



基础数学模型 计算机模拟



主讲人 张文斌

上海交通大学机械与动力工程学院博士生
曾获美国数学建模特等奖 (Outstanding)
研究数学建模多年，掌握一定数模获奖技巧
熟悉数学建模方法、编程及论文写作

-  1、计算机模拟的基本概念
-  2、随机数的生成
-  3、计算机模拟实例分析



1、计算机模拟基本概念

模拟就是利用物理的、数学的模型来类比、模仿现实系统及其演变过程，以寻求过程规律的一种方法。

模拟的基本思想是建立一个试验的模型，这个模型包含所研究系统的主要点。通过对这个实验模型的运行，获得所要研究系统的必要信息。



1. 计算机模拟基本概念

➤ 模拟方法

1. 物理模拟：

对实际系统及其过程用功能相似的实物系统去模仿。例如，军事演习、船艇实验、沙盘作业等。

物理模拟通常花费较大、周期较长，且在物理模型上改变系统结构和系数都较困难。而且，许多系统无法进行物理模拟，如社会经济系统、生态系统等。



1. 计算机模拟基本概念

➤ 模拟方法

2. 数学模拟

在一定的假设条件下，运用数学运算模拟系统的运行，称为数学模拟。现代的数学模拟都是在计算机上进行的，称为计算机模拟。

计算机模拟可以反复进行，改变系统的结构和系数都比较容易。

在实际问题中，面对一些带随机因素的复杂系统，用分析方法建模常常需要作许多简化假设，与面临的问题可能相差甚远，以致解答根本无法应用。这时，计算机模拟几乎成为唯一的选择。

蒙特卡罗（Monte Carlo）方法是一种应用随机数来进行计算机模拟的方法。此方法对研究的系统进行随机观察抽样，通过对样本值的观察统计，求得所研究系统的某些参数。



1. 计算机模拟基本概念

例1-1 在我方某前沿防守地域，敌人以一个炮排（含两门火炮）为单位对我方进行干扰和破坏。为躲避我方打击，敌方对其阵地进行了伪装并经常变换射击地点。

经过长期观察发现，我方指挥所对敌方目标的指示有50%是准确的，而我方火力单位，在指示正确时，有 $1/3$ 的射击效果能毁伤敌人一门火炮，有 $1/6$ 的射击效果能全部消灭敌人。

现在希望能用某种方式把我方将要对敌人实施的20次打击结果显现出来，确定有效射击的比率及毁伤敌方火炮的平均值。

分析：这是一个概率问题，可以通过理论计算得到相应的概率和期望值。但这样只能给出作战行动的最终静态结果，而显示不出作战行动的动态过程。

为了能显示我方20次射击的过程，现采用模拟的方式。



1. 计算机模拟基本概念

1. 问题分析

[1] 观察所对目标的指示正确与否

模拟试验有两种结果，每种结果出现的概率都是 $1/2$.

因此，可用投掷1枚硬币的方式予以确定，当硬币出现正面时为指示正确，反之为不正确.

[2] 当指示正确时，我方火力单位的射击结果情况

模拟试验有三种结果：毁伤1门火炮的可能性为 $1/3$ (即 $2/6$)，毁伤两门的可能性为 $1/6$ ，没能毁伤敌火炮的可能性为 $1/2$ (即 $3/6$).

这时可用投掷骰子的方法来确定：

如果出现的是1、2、3点：则认为没能击中敌人；如果出现的是4、5点：则认为毁伤敌人一门火炮；若出现的是6点：则认为毁伤敌人两门火炮.



1. 计算机模拟基本概念

2. 符号假设

i : 要模拟的打击次数;

k_1 : 没击中敌人火炮的射击总数;

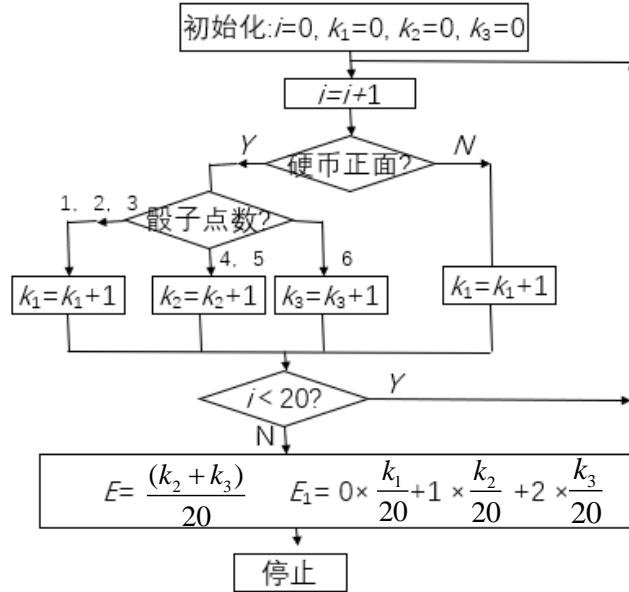
k_2 : 击中敌人一门火炮的射击总数;

k_3 : 击中敌人两门火炮的射击总数;

E : 有效射击比率;

E_1 : 20次射击平均每次毁伤敌人的火炮数。

3. 模拟框图





1、计算机模拟基本概念

4. 模拟结果

试验序号	投硬币结果	指示正确	指示不正确	掷骰子结果	消灭敌火炮数		
					0	1	2
1	正	√		4		√	
2	正	√		4		√	
3	反		√		√		
4	正	√		1	√		
5	正	√		2	√		
6	反		√		√		
7	正	√		3	√		
8	正	√		6			√
9	反		√		√		
10	反		√		√		



1、计算机模拟基本概念

4. 模拟结果

试验序号	投硬币结果	指示正确	指示不正确	掷骰子结果	消灭敌方火炮数		
					0	1	2
1 1	正	∨		2	∨		
1 2	反		∨		∨		
1 3	正	∨		3	∨		
1 4	反		∨		∨		
1 5	正	∨		6			∨
1 6	正	∨		4		∨	
1 7	正	∨		2	∨		
1 8	正	∨		4		∨	
1 9	反		∨		∨		
2 0	正	∨		6			∨

从以上模拟结果可计算出：

$$E = 7/20 = 0.35 \quad E_1 = 0 \times \frac{13}{20} + 1 \times \frac{4}{20} + 2 \times \frac{3}{20} = 0.5$$



1. 计算机模拟基本概念

掷骰子的计算机模拟

1. 产生服从 $U(0, 1)$ 的随机数 R_2
2. 将区间 $[0, 1]$ 六等份：

若 $0 \leq R_2 < \frac{1}{6}$, 则对应骰子点数为1

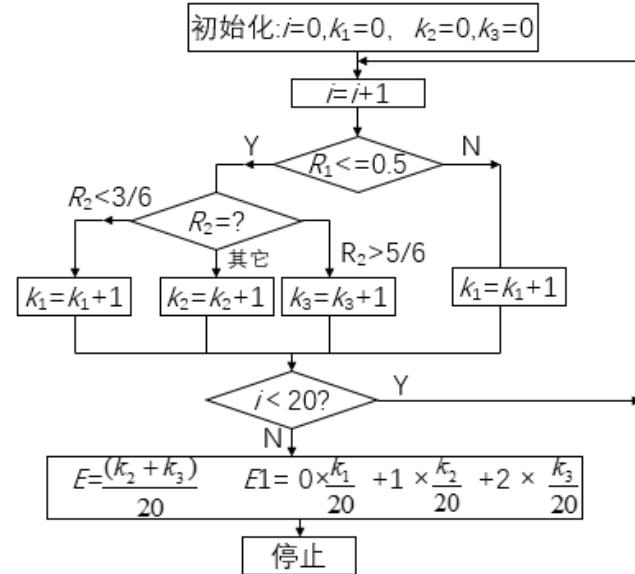
若 $\frac{1}{6} \leq R_2 < \frac{2}{6}$, 则对应骰子点数为2

若 $\frac{2}{6} \leq R_2 < \frac{3}{6}$, 则对应骰子点数为3

若 $\frac{3}{6} \leq R_2 < \frac{4}{6}$, 则对应骰子点数为4

若 $\frac{4}{6} \leq R_2 < \frac{5}{6}$, 则对应骰子点数为5

若 $\frac{5}{6} \leq R_2 \leq 1$, 则对应骰子点数为6



R1 = 0.8790
 Example_1_1 E = 0.2650
 E1 = 0.3350



1、计算机模拟基本概念

$$E = 0.2495$$

$$E_1 = 0.3365$$

5. 理论计算

设: $j = \begin{cases} 0 & \text{观察所对目标指示不正确} \\ 1 & \text{观察所对目标指示正确} \end{cases}$

A_0 : 射中敌方火炮的事件; A_1 : 射中敌方 1 门火炮的事件; A_2 : 射中敌方两门火炮的事件.
则由全概率公式:

$$E = P(A_0) = P(j=0)P(A_0 | j=0) + P(j=1)P(A_0 | j=1) = 0.25$$

$$P(A_1) = P(j=0)P(A_1 | j=0) + P(j=1)P(A_1 | j=1) = 1/6$$

$$P(A_2) = P(j=0)P(A_2 | j=0) + P(j=1)P(A_2 | j=1) = 1/12$$

$$E_1 = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{12} \approx 0.33$$



1. 计算机模拟基本概念

6. 结果比较

分类项目	无效射击	有效射击	平均值
模 拟	0.8790	0.2650	0.3350
理 论	0.75	0.25	0.33

虽然模拟结果与理论计算不完全一致，但它却能更加真实地表达实际战斗动态过程。

用蒙特卡罗方法进行计算机模拟的步骤：

- [1] 设计一个逻辑框图，即模拟模型。这个框图要正确反映系统各部分运行时的逻辑关系。
- [2] 模拟随机现象。可通过具有各种概率分布的模拟随机数来模拟随机现象。



2、随机数的生成

在MATLAB软件中，可以直接产生满足各种分布的随机数，命令如下：

1. 产生 $m \times n$ 阶 $[a, b]$ 上均匀分布 $U(a, b)$ 的随机数矩阵：

unifrnd (a,b,m, n)

产生一个 $[a, b]$ 均匀分布的随机数： **unifrnd (a,b)**

2. 产生 $m \times n$ 阶 $[0, 1]$ 均匀分布的随机数矩阵：

rand (m, n)

产生一个 $[0, 1]$ 均匀分布的随机数： **rand**

3. 产生 $m \times n$ 阶均值为 μ ，方差为 σ^2 的正态分布的随机数矩阵：

normrnd (μ, σ^2, m, n)

产生一个均值为 μ ，方差为 σ 的正态分布的随机数：

normrnd (μ, σ)



2、随机数的生成

例1-2 敌坦克分队对我方阵地实施突袭，其到达规律服从泊松分布，平均每分钟到达4辆。 (1) 模拟敌坦克在3分钟内到达目标区的数量，以及在第1、2、3分钟内各到达几辆坦克。 (2) 模拟在3分钟内每辆敌坦克的到达时刻。

(1) 用poissrnd(4)进行模拟。

(2) 坦克到达的间隔时间应服从参数为4的负指数分布，用exprnd (1/4) 模拟。

Example_1_2_1

```
n1 =1  
n2 =7  
n3 =7  
n =15
```

Example_1_2_2

```
clear  
t=0;  
j=0;  
while t<3  
    j=j+1  
    t=t+exprnd(1/4)  
end
```

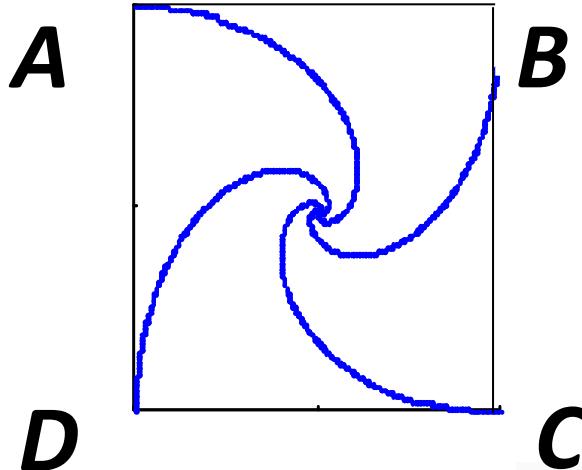


3. 计算机模拟实例分析

➤ 连续系统模拟实例：追逐问题

状态随时间连续变化的系统称为**连续系统**. 对连续系统的计算机模拟只能是近似的，只要这种近似达到一定的精度，也就可以满足要求.

例1-3（追逐问题） 如图,正方形 $ABCD$ 的4个顶点各有1人.在某一时刻,4人同时出发以匀速 $v=1\text{m/s}$ 按顺时针方向追逐下一人,如果他们始终保持对准目标,则最终按螺旋状曲线于中心点 O .试求出这种情况下每个行进轨迹.





3、计算机模拟实例分析

求解过程

- 建立平面直角坐标系: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$.
- 取时间间隔为 Δt , 计算每一点在各个时刻的坐标.

设某点在 t 时刻的坐标为: (x_i, y_i)

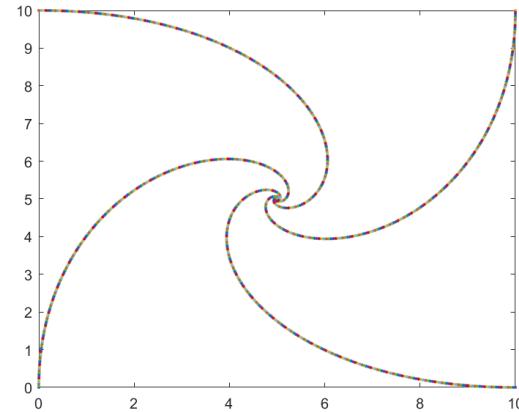
则在 $t + \Delta t$ 时刻的坐标为: $(x_i + v\Delta t \cos \alpha, y_i + v\Delta t \sin \alpha)$

其中 $\cos \alpha = \frac{x_{i+1} - x_i}{d}$ $\sin \alpha = \frac{y_{i+1} - y_i}{d}$

$$d = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

- 取足够小的 ε , $d < \varepsilon$ 时结束算法.
- 对每一个点, 连接它在各时刻的位置, 即得所求运动轨迹.

Example_1_3





3、计算机模拟实例分析

➤ 离散系统模拟实例：排队问题

排队论主要研究随机服务系统的工作过程.

在排队系统中，服务对象的到达时间和服务时间都是随机的。排队论通过对每个个别的随机服务现象的统计研究，找出反映这些随机现象平均特性的规律，从而为设计新的服务系统和改进现有服务系统的工作提供依据.

对于排队服务系统，顾客常常注意排队的人是否太多，等候的时间是否长，而服务员则关心他空闲的时间是否太短。于是人们常用排队的长度、等待的时间及服务利用率等指标来衡量系统的性能.



3、计算机模拟实例分析

例1-4 (单服务员的排队模型) 在某商店有一个售货员，顾客陆续来到，售货员逐个地接待顾客。当到来的顾客较多时，一部分顾客便须排队等待，被接待后的顾客便离开商店。设：

1. 顾客到来间隔时间服从参数为0.1的指数分布。
2. 对顾客的服务时间服从 [4,15] 上的均匀分布。
3. 排队按先到先服务规则，队长无限制。

假定一个工作日为8小时，时间以分钟为单位。

[1]模拟一个工作日内完成服务的个数及顾客平均等待时间t。

[2]模拟100个工作日，求出平均每日完成服务的个数及每日顾客的平均等待时间。



3、计算机模拟实例分析

➤ 离散系统模拟实例：排队问题

[1] 系统的假设：

- (1) 顾客源是无穷的；
- (2) 排队的长度没有限制；
- (3) 到达系统的顾客按先后顺序依次进入服务，即“先到先服务”.

[2] 符号说明

w : 总等待时间; c_i : 第*i*个顾客的到达时刻;

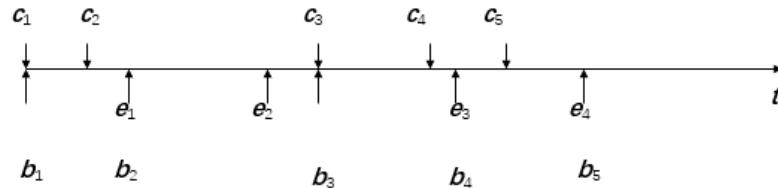
b_i : 第*i*个顾客开始服务时刻; e_i : 第*i*个顾客服务结束时刻.

x_i : 第*i-1*个顾客与第*i*个顾客到达之间的时间间隔

y_i : 对第*i*个顾客的服务时间



3、计算机模拟实例分析



$$c_i = c_{i-1} + x_i$$

$$e_i = b_i + y_i$$

$$b_i = \max(c_i, e_{i-1})$$

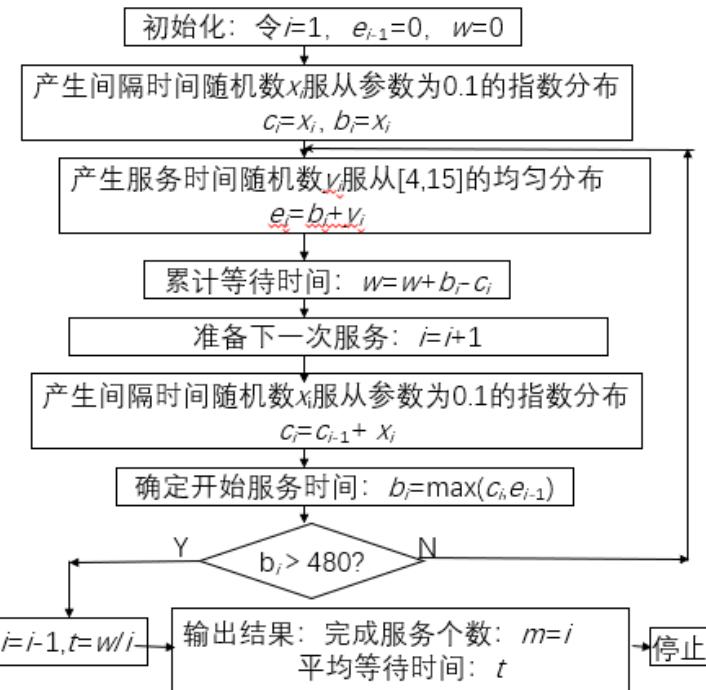
[1] 模拟1日
Example_1_4_1

$$\begin{aligned} t &= 26.1557 \\ m &= 44 \end{aligned}$$

[2] 模拟100日
Example_1_4_2

$$\begin{aligned} pt &= 23.8889 \\ pm &= 44.1500 \end{aligned}$$

[3] 模拟框图





3、计算机模拟实例分析

➤ 蒙特卡罗法解非线性规划问题

对于**非线性规划问题**:

$$\min f(X) \quad X \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{s. t.} \quad g_i(X) \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$a_j \leq x_j \leq b_j \quad j=1, 2, \dots, n$$

用蒙特卡罗法**求解的基本思想**是：在估计的区域

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_j \in [a_j, b_j], j=1, 2, \dots, n\}$$

内随机取若干试验点，然后从试验点中找出可行点，再从可行点中选择最小点。

基本假设 试验点的第 j 个分量 x_j 服从 $[a_j, b_j]$ 内的均匀分布。



3、计算机模拟实例分析

➤ 蒙特卡罗法解非线性规划问题

符号假设

P : 试验点总数; $MAXP$: 最大试验点总数;

K : 可行点总数; $MAXK$: 最大可行点数;

X^* : 迭代产生的最优点;

Q : 迭代产生的最小值 $f(X^*)$, 其初始值为计算机所能表示的最大数.

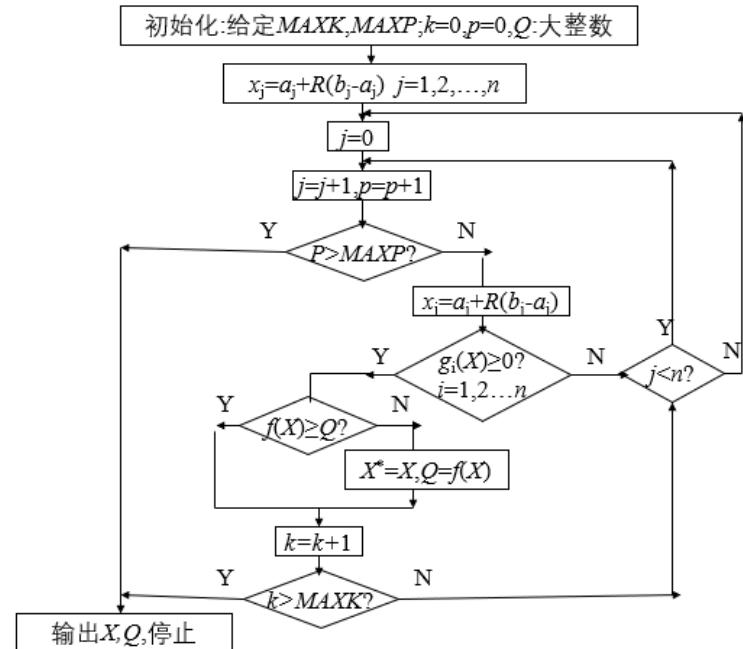
求解过程

先产生一个随机数作为初始试验点, 以后则将上一个试验点的第 j 个分量随机产生, 其他分量不变而产生一个新的试验点. 这样, 每产生一个新试验点只需一个新的随机数分量. 当 $K > MAXK$ 或 $P > MAXP$ 时停止迭代.

3、计算机模拟实例分析

➤ 蒙特卡罗法解非线性规划问题

框图





3、计算机模拟实例分析

➤ 蒙特卡罗法解非线性规划问题

例1-5 $\max z = -2x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 8x_1 + 3x_2$

s. t $3x_1 + x_2 = 10$

$x_1 > 0$

$x_2 > 0$

共需3个M文件:example_1_5.m, mylp.m, lpconst.m.
主程序为example_1_5.m.

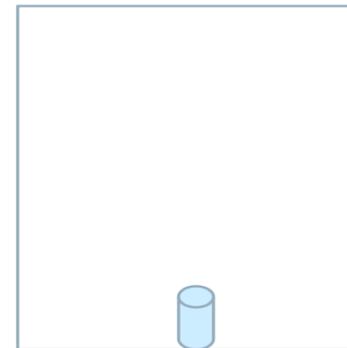
$z = -15.0079$
 $ans = 2.4655 \quad 2.5695$



练习题

如图所示，一房间内站着一个圆柱形的人（将人体假设为圆柱形），圆柱地面直接与地面接触，假设房间内空气不参与辐射。结构参数与表面物性自拟，并考察物性变化，采用 Monte-Carlo方法计算：

1. 圆柱面和上端面与房间6个表面之间的角系数。
2. 圆柱面和上端面与各个表面之间的辐射传递系数。
3. 圆柱面和上端面与房间6个表面之间的辐射传递热量，考虑一个低于其他墙面温度的窗户的情况。



感谢各位聆听！
Thanks for Listening.

| 在线问答

极值学院
edu.mathor.com

数学家旗下
在线教育平台

Q&A