信号与系统

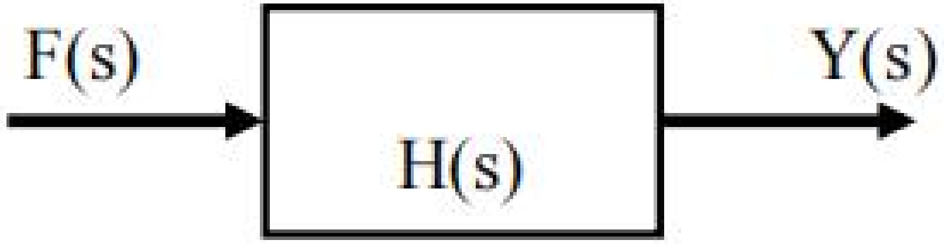
第6章 连续时间系统的系统函数

课程性质：必修

目录

CONTENTS

1.系统函数表示方法



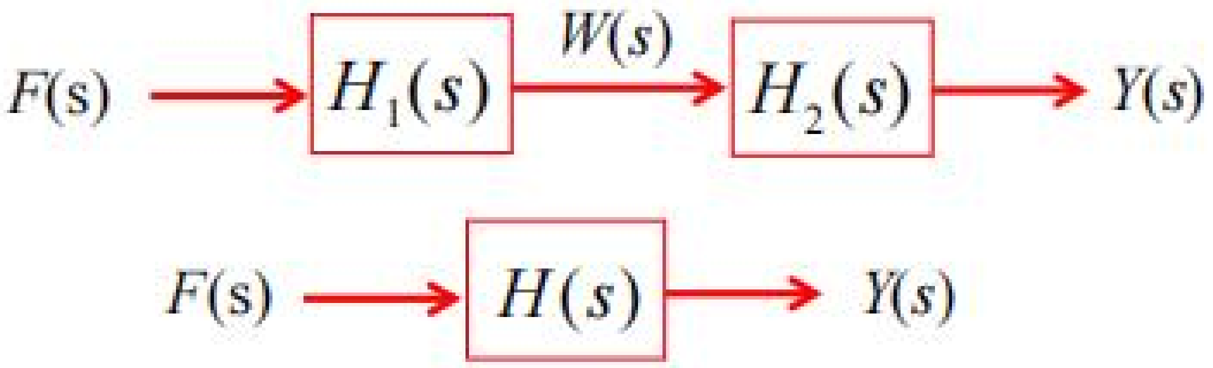
复杂系统框图(system block diagram)可由基本框图联接实现

三种联接(connection)方式：

级联(cascade)、并联(parallel connection)、反馈(feedback)

1.系统函数表示方法

一、级联方式(cascade mode)

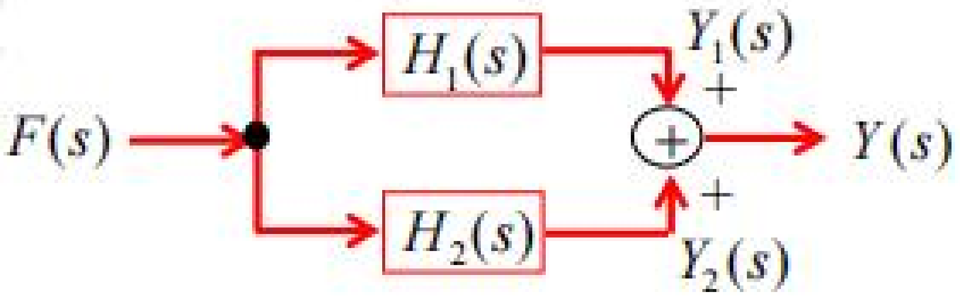


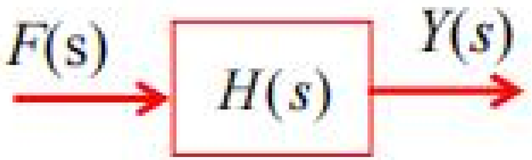
$$Y(s)=H(s)F(s)=H_2(s)W(s)=H_2(s)\left[H_1(s)F(s)\right]$$

所以 $H(s)=H_1(s)H_2(s)$

1.系统函数表示方法

二、并联方式(parallel connection mode)





$$H(s)=H_1(s)+H_2(s)$$

$\oplus$ -- 加法器

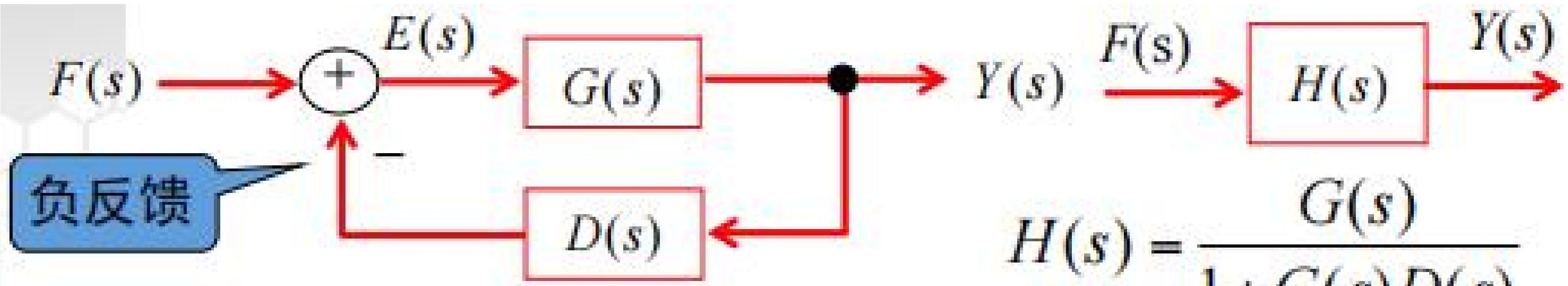
$$Y_1(s)=H_1(s)F(s) \quad Y_2(s)=H_2(s)F(s)$$

$$Y(s)=Y_1(s)+Y_2(s)=\left[H_1(s)+H_2(s)\right]F(s)$$

由传函定义：$H(s)=\dfrac{Y(s)}{F(s)}=H_1(s)+H_2(s)$

1.系统函数表示方法

三、反馈(feedback) 正反馈(positive feedback) 负反馈(negative feedback)



$$H(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)D(s)}$$

规定：加法器(adder)的输入信号标“-”符号，表示负反馈；不标符号，为正反馈

证明： $Y(s)=E(s)G(s)$ $E(s)=F(s)-D(s)Y(s)$

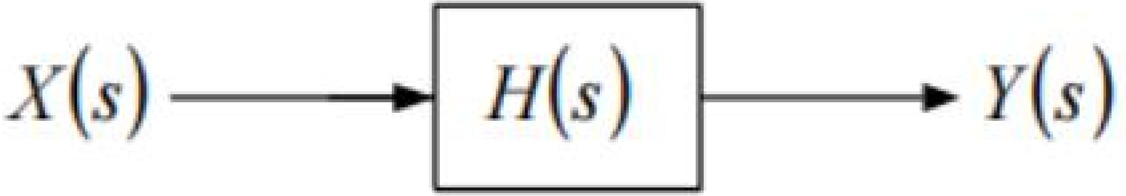
$$Y(s)=\left[F(s)-D(s)Y(s)\right]G(s)=F(s)G(s)-D(s)G(s)Y(s)$$

$$[1+G(s)D(s)]Y(s)=F(s)G(s)$$

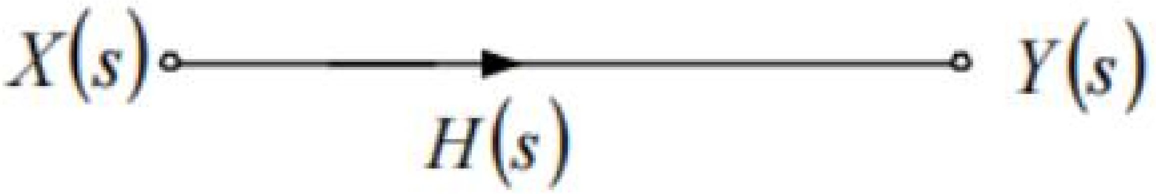
$$\therefore\ H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)D(s)}$$

1.系统函数表示方法

信号流图(signal flow diagram)是系统s域或z域框图的一种简化画法，与系统框图描述并无实质区别



框图(block diagram)



信号流图(signal flow diagram)

1.系统函数表示方法

一、信号流图的定义

由结点(node)和有向线段(directed segment)联接而成的有向线图。用来表示系统的输入输出关系(input-output relationship)，是系统框图表示的一种简化形式。

- **信号流图的基本术语**
- **结点：**表示系统中变量(variable)或信号(signal)的点

1.输入结点或源点：只有输出支路的结点，它对应的是自变量（即输入信号)

2.输出信号或汇点：只有输入支路的结点，它对应的是因变量（即输出信号)

3.混合结点：既有输入支路又有输出支路的结点

1.系统函数表示方法

- **支路(branch)：** 连接两个结点之间的定向线段。支路上的箭头表示信号传输的方向(direction)，标注在箭头附近的量即为两个结点之间的系统函数，也称为**转移函数**或**支路增益**
- **通路(access)：** 从任意结点出发，沿支路箭头方向通过各相连支路达到另一结点的路径（中间不允许有通路方向相反的支路存在）。各支路增益乘积称为通路增益(gain)

1.开通路： 通路与任一结点相交不多于一次

2.前向通路： 从源点到汇点方向开通路。前向通路各支路增益的乘积称为前向通路增益。一个信号流图中可以有多条前向通路。

3.闭通路： 终点就是起点，并且与任何其他结点相交不多于一次的通路，又称回路。回路中各支路增益乘积称为回路增益

4.不接触回路(loop)： 没有任何公共结点的回路

5.自回路： 只有一条支路的回路

1.系统函数表示方法

二、信号流图的性质

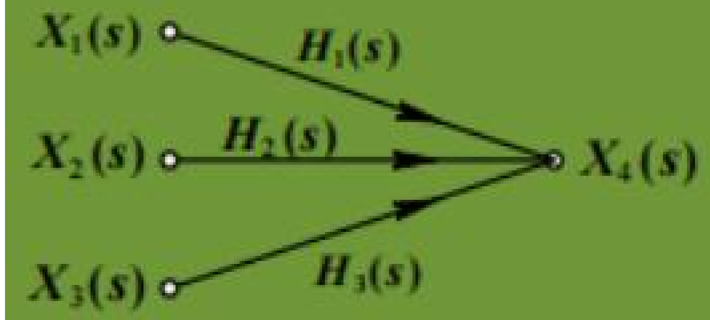
1.结点信号(node signal)等于所有进入结点的信号的代数和(algebraic sum)。

2.结点信号沿所有离开这个结点的支路传输。

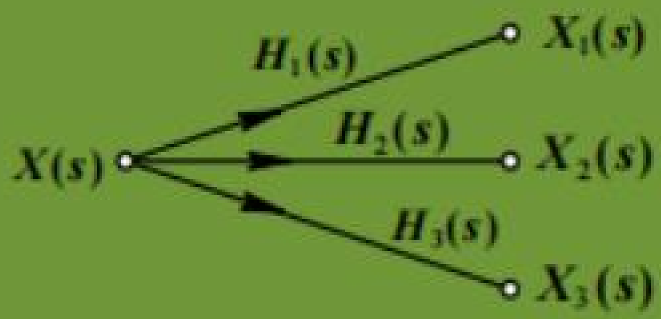
3.给定系统，信号流图形式并不是惟一的。

4.支路表示一个信号与另一个信号的函数关系，是有权重(weight)的，信号只能沿其支路的箭头方向(arrow direction)移动。

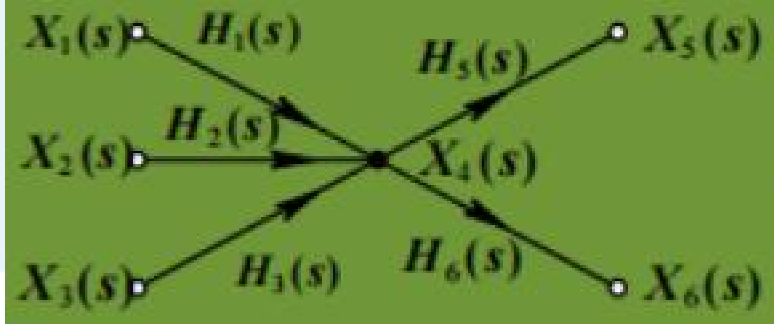
1.系统函数表示方法



$$X_4(s)=X_1(s)H_1(s)+X_2(s)H_2(s)+X_3(s)H_3(s)$$



$$X_1(s)=X(s)H_1(s)$$
$$X_2(s)=X(s)H_2(s)$$
$$X_3(s)=X(s)H_3(s)$$



$$X_4(s)=X_1(s)H_1(s)+X_2(s)H_2(s)+X_3(s)H_3(s)$$
$$X_5(s)=X_4(s)H_5(s)$$
$$X_6(s)=X_4(s)H_6(s)$$

1.系统函数表示方法

三、由系统框图(system block diagram)作出信号流图(signal flow diagram)

步骤：

1、选择结点(node)

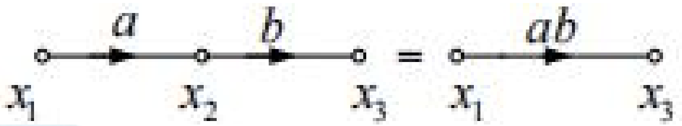
选择方框图中系统的输入(input)、输出(output)、积分器输出、加法器输出、子系统的输出用结点表示。

2、画出支路

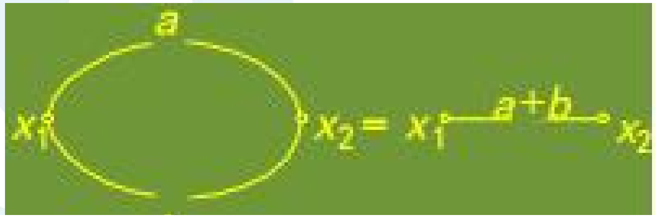
1.系统函数表示方法

四、简单信号流图的等效关系(equivalence relation)及运算关系(operational relation)

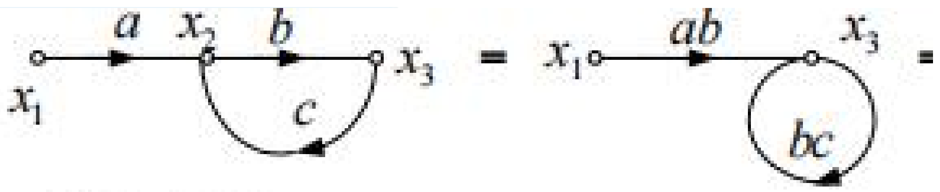
1、串联支路的总传递函数(transfer function)等于各支路传递函数的乘积(product)；



2、并联支路的总传递函数等于各支路传递函数的和；



3、回环(loopback)可以根据反馈联接的规则化为等效支路。



$$x_1 \xrightarrow{\dfrac{ab}{1-bc}} x_3$$

$$\text{因为}\begin{cases} x_2 = ax_1 + cx_3 \\ x_3 = bx_2 \end{cases} \Rightarrow x_3 = abx_1 + bcx_3 \Rightarrow x_3 = \frac{ab}{1-bc}x_1$$

1.系统函数表示方法

五、梅森公式(mason's Formula)

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = H(s) = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \Delta_k}{\Delta}$$

$Y(s)$：输出信号的拉普拉斯变换

$F(s)$：输入信号的拉普拉斯变换

Δ：信号流图的特征行列式

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{ij} L_i L_j - \sum_{ijm} L_i L_j L_m + \cdots$$

1.系统函数表示方法

变量解释(variable interpretation)

$\sum_i L_i$ 所有不同环路(loop)的传递函数(transfer function)之和

$\sum_{ij} L_i L_j$ 每两个互不接触的环路的传递函数乘积之和

$\sum_{ijm} L_i L_j L_m$ 每三个互不接触的环路的传递函数乘积之和

n：从输入结点(input node)（源结点）F（s）到输出结点(output node)（汇结点）Y（s）之间开路的总数。

P_k：从F（s）到Y（s）之间第k条开路(open circuit)的传递函数。

P_k等于第k条开路上所有支路传递函数的乘积。

$\triangle_k$：由与第k条开路不接触的环路所计算得的△值。

2.零点和极点的分布与时域特性的关系

一、H(s)零、极点与h(t)波形特征(waveform characteristics)的对应

主要内容：

1.由H（s）零、极点决定系统的时域(time domain)特性

2.由H（s）决定系统的时域响应

主要优点：

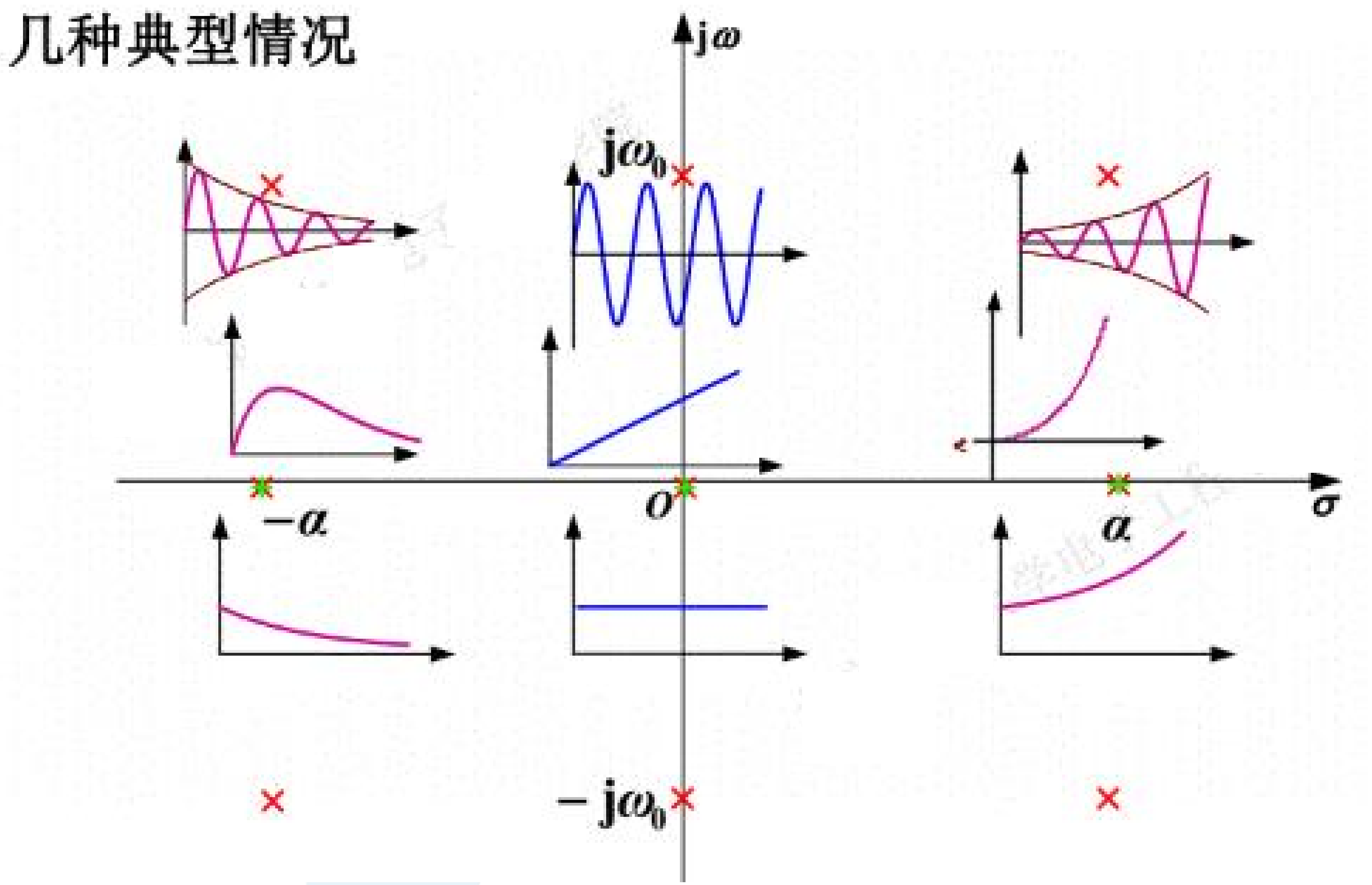
1.可以预言系统的时域特性

2.便于划分系统的各个分量（自由/强迫，瞬态/稳态）

3.可以用来说明系统的正弦稳态(sinusoidal steady-state)特性

2.零点和极点的分布与时域特性的关系

1.1 H(s)极点(pole)分布决定系统的时域(time domain)特性



2.零点和极点的分布与时域特性的关系

一阶极点(first-order pole)

$H(s)=\dfrac{1}{s}$， $p_1=0$在原点， $h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=u(t)$

$H(s)=\dfrac{1}{s+a}$， $p_1=-a$

$a>0$，在左实轴上， $h(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)$，指数衰减

$a<0$，在右实轴上， $h(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)$，$-a>0$，指数增加

$H(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$， $p_1=\mathrm{j}\omega$，在虚轴上

$h(t)=\sin\omega t\,u(t)$， 等幅振荡

$H(s)=\dfrac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$， $p_1=-\alpha+\mathrm{j}\omega$，$p_2=-\alpha-\mathrm{j}\omega$，共轭根

当$\alpha>0$，极点在左半平面，衰减振荡

当$\alpha<0$，极点在右半平面，增幅振荡

2.零点和极点的分布与时域特性的关系

二阶极点(second order pole)

$H(s)=\dfrac{1}{s^2}$,极点在原点, $h(t)=tu(t), t\to\infty, h(t)\to\infty$

$H(s)=\dfrac{1}{(s+a)^2}$,极点在实轴上,

$h(t)=te^{-at}u(t), a>0, t\to\infty, h(t)\to 0$

$H(s)=\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$,在虚轴上,

$h(t)=t\sin tu(t), t\to\infty, h(t)$ 增幅振荡

有实际物理意义的物理系统(physical system)都是因果系统(causal system)，即随t↑，h（t）→0，这表明H（s）的极点(pole)位于左半平面。

2.零点和极点的分布与时域特性的关系

1.2 由$H(s)$ 的零、极点确定系统的时域响应

激励： $e(t) \leftrightarrow E(s)$　　系统函数： $h(t) \leftrightarrow H(s)$

$$E(s)=\frac{\prod_{l=1}^{u}(s-z_l)}{\prod_{k=1}^{v}(s-p_k)}\qquad H(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

响应： $r(t) \leftrightarrow R(s)$

$$R(s)=\frac{\prod_{l=1}^{u}(s-z_l)}{\prod_{k=1}^{v}(s-p_k)}\bullet\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}\qquad R(s)=\sum_{k=1}^{v}\frac{A_k}{s-p_k}+\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s-p_i}$$

$$r(t)=L^{-1}\left[R(s)\right]=\sum_{i=1}^{n}A_i e^{p_i t}u(t)+\sum_{k=1}^{v}A_k e^{p_k t}u(t)$$

自由响应分量 ＋强制响应分量

2.零点和极点的分布与时域特性的关系

几点认识

·响应函数r（t）由两部分组成：

系统函数(system function)的极点→自由响应分量(free response component)；

激励函数(excitation function)的极点→强迫响应分量(forced response component)。

·定义系统行列式(determinant)（特征方程）的根为系统的固有频率(natural frequency)（或称“自然频率”、“自由频率”）。

H（s）的极点都是系统的固有频率；

H（s）零、极点相消时，某些固有频率将丢失。

·自由响应的极点只由系统本身的特性所决定，与激励函数的形式无关，然而系数A_i，A_k与H（s），E（s）都有关。

2.零点和极点的分布与时域特性的关系

暂态响应(transient response)和稳态响应(steady-state response)

暂态响应（瞬态响应）是指激励信号(excitation signal)接入以后，完全响应中瞬时出现的有关成分，随着增大，将消失。

稳态响应=完全响应(full response)一暂态响应

左半平面的极点产生的函数项和瞬态响应对应。

3.零点和极点的分布与频域特性的关系

二、系统函数零、极点分布与频率(frequency)特性

所谓“**频率响应特性**”是指系统在正弦信号激励下稳态响应随频率的变化情况H(jw)。

前提：稳定的因果系统(causal system)。

有实际意义的物理系统都是稳定的因果系统。

时域：

$$\lim_{t\to\infty} h(t)=0$$

频域：H（s）的全部极点(pole)落在s左半平面(left half plane)。

其收敛域包括虚轴(imaginary axis)：

拉氏变换……存在

傅里叶变换……存在

3.零点和极点的分布与频域特性的关系

H（S）和频响特性的关系

设系统函数为H（s），激励源(incentive source)e（t）=$E_m\sin(w_0 t)$

系统的稳态响应

$$r_{ss}(t)=E_m H_0 \sin(\omega_0 t+\varphi_0)$$

$$\text{其中}\ H(s)\Big|_{s=j\omega_0}=H(j\omega_0)=H_0 e^{j\varphi_0}$$

频响特性(frequency response characteristics)

$$H(s)\Big|_{s=j\omega}=H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

$|H(j\omega)|$——幅频特性

$\varphi(\omega)$——相频特性（相移特性）

3.零点和极点的分布与频域特性的关系

根据H（s）零极点(Pole-Zero)图绘制系统的频响特性曲线

$$H(\mathrm{j}\omega)=H(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}=K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}\Bigg|_{s=\mathrm{j}\omega}=K\frac{\prod_{j=1}^{m}(\mathrm{j}\omega-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{j}\omega-p_i)}$$

可见H（jw）的特性与零极点的位置(position)有关。

令分子中每一项 $\mathrm{j}\omega-z_j=N_j\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_j}$

分母中每一项 $\mathrm{j}\omega-p_i=M_i\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_i}$

将 $\mathrm{j}\omega-z_j$、$\mathrm{j}\omega-p_i$都看作两矢量之差，将矢量图画于复平面内。

3.零点和极点的分布与频域特性的关系

由矢量图(vector diagram)确定频率响应特性

$$H(\mathrm{j}\omega)=K\frac{N_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_1}N_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_2}\cdots N_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_m}}{M_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}M_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}\cdots M_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_n}}$$

$$=K\frac{N_1N_2\cdots N_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_1+\psi_2+\cdots\psi_m)}}{M_1M_2\cdots M_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2+\cdots\theta_n)}}$$

$$\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|=K\frac{N_1N_2\cdots N_m}{M_1M_2\cdots M_n}$$

$$\varphi(\omega)=(\psi_1+\psi_2+\cdots\psi_m)-(\theta_1+\theta_2+\cdots\theta_n)$$

当w沿虚轴移动时，各复数因子（矢量）的模和辐角都随之改变，于是得出幅频特性曲线(amplitude-frequency characteristic curve)和相频特性曲线(phase frequency characteristic curve)。

4.系统和反馈系统稳定性

一、系统稳定性(stability)的定义

一个系统，如果对任意的**有界输入**，其**零状态响应(zero state response)也是有界的**，则称该系统有界输入有界输出（BIBO）稳定的系统，简称稳定系统。

对所有的激励信号f(t) $$|f(t)| \le M_f$$

其响应y(t)满足 $$|y(t)| \le M_y$$

则称该系统是稳定的。式中Mf、My为有界正值

稳定系统的充分必要条件(sufficient and necessary conditions)是(绝对可积条件)：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \mathrm{d}t \le M \quad M\text{为有界正值。}$$

4.系统和反馈系统稳定性

二、系统稳定性的判定

从时域看，时域系统稳定性的判定方法(determination method)：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \mathrm{d} t < \infty$$

从复频域看，要求H（s）的极点(pole)：

①极点位于s平面的左半平面（不包括虚轴）（稳定）

②虚轴上极点是单阶的（临界稳定(critical stability)，实际不稳定）

4.系统和反馈系统稳定性

复频域系统稳定性的判定方法：

1.由H（s）的极点位置判断系统稳定性(system stability)

（1）稳定系统

若H（s）的全部极点位于s平面的**左半平面**（不包括虚轴），则可满足 $\lim_{t\to\infty} h(t)=0$ 系统是稳定的。

t-→0o

（2）不稳定系统

如果H（s）的极点位于**s右半平面**，或在虚轴上有重根（二阶或以上极点）。$\lim_{t\to\infty} h(t)\to\infty$ 系统不稳定。

（3）临界稳定系统

如果H（s）极点位于**s平面虚轴**上，且只有一阶。t→∞，h（t）为非零数值(non-zero value)或等幅振荡(constant amplitude oscillation)。

4.系统和反馈系统稳定性

2.用罗斯准则(ross criterion)（判据）判定

设n阶线性连续系统的系统函数为

$$H(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

式中 $m\le n$，a_i和b_i为实数，m、n为正整数。

$H(s)$的分母多项式为 $A(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n$

$H(s)$的极点就是 $A(s)=0$的根

系统稳定(stable)的必要条件(necessary condition)：
A（s）的全部系数同号且不缺项，则系统稳定。
如有异号或缺项，则系统肯定不稳定。

4.系统和反馈系统稳定性

系统稳定的充分必要条件——罗斯判据(Rose Criterion)（充分必要条件)

$$A(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n$$

罗斯阵列：

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & & \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
s^1 & d_1 & & & & \\
s^0 & e_1 & & & &
\end{array}$$

$$b_1=\begin{matrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{matrix}=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1}$$

$$b_2=\begin{matrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{matrix}=\frac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1}$$

$$b_i=\begin{matrix} a_0 & a_{2i} \\ a_1 & a_{2i+1} \end{matrix}=\frac{a_1a_{2i}-a_0a_{2i+1}}{a_1}$$

一直计算到这一行元素b_i等于零为止

$$c_1=\begin{matrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}=\frac{b_1a_3-a_1b_2}{b_1} \qquad c_2=\begin{matrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{matrix}=\frac{b_1a_5-a_1b_3}{b_1}$$

按此方法一直排列到最后一行元素等于零为止，共n+1行

4.系统和反馈系统稳定性

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^{n} & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \mathrm{L} \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \mathrm{L} \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & & \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & & \\
\mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \\
s^{1} & d_1 & & & & \\
s^{0} & e_1 & & & &
\end{array}
$$

罗斯判据：

系统稳定的充分必要条件是罗斯阵列中第一列元素无变号（全为正值）。

第一列元素若有n次变号（从正值到负值或从负值到正值的次数），则说明H（s）有n个极点在s平面右侧，系统不稳定。

4.系统和反馈系统稳定性

例1： $A(s)=s^5+s^4+3s^3+9s^2+16s+10$

检验系统是否稳定。

解：满足必要条件，排出罗斯阵列(routh array)：

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 3 & 16 \\
s^4 & 1 & 9 & 10 \\
s^3 & -6 & 6 & \\
s^2 & 10 & 10 & \\
s^1 & 12 & & \\
s^0 & 10 & &
\end{array}
$$

第一列元素变号2次

有2个极点(pole)在s平面右侧，系统不稳定

4.系统和反馈系统稳定性

在排列罗斯阵列(Routh array)时，有时会出现两种特殊情况

（l）第一列中出现数字为零的元素(element)

例2： $A(s)=s^4+2s^3+s^2+2s+1$ 判断系统是否稳定(stable)。

解： 排出罗斯阵列：

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 1 & 1 \\
s^3 & 2 & 2 & 0 \\
s^2 & \varepsilon & 1 & \\
s^1 & 2-\frac{2}{\varepsilon} & & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}
$$

第一列元素变号2次

有2个极点在s平面右侧，系统不稳定

4.系统和反馈系统稳定性

（2）某一行元素全部为零

例3： $A(s)=s^4+s^3+5s^2+3s+6$ **检验系统是否稳定(stable)。**

解：排出罗斯阵列：

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 5 & 6 \\
s^3 & 1 & 3 & \\
s^2 & 2 & 6 & \\
s^1 & 4 & 0 & \\
s^0 & 6 & &
\end{array}
$$

$$2S^2+6=0$$

$$\frac{d}{ds}(2S^2+6)=4S$$

第一列元素不变号

由辅助方程(auxiliary equation)解得，在s平面右侧无根，但有一对共扼虚根，系统临界稳定

谢谢聆听

Thanks for listening!