数值分析第七次作业

杜鸿宇

2016141211049

1　由题意可知：

$$
\begin{aligned}
&B_{n+1}(x)\\
&=\frac{1}{(n+1)!}\delta^{(n+2)}x_+^{n+1}\\
&=\frac{1}{(n+1)!}\delta^{n+1}[(x+\frac{1}{2})_+^{n+1}-(x-\frac{1}{2})_+^{n+1}]\\
&=\frac{1}{n!}\delta^{n+1}[\int(x+1/2)_+^n dx-\int(x+1/2)_+^n dx]
\end{aligned}
;
$$

再由积分和差分的交换性质就可以得到上式：

$$
\int\frac{1}{n!}\delta^{n+1}[(x+1/2)_+^n-(x-1/2)_+^n]dx ;
$$

因为对于差分内的两项都是各自做各自的加减运算，所以可以拆分，即：

$$
\begin{aligned}
&\int\frac{1}{n!}\delta^{n+1}(x+1/2)_+^n dx-\int\frac{1}{n!}\delta^{n+1}(x-1/2)_+^n dx\\
&=\int B_n(x+1/2)dx-\int B_n(x-1/2)dx
\end{aligned}
;
$$

两边同时求导就可以得到：

$$
B_{n+1}^{'}(x)=B_n(x+1/2)-B_n(x-1/2)
$$

2　对于一型样条问题，我们假设起始点为x_0，步长为 1，于是就得到一列点列：

$x_0,.....,x_0+n$，于是我们得到样条函数为：

$$
S_3(x)=\alpha^{'}B_3[x-(x_0-1)]+\alpha_0B_3(x-x_0)+......+\alpha_nB_3[x-(x_0+n)]+\alpha_{n+1}B_3[x-(x_0+n+1)]
$$

因此我们得到如下的方程组：

$$
\begin{aligned}
&\alpha^{'}B_3^{'}(1)+\alpha_0B_3^{'}(0)+...+\alpha_nB_3^{'}(-n)+\alpha_{n+1}B_3^{'}(-n-1)=f^{'}(x_0)\\
&\alpha^{'}B_3(1)+\alpha_0B_3(0)+...+\alpha_nB_3(-n)+\alpha_{n+1}B_3(-n-1)=f(x_0)\\
&......\\
&\alpha^{'}B_3(n+1)+\alpha_0B_3(n)+...+\alpha_nB_3(0)+\alpha_{n+1}B_3(-1)=f(x_0+n)\\
&\alpha^{'}B_3^{'}(n+1)+\alpha_0B_3^{'}(n)+...+\alpha_nB_3^{'}(0)+\alpha_{n+1}B_3^{'}(-1)=f^{'}(x_0+n)
\end{aligned}
$$

得到其系数矩阵为：

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & ... & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & ... & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}_{n+3*n+3}$$

对于 Not-A-Knot 结点的情况：

$$\alpha^{'}B_3^{'''}(2)+\alpha_0 B_3^{'''}(1)+...+\alpha_n B_3^{'''}(-n+1)+\alpha_{n+1}B_3^{'''}(-n)=S_3^{'''}(x_0+1^-)$$
$$\alpha^{'}B_3(1)+\alpha_0 B_3(0)+...+\alpha_n B_3(-n)+\alpha_{n+1}B(-n-1)=f(x_0)$$
$$......$$
$$\alpha^{'}B_3(n+1)+\alpha_0 B_3(n)+...+\alpha_n B_3(0)+\alpha_{n+1}B_3(-1)=f(x_0+n)$$
$$\alpha^{'}B_3^{'''}(n)+\alpha_0 B_3^{'''}(n-1)+...+\alpha_n B_3^{'''}(-1)+\alpha_{n+1}B_3^{'''}(-2)=S_3^{'''}(x_0+n-1^-)$$

到系数矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}_{n+3*n+3}$$

3 我们设点 x0=0,x1=0,x2=2,x3=3,x4=4,接下来求 B(0,3)。由递推公式可知：

$$B_{0,3}(x)=\frac{x-x_0}{x_3-x_0}B_{0,2}(x)+\frac{x_4-x}{x_4-x_1}B_{1,2}(x)$$

$$B_{0,2}(x)=\frac{x-x_0}{x_2-x_0}B_{0,1}(x)+\frac{x_3-x}{x_3-x_1}B_{1,1}(x)$$

$$B_{1,2}(x)=\frac{x-x_1}{x_3-x_1}B_{1,1}(x)+\frac{x_4-x}{x_4-x_2}B_{2,1}(x)$$

由于 x0 是二重结点，所以接下来所有的 x0=x1.于是我们可以得到：

$$B_{0,1}(x)=\left(\begin{array}{l}0,x\le 0\\ \dfrac{x_2-x}{x_2-x_0},x_0\le x\le x_2\\ 0,x\succ x_0\end{array}\right)\qquad B_{1,1}(x)=\begin{cases}0,x\le x_0\\ \dfrac{x-x_0}{x_2-x_0},x_0\prec x\le x_2\\ \dfrac{x_3-x}{x_3-x_2},x_2\prec x\le x_3\\ 0,x\succ x_3\end{cases}$$

因此我们就得到总的 B(0,3)为：

$$B_{0,3}(x)=\begin{cases}0,x\le 0\\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{13}{72}x^3,0\prec x\le 2\\ \dfrac{23}{72}x^3-\dfrac{13}{6}x^2+\dfrac{17}{3}x-4,2\prec x\le 3\\ \dfrac{(4-x)^3}{8},3\prec x\le 4\\ 0,4\prec x\end{cases}$$

接下来，我们分析其在 x=0 点的光滑性：经过两次求导数之后 0 点附近的函数变为：

$$\begin{cases}0,\ \ x\le 0\\ 1-\dfrac{13}{12}x,0\prec x\le 2\end{cases}$$

显然这在 0 点附近时间断的，因此在 0 点的光滑性不能得到保证。

疑问：按照递推公式降维法得到了非均匀 B 样条的 B(3,3)的一般公式：

$$B_{-3,3}(x)=\begin{cases}0,x\le x_{-3}\\ \dfrac{(x-x_{-3})^3}{(x_0-x_{-3})(x_{-1}-x_{-3})(x_{-2}-x_{-3})},x_{-3}\prec x\le x_{-2}\\ \dfrac{(x-x_{-3})^2(x_{-1}-x)}{(x_0-x_{-3})(x_1-x_{-3})(x_2-x_{-3})}+\dfrac{(x-x_{-3})(x_0-x)(x-x_{-2})}{(x_0-x_{-2})(x_{-1}-x_{-2})(x_0-x_{-3})}+\dfrac{(x-x_{-2})^2(x_1-x)}{(x_1-x_{-2})(x_0-x_{-2})(x_{-1}-x_{-2})},x_{-2}\\ \dfrac{(x_0-x)^2(x-x_{-3})}{(x_0-x_{-3})(x_0-x_{-2})(x_0-x_{-1})}+\dfrac{(x-x_{-2})(x_0-x)(x_1-x)}{(x_0-x_{-2})(x_0-x_{-1})(x_1-x_{-2})}+\dfrac{(x-x_{-1})(x_1-x)^2}{(x_1-x_{-2})(x_1-x_{-1})(x_0-x_{-1})},x_{-1}\prec\\ \dfrac{(x_1-x)^3}{(x_1-x_{-1})(x_1-x_0)(x_1-x_{-2})},x_0\prec x\le x_1\\ 0,x\succ x_1\end{cases}$$

显然具体函数值依旧由 x(-3)、x(-2)、x(-1)决定,所以无法去处这些额外的点。