数值分析第八次作业

杜鸿宇

2016141211049

1. 设一次逼近多项式为：

$$y = ax + b\text{；}$$

根据切比雪夫定理可知它至少和原曲线有 3 个错位点，且 0 点比为一个。因此最短距离就可以表示成：

$$y(0) = b\text{；}$$

另一方面根据斜率可知向两端距离增大且各边各有一个错位点，于是两个端点是错位点，于是可以得到方程组：

$$\begin{cases} 1 + a - b = b \\ 2 - 2a - b = b \end{cases}\text{；}$$

解得：

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{2}{3} \end{cases}\text{；}$$

于是直线为：

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\text{。}$$

2. 由最佳一致逼近定理可以知道：

$$\| P^*(x) - f(x) \| = \inf_{P \in P_n} (\max_{x \in [a,b]} | P(x) - f(x) |)\text{；}$$

于是得到：

$$\begin{aligned} \| P^*(-x) - f(-x) \| &= \inf_{P \in P_n} (\max | P(-x) - f(-x) |) \\ &= \inf_{P \in P_n} (\max | P(-x) - f(x) |) \end{aligned}\text{；}$$

由切比雪夫定理中的唯一性得到：

$$P(-x) = P(x)\text{；}$$

因此 n 次代数逼近多项式为偶函数。

显然 x^{2n+1} 是一个基函数，对于多项式偶多项式与奇多项式相加减不可能得到偶多项式，所以其系数为 0，故 2n 次代数逼近多项式也是 2n+1 次代数逼近多项式。

假设 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上连续实值奇函数，则最佳 n 次代数逼近多项式为奇函数；并且最佳 2n-1 次逼近代数多项式也是最佳 2n 次逼近代数多项式。

3. 由题意可知直线 $y=c(x-a)$ 一定过点 $(a,0)$，所以 $\max|1-c(x-a)|\,(a\le x\le b)$ 一定不会小于 1，那么当 $c\in[0,2/(b-a)]$ 时都满足条件，所以不唯一。

4. 由题意令：

$$
\begin{aligned}
&P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}a_iQ_i(x)\\
&\eta=\sum_{i=0}^{n}a_iQ_i(x_0)\qquad ;\\
&\int_a^b\rho(x)Q_i^2(x)dx=c_i
\end{aligned}
$$

于是我们得到：

$$\int_a^b\rho(x)P^2(x)dx=\int_a^b\rho(x)\sum_{i=0}^{n}a_i^2Q_i^2(x)dx=\sum_{i=0}^{n}a_i^2c_i\ ;$$

用拉格朗日乘数法可以得到：

$$a_0^2c_0+......+a_n^2c_n-\lambda(a_0Q_0(x_0)+a_1Q_1(x_0)+......+a_nQ_n(x_0)-\eta)\ ;$$

于是得到：

$$\begin{cases}2a_0c_0-\lambda Q_0(x_0)=0\\2a_1c_1-\lambda Q_1(x_0)=0\\......\\2a_nc_n-\lambda Q_n(x_0)=0\\a_0Q_0(x_0)+a_1Q_1(x_0)+......+a_nQ_n(x_0)=\eta\end{cases}\ ;$$

于是我们得到：

$$a_i=\frac{\eta*Q_i(x_0)}{c_i*[\frac{Q_0^2(x_0)}{c_0}+......+\frac{Q_{i-1}^2(x_0)}{c_{i-1}}+\frac{Q_i^2(x_0)}{c_i}+\frac{Q_{i+1}^2(x_0)}{c_{i+1}}+......+\frac{Q_n^2(x_0)}{c_n}]}$$

这样就求得了 $P_n^*(x)$。

5. 由题意可知：

$$\int_1^2 1dx = 2$$

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}$$

$$\int_1^2 xdx = \frac{3}{2} \qquad ;$$

$$\int_1^2 \ln xdx = 2\ln 2 - 1$$

$$\int_1^2 x\ln xdx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

因此我们就得到以下线性方程组：

$$\begin{cases} c_0 + (3/2)c_1 = 2\ln 2 - 1 \\ (3/2)c_0 + (7/3)c_1 = 2\ln 2 - 3/4 \end{cases};$$

解得：

$$\begin{cases} c_0 = 20\ln 2 - 29/2 \\ c_1 = 9 - 12\ln 2 \end{cases};$$

因此逼近函数为：

$$\mathrm{y} = (20\ln 2 - 29/2) + (9 - 12\ln 2)x \text{。}$$

6. 在原题中令：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2.1 & 1 & -1.1 \end{pmatrix};$$

$$C = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T \text{；}$$

$$Y = (1 \quad 1.1 \quad 0.5 \quad 1.5 \quad 1) \text{；}$$

由 2 范数的定义可知要满足如下方程：

$$\sum_{i=1}^{3} < A_i, A_j > C_i = < Y, X_j >, j = 1,2,3 \text{；}$$

于是有 $A^T AC = A^T Y$;

于是我们得到方程组：

$$\begin{pmatrix} 17.41 & 11.1 & -11.31 \\ 11.1 & 8 & -8.1 \\ -11.31 & -8.1 & 8.21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.8 \\ 6.6 \\ -6.7 \end{pmatrix};$$

解得：

$$C = (0.35 \quad 1.2 \quad 0.85)$$ 。