数值分析第一次作业

杜鸿宇

2016141211049

第一题：

对于多项式$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_0$，可知完成一次计算需要完成 n 次加法和$2n-1$次乘法，因为$x^n$需要完成$n-1$次乘法，再分别与$a_0,a_1......a_n$相乘就又多了$n$次。为了提高算法效率我们做如下的多项式变形，将多项式$P_n(x)$变形为$((......(((a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x+a_{n-3})...)x+a_1)x+a_0$，这样完成加法和乘法的总次数都为$n$次，相比之前减少了$n-1$次。

第二题：由于 IEEE754 单精度浮点数的正规表示为$(-1)^{b_{31}}\times 2^{(b_{30}b_{29}......b_{23})_2-127}\times(1.b_{22}b_{21}......b_0)_2$，而$(1)_{10}$是十进制表示下的 1，所以$b_{31}=0$，$(b_{30}b_{29}......b_{23})_2=127$，即$b_{30}b_{29}......b_{23}=01111111$。另一方面$b_{22}b_{21}......b_0=00......0$，因此我们得到$(1)_{10}$的 IEEE754 表示为 0 01111111 00000000000000000000000.

最小规范正浮点数：

0/1 00000001 00000000000000000000000=$(-1)^{0/1}\times 2^{(00000001)_2}\times(1.0......0)_2$

=$\pm 2^{-26}\approx 1.18e-38$

最大规范正浮点数：

0/1 11111110 11111111111111111111111=$(-1)^{0/1}\times 2^{(11111110)_2}\times(1.1......1)_2$

=$\pm$（$2-2^{-23}$）$\times 2^{127}\approx 3.40e-38$

第三题：对于原式$\ln(x-\sqrt{x^2-1})$而言，其中含有减号，产生的误差对结果会有比较大的影响，所以做一个变形：$-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，这样精度就提高了很多。另一方面，由于原式的定义域为$[1,+\infty]$，所以从右边趋近于 1 时，可用等价无穷小量进行替代，即$\ln(x-\sqrt{x^2-1})\sim 1-x-\sqrt{x^2-1}$。

接下来用数据进行检验：我们带入$x=20$，$\sqrt{20^2-1}$近似成 19.975.那么相对误差为：$\left|\frac{\ln(30-\sqrt{30^2-1})-\ln(30-19.9750)}{\ln(30-19.9750)}\right|$=2.77610

另一方面：$\left|\frac{-\ln(30+\sqrt{30^2-1})+\ln(30+19.9750)}{\ln(30+19.9750)}\right|$=0.04667

所以第二个更加精确。

第四题：由原方程组$\begin{cases} x_1+10^{10}x_2=10^{10} \\ 0.5x_1+0.5x_2=1 \end{cases}$消元可以得到$x_2=\frac{10^{10}-2}{10^{10}-1}$，在舍入的情况下保留三位有效数字为 1.00，此时$x_1=0$带入第二个式子中发现解不合理。在截断的情况下，$x_2=0.999$，此时$x_1=1\times10^7$，带入二式显然不够合理。

若交换两个方程的顺序，我们可以得到$x_1=1,x_2=1$。带入两式检验发现结果正确，所以交换顺序后可行。