数值分析第三次作业

杜鸿宇 2016141211049

第一题：我们先设：

$$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)......(x-x_n)$$

然后再设：

$$w(x)=(x-x_1)(x-x_2)......(x-x_n)$$

则 ： $$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{a_n*w'(x_j)}=g[x_1,x_2,......x_n]*a_n$$

其中 $$g(x)=x^k$$

当 $$0\le k\le n-2\text{时}$$

由于 $$g[x_1,x_2,......,x_n]=\frac{g^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}$$

此时 $$g[x_1,x_2,......,x_n]=0$$

当 $$k=n-1\text{时}$$

此时 $$g[x_1,x_2,......,x_n]=1/a_n$$

证毕

第二题：

先得到差商表：

1.0	0.7651977				
1.3	0.6200860	-0.4837057			
1.6	0.4554022	-0.5489460	-0.1087338		
1.9	0.2818186	-0.5786120	-0.0494433	0.0658783	
2.2	0.1103623	-0.5715210	0.0118183	0.0680684	0.0018251

通过对角线的值由插值公式得到： $J_0(1.5)$=5118200

第三题：

本题采用归纳法的思想：当 $n=1$ 时，

$$f[x_0,x_1]=\int_0^1 f^{(1)}(\xi)dt_1=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

假设 $k=\text{n}-1$ 成立，即：

$$f[x_0,......,x_{n-1}]=\int_0^1\int_0^{t_1}......\int_0^{t_{n-2}} f^{(n-1)}(\xi)dt_{n-1}d......t_2dt_1$$

那么原式中：

$$\int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(\xi)dt_n = \frac{f^{(n-1)}(x_0+\sum_{t=1}^{n-1}t_i(x_i-x_{i-1})+t_{n-1}(x_n-x_{n-1})-f^{(n-1)}(x_0+\sum_{t=1}^{n-1}t_i(x_i-x_{i-1}))}{x_n-x_{n-1}}$$

由于$\int_0^1 \ldots\ldots \int_0^{t_{n-2}} f^{(n-1)}(x_0+\sum_{i=1}^{n-1}t_i(x_i-x_{i-1})+t_{n-1}(x_n-x_{n-1})dt_{n-1}\ldots dt_1 = f[x_0\ldots x_{n-2},x_n]$，

所以再由公式：$f[x_0,x_1,\ldots,x_k,x_m]=\dfrac{f[x_0,x_1,\ldots,x_{k-1},x_m]-f[x_0,x_1,\ldots,x_k]}{x_m-x_k}$

得到$k=n$时成立，所以原命题成立。