第四讲 目标规划

- 第一节 目标规划的数学模型
- 第二节 目标规划模型的实例
- 第三节 求解目标规划的序贯算法
- 第四节 多目标规划的Matlab解法

- **线性规划的局限性**

  只能解决一组线性约束条件下，某一目标而且只能是一个目标的最大或最小值问题。

- **实际决策中，衡量方案优劣需考虑多个目标**

◇ 生产计划决策中，通常要考虑产值、利润、满足市场需求、降低消耗、提高质量、提高劳动生产率等。

◇ 生产布局决策中，除了要考虑运输费用、投资、原料供应、产品需求量等经济指标外，还要考虑到污染和其它社会因素等。

◇ 这些目标中，有主要的，也有次要的；有最大的，也有最小的；有定量的，也有定性的；有互相补充的，也有互相对立的，线性规划则无能为力。

美国经济学家查恩斯和库柏在1961年出版的《管理模型及线性规划的工业应用》一书中，首先提出目标规划。目标规划的求解思路有两种：

（1）加权系数法：为每一目标赋一个权系数，把多目标模型转化成单目标模型。但困难是要确定合理的权系数，以反映不同目标之间的重要程度。

（2）优先等级法：将各目标按其重要程度不同的优先等级，转化为单目标模型。

在目标规划中不提最优解的概念，只提满意解的概念，即寻求能够照顾到各个目标，并使决策者感到满意的解，由决策者来确定选取哪一个解，但满意解的数目太多而难以将其一一列出。

1 目标规划的数学模型

例: 某工厂计划生产甲、乙两种产品，现有的设备资源、每种产品的技术消耗定额及单位产品的利润如表所示。试确定计划期内的生产计划，使获得的利润最大。

资源 \ 产品	甲	乙	现有资源
设备	4	3	24
单位产品利润	5	4	

设x_1, x_2为甲、乙两种产品的产量，则线性规划模型为：

$$\max f = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

现假设：该工厂根据市场需求或合同规定，希望尽量扩大甲产品的生产，减少乙产品的产量，则可建立如下的模型：

$$\max f_1 = 5x_1 + 4x_2$$

$$\max f_2 = x_1$$

$$\min f_3 = x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

这些目标之间相互矛盾，一般的线性规划方法不能求解。

1.1. 目标规划的基本概念

- 目标函数的期望值

◇ 每一个目标函数希望达到的期望值(或目标值、理想值)。

◇ 根据历史资料、市场需求或上级部门的布置等来确定。

- **偏差变量**

◇ 每个目标函数的期望值确定之后，目标的实际值和它的期望值之间就有正的或负的偏差。

◇ 正偏差变量d_k^+表示第k个目标超过期望值的数值；负偏差变量d_k^-表示第k个目标未达到期望值的数值。

◇ 同一目标，它的取值不可能在超过期望值的同时，又没有达到期望值，所以在d_k^+和d_k^-中至少有一个必须为零。

- 目标约束

◇ 引入正、负偏差变量后，对各个目标建立目标函数方程。

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j + d_k^- - d_k^+ = E^*$$

◇ 原来的目标函数变成了约束条件的一部分，即目标约束(软约束)；而原来的约束条件则称为系统约束(硬约束)。

上例中，管理部门提出新要求：第一个目标是实现利润最大，计划部门规定利润目标是20；第二个目标是充分利用设备台时，但尽量少加班；第三个目标做如下规定，甲产品产量希望不少于3单位，乙产品产量比甲产品多2单位。对各目标函数引入正、负偏差变量，有

$$
\begin{aligned}
&5x_1 + 4x_2 + d_1^- - d_1^+ = 20 \\
&4x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ = 24 \\
&x_1 + d_3^- - d_3^+ = 3 \\
&-x_1 + x_2 + d_4^- - d_4^+ = 2
\end{aligned}
$$

- 目标达成函数

◇ 各个目标函数引入正、负偏差变量，被列入了目标约束条件。

◇ 这个新的目标函数反映了各目标函数的期望值达到或实现的情况，故把这个新的目标函数称为目标达成函数。

若要求尽可能达到规定的目标值，则正、负偏差变量d_k^+, d_k^-都尽可能最小，将d_k^+和d_k^-都列入目标函数中，即$minS_k = d_k^+ + d_k^-$；

若希望尽可能不低于期望值(允许超过)，则负偏差变量d_k^-尽可能的小，而不关心超出量d_k^+，故只需将d_k^- 列入目标函数，$minS_k = d_k^-$；

若允许某个目标低于期望值，但希望不得超过期望值，则正偏差变量d_k^+ 尽可能地小，而不关心低于量d_k^-，故只需将d_k^+列入目标函数，$minS_k = d_k^+$。

- **优先等级和权数**

◇ 目标的重要程度不同，用优先等级因子P_k表示第k等级目标。

◇ 优先等级因子P_k是正的常数，$P_k >> P_{k+1}$。

◇ 同一优先等级下的目标的相对重要性，赋以不同的加权系数w。

例如

第一个目标是实现利润最大，其优先级为P_1；

第二个目标是充分利用设备台时，但尽量少加班，其优先级为P_2；

第三个目标是甲的产量不少于3，乙的产量比甲多2，优先级为P_3，假设：甲产品产量希望不少于3单位的权数为3，乙产品产量比甲产品多2单位的权数为5，则有

$$
\begin{aligned}
& minf = P_1 d_1^- + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3(3d_3^- + 5d_4^-) \\
& 5x_1 + 4x_2 + d_1^- - d_1^+ = 20 \\
& 4x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ = 24 \\
& x_1 + d_3^- - d_3^+ = 3 \\
& -x_1 + x_2 + d_4^- - d_4^+ = 2 \\
& x_1, x_2, d_k^-, d_k^+ \geq 0
\end{aligned}
$$

1.2. 目标规划的一般数学模型

$$\min f = \sum_{k=1}^{K} P_k \sum_{l=1}^{L_k} (w_{kl}^- d_l^- + w_{kl}^+ d_l^+)$$

绝对约束 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge, =) b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$

目标约束 $\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j + d_k^- - d_k^+ = E_k^* \qquad k = 1, 2, \ldots, K$

非负性约束 $x_j, d_k^-, d_k^+ \ge 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$

2 目标规划模型的实例

- **物资调运问题**

设有三个产地A_1, A_2, A_3向四个销地B_1, B_2, B_3, B_4供应物资。产地A_i的供应量a_i，销地B_j的需求量b_j，各产销地之间的单位物资的运费c_{ij}如表所示，c_{ij}的单位为（元/吨）。欲制定一个合理的调运方案，要依次满足如下的目标，试建立数学模型：

（1）用户B_4为重要部门，其需求量应尽量满足；

（2）每个销地的满足率不低于80%；

（3）因路况原因，尽量不安排从A_2到B_4的物资运输；

（4）力求使总运费不超过3300元。

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	供应量
A_1	5	2	6	7	300
A_2	3	5	4	6	200
A_3	4	5	2	3	400
需求量	200	100	450	250	

设x_{ij}为从A_i运往B_j的物资数量，$i=1,2,3, j=1,2,3,4$，则数学模型为：

$$minf = P_1(d_1^- + d_1^+) + P_2(d_2^- + d_3^- + d_4^-) + P_3(d_5^- + d_5^+) + P_4 d_6^+$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{1j} \le 300,\ \sum_{j=1}^{4} x_{2j} \le 200,\ \sum_{j=1}^{4} x_{3j} \le 400$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i4} + d_1^- - d_1^+ = 250$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i1} + d_2^- - d_2^+ = 160$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i2} + d_3^- - d_3^+ = 80$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i3} + d_4^- - d_4^+ = 360$$

$$x_{24} + d_5^- - d_5^+ = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} + d_6^- - d_6^+ = 3300$$

$$x_{ij} \ge 0, d_k^-, d_k^+ \ge 0$$

- 投资决策问题

　　某厂明年可用于投资的资金总额为a万元，有n个项目$A_1, A_2, \cdots, A_n$可供选择，假设第i个项目A_i所需的资金为a_i万元，消耗的能源为$b_i(t)$标准煤，耗水量为$q_i(t)$，能获得的收益为c_i万元，若该厂的能耗限额为$b(t)$标准煤，用水限额为$q(t)$，决策者追求的目标如下：

（1）总收益达到c万元；

（2）投资总金额不超过a万元；

（3）耗水量不超过$q(t)$；

（4）能耗不超过$b(t)$标准煤。

问：应如何选择投资项目，才能尽可能依次达到上述各目标。

设$x_i=1$为投资第i个项目，否则，$x_i=0$，则数学模型为：

$$min f = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3 d_3^+ + P_4 d_4^+$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d_1^- - d_1^+ = c$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + d_2^- - d_2^+ = a$$
$$\sum_{i=1}^{n} q_i x_i + d_3^- - d_3^+ = q$$
$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + d_4^- - d_4^+ = b$$
$$x_i = 0, 1, d_k^-, d_k^+ \geq 0$$

3 求解目标规划的序贯算法

序贯算法是求解目标规划的一种算法，其核心思想是根据优先级的先后次序，将目标规划问题分解成一系列的单目标规划问题，然后再依次求解。

例1：某企业生产甲、乙两种产品，需要用到A，B，C三种设备，三种设备的生产能力分别为12,16,15（h），甲产品每件需要用到三种设备工时分别为2,4,0（h/件），乙产品每件需要用到三种设备工时分别为2,0,5（h/件）。甲、乙的单位利润为200,300（元/件）。问该企业应如何安排生产，才能达到下列目标。

（1）力求使利润目标不低于1500元；

（2）考虑到市场需求，甲、乙两种产品的产量比应尽量保持为1:2；

（3）设备A为贵重设备，严禁超时使用；

（4）设备C可适当加班，但要控制；设备B既要求充分利用，又尽可能不加班。在重要性上，设备B是设备C的3倍。

解： 设x_1, x_2为甲、乙两种产品的生产量，则相应的目标规划模型为

$$\min\ f = P_1 d_1^- + P_2(d_2^+ + d_2^-) + P_3(3d_3^+ + 3d_3^- + d_4^+)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 200x_1 + 300x_2 + d_1^- - d_1^+ = 1500 \\ 2x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0 \\ 4x_1 + d_3^- - d_3^+ = 16 \\ 5x_2 + d_4^- - d_4^+ = 15 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

序贯算法中每个单目标问题都是一个线性规划问题，可以使用Lingo软件进行求解。

访问主页
标题页
返回
全屏显示
关闭
退出

LINGO Model - gp1

```
model:
sets:
variable/1..2/:x;
s_con_num/1..4/:g,dplus,dminus;
s_con(s_con_num,variable):c;
endsets

data:
g=1500 0 16 15;
c=200 300 2 -1 4 0 0 5;
enddata

min=dminus(1);
2*x(1)+2*x(2)<=12;
@for(s_con_num(i):@sum(variable(j):c(i,j)*x(j))+dminus(i)-dplus(i)=g(i));
end
```

Solution Report - gp1

```
Global optimal solution found.
Objective value:                    0.000000
Total solver iterations:                   1
```

Variable	Value	Reduced Co
X(1)	0.000000	0.0000
X(2)	5.000000	0.0000
G(1)	1500.000	0.0000
G(2)	0.000000	0.0000
G(3)	16.00000	0.0000
G(4)	15.00000	0.0000
DPLUS(1)	0.000000	0.0000
DPLUS(2)	0.000000	0.0000
DPLUS(3)	0.000000	0.0000
DPLUS(4)	10.00000	0.0000
DMINUS(1)	0.000000	1.0000
DMINUS(2)	5.000000	0.0000
DMINUS(3)	16.00000	0.0000
DMINUS(4)	0.000000	0.0000
C(1, 1)	200.0000	0.0000
C(1, 2)	300.0000	0.0000
C(2, 1)	2.000000	0.0000
C(2, 2)	-1.000000	0.0000
C(3, 1)	4.000000	0.0000
C(3, 2)	0.000000	0.0000
C(4, 1)	0.000000	0.0000
C(4, 2)	5.000000	0.0000

关 闭

退 出

求得$dminus(1)=0$，即目标函数的最优值为0，第一级偏差为0。

LINGO Model - gp2

```
model:
sets:
variable/1..2/:x;
s_con_num/1..4/:g,dplus,dminus;
s_con(s_con_num,variable):c;
endsets

data:
g=1500 0 16 15;
c=200 300 2 -1 4 0 0 5;
enddata

min=dplus(2)+dminus(2);!二级目标函数;
2*x(1)+2*x(2)<=12;
@for(s_con_num(i):@sum(variable(j):c(i,j)*x(j))+dminus(i)-dplus(i)=g(i));
dminus(1)=0;!一级目标约束;
@for(variable:@gin(x));
end
```

Solution Report - gp2

```
Global optimal solution found.
Objective value:                             0.000000
Extended solver steps:                              0
Total solver iterations:                            0


                     Variable           Value        Reduced Co
                        X( 1)        2.000000         -2.0000
                        X( 2)        4.000000          1.0000
                        G( 1)        1500.000          0.0000
                        G( 2)        0.000000          0.0000
                        G( 3)        16.00000          0.0000
                        G( 4)        15.00000          0.0000
                    DPLUS( 1)        100.0000          0.0000
                    DPLUS( 2)        0.000000          2.0000
                    DPLUS( 3)        0.000000          0.0000
                    DPLUS( 4)        5.000000          0.0000
                   DMINUS( 1)        0.000000          0.0000
                   DMINUS( 2)        0.000000          0.0000
                   DMINUS( 3)        8.000000          0.0000
                   DMINUS( 4)        0.000000          0.0000
                     C( 1, 1)        200.0000          0.0000
                     C( 1, 2)        300.0000          0.0000
                     C( 2, 1)        2.000000          0.0000
                     C( 2, 2)       -1.000000          0.0000
                     C( 3, 1)        4.000000          0.0000
                     C( 3, 2)        0.000000          0.0000
                     C( 4, 1)        0.000000          0.0000
                     C( 4, 2)        5.000000          0.0000
```

求得最优值为0，即第二级偏差仍为0。

关 闭

退 出

LINGO Model - gp3

```
model:
sets:
variable/1..2/:x;
s_con_num/1..4/:g,dplus,dminus;
s_con(s_con_num,variable):c;
endsets

data:
g=1500 0 16 15;
c=200 300 2 -1 4 0 0 5;
enddata

min=3*dplus(3)+3*dminus(3)+dplus(4);!三级目标函数;
2*x(1)+2*x(2)<=12;
@for(s_con_num(i):@sum(variable(j):c(i,j)*x(j))+dminus(i)-dplus(i)=g(i));
dminus(1)=0;!一级目标约束;
dplus(2)+dminus(2)=0;!二级目标约束;
end
```

Solution Report - gp3

```
Global optimal solution found.
Objective value:                29.00000
Total solver iterations:               0
```

Variable	Value	Reduced Cos
X(1)	2.000000	0.00000
X(2)	4.000000	0.00000
G(1)	1500.000	0.00000
G(2)	0.000000	0.00000
G(3)	16.00000	0.00000
G(4)	15.00000	0.00000
DPLUS(1)	100.0000	0.00000
DPLUS(2)	0.000000	0.00000
DPLUS(3)	0.000000	6.00000
DPLUS(4)	5.000000	0.00000
DMINUS(1)	0.000000	0.00000
DMINUS(2)	0.000000	11.3333
DMINUS(3)	8.000000	0.00000
DMINUS(4)	0.000000	1.00000
C(1, 1)	200.0000	0.00000
C(1, 2)	300.0000	0.00000
C(2, 1)	2.000000	0.00000
C(2, 2)	-1.000000	0.00000
C(3, 1)	4.000000	0.00000
C(3, 2)	0.000000	0.00000
C(4, 1)	0.000000	0.00000
C(4, 2)	5.000000	0.00000

求得最优值为29，即第二级偏差为29。

分析计算结果，$x_1=2, x_2=4, d_1^+=100$，因此，目标规划的最优解为（2,4），最优利润为1600。

4 多目标规划的Matlab解法

多目标规划可以归结为

$$\min \gamma$$

$$\begin{cases} F(x) - weight \cdot \gamma \le goal \\ A \cdot x \le b \\ Aeq \cdot x = beq \\ c(x) \le 0 \\ ceq(x) = 0 \\ lb \le x \le ub \end{cases}$$

其中，$x, weight, goal, b, beq, lb, ub$为向量，$A, Aeq$为矩阵，$c(x), ceq(x), F(x)$为向量函数，可以是非线性函数，$F(x)$是所考虑的目标函数，$goal$为欲达到的目标。

多目标规划的Matlab函数$fgoalattain$的用法为

$$[x, fval] = fgoalattain('fun', x0, goal, weight, A, b, Aeq, beq, lb, ub, nonlcon)$$

其中，fun为用M文件定义的目标向量函数，$x0$为初值，$weight$为权重。$nonlcon$是用M文件定义的非线性约束$c(x) \le 0, ceq(x) = 0$。

例2：

$$\max\ f_1 = 100x_1 + 90x_2 + 80x_3 + 70x_4$$

$$\min\ f_2 = 3x_2 + 2x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 30 \\ x_3 + x_4 \geq 30 \\ 3x_1 + 2x_3 \leq 120 \\ 3x_2 + 2x_4 \leq 48 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

解： 编写Matlab程序如下：

```
clc,clear
a=[-1 -1 0 0;0 0 -1 -1;3 0 2 0;0 3 0 2];
b=[-30 -30 120 48];
c1=[-100 -90 -80 -70];
c2=[0 3 0 2];
fun=@(x) [c1;c2]*x; %用匿名函数定义目标向量
[x1,g1]=linprog(c1,a,b,[],[],zeros(4,1))% 求第一个目标函数的目标值
[x2,g2]=linprog(c2,a,b,[],[],zeros(4,1))% 求第二个目标函数的目标值
g3=[g1;g2];%目标goal的值
[x,fval]=fgoalattain(fun,rand(4,1),g3,abs(g3),a,b,[],[],zeros(4,1))
%这里权重weight为目标goal的绝对值
```