Z_2(x_1, x_2)$ thỏa mãn. Do đó ta có $A^{\mathcal{I}_0}(x_0) \Leftrightarrow A^{\mathcal{I}_1}(x_1)$ và $A^{\mathcal{I}_1}(x_1) \Leftrightarrow A^{\mathcal{I}_2}(x_2)$. Từ đó suy ra $A^{\mathcal{I}_0}(x_0) \Leftrightarrow A^{\mathcal{I}_2}(x_2)$.

- Xét điều kiện (2.3) và giả sử $Z(x_0, x_2)$ thỏa mãn. Vì $Z = Z_1 \circ Z_2$ nên tồn tại $x_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ sao cho $Z_1(x_0, x_1)$ và $Z_2(x_1, x_2)$ thỏa mãn. Vì $Z_1(x_0, x_1)$ thỏa mãn nên ta có $B^{\mathcal{I}_0}(x_0) = B^{\mathcal{I}_1}(x_1)$ hoặc cả hai không xác định. Tương tự, $Z_1(x_0, x_1)$ thỏa mãn nên $B^{\mathcal{I}_1}(x_1) = B^{\mathcal{I}_2}(x_2)$ hoặc cả hai không xác định. Nếu $B^{\mathcal{I}_0}(x_0) = B^{\mathcal{I}_1}(x_1)$ thì $B^{\mathcal{I}_1}(x_1)$ xác định và $B^{\mathcal{I}_1}(x_1) = B^{\mathcal{I}_2}(x_2)$. Từ đó suy ra $B^{\mathcal{I}_0}(x_0) = B^{\mathcal{I}_1}(x_1) = B^{\mathcal{I}_2}(x_2)$. Nếu $B^{\mathcal{I}_0}(x_0)$ không xác định ta suy ra $B^{\mathcal{I}_1}(x_1)$ không xác định và ngược lại. Tương tự, khi $B^{\mathcal{I}_1}(x_1)$ không xác định ta suy ra $B^{\mathcal{I}_2}(x_2)$ không xác định và ngược lại. Từ đó ta có $B^{\mathcal{I}_0}(x_0)$ không xác định khi và chỉ khi $B^{\mathcal{I}_2}(x_2)$ không xác định.

- Xét điều kiện (2.4) và giả sử $Z(x_0, x_2)$ và $r^{\mathcal{I}_0}(x_0, y_0)$ thỏa mãn. Vì $Z = Z_1 \circ Z_2$ nên tồn tại $x_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ sao cho $Z_1(x_0, x_1)$ và $Z_2(x_1, x_2)$ thỏa mãn. Từ $Z_1(x_0, x_1)$ và $r^{\mathcal{I}_0}(x_0, y_0)$ thỏa mãn ta suy ra tồn tại $y_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ sao cho $Z_1(y_0, y_1)$ và $r^{\mathcal{I}_1}(x_1, y_1)$ thỏa mãn. Từ $Z_2(x_1, x_2)$ và $r^{\mathcal{I}_1}(x_1, y_1)$ thỏa mãn ta suy ra tồn tại $y_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ sao cho $Z_2(y_1, y_2)$ và $r^{\mathcal{I}_2}(x_2, y_2)$ thỏa mãn. Từ $Z_1(y_0, y_1)$ và $Z_2(y_1, y_2)$ thỏa mãn ta có $Z(y_0, y_2)$ thỏa mãn.

- Điều kiện (2.5) được chứng minh tương tự như điều kiện (2.4).

- Xét điều kiện (2.6) và giả sử $Z(x_0, x_2)$ thỏa mãn. Vì $Z = Z_1 \circ Z_2$ nên tồn tại $x_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ sao cho $Z_1(x_0, x_1)$ và $Z_2(x_1, x_2)$ thỏa mãn. $Z_1(x_0, x_1)$ và $Z_2(x_1, x_2)$ thỏa mãn nên ta có $\sigma^{\mathcal{I}_0}(x_0, d) \Leftrightarrow \sigma^{\mathcal{I}_1}(x_1, d)$ và $\sigma^{\mathcal{I}_1}(x_1, d) \Leftrightarrow \sigma^{\mathcal{I}_2}(x_2, d)$. Từ đó ta suy ra $\sigma^{\mathcal{I}_0}(x_0, d) \Leftrightarrow \sigma^{\mathcal{I}_2}(x_2, d)$.

- Điều kiện (2.7) trong trường hợp $\mathcal{I} \in \Phi^\dagger$ được chứng minh tương tự như điều kiện (2.4) bằng cách thay vai trò r bởi vai trò r^-.

- Tương tự, điều kiện (2.8) trong trường hợp $\mathcal{I} \in \Phi^\dagger$ cũng được chứng minh như điều kiện (2.4) và (2.7).

- Điều kiện (2.9) trong trường hợp $\mathcal{O} \in \Phi^\dagger$ được chứng minh bằng cách vận dụng kết quả của điều kiện (2.2) với khái niệm A được thay thế bởi khái niệm $\{a\}$.

- Xét điều kiện (2.10) trong trường hợp $\mathcal{N} \in \Phi^\dagger$ và giả sử $Z(x_0, x_2)$ thỏa mãn. Vì $Z = Z_1 \circ Z_2$ nên tồn tại $x_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ sao cho $Z_1(x_0, x_1)$ và $Z_2(x_1, x_2)$ thỏa mãn. Vì $Z_1(x_0, x_1)$ thỏa mãn nên ta có $\#\{y_0 \in \Delta^{\mathcal{I}_0} \mid r^{\mathcal{I}_0}(x_0, y_0)\} = \#\{y_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1} \mid r^{\mathcal{I}_1}(x_1, y_1)\}$. Tương tự, $Z_2(x_1, x_2)$ thỏa mãn nên ta có $\#\{y_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1} \mid r^{\mathcal{I}_1}(x_1, y_1)\} =$

$\#\{y_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2} \mid r^{\mathcal{I}_2}(x_2, y_2)\}$. Từ đó ta suy ra $\#\{y_0 \in \Delta^{\mathcal{I}_0} \mid r^{\mathcal{I}_0}(x_0, y_0)\} = \#\{y_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2} \mid r^{\mathcal{I}_2}(x_2, y_2)\}$.

- Điều kiện (2.11) trong trường hợp $\{\mathcal{N}, \mathcal{I}\} \subseteq \Phi^\dagger$ được chứng minh tương tự như điều kiện (2.10) bằng cách thay vai trò r bởi vai trò r^-.

- Xét điều kiện (2.12) trong trường hợp $\mathcal{F} \in \Phi^\dagger$ và giả sử $Z(x_0, x_2)$ thỏa mãn. Vì $Z = Z_1 \circ Z_2$ nên tồn tại $x_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ sao cho $Z_1(x_0, x_1)$ và $Z_2(x_1, x_2)$ thỏa mãn. Do $Z_1(x_0, x_1)$ và $Z_2(x_1, x_2)$ thỏa mãn nên ta có $[\#\{y_0 \in \Delta^{\mathcal{I}_0} \mid r^{\mathcal{I}_0}(x_0, y_0)\} \leq 1] \Leftrightarrow [\#\{y_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1} \mid r^{\mathcal{I}_1}(x_1, y_1)\} \leq 1]$ và $[\#\{y_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1} \mid r^{\mathcal{I}_1}(x_1, y_1)\} \leq 1] \Leftrightarrow [\#\{y_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2} \mid r^{\mathcal{I}_2}(x_2, y_2)\} \leq 1]$. Từ đó ta suy ra $[\#\{y_0 \in \Delta^{\mathcal{I}_0} \mid r^{\mathcal{I}_0}(x_0, y_0)\} \leq 1] \Leftrightarrow [\#\{y_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2} \mid r^{\mathcal{I}_2}(x_2, y_2)\} \leq 1]$.

- Điều kiện (2.13) trong trường hợp $\{\mathcal{F}, \mathcal{I}\} \subseteq \Phi^\dagger$ được chứng minh tương tự như điều kiện (2.12) bằng cách thay vai trò r bởi vai trò r^-.

- Xét điều kiện (2.14) trong trường hợp $\mathcal{Q} \in \Phi^\dagger$ và giả sử $Z(x_0, x_2)$ thỏa mãn. Vì $Z = Z_1 \circ Z_2$ nên tồn tại $x_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ sao cho $Z_1(x_0, x_1)$ và $Z_2(x_1, x_2)$ thỏa mãn. Do $Z_1(x_0, x_1)$ và $Z_2(x_1, x_2)$ thỏa mãn nên với mọi tên vai trò đối tượng $r \in \Sigma^\dagger_{oR}$ tồn tại một song ánh $h_1 : \{y_0 \in \Delta^{\mathcal{I}_0} \mid r^{\mathcal{I}_0}(x_0, y_0)\} \to \{y_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1} \mid r^{\mathcal{I}_1}(x_1, y_1)\}$ sao cho $h_1 \subseteq Z_1$ và một song ánh $h_2 : \{y_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1} \mid r^{\mathcal{I}_1}(x_1, y_1)\} \to \{y_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2} \mid r^{\mathcal{I}_2}(x_2, y_2)\}$ sao cho $h_2 \subseteq Z_2$. Đặt $h = h_2 \circ h_1$ là hàm hợp thành của h_1 và h_2. Rõ ràng $h : \{y_0 \in \Delta^{\mathcal{I}_0} \mid r^{\mathcal{I}_0}(x_0, y_0)\} \to \{y_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2} \mid r^{\mathcal{I}_2}(x_2, y_2)\}$ là một song ánh và $h \subseteq Z$.

- Điều kiện (2.15) trong trường hợp $\{\mathcal{Q}, \mathcal{I}\} \subseteq \Phi^\dagger$ được chứng minh tương tự như điều kiện (2.14) bằng cách thay vai trò r bởi vai trò r^-.

- Xét điều kiện (2.16) trong trường hợp $\mathcal{U} \in \Phi^\dagger$. Với mọi $x_0 \in \Delta^{\mathcal{I}_0}$ tồn tại $x_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ sao cho $Z(x_0, x_1)$ thỏa mãn và với mọi $x_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ tồn tại $x_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ sao cho $Z(x_1, x_2)$ thỏa mãn. Vì $Z = Z_1 \circ Z_2$, do đó với mọi $x_0 \in \Delta^{\mathcal{I}_0}$ tồn tại $x_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ sao cho $Z(x_0, x_2)$ thỏa mãn.

- Điều kiện (2.17) trong trường hợp $\mathcal{U} \in \Phi^\dagger$ được chứng minh tương tự như điều kiện (2.16).

- Xét điều kiện (2.18) trong trường hợp $\mathsf{Self} \in \Phi^\dagger$ và giả sử $Z(x_0, x_2)$ thỏa mãn. Vì $Z = Z_1 \circ Z_2$ nên tồn tại $x_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ sao cho $Z_1(x_0, x_1)$ và $Z_2(x_1, x_2)$ thỏa mãn. Vì $Z_1(x_0, x_1)$ và $Z_2(x_1, x_2)$ thỏa mãn nên ta có $r^{\mathcal{I}_0}(x_0, x_0) \Leftrightarrow r^{\mathcal{I}_1}(x_1, x_1)$ và $r^{\mathcal{I}_1}(x_1, x_1) \Leftrightarrow r^{\mathcal{I}_2}(x_2, x_2)$. Từ đó ta suy ra $r^{\mathcal{I}_0}(x_0, x_0) \Leftrightarrow r^{\mathcal{I}_2}(x_2, x_2)$.

- Khẳng định (4) cũng được chứng minh một cách dễ dàng bằng cách chỉ ra $Z = \bigcup \mathcal{Z}$ thỏa mãn tất cả các điều kiện (2.1)–(2.18). ■

2.2.2. Quan hệ tương tự hai chiều và quan hệ tương đương

Các định nghĩa sau đây phát biểu về quan hệ tương tự giữa các diễn dịch, quan hệ tương tự giữa các phần tử trong miền của diễn dịch và quan hệ tương đương trong một ngôn ngữ con cho trước [13, 55].

Định nghĩa 2.2. Cho $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là các diễn dịch trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. Ta nói rằng $\mathcal{I}$ $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-*tương tự hai chiều* với $\mathcal{I}'$ nếu tồn tại một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$. ■

Định nghĩa 2.3. Cho $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là các diễn dịch trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$, $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ và $x' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$. Ta nói rằng x $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-*tương tự hai chiều* với x' nếu tồn tại một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ sao cho $Z(x, x')$ thỏa mãn. ■

Định nghĩa 2.4. Cho $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là các diễn dịch trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$, $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ và $x' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$. Ta nói rằng x $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-*tương đương* với x' nếu với mọi khái niệm C của $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$, $x \in C^{\mathcal{I}}$ khi và chỉ khi $x' \in C^{\mathcal{I}'}$. ■

Theo Bổ đề 2.1, chúng ta thấy rằng quan hệ tương tự hai chiều giữa các diễn dịch là một quan hệ tương đương và quan hệ tương tự hai chiều giữa các phần tử trong diễn dịch cũng là một quan hệ tương đương bởi vì các quan hệ này đều thỏa mãn ba tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Ví dụ 2.1. Xét các diễn dịch $\mathcal{I}_1$ và $\mathcal{I}_2$ trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ như đã cho ở Ví dụ 1.9 và được mô tả như trong Hình 1.5 của Chương 1. Chúng ta thấy rằng:

- $\mathcal{I}_1$ $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương tự hai chiều với $\mathcal{I}_2$, trong đó $\Sigma^\dagger = \Sigma \setminus \{NickName\}$ và $\Phi^\dagger \subseteq \{\mathcal{I}, \mathcal{O}\}$,
- $\mathcal{I}_1$ không $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương tự hai chiều với $\mathcal{I}_2$, trong đó $\Sigma^\dagger = \Sigma$ và $\Phi^\dagger = \{\mathcal{N}\}$,
- $\mathcal{I}_1$ không $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương tự hai chiều với $\mathcal{I}_2$, trong đó $\Sigma^\dagger = \Sigma$ và $\Phi^\dagger = \{\mathcal{Q}\}$,
- x_3 (của diễn dịch $\mathcal{I}_1$) $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương tự hai chiều với y_3, y_5 (của diễn dịch $\mathcal{I}_2$), trong đó $\Sigma^\dagger = \Sigma \setminus \{NickName\}$ và $\Phi^\dagger \subseteq \{\mathcal{I}, \mathcal{O}\}$. ■

2.3. Tính bất biến đối với mô phỏng hai chiều

2.3.1. Quan hệ giữa mô phỏng hai chiều với các khái niệm và vai trò

Bổ đề 2.2 sau đây được phát biểu và chứng minh dựa trên Bổ đề 3.2 của công trình [13]. Điểm khác là nó được áp dụng cho một lớp lớn hơn các logic mô tả như đã đề cập trong Mục 1.2.2 của Chương 1.

Bổ đề 2.2. *Cho $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là các diễn dịch trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$, Z là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$. Lúc đó, với mọi khái niệm C của $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$, mọi vai trò đối tượng R của $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$, mọi đối tượng $x, y \in \Delta^{\mathcal{I}}$, $x', y' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$ và mọi cá thể $a \in \Sigma_I^\dagger$, các điều kiện sau sẽ được thỏa mãn:*

$$Z(x,x') \Rightarrow [C^{\mathcal{I}}(x) \Leftrightarrow C^{\mathcal{I}'}(x')] \tag{2.19}$$

$$[Z(x,x') \wedge R^{\mathcal{I}}(x,y)] \Rightarrow \exists y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid [Z(y,y') \wedge R^{\mathcal{I}'}(x',y')] \tag{2.20}$$

$$[Z(x,x') \wedge R^{\mathcal{I}'}(x',y')] \Rightarrow \exists y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid [Z(y,y') \wedge R^{\mathcal{I}}(x,y)], \tag{2.21}$$

nếu $\mathcal{O} \in \Phi^\dagger$ thì:

$$Z(x,x') \Rightarrow [R^{\mathcal{I}}(x,a^{\mathcal{I}}) \Leftrightarrow R^{\mathcal{I}'}(x',a^{\mathcal{I}'})]. \quad \blacksquare \tag{2.22}$$

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là các diễn dịch trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ và Z là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$. Chúng ta sẽ chứng minh bổ đề này bằng phương pháp đệ quy theo cấu trúc của khái niệm C và vai trò R.

- Xét khẳng định (2.19). Giả sử $Z(x,x')$ thỏa mãn với $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$, $x' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$ và C là một khái niệm bất kỳ của $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$. Chúng ta cần chứng minh nếu $C^{\mathcal{I}}(x)$ thỏa mãn thì $C^{\mathcal{I}'}(x')$ thỏa mãn và ngược lại. Giả sử $C^{\mathcal{I}}(x)$ thỏa mãn, chúng ta chứng minh $C^{\mathcal{I}'}(x')$ thỏa mãn. Việc chứng minh chiều ngược lại được thực hiện tương tự.

- Trường hợp C có dạng $\top, \bot$ hoặc A là những trường hợp tầm thường được suy ra trực tiếp từ điều kiện (2.2).
- Trường hợp C có dạng $A = d, A \neq d, A \leq d, A < d, A \geq d$ hoặc $A > d$ là những trường hợp tầm thường được suy ra trực tiếp từ điều kiện (2.3).
- Trường hợp $C \equiv \neg D$, vì $C^{\mathcal{I}}(x)$ thỏa mãn nên ta có $D^{\mathcal{I}}(x)$ không thỏa mãn. Vì $Z(x,x')$ thỏa mãn và $D^{\mathcal{I}}(x)$ không thỏa mãn nên ta suy ra $D^{\mathcal{I}'}(x')$ không thỏa mãn (thông qua giả thiết đệ quy của khẳng định (2.19)). Do đó $\neg D^{\mathcal{I}'}(x')$ thỏa mãn. Nói cách khác $C^{\mathcal{I}'}(x')$ thỏa mãn.
- Trường hợp $C \equiv D \sqcap D'$, vì $C(x)$ thỏa mãn nên $D^{\mathcal{I}}(x)$ và $D'^{\mathcal{I}}(x)$ thỏa mãn. Vì $Z(x,x')$, $D^{\mathcal{I}}(x)$ và $D'^{\mathcal{I}}(x)$ thỏa mãn nên ta có $D^{\mathcal{I}'}(x')$ và $D'^{\mathcal{I}'}(x')$ thỏa mãn (thông qua giả thiết đệ quy của khẳng định (2.19)). Do đó $C^{\mathcal{I}'}(x')$ thỏa mãn.
- Trường hợp $C \equiv D \sqcup D'$, vì $C(x)$ thỏa mãn nên $D^{\mathcal{I}}(x)$ hoặc $D'^{\mathcal{I}}(x)$ thỏa mãn. Không mất tính tổng quát ta giả sử $D^{\mathcal{I}}(x)$ thỏa mãn. Vì $Z(x,x')$ và $D^{\mathcal{I}}(x)$ thỏa mãn nên ta có $D^{\mathcal{I}'}(x')$ thỏa mãn (thông qua giả thiết đệ quy của khẳng định (2.19)). Do đó $C^{\mathcal{I}'}(x')$ thỏa mãn.

- Trường hợp $C \equiv \exists R.D$, vì $C^{\mathcal{I}}(x)$ thỏa mãn nên tồn tại $y \in \Delta^{\mathcal{I}}$ sao cho $R^{\mathcal{I}}(x,y)$ và $D^{\mathcal{I}}(y)$ thỏa mãn. Do $Z(x,x')$ và $R^{\mathcal{I}}(x,y)$ thỏa mãn nên tồn tại $y' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$ sao cho $Z(y,y')$ và $R^{\mathcal{I}'}(x',y')$ thỏa mãn (thông qua giả thiết đệ quy của khẳng định (2.20)). Vì $Z(y,y')$ và $D^{\mathcal{I}}(y)$ thoản mãn nên $D^{\mathcal{I}'}(y')$ thỏa mãn (thông qua giả thiết đệ quy của khẳng định (2.19)). Vì $R^{\mathcal{I}'}(x',y')$ và $D^{\mathcal{I}'}(y')$ thỏa mãn nên ta có $C^{\mathcal{I}'}(x')$ thỏa mãn.

- Trường hợp $C \equiv \forall R.D$, khái niệm C được biến đổi thành $\neg\exists R.\neg D$ và được chứng minh bằng cách vận dụng C có dạng là một khái niệm phủ định.

- Trường hợp $C \equiv \exists\sigma.\{d\}$, vì $C^{\mathcal{I}}(x)$ thỏa mãn nên ta có $\sigma^{\mathcal{I}}(x,d)$ thỏa mãn. Vì $Z(x,x')$ thỏa mãn nên theo điều kiện (2.6) ta có $\sigma^{\mathcal{I}'}(x',d)$ thỏa mãn. Do đó $C^{\mathcal{I}'}(x')$ thỏa mãn.

- Trường hợp $\mathcal{O} \in \Phi^\dagger$ và $C \equiv \{a\}$, vì $C^{\mathcal{I}}(x)$ thỏa mãn nên ta có $x = a^{\mathcal{I}}$. Do $Z(x,x')$ thỏa mãn nên theo điều kiện (2.9) ta có $x' = a^{\mathcal{I}'}$. Vậy $C^{\mathcal{I}'}(x')$ thỏa mãn.

- Trường hợp $\mathcal{F} \in \Phi^\dagger$ và $C \equiv (\leq 1\, R)$, trong đó R là một vai trò đối tượng cơ bản. Vì $Z(x,x')$ thỏa mãn nên ta có $[\#\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid R^{\mathcal{I}}(x,y)\} \leq 1] \Leftrightarrow [\#\{y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid R^{\mathcal{I}'}(x',y')\} \leq 1]$. Vì $C^{\mathcal{I}}(x)$ thỏa mãn nên $\#\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid R^{\mathcal{I}}(x,y)\} \leq 1$ và do đó $\#\{y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid R^{\mathcal{I}'}(x',y')\} \leq 1$. Từ đó suy ra $C^{\mathcal{I}'}(x')$ thỏa mãn.

- Trường hợp $\mathcal{N} \in \Phi^\dagger$ và $C \equiv (\geq n\, R)$, trong đó R là một vai trò đối tượng cơ bản. Vì $Z(x,x')$ thỏa mãn nên ta có $\#\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid R^{\mathcal{I}}(x,y)\} = \#\{y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid R^{\mathcal{I}'}(x',y')\}$. Vì $C^{\mathcal{I}}(x)$ thỏa mãn nên $\#\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid R^{\mathcal{I}}(x,y)\} \geq n$ và do đó $\#\{y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid R^{\mathcal{I}'}(x',y')\} \geq n$. Từ đó suy ra $C^{\mathcal{I}'}(x')$ thỏa mãn.

- Trường hợp $\mathcal{N} \in \Phi^\dagger$ và $C \equiv (\leq n\, R)$, trong đó R là một vai trò đối tượng cơ bản được chứng minh tương tự như trên.

- Trường hợp $\mathcal{Q} \in \Phi^\dagger$ và $C \equiv (\geq n\, R.D)$, trong đó R là một vai trò đối tượng cơ bản. Vì $Z(x,x')$ thỏa mãn nên tồn tại một song ánh $h : \{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid R^{\mathcal{I}}(x,y)\} \to \{y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid R^{\mathcal{I}}(x',y')\}$ sao cho $h \subseteq Z$. Vì $C^{\mathcal{I}}(x)$ thỏa mãn nên tồn tại các đối tượng $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \Delta^{\mathcal{I}}$ khác nhau từng đôi một sao cho $R^{\mathcal{I}}(x,y_i)$ và $D^{\mathcal{I}}(y_i)$ thỏa mãn với mọi $1 \leq i \leq n$. Đặt $y'_i = h(y_i)$. Vì $h \subseteq Z$ nên ta có $Z(y_i,y'_i)$ thỏa mãn. Từ $Z(y_i,y'_i)$ và $D^{\mathcal{I}}(y_i)$ thỏa mãn ta suy ra $D^{\mathcal{I}'}(y'_i)$ thỏa mãn (thông qua giả thiết đệ quy của khẳng định (2.19)). Do $R^{\mathcal{I}'}(x',y'_i)$ và $D^{\mathcal{I}'}(y'_i)$ thỏa mãn với mọi $1 \leq i \leq n$ nên $C^{\mathcal{I}'}(x')$ thỏa mãn.

- Trường hợp $\mathcal{Q} \in \Phi^\dagger$ và $C \equiv (\leq n\, R.D)$, trong đó R là một vai trò đối tượng cơ bản. Khái niệm C được biến đổi thành $\neg(\geq (n+1)\, R.D)$ và được chứng minh bằng cách vận dụng C là một khái niệm có dạng phủ định.

- Trường hợp $\mathsf{Self} \in \Phi^\dagger$ và $C \equiv \exists r.\mathsf{Self}$, vì $C^{\mathcal{I}}(x)$ thỏa mãn nên ta có $r^{\mathcal{I}}(x,x)$ thỏa mãn. Vì $r^{\mathcal{I}}(x,x)$ thỏa mãn nên theo điều kiện (2.18) ta có $r^{\mathcal{I}'}(x',x')$ thỏa mãn. Do đó $C^{\mathcal{I}'}(x')$ thỏa mãn.

- Xét khẳng định (2.20). Giả sử $Z(x,x')$ và $R^{\mathcal{I}}(x,y)$ thỏa mãn với $x,y \in \Delta^{\mathcal{I}}$ và $x' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$, trong đó R là một vai trò đối tượng cơ bản của $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$. Chúng ta chứng minh tồn tại $y' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$ sao cho $Z(y,y')$ và $R^{\mathcal{I}'}(x',y')$ thỏa mãn.

- Trường hợp R là một vai trò nguyên tố (tên vai trò đối tượng), theo điều kiện (2.4) ta suy ra khẳng định là đúng.

- Trường hợp $R \equiv S_1 \circ S_2$, ta có $(S_1 \circ S_2)^{\mathcal{I}}(x,x')$ thỏa mãn. Do đó tồn tại một $z \in \Delta^{\mathcal{I}}$ sao cho $S_1^{\mathcal{I}}(x,z)$ và $S_2^{\mathcal{I}}(z,y)$ thỏa mãn. Vì $Z(x,x')$ và $S_1^{\mathcal{I}}(x,z)$ thỏa mãn nên tồn tại $z' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$ sao cho $Z(z,z')$ và $S_1^{\mathcal{I}'}(x',z')$ thỏa mãn (thông qua giả thiết đệ quy của khẳng định (2.20)). Vì $Z(z,z')$ và $S_2^{\mathcal{I}}(z,y)$ thỏa mãn nên tồn tại $y' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$ sao cho $Z(y,y')$ và $S_2^{\mathcal{I}'}(z',y')$ thỏa mãn (thông qua giả thiết đệ quy của khẳng định (2.20)). Vì $S_1^{\mathcal{I}'}(x',z')$ và $S_2^{\mathcal{I}'}(z',y')$ thỏa mãn nên ta suy ra $(S_1 \circ S_2)^{\mathcal{I}'}(x',y')$ thỏa mãn. Vậy ta có $Z(y,y')$ và $R^{\mathcal{I}'}(x',y')$ thỏa mãn.

- Trường hợp $R \equiv S_1 \sqcup S_2$, ta có $(S_1 \sqcup S_2)^{\mathcal{I}}(x,y)$ thỏa mãn. Điều này suy ra rằng $S_1^{\mathcal{I}}(x,y)$ hoặc $S_2^{\mathcal{I}}(x,y)$ thỏa mãn. Không làm mất tính tổng quát, ta giả sử $S_1^{\mathcal{I}}(x,y)$ thỏa mãn. Vì $Z(x,x')$ và $S_1^{\mathcal{I}}(x,y)$ thỏa mãn nên tồn tại $y' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$ sao cho $Z(y,y')$ và $S_1^{\mathcal{I}'}(x',y')$ thỏa mãn (thông qua giả thiết đệ quy của khẳng định (2.20)). Vậy ta có $Z(y,y')$ và $(S_1 \sqcup S_2)^{\mathcal{I}'}(x',y')$ thỏa mãn. Hay nói cách khác $Z(y,y')$ và $R^{\mathcal{I}'}(x',y')$ thỏa mãn.

- Trường hợp $R \equiv S^*$, vì $R^{\mathcal{I}}(x,y)$ thỏa mãn nên tồn tại $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \Delta^{\mathcal{I}}$ với $k \geq 0$ sao cho $x_0 = x$, $x_k = y$ và $S^{\mathcal{I}}(x_{i-1}, x_i)$ thỏa mãn với $1 \leq i \leq k$. Đặt $x'_0 = x'$. Với $1 \leq i \leq k$ ta có $Z(x_{i-1}, x'_{i-1})$ và $S^{\mathcal{I}}(x_{i-1}, x_i)$ thỏa mãn nên tồn tại $x'_i \in \Delta^{\mathcal{I}'}$ sao cho $Z(x_i, x'_i)$ và $S^{\mathcal{I}'}(x'_{i-1}, x'_i)$ thỏa mãn (thông qua giả thiết đệ quy của khẳng định (2.20)). Đặt $y' = x'_k$. Vì $Z(x_k, x'_k)$ và $(S^*)^{\mathcal{I}'}(x'_0, x'_k)$ thỏa mãn nên $Z(y,y')$ và $R^{\mathcal{I}'}(x',y')$ thỏa mãn.

- Trường hợp $R \equiv (D?)$, vì $R^{\mathcal{I}}(x,y)$ thỏa mãn nên ta có $D^{\mathcal{I}}(x)$ thỏa mãn và $x = y$. Vì $Z(x,x')$ và $D^{\mathcal{I}}(x)$ thỏa mãn nên $D^{\mathcal{I}'}(x')$ thỏa mãn (thông qua giả thiết đệ quy của khẳng định (2.19)) và do đó $R^{\mathcal{I}'}(x',x')$ thỏa mãn. Chọn $y' = x'$ ta có $Z(y,y')$ và $R^{\mathcal{I}'}(x',y')$ thỏa mãn.

- Trường hợp $R \equiv \varepsilon$, vì $R^{\mathcal{I}}(x, y)$ thỏa mãn nên ta có $x = y$. Chọn $y' = x'$. Vì $Z(x, x')$ thỏa mãn nên ta có $Z(y, y')$ và $R^{\mathcal{I}'}(x', y')$ thỏa mãn.

- Trường hợp $\mathcal{I} \in \Phi^\dagger$ và $R \equiv r^-$, khẳng định được chứng minh bằng cách suy luận từ điều kiện (2.7).

- Trường hợp $\mathcal{U} \in \Phi^\dagger$ và $R \equiv U$, vì $Z(x, x')$ và $R^{\mathcal{I}}(x, y)$ thỏa mãn. Theo điều kiện (2.16), tồn tại $y' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$ sao cho $Z(y, y')$ thỏa mãn. Như vậy $Z(y, y')$ và $R^{\mathcal{I}'}(x', y')$ thỏa mãn.

- Khẳng định (2.21) được chứng minh tương tự như (2.20).

- Xét khẳng định (2.22) trong trường hợp $\mathcal{O} \in \Phi^\dagger$. Với $a \in \Sigma_I^\dagger$, $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ và $x' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$, giả sử $Z(x, x')$ thỏa mãn chúng ta cần chứng minh nếu $R^{\mathcal{I}}(x, a^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn thì $R^{\mathcal{I}'}(x', a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn và ngược lại. Giả sử $R^{\mathcal{I}}(x, a^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn chúng ta chứng minh $R^{\mathcal{I}'}(x', a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn. Việc chứng minh chiều ngược lại được thực hiện tương tự.

- Trường hợp R là một vai trò nguyên tố (tên vai trò đối tượng), theo điều kiện (2.4) và (2.9) ta suy ra khẳng định là đúng.

- Trường hợp $R \equiv S_1 \circ S_2$, vì $R^{\mathcal{I}}(x, a^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn nên ta có $(S_1 \circ S_2)^{\mathcal{I}}(x, a^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn. Do đó tồn tại một $z \in \Delta^{\mathcal{I}}$ sao cho $S_1^{\mathcal{I}}(x, z)$ và $S_2^{\mathcal{I}}(z, a^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn. Vì $Z(x, x')$ và $S_1^{\mathcal{I}}(x, z)$ thỏa mãn nên tồn tại $z' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$ sao cho $Z(z, z')$ và $S_1^{\mathcal{I}'}(x', z')$ thỏa mãn (thông qua giả thiết đệ quy của khẳng định (2.20)). Vì $Z(z, z')$ và $S_2^{\mathcal{I}}(z, a^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn nên ta suy ra $S_2^{\mathcal{I}'}(z', a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn (thông qua giả thiết đệ quy của khẳng định (2.22)). Vì $S_1^{\mathcal{I}'}(x', z')$ và $S_2^{\mathcal{I}'}(z', a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn nên ta có $(S_1 \circ S_2)^{\mathcal{I}'}(x', a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn. Như vậy $R^{\mathcal{I}'}(x', a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn.

- Trường hợp $R \equiv S_1 \sqcup S_2$, vì $R^{\mathcal{I}}(x, a^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn nên ta có $(S_1 \sqcup S_2)^{\mathcal{I}}(x, a^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn. Điều này suy ra rằng $S_1^{\mathcal{I}}(x, a^{\mathcal{I}})$ hoặc $S_2^{\mathcal{I}}(x, a^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn. Không làm mất tính tổng quát, ta giả sử $S_1^{\mathcal{I}}(x, a^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn. Vì $Z(x, x')$ và $S_1^{\mathcal{I}}(x, a^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn nên $S_1^{\mathcal{I}'}(x', a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn (thông qua giả thiết đệ quy của khẳng định (2.22)). Vì $S_1^{\mathcal{I}'}(x', a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn nên $(S_1 \sqcup S_2)^{\mathcal{I}'}(x', a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn. Do đó $R^{\mathcal{I}'}(x', a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn.

- Trường hợp $R \equiv S^*$, vì $R^{\mathcal{I}}(x, a^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn nên tồn tại $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \Delta^{\mathcal{I}}$ với $k \geq 0$ sao cho $x_0 = x$, $x_k = a^{\mathcal{I}}$ và $S^{\mathcal{I}}(x_{i-1}, x_i)$ thỏa mãn với $1 \leq i \leq k$.

  \+ Nếu $k = 0$, ta có $x = a^{\mathcal{I}}$. Do $Z(x, x')$ thỏa mãn nên theo điều kiện (2.9) ta có $x' = a^{\mathcal{I}'}$. Vì vậy $R^{\mathcal{I}'}(x', a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn.

  \+ Nếu $k > 0$, đặt $x'_0 = x'$. Với $1 \leq i < k$ ta có $Z(x_{i-1}, x'_{i-1})$ và $S^{\mathcal{I}}(x_{i-1}, x_i)$ thỏa mãn nên tồn tại $x'_i \in \Delta^{\mathcal{I}}$ sao cho $Z(x_i, x'_i)$ và $S^{\mathcal{I}'}(x'_{i-1}, x'_i)$ thỏa mãn (thông qua giả thiết đệ quy của khẳng định (2.20)). Do đó $Z(x_{k-1}, x'_{k-1})$ và $(S^*)^{\mathcal{I}'}(x'_0, x'_{k-1})$ thỏa mãn. Vì $Z(x_{k-1}, x'_{k-1})$ và $S^{\mathcal{I}}(x_{k-1}, a^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn nên ta có $S^{\mathcal{I}'}(x'_{k-1}, a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn (thông qua giả thiết đệ quy của khẳng định (2.22)). Vì $(S^*)^{\mathcal{I}}(x'_0, x'_{k-1})$ và $S^{\mathcal{I}'}(x'_{k-1}, a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn nên $(S^*)^{\mathcal{I}}(x'_0, a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn. Nghĩa là $R^{\mathcal{I}'}(x', a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn.

- Trường hợp $R \equiv (D?)$, vì $R^{\mathcal{I}}(x, a^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn nên ta có $x = a^{\mathcal{I}}$ và $D^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn. Vì $Z(x, x')$ thỏa mãn nên theo điều kiện (2.9) thì $x' = a^{\mathcal{I}'}$. Từ $Z(a^{\mathcal{I}}, a^{\mathcal{I}'})$ và $D^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn ta có $D^{\mathcal{I}'}(a^{\mathcal{I}'})$ (thông qua giả thiết đệ quy của khẳng định (2.19)). Từ $x' = a^{\mathcal{I}'}$ và $D^{\mathcal{I}'}(a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn ta suy ra $R^{\mathcal{I}'}(x', a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn.

- Trường hợp $R \equiv \varepsilon$, vì $R^{\mathcal{I}}(x, a^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn nên ta có $x = a^{\mathcal{I}}$. Vì $Z(x, x')$ nên theo điều kiện (2.9) ta có $x' = a^{\mathcal{I}'}$. Do đó $R^{\mathcal{I}'}(x', a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn.

- Trường hợp $\mathcal{I} \in \Phi^\dagger$ và $R \equiv r^-$, khẳng định được chứng minh bằng cách suy luận từ điều kiện (2.7) và khẳng định (2.21).

- Trường hợp $\mathcal{U} \in \Phi^\dagger$ và $R \equiv U$, theo định nghĩa diễn dịch của vai trò U, ta có $R^{\mathcal{I}}(x, a^{\mathcal{I}})$ và $R^{\mathcal{I}'}(x', a^{\mathcal{I}'})$ luôn thỏa mãn. ∎

2.3.2. Tính bất biến của khái niệm

Tính bất biến của khái niệm đối với mô phỏng hai chiều là một trong những tính chất quan trọng trong việc mô hình hóa tính không phân biệt được của các đối tượng. Divroodi và Nguyen [13], Nguyen và Szałas [55] đã định nghĩa về khái niệm bất biến trong logic mô tả như sau.

Định nghĩa 2.5 (Khái niệm bất biến)**.** Một khái niệm C được gọi là *bất biến đối với $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều* nếu $Z(x, x')$ thỏa mãn thì $x \in C^{\mathcal{I}}$ khi và chỉ khi $x' \in C^{\mathcal{I}'}$ với mọi diễn dịch $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ thỏa $\Sigma^\dagger \subseteq \Sigma$, $\Phi^\dagger \subseteq \Sigma$ và với mọi $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều Z giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$. ∎

Định lý 2.1 sau đây được phát triển và chứng minh dựa trên Định lý 3.4 của Divroodi và Nguyen [13]. Điểm khác ở đây là nó được áp dụng cho một lớp lớn hơn các logic mô tả như đã đề cập trong Mục 1.2.2 của Chương 1.

Định lý 2.1. *Tất cả các khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ đều bất biến đối với $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều.* ∎

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là các diễn dịch trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$, Z là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$, $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ và $x' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$ sao cho $Z(x, x')$ thỏa mãn và C là một khái niệm bất kỳ của $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$. Áp dụng khẳng định (2.19) của Bổ đề 2.2 ta có $C^{\mathcal{I}}(x) \Leftrightarrow C^{\mathcal{I}'}(x')$. Nghĩa là, $Z(x,x')$ thỏa mãn thì $x \in C^{\mathcal{I}}$ khi và chỉ khi $x' \in C^{\mathcal{I}'}$. Theo Định nghĩa 2.5, C là một khái niệm bất biến. ∎

Định lý này cho phép mô hình hóa tính không phân biệt được của các đối tượng thông qua ngôn ngữ con $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$. Tính không phân biệt của các đối tượng là một trong những đặc trưng cơ bản trong quá trình phân lớp dữ liệu. Điều này có nghĩa là chúng ta có thể sử dụng ngôn ngữ con $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ cho các bài toán học máy trong logic mô tả.

2.3.3. Tính bất biến của cơ sở tri thức

Các định nghĩa, định lý, hệ quả trình bày trong mục này được xây dựng và chứng minh dựa trên những kết quả của công trình [13]. Điểm khác ở đây là các kết quả được phát triển trên lớp các logic mô tả lớn hơn đã đề cập trong Mục 1.2.2 của Chương 1.

Định nghĩa 2.6. Một TBox $\mathcal{T}$ (tương ứng, ABox $\mathcal{A}$) trong $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ được gọi là *bất biến đối với $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều* nếu với mọi diễn dịch $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ tồn tại một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ sao cho $\mathcal{I}$ là mô hình của $\mathcal{T}$ (tương ứng, $\mathcal{A}$) khi và chỉ khi $\mathcal{I}'$ là mô hình của $\mathcal{T}$ (tương ứng, $\mathcal{A}$). ∎

Hệ quả 2.1. *Nếu $\mathcal{U} \in \Phi^\dagger$ thì tất cả các TBox trong $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ đều bất biến đối với $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều.* ∎

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{U} \in \Phi^\dagger$, $\mathcal{T}$ là một TBox trong $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$, $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là các diễn dịch trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$, Z là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$. Chúng ta cần chứng minh nếu $\mathcal{I}$ là mô hình của $\mathcal{T}$ thì $\mathcal{I}'$ cũng là mô hình của $\mathcal{T}$ và ngược lại. Giả sử $\mathcal{I}$ là mô hình của $\mathcal{T}$, ta cần chỉ ra rằng $\mathcal{I}'$ cũng là mô hình của $\mathcal{T}$. Chiều ngược lại được chứng minh tương tự.

Xét $C \sqsubseteq D$ là một tiên đề thuật ngữ bất kỳ của TBox $\mathcal{T}$ và $x' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$. Theo điều kiện (2.17), tồn tại $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ sao cho $Z(x,x')$ thỏa mãn. Vì $\mathcal{I}$ là mô hình của $\mathcal{T}$ nên ta có $x \in (\neg C \sqcup D)^{\mathcal{I}}$. Theo khẳng định (2.19) của Bổ đề 2.2 ta suy ra $x' \in (\neg C \sqcup D)^{\mathcal{I}'}$. Do vậy $\mathcal{I}'$ cũng là mô hình của $\mathcal{T}$. ∎

Một diễn dịch $\mathcal{I}$ trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ được gọi là *kết nối đối tượng được đối với $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$* nếu với mọi đối tượng $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ tồn tại cá thể $a \in \Sigma_I^\dagger$, các đối tượng $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \Delta^{\mathcal{I}}$ và các vai trò đối tượng cơ bản $R_1, R_2, \ldots, R_k$ của $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ với $k \geq 0$ sao cho $x_0 = a^{\mathcal{I}}$, $x_k = x$ và $R_i^{\mathcal{I}}(x_{i-1}, x_i)$ thỏa mãn với mọi $1 \leq i \leq k$.

Định lý 2.2. *Cho $\mathcal{T}$ là một TBox trong $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$, $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là các diễn dịch trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ thỏa điều kiện kết nối đối tượng được đối với $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ sao cho tồn tại một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô* *phỏng hai chiều giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$. Lúc đó $\mathcal{I}$ là mô hình của $\mathcal{T}$ khi và chỉ khi $\mathcal{I}'$ là mô hình của $\mathcal{T}$.* ∎

Chứng minh. Gọi $\mathcal{T}$ là một TBox trong $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$. Giả sử $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là các diễn dịch kết nối đối tượng được trong $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$, Z là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$. Chúng ta cần chứng minh nếu $\mathcal{I}$ là mô hình của $\mathcal{T}$ thì $\mathcal{I}'$ cũng là mô hình của $\mathcal{T}$ và ngược lại. Giả sử $\mathcal{I}$ là mô hình của $\mathcal{T}$, ta cần chỉ ra $\mathcal{I}'$ là mô hình của $\mathcal{T}$. Chiều ngược lại được chứng minh tương tự.

Xét $C \sqsubseteq D$ là một tiên đề bất kỳ của TBox $\mathcal{T}$. Để chứng minh $\mathcal{I}'$ cũng là mô hình của $\mathcal{T}$, chúng ta cần chỉ ra rằng $C^{\mathcal{I}'} \subseteq D^{\mathcal{I}'}$. Nghĩa là, với mọi $x' \in C^{\mathcal{I}'}$ thì $x' \in D^{\mathcal{I}'}$. Vì $\mathcal{I}'$ là một diễn dịch kết nối đối tượng được trong $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ nên tồn tại cá thể $a \in \Sigma_I^\dagger$, các đối tượng $x'_0, x'_1, \ldots, x'_k \in \Delta^{\mathcal{I}'}$ và các vai trò đối tượng cơ bản $R_1, R_2, \ldots, R_k$ của $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ với $k \geq 0$ sao cho $x'_0 = a^{\mathcal{I}'}$, $x'_k = x'$ và $R_i^{\mathcal{I}'}(x'_{i-1}, x'_i)$ thỏa mãn với mọi $1 \leq i \leq k$.

Vì Z là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ nên ta có $Z(a^{\mathcal{I}}, a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn (theo điều kiện (2.1)). Đặt $x_0 = a^{\mathcal{I}}$. Với mỗi $1 \leq i \leq k$, ta có $Z(x_{i-1}, x'_{i-1})$ và $R_i^{\mathcal{I}'}(x'_{i-1}, x'_i)$ thỏa mãn nên tồn tại $x_i \in \Delta^{\mathcal{I}}$ sao cho $Z(x_i, x'_i)$ và $R_i^{\mathcal{I}}(x_{i-1}, x_i)$ thỏa mãn (theo khẳng định (2.21)). Đặt $x = x_k$, ta có $Z(x, x')$ thỏa mãn. Vì $x' \in C^{\mathcal{I}'}$ nên $x \in C^{\mathcal{I}}$ (theo khẳng định (2.19)). Do $\mathcal{I}$ là mô hình của $\mathcal{T}$ nên ta có $x \in D^{\mathcal{I}}$. Từ $Z(x, x')$ thỏa mãn và $x \in D^{\mathcal{I}}$ ta suy ra $x' \in D^{\mathcal{I}'}$ (theo khẳng định (2.19)). Do vậy $\mathcal{I}'$ là mô hình của $\mathcal{T}$. ∎

Định lý 2.3. *Cho $\mathcal{A}$ là một ABox trong $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$. Nếu $\mathcal{O} \in \Phi^\dagger$ hoặc $\mathcal{A}$ chỉ chứa các khẳng định dạng $C(a)$ thì $\mathcal{A}$ bất biến đối với $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều.* ∎

Chứng minh. Giả thiết $\mathcal{O} \in \Phi^\dagger$ hoặc $\mathcal{A}$ chỉ chứa các khẳng định dạng $C(a)$. Gọi $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là các diễn dịch trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$, Z là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$. Chúng ta cần chứng minh nếu $\mathcal{I}$ là mô hình của $\mathcal{A}$ thì $\mathcal{I}'$ cũng là mô hình của $\mathcal{A}$ và ngược lại. Giả sử $\mathcal{I}$ là mô hình của $\mathcal{A}$, chúng ta cần chỉ ra $\mathcal{I}'$ cũng là mô hình của $\mathcal{A}$. Chiều ngược lại được chứng minh tương tự.

Xét φ là một khẳng định bất kỳ của $\mathcal{A}$, chúng ta cần chỉ ra $\mathcal{I}' \models \varphi$.

- Trường hợp $\varphi = (a = b)$, vì $\mathcal{I} \models \varphi$ nên ta có $a^{\mathcal{I}} = b^{\mathcal{I}}$. Theo điều kiện (2.1) thì $Z(a^{\mathcal{I}}, a^{\mathcal{I}'})$ và $Z(b^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn. Vì $a^{\mathcal{I}} = b^{\mathcal{I}}$ nên theo (2.9) ta có $a^{\mathcal{I}'} = b^{\mathcal{I}'}$. Do vậy $\mathcal{I}' \models \varphi$.

- Trường hợp $\varphi = (a \neq b)$ được chứng minh tương tự như trường hợp trên.

- Trường hợp $\varphi = C(a)$, vì $\mathcal{I} \models \varphi$ nên ta có $C^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn. Theo điều kiện (2.1) thì $Z(a^{\mathcal{I}}, a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn. Vì $Z(a^{\mathcal{I}}, a^{\mathcal{I}'})$ và $C^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn nên theo khẳng định (2.19) thì $C^{\mathcal{I}'}(a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn. Do vậy $\mathcal{I}' \models \varphi$.

- Trường hợp $\varphi = R(a,b)$, vì $\mathcal{I} \models \varphi$ nên ta có $R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn. Theo điều kiện (2.1) thì $Z(a^{\mathcal{I}}, a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn. Vì $Z(a^{\mathcal{I}}, a^{\mathcal{I}'})$ và $R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn nên theo khẳng định (2.20), tồn tại $y' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$ sao cho $Z(b^{\mathcal{I}}, y')$ và $R^{\mathcal{I}'}(a^{\mathcal{I}'}, y')$ thỏa mãn. Theo giả thiết $\mathcal{O} \in \Phi^\dagger$, ta chọn $C \equiv \{b\}$. Vì $Z(b^{\mathcal{I}}, y')$ và $C^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}})$ thỏa mãn nên ta có $C^{\mathcal{I}'}(y')$ thỏa mãn (theo khẳng định (2.19)). Điều này có nghĩa là $y' = b^{\mathcal{I}'}$ và $R^{\mathcal{I}'}(a^{\mathcal{I}'}, b^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn. Do vậy $\mathcal{I}' \models \varphi$.

- Trường hợp $\varphi = \neg R(a,b)$ được chứng minh tương tự như trường hợp trên. ∎

Hệ quả sau đây xem xét cơ sở tri thức trong trường hợp RBox bằng rỗng. Lúc đó cơ sở tri thức chỉ còn TBox và ABox và do đó tính bất biến của cơ sở tri thức có thể được suy ra trực tiếp từ Định lý 2.2 và Định lý 2.3.

Hệ quả 2.2. *Cho cơ sở tri thức $\mathcal{KB} = \langle \mathcal{R}, \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$ trong $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ sao cho $\mathcal{R} = \emptyset$ và giả thiết $\mathcal{O} \in \Phi^\dagger$ hoặc $\mathcal{A}$ chỉ chứa các khẳng định có dạng $C(a)$, $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là các diễn dịch kết nối đối tượng được trong $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ sao cho tồn tại một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$. Lúc đó $\mathcal{I}$ là mô hình của $\mathcal{KB}$ khi và chỉ khi $\mathcal{I}'$ là mô hình của $\mathcal{KB}$.* ∎

2.4. Tính chất Hennessy-Milner đối với mô phỏng hai chiều

Định nghĩa 2.7. Một diễn dịch $\mathcal{I}$ trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ được gọi là *phân nhánh hữu hạn* (hay *hữu hạn ảnh*) đối với $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ nếu với mọi $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ và với mọi vai trò $r \in \Sigma^\dagger_{oR}$ thì:

- tập $\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid r^{\mathcal{I}}(x,y)\}$ là hữu hạn,
- nếu $\mathcal{I} \in \Phi^\dagger$ thì tập $\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid r^{\mathcal{I}}(y,x)\}$ là hữu hạn. ∎

Tính chất Hennessy-Milner đối với mô phỏng hai chiều trong Đinh lý 2.4 và Hệ quả 2.3 sau đây được phát triển và chứng minh dựa trên các kết quả của nghiên cứu [13] cho một lớp lớn hơn các logic mô tả.

Định lý 2.4 (Tính chất Hennessy-Milner)**.** *Cho Σ và $\Sigma^\dagger$ là các bộ ký tự logic mô tả sao cho $\Sigma^\dagger \subseteq \Sigma$, Φ và $\Phi^\dagger$ là tập các đặc trưng của logic mô tả sao cho $\Phi^\dagger \subseteq \Phi$, $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là các diễn dịch trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ thỏa mãn điều kiện phân nhánh hữu hạn đối với $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$, sao cho với mọi $a \in \Sigma^\dagger_I$, $a^{\mathcal{I}}$ $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với $a^{\mathcal{I}'}$. Giả thiết rằng $\mathcal{U} \notin \Phi^\dagger$ hoặc $\Sigma^\dagger_I \neq \emptyset$. Lúc đó, $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với $x' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$ khi và chỉ khi tồn tại một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều Z giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ sao cho $Z(x,x')$ thỏa mãn.* ∎

Chứng minh. Giả sử Σ và $\Sigma^\dagger$ là các bộ ký tự logic mô tả sao cho $\Sigma^\dagger \subseteq \Sigma$, Φ và $\Phi^\dagger$ là tập các đặc trưng của logic mô tả sao cho $\Phi^\dagger \subseteq \Phi$, $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là các diễn dịch trong

$\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ thỏa mãn điều kiện phân nhánh hữu hạn đối với $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$, sao cho với mọi $a \in \Sigma_I^\dagger$, $a^\mathcal{I}$ $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với $a^{\mathcal{I}'}$. Giả thiết rằng $\mathcal{U} \notin \Phi^\dagger$ hoặc $\Sigma_I^\dagger \neq \emptyset$. Ta cần phải chứng minh: (*) Với $x \in \Delta^\mathcal{I}$ và $x' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$, nếu x $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với x' thì tồn tại một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều Z giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ sao cho $Z(x,x')$ thỏa mãn. (**) Nếu tồn tại một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều Z giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ sao cho $Z(x,x')$ thỏa mãn thì x $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với x', trong đó $x \in \Delta^\mathcal{I}$ và $x' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$.

Đầu tiên, ta chứng minh khẳng định (*). Giả sử có $x \in \Delta^\mathcal{I}$, $x' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$ thỏa mãn x $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với x'. Ta định nghĩa quan hệ Z như sau:

$$Z = \{\langle x, x'\rangle \in \Delta^\mathcal{I} \times \Delta^{\mathcal{I}'} \mid x\ \mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}\text{-tương đương với } x'\},$$

và chỉ ra rằng Z là một mô phỏng hai chiều giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$.

- Xét điều kiện (2.1), vì theo giả thiết $a^\mathcal{I}$ $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với $a^{\mathcal{I}'}$ nên $Z(a^\mathcal{I}, a^{\mathcal{I}'})$ thỏa mãn.

- Xét điều kiện (2.2) và giả sử $Z(x,x')$ thỏa mãn. Theo định nghĩa của quan hệ Z và quan hệ $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương, ta có $A^\mathcal{I}(x)$ thỏa mãn khi và chỉ khi $A^{\mathcal{I}'}(x')$ thỏa mãn với mọi tên khái niệm $A \in \Sigma_C^\dagger$.

- Xét điều kiện (2.3) và giả sử $Z(x,x')$ thỏa mãn. Nếu $B^\mathcal{I}(x)$ xác định và $B^\mathcal{I}(x) = d$. Lúc đó ta có $x \in (B = d)^\mathcal{I}$. Vì $x \in (B = d)^\mathcal{I}$ và theo định nghĩa của quan hệ Z và quan hệ $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương nên $x' \in (B = d)^{\mathcal{I}'}$. Nói cách khác $B^{\mathcal{I}'}(x') = d$ và do đó $B^\mathcal{I}(x) = B^{\mathcal{I}'}(x')$. Tương tự, nếu $B^{\mathcal{I}'}(x')$ xác định thì $B^\mathcal{I}(x)$ xác định. Từ đó suy ra $B^\mathcal{I}(x)$ không xác định khi và chỉ khi $B^{\mathcal{I}'}(x')$ không xác định. Vậy ta có $B^\mathcal{I}(x) = B^{\mathcal{I}'}(x')$ hoặc cả hai không xác định.

- Xét điều kiện (2.4) và giả sử $Z(x,x')$, $r^\mathcal{I}(x,y)$ thỏa mãn. Đặt $S = \{y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid r^{\mathcal{I}'}(x',y')\}$, ta cần chỉ ra rằng tồn tại $y' \in S$ sao cho $Z(y,y')$ thỏa mãn. Vì $r^\mathcal{I}(x,y)$ thỏa mãn nên $x \in (\exists r.\top)^\mathcal{I}$. Vì x $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với x' nên $x' \in (\exists r.\top)^{\mathcal{I}'}$. Từ $x' \in (\exists r.\top)^{\mathcal{I}'}$ ta suy ra $S \neq \emptyset$. Mặt khác, $\mathcal{I}'$ là một diễn dịch phân nhánh hữu hạn đối với $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ nên S là một tập hữu hạn. Gọi $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ là các phần tử của S, ta có $n \geq 1$. Giả sử $Z(y, y'_i)$ không thỏa mãn với mọi $1 \leq i \leq n$. Điều này suy ra y không $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với y'_i với mọi $1 \leq i \leq n$. Nghĩa là, với mỗi $1 \leq i \leq n$, tồn tại khái niệm C_i sao cho $y \in C_i^\mathcal{I}$ và $y'_i \notin C_i^{\mathcal{I}'}$. Đặt $C \equiv \exists r.(C_1 \sqcap C_2 \sqcap \cdots \sqcap C_n)$, ta có $x \in C^\mathcal{I}$ và $x' \notin C^{\mathcal{I}'}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết x $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với x'. Do vậy tồn tại $y'_i \in S$ sao cho $Z(y, y'_i)$ thỏa mãn.

- Điều kiện (2.5) được chứng minh tương tự như điều kiện (2.4).

- Xét điều kiện (2.6) và giả sử $Z(x,x')$ thỏa mãn. Bằng cách thay khái niệm A trong điều kiện (2.2) bởi khái niệm $\exists\sigma.\{d\}$, ta suy ra được $x \in (\exists\sigma.\{d\})^\mathcal{I}$ khi và chỉ khi $x' \in (\exists\sigma.\{d\})^{\mathcal{I}'}$. Vì vậy, $\sigma^{\mathcal{I}}(x,d) \Leftrightarrow \sigma^{\mathcal{I}'}(x',d)$.

- Điều kiện (2.7) và (2.8) trong trường hợp $\mathcal{I} \in \Phi^\dagger$ được chứng minh tương tự như điều kiện (2.4) và (2.5) bằng cách thay vai trò r bởi vai trò r^-.

- Xét điều kiện (2.9) trong trường hợp $\mathcal{O} \in \Phi^\dagger$ và giả sử $Z(x,x')$ thỏa mãn. Đặt $C \equiv \{a\}$. Vì x $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với x' nên $x \in C^{\mathcal{I}}$ khi và chỉ khi $x' \in C^{\mathcal{I}'}$. Do đó ta có $x = a^{\mathcal{I}}$ khi và chỉ khi $x' = a^{\mathcal{I}'}$.

- Xét điều kiện (2.10) trong trường hợp $\mathcal{N} \in \Phi^\dagger$ và giả sử $Z(x,x')$ thỏa mãn. Đặt $S = \{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid r^{\mathcal{I}}(x,y)\}$ và $S' = \{y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid r^{\mathcal{I}'}(x',y')\}$. Vì $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là các diễn dịch phân nhánh hữu hạn đối với $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ nên S và S' là hữu hạn. Nếu $S = \emptyset$, ta có $x \notin (\exists r.\top)^{\mathcal{I}}$ và do x $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với x' nên ta có $x' \notin (\exists r.\top)^{\mathcal{I}'}$. Vì $x' \notin (\exists r.\top)^{\mathcal{I}'}$ nên ta có $S' = \emptyset$. Từ đó suy ra $\#S = 0 = \#S'$. Nếu $S \neq \emptyset$, gọi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ là các phần tử của S với $n \geq 1$. Rõ ràng $x \in (\geq n\, r.\top)^{\mathcal{I}}$ và $x \in (\leq n\, r.\top)^{\mathcal{I}}$. Do x $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với x' nên ta có $x' \in (\geq n\, r.\top)^{\mathcal{I}'}$ và $x' \in (\leq n\, r.\top)^{\mathcal{I}'}$. Vì $x' \in (\geq n\, r.\top)^{\mathcal{I}'}$ nên $\#S' \geq n$ và vì $x' \in (\leq n\, r.\top)^{\mathcal{I}'}$ nên $\#S' \leq n$. Từ đó suy ra $\#S = n = \#S'$. Nói cách khác $\#\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid r^{\mathcal{I}}(x,y)\} = \#\{y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid r^{\mathcal{I}'}(x',y')\}$.

- Điều kiện (2.11) trong trường hợp $\{\mathcal{N},\mathcal{I}\} \subseteq \Phi^\dagger$ được chứng minh tương tự như điều kiện (2.10) bằng cách thay vai trò r bởi vai trò r^-.

- Xét điều kiện (2.12) trong trường hợp $\mathcal{F} \in \Phi^\dagger$ và giả sử $Z(x,x')$ thỏa mãn. Đặt $C \equiv (\leq 1\, r)$. Nếu $x \in C^{\mathcal{I}}$ thì $\#\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid r^{\mathcal{I}}(x,y)\} \leq 1$. Vì $x \in C^{\mathcal{I}}$ và x $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$-tương đương với x' nên $x' \in C^{\mathcal{I}'}$ và do đó $\#\{y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid r^{\mathcal{I}'}(x',y')\} \leq 1$. Tương tự, nếu $x \notin C^{\mathcal{I}}$ thì $x' \notin C^{\mathcal{I}'}$, do đó $\#\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid r^{\mathcal{I}}(x,y)\} > 1$ và $\#\{y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid r^{\mathcal{I}'}(x',y')\} > 1$. Vậy ta có $[\#\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid r^{\mathcal{I}}(x,y)\} \leq 1] \Leftrightarrow [\#\{y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid r^{\mathcal{I}'}(x',y')\} \leq 1]$.

- Điều kiện (2.13) trong trường hợp $\{\mathcal{F},\mathcal{I}\} \subseteq \Phi^\dagger$ được chứng minh tương tự như điều kiện (2.12) bằng cách thay vai trò r bởi vai trò r^-.

- Xét điều kiện (2.14) trong trường hợp $\mathcal{Q} \in \Phi^\dagger$ và giả sử $Z(x,x')$ thỏa mãn. Đặt $S = \{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid r^{\mathcal{I}}(x,y)\}$ và $S' = \{y' \in \Delta^{\mathcal{I}'} \mid r^{\mathcal{I}'}(x',y')\}$. Vì $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là các diễn dịch phân nhánh hữu hạn đối với $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ nên S và S' là hữu hạn. Giả sử không tồn tại một song ánh $h : S \to S'$ nào sao cho $h \subseteq Z$. Từ giả thiết này ta suy ra tồn tại một $y'' \in S \cup S'$ sao cho với $y_1, y_2, \ldots, y_k \in S$ và $y'_1, y'_2, \ldots, y'_{k'} \in S'$ khác nhau từng đôi một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với y'', ta có $k \neq k'$. Đặt $\mathcal{I}'' = \mathcal{I}$ nếu $y'' \in S$ và $\mathcal{I}'' = \mathcal{I}'$ nếu $y'' \in S'$. Đặt $\{z_1, z_2, \ldots, z_h\} = S \setminus \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ và $\{z'_1, z'_2, \ldots, z'_{h'}\} = S \setminus \{y'_1, y'_2, \ldots, y'_{k'}\}$. Với mỗi $1 \leq i \leq h$ tồn tại C_i sao cho $y'' \in C_i^{\mathcal{I}''}$ và $z_i \notin C_i^{\mathcal{I}}$. Tương tự, với mỗi $1 \leq i \leq h'$ tồn tại D_i sao cho $y'' \in D_i^{\mathcal{I}''}$ và $z'_i \notin D_i^{\mathcal{I}'}$. Đặt $C \equiv (C_1 \sqcap C_2 \sqcap \cdots \sqcap C_h \sqcap D_1 \sqcap D_2 \sqcap \cdots \sqcap D_{h'})$. Chúng ta có $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \subseteq C^{\mathcal{I}}$ và $\{z_1, z_2, \ldots, z_h\} \cap C^{\mathcal{I}} = \emptyset$. Tương tự như thế, $\{y'_1, y'_2, \ldots, y'_{k'}\} \subseteq C^{\mathcal{I}'}$ và $\{z'_1, z'_2, \ldots, z'_{h'}\} \cap C^{\mathcal{I}'} = \emptyset$. Nếu $k > k'$ thì $x \in (\geq k\, r.C)^{\mathcal{I}}$ và

$x' \notin (\geq k\, r.C)^{\mathcal{I}'}$. Nếu $k < k'$ thì $x \notin (\geq k'\, r.C)^{\mathcal{I}}$ và $x' \in (\geq k'\, r.C)^{\mathcal{I}'}$. Điều này trái với giả thiết x $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với x'. Do vậy điều kiện (2.14) thỏa mãn.

- Điều kiện (2.15) trong trường hợp $\{\mathcal{Q},\mathcal{I}\} \subseteq \Phi^\dagger$ được chứng minh tương tự như điều kiện (2.14) bằng cách thay vai trò r bởi vai trò r^-.

- Xét điều kiện (2.16) trong trường hợp $\mathcal{U} \in \Phi^\dagger$. Vì $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là các diễn dịch phân nhánh hữu hạn đối với $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ và $U \in \Sigma^\dagger_{oR}$ nên $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là hữu hạn. Giả sử $\Delta^{\mathcal{I}'} = \{x'_1, x'_2, \ldots, x'_n\}$ với $n \geq 1$. Lấy một đối tượng bất kỳ $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$, giả sử rằng x không $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với x'_i với mọi $1 \leq i \leq n$. Lúc đó, với mỗi $1 \leq i \leq n$ tồn tại một khái niệm C_i sao cho $x'_i \in C_i^{\mathcal{I}'}$ và $x \notin C_i^{\mathcal{I}}$. Đặt $C \equiv (C_1 \sqcup C_2 \sqcup \cdots \sqcup C_n)$ và $a \in \Sigma^\dagger_I$ là một tên cá thể, ta có $a^{\mathcal{I}'} \in (\forall U.C)^{\mathcal{I}'}$ và $a^{\mathcal{I}} \notin (\forall U.C)^{\mathcal{I}}$. Điều này trái với giả thiết $a^{\mathcal{I}}$ $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với $a^{\mathcal{I}'}$. Do đó, tồn tại $x'_i \in \Delta^{\mathcal{I}'}$ sao cho $Z(x, x'_i)$ thỏa mãn.

- Điều kiện (2.17) trong trường hợp $\mathcal{U} \in \Phi^\dagger$ được chứng minh tương tự như điều kiện (2.16).

- Xét điều kiện (2.18) trong trường hợp $\mathsf{Self} \in \Phi^\dagger$ và giả sử $Z(x, x')$ thỏa mãn. Vì x $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với x' nên $x \in (\exists r.\mathsf{Self})^{\mathcal{I}}$ khi và chỉ khi $x' \in (\exists r.\mathsf{Self})^{\mathcal{I}'}$. Do vậy $r^{\mathcal{I}}(x, x)$ thỏa mãn khi và chỉ khi $r^{\mathcal{I}'}(x', x')$ thỏa mãn.

Chứng minh khẳng định (**). Giả sử $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là các diễn dịch trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ thỏa điều kiện phân nhánh hữu hạn đối với $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$, Z là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ sao cho $Z(x, x')$ thỏa mãn. Theo khẳng định (2.19), với mọi khái niệm C của $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$, $C^{\mathcal{I}}(x)$ thỏa mãn khi và chỉ khi $C^{\mathcal{I}'}(x')$ thỏa mãn. Do đó x $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với x'. ∎

Hệ quả 2.3. *Cho Σ và $\Sigma^\dagger$ là các bộ ký tự logic mô tả sao cho $\Sigma^\dagger \subseteq \Sigma$, Φ và $\Phi^\dagger$ là tập các đặc trưng của logic mô tả sao cho $\Phi^\dagger \subseteq \Phi$, $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$ là các diễn dịch trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ thỏa điều kiện phân nhánh hữu hạn đối với $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$. Giả thiết rằng $\Sigma^\dagger_I \neq \emptyset$ và với mọi $a \in \Sigma^\dagger_I$, $a^{\mathcal{I}}$ $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với $a^{\mathcal{I}'}$. Lúc đó, quan hệ $\{\langle x, x'\rangle \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}'} \mid x$ $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với $x'\}$ là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều giữa $\mathcal{I}$ và $\mathcal{I}'$.* ∎

2.5. Tự mô phỏng hai chiều

Định nghĩa 2.8 (Tự mô phỏng hai chiều)**.** Cho $\mathcal{I}$ là một diễn dịch trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. Một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-*tự mô phỏng hai chiều* của $\mathcal{I}$ là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-mô phỏng hai chiều giữa $\mathcal{I}$ và chính nó. Một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tự mô phỏng hai chiều Z của $\mathcal{I}$ được gọi là *lớn nhất* nếu với mọi $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tự mô phỏng hai chiều Z' của $\mathcal{I}$ thì $Z' \subseteq Z$. ∎

Cho $\mathcal{I}$ là một diễn dịch trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$, chúng ta ký hiệu $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tự mô phỏng hai chiều lớn nhất của $\mathcal{I}$ là $\sim_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$, và ký hiệu quan hệ nhị phân $\equiv_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$ trên $\Delta^{\mathcal{I}}$ là quan hệ thỏa mãn tính chất $x \equiv_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}} x'$ khi và chỉ khi x $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với x'.

Định lý 2.5 sau đây được phát triển và chứng minh dựa trên các kết quả trong các nghiên cứu [13, 55] cho một lớp lớn hơn các logic mô tả.

Định lý 2.5. *Cho Σ và $\Sigma^\dagger$ là các bộ ký tự của logic mô tả sao cho $\Sigma^\dagger \subseteq \Sigma$, Φ và $\Phi^\dagger$ là tập các đặc trưng của logic mô tả sao cho $\Phi^\dagger \subseteq \Phi$, $\mathcal{I}$ là một diễn dịch trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. Lúc đó:*

1. *$\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tự mô phỏng hai chiều lớn nhất của $\mathcal{I}$ tồn tại và nó là một quan hệ tương đương,*
2. *nếu $\mathcal{I}$ là một phân nhánh hữu hạn đối với $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ thì quan hệ $\equiv_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$ là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tự mô phỏng hai chiều lớn nhất của $\mathcal{I}$ (nghĩa là, quan hệ $\equiv_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$ và $\sim_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$ trùng khớp nhau).* ■

Chứng minh.

- Khẳng định thứ nhất được suy ra trực tiếp từ khẳng định thứ nhất của Bổ đề 2.1.

- Xét khẳng định thứ hai, nếu $\mathcal{U} \notin \Phi^\dagger$ hoặc $\Sigma^\dagger \neq \emptyset$ thì theo Định lý 2.4, $\equiv_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$ là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tự mô phỏng hai chiều của $\mathcal{I}$. Trường hợp $\mathcal{U} \in \Phi^\dagger$ và $\Sigma^\dagger_I = \emptyset$ là cần thiết cho Định lý 2.4 để chứng minh điều kiện (2.16) và (2.17). Thật vậy, trong trường hợp $\mathcal{U} \in \Phi^\dagger$ và $\Sigma^\dagger_I = \emptyset$, các điều kiện này rõ ràng thỏa mãn khi $\mathcal{I}' = \mathcal{I}$. Như vậy $\equiv_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$ là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tự mô phỏng hai chiều của $\mathcal{I}$.

Bây giờ chúng ta chứng minh $\equiv_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$ là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tự mô phỏng hai chiều lớn nhất của $\mathcal{I}$. Giả sử Z là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tự mô phỏng hai chiều bất kỳ của $\mathcal{I}$. Với mọi $x \in \Delta^\mathcal{I}$ và $x' \in \Delta^\mathcal{I}$, ta cần chỉ ra nếu $Z(x, x')$ thỏa mãn thì $x \equiv_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}} x'$. Vì Z là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tự mô phỏng hai chiều của $\mathcal{I}$ và $Z(x, x')$ thỏa mãn nên theo khẳng định (2.19) với mọi khái niệm C của $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$, $C^\mathcal{I}(x)$ thỏa mãn khi và chỉ khi $C^\mathcal{I}(x')$ thỏa mãn và do đó $x \equiv_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}} x'$. Do đó ta có $Z \subseteq \equiv_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$. Vậy $\equiv_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$ là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tự mô phỏng hai chiều lớn nhất của $\mathcal{I}$. ■

Chúng ta nói rằng tập Y *bị phân chia* bởi tập X nếu $Y \setminus X \neq \emptyset$ và $Y \cap X \neq \emptyset$. Như vậy, tập Y không bị phân chia bởi tập X nếu hoặc $Y \subseteq X$ hoặc $Y \cap X = \emptyset$. Phân hoạch $\mathbb{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ được gọi là *nhất quán* với tập X nếu với mọi $1 \leq i \leq n$, Y_i không bị phân chia bởi X.

Định lý 2.6 sau đây nói lên khả năng phân hoạch miền của diễn dịch dựa trên mô phỏng hai chiều lớn nhất sao cho nó nhất quán với một tập cho trước. Qua đó cho phép xây dựng thuật toán học một khái niệm trong hệ thống thông tin thông qua mô phỏng hai chiều lớn nhất. Định lý này được phát triển mở rộng với một lớp lớn hơn các logic mô tả và được dựa trên cơ sở của Định lý 3 của công trình [55].

Định lý 2.6. *Cho Σ và $\Sigma^\dagger$ là các bộ ký tự của logic mô tả sao cho $\Sigma^\dagger \subseteq \Sigma$, Φ và $\Phi^\dagger$ là tập các đặc trưng của logic mô tả sao cho $\Phi^\dagger \subseteq \Phi$, $\mathcal{I}$ là một diễn dịch hữu hạn trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ và $X \subseteq \Delta^\mathcal{I}$. Gọi $\mathbb{Y}$ là phân hoạch của $\Delta^\mathcal{I}$ thông qua quan hệ $\sim_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$. Lúc đó:*

1. *nếu tồn tại khái niệm C của $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ sao cho $C^\mathcal{I} = X$ thì phân hoạch $\mathbb{Y}$ nhất quán với tập X,*
2. *nếu phân hoạch $\mathbb{Y}$ nhất quán với tập X thì tồn tại khái niệm C của $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ sao cho $C^\mathcal{I} = X$.* ∎

Chứng minh. Vì $\mathcal{I}$ là một diễn dịch hữu hạn trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ nên $\mathcal{I}$ thỏa mãn điều kiện phân nhánh hữu hạn đối với $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$. Theo khẳng định (2) của Định lý 2.5, ta có $\sim_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$ trùng khớp với $\equiv_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$.

- Xét khẳng định thứ nhất và giả sử $C^\mathcal{I} = X$ với C là một khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$. Gọi $\mathbb{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ là một phân hoạch của $\Delta^\mathcal{I}$ được phân hoạch thông qua quan hệ $\sim_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$. Với $1 \leq i \leq n$, lấy x và x' là hai phần tử bất kỳ của Y_i, ta có x và x' thuộc về một lớp tương đương được phân hoạch bởi $\sim_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$. Do $\sim_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$ trùng với $\equiv_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$ nên x $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tương đương với x' và do đó $x \in C^\mathcal{I}$ khi và chỉ khi $x' \in C^\mathcal{I}$. Nghĩa là $\{x, x'\}$ không bị phân chia bởi $C^\mathcal{I}$. Do vậy $C^\mathcal{I}$ phải là hợp của một số lớp tương đương được phân hoạch bởi $\sim_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$. Từ đó suy ra phân hoạch $\mathbb{Y}$ nhất quán với X.

- Xét khẳng định thứ hai và giả sử $\mathbb{Y}$ là một phân hoạch của $\Delta^\mathcal{I}$ được phân hoạch thông qua quan hệ $\sim_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$ và $\mathbb{Y}$ nhất quán với X. Lúc đó $\mathbb{Y} = \{U_1, U_2, \dots, U_m\} \cup \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$, trong đó $U_i \subseteq X$, $V_i \cap X = \emptyset$ và $X = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m$. Vì U_i và V_j là các lớp tương đương khác nhau từng đôi một theo quan hệ $\equiv_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$ nên với mọi $1 \leq i \leq m$ và $1 \leq j \leq n$ tồn tại khái niệm C_{ij} của $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ sao cho $U_i \subseteq C_{ij}^\mathcal{I}$ và $V_j \cap C_{ij}^\mathcal{I} = \emptyset$. Với mỗi $1 \leq i \leq m$, đặt $C_i \equiv C_{i1} \sqcap C_{i2} \sqcap \dots \sqcap C_{in}$, ta có $U_i \subseteq C_i^\mathcal{I}$, và $V_j \cap C_i^\mathcal{I} = \emptyset$ với mọi $1 \leq j \leq n$. Đặt $C \equiv C_1 \sqcup C_2 \sqcup \dots \sqcup C_m$, ta có $U_i \subseteq C^\mathcal{I}$ với mọi $1 \leq i \leq m$ và $V_j \cap C^\mathcal{I} = \emptyset$ với mọi $1 \leq j \leq n$. Do đó $C^\mathcal{I} = X$. ∎

Tiểu kết Chương 2

Thông qua ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ và ngôn ngữ con $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$, chương này đã trình bày mô phỏng hai chiều và tính bất biến đối với mô phỏng hai chiều trên một lớp các logic mô tả như đã đề cập trong Chương 1. Các khái niệm, định nghĩa và các định lý, bổ đề cũng như các hệ quả được phát triển dựa trên các kết quả của các công trình [13, 55] với lớp các logic mô tả lớn hơn. Chúng tôi cũng trình bày các chứng minh cho những định lý, bổ đề, hệ quả đã nêu ra trong chương này. Tính bất biến, đặc biệt là tính bất biến của khái niệm là một trong những nền tảng cho phép mô hình hóa tính không phân biệt được của các đối tượng thông qua ngôn ngữ con. Tính không phân biệt của các đối tượng là một trong những đặc trưng cơ bản trong quá trình xây dựng các kỹ thuật phân lớp dữ liệu. Điều này có nghĩa là chúng ta có thể sử dụng ngôn ngữ con cho các bài toán học máy trong logic mô tả bằng cách sử dụng mô phỏng hai chiều.

Chương 3.

HỌC KHÁI NIỆM TRONG LOGIC MÔ TẢ SỬ DỤNG MÔ PHỎNG HAI CHIỀU

3.1. Giới thiệu

Trong những năm gần đây, logic mô tả đã và đang được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực của Web ngữ nghĩa. Nó được xem là một thành phần quan trọng trong các hệ thống ngữ nghĩa và được sử dụng để biểu diễn cũng như suy luận tri thức trong các hệ thống này. Đặc tả các khái niệm phù hợp cho các hệ thống ngữ nghĩa là một trong những vấn đề rất được quan tâm. Do vậy, vấn đề đặt ra là cần tìm được các khái niệm quan trọng và xây dựng được định nghĩa của các khái niệm đó. Học khái niệm trong logic mô tả nhằm mục đích kiểm tra, suy luận và tìm ra được các khái niệm này để phục vụ cho các ứng dụng khác nhau như: tin sinh học, tin học trong y tế, quản trị tri thức, kỹ nghệ phần mềm, ...

Học khái niệm trong logic mô tả đã được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu [61, 11, 38, 4, 35, 17, 15, 40, 16, 41, 55]. Cùng với học khái niệm trong logic mô tả, các vấn đề liên quan đến học máy trong logic mô tả cũng được nhiều công trình đề cập đến [1, 36, 62, 37, 12, 43, 42, 44, 45].

Quinlan [61] nghiên cứu việc học các định nghĩa của mệnh đề Horn từ các dữ liệu được biểu diễn thông qua các quan hệ. Tác giả đã đề xuất thuật toán Foil dựa trên ý tưởng khai thác tính hiệu quả của các hệ thống học thông qua thuộc tính và mở rộng nó cho các logic bậc nhất.

Trong một công trình nghiên cứu khá sớm về học khái niệm trong logic mô tả, Cohen và Hirsh [11] đã nghiên cứu lý thuyết về khả năng học của logic mô tả Classic (một tiền thân của logic mô tả) và một logic con của nó là C-Classic. Các tác giả đã đề xuất thuật toán học khái niệm LCSLearn dựa trên các "bao hàm chung nhỏ nhất" [10]. Trong [38] Lambrix và Larocchia đã đề xuất một thuật toán học khái niệm đơn giản dựa trên việc chuẩn hóa khái niệm và lựa chọn khái niệm thông qua các thể hiện của dạng chuẩn hóa.

Badea và Nienhuys-Cheng [4], Fanizzi cùng cộng sự [17, 15], Iannone cùng cộng sự [35], Lehmann và Hitzler [40, 41] đã nghiên cứu học khái niệm trong logic mô tả bằng cách sử dụng các toán tử làm mịn (*refinement operators*) như trong lập trình logic đệ quy (*Inductive Logic Programming - ILP*). Trong [4], toán tử làm mịn trên xuống (*downward refinement operators*) của logic mô tả $\mathcal{ALER}$ được thiết kế cho thuật toán học trên-xuống (*top-down*). Trong quá trình tìm kiếm, các tác giả đã sử dụng dạng chuẩn của $\mathcal{ALER}$ để đạt được các toán tử làm mịn đơn giản hơn. Fanizzi và các cộng sự nghiên cứu toán tử làm mịn trên xuống trong logic mô tả $\mathcal{ALN}$ [17] và xây dựng hệ thống DL-Foil [15]. Hệ thống này sử dụng một phiên bản mở rộng của thuật toán Foil [61]. Các thành phần chính của hệ thống sử dụng tập các toán tử làm mịn tương tự như trong [4].

Ngoài việc sử dụng các toán tử làm mịn, các hàm tính điểm và chiến lược tìm kiếm cũng đóng vai trò quan trọng đối với các thuật toán đã được đề xuất trong các công trình này. Thuật toán DL-Learner [41] khai thác các kỹ thuật lập trình di truyền, còn thuật toán DL-FOIL [15] khai thác dữ liệu không gán nhãn như trong học máy bán giám sát.

Iannone cùng cộng sự [35] đã nghiên cứu việc mô tả các khái niệm đệ quy theo phương pháp bán tự động và xây dựng các thuật toán suy luận trong logic mô tả $\mathcal{ALC}$. Ý tưởng chính của các thuật toán này là tìm và loại bỏ các phần của khái niệm có chứa lỗi phân loại. Fanizzi và các cộng sự [16] đã đề xuất cây quyết định thuật ngữ như một cấu trúc thay thế cho việc học khái niệm trong logic mô tả và một phương pháp dựa trên thuật toán đệ quy của cây trên-xuống chuẩn. Thuật toán có sử dụng các hàm tính điểm để phân lớp các cá thể trong giả thiết thế giới mở (*Open World Assumption - OWA*)

Các công trình [4, 35] tập trung nghiên cứu vấn đề học khái niệm đối với cơ sở tri thức trong logic mô tả sử dụng ngữ cảnh (1), trong khi đó các công trình [17, 15, 40, 41] giải quyết bài toán này trong ngữ cảnh (2).

Lisi và Straccia [44] đã trình bày một thuật toán mở rộng của Foil, có tên là Foil-$\mathcal{DL}$, cho việc học các tiên đề bao hàm tổng quát mờ từ các khẳng định chính xác dựa trên lập trình logic đệ quy. Revoredo cùng các cộng sự [62] đã nghiên cứu việc học các khái niệm trong logic mô tả có xác suất từ dữ liệu quan hệ. Các tác giả đã đề xuất một thuật toán học trong logic mô tả có xác suất cr$\mathcal{ALC}$ sử dụng các toán tử làm mịn và hàm tính điểm.

Nguyen và Szałas [55] đã áp dụng mô phỏng hai chiều trong logic mô tả để mô hình hóa tính không phân biệt được của các đối tượng. Đây là công trình tiên phong trong việc sử dụng mô phỏng hai chiều cho việc học khái niệm trong logic mô tả. Trong công trình này, các tác giả đã đề cập đến xấp xỉ khái niệm bằng cách sử dụng mô phỏng hai chiều và lý thuyết tập thô của Pawlak [57, 58]. Công trình [55] nghiên cứu bài toán học khái niệm cho các hệ thống thông tin dựa trên logic mô tả sử dụng ngữ cảnh (3) trong logic mô tả $\mathcal{ALC}$ với các tạo tử vai trò $\mathcal{I}$ (*vai trò nghịch đảo*), $\mathcal{U}$ (*vai trò phổ quát*) và các tạo tử khái niệm $\mathcal{O}$ (*định danh*), $\mathcal{Q}$ (*hạn chế số lượng có định tính*), Self (*tính phản xạ cục bộ của vai trò*). Tran cùng các đồng nghiệp [68], Ha cùng các đồng nghiệp [20] đã mở rộng và tổng quát hóa công trình [55] cho một lớp lớn hơn các logic mô tả bằng cách bổ sung các tạo tử khái niệm $\mathcal{F}$ (*tính chất hàm*), $\mathcal{N}$ (*hạn chế số lượng không định tính*). Ngoài ra, các công trình này cũng xem xét các thuộc tính (bao gồm thuộc tính rời rạc và thuộc tính liên tục) như là những phần tử cơ bản của ngôn ngữ.

Học khái niệm trong logic mô tả tương tự như việc phân lớp nhị phân trong học máy truyền thống. Tuy nhiên, việc học khái niệm trong ngữ cảnh logic mô tả khác với học máy truyền thống ở chỗ, các đối tượng không chỉ được đặc tả bằng các thuộc tính mà còn được đặc tả bằng các mối quan hệ giữa các đối tượng. Các mối quan hệ này là một trong những yếu tố làm giàu thêm ngữ nghĩa của hệ thống huấn luyện. Do đó các phương pháp học khái niệm trong logic mô tả cần phải tận dụng được chúng như là một lợi thế.

Vấn đề học khái niệm cho cơ sở tri thức trong logic mô tả của đề tài này được đặt ra theo ngữ cảnh như sau:

Cho cơ sở tri thức $\mathcal{KB}$ trong logic mô tả L và các tập các cá thể E^+, E^-. Học khái niệm C trong L sao cho:

1. $\mathcal{KB} \models C(a)$ với mọi $a \in E^+$, và
2. $\mathcal{KB} \not\models C(a)$ với mọi $a \in E^-$,

trong đó, tập E^+ chứa các mẫu dương và E^- chứa các mẫu âm của C.

Chương này trình bày thuật toán *BBCL2* (***B**isimulation-**B**ased **C**oncept **L**earning for knowledge bases in description logics using the **S**econd setting*) cho bài toán học khái niệm đối với cơ sở tri thức trong logic mô tả. Thuật toán này sử dụng mô hình của cơ sở tri thức kết hợp với mô phỏng hai chiều trong mô hình đó (để mô hình hóa tính không phân biệt được) và cây quyết định (để phân lớp dữ liệu) cho việc tìm kiếm khái niệm kết quả. Ngoài việc trình bày thuật toán, tính đúng đắn của thuật toán cũng được chứng minh thông qua các bổ đề tương ứng.

3.2. Phân hoạch miền của diễn dịch trong logic mô tả

Cho diễn dịch $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ trong ngôn ngữ $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. Ý tưởng cơ bản của việc làm mịn phân hoạch miền $\Delta^{\mathcal{I}}$ của diễn dịch $\mathcal{I}$ là dựa trên phương pháp học khái niệm sử dụng mô phỏng hai chiều đã được Nguyen và Szałas đề xuất trong [55]. Cụ thể là, bắt đầu từ phân hoạch $\{\Delta^{\mathcal{I}}\}$, chúng ta thực hiện làm mịn liên tục $\{\Delta^{\mathcal{I}}\}$ để đạt được phân hoạch tương ứng với quan hệ $\sim_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$ với các kỹ thuật cụ thể đặt ra như sau:

- Quá trình làm mịn có thể dừng lại khi một số điều kiện đặt ra được thỏa mãn.
- Trong quá trình làm mịn phân hoạch $\{\Delta^{\mathcal{I}}\}$, các khối được tạo ra ở tất cả các bước được ký hiệu là $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Để thực hiện được điều này, khi mỗi khối được tạo ra, chúng ta sử dụng một chỉ số mới gán cho khối đó bằng cách tăng giá trị của n. Ta gọi phân hoạch hiện thời là $\mathbb{Y} = \{Y_{i_1}, Y_{i_2}, \ldots, Y_{i_k}\} \subseteq \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$. Như vậy, $\mathbb{Y}$ là một tập con của các khối được tạo ra ở trên. Chúng ta thiết lập thông tin nhằm ghi nhận lại khái niệm C_i đặc trưng cho khối Y_i sao cho $C_i^{\mathcal{I}} = Y_i$.
- Chúng ta có thể sử dụng các chiến lược khác nhau cũng như các hàm tính điểm để tối ưu hóa quá trình làm mịn.

3.2.1. Bộ chọn cơ bản

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu về các bộ chọn cơ bản trong $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ được sử dụng để phân chia khối Y_{i_j}, trình bày và chứng minh một định lý về các bộ chọn cơ bản [68]. Theo đó, các bộ chọn cơ bản là điều kiện đủ để khi làm mịn liên tục phân hoạch $\{\Delta^{\mathcal{I}}\}$ chúng ta được đạt phân hoạch tương ứng với quan hệ tương đương $\sim_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$.

Định nghĩa 3.1 (Bộ chọn cơ bản)**.** Một *bộ chọn cơ bản* trong $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ dùng để phân chia khối Y_{i_j} của phân hoạch $\mathbb{Y} = \{Y_{i_1}, Y_{i_2}, \ldots, Y_{i_k}\}$ là một khái niệm thuộc một trong các dạng sau:

- A, trong đó $A \in \Sigma_C^\dagger$,
- $A = d$, trong đó $A \in \Sigma_A^\dagger \setminus \Sigma_C^\dagger$ và $d \in range(A)$,
- $\exists\sigma.\{d\}$, trong đó $\sigma \in \Sigma_{dR}^\dagger$ và $d \in range(\sigma)$,
- $\exists r.C_{i_t}$, trong đó $r \in \Sigma_{oR}^\dagger$ và $1 \leq t \leq k$,
- $\exists r^-.C_{i_t}$, nếu $\mathcal{I} \in \Phi^\dagger$, $r \in \Sigma_{oR}^\dagger$ và $1 \leq t \leq k$,
- $\{a\}$, nếu $\mathcal{O} \in \Phi^\dagger$ và $a \in \Sigma_I^\dagger$,
- $\leq 1\, r$, nếu $\mathcal{F} \in \Phi^\dagger$ và $r \in \Sigma_{oR}^\dagger$,
- $\leq 1\, r^-$, nếu $\{\mathcal{F}, \mathcal{I}\} \subseteq \Phi^\dagger$ và $r \in \Sigma_{oR}^\dagger$,
- $\geq l\, r$ và $\leq m\, r$, nếu $\mathcal{N} \in \Phi^\dagger$, $r \in \Sigma_{oR}^\dagger$, $0 < l \leq \#\Delta^{\mathcal{I}}$ và $0 \leq m < \#\Delta^{\mathcal{I}}$,

- $\geq l\, r^-$ và $\leq m\, r^-$, nếu $\{\mathcal{N}, \mathcal{I}\} \subseteq \Phi^\dagger$, $r \in \Sigma^\dagger_{oR}$, $0 < l \leq \#\Delta^\mathcal{I}$ và $0 \leq m < \#\Delta^\mathcal{I}$,
- $\geq l\, r.C_{i_t}$ và $\leq m\, r.C_{i_t}$, nếu $\mathcal{Q} \in \Phi^\dagger$, $r \in \Sigma^\dagger_{oR}$, $1 \leq t \leq k$, $0 < l \leq \#C_{i_t}$ và $0 \leq m < \#C_{i_t}$,
- $\geq l\, r^-.C_{i_t}$ và $\leq m\, r^-.C_{i_t}$, nếu $\{\mathcal{Q}, \mathcal{I}\} \subseteq \Phi^\dagger$, $r \in \Sigma^\dagger_{oR}$, $1 \leq t \leq k$, $0 < l \leq \#C_{i_t}$ và $0 \leq m < \#C_{i_t}$,
- $\exists r.\mathsf{Self}$, nếu $\mathsf{Self} \in \Phi^\dagger$ và $r \in \Sigma^\dagger_{oR}$. ■

Định lý 3.1. *Cho Σ và $\Sigma^\dagger$ là các bộ ký tự logic mô tả sao cho $\Sigma^\dagger \subseteq \Sigma$, Φ và $\Phi^\dagger$ là tập các đặc trưng logic mô tả sao cho $\Phi^\dagger \subseteq \Phi$, $\mathcal{I}$ là một diễn dịch hữu hạn trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. Xuất phát từ phân hoạch $\{\Delta^\mathcal{I}\}$ và thực hiện việc làm mịn liên tục nó bằng các bộ chọn cơ bản ta sẽ nhận được một phân hoạch tương ứng với quan hệ tương đương $\sim_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$* ■

Chứng minh. Gọi $\mathbb{Y} = \{Y_{i_1}, Y_{i_2}, \ldots, Y_{i_k}\}$ là phân hoạch cuối cùng đạt được bằng cách làm mịn liên tục phân hoạch $\{\Delta^\mathcal{I}\}$ thông qua việc sử dụng các bộ chọn cơ bản. Gọi Z là quan hệ tương đương tương ứng với phân hoạch $\mathbb{Y}$ và được định nghĩa là $Z = \{\langle x, x'\rangle \mid x, x' \in Y_{i_j}$ với $1 \leq j \leq k\}$. Chú ý rằng C_{i_j} là khái niệm đại diện cho khối Y_{i_j}, nghĩa là $C^\mathcal{I}_{i_j} = Y_{i_j}$.

Đầu tiên chúng ta chứng minh quan hệ Z là một $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$-tự mô phỏng hai chiều của $\mathcal{I}$. Giả sử $\Sigma^\dagger \subseteq \Sigma$, $\Phi^\dagger \subseteq \Phi$, $a \in \Sigma^\dagger_I$, $A \in \Sigma^\dagger_C$, $B \in \Sigma^\dagger_A \setminus \Sigma^\dagger_C$, $r \in \Sigma^\dagger_{oR}$, $\sigma \in \Sigma^\dagger_{dR}$, $d \in range(\sigma)$ và $x, y, x', y' \in \Delta^\mathcal{I}$.

- Xét điều kiện (2.1), ta có $Z(a^\mathcal{I}, a^\mathcal{I})$ luôn thỏa mãn với mọi $a \in \Sigma^\dagger_I$.

- Xét điều kiện (2.2) và giả sử $Z(x, x')$ thỏa mãn. Lúc đó tồn tại $1 \leq j \leq k$ sao cho $x, x' \in Y_{i_j}$. Vì phân hoạch $\mathbb{Y}$ không thể làm mịn hơn nữa bằng cách sử dụng khái niệm A nên ta có hoặc $Y_{i_j} \subseteq A^\mathcal{I}$ hoặc $Y_{i_j} \cap A^\mathcal{I} = \emptyset$. Nếu $Y_{i_j} \subseteq A^\mathcal{I}$ thì $x, x' \in A^\mathcal{I}$. Nếu $Y_{i_j} \cap A^\mathcal{I} = \emptyset$ thì $x, x' \notin A^\mathcal{I}$. Do đó $A^\mathcal{I}(x) \Leftrightarrow A^\mathcal{I}(x')$.

- Xét điều kiện (2.3) và giả sử $Z(x, x')$ thỏa mãn. Tương tự như trên, vì phân hoạch $\mathbb{Y}$ không thể làm mịn hơn nữa bằng cách sử dụng bộ chọn $(B = d)$ với $d \in range(B)$, ta có $Y_{i_j} \subseteq (B = d)^\mathcal{I}$ hoặc $Y_{i_j} \cap (B = d)^\mathcal{I} = \emptyset$ với mọi $1 \leq j \leq k$. Nếu $x, x' \in Y_{i_j}$ và $Y_{i_j} \subseteq (B = d)^\mathcal{I}$ với $d \in range(B)$ thì $x, x' \in (B = d)^\mathcal{I}$, và do đó $B(x) = d = B(x')$. Nếu $x, x' \in Y_{i_j}$ và $Y_{i_j} \cap (B = d)^\mathcal{I} = \emptyset$ với $d \in range(B)$ thì cả $B(x)$ và $B(x')$ không xác định.

- Xét điều kiện (2.4) và giả sử $Z(x, x')$ và $r^\mathcal{I}(x, y)$ thỏa mãn. Gọi $Y_{i_j} \in \mathbb{Y}$ là khối có chứa y, ta có $x \in (\exists r.C_{i_j})^\mathcal{I}$. Vì $\mathbb{Y}$ không thể làm mịn hơn nữa bằng cách sử dụng $(\exists r.C_{i_j})$ nên $x' \in (\exists r.C_{i_j})^\mathcal{I}$. Vì vậy, tồn tại $y' \in \Delta^\mathcal{I}$ sao cho $r^\mathcal{I}(x', y')$ thỏa mãn và $y' \in C^\mathcal{I}_{i_j} = Y_{i_j}$, nghĩa là $Z(y, y')$ thỏa mãn.

- Điều kiện (2.5) được chứng minh tương tự điều kiện (2.4).

- Xét điều kiện (2.6) và giả sử $Z(x, x')$ thỏa mãn. Bằng cách thay khái niệm A trong điều kiện (2.2) bởi khái niệm $\exists\sigma.\{d\}$, ta suy ra được $x \in (\exists\sigma.\{d\})^{\mathcal{I}}$ nếu và chỉ nếu $x' \in (\exists\sigma.\{d\})^{\mathcal{I}'}$. Vì vậy, $\sigma^{\mathcal{I}}(x, d) \Leftrightarrow \sigma^{\mathcal{I}'}(x', d)$.

- Điều kiện (2.7), (2.8) trong trường hợp $\mathcal{I} \in \Phi^\dagger$ được chứng minh tương tự điều kiện (2.4) và (2.5) bằng cách thay vai trò r bởi vai trò r^-.

- Điều kiện (2.9) trong trường hợp $\mathcal{O} \in \Phi^\dagger$ được chứng minh tương tự điều kiện (2.2) bằng cách thay khái niệm A bởi khái niệm $\{a\}$.

- Xét điều kiện (2.10) trong trường hợp $\mathcal{N} \in \Phi^\dagger$ và giả sử $Z(x, x')$ thỏa mãn. Đặt $l = \#\{y \mid r^{\mathcal{I}}(x, y)\}$. Vì phân hoạch $\mathbb{Y}$ không thể làm mịn hơn nữa bằng cách sử dụng khái niệm $\geq l\, r$ (khi $l > 0$) và $\leq l\, r$ (khi $l < \#\Delta^{\mathcal{I}}$), ta có $x' \in (\geq l\, r)^{\mathcal{I}}$ và $x' \in (\leq l\, r)^{\mathcal{I}}$. Từ đó suy ra $\#\{y' \mid r^{\mathcal{I}}(x', y')\} = l$.

- Điều kiện (2.11) trong trường hợp $\{\mathcal{N}, \mathcal{I}\} \subseteq \Phi^\dagger$ được chứng minh tương tự điều kiện (2.10) bằng cách thay vai trò r bởi vai trò r^-.

- Xét điều kiện (2.12) trong trường hợp $\mathcal{F} \in \Phi^\dagger$ và giả sử $Z(x, x')$ thỏa mãn. Bằng cách thay khái niệm A trong điều kiện (2.2) bởi khái niệm $(\leq 1\, r)$, ta suy ra được $x \in (\leq 1\, r)^{\mathcal{I}}$ nếu và chỉ nếu $x' \in (\leq 1\, r)^{\mathcal{I}}$. Vì vậy, $[\#\{y \mid r^{\mathcal{I}}(x, y)\} \leq 1] \Leftrightarrow [\#\{y' \mid r^{\mathcal{I}}(x', y')\} \leq 1]$.

- Điều kiện (2.13) với $\{\mathcal{F}, \mathcal{I}\} \subseteq \Phi^\dagger$ được chứng minh tương tự điều kiện (2.12) bằng cách thay thế vai trò r bởi vai trò r^-.

- Xét điều kiện (2.14) trong trường hợp $\mathcal{Q} \in \Phi^\dagger$ và giả sử $Z(x, x')$ thỏa mãn. Gọi $S = \{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid r^{\mathcal{I}}(x, y)\}$ và $S' = \{y' \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid r^{\mathcal{I}}(x', y')\}$. Rõ ràng S và S' hữu hạn. Ta sẽ chứng minh theo phương pháp phản chứng. Giả sử không tồn tại bất kỳ một song ánh $h : S \to S'$ nào sao cho $h \subseteq Z$. Do đó, tồn tại $1 \leq j \leq k$ thỏa $\#(S \cap Y_{i_j}) = l \neq m = \#(S' \cap Y_{i_j})$. Nếu $l > m$ thì $x \in (\geq l\, r.C_{i_j})^{\mathcal{I}}$ nhưng $x' \notin (\geq l\, r.C_{i_j})^{\mathcal{I}}$. Nếu $m > l$ thì $x \notin (\geq m\, r.C_{i_j})^{\mathcal{I}}$ nhưng $x' \in (\geq m\, r.C_{i_j})^{\mathcal{I}}$. Vì vậy, x và x' sẽ phân biệt nhau bởi một bộ chọn nào đó của $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger, \Phi^\dagger}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết là phân hoạch $\mathbb{Y}$ không thể làm mịn hơn được nữa.

- Điều kiện (2.15) trong trường hợp $\{\mathcal{Q}, \mathcal{I}\} \subseteq \Phi^\dagger$ được chứng minh tương tự điều kiện (2.14) bằng cách thay thế vai trò r bởi vai trò r^-.

- Điều kiện (2.16) thỏa mãn vì với bất kỳ $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ ta chỉ cần chọn $x' = x$. Lúc đó, ta có $Z(x, x')$ thỏa mãn.

- Điều kiện (2.17) thỏa mãn vì với bất kỳ $x' \in \Delta^{\mathcal{I}}$ ta chỉ cần chọn $x = x'$. Lúc đó,

- $A < d$, $A \leq d$, trong đó $A \in \Sigma^{\dagger}_{nA}$, $d \in range(A)$ và d không phải là giá trị nhỏ nhất của $range(A)$,
- $A > d$, $A \geq d$, trong đó $A \in \Sigma^{\dagger}_{nA}$, $d \in range(A)$ và d không phải là giá trị lớn nhất của $range(A)$,
- $\exists r.\top$, $\exists r.C_i$ và $\forall r.C_i$, trong đó $r \in \Sigma^{\dagger}_{oR}$ và $1 \leq i \leq n$,
- $\exists r^-.\top$, $\exists r^-.C_i$, $\forall r^-.C_i$, nếu $\mathcal{I} \in \Phi^{\dagger}$, $r \in \Sigma^{\dagger}_{oR}$ và $1 \leq i \leq n$,
- $\geq l\, r.C_i$ và $\leq m\, r.C_i$, nếu $\mathcal{Q} \in \Phi^{\dagger}$, $r \in \Sigma^{\dagger}_{oR}$, $1 \leq i \leq n$, $0 < l \leq \#C_i$ và $0 \leq m < \#C_i$,
- $\geq l\, r^-.C_i$ và $\leq m\, r^-.C_i$, nếu $\{\mathcal{Q}, \mathcal{I}\} \subseteq \Phi^{\dagger}$, $r \in \Sigma^{\dagger}_{oR}$, $1 \leq i \leq n$, $0 < l \leq \#C_i$ và $0 \leq m < \#C_i$.

Hình 3.1: Các bộ chọn được sử dụng thêm trong thực tế

ta có $Z(x, x')$ thỏa mãn.

- Điều kiện (2.18) trong trường hợp $\mathsf{Self} \in \Phi^{\dagger}$ ta có thể chứng minh tương tự như điều kiện (2.2) bằng cách thay khái niệm A bởi khái niệm $\exists r.\mathsf{Self}$.

Bây giờ chúng ta chứng minh Z là một $\mathcal{L}_{\Sigma^{\dagger},\Phi^{\dagger}}$-tự mô phỏng hai chiều lớn nhất của $\mathcal{I}$. Ta thấy, tại mỗi bước làm mịn, quan hệ tương đương tương ứng với phân hoạch đó là một tập cha của $\equiv_{\Sigma^{\dagger},\Phi^{\dagger},\mathcal{I}}$ vì mỗi khối của phân hoạch được đặc trưng bởi một khái niệm. Do đó, với phân hoạch cuối cùng, ta có $Z \supseteq \equiv_{\Sigma^{\dagger},\Phi^{\dagger},\mathcal{I}}$. Vì Z là một $\mathcal{L}_{\Sigma^{\dagger},\Phi^{\dagger}}$-tự mô phỏng hai chiều của $\mathcal{I}$ và $\sim_{\Sigma^{\dagger},\Phi^{\dagger},\mathcal{I}}$ là một $\mathcal{L}_{\Sigma^{\dagger},\Phi^{\dagger}}$-tự mô phỏng hai chiều lớn nhất của $\mathcal{I}$ nên ta có $Z \subseteq \sim_{\Sigma^{\dagger},\Phi^{\dagger},\mathcal{I}}$. Theo Định lý 2.6, ta có $\equiv_{\Sigma^{\dagger},\Phi^{\dagger},\mathcal{I}}$ và $\sim_{\Sigma^{\dagger},\Phi^{\dagger},\mathcal{I}}$ trùng nhau. Vậy $Z = \sim_{\Sigma^{\dagger},\Phi^{\dagger},\mathcal{I}}$, nghĩa là Z là một $\mathcal{L}_{\Sigma^{\dagger},\Phi^{\dagger}}$-tự mô phỏng hai chiều lớn nhất của $\mathcal{I}$. ∎

Trong thực tế, để quá trình phân hoạch đạt hiệu quả cao cũng như để phù hợp với việc sử dụng các thuộc tính như là các thành phần cơ bản của ngôn ngữ và tận dụng được các bộ chọn đã tạo ra trong quá trình làm mịn phân hoạch, chúng ta có thể xem xét sử dụng các bộ chọn được trình bày trong Hình 3.1.

3.2.2. Gia lượng thông tin trong việc phân hoạch miền

Trong ngữ cảnh logic mô tả và phân hoạch miền của diễn dịch trong logic mô tả, entropy được xác định thông qua các khối của phân hoạch. Cho diễn dịch $\mathcal{I}$ là một hệ thống thông tin, X và Y là các tập con của $\Delta^{\mathcal{I}}$, trong đó X đóng vai trò là tập các mẫu dương của khái niệm cần học, Y đóng vai trò là một khối của phân hoạch.

Định nghĩa 3.2. *Entropy* của tập Y đối với tập X trong miền $\Delta^{\mathcal{I}}$ của diễn dịch $\mathcal{I}$, ký hiệu là $E_{\Delta^{\mathcal{I}}}(Y/X)$, được xác định như sau:

$$E_{\Delta^{\mathcal{I}}}(Y/X) = \begin{cases} 0, \text{ nếu } Y \cap X = \emptyset \text{ hoặc } Y \subseteq X \\ -\dfrac{\#XY}{\#Y}\log_2\dfrac{\#XY}{\#Y} - \dfrac{\#\overline{X}Y}{\#Y}\log_2\dfrac{\#\overline{X}Y}{\#Y}, \text{nếu ngược lại,} \end{cases} \quad (3.1)$$

trong đó XY đại diện cho tập $X \cap Y$ và $\overline{X}Y$ đại diện cho tập $\overline{X} \cap Y$. ■

Entropy là một lý thuyết độ đo về tính không chắc chắn trong các hệ thống thông tin khi các đối tượng trong hệ thống đó xuất hiện nhiều hơn trong một lớp. Entropy có giá trị nhỏ nhất là 0 khi và chỉ khi tất cả các đối tượng thuộc về cùng một lớp. Nói cách khác, tập các đối tượng không bị phân chia bởi tập các mẫu dương cũng như tập các mẫu âm. Entropy đạt giá trị lớn nhất khi các đối tượng phân bố đều nhau trong các lớp.

Ghi chú 3.1. *Theo phương trình* (3.1)*, chúng ta thấy rằng* $E_{\Delta^{\mathcal{I}}}(Y/X) = 0$ *khi và chỉ khi tập* Y *không bị phân chia bởi tập* X*.* ■

Chúng ta cần xác định thuộc tính nào trong hệ thống thông tin huấn luyện để phân chia tập các đối tượng thành các lớp cần học là tốt nhất. Quinlan [60] đề xuất sử dụng gia lượng thông tin (*information gain*) nhằm quyết định thứ tự của các thuộc tính cần dùng để phân chia các nút trong cây quyết định. Trong ngữ cảnh logic mô tả, chúng tôi đưa ra định nghĩa về gia lượng thông tin khi sử dụng một bộ chọn để chia một khối trong phân hoạch.

Định nghĩa 3.3. *Gia lượng thông tin* của bộ chọn D trong việc chia tập Y đối với tập X trong $\Delta^{\mathcal{I}}$ của diễn dịch $\mathcal{I}$, ký hiệu là $IG_{\Delta^{\mathcal{I}}}(Y/X, D)$, được xác định như sau:

$$IG_{\Delta^{\mathcal{I}}}(Y/X, D) = E_{\Delta^{\mathcal{I}}}(Y/X) - \left(\frac{\#D^{\mathcal{I}}Y}{\#Y}E_{\Delta^{\mathcal{I}}}(D^{\mathcal{I}}Y/X) + \frac{\#\overline{D^{\mathcal{I}}}Y}{\#Y}E_{\Delta^{\mathcal{I}}}(\overline{D^{\mathcal{I}}}Y/X)\right) \quad (3.2)$$

trong đó $D^{\mathcal{I}}Y$ đại diện cho tập $D^{\mathcal{I}} \cap Y$ và $\overline{D^{\mathcal{I}}}Y$ đại diện cho tập $\overline{D^{\mathcal{I}}} \cap Y$. ■

Gia lượng thông tin dựa trên mức độ giảm bớt thông tin sau khi hệ thống thông tin bị phân chia trên một khối bởi một bộ chọn. Do vậy, chúng ta cần tìm khối và bộ chọn hợp lý sao cho gia lượng thông tin thu được khi sử dụng bộ chọn này để phân chia khối đã chọn là lớn nhất để xây dựng được cây quyết định tốt nhất.

Trong ngữ cảnh $\Delta^{\mathcal{I}}$ và X đã rõ ràng, chúng ta viết $E(Y)$ thay cho $E_{\Delta^{\mathcal{I}}}(Y/X)$ và $IG(Y, D)$ thay cho $IG_{\Delta^{\mathcal{I}}}(Y/X, D)$.

3.2.3. Phân hoạch miền của diễn dịch

Ta nói rằng tập $Y \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$ bị *phân chia* bởi E nếu tồn tại $a \in E^+$ và $b \in E^-$ sao cho $\{a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}\} \subseteq Y$. Một phân hoạch $\mathbb{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ của $\Delta^{\mathcal{I}}$ được gọi là *nhất quán* với E nếu với mọi $1 \leq i \leq n$, Y_i không bị phân chia bởi E.

Cho diễn dịch $\mathcal{I}$ là một hệ thống thông tin huấn luyện trong $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$. Gọi $A_d \in \Sigma_C$ là một khái niệm đại diện cho "thuộc tính quyết định", $E = \langle E^+, E^- \rangle$ với $E^+ = \{a \mid a^{\mathcal{I}} \in A_d^{\mathcal{I}}\}$ và $E^- = \{a \mid a^{\mathcal{I}} \in (\neg A_d^{\mathcal{I}})\}$ tương ứng là tập các mẫu dương và mẫu âm của A_d trong $\mathcal{I}$. Giả sử rằng A_d có thể được biểu diễn bởi một khái niệm C trong ngôn ngữ con $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$, trong đó $\Sigma^\dagger \subseteq \Sigma \setminus \{A_d\}$ và $\Phi^\dagger \subseteq \Phi$. Vấn đề đặt ra là phân hoạch miền $\Delta^{\mathcal{I}}$ của diễn dịch $\mathcal{I}$ sử dụng các khái niệm của $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ để thu được phân hoạch $\mathbb{Y}$ sao cho $\mathbb{Y}$ nhất quán với E.

Ta thấy rằng, nếu A_d xác định được trong $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$ bởi một khái niệm C, lúc đó:

- theo khẳng định thứ nhất của Định lý 2.6, $C^{\mathcal{I}}$ phải là hợp của một số lớp tương đương trong phân hoạch $\mathbb{Y}$ của $\Delta^{\mathcal{I}}$ được phân hoạch thông qua $\sim_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$,
- $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$ với mọi $a \in E^+$ và $a^{\mathcal{I}} \notin C^{\mathcal{I}}$ với mọi $a \in E^-$, nghĩa là phân hoạch $\mathbb{Y}$ nhất quán với E.

Dựa trên ý tưởng của phương pháp học khái niệm trong công trình [55] và những nhận xét trên, chúng tôi thiết kế Thuật toán 3.1 để phân hoạch miền của một diễn dịch trong logic mô tả. Trong thuật toán này, quá trình phân hoạch miền của một diễn dịch sử dụng các bộ chọn cơ bản (theo Định nghĩa 3.1) và các bộ chọn khác (theo mô tả trong Hình 3.1) đã đề cập . Tập các bộ chọn hiện thời được ký hiệu là $\mathbb{D} = \{D_1, D_2, \ldots, D_h\}$. Thuật toán dừng khi phân hoạch đạt được nhất quán với E (khi đó thuật toán trả về kết quả là phân hoạch cần tìm) hoặc không thể phân hoạch thêm được nữa (khi đó thuật toán trả về kết quả thất bại).

Việc lựa chọn khối để phân hoạch trước và bộ chọn để phân hoạch khối đó trong Bước 4 có ý nghĩa rất quan trọng đối với quá trình làm mịn phân hoạch. Nó quyết định đến việc đạt được phân hoạch nhất quán với E nhanh hoặc chậm. Vấn đề đặt ra là khối nào nên phân chia trước và sử dụng bộ chọn nào để phân chia khối đó. Đây là một bài toán mở và cần thiết phải sử dụng các kỹ thuật heuristics. Chúng ta có thể áp dụng hàm tính điểm như là một độ đo cho quá trình phân chia, chẳng hạn các độ đo dựa trên entropy. Ngoài ra, chúng ta cũng phải lưu ý đến tính đơn giản của bộ chọn và khái niệm đặc trưng của các khối cần phân chia. Các kỹ thuật ngẫu nhiên cũng cần thiết cho quá trình làm mịn phân hoạch. Ví dụ, nếu các bộ chọn cho kết quả giống nhau và đều là những kết quả tốt nhất theo hàm tính điểm trong quá trình phân chia

Algorithm 3.1: *Phân hoạch miền của diễn dịch trong logic mô tả*

Input: $\mathcal{I}$, $\Sigma^\dagger$, $\Phi^\dagger$, $E = \langle E^-, E^+\rangle$

Output: $\mathbb{Y} = \{Y_{i_1}, Y_{i_2}, \ldots, Y_{i_k}\}$ sao cho $\mathbb{Y}$ nhất quán với E

$n := 1$; $Y_1 := \Delta^{\mathcal{I}}$; $\mathbb{Y} := \{Y_1\}$; $C_1 := \top$; $\mathbb{D} := \emptyset$;

Tạo và thêm các bộ chọn vào $\mathbb{D}$; `/* theo Định nghĩa 3.1 và Hình 3.1 */`

while ($\mathbb{Y}$ *không nhất quán với* E) and ($\mathbb{Y}$ *có thể phân hoạch*) **do**

> Chọn bộ chọn D_u trong $\mathbb{D}$ và khối Y_{i_j} trong $\mathbb{Y}$ sao cho D_u chia Y_{i_j} thành hai khối không rỗng;
>
> $s := n + 1$; $t := n + 2$; $n := n + 2$;
>
> $Y_s := Y_{i_j} \cap D_u^{\mathcal{I}}$; $\quad C_s := C_{i_j} \sqcap D_u$;
>
> $Y_t := Y_{i_j} \cap (\neg D_u)^{\mathcal{I}}$; $\quad C_t := C_{i_j} \sqcap \neg D_u$;
>
> $\mathbb{Y} := \mathbb{Y} \cup \{Y_s, Y_t\} \setminus \{Y_{i_j}\}$;
>
> Tạo và thêm các bộ chọn mới vào $\mathbb{D}$; `/* theo Định nghĩa 3.1 và Hình 3.1 */`

if ($\mathbb{Y}$ *nhất quán với* E) **then**

> **return** $\mathbb{Y}$;

else

> **return** failure;

một khối, lúc đó chúng ta có thể chọn ngẫu nhiên một trong những bộ chọn đó để phân chia khối. Trong đề tài này, chúng tôi sử dụng độ đo gia lượng thông tin như đã đề cập trong Mục 3.2.2. Giả sử chúng ta có phân hoạch hiện thời là $\mathbb{Y} = \{Y_{i_1}, Y_{i_2}, \ldots, Y_{i_k}\}$ và tập các bộ chọn hiện thời là $\mathbb{D} = \{D_1, D_2, \ldots, D_h\}$ (được xây dựng bằng cách sử dụng các luật trong Định nghĩa 3.1 và Hình 3.1). Với mỗi khối $Y_{i_j} \in \mathbb{Y}$ (trong đó $1 \leq j \leq k$), gọi S_{i_j} là bộ chọn đơn giản nhất có được từ $\arg\max_{D_u \in \mathbb{D}}\{IG(Y_{i_j}, D_u)\}$. Như vậy, với phân hoạch hiện thời $\mathbb{Y}$, nếu Y_{i_j} được lựa chọn để phân chia thì S_{i_j} chính là bộ chọn dùng để phân chia khối Y_{i_j}. Chú ý rằng gia lượng thông tin là độ đo được sử dụng cho quá trình chọn lựa này.

Sau khi quyết định bộ chọn dùng để phân chia các khối, chúng ta tiến hành xác định khối cần phân chia trước Y_{i_j} sao cho khi áp dụng bộ chọn S_{i_j} để phân chia Y_{i_j} ta nhận được giá trị gia lượng thông tin lớn nhất. Nghĩa là, chúng ta chọn khối $Y_{i_j} \in \arg\max_{Y_{i_j} \in \mathbb{Y}}\{IG(Y_{i_j}, S_{i_j})\}$ để phân chia trước. Tiếp theo việc phân chia khối, các bộ chọn mới được tạo ra và thêm vào tập các bộ chọn hiện thời. Tập các bộ chọn này tiếp tục được sử dụng để làm mịn phân hoạch mới.

Ví dụ 3.1. Xét cơ sở tri thức $\mathcal{KB}$ như đã cho trong Ví dụ 1.8 và diễn dịch $\mathcal{I}$ là mô hình của $\mathcal{KB}$ như sau:

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mathcal{I}} &= \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}, \qquad x^{\mathcal{I}} = x \text{ với } x \in \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\},\\
Pub^{\mathcal{I}} &= \Delta^{\mathcal{I}}, \quad Awarded^{\mathcal{I}} = \{P_1, P_4, P_6\}, \quad UsefulPub^{\mathcal{I}} = \{P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\},\\
cites^{\mathcal{I}} &= \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_1, P_4\rangle, \langle P_1, P_6\rangle, \langle P_2, P_3\rangle, \langle P_2, P_4\rangle,\\
&\qquad \langle P_2, P_5\rangle, \langle P_3, P_4\rangle, \langle P_3, P_5\rangle, \langle P_3, P_6\rangle, \langle P_4, P_5\rangle, \langle P_4, P_6\rangle\},\\
cited_by^{\mathcal{I}} &= (cites^{\mathcal{I}})^{-1}, \text{ hàm từng phần } Year^{\mathcal{I}} \text{ được đặc tả theo từng cá thể.}
\end{aligned}$$

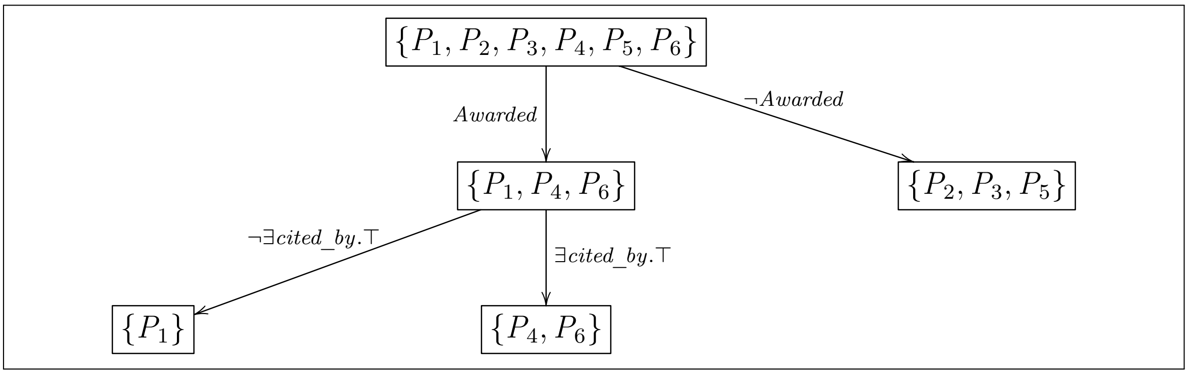
Cho $E = \langle E^+, E^-\rangle$ với $E^+ = \{P_4, P_6\}$ và $E^- = \{P_1, P_2, P_3, P_5\}$, ngôn ngữ con $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$, trong đó $\Sigma^\dagger = \{Awarded, cited\_by\}$ và $\Phi^\dagger = \emptyset$. Các bước làm mịn phân hoạch $\{\Delta^{\mathcal{I}}\}$ của diễn dịch $\mathcal{I}$ được mô tả như sau:

1. $Y_1 := \Delta^{\mathcal{I}}$, $C_1 := \top$, $\mathbb{Y} := \{Y_1\}$
2. Theo độ đo gia lượng thông tin, bộ chọn tốt nhất để phân chia Y_1 là $Awarded$. Phân chia khối Y_1 bởi $Awarded$ chúng ta thu được:
   - $Y_2 := \{P_1, P_4, P_6\}$, $C_2 := Awarded$
   - $Y_3 := \{P_2, P_3, P_5\}$, $C_3 := \neg Awarded$
   - $\mathbb{Y} := \{Y_2, Y_3\}$
3. Theo độ đo gia lượng thông tin, các bộ chọn tốt nhất để phân chia khối Y_2 là $\exists cited\_by.\top$, $\exists cited\_by.C_2$ và $\exists cited\_by.C_3$. Tất cả các bộ chọn này đều phân chia Y_2 giống nhau. Chúng ta sử dụng bộ chọn đơn giản nhất $\exists cited\_by.\top$ để phân chia Y_2 và thu được:
   - $Y_4 := \{P_4, P_6\}$, $C_4 := C_2 \sqcap \exists cited\_by.\top$
   - $Y_5 := \{P_1\}$, $C_5 := C_2 \sqcap \neg\exists cited\_by.\top$
   - $\mathbb{Y} := \{Y_3, Y_4, Y_5\}$

Phân hoạch đạt được là $\mathbb{Y} = \{Y_3, Y_4, Y_5\}$ nhất quán với E, gồm khối Y_4 chứa P_4, P_6 với $P_4, P_6 \in E^+$ và các khối Y_3, Y_5 không chứa cá thể nào của E^+ nên ta có kết quả trả về là $\mathbb{Y} = \{Y_3, Y_4, Y_5\}$ (phân hoạch này không tương ứng với quan hệ $\sim_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$). ■

Quá trình làm mịn phân hoạch của Ví dụ 3.1 được minh họa thông qua cây quyết định như trong Hình 3.2.

Ví dụ 3.2. Xét mô hình $\mathcal{I}$ của cơ sở tri thức $\mathcal{KB}$ và $E = \langle E^+, E^-\rangle$ như đã cho trong Ví dụ 3.1 với ngôn ngữ con $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger}$, trong đó $\Sigma^\dagger = \{cited\_by,\ Year\}$ và $\Phi^\dagger = \{\mathcal{N}, \mathcal{Q}\}$. Các bước làm mịn phân hoạch $\{\Delta^{\mathcal{I}}\}$ của $\mathcal{I}$ được mô tả như sau:



Hình 3.2: Cây quyết định minh họa quá trình làm mịn phân hoạch của Ví dụ 3.1

1. $Y_1 := \Delta^{\mathcal{I}}$, $C_1 := \top$, $\mathbb{Y} := \{Y_1\}$

2. Theo độ đo gia lượng thông tin, các bộ chọn tốt nhất để phân chia khối Y_1 là $\mathit{Year} \geq 2008$ (tương đương với $\mathit{Year} > 2007$) và $\geq 3\, \mathit{cited\_by}.\top$ (tương đương với $\geq 3\, \mathit{cited\_by}.C_1$). Ở đây, chúng ta chọn $\mathit{Year} \geq 2008$ là bộ chọn đơn giản nhất để phân chia Y_1 và thu được:

   - $Y_2 := \{P_1, P_2, P_3\}$, $C_2 := (\mathit{Year} \geq 2008)$
   - $Y_3 := \{P_4, P_5, P_6\}$, $C_3 := (\mathit{Year} < 2008)$
   - $\mathbb{Y} := \{Y_2, Y_3\}$

3. Theo độ đo gia lượng thông tin chúng ta tiếp tục phân chia Y_3 bằng bộ chọn $\mathit{Year} \geq 2007$ và thu được:[1]

   - $Y_4 := \{P_4\}$, $C_4 := C_3 \sqcap (\mathit{Year} \geq 2007)$
   - $Y_5 := \{P_5, P_6\}$, $C_5 := C_3 \sqcap (\mathit{Year} < 2007)$
   - $\mathbb{Y} := \{Y_2, Y_4, Y_5\}$

4. Khối Y_4, Y_5 không thể tiếp tục phân chia. Vì vậy, mặc dầu Y_2 nhất quán với E chúng ta vẫn tiếp tục phân chia nó để sử dụng sau này. Áp dụng độ đo gia lượng thông tin, chúng ta sử dụng bộ chọn $\mathit{Year} \geq 2010$ để phân chia Y_2 và thu được:

   - $Y_6 := \{P_1\}$, $C_6 := C_2 \sqcap (\mathit{Year} \geq 2010)$
   - $Y_7 := \{P_2, P_3\}$, $C_7 := C_2 \sqcap (\mathit{Year} < 2010)$
   - $\mathbb{Y} := \{Y_4, Y_5, Y_6, Y_7\}$

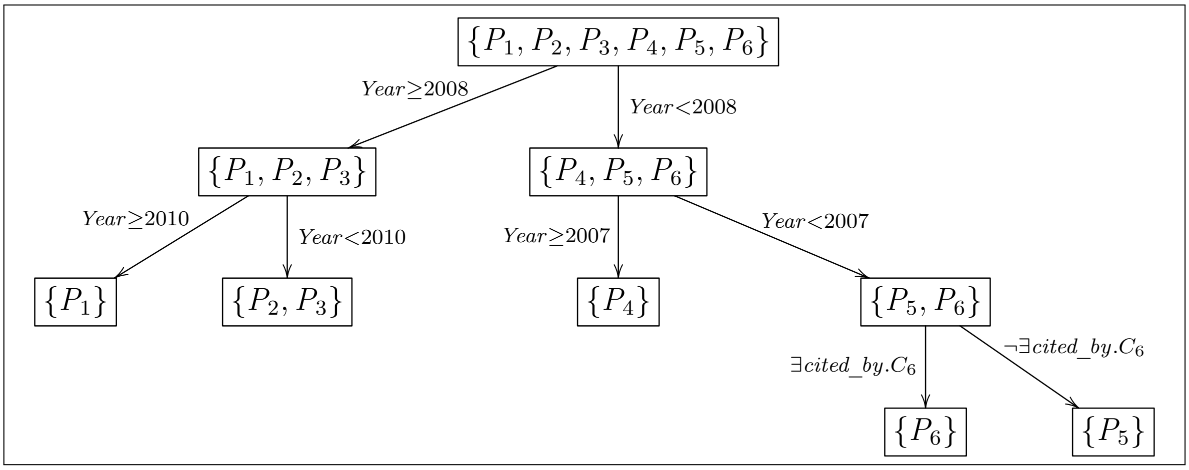
[1] Khối Y_2 nhất quán với E và khối Y_3 không nhất quán với E. Một cách tự nhiên, chúng ta chọn khối Y_3 để phân chia. Tuy nhiên, nếu chúng ta phân chia Y_2 trước bằng bộ chọn $\mathit{Year} \geq 2010$ sẽ cho kết quả tốt hơn về sau này. Đây chính là một gợi ý cho việc xây dựng các heuristic trong quá trình quyết định khối nào nên được phân chia trước và nên sử dụng bộ chọn nào để phân chia khối đó.

5. Theo độ đo gia lượng thông tin, chúng ta phân chia khối Y_5 bằng bộ chọn $\exists cited\_by.C_6$ và thu được:

   - $Y_8 := \{P_6\}$, $C_8 := C_5 \sqcap \exists cited\_by.C_6$
   - $Y_9 := \{P_5\}$, $C_9 := C_5 \sqcap \neg\exists cited\_by.C_6$
   - $\mathbb{Y} := \{Y_4, Y_6, Y_7, Y_8, Y_9\}$

Phân hoạch thu được là $\mathbb{Y} = \{Y_4, Y_6, Y_7, Y_8, Y_9\}$ nhất quán với E gồm khối Y_4 chứa P_4, khối Y_8 chứa P_6, với $P_4, P_6 \in E^+$ và các khối Y_6, Y_7, Y_9 không chứa cá thể nào của E^+ nên ta có kết quả trả về là $\mathbb{Y} = \{Y_4, Y_6, Y_7, Y_8, Y_9\}$. ∎

Quá trình làm mịn phân hoạch của Ví dụ 3.2 được minh họa thông qua cây quyết định như trong Hình 3.3.



Hình 3.3: Cây quyết định minh họa quá trình làm mịn phân hoạch của Ví dụ 3.2

Ví dụ sau đây minh họa cho trường hợp làm mịn phân hoạch miền $\{\Delta^{\mathcal{I}}\}$ của diễn dịch $\mathcal{I}$ không sử dụng vai trò, nghĩa là, $\Sigma^\dagger_{oR} \cup \Sigma^\dagger_{dR} = \emptyset$. Do đó, phương pháp đã đề xuất ở trên giống như phương pháp phân hoạch truyền thống trong học máy dựa trên cây quyết định.

Ví dụ 3.3. Xét mô hình $\mathcal{I}$ của cơ sở tri thức $\mathcal{KB}$ như đã cho trong Ví dụ 3.1 và $E = \langle E^+, E^- \rangle$ với $E^+ = \{P_4, P_6\}$ và $E^- = \{P_1, P_2, P_3, P_5\}$ trong ngôn ngữ con $\mathcal{L}_{\Sigma^\dagger, \Phi^\dagger}$, trong đó $\Sigma^\dagger = \{Awarded, Year\}$ và $\Phi^\dagger = \emptyset$. Các bước làm mịn phân hoạch $\{\Delta^{\mathcal{I}}\}$ của $\mathcal{I}$ được mô tả như sau:

1. $Y_1 := \Delta^{\mathcal{I}}$, $C_1 := \top$, $\mathbb{Y} := \{Y_1\}$

2. Theo độ đo gia lượng thông tin, bộ chọn tốt nhất tại bước này để phân chia khối Y_1 là $Awarded$ và $Year \geq 2008$. Chúng ta chọn $Awarded$ để phân chia Y_1 và thu được:

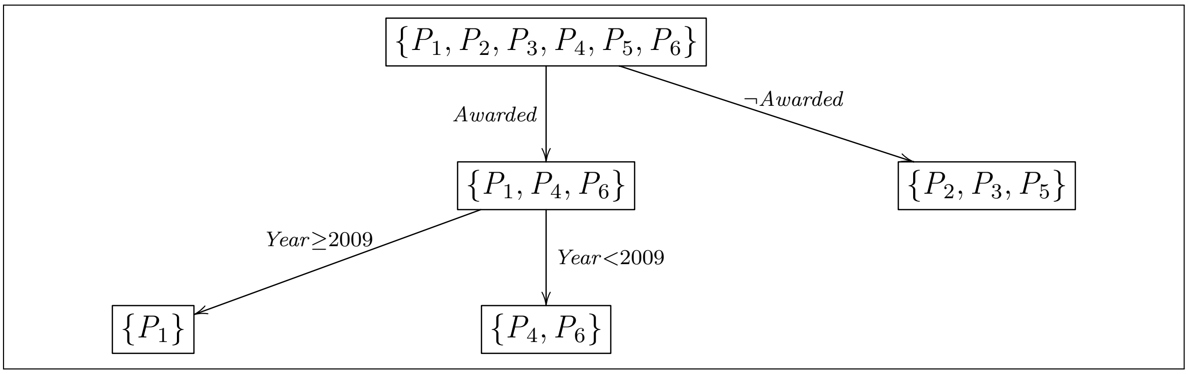
- $Y_2 := \{P_1, P_4, P_6\}$, $C_2 := Awarded$
- $Y_3 := \{P_2, P_3, P_5\}$, $C_3 := \neg Awarded$
- $\mathbb{Y} := \{Y_2, Y_3\}$.

3. Theo độ đo gia lượng thông tin, bộ chọn tốt nhất tại bước này để phân chia khối Y_2 là $Year \geq 2009$. Ta chọn $Year \geq 2009$ để phân chia Y_2 và thu được:

   - $Y_4 := \{P_1\}$, $C_4 := C_2 \sqcap (Year \geq 2009)$
   - $Y_5 := \{P_4, P_6\}$, $C_5 := C_2 \sqcap (Year < 2009)$
   - $\mathbb{Y} := \{Y_3, Y_4, Y_5\}$.

Phân hoạch đạt được là $\mathbb{Y} = \{Y_3, Y_4, Y_5\}$ nhất quán với E, gồm Y_5 chứa P_4, P_6 với $P_4, P_6 \in E^+$ và Y_3, Y_4 không chứa cá thể nào của E^+ nên kết quả trả về là phân hoạch $\mathbb{Y} = \{Y_3, Y_4, Y_5\}$ (phân hoạch này không tương ứng với quan hệ $\sim_{\Sigma^\dagger,\Phi^\dagger,\mathcal{I}}$). ■

Quá trình làm mịn phân hoạch của Ví dụ 3.3 được minh họa thông qua cây quyết định như trong Hình 3.4.



Hình 3.4: Cây quyết định minh họa quá trình làm mịn phân hoạch của Ví dụ 3.3

3.3. Học khái niệm trong logic mô tả

3.3.1. Thuật toán BBCL2

Như đã đề cập trong Mục 3.1, bài toán học khái niệm đối với cơ sở tri thức trong logic mô tả được mô tả như sau:

Cho cơ sở tri thức $\mathcal{KB}$ trong logic mô tả L và các tập các cá thể E^+, E^-. Học khái niệm C trong L sao cho:

- $\mathcal{KB} \models C(a)$ với mọi $a \in E^+$, và
- $\mathcal{KB} \not\models C(a)$, với mọi $a \in E^-$,

trong đó E^+ chứa các mẫu dương và E^- chứa các mẫu âm của khái niệm C.

Algorithm 3.2: *BBCL2–Học khái niệm đối với cơ sở tri thức trong logic mô tả*

Input: $\mathcal{KB}$, $\Sigma^\dagger$, $\Phi^\dagger$, $E = \langle E^+, E^- \rangle$, K

Output: Khái niệm C sao cho:

- $\mathcal{KB} \models C(a)$ với mọi $a \in E^+$, và
- $\mathcal{KB} \not\models C(a)$ for all $a \in E^-$.

$E_0^- := \emptyset$; $\mathbb{C} := \emptyset$; $\mathbb{C}_0 := \emptyset$;
while not (*too hard to extend* $\mathbb{C}$) and $(E_0^- \neq E^-)$ **do**
    Xây dựng mô hình hữu hạn $\mathcal{I}$ của $\mathcal{KB}$ hoặc $\mathcal{I} = \mathcal{I}'_{|K}$;
    $\mathbb{Y}$:=`Partition` ($\mathcal{I}$, $\Sigma^\dagger$, $\Phi^\dagger$, E); `/* phân hoạch miền của` $\mathcal{I}$ `*/`
    foreach $Y_{i_j} \in \mathbb{Y}$, $\exists a \in E^- : a^\mathcal{I} \in Y_{i_j}$ and $\forall a \in E^+ : a^\mathcal{I} \notin Y_{i_j}$ **do**
        if $(\mathcal{KB} \models \neg C_{i_j}(a), \forall a \in E^+)$ **then**
            if $(\mathcal{KB} \not\models (\bigsqcap \mathbb{C} \sqsubseteq \neg C_{i_j}))$ **then**
                $\mathbb{C} := \mathbb{C} \cup \{\neg C_{i_j}\}$;
                $E_0^- := E_0^- \cup \{a \in E^- \mid a^\mathcal{I} \in Y_{i_j}\}$;
        else
            $\mathbb{C}_0 := \mathbb{C}_0 \cup \{\neg C_{i_j}\}$;
while not (*too hard to extend* $\mathbb{C}$) and $(E_0^- \neq E^-)$ **do**
    $D := D_1 \sqcup D_2 \sqcup \cdots \sqcup D_l$, với $D_1, D_2, \ldots, D_l$ được chọn ngẫu nhiên từ $\mathbb{C}_0$;
    if $(\mathcal{KB} \models D(a), \forall a \in E^+)$ **then**
        if $(\mathcal{KB} \not\models (\bigsqcap \mathbb{C}) \sqsubseteq D)$ and $(\exists a \in E^- \setminus E_0^- : \mathcal{KB} \not\models (\bigsqcap \mathbb{C})(a))$ **then**
            $\mathbb{C} := \mathbb{C} \cup \{D\}$;
            $E_0^- := E_0^- \cup \{a \mid a \in E^- \setminus E_0^-, \mathcal{KB} \not\models (\bigsqcap \mathbb{C})(a)\}$;
if $(E_0^- = E^-)$ **then**
    foreach $D \in \mathbb{C}$ **do**
        if $\mathcal{KB} \not\models \bigsqcap(\mathbb{C} \setminus \{D\})(a), \forall a \in E^-$ **then**
            $\mathbb{C} := \mathbb{C} \setminus \{D\}$;
    $C := \bigsqcap \mathbb{C}$;
    return C_{rs} := `Simplify` (C); `/* rút gọn khái niệm` C `*/`
else
    return failure;

Ý tưởng chính của thuật toán BBCL2 để giải quyết bài toán này là sử dụng các mô hình của $\mathcal{KB}$ kết hợp với mô phỏng hai chiều trong mô hình đó (để mô hình hóa tính không phân biệt được) và cây quyết định (để phân lớp dữ liệu) cho việc tìm kiếm khái niệm C. Thuật toán này sử dụng Thuật toán 3.1 để làm mịn phân hoạch $\{\Delta^{\mathcal{I}}\}$ của diễn dịch $\mathcal{I}$ (là mô hình của $\mathcal{KB}$) nhằm đạt được phân hoạch nhất quán với $E = \langle E^+, E^- \rangle$.

Thuật toán tiến hành xây dựng tập E_0^- và mở rộng nó sao cho E_0^- phủ càng lúc càng nhiều cá thể trong E^-, xây tập $\mathbb{C}$ gồm các phần tử là các khái niệm D sao cho $\mathcal{KB} \models D(a)$ với mọi $a \in E^+$ và xây dựng tập $\mathbb{C}_0$ gồm khái niệm để trợ giúp cho việc xây dựng khái niệm C. Khi một khái niệm D không thỏa mãn điều kiện $\mathcal{KB} \models \neg D(a)$ với mọi $a \in E^-$ nhưng nó là một khái niệm ứng viên "tốt" thì khái niệm D được đưa vào $\mathbb{C}_0$. Sau này, khi cần thiết, các khái niệm trong $\mathbb{C}_0$ được lấy ra, thực hiện phép hợp và kiểm tra xem nó có thỏa mãn điều kiện để thêm vào $\mathbb{C}$ hay không. Như vậy, trong quá trình học chúng ta luôn có:

- $\mathcal{KB} \models (\bigsqcap \mathbb{C})(a)$ với mọi $a \in E^+$, và
- $\mathcal{KB} \not\models (\bigsqcap \mathbb{C})(a)$ với mọi $a \in E_0^-$.

Thuật toán mở rộng $\mathbb{C}$ sao cho $\mathcal{KB} \not\models (\bigsqcap \mathbb{C})(a)$ với càng lúc càng nhiều $a \in E^-$. Như vậy, mở rộng $\mathbb{C}$ đồng nghĩa với việc mở rộng E_0^-. Khi $E_0^- = E^-$ thuật toán trả về khái niệm $\bigsqcap \mathbb{C}$ sau khi đã thực hiện việc chuẩn hóa và đơn giản hóa.

Điều kiện "not (*too hard to extend* $\mathbb{C}$)" trong Bước 2 và 12 của thuật toán BBCL2 là khác nhau. Điều kiện trong Bước 2 phụ thuộc vào kết quả làm mịn phân hoạch $\{\Delta^{\mathcal{I}}\}$ của diễn dịch $\mathcal{I}$, trong khi đó điều kiện trong Bước 12 phụ thuộc vào việc chọn ngẫu nhiên các khái niệm từ tập $\mathbb{C}_0$. Đây là những điều kiện mở và chúng ta có thể xây dựng các điều kiện này tùy thuộc vào từng yêu cầu cụ thể của bài toán.

Việc xây dựng các diễn dịch $\mathcal{I}$ là mô hình của $\mathcal{KB}$ ở Bước 3 có thể được thực hiện bằng các thuật toán tableaux đã được đề xuất trong các công trình [49] (đối với $\mathcal{ALC}$), [52] (đối với $\mathcal{ALCI}$), [54] (đối với $\mathcal{SH}$), [31, 51] (đối với $\mathcal{SHI}$), [34] (đối với $\mathcal{SHIQ}$), [32] (đối với $\mathcal{SHOIQ}$), [29] (đối với $\mathcal{SROIQ}$). Nếu logic L có tính chất mô hình hữu hạn thì các diễn dịch $\mathcal{I}$ được xây dựng sao cho $\mathcal{I}$ là mô hình hữu hạn của $\mathcal{KB}$. Ngược lại, các diễn dịch $\mathcal{I}$ được xây dựng sao cho $\mathcal{I}$ là mô hình hữu hạn của $\mathcal{KB}$ hoặc $\mathcal{I} = \mathcal{I}'_{|k}$, trong đó $\mathcal{I}'$ là một mô hình không hữu hạn của $\mathcal{KB}$ và k là một tham số của thuật toán học (chẳng hạn, $k = 5$).

Chúng ta nhận thấy rằng, khi khái niệm $\neg C_{i_j}$ được thêm vào $\mathbb{C}$ thì $a^{\mathcal{I}} \in (\neg C_{i_j})^{\mathcal{I}}$ với mọi $a \in E^+$. Đây là một điều kiện rất tốt để chúng ta có thể hy vọng rằng $\mathcal{KB} \models \neg C_{i_j}(a)$ với mọi $a \in E^+$. Sử dụng các thuật toán tableaux đối với từng logic mô tả cụ thể (thông qua các bộ suy luận), thuật toán BBCL tiến hành kiểm tra xem $\mathcal{KB} \models \neg C_{i_j}(a)$ có thỏa mãn với mọi $a \in E^+$ hay không. Nếu điều này thỏa mãn, $\neg C_{i_j}$ được thêm vào tập $\mathbb{C}$. Ngược lại, $\neg C_{i_j}$ được thêm vào tập $\mathbb{C}_0$ với hy vọng sau này có thể sử dụng được nó trong quá trình lấy hợp của các khái niệm trong $\mathbb{C}_0$. Nghĩa là, một khái niệm $D \in \mathbb{C}_0$ không thỏa mãn $\mathcal{KB} \models D(a)$ với mọi $a \in E^+$, nhưng khi lấy hợp của một nhóm các khái niệm $D_1, D_2, \ldots, D_l$ trong $\mathbb{C}_0$ thì có thể $\mathcal{KB} \models (D_1 \sqcup D_2 \sqcup \ldots \sqcup D_l)(a)$ với mọi $a \in E^+$. Do đó, khi quá trình mở rộng $\mathbb{C}$ gặp khó khăn bằng cách sử dụng các C_{i_j} (là khái niệm đặc trưng tương ứng của các khối Y_{i_j} trong phân hoạch $\mathbb{Y}$ đạt được thông qua việc phân hoạch miền của mô hình $\mathcal{KB}$), chúng ta có thể chuyển sang lấy hợp của các khái niệm trong $\mathbb{C}_0$ để xem xét bổ sung vào tập $\mathbb{C}$.

Việc rút gọn khái niệm kết quả trong Bước 23 có thể được thực hiện thông qua việc chuẩn hóa khái niệm, sau đó tiến hành đo độ giống nhau giữa các khái niệm để tiến hành việc gộp các khái niệm theo các luật De Morgan theo thứ tự ưu tiên từ cao đến thấp.

3.3.2. Tính đúng của thuật toán BBCL2

Mệnh đề 3.1 (Tính đúng đắn của thuật toán BBCL2)**.** *Thuật toán BBCL2 là đúng đắn. Nghĩa là, nếu thuật toán BBCL2 trả về một khái niệm C_{rs} thì C_{rs} là một lời giải của bài toán học khái niệm cho cơ sở tri thức trong logic mô tả với ngữ cảnh (2).* ■

Chứng minh. Giả sử C_{rs} là khái niệm kết quả của thuật toán BBCL2 và C là khái niệm $\bigsqcap \mathbb{C}$ trong bước 22. Vì C_{rs} thu được từ khái niệm C thông qua phép biến đổi bảo toàn tính tương đương của khái niệm nên chúng ta chỉ cần chứng minh hai khẳng định sau:

- $\mathcal{KB} \models C(a)$ với mọi $a \in E^+$, và
- $\mathcal{KB} \not\models C(a)$ với mọi $a \in E^-$.

Đầu tiên chúng ta chứng minh $\mathcal{KB} \models C(a)$ với mọi $a \in E^+$. Ta thấy rằng tập các khái niệm $\mathbb{C}$ chỉ được mở rộng tại các Bước 8 và 16. Một khái niệm D được thêm vào $\mathbb{C}$ khi $\mathcal{KB} \models D(a)$ với mọi $a \in E^+$. Đặt $n = \#\mathbb{C}$ sau khi đã loại bỏ những khái niệm D khỏi $\mathbb{C}$ ở bước 21. Rõ ràng, ta thấy tập $\mathbb{C}$ chỉ chứa những khái niệm D_i, $1 \leq i \leq n$, sao cho $\mathcal{KB} \models D_i(a)$ với mọi $a \in E^+$. Do đó, $\mathcal{KB} \models (D_1 \sqcap D_2 \sqcap \cdots \sqcap D_n)(a)$ với mọi $a \in E^+$. Nói cách khác, $\mathcal{KB} \models C(a)$ với mọi $a \in E^+$.

Bây giờ chúng ta chứng minh $\mathcal{KB} \not\models C(a)$ với mọi $a \in E^-$. Ta thấy rằng quá trình mở rộng cũng như thu hẹp tập $\mathbb{C}$ tại các Bước 8, 16 và 21 luôn đảm bảo được rằng

$\mathcal{KB} \not\models C(a)$ với mọi $a \in E_0^-$ (khởi đầu $E_0^- = \emptyset$). Thật vậy, tại Bước 8, thuật toán chỉ xem xét những khái niệm C_{i_j} mà Y_{i_j} chứa các $a^{\mathcal{I}}$ với $a \in E^-$ và không chứa $a^{\mathcal{I}}$ nào với $a \in E^+$. Rõ ràng, nếu $\mathcal{KB} \models \neg C_{i_j}(a)$ với mọi $a \in E^+$ thì $\mathcal{KB} \not\models \neg C_{i_j}(a)$ với mọi $a \in E^-$ mà $a^{\mathcal{I}} \in Y_{i_j}$. Do đó, khi thêm $\neg C_{i_j}$ vào $\mathbb{C}$ và thêm tất cả $a \in E^-$ thỏa mãn $a^{\mathcal{I}} \in Y_{i_j}$ vào E_0^- ta có $\mathcal{KB} \not\models \bigsqcap \mathbb{C}(a)$ với mọi $a \in E_0^-$. Tại Bước 16 và 21, với lập luận tương tự khi thêm các khái niệm vào $\mathbb{C}$ và loại bỏ các khái niệm ra khỏi $\mathbb{C}$, ta luôn có $\mathcal{KB} \not\models \bigsqcap \mathbb{C}(a)$ với mọi $a \in E_0^-$. Khi $E_0^- = E^-$ ta có $\mathcal{KB} \not\models \bigsqcap \mathbb{C}(a)$ với mọi $a \in E^-$. Nói cách khác, $\mathcal{KB} \not\models C(a)$ với mọi $a \in E^-$.

Như vậy ta kết luận rằng nếu thuật toán BBCL2 không kết thúc với kết quả thất bại thì khái niệm trả về C_{rs} là một lời giải của bài toán học khái niệm cho cơ sở tri thức trong logic mô tả. ■

Ghi chú 3.2 (Độ phức tạp của thuật toán BBCL2)**.** *Học khái niệm cho cơ sở tri thức trong logic mô tả liên quan chặt chẽ với vấn đề suy luận tự động trong logic mô tả. Đối với vấn đề suy luận tự động, độ phức tạp của bài toán này là* ExpTime*-khó ngay cả đối với logic mô tả cơ bản $\mathcal{ALC}$. Đến nay, các công trình nghiên cứu vẫn chưa chỉ ra được dấu hiệu nào cho thấy có thể hy vọng làm giảm độ phức tạp của bài toán suy luận. Một cách tổng quát, bài toán kiểm tra tính thỏa trong logic mô tả thường là* ExpTime*-đầy đủ. Thuật toán BBCL2 sử dụng một vòng lặp tuyến tính có giới hạn là lực lượng của C_0 cho bài toán suy luận. Do đó thuật toán này có độ phức tạp là hàm mũ (xét theo kích thước của $\mathcal{KB}$, E^+ và E^- với giả thiết là $\Sigma^\dagger$ cố định)*

3.3.3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 3.4. Xét cơ sở tri thức $\mathcal{KB}_0 = \langle \mathcal{R}, \mathcal{T}, \mathcal{A}_0 \rangle$ như đã cho trong Ví dụ 1.8 và $E = \langle E^+, E^- \rangle$ đối với $E^+ = \{P_4,\ P_6\}$, $E^- = \{P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_5\}$, $\Sigma^\dagger = \{Awarded,$ $cited\_by\}$ và $\Phi^\dagger = \emptyset$. Học định nghĩa cho khái niệm A_d với $\mathcal{KB} = \langle \mathcal{R}, \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$, trong đó $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \{A_d(a) \mid a \in E^+\} \cup \{\neg A_d(a) \mid a \in E^-\}$. Thuật toán BBCL2 thực hiện các bước như sau:

1. $\mathbb{C} := \emptyset$, $\mathbb{C}_0 := \emptyset$, $E_0^- := \emptyset$.
2. $\mathcal{KB}$ có nhiều mô hình, trong đó mô hình $\mathcal{I}$ được đặc tả trong Ví dụ 3.1 như sau:

$$\begin{array}{rcl}
\Delta^{\mathcal{I}} & = & \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}, \qquad x^{\mathcal{I}} = x \text{ với } x \in \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}, \\
Pub^{\mathcal{I}} & = & \Delta^{\mathcal{I}},\ \ Awarded^{\mathcal{I}} = \{P_1, P_4, P_6\},\ \ UsefulPub^{\mathcal{I}} = \{P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}, \\
cites^{\mathcal{I}} & = & \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_1, P_4\rangle, \langle P_1, P_6\rangle, \langle P_2, P_3\rangle, \langle P_2, P_4\rangle, \\
 & & \langle P_2, P_5\rangle, \langle P_3, P_4\rangle, \langle P_3, P_5\rangle, \langle P_3, P_6\rangle, \langle P_4, P_5\rangle, \langle P_4, P_6\rangle\}, \\
cited_by^{\mathcal{I}} & = & (cites^{\mathcal{I}})^{-1},\ \ \text{hàm từng phần } Year^{\mathcal{I}} \text{ được đặc tả theo từng cá thể.}
\end{array}$$

3. Áp dụng Thuật toán 3.1 để làm mịn phân hoạch $\{\Delta^{\mathcal{I}}\}$ của $\mathcal{I}$, chúng ta thu được phân hoạch $\mathbb{Y} = \{Y_3, Y_4, Y_5\}$ nhất quán với E tương ứng với các khái niệm đặc trưng C_3, C_4, C_5, trong đó $Y_3 = \{P_2, P_3, P_5\}$, $Y_4 = \{P_4, P_6\}$, $Y_5 = \{P_1\}$ và $C_3 \equiv \neg Awarded$, $C_4 \equiv Awarded \sqcap \exists cited\_by.\top$, $C_5 \equiv \neg Awarded \sqcap \exists cited\_by.\top$. (Xem quá trình phân hoạch ở Ví dụ 3.1)

4. Vì $Y_3 \subseteq E^-$ nên ta tiến hành xem xét đối với $C_3 \equiv \neg Awarded$. Vì $\mathcal{KB} \models \neg C_3(a)$ với mọi $a \in E^+$ nên ta thêm $\neg C_3$ vào $\mathbb{C}$ và thêm các phần tử của Y_3 vào E_0^-. Do đó, ta có $\mathbb{C} = \{C_3\}$ và $E_0^- = \{P_2, P_3, P_5\}$.

5. Vì $Y_5 \subseteq E^-$ nên ta tiến hành xem xét đối với $C_5 \equiv Awarded \sqcap \neg\exists cited\_by.\top$. Vì $\mathcal{KB} \models \neg C_5(a)$ với mọi $a \in E^+$ và $\bigsqcap \mathbb{C}$ không bị bao hàm bởi C_5 dựa trên $\mathcal{KB}$ nên ta thêm $\neg C_5$ vào $\mathbb{C}$. Do đó, ta có $\mathbb{C} = \{\neg C_3, \neg C_5\}$, $\bigsqcap \mathbb{C} \equiv \neg C_3 \sqcap \neg C_5 \equiv \neg\neg Awarded \sqcap \neg(Awarded \sqcap \neg\exists cited\_by.\top)$ và $E_0^- = \{P_1, P_2, P_3, P_5\}$.

6. Vì $E_0^- = E^-$ nên ta có $C \equiv \bigsqcap \mathbb{C} \equiv \neg\neg Awarded \sqcap \neg(Awarded \sqcap \neg\exists cited\_by.\top)$. Rút gọn C ta được kết quả trả về là $C_{rs} \equiv Awarded \sqcap \exists cited\_by.\top$. ■

Ví dụ 3.5. Cho $\mathcal{KB}_0, E, \mathcal{KB}, \Phi^\dagger$ như trong Ví dụ 3.4 và thay đổi $\Sigma^\dagger = \{cited\_by, Year\}$. Thuật toán BBCL2 thực hiện hai bước đầu tiên như Ví dụ 3.4 và các bước tiếp theo như sau:

3. Áp dụng Thuật toán 3.1 để làm mịn phân hoạch $\{\Delta^{\mathcal{I}}\}$ của $\mathcal{I}$, chúng ta thu được phân hoạch $\mathbb{Y} = \{Y_4, Y_6, Y_7, Y_8, Y_9\}$ nhất quán với E tương ứng với các khái niệm đặc trưng C_4, C_6, C_7, C_8, C_9, trong đó $Y_4 = \{P_4\}$, $Y_6 = \{P_1\}$, $Y_7 = \{P_2, P_3\}$, $Y_8 = \{P_6\}$, $Y_9 = \{P_5\}$ và $C_4 \equiv (Year < 2008) \sqcap (PubYear \geq 2007)$, $C_6 \equiv (Year \geq 2008) \sqcap (Year \geq 2010)$, $C_7 \equiv (Year \geq 2008) \sqcap (Year < 2010)$, $C_8 \equiv (Year < 2008) \sqcap (Year < 2007) \sqcap \exists cited\_by.((Year \geq 2008) \sqcap (Year \geq 2010))$, $C_9 \equiv (Year < 2008) \sqcap (Year < 2007) \sqcap \neg\exists cited\_by.((Year \geq 2008) \sqcap (Year \geq 2010))$. (Xem quá trình phân hoạch ở Ví dụ 3.2)

4. Vì $Y_6 \subseteq E^-$ nên ta tiến hành xem xét đối với $C_6 \equiv (Year \geq 2008) \sqcap (Year \geq 2010)$. Vì $\mathcal{KB} \models \neg C_6(a)$ với mọi $a \in E^+$ nên ta thêm $\neg C_6$ vào $\mathbb{C}$ và thêm tất cả các phần tử của Y_6 vào E_0^-. Do đó, ta có $\mathbb{C} = \{\neg C_6\}$ và $E_0^- = \{P_1\}$.

5. Vì $Y_7 \subseteq E^-$ nên ta tiến hành xem xét đối với $C_7 \equiv (Year \geq 2008) \sqcap (Year < 2010)$. Vì $\mathcal{KB} \models \neg C_7(a)$ với mọi $a \in E^+$ và $\bigsqcap \mathbb{C}$ không bị bao hàm bởi $\neg C_7$ dựa trên $\mathcal{KB}$ nên ta thêm $\neg C_7$ vào $\mathbb{C}$ và thêm các phần tử của Y_7 và E_0^-. Do đó, ta có $\mathbb{C} = \{\neg C_6, \neg C_7\}$ và $E_0^- = \{P_1, P_2, P_3\}$.

6. Vì $Y_9 \subseteq E^-$ nên ta tiến hành xem xét đối với $C_9 \equiv (Year < 2008) \sqcap (Year < 2007) \sqcap \neg\exists cited\_by.((Year \geq 2008) \sqcap (Year \geq 2010))$. Vì $\mathcal{KB} \models \neg C_9(a)$ với mọi $a \in E^+$ và $\bigsqcap \mathbb{C}$ không bị bao hàm bởi $\neg C_9$ dựa trên $\mathcal{KB}$ nên ta thêm $\neg C_9$ vào $\mathbb{C}$ và thêm các phần tử của Y_9 vào E_0^-. Do đó, ta có $\mathbb{C} = \{\neg C_6, \neg C_7, \neg C_9\}$ và $E_0^- = \{P_1, P_2, P_3, P_5\}$.

7. Vì $E_0^- = E^-$ nên ta có $C \equiv \bigsqcap \mathbb{C} \equiv \neg((Year \geq 2008) \sqcap (Year \geq 2010)) \sqcap \neg((Year \geq 2008) \sqcap (Year < 2010)) \sqcap \neg((Year < 2008) \sqcap (Year < 2007) \sqcap \neg\exists cited\_by.((Year \geq 2008) \sqcap (Year \geq 2010)))$. Rút gọn C ta được kết quả trả về là $C_{rs} \equiv (Year < 2008) \sqcap [(Year \geq 2007) \sqcup \exists cited\_by.(Year \geq 2010)]$. ■

Tiểu kết Chương 3

Chương này đã trình bày thuật toán làm mịn phân hoạch miền của diễn dịch trong logic mô tả (Thuật toán 3.1). Trên cơ sở đó, chúng tôi giới thiệu Thuật toán BBCL2 để giải quyết bài toán học khái niệm cho cơ sở tri thức trong logic mô tả. Ý tưởng chính của thuật toán này là sử dụng các mô hình của cơ sở tri thức kết hợp với mô phỏng hai chiều trong các mô hình đó (để mô hình hóa tính không phân biệt được) và cây quyết định (để phân lớp dữ liệu) cho việc tìm kiếm khái niệm kết quả. Tính đúng của thuật toán BBCL2 cũng được chứng minh thông qua bổ đề liên quan. Thuật toán này có thể áp dụng cho một lớp lớn các logic mô tả là mở rộng của $\mathcal{ALC}_{\Sigma,\Phi}$ có tính chất mô hình hữu hạn hoặc nữa hữu hạn, trong đó $\Phi \subseteq \{\mathcal{I}, \mathcal{F}, \mathcal{N}, \mathcal{Q}, \mathcal{O}, \mathcal{U}, \mathsf{Self}\}$. Lớp các logic mày chứa nhiều logic mô tả rất hữu ích, chẳng hạn như $\mathcal{SHIQ}$ (logic làm cơ sở cho OWL) và $\mathcal{SROIQ}$ (logic làm cơ sở cho OWL 2) được sử dụng trong nhiều ứng dụng của Web ngữ nghĩa.

KẾT LUẬN

Kết luận

Kể từ khi logic mô tả được xem là nền tảng của ngôn ngữ OWL (một ngôn ngữ được sử dụng để mô hình hóa các hệ thống ngữ nghĩa và ontology theo khuyến nghị của W3C), logic mô tả đã được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu. Đối với các hệ thống ngữ nghĩa, việc xây dựng những định nghĩa cho các khái niệm phù hợp để đặc tả hệ thống là một vấn đề được đặt ra một cách tự nhiên. Học khái niệm trong logic mô tả là một trong những giải pháp để tìm kiếm và xây dựng định nghĩa cho các khái niệm. Với mục đích đó, đề tài nghiên cứu bài toán học khái niệm cho cơ sở tri thức trong logic mô tả với ngữ cảnh (2). Kết quả nghiên cứu của đề tài được tóm tắt như sau:

1. Xây dựng ngôn ngữ logic mô tả $\mathcal{L}_{\Sigma,\Phi}$ dựa trên ngôn ngữ $\mathcal{ALC}_{reg}$ với tập các đặc trưng mở rộng gồm $\mathcal{I}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{U}$, Self. Ngoài ra ngôn ngữ được xây dựng còn cho phép sử dụng các thuộc tính (bao gồm thuộc tính rời rạc và liên tục) như là các phần tử cơ bản của ngôn ngữ nhằm mô tả các hệ thống thông tin phù hợp với thực tế hơn.

2. Xây dựng mô phỏng hai chiều trên lớp các logic mở rộng đang nghiên cứu. Các định lý, bổ đề, hệ quả liên quan đến mô phỏng hai chiều và tính bất biến đối với mô phỏng hai chiều cũng được phát triển và chứng minh trên lớp các logic mở rộng này.

3. Dựa vào mô phỏng hai chiều, xây dựng thuật toán phân hoạch miền của mô hình của cơ sở tri thức và xây dựng thuật toán BBCL2 để học khái niệm trong logic mô tả cho cơ sở tri thức với ngữ cảnh (2).

Những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu

1. Xây dựng các chiến lược học khác nhau thông qua các độ đo trong việc quyết định khối nào nên phân hoạch trước. So sánh các chiến lược học với nhau.

2. Xây dựng các module học khái niệm trong logic mô tả với các ngữ cảnh khác nhau như là một API cho phép tích hợp vào các hệ thống khác.

3. Nghiên cứu khả năng học chính xác khái niệm cho các logic mô tả khác nhau.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] J. Alvarez. A formal framework for theory learning using description logics. In *ILP Work-in-progress reports*, volume 35. CEUR-WS.org, 2000.

[2] F. Baader, D. Calvanese, D. L. McGuinness, D. Nardi, and P. F. Patel-Schneider, editors. *The Description Logic Handbook: Theory, Implementation, and Applications*. Cambridge University Press, 2007.

[3] F. Baader and U. Sattler. An overview of tableau algorithms for description logics. *Studia Logica*, 69(1):5–40, 2001.

[4] L. Badea and S.-H. Nienhuys-Cheng. A refinement operator for description logics. In *Proceedings of the 10th International Conference on Inductive Logic Programming*, ILP'2000, pages 40–59. Springer-Verlag, 2000.

[5] M. Baldoni, L. Giordano, and A. Martelli. A tableau calculus for multimodal logics and some (un)decidability results. In H. Swart, editor, *Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods*, volume 1397 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 44–59. Springer Berlin Heidelberg, 1998.

[6] P. Blackburn, M. de Rijke, and Y. Venema. *Modal Logic*. Number 53 in Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, 2001.

[7] P. Blackburn, J. van Benthem, and F. Wolter. *Handbook of Modal Logic*. Elsevier Science, 2006.

[8] R. J. Brachman and J. G. Schmolze. An overview of the KL-ONE knowledge representation system. *Cognitive Science*, 9(2):171–216, 1986.

[9] L. Chang, F. Lin, and Z. Shi. A dynamic description logic for representation and reasoning about actions. In Z. Zhang and J. Siekmann, editors, *Knowledge Science, Engineering and Management*, volume 4798 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 115–127. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[10] W. W. Cohen, A. Borgida, and H. Hirsh. Computing least common subsumers in description logics. In *Proceedings of AAAI*, pages 754–760. The MIT Press, 1992.

[11] W. W. Cohen and H. Hirsh. Learning the CLASSIC description logic: Theoretical and experimental results. In *Proceedings of KR'1994*, pages 121–133, 1994.

[12] F. Distel. *Learning Description Logic Knowledge Bases from Data Using Methods from Formal Concept Analysis*. PhD thesis, Dresden University of Technology, 2011.

[13] A. R. Divroodi and L. A. Nguyen. On bisimulations for description logics. In *Proceedings of CS&P'2011*, pages 99–110, 2011.

[14] A. R. Divroodi and L. A. Nguyen. On bisimulations for description logics (long version 3, 16 jul 2011). *CoRR*, abs/1104.1964, 2011.

[15] N. Fanizzi, C. d'Amato, and F. Esposito. DL-FOIL concept learning in description logics. In *Proceedings of ILP'2008*, LNCS, pages 107–121. Springer-Verlag, 2008.

[16] N. Fanizzi, C. d'Amato, and F. Esposito. Towards the induction of terminological decision trees. In *Proceedings of the 2010 ACM Symposium on Applied Computing*, SAC'2010, pages 1423–1427. ACM, 2010.

[17] N. Fanizzi, S. Ferilli, L. Iannone, I. Palmisano, and G. Semeraro. Downward refinement in the $\mathcal{ALN}$ description logic. In *Proceedings of HIS'2004*, pages 68–73. IEEE Computer Society, 2004.

[18] M. J. Fischer and R. E. Ladner. Propositional dynamic logic of regular programs. *Journal of Computer and System Sciences*, 18(2):194–211, 1979.

[19] G. D. Giacomo and M. Lenzerini. Boosting the correspondence between description logics and propositional dynamic logics. In *In Proceedings of AAAI'94*, pages 205–212. AAAI Press, 1994.

[20] Q.-T. Ha, T.-L.-G. Hoang, L. A. Nguyen, H. S. Nguyen, A. Szałas, and T.-L. Tran. A bisimulation-based method of concept learning for knowledge bases in description logics. In *Proceedings of the Third Symposium on Information and Communication Technology*, SoICT'2012, pages 241–249. ACM, 2012.

[21] V. Haarslev and R. Möller. Consistency testing: The race experience. In R. Dyckhoff, editor, *Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods*, volume 1847 of *LNCS*, pages 57–61. Springer Berlin Heidelberg, 2000.

[22] M. R. Hacene, M. Huchard, A. Napoli, and P. Valtchev. Relational concept analysis: mining concept lattices from multi-relational data. *Ann. Math. Artif. Intell.*, 67(1):81–108, 2013.

[23] M. Hennessy and R. Milner. Algebraic laws for nondeterminism and concurrency. *Journal of the ACM*, 32(1):137–161, 1985.

[24] B. Hollunder. Hybrid inferences in kl-one-based knowledge representation systems. In H. Marburger, editor, *GWAI-90 14th German Workshop on Artificial Intelligence*, volume 251 of *Informatik-Fachberichte*, pages 38–47. Springer Berlin Heidelberg, 1990.

[25] B. Hollunder and F. Baader. Qualifying number restrictions in concept languages. Technical report, 1991.

[26] I. Horrocks. The fact system. `http://www.cs.man.ac.uk/~horrocks/FaCT/`, 2003. [Online; accessed 10-April-2014].

[27] I. Horrocks. OWL: A description logic based ontology language. In *Proceedings of CP'2005*, LNCS, pages 5–8. Springer Berlin Heidelberg, 2005.

[28] I. Horrocks. Hermit: Reasoning with large ontologies. `http://www.cs.ox.ac.uk/projects/HermiT/index.html`, 2012. [Online; accessed 10-April-2014].

[29] I. Horrocks, O. Kutz, and U. Sattler. The even more irresistible $\mathcal{SROIQ}$. In *KR*, pages 57–67. AAAI Press, 2006.

[30] I. Horrocks, P. F. Patel-Schneider, D. L. Mcguinness, and C. A. Welty. OWL: a description logic based ontology language for the semantic web. In *The Description Logic Handbook: Theory, Implementation, and Applications*, pages 458–486. Cambridge University Press, 2007.

[31] I. Horrocks and U. Sattler. A description logic with transitive and inverse roles and role hierarchies. *J. Log. Comput.*, 9(3):385–410, 1999.

[32] I. Horrocks and U. Sattler. A tableau decision procedure for $\mathcal{SHOIQ}$. *J. Autom. Reasoning*, 39(3):249–276, 2007.

[33] I. Horrocks, U. Sattler, and S. Tobies. Practical reasoning for very expressive description logics. *Logic Journal of the IGPL*, 8(3):239–263, 2000.

[34] I. Horrocks, U. Sattler, and S. Tobies. Reasoning with individuals for the description logic $\mathcal{SHIQ}$. In *Proceedings CADE-17*, volume 2000 of *LNCS*, pages 482–496. Springer-Verlag, 2000.

[35] L. Iannone, I. Palmisano, and N. Fanizzi. An algorithm based on counterfactuals for concept learning in the semantic web. *Applied Intelligence*, 26(2):139–159, 2007.

[36] J.-U. Kietz. Learnability of description logic programs. In *Proceedings of the 12th International Conference on Inductive Logic Programming*, ILP'2002, pages 117–132. Springer-Verlag, 2003.

[37] S. Konstantopoulos and A. Charalambidis. Formulating description logic learning as an inductive logic programming task. In *Fuzzy Systems (FUZZ), 2010 IEEE International Conference on*, pages 1–7, 2010.

[38] P. Lambrix and P. Larocchia. Learning composite concepts. In *Proceedings of DL'1998*, 1998.

[39] J. Lehmann. Concept learning in description logics (master thesis). Master's thesis, Dresden University of Technology, Germany, 2006.

[40] J. Lehmann and P. Hitzler. A refinement operator based learning algorithm for the $\mathcal{ALC}$ description logic. In *Proceedings of ILP'2007*, pages 147–160. Springer-Verlag, 2008.

[41] J. Lehmann and P. Hitzler. Concept learning in description logics using refinement operators. *Machine Learning*, 78(1-2):203–250, 2010.

[42] F. A. Lisi. A declarative modeling language for concept learning in description logics. In *Proceedings of ILP'2012*, pages 151–165. Springer, 2012.

[43] F. A. Lisi. A formal characterization of concept learning in description logics. In *Description Logics*. CEUR-WS.org, 2012.

[44] F. A. Lisi and U. Straccia. A system for learning GCI axioms in fuzzy description logics. In *Description Logics*, pages 760–778. CEUR-WS.org, 2013.

[45] Y. Ma and F. Distel. Concept adjustment for description logics. In *Proceedings of the Seventh International Conference on Knowledge Capture*, K-CAP'2013, pages 65–72. ACM, 2013.

[46] M. Minsky. A framework for representing knowledge. *Artificial intelligence memo*, 1974.

[47] A. Montanari and A. Policriti. A set-theoretic approach to automated deduction in graded modal logics. In *Proceedings of the 15th IJCAI*, pages 196–201. Morgan Kaufmann, 1997.

[48] B. Motik and U. Sattler. A comparison of reasoning techniques for querying large description logic aboxes. In *Proceedings of LPAR'06*, pages 227–241. Springer-Verlag, 2006.

[49] L. A. Nguyen. An efficient tableau prover using global caching for the description logic $\mathcal{ALC}$. *Fundam. Inform.*, 93(1-3):273–288, 2009.

[50] L. A. Nguyen. A cut-free ExpTime tableau decision procedure for the description logic $\mathcal{SHI}$. In *Proceedings of ICCCI'2011 (1)*, volume 6922 of *LNCS*, pages 572–581. Springer, 2011.

[51] L. A. Nguyen. A cut-free exptime tableau decision procedure for the description logic $\mathcal{SHI}$. In *Proceedings of ICCCI'2011*, volume 6922 of *LNCS*, pages 572–581. Springer-Verlag, 2011.

[52] L. A. Nguyen. Cut-free exptime tableaux for checking satisfiability of a knowledge base in the description logic $\mathcal{ALCI}$. In *Proceedings of ISMIS'2011*, volume 6804 of *LNCS*, pages 465–475. Springer-Verlag, 2011.

[53] L. A. Nguyen. A tableau method with optimal complexity for deciding the description logic $\mathcal{SHIQ}$. In *Proceedings of ICCSAMA'2013 (1)*, volume 479 of *Studies in Computational Intelligence*, pages 331–342. Springer, 2013.

[54] L. A. Nguyen and A. Szałas. Tableaux with global caching for checking satisfiability of a knowledge base in the description logic $\mathcal{SH}$. In N. T. Nguyen and R. Kowalczyk, editors, *Transactions on Computational Collective Intelligence*, volume 1, pages 21–38. Springer-Verlag, 2010.

[55] L. A. Nguyen and A. Szałas. Logic-based roughification. In *Rough Sets and Intelligent Systems (1)*, pages 517–543. Springer, 2013.

[56] D. Park. Concurrency and automata on infinite sequences. In *Proceedings of the 5th GI-Conference on Theoretical Computer Science*, pages 167–183. Springer-Verlag, 1981.

[57] Z. Pawlak. *Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning About Data*. Kluwer Academic Publishers, 1992.

[58] Z. Pawlak and A. Skowron. Rudiments of rough sets. *Inf. Sci.*, 177(1):3–27, 2007.

[59] M. R. Quillian. Word concepts: a theory and simulation of some basic semantic capabilities. *Behavioral Science*, 12(5):410–430, 1967.

[60] J. R. Quinlan. Induction of decision trees. *Machine Learning*, 1(1):81–106, 1986.

[61] J. R. Quinlan. Learning logical definitions from relations. *Mach. Learn.*, 5(3):239–266, 1990.

[62] K. Revoredo, J. E. Ochoa-Luna, and F. G. Cozman. Learning terminologies in probabilistic description logics. In *Proceedings of Advances in Artificial Intelligence – SBIA'2010*, pages 41–50. Springer-Verlag, 2010.

[63] U. Sattler. Description logic reasoner. `http://www.cs.man.ac.uk/~sattler/reasoners.html`, 2014. [Online; accessed 18-October-2014].

[64] K. Schild. A correspondence theory for terminological logics: Preliminary report. In *Proceedings of the 12th International Joint Conference on Artificial Intelligence - Volume 1*, IJCAI'91, pages 466–471. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1991.

[65] M. Schmidt-Schaubß and G. Smolka. Attributive concept descriptions with complements. *Artif. Intell.*, 48(1):1–26, 1991.

[66] J. G. Schmolze and T. A. Lipkis. Classification in the KL-ONE knowledge representation system. In A. Bundy, editor, *Proceedings of IJCAI'1983*, pages 330–332. William Kaufmann, 1983.

[67] E. Sirin and B. Parsia. Pellet: An OWL DL reasoner. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS.org, 2004.

[68] T.-L. Tran, Q.-T. Ha, T.-L.-G. Hoang, L. A. Nguyen, H. S. Nguyen, and A. Szałas. Concept learning for description logic-based information systems. In *Proceedings of the 2012 Fourth International Conference on Knowledge and Systems Engineering*, KSE'2012, pages 65–73. IEEE Computer Society, 2012.

[69] J. van Benthem. *Modal Logic and Classical Logic*. Indices. Monographs in philosophical logic and formal linguistics. Bibliopolis, 1983.

[70] J. van Benthem. Correspondence theory. In D. Gabbay and F. Guenthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic*, volume 165 of *Synthese Library*, pages 167–247. Springer Netherlands, 1984.

[71] J. van Benthem. Correspondence theory. In D. M. Gabbay and F. Guenthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic*, volume 3, pages 325–408. Springer-Science, second edition, 2001.

[72] J. van Benthem. *Modal Logic for Open Minds*. Center for the Study of Language and Inf, 2010.

[73] E. Zolin. Complexity of reasoning in description logics. `http://www.cs.man.ac.uk/~ezolin/dl/`, 2014. [Online; accessed 18-October-2014].