



基础数学模型 动态规划分析



主讲人 张文斌

上海交通大学机械与动力工程学院博士生
曾获美国数学建模特等奖 (Outstanding)
研究数学建模多年，掌握一定数模获奖技巧
熟悉数学建模方法、编程及论文写作

-  1、动态规划的基本概念
-  2、动态规划：最短路径问题
-  3、动态规划：投资分配问题
-  4、动态规划：背包问题



1. 动态规划的基本概念

➤ 动态规划的发展及研究内容

动态规划 (dynamic programming) 是运筹学的一个分支，是求解决策过程 (decision process) 最优化的数学方法。20世纪50年代初 R. E. Bellman 等人在研究多阶段决策过程(multistep decision process)的优化问题时，提出了著名的最优化原理 (principle of optimality)，把多阶段过程转化为一系列单阶段问题，逐个求解，创立了解决这类过程优化问题的新方法—动态规划。1957年出版了他的名著《Dynamic Programming》，这是该领域的第一本著作。

动态规划问世以来，在经济管理、生产调度、工程技术和最优控制等方面得到了广泛的应用。例如最短路线、库存管理、资源分配、设备更新、排序、装载等问题，用动态规划方法比用其它方法求解更为方便。



1、动态规划的基本概念

动态规划是解决多阶段决策问题的一种方法，是现代企业管理中的一种重要决策方法，可用于最优路径问题、资源分配问题、生产计划和库存问题、投资问题、装载问题、排序问题及生产过程的最优控制等。

动态规划模型的分类：

以“时间”角度可分成：离散型和连续型。

从信息确定与否可分成：确定型和随机型。

从目标函数的个数可分成：单目标型和多目标型。



1. 动态规划的基本概念

动态决策问题的特点：

系统所处的状态和时刻是进行决策的重要因素；即在系统发展的不同时刻（或阶段）根据系统所处的状态，不断地做出决策；找到不同时刻的最优决策以及整个过程的最优策略。

多阶段决策问题：

是动态决策问题的一种特殊形式；在多阶段决策过程中，系统的动态过程可以按照时间进程分为状态相互联系而又相互区别的各个阶段；每个阶段都要进行决策，目的是使整个过程的决策达到最优效果。



1. 动态规划的基本概念

多阶段决策问题的典型例子：

1. **生产决策问题**: 企业在生产过程中, 由于需求是随时间变化的, 因此企业为了获得全年的最佳生产效益, 就要在整个生产过程中逐月或逐季度地根据库存和需求决定生产计划。

2. **机器负荷分配问题**: 某种机器可以在高低两种不同的负荷下进行生产。在高负荷下进行生产时, 产品的年产量 g 和投入生产的机器数量 u_1 的关系为

$$g=g(u_1)$$





1. 动态规划的基本概念

这时，机器的年完好率为 a ，即如果年初完好机器的数量为 u ，到年终完好的机器就为 au , $0 < a < 1$ 。

在低负荷下生产时，产品的年产量 h 和投入生产的机器数量 u_2 的关系为

$$h=h(u_2)$$

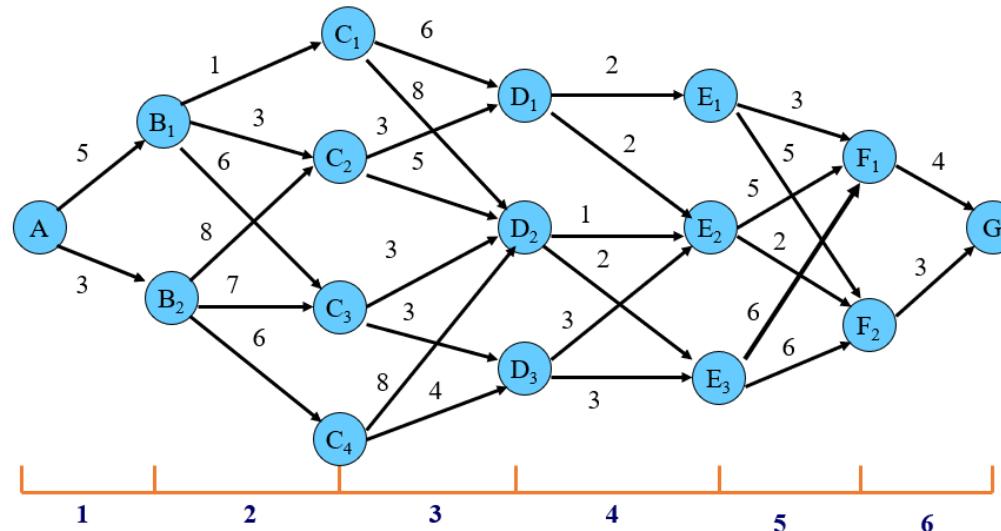
相应的机器年完好率 b , $0 < b < 1$ 。

假定开始生产时完好的机器数量为 s_1 。要求制定一个五年计划，在每年开始时，决定如何重新分配完好的机器在两种不同的负荷下生产的数量，使在五年内产品的总产量达到最高。



1. 动态规划的基本概念

最短路问题：给定一个交通网络图如下，其中两点之间的数字表示距离（或花费），试求从A点到G点的最短距离（总费用最小）。





1. 动态规划的基本概念

➤ 基本概念

1、阶段：

把一个问题的过程，恰当地分为若干个相互联系的阶段，以便于按一定的次序去求解。

描述阶段的变量称为阶段变量。阶段的划分，一般是根据时间和空间的自然特征来进行的，但要便于问题转化为多阶段决策。

2、状态：

表示每个阶段开始所处的自然状况或客观条件。通常一个阶段有若干个状态，描述过程状态的变量称为状态变量。

状态变量的取值有一定的允许集合或范围，此集合称为状态允许集合。



1、动态规划的基本概念

➤ 基本概念

3、决策：表示当过程处于某一阶段的某个状态时，可以作出不同的决定，从而确定下一阶段的状态，这种决定称为决策。

描述决策的变量，称为决策变量。决策变量是状态变量的函数。可用一个数、一组数或一向量（多维情形）来描述。

在实际问题中决策变量的取值往往在某一范围之内，此范围称为允许决策集合。

4、多阶段决策过程

可以在各个阶段进行决策，去控制过程发展的多段过程；

系统在某一阶段的状态转移不但与系统的当前的状态和决策有关，而且还与系统过去的历史状态和决策有关。



1. 动态规划的基本概念

➤ 基本概念

其状态转移方程如下（一般形式）

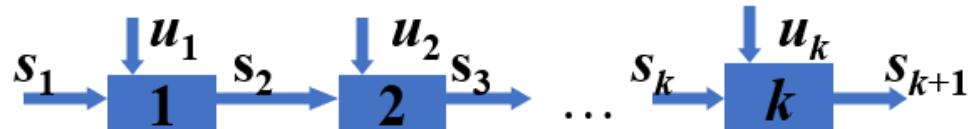
$$s_2 = T_1(s_1, u_1)$$

$$s_3 = T_2(s_1, u_1, s_2, u_2)$$

.....

$$s_{k+1} = T_k(s_1, u_1, s_2, u_2, \dots, s_k, u_k)$$

图示如下：



状态转移方程是确定过程由一个状态到另一个状态的演变过程。如果第 k 阶段状态变量 s_k 的值、该阶段的决策变量一经确定，第 $k+1$ 阶段状态变量 s_{k+1} 的值也就确定。

能用动态规划方法求解的多阶段决策过程是一类特殊的多阶段决策过程，即具有无后效性的多阶段决策过程。



1. 动态规划的基本概念

➤ 基本概念

$$\begin{aligned}s_2 &= T_1(s_1, u_1) \\s_3 &= T_2(s_2, u_2) \\&\dots\dots \\s_{k+1} &= T_k(s_k, u_k)\end{aligned}$$

动态规划中能
处理的状态转移
方程的形式。

无后效性(马尔可夫性)

如果某阶段状态给定后，则在这个阶段以后过程的发展不受这个阶段以前各段状态的影响；

过程的过去历史只能通过当前的状态去影响它未来的发展；构造动态规划模型时，要充分注意是否满足无后效性的要求；

状态变量要满足无后效性的要求；

如果状态变量不能满足无后效性的要求，应适当地改变状态的定义或规定方法。



1. 动态规划的基本概念

➤ 基本概念

5、策略：是一个按顺序排列的决策组成的集合。在实际问题中，可供选择的策略有一定的范围，称为**允许策略集合**。从允许策略集合中找出达到最优效果的策略称为**最优策略**。

6、状态转移方程：是确定过程由一个状态到另一个状态的演变过程，描述了状态转移规律。

7、指标函数和最优值函数：用来衡量所实现过程优劣的一种数量指标，为**指标函数**。指标函数的最优值，称为**最优值函数**。在不同的问题中，指标函数的含义是不同的，它可能是距离、利润、成本、产量或资源消耗等。

动态规划模型的指标函数，应具有可分离性，并满足**递推**关系。



1. 动态规划的基本概念

➤ 基本概念

动态规划本质上是多阶段决策过程;

概念 : 阶段变量 k 、状态变量 s_k 、决策变量 u_k ;

方程 : 状态转移方程 $s_{k+1} = T_k(s_k, u_k)$

指标: $V_{k,n} = V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, u_{k+1}, \dots, s_{n+1})$ $f_k(s_k) = \underset{\{u_k, \dots, u_n\}}{\text{opt}} V_{k,n}(s_k, u_k, \dots, s_{n+1})$

$V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, u_{k+1}, \dots, s_{n+1}) = \phi_k[s_k, u_k, V_{k+1,n}(s_{k+1}, u_{k+1}, \dots, s_{n+1})]$

指标函数形式: 和、积

效益

可递推



1. 动态规划的基本概念

➤ 基本概念

解多阶段决策过程问题，求出

最优策略，即最优决策序列

$$\{u_1^*, u_2^*, \dots, u_{f_1(s_1)}^*\}$$

最优轨线，即执行最优策略时的状态序列

最优目标函数值

$$V_{1,n}^* = V_{1,n}^*(s_1^*, \dots, s_n^*)$$

从 k 到终点最优策略
子策略的最优目标函数值

$$f_k(s_k) = \underset{\{u_k, \dots, u_n\}}{\text{opt}} v_{k,n}(s_k, u_k, \dots, s_{n+1})$$



1. 动态规划的基本概念

➤ 动态规划的基本思想

1、动态规划方法的关键在于正确地写出基本的递推关系式和恰当的边界条件（简称基本方程）。要做到这一点，就必须将问题的过程分成几个相互联系的阶段，恰当的选取状态变量和决策变量及定义最优值函数，从而把一个大问题转化成一组同类型的子问题，然后逐个求解。即从边界条件开始，逐段递推寻优，在每一个子问题的求解中，均利用了它前面的子问题的最优化结果，依次进行，最后一个子问题所得的最优解，就是整个问题的最优解。



1、动态规划的基本概念

➤ 动态规划的基本思想

2、在多阶段决策过程中，动态规划方法是既把当前一段和未来一段分开，又把当前效益和未来效益结合起来考虑的一种最优化方法。因此，每段决策的选取是从全局来考虑的，与该段的最优选择答案一般是不同的。

3、在求整个问题的最优策略时，由于初始状态是已知的，而每段的决策都是该段状态的函数，故最优策略所经过的各段状态便可逐段变换得到，从而确定了最优路线。

最优化原理：作为整个过程的最优策略具有这样的性质：无论过去的状态和决策如何，相对于前面的决策所形成的状态而言，余下的决策序列必然构成最优子策略。”也就是说，一个最优策略的子策略也是最优的。



1、动态规划的基本概念

➤ 建立动态规划模型的步骤

1、划分阶段

划分阶段是运用动态规划求解多阶段决策问题的第一步，在确定多阶段特性后，按时间或空间先后顺序，将过程划分为若干相互联系的阶段。对于静态问题要人为地赋予“时间”概念，以便划分阶段。

2、正确选择状态变量

选择变量既要能确切描述过程演变又要满足无后效性，而且各阶段状态变量的取值能够确定。一般地，状态变量的选择是从过程演变的特点中寻找。

3、确定决策变量及允许决策集合

通常选择所求解问题的关键变量作为决策变量，同时要给出决策变量的取值范围，即确定允许决策集合。



1、动态规划的基本概念

➤ 动态规划的基本思想

4、确定状态转移方程

根据 k 阶段状态变量和决策变量，写出 $k+1$ 阶段状态变量，状态转移方程应当具有递推关系。

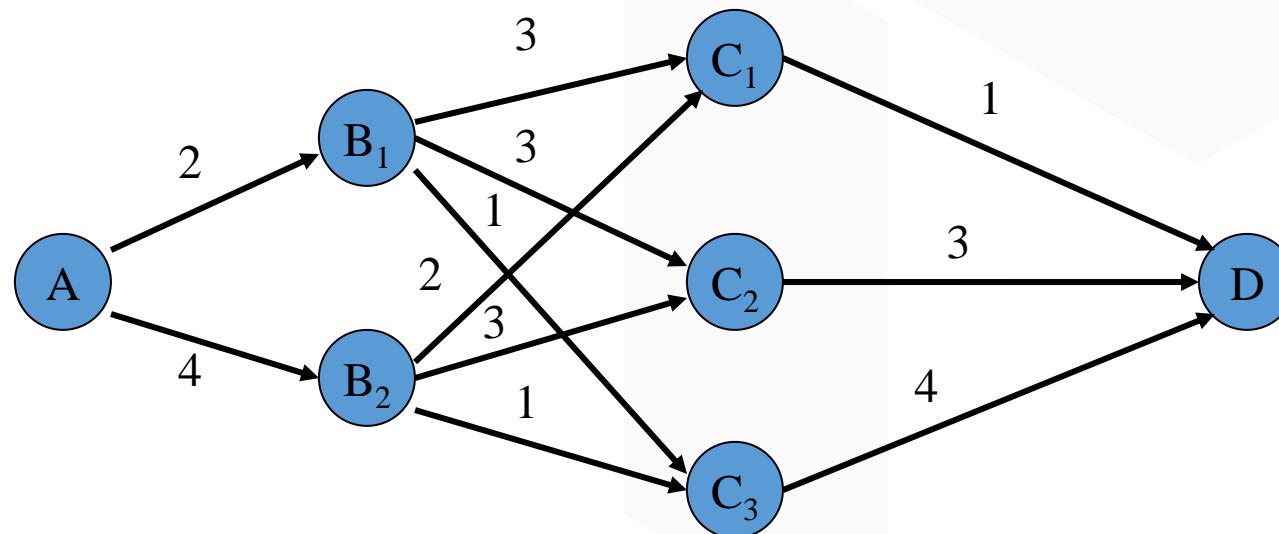
5、确定阶段指标函数和最优指标函数，建立动态规划基本方程

阶段指标函数是指第 k 阶段的收益，最优指标函数是指从第 k 阶段状态出发到第 n 阶段末所获得收益的最优值，最后写出动态规划基本方程。

以上五步是建立动态规划数学模型的一般步骤。由于动态规划模型与线性规划模型不同，动态规划模型没有统一的模式，建模时必须根据具体问题具体分析，只有通过不断实践总结，才能较好掌握建模方法与技巧。

2、动态规划：最短路径问题

例1-1、从A地到D地要铺设一条煤气管道，其中需经过两级中间站，两点之间的连线上的数字表示距离，如图所示。问应该选择什么路线，使总距离最短？



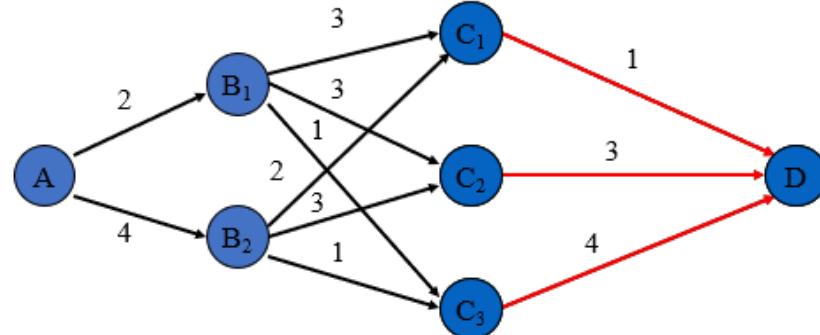
2、动态规划：最短路径问题

模型的建立与求解

解：整个计算过程分三个阶段，
从最后一个阶段开始。

第一阶段 ($C \rightarrow D$) : C 有三条路线到终点 D 。

显然有 $f_1(C_1) = 1$; $f_1(C_2) = 3$; $f_1(C_3) = 4$





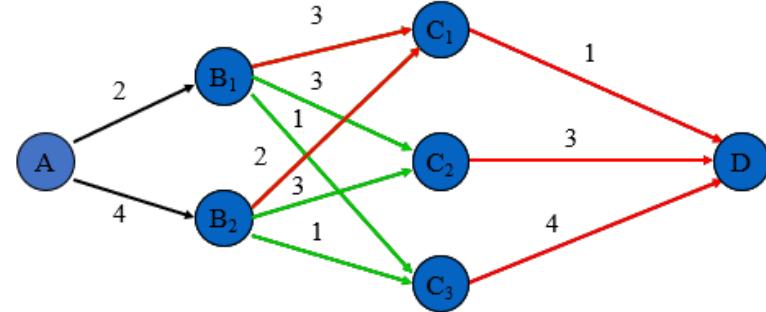
2、动态规划：最短路径问题

模型的建立与求解

第二阶段 ($B \rightarrow C$) : B 到 C 有六条路线。

$$\begin{aligned} f_2(B_1) &= \min \left\{ \begin{array}{l} d(B_1, C_1) + f_1(C_1) \\ d(B_1, C_2) + f_1(C_2) \\ d(B_1, C_3) + f_1(C_3) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 3+1 \\ 3+3 \\ 1+4 \end{array} \right\} \\ &= \min \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 6 \\ 5 \end{array} \right\} = 4 \end{aligned}$$

(最短路线为 $B_1 \rightarrow C_1 \rightarrow D$)



$$\begin{aligned} f_2(B_2) &= \min \left\{ \begin{array}{l} d(B_2, C_1) + f_1(C_1) \\ d(B_2, C_2) + f_1(C_2) \\ d(B_2, C_3) + f_1(C_3) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2+1 \\ 3+3 \\ 1+4 \end{array} \right\} \\ &= \min \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 6 \\ 5 \end{array} \right\} = 3 \quad (\text{最短路线为 } B_2 \rightarrow C_1 \rightarrow D) \end{aligned}$$

2、动态规划：最短路径问题

模型的建立与求解

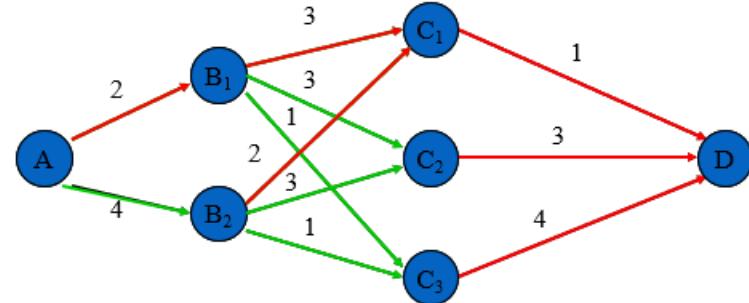
第三阶段 ($A \rightarrow B$) : A 到B 有二条路线。

$$f_3(A)_1 = d(A, B_1) + f_2(B_1) = 2 + 4 = 6$$

$$f_3(A)_2 = d(A, B_2) + f_2(B_2) = 4 + 3 = 7$$

$$\therefore f_3(A) = \min \left\{ \begin{array}{l} d(A, B_1) + f_2(B_1) \\ d(A, B_2) + f_2(B_2) \end{array} \right\} = \min \{6, 7\} = 6$$

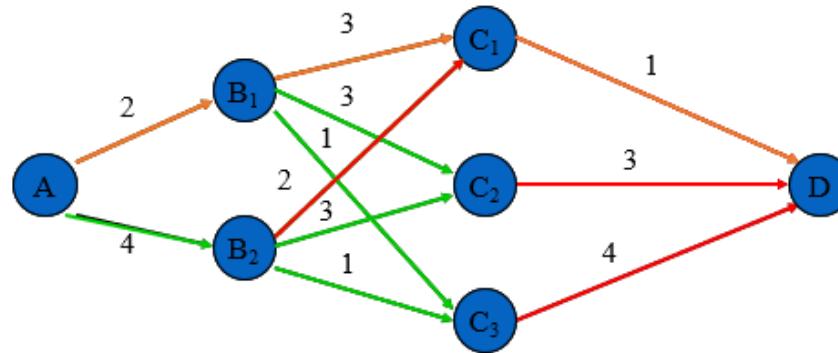
(最短路线为 $A \rightarrow B_1 \rightarrow C_1 \rightarrow D$)





2、动态规划：最短路径问题

模型的建立与求解



最短路线为 $A \rightarrow B_1 \rightarrow C_1 \rightarrow D$

路长为 6

3、动态规划：投资分配问题

现有数量为 a （万元）的资金，计划分配给 n 个工厂，用于扩大再生产。

假设： x_i 为分配给第 i 个工厂的资金数量（万元）； $g_i(x_i)$ 为第 i 个工厂得到资金后提供的利润值（万元）。

问题是如何确定各工厂的资金数，使得总的利润为最大。

据此，有下式：

$$\max Z = \sum_{i=1}^n g_i(x_i)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \leq a \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$



3、动态规划：投资分配问题

令： $f_k(x) = \text{以数量为 } x \text{ 的资金分配给前 } k \text{ 个工厂，所得到的最大利润值。}$
用动态规划求解，就是求 $f_n(a)$ 的问题。

当 $k=1$ 时， $f_1(x) = g_1(x)$ (因为只给一个工厂)

当 $1 < k \leq n$ 时，其递推关系如下：

设： y 为分给第 k 个工厂的资金（其中 $0 \leq y \leq x$ ），此时还剩 $x-y$ (万元) 的资金需要分配给前 $k-1$ 个工厂，如果采取最优策略，则得到的最大利润为 $f_{k-1}(x-y)$ ，因此总的利润为：

$$g_k(y) + f_{k-1}(x-y)$$



3、动态规划：投资分配问题

所以，根据动态规划的最优化原理，有下式：

$$f_k(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \{g_k(y) + f_{k-1}(x - y)\}$$

其中 $k = 2, 3, \dots, n$

如果 a 是以万元为资金分配单位，则式中的 y 只取非负整数 $0, 1, 2, \dots, x$ 。
上式可变为：

$$f_k(x) = \max_{y=0,1,2,\dots,x} \{g_k(y) + f_{k-1}(x - y)\}$$



3、动态规划：投资分配问题

例1-2 设国家拨给60万元投资，供四个工厂扩建使用，每个工厂扩建后的利润与投资额的大小有关，投资后的利润函数如下表所示。

投资 利润	0	10	20	30	40	50	60
$g_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
$g_2(x)$	0	20	40	50	55	60	65
$g_3(x)$	0	25	60	85	100	110	115
$g_4(x)$	0	25	40	50	60	65	70



3、动态规划：投资分配问题

模型的建立与求解

依据题意，是要求 $f_4(60)$ 。

按顺序解法计算。

第一阶段：求 $f_1(x)$ 。显然有 $f_1(x) = g_1(x)$ ，得到下表

投资利润	0	10	20	30	40	50	60
$f_1(x) = g_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
最优策略	0	10	20	30	40	50	60

第二阶段：求 $f_2(x)$ 。此时需考虑第一、第二个工厂如何进行投资分配，以取得最大的总利润。

$$f_2(60) = \max_{y=0,10,\dots,60} \{g_2(y) + f_1(60-y)\}$$



3、动态规划：投资分配问题

模型的建立与求解

$$f_2(60) = \max \left\{ \begin{array}{l} g_2(0) + f_1(60) \\ g_2(10) + f_1(50) \\ g_2(20) + f_1(40) \\ g_2(30) + f_1(30) \\ g_2(40) + f_1(20) \\ g_2(50) + f_1(10) \\ g_2(60) + f_1(0) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 + 85 \\ 20 + 85 \\ 40 + 80 \\ 50 + 65 \\ 55 + 50 \\ 60 + 20 \\ 65 + 0 \end{array} \right\} = 120$$

最优策略为 (40, 20)，此时最大利润为120万元。

同理可求得其它 $f_2(x)$ 的值。



3、动态规划：投资分配问题

模型的建立与求解

$$f_2(50) = \max_{y=0,10,\dots,50} \{ g_2(y) + f_1(50-y) \}$$
$$f_2(50) = \left\{ \begin{array}{l} g_2(0) + f_1(50) \\ g_2(10) + f_1(40) \\ g_2(20) + f_1(30) \\ g_2(30) + f_1(20) \\ g_2(40) + f_1(10) \\ g_2(50) + f_1(0) \end{array} \right\} = 105$$

最优策略为 (30, 20) , 此时最大利润为105万元。



3、动态规划：投资分配问题

模型的建立与求解

$$f_2(40) = \max_{y=0,10,\dots,40} \{g_2(y) + f_1(40-y)\} = 90$$

最优策略为 (20, 20)，此时最大利润为90万元。

$$f_2(30) = \max_{y=0,10,20,30} \{g_2(y) + f_1(30-y)\} = 70$$

最优策略为 (20, 10)，此时最大利润为70万元。

$$f_2(20) = \max_{y=0,10,20} \{g_2(y) + f_1(20-y)\} = 50$$

最优策略为 (20, 0)，此时最大利润为50万元。

$$f_2(10) = \max_{y=0,10} \{g_2(y) + f_1(10-y)\} = 20$$

最优策略为 (10, 0) 或 (0, 10)，此时最大利润为20万元。

$f_2(0) = 0$ 最优策略为 (0, 0)，最大利润为0万元。得到下表

 3、动态规划：投资分配问题

模型的建立与求解

投资利润	0	10	20	30	40	50	60
$f_2(x)$	0	20	50	70	90	105	120
最优策略	(0,0)	(10,0) (0,10)	(20,0) (10,10)	(20,10) (20,20)	(20,20) (30,20)	(30,20) (40,20)	(40,20)

第三阶段：求 $f_3(x)$ 。此时需考虑第一、第二及第三个工厂如何进行投资分配，以取得最大的总利润。

$$f_3(60) = \max_{y=0,10,\dots,60} \{g_3(y) + f_2(60 - y)\}$$



3、动态规划：投资分配问题

模型的建立与求解

$$f_3(60) = \max \left\{ \begin{array}{l} g_3(0) + f_2(60) \\ g_3(10) + f_2(50) \\ g_3(20) + f_2(40) \\ g_3(30) + f_2(30) \\ g_3(40) + f_2(20) \\ g_3(50) + f_2(10) \\ g_3(60) + f_2(0) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 + 120 \\ 25 + 105 \\ 60 + 90 \\ 85 + 70 \\ 100 + 50 \\ 110 + 20 \\ 115 + 0 \end{array} \right\} = 155$$

最优策略为 $(20, 10, 30)$ ，最大利润为155万元。

同理可求得其它 $f_3(x)$ 的值。得到下表



3、动态规划：投资分配问题

模型的建立与求解

投资利润	0	10	20	30	40	50	60
$f_3(x)$	0	25	60	85	110	135	155
最优策略	(0,0,0)	(0,0,10)	(0,0,20)	(0,0,30)	(20,0,20)	(20,0,30)	(20,10,30)

第四阶段：求 $f_4(60)$ 。即问题的最优策略。

$$f_4(60) = \max_{y=0,10,\dots,60} \{g_4(y) + f_3(60 - y)\}$$

最优策略为 (20, 0, 30, 10) , 最大利润为160万元。



4. 动态规划：背包问题

有一个徒步旅行者，其可携带物品重量的限度为 a 公斤，设有 n 种物品可供他选择装入包中。已知每种物品的重量及使用价值（作用），问此人应如何选择携带的物品（各几件），使所起作用（使用价值）最大？

物品	1	2	...	j	...	n
重量（公斤/件）	a_1	a_2	...	a_j	...	a_n
每件使用价值	c_1	c_2	...	c_j	...	c_n

这就是背包问题。类似的还有工厂里的下料问题、运输中的货物装载问题、人造卫星内的物品装载问题等。



4、动态规划：背包问题

设 x_j 为第 j 种物品的装件数（非负整数）则问题的数学模型如下：

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=i}^n a_j x_j \leq a \\ x_j \geq 0 \text{ 且为整数 } (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

用动态规划方法求解，令

$f_x(y)$ = 总重量不超过 y 公斤，包中只装有前 k 种物品时的最大使用价值。

其中 $y \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ 。所以问题就是求 $f_n(a)$



4、动态规划：背包问题

其递推关系式为：

$$f_k(y) = \max_{0 \leq x_k \leq \frac{y}{a_k}} \{c_k x_k + f_{k-1}(y - a_k x_k)\}$$

其中 $2 \leq k \leq n$

当 $k=1$ 时，有：

$$f_1(y) = c_1 \left[\frac{y}{a_1} \right], \quad \left[x_1 = \left[\frac{y}{a_1} \right] \right]$$

其中 $\left[\frac{y}{a_1} \right]$ 表示不超过 $\frac{y}{a_1}$ 的最大整数



4、动态规划：背包问题

例1-3 求下面背包问题的最优解

$$\max Z = 8x_1 + 5x_2 + 12x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

模型的建立与求解

解: $a = 5$, 问题是求 $f_3(5)$

物品	1	2	3
重量 (公斤)	3	2	5
使用价值	8	5	12

$$f_3(5) = \max_{\substack{0 \leq x_3 \leq \frac{5}{a_3} \\ x_3 \text{ 整数}}} \{ 12x_3 + f_2(5 - 5x_3) \}$$



4、动态规划：背包问题

模型的建立与求解

$$\begin{aligned}f_3(5) &= \max_{\substack{0 \leq x_3 \leq \frac{5}{a_3} \\ x_3 \text{ 整数}}} \{ 12x_3 + f_2(5 - 5x_3) \} \\&= \max_{\substack{0 \leq x_3 \leq \frac{5}{5} \\ x_3 \text{ 整数}}} \{ 12x_3 + f_2(5 - 5x_3) \} \\&= \max_{x_3=0,1} \{ 12x_3 + f_2(5 - 5x_3) \} \\&= \max \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{0} + f_2(5), & 12 + f_2(\mathbf{0}) \\ (x_3=0) & (x_3=1) \end{array} \right\}\end{aligned}$$



4、动态规划：背包问题

模型的建立与求解

$$\begin{aligned}f_2(5) &= \max_{\substack{0 \leq x_2 \leq \frac{5}{2} \\ x_2 \text{整数}}} \{ 5x_2 + f_1(5 - 2x_2) \} \\&= \max_{\substack{0 \leq x_2 \leq \frac{5}{2} \\ x_2 \text{整数}}} \{ 5x_2 + f_1(5 - 2x_2) \} \\&= \max_{x_2=0,1,2} \{ 5x_2 + f_1(5 - 2x_2) \} \\&= \max \left\{ \begin{array}{lll} 0 + f_1(5), & 5 + f_1(3), & 10 + f_1(1) \end{array} \right. \end{aligned}$$



4、动态规划：背包问题

模型的建立与求解

$$\begin{aligned}f_2(0) &= \max_{\substack{0 \leq x_2 \leq \frac{0}{a_2} \\ x_2 \text{ 整数}}} \{ 5x_2 + f_1(0 - 2x_2) \} \\&= \max_{\substack{0 \leq x_2 \leq \frac{0}{2} \\ x_2 \text{ 整数}}} \{ 5x_2 + f_1(0 - 2x_2) \} \\&= \max_{x_2=0} \{ 5x_2 + f_1(0 - 2x_2) \} \\&= \max_{(x_2=0)} \left\{ 0 + f_1(0) \right\} = f_1(0)\end{aligned}$$



4、动态规划：背包问题

模型的建立与求解

$$f_1(5) = c_1 x_1 = 8 \times \frac{5}{3} = 8 \quad (x_1 = 1)$$

$$f_1(3) = c_1 x_1 = 8 \times \frac{3}{3} = 8 \quad (x_1 = 1)$$

$$f_1(1) = c_1 x_1 = 8 \times \frac{1}{3} = 0 \quad (x_1 = 0)$$

$$f_1(0) = c_1 x_1 = 8 \times \frac{0}{3} = 0 \quad (x_1 = 0)$$

$$\begin{aligned}\therefore f_2(5) &= \max \left\{ \begin{array}{l} 0 + f_1(5), \quad (x_2=0) \\ 5 + f_1(3), \quad (x_2=1) \\ 10 + f_1(1) \quad (x_2=2) \end{array} \right\} \\ &= \max \{8, \quad 5+8, \quad 10\} = 13 \quad (x_1 = 1, x_2 = 1)\end{aligned}$$

4、动态规划：背包问题

模型的建立与求解

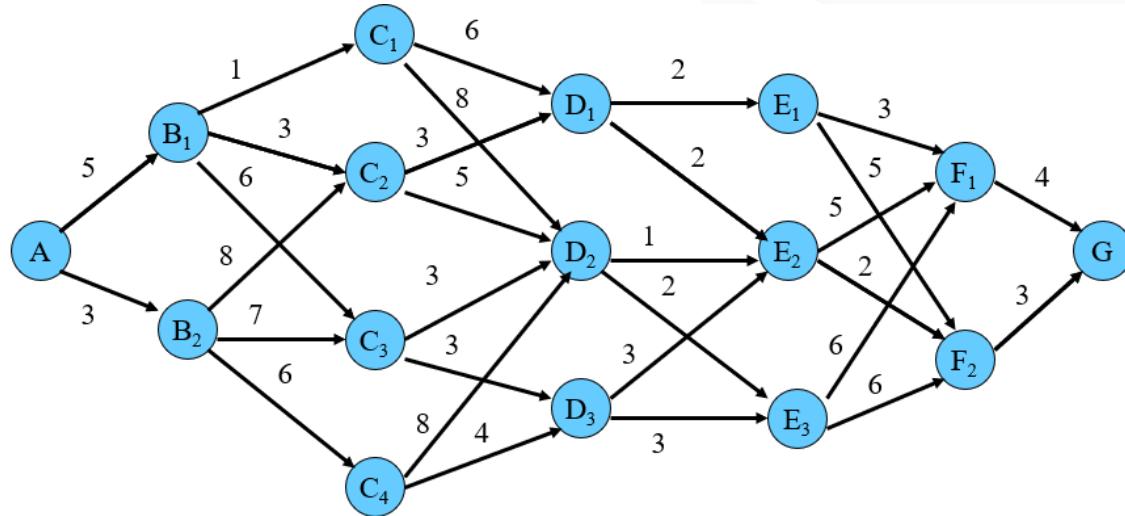
$$\begin{aligned}f_2(0) &= \max \left\{ 0 + f_1(0), \quad (x_2=0) \right\} = f_1(0) = 0 \quad (x_1 = 0, x_2 = 0) \\ \therefore f_3(5) &= \max \left\{ 0 + f_2(5), \quad 12 + f_2(0), \quad (x_3=0) \right. \\ &\quad \left. 12 + f_2(1), \quad (x_3=1) \right\} \\ &= \max \{ 0 + 13, \quad 12 + 0 \} \\ &= 13 \quad (x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0)\end{aligned}$$

所以，最优解为 $X = (1, 1, 0)$ ，最优值为 $Z = 13$ 。



练习题

1-1 求从A到G的最短路径



答案：最优路线为： $A \rightarrow B_1 \rightarrow C_2 \rightarrow D_1 \rightarrow E_2 \rightarrow F_2 \rightarrow G$

路长=18

感谢各位聆听!
Thanks for Listening.

| 在线问答

极值学院
edu.mathor.com

数学家旗下
在线教育平台

Q&A