# 数值分析第四次作业

## 杜鸿宇

## 2016141211049

1. 由于 $h_{n,i}(x)=l_{n,i}^2(x)-2(x-x_i)l_{n,i}^2(x)l_{n.i}^{'}(x_i)$，所以原式为：$\sum_{i=1}^{n}\frac{l_{n,i}^2(x)-h_{n,i}(x)}{2}(x-x_i)$。

设 $f(x)=\frac{x}{2}$，所以上式就可以化为：$H_{2n+1}(x)-\sum_{i=0}^{n}f(x)h_{n,i}(x)$。其中 $\sum_{i=0}^{n}f(x)h_{n,i}(x)=f(x)\sum_{i=0}^{n}h_{n,i}(x)=f(x)$，$\sum_{i=0}^{n}h_{n,i}(x)$ 为对 1 的插值，因此上式子为零，所以原命题中的式子为零，即 $\sum_{i=0}^{n}(x-x_i)^2 l_{n,i}^2(x)l_{n,i}^{'}(x_i)=0$。

2. 由题意可知 $P_2(x)$ 是一个二次多项式，且导数的限制条件只在 $x=x_0$ 处成立。所以我们可以得到如下的埃米尔特插值多项式：

$$P_2(x)=f(x_0)h_0(x)+f(x_1)h_1(x)+f^{'}(x_0)\overline{h}_0(x)$$

其中 $h_0(x)=(Ax+B)(x-x_1)$（因为对于一个约束条件的点为一次多项式，两个约束条件的为二次多项式，但对应讨论点的多项式需要去除）

加上限制条件：$h_0(x_0)=1$ 和 $h_0^{'}(x_0)=0$，可以得到：

$$h_0(x)=(\frac{-1}{(x_1-x_0)^2}x+\frac{2x_0-x_1}{(x_0-x_1)^2})(x-x_1)$$

同理可设： $h_1(x)=C(x-x_0)^2$ 和 $\overline{h}_0(x)=D(x-x_0)(x-x_1)$

可以得到： $h_1(x)=\frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2}$ 和 $\overline{h}_0(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{x_1-x_0}$

因此：

$$P_2(x)=f(x_0)(\frac{-1}{(x_1-x_0)^2}x+\frac{2x_0-x_1}{(x_0-x_1)^2})(x-x_1)+f(x_1)\frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2}+f^{'}(x_0)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{x_1-x_0}$$

我们考虑一般的埃米尔特插值余项定理，即：

$$f(x)-P(x)=\frac{f^{(n+r+2)}(\xi)}{(n+r+2)!}w_n(x)w_r(x)$$

为了证明它，引进辅助函数：

$$F(t)=f(t)-H(t)-\frac{w_n(t)w_r(t)}{w_n(x)w_r(x)}[f(x)-H(x)]$$

由前提条件可以知道：$F(x)=F(x_0)=......=F(x_n)=0$ 和 $F^{'}(x_0)=......F^{'}\left(x_r\right)=0$

由罗尔定理以此类推可知 $F^{(n+r+2)}(t)$ 在 $(a,b)$ 内至少有 1 个零点，即：

$$f^{(n+r+2)}(\xi)-\frac{(n+r+2)!}{w_n(x)w_r(x)}[f(x)-H(x)]=0 \quad 得证。$$

带入本题数据就可以得到：$f(x)-P_2(x)=\frac{1}{6}(x-x_0)^2(x-x_1)f^{'''}(\xi)$

3. 本题如同上题，由初始数据可知：

$$P_4(x)=f(0)h_0(x)+f(1)h_1(x)+f^{'}(1)H_1(x)+f^{''}(1)\overline{H_1}(x)$$

由五个制约条件显然这是一个 4 次多项式，由于 $f^{'}(0)=0$，所以就不用考虑 $H_0(x)$。

根据题意我们容易得出如下四个等式：

$$h_0(x)=\frac{(x-x_1)^3}{(x_0-x_1)^3}(A(x-x_0)+1)\text{；}$$

$$h_1(x)=\frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2}(A(x-x_1)^2+B(x-x_1)+1)\text{；}$$

$$H_1(x)=(x-x_0)^2(A(x-x_1)^2+B(x-x_1))\text{；}$$

$$\overline{H}_1(x)=(x-x_0)^2(A(x-x_1)^2+B(x-x_1)+C)\text{。}$$

对第一个式子：$h_0(0)=1,h_0(1)=0,h_0^{'}(0)=0,h_0^{'}(1)=0,h_0^{''}(1)=0$

对第二个式子：$h_1(0)=0,h_1(1)=1,h_1^{'}(0)=0,h_1^{'}(1)=0,h_1^{''}(1)=0$

对第三个式子：$H_1(0)=0,H_1(0)=1,H_1^{'}(0)=0,H_1^{'}(1)=1,H_1^{''}(1)=0$

对第四个式子：$\overline{H}_1(0)=0,\overline{H}_1(1)=0,\overline{H}_1^{'}(0)=0,\overline{H}_1^{'}(1)=0,\overline{H}_1^{''}(1)=1$

由此可得四组的待定系数为：A1=3；A2=3，B2=-2；A3=-2，B3=1；A4=1/2，B4=0.
所以最终可得：

$$P_4(x)=2x^4-5x^3+4x^2+1$$