SVML & MMG1:
3.2 Digitale Systeme

Prof. Dr. Rainer Lienhart

Lehrstuhl für Maschinelles Lernen und Maschinelles Sehen
(Machine Learning and Computer Vision Lab)
www.multimedia-computing.de
www.multimedia-computing.org
rainer.lienhart@uni-a.de

WS 2023 / 2024

Literaturquelle

Dieses Kapitel basiert zu großen Teilen auf den folgenden Kapiteln aus [Oppenheim et al., 2010]:

- Lineare zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme)
  - 2 Zeitdiskrete Signale und Systeme (2.2 - 2.4)
- Fourier Transformation von Signalen und Systemen
  - 2 Zeitdiskrete Signale und Systeme (2.6 - 2.9)
  - 5 Transformationsanalyse von LTI-Systemen (5.1)

Inhalt

Zeitdiskrete Systeme

Definition (Zeitdiskrete Systeme)

Ein zeitdiskretes System ist mathematisch als eine Transformation oder ein Operator $T(\{\bullet\})$ definiert, die bzw. der eine Eingangsfolge mit den Werten $x[n]$ in eine Ausgangsfolge $y[n]$ abbildet:

$$y[n] = T(\{x[m]\}_{m\in\mathbb{Z}}, n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

Im Buch wird dies verkürzt geschrieben als:

$$y[n] = T\{x[n]\} \tag{2}$$

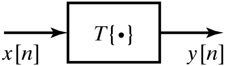


Abbildung 1: Darstellung eines zeitdiskreten Systems [Oppenheim et al., 1999]

Zeitdiskrete Systeme

Eigenschaften

Zeitdiskreten Systemen kann man u.a. folgende Eigenschaften zuordnen:

- gedächtnislos
- linear
- zeitinvariant
- kausal
- stabil

In der Regel sind alle Systeme von praktischem Interesse stabil. Die meisten hier behandelten Systeme sind linear **und** zeitinvariant und gehören deshalb zur Klasse der LTI-Systeme (**L**inear **T**ime-**I**nvariant). Einige wichtige Systeme zur Verarbeitung von Schallen sind allerdings nichtlinear, z.B. Kompressor, Limiter, Verzerrer.

Zeitdiskrete Systeme

Systeme ohne Gedächtnis

Definition (Systeme ohne Gedächtnis)

Ein System wird als gedächtnislos bezeichnet, wenn der Ausgangswert $y[n]$ für jeden Wert von n nur von dem Eingangswert $x[n]$ bei demselben n abhängt.

$$y[n] = T(x[n]) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

Beispiel:

- Endstufe (Leistungsverstärker)
- Jede Art von Lautstärkeregler

Viele Systeme zur Signalverarbeitung von Schallen sind gedächtnisbehaftet, z.B. Effekte wie Echo oder Hall.

Zeitdiskrete Systeme

Lineare Systeme

Definition (Lineare Systeme)

Wenn $y_1[n]$ und $y_2[n]$ die Systemantworten zu den entsprechenden Eingangsfolgen $x_1[n]$ und $x_2[n]$ sind, dann ist das System $T(\{\bullet\})$ genau dann linear, wenn gilt:

$$
\begin{aligned}
T(\{x_1[m] + x_2[m]\}, n) &= T(\{x_1[m]\}, n) + T(\{x_2[m]\}, n) && (4)\\
&= y_1[n] + y_2[n] \text{ (Additionseigensch.)} && (5)\\
T(\{ax[m]\}, n) &= aT(\{x[m]\}, n) && (6)\\
&= ay[n] \text{ (Skalierbarkeitseigensch.)} && (7)
\end{aligned}
$$

Man fasst diese Eigenschaften im Überlagerungsprinzip zusammen:

$$
\begin{aligned}
T(\{ax_1[m] + bx_2[m]\}, n) &= aT(\{x_1[m]\}, n) + bT(\{x_2[m]\}, n) && (8)\\
&= ay_1[n] + by_2[n] && (9)
\end{aligned}
$$

Zeitdiskrete Systeme

Lineare Systeme: Beispiel

Beispiel (Akkumulator)

Das Akkumulator-System ist definiert als:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]. \tag{10}$$

Der Ausgangswert zu jedem Abtastzeitpunkt n ist gleich der Summe des Wertes bei n und aller vorherigen Eingangswerte. Der Akkumulator ist ein lineares System.

Zeitdiskrete Systeme

Lineare Systeme: Beispiel

Beweis der Linearität des Akkumulators.

Gegeben sind zwei beliebige Eingangsfolgen $x_{1,2}[n]$ und die zugehörigen Ausgangsfolgen $y_{1,2}[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_{1,2}[k]$.
Im Falle von Linearität muss die kombinierte Eingangsfolge $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ die Ausgangsfolge $y_3[n] = ay_1[n] + by_2[n]$ erzeugen (Überlagerungsprinzip).

$$\begin{aligned} y_3[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} x_3[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} (ax_1[k] + bx_2[k]) && (11) \\ &= a \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] + b \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k] && (12) \\ &= ay_1[n] + by_2[n] && (13) \end{aligned}$$

$\square$

Zeitdiskrete Systeme

Zeitinvariante Systeme

Ein zeitinvariantes (oder verschiebungsinvariantes) System ist ein System, das bei einer Zeitverschiebung oder einer Verzögerung der Eingangsfolge eine entsprechende Zeitverschiebung oder Verzögerung der Ausgangsfolge bewirkt.

Definition (Zeitinvariante Systeme)

Ein System $T\{\bullet\}$ wird als zeitinvariant bezeichnet, wenn es für alle n_0 mit der Eingangsfolge

$$x_1[n] = x[n - n_0] \tag{14}$$

die Ausgangsfolge

$$T(\{x_1[m]\}, n) = y_1[n] = y[n - n_0] \tag{15}$$

erzeugt.

Zeitdiskrete Systeme

Zeitinvariante Systeme: Beispiel

Beispiel (Akkumulator)

Der Akkumulator $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ ist ein zeitinvariantes System.

Beweis der Zeitinvarianz.

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k - n_0] \tag{16}$$

$$\overset{k_1 = k - n_0}{=} \sum_{k_1=-\infty}^{n-n_0} x[k_1] \tag{17}$$

$$= y[n - n_0] \tag{18}$$

$\square$

Zeitdiskrete Systeme

Kausale Systeme

Definition (Kausales System)

Ein System ist kausal, wenn bei beliebiger Wahl von n_0 der Ausgangsfolgenwert beim Index $n = n_0$ nur von Werten im Indexbereich $n \leq n_0$ abhängt.

- Bei der Verarbeitung von Schallen werden i.d.R. kausale Systeme verwendet, um *Online*-Verarbeitung zu realisieren.
- Es ist möglich eine Abhängigkeit von einer festen Zahl "in der Zukunft" liegender Abtastwerte zuzulassen. Dazu muss die Ausgangsfolge entsprechend verzögert werden.
- Liegt zur Verarbeitung das gesamte Signal vor, können auch akausale Systeme verwendet werden (*Offline*-Verarbeitung). Dies ist bei Schallen ungewöhnlich, bei Bildern standard. Warum?

Zeitdiskrete Systeme

Stabile Systeme

Definition (Stabiles System)

Ein System ist genau dann stabil im Sinne beschränkter Eingangswerte und beschränkter Ausgangswerte (*BIBO* = *bounded input bounded output*), wenn jede beschränkte Eingangsfolge eine beschränkte Ausgangsfolge erzeugt. Eine Eingangsfolge $x[n]$ bzw. Ausgangsfolge $y[n]$) ist beschränkt, wenn es einen festen, positiven endlichen Wert B_x bzw. B_y gibt, für den gilt:

$$|x[n]| \leq B_x < \infty \, , \forall n \tag{19}$$

$$|y[n]| \leq B_y < \infty \, , \forall n \tag{20}$$

Zeitdiskrete Systeme

Stabile Systeme

Beispiel (Stabiles System)

- Angenommen $y[n] = (x[n])^2$ und $|x[n]| \leq B_x$.
  Dann gilt $|y[n]| = |x[n]|^2 \leq B_x^2 = B_y$
  $\Rightarrow$ stabil
- Angenommen $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ (n+1), & n \geq 0 \end{cases}$
  Dann gilt: Es gibt kein B_y so dass $(n+1) \leq B_y < \infty \; \forall n$
  $\Rightarrow$ instabil
- Alle digitalen Systeme, die zur Verarbeitung von Schallsignalen verwendet werden, sind stabil.

Einschub: Einheitsimpuls

Für die weitere Diskussion führen wir ein analytisches Signal ein:

Definition

Der Einheitsimpuls ist definiert als

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & : \quad n \neq 0 \\ 1 & : \quad n = 0 \end{cases} \tag{21}$$

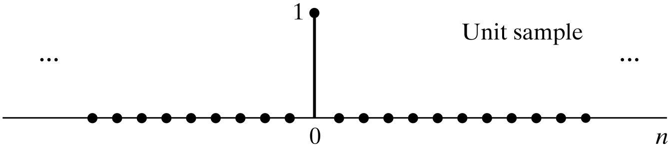


Abbildung 2: Einheitsimpuls. [Oppenheim et al., 1999]

Einschub: Einheitsimpuls

Eine beliebige Folge $x[n]$ kann durch eine Summe von skalierten und verzögerten Impulsen dargestellt werden. Die Skalierungskoeffizienten sind die Abtastwerte:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{22}$$

Beispiel (Einheitsimpuls in Python anzeigen)

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
n = np.arange(-10,10)
plt.stem(n, n== 0)
plt.show()
```

Eigenschaften von LTI-Systemen

Eine besonders wichtige Klasse von zeitdiskreten Systemen besteht aus den Systemen, die linear **und** zeitinvariant sind (LTI-Systeme).

Satz

Ein lineares zeitinvariantes System (linear time-invariant system: LTI-System) kann durch seine Impulsantwort (Antwort auf einen Einheitsimpuls) vollständig beschrieben werden.

Definition

Die Impulsantwort $h[n]$ eines LTI-Systems ist gegeben als $h[n] = T(\{\delta[m]\}, n)$, die zeitinvariante Antwort des Systems auf den Einheitsimpuls $\delta[n]$. Es gilt $h[n-k] = T(\{\delta[m-k]\}_{m\in\mathbb{Z}}, n)$.

Eigenschaften von LTI-Systemen

Beweis: Ein LTI-System wird durch seine Impulsantwort vollständig beschrieben.

Wir können schreiben

$$y[n] = T\left(\left(\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[m-k] \right\}_{m\in\mathbb{Z}}, n \right) \right). \qquad (23)$$

Die rechte Seite der Gleichung lässt sich als eine Überlagerung von um k Einheiten verschobenen Einheitsimpulsen $\delta[n-k]$ interpretieren, die jeweils mit den Koeffizienten $x[k]$ skaliert sind. Gemäß des Überlagerungsprinzips für lineare Systeme gilt:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T(\{\delta[m-k]\}, n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \qquad (24)$$

□

Eigenschaften von LTI-Systemen
Faltung

Die Abbildung der Eingangsfolge $x[n]$ auf die Ausgangsfolge $y[n]$ durch ein LTI-System mittels der Impulsantwort $h[n]$ ist folglich festgelegt durch die Faltungssumme:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{25}$$

$y[n]$ ist die Faltung von $x[n]$ mit $h[n]$ und wird abgekürzt mit:

$$y[n] = x[n] * h[n]\,. \tag{26}$$

Eigenschaften von LTI-Systemen
Faltung

Die Faltung ist bezüglich der Addition kommutativ und distributiv:

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \tag{27}$$

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]\,. \tag{28}$$

Für kausale LTI-Systeme gilt:

$$h[n] = 0, n < 0 \tag{29}$$

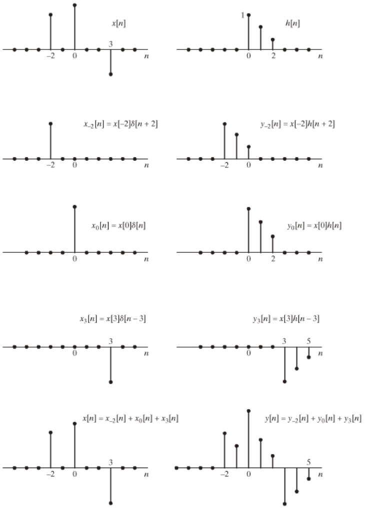
Eigenschaften von LTI-Systemen

Faltung - Beweis der Kommutativität

Wir hatten die Faltung wie folgt definiert und formen um:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\
&\underset{m:=n-k}{=} \sum_{n-m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m] = \sum_{m-n=\infty}^{-\infty} x[n-m]h[m] \\
&= \sum_{m=\infty}^{-\infty} x[n-m]h[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m] \\
&\underset{k:=m}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]
\end{aligned}
$$

Beispiel: Faltung durch Überlagerung



Beispiel: Generierung von $h[n-k]$ aus $h[k]$

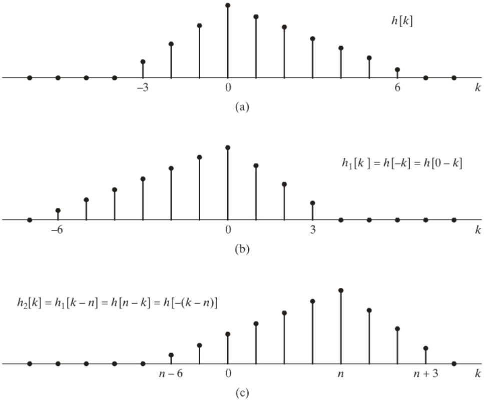


Figure 2.9 Forming the sequence $h[n-k]$. (a) The sequence $h[k]$ as a function of k. (b) The sequence $h[-k]$ as a function of k. (c) The sequence $h[n-k] = h[-(k-n)]$ as a function of k for $n=4$.

Eigenschaften von LTI-Systemen

Faltung

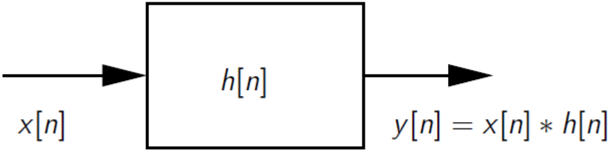


Abbildung 3: Darstellung eines LTI-Systems als Faltung.

Eigenschaften von LTI-Systemen

Faltung: Bemerkungen

- Die interne Umsetzung der Impulsantwort ist nicht von direkter Bedeutung (Systemtheorie, Black Box).
- In der Praxis eingesetzte LTI-Systeme haben häufig zusätzlich die folgenden Eigenschaften:
  - stabil
  - kausal
  - gedächtnisbehaftet
- Die Faltung einer Folge mit einem Einheitsimpuls ergibt wieder die Folge.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n] * \delta[n] \qquad (30)$$

Eigenschaften von LTI-Systemen

Reihenschaltung

Bei Reihenschaltung zweier Systeme mit den Impulsantworten $h_1[n]$ und $h_2[n]$ ergibt sich die Impulsantwort $h[n]$ des Gesamtsystems als Faltung der einzelnen Impulsantworten:

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] \tag{31}$$

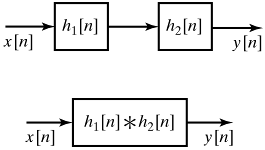


Abbildung 4: Reihenschaltung. [Oppenheim et al., 1999]

Eigenschaften von LTI-Systemen

Parallelschaltung

Bei Parallelschaltung zweier Systeme mit den Impulsantworten $h_1[n]$ und $h_2[n]$ ergibt sich die Impulsantwort $h[n]$ des Gesamtsystems als Summe der einzelnen Impulsantworten:

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n] \tag{32}$$

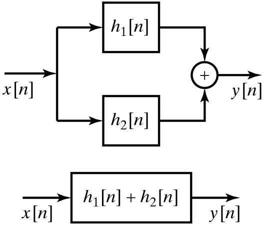


Abbildung 5: Parallelschaltung. [Oppenheim et al., 1999]

Eigenschaften von LTI-Systemen

Verschaltung von Systemen

- Die Reihenfolge der Verschaltung von LTI-Systemen in einer Reihenschaltung ist nicht von Bedeutung.
- Ein nicht-lineares (oder ein zeitvariantes) System muss seine Position in einer Reihenschaltung behalten.

Inhalt

Frequenzantwort von LTI-Systemen

Gegeben sei die Eingangsfolge $x[n] = e^{j\omega n}, \forall n$. Die Ausgangsfolge eines LTI-Systems mit Impulsantwort $h[n]$ ist:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega n} e^{-j\omega k} && (33)\\
&= e^{j\omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) && (34)\\
&= H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}. && (35)
\end{aligned}
$$

Damit sind die Folgen $e^{j\omega n}$ Eigenfunktionen des Systems und $H(e^{j\omega})$ die zugehörigen Eigenwerte. Die Eigenfunktion eines Systems ist diejenige Funktion $f(t)$ auf die das System mit der Funktion $\lambda f(t)$ antwortet, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Konstante ist.

Frequenzantwort von LTI-Systemen

- $H(e^{j\omega})$ nennt man Frequenzantwort des Systems.
- Die Frequenzantwort beschreibt die Änderung der komplexen Amplitude als Funktion von ω, wenn das Eingangssignal eine komplexe Exponentialfunktion ist.
- Die Frequenzantwort eines zeitdiskreten linearen zeitinvarianten Systems ist immer eine periodische Funktion der (normalisierten) Frequenz ω mit der Periode 2π, da:

$$H(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega} \cdot 1) = H(e^{j\omega} \cdot e^{j2\pi k}) = H(e^{j(\omega+2\pi k)}) \quad (36)$$

für $k \in \mathbb{Z}$.

Frequenzantwort von LTI-Systemen

Referenzperiode

- Üblicherweise wird die Frequenzantwort $H(e^{j\omega})$ über dem Intervall $-\pi < \omega \leq \pi$ angegeben.
- Niedrige Frequenzen sind Frequenzen um die 0; hohe Frequenzen sind bei $\pm\pi$.
- Unter Berücksichtigung der Periodizität: Niedrige Frequenzen sind Frequenzen um gerade Vielfache von π; hohe Frequenzen sind um ungerade Vielfache von π.

Frequenzantwort von LTI-Systemen

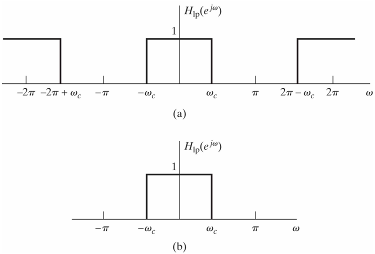


Abbildung 6: Idealer Tiefpassfilter (a) gesamtes Spektrum und (b) eine Periode. [Oppenheim et al., 1999]

Frequenzantwort von LTI-Systemen

Viele analytische Signale lassen sich als Linearkombination von k komplexen Exponentialfunktionen $e^{\mathrm{j}\omega_k n}$ darstellen:

$$x[n] = \sum_k \alpha_k e^{\mathrm{j}\omega_k n}. \tag{37}$$

Die zugehörige Ausgangsfolge des LTI-Systems ist:

$$y[n] = \sum_k \alpha_k H(e^{\mathrm{j}\omega_k}) e^{\mathrm{j}\omega_k n} \tag{38}$$

Fourier Transformation von Folgen

Viele (analytische) Folgen können durch ein Fourier-Integral der folgenden Form beschrieben werden (inverse zeitdiskrete Fourier Transformation (IDTFT)):

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{\mathrm{j}\omega}) e^{\mathrm{j}\omega n} d\omega \tag{39}$$

wobei $X(e^{\mathrm{j}\omega})$ die zeitdiskrete Fourier Transformation (DTFT) gegeben ist durch:

$$X(e^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-\mathrm{j}\omega n} \tag{40}$$

Die Fourier Transformation $X(e^{\mathrm{j}\omega})$ nennt man auch Fourier-Spektrum oder einfach nur Spektrum.

Fourier Transformation von Folgen

- Damit $X(e^{j\omega})$ existiert, ist absolute Summierbarkeit eine hinreichende Bedingung, d.h. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$.
- Die Folge $x[n]$ und ihre Fourier Transformation $X(e^{j\omega})$ stellen das gleiche Signal dar. Allerdings zeigen sie völlig unterschiedliche Eigenschaften, da die eine Darstellung zeitabhängig und die andere frequenzabhängig ist.
- Die IDTFT und die DTFT verwenden beide das "Skalarprodukt", um die Ähnlichkeit zwischen einem Signal und einer komplexen Exponentialfunktion zu messen.

Fourier Transformation

- Man kann die zeitdiskrete Fourier Transformation von (analytischen) Folgen und von Systemen bestimmen.
- Die Frequenzantwort eines LTI-Systems ist die Fourier Transformation der Impulsantwort.
- Auf diese Weise kann die DTFT als Analyse-Werkzeug verwendet werden.
- Das Faltungstheorem ist hier von zentraler Bedeutung: Wenn $y[n] = x[n] * h[n]$ dann gilt:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \tag{41}$$

- Die DTFT einer Folge oder eines Systems bestimmt man normalerweise durch Nachschlagen von bekannten Transformations-Paaren in Tabellen und nicht, indem man die Transformationsgleichungen “von Hand” löst.

Fourier Transformation

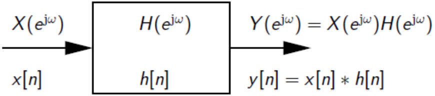


Abbildung 7: Ein LTI-System in der Zeit und der Frequenz Domäne.

Fourier Transformation

- Eine konjugiert symmetrische Folge ist eine Folge, für die gilt: $x_e[n] = x_e^*[-n]$. Handelt es sich um eine reelle Folge, so nennt man sie auch gerade Folge (even).
- Eine konjugiert antisymmetrische Folge ist eine Folge, für die gilt: $x_o[n] = -x_o^*[-n]$. Handelt es sich um eine reelle Folge, so nennt man sie auch ungerade Folge (odd).
- Jede Folge lässt sich in der folgenden Form darstellen:

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \tag{42}$$

mit $x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$
und $x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$.

Fourier Transformation (FT)

- Eine konjugiert symmetrische FT ist eine FT, für die gilt: $X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega})$. Ist die FT reellwertig, so nennt man sie gerade (even).
- Eine konjugiert antisymmetrische FT ist eine FT, für die gilt: $X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega})$. Ist die FT reellwertig, so nennt man sie auch ungerade (odd).
- Jede Funktion lässt sich in der folgenden Form darstellen:

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) \tag{43}$$

mit $X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$
und $X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$.

TABLE 2.1 SYMMETRY PROPERTIES OF THE FOURIER TRANSFORM

Sequence $x[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ (conjugate-symmetric part of $X(e^{j\omega})$)
4. $j\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ (conjugate-antisymmetric part of $X(e^{j\omega})$)
5. $x_e[n]$ (conjugate-symmetric part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega}) = \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n]$ (conjugate-antisymmetric part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega}) = j\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}$
The following properties apply only when $x[n]$ is real:	
7. Any real $x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (Fourier transform is conjugate symmetric)
8. Any real $x[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (real part is even)
9. Any real $x[n]$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (imaginary part is odd)
10. Any real $x[n]$	$\lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert$ (magnitude is even)
11. Any real $x[n]$	$\sphericalangle X(e^{j\omega}) = -\sphericalangle X(e^{-j\omega})$ (phase is odd)
12. $x_e[n]$ (even part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$ (odd part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})$

Abbildung 8: [Oppenheim et al., 1999]

TABLE 2.2 FOURIER TRANSFORM THEOREMS

Sequence $x[n]$ $y[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$ $Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. $x[n - n_d]$ (n_d an integer)	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ if $x[n]$ real.
5. $nx[n]$	$j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

Parseval's theorem:

8. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

9. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

Abbildung 9: [Oppenheim et al., 1999]

TABLE 2.3 FOURIER TRANSFORM PAIRS

Sequence	Fourier Transform
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. $1 \quad (-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
4. $a^n u[n] \quad (\lvert a\rvert < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n] \quad (\lvert a\rvert < 1)$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \sin \omega_p (n+1)}{\sin \omega_p} u[n] \quad (\lvert r\rvert < 1)$	$\frac{1}{1 - 2r\cos\omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \lvert\omega\rvert \le \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi}\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\phi}\delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$

Abbildung 10: [Oppenheim et al., 1999]

Anwendungsbeispiel

- Gegeben: $x[n] = a^n u[n-5]$ mit $|a| < 1$
- Gesucht: $X(e^{j\omega})$
- Lösung:

$$x_1[n] = a^n u[n] \underset{Tab.2.3(4)}{\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}} X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$x_1[n-5] = a^{n-5} u[n-5] \underset{Tab.2.2(2)}{\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}} e^{-j5\omega} X_1(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j5\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$x[n] = a^5 a^{n-5} u[n-5] \underset{Tab.2.2(1)}{\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}} a^5 e^{-j5\omega} X_1(e^{j\omega}) = \frac{a^5 e^{-j5\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$x[n] = a^n u[n-5] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = \frac{a^5 e^{-j5\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

Referenzen

Oppenheim, A. V., Schafer, R. W., and Buck, J. R. (1999).
Discrete-time signal processing.
Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 2nd edition.

Oppenheim, A. V., Schafer, R. W., and Buck, J. R. (2010).
Discrete-time signal processing.
Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 3rd edition.