整数规划

- 整数规划的数学模型
- 案例分析
- 整数规划的计算机求解

1 整数规划的数学模型

要求一部分或全部决策变量必须取整数值的规划问题称为整数规划（integer programming，简记IP）问题。

不考虑整数条件，由余下的目标函数和约束条件构成的规划问题称为该整数规划问题的松弛问题。若松弛问题是一个线性规划，则称该整数规划为整数线性规划。

整数线性规划问题的数学模型的一般形式为：

$$\max(\min)\ f=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le(=,\ge)b_i & i=1,2,\cdots,m\\ x_j\ge 0 & j=1,2,\cdots,n\\ x_1,x_2,\cdots,x_n\text{中部分或全部取整数} & \end{cases}$$

- 整数线性规划问题的分类：

① 纯整数线性规划：全部决策变量都必须取整数的整数线性规划。有时，也称全整数规划。

② 混合整数线性规划：决策变量中有一部分必须取整数值，另一部分可以不取整数值的整数线性规划。

③ 0-1型整数线性规划：指决策变量只能取值0或1的整数线性规划。

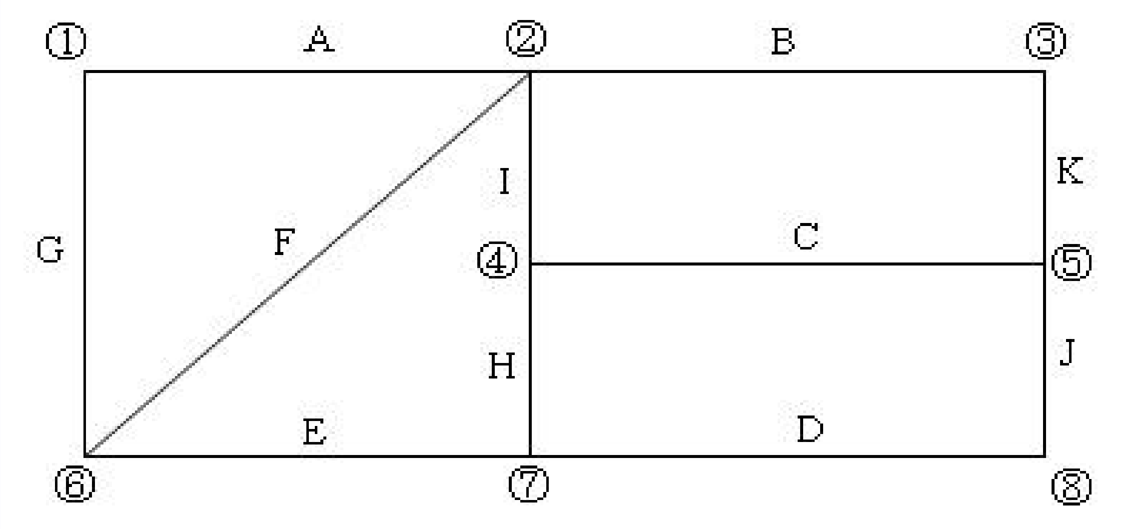
2 案例分析

2.1. 集合覆盖问题

在这一类问题中，会有许多服务装置为一些设备提供互相重叠的服务，目标就是要确定安装数目最少的装置来覆盖每一个设备（满足服务需求）。例如，几个污水处理工厂可以选择建造在几个不同的位置，在不同位置可以服务不同的几个城市，当一个城市可以得到几个不同的工厂服务的时候就是重叠服务。

例：安装安全专用电话

为了提高校园的安全性，A大学的保安部门决定在校园内部的几个位置安装紧急报警电话。保安部希望在校园的每条主要街道上都至少有一部电话的情况下，使得安装的总电话数目最少。下图给出了校园的主要街道图（A到K）。



将电话安装在街道的交叉口处是比较合理的，因为这样就可以至少为两条街道提供服务。按照图中街道的设计可以看出，最多需要安装8部电话。

定义

$$x_j=\begin{cases}1 & \text{如果位置}j\text{安装电话}\\ 0 & \text{如果位置}j\text{不安装电话}\end{cases}$$

问题是求每一条街道都至少安装一部电话，则模型可以写成：

整数规划的数学模型
案例分析
整数规划的计算机求解
访问主页
标题页
第 6 页 共 31 页
返回
全屏显示
关闭
退出

$$min f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

s.t.

$x_1 + x_2 \geq 1$（街道A）

$x_2 + x_3 \geq 1$（街道B）

$x_4 + x_5 \geq 1$（街道C）

$x_7 + x_8 \geq 1$（街道D）

$x_6 + x_7 \geq 1$（街道E）

$x_2 + x_6 \geq 1$（街道F）

$x_1 + x_6 \geq 1$（街道G）

$x_4 + x_7 \geq 1$（街道H）

$x_2 + x_4 \geq 1$（街道I）

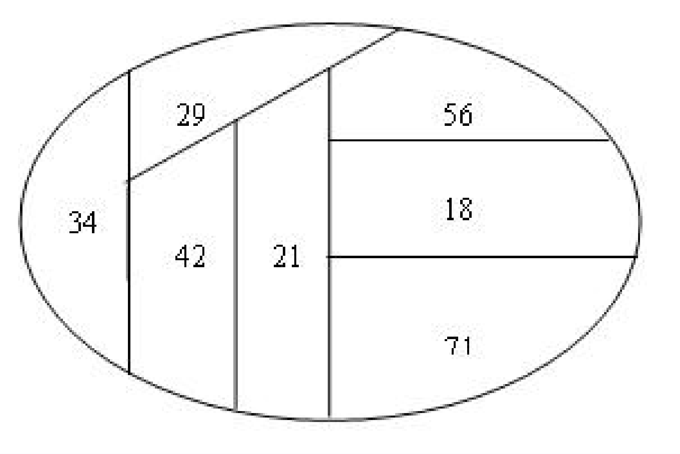
$x_5 + x_8 \geq 1$（街道J）

$x_3 + x_5 \geq 1$（街道K）

$x_j = 0, 1, \quad j = 1, 2, \cdots, 8$

思考：

一家出版社准备在某市建立两个销售代理点，向7个地区的大学生售书，每个区的大学生数量（单位：千人）已经表示在图上。每个销售代理点只能向本区和一个相邻区的大学生售书，这两个代理点应该建在何处，才能使所能供应的大学生的数量最大？



2.2. 固定费用问题

固定费用问题是处理一类同时包含两种费用形式的经济活动：一种费用称作“固定费”，只要启动这种活动就会有的一个费用值；另一种费用是可变费用，正比于使用这种活动的程度。举例来说，在生产某种产品之前，需要购买一台机器，这台机器的费用是固定费，它与生产多少产品有关；一旦买进了机器，那么劳动力和原材料的消耗费用就正比于生产产品的数量。假定F是固定的费用，c是变量的单位费用，x是产品的数量，那么总费用函数可以表示为

$$C(x)=\begin{cases} F+cx & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

由于费用函数$C(x)$存在一个不连续点$x=0$，所以用解析的方法难以处理。我们将通过下面一个例子说明如何引入二元变量来处理这类问题。

例：选择电话服务公司

在美国先后有3家电话服务公司向某人推销长途电话业务。MaBell公司收取每月固定费16美元然后每分钟0.25美元；PaBell公司每月收取固定费25美元，但每分钟费用降为0.21美元；BabyBell公司的每月固定费用是18美元，每分钟0.22美元。一般情况下，某人平均每月使用的长途电话时间是200分钟。假定只有在拨打电话之后公司才会收取固定费。当然也可以同时使用多家电话公司。那么该人应如何选择这3家电话公司，使得每月的电话费用最少？

定义

x_1 =每个月使用MaBell公司的长途电话时间（分钟）

x_2 =每个月使用PaBell公司的长途电话时间（分钟）

x_3 =每个月使用BabyBell公司的长途电话时间（分钟）

$$y_i = \begin{cases} 1 & x_i > 0 \\ 0 & x_i = 0 \end{cases}$$

可以使用下面的约束来保证当x_j取正数时，y_j等于1

$$x_j \le My_j,\quad j = 1, 2, 3$$

其中M取足够大的一个数，使得不会限制变量x_j的取值。由于每月使用的长途电话时间大约为200分钟，所以对所有的j，有$x_j \le 200$，因此取$M = 200$即可。

完整的数学模型是

$$min f = 0.25x_1 + 0.21x_2 + 0.22x_3 + 16y_1 + 25y_2 + 18y_3$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 200$$

$$x_1 \le 200y_1$$

$$x_2 \le 200y_2$$

$$x_3 \le 200y_3$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0, \quad y_i = 0, 1$$

从上面的式子可以看出，只有当$y_j = 1$的时候，也就是当$x_j > 0$的时候，第j个电话公司的固定费才会在目标函数中起作用（根据模型的最后3个约束）。如果在最优解中$x_j = 0$，那么由于目标函数f是最小化，又因为相应y_j的系数是严格的正数，以及$y_j \ge 0$，所以一定有$y_j = 0$才能达到最小。

2.3.　“或者-或者”和“如果-那么”约束

在固定费用问题中，我们引入二元变量来处理不连续的目标费用函数。在这里，我们将仍然利用二元变量来处理模型中约束不满足同时性（“或者-或者”）或者依赖性（“如果-那么”）的情形。采用的变换不会改变约束的“或者”或“依赖”关系，我们只是利用数学上的技巧方法将这样的约束转化成“并且”的关系。

例：工序模型

Jobco公司需要在一台机器上处理3项工作。下表给出了每项工作的处理时间以及应交工日期。假定第一项工作开始处理时的日期定为0，应交工日期从0算起。

工作	处理时间（天）	应交工日期（天）	延期处罚（美元/天）
1	5	25	19
2	20	22	12
3	15	35	34

这个问题的目标是求使得延期处罚最少的工序处理方案。

定义x_j =工作j的开始加工日期（按天计算，从0开始计算）

这个问题有两个约束条件：互不干扰约束（保证两项工作不能同时处理），应交工日期约束。首先考虑互不干扰约束。

假设工作i和工作j的处理时间分别为p_i和p_j，为了保证这两项工作不同时处理，那么必须满足

$$x_i \geq x_j + p_j \text{或者} x_j \geq x_i + p_i$$

取决于工作j是在工作i之前还是在其后处理。因为所有的数学规划都是仅仅处理并的约束，所以我们通过引入下面的二元变量来将“或者-或者”约束转化为“并的”约束：

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若工作在工作之前加工} \\ 0 & \text{若工作在工作之前加工} \end{cases}$$

对于足够大的数M，或者-或者约束可以用下面两个并的约束代替

$$My_{ij}+(x_i-x_j)\geq p_j,\quad M(1-y_{ij})+(x_j-x_i)\geq p_i$$

这样的转化可以保证在任何时候这两个约束中只有一个是起作用的。如果$y_{ij}=0$，那么第1个约束是起作用的，而第2个约束是多余的（因为左端项包含充分大的数M，所以一定会大于p_i）；如果$y_{ij}=1$，那么第1个约束是多余的，第2个约束是起作用的。

下面再考虑应交工日期约束。给定工件j的应交工日期是d_j，令s_j是一个无限制的变量，那么相关的约束是

$$x_j + p_j + s_j = d_j$$

如果$s_j \geq 0$，那么应交工日期的约束可以满足；如果$s_j \leq 0$，则会有一个延期的处罚。引用下面的代换：

$$s_j = s_j^- - s_j^+, \quad s_j^-, s_j^+ \geq 0$$

那么约束变为

$$x_j + s_j^- - s_j^+ = d_j - p_j$$

延期处罚的费用与s_j^+成正比。

这个问题的数学模型是

$$\min f = 19s_1^+ + 12s_2^+ + 34s_3^+$$

s.t.

$$x_1 - x_2 + My_{12} \geq 20$$
$$-x_1 + x_2 - My_{12} \geq 5 - M$$
$$x_1 - x_3 + My_{13} \geq 15$$
$$-x_1 + x_3 - My_{13} \geq 5 - M$$
$$x_2 - x_3 + My_{23} \geq 15$$
$$-x_2 + x_3 - My_{23} \geq 20 - M$$
$$x_1 + s_1^- - s_1^+ = 25 - 5$$
$$x_2 + s_2^- - s_2^+ = 22 - 20$$
$$x_3 + s_3^- - s_3^+ = 35 - 15$$
$$x_i, s_i^-, s_i^+ \geq 0,\ i = 1, 2, 3$$
$$y_{ij} \geq 0,\ i, j = 1, 2, 3$$

为了求解这个模型，我们可以取$M = 100$，这个值比3项工作处理时间的综合还要大。

最优解是$x_1 = 20, x_2 = 0, x_3 = 25$。这说明工作2在时刻0开始处理，工作1在第20天开始处理，工作3在第25天开始处理，最优的处理顺序是$2 \to 1 \to 3$。同时这个解还告诉我们工作2在第$0 + 20 = 20$天完成，工作1在第$20 + 5$天完成，工作3在第$25 + 15 = 40$天完成，所以工作3延迟了$40 - 35 = 5$天，处罚费用为$5 \times 34 = 170$美元。

在上例中，假定我们有下面的额外约束：如果工作i在工作j之前，那么工作k必须在工作m之前。从数学角度看，这个如果-那么约束可以写成

如果$x_i + p_i \le x_j$，那么$x_k + p_k \le x_m$

给定足够小的数$\varepsilon > 0$和足够大的数M，上面这个约束等价于下面2个并的约束：

$$x_j - (x_i + p_i) \le M(1 - w) - \varepsilon$$

$$(x_k + p_k) - x_m \le Mw, \quad w = 0, 1$$

如果$x_i + p_i \le x_j$，那么$x_j - (x_i + p_i) \ge 0$，这要求$w = 0$，因此第2个约束就变为了$x_k + p_k \le x_m$，这正是我们需要的。否则，w取值为1或者0，此时第2个式子是否满足，取决于模型中其他的约束。

3 整数规划的计算机求解

- 整数规划的求解方法分类

（1）分枝定界法——可求纯或混合整数线性规划。

（2）割平面法——可求纯或混合整数线性规划。

（3）隐枚举法——求解“0-1”整数规划。

（4）匈牙利法——求解指派问题（“0-1”规划特殊情形）。

（5）蒙特卡洛法——求解各种类型规划。

3.1. 蒙特卡洛法

蒙特卡洛方法也称为计算机随机模拟方法，它是基于对大量事件的统计结果来实现一些确定性问题的计算。使用蒙特卡洛方法必须使用计算机生成相关分布的随机数，Matlab 给出了生成各种随机数的命令。

例1：$y = x^2, y = 12 - x$与x轴在第一象限围成一个曲边三角形。设计一个随机实验，求该图形面积的近似值。

解：设计的随机实验的基本思想如下：在矩形区域$[0, 12] \times [0, 9]$上产生服从均匀分布的10^7个随机点，统计随机点落在曲边三角形的频数，则曲边三角形的面积近似为上述矩形的面积乘以频率。

```
clc, clear
x=unifrnd(0,12,[1,10000000]);
y=unifrnd(0,9,[1,10000000]);
pinshu=sum(y<x.^2 & x<=3)+sum(y<12-x & x>=3);
area=12*9*pinshu/10^7
```

注：运行结果在49.5附近，由于是随机模拟，因此每次的结果都是不一样的。

在自变量维数很大和取值范围很宽的情况下，用穷举法计算整数规划的最优值是不现实的，但是应用概率理论可以证明，在一定计算量的情况下，用蒙特卡洛法完全可以得到一个满意解。

例2：求解下列非线性整数规划问题：

$$\max f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_5^2 - 8x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5$$

$$\begin{cases} 0 \le x_i \le 99, i = 1, \cdots, 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 400 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 \le 800 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 \le 200 \\ x_3 + x_4 + 5x_5 \le 200 \end{cases}$$

若用穷举法试探，则共需计算100^5个点，其计算量非常大。下面我们利用蒙特卡洛法随机取样采集10^6个点计算，应用概率理论估计该方法的可信度。

不失一般性，假定一个整数规划的最优点不是孤立的奇点。假设目标函数落在高值区的概率分别为0.01,0.00001，则当计算10^6个点后，至少有一个点能落在高值区的概率分别为$1-0.99^{1000000} \approx 0.99\cdots99$(100多位)，$1-0.9999^{1000000} \approx 0.999954602$。

解：首先编写M文件mente.m定义目标函数和约束向量函数。

```
function [f,g]=mente(x)
f=x(1)^2+x(2)^2+3*x(3)^2+4*x(4)^2+2*x(5)^2-8*x(1)-2*x(2)-3*x(3)-x(4)-2*x(5);
g=[sum(x)-400 x(1)+2*x(2)+2*x(3)+x(4)+6*x(5)-800 2*x(1)+x(2)+6*x(3)-200 x(3)+x(4)+5*x(5)-200];
```

然后编写Matlab程序求问题的解。

```
rand('state',sum(clock));% 初始化随机数发生器
p0=0;
tic %计时开始
for i=1:10^6
    x=randi([0,99],1,5);%产生一行五列的区间[0,99]上的随机整数
    [f,g]=mente(x);
    if all(g<=0)
        if p0<f
            x0=x;p0=f; %记录下当前较好的解
        end
    end
end
x0,p0
toc %计时结束
```

整数规划的数学模型
案例分析
整数规划的计算机求解
访 问 主 页
标 题 页
◀◀ ▶▶
◀ ▶
第 24 页 共 31 页
返 回
全 屏 显 示
关 闭
退 出

Lingo程序：

LINGO Model - LINGO3

```
model:
sets:
row/1..4/:b;
col/1..5/:c1,c2,x;
links(row,col):a;
endsets
data:
c1=1,1,3,4,2;
c2=-8,-2,-3,-1,-2;
a=1 1 1 1 1
  1 2 2 1 6
  2 1 6 0 0
  0 0 1 1 5;
b=400,800,200,200;
enddata
max=@sum(col:c1*x^2+c2*x);
@for(row(i):@sum(col(j):a(i,j)*x(j))<=b(i));
@for(col:@gin(x));
@for(col:@bnd(0,x,99));
end
```

Solution Report - LINGO3

```
Local optimal solution found.
Objective value:                    51568.00
Extended solver steps:                     0
Total solver iterations:                  95
```

Variable	Value	Reduced Cost
B(1)	400.0000	0.000000
B(2)	800.0000	0.000000
B(3)	200.0000	0.000000
B(4)	200.0000	0.000000
C1(1)	1.000000	0.000000
C1(2)	1.000000	0.000000
C1(3)	3.000000	0.000000
C1(4)	4.000000	0.000000
C1(5)	2.000000	0.000000
C2(1)	-8.000000	0.000000
C2(2)	-2.000000	0.000000
C2(3)	-3.000000	0.000000
C2(4)	-1.000000	0.000000
C2(5)	-2.000000	0.000000
X(1)	50.00000	-92.00000
X(2)	99.00000	-196.0000
X(3)	0.000000	3.000000
X(4)	99.00000	-791.0000
X(5)	20.00000	-78.00000

3.2. 计算机求解

使用Matlab软件求解数学规划问题有一个缺点，即必须把所有的决策变量化为一维决策向量。因此，整数规划问题的求解使用Lingo等专用软件比较方便。

Matlab求解混合整数线性规划的命令为

$[x, fval] = intlinprog(f, intcon, A, b, Aeq, beq, lb, ub)$ 对应的数学模型为

$$\min_x \ f^T x$$

$$\begin{cases} A \cdot x \le b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \le x \le ub \\ x(\mathrm{int}\ con)\text{为整数} \end{cases}$$

其中，$f, x, intcon, b, beq, lb, ub$为列向量，$A, Aeq$为矩阵。

例3：求解如下的混合整数规划问题：

$$\min\ f=-3x_1-2x_2-x_3$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 7 \\ 4x_1+2x_2+x_3=12 \\ x_1,x_2\ge 0 \\ x_3=0\text{或}1 \end{cases}$$

解：Matlab程序如下：

```
clc,clear
f=[-3;-2;-1];intcon=3; %整数变量的地址
a=ones(1,3);b=7;
aeq=[4 2 1];beq=12;
lb=zeros(3,1);ub=[inf;inf;1]; %x(3)为0-1变量
x=intlinprog(f,intcon,a,b,aeq,beq,lb,ub)
```

例4：求解下列指派问题，已知指派矩阵为

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 & 10 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 10 & 6 & 9 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \min f = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij}, \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1, i = 1,\cdots,5 \\ \sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1, j = 1,\cdots,5 \\ x_{ij} = 0\text{或}1 \end{cases}$$

解：这里需要把二维决策变量$x_{ij}(i,j=1,\cdots,5)$变成一维决策变量$y_k(k=1,\cdots,25)$。Matlab程序如下：

```
clc,clear
c=[3 8 2 10 3;8 7 2 9 7;6 4 2 7 5;8 4 2 3 5;9 10 6 9 10];
c=c(:); %将矩阵c变换为列向量
a=zeros(10,25);intcon=1:25;
for i=1:5
    a(i,(i-1)*5+1:5*i)=1;
    a(5+i,i:5:25)=1;
end
b=ones(10,1);lb=zeros(25,1);ub=ones(25,1);
x=intlinprog(c,intcon,[],[],a,b,lb,ub);
x=reshape(x,[5,5])
```

Lingo程序：

```
model:
sets:
var/1..5/;
links(var,var):c,x;
endsets
data:
c=3 8 2 10 3
  8 7 2 9 7
  6 4 2 7 5
  8 4 2 3 5
  9 10 6 9 10;
enddata
min=@sum(links:c*x);
@for(var(i):@sum(var(j):x(i,j))=1);
@for(var(j):@sum(var(i):x(i,j))=1);
@for(links:@bin(x));
end
```