极值学院
edu.mathor.com

数学家旗下
在线教育平台

《数学建模基础课程》
课程地址

# 基础数学模型
# 插值与拟合分析


**主讲人** 张文斌

上海交通大学机械与动力工程学院博士生
曾获美国数学建模特等奖（Outstanding）
研究数学建模多年，掌握一定数模获奖技巧
熟悉数学建模方法、编程及论文写作

# 目录

极值学院 edu.mathor.com | 数学家旗下 在线教育平台

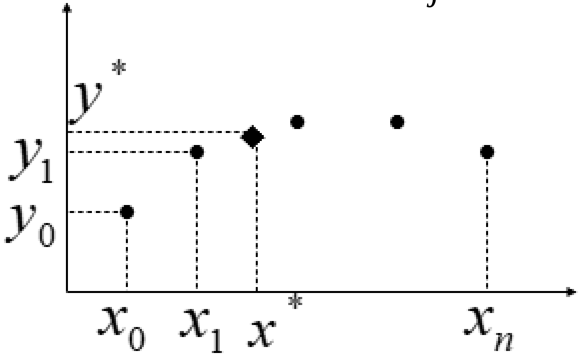
## 1、插值的基本定义与方法

### 一维插值的定义

已知 $n+1$个节点 $(x_j, y_j)$ $(j=0,1,\cdots,n,)$ 其中 $x_j$ 互不相同，不妨设

$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b)$,

求任一插值点 $x^*(\neq x_j)$ 处的插值 $y^*$.




节点可视为由$y=g(x)$产生，g表达式复杂或者无封闭形式或未知

极值学院 edu.mathor.com 数学家旗下 在线教育平台

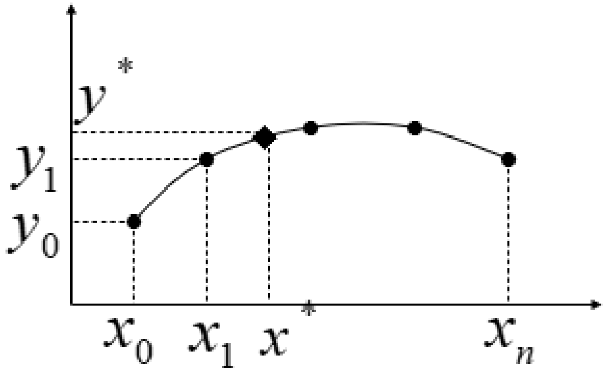
## 1、插值的基本定义与方法

### 一维插值的定义

构造一个(相对简单的)函数 $y=f(x)$, 通过全部节点, 即

$$f(x_j)=y_j \quad (j=0,1,\cdots,n)$$

再用 $f(x)$ 计算插值，即 $y^*=f(x^*)$.



极值学院 edu.mathor.com | 数学家旗下在线教育平台

## 1、插值的基本定义与方法

### 插值的方法

**拉格朗日(Lagrange)插值**

已知函数$f(x)$在$n+1$个点$x_0,x_1,\ldots,x_n$处的函数值为$y_0,y_1,\ldots,y_n$． 求一$n$次多项式函数$P_n(x)$，使其满足：

$$P_n(x_i)=y_i, i=0,1,\ldots,n.$$

解决此问题的拉格朗日插值多项式公式：$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} L_i(x)\cdot y_i$

其中$L_i(x)$ 为$n$次多项式：$L_i(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$

称为拉格朗日插值基函数.

极值学院 edu.mathor.com 数学家旗下在线教育平台

## 1、插值的基本定义与方法

### 插值的方法

拉格朗日(Lagrange)插值

特别地, 两点一次(线性)插值多项式:

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

三点二次(抛物)插值多项式:

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)}y_2$$

直接验证可知, $L_n(x)$满足插值条件.

极值学院 edu.mathor.com 数学家旗下在线教育平台

## 1、插值的基本定义与方法

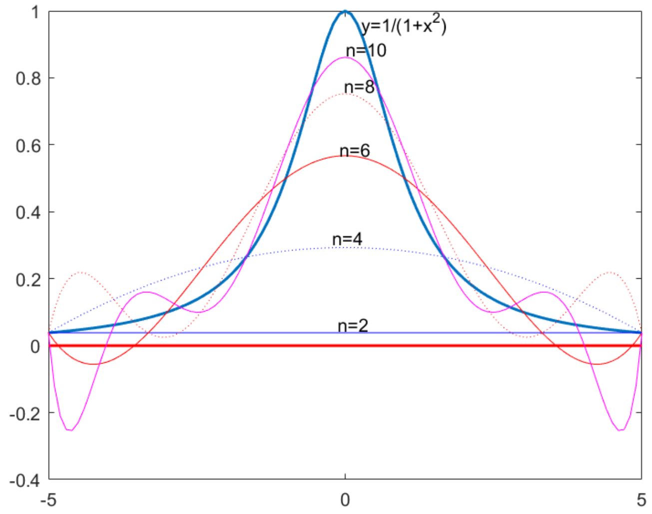
### 插值的方法

拉格朗日(Lagrange)插值

例1-1 $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2},\ -5\le x\le 5$

采用拉格朗日多项式插值：选取不同插值节点$n$+1个，其中$n$为插值多项式的次数，当$n$分别取2,4,6,8,10时，绘出插值结果图形.

代码：example_1_1




拉格朗日多项式插值的这种振荡现象叫 Runge现象

极值学院 edu.mathor.com 数学家旗下在线教育平台

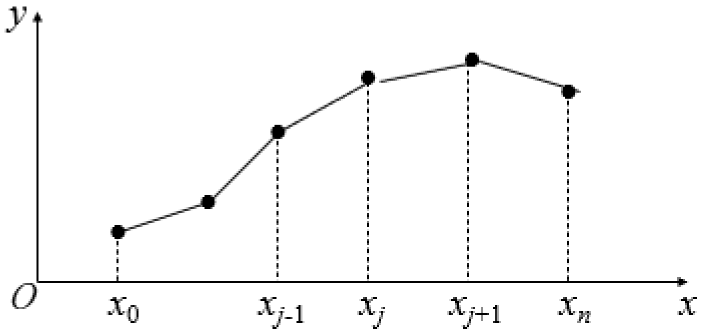
## 1、插值的基本定义与方法

### 插值的方法

分段线性插值

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x)$$

$$l_j(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x_{j-1}\le x\le x_j\\[2mm] \dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}, & x_j\le x\le x_{j+1}\\[2mm] 0, & \text{其他}\end{cases}$$




计算量与$n$无关; $n$越大，误差越小.

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x)=g(x),\ x_0\le x\le x_n$$

极值学院 edu.mathor.com 数学家旗下在线教育平台

## 1、插值的基本定义与方法

### 插值的方法

分段线性插值

例1-2 $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2},\quad -6\le x\le 6$

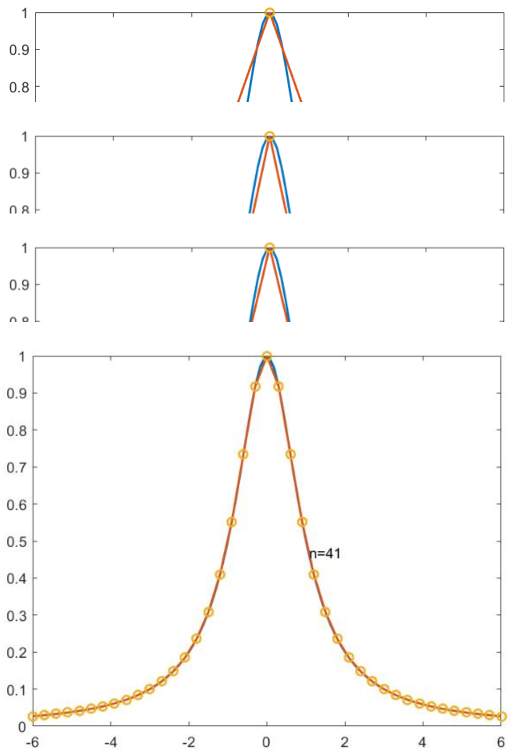
用分段线性插值法求插值,并观察插值误差.

1.在[-6,6]中平均选取5个点作插值(example_1_2_1)

2.在[-6,6]中平均选取11个点作插值(example_1_2_2)

3.在[-6,6]中平均选取21个点作插值(example_1_2_3)

4.在[-6,6]中平均选取41个点作插值(example_1_2_4)

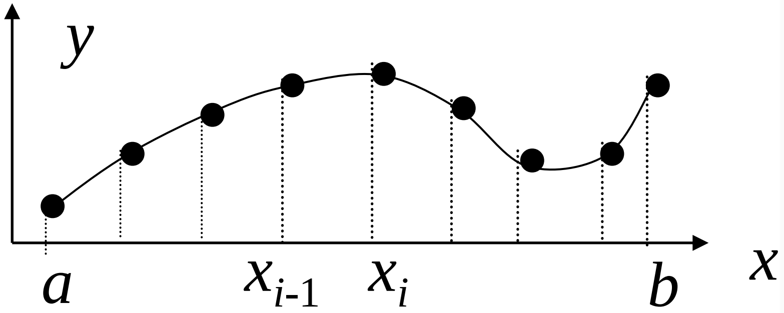


## 1、插值的基本定义与方法

### 插值的方法

三次样条插值

比分段线性插值更光滑




在数学上，光滑程度的定量描述是：函数(曲线)的$k$阶导数存在且连续，则称该曲线具有$k$阶光滑性.

光滑性的阶次越高，则越光滑．是否存在较低次的分段多项式达到较高阶光滑性的方法？三次样条插值就是一个很好的例子.

极值学院 edu.mathor.com | 数学家旗下在线教育平台

## 1、插值的基本定义与方法

### 插值的方法

三次样条插值

$$S(x)=\{s_i(x), x\in[x_{i-1},x_i], i=1,\cdots,n\}$$

$$\lim_{n\to\infty} S(x)=g(x)$$

1) $s_i(x)=a_ix^3+b_ix^2+c_ix+d_i \quad (i=1,\cdots,n)$

2) $S(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\cdots,n)$

$g(x)$为被插值函数.

3) $S(x)\in C^2[x_0,x_n]$

$\Rightarrow s_i(x_i)=s_{i+1}(x_i),\ s_i'(x_i)=s_{i+1}'(x_i),\ s_i''(x_i)=s_{i+1}''(x_i)\ (i=1,\cdots,n-1)$

4) $S''(x_0)=S''(x_n)=0$ (自然边界条件）

$$\boxed{2)\ 3)\ 4) \Longrightarrow a_i, b_i, c_i, d_i \Longrightarrow S(x)}$$

极值学院 edu.mathor.com | 数学家旗下 在线教育平台

## 1、插值的基本定义与方法

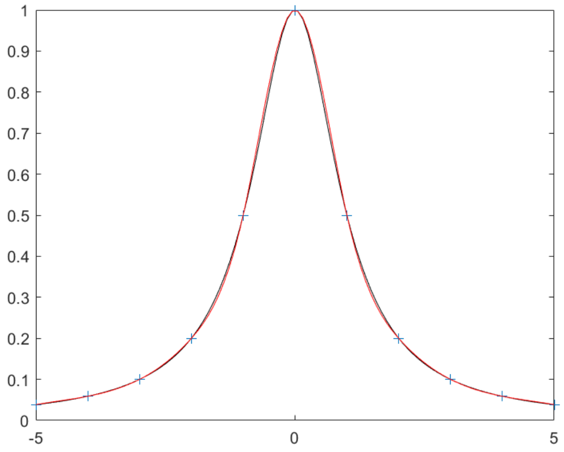
### 插值的方法

三次样条插值

例1-3 $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2},\ -6\le x\le 6$

用三次样条插值选取11个基点计算插值

代码：example_1_3



极值学院 edu.mathor.com 数学家旗下在线教育平台

## 2、插值问题实例分析

例 1-4 山区地貌：

在某山区测得一些地点的高程如下表。平面区域为

1200<=$x$<=4000,1200<=$y$<=3600)

试作出该山区的地貌图和等高线图，并对几种插值方法进行比较。

| Y \ X | 1200 | 1600 | 2000 | 2400 | 2800 | 3200 | 3600 | 4000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1200 | 1130 | 1250 | 1280 | 1230 | 1040 | 900 | 500 | 700 |
| 1600 | 1320 | 1450 | 1420 | 1400 | 1300 | 700 | 900 | 850 |
| 2000 | 1390 | 1500 | 1500 | 1400 | 900 | 1100 | 1060 | 950 |
| 2400 | 1500 | 1200 | 1100 | 1350 | 1450 | 1200 | 1150 | 1010 |
| 2800 | 1500 | 1200 | 1100 | 1550 | 1600 | 1550 | 1380 | 1070 |
| 3200 | 1500 | 1550 | 1600 | 1550 | 1600 | 1600 | 1600 | 1550 |
| 3600 | 1480 | 1500 | 1550 | 1510 | 1430 | 1300 | 1200 | 980 |

通过此例对最近邻点插值、双线性插值方法和双三次插值方法的插值效果进行比较.

极值学院 edu.mathor.com 数学家旗下在线教育平台

## 2、插值问题实例分析

```
z=interp2(x0,y0,z0,x,y,'method')
```

- z：被插值点的函数值
- x0,y0,z0：插值节点
- x,y：被插值点
- 'method'：插值方法

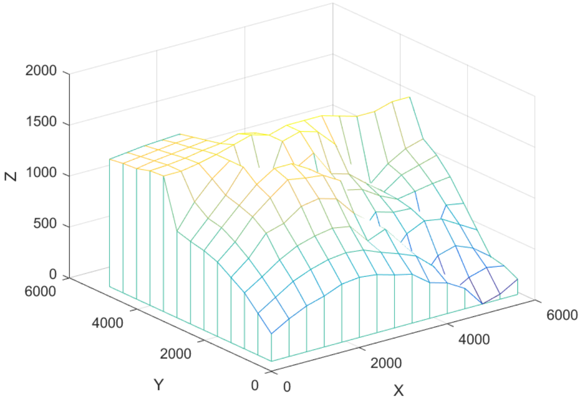
要求x0,y0单调；x，y可取为矩阵，或x取行向量，y取为列向量，x,y的值分别不能超出x0,y0的范围.

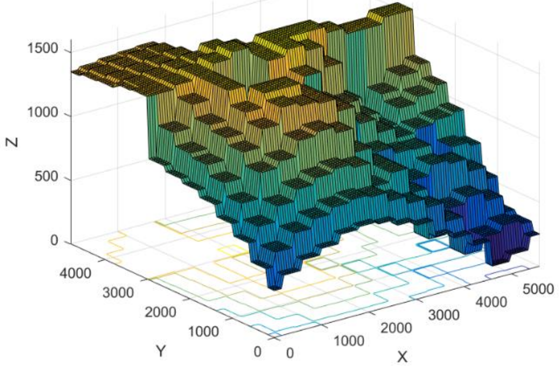
'nearest' 最邻近插值；
'linear' 双线性插值；
'cubic' 双三次插值；
缺省时 双线性插值.

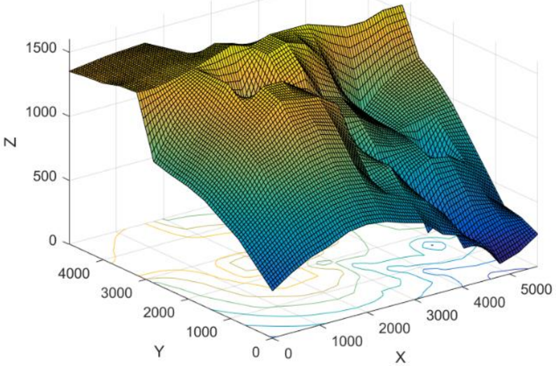
## 2、插值问题实例分析

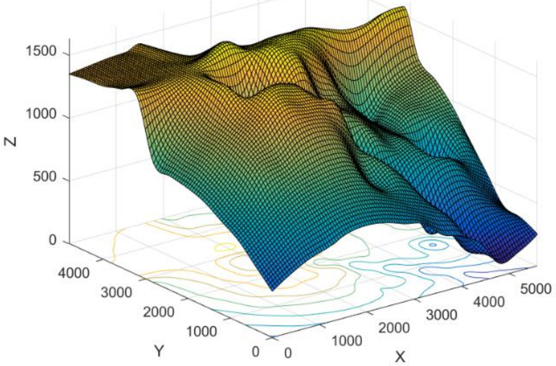
### 例1-4 山区地貌

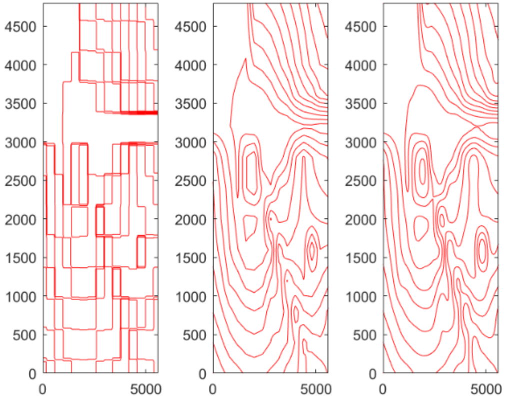
代码：example_1_4



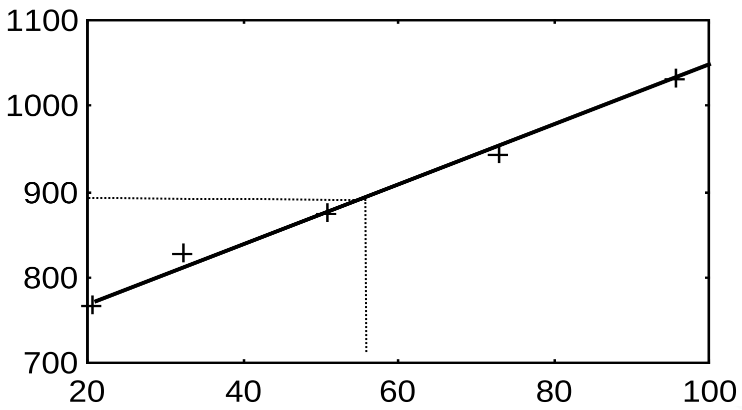
## 3、拟合问题引例与基本原理

### 引例 电阻问题

已知热敏电阻数据：

| 温度$t$(℃) | 20.5 | 32.7 | 51.0 | 73.0 | 95.7 |
|---|---|---|---|---|---|
| 电阻$R(\Omega)$ | 765 | 826 | 873 | 942 | 1032 |

求60℃时的电阻$R$.




设 $R=at+b$

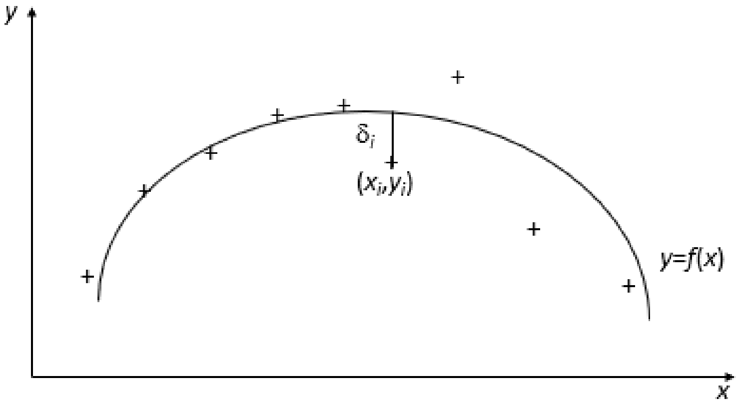
$a,b$为待定系数

极值学院 edu.mathor.com | 数学家旗下在线教育平台

## 3、拟合问题引例与基本原理

### 拟合问题

已知一组（二维）数据，即平面上 $n$个点（$x_i,y_i$）$i=1,\ldots,n$, 寻求一个函数（曲线）$y=f(x)$, 使 $f(x)$ 在某种准则下与所有数据点最为接近，即曲线拟合得最好．




$\delta_i$为点（$x_i,y_i$）与曲线 $y=f(x)$ 的距离

## 3、拟合问题引例与基本原理

### 拟合与插值的关系

问题：给定一批数据点，需确定满足特定要求的曲线或曲面

解决方案：

- 若要求所求曲线（面）通过所给所有数据点，就是插值问题；
- 若不要求曲线（面）通过所有数据点，而是要求它反映对象整体的变化趋势，这就是数据拟合，又称曲线拟合或曲面拟合.

函数插值与曲线拟合都是要根据一组数据构造一个函数作为近似，由于近似的要求不同，二者在数学方法上是完全不同的.

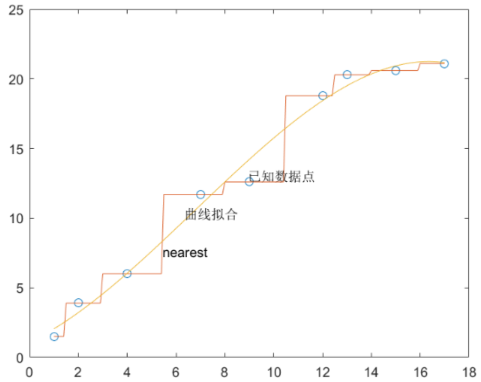
极值学院
edu.mathor.com
数学家旗下
在线教育平台

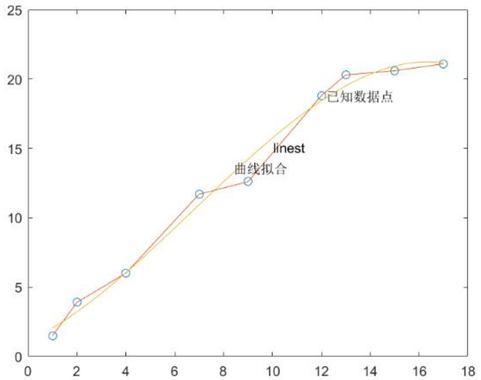
## 3、拟合问题引例与基本原理

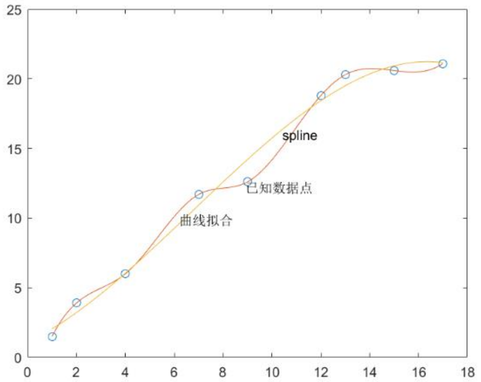
### 拟合与插值的关系

例1-5：下面数据是某次实验所得，希望得到$X$和 $f$之间的关系？

| x | 1 | 2 | 4 | 7 | 9 | 12 | 13 | 15 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f | 1.5 | 3.9 | 6.6 | 11.7 | 15.6 | 18.8 | 19.6 | 20.6 | 21.1 |



极值学院 edu.mathor.com | 数学家旗下在线教育平台

## 4、拟合问题Matlab求解

### 线性最小二乘法

第一步:**先选定一组函数** $r_1(x), r_2(x), \ldots, r_m(x)$, $m<n$, 令

$$f(x)=a_1r_1(x)+a_2r_2(x)+\ldots+a_mr_m(x) \qquad (1)$$

其中 $a_1,a_2,\ldots,a_m$ 为**待定系数**.

第二步：确定$a_1,a_2,\ldots,a_m$ 的准则（最小二乘准则）：

使$n$个点（$x_i,y_i$) 与曲线 $y=f(x)$ 的距离$\delta_i$的平方和最小。

记 $$J(a_1,a_2,\cdots a_m)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-y_i]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[\sum_{k=1}^{m}a_kr_k(x_i)-y_i]^2 \qquad (2)$$

问题归结为，求 $a_1,a_2,\ldots,a_m$ 使 $J(a_1,a_2,\ldots,a_m)$ 最小.

极值学院 edu.mathor.com 数学家旗下在线教育平台

## 4、拟合问题Matlab求解

### 线性最小二乘法

超定方程组：方程个数大于未知量个数的方程组

$$\begin{cases} r_{11}a_1 + r_{12}a_2 + \cdots + r_{1m}a_m = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{n1}a_1 + r_{n2}a_2 + \cdots + r_{nm}a_m = y_n \end{cases} \quad (n > m)$$

即 ***Ra=y***

其中

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

超定方程组一般不存在解的矛盾方程组.

如果有向量*a*使得 $\sum_{i=1}^{n}(r_{i1}a_1 + r_{i2}a_2 + \cdots + r_{im}a_m - y_i)^2$ 达到最小，则称*a*为上述超定方程组的最小二乘解.

极值学院 edu.mathor.com | 数学家旗下在线教育平台

## 4、拟合问题Matlab求解

### 线性最小二乘法

所以，曲线拟合的最小二乘法要解决的问题，实际上就是求以下超定方程组的最小二乘解的问题.

$$Ra=y \qquad (3)$$

其中

$$R=\begin{bmatrix} r_1(x_1) & \cdots & r_m(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ r_1(x_n) & \cdots & r_m(x_n) \end{bmatrix},\quad a=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix},\quad y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

定理：当$R^TR$可逆时，超定方程组（3）存在最小二乘解，且即为方程组

$$R^TRa=R^Ty$$

的解：$a=(R^TR)^{-1}R^Ty$

极值学院 edu.mathor.com 数学家旗下 在线教育平台

# 4、拟合问题Matlab求解

## 线性最小二乘法拟合

1. 作多项式$f(x)=a_1x^m+\ldots+a_mx+a_{m+1}$拟合,可利用已有程序:

a=polyfit(x,y,m)

输出拟合多项式系数

a=[$a_1$, …,$a_m$ , $a_{m+1}$] (数组))

输入同长度的数组x，y

拟合多项式次数

2. 对超定方程组 $R_{n\times m}a_{m\times 1}=y_{n\times 1}\ (m<n)$，用 $a=R\backslash y$ 可得最小二乘意义下的解。

3.多项式在$x$处的值$y$可用以下命令计算：

y=polyval（a，x）

极值学院 edu.mathor.com | 数学家旗下在线教育平台

## 4、拟合问题Matlab求解

### 线性最小二乘法拟合

例1-6 对下面一组数据作二次多项式拟合

| $x_i$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 1.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | -0.447 | 1.978 | 3.28 | 6.16 | 7.08 | 7.34 | 7.66 | 9.56 | 9.48 | 9.30 | 11.2 |

即要求 出二次多项式: $f(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3$ 中的

$A=(a_1,a_2,a_3)$ 使得: $\sum_{i=1}^{11}[f(x_i)-y_i]^2$ 最小

## 4、拟合问题Matlab求解

### 线性最小二乘法拟合

解法一、用解超定方程的方法

此时 $R=\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{11}^2 & x_{11} & 1 \end{pmatrix}$

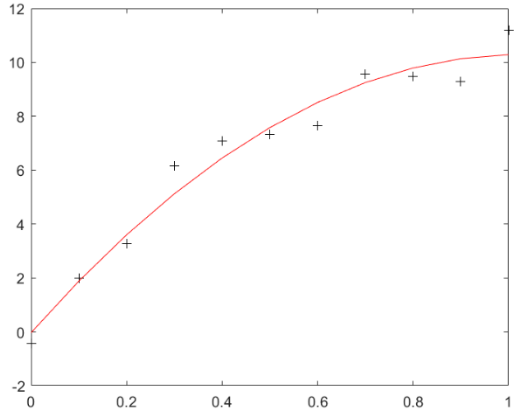
```
x=0:0.1:1;
y=[-0.447 1.978 3.28 6.16 7.08 7.34 7.66 9.56 9.48 9.30 11.2];
R=[(x.^2)' x' ones(11,1)];
A=R\y'
```

计算结果： A = -9.8108 20.1293 -0.0317

$$f(x)=-9.8108x^2+20.1293x-0.0317$$

解法二、用多项式拟合命令

```
x=0:0.1:1;
y=[-0.447 1.978 3.28 6.16 7.08 7.34 7.66 9.56 9.48 9.30 11.2];
A=polyfit(x,y,2)
z=polyval(A,x);
plot(x,y,'k+',x,z,'r') %作出数据点和拟合曲线的图形
```



极值学院
edu.mathor.com
数学家旗下
在线教育平台

# 4、拟合问题Matlab求解

## 非线性最小二乘法拟合

MATLAB提供了两个求非线性最小二乘拟合的函数：lsqcurvefit和lsqnonlin。

lsqcurvefit输入格式为:

(1) x = lsqcurvefit (‘fun’,x0,xdata,ydata);

(2) x =lsqcurvefit(‘fun’,x0,xdata,ydata,options);

(3) x=lsqcurvefit(‘fun’,x0,xdata,ydata,options,’grad’);

lsqnonlin输入格式为：

(1) x=lsqnonlin（‘fun’，x0）；

(2) x=lsqnonlin（‘fun’，x0，options）；

(3) x= lsqnonlin（‘fun’，x0，options‘grad’）；

极值学院 edu.mathor.com 数学家旗下在线教育平台

## 4、拟合问题Matlab求解

### 非线性最小二乘法拟合

例1-7 用下面一组数据拟合 $c(t)=a+be^{0.0.2kt}$ 中的参数$a$，$b$，$k$

| $t_j$ | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_j \times 10^3$ | 4.54 | 4.99 | 5.35 | 5.65 | 5.90 | 6.10 | 6.26 | 6.39 | 6.50 | 6.59 |

该问题即解最优化问题： $\min F(a,b,k)=\sum_{j=1}^{10}[a+be^{-0.02kt_j}-c_j]^2$

极值学院 edu.mathor.com 数学家旗下在线教育平台

## 4、拟合问题Matlab求解

### 例1-7

结果 f =

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0.0044 | 0.0048 | 0.0051 | 0.0054 | 0.0056 |
| 0.0058 | 0.0060 | 0.0061 | 0.0063 | 0.0064 |

x =0.0069 -0.0029 0.0809

解法1. 用命令lsqcurvefit

1）编写M文件 curvefun1.m

```
function f=curvefun1(x,tdata)
f=x(1)+x(2)*exp(-0.02*x(3)*tdata)
      %其中 x(1)=a;  x(2)=b; x(3)=k;
```

2）输入命令

```
tdata=100:100:1000
cdata=1e-03*[4.54,4.99,5.35,5.65,5.90,6.10,
6.26,6.39,6.50,6.59];
x0=[0.2,0.05,0.05];
x=lsqcurvefit ('curvefun1',x0,tdata,cdata)
f= curvefun1(x,tdata)
```

解法2. 用命令lsqnonlin

1）编写M文件 curvefun2.m

```
function f=curvefun2(x)
tdata=100:100:1000;
cdata=1e-03*[4.54,4.99,5.35,5.65,5.90,
            6.10,6.26,6.39,6.50,6.59];
f=x(1)+x(2)*exp(-0.02*x(3)*tdata)- cdata
```

2）输入命令:

```
 x0=[0.2,0.05,0.05];
x=lsqnonlin('curvefun2',x0)
f= curvefun2(x)
```

## 5、拟合问题实例分析

### ➢ 给药方案（例1-8）

一种新药用于临床之前，必须设计给药方案。药物进入机体后通过血液输送到全身，在这个过程中不断地被吸收、分布、代谢，最终排出体外，药物在血液中的浓度，即单位体积血液中的药物含量，称为血药浓度。

一室模型：将整个机体看作一个房室，称中心室，室内血药浓度是均匀的．快速静脉注射后，浓度立即上升；然后迅速下降．当浓度太低时，达不到预期的治疗效果；当浓度太高，又可能导致药物中毒或副作用太强．临床上，每种药物有一个最小有效浓度$c_1$和一个最大有效浓度$c_2$．设计给药方案时，要使血药浓度 保持在$c_1$~$c_2$之间．本题设$c_1$=10ug/ml，$c_2$=25ug/ml。

极值学院
edu.mathor.com
数学家旗下
在线教育平台

## 5、拟合问题实例分析

### ➢ 给药方案（例1-8）

要设计给药方案,必须知道给药后血药浓度随时间变化的规律．从实验和理论两方面着手：

在实验方面,对某人用快速静脉注射方式一次注入该药物300mg后,在一定时刻$t$(h)采集血药,测得血药浓度$c$(ug/ml)如下表:

| $t$(h) | 0.25 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c$(μg/ml) | 19.21 | 18.15 | 15.36 | 14.10 | 12.89 | 9.32 | 7.45 | 5.24 | 3.01 |

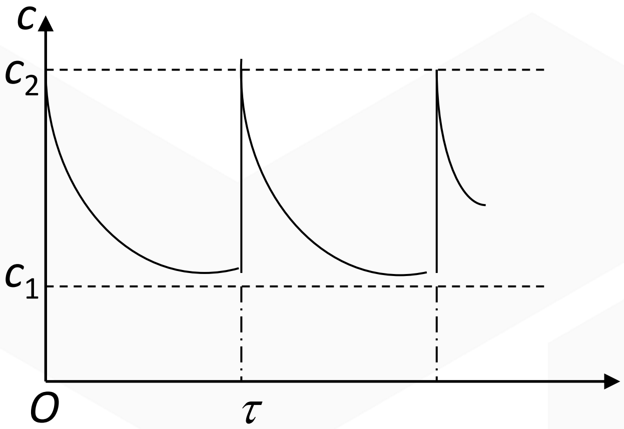
问题

1. 在快速静脉注射的给药方式下，研究血药浓度（单位体积血液中的药物含量）的变化规律。

2. 给定药物的最小有效浓度和最大治疗浓度，设计给药方案：每次注射剂量多大；间隔时间多长。

极值学院 edu.mathor.com 数学家旗下在线教育平台

## 5、拟合问题实例分析




分析

- 实验：对血药浓度数据作拟合，符合负指数变化规律
- 理论：用一室模型研究血药浓度变化规律

模型假设

1. 机体看作一个房室，室内血药浓度均匀——一室模型
2. 药物排除速率与血药浓度成正比，比例系数 $k(>0)$
3. 血液容积$v$，$t=0$注射剂量$d$，血药浓度立即为$d/v$.

极值学院 edu.mathor.com 数学家旗下 在线教育平台

## 5、拟合问题实例分析

**模型建立**

$$\left.\begin{array}{l} \text{由假设2得：} \dfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = -kc \\ \text{由假设3得：} c(0) = d/v \end{array}\right\} \Rightarrow c(t) = \frac{d}{v}\mathrm{e}^{-kt}$$

在此，$d$=300mg，$t$及$c$（$t$）在某些点处的值见前表，需经拟合求出参数$k$、$v$。

**用线性最小二乘拟合$c(t)$**

$$\left.\begin{array}{l} c(t) = \dfrac{d}{v}\mathrm{e}^{-kt} \Rightarrow \ln c = \ln(d/v) - kt \\ y = \ln c,\ a_1 = -k,\ a_2 = \ln(d/v) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} y = a_1 t + a_2 \\ k = -a_1, v = d/e^{a_2} \end{array}$$

Example_1_8_1

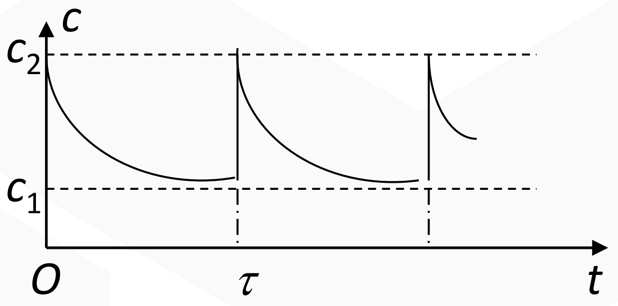
计算结果：$k = 0.2347(1/h),\ v = 15.02(l)$

极值学院 edu.mathor.com 数学家旗下在线教育平台

## 5、拟合问题实例分析

### ➢ 给药方案设计（例1-8）

- 设每次注射剂量$D$，间隔时间$\tau$
- 血药浓度$c(t)$ 应$c_1 \le c(t) \le c_2$
- 初次剂量$D_0$ 应加大




给药方案记为：$\{D_0, D, \tau\}$

$$D_0 = vc_2,\ \ D = v(c_2 - c_1)$$

$$c_1 = c_2 e^{-k\tau} \Rightarrow \tau = \frac{1}{k}\ln\frac{c_2}{c_1}$$

$c_1$=10,$c_2$=25

$k$=0.2347

$v$=15.02

计算结果：$D_0 = 375.5, D = 225.3, \tau = 3.9$

给药方案：

$$D_0 = 375(\mathrm{mg}),\ \ D = 225(\mathrm{mg}),\ \ \tau = 4(\mathrm{h})$$

即:首次注射375mg，其余每次注射225mg，注射的间隔时间为4h.

极值学院
edu.mathor.com
数学家旗下
在线教育平台

## 5、拟合问题实例分析

### ➢ 估计水塔的流量（例1-9）

某居民区有一供居民用水的圆柱形水塔，一般可以通过测量其水位来估计水的流量，但面临的困难是，当水塔水位下降到设定的最低水位时，水泵自动启动向水塔供水，到设定的最高水位时停止供水，这段时间无法测量水塔的水位和水泵的供水量．通常水泵每天供水一两次，每次约两小时.

水塔是一个高12.2m，直径17.4m的正圆柱．按照设计，水塔水位降至约8.2m时，水泵自动启动，水位升到约10.8m时水泵停止工作.

表1 是某一天的水位测量记录，试估计任何时刻（包括水泵正供水时）从水塔流出的水流量，及一天的总用水量。

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 时刻(h) | 0 | 0.92 | 1.84 | 2.95 | 3.87 | 4.98 | 5.90 | 7.01 | 7.93 | 8.97 |
| 水位(cm) | 968 | 948 | 931 | 913 | 898 | 881 | 869 | 852 | 839 | 822 |
| 时刻(h) | 9.98 | 10.92 | 10.95 | 12.03 | 12.95 | 13.88 | 14.98 | 15.90 | 16.83 | 17.93 |
| 水位(cm) | // | // | 1082 | 1050 | 1021 | 994 | 965 | 941 | 918 | 892 |
| 时刻(h) | 19.04 | 19.96 | 20.84 | 22.01 | 22.96 | 23.88 | 24.99 | 25.91 | | |
| 水位(cm) | 866 | 843 | 822 | // | // | 1059 | 1035 | 1018 | | |

## 5、拟合问题实例分析

### ➢ 估计水塔的流量（例1-9）

**拟合水位~时间函数**

从测量记录看，一天有两个供水时段（以下称第1供水时段和第2供水时段），和3个水泵不工作时段（以下称第1时段$t$=0到$t$=8.97，第2次时段$t$=10.95到$t$=20.84和第3时段$t$=23以后）。对第1、2时段的测量数据直接分别作多项式拟合，得到水位函数。为使拟合曲线比较光滑，多项式次数不要太高，一般在3~6．由于第3时段只有3个测量记录，无法对这一时段的水位作出较好的拟合。

**确定流量~时间函数**

对于第1、2时段只需将水位函数求导数即可，对于两个供水时段的流量，则用供水时段前后（水泵不工作时段）的流量拟合得到，并且将拟合得到的第2供水时段流量外推，将第3时段流量包含在第2供水时段内．

**一天总用水量的估计**

总用水量等于两个水泵不工作时段和两个供水时段用水量之和，它们都可以由流量对时间的积分得到．

## 5、拟合问题实例分析

➤ **估计水塔的流量**

**拟合第1时段的水位，并导出流量**

设$t$，$h$为已输入的时刻和水位测量记录（水泵启动的4个时刻不输入），第1时段各时刻的流量可如下得：

1）c1=polyfit（t（1：10），h（1：10），3）；

%用3次多项式拟合第1时段水位，c1输出3次多项式的系数

2）a1=polyder（c1）；

% a1输出多项式（系数为c1）导数的系数

Example_1_9_1

3）tp1=0：0.1：9；

x1=-polyval（a1，tp1）；% x1输出多项式（系数a1）在tp1点的函数值（取负后边为正值），即tp1时刻的流量

4）流量函数为：$f(t) = -0.2356t^2 + 2.7173t - 22.1079$

## 5、拟合问题实例分析

### ➢ 估计水塔的流量

### 拟合第2时段的水位，并导出流量

设$t$，$h$为已输入的时刻和水位测量记录（水泵启动的4个时刻不输入），第2时段各时刻的流量可如下得：

1） c2=polyfit(t(10.9:21),h(10.9:21),3)；

%用3次多项式拟合第2时段水位，c2输出3次多项式的系数

2） a2=polyder(c2)；

% a2输出多项式（系数为c2）导数的系数

Example_1_9_2

3）tp2=10.9:0.1:21;x2=-polyval(a2,tp2); % x2输出多项式（系数为a2）在tp2点的函数值（取负后边为正值），即tp2时刻的流量

4）流量函数为：$f(t) = -0.0186t^3 + 0.7529t^2 - 8.7512t - 1.8313$

## 5、拟合问题实例分析

### ➢ 估计水塔的流量

### 拟合供水时段的流量

在第1供水时段（$t$=9~11）之前（即第1时段）和之后（即第2时段）各取几点，其流量已经得到，用它们拟合第1供水时段的流量．为使流量函数在$t$=9和$t$=11连续，我们简单地只取4个点，拟合3次多项式（即曲线必过这4个点），实现如下：

```
xx1=-polyval(a1,[8  9]);%取第1时段在t=8,9的流量
xx2=-polyval(a2,[11 12]);%取第2时段在t=11,12的流量
xx12=[xx1  xx2];
c12=polyfit([8 9 11 12],xx12，3);%拟合3次多项式
tp12=9：0.1：11;
x12=polyval(c12,tp12);       %x12输出第1供水时段各时刻的流量
```

Example_1_9_3

拟合的流量函数为：$f(t) = -3.7207t^2 + 73.5879t - 355.078$

极值学院 edu.mathor.com 数学家旗下在线教育平台

## 5、拟合问题实例分析

## ➢ 估计水塔的流量

在第2供水时段之前取$t$=20，20.8两点的流水量，在该时刻之后（第3时段）仅有3个水位记录，我们用差分得到流量，然后用这4个数值拟合第2供水时段的流量如下：

```
dt3=diff（t(22：24)）；        %最后3个时刻的两两之差
dh3=diff（h(22：24)）；        %最后3个水位的两两之差
dht3=-dh3./dt3;                %t(22)和t(23)的流量
t3=[20  20.8  t(22)  t(23)];
xx3=[-polyval(a2，t3(1：2)，dht3)];   %取t3各时刻的流量
c3=polyfit（t3，xx3，3）；%拟合3次多项式
t3=20.8：0.1：24;
x3=polyval（c3，tp3）；% x3输出第2供水时段（外推至t=24）各时刻的流量
```

Example_1_9_4

拟合的流量函数为： $f(t) = -0.1405t^2 + 7.3077t - 91.8283$

极值学院
edu.mathor.com
数学家旗下
在线教育平台

## 5、拟合问题实例分析

➢ **估计水塔的流量**

### 一天总用水量的估计

第1、2时段和第1、2供水时段流量的积分之和，就是一天总用水量．虽然诸时段的流量已表为多项式函数，积分可以解析地算出，这里仍用数值积分计算如下：

```
y1=0.1*trapz(x1);     %第1时段用水量（仍按高度计），0.1为积分步长
y2=0.1*trapz(x2);     %第2时段用水量
y12=0.1*trapz(x12);   %第1供水时段用水量
y3=0.1*trapz(x3);     %第2供水时段用水量
y=(y1+y2+y12+y3)*237.8*0.01;     %一天总用水量（m^3=10^3L）
```

（$m^3=10^3L$）

Example_1_9_5

计算结果：y1=146.5, y2=265.0, y12=47.41, y3=68.24， y=1253. 6

## 5、拟合问题实例分析

### ➢ 估计水塔的流量

### 流量及总用水量的检验

计算出的各时刻的流量可用水位记录的数值微分来检验．用水量y1可用第1时段水位测量记录中下降高度968-822=146来检验，类似地，y2用1082-822=260检验。供水时段流量的一种检验方法如下：供水时段的用水量加上水位上升值260是该时段泵入的水量，除以时段长度得到水泵的功率（单位时间泵入的水量），而两个供水时段水泵的功率应大致相等．第1、2时段水泵的功率可计算如下：

Example_1_9_6

```
p1=(y12+260)/2；                %第1供水时段水泵的功率（水量仍以高度计）
tp4=20.8：0.1：23；
xp2=polyval（c3，tp4）；        % xp2输出第2供水时段各时刻的流量
p2=(0.1*trapz(xp2)+260)/2.2；   %第2供水时段水泵的功率（水量仍以高度计）
```

**计算结果：p1=153.7 ，p2=140.1**

## 5、拟合问题实例分析

### ➢ 估计水塔的流量

### 流量及总用水量的检验

计算结果

| (n1,n2) | y1, y2, y12, y3 | y | p1 p2 |
|---|---|---|---|
| (3,4) | 146.2, 266.8, 47.4, 77.3 | 1250.4 | 154.5 140.1 |
| (5,6) | 146.5, 257.8, 46.1, 76.3 | 1282.4 | 153.7 140.1 |

流量函数为：

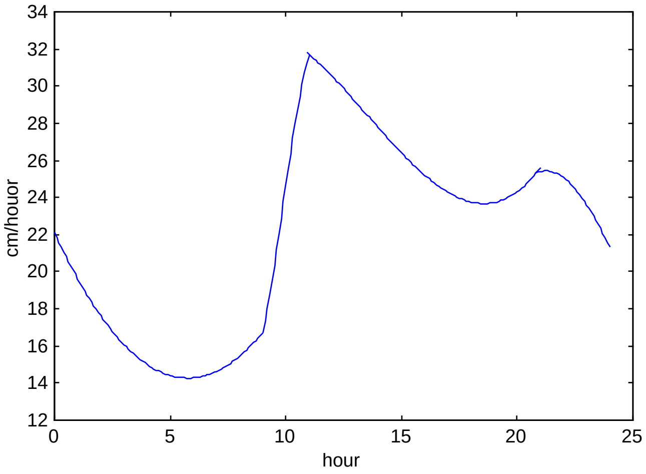
$$f(t)=\begin{cases} -0.2356\,t^2+2.7173\,t-22.1079 & 0\le t<9 \\ -3.7207\,t^2+73.5879\,t-355.078 & 9\le t<11 \\ -0.0186\,t^3+0.7529\,t^2-8.7512\,t-1.8313 & 11\le t<21 \\ -0.1405\,t^2+7.3077\,t-91.8283 & 21\le t\le 24 \end{cases}$$

极值学院
edu.mathor.com
数学家旗下
在线教育平台

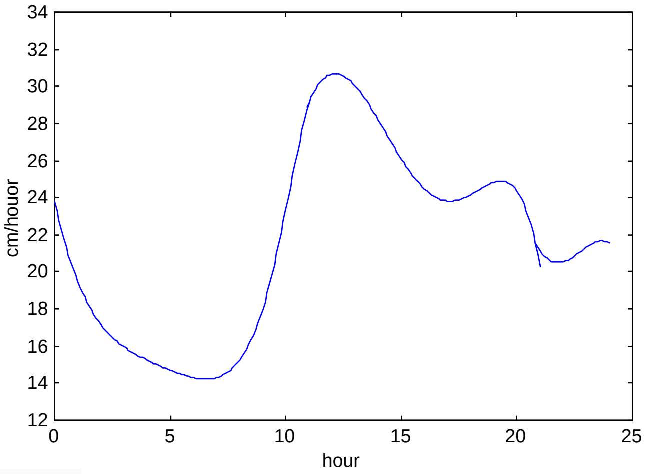
## 5、拟合问题实例分析

### ➢ 估计水塔的流量

流量曲线见图




$n=(3,4)$




$n=(5,6)$

极值学院 edu.mathor.com | 数学家旗下 在线教育平台

## 练习题

1-1 在某海域测得一些点 $(x, y)$ 处的水深z由下表给出，船的吃水深度为5英尺，在矩形区域（75，200）×（-50，150）里的哪些地方船要避免进入.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 129 | 140 | 103.5 | 88 | 185.5 | 195 | 105 |
| $y$ | 7.5 | 141.5 | 23 | 147 | 22.5 | 137.5 | 85.5 |
| $z$ | 4 | 8 | 6 | 8 | 6 | 8 | 8 |
| $x$ | 157.5 | 107.5 | 77 | 81 | 162 | 162 | 117.5 |
| $y$ | -6.5 | -81 | 3 | 56.5 | -66.5 | 84 | -33.5 |
| $z$ | 9 | 9 | 8 | 8 | 9 | 4 | 9 |

1.输入插值基点数据。

2.在矩形区域 $(75,200)\times(-50,150)$ 作二次插值，三次插值法

3. 作海底曲面图

4. 作出水深小于5的海域范围, 即 $z=5$ 的等高线.

# 感谢各位聆听！

Thanks for Listening

极值学院 edu.mathor.com
数学家旗下 在线教育平台

# Q&A