数值分析第九次作业

杜鸿宇

2016141211049

1. 我们不妨认为它的代数精度可以达到 1，于是得到如下的方程组：

$$\begin{cases} \int_a^b 1dx = c_1 \\ \int_a^b xdx = c_1 x_0 \\ \int_a^b x^2 dx = c_1 x_0^2 + 2c_2(b-a) \end{cases};$$

解得：

$$\begin{cases} c_1 = b-a \\ x_0 = \dfrac{b+a}{2} \\ c_2 = \dfrac{(a-b)^2}{24} \end{cases};$$

进一步我们得到：

$$\int_a^b x^3 dx = (b-a)(\frac{a+b}{2})^3 + \frac{(a-b)^2}{8}(b^2-a^2);$$

但对 x^4：

$$\int_a^b x^4 dx \neq (b-a)(\frac{a+b}{2})^4 + \frac{(a-b)^2}{6}(b^3-a^3)$$

所以之后更高次数的都有误差，所以最高精度为 2 次。

2. 复合梯形公式的误差估计为：

$$I(f) - \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})];$$

以下的代码为根据不同的 h 值求误差的算法：

```
h=input(' ');
syms x z;
y1=0;
for x=0.2:h:2.8;
    y1=y1+2*(x.^(2))*sin(x);
end
a=(z.^(2))*sin(z);
b=int(a,z,0.2,2.8);
```

```
c=b-(h./2)*(y1-((0.2).^(2))*sin(0.2)-((2.8).^(2))*sin(2.8))
```

因此得到当 $h=0.0473$，即 $n=55$ 时，误差刚好为 0.001。

3. 同样复合梯形公式的截断误差估计为：

$$I(f)-\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})];$$

以下是求估计值的代码：

```
h=input(' ');
syms x;
y1=0;
for x=0:h:2*pi;
     y1=y1+2(./(2+cos(x));
end
c=(h./2)*(y1-1./(2+cos(0))-1./(2+cos(2*pi)))
```

对于不同的 h 值我们得到如下的表：

h 值	T(x)
(2*pi)/3	2.0944
(2*pi)/5	3.6176
(2*pi)/9	3.6275
(2*pi)/15	3.6276
(2*pi)/20	3.6276
(2*pi)/30	3.6276

于是我们得到原始值为 3.6276.

接着我们来求：E_n/E_{2n}，代码如下：

```
h=;
syms x z;
y1=0;
for x=0:h:2*pi;
  y1=y1+2./(2+cos(x));
end
a=1./(2+cos(z));
b=int(a,z,0,2*pi);
c=b-(h./2)*(y1-1./(2+cos(0))-1./(2+cos(2*pi)))
```

于是有下表：

h	Eh
(2*pi)./4	-0.0376
(2*pi)./8	-1.9279e-04
(2*pi)./16	-5.1226e-09
(2*pi)./32	-4.4409e-16

因此我们又可以得到：

Eh/E2h
196.0784
3.7635e+04
-1.1535e+07

但再往后可以发现 Eh/E2h 的值变为-0.1429 和-inf。

一开始增大的原因主要是随着步长的缩小，误差的数量级显著增大，所以会出现不断增大的情况。另一方面由于 matlab 的精读有限，所以再往后分误差为零，所以为-inf，而中间的减小可能是因为函数自身的性质，即误差估计的范围中的二阶导并不一定是稳定的。

4 根据上面一样的分析我们得到如下代码：

```
h=input(' ');
syms x z;
y1=0;
for x=0:h:1;
    y1=y1+2*(x.^(1./3))*cos(2*x);
end
a=(z.^(1./3))*cos(2*z);
b=int(a,z,0,1);
c=(h./2)*(y1-(0.^(1./3))*cos(0)-(1.^(1./3))*
cos(2))
```

于是有如下的表格：

h	T(x)
1/10	0.2490
1/30	0.2604
1/100	0.2629
1/300	0.2634
1/10000	0.2635
1/100000	0.2635

所以原真实值为：0.2635。

外推法能进一步提高精度（个人看法），通过麦克劳林展开式和实验数据都没有找出问题，希望朱老师能帮我发现错误之处。

我们来看一组数据：这是一组加速收敛成功案例的数据（对于本题数据）

	原公式	外推
n=2	0.1532	0.021
n=4	0.0541	0.0086
n=8	0.0199	0.0033

代码如下：

```
h=;
syms x z;
y1=0;
```

```
for x=0:h:1;
  y1=y1+2*(x.^(1./3))*cos(2*x);
end
a=(z.^(1./3))*cos(2*z);
b=int(a,z,0,1);
c=b+(h./6)*(y1-(0.^(1./3))*cos(0)-(1.^(1./3))*cos(2))

h=;
syms x z;
y1=0;
for x=0:h./2:1;
   y1=y1+2*(x.^(1./3))*cos(2*x);
end
c=(h./3)*(y1-(0.^(1./3))*cos(0)-(1.^(1./3))*cos(2))
```

上两式结果需要相减，h 示情况而定。

为了提高数值精度，我们选用龙贝格公式，这时候我们需要把区间$[a,b]$分割成 2n 份，选取$[x_i, x_{i+1}]$的中点为$x_{i+1/2}=(x_i+x_{i+1})/2$，这时我们得到新的估计公式为：

$$T_{2n}=\sum_{i=0}^{2n-1}1/2(h/2)[f(x_i)+2f(x_{2i+1})+f(x_{i+1})];$$

于是得到了如下代码：

```
h=;
syms x z;
y1=0;
for x=0:h:1;
  y1=y1+2*(x.^(1./3))*cos(2*x);
  end
  a=(z.^(1./3))*cos(2*z);
  b=int(a,z,0,1);
  c=b-(h./4)*(y1-(0.^(1./3))*cos(0)-(1.^(1./3))*cos(2))
```

这是第一部分。

```
h=;
syms x z;
y1=0;
for x=(0.125./2):h:(1-0.125./2);
   y1=y1+(x.^(1./3))*cos(2*x);
end
a=(z.^(1./3))*cos(2*z);
b=int(a,z,0,1);
c=(h./2)*y1
```

这是第二部分，其中的 h 示情况而定

b 为原积分值，而最后减去的两项直接加上就行，这样我们得到如下的图表：

	复合梯形公式	龙贝格算法
n=2	0.1532	0.0540
n=4	0.0541	0.0199
n=8	0.0199	0.0075
n=16	0.0075	0.0029

精度在增加，但也仅仅是步长加倍的另一种形式。