线性规划

- 线性规划的数学模型
- 案例分析
- 线性规划的计算机求解

1 线性规划的数学模型

线性规划模型特点：

① 每个问题都有一组变量，称为决策变量，这组决策变量的一组定值就代表一个具体方案，通常要求这些变量取值是非负的。

② 存在一定的限制条件，称为约束条件，这些约束条件可以用一组线性等式或不等式来表示。

③ 都有一个目标要求，并且这个目标可以表示为决策变量的线性函数，称为目标函数。按所研究问题的不同，要求目标函数实现极大化或极小化。

线性规划问题的定义：要确定一组决策变量的值，使之满足一组线性等式或线性不等式，并使一个线性目标函数取得最小值（或最大值）。

例：运输问题

运输问题起源于人们在日常生活中把某些物品或人们自身从一些地方转移到另一些地方，要求所采用的运输路线或运输方案是最经济或成本最低的。随着经济的不断发展，现代物流业蓬勃发展，如何充分利用时间、信息、仓储、配送和联运体系创造更多的价值，对问题提出了更高的挑战，但是其基本思想仍然是实现现有资源的最优化配置。

产销平衡的运输问题

平衡运输问题的条件如下：

（1）明确出发地（产地）、目的地（销地）、供应量（产量）、需求量（销量）和单位成本。

（2）需求假设：每一个出发地都有一个固定的供应量，所有的供应量都必须配送到目的地。与之类似，每一个目的地都有一个固定的需求量，整个需求量都必须由出发地满足，即“总供应＝总需求”。

（3）成本假设：从任何一个出发地到任何一个目的地的货物配送成本与所配送的数量成线性比例关系，因此，总成本就等于配送的单位成本乘以所配送的数量。

某公司有三个加工厂A_1, A_2, A_3生产某产品，每日的产量分别为：7吨、4吨和9吨。该公司把这些产品分别运往四个销售点B_1, B_2, B_3, B_4，各销售点每日销量分别为：3吨、6吨、5吨和6吨。从各工厂到各销售点的单位产品运价如下表所示。问该公司应如何调运这些产品，在满足各销售点需求量的前提下，使总运费最小？

加工厂＼销售点	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	3	10	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7	4	10	5	9
销 量	3	6	5	6	

设x_{ij}表示由产地A_i运往销地B_j的产品数量，c_{ij}表示由产地A_i运往销地B_j的单位运价，则由产地A_i运往各个销地的产品总量应等于其产量a_i，即

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

类似，各产地运往销地B_j的产品数量应等于其需求量b_j，即

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

此时，总运价为$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$，且$x_{ij} \geq 0$。

因此，运输问题的数学模型为：

$$minf = 3x_{11} + 11x_{12} + 3x_{13} + 10x_{14} + x_{21} + 9x_{22} + 2x_{23} + 8x_{24} + 7x_{31} + 4x_{32} + 10x_{33} + 5x_{34}$$

s.t.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 7$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 4$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 5$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 6$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 5$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 6$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

产销不平衡的运输问题

实际问题中产销往往是不平衡的。

（1）在总产量大于总销量（供过于求）的情况下，数学模型可写成（以满足小的销量为准）：

$$\min\ f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le a_i \quad (i=1,\cdots,m) \quad (\text{产量约束}) \\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j \quad (j=1,\cdots,n) \quad (\text{销量约束}) \\ x_{ij}\ge 0 \quad (i=1,\cdots m, j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

（2）在总产量小于总销量（供不应求）的情况下，数学模型可写成（以满足小的产量为准）：

$$\min\ f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i & (i=1,\cdots,m)\quad(\text{产量约束})\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}\le b_j & (j=1,\cdots,n)\quad(\text{销量约束})\\ x_{ij}\ge 0 & (i=1,\cdots m,j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

2 案例分析

2.1. 非传统运输模型

运输模型的应用并不仅限于在不同起点和终点之间运送货物，它在生产-库存控制等领域都有应用，凡是其数学模型符合“运输”问题特点的规划问题，都可以用运输问题特有的方法加以解决。

例　某公司生产专业徒步旅行者用的背包。产品需求通常出现在每年的3月至6月，公司估计这4个月的需求量分别为100，200，180，300个。由于公司雇佣兼职人员生产背包，因此每月的生产能力都不一样。据估计，公司从3月到6月能够生产50，180，280，270个。因为不同月份的生产能力和需求不匹配，当前月份的需求可能通过以下3种方法来满足：当月生产，以前某个月剩余的产品，以后某个月多余的产品（延期交货）。

在第1种情况下，背包的生产费用为每个40，第2种情况下每个背包每月的储存费用为0.5，第3种情况下每个背包每月的延期交货惩罚费为2。公司希望确定这4个月期间的最优生产计划。

解 这是一个生产与储存的问题，通过找出生产-库存问题与运输模型要素之间的对应关系，可以把这个问题建立为一个运输模型。

运输	生产-库存
起点i	生产周期i
终点j	需求周期j
起点i的供应量	生产周期i的生产能力
终点j的需求量	周期j的需求量
从起点i到终点j的单位运输费用	周期i到周期j的单位费用（生产+库存+惩罚）

下表给出了所建立的运输模型。

	1	2	3	4	生产能力
1	40	40.5	41	41.5	50
2	42	40	40.5	41	180
3	44	42	40	40.5	280
4	46	44	42	40	270
需求量	100	200	180	300	

从周期i到周期j的单位运输费用可计算为：

$$c_{ij}=\begin{cases}\text{周期}i\text{的生产费用},\ i=j\\ \text{周期}i\text{的生产费用}+\text{从}i\text{到}j\text{的库存费用},\ i<j\\ \text{周期}i\text{的生产费用}+\text{从}i\text{到}j\text{的惩罚费用},\ i>j\end{cases}$$

2.2. 投资

投资问题的例子包括工程的资金预算、债券投资策略、股票投资组合的选择，以及银行贷款政策的制定。在许多这些问题中，都可以利用线性规划来选择最优的投资机会组合，在满足投资商设定的投资条件的同时，使得收益达到最大。

例：贷款策略模型

某银行正在制定一项总额可达1200万美元的贷款策略，下表提供了各类贷款的相关数据。

贷款类型	利率	坏账比率
个人	0.140	0.10
汽车	0.130	0.07
住房	0.120	0.03
农场	0.125	0.05
商业	0.100	0.02

坏账不可收回且不产生利息收入。

为了与其他金融机构竞争，要求银行至少把40%的资金分配给农场和商业贷款。为扶持当地的住房产业，住房贷款至少要等于个人、汽车和住房贷款总额的50%。银行还有一项明确的政策，不允许坏账的总比例超过全部贷款的4%.

- 数学模型

问题是寻求确定每一种贷款的数额（单位：100万美元），因此给出下面变量的定义

x_1 =个人贷款

x_2 =汽车贷款

x_3 =住房贷款

x_4 =农场贷款

x_5 =商业贷款

银行的目标是使得净收益（即利息收入与坏账损失之差）达到最大。只有良性的贷款才会产生利息收入。对于个人贷款，由于10%的贷款属于收不回的坏账，因此，银行只能对其中90%的贷款收取利息，即收取原贷款额x_1中$0.9x_1$的14%的利息。对其余4种贷款，同理可得

总利息

$=0.14(0.9x_1)+0.13(0.93x_2)+0.12(0.97x_3)+0.125(0.95x_4)+0.1(0.98x_5)$

$=0.126x_1+0.1209x_2+0.1164x_3+0.11875x_4+0.098x_5$

我们还有

坏账$=0.1x_1+0.07x_2+0.03x_3+0.05x_4+0.02x_5$

因此，目标函数（总利息-坏账）表达式为

$$max f=0.026x_1+0.0509x_2+0.0864x_3+0.06875x_4+0.078x_5$$

这个问题有5个约束：

（1）资金总额不超过1200万美元：

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$$

（2）农场和商业贷款至少等于总贷款的40%：

$$x_4 + x_5 \geq 0.4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

（3）住房贷款应该至少等于个人、汽车和房屋贷款的50%：

$$x_3 \geq 0.5(x_1 + x_2 + x_3)$$

（4）坏账比例不应超过总贷款的4%：

$$0.1x_1 + 0.07x_2 + 0.03x_3 + 0.05x_4 + 0.02x_5 \leq 0.04(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

（5）非负性约束：$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

在前面的公式中，一个不十分明显的假定是，所有的贷款都是差不多同时发放的。这一假设允许我们不考虑分配给不同贷款资金的时间价值差。

2.3. 财务应用—财务计划

Hewlitt公司建立了一项提前退休计划，作为其公司重组的一部分。在自愿签约期临近时，68位雇员办理了提前退休手续。因为这些人的提前退休，在接下来的8年里，公司将承担以下责任，每年年初支付的现金需求如下表所示（单位：1000美元）：

年份	1	2	3	4	5	6	7	8
现金需求	430	210	222	231	240	195	225	255

公司的财务人员必须决定现在应准备多少钱，以便应付为期8年的支出计划。该退休项目的财务计划包括政府债券的投资及储蓄。对于政府债券的投资限于以下3种选择：

债券	价格(美元)	利率(%)	到期年数(年)
1	1150	8.875	5
2	1000	5.500	6
3	1350	11.75	7

政府债券的面值是1000美元，这意味着尽管价格不同，在到期时，也都要支付1000美元。表中所示的利率是基于面值的，且每年都可以获得4%的利息。

- 数学模型

首先定义如下决策变量：

F–退休计划所形成的8年期债务所需的总金额；

B_1–在第1年年初买入的债券1的单位数量；

B_2–在第1年年初买入的债券2的单位数量；

B_3–在第1年年初买入的债券3的单位数量；

S_i–在第i年年初投资于储蓄的金额（$i = 1, 2, \cdots, 8$）。

目标函数是求出满足退休计划带来的8年期债务所需资金的最小值，即

$$minF$$

约束条件是下面的形式：

年初可使用资金-投资于债券与储蓄的资金=该年的现金支付

F给出了第1年年初可使用的资金数量。已知债券1当前价格为1150美元，且投资以1000美元为单位来计算，则购买B_1单位债券1的总投资金额为$1.15B_1$。同理，债券2和3的总投资金额为$1B_2$和$1.35B_3$。相应地，第1年用于储蓄的金额为S_1。利用这些结果和已知的第1年的支出义务430，我们可以写出第1年的约束条件：

$$F - 1.15B_1 - B_2 - 1.35B_3 - S_1 = 430$$

对债券的投资只能在第1年进行，而且债券将持至有效期满。

在第2年的年初可利用资金包括债券1面值的8.875%的收益，债券2面值的5.5%的收益，债券3面值的11.75%的收益和4%的储蓄收益。第2年用于储蓄的金额为S_2，已知有210的负债，可得第2年的约束条件如下：

$$0.08875B_1 + 0.055B_2 + 0.1175B_3 + 1.04S_1 - S_2 = 210$$

同理，第3年到第8年的约束条件分别如下：

$$0.08875B_1 + 0.055B_2 + 0.1175B_3 + 1.04S_2 - S_3 = 222 \quad \text{第3年}$$

$$0.08875B_1 + 0.055B_2 + 0.1175B_3 + 1.04S_3 - S_4 = 231 \quad \text{第4年}$$

$$0.08875B_1 + 0.055B_2 + 0.1175B_3 + 1.04S_4 - S_5 = 240 \quad \text{第5年}$$

$$1.08875B_1 + 0.055B_2 + 0.1175B_3 + 1.04S_5 - S_6 = 195 \quad \text{第6年}$$

$$1.055B_2 + 0.1175B_3 + 1.04S_6 - S_7 = 225 \quad \text{第7年}$$

$$1.1175B_3 + 1.04S_7 - S_8 = 255 \quad \text{第8年}$$

要注意的是，第6年的约束条件显示出债券1提供的可用资金是$1.08875B_1$，系数$1.08875B_1$反映了在第6年可获得的债券1在第5年的面值加上利息的值。同时，因为债券在第5年到期，在第6年年初就可以使用，所以变量B_1不会出现在第7年和第8年的约束条件中。对债券2和债券3的解释类似。

最后，注意第8年约束条件中的变量S_8。退休基金的负债在第8年年初结束，因此我们预期S_8为零，并且没有资金用于储蓄。但是如果第7年的债券收入加上储蓄利息超过了第8年的现金需求255，公式中将会有S_8。所以，S_8是一个剩余变量，它反映了在8年的现金需求被满足后所余下的资金数量。

2.4. 生产计划和库存控制

大量地应用于生产和库存控制的线性规划，应用范围从简单的加工能力配置以满足需求，到利用库存来“平抑”由于计划期内需求的突然变化而带来的影响，以及采取雇工和解雇策略来回应劳动力需求的变化等比较复杂的情况。

我们下面介绍3个例子。第1个例子介绍在单一周期内使用公共生产设备以满足需求的产品安排。第2个例子介绍在多周期生产系统中如何使用库存来满足未来的需求。第3 个例子是关于组合运用库存、雇工与解雇手段，以“平滑”多周期计划期内上下浮动的需求生产安排。

例1：单周期生产模型　　为了满足冬季市场需求，某服装公司正在加工皮制外衣、鹅绒外套、保暖裤和手套。所有产品由4个不同的车间生产：剪裁、保暖处理、缝纫和包装。服装公司已收到其他公司的产品订单。合同规定对于未按时交货的订单产品将予以惩罚。下表提供了本问题的相关数据。

车间	每件产品的生产时间（小时）				
	皮制外衣	鹅绒外套	保暖裤	手套	生产能力（小时）
剪裁	0.30	0.30	0.25	0.15	1000
保暖	0.25	0.35	0.30	0.10	1000
缝纫	0.45	0.50	0.40	0.22	1000
包装	0.15	0.15	0.1	0.05	1000
需求	800	750	600	500	
单位利润	30	40	20	10	
单位惩罚	15	20	10	8	

试为公司设计最优的生产计划。

- 数学模型

变量的定义很简单。令

x_1 =皮制外衣的数量

x_2 =鹅绒外衣的数量

x_3 =保暖裤的数量

x_4 =手套的数量

当需求不满足时，公司会被处罚。这意味着，问题的目标是极大化净收入，定义为

净收入=总利润-总惩罚

总利润很容易地表示为$30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4$。总惩罚是短缺量的函数（=需求量-每种产品的供应量），这些短缺量可以由下列需求上限来确定：

$$x_1 \le 800,\ x_2 \le 750,\ x_3 \le 600,\ x_4 \le 500$$

如果需求约束满足严格的不等式，则没有满足相应的需求。可以定义新的非负变量用代数形式表示任何产品的短缺量，即

s_j =产品j的短缺数量，$j = 1, 2, 3, 4$

在这种情况下，需求约束可以被写成

$$x_1 + s_1 = 800,\ x_2 + s_2 = 750,\ x_3 + s_3 = 600,\ x_4 + s_4 = 500$$

现在用$15s_1 + 20s_2 + 10s_3 + 8s_4$来计算出短缺惩罚的费用，因此，目标函数可以写成

$$max f = 30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4 - (15s_1 + 20s_2 + 10s_3 + 8s_4)$$

还有些约束条件是表示生产能力的限制，即

$$0.30x_1 + 0.30x_2 + 0.25x_3 + 0.15x_4 \leq 1000(\text{剪裁})$$
$$0.25x_1 + 0.35x_2 + 0.30x_3 + 0.10x_4 \leq 1000(\text{保暖})$$
$$0.45x_1 + 0.50x_2 + 0.40x_3 + 0.22x_4 \leq 1000(\text{缝纫})$$
$$0.15x_1 + 0.15x_2 + 0.10x_3 + 0.05x_4 \leq 1000(\text{包装})$$

因此，完整的数学模型为：

$$max f = 30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4 - (15s_1 + 20s_2 + 10s_3 + 8s_4)$$

s.t.

$$0.30x_1 + 0.30x_2 + 0.25x_3 + 0.15x_4 \le 1000$$

$$0.25x_1 + 0.35x_2 + 0.30x_3 + 0.10x_4 \le 1000$$

$$0.45x_1 + 0.50x_2 + 0.40x_3 + 0.22x_4 \le 1000$$

$$0.15x_1 + 0.15x_2 + 0.10x_3 + 0.05x_4 \le 1000$$

$$x_1 + s_1 = 800,\ x_2 + s_2 = 750,\ x_3 + s_3 = 600,\ x_4 + s_4 = 500$$

$$x_j \ge 0,\ \ s_j \ge 0,\ \ j = 1, 2, 3, 4$$

例2：多周期生产-库存模型

Acme制造公司已签订了未来的6个月提供房屋窗户的合同。每月的需求量分别是100，250，190，140，220，110扇。每扇窗户的生产成本与劳动力、原材料和水电费用有关，每个月都不同。Acme公司估计在未来的6个月，每扇窗户的生产成本分别是50美元，45美元，55美元，48美元，52美元和50美元。为了利用生产成本变动的有利条件，Acme公司可以选择生产多于某个月的需求，而保证剩余的部分为后面月份交货。然而，这将导致每月每扇窗户有8美元的存储成本。建立一个线性规划，确定最优的产品生产安排。

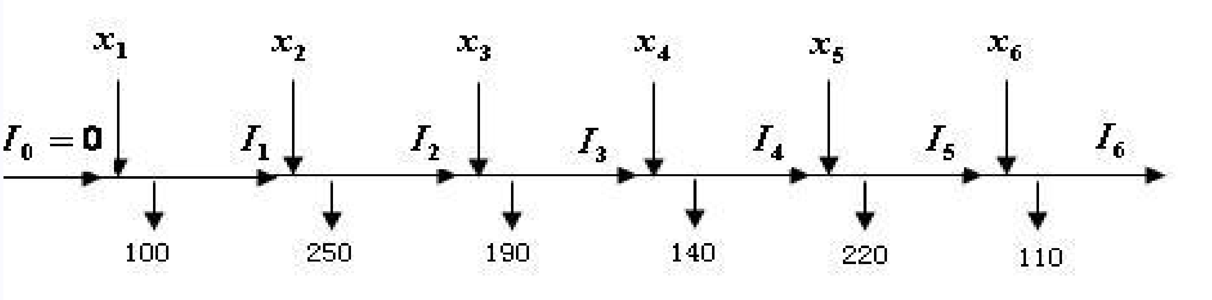
- 数学模型

本问题的变量包括月生产量和月底的库存量。对于$i=1,2,\cdots,6$，令

$x_i=$第i个月的生产数量

$I_i=$第i个月底的库存数

这些变量与未来6个月范围内月需求之间的关系如下图所示。系统以零值开始，这意味着$I_0=0$。



目标函数是求生产成本与月末库存成本之和的最小值。这里我们有

$$\text{总生产成本} = 50x_1 + 45x_2 + 55x_3 + 48x_4 + 52x_5 + 50x_6$$

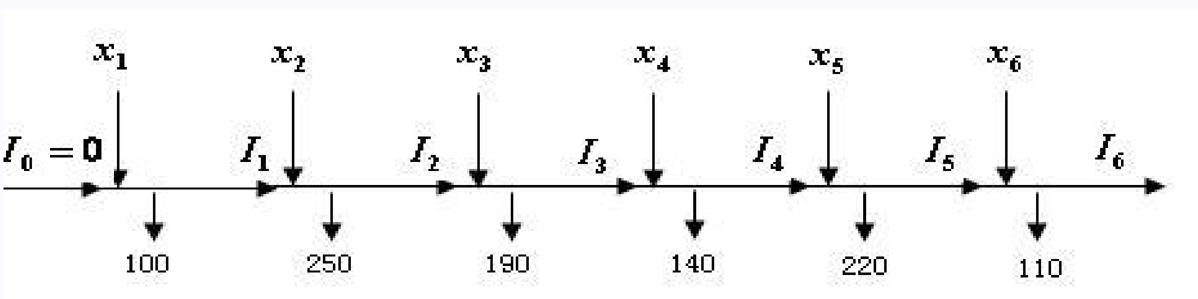
$$\text{总库存成本} = 8(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6)$$

因此目标函数是

$$min f = 50x_1+45x_2+55x_3+48x_4+52x_5+50x_6+8(I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6)$$

问题的约束可以由图直接得到。对于每个周期，我们有下列平衡方程：

月初存量+生产量-月末库存=需求



访问主页
标题页
第 33 页 共 58 页
返回
全屏显示
关闭
退出

按月写成数学表达式如下：

$$I_0 + x_1 - I_1 = 100$$（第1个月）

$$I_1 + x_2 - I_2 = 250$$（第2个月）

$$I_2 + x_3 - I_3 = 190$$（第3个月）

$$I_3 + x_4 - I_4 = 140$$（第4个月）

$$I_4 + x_5 - I_5 = 220$$（第5个月）

$$I_5 + x_6 - I_6 = 110$$（第6个月）

$$x_i,\ I_i \geq 0,\quad i = 1, 2, \cdots, 6,\quad I_0 = 0$$

因此，完整的数学模型为：

$$min f = 50x_1 + 45x_2 + 55x_3 + 48x_4 + 52x_5 + 50x_6 + 8(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6)$$

s.t.

$$x_1 - I_1 = 100$$
$$I_1 + x_2 - I_2 = 250$$
$$I_2 + x_3 - I_3 = 190$$
$$I_3 + x_4 - I_4 = 140$$
$$I_4 + x_5 - I_5 = 220$$
$$I_5 + x_6 - I_6 = 110$$
$$x_i,\ I_i \geq 0,\quad i = 1, 2, \cdots, 6$$

例3：多周期生产平滑模型

一家公司将在未来的4个月（3月、4月、5月和6月）生产某种产品，每月的需求量分别为520件、720件、520件和620件。公司有10位正式工，但是，如果需要的话，可通过雇用和解雇临时工来适应上下变动的生产需求。在任何一个月，雇用和解雇的额外成本分别是每名工人200美元和400美元。一名正式工人每月能生产12件，而一名临时工由于缺乏相应的经验，每月只能生产10件。在任何一个月，公司的生产可以多于需求，并将过剩的产品转到后面的某个月份，每件每月的库存成本为50美元。

试为公司这4个月的计划设计一种最优的雇用/解雇策略。

- 数学模型

这个模型和例2的模型有点类似，每月有它的生产、需求和月末库存。但有两处例外：（1）需要考虑正式工与临时工之间的关系；（2）需要考虑每月的雇用和解雇成本。

因为10名正式工不能够被解雇，因此，可以分别从每个月的需求减去他们的产量来表示他们的影响，即便有其余的需求，也是通过雇用和解雇临时工来满足。从模型的观点来看，每月的净余需求是

$$
\begin{aligned}
&3\text{月份的需求} = 520 - 12 \times 10 = 400\text{件}\\
&4\text{月份的需求} = 720 - 12 \times 10 = 600\text{件}\\
&5\text{月份的需求} = 520 - 12 \times 10 = 400\text{件}\\
&6\text{月份的需求} = 620 - 12 \times 10 = 500\text{件}
\end{aligned}
$$

对于$i = 1, 2, 3, 4$，模型的变量可以定义为

$x_i =$在任何雇用或解雇后，第i个月初临时工的净人数

$S_i =$第i个月初，雇用或解雇临时工的数量

$I_i =$第i个月月末库存产品件数

由定义，变量x_i和I_i必须假定是非负的。但是，变量S_i可以是正的（当雇用新的临时工时），可以是负的（当解雇临时工时），可是是零（如果没有雇用和解雇发生）。其结果是，该变量必须是无符号限制。

目标是极小化雇用与解雇成本，以及从本月到下月的库存成本三者之和。库存成本的处理类似于例2给出的情况，即

$$库存成本 = 50(I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$$

（注意，在最优解中，$I_4 = 0$。）

雇用和解雇成本有些复杂。我们知道在任何最优解中，至少40名临时工必须在3月初被雇用，以适应该月的需求。然而，并不将这种情况作为特殊情况处理，我们将留给最优化工程来自动处理。因此，已知雇用和解雇临时工的成本分别为200美元和400美元，我们有

雇用和解雇的成本

$=200\times$在3月、4月、5月和6月初雇用临时工的数量$+400\times$在3月、4月、5月和6月初解雇临时工的数量

用数学表达式翻译这个方程，首先需要建立约束条件。

模型的约束涉及库存、雇用和解雇。首先建立库存约束。定义x_i为第i个月可用的临时工的数量，并且已知临时工每个月的生产能力是10件，所以在第i个月的生产量是$10x_i$。因此，库存约束是

$$10x_1 = 400 + I_1 \text{（3月）}$$
$$I_1 + 10x_2 = 600 + I_2 \text{（4月）}$$
$$I_2 + 10x_3 = 400 + I_3 \text{（5月）}$$
$$I_3 + 10x_4 = 500 \text{（6月）}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0,\ I_1, I_2, I_3 \geq 0$$

接下来，建立关于雇用和解雇的约束。首先注意到，临时工在3月初有x_1名工人。然后在4月初，劳动力人数由x_1调整（增加或减少）S_2得到x_2。对于x_3和x_4用类似的处理方法，得到下列方程

$$x_1 = S_1$$
$$x_2 = x_1 + S_2$$
$$x_3 = x_2 + S_3$$
$$x_4 = x_3 + S_4$$
S_1, S_2, S_3, S_4无符号限制
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

变量S_1,S_2,S_3,S_4当它们是严格正时表示雇用，当它们是严格负时表示解雇。然而，这种”定性的“信息并不能用在数学表达式中，而需要作下列替代：

$S_i=S_i^- - S_i^+$,其中$S_i^-,S_i^+\geq 0$

无限制变量S_i现在是两个非负变量S_i^-,S_i^+的差。可以认为S_i^-是雇用临时工的数量，S_i^+是解雇临时工的数量。

现在可以写出雇用和解雇成本如下：

雇用成本$=200(S_1^-+S_2^-+S_3^-+S_4^-)$

解雇成本$=400(S_1^++S_2^++S_3^++S_4^+)$

完整的模型为

$min f = 50(I_1+I_2+I_3+I_4)+200(S_1^-+S_2^-+S_3^-+S_4^-)+400(S_1^++S_2^++S_3^++S_4^+)$

s.t.

$10x_1 = 400 + I_1$

$I_1 + 10x_2 = 600 + I_2$

$I_2 + 10x_3 = 400 + I_3$

$I_3 + 10x_4 = 500$

$x_1 = S_1^- - S_1^+$

$x_2 = x_1 + S_2^- - S_2^+$

$x_3 = x_2 + S_3^- - S_3^+$

$x_4 = x_3 + S_4^- - S_4^+$

$S_i^-, S_i^+ \geq 0,\ \ x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4\ \ I_1, I_2, I_3 \geq 0$

2.5. 混合与精炼

某石油公司具有日产1500000桶原油的能力。精炼厂的最终产品是含有不同辛烷值（ON）的3种类型无铅汽油：普通汽油ON=87，优质汽油0N=89，超优汽油ON=92。

精炼过程包含3个阶段：

（1）使用蒸馏塔来生产存料（ON=82），其生产率为每桶原油生产0.2桶存料；

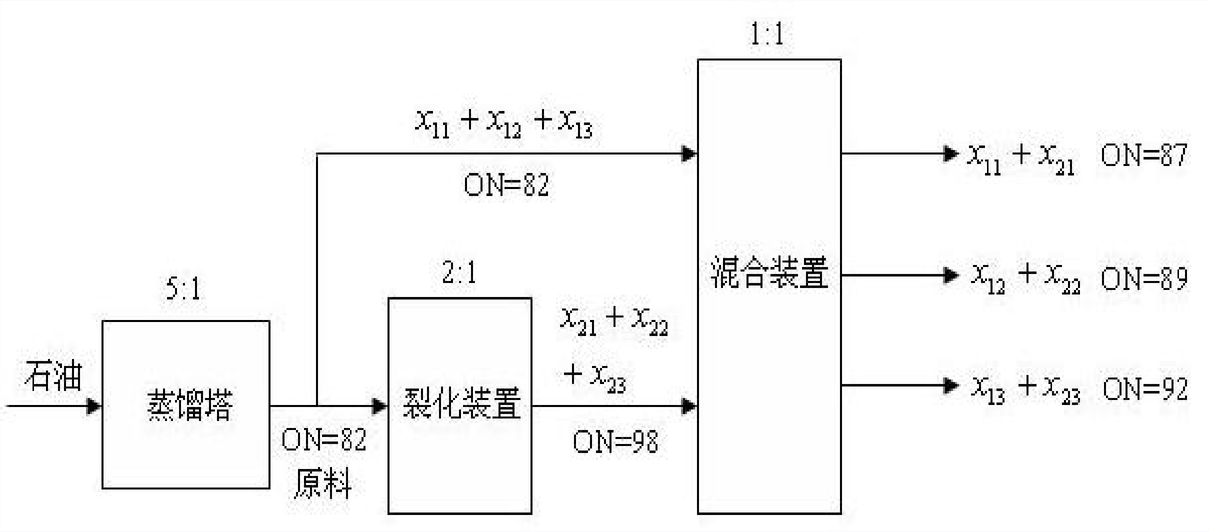
（2）使用裂化装置把蒸馏塔得到的部分存料生产为汽油存料（ON=98），其生产率为每桶存料生产0.5桶汽油存料；

（3）使用混合装置来混合裂化装置产的汽油存料与蒸馏塔产的存料。

公司估计，3种汽油的每桶净利润分别为6.7美元，7.2美元和8.1美元。裂化装置的输入能力是每天200000桶存料。对于普通汽油、优质汽油和超优汽油的需求上限分别为每天50000桶，30000桶和40000桶。试为精炼厂建立一个模型以确定最优生产进度安排。

- ## 数学模型

我们可以首先用一个图概述模型的要素。



按照进入混合装置的2条输入流（存料与裂化汽油）和3种最终产品可以定义模型的变量。令

x_{ij} =用来混合成最终产品j的输入流i的数量（桶/天），$i=1,2; j=1,2,3$

根据此定义，有

普通汽油的日产量$=(x_{11}+x_{21})$桶/天

优质汽油的日产量$=(x_{12}+x_{22})$桶/天

超优汽油的日产量$=(x_{13}+x_{23})$桶/天

送入混合装置的日存料量$=(x_{11}+x_{12}+x_{13})$桶/天

裂化装置送入混合装置的日送入量$=(x_{21}+x_{22}+x_{23})$桶/天

送入裂化装置的日存料量$=2(x_{21}+x_{22}+x_{23})$桶/天

精炼厂的日原油使用量$=[5(x_{11}+x_{12}+x_{13})+10(x_{21}+x_{22}+x_{23})]$桶/天

模型的目标是极大化由3种等级汽油产生的总利润，即

$$maxf=6.7(x_{11}+x_{21})+7.2(x_{12}+x_{22})+8.1(x_{13}+x_{23})$$

建立问题的约束条件如下：

（1）原料日提供量不超过1500000桶/天

$$5(x_{11}+x_{12}+x_{13})+10(x_{21}+x_{22}+x_{23})\leq 1500000$$

（2）裂化装置的输入能力不超过200000桶/天

$$2(x_{21}+x_{22}+x_{23})\leq 200000$$

（3）普通汽油的日需求量不超过50000桶

$$x_{11}+x_{21}\leq 50000$$

（4）优质汽油的日需求量不超过30000桶

$$x_{12}+x_{22}\leq 30000$$

（5）超优汽油的日需求量不超过40000桶

$$x_{13}+x_{23}\leq 40000$$

（6）普通汽油的辛烷值（ON）不低于87

汽油产品的辛烷值是混合过程中输入流的辛烷值的加权平均，可计算如下：

普通汽油的平均ON＝

(存料的ON $\times$ 存料每天的桶数＋裂化汽油的ON $\times$ 裂化汽油每天的桶数)/普通汽油每天的总桶数＝ $\dfrac{82x_{11}+98x_{21}}{x_{11}+x_{21}}$

因此，普通汽油辛烷数的约束是

$$\frac{82x_{11}+98x_{21}}{x_{11}+x_{21}} \geq 87$$

将约束线性化后得到

$$82x_{11}+98x_{21} \geq 87(x_{11}+x_{21})$$

线性规划的数学模型
案例分析
线性规划的计算机求解
访问主页
标题页
第 49 页 共 58 页
返回
全屏显示
关闭
退出

（7）优质汽油的辛烷值（ON）不低于89

$$\frac{82x_{12}+98x_{22}}{x_{12}+x_{22}} \geq 89$$

将约束线性化后得到

$$82x_{12}+98x_{22} \geq 89(x_{12}+x_{22})$$

（8）超优汽油的辛烷值（ON）不低于92

$$\frac{82x_{13}+98x_{23}}{x_{13}+x_{23}} \geq 92$$

将约束线性化后得到

$$82x_{13}+98x_{23} \geq 92(x_{13}+x_{23})$$

因此，完整的数学模型为：

$$\max f = 6.7(x_{11}+x_{21})+7.2(x_{12}+x_{22})+8.1(x_{13}+x_{23})$$

$$\begin{cases} 5(x_{11}+x_{12}+x_{13})+10(x_{21}+x_{22}+x_{23}) \le 1500000 \\ 2(x_{21}+x_{22}+x_{23}) \le 200000 \\ x_{11}+x_{21} \le 50000 \\ x_{12}+x_{22} \le 30000 \\ x_{13}+x_{23} \le 40000 \\ 82x_{11}+98x_{21} \ge 87(x_{11}+x_{21}) \\ 82x_{12}+98x_{22} \ge 89(x_{12}+x_{22}) \\ 82x_{13}+98x_{23} \ge 92(x_{13}+x_{23}) \\ x_{ij} \ge 0, i=1,2, j=1,2,3 \end{cases}$$

3 线性规划的计算机求解

线性规划的目标函数可以是求最大值，也可以是求最小值，约束条件的不等号可以是小于等于号也可以是大于等于号。Matlab中规定线性规划的标准形式为

$$\min_x \ f^T x$$
$$\begin{cases} A \cdot x \le b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \le x \le ub \end{cases}$$

其中，f, x, b, beq, lb, ub为列向量，A, Aeq为矩阵。

Matlab中求解线性规划的命令为：

$$[x, fval] = linprog(f, A, b)$$
$$[x, fval] = linprog(f, A, b, Aeq, beq)$$
$$[x, fval] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub)$$

其中，x返回决策向量的取值，$fval$返回目标函数的最优值。

例1：求解下列线性规划问题

$$\max\ f = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \le 12 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：Matlab标准型为：

$$\max\ f = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} -10 \\ 12 \end{bmatrix} \\ [1,1,1] \cdot [x_1, x_2, x_3]^T = 7 \\ [x_1, x_2, x_3]^T \ge [0,0,0]^T \end{cases}$$

Matlab程序：

```
>> f=[-2;-3;5];
a=[-2,5,-1;1,3,1];
b=[-10;12];
aeq=[1,1,1];
beq=7;
[x,y]=linprog(f,a,b,aeq,beq,zeros(3,1));
x,y=-y

Optimal solution found.


x =

    6.4286
    0.5714
         0


y =

   14.5714
```

Lingo程序：

LINGO Model - 1-1

```
model:
sets:
row/1..2/:b;
col/1..3/:c,x;
links(row,col):a;
endsets
data:
c=2 3 -5;
a=-2 5 -1 1 3 1;
b=-10 12;
enddata
max=@sum(col:c*x);
@for(row(i):@sum(col(j):a(i,j)*x(j))<=b(i));
@sum(col:x)=7;
end
```

Solution Report - 1-1

```
Global optimal solution found.
Objective value:                          14.57143
Total solver iterations:                         2


                 Variable        Value        Reduced Cost
                    B( 1)    -10.00000         0.000000
                    B( 2)     12.00000         0.000000
                    C( 1)     2.000000         0.000000
                    C( 2)     3.000000         0.000000
                    C( 3)    -5.000000         0.000000
                    X( 1)     6.428571         0.000000
                    X( 2)    0.5714286         0.000000
                    X( 3)     0.000000         7.142857
                 A( 1, 1)    -2.000000         0.000000
                 A( 1, 2)     5.000000         0.000000
                 A( 1, 3)    -1.000000         0.000000
                 A( 2, 1)     1.000000         0.000000
                 A( 2, 2)     3.000000         0.000000
                 A( 2, 3)     1.000000         0.000000

                      Row   Slack or Surplus   Dual Price
                        1     14.57143         1.000000
                        2     0.000000        0.1428571
                        3     3.857143         0.000000
                        4     0.000000         2.285714
```

例2： 求解下列数学规划问题

$$\min\ f = |x_1| + 2|x_2| + 3|x_3| + 4|x_4|$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le -2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 \le -1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

解： 该问题可以转化为线性规划问题。做变量变换$u_i = \frac{x_i+|x_i|}{2}, v_i = \frac{|x_i|-x_i}{2}, i = 1,2,3,4$，则$x_i = u_i - v_i, |x_i| = u_i + v_i$。将问题按新变量重新排序成一维向量$y = [u_1,u_2,u_3,u_4,v_1,v_2,v_3,v_4]^T$，则可把模型变换为线性规划模型。

$$\min\ c^T y$$

$$\begin{cases} [A,-A]\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \le b \\ y \ge 0 \end{cases}$$

$$c=[1,2,3,4,1,2,3,4]^T, b=[-2,-1,-\frac{1}{2}]^T$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Matlab程序：

```
clc,clear;
c=1:4;c=[c,c]'; %构造价值列向量
a=[1 -1 -1 1;1 -1 1 -3;1 -1 -2 3];
a=[a,-a]; %构造变换后新的系数矩阵
b=[-2 -1 -1/2]';
[y,z]=linprog(c,a,b,[],[],zeros(8,1)); %没有等式约束，对应矩阵为空矩阵
x=y(1:4)-y(5:end) %变换到原问题的解,x=u-v
```

LINGO Model - 1-2

```
model:
sets:
row/1..3/:b;
col/1..4/:c,x;
links(row,col):a;
endsets
data:
b=-2 -1 -0.5;
c=1 2 3 4;
a=1 -1 -1 1
  1 -1 1 -3
  1 -1 -2 3;
enddata
min=@sum(col:c*@abs(x));
@for(row(i):@sum(col(j):a(i,j)*x(j))<=b(i));
@for(col:@free(x)); !取消x的非负限制;
end
```

Solution Report - 1-2

```
Linearization components added:
   Constraints:         16
   Variables:           16
   Integers:             4

Global optimal solution found.
Objective value:                              2.000000
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                             1
```

Variable	Value	Reduced Cost
B(1)	-2.000000	0.000000
B(2)	-1.000000	0.000000
B(3)	-0.5000000	0.000000
C(1)	1.000000	0.000000
C(2)	2.000000	0.000000
C(3)	3.000000	0.000000
C(4)	4.000000	0.000000
X(1)	-2.000000	0.000000
X(2)	0.000000	0.000000
X(3)	0.000000	0.000000
X(4)	0.000000	0.000000
A(1, 1)	1.000000	0.000000
A(1, 2)	-1.000000	0.000000
A(1, 3)	-1.000000	0.000000
A(1, 4)	1.000000	0.000000
A(2, 1)	1.000000	0.000000
A(2, 2)	-1.000000	0.000000
A(2, 3)	1.000000	0.000000
A(2, 4)	-3.000000	0.000000
A(3, 1)	1.000000	0.000000
A(3, 2)	-1.000000	0.000000
A(3, 3)	-2.000000	0.000000