数值分析第十次作业

杜鸿宇

2016141211049

1. 由题意可知：

$$\| I \| = \sup_{\|x\|=1}(\| Ix \|) = \sup_{\|x\|=1}(\| x \|) = 1\text{；}$$

原命题得证。

2. 根据公式：

$$\| A \|_2 = \left(\sup_{\|x\| \neq 0} \| Ax \|_2 \right) / \| x \|_2\text{；}$$

得到：

$$\| Ax \|_2 \leq \| A \|_2 | \cdot | x \|_2\text{；}$$

即矩阵范数 $\| \cdot \|_2$ 与向量范数 $\| \cdot \|_2$ 相容。

设 $A = [a_1, ..., a_n]^T$， $a_i = [a_{i1}, ..., a_{in}]^T$，于是得到：

$$\| Ax \|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} | a_i^T x |^2 \leq \sum_{i} \| a_i \|_2^2 \| x \|_2^2 = \| A \|_F^2 \| x \|_2^2\text{；}$$

即为：

$$\| Ax \|_2 = \| A \|_F \cdot \| x \|_2\text{；}$$

所以矩阵范数 $\| \cdot \|_F$ 与向量范数 $\| \cdot \|_2$ 相容。

由公式：

$$\| A \|_2 = [\lambda_{\max}(A^H A)]^{1/2}\text{，} \| A \|_F = [tra(A^H A)]^{1/2}\text{；}$$

可知，tra 的值是矩阵所有特征值的和，所以后者大于前者。

最后，假设 $\| \cdot \|_F$ 是向量范数 $\| \cdot \|_2$ 的从属范数，于是我们得到如下公式：

$$\| A \|_F = \sup_{\|x\|_2=1}(\| Ax \|_2) \leq \sup_{\|x\|_2=1}(\| A \|_2 \| x \|_2) = \sup_{\|x\|_2=1}(\| A \|_2) = \| A \|_2\text{；}$$

即为：

$$\| A \|_F \leq \| A \|_2\text{；}$$

但由上一小问可知：

$$\| A \|_2 \leq \| A \|_{\mathrm{F}}\text{；}$$

所以两式相等，这显然不可能，所以不是从属范数。

3. $A=(a_{ij})$ 是一个 n 阶正定矩阵，对任意向量 x,y 定义：

$$(x,y)=\sum_{i,j=1}a_{ij}x_iy_j\ ;$$

类比柯西不等式：

$$|x_1y_1+x_2y_2+......+x_ny_n|\le\sqrt{x_1^2+x_2^2+......+x_n^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2+......+y_n^2}\ ;$$

我们得到：

$$|\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j|\le\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j}\cdot\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j}\ ;$$

即：

$$|y^{'}Ax|\le(x^{'}Ax)^{1/2}(y^{'}Ay)^{1/2}\ ;$$

得到：

$$|<Ax,y>|\le|<Ax,x>|^{1/2}\cdot|<Ay,y>|^{1/2}\ ;$$

原命题得证。

4. 把原式进行变形，得到：

$$A^2-5A+6E=(A-2E)(A-3E)=0\ ;$$

故其特征值只能为 3 和 2.另一方面，显然 $A-2E$ 和 $A-3E$ 是线性无关的矩阵，所以我们考虑 r 即可以得到：

$$n\ge r(A-3E)+r(A-2E)\ge r(A-2E-(A-3E))=r(E)=n\ ;$$

所以得到：

$$r(A-3E)+r(A-2E)=n\ ;$$

所以几何重数与代数充数相同，故可以得到存在 S 可逆，对角矩阵 T 满足：

$$A=STS^{-1};$$

所以 A 是可以对角化的。