习题 7.6

只需让最优解取在处于 “有限” 的那个边界即可。比如:

$$\begin{aligned} \min x+3y& \\ x\geq 0& \\ y\geq 0& \\ x+y\geq 1& \end{aligned}$$

可以看出, 当 $x=1, y=0$ 时取得目标函数取得最小值 $1+0\cdot 3=1$, 而此时的可行域是无限的。

习题 7.21

求流中的关键边的算法
输入:网络为 (G,s,t,c) 输出:G 的关键边集 1. 根据最小路径长度增值法（MPLA）等方法，求得最大流；记得到的流为 f；记只存在反向边集的顶点对集为 E，生成的剩余图为 $R(V,E_f)$，其中 $E_f=\{(u,r)\|r(u,v)=c(u,v)-f(u,v)>0\}$。 2. 令 $C_1=\emptyset$, 在剩余图 $R(V,E_f)$ 中从 s 开始进行 DFS, 若某个边容量为 0 则将改边加入 C_1 中。 3. 令 $C_2=\emptyset$, 把剩余图 $R(V,E_f)$ 中的所有边反向, 从 t 开始进行 DFS, 若某个边容量为 0 则将改边加入 C 中。 4. 则 $C=C_1\bigcup C_2$ 就是关键边集。

说明: 步骤 1 指出, 若 $(i,j)\in C$, 则必有 $f(i,j)=c(i,j)$, 即在 R 中仅存在反向边 (j,i); 但是反之不成立, 即存在 R 中只有反向边, 其对应的原来的流中的边不是关键边。因此需要精化。这样的边 (u,v) 满足 $s\to u$ 存在一条所有的边 >0 的路径, $v\to t$ 存在一条该路径上所有的边容量都 >0 的路径。这样的话, 增加 $u\to v$ 的容量就可以出现增广路。枚举残余网络中的所有边, 用一次从 $S\to T$ 的 DFS 来标记该性质第一种情况的边 (步骤 2), 从 $T\to S$ 一次 DFS 来标记第二种情况的边(步骤 3)。步骤 2, 3 产生的边的并就是所有的关键边。

习题 7.23

证明: 由最大流最小割定理, 只要将最小顶点覆盖问题规约为最小割就可以了。

设二分图为 $G(U,E,W), W=V\backslash U$, 另设图 G 的最小顶点覆盖为 C。令 $C_u=U\cap C, C_w=W\cap C$, 且令 $C_{\bar{u}}=U-C_u, C_{\bar{w}}=U-C_w$。添加源点 s 和汇点 t, 并令 $S=\{s\}\cup C_u\cup C_w, T=\{t\}\cup C_{\bar{u}}\cup C_{\bar{w}}$。由于 $C=C_u\cup C_w$, 且 $U\cap V=\emptyset$, 则 $\forall i\in C_{\bar{u}}, j\in C_{\bar{w}}$, 有$(i,j)\notin E$。对于 U 和 W 部分, 只可能 C_u 和 C_w 之间存在边, $C_{\bar{u}}$ 和 $C_{\bar{w}}$ 之间不存在边; 而对于 s、t 和 U、W 的组合, 有两条分割边, 正好对应 s 和 t 作为覆盖顶点。这样, (S,T) 的边数就是最小顶点覆盖的顶点数。从而, 求 G 最小顶点覆盖 C 就规约成求 (G,s,t,c) 的最小割, 其中 $c: V\times V\to\mathbb{R}$ 为网的一个合适的容量。¶

习题 7.29

1. 分别用 bool 变量 $y_j \in J$ 表示投资商 j 的是否投资,用 bool 变量 $x_i \in I$ 表示是否雇用演员 i。则问题转化为整数线性规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & \Sigma y_j p_j - \Sigma x_i s_i \\ & y_j \le x_i, 对 j \in \{1,2,\ldots,n\}, i \in L_j \\ & x_i, y_j \in \{0,1\}, 对 x_i \in I, y_j \in J \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \Sigma y_j p_j - \Sigma x_i s_i \\ & y_j \le x_i, 对 j \in \{1,2,\ldots,n\}, i \in L_j \\ & x_i, y_j \in [0,1]\,, 对 x_i \in I, y_j \in J \end{aligned}$$

不难看出,给定一组 $x_i, i \in I$,只需取 $y = \min_i\{\in L_j\}x_i$,所得的值就是可能的最优解。故只需分析 x_i 的值。下面说明,对于任意非整数解的 $\{x_i, i \in I\}$,总存在更优的整数解 $\{\hat{x}_i, i \in I\}$。
若 $x_t = 0$ 则问题可以退化成原问题的子问题,故考虑 $x_i \neq 0, \forall i \in I$。
不妨假定 $x_1, x_2, \ldots, x_t \in (0,1)$,其余 $x_i = 1$。对 t 作数学归纳。问题对 $t = 1$ 显然是成立的,因为当 x_1 从原值变为 1 时,对应的 y_1 也变为了原来的 $\frac{1}{x_1}$ 倍(如果存在的话)。这样,$x_i = 1, \forall i \in I$ 的解显然比原来的解更优。
假设结论对 $t = k$ 成立。令 $x_0 = f = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\}$,令 $x'_i = x_i/f, i \in \{1,2,\ldots k+1\}$,则对应的 y'_0 变为了原来的 $\frac{1}{f}$ 倍,新的解 z' 比原来的解 z 更优。而所得的 z' 的解正是由 k 个大于 0 小于 1 的 x_i 生成的,由假设这个解没有全由 $0,1$ 生成的解更优。从而结论对 t=k+1 也成立。¶

习题 7.30

设 V_1是男孩的集合,V_2是女孩的集合,$E = \{(i,j)|i \in V_1, j \in V_2$男孩女孩匹配,则 $G(V,E)$ 是一个二分图。完全匹配 $M \subseteq E$ 是 $m = |V_1|$ 条相互独立的边。在完全匹配 M 中,每个 $v \in V_1$ 都附属于某个 $e \in M$。对于 $S \subseteq V_1$,记 $\Gamma(S) = \{v \in V_2, 存在 u, \text{s.t.}(u,v) \in E\} \in V_2$。则问题转化为证明下面的定理:

定理 1 (Hall) 二分图 $G(V_1, V_2, E)$ 包含从 V_1 到 V_2 的完全匹配当且仅当满足 Hall 条件:对每个$S \subset V_1, |\Gamma(S)| \ge |S|$

证明:($\Rightarrow$) 如果存在完全匹配,则 $S \in V_1$ 必然可以与至少 $|\Gamma(S)|$ 个 V_2 中的元匹配。
($\Leftarrow$) 对 m 进行数学归纳。结论对于 $m = 1$ 显然成立。假设 $m \ge 2$ 且 Hall 条件满足。

(I) 假设对所有合适的 $\emptyset \neq S \subseteq V_1$,有

$$|\Gamma(S)| \ge |S| + 1$$

则可以从任意边 $e = (v_1, v_2) \in E$ 开始,将 e 放入 M 中,图 $G' = G - \{v_1, V_2\}$ 仍然满足 Hall 条件,根据归纳可以完全匹配。

(II) 假设对于某个合适的 $\emptyset \neq T \subseteq V_1$,有

$$|\Gamma(T)| = |T|$$

对 $G' = G\left[T \cup \Gamma(T)\right]$ 和 $G'' = G\left[(V_1 \backslash T) \cup (V_2 \backslash \Gamma(T))\right]$,则 G'' 满足 Hall 条件。则我们分别得到了不相交包含 $|T|$ 和 $m - |T|$ 条边的匹配。两者的并正好是从 V_1 到 V_2 的匹配。¶