# 信号与系统

## 第2章　连续时间系统的时域分析

**课程性质：必修**

# 目录
# CONTENTS

# 1.系统方程的算子表示方法

**微分算子(differential operator)：**

$$L\frac{d^2 i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=u_s$$

$$EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}-T\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}+\rho\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}+C\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}+\rho g=P_0\delta(x,vt)$$

**用算子符号(operator symbol)表示微分方程(differential equation)**

**1、算子符号的基本规则**

$$p=\frac{d}{dt}$$ 微分算子

$$\frac{1}{p}=p^{-1}=\int_{-\infty}^{t}(\quad)d\tau$$ 积分算子(Integral operator)

# 1.系统方程的算子表示方法

## 1、算子符号的基本规则(basic rules)

则

$$px = \frac{dx}{dt} \qquad p^2 x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx^2}{dt^2}$$

$$p^2 = \frac{d^2}{dt^2} \qquad \cdots \qquad p^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

$$\frac{1}{p}x = \int_{-\infty}^{t} x d\tau \qquad \frac{1}{p^2}x = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p}x = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau} x d\xi d\tau$$

# 1.系统方程的算子表示方法

根据这个规定，可以将下列方程

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2}+2\frac{d y(t)}{dt}+5y(t)+\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau=\frac{d e(t)}{dt}+3e(t)$$

用算子表示：

$$p^2 y+2py+5y+\frac{1}{p}y=pe+3e$$

即：

$$(p^2+2p+5+\frac{1}{p})y=(p+3)e$$

**注意：此方程表示的不是一个代数方程(algebraic equation)，而是算子记法的微积分方程。式中算子与变量不是相乘，而是一种变换**

# 1.系统方程的算子表示方法

**代数规律能否用于算子方程？？？**

**例：算子多项式 (operator polynomial) (p+3)(p+2)y**

$$(p+3)(p+2)y=(\frac{d}{dt}+3)(\frac{dy}{dt}+2y)=\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+3\frac{dy}{dt}+6y$$

$$=\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y=p^2y+5py+6y=(p^2+5p+6)y$$

$$\therefore (p+3)(p+2)y=(p^2+5p+6)y$$

**则$(p+3)(p+2)=p^2+5p+6$**

## 1.系统方程的算子表示方法

**性质1：p的正幂多项式可以象代数量一样进行乘法运算(multiplication operation)和因式分解(factorization)**

例：

$$p\cdot\frac{1}{p}x=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t}x d\tau=x$$

$$\frac{1}{p}\cdot px=\int_{-\infty}^{t}\frac{dx}{dt}d\tau=x(t)-x(-\infty)\neq x$$

所以，一般 $p\cdot\frac{1}{p}x\neq\frac{1}{p}\cdot px$

# 1.系统方程的算子表示方法

**性质2：** 算子乘除的顺序（表示对函数微分、积分的先后次序）不能随便颠倒

例：

$$px = py$$

等号两边的公因子$p$能不能消?

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

两边积分得：

$$x = y + c$$

式中c为积分常数(integral constant)

一般情况下 $x \neq y$

# 1.系统方程的算子表示方法

**性质3：算子方程等号两边的公因子(common factor)不能随便消去**

例：方程 $(p+a)N(p)x=(p+a)y$

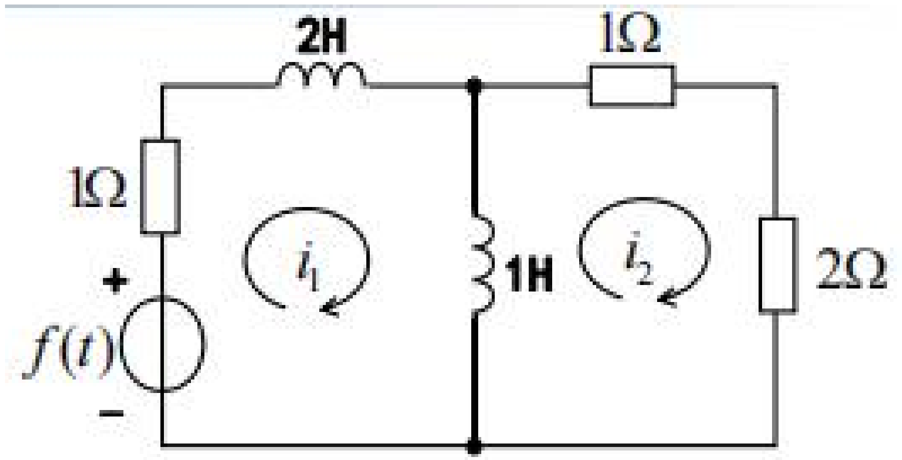
一般 $N(p)x \neq y$

**性质4：分子(molecule)、分母(denominator)上的公共因子不能随便消**

$$x=\frac{(p+a)}{(p+a)N(p)}y \qquad x \neq \frac{1}{N(p)}y$$

# 1.系统方程的算子表示方法

**例1：求$i_1(t)$和$i_2(t)$**




**解：回路方程(loop equation)为：**

$$\begin{cases} 3\dfrac{di_1}{dt}+i_1-\dfrac{di_2}{dt}=f(t) \\ -\dfrac{di_1}{dt}+\dfrac{di_2}{dt}+3i_2=0 \end{cases}$$

**写成算子形式：**

$$\begin{cases} (3p+1)i_1-pi_2=f(t) & (1) \\ -pi_1+(p+3)i_2=0 & (2) \end{cases}$$

**消元法(elimination method)：（1）×（p+3）　（2）×p　得：**

# 1.系统方程的算子表示方法

$$\begin{cases}(p+3)(3p+1)i_1-(p+3)pi_2=(p+3)f(t) & (3)\\ -p^2i_1+p(p+3)i_2=0 & (4)\end{cases}$$

（3）+（4）消去$i_2$得：

$$(2p^2+10p+3)i_1=(p+3)f(t)$$

$$2\frac{d^2i_1}{dt^2}+10\frac{di_1}{dt}+3i_1=\frac{df(t)}{dt}+3f(t)$$

检验合法性： 第一步： （1）×（p+3） 乘法运算

第二步： （2）×p 乘法运算

第三步： （3）+（4） 加法运算

每步只运用了算子的乘法和加法——运算过程正确

# 1.系统方程的算子表示方法

**传输算子(transfer operator)：**

对于线性时不变系统，在一般情况下，其输入信号f(t)和响应y(t)之间关系，可以写成如下微分方程(differential equation)

$$D(p)y(t)=N(p)f(t)$$

将算子方程(operator equation)在形式上改写为

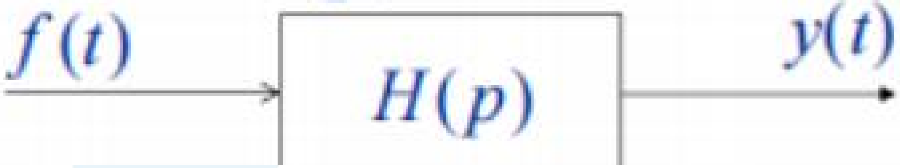
$$y(t)=\frac{N(p)}{D(p)}f(t)$$

# 1.系统方程的算子表示方法

**定义：**

把联系响应y(t)和激励f(t)之间得关系N(p)/D(p)定义为**传输算子(transfer operator)**。**用符号**H(p)**表示**

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)} \quad 则 \quad y(t)=H(p)f(t)$$



# 2.信号的时域分解

一个线性系统(linear system)，其激励信号f（t）与响应信号y（t）之间的关系，可以用下列形式的微分方程式来描述

$$y(t)=\frac{N(p)}{D(p)}f(t)=H(p)f(t) \quad \text{或} \quad D(p)y(t)=N(p)f(t)$$

式中，y（t）是系统的某个响应信号

f（t）是系统的激励信号

# 2.信号的时域分解

算子表达式为：

$$(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0)y(t)=(b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1p+b_0)f(t)$$

对应的微分方程为：

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{d\,y(t)}{dt}+a_0y$$

$$=b_m\frac{d^m f(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}f(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{d\,f(t)}{dt}$$

n阶**线性微分方程**

**(linear differential equation)**

# 2.信号的时域分解

时域分析法(time domain analysis method)有两种：

- **经典法(classical method)**：直接求解微分方程；

  经典法着重说明**物理意义**。

  建立**自由响应**和**强迫响应**、**零输入响应**和**零状态响应**概念。它使线性系统分析在理论上更完善，为解决实际问题带来方便。

- **卷积法(convolution method)**：即已知系统的单位冲激响应，将冲激响应与输入激励信号进行卷积积分。

  用卷积积分只能求到系统的**零状态响应(zero state response)**。零输入响应仍要用经典法求得。

  物理概念明确，运算过程方便，是系统分析的基本方法。是近代计算分析系统的强有力工具。

# 2.信号的时域分解

## 一、微分方程的经典解法

**微分方程的全解(complete solution)即系统的完全响应，由齐次解(homogeneous solution)$y_h(t)$和特解(special solution)$y_p(t)$组成**

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

**齐次解$y_h(t)$的形式由齐次方程的特征根(characteristic root)确定**

**特解$y_p(t)$的形式由方程右边激励信号的形式确定**

# 2.信号的时域分解

## 1、齐次解(homogeneous solution)

齐次解$y_h(t)$是齐次微分方程

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0 y(t)=0$$

的解。

即 $$(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1 p+a_0)y(t)=0$$

或 $D(p)y(t)=0$ 的解

# 2.信号的时域分解

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=0$$

$$(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0)y(t)=0$$

解的基本形式为 $ke^{\lambda t}$，**代入上式，得**

$$k\lambda^n e^{\lambda t}+ka_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t}+\cdots+ka_1\lambda e^{\lambda t}+ka_0e^{\lambda t}=0$$

在 $k\neq 0$ 的条件下，得

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$$

**上式称为微分方程(differential equation)对应的特征方程(characteristic equation)。特征方程的n个根1，2，…，2，称为微分方程的特征根。**

# 2.信号的时域分解

## 齐次解(homogeneous solution)$y_h(t)$的形式

(1) 特征根是不等实根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}$$

(2) 特征根是等实根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$

$$y_h(t) = (c_0 + c_1 t + \cdots + c_{n-1} t^{n-1}) e^{\lambda t}$$

(3) 特征根有共轭复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

对应于这对共轭复根的齐次解为

$$y_0(t) = c_1 e^{(\alpha + j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - j\beta)t}$$

# 2.信号的时域分解

## 例 求如下所示的微分方程的齐次解

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t)+7\frac{d^2}{dt^2}y(t)+16\frac{d}{dt}y(t)+12y(t)=f(t)$$

**解： 系统的特征方程为** $\lambda^3+7\lambda^2+16\lambda+12=0$

**因式分解(Factorization)：** $(\lambda+2)^2(\lambda+3)=0$

**特征根：** $\lambda_{1,2}=-2(\text{重根}),\lambda_3=-3$

**对应的齐次解为：** $\lambda_h(t)=(A_1t+A_2)e^{-2t}+A_3e^{-3t}$

**其中A1，A2，A3为待定系数(undetermined coefficient)。**

# 2.信号的时域分解

## 2、特解

### 求特解的步骤

- 微分方程的**特解**$y_p(t)$的形式与**激励信号(excitation signal)**形式**有关**。
- 将**激励e(t)**代入方程式的右端，**化简**后右端函数式称为**“自由项”**。
- 通过**观察自由项(free term)**的函数形式，**试选特解函数式(special solution function)**。
- **代入方程，求得**特解函数式中的**待定系数(undetermined coefficient)**。即求出特解$y_p(t)$。

## 2.信号的时域分解

例1：描述某线性非时变系统(linear time-invariant system)的方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f'(t)+2f(t)$

试求：当$f(t)=t^2$,$y(0^+)=1$,$y'(0^+)=1$时的全解。

解：(1)求齐次方程 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=0$ 的齐次解。

特征方程为：$p^2+3p+2=0$

特征根为：$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2$

齐次解为：$y_h(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$

# 2.信号的时域分解

## (2)求非齐次方程(non homogeneous equation)

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f'(t)+2f(t)$$ 的特解：

由输入 $f(t)=t^2$

设特解为：$y_p(t)=A_2t^2+A_1t+A_0$

将上式代入原微分方程，得：

$$2A_2+3(2A_2t+A_1)+2(A_2t^2+A_1t+A_0)=2t+2t^2$$

即：

$$2A_2t^2+(2A_1+6A_2)t+(2A_0+3A_1+2A_2)=2t^2+2t$$

上式两边比较系数可得：

$$\left.\begin{aligned}2A_2&=2\\2A_1+6A_2&=2\\2A_0+3A_1+2A_2&=0\end{aligned}\right\}$$

解得：

$$\left\{\begin{aligned}A_2&=1\\A_1&=-2\\A_0&=2\end{aligned}\right.$$

$$y_p(t)=t^2-2t+2$$

# 2.信号的时域分解

(3)微分方程完全解为：

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+t^2-2t+2$$

将初始条件代入上式，

$$y(0^+)=1,\ y'(0^+)=1$$

得：

$$\begin{cases} y(0)=C_1+C_2+2=1 \\ y'(0)=-C_1-2C_2-2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=-2 \end{cases}$$

故，全解为：

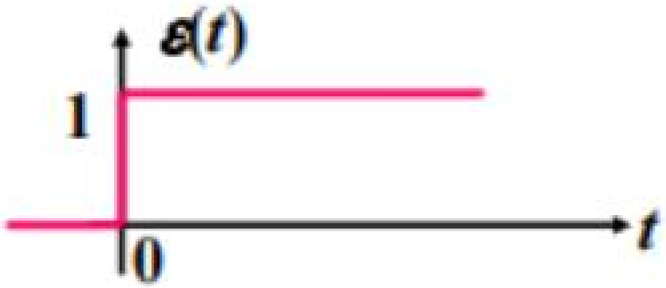
$$y(t)=\underbrace{e^{-t}-2e^{-2t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{\boxed{t^2-2t+2}}_{\text{强迫响应}} \qquad t\geq 0$$

# 3.阶跃响应和冲击响应

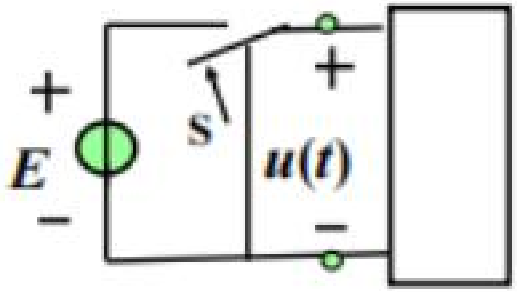
## 一、单位阶跃函数(unit-step function)

### 1.定义

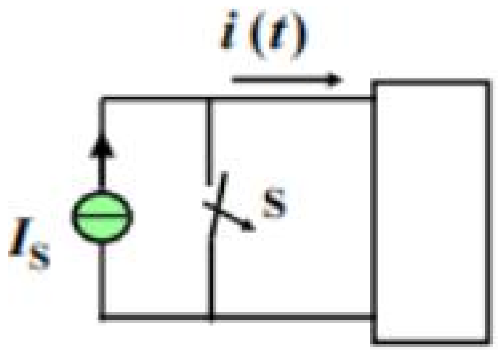
$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}$$




**用$\varepsilon(t)$来描述开关(switch)的动作：**



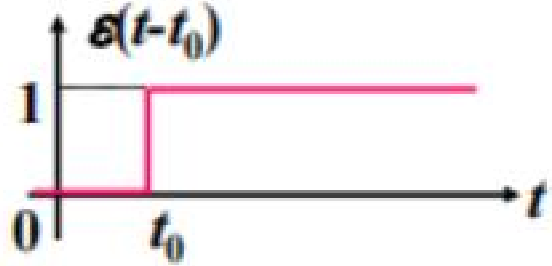

$t=0$合S $u(t)=E\varepsilon(t)$




$t=0$拉闸 $i(t)=I_S\varepsilon(t)$

# 3.阶跃响应和冲击响应

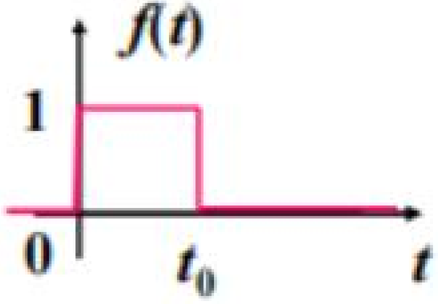
## 2.单位阶跃(unit step)函数的延迟

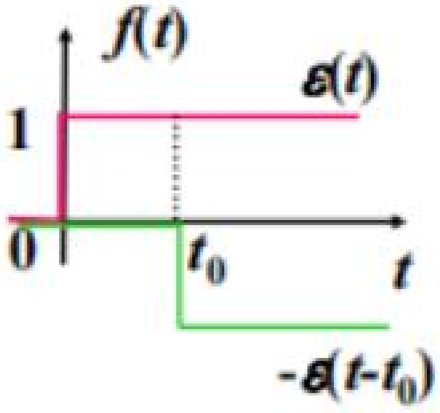



$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & (t<t_0)\\ 1 & (t>t_0)\end{cases}$$

## 3.由单位阶跃函数可组成复杂的信号(signal)

例 1

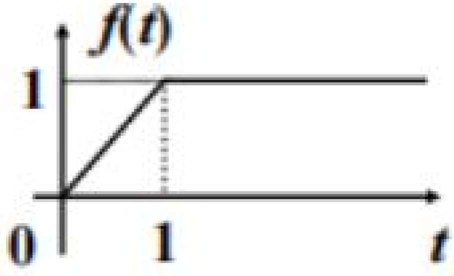


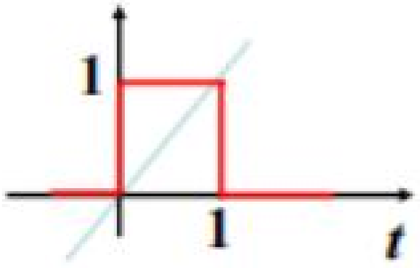



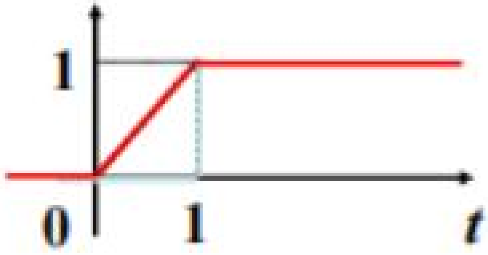

$$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)$$

# 3.阶跃响应和冲击响应

例 2

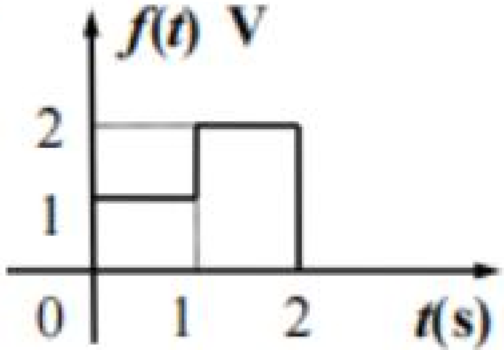



$$f(t)=t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+\varepsilon(t-1)$$

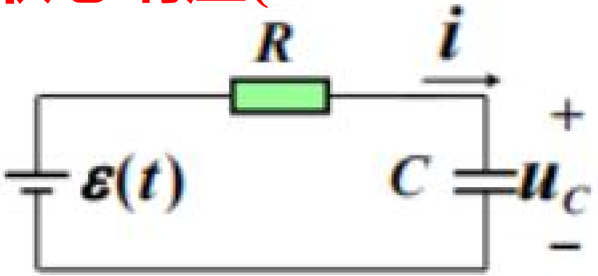
例3



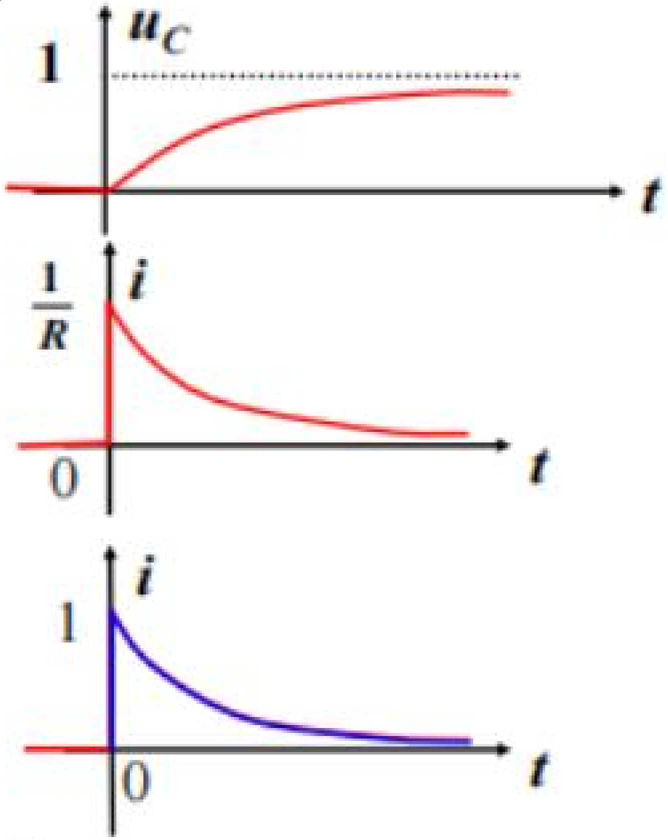

$$f(t)=\varepsilon(t)+\varepsilon(t-1)-2\varepsilon(t-2)$$

# 3.阶跃响应和冲击响应

**二、单位阶跃响应(unit step response)——单位阶跃激励下电路的零状态响应(zero state response)**




$u_C(0^-)=0$




$$u_C(t)=(1-e^{-\frac{t}{RC}})\ \varepsilon(t)$$

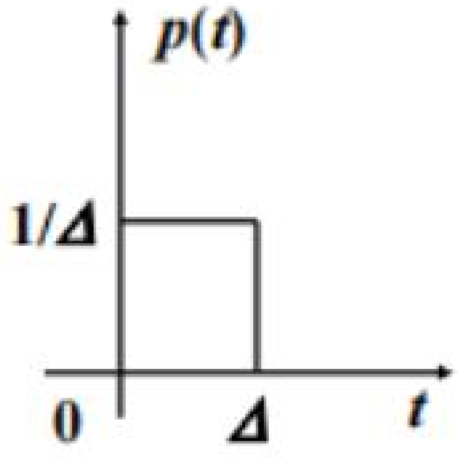
$$i(t)=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\ \varepsilon(t)$$

**注意** $i=e^{-\frac{t}{RC}}\ \varepsilon(t)$ 和 $i=e^{-\frac{t}{RC}}\ (t>0)$ 的区别

# 3.阶跃响应和冲击响应

## 三、单位冲激函数(unit impulse function)

### 1.单位脉冲函数$p(t)$

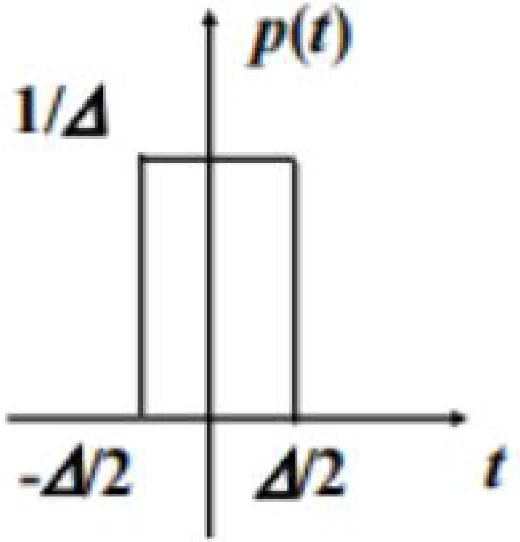



$$p(t)=\frac{1}{\Delta}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta)]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt=1$$

# 3.阶跃响应和冲击响应

## 2.单位冲激函数 $\delta(t)$




$$p(t)=\frac{1}{\Delta}[\varepsilon(t+\frac{\Delta}{2})-\varepsilon(t-\frac{\Delta}{2})]$$

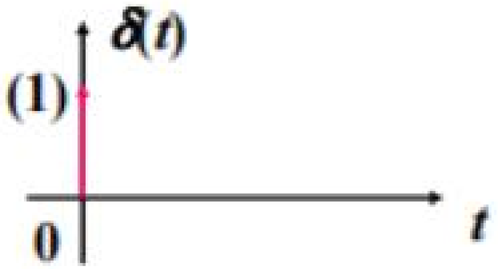
$$\Delta\to 0,\quad \frac{1}{\Delta}\to\infty$$

$$\lim_{\Delta\to 0} p(t)=\delta(t)$$

定义：

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 0 & (t>0)\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

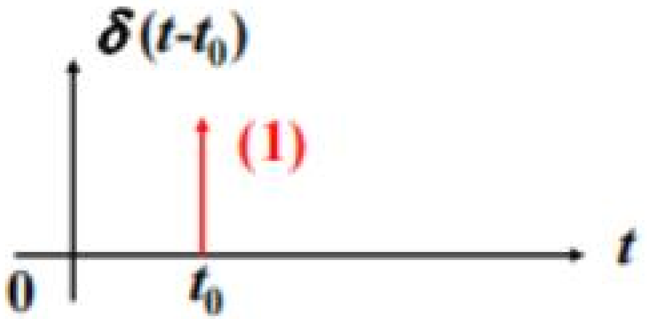


# 3.阶跃响应和冲击响应

## 3.单位冲激函数的延迟(delay)

$$\delta(t - t_0)$$

$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 \quad (t \neq t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{d}t = 1 \end{cases}$$



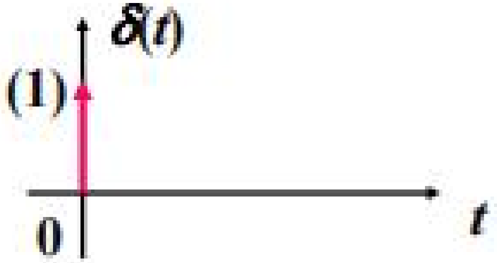

## 4.冲激函数的筛分法(sieving method)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t)\delta(t)}_{f(0)\delta(t)}\mathrm{d}t = f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$$

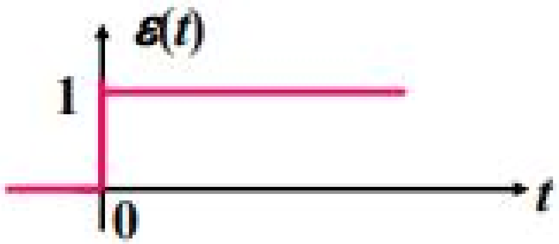
同理有：
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$$

# 3.阶跃响应和冲击响应

## 四、阶跃函数(step function)与冲激函数(impulse function)的关系

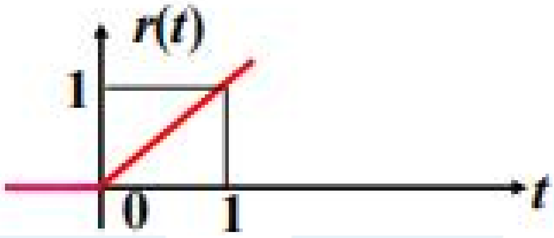



$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t)$$




$$\varepsilon(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)$$

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\mathrm{d}t$$




单位斜升函数

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(t)\mathrm{d}t$$

# 4.叠加积分、卷积及其性质

## 卷积积分（convolution）的定义

给定两个函数(function)$f_1(t)$和$f_2(t)$，由这两个函数构成积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

这个积分就定义为函数$f_1(t)$和$f_2(t)$的卷积积分(convolution integral)

简记为：$f_1(t) * f_2(t)$

# 4.叠加积分、卷积及其性质

## 1、卷积代数(convolution algebra)

### (1) 交换律(commutative law)

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$$

例：$y_f(t)=f(t)*h(t)=h(t)*f(t)$

$$=\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_0^t f(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

### (2) 分配律(distributive law)

### (3) 结合律(associative law)

# 4.叠加积分、卷积及其性质

## 2、卷积的微分和积分

### （1）微分(differential)

$$\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)]=f_1(t)*\frac{df_2(t)}{dt}=\frac{df_1(t)}{dt}*f_2(t)$$

### （2）积分(integral)

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\tau)*f_2(\tau)]d\tau=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)d\tau*f_2(t)$$

### （3）微积分(calculus)

$$\frac{df_1(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)d\tau=f_1(t)*f_2(\tau)$$

# 4.叠加积分、卷积及其性质

## 3、f(t)与奇异信号(singular signal)的卷积(convolution)

### （1）f(t)与 $\delta(t)$ 的卷积

$$f(t)*\delta(t)=f(t)$$

证明：

$$f(t)*\delta(t)=\delta(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)\delta(\tau)d\tau$$

$$=f(t)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)d\tau=f(t)$$

例：

$$\delta(t)*\delta(t)=\delta(t)$$

推论：

$$f(t)*\delta(t-T)=f(t-T)$$

$$f(t-T_1)*\delta(t-T_2)=f(t-T_1-T_2)$$

$$\delta(t-T_1)*\delta(t-T_2)=\delta(t-T_1-T_2)$$

# 4.叠加积分、卷积及其性质

## （2）f(t)与u(t)的卷积

$$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$$

**证明：**

$$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$$

**推论：**

$$f(t)*u(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t-t_0}f(\tau)d\tau$$

# 4.叠加积分、卷积及其性质

## 4、卷积时移(convolution time shift)

若：$f_1(t) * f_2(t) = y(t)$

则：$f_1(t-t_0) * f_2(t) = f_1(t) * f_2(t-t_0) = y(t-t_0)$

式中 $t_0$ 为实常数

推论：$f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = y(t-t_1-t_2)$

式中 $t_1$ 和 $t_2$ 为实常数

例：

# 4.叠加积分、卷积及其性质

## 二、卷积的计算

卷积积分的计算有解析法(analytic method)、图解法(graphic method)和数值解法(numerical solution)。

### 1、卷积积分的解析法

**例1：已知** $f(t)=u(t)\quad h(t)=[-2e^{-2t}+3e^{-3t}]u(t)$ **求** $y_f(t)$。

**解：** $y_f(t)=f(t)*h(t)=(-2e^{-2t}+3e^{-3t})u(t)*u(t)$

**由性质** $f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$

**则** $y_f(t)=\int_{-\infty}^{t}(-2e^{-2\tau}+3e^{-3\tau})u(\tau)d\tau$

$$=\int_{0}^{t}(-2e^{-2\tau}+3e^{-3\tau})d\tau$$

$$=(e^{-2\tau}-e^{-3\tau})\Big|_{0}^{t}$$

$$=e^{-2t}-e^{-3t}\qquad t\geq 0$$

# 4.叠加积分、卷积及其性质

## 3.单位冲激函数的延迟(delay)

两个信号的卷积积分(convolution integral)可以利用定义式计算，也可以用图解的方法计算。

通过卷积积分的图形解释，很容易理解卷积运算。

用图解法直观，尤其是函数式复杂时，用解析式法作容易出错，通过图形帮助确定积分区间(integral interval)和积分上下限更为方便准确。

最好将图解法、解析法两种方法结合起来

# 4.叠加积分、卷积及其性质

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau$ **图解法(graphic method)步骤如下：**

**第1步：** 变量替换。画出$f_1(t)$与$f_2(t)$波形，将图中t轴改换成$\tau$轴，分别得到$f_1(\tau)$与$f_2(\tau)$的波形。

**第2步：** 翻转。将$f_2(\tau)$波形以纵轴为中心翻转180°，得到$f_2(-\tau)$的波形。

**第3步：** 平移。将$f_2(-\tau)$沿时间轴$\tau$平移t，变为$f_2(t-\tau)$。

**第4步：** 相乘。将$f_1(\tau)$与$f_2(t-\tau)$相乘得卷积积分式中的被积函数$f_1(\tau)f_2(t-\tau)$。

**第5步：** 计算乘积信号$f_1(\tau)f_2(t-\tau)$波形与$\tau$轴之间的面积，即卷积在时刻t的值。

**第6步：** 令变量t在（-∞，∞）范围内变化，重复第3、4、5步，最终得到卷积信号$f_1(t)*f_2(t)$的值。

# 5.线性系统响应的时域求解

**系统完全响应=零输入响应+零状态响应**

**零输入响应(zero input response)是输入f（t）=0时的系统响应，它是系统内部条件（如能量存储、初始条件）单独作用的结果，而与外部输入f（t）无关。**

**零状态响应(zero state response)是系统在零状态（如内部能量存储不存在、所有初始条件为零）时对输入f（t）产生的响应。**

系统响应的这两个分量是相互独立的。

# 5.线性系统响应的时域求解

## 二、零输入响应(zero input response)

### 1、系统初始条件(system initial conditions)

设系统初始观察时刻t=0，分别考察y(t)及各阶导数在初始观察时刻前一瞬间$t=0^-$和后一瞬间$t=0^+$时的情况。

$0^-$状态是指系统没加外部激励时系统的固有状态，即零输入时的初始状态(initial state)，反映的是系统以往的历史信息。

初始值是由系统的储能产生的；

$0^+$状态称为加入输入后的初始状态。即初始值不仅有系统的储能，还受激励(excitation)的影响。

$$y(t) = y_x(t) + y_f(t) \Rightarrow \begin{aligned} y(0^-) &= y_x(0^-) + y_f(0^-) \\ y(0^+) &= y_x(0^+) + y_f(0^+) \end{aligned}$$

# 5.线性系统响应的时域求解

## 2、零输入响应(zero input response)的求解

1）系统的零输入响应是输入信号(input signal)为零，仅由系统的初始状态单独作用而产生的输出响应。

■ 数学模型(mathematical model)

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)=0$$

■ 求解方法：

根据微分方程(differential equation)的**特征根**确定**零输入响应**的形式

再由**0-初始条件**确定待定系数

# 5.线性系统响应的时域求解

$n$阶微分方程(differential equation)

若零输入响应方程p算子多项式(polynomial)可分解为（以单根为例）

$$(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\cdots(p-\lambda_n)y(t)=0$$

则有**零输入响应(zero input response)**

$$y_x(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}=\sum_{k=1}^{n}c_ke^{\lambda_k t}$$

式中$c_k$为任意待定系数(undetermined coefficient)，由0-初始条件确定。

# 5.线性系统响应的时域求解

## 2）由传输算子(transfer operator)求零输入响应(zero input response)

设有微分方程 $D(p)y(t)=N(p)f(t)$

对应的零输入响应的微分方程是：

$$D(p)y(t)=0$$

若 $D(p)$ 有$n$个相异的单零点，则可分解为

$$(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\cdots(p-\lambda_n)y(t)=0$$

当 $p=\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 时，D(p)=0，称 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 是D(p)的零点

零输入响应解(齐次解)为：

$$y_x(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}=\sum_{k=1}^{n}c_ke^{\lambda_k t}$$

# 5.线性系统响应的时域求解

如果微分方程(differential equation)表示为：

$$y(t)=\frac{N(p)}{D(p)}f(t)=H(p)f(t)$$

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}$$

当 $p=\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 时，D(p)=0，称 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 是D(p)的零点

D(p)→0，H(p)→∞ 称 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 是H(p)的极点

由传输算子(transfer operator) H（p）的极点可立刻写出零输入响应(zero input response)

# 5.线性系统响应的时域求解

**若传输算子(transfer operator)H(P)有n个极点(pole)，其中包含以下情况：**

(1) $D(p)=0$ 有单根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$　$m\le n$

零输入响应为： $c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}$

单实根 $\lambda_k$ 对应响应： $c_ke^{\lambda_k t}$

一对共轭复根 $\longrightarrow$ $c'e^{\alpha t}\cos(\omega t+\phi)$

$\lambda_i=\alpha+j\omega$　$\lambda_j=\alpha-j\omega$

式中 $c'$和$\phi$ 为待定常数

(2) $D(p)=0$ 有重根

二重根 $\lambda$ $\longrightarrow$ $(c_0+c_1t)e^{\lambda t}$

三重根 $\lambda$ $\longrightarrow$ $(c_0+c_1t+c_2t^2)e^{\lambda t}$

$\vdots$

$m$重根 $\lambda$ $\longrightarrow$ $(c_0+c_1t+\cdots+c_{m-1}t^{m-1})e^{\lambda t}$

# 5.线性系统响应的时域求解

例3：已知 $H(p)=\dfrac{2p^2+8p+3}{(p+1)(p+3)^2}$ ，初始条件为：

$y(0^-)=2,\ y'(0^-)=1,\ y''(0^-)=0$，求零输入响应 $y_x(t)$

解：$D(p)=(p+1)(p+3)^2=0$

求得极点：$\lambda_1=-1\quad \lambda_2=\lambda_3=-3$

零输入响应为：$y_x(t)=c_1e^{-t}+(c_2+c_3t)e^{-3t}$

代入初始条件有：

$$\begin{cases} y(\dot{0})=c_1+c_2=2 \\ y'(\dot{0})=-c_1-3c_2+c_3=1 \\ y''(\dot{0})=c_1+9c_2-6c_3=0 \end{cases}$$

求解得：$c_1=6\quad c_2=-4\quad c_3=-5$

$$\therefore y_x(t)=6e^{-t}+(-4-5t)e^{-3t}\qquad (t\geq 0)$$

# 谢谢聆听

## Thanks for listening!