第二章系统工程的基础理论与方法论

系统工程的基础理论与方法论

- 系统最优化理论
- 控制理论基础
- 信息论基础
- 系统工程方法论

系统最优化理论

- 系统工程是一门**交叉学科**，其最基础的理论涉及**系统最优化、系统控制与系统的信息处理**三个方面。
- 系统工程核心目标之一是使系统运行在**最优状态**，因此，**系统最优化技术**是其最重要的理论支撑。

系统最优化理论

系统优化理论主要包括**线性规划、非线性规化、整数规划、动态规划**等内容，

如果考虑到最优化技术在不同应用领域中的拓展，还应包括**排队论、对策论、决策论**等，这些都属于运筹学的研究范畴。

线性规划

线性规划

线性规划是系统优化理论体系中产生较早、应用广泛的一个分支，其中的内容是求取线性函数在线性等式或不等式约束下达到最小或最大值的问题。

线性规划

某厂有三种原料B_1、B_2和B_3，储量分别为170、100和150千克。现用此三种原料生产两种产品A_1和A_2。已知每生产1千克A_1需要原料5千克B_1、2千克B_2和1千克B_3。每生产1千克A_2需要原料2千克B_1、3千克B_2和5千克B_3。又知每千克A_1产品利润为10元，每千克A_2产品利润为18元。

问在工厂现有资源条件下，应如何安排生产，才使工厂获得最大利润。

线性规划

解 ：设安排A_1、A_2产品的产量分别为 x1千克和x2 千克，则产品的总利润为 (10x1+18x2)元。然而，考虑原料存量的限制。就原料B_1来说，生产x1 千克A_1要消耗5x1 千克B_1，生产 x2千克A_2要消耗2x2 千克B_1，因此共消耗B_1为5x1+2x2 千克。同样，共消耗B_2为 2x1+3x2千克，共消耗B_3为x1+5x2 千克。按原料B_1、B_2、B_3的存储量限制，各原料总消耗量应不高于存储量，即 170，100， 150。最后，考虑到产品的产量不能为负数。

线性规划

$$\max \quad 10x_1 + 18x_2$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & 5x_1 + 2x_2 \le 170 \\ & 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ & x_1 + 5x_2 \le 150 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

线性规划

例2 某企业共有m个生产基地生产同一种产品，产量分别为 $a_1,a_2,\cdots a_m$。该产品主要销售地n个，销量分别为 $b_1,b_2,\cdots b_n$。将产品从第i个产地运到第j个销地的单位运输成本为 ，c_{ij} 对应的运输量为 。问在产量与销量持平的前提下，如何设计运输方案使运费最低？

线性规划

解:首先，在假设运输量为x_{ij} 条件下其总的运费为 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ 。其次，要考虑到从任意产地运出的量要等于该产地的产量，即$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \cdots m$ 。第三，还要考虑到运到任意销地的量要等于该销地能销出的量，即 $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \cdots n$ 。最后，也要考虑到 的产品数量属性，即

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \cdots m, j = 1, 2, \cdots n$$

线性规划

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,2,\cdots m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,2,\cdots n \\ & x_{ij} \geq 0, i = 1,2,\cdots m, j = 1,2,\cdots n \end{aligned}$$

将约束条件部分的第一式两边求和，第二式两边求和，有：

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

即意味着产量与销量持平。该问题又称为运输规划问题。

线性规划

线性规划模型由三个要素构成：（1）**决策变量**，如例1 中的x1和x2。决策变量是问题中要确定的未知量，决策者通过调控决策变量来选取不同的方案、设计、措施以达到最优目的。（2）**目标函数**。目标函数通常是决策变量的函数，表达了“何为最优”的准则和目标，规定了优化问题的实际意义。

线性规划

（3）**约束条件**。约束条件指决策变量取值时受到的各种资源和条件的限制，表达了一种“有条件优化”的概念，通常为决策变量的等式或不等式方程。

线性规划

如果决策变量的取值是连续的，且目标函数和约束条件都是决策变量的线性函数，则称为**线性规划**问题。如果决策变量的取值为整数点，则称为**整数规划**问题；如果部分决策变量取值连续而其余取值为整数，则称为**混合整数规划**问题；如果目标函数和约束条件中存在任何的非线性因子，则称为**非线性规划**问题。

线性规划

根据实际求解问题的不同，线性规划模型往往有多种表达形式。为便于讨论和制定统一求解方法，人们规定了线性规划问题的标准方程形式：

$$\min \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$
\begin{aligned}
s.t. \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

线性规划

其中，x_i 为决策变量，c_i, a_{ij}, b_j 为实常数且

$b_j \ge 0, i = 1, 2, \cdots m, j = 1, 2, \cdots n$。

利用向量和矩阵符号可以将上述标准形式简写为

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T X \\ s.t. \quad & AX = b \\ & X \ge 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix}^T$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}^T$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$$

线性规划

线性规划问题的分析讨论能采用标准形式的前提是任何线性规划模型均能等价地化为标准形式，这可以通过如下的形式变换实现。

（1）对于

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T X \\ s.t. \quad & AX \leq b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

引进松弛变量 $Y = [y_1, y_2, \cdots y_m]^T$，可得等价的

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T X + O_m Y \\ s.t. \quad & AX + Y = b \\ & X, Y \geq 0 \end{aligned}$$

线性规划

对应于标准型的矩阵为$[A \quad I_m]$, 对应于目标函数的系数向量为$\begin{bmatrix} C \\ O_m \end{bmatrix}$，决策变量为$m+n$个，即:

$$\begin{aligned} \min \quad & C_1^T Z \\ s.t. \quad & A_1 Z = b \\ & Z \geq 0 \end{aligned}$$

式中，$C_1 = \begin{bmatrix} C \\ O_m \end{bmatrix}$，$Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$，$A_1 = [A \quad I_m]$，$I_m$ 为 m维单位矩阵，O_m 为 m维零向量。

线性规划

（2）若约束条件为 $AX \geq b$ 且其余不变，则有

$$AX - Y = b$$

（3）对于目标函数求极大的情况

$$\begin{aligned} \max \quad & C^T X \\ s.t. \quad & AX = b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

则化为等价的

$$\begin{aligned} \min \quad & -C^T X \\ s.t. \quad & AX = b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

线性规划

（4）如果在某个实际的线性规划问题中，对一部分变量不要求非负约束，例如 x_1 可取 $-\infty$ 到 $+\infty$ 间的任意值，则对此变量 x_1，可引入两个只取正值的虚拟变量 $u_1, v_1 \geq 0$，令 $x_1 = u_1 - v_1$，并在相应的目标函数和约束条件中均以 $u_1 - v_1$ 代替 x_1，则非负约束成为 $u_1, v_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$，变量个数为 n+1。

线性规划

目前，LP问题的求解基本采用两种方法：低维LP（如两维）问题的图解求法和高维LP（三个决策变量以上）问题的单纯形求法。

一般情况，满足约束条件的决策变量向量在n维空间中构成的点的集合称为解的可行域，可行域中使目标函数达到最优的解点称为最优解，相应最优解的目标函数值称为最优值。对LP问题来说，如果仅含有两个决策变量，则其可行域可以在平面上画出，最优解可由图解法确定。

线性规划

用图解法求解线性规划问题时不必将线性规划模型化为标准形式，其求解过程一般经历以下几步：

1 以两个变量为轴在平面上建立直角坐标系；

2 图示线性（不）等式约束，标出可行域；

3 图示并移动目标函数，寻找最优解。

线性规划

例: 用图解法解下列线性规划

$$\min \quad -x_1 - 4x_2$$

$$
\begin{aligned}
s.t. \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\
& -x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

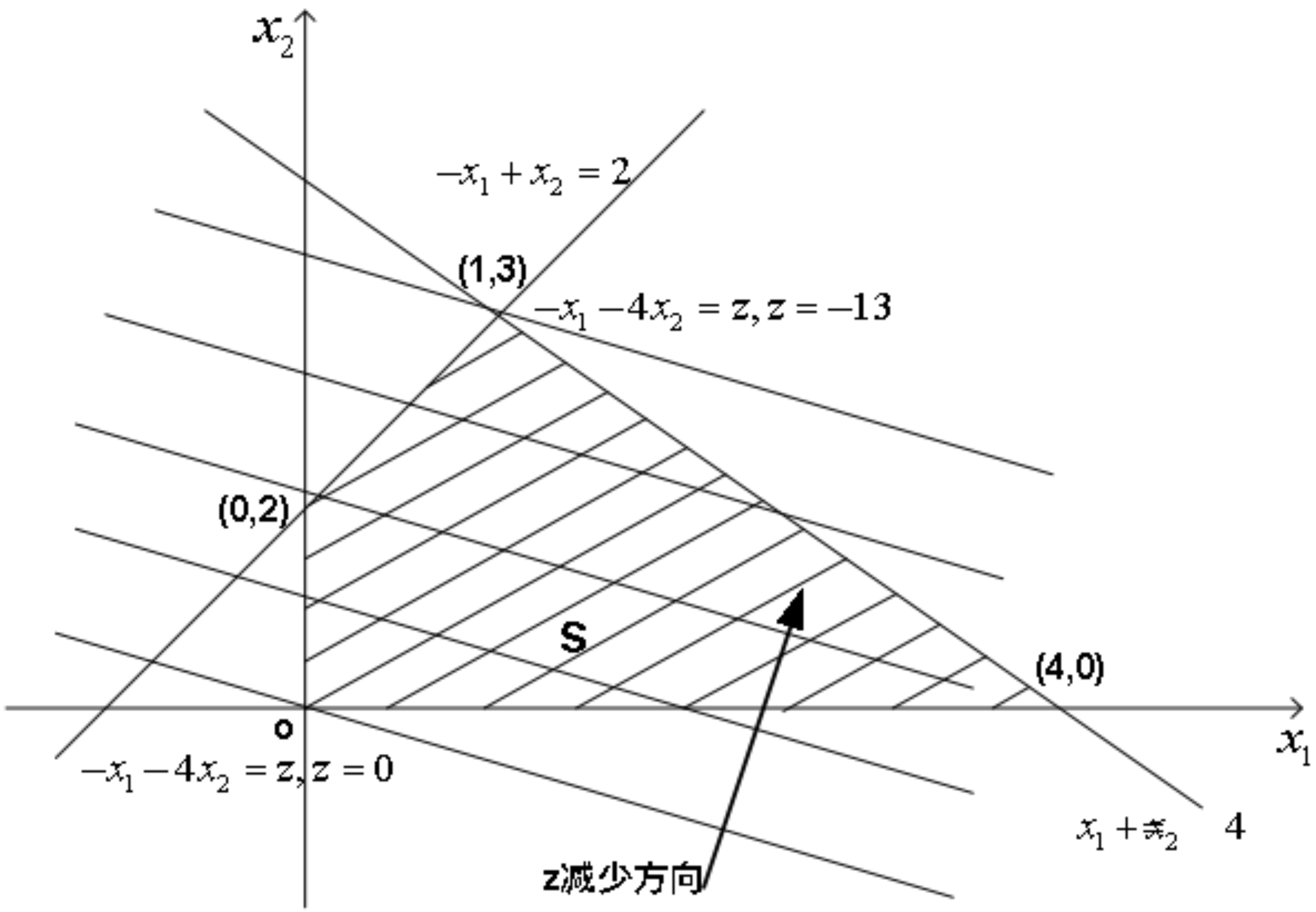
解: （1）以 x_1, x_2 为坐标轴画出直角坐标系；

（2）分别画出 $x_1 + x_2 = 4$，$-x_1 + x_2 = 2$，$x_1 = 0$，$x_2 = 0$ 四条直线，则该问题的可行域为这四条直线包围的内部区域 s。

线性规划

（3）目标函数的等值线方程为 $-x_1 - 4x_2 = z$ 。因为要找的最优解在可行域内使目标函数具有最小值，所以让等值线 $-x_1 - 4x_2 = z$ 沿 z 减小的方向在可行域内尽量平行移动，直到图中 $x_1 = 1, x_2 = 3$ 的位置，如果再移动就移出了可行域 s。于是，点（1，3）即为问题的最优解，目标函数的最优值为－13。

线性规划



线性规划

- **课下大家查一下如何采用图解法来优化一个二元线性规划问题。**
- **作业:**

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 40x_1 + 90x_2 \\
s.t. \quad & 9x_1 + 7x_2 \le 56 \\
& 7x_1 + 20x_2 \le 70 \\
& x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

整数规划

整数规划

许多实际问题的求解中，都要求部分甚至全部决策变量取整数值，如1台设备、5个人等，这类数学规划问题称为整数规划，其中，要求全部决策变量都必须取整数值的称为**纯整数规划**；部分决策变量取整数值的称为**混合整数规划**。有时，要求决策变量为只能取0或1的逻辑变量，则称为0－1规划。

整数规划

例 1 某厂生产 A_1 和 A_2 两种产品，需要经过 B_1、B_2、B_3 三道工序加工。单件工时和利润以及各工序每周工时定额见表 2-1。问工厂应如何安排生产才能使总利润最大?

表: 工厂加工条件与利润

	B1	B2	B3	利润（元/件）
A1	0.3	0.2	0.3	25
A2	0.7	0.1	0.5	40
工时（H/周）	250	100	150	

整数规划

解 设工厂每周生产 A_1 产品 x_1 件，A_2 产品 x_2 件。则按工时定额要求，对 B_1 工序来说，有

$$0.3x_1 + 0.7x_2 \le 250$$

同理，对于 B_2 工序和 B_3 工序，有

$$0.2x_1 + 0.1x_2 \le 100$$

和

$$0.2x_1 + 0.5x_2 \le 150$$

另外，由于 x_1 为 A_1 的件数，因此 $x_1 \ge 0$ 且只能取整数；同样，$x_2 \ge 0$ 且只能取整数。

整数规划

按表 1 的最后一栏的利润系数，生产 x_1 件 A 和 x_2 件 A 所能获取的总利润为 $25x_1+40x_2$，因此，该问题的数学模型为：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 25x_1+40x_2 \\
s.t. \quad & 0.3x_1+0.7x_2 \le 250 \\
& 0.2x_1+0.1x_2 \le 100 \\
& 0.2x_1+0.5x_2 \le 150 \\
& x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0 \text{ 且取整数}
\end{aligned}
$$

这是一个纯整数规划问题。

整数规划

例 2 背包问题：一个经典的 0-1 规划问题

一个背包的总容积为 V，现要在 n 种物品中选装。设物品 j 的重量为 w_j，体积为 $v_j, j=1,2,\cdots n$。问如何装包，使得既不超过背包的容积，又使装的总重量最大。这一问题有广泛的应用背景，如装集装箱、装船、装车等。

整数规划

解　　设针对于物品 j，变量

$$x_j=\begin{cases}1 & \text{物品}j\text{被装入背包}\\ 0 & \text{物品}j\text{未装入背包}\end{cases}$$ **j=1,2,　……n**

则所有被选装物品的总体积为 $\sum_{j=1}^{n} v_j x_j$，总重量为 $\sum_{j=1}^{n} w_j x_j$，该问题的数学模型为：

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} v_j x_j \le V$$

$$x_j = 0,1,\ j = 1,2,\cdots n$$

这是一个 0－1 规划问题。

整数规划

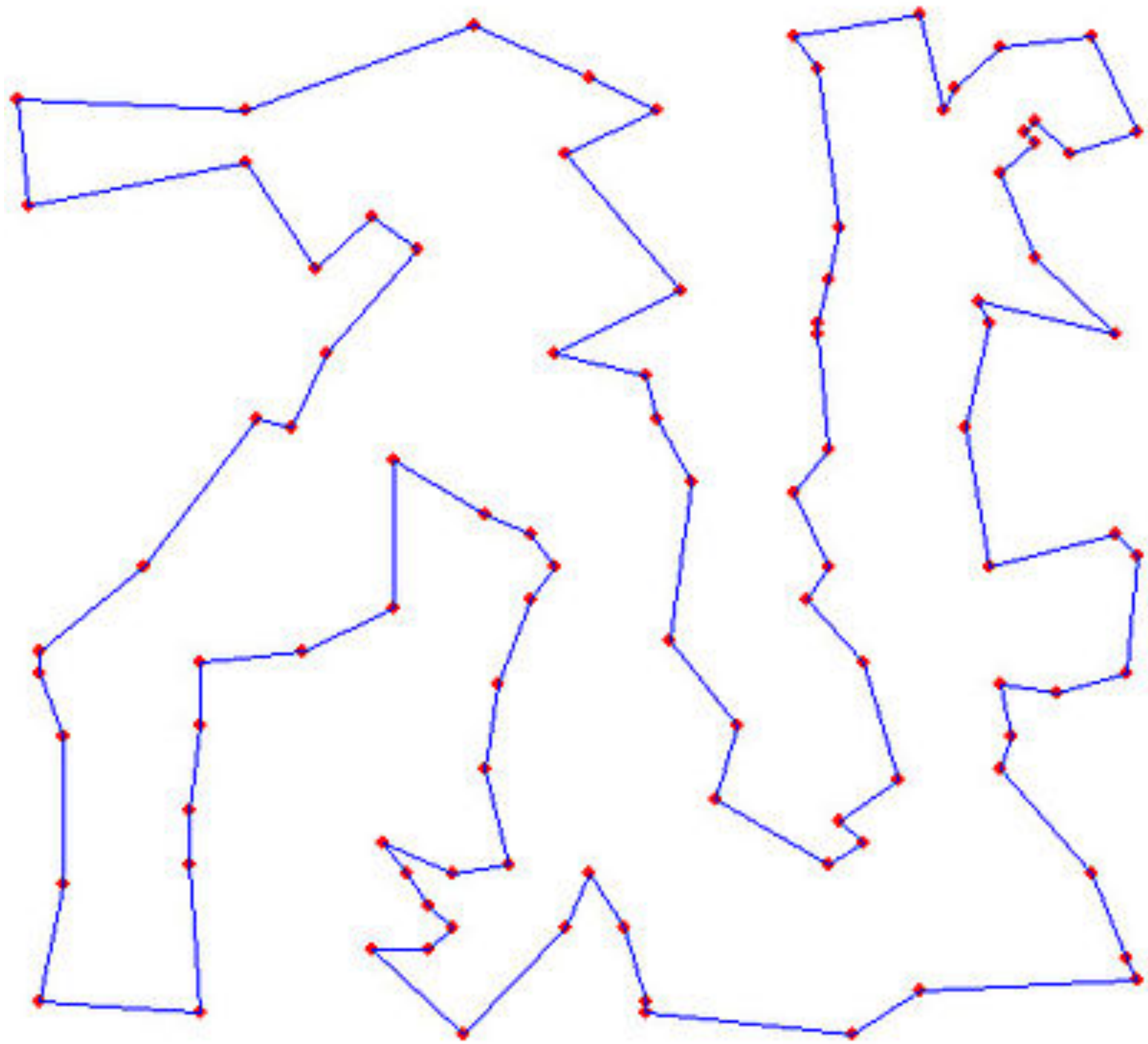
对于IP问题的求解，常有两种直观的推断。第一，利用计算机进行各种方案的穷举比较总能得到最好的方案。然而，这样的穷举比较方法，当问题规模较大时，是不可行的。例如旅行商（TSP）问题，当n=30时（29！），以现有的计算机运行速度，穷举比较约需两百万年！这种现象称为“组合爆炸”。更何况对于混合整数规划问题，若干变量的取值选择本来就是无穷多个。

现有的计算机运算速度

2016年11月11日，国际TOP500组织公布最新全球超级计算机500强排行榜榜单，中科大研制的“神威·太湖之光”，其1分钟的计算能力，相当于全球70多亿人同时用计算器不间断计算32年。以每秒12.5亿亿次/秒（e16)次的浮点运算速度，成为全球最快的超级计算机。

一年：3.11e7秒。

旅行商问题



整数规划

第二，先放弃变量的整数性要求，解相应线性规划问题,然后对线性规划问题的最优解进行“四舍五入”取整数作为整数规划的解。这种做法在一般情况下是不成功的，线性规划解的整数近似点有时根本不是相应整数规划问题的可行解！既便是整数规划问题的可行解，也未必恰好是最优解。

整数规划

例如，考虑如下整数规划问题：

$$\max \quad 3x_1 + 13x_2$$

$$s.t. \quad 2x_1 + 9x_2 \le 40$$

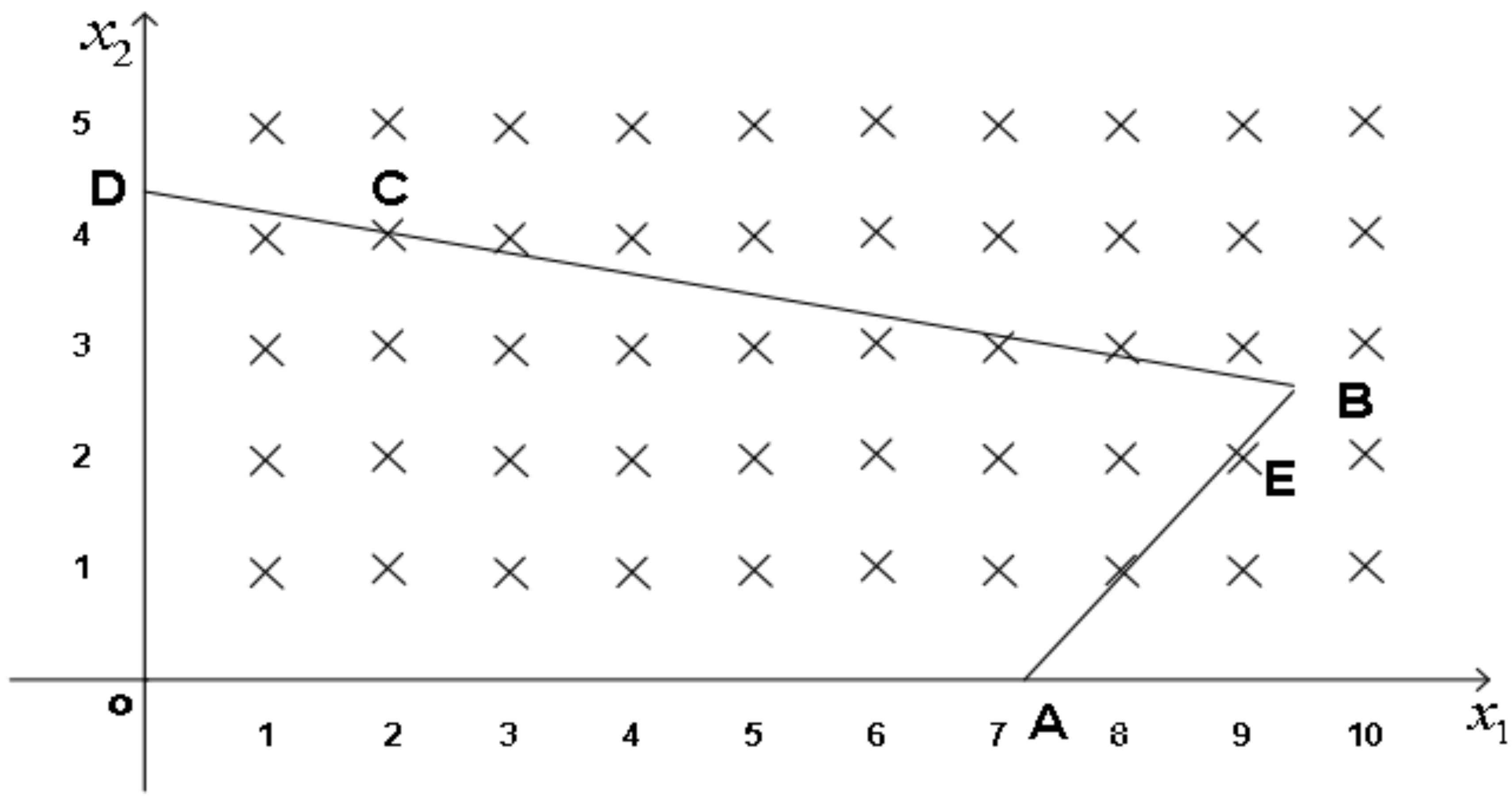
$$11x_1 - 8x_2 \le 82$$

$$x_1 \ge 0，\ x_2 \ge 0 \text{ 且取整数}$$

整数规划

定义域为多边形 OABD 内的整点（包括多边形边界上），其最优解为 c 点（$x_1=2, x_2=4$）。放弃整数要求后相应线性规划的可行域为多边形 OABD 内的所有点（包括多边形边界上），其最优解为 B 点（$x_1=9.2, x_2=2.4$）。对 B 点进行"四舍五入"后的 E 点（$x_1=9, x_2=2$）根本不是整数规划的可行解，甚至 B点周围的四个点都不是整数规划的可行解。

整数规划



整数规划的“四舍五入”求解

整数规划–分支定界

目前，常用的求解IP的方法是分枝定界法和割平面法。

设有最大化的IP问题A，与它相应的LP问题为B。从解问题B开始，若B的最优解符合A中的整数条件，则A的最优解即为B的最优解；若B的最优解不符合A的整数条件，则B的最优解对应的最优值必是A的最优值 的上界，而A的某任一可行解的目标函数值将是A的一个下界 。分枝定界就是不断将B的可行域分成子区域-分枝，并在每个子区域中确定A的上界 和下界 的方法。逐步减小和增大，最终得到 。

整数规划–分支定界

例　求解问题

$$\max \quad 40x_1 + 90x_2$$

$$s.t. \quad 9x_1 + 7x_2 \le 56$$

$$7x_1 + 20x_2 \le 70$$

$x_1 \ge 0$，$x_2 \ge 0$ 且取整数

整数规划

解 记上述原问题为 A，先考虑 A中去掉整数约束条件后的线性规划问题 B

$$\max \quad 40x_1 + 90x_2$$

$$s.t. \quad 9x_1 + 7x_2 \le 56$$

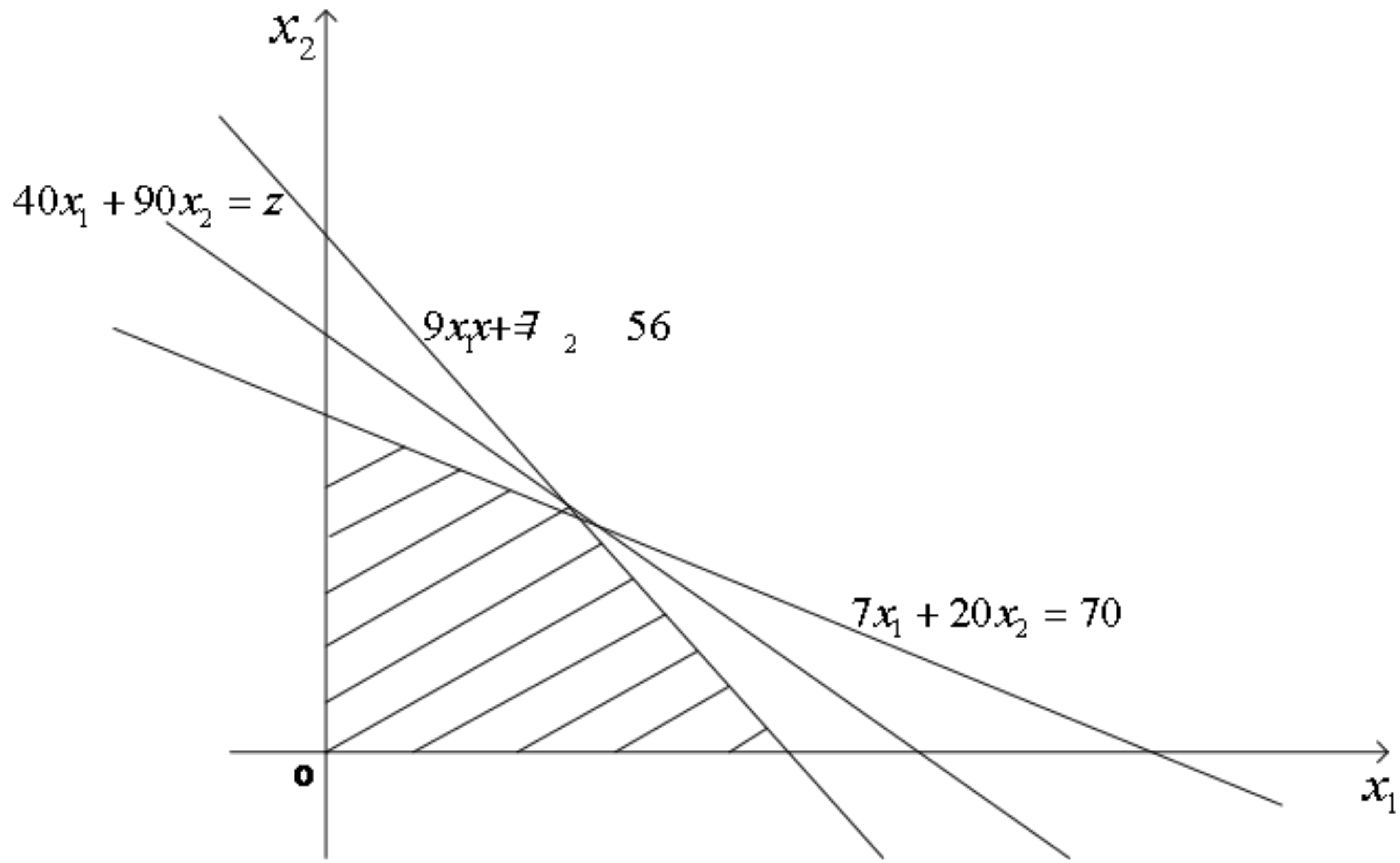
$$7x_1 + 20x_2 \le 70$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

整数规划

求解B，得其最优解$x_1=4.81$，$x_2=1.82$,$z_0=356$.它不符合整数条件，则 为问题A的最优值的上界，即$\bar{Z}=z_0$，在图的阴影可行域中任取一个整数可行解，如O点 ,则对应该点（0，0）的值必为A的一个下界，记为 $\underline{Z}=0$，所以$0\leq Z^*\leq 356$,也就是说，A的最优值必大于A的任意可行解值且小于B的最优值。

整数规划–分支定界

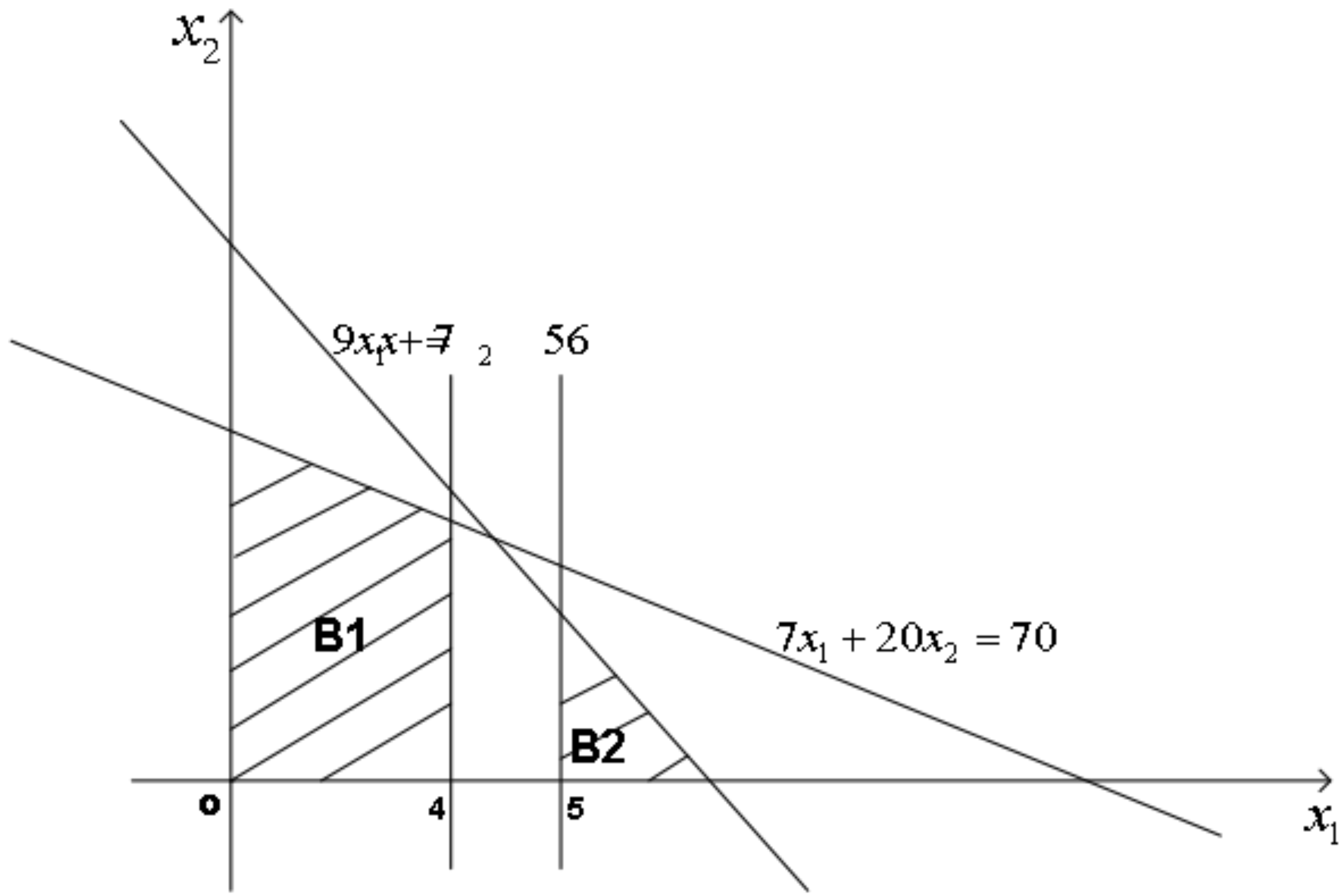


问题 B的图解分析

整数规划

分枝定界方法的第二步，首先注意B中任一个非整数变量的解，如X1。在问题B中最优解为X1=4.81,于是对B通过增加两个约束条件X1<=4和X1>=5可将B分解为两个子问题B_1和B_2，即将B的可行域在X1=4.81前后分割为两个子可行域（称为分枝），如图所示。

整数规划



问题 B 的分枝

整数规划

对应的 B_1 和 B_2 分别为：

B_1:

$$\max \quad 40x_1 + 90x_2$$

$$s.t. \quad 9x_1 + 7x_2 \le 56$$

$$7x_1 + 20x_2 \le 70$$

$$0 \le x_1 \le 4$$

$$x_2 \ge 0$$

整数规划

B_2:

$$\max \quad 40x_1 + 90x_2$$

$$s.t. \quad 9x_1 + 7x_2 \le 56$$

$$7x_1 + 20x_2 \le 70$$

$$5 \le x_1$$

$$x_2 \ge 0$$

整数规划

将 B分枝为 B_1和 B_2尽管影响了 B的求解，但却不影响问题 A的求解，因为被割去的部分（图中界于 $x_1=4$ 和 $x_1=5$ 之间的垂直条状域）是 x_1 取非整数的部分。这称为第一次迭代，得到最优解为：B_1（$z_1=349, x_1=4, x_2=2.1$）和 B_2($z_2=341, x_1=5, x_2=1.57$)。显然并未得到全部变量都是整数的解。因 $z_1>z_2$，故将 $\bar{Z}$ 改为349，即对于 A的整数最优解值 Z^*，应有 $0\le Z^* \le 349$.

整数规划

继续对 B_1 和 B_2 进行分解。因 $z_1 > z_2$，故先分解 B_1 为两枝。此次沿 x_2 方向分解，增加约束条件 $x_2 \le 2$，称为问题 B_3；增加约束条件 $x_2 \ge 3$，称为问题 B_4。在图中舍去 $x_2 > 2$ 与 $x_2 < 3$ 之间的可行域，再进行第二次迭代。

整数规划

B_3:

$$\max \quad 40x_1 + 90x_2$$

$$s.t. \quad 9x_1 + 7x_2 \le 56$$

$$7x_1 + 20x_2 \le 70$$

$$0 \le x_1 \le 4$$

$$0 \le x_2 \le 2$$

整数规划

B_4:

$$\max \quad 40x_1 + 90x_2$$

$$s.t. \quad 9x_1 + 7x_2 \le 56$$

$$7x_1 + 20x_2 \le 70$$

$$0 \le x_1 \le 4$$

$$3 \le x_2$$

整数规划

先求解 B_3，其最优解为 $z_3=340, x_1=4, x_2=2$。由于 B_3 的最优解都为整数，因此（4，2）为 A 的一个可行解，而 A 的最优解值应不小于 z_3，因此 z_3 应设为 Z^* 新的下限，$\underline{Z}=z_3=340$。再解 B_4，得其最优解值为 $z_4=327$，即 B_4 中的所有目标函数值（包括整数点也包括非整数点）皆小于此时 Z^* 的下限，所以再分解 B_4 已无必要。对 B_3、B_4 分析的结果，找到了 Z^* 一个新的下限 z_3，而原先位于 B_1 中 Z^* 的上限 $\bar{Z}=349$ 亦不复存在。回头再观察 B_2，其最优值为 $z_2=341$，因此可定 z^* 新的上限为 $\bar{Z}=z_2=341$，即 $340 \le Z^* \le 341$。

整数规划

既然 B_1 中已不存在 z^* 的上限，于是分解 B_2 得问题 B_5（增加约束条件 $x_2 \le 1$）和 B_6（增加 $x_2 \ge 2$）

B_5:

$$\max \quad 40x_1 + 90x_2$$

$$s.t. \quad 9x_1 + 7x_2 \le 56$$

$$7x_1 + 20x_2 \le 70$$

$$5 \le x_1$$

$$0 \le x_2 \le 1$$

整数规划

B_6:

$$\max \quad 40x_1 + 90x_2$$

$$s.t. \quad 9x_1 + 7x_2 \le 56$$

$$7x_1 + 20x_2 \le 70$$

$$5 \le x_1$$

$$2 \le x_2$$

整数规划

B_5 的最优解 $z_5=308, x_1=5.44, x_2=1$，B_6 无可行解。由于 $z_5<\underline{Z}=340$，因此 Z^* 不在 B_5 和 B_6 中，可以断定 $z^*=\underline{Z}=z_3=340$，而对应于 Z^* 的 A 最优解为 B_3 中的 $x_1=4, x_2=2$。

上述求解过程是通过反复的分枝（分解可行域）、定界（确定 z^* 的上界 $\bar{z}$ 和下界 $\underline{z}$）、剪枝（剪除最优解值小于下界的可行域）而完成的，并且正是由于该方法大面积剪除无最优整数解的区域，因此计算效率比穷举法高得多。

作业：
用分支定界法求解：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s. t.} \quad & 5x_1 + 7x_2 \leqslant 35 \\
& 4x_1 + 9x_2 \leqslant 36 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0 \text{ 且为整数}
\end{aligned}
$$

非线性规划

非线性规划

如果目标函数或约束条件方程中存在任何非线性因子，则问题为非线性规划。非线性规划在工程、军事、经济等许多领域都得到广泛的应用。

非线性规划

例　设平面上有 m个点，找覆盖这 m个点的最小圆盘。

解　设 m个点为 $p_i, i=1,2,\cdots m$，则平面上任一点 x 到这 m个点的距离最大者满足

$$f(x)=\max_{1\le i\le m}\{\|x-p_i\|\}$$

则以 x 为圆心，$f(x)$ 为半径的圆盘必覆盖这 m个点，于是问题转化为求解最小半径的圆盘问题

$$\min \quad \max_{1\le i\le m}\{\|x-p_i\|\}$$

这是一个无约束的非线性规划问题。

非线性规划

例 设有 n个商店，其位置和对货物的需求都是已知的，货物由 m个仓库提供，仓库容量已知。决定这 m个仓库建于何处，使仓库提供各商店货物时的运量与路程之积的总和最小。

解 设(x_{ii}, y)为仓库的平面位置，c_i 为仓库的容量，(a_{jj}, b)为各商店的位置，r_j 为各商店对货物的需求量，$i=1,2,\cdots m, j=1,2,\cdots n$ 。再设 w_{ij} 为从第 i 个仓库到第 j 个商店的运量，$i=1,2,\cdots m, j=1,2,\cdots n$ ，则运量与路径之积的总和为

$$\sum_{ij}^{m}\sum_{11}^{n} w_{ij}\sqrt{(x_i-a_j)^2+(y_i-b_j)^2}$$

非线性规划

于是该问题的数学模型为

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\sqrt{(x_i-a_j)^2+(y_i-b_j)^2}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \le c_i, i=1,2,\cdots m$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_{ij} = r_i, j=1,2,\cdots n$$

$$w_{ij} \ge 0, i=1,2,\cdots m, j=1,2,\cdots n$$

其中，(x_i, y_i)和w_{ij}都是决策变量，$i=1,2,\cdots m, j=1,2,\cdots n$。这是一个有约束的非线性规划问题。

非线性规划

非线性规划的一般形式为

$$\min \quad f(x)$$

$$s.t. \quad \begin{aligned} & g_i(x) \geq 0, i = 1,2,\cdots m \\ & h_j(x) = 0, j = 1,2,\cdots l \end{aligned}$$

式中，目标函数$f(x)$，不等式约束条件$g_i(x)$和等式约束条件$h_j(x)$至少一个是非线性函数。当不存在约束条件，即决策变量x可取任意点时，

$$\min \quad f(x)$$

称为无约束非线性规划问题。

非线性规划

非线性规划的约束条件有时写成域约束形式，令 $S=\{x\mid g_i(x)\ge 0, i=1,2,\cdots m; h_j(x)=0, j=1,2,\cdots l\}$，称 S 为可行域，S 中的点为可行点，上述约束非线性规划问题等价于

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ s.t. & x\in S \end{array}$$

而无约束非线性规划问题等价于

$$\min \quad f(x), x\in \mathrm{R}^n$$

R^n 是 n 维欧氏空间。

非线性规划(NLP)

NLP问题的求解一般通过两种途径来实现，一种是基于目标函数和约束条件的函数分析性质直接加以求解的解析解法，多适用于具有良好函数解析性质的少数NLP问题；另一种是基于循环迭代算法的数值求解法，适用于大部分NLP问题。

非线性规划

全局最优解

设 $f(x)$ 为目标函数，S为可行域，$x^* \in S$。若对每一个 $x \in S$ 都有 $f(x) \geq f(x^*)$，则称 x^* 为极小化问题的全局最优解（最小）。

局部最优解

设 $f(x)$ 为目标函数，S为可行域，$x^* \in S$。若存在 x^* 的一个 ε 邻域 S_ε，使得对每一个 $x \in S_\varepsilon$ 都有 $f(x) \geq f(x^*)$，则称 x^* 为极小化问题的局部最优解（最小）。

凸规划是非线性规划中一种重要的特殊情况，具有许多良好的解析性质，可以用解析解法求解。

非线性规划

设 S 为 R^n 中的一个集合，若对 S 中任意两点，连接它们的线段仍属于 S，即对 S 中任意两点 x_1, x_2 及每个实数 $\lambda \in [0,1]$，都有

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in S$$

则称 S 为凸集，$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ 称为 x_1 和 x_2 的凸组合

非线性规划

设 S为 R^n 中的非空凸集， f 是定义在 S上的实函数。如果对任意的 $x_1, x_2 \in$ S 及每个数λ ∈ （0， 1），都有 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ ，则称 f 为 S 上凸函数。如果对任意相异的 $x_1, x_2 \in$ S及每个数λ ∈ (0, 1)，都有 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ ，则称 f 为 S上的严格凸函数。如果 $-f$ 为 S上的凸函数，则称 f 为 S上的凹函数。

非线性规划–迭代法

解析法求解非线性规划问题，不论是无约束还是有约束，一般均只能求解低维空间中较为简单的问题，对于较复杂的非线性规划问题，更有效的是数值迭代算法。

数值迭代法的基本思想是：为了求函数$f(x)$的最优解，首先给定一个初始估计$x^{(0)}$，然后按某种规则（即算法）找出比$x^{(0)}$再好的解 $x^{(1)}$（对极小值问题，$f(x^{(1)})<f(x^{(0)})$；对极大值问题，$f(x^{(1)})>f(x^{(0)})$，再按此种规则找出比$x^{(1)}$好的解$x^{(2)}$，……。如此循环即可得到一个解序列$\{x^{(k)}\}$。若这个解序列有极限x^*，即

$$\lim_{k\to\infty}\left\|x^{(k)}-x^*\right\|=0$$ 则称它收敛于x^*。

非线性规划

现假定已迭代到第 k 个点$x^{(k)}$，若从$x^{(k)}$出发沿任何方向移动都无法找到一个更好的点，则$x^{(k)}$为局部极值点，迭代过程停止；若从$x^{(k)}$出发至少存在一个方向可找到更好的点，则可选定该方向$p^{(k)}$，沿此方向前进适当一步，得到下一个迭代点$x^{(k+1)}$，且$f(x^{(k+1)})$优于$f(x^{(k)})$。$x^{(k+1)}$可以按下式构造

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k p^{(k)}$$

其中$p^{(k)}$称为搜索方向，λ_k为步长。

非线性规划

由于计算机的字长有限，这种迭代一般很难得到绝对的精确解，当迭代过程满足所要求的精度时即可停止迭代，常用的迭代停止条件有：

（1）根据相继两次迭代的绝对误差

$$\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|<\varepsilon_1,\left\|f(x^{(k+1)})-f(x^{(k)})\right\|<\varepsilon_2$$

（2）根据相继两次迭代的相对误差

$$\frac{\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|}{\left\|x^{(k)}\right\|}<\varepsilon_3,\frac{\left\|f(x^{(k+1)})-f(x^{(k)})\right\|}{\left\|f(x^{(k)})\right\|}<\varepsilon_4$$

这时要求分母不接近于零。

非线性规划

（3）根据目标函数梯度的模

$$\left\|\nabla f(x^{(k)})\right\| < \varepsilon_5$$

其中，ε 1、ε 2、ε 3、ε 4、ε 5

都是事先规定的迭代允许误差

非线性规划

这样，数值迭代算法可经历以下步骤：

（1）选定初始迭代点 $x^{(o)}$，并令 k=0;

（2）确定搜索方向 $p^{(k)}$；

（3）从 $x^{(k)}$ 出发，沿 $p^{(k)}$ 求步长 λ_k，以产生下一个迭代点 $x^{(k+1)}$；

（4）检查得到的新点 $x^{(k+1)}$ 是否为极值点，或满足一定的停止条件。若是则停止迭代；否则令 k=k+1 转（2）继续迭代。

非线性规划

据上述分析，数值迭代类求解非线性规划问题的关键在于如何确定可行的搜索方向 $p^{(k)}$ 和如何确定沿 $p^{(k)}$ 方向的搜索步长 λ_k，尤其是 $p^{(k)}$ 的确定决定了不同寻优算法的性质和结构。

非线性规划–最速下降法

最速下降法是一类最简单的、仅利用目标函数一阶微分条件（梯度）的迭代算法，其原理是在每次迭代中沿最速下降方向（即负梯度方向）进行搜索，迭代公式为

$$
\begin{aligned}
&x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k p^{(k)} \\
&p^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)}) \\
&\lambda_k : f(x^{(k)} + \lambda_k p^{(k)}) = \min_{\lambda \ge 0} f(x^{(k)} + \lambda p^{(k)})
\end{aligned}
$$

非线性规划–最速下降法流程

(1) 给定初点 $x^{(1)} \in \mathrm{R}^n$ 和允许误差 ε，置 k=1;

(2) 计算搜索方向 $p^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$；

(3) 若 $\left\|\nabla f(x^{(k)})\right\| < \varepsilon$，则停止搜索，否则，从 $x^{(k)}$ 出发沿 $p^{(k)}$ 搜索 λ_k，使得

$$f(x^{(k)} + \lambda_k p^{(k)}) = \min_{\lambda \geq 0} f(x^{(k)} + \lambda p^{(k)})$$

(4) 令 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k p^{(k)}$，置 k=k+1,转(2)。

非线性规划

最速下降法是一种极易实现的算法。从局部看，最速下降方向确是目标函数值下降最快的方向，选择这样的方向进行搜索是有利的，但以全局看，当迭代点接近极值点时，每次迭代移动的步长很小，既使向极值点移近很小的距离，也要经历不少锯齿状的“ 弯路”，因此收敛速度总体上很慢。

非线性规划–广义牛顿法

如果目标函数是二次可微的，则利用其二次可微条件（Hesse 矩阵），就可以得到广义牛顿迭代算法：

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k p^{(k)}$$
$$p^{(k)} = -H^{-1}(x^{(k)})\nabla f(x^{(k)})$$
$$\lambda_k : f(x^{(k)} + \lambda_k p^{(k)}) = \min_{\lambda \geq 0} f(x^{(k)} + \lambda p^{(k)})$$

其基本原理是用一个二次函数局部地逼近 $f(x)$，然后求此近似函数的极小点。式中，$H^{-1}(x^{(k)})$ 是 Hesse 矩阵的逆矩阵。

非线性规划

广义牛顿法的突出优点是收敛很快，但也有两大缺点，一是 Hesse 矩阵的逆 $H^{-1}(x^{(k)})$ 未必每点都存在；二是即使 $H^{-1}(x^{(k)})$ 存在也未必正定，因而牛顿方向不一定是下降方向。为克服这两个缺点，人们提出了拟牛顿法，它设法构造另一个矩阵 $\bar{H}(x^{(k)})$ 直接逼近 $H^{-1}(x^{(k)})$ 而不是用 $H(x^{(k)})$ 求取 $H^{-1}(x^{(k)})$。由于构造 $\bar{H}(x^{(k)})$ 的方法不同，因而有不同的拟牛顿法，例如常用的变尺度法。

非线性规划–共轭梯度法

共轭梯度法是以共轭方向作为搜索方向的一类算法，基本思想是把共轭性与最速下降原理相结合，利用已知点处的梯度构造一组共轭方向，并沿此组方向进行搜索，求出目标函数的极小点。共轭梯度法的迭代公式为：

$$
\begin{aligned}
&x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k p^{(k)} \\
&p^{(k+1)} = -\nabla f(x^{(k+1)}) + \beta_k p^{(k)} \\
&\beta_k = \frac{\left\|\nabla f(x^{(k+1)})\right\|^2}{\left\|\nabla f(x^{(k)})\right\|^2} \\
&\lambda_k : f(x^{(k)} + \lambda_k p^{(k)}) = \min_{\lambda \geq 0} f(x^{(k)} + \lambda p^{(k)})
\end{aligned}
$$