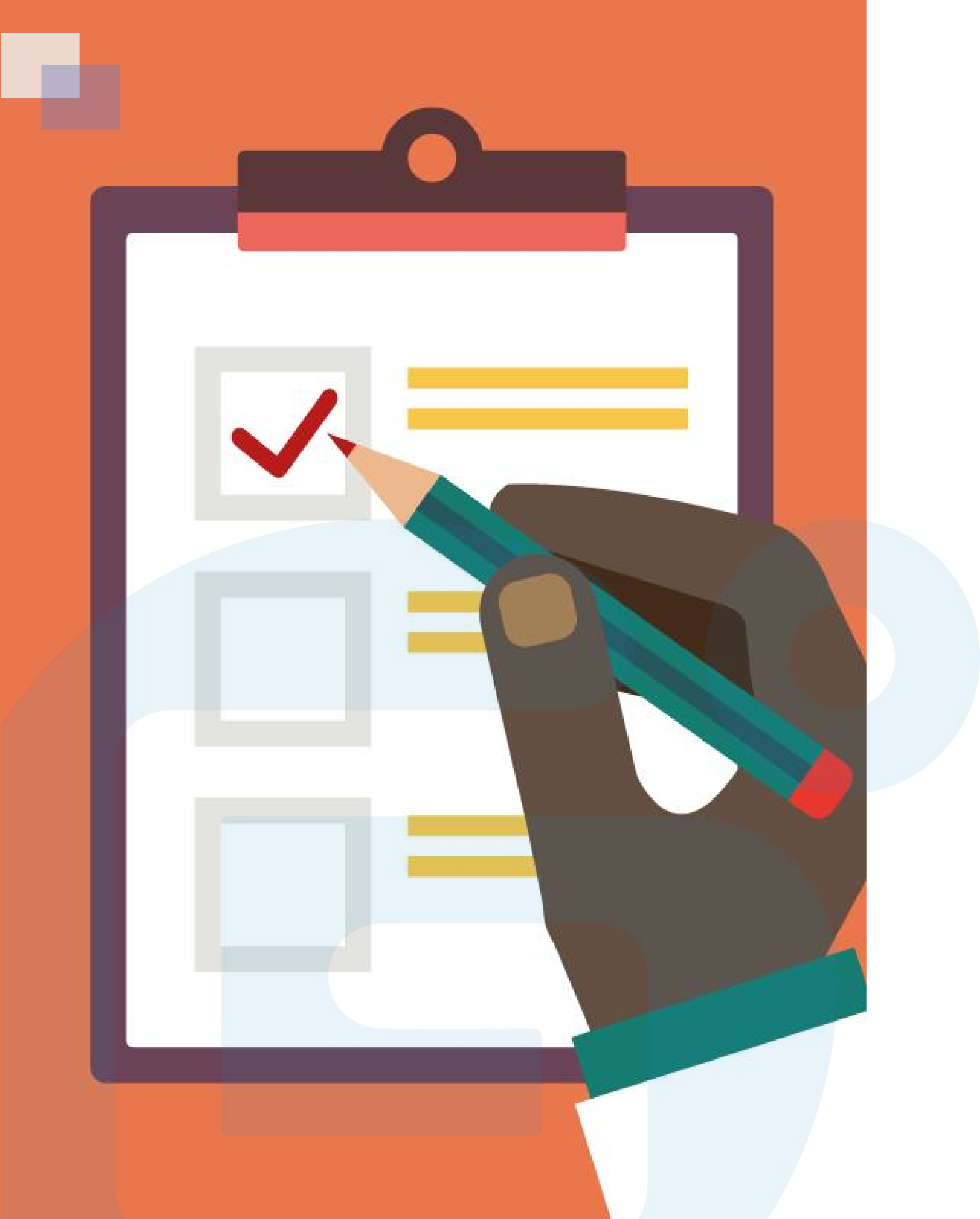
# 其他重要概念及理论



# 上课内容

- 管道流动损失
- 相似理论与量纲分析
- 速度势函数
- 平面流函数
- 势流叠加

# 管道流动损失

# 管道流动损失

- 能量损失的产生

物理性质—— 粘滞性

固体边界—— 相对运动 $\frac{du}{dy}$

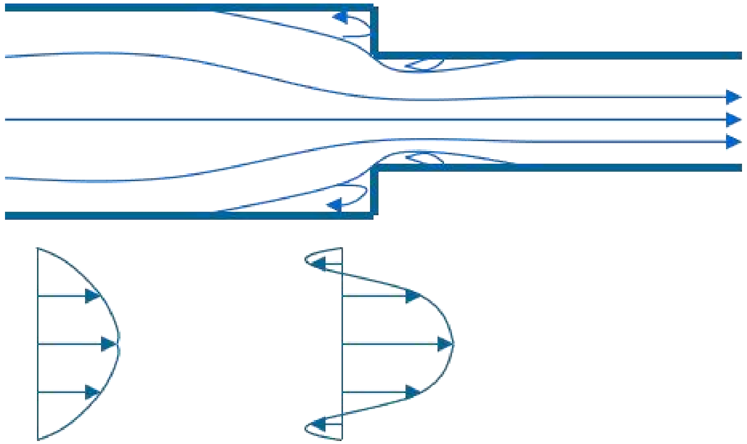
产生水流阻力 $\Rightarrow$ 损耗机械能$h_w$

# 管道流动损失

- 能量损失的分类

沿程能量损失 $h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$

局部能量损失 $h_j = \zeta \frac{v^2}{2g}$

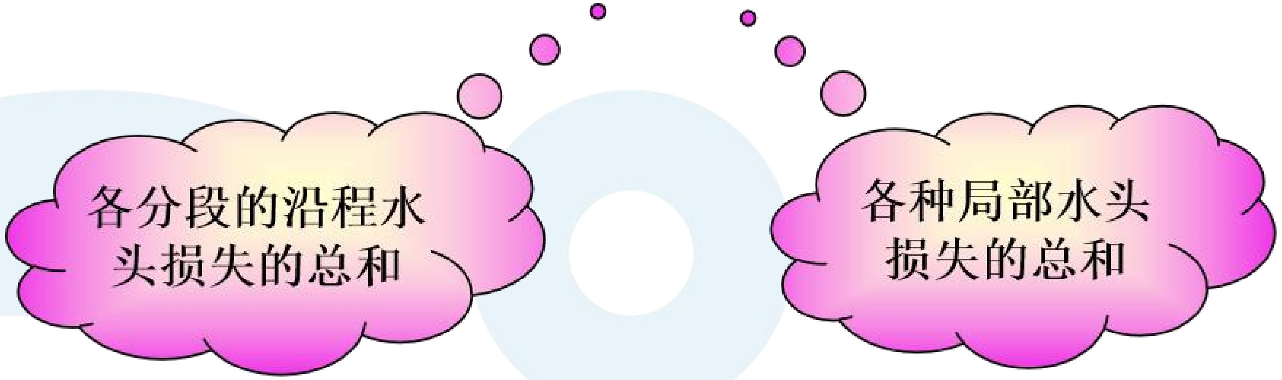


# 管道流动损失

- 流段的总能量损失

某一流段的总水头损失：

$$h_w = \sum h_f + \sum h_j$$



# 相似理论与量纲分析

# 相似理论

## A 相似概念

- 几何相似

几何相似是指原型和模型两个流场的几何形状相似，即两个流场对应的线段成比例，对应角度相等。以下标p表示原型，以下标m表示模型，l为对应的线段长度，θ为对应的角度，则

$$\left.\begin{aligned} \lambda_l &= \frac{l_p}{l_m} \\ \theta_p &= \theta_m \end{aligned}\right\}$$

式中，$\lambda_l$为长度比尺。

由此可推得相应的面积比尺$\lambda_A$和体积比尺$\lambda_V$分别为:

$$\lambda_A = \frac{A_p}{A_m} = \frac{l_p^2}{l_m^2} = \lambda_l^2$$

$$\lambda_V = \frac{V_p}{V_m} = \frac{l_p^3}{l_m^3} = \lambda_l^3$$

几何相似是力学相似的前提，只有几何相似，流场才有相应的点和相应的流动参数。

# 相似理论

- 运动相似

运动相似是指两个流体运动的速度场相似，即两个流场对应点的速度方向相同，大小成比例，即

$$\lambda_u = \frac{u_p}{u_m}$$

式中，$\lambda_u$为长度比尺。

由此可推得时间比尺$\lambda_t$、速度比尺$\lambda_u$和长度比尺$\lambda_l$之间的关系为: $\lambda_t = \frac{t_p}{t_m} = \frac{\frac{l_p}{u_p}}{\frac{l_m}{u_m}} = \frac{l_p}{l_m}\frac{u_m}{u_p} = \frac{\lambda_l}{\lambda_u}$

加速度比尺$\lambda_a$为

$$\lambda_a = \frac{a_p}{a_m} = \frac{\frac{u_p}{t_p}}{\frac{u_m}{t_m}} = \frac{\lambda_u}{\lambda_t} = \frac{\lambda_l}{\lambda_t^2}$$

# 相似理论

- 动力相似

动力相似是指原型与模型流动中各相应点上流体质点所受的同名力（具有同一力学性质的力）方向相同，大小互成比例。若分别用T、G、P、I表示黏滞力、重力、压力和惯性力，则有

$$\frac{T_p}{T_m}=\frac{G_p}{G_m}=\frac{P_p}{P_m}=\frac{I_p}{I_m}$$

$$\lambda_T=\lambda_G=\lambda_P=\lambda_I$$

流动运动相似，则速度和加速度相似。对不可压缩流体，密度可视为常数，加速度相似意味着惯性力相似，惯性力相似则其他各作用力也相似。所以，动力相似是运动相似的保证。

# 相似理论

## ● 初始条件和边界条件相似

初始条件和边界条件相似是保证两个流动相似的充分条件。

初始条件适用于非恒定流；边界条件有几何、运动、动力三方面的因素，两个流动力学相似，则其对应的边界的性质应相同，如固体边界上的法线流速为零，自由液面上的压强为大气压强，等等。初始条件、边界条件对于原型和模型来说是一样的。

# 相似理论

## B 相似准则

- **牛顿相似准则**

设作用在流体上的外力合力F使流体产生加速度a，流体质量为m，由牛顿第二定律F=ma可知，

力的比尺$\lambda_F$可表示为

$$\lambda_F=\frac{F_p}{F_m}=\frac{m_p a_p}{m_m a_m}=\frac{\rho_p V_p a_p}{\rho_m V_m a_m}=\frac{\rho_p l_p^3 \frac{l_p}{t_p^2}}{\rho_m l_m^3 \frac{l_m}{t_m^2}}=\frac{\rho_p l_p^2 u_p^2}{\rho_m l_m^2 u_m^2}$$

或

$$\frac{F_p}{\rho_p l_p^2 u_p^2}=\frac{F_m}{\rho_m l_m^2 u_m^2}$$

# 相似理论

- **黏性力相似——雷诺准则**

当作用在流体上的力主要为黏性力时，由牛顿内摩擦定律可得黏性力的计算公式为

$$F=T=\mu A\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\rho\nu A\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$$

$$\lambda_F=\lambda_T=\frac{T_p}{T_m}=\frac{\rho_p\nu_p A_p\dfrac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}y_p}}{\rho_m\nu_m A_m\dfrac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}y_m}}=\lambda_\rho\lambda_\nu\lambda_l\lambda_u$$

式中，$\lambda_\nu$为运动黏度比尺。由于仅考虑黏性力，F=T，则$\lambda_F=\lambda_T$，所以有 $\lambda_\rho\lambda_l^2\lambda_u^2=\lambda_\rho\lambda_\nu\lambda_l\lambda_u$

化简得

$$\frac{\lambda_l\lambda_u}{\lambda_\nu}=1$$

也可写为 $\dfrac{u_p l_p}{\nu_p}=\dfrac{u_m l_m}{\nu_m}$

# 相似理论

- 黏性力相似——雷诺准则

即 $(Re)_p=(Re)_m$

式中，$Re=\frac{ul}{\nu}$。

上式表明，若作用在流体上的力主要为黏性力，两个流动动力相似，则它们的雷诺数应相等，这就是雷诺准则，或称为黏性力相似准则。

# 相似理论

- 重力相似——弗劳德准则

当作用在流体上的力主要为重力时，有

$$F=G=mg=\rho l^3 g$$

$$\lambda_F=\lambda_G=\lambda_\rho\lambda_l^3\lambda_g$$

由于仅考虑重力，F=G，则$\lambda_F=\lambda_G$，所以有 $\lambda_\rho\lambda_l^2\lambda_u^2=\lambda_\rho\lambda_l^3\lambda_g$

化简得 $\dfrac{\lambda_u^2}{\lambda_l\lambda_g}=1$

也可写成

$$\frac{u_p^2}{g_p l_p}=\frac{u_m^2}{g_m l_m}$$

# 相似理论

- 压力相似——欧拉准则

当作用在流体上的力主要为压力时，有

$$F=P=pA$$

$$\lambda_F=\lambda_P=\lambda_p\lambda_l^2$$

式中，$\lambda_p$为压强比尺。

由于仅考虑压力，F=P，则$\lambda_F=\lambda_P$，所以有 $\lambda_\rho\lambda_l^2\lambda_u^2=\lambda_p\lambda_l^2$

化简得 $\dfrac{\lambda_p}{\lambda_\rho\lambda_u^2}=1$

也可写成 $\dfrac{p_p}{\rho_p u_p^2}=\dfrac{p_m}{\rho_m u_m^2}$

# 相似理论

- 表面张力相似——韦伯准则

当作用在流体上的力主要为表面张力时，有

$$F=S=\sigma l$$

$$\lambda_F=\lambda_S=\lambda_\sigma\lambda_l$$

式中，$\lambda_\sigma$为表面张力比尺。

由于仅考虑表面张力，F=S，则$\lambda_F=\lambda_S$，所以有 $\lambda_\rho\lambda_l^2\lambda_u^2=\lambda_\sigma\lambda_l$

化简得 $$\frac{\lambda_\rho\lambda_l\lambda_u^2}{\lambda_\sigma}=1$$

也可写成 $$\frac{\rho_p l_p u_p^2}{\sigma_p}=\frac{\rho_m l_m u_m^2}{\sigma_m}$$

# 量纲分析

## A 单位和量纲

- **单位**

单位是度量各种物理量数值大小的标准，如长度l的单位有mm、cm、m等，时间 t的单位有s、min、h等，质量m的单位有g、kg、t等。度量同一物理量采用的单位不同，数值也就不同。例如，1 000 g重的物体可以用1 kg来表示，也可以用0.001 t来表示。所以，单位决定了量度的数量。

- **量纲**

量纲表征物理量的属性和类别，又称为因次，用符号dim表示。例如，mm、cm、m是长度的不同单位，但它们属于同一类别，皆为长度单位，它们的量纲为L；s、min、h同属于时间单位，其量纲为T；g、kg、t同属于质量单位，其量纲为M。所以，量纲决定了量度的性质。导出量纲可以用基本量纲的指数乘积形式来表示，即 $\dim x = L^{\alpha} T^{\beta} M^{\gamma}$

# 量纲分析

- 量纲

上式称为量纲公式，物理量x的性质由量纲指数α、β、γ所决定。按照指数α、β、γ的值的不同，可以将物理量分为以下三类：

（1）$\alpha\neq0$，$\beta=0$，$\gamma=0$时，x为几何学量。

（2）$\alpha\neq0$，$\beta\neq0$，$\gamma=0$时，x为运动学量。

（3）$\alpha\neq0$，$\beta\neq0$，$\gamma\neq0$时，x为动力学量。

流体力学中常用的各种物理量的量纲和单位见下表。

# 量纲分析

- 量纲

表 5-1　流体力学中常用的各种物理量的量纲和单位

| 类　别 | 物理量 | 量　纲 | 单　位 |
|---|---|---|---|
| 几何学量 | 长度 $l$ | $L$ | m |
| | 面积 $A$ | $L^2$ | $m^2$ |
| | 体积 $V$ | $L^3$ | $m^3$ |
| | 水头 $H$ | $L$ | m |
| | 面积矩 $I$ | $L^4$ | $m^4$ |
| 运动学量 | 时间 $t$ | $T$ | s |
| | 流速 $u$ | $LT^{-1}$ | m/s |
| | 加速度 $a$ | $LT^{-2}$ | $m/s^2$ |
| | 重力加速度 $g$ | $LT^{-2}$ | $m/s^2$ |
| | 角速度 $\omega$ | $T^{-1}$ | rad/s |
| | 流量 $Q$ | $L^3T^{-1}$ | $m^3/s$ |
| | 单宽流量 $q$ | $L^2T^{-1}$ | $m^2/s$ |
| | 环量 $\Gamma$ | $L^2T^{-1}$ | $m^2/s$ |
| | 流函数 $\psi$ | $L^2T^{-1}$ | $m^2/s$ |
| | 速度势 $\phi$ | $L^2T^{-1}$ | $m^2/s$ |
| | 运动黏度 $\nu$ | $L^2T^{-1}$ | $m^2/s$ |

# 量纲分析

- 量纲

续表

| 类　　别 | 物 理 量 | 量　　纲 | 单　　位 |
|---|---|---|---|
| 动力学量 | 质量 $m$ | $M$ | kg |
| | 力 $F$ | $MLT^{-2}$ | N |
| | 密度 $\rho$ | $ML^{-3}$ | $kg/m^3$ |
| | 动力黏度 $\mu$ | $ML^{-1}T^{-1}$ | Pa·s |
| | 压强 $p$ | $ML^{-1}T^{-2}$ | Pa |
| | 切应力 $\tau$ | $ML^{-1}T^{-2}$ | Pa |
| | 弹性模量 $E$ | $ML^{-1}T^{-2}$ | Pa |
| 动力学量 | 表面张力 $\sigma$ | $MT^{-2}$ | N/m |
| | 动量 $p$ | $MLT^{-1}$ | kg·m/s |
| | 功、能 $W$ | $ML^2T^{-2}$ | J=N·m |
| | 功率 $P$ | $ML^2T^{-3}$ | W |

# 量纲分析

- 量纲

当式 $\dim x = L^{\alpha} T^{\beta} M^{\gamma}$ 中各指数均为零（α=0，β=0，γ=0）时，有

$$\dim x = L^0 T^0 M^0 = 1$$

式中，x为无量纲数（量），也称为量纲为1的数（量）或纯数。无量纲数既可由同类量的比值组成，也可由几个有量纲的量通过乘除组合而成。无量纲数具有以下两个主要特点：

- ✓ 无量纲量的数值大小与计算所采用的单位制无关。
- ✓ 无量纲量可以参与指数、对数、三角函数等超越函数的运算。

# 量纲分析

B 量纲和谐原理

自然界中的一切物理过程都可以用物理方程来表示。任何一个正确反映客观规律的物理方程，其各项的量纲都必须是一致的，也就是说，只有相同量纲的量才能进行加减运算，这就是量纲和谐原理（或称为量纲一致性）。这一原理被无数事实证明。

- 瑞利法

瑞利法是量纲和谐原理的直接应用。瑞利法计算的一般步骤如下：

（1）确定与所研究的物理过程有关的n个物理量，即 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$

（2）写出各物理量之间的指数乘积形式，即 $x_i = k x_1^a x_2^b \cdots x_{n-1}^m$

（3）根据量纲和谐原理，等式两端的量纲应该相同，即 $\dim x_i = k\dim(x_1^a x_2^b \cdots x_{n-1}^m)$

由此可确定物理量的指数a，b，…，m，代入指数方程式得到各物理量之间的方程式。式中的系数需要通过实验和分析加以确定。

# 量纲分析

- π定理

π定理的基本内容是：对于某个物理现象，如果存在n个变量互为函数，即 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 而这些变量中含有m个基本物理量，则这个物理过程可以用由n个物理量组成的（n-m）个无量纲量的函数关系来描述，这些无量纲量用π来表示，即（2）写出各物理量之间的指数乘积形式，即 $F(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{n-m})=0$

π定理的解题步骤如下：

（1）根据对所研究物理过程的认识，确定影响物理过程的各个物理量及其关系式。

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$$

（2）从n个物理量中选取m个相互独立的基本物理量作为基本量纲。对于不可压缩流体流动，一般取m=3。设$x_1$、$x_2$、$x_3$为所选的基本物理量，由量纲公式可得

$$\dim x_1=L^{\alpha_1}T^{\beta_1}M^{\gamma_1}$$
$$\dim x_2=L^{\alpha_2}T^{\beta_2}M^{\gamma_2}$$
$$\dim x_3=L^{\alpha_3}T^{\beta_3}M^{\gamma_3}$$

# 量纲分析

- π定理

满足基本量纲独立的条件是量纲式中的指数行列式不等于零，即 $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$

（3）写出n个基本物理量与其余（n-m）个物理量组成的π表达式。

$$\pi_1 = \frac{x_4}{x_1^{a_1} x_2^{b_1} x_3^{c_1}}$$

$$\pi_2 = \frac{x_5}{x_1^{a_2} x_2^{b_2} x_3^{c_2}}$$

$$\cdots$$

$$\pi_{n-3} = \frac{x_n}{x_1^{a_{n-3}} x_2^{b_{n-3}} x_3^{c_{n-3}}}$$

式中，$a_i$、$b_i$、$c_i$为各π项的待定系数。

# 量纲分析

- π定理

（4）由量纲和谐原理解联立指数方程，求出各π项的指数ai、$b_i$、$c_i$，从而确定各无量纲π参数。

（5）写出描述该物理过程的关系式为

$$F(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-3})=0$$

或先解一个π参数，如

$$\pi_4=F(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_{n-4})$$

# 速度势函数

# 速度势函数

- 速度势函数

任何无旋流的流速场都存在势函数 $\phi=\phi(x,y,z)$，对于势流来说，有

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=u_x,\frac{\partial\phi}{\partial y}=u_y,\frac{\partial\phi}{\partial z}=u_z$$

所以速度势函数可表达成下列积分

$$\phi(x,y,z)=\int(u_x\mathrm{d}x+u_y\mathrm{d}y+u_z\mathrm{d}z)$$

将势函数相等的点连成一条曲线，此曲线称为等势线。其方程为

$$\phi(x,y,z)=\text{常数}$$

给出不同的常数值，可在势流场内得到一簇等势线。因为等势线方程满足　所以若已知流速场，则等势线方程也可写为 $\int(u_x\mathrm{d}x+u_y\mathrm{d}y+u_z\mathrm{d}z)=\text{常数}$

# 速度势函数

将上式代入连续性微分方程 $\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$，可得

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=0$$

上式即为不可压缩均质理想流体恒定势流的基本方程，在数学上称为拉普拉斯方程。凡是满足拉普拉斯方程的函数都称为调和函数，所以速度势函数是调和函数。上式可以写成

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=\nabla^2 \phi$$

求解拉普拉斯方程的方法有四种：解析法、图解法、实验法和数值计算法。在计算机没有得到普遍应用时，图解法在工程计算中是一种常用的方法。因为图解法不需要复杂的数学理论，简单易行，形象直观。

# 平面流函数

# 平面流函数

- 平面流函数

对于平面流动来讲，流线的微分方程为 $\frac{dx}{u_x}=\frac{dy}{u_y}$

或为 $-u_y dx+u_x dy=0$ (4-1)

当

$$\frac{\partial(-u_y)}{\partial y}=\frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad (4\text{-}2)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0$$

上式即为平面不可压缩液体的连续性微分方程。由高等数学可知，式（4-2）是使式（4-1）左边写成某一函数全微分的充分必要条件，令此函数为ψ(x,y)，此函数称为流函数，则有

$$d\psi=-u_y dx+u_x dy \qquad (4\text{-}3)$$

# 平面流函数

因为存在 $d\psi=\frac{\partial \psi}{\partial x}dx+\frac{\partial \psi}{\partial y}dy$ （4-4）

比较式（4-3）和式（4-4），可得流速场与流函数的关系为

$$\left.\begin{aligned} u_x&=\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y&=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}5)$$

由此可知，流函数存在的充分必要条件是不可压缩液体的连续性微分方程，所以，不可压缩液体做平面运动时会有流函数存在。

# 平面流函数

流函数的性质如下

（1）同一条流线上各点的流函数值相等。由流函数相等的点组成的线是流线， 由于同一流线上$\psi(x,y)$=常数，故$d\psi=0$。由$d\psi=-u_y dx+u_x dy$可知，在同一流线上也满足$-u_y dx+u_x$，$dy=0$，该式就是流线微分方程。由此可知，当流函数已知时，流线方程为$\psi(x,y)=C$，不同的常数代表不同的流线。如果流速已知，流线方程也可以通过积分求得。

（2）任意两条流线间的流函数值的差等于该两条流线所通过的单宽流量。设在平面流场中有两条流线，它们的流函数值如图3-1所示。因为是平面问题，在z轴方向取一个单位长度，所以两条流线间所通过的流量即为单宽流量。在两条流线间取单宽的微小过流断面AB的面积为dA，速度为u，则通过的流量为$dq=udA$

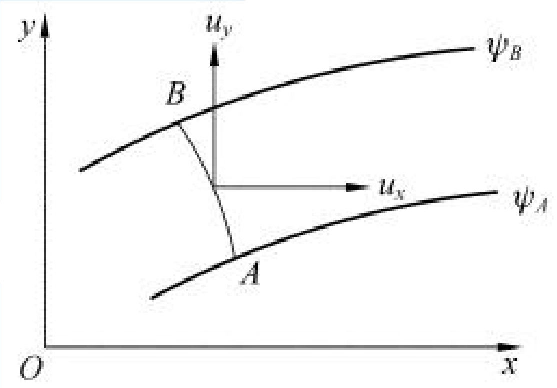
# 平面流函数

将速度与面积分别投影到x，y方向上，得$dq=udA=(u_x\cos\alpha+u_y\sin\alpha)dA=u_xdy-u_ydx$

由式（4-3）可知dq=dψ，所以通过两条流线间的单宽流量为

$$q=\int_B^A dq=\int_B^A d\psi=\psi_A-\psi_B$$

由此得出结论：任意两条流线之间所通过的单宽流量等于该两条流线的流函数值之差。




流线的流函数值

# 平面流函数

（3）平面势流的流函数是调和函数。当平面流动为势流时，满足旋转角速度分量$\omega_z=0$，即

$$\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}=0$$

将式（4-5）代入上式可得

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=0 \qquad (4\text{-}6)$$

式（4-6）为拉普拉斯方程，所以平面势流的流函数是一个调和函数。

将式（4-6）与速度势的流场相对比可知

$$\left.\begin{aligned} u_x&=\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial y}\\ u_y&=\frac{\partial \phi}{\partial y}=-\frac{\partial \psi}{\partial x}\end{aligned}\right\}$$

# 势流叠加

# 势流叠加

## A 均匀流

流速是常数，流线顺直且平行的流场是最简单的平面流动，这种流动称为均匀流。如图1（a）所示，沿x正方向的均匀流，$u_x=u$，$u_y=0$，速度势函数的各项表示为

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=u,\frac{\partial\phi}{\partial y}=0$$

上述两方程积分为

$$\phi=ux+C$$

式中，C为任意常数，当C等于零时，沿x正方向的均匀流表示为 $\phi=ux$

对应的流函数表示为

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=u,\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$$

因此 $\psi=uy$

如图1（b）所示，与x方向成α角的均匀流的速度势函数和流函数分别为

# 势流叠加

$$\phi = u(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$$

$$\psi = u(y\cos\alpha - x\sin\alpha)$$

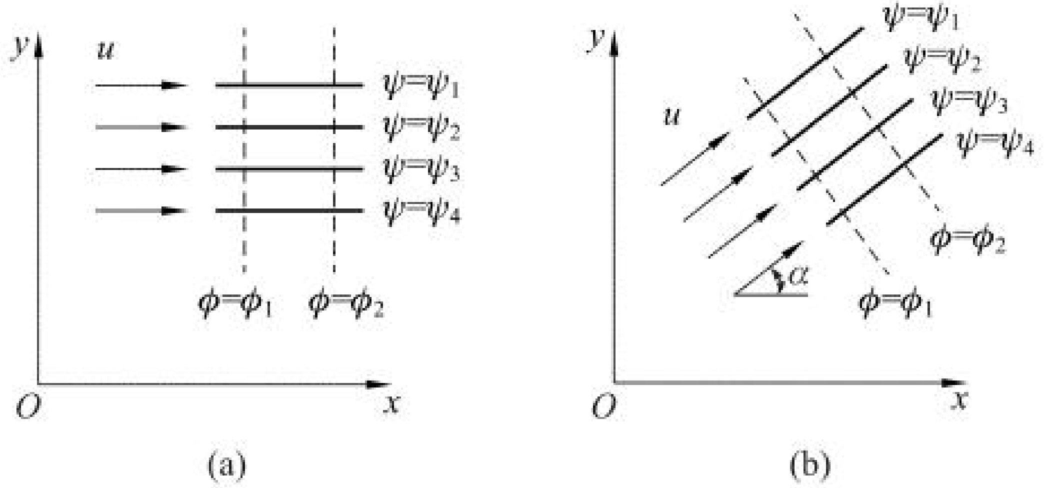



图1 均匀流

# 势流叠加

B 源流与汇流

- 源流

设水平的无限平面内，流体从某一点沿径向直线均匀地向各方流出（见图3-3），这种流动称为源流，如泉眼向各方向的流动，在某种情况下离心式水泵叶轮内的流体运动，等等。假设q（单位长度）为该流动流出的流量，根据质量守恒定律，可得源流的径向速度表达式为

$$2\pi r u_r = q$$

或

$$u_r = \frac{q}{2\pi r}$$

因为流动是纯径向流，$u_\theta=0$，其对应的速度势函数通过积分下列方程得出。

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{q}{2\pi r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = 0$$

速度势函数为 $\phi = \frac{q}{2\pi}\ln r$ （4-5）

# 势流叠加

同理，通过积分下式可以得到流函数。

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{q}{2\pi r},\frac{\partial\psi}{\partial r}=0$$

流函数为

$$\psi=\frac{q}{2\pi}\theta \qquad （4\text{-}6）$$

式（4-6）表明流线是径向线，式（4-5）表明等势线为一组同心圆。

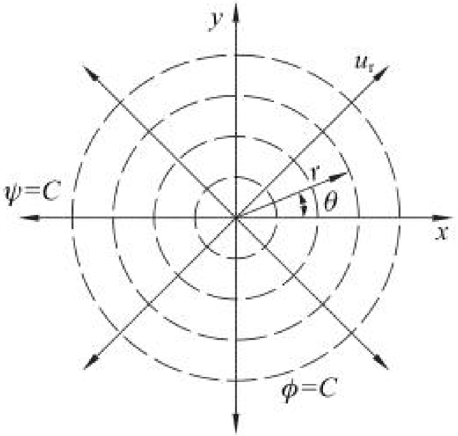



**图2 点源流动**

# 势流叠加

- 汇流

流体沿径向直线均匀地向某一点流入，与图2中的源流方向相反，这种流动称为汇流，如地下水向井中的流动。汇流的径向速度、速度势函数、流函数的表达式和源流相同，但符号相反，即

$$u_r = -\frac{q}{2\pi r}, u_\theta = 0$$

$$\phi = -\frac{q}{2\pi}\ln r$$

$$\psi = -\frac{q}{2\pi}\theta$$

式中，流量q表示源流和汇流的强度。

# 势流叠加

- **势流叠加原理——以源流和均匀流的叠加为例**

势流的一个重要特性是可叠加性。由几个简单势流叠加组合而成的较为复杂的流动仍为势流，它的速度势函数和流函数分别等于被叠加势流的速度势函数 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ 和流函数$\psi_1$，$\psi_2,\ldots,\psi_n$的代数和，且满足拉普拉斯方程，即

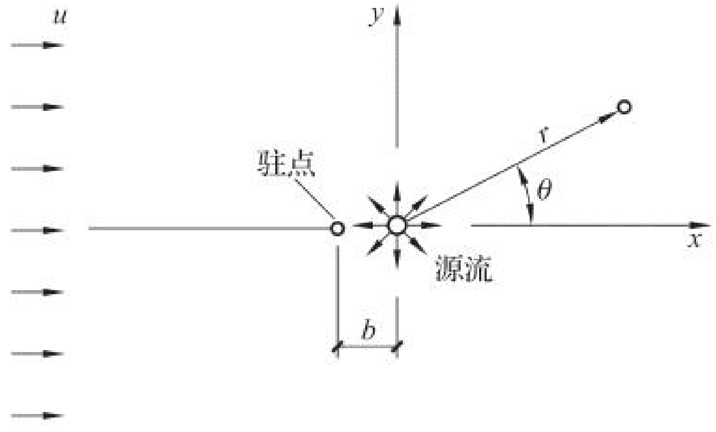
$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_n$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_n$$

它的速度等于被叠加势流的速度$u_1,u_2,\ldots,u_n$的矢量和，即 $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

如图3所示，一个源流和一个均匀流叠加，叠加后的流函数表示为

$$\psi = \psi_{均匀流} + \psi_{源流} = ur\sin\theta + \frac{q}{2\pi}\theta$$




源流和均匀流的叠加

谢谢！