信号与系统

第3章 信号分解

课程性质：必修

目录

CONTENTS

1.正交函数集与信号分解

1、正交集(orthogonal set)

设集合S={s_1，s_2…s_n]，s_i,i=1,2,…n为集合s中的元素，可以是数字(number)，函数(function)，矢量(vector)等等。

在集合S上定义一种运算，称为“点积(dot product)”，用符号“.”表示，这种运算要求符合一些特定的条件（不做详细介绍，感兴趣的可以参考“泛函”）。

1.正交函数集与信号分解

如果满足：

$$\begin{cases} s_i \cdot s_j = 0 & i \neq j \\ s_i \cdot s_i \neq 0 & \end{cases}$$

则称集合(set)S为正交集

如果还满足：

$$s_i \cdot s_i = 1 \qquad i = 1,2,\cdots n$$

则称集合S为标准正交集(normal intersection)，如果集合S中的元素为函数，则称S为正交函数集。

1.正交函数集与信号分解

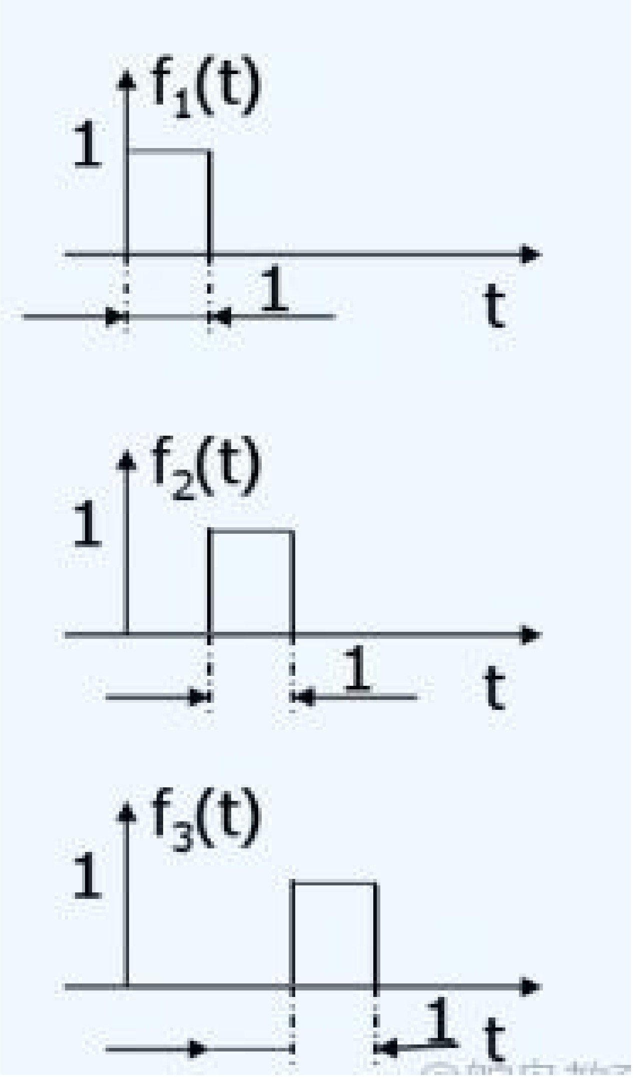
对函数集(function set)，一般定义“点积”如下：

设函数$f_1(t)$，$t\in[T_1, T_2]$，$f_2(t)$，$t\in[T_1, T_2]$

定义：

f_1点积f_2，$$f_1 \bullet f_2 = \int_{T_1}^{T_2} f_1(t) f_2(t)\, dt$$

可见右三个函数就构成了标准正交函数集(standard orthogonal function set)



1.正交函数集与信号分解

- "正交(orthogonal)"与"垂直(vertical)"的关系
- 正交的概念更为广泛，而垂直一般而言是正交在几何学(geometry)中的反映
- 但现在学术界一般将正交与垂直等价起来，也可以说函数之间有垂直关系

1.正交函数集与信号分解

- 如果集合(set)中的元素(element)仍为集合，并定义“点积”为交集(intersection)中元素的个数
- 定义集合A为{桃树}，集合B为{杏树}，集合C为{苹果树}，集合D为{梨树}
- 集合S={A，B，C，D}便构成了一个标准正交集

1.正交函数集与信号分解

如果F中的函数为复数函数(complex function)

条件为：

$$\begin{cases} \int_{T_1}^{T_2} f_i(t)\cdot f_j^*(t)dt = 0 & i \neq j \\ \int_{T_1}^{T_2} f_i(t)\cdot f_i^*(t)dt = K_i & i = 1,2\cdots n \end{cases}$$

其中$f_i^*(t)$为fi(t)的复共轭(conjugate)，例如

$f_i(t) = a(t) + jb(t)$，则 $f_i^*(t) = a(t) - jb(t)$ 换一种形式

$f_i(t) = r(t)e^{j\varphi(t)}$，则 $f_i^*(t) = r(t)e^{-j\varphi(t)}$

1.正交函数集与信号分解

信号在正交函数集上的分解(decompose)

一般意义上的正交集上的分解

- 从线性代数(linear algebra)的知识可知：
- C1=[1，0，0]，C2=[0，1，0]，C3=[0，0，1]构成了三维矢量空间(3D vector space)上的正交集。其点积的定义为：$C1 \cdot C2 = C1^T * C2$
- 任意一个三维矢量都可以由上述三个正交矢量线性表出：
- [x，y，z]=xC1+yC2+zC3
- 这就是正交集上的分解

1.正交函数集与信号分解

- 再比如A为{桃树}，集合B为{杏树}，集合C为{苹果树}，集合D为{梨树}
- 那么E={果树}≈A+B+C+D
- 由此可以看出，在正交集的取值空间(value space)中的元素，有可能能够由某正交集合中的元素准确地表出（通过线性叠加(linear stack)），也有可能不能够由某正交集合中的元素完全准确地表出。

1.正交函数集与信号分解

- 如果取值空间中的任一元素(element)均可以由某正交集中的元素准确的线性表出，我们就称该正交集是完备(complete)的，否则称该正交集是不完备的。
- 不完备的情况再比如：
- 在三维线性空间中，C1=[1，0，0]，C2=[0，1，0]所构成的正交集就不完备

2.信号的傅里叶级数表示

- 三角形式(triangular form)的傅里叶级数(fourier series)
- 指数形式(exponential form)的傅里叶级数(fourier series)

2.信号的傅里叶级数表示

一、三角形式的傅里叶级数(fourier series)形式

周期信号$f(t)$，周期为T，基波角频率为 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

在满足**狄里赫利条件**时，可展成

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \qquad (1)$$

称为三角形式的**傅里叶级数**，其系数

直流分量 $a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{d}t$

余弦分量的幅度 $a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega_1 t\,\mathrm{d}t$

正弦分量的幅度 $b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega_1 t\,\mathrm{d}t$

2.信号的傅里叶级数表示

利用三角函数(trigonometric function)的边角关系(edge and angle relationship)，还可以将一般三角形式化为标准的三角形式

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos n\omega_0 t - \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin n\omega_0 t\right] \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\cos\phi_n \cos n\omega_0 t - \sin\phi_n \sin n\omega_0 t) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)
\end{aligned}
$$

2.信号的傅里叶级数表示

余弦形式

(cosine form)

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t) \qquad (1)$$

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n) \qquad (2)$$

$$c_0=a_0 \qquad c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \qquad \phi_n=\arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

$$a_n=c_n\cos\varphi_n \qquad b_n=-c_n\sin\varphi_n$$

正弦形式

(sine form)

$$f(t)=d_0+\sum_{n=1}^{\infty}d_n\sin(n\omega_1 t+\theta_n) \qquad (3)$$

$$d_0=a_0 \qquad d_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \qquad \theta_n=\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

$$a_n=d_n\sin\theta_n \qquad b_n=d_n\cos\theta_n$$

2.信号的傅里叶级数表示

二、指数形式(exponential form)的傅里叶级数

1、指数形式的级数(series)

$$a_n\cos n\omega_1 t + b_n\sin n\omega_1 t$$

$$= a_n\frac{e^{jn\omega_1 t}+e^{-jn\omega_1 t}}{2} + b_n\frac{e^{jn\omega_1 t}-e^{-jn\omega_1 t}}{2j}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos n\omega_0 &= \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0}+e^{-jn\omega_0})\\ \sin n\omega_0 &= \frac{1}{j2}(e^{jn\omega_0}+e^{-jn\omega_0})\end{aligned}\right\}$$

$$e^{\pm jn\omega_0} = \cos n\omega_0 \pm j\sin n\omega_0$$

$$= \frac{a_n - jb_n}{2}e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2}e^{-jn\omega_1 t} \qquad -\infty < t < \infty$$

令 $a_0 = F_0 \qquad F_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2} \qquad F_{-n} = \dfrac{a_n + jb_n}{2}$

则 $a_n\cos n\omega_1 t + b_n\sin n\omega_1 t = F_n e^{jn\omega_1 t} + F_{-n}e^{-jn\omega_1 t}$

2.信号的傅里叶级数表示

$$a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t=F_n e^{jn\omega_1 t}+F_{-n}e^{-jn\omega_1 t}$$

$$\therefore f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t\right)$$

$$=F_0+\sum_{n=1}^{\infty}[F_n e^{jn\omega_1 t}+F_{-n}e^{-jn\omega_1 t}]$$

$$=F_0+\sum_{n=1}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}+\sum_{n=-\infty}^{-1}F_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}\qquad -\infty<t<\infty$$

傅里叶级数的复指数形式

- F_n为傅里叶级数系数(fourier series coefficient)，通过F_n，周期函数$f(t)$被表示成不同频率虚指数信号之和。
- 三角傅里叶级数和指数傅里叶级数虽形式不同，但实际上都属于同一性质的级数，即都是将一信号表示为直流分量和各次谐波分量(harmonic component)之和。

2.信号的傅里叶级数表示

◆连续时间傅里叶级数(fourier series)变换对：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

2.信号的傅里叶级数表示

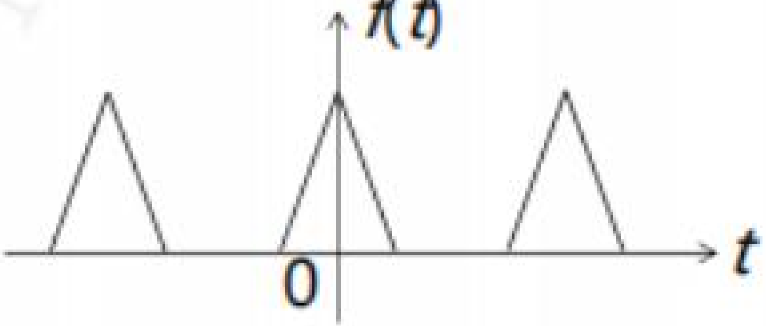
◆指数形式(exponential form)与三角形式(triangular form)系数之间的关系为

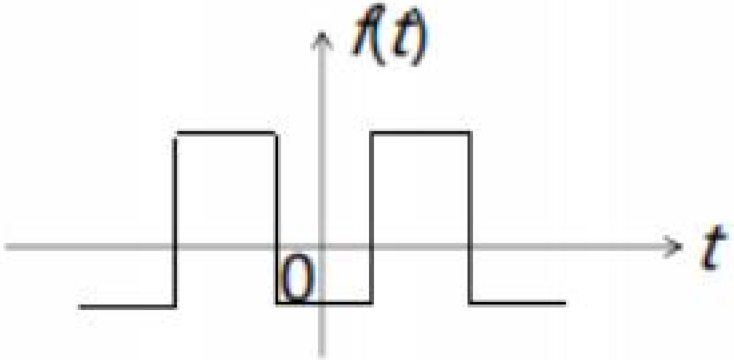
$$\left.\begin{aligned}
&F_0 = a_0 = c_0 \\
&F_n = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{2}c_n e^{j\phi_n} \\
&F_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{2}c_n e^{-j\phi_n} \\
&|F_n| = \frac{1}{2}c_n = |F_{-n}| \\
&\phi_n = -\arctan\frac{b_n}{a_n} \\
&F_n + F_{-n} = 2\mathrm{Re}[F_n] = a_n \\
&j(F_n - F_{-n}) = j2\mathrm{Im}[F_n] = b_n
\end{aligned}\right\}$$

2.信号的傅里叶级数表示

三、波形的对称性(symmetry)与傅里叶级数(fourier series)系数的关系

1．偶函数：$f(t)=f(-t)$ 纵轴对称





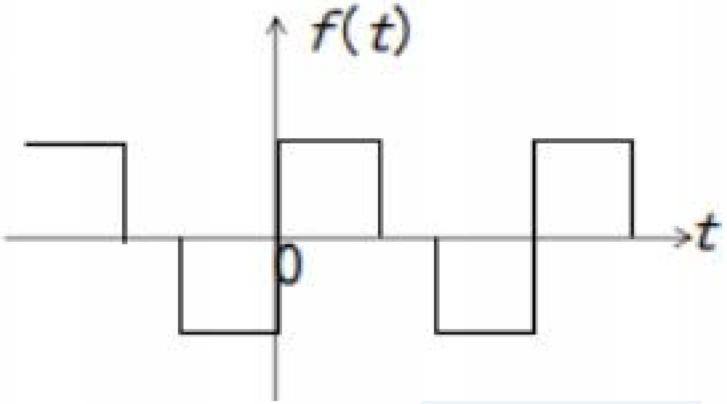
$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t dt=0$$

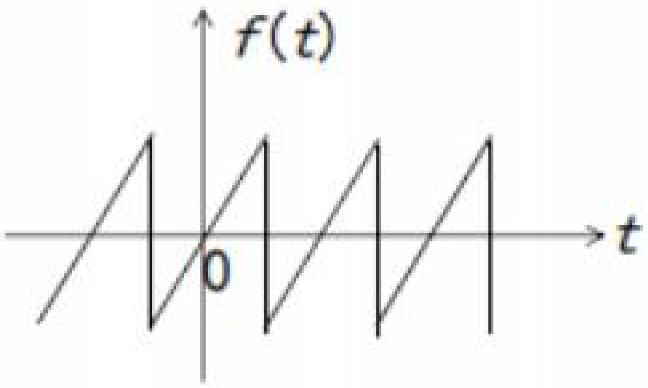
$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t dt=\frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t dt$$

只有恒定分量(constant component)和余弦项(cosine term)

2.信号的傅里叶级数表示

2.奇函数f(t)=-f(-t)原点对称(origin symmetry)





$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t dt = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t dt$$

只有正弦项(sine term)

3.周期信号频谱，傅里叶变换与非周期信号频谱

1.频谱(spectrum)的概念

三角形式

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n)$$

指数形式

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$$

周期信号(periodic signal)的频率分量总体称为信号的频谱，或周期信号所有谐波分量随频率的分布。

不同的时域信号(time-domain signal)，只是傅里叶级数的系数不同，因此通过研究傅里叶级数的系数来研究信号的特性。

系数 c_n、φ_n、F_n 反映了组成信号各次谐波的幅度(range)和相位(phase)随频率变化的规律。

3.周期信号频谱，傅里叶变换与非周期信号频谱

2.频谱(spectrum)的表示

直接画出信号各次谐波(harmonic)对应的振幅$c_n(|F_n|)$及相位 φ_n 随w变化的曲线，这种线状分布图形称为信号的**频谱图(spectrogram)**。

- ◆ 三角函数形式频谱
- ◆ 指数函数形式频谱

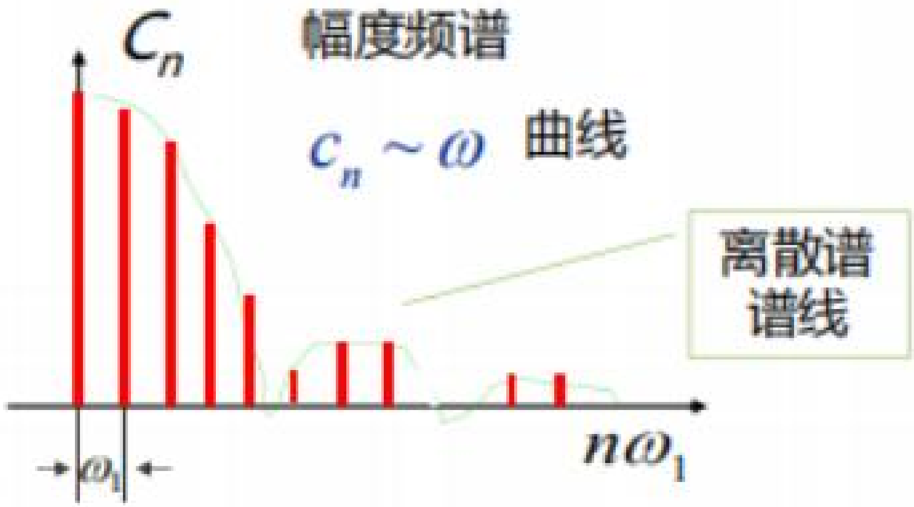
3.周期信号频谱，傅里叶变换与非周期信号频谱

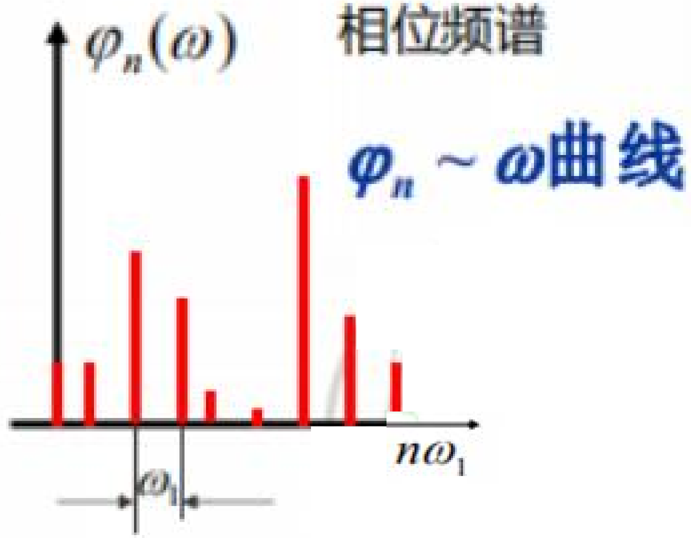
（1）三角函数形式频谱

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n)$$

$C_n\sim\omega$ 关系曲线称为幅度频谱图

$\varphi_n\sim\omega$ 关系曲线称为相位频谱图





单边频谱：频谱图总在ω≥0的半平面上。

3.周期信号频谱，傅里叶变换与非周期信号频谱

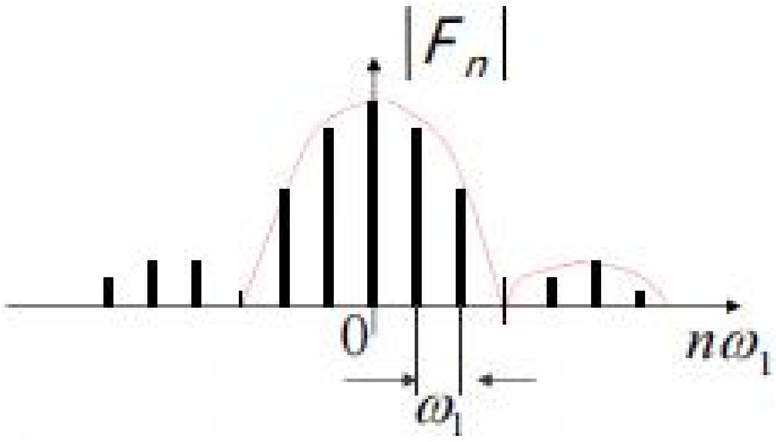
(2) 指数函数形式频谱

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$F_n=|F_n|e^{j\varphi_n}$$

$|F_n|\sim\omega$ 关系曲线称为幅频图

$\varphi_n\sim\omega$ 关系曲线称为相频图



双边频谱：$n\omega_1$ 由-∞到+∞在整个ω轴变化

3.周期信号频谱，傅里叶变换与非周期信号频谱

(3)两种频谱图(spectrogram)的关系

三角函数形式: $c_n \sim \omega$, $\varphi_n \sim \omega$ 单边频谱

指数函数形式: $|F_n| \sim \omega$, $\varphi_n \sim \omega$ 双边频谱

- 幅频特性 $|F_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2}c_n \ (n \neq 0)$ $F_0 = a_0 = c_0$

幅度谱为偶函数 $|F_n| = |F_{-n}|$

- 相频特性 $\varphi_n = tg^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$

相位频谱为奇函数 $\varphi(n\omega_1) = -\varphi(-n\omega_1)$

3.周期信号频谱，傅里叶变换与非周期信号频谱

3、周期信号频谱的特点

离散性(discreteness)：频谱由不连续的谱线组成，每一条谱线代表一个正弦分量

谐波性(harmonic)：每一条谱线只能出现在基波频率的整数倍频率上，即只有基波频率的各次谐波分量

收敛性(astringency)：即各次谐波分量的振幅随着谐波次数的增大而逐渐减小。

注意：冲激函数(impulse function)序列的频谱不满足收敛性。

3.周期信号频谱，傅里叶变换与非周期信号频谱

结论(conclusion)

τ 由大变小，F_n 的第一个过零点频率增大

$$Sa(\frac{\omega\tau}{2})=0 \qquad \frac{\omega\tau}{2}=\pi \qquad \omega=\frac{2\pi}{\tau}$$

通常将 $\omega=0\sim\frac{2\pi}{\tau}$ 这段频率范围称为矩形脉冲信号的频带宽度

记为 $B_\omega=\frac{2\pi}{\tau}$ 或 $B_f=\frac{1}{\tau}$

τ 确定了带宽，τ 由大变小，频谱的幅度变小

由于 T 不变，谱线间隔不变，即 $\omega_1=\frac{2\pi}{T}$ 不变。

3.周期信号频谱，傅里叶变换与非周期信号频谱

结论(conclusion)

- τ不变，F_n的第一个过零点频率不变

即 $\omega = \dfrac{2\pi}{\tau}$ $\quad\therefore\quad B_f = \dfrac{1}{\tau}$ 带宽不变。

- T由小变大，谐波频率成分丰富，并且频谱的幅度变小。

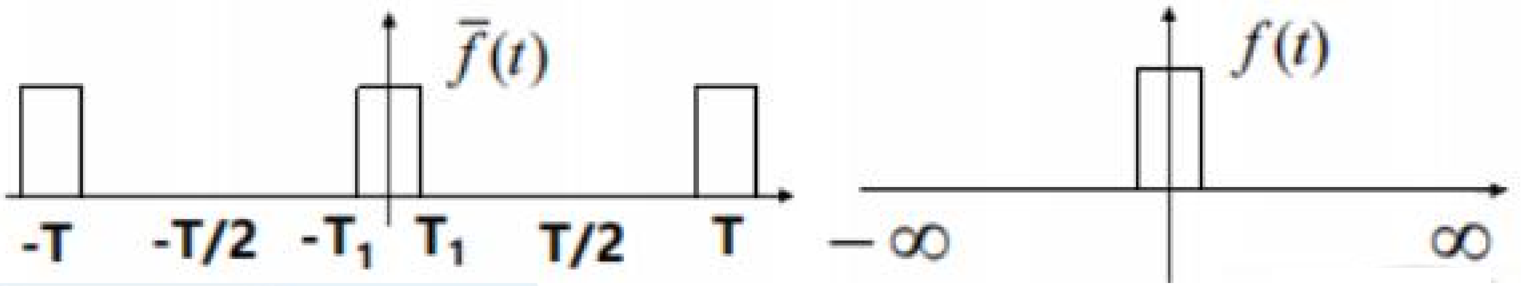
❖ $T \to \infty$时，谱线间隔 $\to 0$ ，这时

周期信号(periodic signal)→非周期信号(aperiodic signal)
离散频谱(discrete spectrum)→连续频谱(continuous spectrum)

3.周期信号频谱，傅里叶变换与非周期信号频谱

周期信号(periodic signal)的傅里叶级数变换对(transform pair)：

$$\boxed{f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\, e^{jn\omega_1 t} \qquad F_n=\frac{1}{T}\int_{T} f(t)\ e^{-jn\omega_1 t}\,dt}$$



当周期矩形脉冲信号的周期T无限大时，就演变成了非周期信号的单脉冲信号(monopulse signal)

3.周期信号频谱，傅里叶变换与非周期信号频谱

$T \to \infty$

$\bar{f}(t)$周期信号 ⟹ 非周期信号$f(t)$

谱线间隔 $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$ ⟹ 0

离散谱 ⟹ 连续谱

复振幅 $F_n = \dfrac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$ ⟹ 0

因此，对非周期信号不能再用Fn表示频谱，必须引入一个新的量--频谱密度函数(spectral density function)。

3.周期信号频谱，傅里叶变换与非周期信号频谱

二、非周期信号(aperiodic signal)的频谱函数(spectral function)

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

说明非周期信号$f(t)$表示成复指数 $e^{j\omega t}$的连续和

振幅为 $\frac{1}{2\pi}F(j\omega)d\omega$，

对任一ω，因$d\omega$为无穷小，

所以$e^{j\omega t}$的绝对振幅 $\left|\frac{1}{2\pi}F(j\omega)d\omega\right|\rightarrow 0$ 也是无穷小

虽然各频谱幅度无限小，但相对大小仍有区别

$$F(j\omega)=\lim_{T\rightarrow\infty}TF_n=\lim_{\omega_1\rightarrow 0}\frac{2\pi F_n}{\omega_1}=\lim_{f\rightarrow 0}\frac{F_n}{f}$$

$F(j\omega)$称为非周期函数$f(t)$的频谱密度函数

或简称频谱函数、频谱

3.周期信号频谱，傅里叶变换与非周期信号频谱

频谱密度函数(density function)的表示

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{-j\omega t}dt\ =F[f(t)]$$

频谱密度函数F(jw)一般是复函数，可记为

$$F(j\omega)=|F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$|F(j\omega)|\sim\omega$ **幅度频谱(amplitude spectrum)**

$\varphi(\omega)\sim\omega$ **相位频谱(phase spectrum)**

3.周期信号频谱，傅里叶变换与非周期信号频谱

傅里叶变换(fourier transform)存在的充分条件(sufficient condition)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

即f(t)绝对可积是傅里叶变换存在的充分条件

所有能量信号均满足此条件

但阶跃函数(step function)、正弦函数(sine function)等不满足上述绝对可积条件，由于引入广义函数，这些函数在广义的意义上存在傅里叶变换

3.周期信号频谱，傅里叶变换与非周期信号频谱

周期信号(periodic signal)傅里叶级数变换对：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,e^{jn\omega_1 t}$$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{T}f(t)\;e^{-jn\omega_1 t}dt$$

非周期信号(aperiodic signal)傅里叶变换对：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

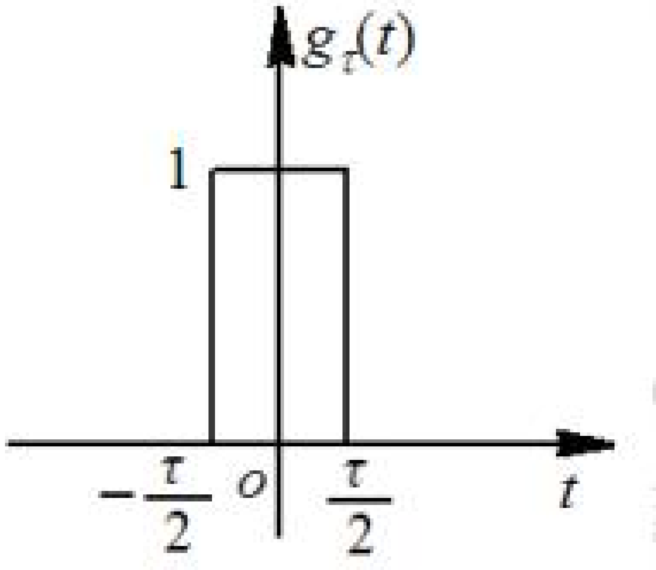
$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\;e^{-j\omega t}dt$$

4.常用信号和周期信号的傅里叶变换

◆门函数

矩形脉冲一般称为门函数。
其宽度为r，高度为1，通常用符号$g_r(t)$来表示。

$$g_\tau(t)=\begin{cases}1 & |t|<\dfrac{\tau}{2}\\[2ex] 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$



4.常用信号和周期信号的傅里叶变换

门函数$g_\tau(t)$的傅里叶变换为：

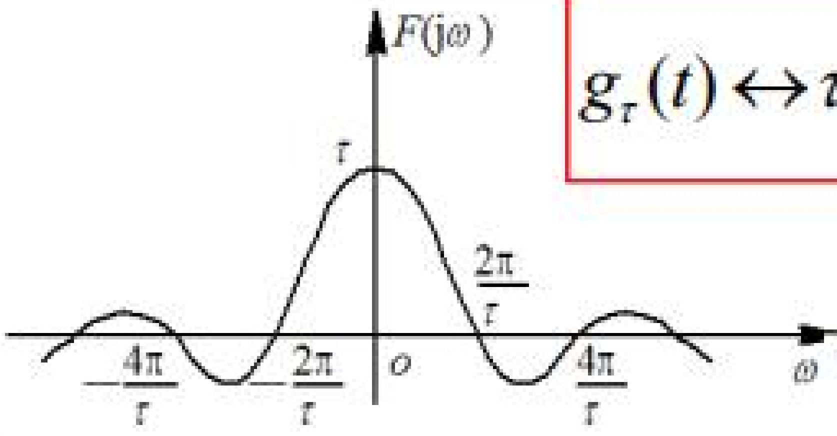
$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g_\tau(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t}dt=\frac{e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}-e^{j\frac{\omega\tau}{2}}}{-j\omega}$$

$$=\frac{2\sin(\omega\tau/2)}{\omega}=\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}=\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

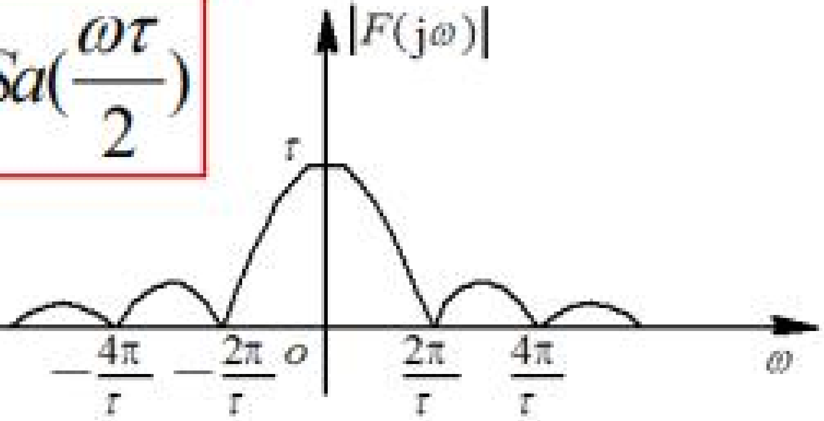
幅度频谱：$|F(j\omega)|=\begin{cases}\tau & \omega=0\\ 0 & \omega=\frac{2k\pi}{\tau}\end{cases}$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$

相位频谱：$\varphi_n=\begin{cases}0 & F(j\omega)>0\\ \pm\pi & F(j\omega)<0\end{cases}$

4.常用信号和周期信号的傅里叶变换



$$\boxed{g_\tau(t) \leftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}$$

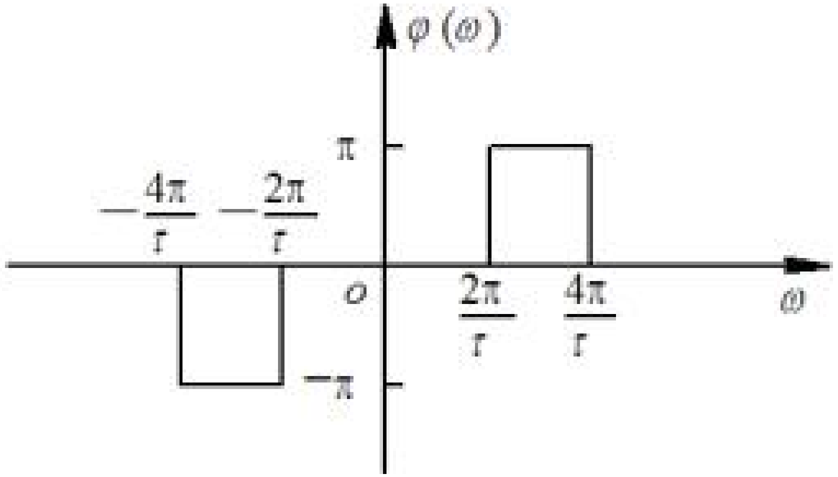


频带宽度：

$$\omega = 0 \sim \frac{2\pi}{\tau}$$

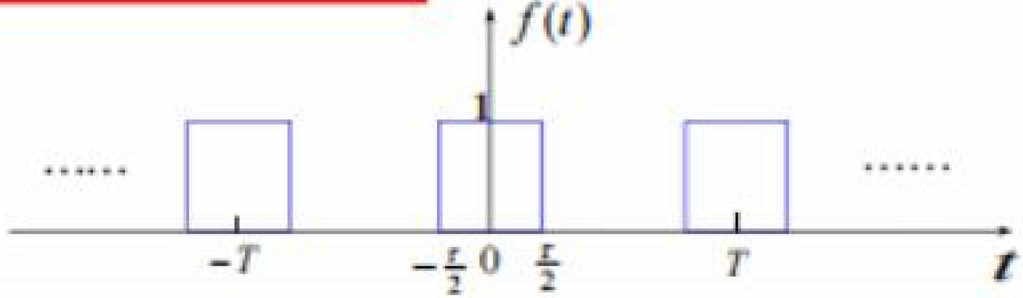
$$\omega_B = \frac{2\pi}{\tau}(rad/s)$$

$$f_B = \frac{1}{\tau}(Hz)$$



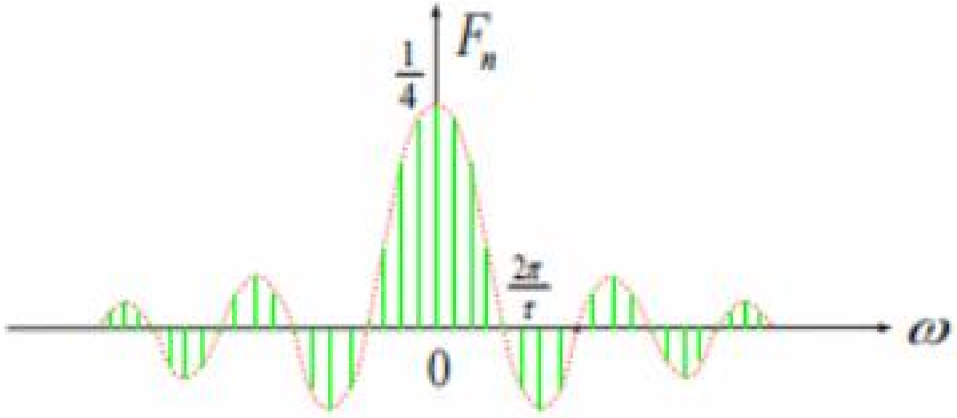
4.常用信号和周期信号的傅里叶变换

周期矩形脉冲的频谱



频谱为：

$$F_n = \frac{\tau}{T} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$



4.常用信号和周期信号的傅里叶变换

周期和非周期矩形脉冲信号频谱的对比

1）非周期矩形脉冲信号的频谱是连续频谱，其形状与周期矩形脉冲信号离散频谱的包络线相似，它们都具有抽样函数 $Sa(x)$ 的形式。

2） $F_n = \frac{\tau}{T} Sa(\frac{n\omega_1\tau}{2})$ 和 $F(j\omega) = \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$ 。

a.Fn值较F(jw)值多乘了1/T，这是由于两者的定义规定的。

b.对于由非周期脉冲按一定的周期T重复后构成的周期信号，F（jw）和Fn之间可以互求。

*Fn可以通过对F（jw）等间隔取样求得，

*F（jw）可以通过将Fn中nw_1换成连续变量w得

4.常用信号和周期信号的傅里叶变换

3）非周期信号(aperiodic signal)的频谱和周期信号(periodic signal)的频谱一样也具有收敛性(astringency)。

4）非周期信号带宽的定义方法与周期信号相同。

5）非周期信号的频谱分量主要集中在零频到第一个过零点之间，即有效带宽(bandwidth)内。

6）（周期或非周期）信号在时域有限，则在频域将无限延续。

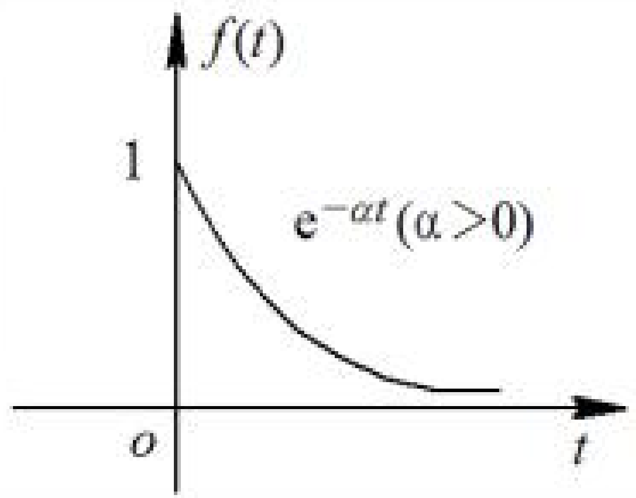
7）（周期或非周期信号）脉冲宽度越窄，有效带宽越宽，高频分量(high frequency component)越多，即信号信息量大，传送信号所占用的频带越宽。

4.常用信号和周期信号的傅里叶变换

单边指数信号一

$$f(t)=\begin{cases} e^{-at} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \quad (\alpha>0)$$

$$= e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$$



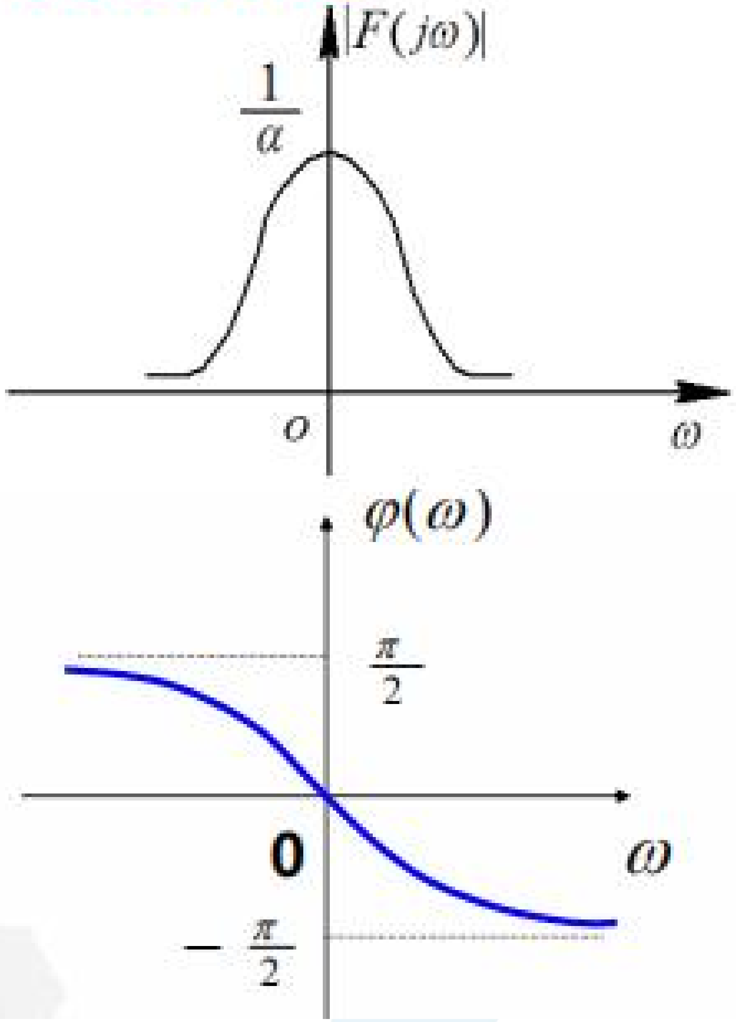
其傅立叶变换： $(\alpha<0)$ 傅立叶变换不存在

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\cdot e^{-j\omega t}dt=\left.\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{-(\alpha+j\omega)}\right|_{0}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{\alpha+j\omega}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\cdot e^{-j\arctan\frac{\omega}{\alpha}}$$

4.常用信号和周期信号的傅里叶变换

❖ 单边指数信号一



$$\boxed{e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}}$$

幅度频谱：

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

相位频谱：

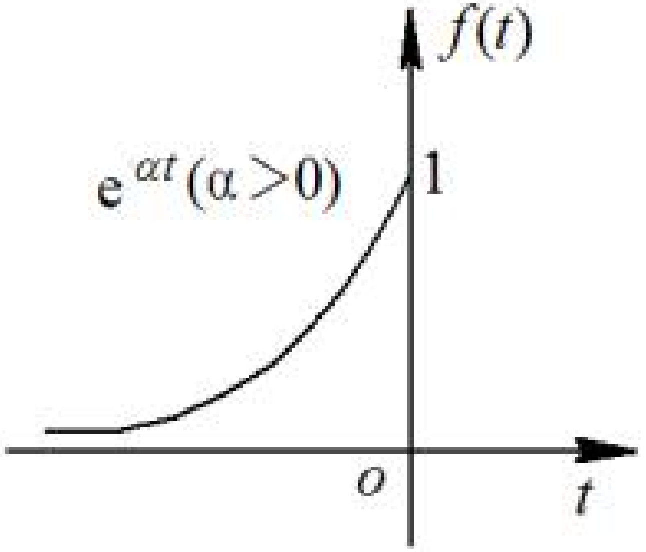
$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

4.常用信号和周期信号的傅里叶变换

❖单边指数信号二

$$f(t)=\begin{cases} e^{\alpha t} & t<0 \\ 0 & t>0 \end{cases} \quad (\alpha>0)$$

$$=e^{\alpha t}\varepsilon(-t)$$



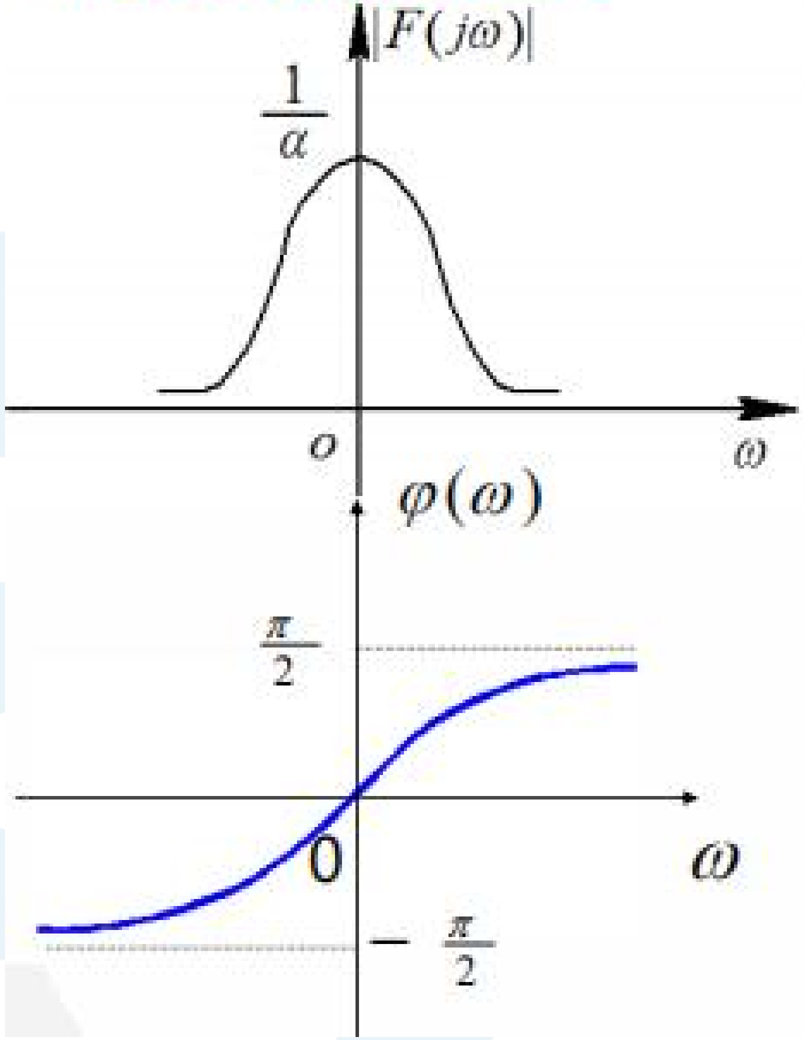
其傅立叶变换：

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}\cdot e^{-j\omega t}dt=\left.\frac{e^{(\alpha-j\omega)}}{\alpha-j\omega}\right|_{-\infty}^{0}$$

$$=\frac{1}{\alpha-j\omega}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\cdot e^{j\arctan\frac{\omega}{\alpha}}$$

4.常用信号和周期信号的傅里叶变换

❖ 单边指数信号二



$$\boxed{e^{\alpha t}\varepsilon(-t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha - j\omega}}$$

幅度频谱：

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$

相位频谱:

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

5.傅里叶变换基本性质

一.线性性质(linear property)

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$，$f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$，

且设 a_1, a_2 为常数，则有

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega)$$

例.利用傅里叶变换的性质求单位阶跃信号的频谱函数。

解：因为 $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$

由线性性质

$$F(j\omega) = \frac{1}{2}F[1] + \frac{1}{2}F[\mathrm{sgn}(t)] = \frac{1}{2}2\pi\delta(\omega) + \frac{1}{2}\frac{2}{j\omega}$$

$$= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

5.傅里叶变换基本性质

二.时移特性(time-shift characteristic)

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，则 $f(t-t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

式中 t_0为实常数(可正可负)

若 $F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$ 则 $f(t-t_0) \leftrightarrow |F(j\omega)|e^{j[\phi(\omega)-\omega t_0]}$

幅度频谱无变化，只影响相位频谱

5.傅里叶变换基本性质

三.频移特性(frequency shift characteristic)

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$， **且 ω_0 为实常数，则**

$$\left.\begin{aligned} f(t)e^{j\omega_0 t} &\leftrightarrow F[j(\omega-\omega_0)] \\ f(t)e^{-j\omega_0 t} &\leftrightarrow F[j(\omega+\omega_0)] \end{aligned}\right\}$$

注意 ω_0 的 $\pm$号

5.傅里叶变换基本性质

频移特性(frequency shift characteristic)表明信号在时域中与复因子相乘，则在频域中将使整个频谱搬移w_0。

应用：通信中调制与解调，频分复用(frequency division multiplexing)

实际调制解调的载波（本振）信号是正、余弦信号(sine and cosine signals)，借助欧拉公式(Euler formula)，正、余弦信号可以分别表示为

推论：调制定理（modulation theorem）

$$\left.\begin{aligned} f(t)\cos\omega_0 t &\leftrightarrow \frac{1}{2}\{F[j(\omega-\omega_0)]+F[j(\omega+\omega_0)]\} \\ f(t)\sin\omega_0 t &\leftrightarrow \frac{1}{2j}\{F[j(\omega-\omega_0)]-F[j(\omega+\omega_0)]\} \end{aligned}\right\}$$

5.傅里叶变换基本性质

四.尺度变换性质(scale transformation property)

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$， a为非零实常数，

则 $f(at) \leftrightarrow \dfrac{1}{|a|}F(j\dfrac{\omega}{a})$

意义：

(1) $0 < a < 1$ 时域扩展，频域压缩，频谱幅度增大；

(2) $a > 1$ 时域压缩，频域扩展 a 倍，频谱幅度减小；

(3) $a = -1$ $f(t) \to f(-t)$，$F(j\omega) \to F(-j\omega)$

信号的脉宽(pulse width)与频宽(bandwidth)成反比

5.傅里叶变换基本性质

五.对称性(symmetry) 时域与频域的对称性

$$\boxed{\text{若 } f(t) \leftrightarrow F(j\omega)\text{，} \quad \text{则 } F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)}$$

意义：

若F（jt）形状与F（jw）相同（$w \to t$），

则F（jt）的频谱函数形状与f（t）形状相同（t→w）

幅度差2Π。

5.傅里叶变换基本性质

六.时域微分性质(time domain differential property)

$$\boxed{\text{若 } f(t) \leftrightarrow F(j\omega)\text{，则 } f'(t) \leftrightarrow j\omega F(j\omega)}$$

七.频域微分性质(frequency domain differential property)

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$，则 $tf(t) \leftrightarrow j\dfrac{dF(j\omega)}{d\omega}$

或 $-jtf(t) \leftrightarrow \dfrac{dF(j\omega)}{d\omega} = F'(j\omega)$

5.傅里叶变换基本性质

八.时域卷积定理(time domain convolution theorem)

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$，$f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$，则

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

时域的卷积对应于频域频谱密度函数(density function)的乘积

本性质是把时域分析方法与频域分析方法联系起来的重要桥梁

若已知输入f（t）及系统的单位冲激响应(unit impulse response)h（t），

则由输入f（t）引起的零状态响应(zero state response)为：

时域分析 $y_f(t) = h(t) * f(t)$

频域分析 $F[y_f(t)] = H(j\omega) \cdot F(j\omega)$

5.傅里叶变换基本性质

九.频域(frequency domain)卷积(convolution)定理

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$，$f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$，则

$$\boxed{f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)}$$

时间函数的乘积 $\leftrightarrow$ 各频谱函数卷积的 $1/2\pi$ 倍。

5.傅里叶变换基本性质

十.时域积分(time domain integration)

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$， 则

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \leftrightarrow \frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

5.傅里叶变换基本性质

十一.频域积分(frequency domain integration)

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$， 则

$$\frac{f(\mathrm{t})}{-\mathrm{jt}} + \pi f(0)\delta(\mathrm{t}) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{d}\Omega$$

十二.帕塞瓦定理(Paseval theorem)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$$

谢谢聆听

Thanks for listening!