




流体静力学


上课内容

- 流体的平衡状态
 - 流体的静压强及其特性
 - 流体平衡微分方程式
 - 流体静力学基本方程式
 - 流体的相对平衡
-





流体的平衡状态



流体的平衡状态

- 研究流体平衡的条件及压强分布规律
- 研究流体与固体间的相互作用及其工程应用



在研究流体平衡时，通常将地球选作惯性坐标系

静止或平衡状态： 流体相对于地球没有运动

相对静止或相对平衡平衡状态： 流体相对于非惯性坐标系没有运动



流体的静压强及其特性



流体的静压强及其特性

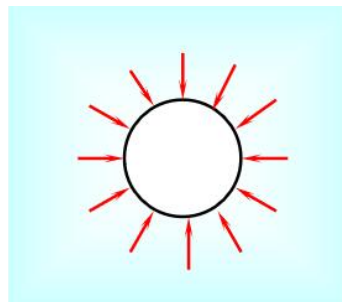
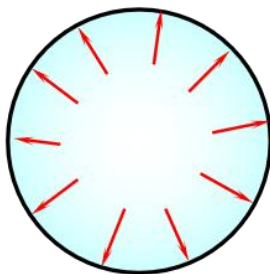
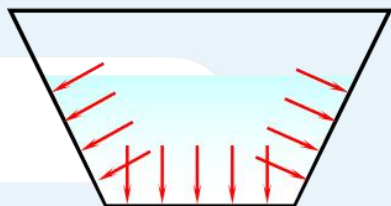
- 流体静压强 (Hydrostatic pressure)

当流体处于静止或相对静止状态时，作用在流体上的力只有法向应力，没有切向应力。此时的法向应力就是作用面内法线方向的静压强。用符号 p 表示，单位为Pa。

$$p_m = \frac{dF_n}{dA} = -pn$$

- 流体静压强的特性

- ✓ 流体静压强的方向沿作用面的内法线方向



流体的静压强及其特性

● 流体静压强的特性

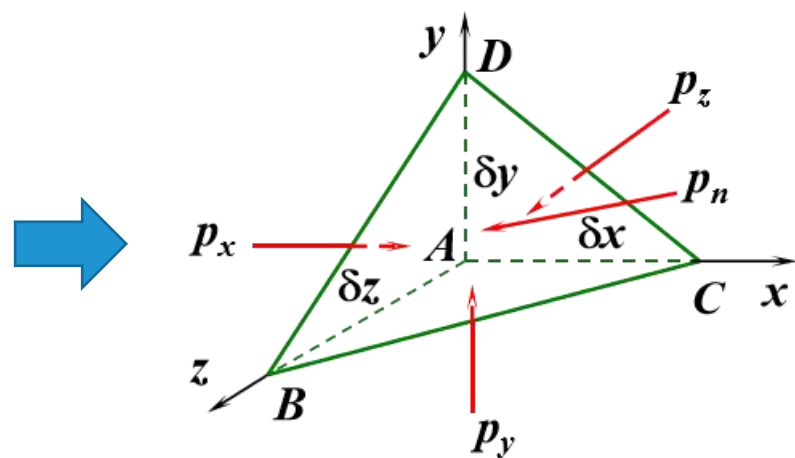
- ✓ 静止流体中任一点流体静压强的大小与作用面在空间的方位无关，是点的坐标的连续可微

函数

如图所示，在静止流体中的点A取一微元四面体，与坐标轴相重合的边长分别为 δx 、 δy 、 δz ，三角形 $\triangle BCD$ 的面积设为 S ，各微小平面中心点上的压强分别为 p_x 、 p_y 、 p_z ，单位质量力在三个坐标轴方向上的投影分别为 f_x 、 f_y 、 f_z 。

由于流体静止，则作用在四面体上的力平衡，即：

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$



流体静压强的特性:

以x坐标轴方向为例，作用在四面体上的力在x方向上的平衡方程为：

$$p_x \frac{1}{2} \delta y \delta z + f_x \rho \frac{1}{6} \delta x \delta y \delta z - p_n S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) = 0$$

因为：

$$S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) = \frac{1}{2} \delta y \delta z$$

故上式简化为： $p_x + f_x \rho \frac{1}{3} \delta x - p_n = 0$

让四面体无限缩小到点A，上式第二项为无穷小，可以略去，故得：

$$p_x = p_n$$

同理：

$$p_y = p_n$$

$$p_z = p_n$$

即：

$$p_x = p_y = p_z = p_n$$

可见，在静止流体中任一点上任意方向的压强相等，是空间坐标的连续函数，即： $p = p(x, y, z)$



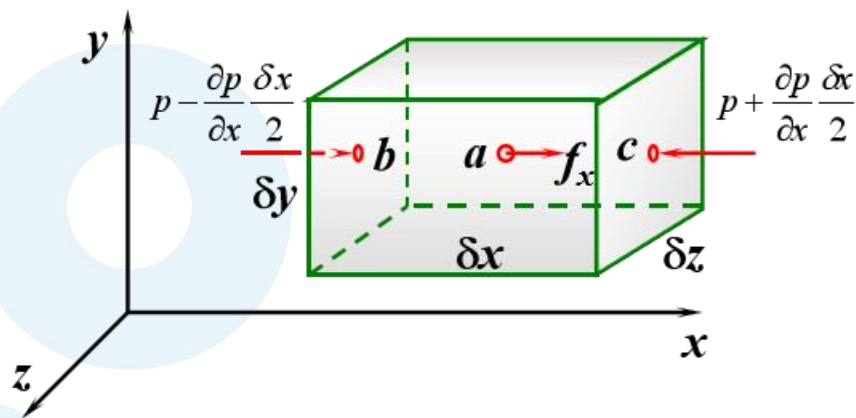
流体平衡微分方程式



流体平衡微分方程式

- 流体平衡微分方程式 (Fluid equilibrium differential equation)

在静止流体中取一边长分别为 δx 、 δy 、 δz 的微小立方体，中心点为 $a(x, y, z)$ ，该点的密度为 ρ ，静压强为 p 。



作用在立方体上的力在 x 方向的平衡方程为：

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z + \rho f_x \delta x \delta y \delta z = 0$$

流体平衡微分方程式

以微小立方体的质量 $\rho\delta x\delta y\delta z$ 除以上式，得a点在x方向的平衡方程：

$$\left. \begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

该方程对不可压缩流体
和可压缩流体的静止和
相对静止状态都适用，
是流体力学的基本方程。

写成矢量形式：
$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p = 0$$

上式即为流体平衡微分方程，又称为欧拉平衡微分方程（Euler equilibrium equation）。该式的物理意

义为：在静止流体内的任一点上，作用在单位质量流体上的质量力与静压强的合力相平衡。

流体平衡微分方程式

- 压强差公式和等压面

压强差公式 (Pressure difference formula)

将流体平衡微分方程的两端分别乘以 dx 、 dy 、 dz ，然后相加，得：

$$\rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz) = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

即：

$$dp = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz)$$

压强差公式，表明
流体静压强的增量
取决于单位质量力
和坐标增量。

流体平衡微分方程式

等压面 (Isobaric surface)

在流场中压强相等的点组成的面, $dp=0$, $p(x,y,z)=const$ 。

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0$$

写成矢量形式: $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$

等压面的微分方程, 表明在静止的流体中作用于任一点的质量力垂直于经过该点的等压面。



流体静力学基本方 程式



流体静力学基本方程式

- 流体静力学基本方程式 (Basic equation of immobile fluid)

在重力场中，单位质量力只有重力，即：

$$f_x = 0, f_y = 0, f_z = -g$$

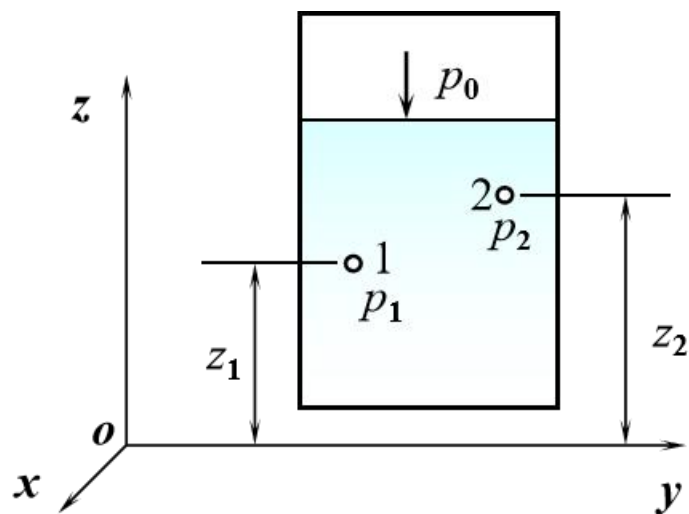
代入压力差公式得： $dp = -\rho g dz$

积分得： $p = -\rho g z + C$

方程两边同除以 ρg ，得： $z + \frac{p}{\rho g} = C'$

如图所示，上式可写成：

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$



流体静力学基本方程式，
适用于重力作用下静止
的不可压缩流体。

流体静力学基本方程式

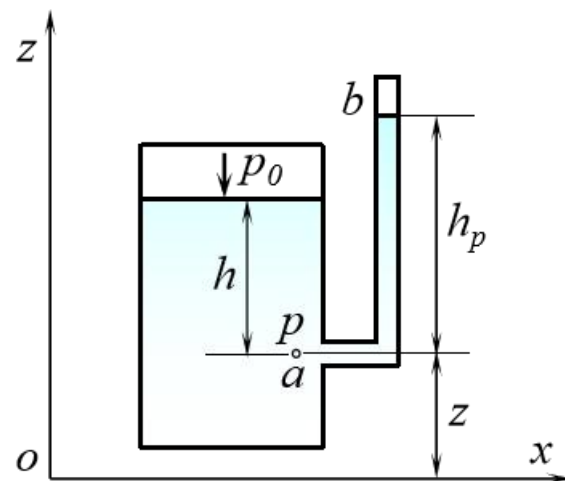
● 流体静力学基本方程式的物理意义

z ——单位重量流体的位置势能

$p/(\rho g)$ ——单位重量流体的压强势能

$z+p/(\rho g)$ ——单位重量流体的总势能

方程的物理意义是：在重力作用下，静止的不可压缩流体中单位重量流体的总势能保持不变。



如图所示，玻璃管上端抽真空，对于a点和b点，流体力学基本方程式为：

$$z + \frac{p}{\rho g} = z + h_p \Rightarrow h_p = \frac{p}{\rho g}$$

即a点与真空的压强差对单位重量流体做的功变成了单位重量流体的位置势能。

流体静力学基本方程式

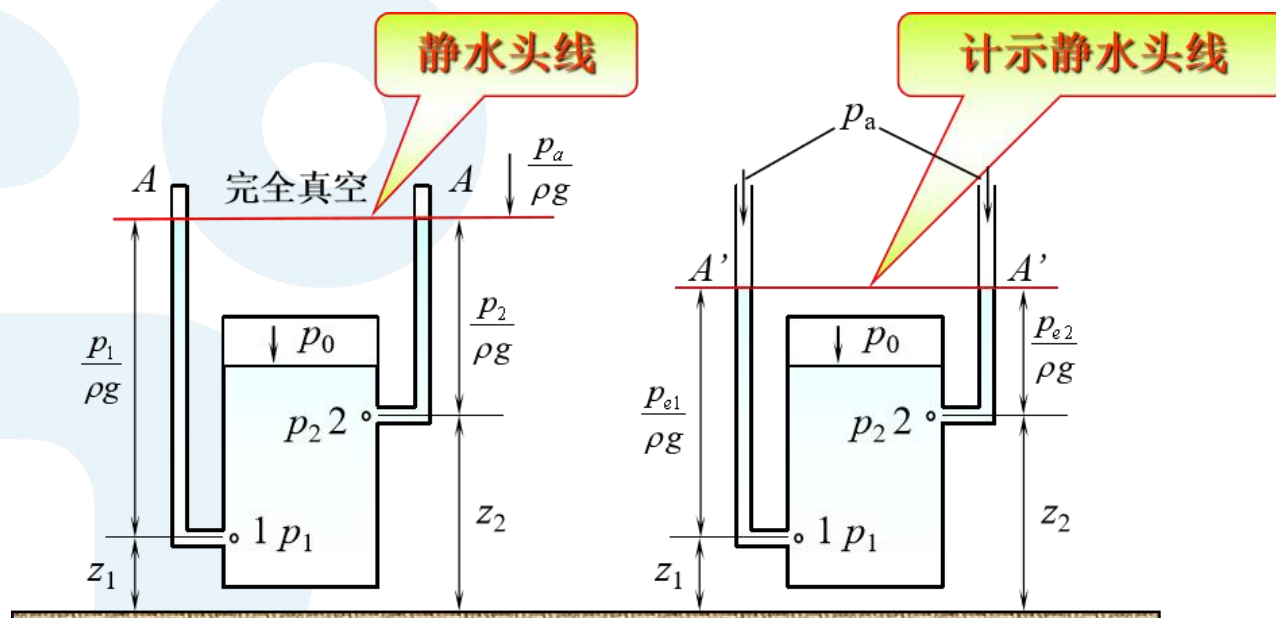
- 流体静力学基本方程式的几何意义

水头 (waterhead)： 单位重量流体的势能具有长度的单位，可以用液柱高度来表示。

z ——位置水头

$p/(\rho g)$ ——压强水头

$z + p/(\rho g)$ ——静水头



流体静力学基本方程式

● 重力作用下静止液体内的静压力分布

在重力场中，单位质量力只有重力，即： $f_x = 0$ ， $f_y = 0$ ， $f_z = -g$

代入压力差公式积分得： $p = -\rho g z + C$

积分常数根据自由表面上的边界条件确定：

$$z = z_0, p = p_0 \Rightarrow C = p_0 + \rho g z_0$$

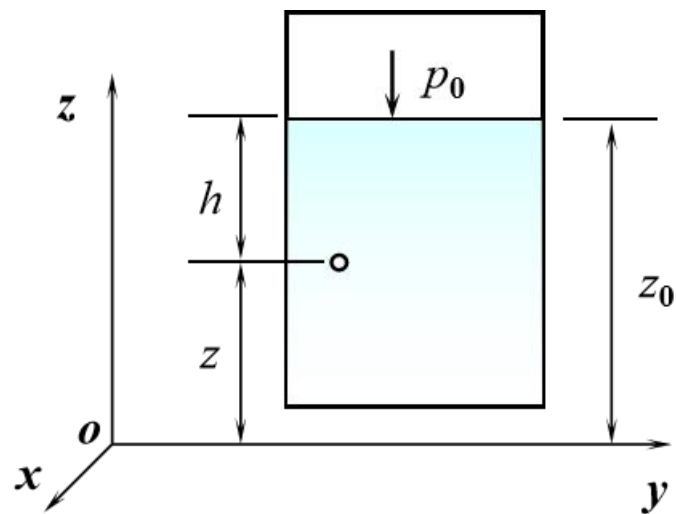
所以任意坐标 z 处的压强为： $p = p_0 + \rho g (z_0 - z) = p_0 + \rho g h$

帕斯卡原理：自由液面上的压强将以同样的大小传递到液体内部的任意点上

在重力作用下静止有自由表面的不可压缩流体中，静压强（Static pressure）由两部分组成：

➤ 自由表面上的压强 p_0

➤ 淹没深度为 h 、密度为 ρ 的流体柱产生的压强 $\rho g h$



流体静力学基本方程式

- 绝对压强 (Absolute pressure)、计示压强 (Indicated pressure)、真空和真空度

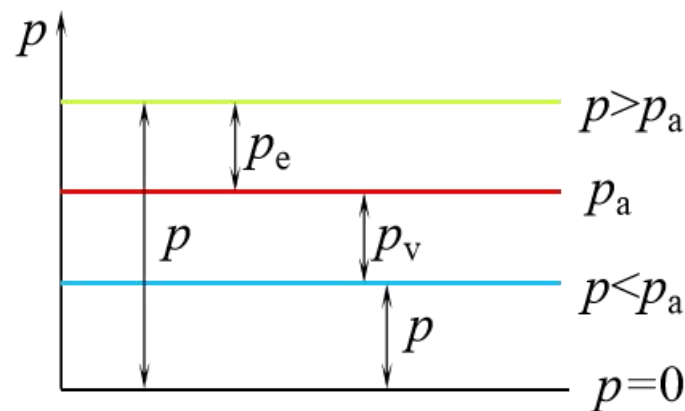
绝对压强 以完全真空为基准计量的压强，如 $p=p_a+\rho gh$ 中的 p 。

计示压强 (相对压强) 以当地大气压强为基准计量的压强，如 $p_e=p-p_a=\rho gh$ 中的 p_e 。

真空 当流体的绝对压强低于大气压强时，该区域处于真空。

真空度 计示压强为负值时，负计示压强用真空度表示，即：

$$p_v = -p_e = p_a - p$$





流体的相对平衡



流体的相对平衡

A 水平等加速直线运动容器中液体的相对平衡

流体静压强的分布规律

单位质量液体上的质量力沿坐标轴的分量为：

$$f_x = 0, \quad f_y = -a, \quad f_z = -g$$

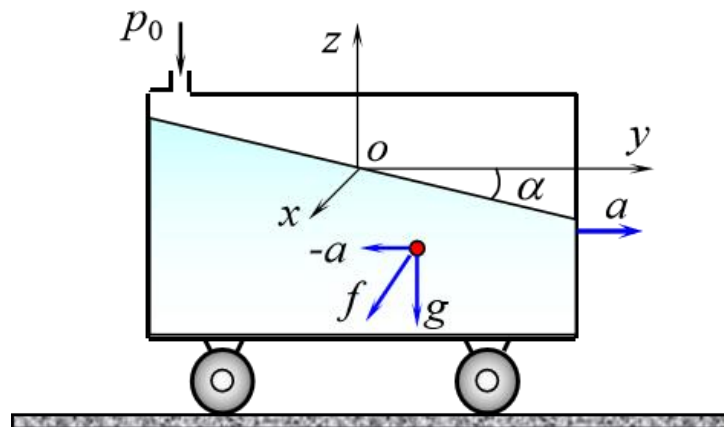
代入压力差公式得： $dp = \rho(-a dy - g dz)$

积分得： $p = -\rho(ay + gz) + C$

根据边界条件： $x=0, y=0, z=0$ 时 $p=p_0$ ，代入上式得积分常数 $C=p_0$ ，故有：

$$p = p_0 - \rho(ay + gz)$$

水平等加速直线运动容器
中液体静压强的分布规律



流体的相对平衡

等压面方程 (Isobaric surface equation)

将质量力代入等压面方程得: $-ady - gdz = 0$

积分得: $ay + gz = C_1$

等压面与水平面之间的夹角为: $\alpha = -\arctan \frac{a}{g}$

以 (x_s, y_s, z_s) 表示自由液面上点的坐标, 由于在自由液面上的任意一点都有 $p=p_0$, 所以由静压强的分布规律可得自由液面的方程为:

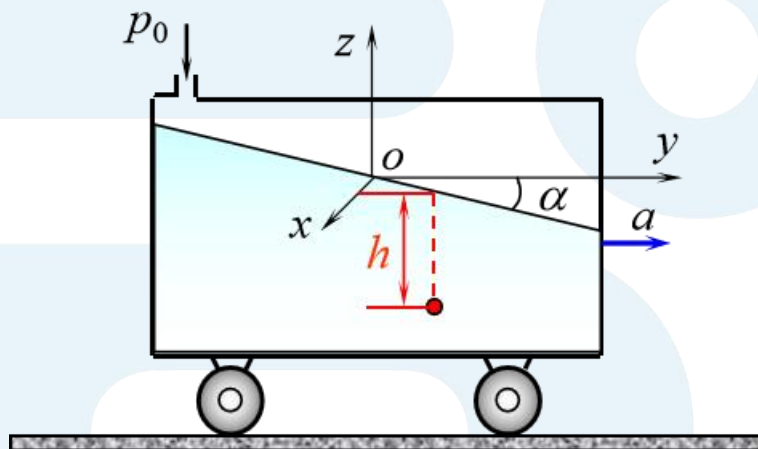
$$ay_s + gz_s = 0$$

流体的相对平衡

如果 y 坐标都相同，对于液面内任意一点，有： $y = y_s = -\frac{g}{a} z_s$

将上式代入静压强分布规律得：

$$p = p_0 + \rho g(z_s - z) = p_0 + \rho gh$$



等加速直线运动容器中，液体内任一点的静压强仍然是液面上的压强 p_0 与淹没深度为 h 密度为 ρ 的液柱产生的压强 ρgh 之和。

流体的相对平衡

B 等角速旋转容器中液体的相对平衡 (Relative Equilibrium of Liquid in Constant Angular

Velocity Rotating Vessel)

流体静压强的分布规律

作用在半径为 r 处的液体质点上的单位质量力沿坐标轴的分量为：

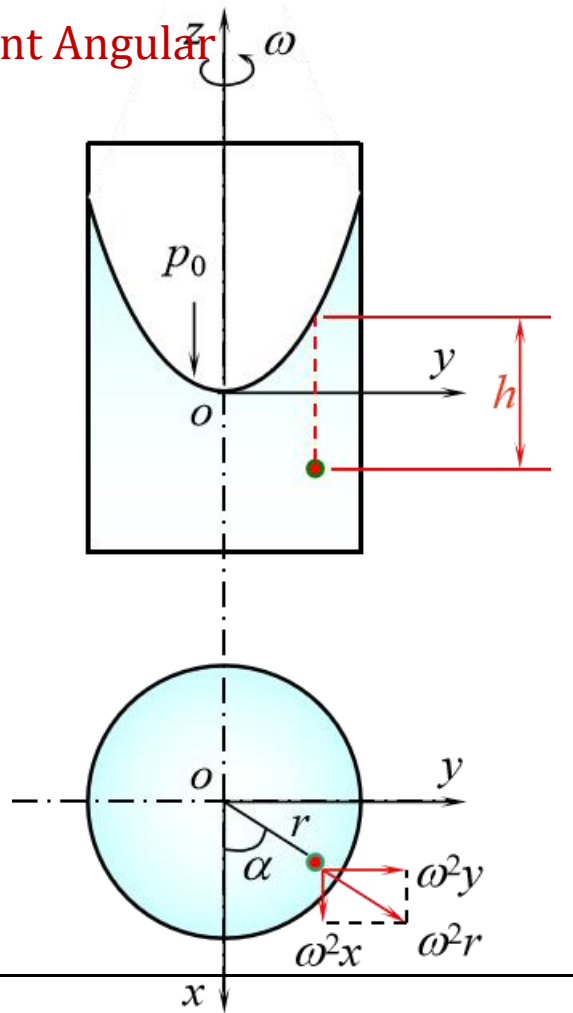
$$f_x = \omega^2 r \cos \alpha = \omega^2 x, \quad f_y = \omega^2 r \sin \alpha = \omega^2 y,$$

$$f_z = -g$$

代入压强差公式得： $dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz)$

积分得：

$$p = \rho \left(\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz \right) + C = \rho g \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z \right) + C$$



流体的相对平衡

根据边界条件： $r=0$ ， $z=0$ 时 $p=p_0$ ， 代入上式得积分常数 $C=p_0$ ， 故：

$$p = p_0 + \rho g \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z \right)$$

等角速旋转容器中液体静压强的分布规律

等压面方程

将质量力代入等压面方程得： $\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0$

积分得：

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = C_1$$

等压面方程，是以 z 轴为旋转轴的旋转抛物面方程，不同的积分常数 C_1 代表不同的等压面。

流体的相对平衡

以下标 s 表示自由液面上点的坐标，由于在自由液面上的任意一点都有 $p=p_0$ ，所以由静压强的分布规律可得自由液面的方程为：

$$\frac{\omega^2 r_s^2}{2} - g z_s = 0$$

如果考察的是相同半径 r 处的情况，则由上式得液面下任一点处：

$$\frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{\omega^2 r_s^2}{2g} = z_s$$

将上式代入静压强分布规律得：

$$p = p_0 + \rho g(z_s - z) = p_0 + \rho g h$$

上式表明，等角速旋转容器中液体相对平衡时，液体任一点的静压强仍然是液面上的压强 p_0 与淹没深度为 h 密度为 ρ 的液柱产生的压强 $\rho g h$ 之和。（The above formula shows that when the liquid in the constant angular velocity rotating vessel is relatively balanced, the static pressure at any point in the liquid is still the sum of the pressure p_0 on the liquid surface and the pressure $\rho g h$ generated by the liquid column with the submergence depth of h and the density of ρ .)

流体的相对平衡

C 两个特例

特例一：顶盖中心开口的旋转容器

$$f_x = \omega^2 r \cos \alpha = \omega^2 x$$

$$f_y = \omega^2 r \sin \alpha = \omega^2 y, \quad f_z = -g$$

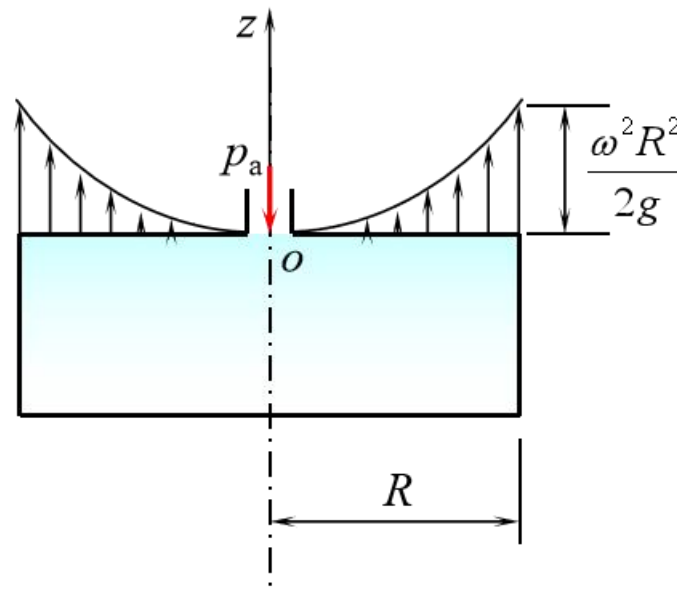
代入压强差公式并积分得： $p = \rho g \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z \right) + C$

根据边界条件： $r=0, z=0$ 时 $p=p_a$ ，代入上式得积分常数 $C=p_a$ ，故有：

$$p = p_a + \rho g \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z \right)$$

作用在顶盖上的计示压强为：

$$p_e = \frac{\rho \omega^2 r^2}{2}$$



流体的相对平衡

C 两个特例

特例二：顶盖边缘开口的旋转容器

$$f_x = \omega^2 r \cos \alpha = \omega^2 x$$

$$f_y = \omega^2 r \sin \alpha = \omega^2 y, \quad f_z = -g$$

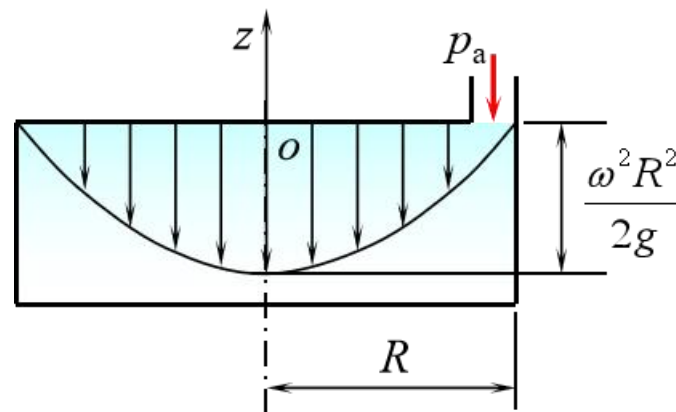
代入压强差公式并积分得： $p = \rho g \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z \right) + C$

根据边界条件： $r=R, z=0$ 时 $p=p_a$ ，代入上式得 $C=p_a - \rho\omega^2 R^2/2$ ，故有：

$$p = p_a - \rho g \left[\frac{\omega^2 (R^2 - r^2)}{2g} + z \right]$$

作用在顶盖上的真空度为：

$$p_v = \rho \frac{\omega^2 (R^2 - r^2)}{2}$$



流体的相对平衡

例题1

汽车上有一与水平运动方向平行放置的内充液体的U形管，已知 $L=0.5\text{m}$ ，加速度 $a=0.5\text{m/s}^2$ ，试求U形管外侧的液面高度差。

解：质量力在坐标轴方向的分量为：

$$f_x = 0, f_y = -a, f_z = -g$$

代入压强差公式并积分得：

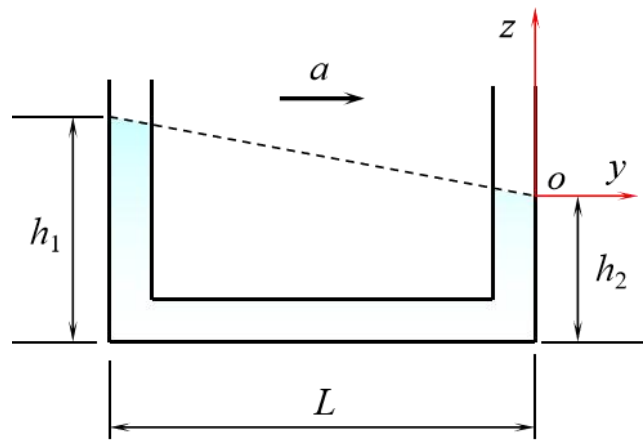
$$p = -\rho(ay + gz) + C$$

在 $y=0, z=0$ 处， $p=p_a$ 求得 $C=p_a$ ，即：

$$p = p_a - \rho(ay + gz)$$

在 $y=-L, z=h_1-h_2$ 处， $p=p_a$ ，代入上式得： $-aL + g(h_1 - h_2) = 0$

$$\text{即： } h_1 - h_2 = \frac{a}{g}L$$



流体的相对平衡

例题2

圆筒形容器的直径 $d=300\text{mm}$ ，高 $H=500\text{mm}$ ，容器内水深 $h_1=300\text{mm}$ ，容器绕中心轴等角速旋转，试确定

(1) 水正好不溢出时的转速 n_1 ； (2) 旋转抛物面的顶点恰好触及底部时的转速 n_2 ； (3) 容器停止旋转后静水的深度。

解：设坐标原点始终位于凹液面的最低点。

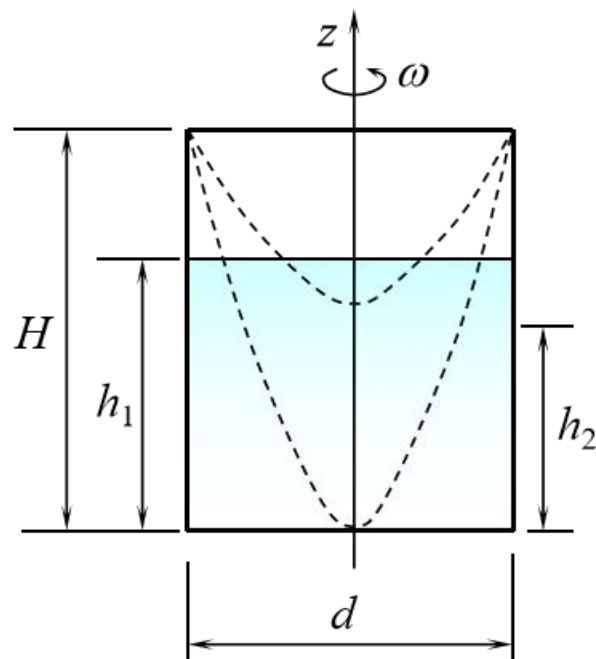
当水恰好触及容器口时，自由液面所包容的体积等于原来无水部分的体积，即：

$$\frac{\pi}{4} d^2 (H - h_1) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} d^2 z_s$$

其中： $z_s = \frac{\omega_1^2 r^2}{2g} = \frac{\omega_1^2 d^2}{8g}$

所以： $\omega_1 = \sqrt{\frac{16g(H - h_1)}{d^2}} = 18.67 \text{ rad/s}$

$$n_1 = 30\omega_1 / \pi = 178.3 \text{ r/min}$$



流体的相对平衡

例题2

当自由液面形成的抛物面恰好触及容器底部时，抛物面所包容的体积正好为容器体积的一半，此时：

$$z_s = H = \frac{d^2 \omega^2}{8g}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{8gh}{d^2}} = 20.88 \text{ rad/s}$$

$$n_1 = 30\omega_1 / \pi = 178.3 \text{ r/min}$$

当容器停止转动时容器中水的高度为：

$$h_2 = \frac{H}{2} = 0.25 \text{ m}$$



谢谢!

