计算机研究与发展
Journal of Computer Research and Development

ISSN 1000-1239/CN 11-1777/TP
42(11):1833~1842, 2005

定性 Dempster-Shafer 理论

牟克典　　林作铨
(北京大学数学科学学院信息科学系　北京　100871)
(mkd@is.pku.edu.cn)

Symbolic Dempster-Shafer Theory

Mu Kedian and Lin Zuoquan
(*Department of Informatics*, *School of Mathematical Science*, *Peking University*, *Beijing* 100871)

Abstract　Symbolic Dempster-Shafer (D-S for short) theory is presented to handling imprecise and uncertain reasoning. The numerical set of belief degrees [0,1] in classical D-S theory is replaced by a totally ordered scale of symbolic values. After the qualitative mass function and qualitative belief function are defined by qualitative operators, the fundamental relation between them is discussed. The combination of evidence in qualitative way is also discussed in detail. Compared to other related work, there are two essential characteristics of the symbolic D-S theory. One is that the theory inherits the advantages of classic D-S theory on uncertain reasoning by re-defining the essential concepts in D-S theory. Another one is that the qualitative operators involved in the approach are strictly defined by the logic formulas as well as intuitive properties. Consequently, the symbolic D-S theory is more suitable for reasoning about uncertainty and imprecision in the framework of D-S theory.

Key words　Dempster-Shafer theory; uncertainty; impreciseness

摘　要　采用一个全序的符号值集合来代替数值信任度集合[0,1],提出定性 Dempster-Shafer 理论来处理既有不确定性又有不精确性的推理问题. 首先,定义了适合对不确定性进行定性表达和推理的定性 mass 函数、定性信任函数等概念,并且研究了这些概念之间的基本关系;其次,详细讨论了定性证据合成问题,提出了基于平均策略的证据合成规则. 这种定性 Dempster-Shafer 理论与其他相关理论相比,既通过在定性领域重新定义 Dempster-Shafer 理论的基本概念,继承了 Dempster-Shafer 理论在不确定推理方面的主要特点,同时又具有适合对不精确性操作的既有严格定义又符合直观特性的定性算子,因此更适合基于 Dempster-Shafer 理论框架不精确表示和处理不确定性.

关键词　Dempster-Shafer 理论;不确定性;不精确性

中图法分类号　TP18

1　引　　言

Dempster-Shafer 理论(简称 D-S 理论)[1]在不确定性(uncertainty)的表达和度量上比较灵活,推理机制也比较简洁直观、易于机器实现;更重要的是在信任分配中考虑了未知(ignorance),使得它在不确定推理方面更接近于人类专家的思维习惯[2],因而被广泛地应用于基于知识的系统等领域,成为人工智能中重要的不确定推理理论之一. 和大多数不确定推理理论一样,D-S 理论框架是基于对不确定性的精确数值度量的. 事实上,在实际应用中领域

收稿日期:2004-05-18;修回日期:2005-03-25
基金项目:国家自然科学基金项目(69925203);国家自然科学基金重大项目(60496324,60496322)

专家所提供的用于构建基于知识的系统的很多知识不仅是不确定的、同时也是不精确的,即专家所提供的事实或者规则本身就是不确定的,并且对于相应不确定性提供的不是精确的数值度量,而是相对比较模糊的、不精确的定性度量;尤其当不确定性的数值度量根本不可能获得时,专家一般倾向于采用自然语言中的"很可能"、"几乎不可能"等近似地表达他们的经验知识和信任程度等[3~8]. 如何应用D-S理论的思想来处理这种基于定性表示的不确定推理问题一直是D-S理论在实际应用中所面临的一个挑战,其本质是基于D-S理论的基本框架如何处理既有不确定性又有不精确性的推理问题.

Parsons等人首先提出了D-S理论的定性化方法[6,7]来处理既有不确定性又有不精确性的推理问题,但这种方法对于不精确性的区分过于粗糙,并且缺乏处理不确定性的定性度量的相应运算,在很多情况下不易推广和应用.

事实上,在定性概率推理[4,5]中,Seridi等人采用一个全序的符号值集合代替集合[0,1]来定性表示不确定程度,并借助于Akdag等人提出的定性不确定性理论[3]定义了处理定性信任度的4种基本定性算子. 这4种基于多值逻辑定义的基本算子既具有丰富的表达能力,同时又符合相应运算的直观特性[4]. 在本文中,我们基于Seridi等人提出的定性算子拓展D-S理论,提出了定性Dempster-Shafer理论来处理这种既有不确定性又有不精确性的推理情形.

在下一节中,我们定义定性D-S理论中一些重要的概念,并且给出它们之间的基本关系;在第3节我们讨论定性证据合成问题,并提出基于平均策略的证据合成规则;在第4节中,我们对相关研究工作进行比较;最后我们对本文的工作进行总结.

2 基本概念

在本文中,我们采用一个与自然语言相关的全序符号值集合来表达不精确性. 令L_n是不确定性的定性度量集合,它是由n个递增的符号值构成的全序集,即$L_n=\{\tau_i^n \mid i=0,\cdots,n-1\}$,且$\tau_i^n\leqslant\tau_j^n$当且仅当$i\leqslant j$. 对于每个属于$L_n$的符号值,对应于一个表示不确定程度的语言值,一般而言,τ_0^n通常对应于"不可能",τ_{n-1}^n则对应于"完全确定",若采用$\mathscr{L}$表示元语言①,则$L_n\subset\mathscr{L}$. 例如,对于$L_7=\{\tau_0^7,\tau_1^7,\cdots,\tau_6^7\}$,可给出如下的符号值和语言值之间的对应关系[4]:

$\tau_0^7\Leftrightarrow$impossible;$\tau_1^7\Leftrightarrow$very little possible;

$\tau_2^7\Leftrightarrow$little possible;$\tau_3^7\Leftrightarrow$possible;

$\tau_4^7\Leftrightarrow$rather possible;$\tau_5^7\Leftrightarrow$very possible;

$\tau_6^7\Leftrightarrow$certain.

由于这种对应关系,在本文中,L_7也表示成$L_7=$ {impossible^7,very little possible^7,little possible^7,possible^7,rather possible^7,very possible^7,certain^7}. 基于多值逻辑[3],在L_n中定义了如下的Lukasiewicz蕴涵:

若$i\geqslant j$,则$\tau_i^n\rightarrow_L\tau_j^n=\tau_{n-1-i+j}^n$;否则$\tau_i^n\rightarrow_L\tau_j^n=\tau_{n-1}^n$. 且定义符号补运算为$\overline{\tau_i^n}=\tau_{n-1-i}^n$.

基于逻辑基础和相关运算的直观特性,Seridi等人定义了如下4种最有表达力的定性算子[4]:

定性加法 $\forall i,j\in[0,n-1]$,$ADD(\tau_i^n,\tau_j^n)=\tau_\delta^n=\min(\tau_{i+j}^n,\tau_{n-1}^n)$由如下逻辑函数定义:$(\overline{\tau_i^n}\rightarrow_L\tau_j^n)=\tau_\delta^n$且$\tau_\delta^n=\min(\tau_{i+j}^n,\tau_{n-1}^n)$;

定性减法 $\forall i,j\in[0,n-1]$,$\tau_i^n\geqslant\tau_j^n$,$SUB(\tau_i^n,\tau_j^n)=\tau_s^n$由如下逻辑函数定义:$\overline{(\tau_i^n\rightarrow_L\tau_j^n)}=\tau_s^n$且$\tau_s^n=\max(\tau_{i-j}^n,\tau_0^n)$;

定性乘法 $\forall i,j\in[0,n-1]$,$MUL(\tau_i^n,\tau_j^n)=\tau_\gamma^n$由如下逻辑函数定义:$\overline{(\tau_i^n\rightarrow_L\overline{\tau_j^n})}=\tau_\gamma^n$且$\tau_\gamma^n=\max(\tau_{i+j-n+1}^n,\tau_0^n)$;

定性除法 $\forall i,j\in[0,n-1]$,$\tau_i^n\leqslant\tau_j^n\neq\tau_0^n$,若$\tau_i^n=\tau_0^n$且$\tau_j^n\neq\tau_0^n$,$DIV(\tau_i^n,\tau_j^n)=MUL(\tau_i^n,\tau_j^n)$;若$\tau_0^n<\tau_i^n\leqslant\tau_j^n$且$\tau_j^n\neq\tau_0^n$,$DIV(\tau_i^n,\tau_j^n)=ADD(\tau_i^n,\overline{\tau_j^n})$.

基此,在本文中,我们对于定性加算子ADD进行扩展,定义如下的定性和算子SUM:

定义1. 定性和算子. $\forall i_1,\cdots,i_m\in[0,n-1]$,$m\geqslant 2$,

$$\mathop{SUM}_{k=1}^{m}(\tau_{i_k}^n)=\Gamma_{m-2},$$

其中$\Gamma_0=ADD(\tau_{i_1}^n,\tau_{i_2}^n)$,$\Gamma_k=ADD(\Gamma_{k-1},\tau_{i_{k+2}}^n)$,$k=1,\cdots,m-2$. (1)

它由如下的逻辑函数定义:

$$\mathop{SUM_L}_{k=1}^{m}(\tau_{i_k}^n)=\Gamma_{\delta_{m-2}},$$

其中,$\Gamma_{\delta_0}=\overline{\tau_{i_1}^n}\rightarrow_L\tau_{i_2}^n$且$\Gamma_{\delta_0}=\min(\tau_{i_1+i_2}^n,\tau_{n-1}^n)$,

$$\Gamma_{\delta_k}=\overline{\Gamma_{\delta_{k-1}}}\rightarrow_L\tau_{i_{k+2}}^n \text{ 且 } \Gamma_{\delta_k}=\min\left(\tau^n_{\sum_{j=1}^{k+2}i_j},\tau_{n-1}^n\right),$$

$$k=1,\cdots,m-2.$$

① 为和相关文献保持一致起见,本文所涉及的元语言为英文

在 D-S 理论中,对于假设集合的信任分配是通过 mass 函数来实现的. 我们首先定义定性 mass 函数. 为了便于区别,本文中我们采用下标 S 来标记相应的定性概念. 设 Θ 是一个由一些两两互斥的假设(元素)构成的完备假设空间,称为辨识框架,$|\Theta|$ 为其基数,$\mathcal{P}(\Theta)$ 是 Θ 的幂集,并且对 $\mathcal{P}(\Theta)$ 中的元素进行从 $1\sim 2^{|\Theta|}$ 的编号,我们定义定性 mass 函数如下:

定义 2. 定性 mass 函数 m_S 是从 $\mathcal{P}(\Theta)$ 到 L_n 的映射,满足:

① $m_S(\varnothing)=\tau_0^n$;

② $\underset{X\subseteq\Theta}{SUM}(m_S(X))=\tau_{n-1}^n$;

③ 对于任意 $Y\in\mathcal{P}(\Theta)$,如果 $m_S(Y)>\tau_0^n$,则 $\underset{\substack{X\subseteq\Theta\\X\neq Y}}{SUM}(m_S(X))=SUB(\tau_{n-1}^n,m_S(Y))$.

m_S 是直接分配给 Θ 的子集 X 的信任的定性度量,它以定性方式表达了证据对于相应假设子集的支持程度. 事实上,它度量的仅仅是直接分配给此假设集的信任,并不包含分配给其任何一个子集的 mass. 另一方面,根据定义 2,信任不仅被分配给了辨识框架的基本元素,而且也直接分配给了其任意的子集,这体现了定性 D-S 理论继承了 D-S 理论在信任分配方面比概率推理体系[4]更为灵活的特点.

与 D-S 理论相比,定性 mass 函数的定义与 mass 函数的定义在形式上略有不同,即在定义 2 中单独多列了条件③. 在 D-S 理论中[1],mass 函数 m 是从 $\mathcal{P}(\Theta)$ 到 $[0,1]$ 的映射,满足:

$$①\, m(\varnothing)=0;\ ②^*\sum_{X\subseteq\Theta}m(X)=1.$$

事实上,这里的②* 蕴涵着类似于定义 2 中③的如下条件:

$\forall Y\in\mathcal{P}(\Theta)$,若 $m(Y)>0$,则

$$\sum_{\substack{X\subseteq\Theta\\X\neq Y}}m(X)=1-m(Y).$$

这在一定程度上体现了 mass 函数作为信任分配的本质. 但对于定性算子来说,由于和相应的数值运算之间存在差异,定义 2 中条件②和③之间未必存在如上的蕴涵关系. 例如,根据定义 1,对 $L_7=\{\tau_0^7,\tau_1^7,\cdots,\tau_6^7\}$ 来说,我们很容易得到如下结果:

$$\underset{k=0}{\overset{4}{SUM}}(\tau_k^7)=\tau_6^7,$$

$$\underset{k=0}{\overset{3}{SUM}}(\tau_k^7)=\tau_6^7,$$

$$SUB(\tau_6^7,\tau_4^7)=\tau_2^7.$$

很显然 $\underset{k=0}{\overset{3}{SUM}}(\tau_k^7)\neq SUB(\tau_6^7,\tau_4^7)$. 考虑到定性运算和相应的数值运算之间的这些区别,基于定性算子的定义 2 中的条件③是合理且必要的.

基于定性 mass 函数,D-S 理论中表示信任的其他重要概念,如信任函数、合情度等都可以扩展到定性 D-S 理论中来. 对于任意的假设子集 $X\subseteq\Theta$,以 X 表示其否定.

定义 3. 定性信任函数. 对任意 $X\subseteq\Theta$,其定性信任函数 Bel_S 定义如下:

$$Bel_S(X)=\underset{Y\subseteq X}{SUM}(m_S(Y)). \tag{2}$$

定义 4. 定性怀疑度. 对任意 $X\subseteq\Theta$,其定性怀疑度 Dbt_S 定义如下:

$$Dbt_S(X)=Bel_S(\ X). \tag{3}$$

定义 5. 定性合情度. 对任意 $X\subseteq\Theta$,其定性合情度 Pls_S 定义如下:

$$Pls_S(X)=SUB(\tau_{n-1}^n,Bel_S(\ X))=SUB(\tau_{n-1}^n,\underset{Y\subseteq\ X}{SUM}(m_S(Y))). \tag{4}$$

定义 6. 定性未知. 对任意 $X\subseteq\Theta$,其定性未知 Igr_S 定义如下:

$$Igr_S(X)=SUB(Pls_S(X),Bel_S(X)). \tag{5}$$

从这些概念的定义来看,尽管基于定性运算,但实质上仍然继承了 D-S 理论在信任表达方面的基本思想,假设集的定性信任函数、定性怀疑度、定性合情度和定性未知从不同的角度刻画了对相应假设的信任程度. 例如,定性信任函数定性地刻画了证据对于相应假设的支持程度. 反之,其定性怀疑度定性地表达了证据对于相应假设的否定程度;而其定性合情度则定性地表达了证据不否定相应假设的程度;其定性未知通过一个符号值刻画了证据支持相应的假设或者其否定的程度.

事实上,由于定性 D-S 理论继承了 D-S 理论关于未知的考虑,因此也为假设提供一个定性信任度量区间 $[Bel_S,Pls_S]$ 而不是一个符号值. 在本文中,我们对于定性信任区间 $[Bel_S,Pls_S]$ 采用如表 1 所示的解释[9]:

Table 1 The Meanings of Qualitative Belief Intervals

表 1 定性信任区间的解释

Belief Interval	Meaning
$[\tau_{n-1}^n,\tau_{n-1}^n]$	Totally true
$[\tau_0^n,\tau_0^n]$	Totally false
$[\tau_0^n,\tau_{n-1}^n]$	Totally ignorant
$[Bel_S,\tau_{n-1}^n]$ and $\tau_0^n<Bel_S<\tau_{n-1}^n$	Tend to support hypothesis
$[\tau_0^n,Pls_S]$ and $\tau_0^n<Pls_S<\tau_{n-1}^n$	Tend to negate hypothesis
$[Bel_S,Pls_S]$ and $\tau_0^n<Bel_S\leqslant Pls_S<\tau_{n-1}^n$	Either support or negate hypothesis

定性怀疑度、定性合情度、定性未知可以被相应的定性信任函数所确定，而定性 mass 函数完全可以确定定性信任函数. 事实上在 D-S 理论中，mass 分配和信任函数之间有如下特殊关系[1]：

$$m(X) = \sum_{Y \subseteq X} (-1)^{|X-Y|} Bel(Y), \tag{6}$$

其中 $|X-Y|$ 表示集合 $X - Y = \{x \mid x \in X, x \notin Y\}$ 的基. 因此，mass 函数和相应的信任函数可以相互确定. 对定性 D-S 理论是否存在类似的特殊关系，即定性信任函数是否可以确定相应的定性 mass 函数？

显然，这种关系的表达可能会涉及一些混合定性运算. 上面提到的定性算子中，除定性和之外，都是二元运算，对于这些定性算子的组合，一些相应的数值运算的特性(如结合率等)将不再成立. 例如：

$$ADD(SUB(\tau_6^7, \tau_3^7), \tau_4^7) = \tau_6^7,$$

$$SUB(ADD(\tau_6^7, \tau_4^7), \tau_3^7) = \tau_3^7,$$

显然 $ADD(SUB(\tau_6^7, \tau_3^7), \tau_4^7) \neq SUB(ADD(\tau_6^7, \tau_4^7), \tau_3^7)$. 因此，我们必须清楚地定义相关的混合定性运算.

首先，我们定义属于 L_n 的符号值和整数 1 及 -1 之间的混合运算. 我们采用下标 M 来标记这种混合运算.

对于 $\tau_i^n, \tau_j^n \in L_n$ 和整数 1，它们之间的混合乘法运算定义如下：

$$MUL_M(1, \tau_i^n) = MUL_M(\tau_i^n, 1) \overset{\text{def}}{=} \tau_i^n. \tag{7}$$

对于 $\tau_i^n, \tau_j^n \in L_n$ 和 1 以及 -1 之间的混合加法运算分别定义如下：$\forall i, j \in [0, n-1]$，

$$ADD_M(\tau_i^n, MUL_M(1, \tau_j^n)) = ADD_M(\tau_i^n, MUL_M(\tau_j^n, 1)) \overset{\text{def}}{=} ADD(\tau_i^n, \tau_j^n),$$

若 $\tau_i^n \geq \tau_j^n$，

$$ADD_M(\tau_i^n, MUL_M(-1, \tau_j^n)) = ADD_M(\tau_i^n, MUL_M(\tau_j^n, -1)) \overset{\text{def}}{=} SUB(\tau_i^n, \tau_j^n). \tag{8}$$

更一般地，我们定义它们的混合和运算如下：

$$\forall i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_l \in [0, n-1], \sum_{f=1}^{k} i_f \geq \sum_{m=1}^{l} j_m,$$

$$SUM_M(MUL_M((-1)^0, \tau_{i_1}^n), \cdots, MUL_M((-1)^0 \tau_{i_k}^n), MUL_M((-1)^1, \tau_{j_1}^n), \cdots, MUL_M((-1)^1, \tau_{j_1}^n)) \overset{\text{def}}{=} \min\left(\tau_{n-1}^n, \tau^n_{\sum_{f=1}^{k} i_f - \sum_{m=1}^{l} j_m}\right). \tag{9}$$

通过这些混合运算，我们容易证明如下定理：

定理 1. 定性信任函数 Bel_S 和定性 mass 函数 m_S 之间存在如下关系：

$$m_S(X) = \underset{Y \subseteq X}{SUM_M}(MUL_M((-1)^{|X-Y|}, Bel_S(Y))). \tag{10}$$

定理 1 说明了定性 mass 函数确实是定性 D-S 理论中刻画信任度的最基本的概念.

我们通过下面的例子来具体说明本节所定义的一些概念和结果.

例 1. 设辨识框架 $\Theta = \{A, B\}$ 表示两种可能的疾病，经过对病人的详细诊断，医生基于 L_7 就各种疾病假设分配了如下的定性 mass 函数：

$$m_S(\{A\}) = \text{possible}^7;$$

$$m_S(\{B\}) = \text{very little possible}^7;$$

$$m_S(\{A, B\}) = \text{little possible}^7;$$

$$m_S(\varnothing) = \text{impossible}^7.$$

显然，

$$Bel_S(\{A\}) = m_S(\{A\}) = \text{possible}^7;$$

$$Bel_S(\{B\}) = m_S(\{B\}) = \text{very little possible}^7;$$

$$Bel_S(\{A, B\}) = SUM(m_S(\{A, B\}), m_S(\{A\}), m_S(\{B\})) = \text{certain}^7;$$

$$Dbt_S(\{A\}) = Bel_S(\{\overline{A}\}) = Bel_S(\{B\}) = \text{very little possible}^7;$$

$$Pls_S(\{A\}) = SUB(\text{certain}^7, \text{very little possible}^7) = \text{very possible}^7;$$

$$Igr_S(\{A\}) = SUB(\text{very possible}^7, \text{possible}^7) = \text{little possible}^7.$$

因此对于疾病假设 $\{A\}$ 来说，定性信任区间为 [possible^7, very possible^7]. 这意味着医生认为该病人可能(possible)患有疾病，但诊断结果在非常大的程度上(very possible)不否定该病人患有疾病的假设. 另一方面，

$$MUL_M((-1)^0, Bel_S(\{A\})) = Bel_S(\{A\}) = m_S(\{A\}),$$

$$MUL_M((-1)^0, Bel_S(\{B\})) = Bel_S(\{B\}) = m_S(\{B\}),$$

$$SUM_M(MUL_M((-1)^0, Bel_S(\{A, B\})), MUL_M((-1)^1, Bel_S(\{B\})), MUL_M((-1)^1, Bel_S(\{A\}))) = \tau_{6-1-3}^7 = \tau_2^7 = \text{little possible}^7 = m_S(\{A, B\}).$$

显然，这与定理 1 是相一致的.

3 定性证据合成

3.1 基于同一符号值集合的证据合成

不失一般性，为简单起见，我们首先假定本小节

所涉及的所有定性 mass 函数值都属于同一符号值集合 L_n.

信任的重新分配即更新机制是不确定推理的基本机制之一. 在 D-S 理论中,信任分配的更新是通过 Dempster 证据合成来实现的,即相对于同一辨识框架 Θ,对两个截然不同的 mass 函数 m_1 和 m_2,可以通过 Dempster 合成规则[1]得到如下的复合信任分配:

$$m(Z)=m_1\oplus m_2(Z)=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{X\cap Y=Z}m_1(X)m_2(Y)}{1-\sum\limits_{X\cap Y=\varnothing}m_1(X)m_2(Y)},\varnothing\subset Z\subseteq\Theta,\\0,Z=\varnothing.\end{cases}\tag{11}$$

作为信任更新的具体机制,Dempster 规则不仅形式简单、更新过程可见,而且原来的信任分配足以确定新的信任分配,在更新过程中无须引进其他参数.

一般来说,关于定性证据合成最直观的想法就是将 Dempster 规则定性化,而最直观的定性化方法就是用定性算子代替 Dempster 规则中相应的数值运算,即令 m_{S1}和 m_{S2}是相对于同一辨识框架 Θ 的两个截然不同的定性 mass 函数,则相应的 Dempster 规则可以定性推广为如下形式:

$$m_S(Z)=m_{S1}\oplus m_{S2}(Z)=$$
$$DIV\Big(\underset{X\cap Y=Z}{SUM}(MUL(m_{S1}(X),m_{S2}(Y))),$$
$$SUB\Big(\tau_{n-1}^n,\underset{X\cap Y=\varnothing}{SUM}(MUL(m_{S1}(X),m_{S2}(Y)))\Big)\Big).\tag{12}$$

这种定性化是否适合定性证据合成?不幸,答案是否定的. 显然在 D-S 理论中,正交合成满足:

$$\sum_{Z\subseteq\Theta}\sum_{X\cap Y=Z}m_1(X)m_2(Y)=1.$$

假设这种定性化是合理的,则应该有

$$\underset{Z\subseteq\Theta}{SUM}(\underset{X\cap Y=Z}{SUM}(MUL(m_{S1}(X),m_{S2}(Y))))=\tau_{n-1}^n.\tag{13}$$

事实上,式(13)未必是成立的. 考虑如下相对于$\Theta=\{A,B\}$的两个定性 mass 函数分配:

$$m_{S1}(\{A\})=\tau_3^7,m_{S1}(\{B\})=\tau_1^7,$$
$$m_{S1}(\{A,B\})=\tau_2^7,m_{S1}(\varnothing)=\tau_0^7;$$
$$m_{S2}(\{A\})=\tau_5^7,m_{S2}(\{B\})=\tau_1^7,$$
$$m_{S2}(\{A,B\})=\tau_0^7,m_{S2}(\varnothing)=\tau_0^7.$$

则

$$\underset{X\cap Y=\{A\}}{SUM}(MUL(m_{S1}(X),m_{S2}(Y)))=\tau_3^7,$$
$$\underset{X\cap Y=\{B\}}{SUM}(MUL(m_{S1}(X),m_{S2}(Y)))=\tau_0^7,$$
$$\underset{X\cap Y=\{A,B\}}{SUM}(MUL(m_{S1}(X),m_{S2}(Y)))=\tau_0^7,$$
$$\underset{X\cap Y=\Theta}{SUM}(MUL(m_{S1}(X),m_{S2}(Y)))=\tau_0^7.$$

显然 $SUM(\tau_3^7,\tau_0^7,\tau_0^7,\tau_0^7)=\tau_3^7\neq\tau_6^7$. 导致这种不等式的主要原因之一就是定性算子和相应的数值运算之间的差异. 在 D-S 理论中,对于两个独立的 mass 分配,显然就有,$\sum_{X\subseteq\Theta}m_1(X)=1$,$\sum_{X\subseteq\Theta}m_2(X)=1$ 和 $\left(\sum_{X\subseteq\Theta}m_1(X)\right)\left(\sum_{X\subseteq\Theta}m_2(X)\right)=1$ 同时成立,但是这种关系并不能在相应的定性运算中得到有效保持.

在这种情况下,很难通过定性扩展 Dempster 合成规则来实现定性证据合成,我们不得不寻求新的合成策略. 事实上,由于 Dempster 规则在处理冲突证据合成时可能会导致悖论,因此,在 D-S 理论中,提出了一些关于 Dempster 合成的替代规则[10]. 其中 Yager 提出的替代规则不仅形式比较简单,而且所采用的策略也是实际中信息合成时常用的平均策略[10],即复合信任函数可以被如下平均规则所确定:

$$\forall Z\subseteq\Theta,Bel(Z)=$$
$$\frac{1}{2}\Big[\sum_{X\subseteq Z}m_1(X)+\sum_{Y\subseteq Z}m_2(Y)\Big].\tag{14}$$

根据 mass 函数和信任函数之间的特殊关系,复合 mass 函数也可以被如下平均规则所确定:

$$\forall Z\subseteq\Theta,m(Z)=\frac{1}{2}[m_1(Z)+m_2(Z)].\tag{15}$$

尽管 Yager 所提出的平均规则在形式上比 Dempster 规则简单,但仅仅局限于定性加、定性除或者乘运算还是很难直接表示定性平均运算. 例如对 $L_7=\{\tau_0^7,\tau_1^7,\cdots,\tau_6^7\}$来说,如果我们仅仅从形式上定义定性平均运算,则只可能是:

$$AVE_1(\tau_i^7,\tau_j^7)=MUL(\tau_3^7,ADD(\tau_i^7,\tau_j^7)),$$

或

$$AVE_2(\tau_i^7,\tau_j^7)=ADD(MUL(\tau_i^7,\tau_3^7),MUL(\tau_j^7,\tau_3^7)).$$

显然 $AVE_1(\tau_4^7,\tau_6^7)=MUL(\tau_3^7,ADD(\tau_4^7,\tau_6^7))=\tau_3^7$,

$$AVE_2(\tau_4^7,\tau_6^7)=ADD(MUL(\tau_4^7,\tau_3^7),$$
$$MUL(\tau_6^7,\tau_3^7))=\tau_4^7.$$

事实上,τ_4^7 和 τ_6^7 的平均值直观上应该是 τ_5^7,而不是 τ_3^7 或者 τ_4^7,因此这种形式上的推广并不适合表达定性平均运算. 但无论如何,如果我们从本质上将平均策略推广到定性证据合成领域,显然是合理的. 从本质上讲,对 τ_i^n 和 τ_j^n 进行平均运算的结果是它们相对于 L_n 的中值 $\tau_{(i+j)/2}^n$,但由于符号值集合

$L_n=\{\tau_0^n,\tau_1^n,\cdots,\tau_{n-1}^n\}$的特殊性,对于某些符号值$\tau_i^n$和$\tau_j^n$,它们相对于$L_n$的中值$\tau_{(i+j)/2}^n$不一定存在,即可能$\tau_{(i+j)/2}^n\notin L_n$. 例如,对$\tau_3^7$和$\tau_5^7$来说,它们的中值是$\tau_4^7$,但对$\tau_5^7$和$\tau_4^7$来说,在$L_7$中并不存在中值. 在这种情况下,我们可以采用一些直观上合理的近似值作为它们的中值.

从本质上讲,定性平均算子AVE是从$L_n\times L_n$到L_n的映射并且应该满足如下直观性质:

A1. $AVE(\tau_i^n,\tau_i^n)=\tau_i^n$;

A2. 对任意$\tau_i^n\geqslant\tau_j^n$, $\tau_i^n\geqslant AVE(\tau_i^n,\tau_j^n)\geqslant\tau_j^n$;

A3. 若$\tau_{(i+j)/2}^n\in L_n$,则$AVE(\tau_i^n,\tau_j^n)=\tau_{(i+j)/2}^n$;

A4. $AVE(\tau_i^n,\tau_j^n)=AVE(\tau_j^n,\tau_i^n)$;

A5. 若$\tau_i^n\geqslant\tau_j^n$,则$SUB(\tau_i^n,AVE(\tau_i^n,\tau_j^n))=SUB(AVE(\tau_i^n,\tau_j^n),\tau_j^n)$.

考虑到L_n的序关系, A_1, A_2, A_3都是定性平均运算所必须具备的特性. 我们前面已经提到,对某些符号值对来说,在L_n中并不存在中值. 对τ_i^n和τ_j^n来说,如果$\tau_{(i+j)/2}^n\notin L_n$,则采用$\tau_{(i+j-1)/2}^n$或$\tau_{(i+j+1)/2}^n$作为它们的近似中值在直观上似乎都是合理的. 考虑到定性mass函数的定义,我们采用如下的近似原则:

A6. 若$\tau_i^n<\tau_j^n$且$\tau_{(i+j)/2}^n\notin L_n$,而$\tau_{(i+j-1)/2}^n\in L_n$,则$AVE(\tau_i^n,\tau_j^n)=\tau_{(i+j-1)/2}^n$;

A7. 若$\tau_i^n>\tau_j^n$且$\tau_{(i+j)/2}^n\notin L_n$,而$\tau_{(i+j+1)/2}^n\in L_n$,则$AVE(\tau_i^n,\tau_j^n)=\tau_{(i+j+1)/2}^n$.

相应地,上面的A4(可交换性)和A5特性也必须进行如下相应的折中:

A4*. 若$\tau_{(i+j)/2}^n\in L_n$,则$AVE(\tau_i^n,\tau_j^n)=AVE(\tau_j^n,\tau_i^n)$;

若$\tau_i^n<\tau_j^n$且$\tau_{(i+j)/2}^n\notin L_n$,则$AVE(\tau_i^n,\tau_j^n)=SUB(AVE(\tau_j^n,\tau_i^n),\tau_1^n)$;

若$\tau_i^n>\tau_j^n$且$\tau_{(i+j)/2}^n\notin L_n$,则$AVE(\tau_i^n,\tau_j^n)=ADD(AVE(\tau_j^n,\tau_i^n),\tau_1^n)$;

A5*. 对$\tau_i^n\geqslant\tau_j^n$,若$\tau_{(i+j)/2}^n\in L_n$,则$SUB(\tau_i^n,AVE(\tau_i^n,\tau_j^n))=SUB(AVE(\tau_i^n,\tau_j^n),\tau_j^n)$;

若$\tau_{(i+j)/2}^n\notin L_n$,则$ADD(SUB(\tau_i^n,AVE(\tau_i^n,\tau_j^n)),\tau_1^n)=SUB(AVE(\tau_i^n,\tau_j^n),\tau_j^n)$.

基于多值逻辑,我们可以定义满足上面特性的定性平均算子如下:

定义7. 定性平均算子$AVE(\tau_i^n,\tau_j^n)=\tau_a^n$由如下逻辑函数定义:

若$\tau_i^n\geqslant\tau_j^n$且$\tau_{(i+j)/2}^n\in L_n$,则$(\tau_i^n\rightarrow_L\tau_a^n)=(\tau_a^n\rightarrow_L\tau_j^n)$且$\tau_a^n=\tau_{(i+j)/2}^n$;

若$\tau_i^n<\tau_j^n$且$\tau_{(i+j)/2}^n\in L_n$,则$(\tau_a^n\rightarrow_L\tau_i^n)=(\tau_j^n\rightarrow_L\tau_a^n)$且$\tau_a^n=\tau_{(i+j)/2}^n$;

若$\tau_i^n<\tau_j^n$且$\tau_{(i+j)/2}^n\notin L_n$,则$(\tau_a^n\rightarrow_L\tau_i^n)=((\tau_j^n\rightarrow_L\tau_a^n)\rightarrow_L\tau_1^n)$且$\tau_a^n=\tau_{(i+j-1)/2}^n$;

若$\tau_i^n>\tau_j^n$且$\tau_{(i+j)/2}^n\notin L_n$,则$((\tau_i^n\rightarrow_L\tau_a^n)\rightarrow_L\tau_1^n)=(\tau_a^n\rightarrow_L\tau_j^n)$且$\tau_a^n=\tau_{(i+j+1)/2}^n$.

根据前面定性加、减算子的定义,我们很容易证明如下命题:

命题1. 定性平均算子AVE满足特性A1~A3, A4*, A5*, A6和A7.

根据定义7,在L_7中定性平均运算对应于表2.

Table 2 Qualitative Average Operator $AVE(\tau_i^n,\tau_j^n)$ in L_7

表2 L_7中的定性平均运算$AVE(\tau_i^n,\tau_j^n)$

τ_i^7	τ_j^7						
	τ_0^7	τ_1^7	τ_2^7	τ_3^7	τ_4^7	τ_5^7	τ_6^7
τ_0^7	τ_0^7	τ_0^7	τ_1^7	τ_1^7	τ_2^7	τ_2^7	τ_3^7
τ_1^7	τ_1^7	τ_1^7	τ_1^7	τ_2^7	τ_2^7	τ_3^7	τ_3^7
τ_2^7	τ_1^7	τ_2^7	τ_2^7	τ_2^7	τ_3^7	τ_3^7	τ_4^7
τ_3^7	τ_2^7	τ_2^7	τ_3^7	τ_3^7	τ_3^7	τ_4^4	τ_4^7
τ_4^7	τ_2^7	τ_3^7	τ_3^7	τ_4^7	τ_4^7	τ_4^7	τ_5^7
τ_5^7	τ_3^7	τ_3^7	τ_4^7	τ_4^7	τ_5^7	τ_5^7	τ_5^7
τ_6^7	τ_3^7	τ_4^7	τ_4^7	τ_5^7	τ_5^7	τ_6^7	τ_6^7

如果直接采用平均算子来进行证据合成[11],即

$$\forall X\subseteq\Theta,$$
$$m_S(X)=m_{S1}\oplus m_{S2}(X)=AVE(m_{S1}(X),m_{S2}(X)),$$

并不能保证合成结果一定满足定性mass函数的定义. 我们需要对这种定性算子进行进一步折中. 我们先证明如下相关引理:

引理1. 设m_{S1}和m_{S2}是相对于同一辨识框架Θ的两个定性mass函数,对于$X\subseteq\Theta$,不妨设$m_{S1}(X)=\tau_i^n$, $m_{S2}(X)=\tau_j^n$. 我们分别定义集合

$$\mathcal{P}(\Theta)_{1>2}=\{X\mid X\subseteq\Theta,\tau_{(i+j)/2}^n\notin L_n,\ m_{S1}(X)>m_{S2}(X)\},$$
$$\mathcal{P}(\Theta)_{1<2}=\{X\mid X\subseteq\Theta,\tau_{(i+j)/2}^n\notin L_n,\ m_{S1}(X)<m_{S2}(X)\},$$

则$2\mid(|\mathcal{P}(\Theta)_{1>2}|-|\mathcal{P}(\Theta)_{1<2}|)$.

基于引理1,我们不妨设$|\mathcal{P}(\Theta)_{1>2}|>|\mathcal{P}(\Theta)_{1<2}|$且$l=|\mathcal{P}(\Theta)_{1>2}|-|\mathcal{P}(\Theta)_{1<2}|$,则从

集合$\mathscr{P}(\Theta)_{1>2}$中抽取 l 个编号最小的元素,不妨设为 $X_{i_0},\cdots,X_{i_{l-1}}$,则 $\forall X\in\mathscr{P}(\Theta)$,定义

$$AVE^*(m_{S1}(X),m_{S2}(X))=\begin{cases}AVE(m_{S1}(X),m_{S2}(X)), & \text{其他},\\ AVE(m_{S2}(X),m_{S1}(X)), & X=X_{i_k},2\mid k,k=0,\cdots,l-1.\end{cases}\tag{16}$$

并且我们可以证明 AVE^* 运算所得到的定性平均结果仍然满足定性 mass 函数的定义 2.

定理 2. 设 m_{S1}和 m_{S2}是相对于同一辨识框架 Θ 的两个定性 mass 函数,则

$$\forall X\in\mathscr{P}(\Theta),$$
$$m_S(X)=AVE^*(m_{S1}(X),m_{S2}(X))$$

仍然是相对于 Θ 的定性 mass 函数.

证明. 若$|\mathscr{P}(\Theta)_{1>2}|=|\mathscr{P}(\Theta)_{1<2}|$,则

$$\forall X\in\mathscr{P}(\Theta),$$
$$m_S(X)=AVE^*(m_{S1}(X),m_{S2}(X))=AVE(m_{S1}(X),m_{S2}(X)),$$

对于 $m_S(X)=AVE(m_{S1}(X),m_{S2}(X))$来说,显然

$$m_S(\varnothing)=AVE(\tau_0^n,\tau_0^n)=\tau_0^n;$$

对于 $\forall X\subseteq\Theta$ 来说,不妨设 $m_{S1}(X)=\tau_i^n$,$m_{S2}(X)=\tau_j^n$,则 $m_S(X)=\tau^n_{(i+j)/2}$,或 $m_S(X)=\tau^n_{(i+j+1)/2}$,或 $m_S(X)=\tau^n_{(i+j-1)/2}$;

如果 $\forall X\subseteq\Theta$,$m_S(X)=\tau^n_{(i+j)/2}$,则根据 SUM 运算的定义,显然 m_S 满足定义 2 中的条件②③;

如果 $m_S(X)\neq\tau^n_{(i+j)/2}$,不妨设 $m_S(X)=\tau^n_{(i+j+1)/2}$,则由定性平均算子的定义可知 $\tau_i^n>\tau_j^n$,由于$|\mathscr{P}(\Theta)_{1>2}|=|\mathscr{P}(\Theta)_{1<2}|$,则肯定 $\exists Y\subseteq\Theta$ 满足 $m_{S1}(Y)<m_{S2}(Y)$,不妨设 $m_{S1}(Y)=\tau_k^n$,$m_{S2}(Y)=\tau_l^n$,则 $m_S(Y)=\tau^n_{(k+l-1)/2}$,显然 $ADD(m_S(X),m_S(Y))=\tau^n_{(i+j+k+l)/2}$,因此 m_S 仍然满足定义 2 中的条件②③;对于 $m_S(X)=\tau^n_{(i+j-1)/2}$的情形类似可证得相同的结论.

若$|\mathscr{P}(\Theta)_{1>2}|\neq|\mathscr{P}(\Theta)_{1<2}|$,不妨设$|\mathscr{P}(\Theta)_{1>2}|>|\mathscr{P}(\Theta)_{1<2}|$,令 $l=|\mathscr{P}(\Theta)_{1>2}|-|\mathscr{P}(\Theta)_{1<2}|$,对于 $X_{i_0},\cdots,X_{i_{l-1}}$来说,显然按照 AVE^* 的定义,$m_S(X_{i_0})=AVE(m_{S2}(X_{i_0}),m_{S1}(X_{i_0}))$,$m_S(X_{i_1})=AVE(m_{S1}(X_{i_1}),m_{S2}(X_{i_1}))$.

进一步,不妨设:

$$m_{S1}(X_{i_0})=\tau^n_{k_0},m_{S2}(X_{i_0})=\tau^n_{l_0},$$
$$m_{S1}(X_{i_1})=\tau^n_{k_1},m_{S2}(X_{i_1})=\tau^n_{l_1},$$

则 $\tau^n_{k_0}>\tau^n_{l_0}$且 $\tau^n_{k_1}>\tau^n_{l_1}$,因而

$$m_S(X_{i_0})=\tau^n_{(k_0+l_0-1)/2},m_S(X_{i_1})=\tau^n_{(k_1+l_1+1)/2},$$

显然 $ADD(m_S(X_{i_0}),m_S(X_{i_1}))=\tau^n_{(k_0+l_0+k_1+l_1)/2}$;由引理 1 可知,$2\mid l$,即对于 $X_{i_0},\cdots,X_{i_{l-1}}$来说正好可以按次序两两这样配对,$m_S$ 仍然满足定义 2 中的条件②③,因此 m_S 也是相对于 Θ 的定性 mass 函数. 证毕.

基于上面定义的运算 AVE^* 和定理 2,我们可以提出如下的基于平均策略的定性证据合成规则:m_{S1}和 m_{S2}是相对于同一辨识框架 Θ 的两个截然不同的定性 mass 函数,若$|\mathscr{P}(\Theta)_{1>2}|=|\mathscr{P}(\Theta)_{1<2}|$,则可以通过如下的平均合成规则得到复合定性 mass 函数:

$$\forall X\in\mathscr{P}(\Theta),$$
$$m_S(X)=m_{S1}(X)\oplus_S m_{S2}(X)=AVE(m_{S1}(X),m_{S2}(X)).\tag{17}$$

若$|\mathscr{P}(\Theta)_{1>2}|\neq|\mathscr{P}(\Theta)_{1<2}|$,不妨设$|\mathscr{P}(\Theta)_{1>2}|=|\mathscr{P}(\Theta)_{1<2}|+l$,$l>0$,则可以通过如下的平均合成规则得到复合定性 mass 函数:

$$\forall X\in\mathscr{P}(\Theta),$$
$$m_S(X)=m_{S1}(X)\oplus_S m_{S2}(X)=AVE^*(m_{S1}(X),m_{S2}(X)).\tag{18}$$

例 2. 和例 1 中一样,对 $\Theta=\{A,B\}$来说,另一个医生经过独立诊断,给出了如下的另外一种定性 mass 分配:

$$m_{S2}(\{A\})=\text{rather possible}^7;$$
$$m_{S2}(\{B\})=\text{very little possible}^7;$$
$$m_{S2}(\{A,B\})=\text{very little possible}^7;$$
$$m_{S2}(\varnothing)=\text{impossible}^7.$$

如果我们以 m_{S1}表示例 1 的定性 mass 分配,现在我们采用平均定性合成规则得到如下的合成定性 mass 函数:

$$m_S(\{A\})=AVE(m_{S1}(\{A\}),m_{S2}(\{A\}))=\text{possible}^7;$$
$$m_S(\{B\})=AVE(m_{S1}(\{B\}),m_{S2}(\{B\}))=\text{very little possible}^7;$$
$$m_S(\{A,B\})=AVE(m_{S1}(\{A,B\}),m_{S2}(\{A,B\}))=\text{little possible}^7;$$
$$m_S(\varnothing)=AVE(m_{S1}(\varnothing),m_{S2}(\varnothing))=\text{impossible}^7.$$

显然,

SUM (possible^7, very little possible^7, little possible^7) = certain^7;

SUM(possible^7, very little possible^7) = rather possible^7 = SUB(certain^7, little possible^7);

SUM(possible^7, little possible^7) = very possible^7 = SUB(certain^7, very little possible^7);

SUM(little possible^7, very little possible^7) = possible^7 = SUB(certain^7, possible^7).

这种合成结果满足定性 mass 函数的定义,这和定理 2 是相一致的. 相应的合成定性信任函数如下:

$$Bel_S(\{A\}) = \text{possible}^7;$$

$$Bel_S(\{B\}) = \text{very little possible}^7;$$

$$Bel_S(\{A, B\}) = \text{certain}^7;$$

$$Pls_S(\{A\}) = \text{very possible}^7.$$

而 $\{A\}$ 的定性信任区间为[possible^7, very possible^7]. 这意味着综合两个医生的诊断,该病人可能(possible)患有疾病 A,但诊断结果在非常大的程度上(very possible)不否定该病人患有疾病 A 的假设,这个结果在直观上是合理的.

3.2 基于不同符号值集合的证据合成

在本文中,我们采用一个符号值集合 L_n 代替[0,1]来表示不确定性的不精确度量. 事实上,和精确数值度量领域不同,在定性领域并不存在一个符号值集合被作为惟一的、标准的定性信任度集合,原则上如何选择合适的符号值集合是比较主观的,它和专家的语言习惯、经验等各种因素有关[5,12]. 如何合成相对于同一辨识框架而基于不同符号值集合的定性 mass 函数是定性信任合成中另一个需要解决的问题.

事实上,这类问题的核心就是如何对属于不同符号值集合的信任度进行序比较和混合运算. 尽管 Akdag 等人曾经提出了一种相关的序比较方法[12],但这种方法存在很多缺陷,特别是和在不精确性操作方面具有重要作用的定性运算不协调[13],因此不适合在定性 D-S 理论中应用. 文献[13]提出了一种新的不同符号值集合的元素序比较方法,即对于两个不同的符号值集合 L_n 和 L_m, $\forall \tau_i^n \in L_n$, $\forall \tau_j^m \in L_m$,就有

$$\tau_i^n < \tau_j^m \Leftrightarrow \frac{i}{n-1} < \frac{j}{m-1};$$

$$\tau_i^n > \tau_j^m \Leftrightarrow \frac{i}{n-1} > \frac{j}{m-1};$$

$$\tau_i^n = \tau_j^m \Leftrightarrow \frac{i}{n-1} = \frac{j}{m-1}.$$

并且这种序比较方法不仅和定性运算保持协调,而且比较结果也比 Akdag 等人所提方法更为直观[13]. 要对属于不同集合的符号值进行操作还需要进一步定义定性混合运算. 在实际应用中,对于不同集合的元素之间的混合运算来说,一般都是寻找一个极小标准集合[13],并相对于极小标准集合进行相应的混合运算.

在极小标准集合的基础上,我们可以定义属于不同符号值集合的元素之间的定性混合运算如下:设 L_p 是 L_n 和 L_m 的极小标准集合,对于 $\forall \tau_i^n \in L_n$, $\forall \tau_j^m \in L_m$,显然

$$\exists\, \tau^p_{(p-1)i/(n-1)}, \tau^p_{(p-1)j/(m-1)} \in L_p \text{ 且}$$

$$\tau^p_{(p-1)i/(n-1)} = \tau_i^n, \tau^p_{(p-1)j/(m-1)} = \tau_j^m,$$

则我们可以在极小标准集合 L_p 中定义定性混合平均算子如下:

定性混合平均算子: $AVE_p(\tau_i^n, \tau_j^m) \stackrel{\text{def}}{=} AVE(\tau^p_{(p-1)i/(n-1)}, \tau^m_{(p-1)j/(m-1)})$.

基于这种混合运算,我们可以提出如下的基于不同符号值集合的定性证据合成策略:

对于同一辨识框架 Θ, m_{S1} 和 m_{S2} 分别表示相对于 L_n 和 L_m 的两个截然不同的信任分配,则对于任意的假设子集 $X \subseteq \Theta$ 来说,可以通过如下步骤更新其信任分配:

Step1. 确定 L_n 和 L_m 的极小标准集合 L_p;

Step2. 将 L_n 和 L_m 的元素通过如下公式转化为 L_p 中相应的元素:

$$\forall\, \tau_i^n \in L_n, \tau_i^n = \tau^p_{(p-1)i/(n-1)} \in L_p,$$

$$\forall\, \tau_j^m \in L_m, \tau_j^m = \tau^p_{(p-1)j/(m-1)} \in L_p;$$

Step3. 借助于混合平均算子按照第 3.1 节中证据合成方法来确定 X 相对于极小标准集合 L_p 的定性 mass 函数.

事实上,这种策略的本质是将基于不同符号值集合的定性 mass 函数分别转化为相对于极小标准集合 L_p 的定性 mass 函数来进行合成.

4 比较和讨论

在引言中我们已经提到 Parsons 等人[6,7]曾经对 D-S 理论进行简单的定性化推广,其实这种推广和我们的工作具有本质区别. 在 Parsons 等人的工作中,所有的概念都没有重新定义,只是借助于定性推理[14]的思想,对不精确性的区分和操作方面比较粗糙. 他们或者将不精确性仅仅表达为"0"(不可能)和"+"(可能),所涉及的操作仅是基于简单的 Boolean 运算的如下定性和$\oplus$和定性乘积$\otimes$:

$+\oplus+=+$, $+\oplus 0=+$, $0\oplus+=+$, $0\oplus 0=0$; $+\otimes+=+$, $+\otimes 0=0$, $0\otimes+=0$, $0\otimes 0=0$. 或

者也采用自然语言中的一些程度副词来表示不精确性,但并没有严格定义的定性运算来处理这些不精确性,缺乏对定性操作的表达能力.这样的定性化与我们的工作相比既不直观,又不具有可操作性,例如对于前面提到的例 1 来说,事实上,医生尽管对于疾病 A,B 的不确定性仅仅给出了不精确度量,同时也对两种疾病的可能程度明显有所区别,如果我们采用 Parsons 等人提出的定性化方法,则要么 $Bel_S(\{A\})=+$,$Bel_S(\{B\})=+$,即对不精确性不做区分,在表达上与医生的真实信任程度存在差异;要么也对不精确性加以区分,即 $Bel_S(\{A\})=$ possible,$Bel_S(\{B\})=$ very little possible,但缺乏严格定义的定性算子,我们并不能像例 1 中一样严格推断出 $Pls_S(\{A\})=$ very possible.相比,我们的工作实质上是在不精确度量领域重新建立了与 D-S 理论基本平行的不确定推理理论,重要的概念都经过重新定义和表达,使之和不确定性的不精确表达方式相适合,并且对不精确性的表达和操作都基于严格定义并符合直观特性的定性算子(ADD,SUB,SUM,AVE 等),实现了对不确定性和不精确性的联合表示和推理.

与定性概率推理[3~5]相比,定性 D-S 理论在不精确性的表达上采用了和它相同的符号值集合,但在不精确性的操作上,不仅使用了定性概率推理中定义的定性加、定性减算子,而且在本文中还定义了定性和 SUM、定性平均算子 AVE、定性混合算子等各种新的定性运算来适合定性 D-S 理论对不确定性的不精确表达和相关推理.同时,通过定义 2 和定理 1 我们知道,定性 mass 函数作为定性 D-S 理论中最基本的信任分配方式直接继承了 D-S 理论在信任分配方面最基本的思想,体现了 D-S 理论框架在信任分配方面灵活、更接近于人类专家的思维等特点,这是定性 D-S 理论和继承了概率推理思想的定性概率推理[3~5]最本质的区别.另一方面,由于如何处理不同专家选择的可能不同的符号值集合是定性不确定推理领域所面临的共同问题之一,因此在定性 D-S 理论中所提出的对于不同符号值集合的元素的序比较方法和相应的混合运算,事实上对定性概率推理来说也有一定的推广价值.

5 结 论

D-S 理论由于对不确定性灵活的度量、简洁的推理机制而受到广泛的应用,但是,在很多实际应用中,人们更倾向于采用定性方式不精确地表达和度量不确定性,如何基于 D-S 理论处理既有不确定性又有不精确性的推理情形,在基于知识的系统等领域具有重要意义.

在本文中,我们提出了定性 Dempster-Shafer 理论来处理既有不确定性又有不精确性的推理问题.我们基于严格定义的适合对不精确性进行操作的定性算子在定性领域重新定义了 D-S 理论在不确定性度量和表达方面的基本概念,并且考虑到定性运算和相应数值运算间的差异,定性 D-S 理论在证据合成上采用了基于平均策略的合成规则来代替 Dempster 规则,以适应对不确定性的不精确表示和操作.与其他和 D-S 相关的定性理论相比,定性 Dempster-Shafer 理论既继承了 D-S 理论在不确定推理方面的主要特点,同时又具有适合对不精确性操作的既有严格定义又符合直观特性的定性算子,因此我们的工作更适合基于 D-S 理论框架不精确表示和处理不确定性.

事实上,所有的定性不确定推理理论都面临着同一挑战.在实际应用中,某些知识,尤其是专家的经验型知识常常既有以定量方式表达的部分,也有以定性方式表达的部分,如何处理定性与定量混合表达的不确定性确实是不确定推理面临的一个共同难题.

致谢 特别感谢 Herman Akdag 教授提供了他的相关文献.

参 考 文 献

1 G. Shafer. A Mathematical Theory of Evidence. Princeton: Princeton University Press, 1976

2 J. Pearl. Reasoning with belief functions: An analysis of compatibility. International Journal of Approximate Reasoning, 1990, 4(5-6): 363~389

3 H. Akdag, M. DeGLas, D. Pacholczyk. A qualitative theory of uncertainty. Fundamenta Informaticae, 1992, 17(4): 333~362

4 H. Seridi, F. Bannay-Dupin De ST CYR, H. Akdag. Qualitative operators for dealing with uncertainty. In: Proc 5th Int'l Workshop Fuzzy-NeuroSystems. Munich: Infix, 1998. 202~209

5 A. Chawki Osseiran. Qualitative Bayesian network. Information Sciences, 2001, 131(1-4): 87~106

6 Simon Parsons, E. H. Mamdani. Qualitative Dempster-Shafer theory. In: Proc. IMACS III Int'l Workshop on Qualitative Reasoning and Decision Technologies. Barcelona: CIMNE Press, 1993. 471~480

7 Simon Parsons. Some qualitative approaches to applying the Dempster-Shafer theory. Information and Decision Technologies,

1994，19(4)：321～337

8 L. Zadeh. PRUF—A meaning representation language for natural languages. The International Journal of Man-Machine Studies，1978，10(4)：395～460

9 L. P. Wesley. Evidential knowledge-based computer vision. Optical Eng.，1986，25(3)：363～379

10 C. K. Murphy. Combining belief functions when evidence conflicts. Decision Support Systems，2000，29(1)：1～9

11 K. D. Mu. Research on some issues about uncertain reasoning：[Ph. D. dissertation]. Beijing：Peking University，2003 (in Chinese)
(牟克典. 不确定推理若干问题研究：[博士论文]. 北京：北京大学，2003)

12 H. Akdag，Myriam Morhtari. Approximative conjunctions processing by multi-valued logic. In：Proc. Int'l Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL '96). Los Alamitos，CA：IEEE Computer Society Press，1996. 130～135

13 Mu Kedian，Lin Zuoquan，Han Qing. Comparison of qualitative belief degrees belonging to different sets and its application. Journal of Computer Research and Development，2004，41(4)：558～564 (in Chinese)
(牟克典，林作铨，韩庆. 属于不同集合的定性信任度的序比较及应用，计算机研究与发展，2004，41(4)：558～564)

14 D. Bobrow. Qualitative Reasoning about Physical Systems. North-Holland：Elsevier Publishers Ltd.，1984

Mu Kedian，born in 1975. Ph. D. in applied mathematics. His main research interests include uncertain reasoning and non-canonical software requirements handling.

牟克典，1975年生，博士，主要研究方向为不确定推理、非规范软件需求处理.

Lin Zuoquan，born in 1963. Professor and Ph. D. supervisor. His main research interests include artificial intelligence，software，and non-classical logic.

林作铨，1963年生，博士，北京大学数学科学学院信息科学系主任，教授，博士生导师，主要研究方向为人工智能、计算机软件和非经典逻辑(lz@is.pku.edu.cn).

Research Background

Uncertain reasoning is pervasive in all areas of artificial intelligence. Currently techniques for reasoning under uncertainty are based on numerical measure of uncertainty. However，it is difficult to get precise measure of uncertainty in many cases. Therefore，it is necessary to develop theories and methodologies of uncertain reasoning based on qualitative or symbolic measure of uncertainty. The main contribution of this paper is to provide an approach to reasoning about uncertainty and imprecision in the framework of Dempster-Shafer theory.

The work is partially supported by the National Nature Science Foundation (under grant No. 69925203，60496322 and 60496324). These projects focus on theories and methodologies of non-canonical knowledge handling.