**D题 窗边框生产中的最优切割问题**

在窗边框（窗外边框）的生产过程中，窗框的尺寸和形状对建筑物的外观和功能有重要影响。在加工过程中，原材料（如铝合金、钢材等）往往是长条形的，通常需要根据不同订单的需求进行切割，确保每个窗框的尺寸符合要求。窗框的切割方案需要考虑用户的目标尺寸及其目标范围，同时还需要计算锯口宽度对切割损失的影响。

此外，在生产过程中，原材料可能存在不规则缺陷，缺陷的具体位置和大小是随机的，这要求生产过程中能及时调整切割方案，避开缺陷区域，确保窗框的质量，并最大化利用原材料。每次切割时需要考虑锯口宽度的影响，即切割机的切割占用宽度。

请建立数学模型，解决以下问题：

**问题1** 假设每个订单包含多个窗框的需求，并且每个窗框有其目标宽度、目标高度以及目标范围（即目标尺寸的允许误差范围）。每次切割时，需要考虑锯口宽度对实际切割尺寸的影响。要求在剩余原材料的长度内，尽量满足订单的目标尺寸，并尽可能减少切割损失。表1是具体的订单需求：

表1： 订单的具体切割需求

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 订单号 | 订单需求对象 | 订单量（套） | 宽度目标（米） | 高度目标（米） | 窗框单价（元/套） |
| 1 | 学校教学楼 | 10 | 1.6 | 2.2 | 480 |
| 2 | 酒店客房 | 20 | 1.8 | 2.4 | 680 |
| 3 | 医院病房 | 20 | 1.7 | 2.3 | 550 |
| 4 | 政府办公楼 | 15 | 1.5 | 2.0 | 420 |

宽度和高度可以在给定尺寸的基础上有0.01米的变化范围，制作一个完整的窗框需要两个高和两个宽。已知原材料的长度分别为：5.5米、6.2米、7.8米，单价分别为18元/根、22元/根和28元/根，原材料的数量不限，锯口宽度为0.005米。请根据原材料的长度，在尽可能满足用户需求的情况下，建立数学模型，给出最优切割方案，实现利润最大化（总成本（原材料成本）与总收益（窗框销售收益）的差值），并计算所给方案整体的切割损失率及利用率。

**问题2** 假设每个原材料存在不规则缺陷，缺陷的大小和位置是已知的，缺陷会影响切割的部分材料，即加工的成品不能包含缺陷区域（每一个缺陷区域可视为矩形区域），每类原材料的缺陷信息包含缺陷起始位置和缺陷的长度，如表2所示。

表2： 具体缺陷信息

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 原材料编号 | 原材料长度（米） | 缺陷位置（从左端起）（米处） | 缺陷长度（米） |
| 1 | 5.5 | 1.0 | 0.03 |
| 1 | 5.5 | 2.5 | 0.04 |
| 2 | 6.2 | 0.5 | 0.02 |
| 2 | 6.2 | 1.8 | 0.05 |
| 3 | 7.8 | 3.0 | 0.03 |

根据这些缺陷，请在问题1的基础上，重新建立数学模型，制定最优切割方案，并计算调整后切割方案整体的切割损失率及利用率。

**问题3** 基于附件中的缺陷数据和表3中的订单需求，建立数学模型，制定最优切割方案。

表3： 订单的具体切割需求

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 订单号 | 订单需求对象 | 订单量（套） | 宽度目标（米） | 高度目标（米） | 窗框单价（元/套） |
| 1 | 学校教学楼 | 120 | 1.6 | 2.2 | 480 |
| 2 | 酒店客房 | 80 | 1.8 | 2.4 | 680 |
| 3 | 医院病房 | 60 | 1.7 | 2.3 | 550 |
| 4 | 政府办公楼 | 40 | 1.5 | 2.0 | 420 |

**说明：**

（1）利用率=（总用料量-切割后的总余料量）/总用料量，其中总用料量含锯口宽度。

（2）题中切割损失率及利用率的研究对象是总用料，而非单根原材料。