第 9 章 非线性回归

李 杰

数据科学学院，浙江财经大学

2017 年 12 月 17 日

内容提要

9.1 可化为线性回归的曲线回归

1. $y = \beta_0 + \beta_1 e^{bx} + \varepsilon$, 其中 b 已知.

   【分析】 令 $z = e^{bx}$ 即可.

2. $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_p x^p + \varepsilon$

   【分析】 令 $x_1 = x, x_2 = x^2, \cdots, x_p = x^p$.

3. $y = ae^{bx}e^{\varepsilon}$ (乘性误差项)

   【分析】 等号两边取对数 $\ln y = \ln a + bx + \varepsilon$.

4. $y = ae^{bx} + \varepsilon$ (加性误差项)

   【分析】 不可转化为线性模型.

☞ 双曲函数

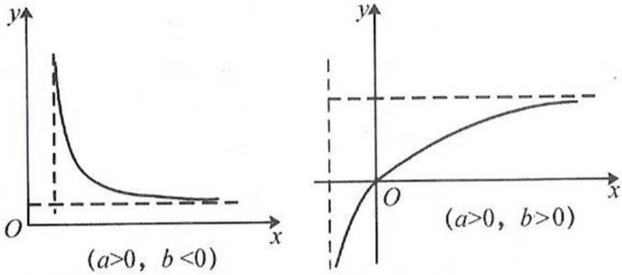
- 双曲函数

$$y = \frac{x}{ax+b}$$

或

$$\frac{1}{y} = a + b\frac{1}{x}$$

- 双曲函数图



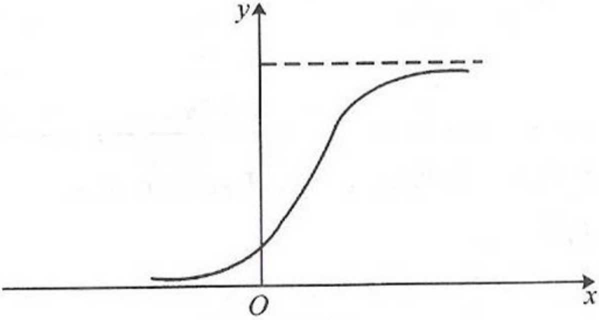
(a) 双曲函数

☞ **S 型曲线 II**;

- **S 型曲线 II 函数表达式**

$$y = \frac{1}{a + be^{-x}}$$

- **S 型曲线 II图形**



(b) S形曲线

9.2 多项式回归

☞ 常见的多项式回归模型

- 一元二阶多项式模型

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \varepsilon$$

- 一元三阶多项式模型

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \varepsilon$$

- 多元多项式模型

$$\begin{aligned} y = &\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_p x_p \\ &+ \eta_1 x_1^2 + \eta_2 x_2^2 + \cdots + \eta_p x_p^2 \\ &+ \gamma_1 x_1 x_2 + \cdots + \gamma_l x_i x_j + \varepsilon \end{aligned}$$

☞ 非线性最小二乘

- **非线性回归模型**
  总体回归模型

$$y = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) + \varepsilon$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_p)'$ 是自变量向量，$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)'$ 是未知参数向量. 相应的**样本回归模型**为

$$y_i = f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}) + \varepsilon_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

- **前提假设**

$$\begin{cases} \mathrm{E}(\varepsilon_i) = 0, & i = 1, 2, \cdots, n \\ \mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} \sigma^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, & i, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

- **目标函数**

$$Q(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}))^2$$

- **正规方程组:** 对目标函数求关于每个参数分量的一阶偏导数，并令其等于 0，导出正规方程组

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial \theta_j}\right|_{\theta_j=\hat{\theta}_j} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{y}_i - f(\mathbf{x}_i,\hat{\boldsymbol{\theta}})\right)\left.\frac{\partial f}{\partial \theta_j}\right|_{\theta_j=\hat{\theta}_j} = 0$$
$$j = 0, 1, 2, \cdots, p$$

- **最小二乘估计:** 该非线性方程一般没有显式解，要用数值算法进行迭代. 正规方程组的解即为非线性回归模型的**最小二乘估计**.
- **注意:**
  1. 非线性最小二乘估计量，仍需要对其进行区间估计，显著性检验，回归方程的显著性检验等诊断;
  2. 非线性最小二乘估计量的抽样分布很难导出; 使用时常用近似分布.
  3. 非线性回归模型中，关系 $SST = SSE + SSR$ 通常不成立.

☞ 例 9.4: 药物反应模型

```r
median <- read.csv("D:\\documents\\MyDoc\\JobInZufe\\Courseware
                    \\应用回归分析\\数据\\median.csv")
median_nls <- nls(medlevel ~ a-a/(1+(dose/c)^b),data=median,
                  start=list(a=100,b=5,c=4.8),model=T)
summary(median_nls)
```

☞ 估计的药物反应模型

$$\widehat{medlevel} = 99.541 - \frac{99.541}{1 + \left(\frac{dose}{4.80}\right)^{6.761}}$$

☞ 曲线图

```r
M <- max(median$dose)          # 绘制散点图和回归预测线
m <- min(median$dose)
newdata <- data.frame(dose=seq(m,M,by=0.5))
nls.pre <- predict(median_nls,newdata)
par(mai=c(0.9,0.9,0.2,0.1))
plot(median,pch=19,col=2,xlab="dose",ylab="medlevel")
lines(newdata$dose,nls.pre,lwd=2,col=4)
```

☞ 例 9.5: 国内民航航线里程

```
avi <- read.csv("D:\\documents\\MyDoc\\JobInZufe\\Courseware\\应用回归分析\\数
据\\avi.csv")
avi_nls <- nls(miles ~ k*a**(b**time),data=avi,
                  start=list(k=110,a=0.4,b=0.5),model=T)
summary(avi_nls)
```

☞ 国内民航航线里程

$$\widehat{miles} = 1500.0124^{0.893^{times}}$$

☞ 曲线图

```
M <- max(avi$time)          # 绘制散点图和回归预测线
m <- min(avi$time)
newdata <- data.frame(time=seq(m,M,by=0.5))
nls.pre <- predict(avi_nls,newdata)
par(mai=c(0.9,0.9,0.2,0.1))
plot(avi,pch=19,col=2,xlab="时间",ylab="国内民航航线里程")
lines(newdata$time,nls.pre,lwd=2,col=4)
```