理论力学期末复习

第一章 质点力学

一、速度、加速度分量在不同坐标系中的表示式

直角坐标系：

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k} \qquad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dot{v}_x\vec{i}+\dot{v}_y\vec{j}+\dot{v}_z\vec{k}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}$$

平面极坐标系：

$$\vec{v}=\dot{r}\vec{i}+r\dot{\theta}\vec{j} \qquad \vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{i}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\vec{j}$$

自然坐标系： $\vec{v}=v\vec{i}=\dot{s}\vec{i}$ $\qquad \vec{a}=\ddot{s}\vec{i}+\dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{j}$

$$\rho=\left|\frac{\left[1+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2\right]^{3/2}}{\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2}\right|$$

二、平动参照系

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}' \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 \quad \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$$

三、不同坐标系下质点运动微分方程的建立和求解

直角坐标系:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{cases}$$

平面极坐标:

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r(r, \theta; \dot{r}, \dot{\theta}; t) \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta(r, \theta; \dot{r}, \dot{\theta}; t) \end{cases}$$

自然坐标系:

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = F_\tau \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = F_n \end{cases}$$

四、功与能

保守力的定义，性质，判据

$$\vec{F} = -\nabla V(\vec{r}) \qquad W = -(V_B - V_A)$$

五、质点动力学的基本定理与基本守恒定律

动量定理与动量守恒定律

动量矩定理与动量矩守恒定理 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{J}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$

动能定理与机械能守恒定律

六、有心力

有心力的特征　　运动微分方程　　比耐公式的推导

圆锥曲线方程　　行星轨道类别的判据

第二章 质点组力学

一、质心及质心速度的确定

二、动量定理与动量守恒律

质心运动定理: $$m\frac{\mathbf{d}^2\vec{r}_C}{\mathbf{d}^2 t}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}$$

三、动量矩定理与动量矩守恒律

对某一固定点: $$\frac{d\vec{J}}{dt}=\vec{M} \qquad \vec{J}=\sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i\times\vec{p}_i) \qquad \vec{M}=\sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{(e)})$$

对质心的动量矩定理: $$\frac{d\vec{J}_c'}{dt}=\vec{M}'$$ 质心系通常并不是惯性系

$$\vec{M}'=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i'\times\vec{F}_i^{(e)} \qquad \vec{J}_C'=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i'=\vec{J}_C=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i$$

四、动能定理与机械能守恒律

柯尼希定理：$T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_c^{\,2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i'^{\,2}$

对质心的动能定理：$dT' = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \bullet d\vec{r}_i' + \sum_i \vec{F}_i^{(i)} \bullet d\vec{r}_i'$

第三章　刚体力学

一、刚体运动的描述

角量与线量关系：

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

欧勒角

二、刚体运动方程与平衡方程

$$m\,\ddot{\vec{r}}_c = \sum \vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{J}'}{dt} = \vec{M}' \qquad \vec{M}' = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(e)}$$

相对质心的角动量（动量矩）定理

平衡方程

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= 0 \\ \vec{M} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

三力平衡定理

三、转动惯量

$$T=\frac{1}{2}I\omega^2 \qquad I=\sum m_i\rho_i^2$$

平行轴定理　　正交轴定理

$$T=\frac{1}{2}\vec{\omega}\bullet\vec{J} \qquad \vec{J}=\overleftrightarrow{I}\bullet\vec{\omega} \qquad \overleftrightarrow{\mathbf{I}}=\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I=(\alpha \quad \beta \quad \gamma)\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

惯量张量

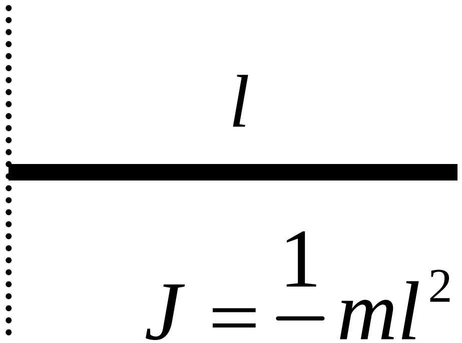
惯量主轴：$I=I_1\alpha^2+I_2\beta^2+I_3\gamma^2$ 　　 $T=\frac{1}{2}(I_1\omega_x{}^2+I_2\omega_y{}^2+I_3\omega_z^2)$

$$\vec{J}=I_1\omega_x\vec{i}+I_2\omega_y\vec{j}+I_3\omega_z\vec{k}$$

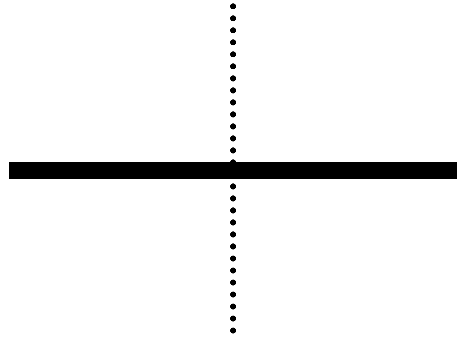
惯量主轴的确定

几种常用刚体的转动惯量：

匀质细杆：



$$J = \frac{1}{3} m l^2$$



$$I = \frac{1}{12} m l^2$$

匀质圆盘或圆柱：

m

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

四、定轴转动

$$I_{zz}\dot{\omega} = M_z$$

（当外力为保守力时）$\frac{1}{2}I_{zz}\omega^2 + V = E$

五、刚体的平面平行运动

基点描述法 $\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}'$ $\vec{a} = \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' - \omega^2 \vec{r}'$

转动瞬心： 性质，特点 转动瞬心的确定

动力学方程 质心运动方程：$\begin{cases} m\ddot{x}_c = F_x \\ m\ddot{y}_c = F_y \end{cases}$ 约束方程

绕质心的转动方程 $I_{zz}\dot{\omega} = I_{zz}\alpha = M_z$

只有保守力作功 $\frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_{zz}\omega^2 + V = E$

第五章　分析力学

一、约束与虚功原理

约束的分类　　广义坐标

虚位移　　　虚位移总是位于约束曲面的切平面

理想约束　　$\sum \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$

平衡条件　　$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \bullet \delta \vec{r}_i = 0$　　适用条件：

惯性系、理想不可解约束

广义平衡方程　　$Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_s = 0$

广义力　　$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right)$

保守系统的平衡条件　　$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, s)$

二、拉格朗日方程

基本形式的拉格朗日方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha\,,\quad \alpha=1,2,\cdots,s$$

广义力的计算 $\quad Q_\alpha=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$

保守系的拉格朗日方程： $\quad L=T-V$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0,\ \alpha=1,2,\cdots,s$$

广义动量 $\quad p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$ 循环坐标

$\frac{\partial L}{\partial t}=0$ 广义能量积分 $\quad T_2-T_0+V$ 小振动

对稳定约束 $\quad T+V=E=$ 常量

三、哈密顿正则方程

哈密顿函数： $H(p,q,t)=-L+\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha$

$$\begin{cases}\dot{q}_\alpha=\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}\\[2ex]\dot{p}_\alpha=-\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}\end{cases}\qquad \alpha=1,2,\cdots,s\qquad \frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}$$

能量积分与循环积分　　　哈密顿函数的物理意义

四、泊松括号与泊松定理

$$\left.\begin{aligned}\dot{p}_\alpha&=[p_\alpha,H]\\ \dot{q}_\alpha&=[q_\alpha,H]\end{aligned}\right\}(\alpha=1,2,\cdots,s)\qquad \frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+[\varphi,H]$$

泊松定理

五、 哈密顿原理

哈密顿作用量 $S=\int_{t_1}^{t_2} L\left(q_1, q_2, \cdots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s; t\right) dt$

$$\boxed{\delta S=0}$$

六、 正则变换

重要习题

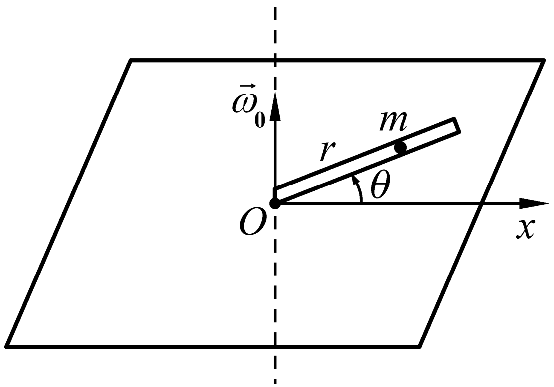
1.6；1.19；1.43；1.50；2.3；3.9; 3.13；3.18；3.30；5.3；5.6；5.7；5.11；5.13；5.16；5.23 ；5.24

重要例题

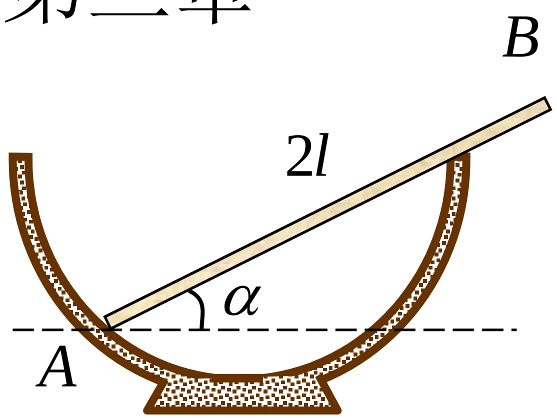
教材：**P68 例1.5；P125 例题；P190 例1；P249 例5.3**

PPT：

第一章

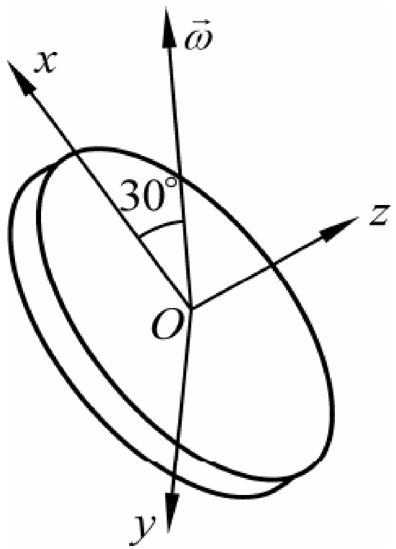


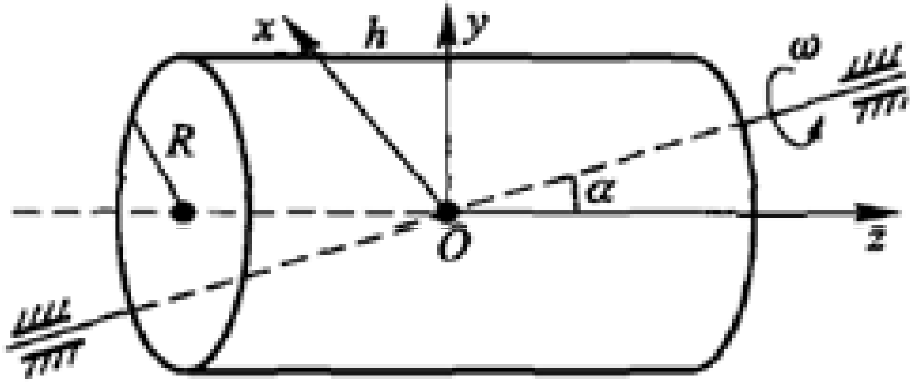
第三章

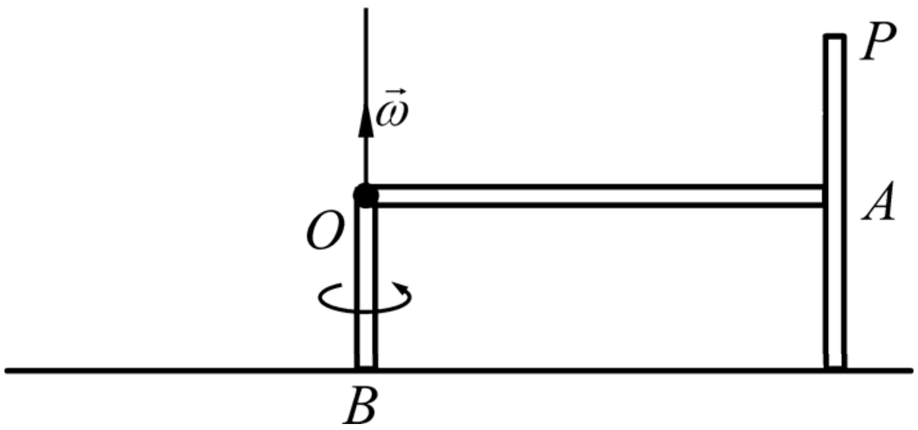


PPT：

第三章

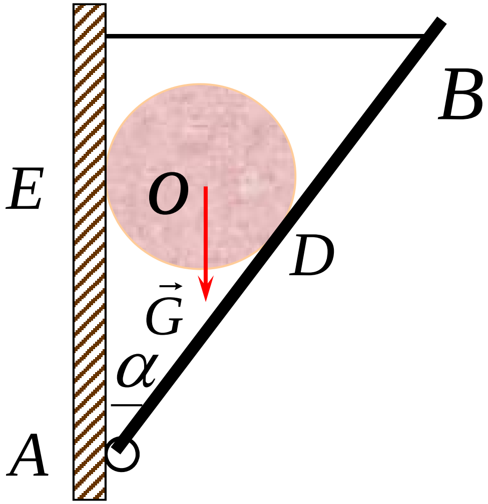




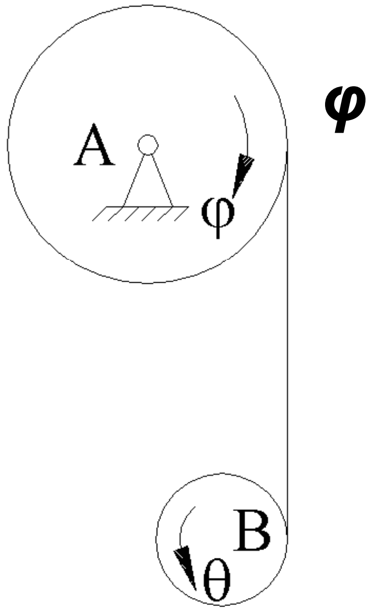


PPT：

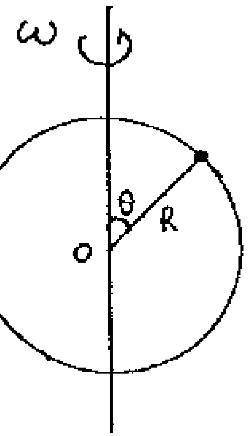
第五章



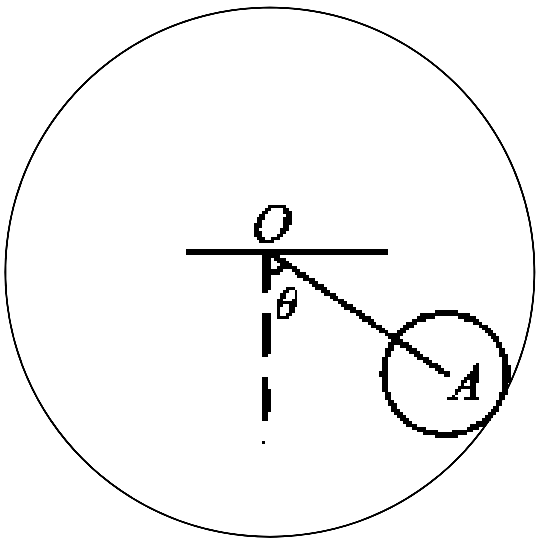
B
E
O
D
$\vec{G}$
α
A



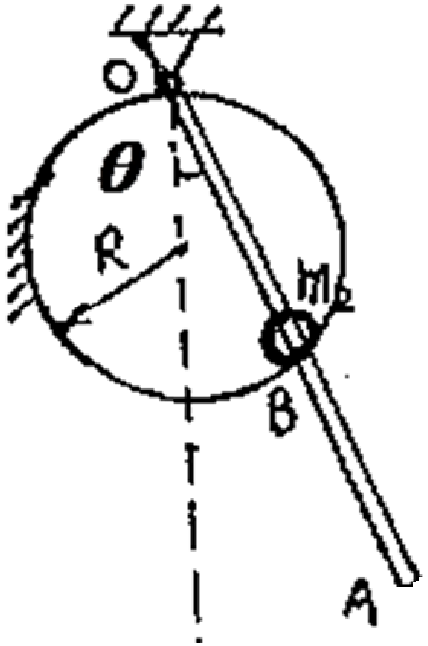
φ
A
φ
B
θ



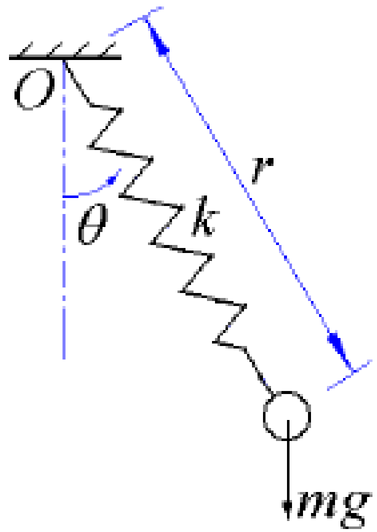
ω
θ
R
o



O
θ
A



O
θ
R
B
A



O
r
θ
k
mg