



流体力学基础

上课内容

- 连续性方程
 - 伯努利方程
 - 动量方程
 - 能量方程
-






连续性方程




研究流体运动的两种方法

流体运动时，表征运动特征的运动要素一般随时间空间而变，而流体又是众多质点组成的连续介质，流体的运动是无穷多流体运动的综合。怎样描述整个流体的运动规律呢？



拉格朗日法



欧拉法



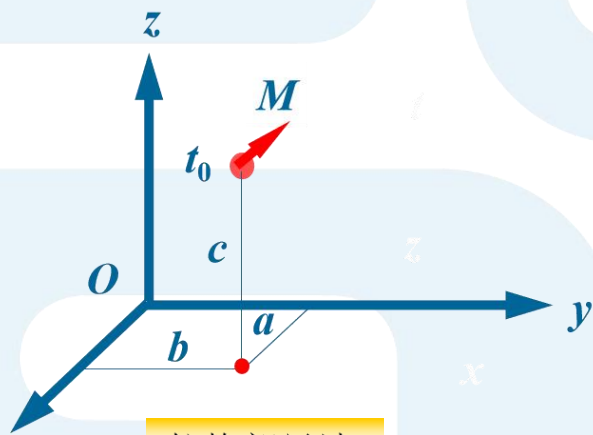
研究流体运动的两种方法

A 拉格朗日法

● 拉格朗日法: 质点系法

把流体质点作为研究对象，跟踪每一个质点，描述其运动过程中流动参数随时间的变化，综合流场中所有流体质点，来获得整个流场流体运动的规律。

设某一流体质点 在 $t=t_0$ 时刻占据起始坐标 (a, b, c) , t 为时间变量

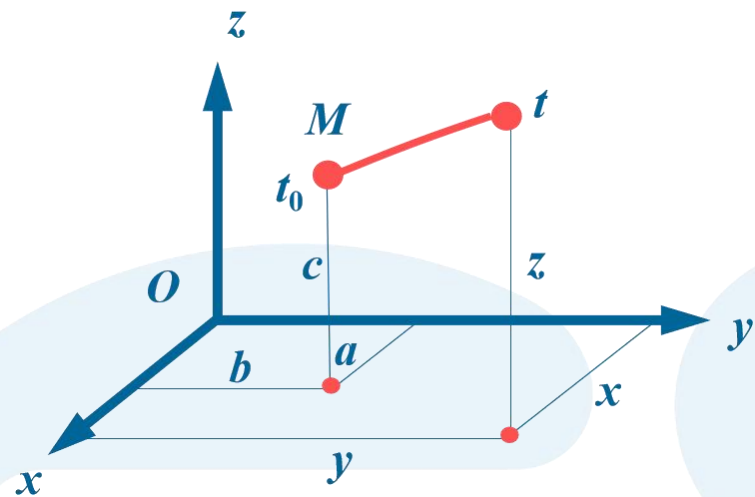


流体质点运动方程:

$$\begin{cases} x = x(a, b, c, t) \\ y = y(a, b, c, t) \\ z = z(a, b, c, t) \end{cases}$$

研究流体运动的两种方法

t 时刻, 流体质点运动到空间坐标 (x, y, z)



拉格朗日法

式中, (a, b, c, t) = 拉格朗日变数

(a, b, c) 对应流体微团或液体质点

流体质点运动方程:

$$\begin{cases} x = x(a, b, c, t) \\ y = y(a, b, c, t) \\ z = z(a, b, c, t) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = x(a, b, c, t) \\ y = y(a, b, c, t) \\ z = z(a, b, c, t) \end{cases}$$

研究流体运动的两种方法

给定 (a, b, c) , t 变化时, 该质点的轨迹方程确定;

不同 (a, b, c) , t 不变, 表示在选定时刻流场中流体质点的位置分布。

流体质点的速度为

$$\frac{d}{dt} \begin{cases} x = x(a, b, c, t) \\ y = y(a, b, c, t) \\ z = z(a, b, c, t) \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} u_x = \frac{\partial x(a, b, c, t)}{\partial t} \\ u_y = \frac{\partial y(a, b, c, t)}{\partial t} \\ u_z = \frac{\partial z(a, b, c, t)}{\partial t} \end{cases}$$

流体质点的加速度为

$$\begin{cases} a_x = a_x(a, b, c, t) = \frac{\partial u_x(a, b, c, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(a, b, c, t)}{\partial t^2} \\ a_y = a_y(a, b, c, t) = \frac{\partial u_y(a, b, c, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(a, b, c, t)}{\partial t^2} \\ a_z = a_z(a, b, c, t) = \frac{\partial u_z(a, b, c, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 z(a, b, c, t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

研究流体运动的两种方法

$$\begin{cases} x = x(a, b, c, t) \\ y = y(a, b, c, t) \\ z = z(a, b, c, t) \end{cases} \quad (a, b, c) \in \text{limited fluid points}$$

拉格朗日法存在的问题：

- ✓ 每个质点运动规律不同，很难跟踪足够多质点
- ✓ 数学上存在难以克服的困难
- ✓ 实用上，不需要知道每个质点的运动情况



因此，该方法在工程上很少采用



问题

研究流体运动的两种方法

B 欧拉法

又称为流场法，核心是研究运动要素分布场。即研究流体质点在通过某一空间点时流动参数随时间的变化规律。该法是对流动参数场的研究，例如速度场、压强场、密度场、温度场等。采用欧拉法，可将流场中任何一个运动要素表示为空间坐标 (x, y, z) 和时间 t 的单值连续函数。

液体质点在任意时刻 t 通过任意空间固定点 (x, y, z) 时的流速为：

$$\begin{cases} u_x = u_x(x, y, z, t) \\ u_y = u_y(x, y, z, t) \\ u_z = u_z(x, y, z, t) \end{cases}$$



$$\begin{aligned} p &= p(x, y, z, t) \\ \rho &= \rho(x, y, z, t) \\ T &= T(x, y, z, t) \end{aligned}$$

式中， (x, y, z, t) 称为欧拉变数。

研究流体运动的两种方法

令 (x, y, z) 为常数, t 为变数



表示在某一固定空间点上, 流体质点的运动参数随时间的变化规律。

令 (x, y, z) 为变数, t 为常数



表示在同一时刻, 流场中流动参数的分布规律。即在空间的分布状况。

研究流体运动的两种方法

拉格朗日法



(a, b, c) : 质点起始坐标
 t : 任意时刻
 (x, y, z) : 质点运动的位置坐标
 (a, b, c, t) : 拉格朗日变数

欧拉法



(x, y, z) : 空间固定点（不动）
 t : 任意时刻
 (x, y, z, t) : 欧拉变数

研究流体运动的两种方法


液体质点通过任意空间坐标时的加速速:

$$\begin{cases} a_x = \frac{du_x(x, y, z, t)}{dt} \\ a_y = \frac{du_y(x, y, z, t)}{dt} \\ a_z = \frac{du_z(x, y, z, t)}{dt} \end{cases}$$

式中, (a_x, a_y, a_z) 为通过空间点的加速度分量。

利用复合函数求导法, 将 (x, y, z) 看成是时间 t 的函数, 则:

写为矢量形式:


$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \text{ 为矢量微分算子。}$$

$$\begin{cases} a_x = \frac{du_x(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ a_y = \frac{du_y(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ a_z = \frac{du_z(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{cases}$$

流体运动中的几个基本概念

A 定常流动与非定常流动

● 定常流动

若流场中流体的运动参数（速度、加速度、压强、密度、温度等）不随时间而变化，而仅是位置坐标的函数，则称这种流动为定常流动或恒定流动。

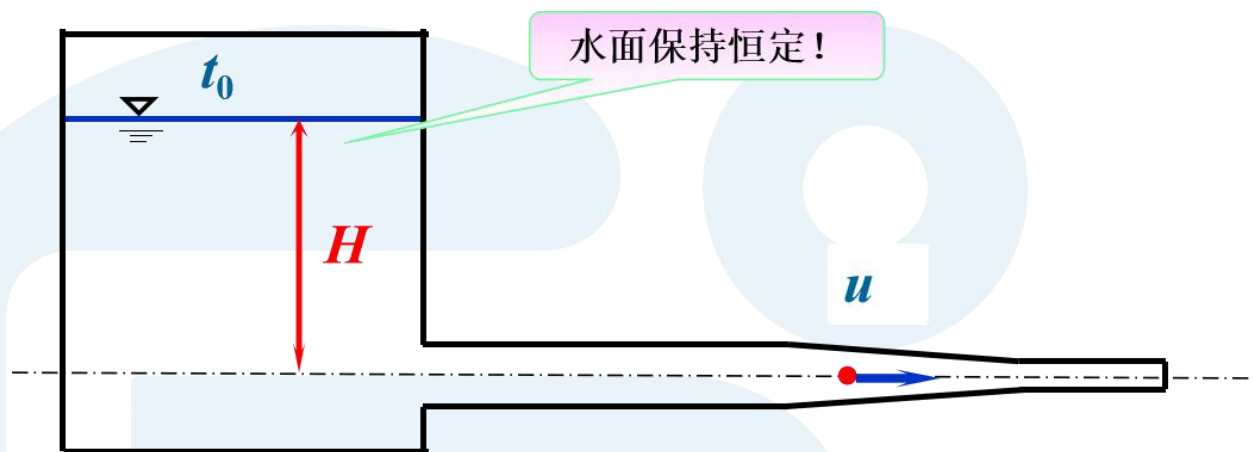
● 非定常流动

若流场中流体的运动参数不仅是位置坐标的函数，而且随时间变化，则称这种流动为非定常流动或非恒定流动。

流体运动中的几个基本概念

● 定常流动

如图所示容器中水头不随时间变化的流动为定常流动。流体的速度、压强、密度和温度可表示为:



$$\begin{cases} u_x = u_x(x, y, z) \\ u_y = u_y(x, y, z) \\ u_z = u_z(x, y, z) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p &= p(x, y, z) \\ \rho &= \rho(x, y, z) \\ T &= T(x, y, z) \end{aligned}$$

流体运动中的几个基本概念

定常流动的特点:

- 运动要素之一不随时间发生变化, 即所有运动要素对时间的偏导数恒等于零.

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} \equiv \frac{\partial u_y}{\partial t} \equiv \frac{\partial u_z}{\partial t} \equiv \frac{\partial p}{\partial t} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} \equiv \dots \equiv 0$$

- 因此, 定常流动时流体加速度可简化成

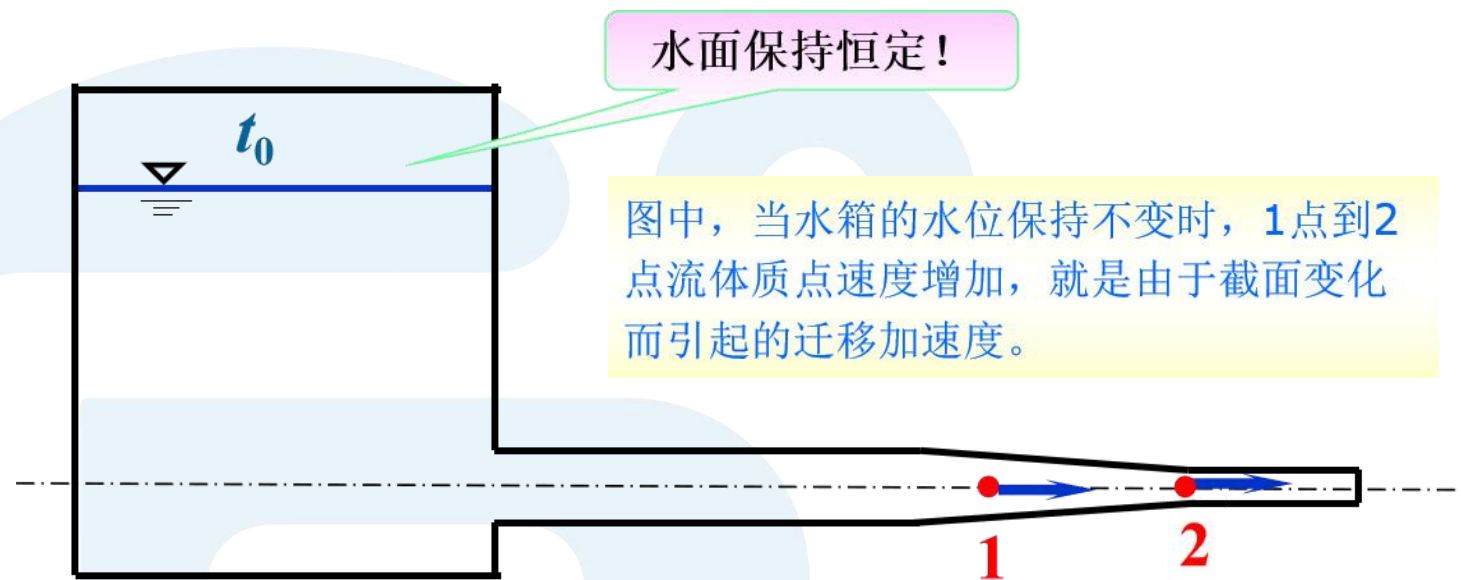
$$\vec{a} = (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$$

- 即, 在定常流动中只有迁移加速度。

流体运动中的几个基本概念

非定常流动的特点:

- 运动要素之一随时间而变化的流动，即运动要素之一对时间的偏导数不为零。



流体运动中的几个基本概念

B 一维、二维和三维流动(“维”是指空间自变量的个数)

- 一维流动

流场中流体的运动参数仅是一个坐标的函数。

- 二维流动

流场中流体的运动参数是两个坐标的函数。

- 三维流动

流场中流体的运动参数依赖于三个坐标时的流动。

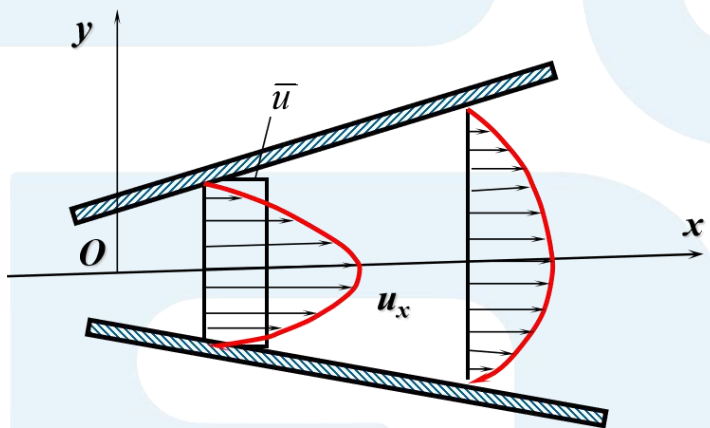


实际上，任何实际液体流动都是三维流，需考虑运动要素在三个空间坐标方向的变化。

流体运动中的几个基本概念

由于实际问题通常非常复杂，数学上求解三维问题的困难，所以流体力学中，在满足精度要求的前提下，常用简化方法，尽量减少运动要素的“维”数。

例如，下图所示的带锥度的圆管内黏性流体的流动，流体质点运动参数，如速度，即是半径 r 的函数，又是沿轴线距离的函数，即： $u=u(r, x)$ 。显然这是二元流动问题。

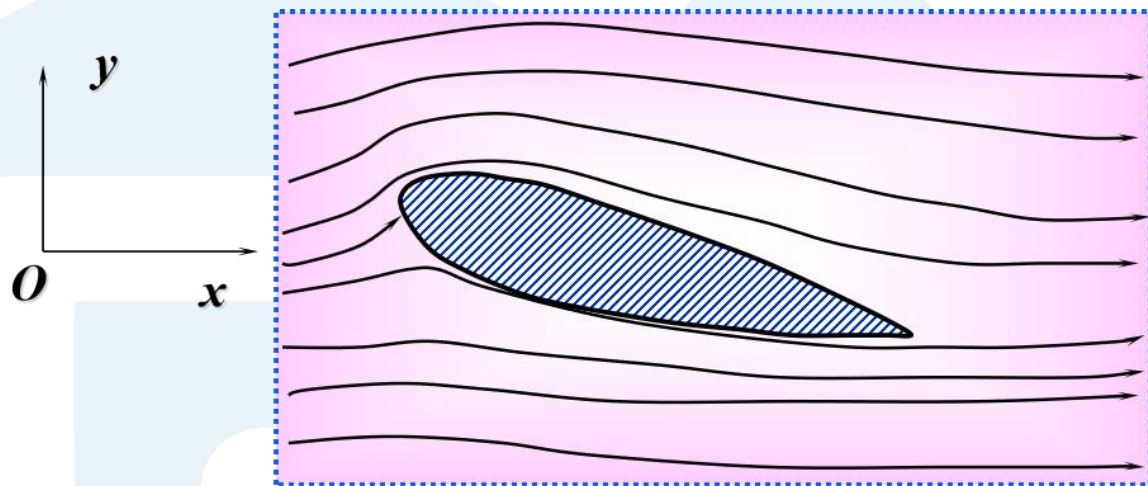


工程上在讨论其速度分布时，常采用其每个截面的平均值 \bar{u} 。就将流动参数如速度，简化为仅与一个坐标有关的流动问题，这种流动就叫一维流动，即： $u=u(x)$ 。

流体运动中的几个基本概念

如图所示的绕无限翼展的流动就是二维流动，二维流动的参数以速度为例，可写成：

$$\vec{u} = u_x(x, y)\vec{i} + u_y(x, y)\vec{j}$$



流体运动中的几个基本概念

C 迹线和流线

● 迹线

流体质点不同时刻流经的空间点所连成的线，即流体质点运动的轨迹线。由拉格朗日法引出的概念。例如在流动的水面上撒一片木屑，木屑随水流漂流的途径就是某一水点的运动轨迹，也就是迹线。

迹线的微分方程：



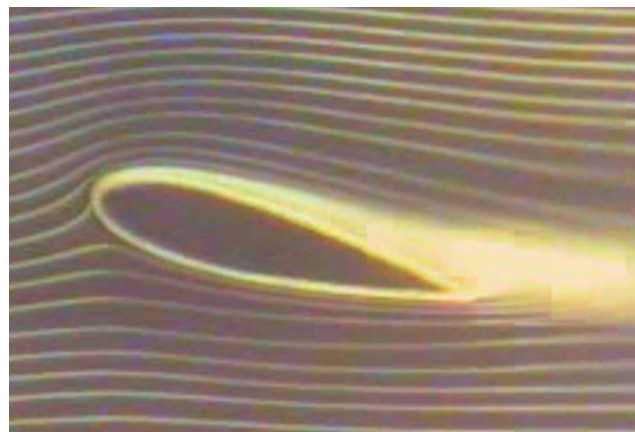
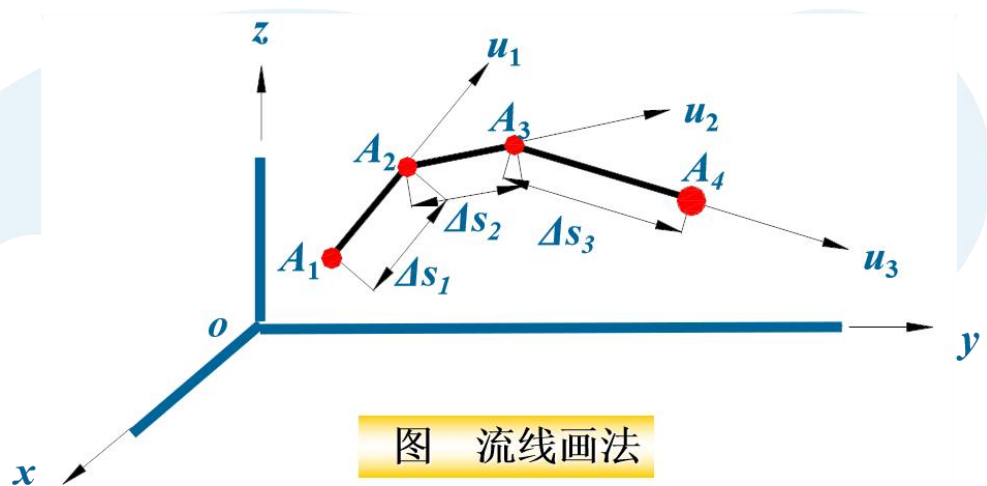
$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = dt$$

从该方程的积分结果中消去时间 t ，便可求得迹线方程式。

流体运动中的几个基本概念

● 流线

某一瞬时在场中所作的一条曲线，在这条曲线上的各流体质点的速度方向都与该曲线相切，因此流线是同一时刻，不同流体质点所组成的曲线。由欧拉法引出。



流体运动中的几个基本概念

流线的基本特性

- ✓ **流线和迹线相重合。** 在定常流动时，因为流场中各流体质点的速度不随时间变化，所以通过同一点的流线形状始终保持不变，因此流线和迹线相重合。
- ✓ **流线不能相交和分支。** 通过某一空间点在给定瞬间只能有一条流线，一般情况流线不能相交和分支。否则在同一空间点上流体质点将同时有几个不同的流动方向。
- ✓ **流线不能突然折转，是一条光滑的连续曲线。**
- ✓ **流线密集的地方，表示流场中该处的流速较大，稀疏的地方，表示该处的流速较小。**

流体运动中的几个基本概念

流线微分方程

设在流场中某一空间点 (x, y, z) 的流线上取微元段矢量 $d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ 该点流体质点的速度矢量为 $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$

根据流线的定义，该两个矢量相切，其矢量为0。即

$$\vec{u} \times d\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$$



$$\begin{aligned} u_x dy - u_y dx &= 0 \\ u_y dz - u_z dy &= 0 \\ u_z dx - u_x dz &= 0 \end{aligned}$$



$$\frac{dx}{u_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{u_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{u_z(x, y, z, t)}$$

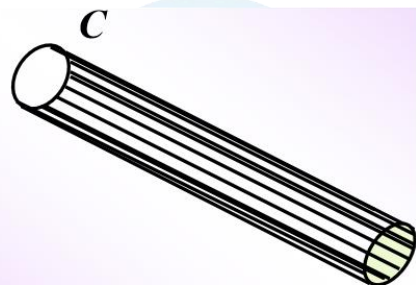
上式即为流线的微分方程，式中时间t是个参变量。

流体运动中的几个基本概念

D 流管、流束和总流

● 流管

在流场中任取一不是流线的封闭曲线 C ，过曲线上的每一点作流线，这些流线所组成的管状表面称为流管。



● 流束

流管内部的全部流体称为流束。

流体运动中的几个基本概念

- 微小流束

微小截面积的流束。

- 总流

如果封闭曲线取在管道内部周线上，则流束就是充满管道内部的全部流体，这种情况通常称为总流。

注意：

- ✓ 流管与流线只是流场中的一个几何面和几何线，而流束不论大小，都是由流体组成的。
- ✓ 因为流管是由流线构成的，所以它具有流线的一切特性，流体质点不能穿过流管流入或流出(由于流线不能相交)。

流体运动中的几个基本概念

E 流量、有效截面和平均流速

● 流量

单位时间内通过有效截面的流体体积称为体积流量，以 q_v 表示，其单位为 m^3/s 、 m^3/h 等。

有三种表示方法：

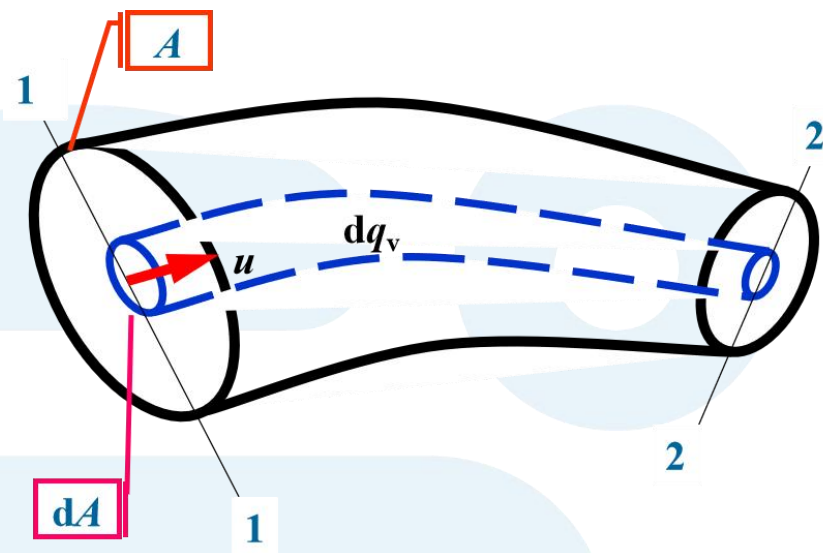
体积流量 q_v (m^3/s)

质量流量 ρq_v (kg/s)

重量流量 γq_v (N/s) 或 (kN/s)

流体运动中的几个基本概念

从总流中任取一个微小流束，其过水断面为 dA ，流速为 u ，则通过微小流束的体积流量为 q_v



$$q_v = \int_A \vec{u} \cdot d\vec{A} = \int_A u \cos(\vec{u}, \vec{n}) dA$$

式中： dA 为微元面积矢量， $\cos(\vec{u}, \vec{n})$ 为速度 u 与微元法线方向 n 夹角的余弦。

流体运动中的几个基本概念

- 有效截面

处处与流线相垂直的截面称为有效截面。有效断面可能是曲面，或平面。在直管中，流线为平行线，有效截面为平面；在有锥度的管道中，流线收敛或发散，有效截面为曲面。

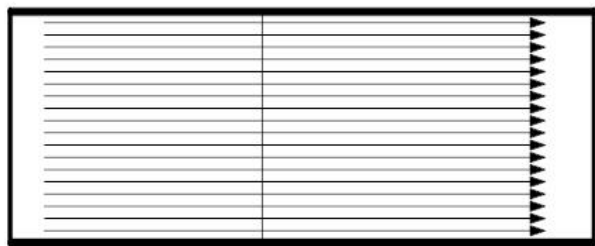


图 有效截面为平面

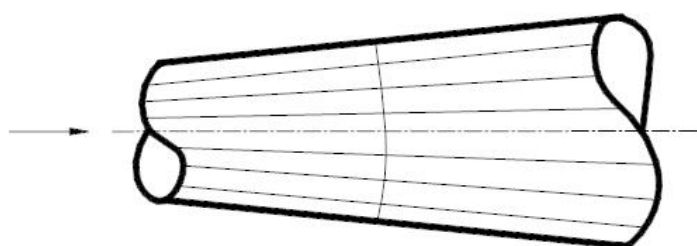


图 有效截面为曲面

流体运动中的几个基本概念

● 平均流速

常把通过某一有效截面的流量 q_v 与该有效截面面积 A 相除，得到一个均匀分布的速度 v 。

$$q_v = \int_{q_v} dq_v = \int_A u dA = vA$$

$$v = \frac{q_v}{A}$$

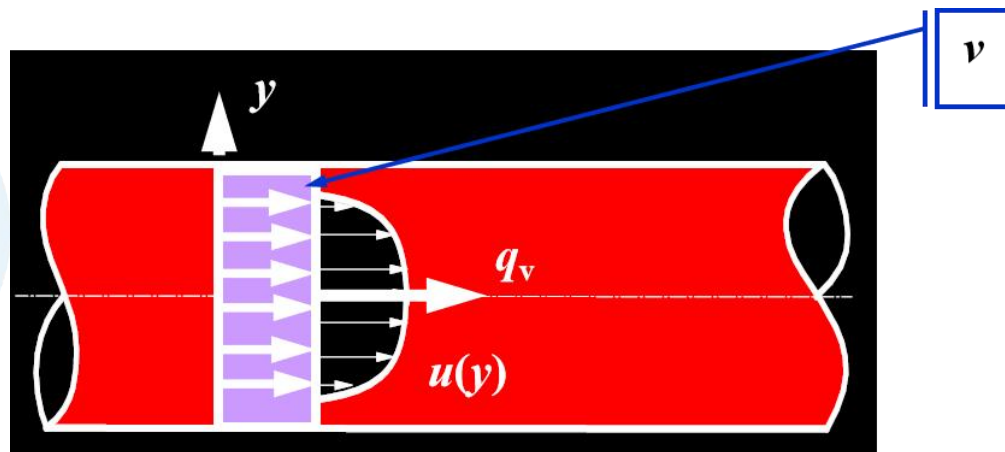


图 有效截面为平均流速

流体运动中的几个基本概念

F 当量直径、湿周和水力半径

● 湿周

在总流的有效截面上，流体与固体壁面接触的长度。用 χ 表示。

● 水力半径

总流的有效截面与湿周之比。用 R_h 表示。

$$R_h = A/\chi$$

圆管



$$R_h = \frac{A}{\chi} = \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\pi d} = \frac{d}{4}$$



$$d = 4R_h$$

直径是水力半径的**4**倍。

流体运动中的几个基本概念

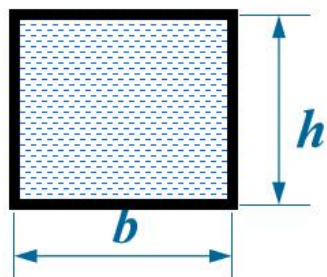
非圆管

$$D = 4A/\chi = 4R_h$$

当量直径

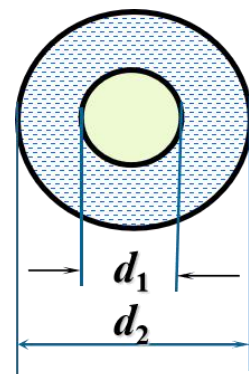
直径是水力半径的4倍。

几种非圆形管道的当量直径



充满流体的矩形管道

$$D = \frac{4bh}{2(b+h)} = \frac{2bh}{b+h}$$



充满流体的圆环形管道

$$D = \frac{4(\pi d_2^2/4 - \pi d_1^2/4)}{\pi d_1 + \pi d_2} = d_2 - d_1$$

连续性方程

连续性方程是质量守恒定律在流体力学中的应用。他建立了流体流速与流动面积之间的关系。

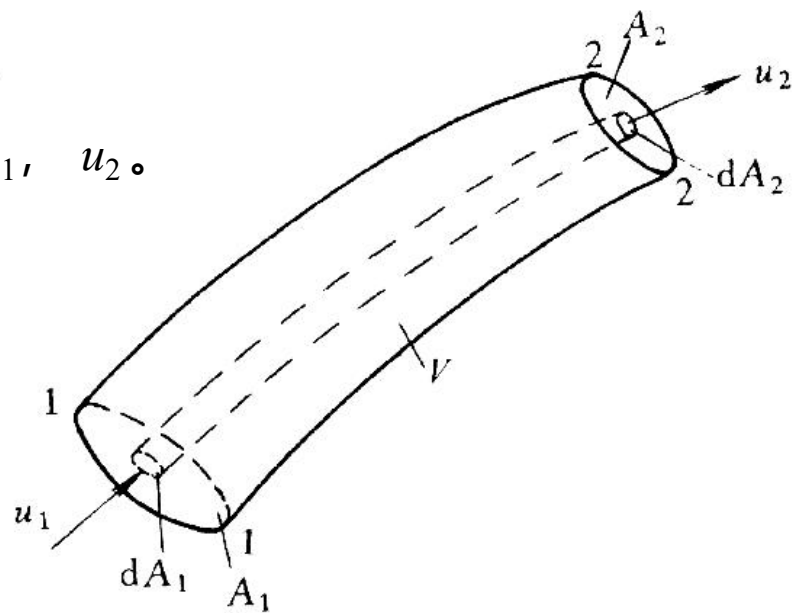
A 流束和总流的连续性方程

● 推导

选取控制体：过流断面1-1、2-2及管壁所围成的体积。

取微元流束：流束的两过流断面面积为 dA_1 ， dA_2 ，速度分别为 u_1 ， u_2 。

dt 时间流经两个过流断面的流体体积： $u_1 A_1 dt$ 和 $u_2 dA_2 dt$ 。



连续性方程

假设条件：

- ✓ 流束的形状不随时间改变，为定常流动；
- ✓ 流束侧面没有流体质点流入或流出；
- ✓ 流体是不可压缩的；
- ✓ 该流束内流体的质量不变。

根据上述条件，得：

$$u_1 dA_1 = u_2 dA_2$$



$$dq_{v_1} = dq_{v_2} = dq_v$$



$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{dA_2}{dA_1}$$

上述各式即为流束的连续性方程。它表明流束过流断面面积与该断面上速度的乘积为一常数，或所有过流断面上流量都相等。

连续性方程

将上式沿总流过水断面进行积分，得：

$$q_v = \int_{A_1} u_1 dA_1 = \int_{A_2} u_2 dA_2$$



$$q_v = A_1 v_1 = A_2 v_2$$



$$q_v = q_{v_1} = q_{v_2}$$

移项得



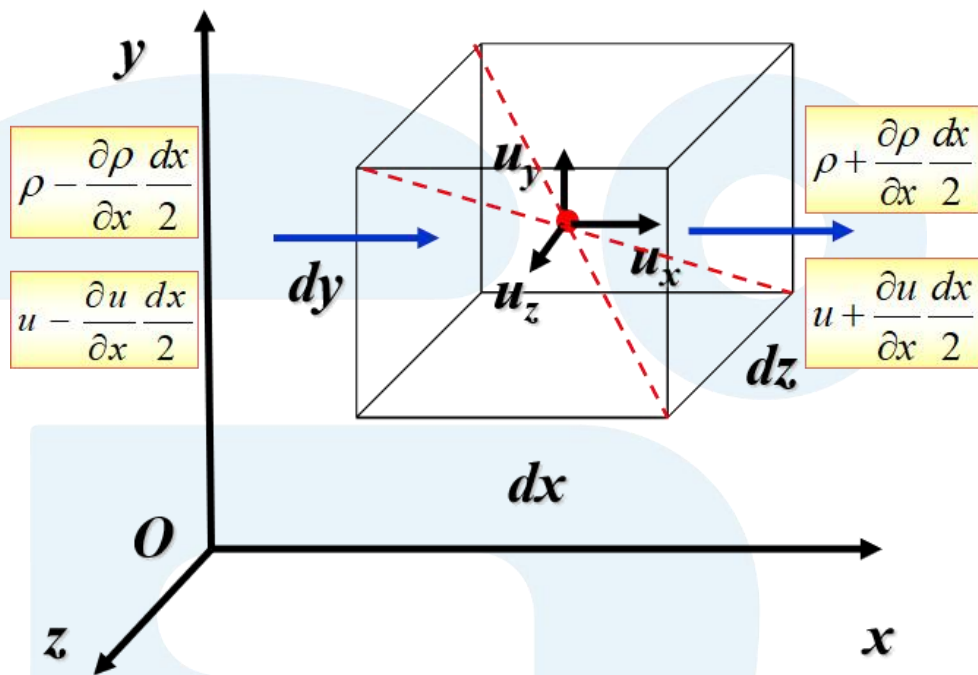
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

上式即为总流的连续性方程。表明流量一定时，断面平均流速与断面面积成反比。在过水断面面积小处，流速大；过水断面面积大处，流速小。

连续性方程

B 连续性方程的微分形式

设在流场中任取一个微元平行六面体，其边长分别为 dx 、 dy 和 dz ，如下图所示。



假设微元平行六面体形心的坐标为 x 、 y 、 z ，在某一瞬时 t 经过形心的流体质点沿各坐标轴的速度分量为 u_x 、 u_y 、 u_z ，流体的密度为 ρ 。

连续性方程

先分析x轴方向，由于 u_x 和 ρ 都是坐标和时间的连续函数，即 $u_x = u_x(x, y, z, t)$ 和 $\rho = \rho(x, y, z, t)$ 。根据泰勒级数展开式，略去高于一阶的无穷小量，得在 dt 时间内，沿轴方向从左边微元面积 $dydz$ 流入的流体质量为

$$\begin{aligned} & \rho \left(x - \frac{dx}{2}, y, z, t \right) u_x \left(x - \frac{dx}{2}, y, z, t \right) dydzdt \\ &= \left[\rho(x, y, z, t) - \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{dx}{2} \right] \left[u_x(x, y, z, t) - \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{dx}{2} \right] dydzdt \\ &= \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{dx}{2} \right) \left(u_x - \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{dx}{2} \right) dydzdt \end{aligned}$$

同理可得在 dt 时间内从右边微元面积 $dydz$ 流出的流体质量为

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{dx}{2} \right) \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{dx}{2} \right) dydzdt$$

连续性方程

上述两者之差为在dt时间内沿x轴方向流体质量的变化，即

$$-\left(\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} dx\right) dydzdt = -\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx dy dz dt$$

同理，在dt时间内沿y轴和z轴方向流体质量的变化分别为：

$$-\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} dx dy dz dt$$

$$-\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} dx dy dz dt$$

因此，dt时间内经过微元六面体的流体质量总变化为

$$-\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right] dx dy dz dt$$

连续性方程

由于流体是作为连续介质来研究的，六面体内流体质量的总变化，唯一的可能是因为六面体内流体密度的变化而引起的。因此上式中流体质量的总变化和由流体密度变化而产生的六面体内的流体质量变化相等。

设开始瞬时流体的密度为 ρ ，经过 dt 时间后的密度为

$$\rho(x, y, z, t + dt) = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$$

在 dt 时间内，六面体内因密度变化而引起的质量变化为

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dx dy dz - \rho dx dy dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$$

代入相等条件，得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho u_z)}{\partial z} \right] = 0$$

上式为可压缩流体非定常三维流动的连续性方程。



伯努利方程



伯努利方程

能量转换与守恒定律是自然界物质运动的普遍规律。伯努力方程是这一定律在流体力学中的应用。

A 伯努力方程的建立

● 动能定理

运动物体在某一时间段内动能的增量，等于同一时间段内作用在运动物体上外力做功的总和。

$$\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}mu_0^2 = \sum W$$

The diagram shows the equation $\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}mu_0^2 = \sum W$ in a yellow box. Four callout boxes point to different parts of the equation: a pink box labeled '运动物体的质量' points to 'm'; a purple box labeled '运动物体的末速度' points to 'u'; a purple box labeled '运动物体的初速度' points to 'u₀'; and a pink box labeled '外力对运动物体所做的功' points to '∑W'.

运动物体的质量

运动物体的末速度

运动物体的初速度

外力对运动物体所做的功

伯努利方程

- 假定条件:

- ✓ 不可压缩理想流体的定常流动;
- ✓ 沿同一微小流束 (也就是沿流线) 积分;
- ✓ 质量力只有重力。

从理想流体恒定流中取出一微小流束, 并截取1-1和2-2断面之间的流段来研究, 沿流束取二过流断面1、2, 其上的流速和压强分别为 u_1 、 u_2 和 p_1 、 p_2 , 断面面积分别为 dA_1 、 dA_2 , 面积中心距基准面的高度分别为 z_1 、 z_2 , 如下图所示。

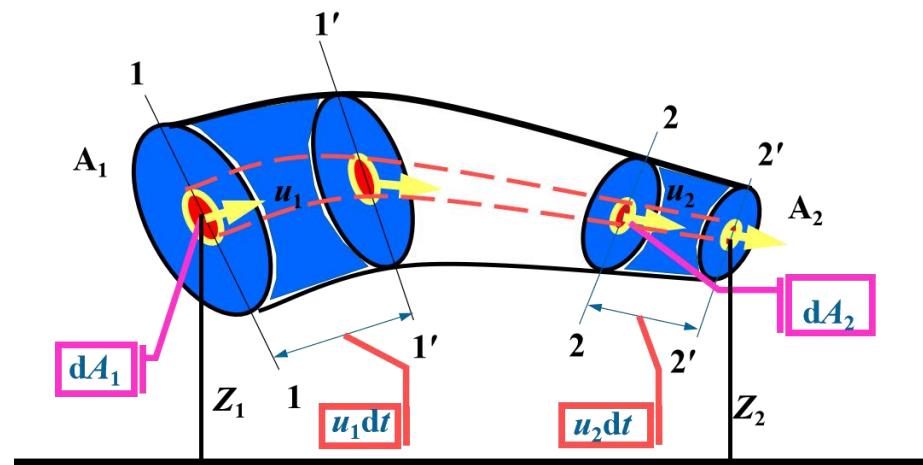


图 微小流束的伯努力方程

伯努利方程

● 动能的增量

由于是定常流动，时段 dt 内，流段1'-2'内流动的动能不变，所以其动能增量仅为2-2'与1-1'动能之差：

1-1'流段的动能：

$$\frac{1}{2} dm_1 u_1^2 = \frac{1}{2} \rho u_1^2 dq_{v_1} dt$$

2-2'流段的动能：

$$\frac{1}{2} dm_2 u_2^2 = \frac{1}{2} \rho u_2^2 dq_{v_2} dt$$

对不可压缩液体有

$$dq_{v_1} = dq_{v_2} = dq_v$$



$$\frac{1}{2} dm_2 u_2^2 - \frac{1}{2} dm_1 u_1^2 = \frac{1}{2} \rho dq_v dt (u_2^2 - u_1^2)$$

伯努利方程

重力做的功 W_1 :

$$\begin{aligned} W_1 &= E_{z1-2} - E_{z1'-2'} = (E_{z1-1'} + E_{z1'-2}) - (E_{z1'-2} - E_{z2-2'}) \\ &= E_{z1-1'} - E_{z2-2'} = \rho g dq_v dt (z_1 - z_2) \end{aligned}$$

压力做的功 W_2 : 流束侧表面压力与流动方向垂直, 不做功。

过流断面1与2上的压力做功: $W_2 = p_1 dA_1 dl_1 - p_2 dA_2 dl_2$

由于 $dA_1 dl_1 = dA_2 dl_2 = dq_v dt$ \rightarrow $W_2 = (p_1 - p_2) dq_v dt$

摩擦阻力做的功 W_3 : 摩擦阻力与流动方向相反, 对流体运动做负功。令 W_3 为流段由1-2流至1'-2'时摩擦阻力所做的功; 令 $-gh_w'$ 表示摩擦阻力对单位质量流体沿微小流束全流程1-2所做的平均功, 有 $W_3 = -h_w' \rho g dq_v dt$

伯努利方程

外力做功的总和 $\sum W = W_1 + W_2 + W_3 = \rho g(z_1 - z_2) \rho g dq_v dt + (p_1 - p_2) dq_v dt - h'_w \rho g dq_v dt$

● 伯努力方程

将动能增量与外力做功的总和代入动能定理，得：

$$\frac{1}{2} \rho (u_2^2 - u_1^2) dq_v dt = (z_1 - z_2) \rho g dq_v dt + (p_1 - p_2) dq_v dt - h'_w \rho g dq_v dt$$

$$\frac{1}{2} \rho (u_2^2 - u_1^2) = \rho g(z_1 - z_2) + (p_1 - p_2) - h'_w \rho g$$

重力作用下、
不可压缩流体、
定常流动的伯
努力方程。

$$z_1 g + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = z_2 g + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + g h'_w$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h'_w$$

伯努利方程

B 伯努力方程的物理意义

伯努力方程中每一项都表示单位重量流体所具有的能量。

z —单位重量流体对某一基准面所具有的位能势能。

$\frac{p}{\rho g}$ —单位重量流体所有的压力势能。

$\frac{u^2}{2g}$ —单位重量流体所具有的动能。

h_w —单位重量流体两断面间为克服摩擦阻力所消耗的机械能。

$z + \frac{p}{\rho g}$ —单位重量流体所具有的势能。

$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$ —单位重量流体所具有的总机械能。

伯努利方程

● 物理意义

流体沿流束从一个断面流到另一个断面时，位能、压能与动能可以相互转化，但在流经前一个断面时流体所具有的单位重量流体的总机械能，应等于它在流经后一个断面时所具有的单位重量流体的机械能，与单位重量流体在流经两断面间的过程中阻力损失之和。

● 几何意义

$$z$$

位置水头

$$z + \frac{p}{\rho g}$$

测压管水头

$$\frac{p}{\rho g}$$

压强水头

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$$

总水头

$$\frac{u^2}{2g}$$

速度水头

$$h_w :$$

水头损失





动量方程

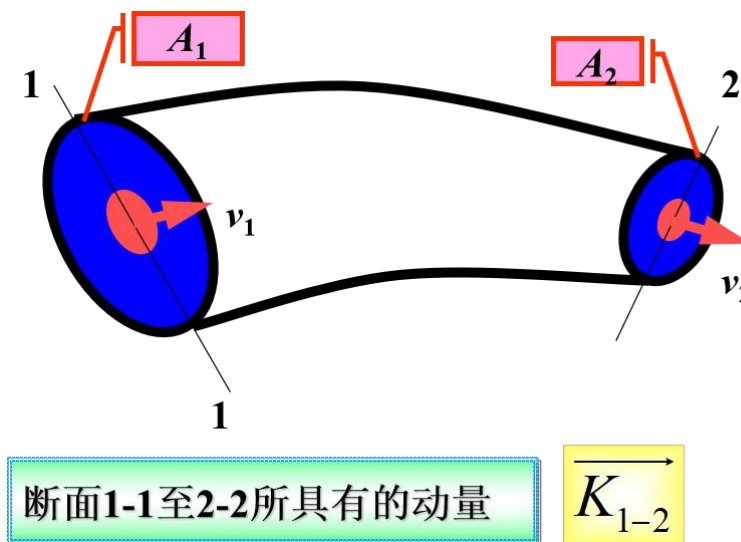
在需要确定流体与外界的相互作用力时，连续性方程和能量方程都无法解决，需引入动量方程。动量方程是自然界的动量定理在流体力学中的应用。

● 动量定理

质点系的动量在某个方向的变化，等于作用于该质点系上所有外力的冲量在同一方向投影的代数和。即 $\Delta K = \sum F \cdot t$

A 恒定总流动量方程的建立

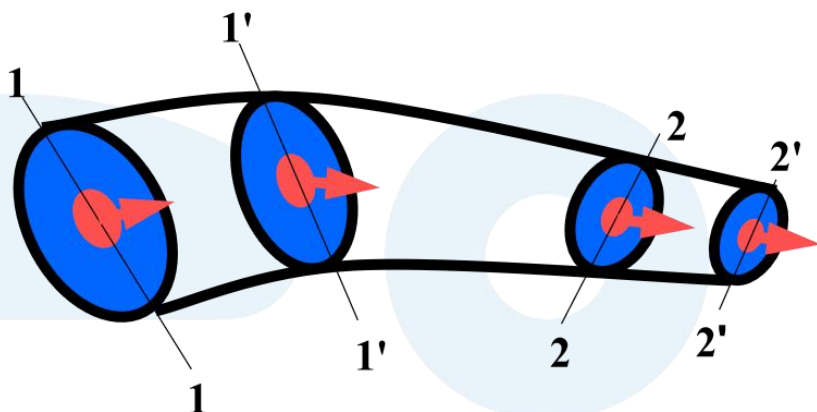
在恒定总流中，取一流段（控制体）研究，如图所示。



动量方程

经过时间 dt 后，液体从1-2运动至1'-2'，此时所具有的动量为 $\vec{K}_{1'-2'}$

dt 时段动量变化 $\Delta \vec{K} = \vec{K}_{1'-2'} - \vec{K}_{1-2}$



$$\vec{K}_{1'-2'} = \vec{K}_{2-2'} + \vec{K}_{1'-2}$$

$$\vec{K}_{1-2} = \vec{K}_{1-1'} + \vec{K}_{1'-2}$$

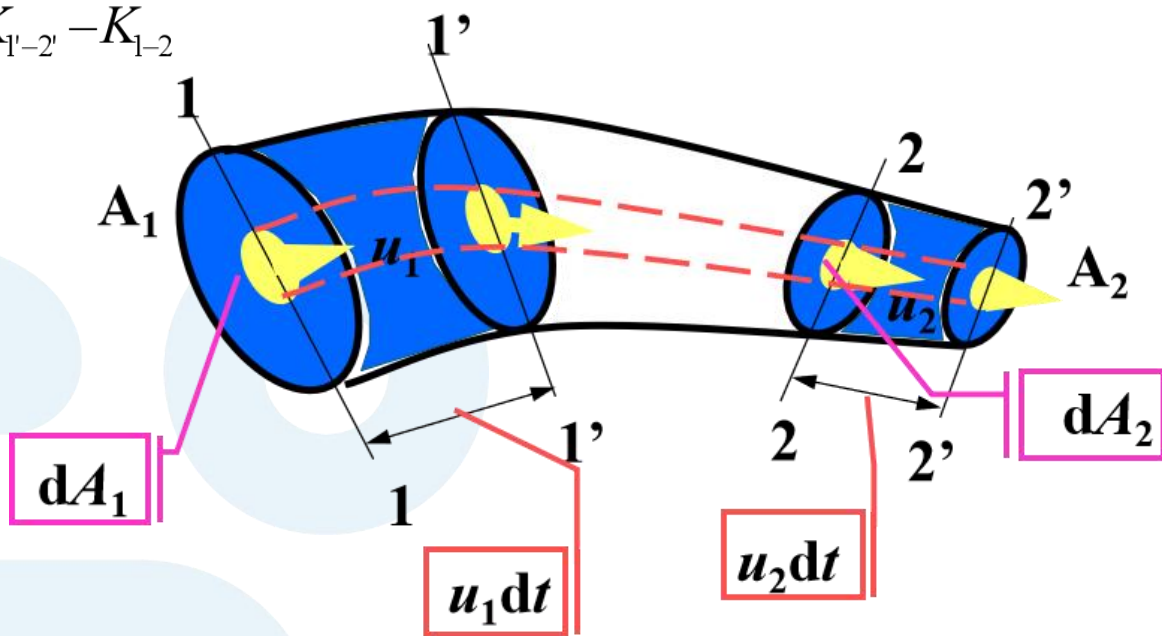
dt 时间内水流动量的变化

$$\Delta \vec{K} = \vec{K}_{1'-2'} - \vec{K}_{1-2} = \vec{K}_{2-2'} + \vec{K}_{1'-2} - \vec{K}_{1-1'} - \vec{K}_{1'-2} = \vec{K}_{2-2'} - \vec{K}_{1-1'}$$

动量方程

dt 时间内水流的动量变化 $\Delta \vec{K} = \vec{K}_{2-2'} - \vec{K}_{1-1'}$

dt 时段动量变化 $\Delta \vec{K} = \vec{K}_{1'-2} - \vec{K}_{1-2}$



dt 时间内流段1-1'动量 $\rho u_1 dt dA_1 \bullet \vec{u}_1$

动量方程

dt 时间内流段2-2'动量 $\rho u_2 dt dA_2 \bullet \vec{u}_2$

总流1-1'与2-2'断面的动量

$$\begin{aligned}\vec{K}_{1-1'} &= \int_{A_1} \rho \vec{u}_1 u_1 dt dA_1 = \rho dt \int_{A_1} \vec{u}_1 u_1 dA_1 \\ \vec{K}_{2-2'} &= \int_{A_2} \rho \vec{u}_2 u_2 dt dA_2 = \rho dt \int_{A_2} \vec{u}_2 u_2 dA_2\end{aligned}$$

因为断面上的流速分布一般较难确定，所以上述积分不能完成。如何解决这个积分问题？



用断面平均流速 \bar{v} 代替点流速。定义 \bar{v} 的大小为 \bar{v} ，方向为 \vec{u} 的方向。



造成的误差用动量修正系数 β 来修正。

动量方程

引入动量修正系数后：

$$\begin{aligned}\vec{K}_{1-1'} &= \rho dt \int_{A_1} \vec{u}_1 u_1 dA_1 = \rho dt \beta_1 \vec{v}_1^2 A_1 = \rho q_{v1} \beta_1 \vec{v}_1 dt \\ \vec{K}_{2-2'} &= \rho dt \int_{A_2} \vec{u}_2 u_2 dA_2 = \rho dt \beta_2 \vec{v}_2^2 A_2 = \rho q_{v2} \beta_2 \vec{v}_2 dt\end{aligned}$$

按照动量定律原理，则

$$\Delta \vec{K} = \vec{K}_{2-2'} - \vec{K}_{1-1'} = \rho q_{v2} \beta_2 \vec{v}_2 dt - \rho q_{v1} \beta_1 \vec{v}_1 dt = \sum \vec{F} dt$$



$$\rho q_v (\beta_2 \vec{v}_2 - \beta_1 \vec{v}_1) = \sum \vec{F}$$

动量方程

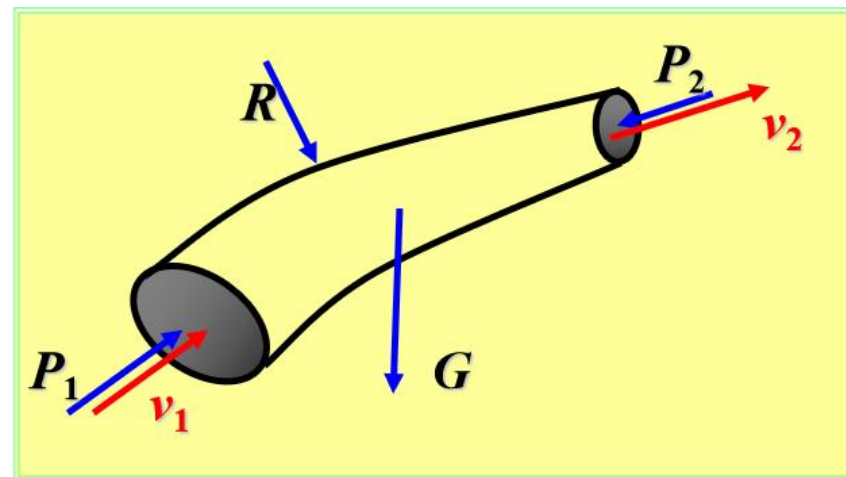
$\sum \vec{F}$ 作用于控制体内流体上所有外力的矢量和。外力包括：控制体上下游断面1、2上的流体总压力 P_1 、 P_2 、重力 G 和总流边壁对控制体内流体的作用力 R 。其中只有重力为质量力，其余均为表面力。即

$$\sum \vec{F} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{G} + \vec{R}$$

恒定总流动量方程是矢量方程，实际使用时一般都要写成分量形式

$$\begin{cases} \rho q_v (\beta_2 v_{2x} - \beta_1 v_{1x}) = \sum F_x \\ \rho q_v (\beta_2 v_{2y} - \beta_1 v_{1y}) = \sum F_y \\ \rho q_v (\beta_2 v_{2z} - \beta_1 v_{1z}) = \sum F_z \end{cases}$$

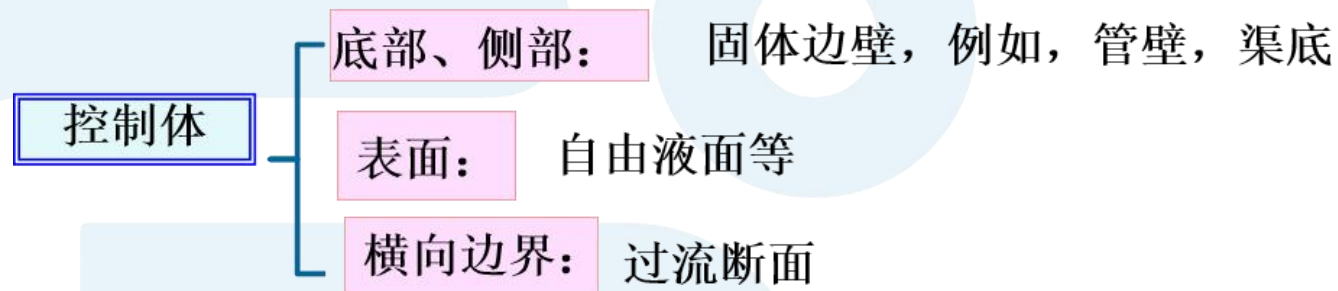
式中， F_x, F_y, F_z 为作用于控制体上所有外力在三个坐标方向的投影（不包括惯性力）。



动量方程

B 应用动量方程的注意事项

- 所选断面必须是不可压缩流体定常流动的缓变流断面，对断面之间流体的流动不作要求。
- 动量方程是矢量方程，式中的作用力和速度均为矢量。
- 取控制体。控制体可任意选择，但一般选取总流的一段作为控制体来研究，通常由下列部分组成：





能量方程

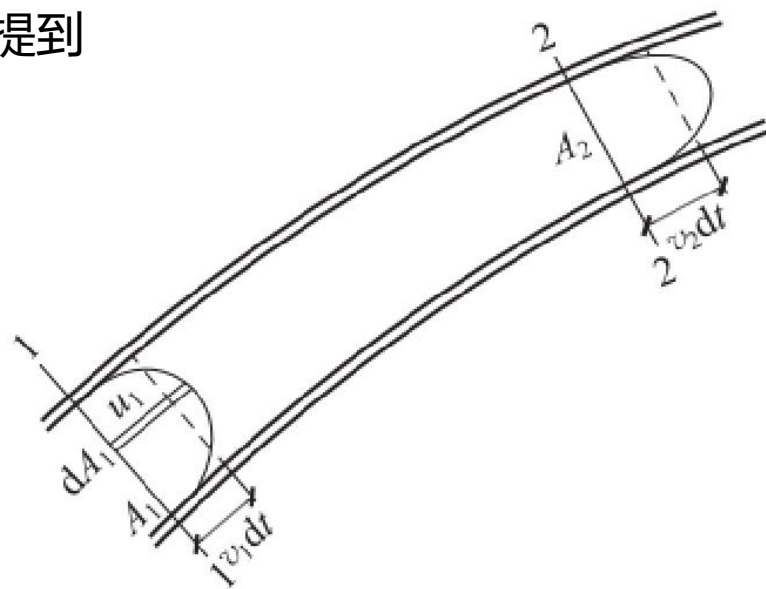


能量方程

● 势能积分

$\int \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g dQ$ 表示单位时间内通过断面的流体势能。由于断面选取在渐变流流段，其断面上的测压管水头为常数，可以提到积分号以外，因而势能积分可以写为

$$\int \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g dQ = \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g Q$$



总流能量方程推导

能量方程

● 动能积分

$\frac{\rho g}{2g} \int u^3 dA$ 表示单位时间内通过断面的流体动能。由于过流断面的流速 u 分布复杂，不易积分，故采用断面平均流速 v 来代替 u ，即以 $\frac{\rho g}{2g} \int v^3 dA$ 代替 $\frac{\rho g}{2g} \int u^3 dA$ 。但实际上， $\frac{\rho g}{2g} \int u^3 dA$ 并不等于 $\int v^3 dA$ 为此，需要乘以修正系数 α 。

$$\alpha = \frac{\int u^3 dA}{\int v^3 dA} = \frac{\int u^3 dA}{v^3 A}$$

α 称为动能修正系数。 α 值根据流速在断面上分布的均匀性来确定。流速分布均匀时, $\alpha=1$; 流速分布越不均匀, α 值越大。在管流的层流流动中, $\alpha=2$; 在湍流流动中, $\alpha=1.05 \sim 1.10$ 。在实际工程计算中, 常取 $\alpha=1$ 。

动量方程

有了动能修正系数，则动能积分可写为

$$\int_A \frac{u^2}{2g} \rho g dQ = \frac{\rho g}{2g} \int u^3 dA = \frac{\rho g}{2g} \int \alpha v^3 dA = \frac{\alpha v^2}{2g} \rho g Q$$

● 能量损失积分

$\int_Q \rho g h'_{w1-2} dQ$ 表示单位时间内流过断面的流体克服1—2流段的阻力做功所损失的能量。总流中各元流能量损失也是沿断面变化的。为了计算方便， h_{w1-2} 为平均单位能量损失。则

$$\int_Q \rho g h'_{w1-2} dQ = h_{w1-2} \rho g Q$$

现在将以上各个积分值代入原积分式，可得

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2}$$

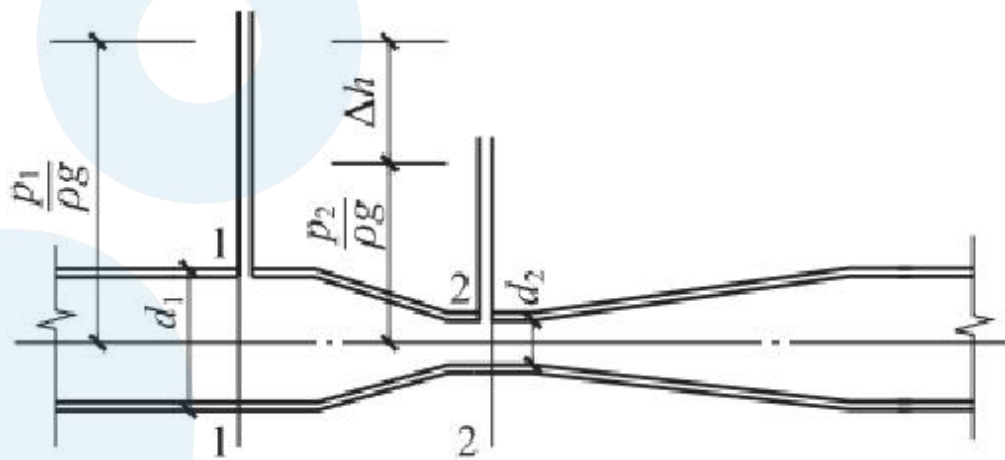
上式就是实际流体恒定总流的能量方程。

动量方程

● 能量方程的应用

文丘里流量计

文丘里流量计是一种测量管道流量的仪器，是总流能量方程在工程中的典型应用。文丘里流量计（见图）由收缩段、喉管及扩散段三部分组成。在收缩段进口前与喉管处安装有测压管或压差计，可以测出两断面的测压管水头差，再根据能量方程便可实现对流体流量的测量。



动量方程

沿程有能量输入或输出的能量方程

如果两过流断面间装有水泵、水轮机或风机等装置，流体将获得或失去能量；若单位重量流体获得或失去的能量为 H ，根据能量守恒原理，则有能量输入或输出的总流能量方程变为

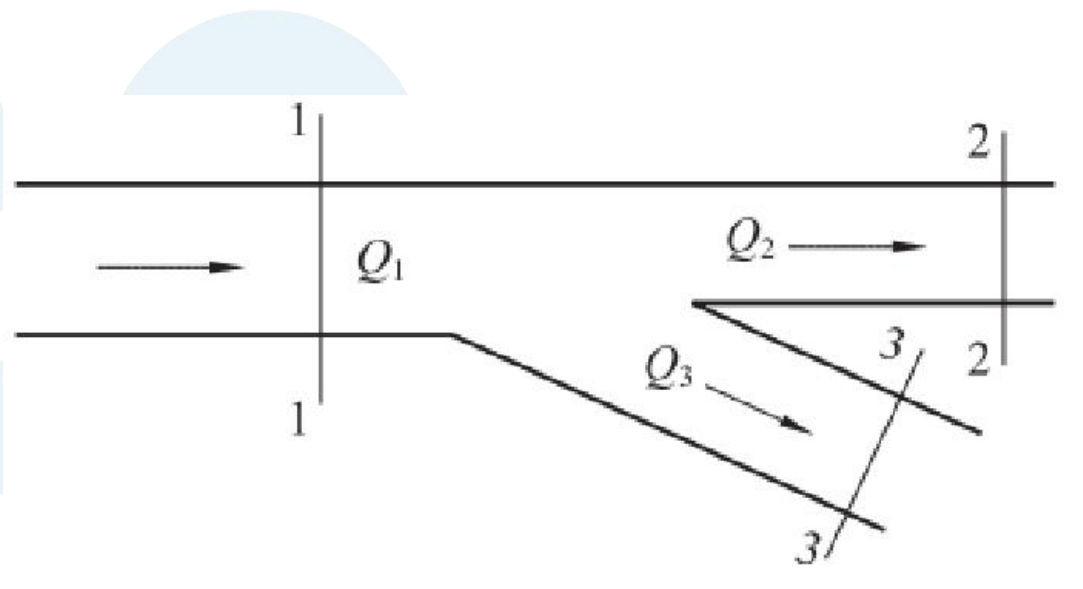
$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2} \pm H$$

式中，“- H ”为单位重量流体通过水泵时获得的能量；“+ H ”为单位重量流体通过水轮机时失去的能量。

动量方程

沿程有分流或合流的能量方程

如图所示，若1、2断面间有分流，纵然分流点是急变流断面，而离分流点稍远的1—1、2—2或3—3断面都是均匀流或渐变流断面，也可以近似认为各断面通过流体的单位能量在断面上的分布是均匀的。



能量方程

● 应用总流能量方程的注意事项

- ✓ 过流断面除必须选取渐变流或均匀流的断面外，一般应选取包含较多已知量或包含需求未知量的断面。
- ✓ 过流断面上的计算点原则上可以任意选取，这是因为在均匀流或渐变流的断面上任意一点的测压管水头都相等，并且过流断面上的平均流速水头与计算点的位置无关。
- ✓ 基准面是任意选取的水平面，但一般使 z 为正值。同一方程必须以同一基准面来度量，不同方程可采用不同的基准面。
- ✓ 方程中的压强 p_1 、 p_2 可用绝对压强或相对压强，但同一方程必须采用同种压强来度量。



谢谢!

