电路原理

信息学院　常青

changqing@ecust.edu.cn

第7章 一二阶电路时域分析

7.1 动态电路方程的列写

电阻电路与动态电路

电阻电路：电路中仅由电阻元件和电源元件构成。**KCL**、**KVL**方程和元件特性均为代数方程。因此描述电路的方程为代数方程。

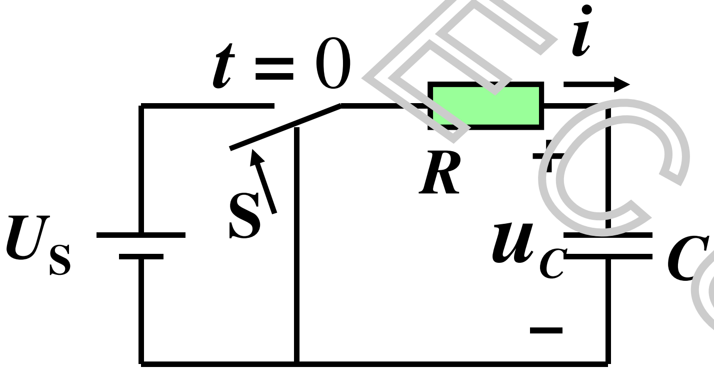
(即时电路)

动态电路：含储能元件$L(M)$、C。**KCL**、**KVL**方程仍为代数方程，而元件方程中含微分或积分形式。因此描述电路的方程为微分方程。

(记忆电路)

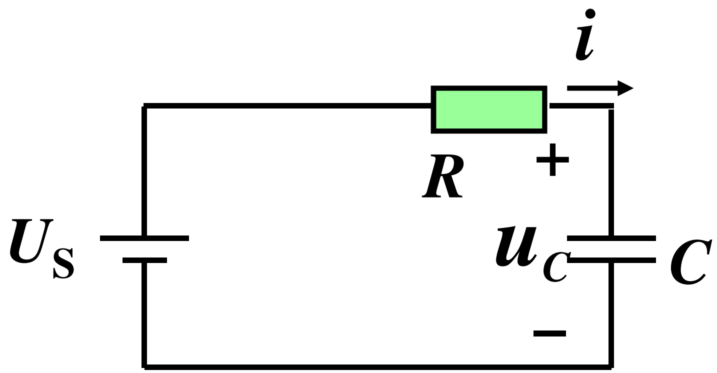
稳态分析

稳定状态



S未动作前

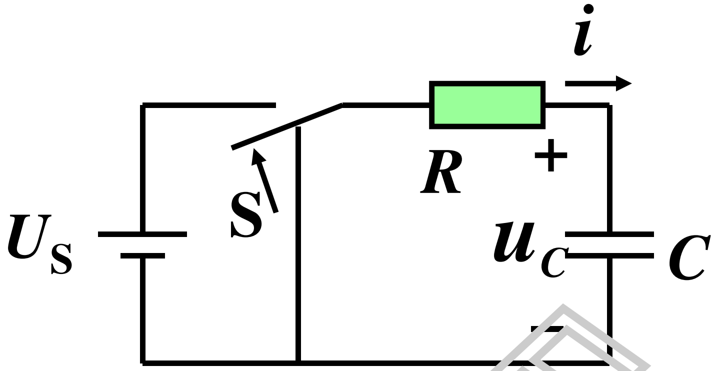
$i=0$， $u_C=0$

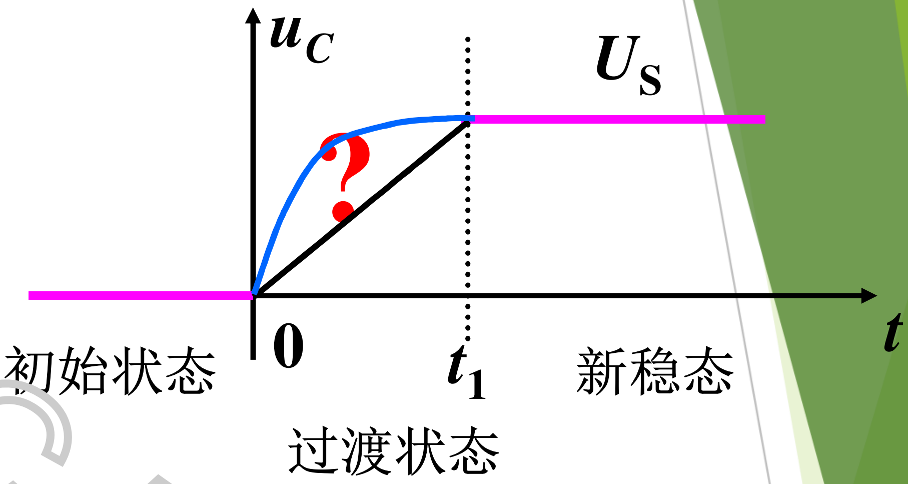


S接通电源后很长时间

$i=0$， $u_C=U_S$

1. 什么是电路的过渡过程





过渡过程： 电路由一个稳态过渡到另一个稳态需要经历的过程。

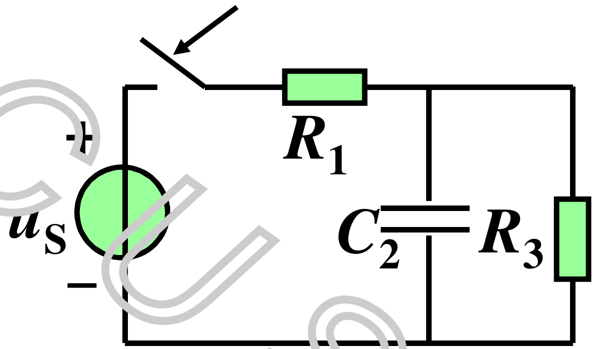
过渡状态（瞬态、暂态）

2. 过渡过程产生的原因

（1）电路内部含有储能元件 *L* 、*M*、 *C*

能量的储存和释放都需要一定的时间来完成。

$$p = \frac{\Delta w}{\Delta t}$$



（2）电路结构发生变化

$$\underbrace{\text{支路接入或断开；\quad 参数变化}}_{\text{换路}}$$

3. 稳态分析和暂态分析的区别

稳　态	暂　态
恒定或周期性激励	任意激励
I_L、U_C 不变	i_L、u_C 随时间变化
换路发生很长时间后	换路刚刚发生
代数方程组描述电路	微分方程组描述电路

动态电路方程的列写

依据：**KCL、KVL**和元件约束。

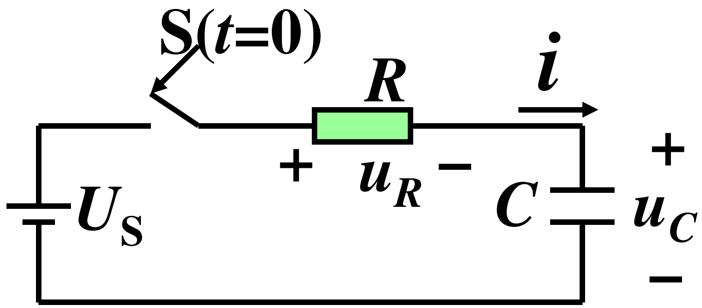
$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L \mathrm{d}t + i_L(t_0)$$

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

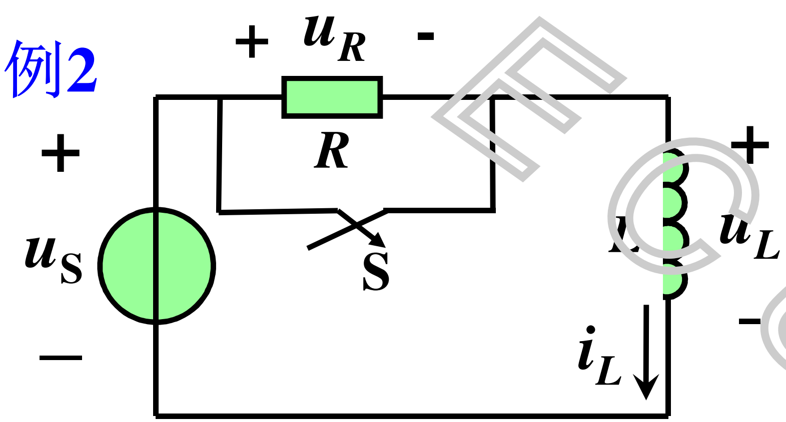
$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C \mathrm{d}t + u_C(t_0)$$

例1



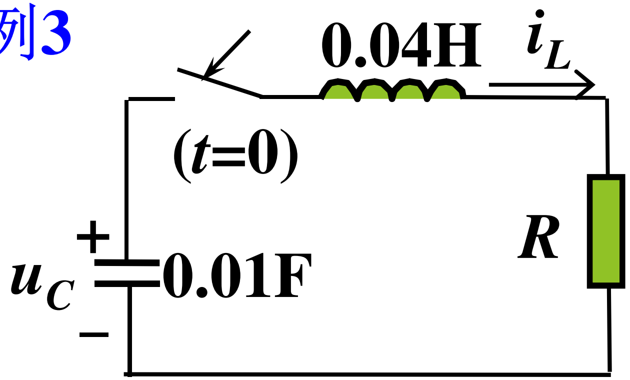
$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

例2



$$Ri_L+L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=u_S$$

例3



$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri_L=u_C$$

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-i_L$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

结论

含有一个动态元件电容或电感的线性电路，其电路方程为一阶线性常微分方程，称一阶电路。

含有二个动态元件的线性电路，其电路方程为二阶线性常微分方程，称二阶电路。

总结

① 描述动态电路的电路方程为微分方程;

② 动态电路方程的阶数通常等于电路中动态元件的个数。

一阶电路 → 一阶电路中只有一个动态元件,描述电路的方程是一阶线性微分方程。

$$a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=e(t)\quad t\geq 0$$

二阶电路 → 二阶电路中有二个动态元件,描述电路的方程是二阶线性微分方程。

$$a_2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=e(t)\quad t\geq 0$$

高阶电路 → 电路中有多个动态元件，描述电路的方程是高阶微分方程。

$$a_n\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=e(t)\quad t\geq 0$$

动态电路分析方法

① 根据KVL、KCL和VCR建立微分方程；

② 求解微分方程

本章采用

时域分析法

- 经典法
- 状态变量法
- 卷积积分
- 数值法

复频域分析法

- 拉普拉斯变换法
- 状态变量法
- 付氏变换

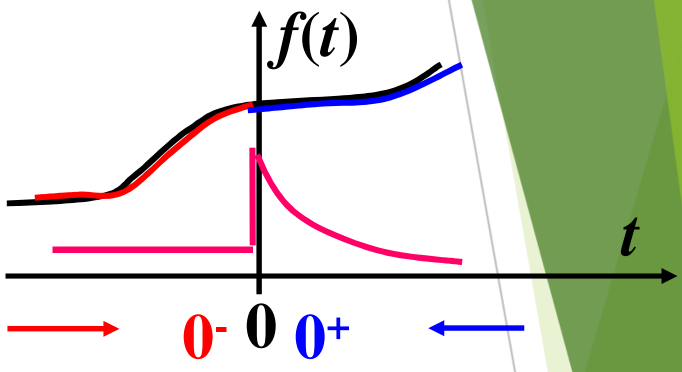
工程中高阶微分方程应用计算机辅助分析求解。

复习常系数线性常微分方程求解过程。

动态电路的初始条件

一、$t=0^+$与$t=0^-$的概念

认为换路在 $t=0$时刻进行



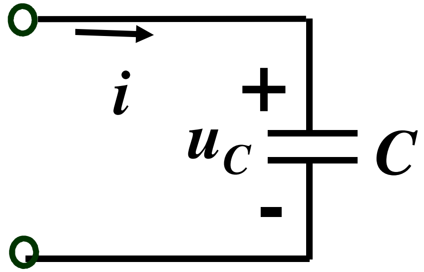
0^- $t=0$ 的换路前一瞬间

0^+ $t=0$ 的换路后一瞬间

$$f(0^-)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} f(t) \qquad f(0^+)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)$$

注意：初始条件为 $t=0^+$时u，i 及其各阶导数的值。

二、换路定则



$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0^-} i(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=u_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$q=C\,u_C$ $\qquad q(t)=q(0^-)+\int_{0^-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$

$t=0^+$时刻 $\qquad u_C(0^+)=u_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i(\xi)\mathrm{d}\xi$

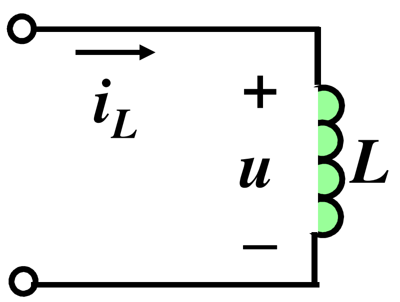
$$q(0^+)=q(0^-)+\int_{0^-}^{0^+} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

当$i(\xi)$为有限值时 $\qquad u_C(0^+)=u_C(0^-)$

$\int_{0^-}^{0^+} i(\xi)\mathrm{d}\xi=0$ $\qquad q(0^+)=q(0^-)$

电荷守恒

换路瞬间，若电容电流保持为有限值，则电容电压（电荷）换路前后保持不变。



$$u = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \qquad i_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$i_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0^-} u(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{L}\int_{0^-}^{t} u(\xi))\mathrm{d}\xi$$

$$= i_L(0^-) + \frac{1}{L}\int_{0^-}^{t} u(\xi)d\xi$$

$$\Psi = Li_L \qquad \Psi = \Psi(0^-) + \int_{0^-}^{t} u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

当u为有限值时 $\quad i_L(0^+) = i_L(0^-)$

$\Psi_L(0^+) = \Psi_L(0^-)$ 磁链守恒

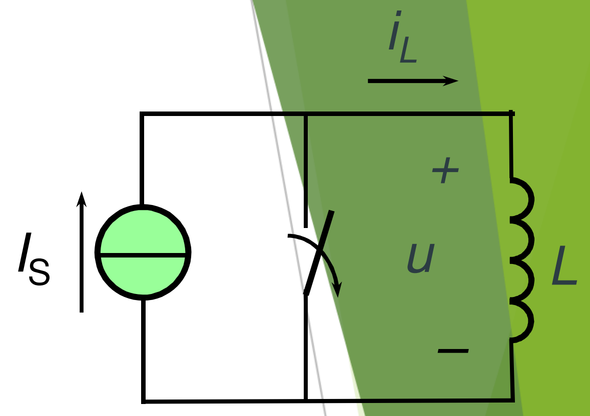
换路瞬间，若电感电压保持为有限值，则电感电流（磁链）换路前后保持不变。

换路定则成立的条件!!!

特例： 当*u*为冲激函数时

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) + \frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\neq i_L(0^-)$$



小结：

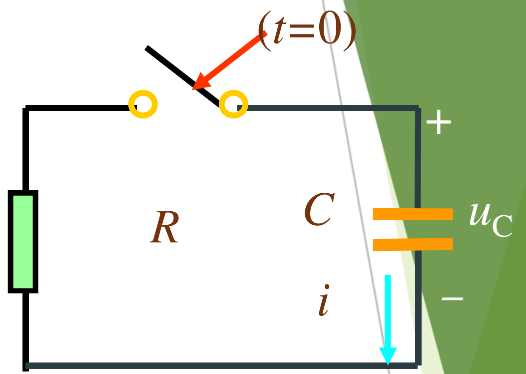
(1) 一般情况下电容电流、电感电压均为有限值，换路定律成立。

换路定律：
$$\begin{cases} q_C(0^+) = q_C(0^-) \\ u_C(0^+) = u_C(0^-) \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi_L(0^+) = \psi_L(0^-) \\ i_L(0^+) = i_L(0^-) \end{cases}$$

(2) 换路定律反映了能量不能跃变.

$$W_C = \frac{1}{2}Cu_C^2 \qquad W_L = \frac{1}{2}Li_L^2$$

例：图示为电容放电电路，电容原带有电压 ,求开关闭合后电容电压随时间的变化。



解

$$Ri + u_c = 0 \quad (t \geq 0)$$

$$\rightarrow \quad RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_c = 0$$

特征根方程：$RCp + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad p = -1/RC$

通解：$u_c(t) = ke^{pt} = ke^{-\frac{t}{RC}}$

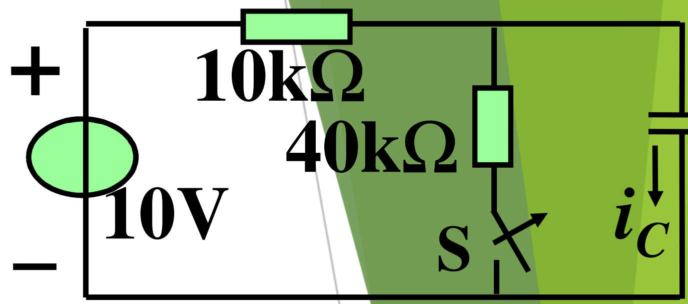
代入初始条件得：$k = U_o \quad \rightarrow \quad u_c(t) = U_o e^{-\frac{t}{RC}}$

在动态电路分析中，初始条件是得到确定解答的必需条件。

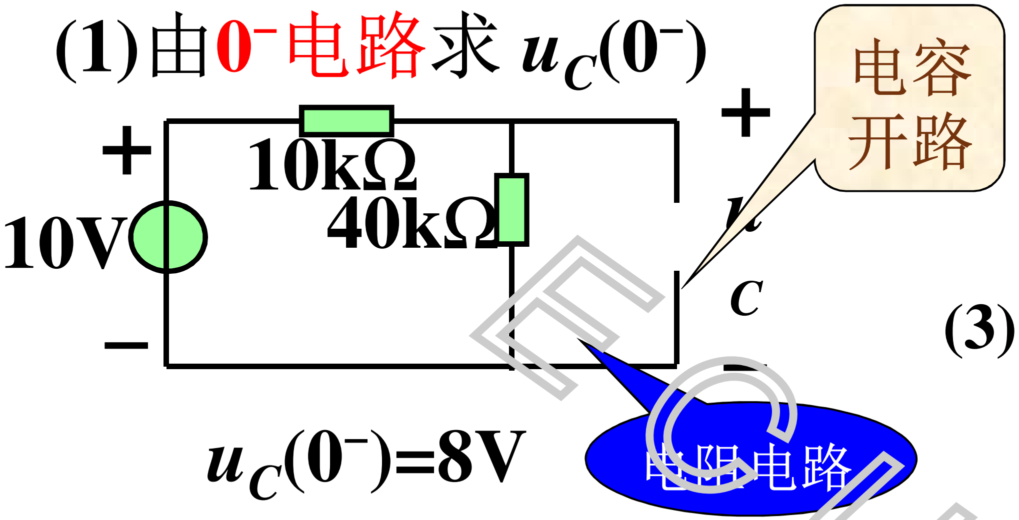
三、电路初始值的确定

电容的初始条件

例1　求 $i_C(0^+)$。



(1) 由0⁻电路求 $u_C(0^-)$

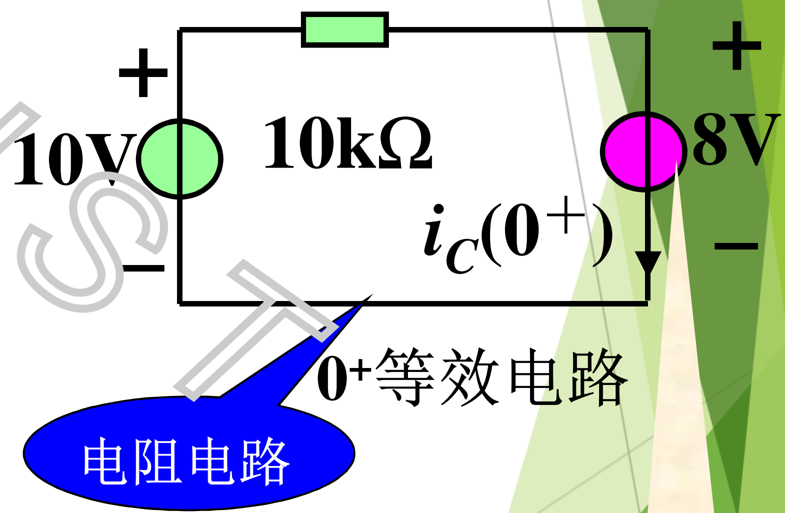


$u_C(0^-)=8\text{V}$

(2) 由换路定律

$$u_C(0^+) = u_C(0^-)=8\text{V}$$

(3) 由0⁺等效电路求 $i_C(0^+)$

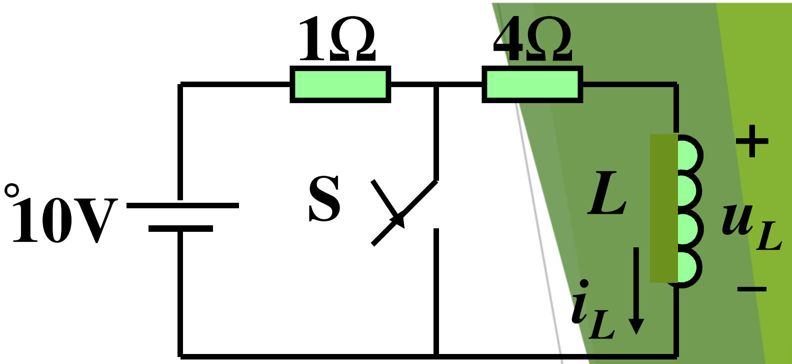


$$i_C(0^+) = \frac{10-8}{10} = 0.2\text{mA}$$

$i_C(0^-)=0 \neq i_C(0^+)$

电感的初始条件

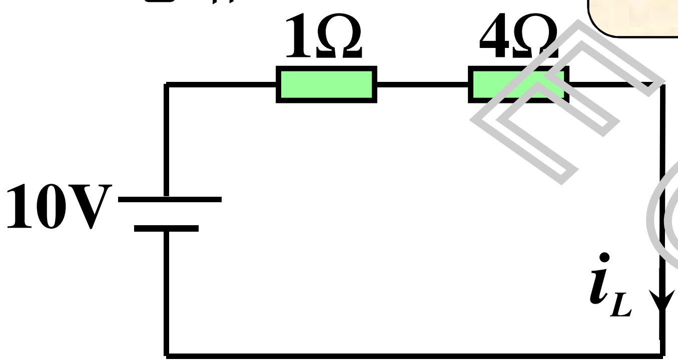
例 2　$t = 0$时闭合开关S，求 $u_L(0^+)$。



(1)由0^-电路求 $i_L(0^-)$

电感短路

0^-电路



电阻电路

(2)应用换路定律：

$i_L(0^+)= i_L(0^-) =2A$

$i_L(0^-) =10/(1+4)=2A$

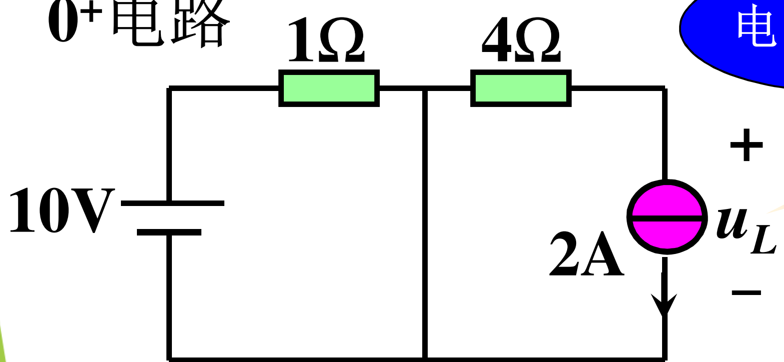
(3)由0^+电路求$u_L(0^-)$

$$u_L(0^+) = -2\times4 = -8V$$

电阻电路

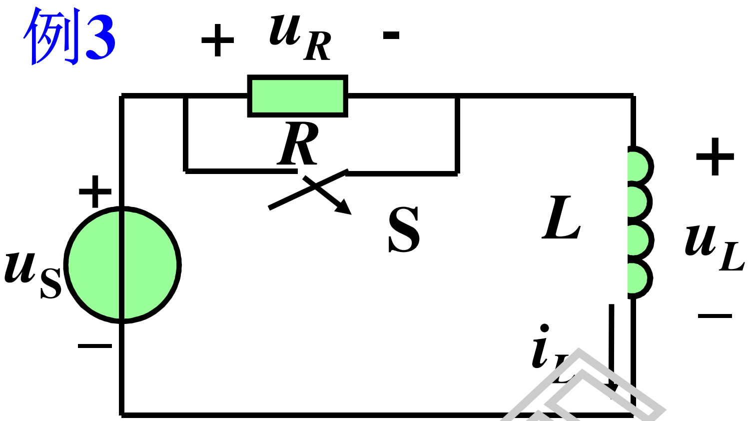
电感用电流源替代

0^+电路



$$\because u_L(0^-) = 0 \quad \therefore u_L(0^+) \cancel{=} 0$$

例3



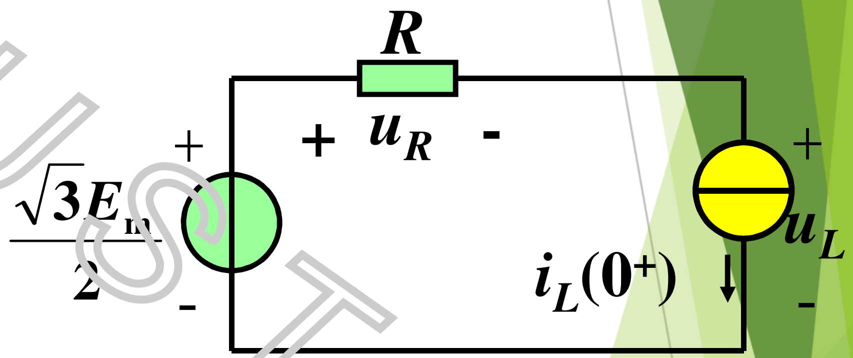
已知 $u_S = E_m \sin(\omega t + 60^\circ)\text{V}$,

$$i_L(0^-) = -\frac{E_m}{2\omega L}.$$

求 $i_L(0^+)$, $u_L(0^+)$, $u_R(0^+)$.

(1) $i_L(0^+) = i_L(0^-) = -\dfrac{E_m}{2\omega L}$

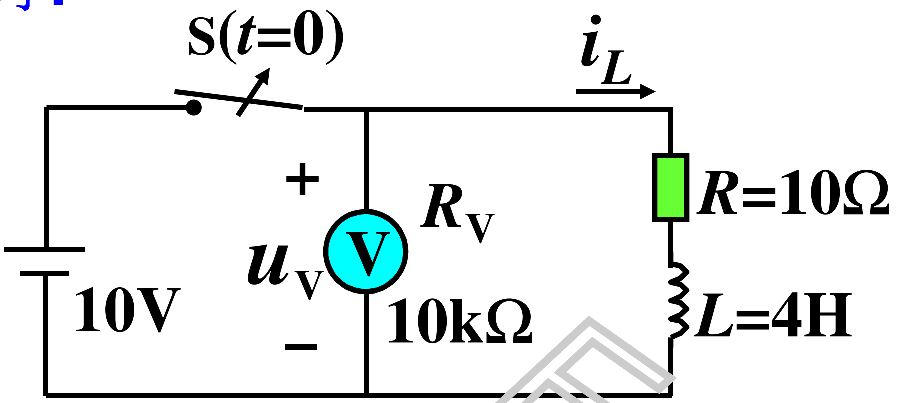
(2) 0^+时刻电路:



$$u_R(0^+) = i_L(0^+)R = \frac{-RE_m}{2\omega L}$$

$$u_L(0^+) = \frac{\sqrt{3}E_m}{2} - \frac{-RE_m}{2\omega L}$$

例4

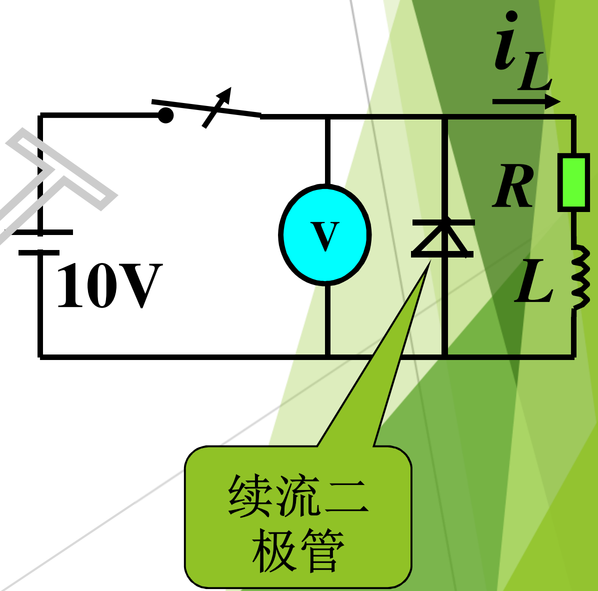


t=0 时刻 S 打开，求 u_V .

电压表量程为 50V.

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\left(R+R_V\right)i=0\quad(t>0)$$

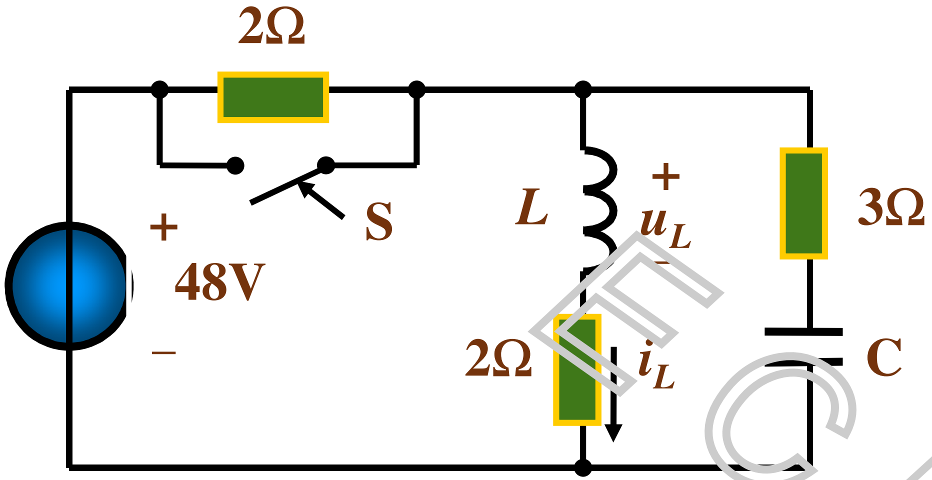
$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=1\text{ A}$$

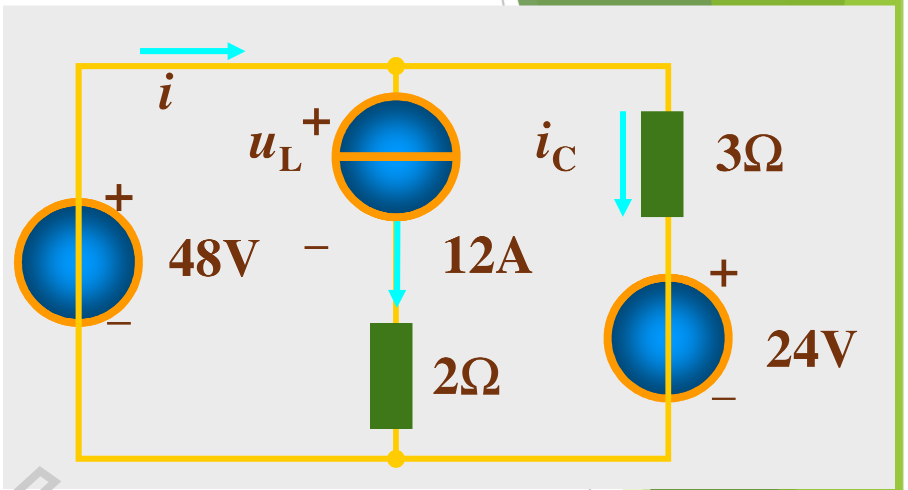


$$u_V(0^+)=-10000\text{V}$$

V 坏了！

例5 求k闭合瞬间各支路电流和电感电压





解 由0_电路得：

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 48/4 = 12\text{A}$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2\times 12 = 24\text{V}$$

由0+电路得：

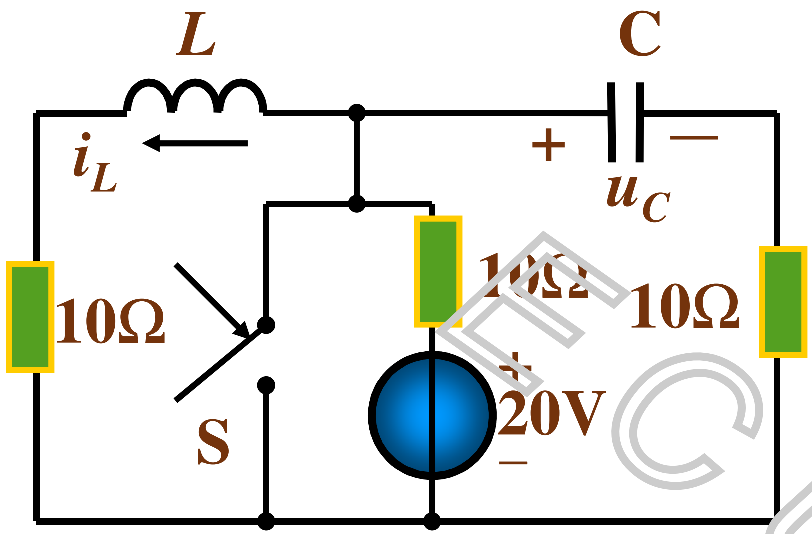
$$i_C(0_+) = (48-24)/3 = 8\text{A}$$

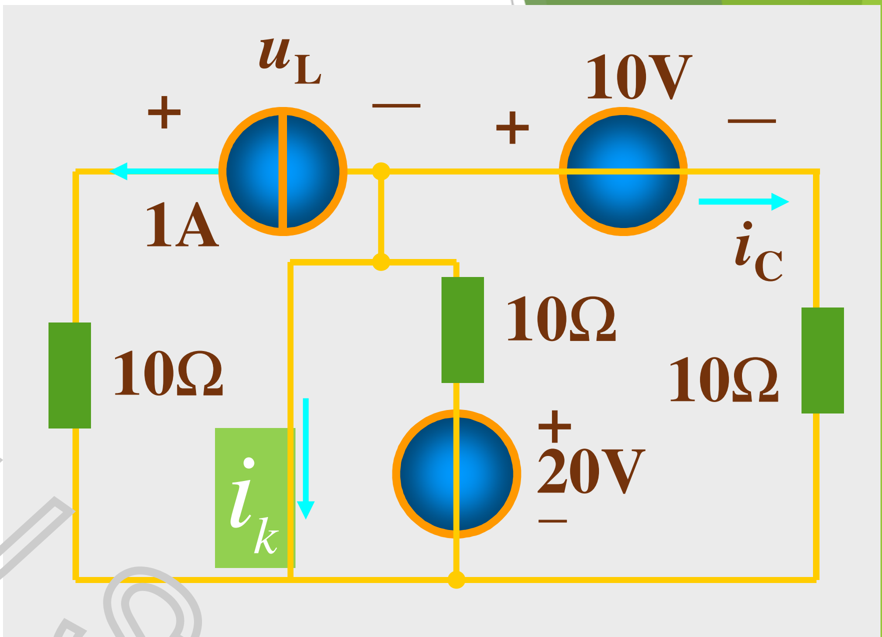
$$i(0_+) = 12 + 8 = 20\text{A}$$

$$u_L(0_+) = 48 - 2\times 12 = 24\text{V}$$

例5

求k闭合瞬间流过它的电流值





解 ① 确定0_值

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{20}{20} = 1\text{A}$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 10\text{V}$$

② 给出0_+等效电路

$$i_k(0_+) = \frac{20}{10} + \frac{10}{10} - 1 = 2\text{A}$$

$$u_L(0_+) = i_L(0_+) \times 10 = 10\text{V}$$

$$i_C(0_+) = -u_C(0_+)/10 = -1\text{A}$$

求初始值的步骤：

1. 由换路前电路（稳定状态）求 $u_C(0^-)$ 和 $i_L(0^-)$。

2. 由换路定律得 $u_C(0^+)$ 和 $i_L(0^+)$。 电阻电路(直流)

3. 画出0^+时刻的等效电路。

（1） 画换路后电路的拓扑结构； 电阻电路

（2） 电容（电感）用电压源（电流源）替代。取0^+时刻值，方向同原假定的电容电压、电感电流方向。

4. 由0^+电路求其它各变量的0^+值。