



# 基础数学模型 微分方程模型



主讲人 张文斌

上海交通大学机械与动力工程学院博士生  
曾获美国数学建模特等奖 (Outstanding)  
研究数学建模多年，掌握一定数模获奖技巧  
熟悉数学建模方法、编程及论文写作

-  1、微分方程模型基本介绍
-  2、饿狼追兔问题
-  3、赝品鉴定问题
-  4、传染病问题



## 1. 微分方程模型基本介绍

在研究实际问题时，我们常常不能直接得出变量之间的关系，但却能容易得出包含变量导数在内的关系式，这就是微分方程。

对于微分方程模型，有时无法得到其解析解（必要时，可以利用计算机求其数值解），即使得到其解析解，尚有未知参数需要估计。

而在实际问题中，讨论问题的解的变化趋势很重要。

涉及“改变”、“变化”、“增加”、“减少”、“衰变”、“边际”、“速度”、“运动”、“追赶”、“逃跑”等等词语的确定性连续问题。



## 1、微分方程模型基本介绍

### ➤ 微分方程建模的对象

建立微分方程模型要对研究对象作具体分析. 一般有以下三种方法:

- ①根据规律建模;
- ②用微元法建模;
- ③用模拟近似法建模.

- 根据函数及其变化率之间的关系确定函数
- 根据建模目的和问题分析作出简化假设
- 按照内在规律或用类比法建立微分方程



## 1、微分方程模型基本介绍

### ➤ 微分方程建模的基本规则

1、寻找改变量 一般说来微分方程问题都遵循这样的文字等式。

变化率（微商）=单位增加量--单位减少量

等式通常是利用已有的原则或定律建立。

2、对问题中的特征进行数学刻画；

3、用微元法建立微分方程；

4、确定微分方程的定解条件（初边值条件）；

5、求解或讨论方程（数值解或定性理论）；

6、模型和结果的讨论与分析。



## 1. 微分方程模型基本介绍

设

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

称代数方程  $f(x)=0$  的实根  $x = x_0$  为方程的**平衡点**(或奇点). 它也是方程的解.

如果

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$$

则称平衡点  $x_0$  是**稳定的**.



## 1. 微分方程模型基本介绍

### ➤ 稳定性判别方法

由于  $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0)$ , 在讨论方程的稳定性时, 可用

$$\frac{dx}{dt} = f'(x_0)(x - x_0)$$

关于  $x_0$  是否稳定有以下结论:

易知  $x_0$  也是方程的平衡点. 以上方程的通解为

$$x(t) = Ce^{f'(x_0)t} + x_0,$$

- ① 若  $f'(x_0) < 0$ , 则  $x_0$  是稳定的;    ② 若  $f'(x_0) > 0$ , 则  $x_0$  是不稳定的.



## 1. 微分方程模型基本介绍

关于常微分方程组的平衡点及其稳定性, 设

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y). \end{cases}$$

代数方程组

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

的实根  $x = x_0, y = y_0$  称为方程的 **平衡点**, 记作  $P_0(x_0, y_0)$ . 它也是方程的解.



## 1、微分方程模型基本介绍

物体在空气中的冷却速度与物体、空气的温差成正比，如果物体在20min内由100°C冷却到60°C，那么经过多长时间此物体的温度将达到30°C？

**解：**由题意知：

$$\frac{dT}{dt} = -k(t - 20), \quad T(0) = 100, \quad T\left(\frac{1}{3}\right) = 60$$

微分方程的解为：  $T = Ce^{-kt} + 20$

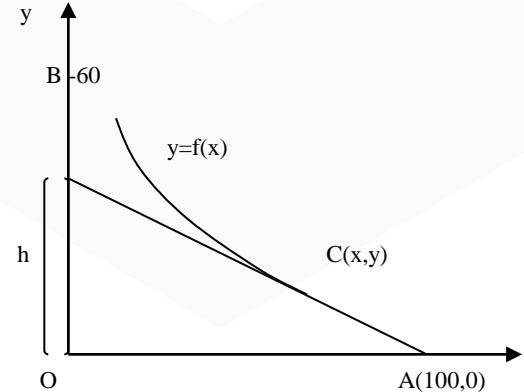
得  $T=80(1/2)^{3t}+20$ ，即经过1h温度可降到30 °C。



## 2、饿狼追兔问题

问题：

现有一只兔子，一只狼，兔子位于狼的正西100米处。假设兔子与狼同时发现对方并一起起跑，兔子往正北60米处的巢穴跑，而狼在追兔子，已知兔子、狼是匀速跑且狼的速度是兔子的两倍。问题是兔子能否安全回到巢穴？



问题分析

首先建立坐标系，兔子在0处，狼在A处。由于狼要盯着兔子追，所以狼行走的是一条曲线，且在同一时刻，曲线上狼的位置与兔子的位置的连线为曲线上该点处的切线。设狼的行走轨迹是 $y=f(x)$ ，则有  $y'|_{x=100}=0$ ， $y|_{x=100}=0$ 。又因狼的速度是兔子的两倍，所以在相同时间内狼走的距离为兔子走的距离的两倍。



## 2、饿狼追兔问题

### 模型建立及求解

假设在某一时刻，兔子跑到(0, h)处，而狼在(x, y)处，则有

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{h-y}{0-x} \\ 2h = \int_x^{100} \sqrt{1+f'^2(x)} dx \end{cases}$$

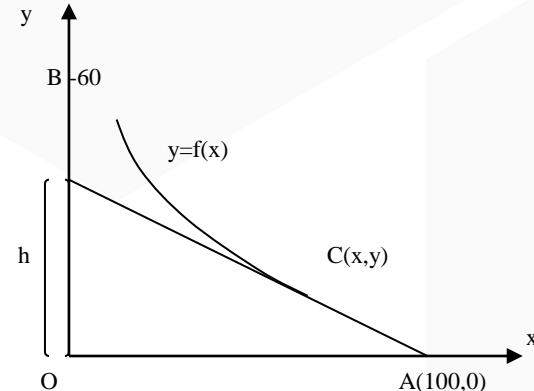
整理得到下述模型

$$\begin{cases} 2xf''(x) = \sqrt{1+f'^2(x)} \\ f(100) = 0, f'(100) = 0 \end{cases}$$

这属于可降阶的二阶微分方程，解得狼的行走轨迹

$$f(x) = \frac{1}{30}x^{\frac{3}{2}} - 10x^{\frac{1}{2}} + \frac{200}{3}$$

因  $f(0) = \frac{200}{3} > 60$ ，所以狼追不上兔子。





## 3、赝品鉴定问题

### 问题：历史背景

在第二次世界大战比利时解放以后，荷兰野战军保安机关开始搜捕纳粹同谋犯。他们从一家曾向纳粹德国出卖过艺术品的公司中发现线索，于1945年5月29日以通敌罪逮捕了三流画家范·梅格伦（H·A·Vanmeegren），此人曾将17世纪荷兰名画家扬·弗米尔（Jan Vermeer）的油画卖给纳粹德国戈林的中间人。可是，范·梅格伦在同年7月12日在牢里宣称：他从未把油画卖给戈林，而且他还说，这一幅画和众所周知的油画“在埃牟斯的门徒”以及其他四幅冒充弗米尔的油画和两幅德胡斯（17世纪荷兰画家）的油画，都是他自己的作品，这件事在当时震惊了全世界，为了证明自己是一个伪造者，他在监狱里开始伪造弗米尔的油画“耶稣在门徒们中间”，当这项工作接近完成时，范·梅格伦获悉自己的通敌罪已被改为伪造罪，因此他拒绝将这幅画变陈，以免留下罪证。



## 3. 首品鉴定问题

问题：历史背景

为了审理这一案件，法庭组织了一个由著名化学家、物理学家和艺术史学家组成的国际专门小组查究这一事件。他们用X射线检验画布上是否曾经有过别的画。此外，他们分析了油彩中的拌料（色粉），检验油画中有没有历经岁月的迹象。科学家们终于在其中的几幅画中发现了现代颜料钴兰的痕迹，还在几幅画中检验出了20世纪初才发明的酚醛类人工树脂。根据这些证据，范·梅格伦于1947年10月12日被宣告犯有伪造罪，被判刑一年。可是他在监狱中只待了两个多月就因心脏病发作，于1947年12月30日死去。

然而，事情到此并未结束，许多人还是不肯相信著名的“在埃牟斯的门徒”是范·梅格伦伪造的。事实上，在此之前这幅画已经被文物鉴定家认定为真迹，并以17万美元的高价被伦布兰特学会买下。专家小组对于怀疑者的回答是：由于范·梅格伦曾因他在艺术界中没有地位而十分懊恼，他下决心绘制“在埃牟斯的门徒”，来证明他高于三流画家。当创造出这样的杰作后，他的志气消退了。而且，当他看到这幅“在埃牟斯的门徒”多么容易卖掉以后，他在炮制后来的伪制品时就不太用心了。这种解释不能使怀疑者感到满意，他们要求完全科学地、确定地证明“在埃牟斯的门徒”的确是一个伪制品。这一问题一直拖了20年，直到1967年，才被卡内基·梅伦（Carnegie-Mellon）大学的科学家们基本上解决。



### 3、赝品鉴定问题

#### 模型分析

测定油画和其他岩石类材料的年龄的关键是本世纪初发现的放射性现象。

**放射性现象：**著名物理学家卢瑟夫在本世纪初发现，某些“放射性”元素的原子是不稳定的，并且在已知的一段时间内，有一定比例的原子自然蜕变而形成新元素的原子，且物质的放射性与所存在的物质的原子数成正比。

用 $N(t)$ 表示时间 $t$ 时存在的原子数，则： $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$

常数 $\lambda$ 是正的，称为该物质的衰变常数

用 $\lambda$ 来计算半衰期 $T$ ：

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -\lambda N \\ N(t_0) = N_0 \end{cases} \rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$$

令  $\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2}$  则有：  $T = t - t_0 = \frac{\ln 2}{\lambda}$

许多物质的半衰期已被测定，如碳14，其 $T=5568$ ；轴238，其 $T=45$ 亿年。



## 3、赝品鉴定问题

### 背景知识（查阅参考文献）

(1) 艺术家们应用白铅作为颜料之一，已达两千年以上。白铅中含有微量的放射铅210，白铅是从铅矿中提炼出来的，而铅又属于铀系。

(2) 地壳里几乎所有的岩石中均含有微量的铀。一方面，铀系中的各种放射性物质均在不断衰减，而另一方面，铀又不断地衰减，补充着其后继元素。各种放射性物质（除铀以外）在岩石中处于放射性平衡中。根据世界各地抽样测量的资料，地壳中的铀在铀系中所占平均重量比约为百万分之2.7（一般含量极微）。各地采集的岩石中铀的含量差异很大，但从未发现含量高于2—3%的。

(3) 从铅矿中提炼铅时，铅210与铅206一起被作为铅留下，而其余物质则有90—95%被留在矿渣里，因而打破了原有的放射性平衡。

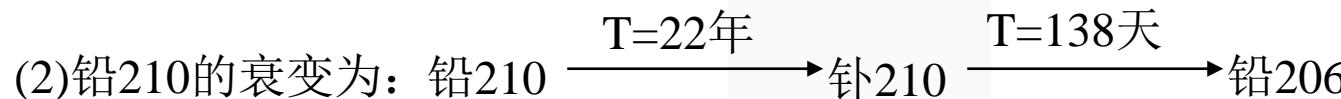


## 3、赝品鉴定问题

模型假设：

本问题建模是为了鉴定几幅不超过300年的古画，为了使模型尽可能简单，可作如下假设：

(1)由于镭的半衰期为1600年，经过300年左右，应用微分方程方法不难计算出白铅中的镭至少还有原量的90%，故可以假定，每克白铅中的镭在每分钟里的分解数是一个常数。



若画为真品，颜料应有300年左右或300年以上的历史，容易证明：每克白铅中钷210的分解数等于铅210的分解数（相差极微，已无法区别）。可用前者代替后者，因钷的半衰期较短，易于测量。

 3、赝品鉴定问题

## 模型建立

(1) 记提炼白铅的时刻为 $t=0$ , 当时每克白铅中铅210的分子数为 $y_0$ , 由于提炼前岩石中的铀系是处于放射性平衡的, 故铀与铅的单位时间分解数相同。可以推算出当时每克白铅中铅210每分钟分解数不能大于30000个。

若  $\lambda_u U_0 = \lambda y_0 \geq 30000$

则  $U_0 \geq \frac{30000 \times 60 \times 24 \times 365}{\lambda_u} \approx 1.02 \times 10^{20}$  (个)

这些铀约重  $\frac{1.02 \times 10^{20}}{6.02 \times 10^{23}} \times 238 \approx 0.04$  (克)

即每克白铅约含0.04克铀, 含量为4%

以上确定了每克白铅中铅分解数的上界, 若画上的铅分解数大于该值, 说明画是赝品; 但若是小于不能断定画一定是真品。

### 3、赝品鉴定问题

#### 模型建立

(2) 设t时刻1克白铅中铅210含量为 $y(t)$ , 而镭的单位时间分解数为 $r$  (常数), 则 $y(t)$  满足微分方程:

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y + r$$

由此解得:  $y(t) = \frac{r}{\lambda} [1 - e^{-\lambda(t-t_0)}] + y_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$

故:  $\lambda y_0 = \lambda y(t) e^{\lambda(t-t_0)} - r [e^{\lambda(t-t_0)} - 1]$

画中每克白铅所含铅210目前的分解数 $\lambda y(t)$ 及目前镭的分解数 $r$ 均可用仪器测出, 从而可求出 $\lambda y_0$ 的近似值, 并利用 (1) 判断这样的分解数是否合理。



## 3、赝品鉴定问题

## 模型结果分析

Carnegie-Mellon大学的科学家们利用上述模型对部分有疑问的油画作了鉴定，测得数据

油画名称	210分解数（个/分）	镭226分解数（个/分）	计算 $\lambda y_0$ （个/分）
在埃牟斯的门徒	8.5	0.8	98050
濯足	12.6	0.26	157130
看乐谱的女人	10.3	0.3	127340
演奏曼陀琳的女人	8.2	0.17	102250
花边织工	1.5	1.4	1274.8
笑女	5.2	6.0	-10181

判定结果：

对“在埃牟斯的门徒”， $\lambda y_0 \approx 98050$ （个/每克每分钟），它必定是一幅伪制品。类似可以判定（2），（3），（4）也是赝品。而（5）和（6）都不会是几十年内伪制品，因为放射性物质已处于接近平衡的状态，这样的平衡不可能发生在十九世纪和二十世纪的任何作品中。

## 4. 传染病问题

随着卫生设施的改善、医疗水平的提高以及人类文明的不断发展，诸如霍乱、天花等曾经肆虐全球的传染性疾病已经得到有效的控制。但是在世界的某些地区，特别是贫穷的发展中国家，还不时出现传染病流行的情况。与此同时，一种更为险恶的传染病——艾滋病，则跨国越界在既包括发达国家也包括发展中国家的更大范围内蔓延。长期以来，建立传染病的数学模型来描述传染病的传播过程，分析受感染人数的变化规律，预报传染病高潮的到来等等，一直是各国有关专家和官员关注的课题。人们不可能去做传染病传播的试验以获取数据，从医疗卫生部门得到的资料也是不完全和不充分的，所以通常主要是依据机理分析的方法建立模型。不同类型传染病的传播过程有其各自不同的特点，弄清这些特点需要相当多的病理知识，这里不可能从医学的角度一一分析各种传染病的传播，而是按照一般的传播机理建立几种模型。

### 问题分析

描述传染病的传播过程

分析受感染人数的变化规律

预报传染病高潮到来的时刻

预防传染病蔓延的手段

按照传播过程的一般规律，用机理分析方法建立模型

## 4、传染病问题

### 模型1

假设：已感染人数（病人）为  $i(t)$ ，每个病人每天有效接触（足以使人致病）人数为  $\lambda$   
模型建立

$$i(t + \Delta t) - i(t) = \lambda i(t) \Delta t$$

$$\frac{di}{dt} = \lambda i \quad \Rightarrow \quad i(t) = i_0 e^{\lambda t}$$

$$i(0) = i_0 \quad \Rightarrow \quad t \rightarrow \infty \Rightarrow i \rightarrow \infty$$

若有效接触的是病人，  
则不能使病人数增加



必须区分已感染者（病人）  
和未感染者（健康人）



## 4、传染病问题

### 模型2（SI模型）

区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

假设：1) 总人数N不变，病人和健康人的比例分别为 $i(t), s(t)$

2) 每个病人每天有效接触人数为 $\lambda$ , 且使接触的健康人致病

模型建立  $N[i(t + \Delta t) - i(t)] = [\lambda s(t)] N i(t) \Delta t$

$$\frac{di}{dt} = \lambda s i$$

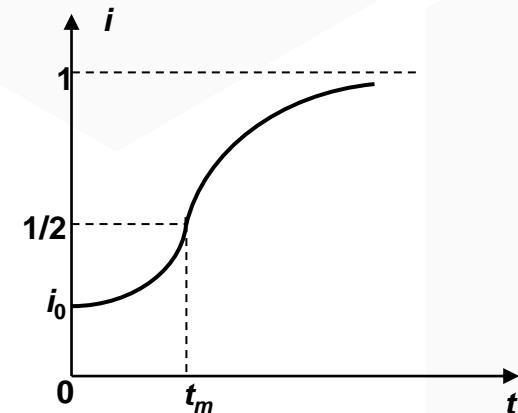
$$s(t) + i(t) = 1$$

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1 - i) \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1 - i) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Logistic 模型}$$

$$i(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{i_0} - 1\right) e^{-\lambda t}}$$

$$t_m = \lambda^{-1} \ln\left(\frac{1}{i_0} - 1\right)$$





## 4、传染病问题

### 模型3 (SIS模型)

传染病无免疫性——病人治愈成为健康人，健康人可再次被感染

- 假设： 1) 总人数 $N$ 不变，病人和健康人的比例分别为  $i(t), s(t)$   
          2) 每个病人每天有效接触人数为 $\lambda$ , 且使接触的健康人致病  
          3) 病人每天治愈的比例为 $\mu$

$\mu$  ~ 日治愈率

模型建立  $N[i(t + \Delta t) - i(t)] = \lambda N s(t) i(t) \Delta t - \mu N i(t) \Delta t$

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1-i) - \mu i \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

$\lambda$  ~ 日接触率  
 $1/\mu$  ~ 感染期

$$\sigma = \lambda / \mu$$

$\sigma$  ~ 一个感染期内每个病人的有效接触人数，称为接触数。

$$i(\infty) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sigma}, & \sigma > 1 \\ 0, & \sigma \leq 1 \end{cases}$$

模型2(SI模型)如何看作模型3(SIS模型)的特例？



## 4、传染病问题

## 模型4 (SIR模型)

传染病有免疫性——病人治愈后即移出感染系统，称**移出者**

- 假设：1) 总人数 $N$ 不变，病人、健康人和移出者的比例分别为  $i(t), s(t), r(t)$   
 2) 病人的日接触率 $\lambda$ ，日治愈率 $\mu$ , 接触数  $\sigma = \lambda / \mu$

模型建立  $s(t) + i(t) + r(t) = 1$  需建立  $i(t), s(t), r(t)$  的两个方程

$$N[i(t + \Delta t) - i(t)] = \lambda N s(t) i(t) \Delta t - \mu N i(t) \Delta t$$

$$N[s(t + \Delta t) - s(t)] = -\lambda N s(t) i(t) \Delta t$$

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda s i - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda s i \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases}$$

⇒ 无法求出  $i(t), s(t)$  的解析解

## 4、传染病问题

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{di}{ds} = \frac{1}{\sigma s} - 1 \\ i|_{s=s_0} = i_0 \end{array} \right.$$

$s(t)$  单调减 → 相轨线的方向

$$s = 1/\sigma, i = i_m \quad t \rightarrow \infty, i \rightarrow 0$$

$$s_\infty \text{ 满足 } s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s_\infty}{s_0} = 0$$

$P_1: s_0 > 1/\sigma \rightarrow i(t)$  先升后降至 0

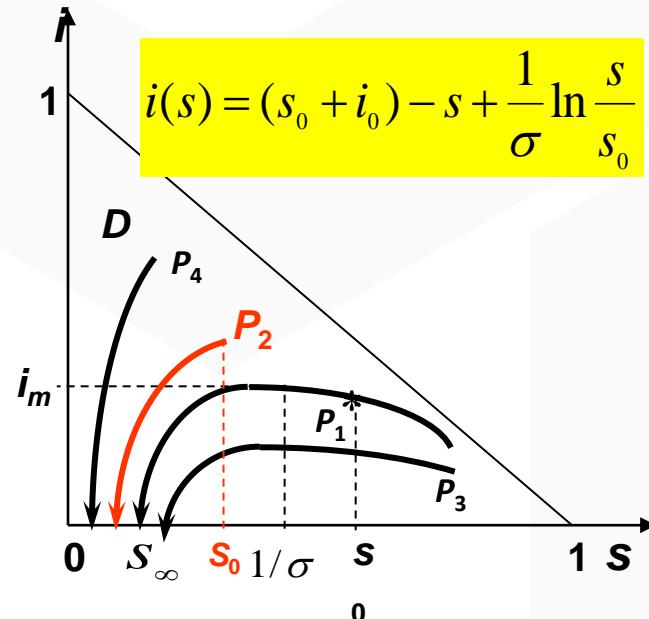
传染病蔓延

$P_2: s_0 < 1/\sigma \rightarrow i(t)$  单调降至 0

传染病不蔓延

## 模型4 (SIR模型)

相轨线  $i(s)$  及其分析



$1/\sigma$ ~阈值



## 4、传染病问题

## 模型4（SIR模型）

预防传染病蔓延的手段

传染病不蔓延的条件—— $s_0 < 1/\sigma$ 

- 提高阈值  $1/\sigma \Leftrightarrow$  降低  $\sigma (= \lambda/\mu) \Leftrightarrow \lambda \downarrow, \mu \uparrow$ 
  - $\lambda$  (日接触率)  $\downarrow \Rightarrow$  卫生水平, 防疫措施  $\uparrow$
  - $\mu$  (日治愈率)  $\uparrow \Rightarrow$  医疗水平  $\uparrow$
- 降低  $s_0 \Leftrightarrow$  提高  $r_0 \Leftrightarrow$  群体免疫  

$$s_0 + i_0 + r_0 = 1$$

 $\sigma$  的估计

$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s_\infty}{s_0} = 0$$

忽略  $i_0$ 

$$\sigma = \frac{\ln s_0 - \ln s_\infty}{s_0 - s_\infty}$$

 练习题

1-1 (地中海鲨鱼问题)意大利生物学家Ancona曾致力于鱼类种群相互制约关系的研究，从第一次世界大战期间,地中海各港口几种鱼类捕获量百分比的资料中，他发现鲨鱼等的比例有明显增加（见下表），而供其捕食的食用鱼的百分比却明显下降. 显然战争使捕鱼量下降，从而食用鱼增加，鲨鱼等也随之增加，但为何鲨鱼的比例大幅增加呢？

年代	1914	1915	1916	1917	1918
百分比	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4
年代	1919	1920	1921	1922	1923
百分比	27.3	16.0	15.9	14.8	19.7

他无法解释这个现象，于是求助于著名的意大利数学家V. Volterra，希望建立一个食饵—捕食系统的数学模型，定量地回答这个问题.

感谢各位聆听!  
Thanks for Listening.

| 在线问答

极值学院  
edu.mathor.com

数学家旗下  
在线教育平台

# Q&A