极值学院 edu.mathor.com | 数学家旗下在线教育平台

《数学建模基础课程》

课程地址

基础数学模型

经济模型

主讲人 张文斌

上海交通大学机械与动力工程学院博士生

曾获美国数学建模特等奖（Outstanding）

研究数学建模多年，掌握一定数模获奖技巧

熟悉数学建模方法、编程及论文写作

目录

1、利率模型

利率是指一定时期内利息额与借贷资金额（本金）的比率。利率是决定企业资金成本高低的主要因素，同时也是企业筹资、投资的决定性因素，对金融环境的研究必须注意利率现状及其变动趋势。

利率是指借款、存入或借入金额（称为本金总额）中每个期间到期的利息金额与票面价值的比率。借出或借入金额的总利息取决于本金总额、利率、复利频率、借出、存入或借入的时间长度。利率是借款人需向其所借金钱所支付的代价，亦是放款人延迟其消费，借给借款人所获得的回报。利率通常以一年期利息与本金的百分比计算。

➢ 单利模型

设年利率为r,初始资金量为S_0，n年后资金量为S_n

n年后的本利和为 $S_n = S_0(1+nr)$

1、利率模型

➢ 复利模型

1、离散型复利模型

每年结算一次，n年后的本利和为 $S_n = S_0(1+r)^n$

每年结算m次，n年后的本利和为 $S_n = S_0(1+\frac{r}{m})^{mn}$

2、连续型复利模型

连续结算（瞬时结算），n年后的本利和为

$$S_n = \lim_{m\to\infty} S_0(1+\frac{r}{m})^{mn} = S_0e^{rn}$$

1、利率模型

➢ 现值模型

在现值模型中，年利率r也称为折现率

1、单利现值模型

若n年后的资金量是S_n,则初期的资金量为

$$S_0 = \frac{S_n}{1+nr}$$

1、利率模型

➢ 现值模型

2、复利现值模型

每年折现一次，若n年后的资金是S_n,则初期的资金为

$$S_0 = S_n(1+r)^{-n}$$

每年折现m次，若n年后的资金量是S_n,则初期的资金量为

$$S_0 = S_n(1+\frac{r}{m})^{-mn}$$

连续折现,若n年后的资金量是S_n,则初期的资金量为

$$S_0 = S_n e^{-rn}$$

1、利率模型

➢ 现值模型

若在某段时间资金不是固定值，而是随时间段变化，用S_i表示第i阶段的资金(i=1,2,…n),则n个阶段全部资金的现值和S为

$$S=\sum_{i=1}^{n}\frac{S_i}{(1+r)^i}$$

若连续折现，则n个阶段全部资金的现值和S为

$$S=\sum_{i=1}^{n}S_i e^{-r\,i}$$

1、利率模型

➢ 现值模型

若资金是时间t的连续函数S=S(t)，按连续折现，n年资金流量的总现值Z是

$$Z=\int_0^n S(t)\,e^{-rt}\,dt$$

特别，当S(t)=A时，有

$$Z=\int_0^n \mathrm{A}\,e^{-rt}\,dt=\frac{A}{r}(1-e^{-rn})$$

2、边际及弹性分析

1．边际成本

在经济学中，边际成本定义为产量为x时再增加一个单位产量时所增加的成本,即

$$\Delta C(x) = C(x+1) - C(x)$$

设某产品产量为x单位时所需的成本为C=C(x)，设C(x)是可导函数，则

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x+\Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

在经济学上认为 $C'(x) \approx \Delta C(x) = C(x+1) - C(x)$

2、边际及弹性分析

2．边际收入和边际利润

在经济学中，边际收入定义为销量为x时再多销售一个单位产品时所增加的收入，即

$$\Delta R(x) = R(x+1) - R(x)$$

设收入函数R=R(x)是可导的，收入函数的导数是

$$R'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{R(x+\Delta x) - R(x)}{\Delta x}$$

经济学认为上式就是边际收入，即

$$R'(x) \approx \Delta R(x) = R(x+1) - R(x)$$

2、边际及弹性分析

2．边际收入和边际利润

设利润函数为L(x)，则边际利润是

$$L'(x)=R'(x)-C'(x)$$

其经济意义为销量为x时再销售一个单位产品所增加（或减少）的利润。

最大利润原理

当边际收入等于边际成本且边际收入的变化率小于边际成本的变化率时，利润最大。

2、边际及弹性分析

3．供给和需求函数

需求是指在一定价格条件下，单位时间内消费者想购买且有支付能力的商品量。
供给是指在一定价格条件下，单位时间内企业愿出售且可供出售的商品量。

价格是影响供需的主要因素

设需求量函数为 $Q_d = \varphi(P)$ 它是单调下降函数

设供给函数为 $Q_s = \psi(P)$ 它是单调上升函数

边际需求为 $\varphi'(P)$　　边际供给为 $\psi'(P)$

2、边际及弹性分析

4．均衡价格

均衡价格 $\overline{P}$ 是市场上供需量相等时的价格，这时的供需量叫做均衡商品量。

一般来说价格P 随时间t波动 $P=P(t)$ ，$P(t)$ 的涨速与过剩需求 Q_d-Q_s 成正比，故有数学模型

$$\frac{dP}{dt}=a(Q_d-Q_s)$$

解这个模型就得到价格和时间的关系

2、边际及弹性分析

4．均衡价格

若 Q_d, Q_s 的表达式是线性的，则问题简化为

$$\frac{dP}{dt} + kP = h$$

其通解为 $P(t) = ce^{-kt} + \overline{P}$

从而 $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = \overline{P}$

这说明价格虽是波动的，但随着时间的推移，最后趋于均衡价格。

2、边际及弹性分析

4．均衡价格

若需求是一个常数 Q_d，供给也是一个常数 Q_s，且供不应求:$Q_d > Q_s$，则

$$\frac{dP}{dt} = a(Q_d - Q_s) = aq \qquad q = Q_d - Q_s$$

其通解为 $$P(t) = ce^{aqt} \qquad (c > 0)$$

从而 $$\lim_{t\to\infty} P(t) = +\infty$$

此时即为通货膨胀。控制通货膨胀的关键是降低消费资金的投放和增加商品的投放量。

3、最优价格及消费问题

➢ 最优价格问题

问题

根据产品成本和市场需求，在产销平衡条件下确定商品价格，使利润最大

假设　1）产量等于销量，记作 x；2）收入与销量 x 成正比，系数 p 即价格；3）支出与产量 x 成正比，系数 q 即成本；4）销量 x 依赖于价格 p, x(p)是减函数。

进一步设　$x(p)=a-bp, a, b>0$

建模与求解

收入　$R(p)=px$

支出　$C(p)=qx$

利润　$L(p)=R(p)-C(p)$

求p使L(p)最大

3、最优价格及消费问题

建模与求解　　使利润 L(p)最大的最优价格 p*满足

$$\left.\frac{dL}{dp}\right|_{p=p^*}=0 \Rightarrow \left.\frac{dR}{dp}\right|_{p=p^*}=\left.\frac{dC}{dp}\right|_{p=p^*}$$

边际收入　边际支出

最大利润在边际收入等于边际支出时达到

$$R(p)=px$$
$$C(p)=qx$$
$$x(p)=a-bp$$

$$\Rightarrow L(p)=R(p)-C(p)=(p-q)(a-bp)$$

$$\Rightarrow p^*=\frac{q}{2}+\frac{a}{2b}$$

3、最优价格及消费问题

$$x(p)=a-bp,\ a,b>0$$

$$p^*=\frac{q}{2}+\frac{a}{2b}$$

成本q的一半

与“绝对需求量”成正比，与市场需求对价格的敏感系数成反比

$p=0$，$x(0)=a$为绝对需求量；

$b=-\dfrac{dx}{dp}$为边际需求，反映需求对价格的敏感程度。

$b\uparrow\rightarrow p^*\downarrow$

$a\uparrow\rightarrow p^*\uparrow$

（a,b由p,x的统计数据拟合或其他统计方法确定。）

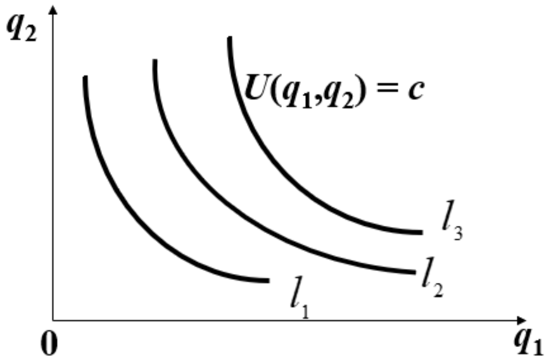
3、最优价格及消费问题

➢ 消费者均衡问题

问题 消费者对甲乙两种商品的偏爱程度用无差别曲线族表示，问他如何分配一定数量的资金来购买这两种商品，以达到最大的满意度。

设甲乙数量为q1,q2，消费者的无差别曲线族(单调减、下凸、不相交）记作 U(q1,q2)=c

U(q1,q2) ~ 效用函数



已知甲乙价格 p1,p2, 有资金 s，购买甲乙数量 q1,q2,试分配s,使 U(q1,q2)最大.

3、最优价格及消费问题

模型及求解

已知价格 p1,p2, 钱数s, 求q1,q2,或 p1q1 / p2q2, 使 U(q1,q2)最大

$$\max \ Z = U(q_1, q_2)$$
$$s.t. \ \ p_1 q_1 + p_2 q_2 = s$$

$$L = U + \lambda(s - p_1 q_1 - p_2 q_2), \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ (i = 1, 2)$$

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial q_1}}{\frac{\partial U}{\partial q_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

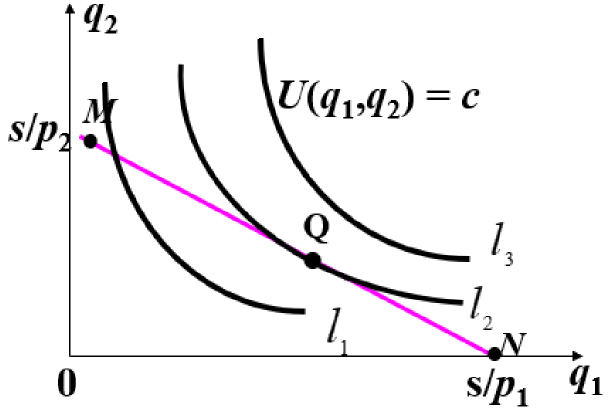
直线MN: $p_1 q_1 + p_2 q_2 = s$

几何解释

最优解Q: MN与 l2切点

斜率 $K_{MN} = -p_1 / p_2$

$$K_{l_2} = \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\partial U}{\partial q_1} \Big/ \frac{\partial U}{\partial q_2}$$



3、最优价格及消费问题

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial q_1}}{\frac{\partial U}{\partial q_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

结果解释 $\frac{\partial U}{\partial q_1}, \frac{\partial U}{\partial q_2}$ ——边际效用

消费者均衡状态在两种商品的边际效用之比恰等于它们价格之比时达到。

构造效用函数U(q1,q2) 应满足的条件

A. U(q1,q2) =c 所确定的函数 q2=q2(q1)单调减、下凸

B. $\frac{\partial U}{\partial q_1} > 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} > 0$

3、最优价格及消费问题

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial q_1}}{\frac{\partial U}{\partial q_2}}=\frac{p_1}{p_2}$$

效用函数U(q1,q2) 几种常用的形式

$$1.\ U=\left(\frac{\alpha}{q_1}+\frac{\beta}{q_2}\right)^{-1},\alpha,\beta>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1q_1}{p_2q_2}=\sqrt{\frac{\alpha p_1}{\beta p_2}}$$

消费者均衡状态下购买两种商品费用之比与二者价格之比的平方根成正比。

U(q1,q2)中参数 α, β 分别表示消费者对甲乙两种商品的偏爱程度。

3、最优价格及消费问题

效用函数U(q1,q2) 几种常用的形式

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial q_1}}{\frac{\partial U}{\partial q_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$2.\ U = q_1^{\lambda} q_2^{\mu},\ 0 < \lambda, \mu < 1 \Rightarrow \frac{p_1 q_1}{p_2 q_2} = \frac{\lambda}{\mu}$$

购买两种商品费用之比与二者价格无关。

U(q1,q2)中参数 λ,μ 分别表示对甲乙的偏爱程度。

4、拉格朗日乘子的经济意义

以二元函数为例说明拉格朗日乘子的经济意义

设 $z = f(x,y)$ 是目标函数，$\varphi(x,y) = C$ 是影响目标函数中两个因素的约束条件，在此约束条件下，求目标函数 $z = f(x,y)$ 的最值问题。

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda[C - \varphi(x,y)]$$

4、拉格朗日乘子的经济意义

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ C-\varphi(x,y)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

若将C 看作变量，解出最优解 $\lambda^*, x,^* y^*$

$$\lambda^*=\lambda(C), x^*=x(C), y^*=y(C)$$

$z=f(x,y)$ 的最值 z^* 也可视为 C 的函数 $z^*=f(x^*(C), y^*(C))$

4、拉格朗日乘子的经济意义

z^* 对 C 求导
$$\frac{dz^*}{dC}=\frac{\partial f}{\partial x^*}\frac{dx^*}{dC}+\frac{\partial f}{\partial y^*}\frac{dy^*}{dC} \qquad (2)$$

将方程组(1)中前两式代入(2)式中

$$\frac{dz^*}{dC}=\lambda^*\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^*}\frac{dx^*}{dC}+\frac{\partial \varphi}{\partial y^*}\frac{dy^*}{dC}\right) \qquad (3)$$

对 $\varphi(x,y)=C$ 两边对 C 求导

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dC}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dC}=1$$

4、拉格朗日乘子的经济意义

$$\therefore \quad \frac{dz^*}{dC} = \lambda^*$$

拉格朗日乘子λ^*是目标函数最值 z^*对约束条件之常数 C 的变化率或边际值。

λ^*随目标函数、约束条件的经济意义和度量单位不同而有不同的经济解释。

若给定产出水平为C，约束为$\varphi(x,y)=C$，目标是使成本 $z=f(x,y)$最小，需决策的两种投入x、y的水平，则 λ^*是在最优投入水平时产品的边际成本。

4、拉格朗日乘子的经济意义

例1-1

某产品的生产函数为:$y = 2\ln X_1 + 4\ln X_2$，其中 x_1, x_2分别是两种原料的投入量，设两种原料的单价分别为4元和3元，现在用10000元购买两种原料，问怎样分配两种原料的投入量，才能获得最大的产量？并解释该问题中拉格朗日乘子λ 的经济意义。

4、拉格朗日乘子的经济意义

模型的建立与求解

$\because \ 4x_1 + 3x_2 = 10000$

即在 $10000 - 4x_1 - 3x_2 = 0$ 的约束下，求函数y的最大值问题

构造拉格朗日函数

$$L(x_1, x_2) = 2\ln x_1 + 4\ln x_2 + \lambda(10000 - 4x_1 - 3x_2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \dfrac{2}{x_1} - 4\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \dfrac{4}{x_2} - 3\lambda = 0 \\ 10000 - 4x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

4、拉格朗日乘子的经济意义

解得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2500}{3} \\ x_2 = \dfrac{20000}{9} \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{6}{10000}$$

题中 λ 的经济意义是相对于费用的边际产量，即当两种原料投入达到10000元时，再增加1元的投入，会使产量增加 $\frac{6}{10000}$ 单位。

4、人口预测模型

背景

世界人口增长概况

年	1625	1830	1930	1960	1974	1987	1999
人口(亿)	5	10	20	30	40	50	60

中国人口增长概况

年	1908	1933	1953	1964	1982	1990	1995	2000
人口(亿)	3.0	4.7	6.0	7.2	10.3	11.3	12.0	13.0

研究人口变化规律

控制人口过快增长

4、人口预测模型

常用的计算公式　今年人口 x0, 年增长率 r

k年后人口　$x_k = x_0(1+r)^k$

一、指数增长模型——马尔萨斯提出 (1798)

基本假设：人口(相对)增长率 r 是常数

x(t) ~时刻t的人口　$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{x(t)} = r\Delta t$

$$\frac{dx}{dt} = rx,\ \ x(0) = x_0 \qquad x(t) = x_0 e^{rt}$$

$$x(t) = x_0 (e^r)^t \approx x_0 (1+r)^t$$

随着时间增加，人口按指数规律无限增长

4、人口预测模型

指数增长模型的应用及局限性

与19世纪以前欧洲一些地区人口统计数据吻合

适用于19世纪后迁往加拿大的欧洲移民后代

可用于短期人口增长预测

不符合19世纪后多数地区人口增长规律

不能预测较长期的人口增长过程

19世纪后人口数据　　人口增长率r不是常数(逐渐下降)

4、人口预测模型

二、阻滞增长模型(Logistic模型)

人口增长到一定数量后，增长率下降的原因：资源、环境等因素对人口增长的阻滞作用

且阻滞作用随人口数量增加而变大 $\Rightarrow$ r是x的减函数

假设 $r(x) = r - sx \quad (r, s > 0)$ r~固有增长率(x很小时)

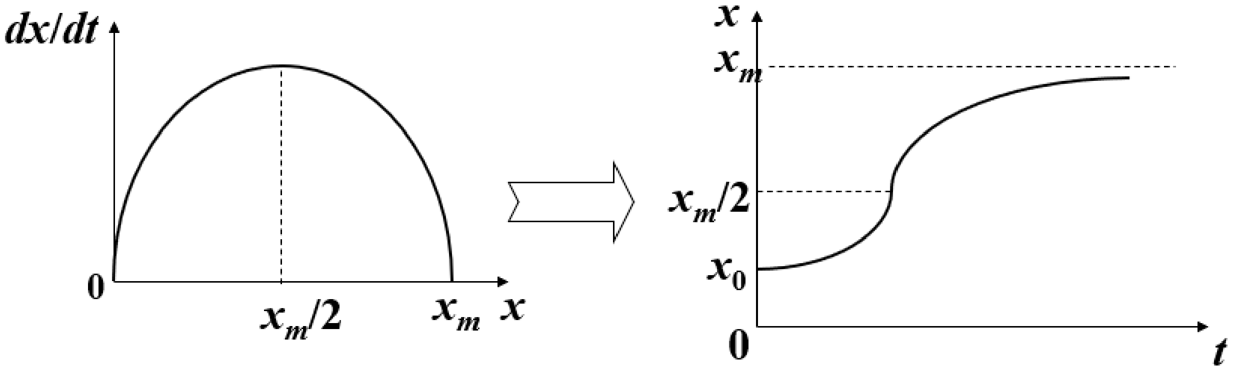
x_m~人口容量（资源、环境能容纳的最大数量）

$$\Rightarrow r(x_m) = 0 \Rightarrow s = \frac{r}{x_m}$$

$$\boxed{r(x) = r\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)}$$

4、人口预测模型

$$\frac{dx}{dt}=rx \Rightarrow \frac{dx}{dt}=r(x)x=rx\left(1-\frac{x}{x_m}\right)$$



$x(t)$~S形曲线, x增加先快后慢

$$x(t)=\frac{x_m}{1+\left(\frac{x_m}{x_0}-1\right)e^{-rt}}$$

练习题

1-1 假设市场上只有一个生产商（记为甲）和一个消费者（记为乙）。对某种商品，他们在不同价格下的供应能力和需求能力如表1 所示。举例来说，表中数据的含义是：当单价低于2 万元但大于或等于1 万元时，甲愿意生产2t 产品，乙愿意购买8t 产品；当单价等于或低于 9 万元但大于4.5 万元时，乙愿意购买2t 产品，甲愿意生产8t产品；依次类推。那么，市场的清算价格应该是多少？

表 1　不同价格下的供应能力和需求能力

生产商（甲）		消费者（乙）	
单价（万元/t）	供应能力（t）	单价（万元/t）	需求能力（t）
1	2	9	2
2	4	4.5	4
3	6	3	6
4	8	2.25	8

感谢各位聆听!

Thanks for Listening

Q&A