数值分析第二次作业

杜鸿宇

2016141211049

第一题：由题意可知 $w_{n+1}(x)=(x-x_0)......(x-x_n)$，现对其求导可得：$w'_{n+1}(x)=(x-x_1)......(x-x_n)+(x-x_0)\{(x-x_2)......(x-x_n)+(x-x_1)[(x-x_2)......(x-x_n)]'\}$ 一直持续下去直到出现 $(x-x_{i-1})[(x-x_i)......(x-x_n)]$，再求一次导数停止，这时带入 $x=x_i$，原式所有包含 $x-x_i$ 项的多项式全部为 0，求得 $w'_{n+1}(x_i)=\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)$。

第二题：

（1）我们先设函数 $x^j=f(x)$，那么 x_k^j 就可看作在 k 点函数的取值。又因为 $l_k(x)$ 是拉格朗日基底函数，所以 $\sum_{k=0}^{n}x_k^j l_k(x)$ 为函数的拉格朗日插值公式。所以就可以得到：$x^j-\sum_{k=0}^{n}x_k^j l_k(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$，$n+1$ 次求导之后 $f^{(n+1)}(\xi)$ 是 0，所以原公式得证。

（2）$(x_k-x)^2=x_k^2-2xx_k+x^2$，所以由（1）中相同的办法对其逐项求和可知：$\sum_{k=0}^{n}(x_k-x)^2 l_k(x)\equiv x^2-2x\sum_{k=0}^{n}x_k l_k(x)+x^2\sum_{k=0}^{n}l_k(x)=0$，所以 $\sum_{k=0}^{n}(x_k-x)^2 l_k(x)\equiv 0$。

第三题：$\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|=\max\limits_{a\le x\le b}|R_n(x)+L_n(x)|$，由于 $f(a)=f(b)=0$，所以 $L_n(x)=0$，即 $\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|=\max\limits_{a\le x\le b}|R_n(x)|$。而 $\max\limits_{a\le x\le b}|R_n(x)|\le\frac{\max\limits_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}|w_{n+1}(x)|$。由题意可知 $(n+1)!=2!=2$，$\max\limits_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|=\max\limits_{x\in[a,b]}|f^2(x)|$，这时取 $x=\frac{a+b}{2}$ 带入 $|w_{n+1}(x)|$，可以得到 $\frac{(b-a)^2}{4}$ 综合上式就可以得到：$\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{\max\limits_{x\in[a,b]}|f^2(x)|}{8}(b-a)^2$。（其中 $x=\frac{a+b}{2}$ 为二次函数 $w_{n+1}(x)$ 的对称轴，加上绝对值后 $|w_{n+1}(x)|$ 开口向下，对称轴

为$[a,b]$区间中的最大值）

四

$$\frac{x_1-x_0}{x_n-x_0}L_{1,\ldots\ldots,n}(x)+\frac{x_n-x}{x_n-x_0}L_{0,\ldots\ldots,n-1}(x)=\frac{x-x_0}{x_n-x_0}[y_1\frac{x_1-x_0}{x-x_0}l_1(x)+\ldots\ldots+y_n\frac{x_n-x_0}{x-x_0}l_n(x)]+$$

$\frac{x_n-x}{x_n-x_0}[y_0\frac{x_0-x_n}{x-x_n}l_0(x)+y_{n-1}\frac{x_{n-1}-x_n}{x-x_n}l_{n-1}(x)]$，其中除去首尾外任何一项为：

$\frac{\mathrm{x_k}-x_0}{x_n-x_0}y_kl_k(x)-\frac{x_k-x_n}{x_n-x_0}y_kl_k(x)=y_kl_k(x)$ 首尾两项约去系数刚好为 $y_0l_0(x)$ 和

$y_nl_n(x)$经过化简之后就可以得到：$L_{0,1,\ldots\ldots,n}(x)=\frac{x-x_0}{x_n-x_0}L_{1,\ldots\ldots,n}(x)+\frac{x_n-x}{x_n-x_0}L_{0,\ldots\ldots,n-1}(x)$。

使用迭代公式的时候，实际上只用做一个两项的插值工作，之后只要用循环语句就可以实现最终的求值。所以在效率上比直接求结果要更快。
其次，由于计算机的精度有限，迭代求法每走一步就有可能产生舍入误差。但是由线性插值迭代而成的舍入误差不可能超过 n 次迭代所产生的舍入误差。

不失一般性，我们考虑函数$f(x)=0$的插值，间隔为Δx。在 n 点定义误差为ε，其它点均为零，则在 n+1 点的误差（线性插值）为$y_1(x_1+\Delta x)=2\varepsilon$。若在 n 次插值的情况下，$m\Delta x$外 n+m 点出的误差被放大为$\frac{(n+m)!}{n!m!}\varepsilon$，这只是一个点的误差值，所以相比较之下本题的运算公式更有优势。（本题结果由老师上课点拨之后翻阅相关文献总结而成）