信号与系统

第4章 连续时间系统的频域分析

课程性质：必修

目录

CONTENTS

1.信号通过系统的频域分析方法

系统的频响函数(frequency response function)

设激励(excitation)是f(t)，系统的单位冲激响应(unit impulse response)为h(t)，若系统的初始状态为零，则系统的响应为

$$y(t)=f(t)*h(t)$$

两边取傅里叶变换(fourier transform)，由卷积定理(convolution theorem)可得

$$Y(j\omega)=F(j\omega)H(j\omega)$$

- H(jw)是系统**单位冲激响应h(t)**的傅里叶变换。
- 系统单位冲激响应h(t)表征的是系统时域(time domain)特性。
- H(jw)表征的是系统频域(frequency domain)特性。称做**系统频率响应函数**，简称**频响函数或系统函数**。

1.信号通过系统的频域分析方法

在一般n阶系统情况下，数学模型(mathematical model)为

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{d y(t)}{dt}+a_0 y(t)$$
$$=b_m\frac{d^m f(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{d f(t)}{dt}+b_0 f(t)$$

令初始条件为零，两端取傅立叶变换(fourier transformation)，得

$$\sum_{k=0}^{n}a_k(j\omega)^k Y(j\omega)=\sum_{k=0}^{m}b_k(j\omega)^k F(j\omega)$$

$$\therefore\ H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)}=\frac{\sum_{k=0}^{m}b_k(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{n}a_k(j\omega)^k}$$

H(jw)只与系统(system)本身有关，与激励(excitation)无关。

1.信号通过系统的频域分析方法

例：已知系统方程为：$\frac{dy}{dt}+y(t)=f(t)$ 求传递函数 $H(j\omega)$

解： 令系统初始条件为零，两端取傅立叶变换，得

$$j\omega Y(j\omega)+Y(j\omega)=F(j\omega)$$

$$(j\omega+1)Y(j\omega)=F(j\omega)$$

$$\therefore\ H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)}=\frac{1}{j\omega+1}$$

1.信号通过系统的频域分析方法

例：求二阶系统的传递函数，数学模型为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y(t)=\frac{df}{dt}+f(t)$$

解：　令初始条件为零，上式两端取傅立叶变换，得

$$[(j\omega)^2+3j\omega+2]Y(j\omega)=(j\omega+1)F(j\omega)$$

$$\therefore\ H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)}=\frac{j\omega+1}{(j\omega)^2+3j\omega+2}$$

1.信号通过系统的频域分析方法

系统频域(frequency domain)分析过程如下：

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega)$$

$$\downarrow$$

$$y_f(t) = F^{-1}[Y(j\omega)]$$

注意：

上述求得的系统响应是零状态响应(zero state response)，零输入响应要按时域方法求出。由H（p）或H（jw）求得极点，对应y_x（t）的基本形式，再代入初始条件确定积分常数(integral constant)，求得y_x（t）

一般 $H(j\omega) = H(p)\big|_{p=j\omega}$

1.信号通过系统的频域分析方法

例：已知输入 $f(t)=e^{-2t}u(t)$，系统传递函数为

$$H(j\omega)=\frac{j\omega}{(j\omega)^2+4j\omega+3}$$ ，初始条件为零，求系统响应。

解： 因初始条件为零，系统只有零状态响应

$$F(j\omega)=F[f(t)]=\frac{1}{j\omega+2} \qquad H(j\omega)=\frac{j\omega}{(j\omega+3)(j\omega+1)}$$

$$Y(j\omega)=H(j\omega)F(j\omega)=\frac{j\omega}{(j\omega+3)(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

$$=\frac{-3/2}{j\omega+3}+\frac{2}{j\omega+2}+\frac{-1/2}{j\omega+1}$$

$$\therefore\ y_f(t)=F^{-1}[Y(j\omega)]=(-\frac{3}{2}e^{-3t}+2e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-t})u(t)$$

1.信号通过系统的频域分析方法

四、系统分析频域方法的限制条件(restrictions)

1.输入f（t）的傅立叶变换(fourier transformation)必须存在

2.系统频域传递函数H（jw）必须存在

$$H(j\omega)=F[h(t)]$$

2.理想低通滤波器的冲激响应与阶跃响应

理想低通滤波器

2.理想低通滤波器的冲激响应与阶跃响应

理想低通滤波器(ideal low-pass filter)：

　　让低于某频率的信号(signal)无失真通过，让高于某频率的信号截止的系统(system)。

应用：

从电视机天线上所有的信号中，选出所需要频道信号

- 经典滤波的概念往往与选频有关
- 现代滤波的概念更加广泛，凡是信号频谱经过系统后发生了改变，都认为是滤波。

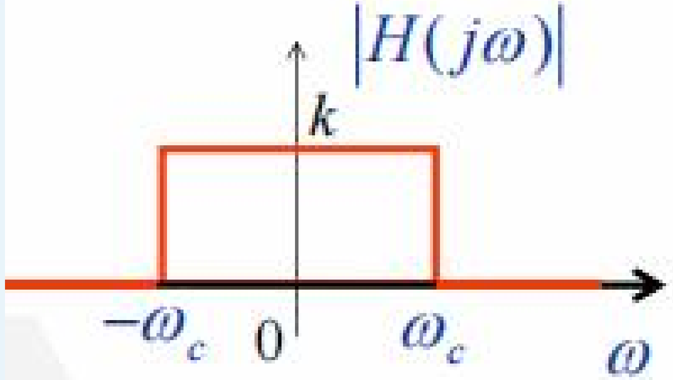
2.理想低通滤波器的冲激响应与阶跃响应

一、理想低通(ideal low pass)的频率特性(frequency characteristic)

系统函数(system function)为：

$$H(j\omega)=\begin{cases} ke^{-j\omega t_0} & |\omega|\le\omega_c \quad \text{通带} \\ 0 & |\omega|>\omega_c \quad \text{阻带} \end{cases}$$

ω_c -截止频率　　　t_0-延迟时间



2.理想低通滤波器的冲激响应与阶跃响应

二、理想低通(ideal low pass)的冲激响应(impulse response)

$$H(j\omega)=\begin{cases} ke^{-j\omega t_0} & |\omega|\le\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c \end{cases}$$

单位冲激响应为：

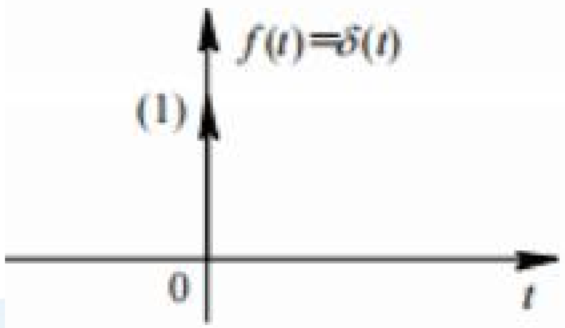
$$h(t)=F^{-1}[H(j\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

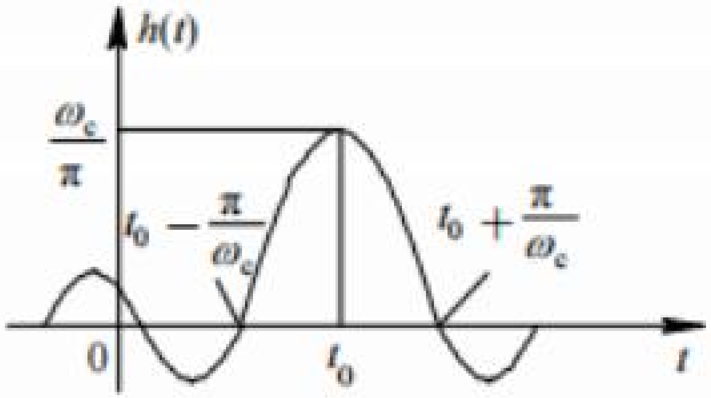
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}ke^{-j\omega t_0}\cdot e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}ke^{j\omega(t-t_0)}d\omega$$

$$=\frac{k}{2\pi}\frac{1}{j(t-t_0)}e^{j\omega(t-t_0)}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

$$=\frac{\omega_c k}{\pi}S_a[\omega_c(t-t_0)]$$

2.理想低通滤波器的冲激响应与阶跃响应





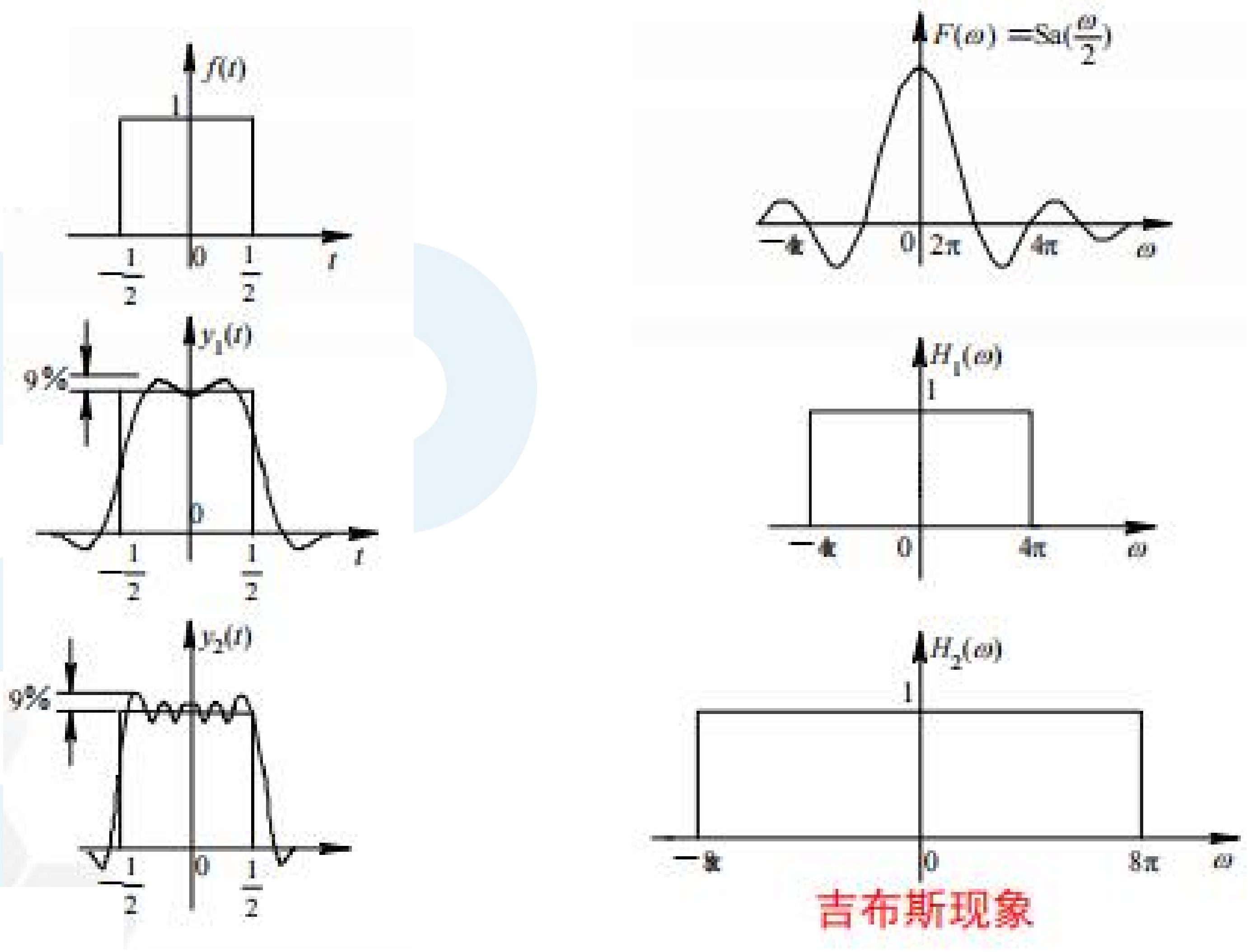
◆对在t=0时刻加入的激励(excitation)，其响应的最大值(maximum)出现在t0处，说明**响应(response)建立需要时间**。

◆在响应脉冲建立的前后出现了起伏振荡(oscillation)，因为相当一部分的高频分量被完全抑制了，**产生严重失真(distortion)**。

◆t<0时有响应出现表明系统是非因果的，而违背了因果律的系统是**物理不可实现的**。

2.理想低通滤波器的冲激响应与阶跃响应

不同带宽的理想低通对矩形脉冲的响应



吉布斯现象

3.佩利维纳准则

三.系统物理可实现性和佩利—维纳准则(Pali Wiener criterion)

理想低通滤波器(ideal low-pass filter)是物理不可实现的系统

系统物理可实现的准则

时域准则(Time domain criterion)

$t<0$时， $h(t)=0$

频域准则(Frequency domain criterion)

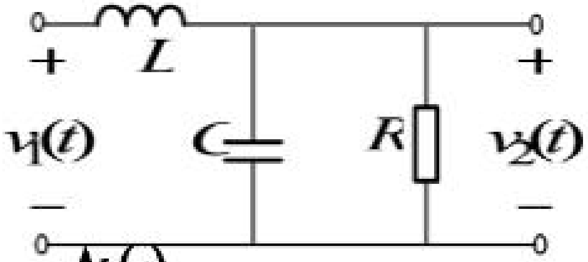
系统物理可实现的必要条件

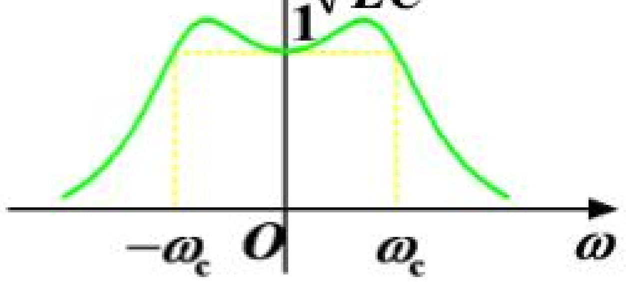
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\ln\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|\right|}{1+\omega^2} \mathrm{d}\omega < \infty$$

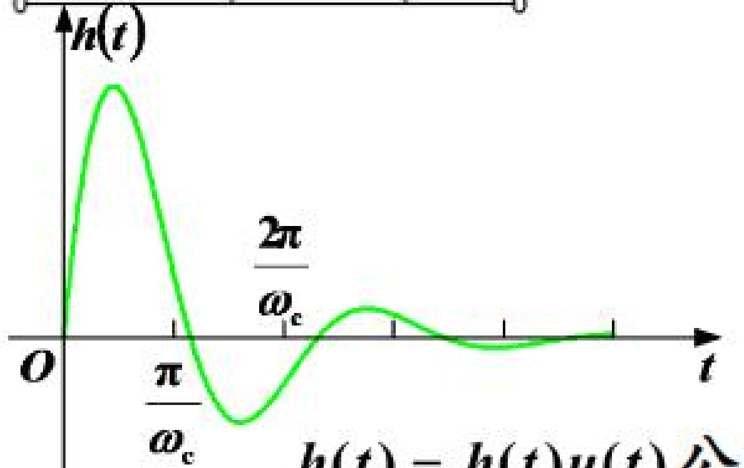
3.佩利维纳准则

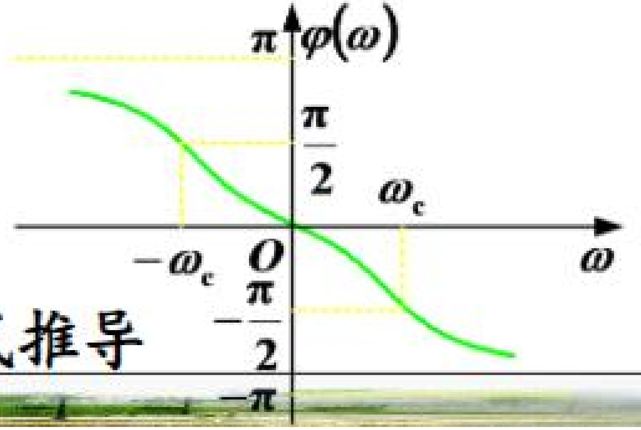
一、一种可实现的低通

理想低通滤波器在物理上是不可实现的，近似理想低通滤波器的实例 $R=\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 时，且令 $\omega_c=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$







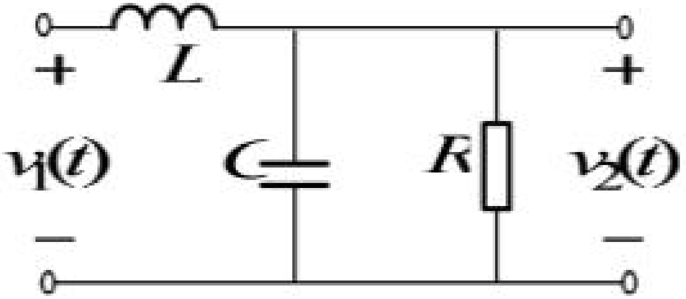


$h(t)=h(t)u(t)$ 公式推导

3.佩利维纳准则

可实现的低通

近似理想低通滤波器的实例



$$R=\sqrt{\frac{L}{C}}$$

网络传递函数

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{V_2(\mathrm{j}\omega)}{V_1(\mathrm{j}\omega)}=\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R}+\mathrm{j}\omega C}}{\mathrm{j}\omega L+\dfrac{1}{\dfrac{1}{R}+\mathrm{j}\omega C}}=\frac{1}{1-\omega^2 LC+\mathrm{j}\omega\dfrac{L}{R}}$$

3.佩利维纳准则

注意到$R=\sqrt{\frac{L}{C}}$，并引入符号$\omega_c=\frac{1}{\sqrt{LC}}$，则

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}=\frac{2\omega_c}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c}{\left(\frac{\omega_c}{2}+\mathrm{j}\omega\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c\right)^2}=\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

$$\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right]^2+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}\qquad \varphi(\omega)=-\arctan\left[\frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}\right]$$

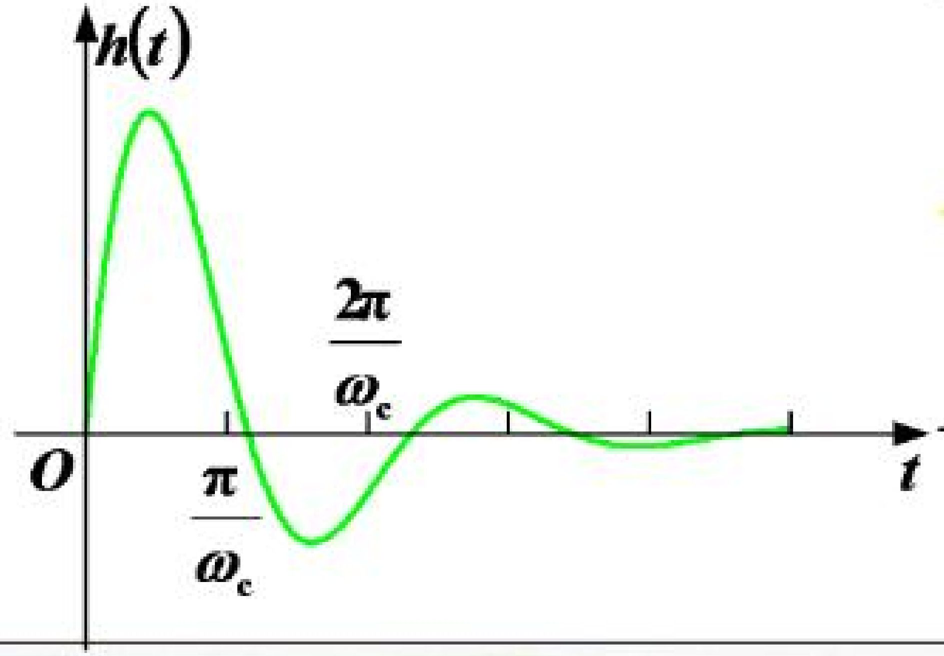
$$h(t)=F^{-1}[H(\mathrm{j}\omega)]=\frac{2\omega_c}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega_c t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c t\right)$$

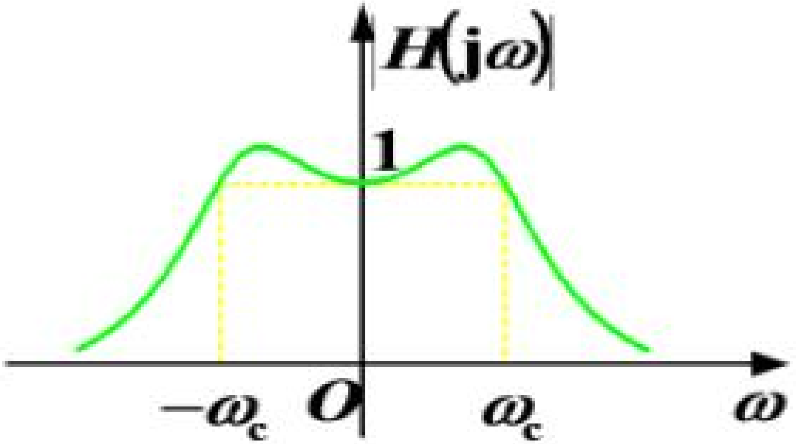
3.佩利维纳准则

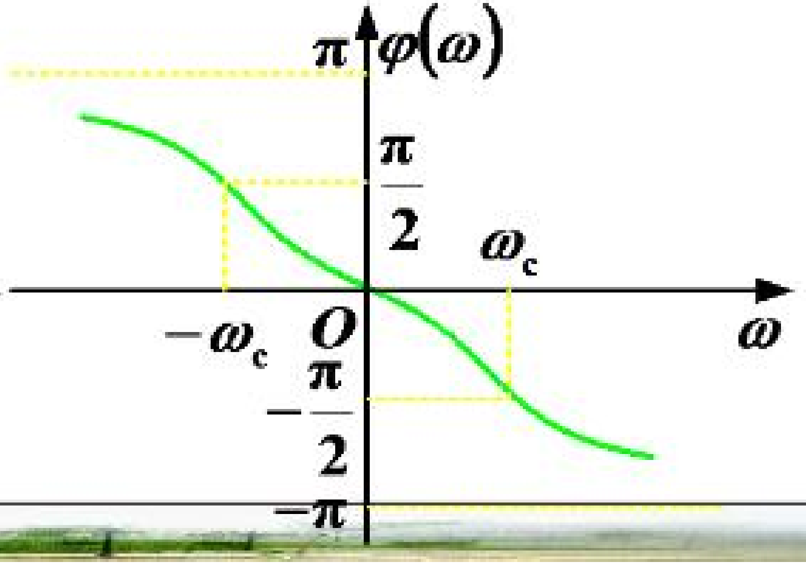
$$h(t)=\frac{2\omega_c}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\omega_c t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c t\right)$$

响应是从$t=0$开始，

是一个可实现的网络。







3.佩利维纳准则

二. 佩利 - 维纳准则

物理可实现的网络

时域特性 $h(t)=h(t)u(t)$

因果条件

频率特性 $\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega<\infty$

$\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|$满足平方可积条件

佩利 - 维纳准则——系统可实现的必要条件。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\ln\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|\right|}{1+\omega^2}\mathrm{d}\omega<\infty$$

3.佩利维纳准则

说明

- 对于物理可实现系统(physical realizable system)，可以允许H(jw)特性在某些不连续的频率点上为零，但不允许在一个有限频带内为零。
- 按此原理，理想低通、理想高通、理想带通、理想带阻等理想滤波器都是不可实现的;
- 佩利-维纳准则(Pelley-Wener criterion)要求可实现的幅度特性其总的衰减不能过于迅速;
- 佩利-维纳准则是系统物理可实现的必要条件，而不是充分条件。

4.调制与解调

频移特性表明信号在时域中与复因子相乘，则在频域中将使整个频谱搬移 ω_0。

应用：通信中调制与解调，频分复用

实际调制解调的载波(本振)信号是正、余弦信号，借助欧拉公式正、余弦信号可以分别表示为

推论：调制定理(modulation theorem)

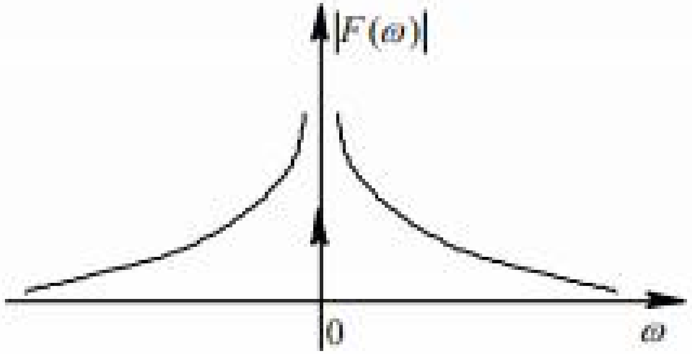
$$\left.\begin{aligned} f(t)\cos\omega_0 t &\leftrightarrow \frac{1}{2}\{F[j(\omega-\omega_0)]+F[j(\omega+\omega_0)]\} \\ f(t)\sin\omega_0 t &\leftrightarrow \frac{1}{2j}\{F[j(\omega-\omega_0)]-F[j(\omega+\omega_0)]\} \end{aligned}\right\}$$

4.调制与解调

例: 求$f(t)=\cos\omega_0 t u(t)$的频谱函数。

解 已知

$$u(t)\leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$



利用调频性

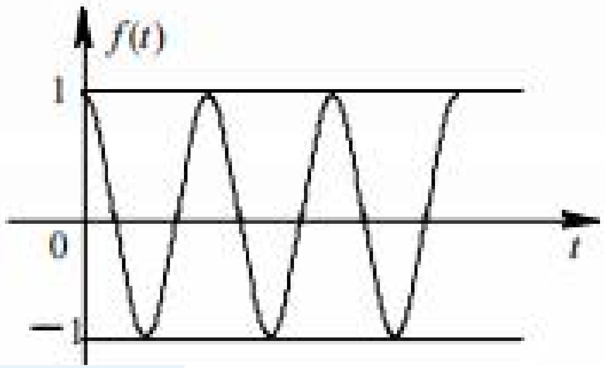
$$\cos\omega_0 t u(t)\leftrightarrow \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

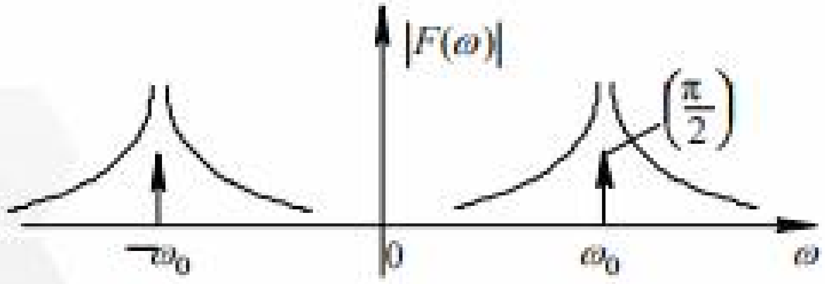
$$+\frac{1}{2j(\omega+\omega_0)}+\frac{1}{2j(\omega-\omega_0)}$$

$$=\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

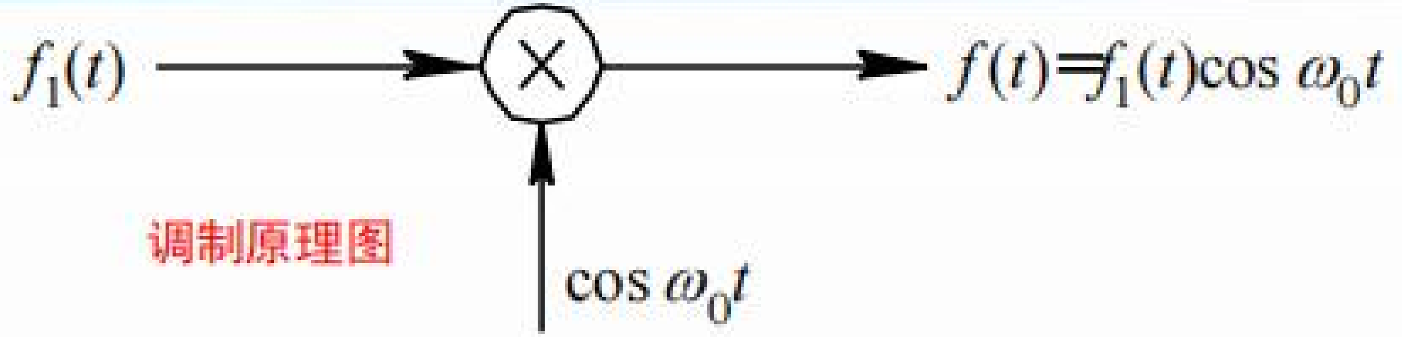
4.调制与解调

$$\cos\omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$





4.调制与解调



调制原理图

在接收端将已调信号$f(t)$恢复为原信号$f_1(t)$的过程为解调。一种同步解调的原理:

$$f_0(t)=[f_1(t)\cos(\omega_0 t)]\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}[f_1(t)+f_1(t)\cos(2\omega_0 t)]$$

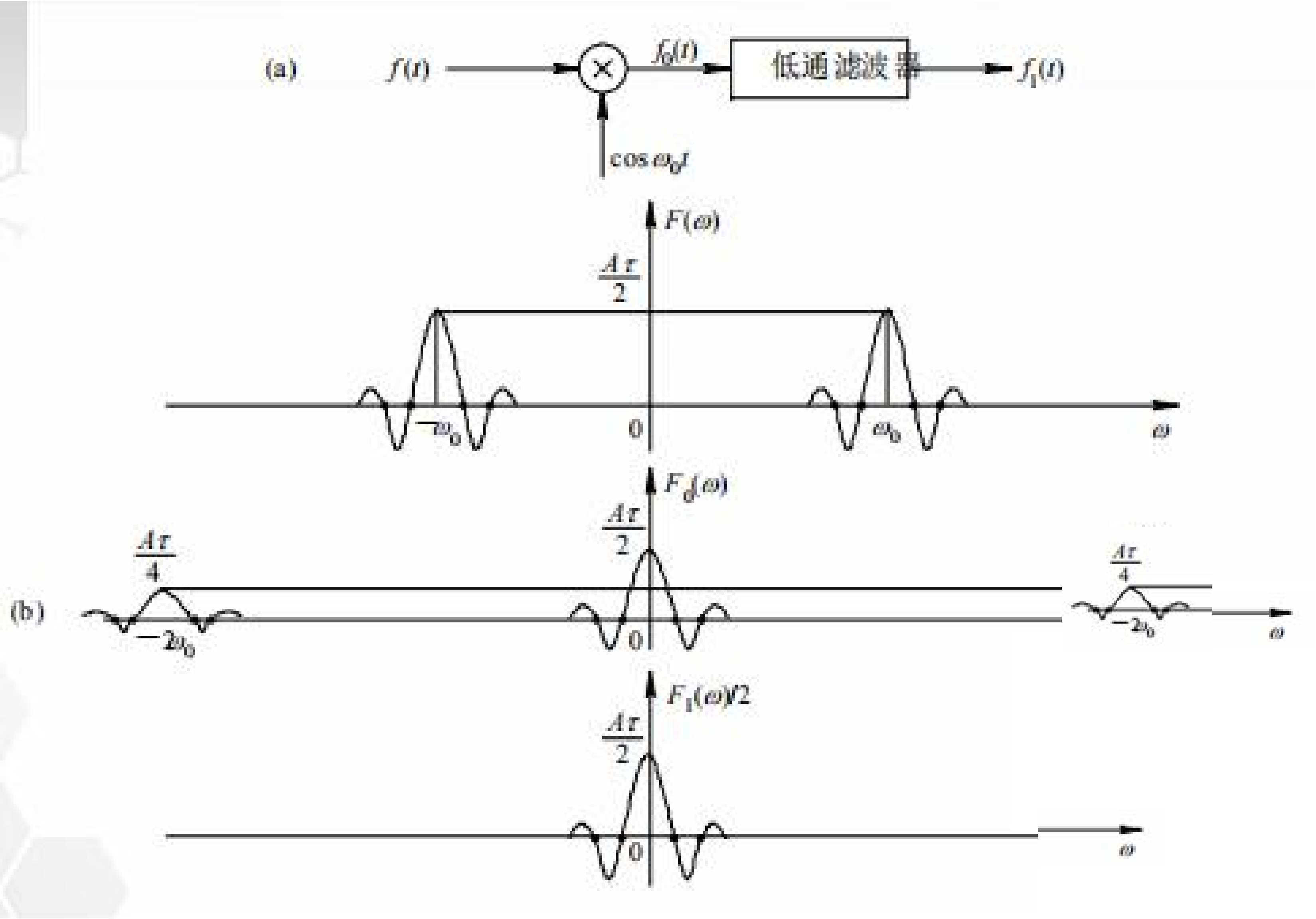
利用线性与频移特性，对应的频谱函数为

$$F(\omega_0)=\frac{1}{2}F_1(\omega)+\frac{1}{4}F_1(\omega-2\omega_0)+\frac{1}{4}F_1(\omega+2\omega_0)$$

利用一个低通滤波器，滤除$2w_0$附近的频率分量(frequency component)，即可提取$f_1(t)$，实现解调。

cos w_0t为接收端的本地载波信号(carrier signal)（通常称本振信号），与发送端的载波信号同频同相。

4.调制与解调



(a)
$f(t)$
$f_0(t)$
低通滤波器
$f_1(t)$
$\cos\omega_0 t$
$F(\omega)$
$\frac{A\tau}{2}$
$-\omega_0$
0
ω_0
ω
$F_0(\omega)$
$\frac{A\tau}{2}$
$\frac{A\tau}{4}$
(b)
$-2\omega_0$
0
$\frac{A\tau}{4}$
$-2\omega_0$
ω
$F_1(\omega)/2$
$\frac{A\tau}{2}$
0
ω

谢谢聆听

Thanks for listening!