



第7章 非线性控制系统

7.1 非线性控制系统概述

7.1.1 非线性控制系统特点

(1) 非线性现象的普遍性

非线性是宇宙间的普遍规律

非线性系统的运动形式多样，种类繁多

线性系统只是在特定条件下的近似描述

(2) 非线性系统的定义

含有非线性元件的系统，称之为非线性系统。



7.1.1 非线性控制系统特点(2)

(3) 非线性系统的分类

- 非本质非线性

能够用小偏差线性化方法进行线性化处理的非线性。

- 本质非线性

用小偏差线性化方法不能解决的非线性。



7.1.1 非线性控制系统特点(3)

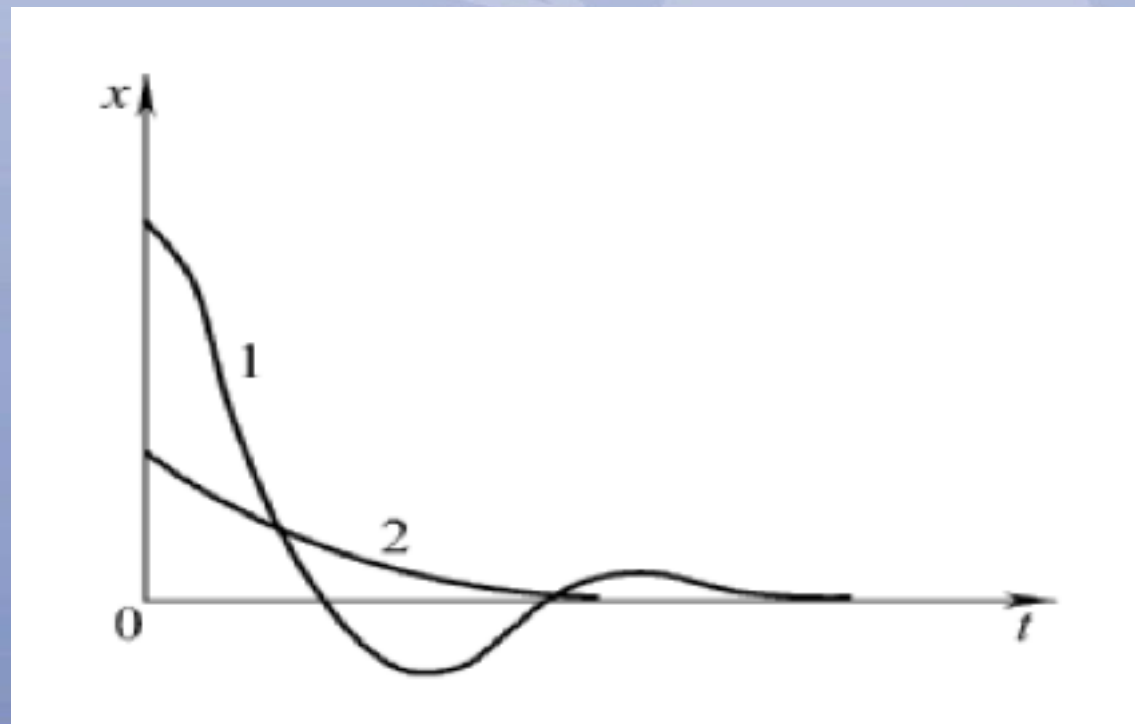
(4) 非线性系统的稳定性

- (a) 非线性系统的稳定性，则除了与系统的结构、参数有关外，很重要的一点是与系统起始偏离的大小密切相连。
- (b) 不能笼统地泛指某个非线性系统稳定与否，而必须明确是在什么条件、什么范围下的稳定性。

7.1.1 非线性控制系统特点(4)

(5) 非线性系统的运动形式

- (a) 非线性系统在小偏离时单调变化，大偏离时很可能就出现振荡。
- (b) 非线性系统的动态响应不服从叠加原理。





7.1.1 非线性控制系统特点(5)

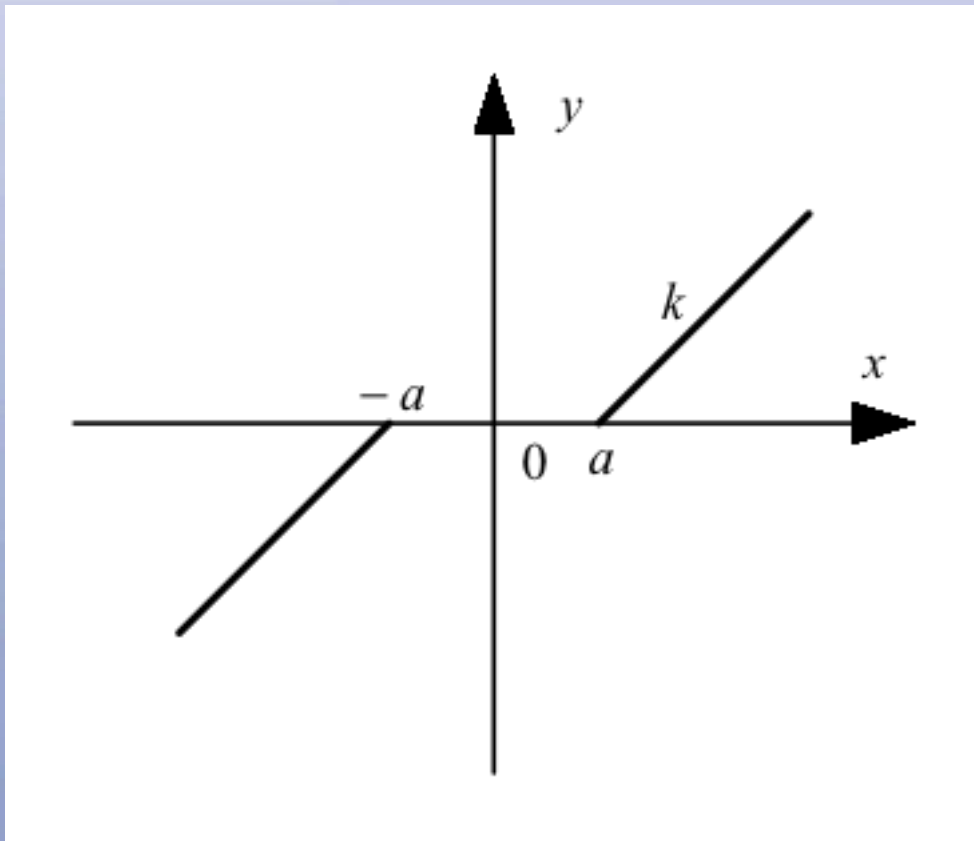
(6) 非线性系统的自振

没有外界周期性变化信号的作用时，系统内产生具有固定振幅和频率的稳定周期运动，简称自振。

非线性系统的自振却在一定范围内能够长期存在，不会由于参数的一些变化而消失。

7.1.2 典型的非线性特性

(1) 死区(不灵敏区)特性



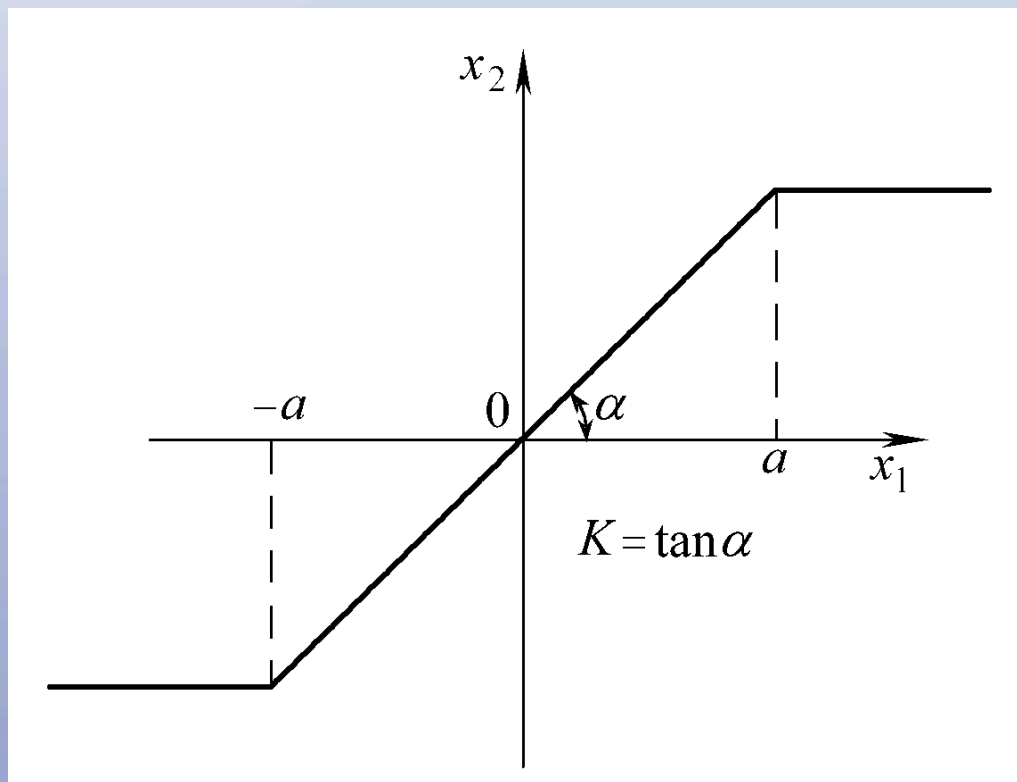
输入信号在 $-a < x < a$ 的区域时，输出信号等于零，该区域称为死区。

$$y = \begin{cases} 0, & |x| \leq a \\ k[x - a \cdot \text{sign}(x)], & |x| > a \end{cases}$$

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

7.1.2 典型的非线性特性(2)

(2) 饱和特性

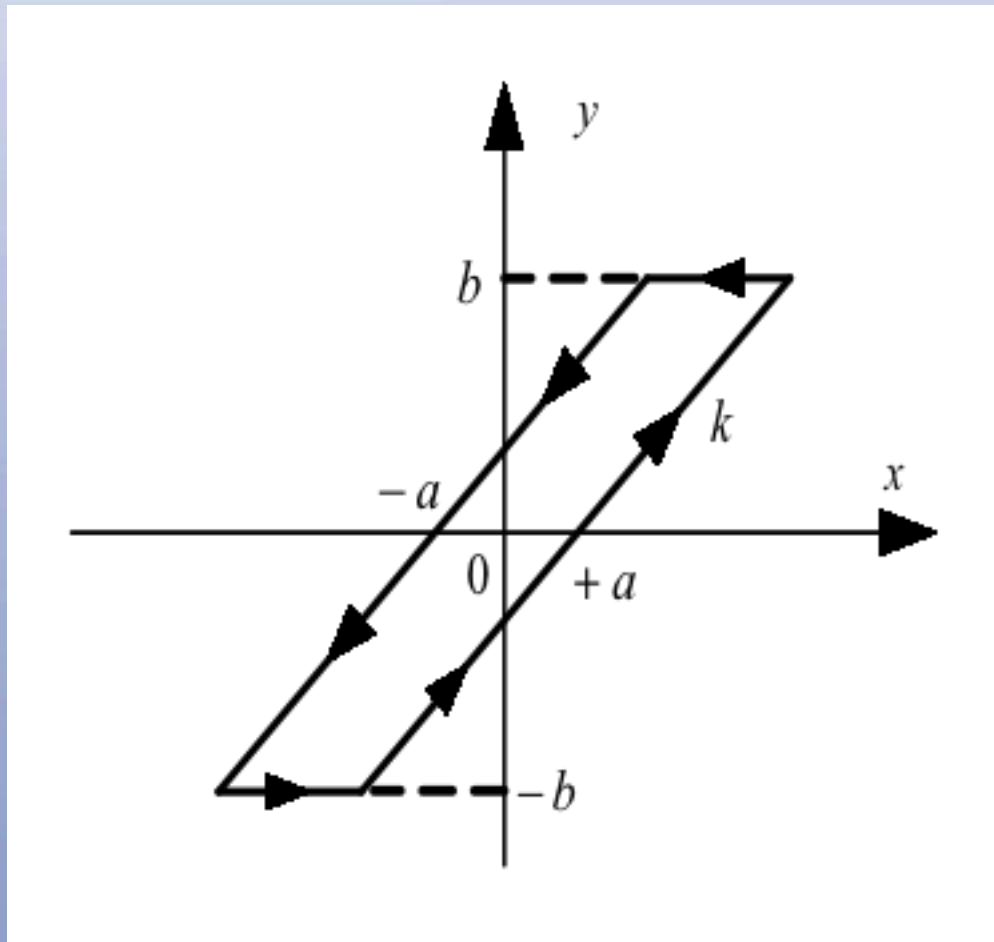


$|x_1| \leq a$, 等效增益为常值, 即线性段斜率; 而 $|x_1| > a$, 输出饱和, 等效增益随输入信号的加大逐渐减小。

$$x_2 = \begin{cases} kx_1, & |x_1| \leq a \\ ka \cdot \text{sign}(x_1) & |x_1| > a \end{cases}$$

7.1.2 典型的非线性特性(3)

(3) 间隙(回环)特性

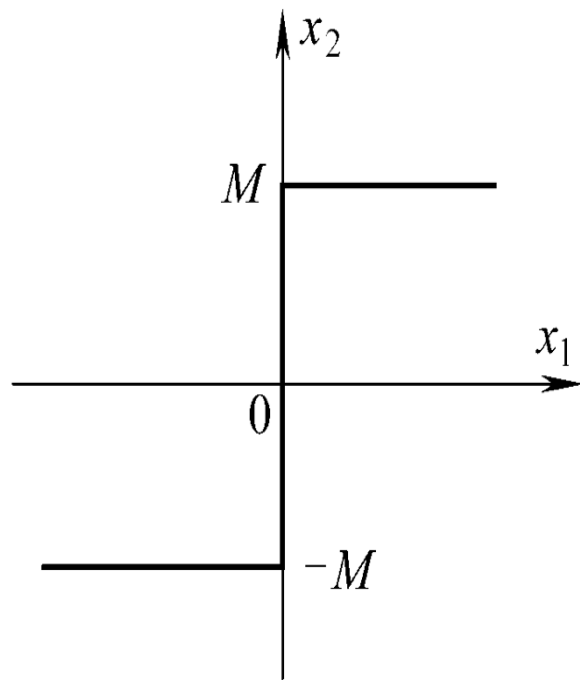


$$y = \begin{cases} -b, & \dot{x} > 0, \quad -a - \frac{b}{k} \leq x \leq a - \frac{b}{k} \\ k(x - a), & \dot{x} > 0, \quad a - \frac{b}{k} \leq x \leq a + \frac{b}{k} \\ b, & \dot{x} < 0, \quad -a + \frac{b}{k} \leq x \leq a + \frac{b}{k} \\ k(x + a), & \dot{x} < 0, \quad -a - \frac{b}{k} \leq x \leq -a + \frac{b}{k} \end{cases}$$

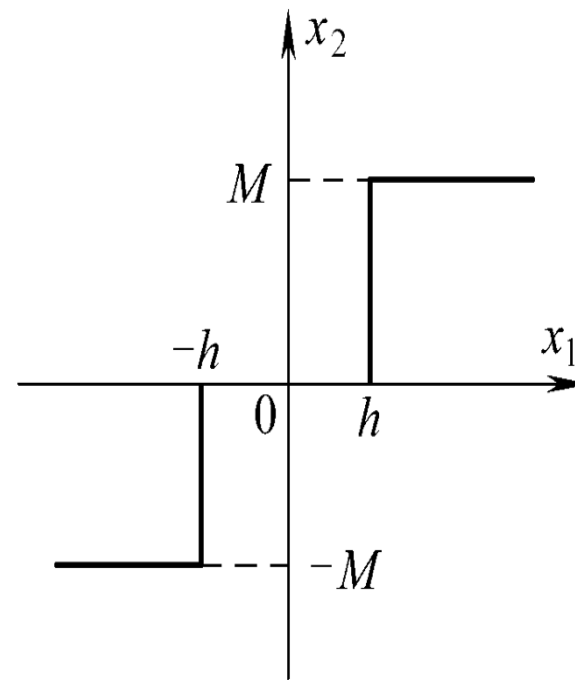
间隙特性的输出不但与输入信号大小有关，而且与输入信号变化的方向有关，形成回环，输入与输出关系是非单值对应的。

7.1.2 典型的非线性特性(4)

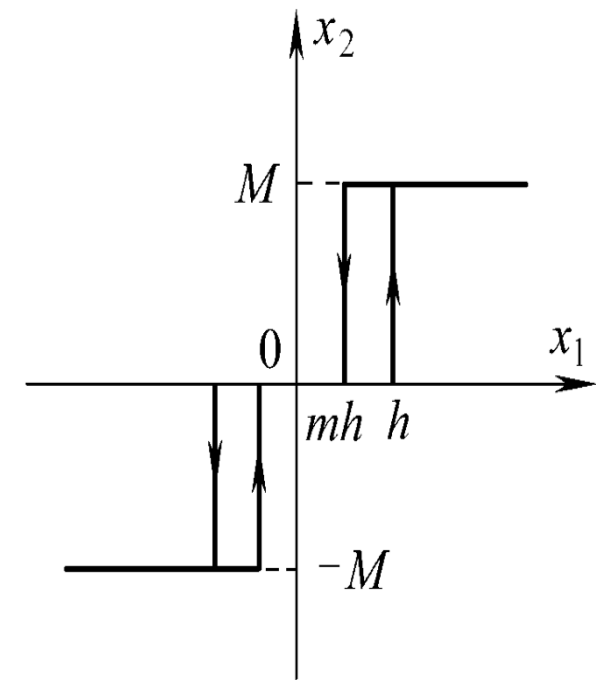
(4) 继电器特性



(a)



(b)



(c)

(a)理想继电特性 (b)死区继电特性 (c)一般的继电特性



7.1.2 典型的非线性特性(5)

(a) 理想继电器特性

$$x_2 = M \cdot \text{sign}(x_1)$$

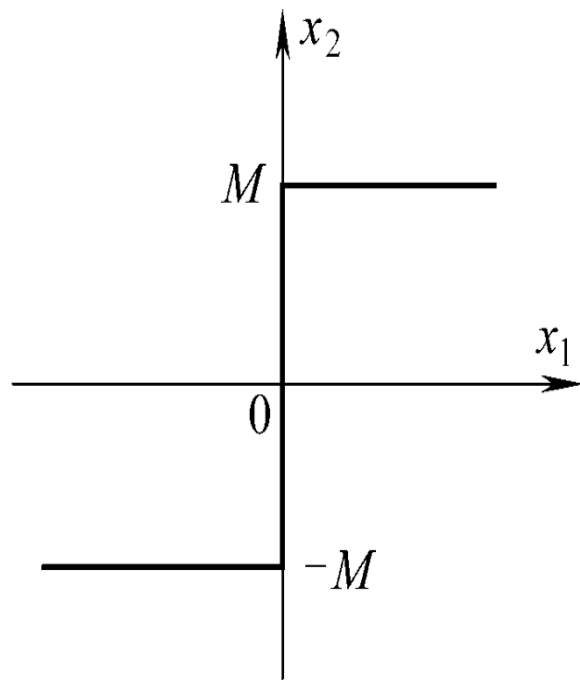
(b) 带死区继电器特性

$$x_2 = \begin{cases} M \cdot \text{sign}(x_1), & |x_1| \geq h \\ 0, & |x_1| < h \end{cases}$$

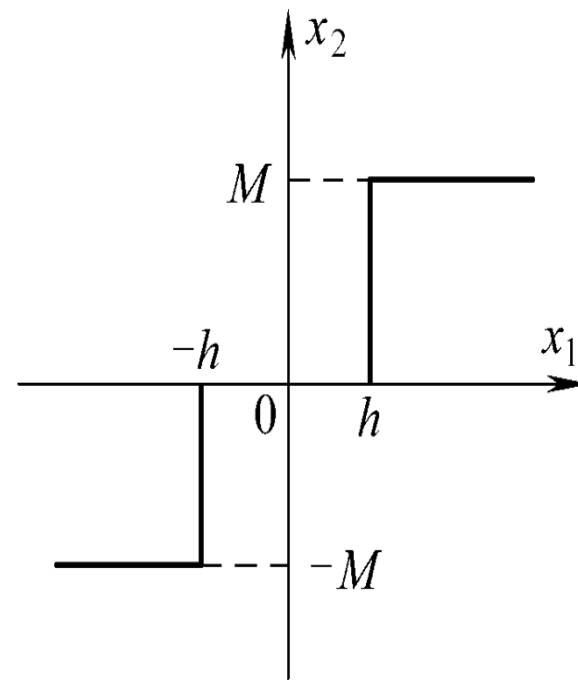
(c) 带死区和滞环继电器特性

$$x_2 = \begin{cases} M \cdot \text{sign}(x_1), & |x_1| > h \\ \frac{M}{2} (\text{sign}(x_1) - \text{sign}(\dot{x}_1)), & mh \leq |x_1| < h \\ 0, & |x_1| < mh \end{cases}$$

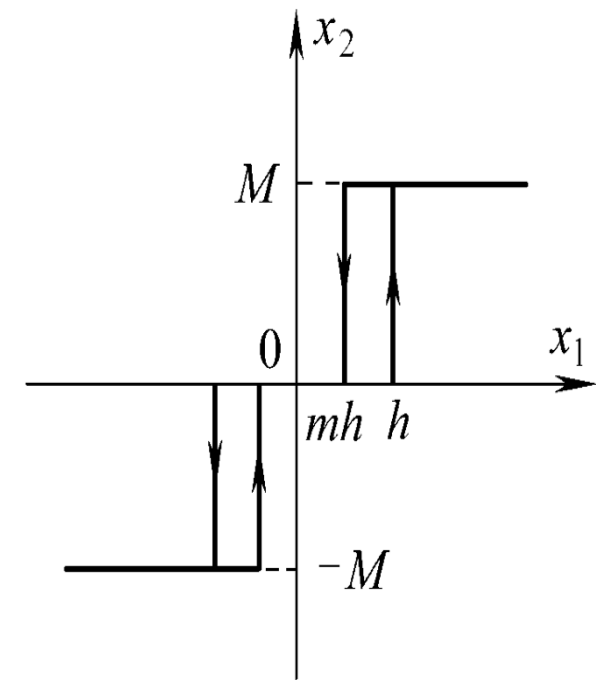
继电器特性



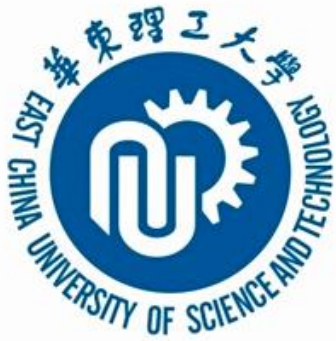
(a)



(b)



(c)



7.1.3 非线性控制系统的分析方法

小扰动线性化

非线性系统研究方法

相平面法

描述函数法

波波夫法

李雅普诺夫第二方法

反馈线性化法

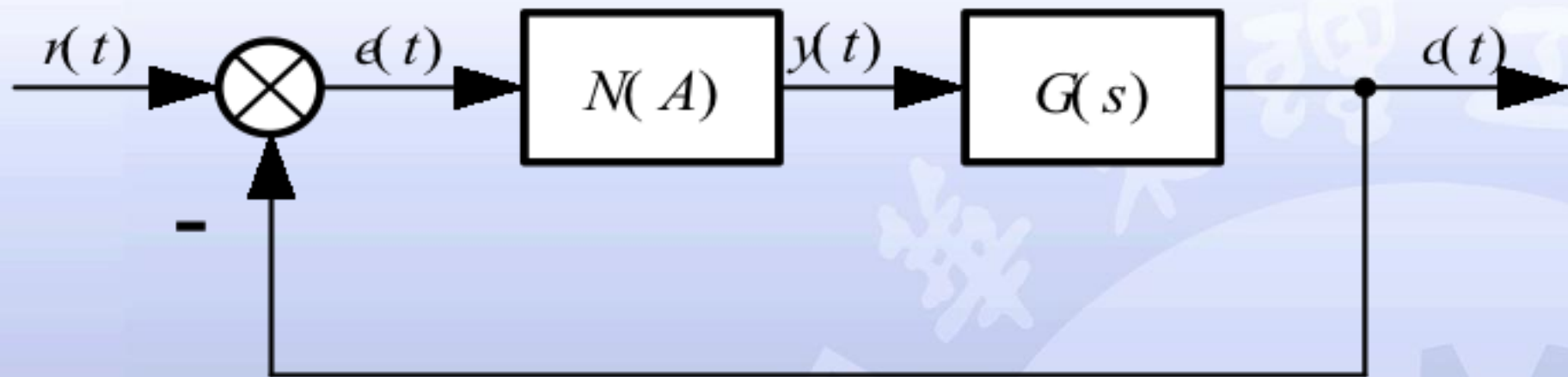
微分几何方法

仿真方法

全数字仿真

半实物仿真

非线性系统的典型结构



研究工作的切入点

高次谐波的幅值通常要比基波的幅值小

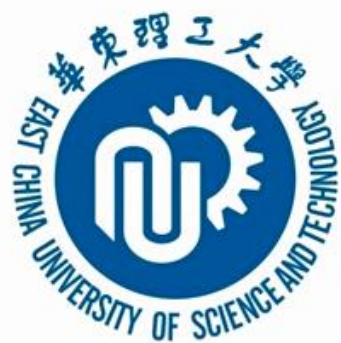
系统的线性部分 $G(s)$ 具有良好低通滤波特性



7.2 描述函数法

8.2.1 描述函数概念

描述函数是对非线性特性在正弦信号作用下的输出，进行谐波线性化处理之后得到的，它是非线性特性的近似描述。用非线性环节输出信号中的基波分量来近似代替实际输出，而实际输出中的高次谐波分量被忽略。



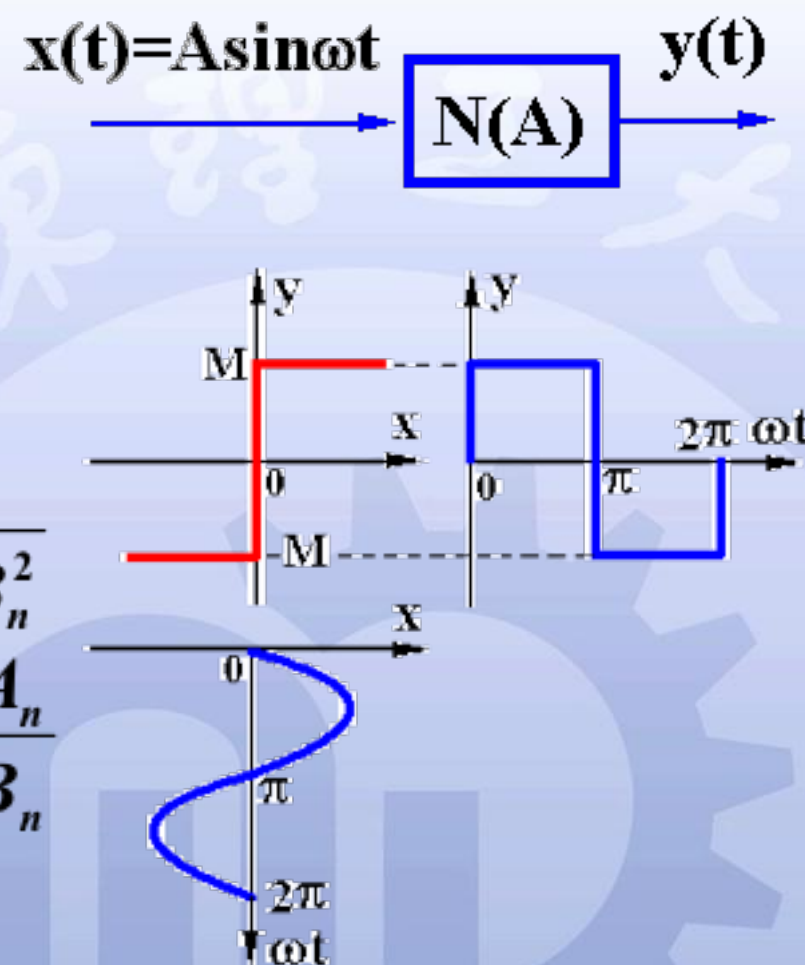
(1) 周期函数 $y(t)$ 的傅立叶级数展开

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$
$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

$$\begin{cases} A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos n\omega t d(\omega t) \\ B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin n\omega t d(\omega t) \end{cases} \begin{cases} Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \phi_n = \arctan \frac{A_n}{B_n} \end{cases}$$

$$y_1(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = Y_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$y(t) = \frac{4M}{\pi} \left[\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right]$$



$$y_1(t) = \frac{4M}{\pi} \sin \omega t$$



(2) 描述函数定义

输入: $x(t) = A \sin \omega t$

输出基波: $y_1(t) = Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$

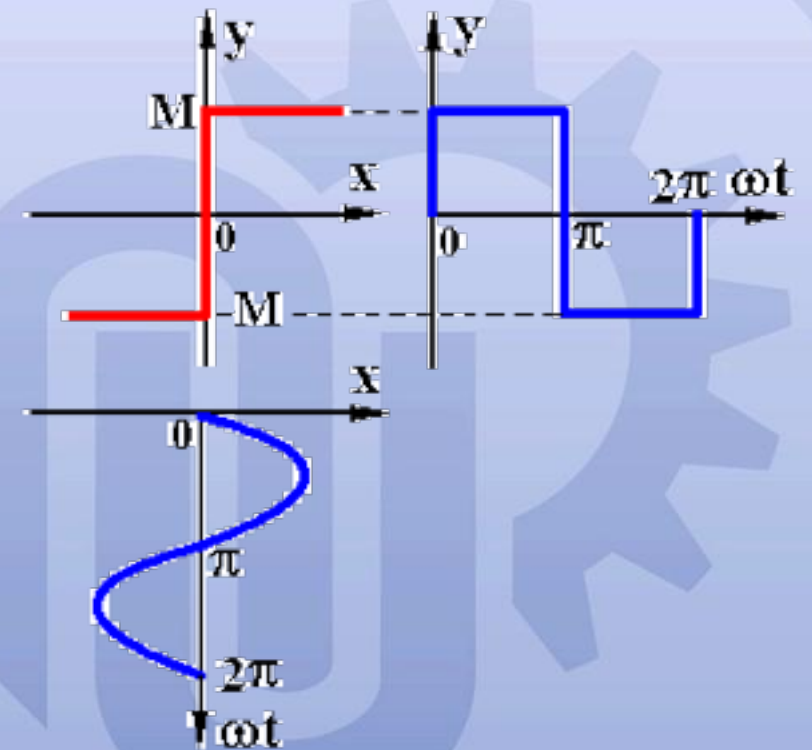


描述函数 $N(A)$ 的定义:

$$N(A) = \frac{Y_1}{A} \angle \varphi_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} \angle (\arctan \frac{A_1}{B_1})$$

理想继电特性的描述函数:

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \angle 0^\circ$$





非线性环节的描述函数及其物理意义

描述函数

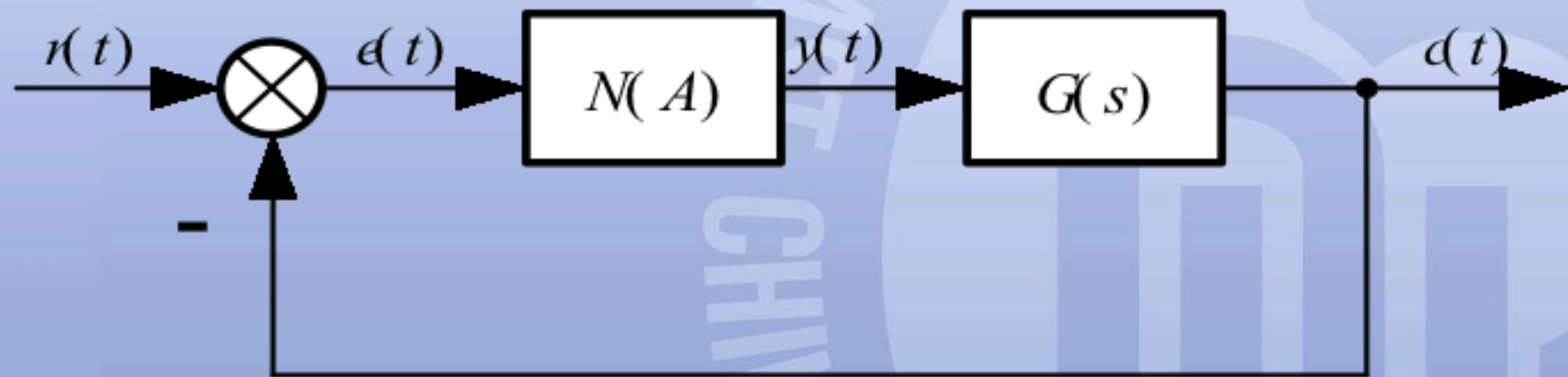
非线性环节的基波分量与正弦输入信号二者的复数之比。

$$N(A) = \frac{Y_1}{A} e^{j\varphi_1} = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} e^{j\arctan \frac{A_1}{B_1}} = \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A}$$

反映非线性系统正弦响应中一次谐波分量的幅值和相位相对于输入信号的变化，表现为输入正弦信号的幅值A的：
复数增益的放大器。

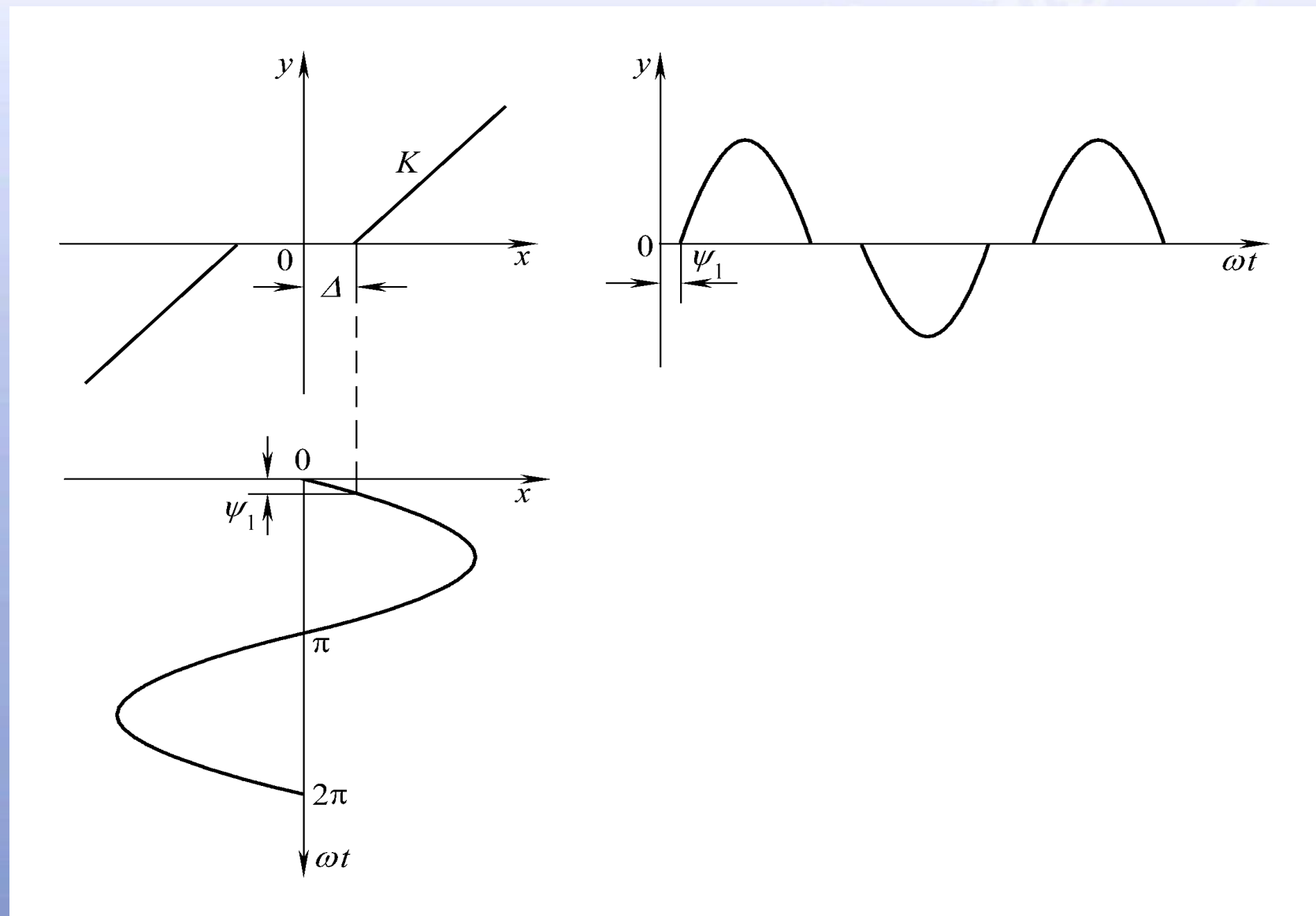
描述函数近似非线性环节的前提假设

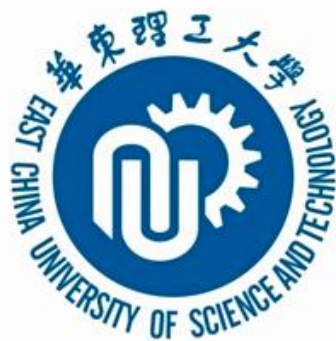
- (1) 高次谐波的幅值通常要比基波的幅值小；
- (2) 系统的线性部分 $G(s)$ 又具有低通滤波特性；



7.2.2 典型非线性环节的描述函数

(1) 死区特性的描述函数



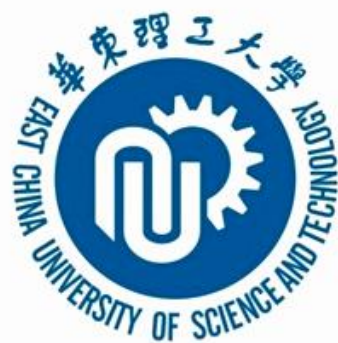


死区特性的描述函数

$$N = \frac{Y_1}{A} \angle \varphi_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} \angle \arctan \frac{A_1}{B_1}$$

$\therefore y(t)$ 单值奇对称, $A_0 = 0$ $A_1 = 0$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d\omega t \\ &= \frac{4}{\pi} \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} K(A \sin \omega t - \Delta) \sin \omega t d\omega t \\ &= \frac{4KA}{\pi} \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \omega t d(\omega t) - \frac{4K\Delta}{\pi} \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin \omega t d\omega t \\ &= \frac{4KA}{\pi} \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) d(\omega t) - \frac{4K\Delta}{\pi} \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin \omega t d(\omega t) \end{aligned}$$



$$= \frac{4KA}{\pi} \left(\frac{\omega t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\omega t + \frac{\Delta}{A} \cos \omega t \right) \Bigg|_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A \sin \psi_1 = \Delta \quad \psi_1 = \arcsin \frac{\Delta}{A}$$

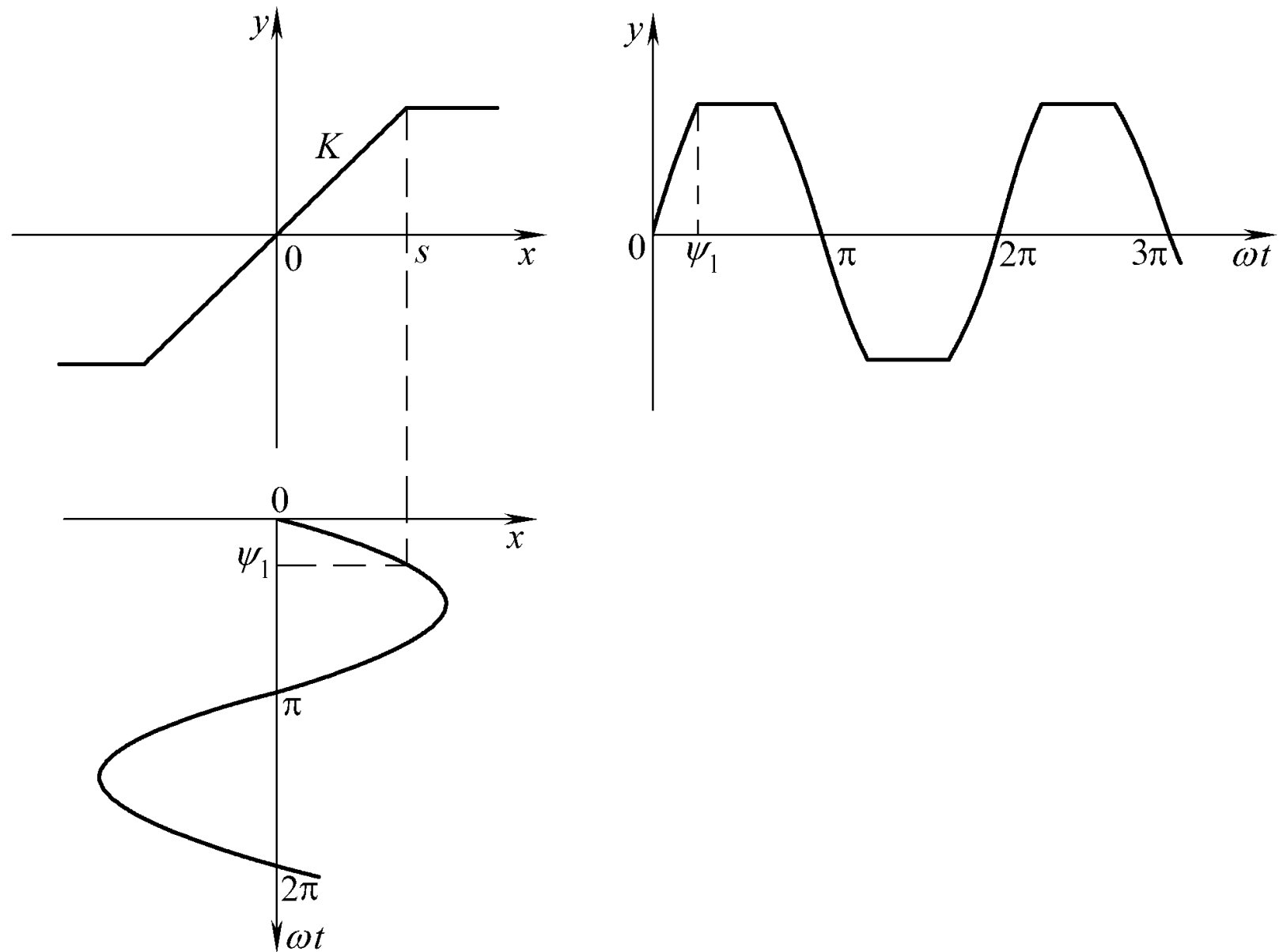
$$B_1 = \frac{4KA}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\Delta}{A} + \frac{1}{2} \frac{\Delta}{A} \cos(\arcsin \frac{\Delta}{A}) - \frac{\Delta}{A} \cos(\arcsin \frac{\Delta}{A}) \right]$$

$$= \frac{2KA}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\Delta}{A} - \frac{\Delta}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{A}\right)^2} \right], \quad A > \Delta$$

\therefore

$$N(A) = \frac{B_1}{A} = \frac{2K}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\Delta}{A} - \frac{\Delta}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{A}\right)^2} \right] \quad A \geq \Delta$$

(2) 饱和特性的描述函数





饱和特性的描述函数

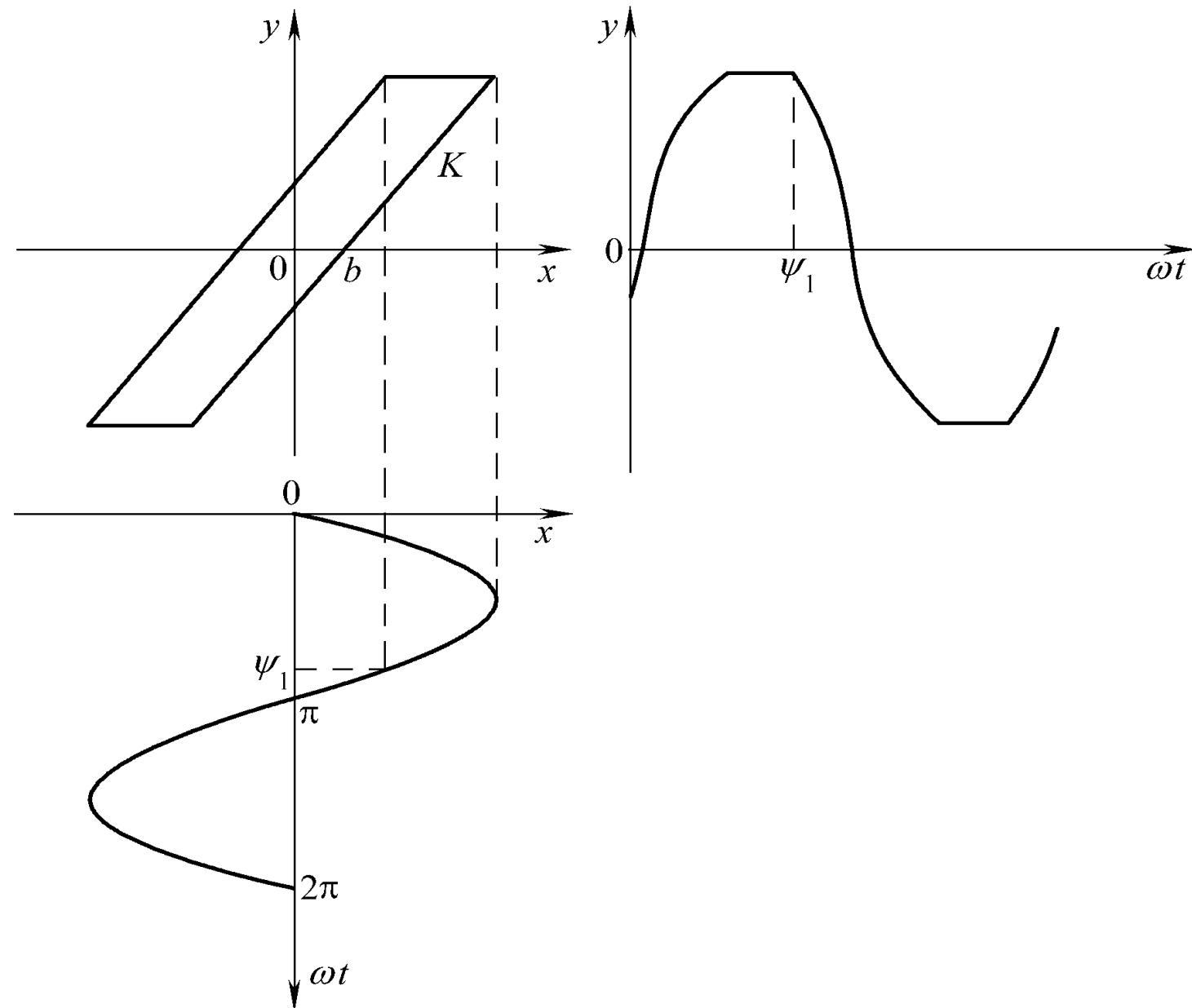
$$y(t) = \begin{cases} KA \sin \omega t & 0 \leq \omega t \leq \psi_1 \\ Ka & \psi_1 \leq \omega t \leq \pi/2 \end{cases}$$

$\therefore y(t)$ 单值奇对称, $A_0 = 0$ $A_1 = 0$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{4}{\pi} \left[\int_0^{\psi_1} KA \sin^2 \omega t d\omega t + \int_{\psi_1}^{\pi/2} Ka \cdot \sin \omega t d\omega t \right] \\ &= \frac{4KA}{\pi} \left\{ \left[\frac{1}{2} \omega t - \frac{1}{4} \sin 2\omega t \right]_0^{\psi_1} + \left[\frac{a}{A} (-\cos \omega t) \right]_{\psi_1}^{\pi/2} \right\} \end{aligned}$$

$$\therefore N(A) = \frac{B_1}{A} = \frac{2K}{\pi} \left[\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right] \quad A \geq a$$

(3) 间隙特性的描述函数





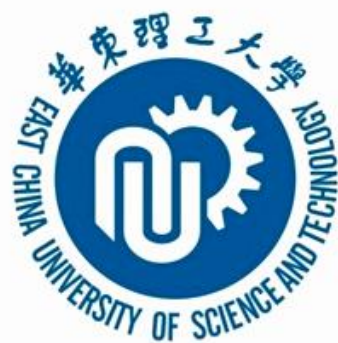
间隙特性的描述函数法(1)

$$y(t) = \begin{cases} K(A \sin \omega t - b) & 0 \leq \omega t \leq \pi / 2 \\ K(A - b) & \pi / 2 \leq \omega t \leq \psi_1 \\ K(A \sin \omega t + b) & \psi_1 \leq \omega t < \pi \end{cases}$$

$\therefore y(t)$ 对称, $A_0 = 0$

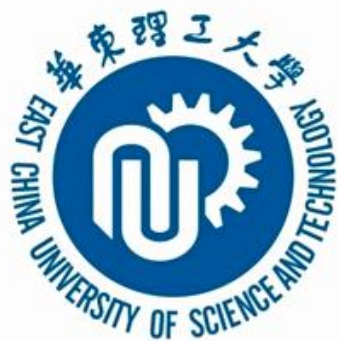
$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} K(A \sin \omega t - b) \cos \omega t d\omega t + \int_{\pi/2}^{\psi_1} K(A - b) \cos \omega t d\omega t \right. \\ &\quad \left. + \int_{\psi_1}^{\pi} K(A \sin \omega t + b) \cos \omega t d\omega t \right] \\ &= \frac{4Kb}{\pi} \left[\frac{b}{A} - 1 \right] \quad A \geq b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \sin(\pi - \psi_1) &= A - 2b \\ \psi_1 &= \pi - \arcsin \left(1 - \frac{2b}{A} \right) \end{aligned}$$



间隙特性的描述函数法(2)

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} K(A \sin \omega t - b) \sin \omega t d\omega t + \int_{\pi/2}^{\psi_1} K(A - b) \sin \omega t d\omega t \right. \\ &\quad \left. + \int_{\psi_1}^{\pi} K(A \sin \omega t + b) \sin \omega t d\omega t \right] \\ &= \frac{KA}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 - \frac{2b}{A}\right) + 2\left(1 - \frac{2b}{A}\right) \sqrt{\frac{b}{A}\left(1 - \frac{b}{A}\right)} \right] \quad A \geq b \end{aligned}$$



间隙特性的描述函数法(3)

$$N(A) = \frac{Y_1}{A} \angle \varphi_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} \angle \arctan \frac{A_1}{B_1}$$

$$\begin{aligned} N(A) &= \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A} \\ &= \frac{K}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2b}{A} \right) + 2 \left(1 - \frac{2b}{A} \right) \sqrt{\frac{b}{A} \left(1 - \frac{b}{A} \right)} \right] + j \frac{4Kb}{\pi A} \left(\frac{b}{A} - 1 \right) \quad A \geq b \end{aligned}$$

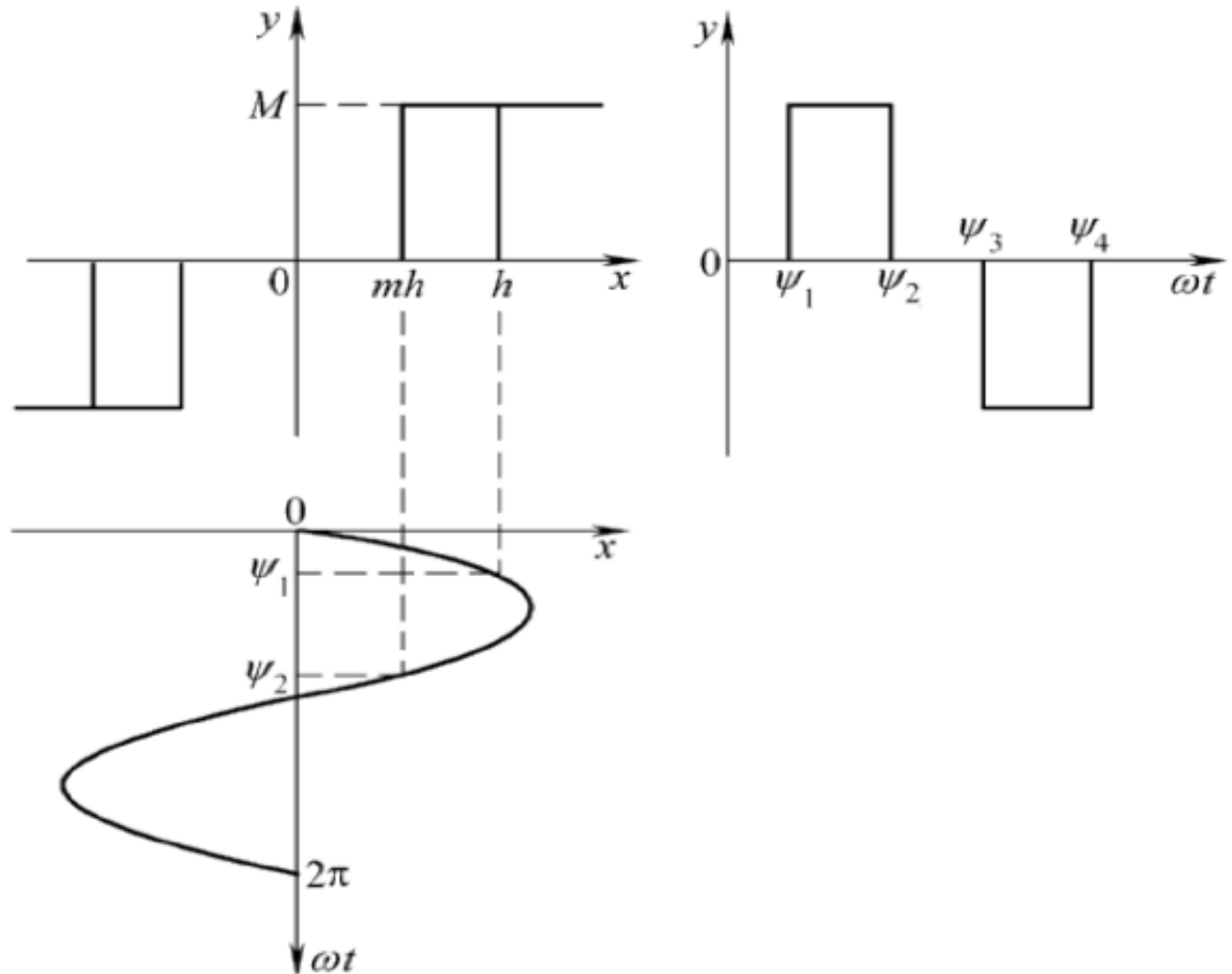
(4) 继电器特性的描述函数

$$\psi_1 = \arcsin \frac{h}{A}$$

$$\psi_2 = \pi - \arcsin \frac{mh}{A}$$

$$\psi_3 = \pi + \arcsin \frac{h}{A}$$

$$\psi_4 = 2\pi - \arcsin \frac{mh}{A}$$



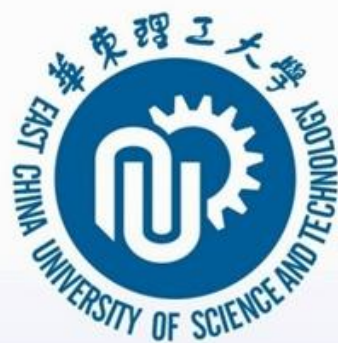


继电器特性的描述函数(1)

$$y(t) = \begin{cases} M & \psi_1 \leq \omega t \leq \psi_2 \\ 0 & 0 \leq \omega t < \psi_1, \psi_2 < \omega t < \psi_3, \psi_4 < \omega t \leq 2\pi \\ -M & \psi_3 \leq \omega t \leq \psi_4 \end{cases}$$

$\therefore y(t)$ 对称, $A_0 = 0$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{\psi_1}^{\psi_2} M \cos \omega t d\omega t - \int_{\psi_3}^{\psi_4} M \cos \omega t d\omega t \right] \\ &= \frac{2Mh}{\pi A} (m - 1) \quad A \geq h \end{aligned}$$

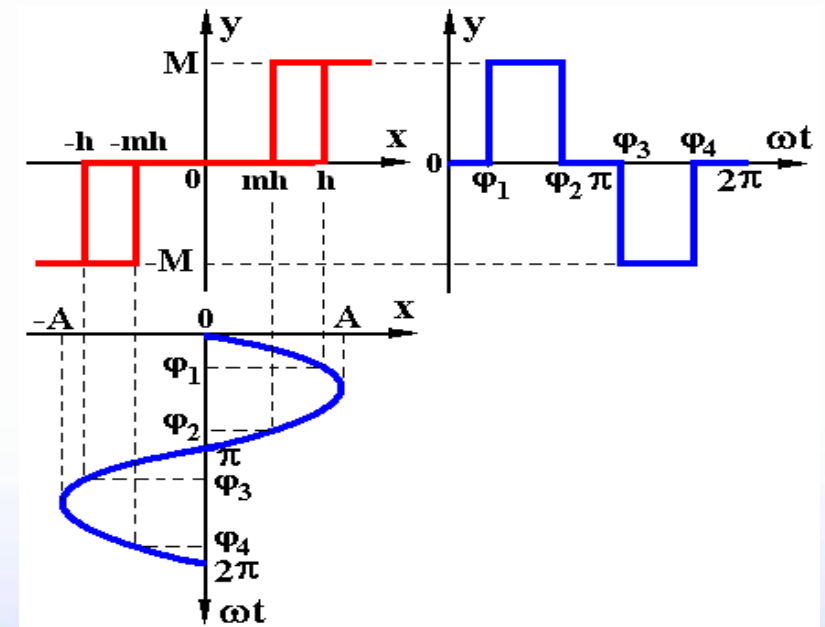


继电器特性的描述函数(2)

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \sin \omega t d\omega t - \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} M \sin \omega t d\omega t \right] \\ &= \frac{2M}{\pi} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{mh}{A} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A} \right)^2} \right] \quad A \geq h \end{aligned}$$

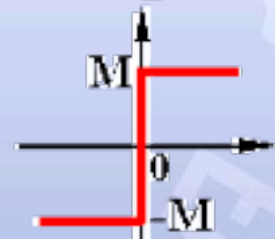
$$N(A) = \frac{2M}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{mh}{A} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A} \right)^2} \right] + j \frac{2Mh}{\pi A^2} (m - 1) \quad A \geq h$$

其它继电特性的描述函数:



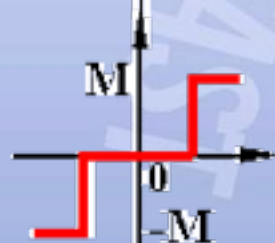
$$N(A) = \frac{2M}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{mh}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} \right] + j \frac{2Mh}{\pi A^2} (m-1) \quad (A \geq h)$$

$h = 0$ 理想继电特性:



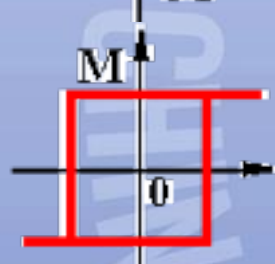
$$N(A) = \frac{4M}{\pi A}$$

$m = 1$ 死区继电特性:



$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2}$$

$m = -1$ 纯滞环继电特性:



$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} - j \frac{4Mh}{\pi A^2}$$

一般而言,描述函数 $N(A)$ 是 A 的函数,与频率 ω 无关

非线性环节为单/非单值函数时, $N(A)$ 是实/复数,虚部为/不为 0

(6) 组合非线性特性的描述函数

(A) 非线性子环节的并联

$$x(t) = A \sin \omega t$$

两个环节输出的基波分量为：

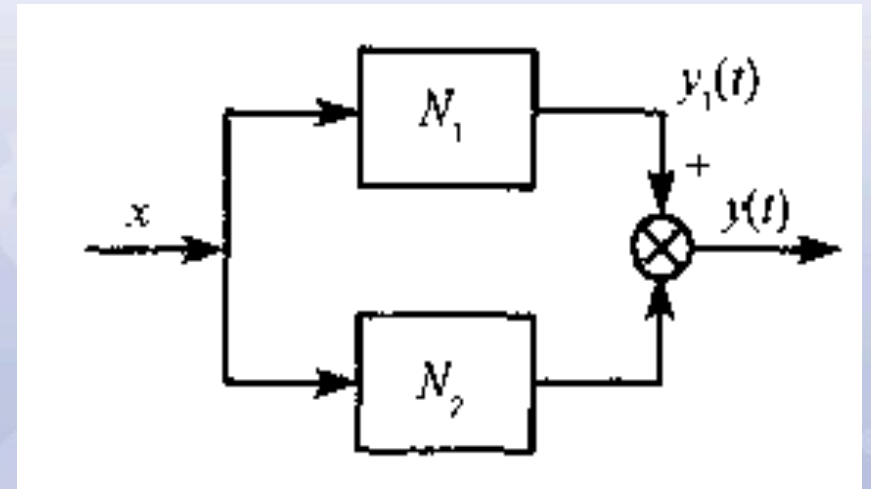
$$\begin{cases} y_1(t) = N_1(A) A \sin \omega t \\ y_2(t) = N_2(A) A \sin \omega t \end{cases}$$

总的输出基波分量为：

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = (N_1(A) + N_2(A)) A \sin \omega t$$

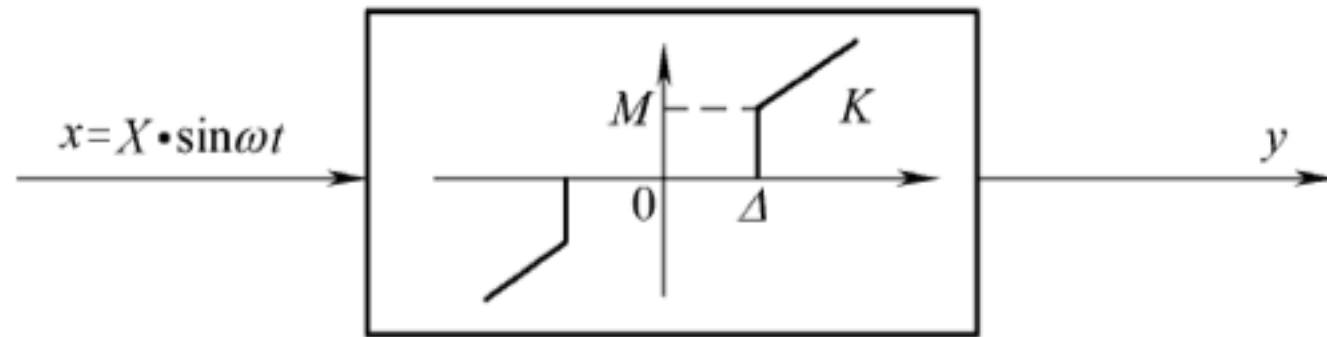
非线性环节的描述函数为：

$$N(A) = N_1(A) + N_2(A)$$

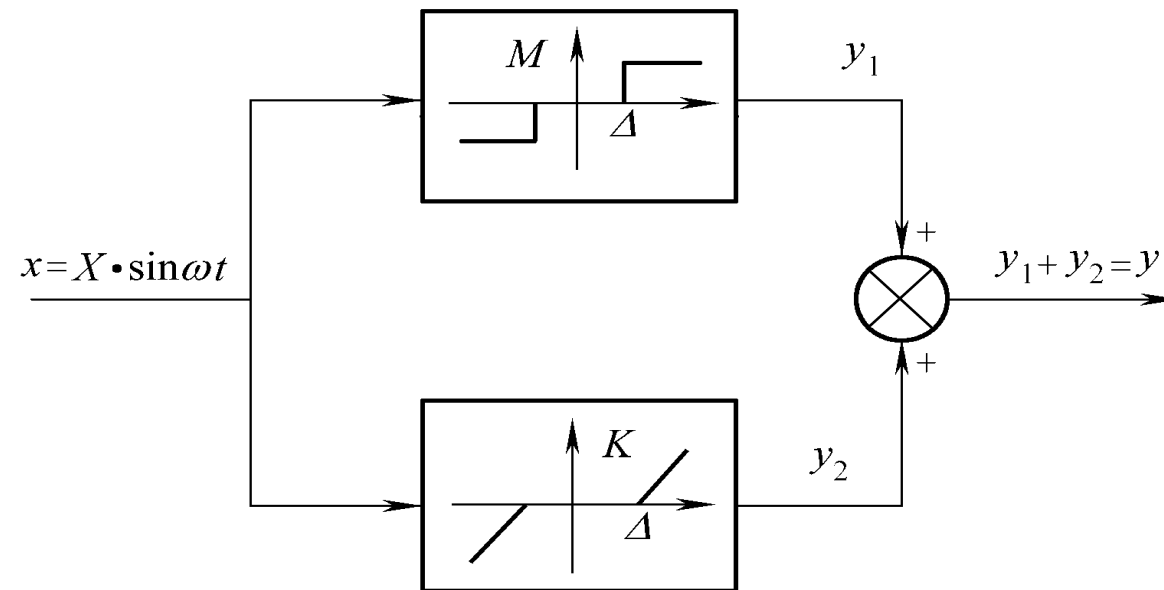


多个非线性环节并联后总的描述函数等于
各非线性环节描述函数之和。

举例



等效的非线性特性如下图所示。





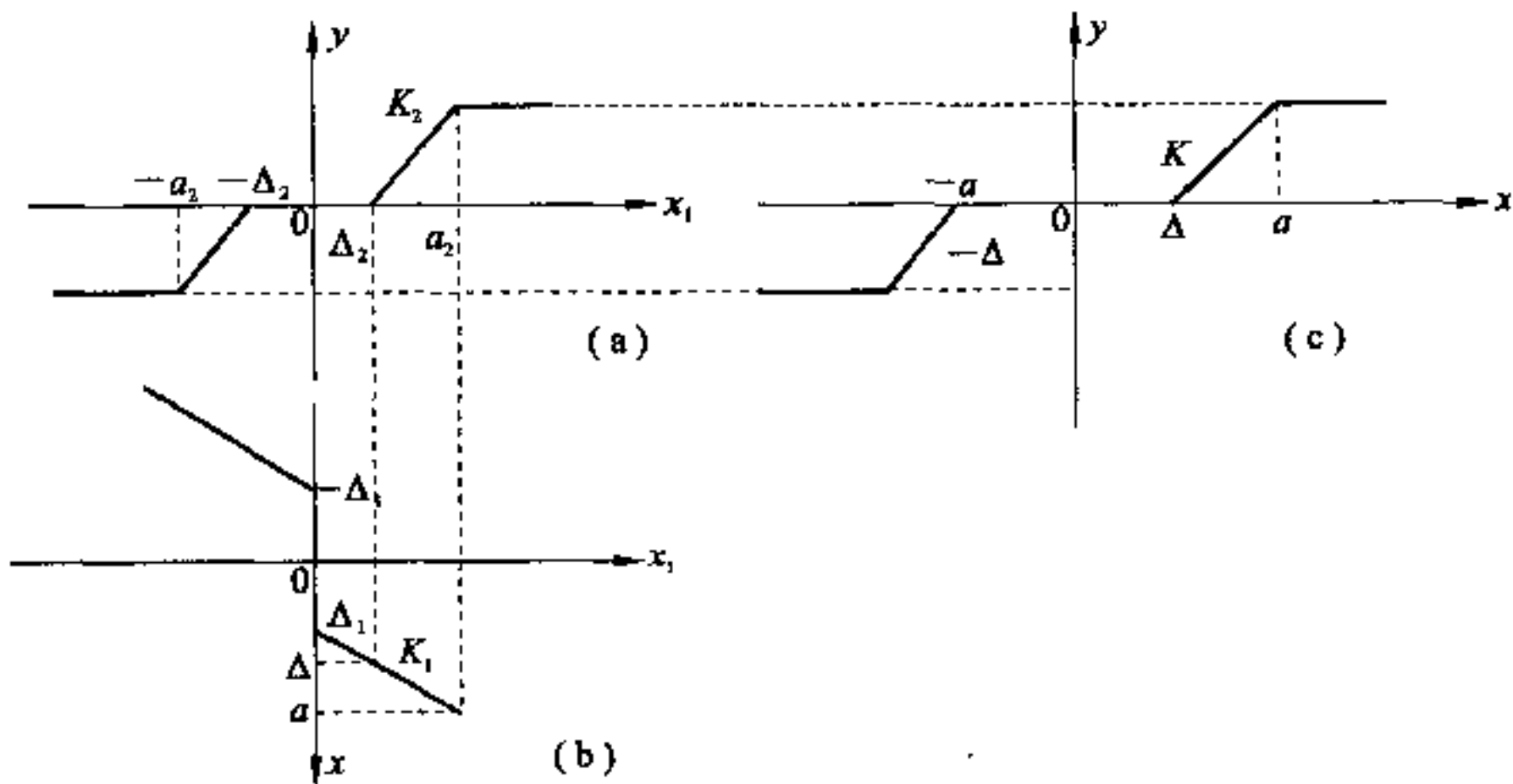
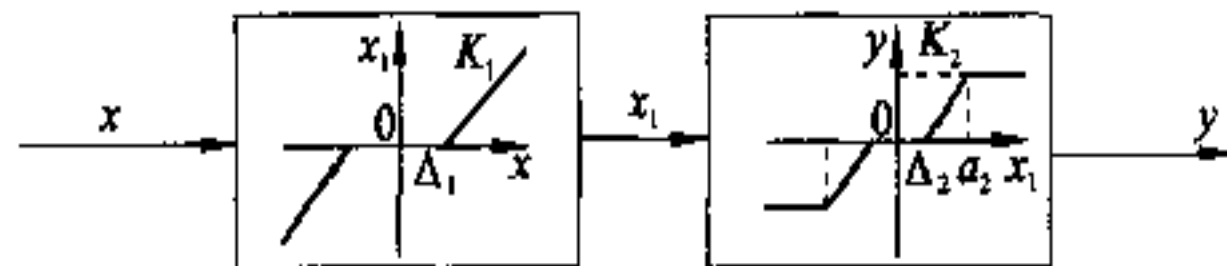
$$N_1(X) = \frac{4M}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}$$

$$N_2(X) = k - \frac{2k}{\pi} \left[\arcsin \frac{\Delta}{X} + \frac{\Delta}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2} \right]$$

$$N(X) = N_1(X) + N_2(X) = K - \frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{\Delta}{X} + \frac{4M - 2K\Delta}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}$$

(B) 串联非线性环节的描述函数

串联非线性环节总的描述函数不等于每个非线性环节描述函数的乘积，应当根据串联后系统的输入输出非线性特性，建立等效的非线性特性，再求出等效非线性特性的描述函数，即为串联系统的总的描述函数。



等效关系取决于串联环节的前后次序



等效非线性环节的输入-输出数学表达式为：

$$y(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq \Delta \\ K(x - \Delta) & \Delta < |x| < a \\ K_2(a_2 - \Delta_2) & |x| \geq a \end{cases}$$

$$x_1 = K_1(x - \Delta_1)$$

由 $x_1 = \Delta_2 \rightarrow x = \Delta$

得

$$\Delta_2 = K_1(\Delta - \Delta_1) \quad \Delta = \Delta_1 + \frac{\Delta_2}{K_1}$$

由 $a_2 = K_1(a - \Delta_1)$

得

$$a = \frac{a_2}{K_1} + \Delta_1$$

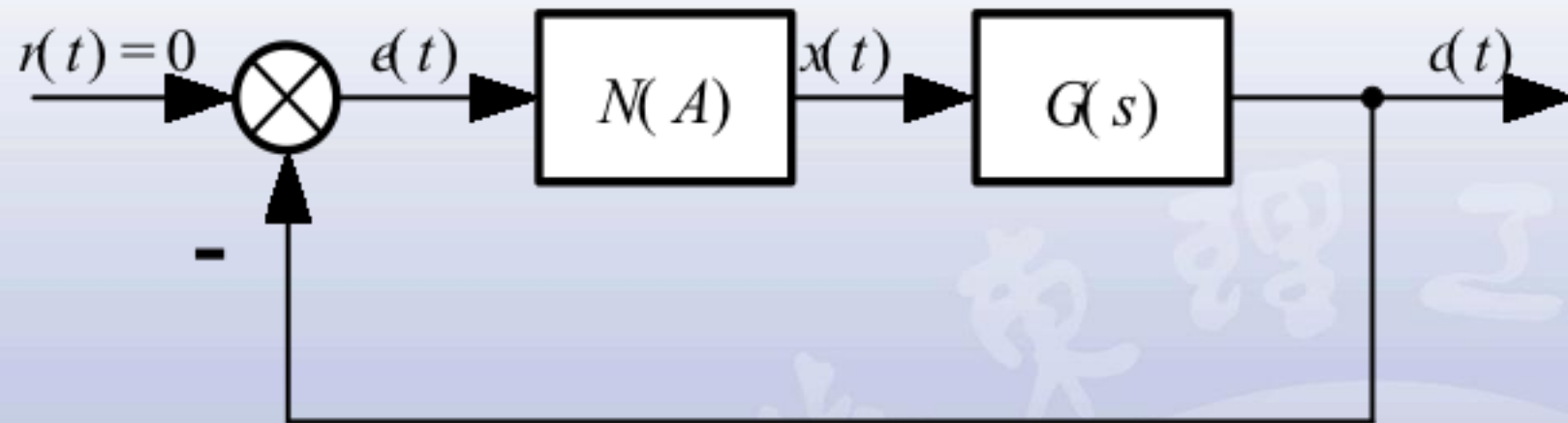
又考虑： $y(x) = K(x - \Delta) = K_2(x_1 - \Delta_2)$

$$\begin{aligned} K_2(x_1 - \Delta_2) &= K_2[K_1(x - \Delta_1) - \Delta_2] = K_1K_2[x - (\Delta_1 + \frac{\Delta_2}{K_1})] \\ &= K_1K_2(x - \Delta) \end{aligned}$$

$$K = K_1K_2$$



7.2.3 非线性系统的描述函数法分析



描述函数法分析法对非线性系统的假设

- ① 系统可归化为线性部分与非线性部分相串联的典型结构。
- ② 非线性部分输出中的高次谐波振幅小于基波振幅。
- ③ 线性部分的低通滤波效应较好。

非线性系统经过谐波线性化已变成一个等效的线性系统，可以应用线性系统理论中的频率域稳定判据分析非线性系统的稳定性。



1) 非线性系统的稳定性分析

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{N(A)G(j\omega)}{1 + N(A)G(j\omega)}$$

系统的特征方程为：

$$1 + N(A)G(j\omega) = 0$$

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)} \quad -\frac{1}{N(A)} : \text{非线性特性的负倒描述函数}$$

根据奈氏判据：

在线性系统分析时，如果闭环系统处于临界稳定的等幅振荡状态，则其开环幅相特性曲线应该过 $(-1, j0)$ ，开环幅相特性等于 -1 。



将奈氏判据推广到描述函数分析过程中，非线性系统具有等幅振荡的周期运动的条件为：

$$G(j\omega)N(A) = -1$$

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

$$-\frac{1}{N(A)}$$

相当于线性系统开环幅相平面的(-1,j0)点。

可以用 $G(j\omega)$ 和 $-\frac{1}{N(A)}$ 两者轨迹之间的相对位置判别系统的稳定性。



推广的奈奎斯特判据

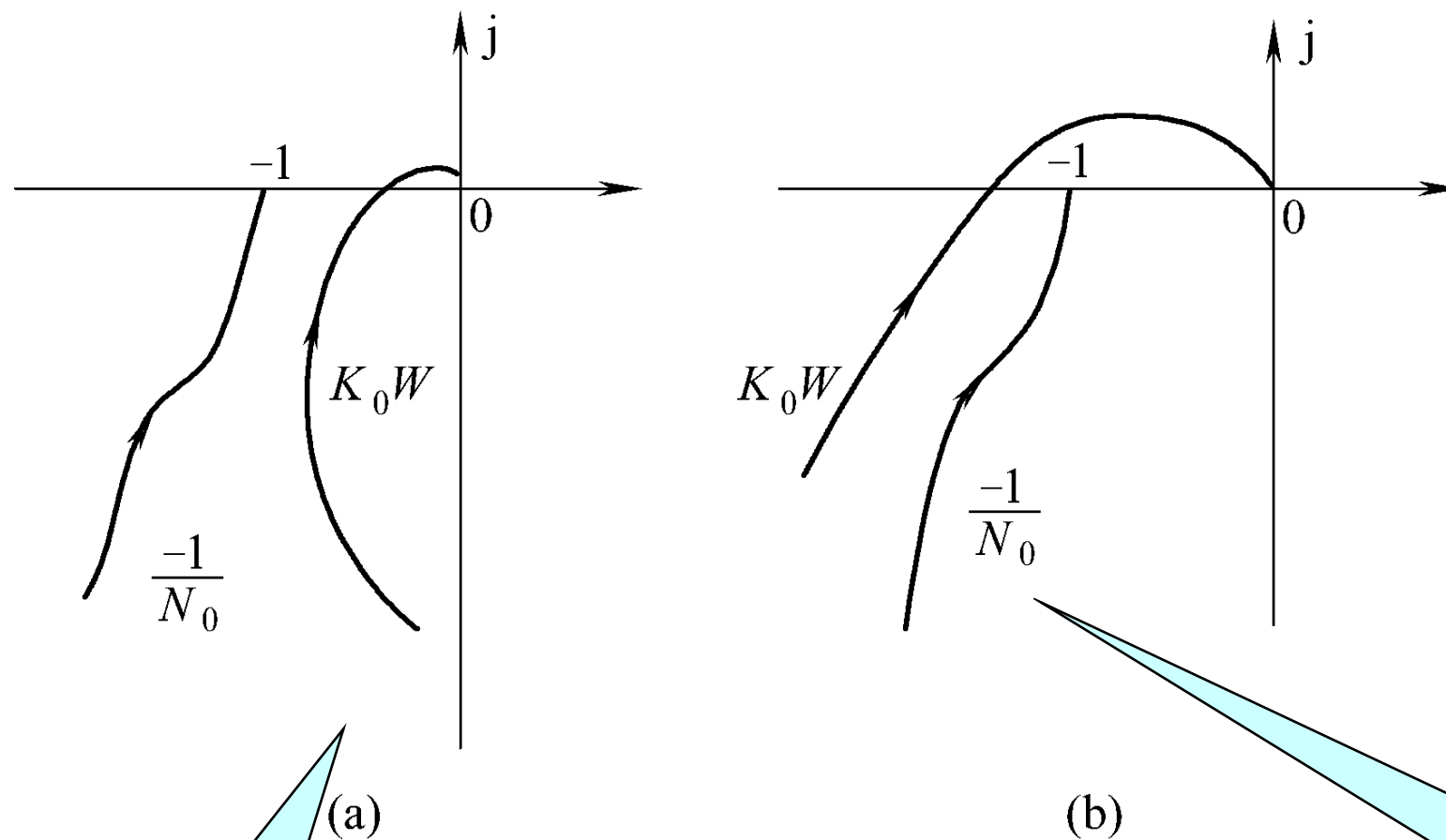
当 $G(s)$ 的极点均在左半 S 平面

当系统线性部分的幅相特性曲线 $G(j\omega)$ 包围非线性部分的负倒描述函数曲线 $-1/N(A)$ ，非线性系统不稳定。

如果 $G(j\omega)$ 曲线不包围 $-1/N(A)$ ，则非线性系统稳定并且 $G(j\omega)$ 曲线离 $-1/N(A)$ 越远，系统的稳定程度越高。

如果 $G(j\omega)$ 曲线与 $-1/N(A)$ 轨迹有交点，则系统存在等幅振荡，其振幅和频率对应交点的振幅和频率。等幅振荡具有一定的稳定性时，为自激振荡。

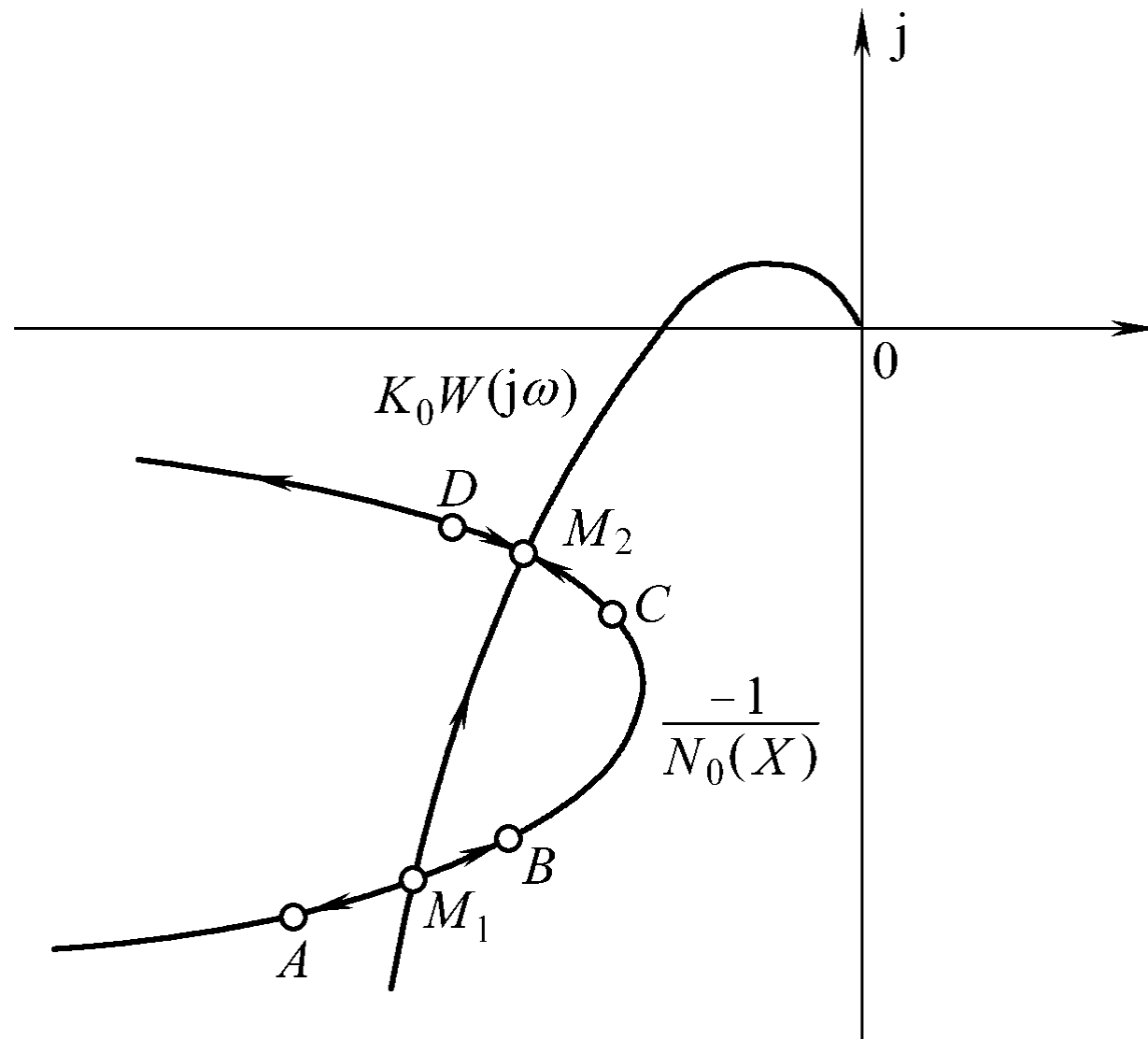
非线性系统的稳定性判别



稳定系统

不稳定系统

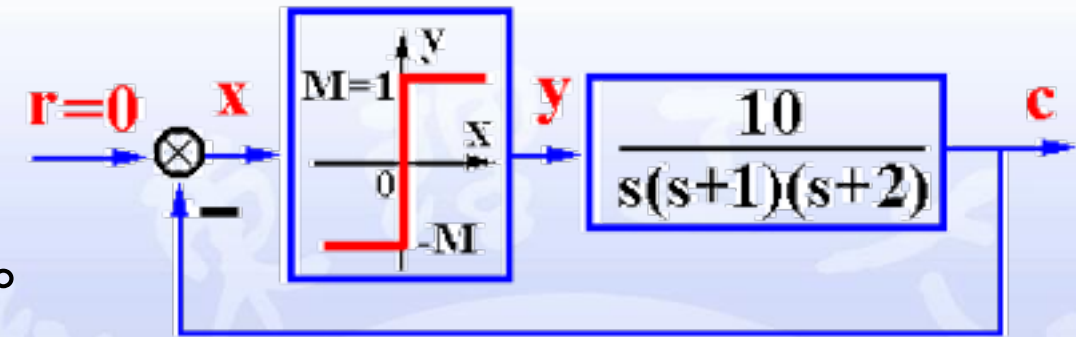
自激振荡情况的发生与判别





2) 非线性系统工程描述函数分析方法举例(1)

自振必要条件: $N(A) \cdot G(j\omega) = -1$



例 分析系统的稳定性(M=1), 求自振参数。

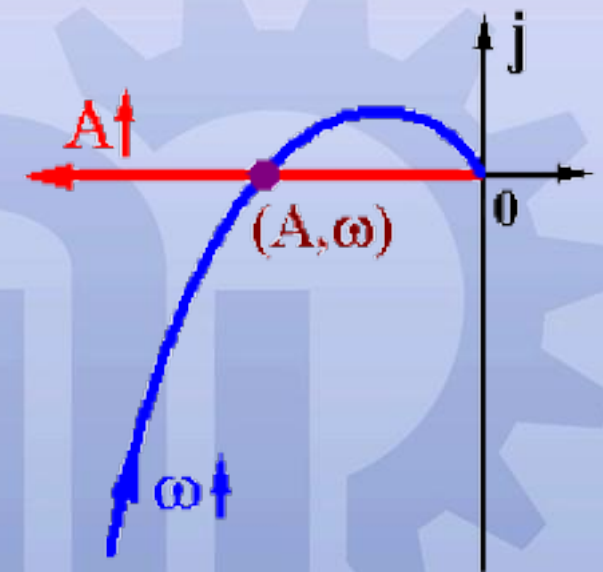
解 作图分析, 系统一定自振。

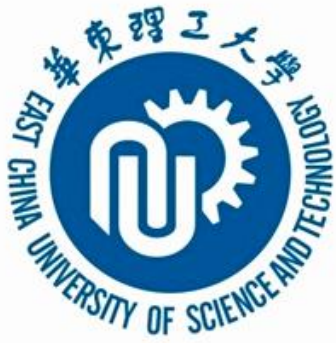
由自振条件: $N(A) \cdot G(j\omega) = -1$

得:
$$\frac{4}{\pi A} \cdot \frac{10}{j\omega(1+j\omega)(2+j\omega)} = -1$$

$$\frac{40}{\pi A} = -j\omega(1+j\omega)(2+j\omega) = 3\omega^2 - j\omega(2-\omega^2)$$

比较实/虚部:
$$\begin{cases} \frac{40}{\pi A} = 3\omega^2 \\ \omega(2-\omega^2) = 0 \end{cases} \begin{cases} \omega = \sqrt{2} \\ A = \frac{40}{6\pi} = 2.122 \end{cases}$$





2) 非线性系统工程描述函数分析方法举例(2)

例：系统如下，欲产生 $\begin{cases} \omega = 1 \\ A = 4 \end{cases}$ 的周期信号，试确定 K 、 τ 的值。

分析：可以调节 K , τ 实现要求的自振运动。

解

$$N(A) \cdot G(j\omega) = -1$$

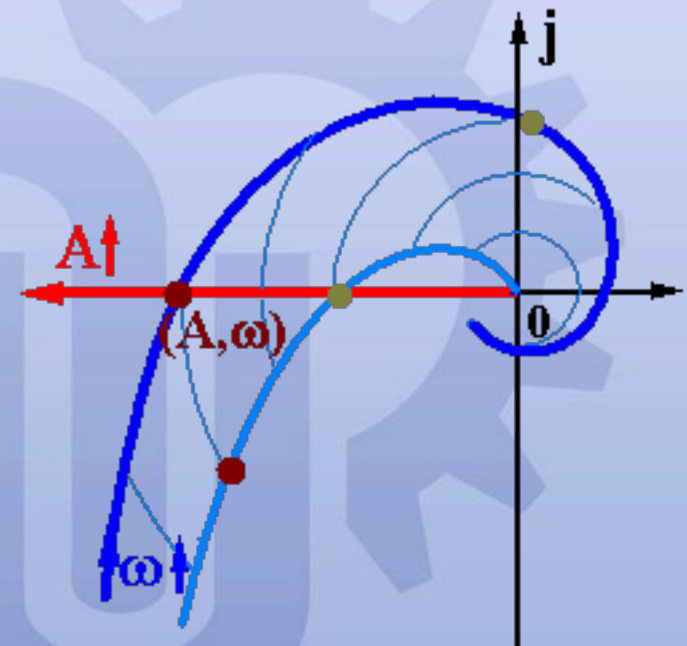
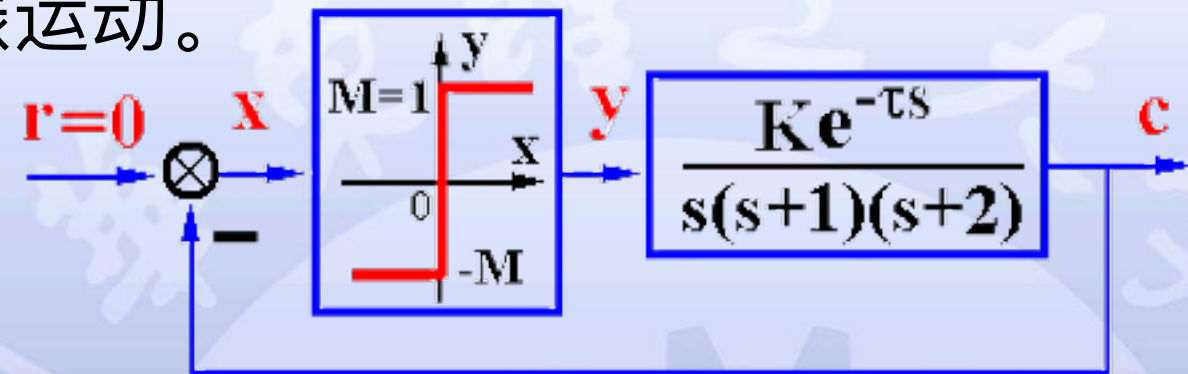
$$\frac{4M}{\pi A} \cdot \frac{K e^{-j\omega\tau}}{j\omega(1+j\omega)(2+j\omega)} = -1$$

$$\frac{4MK e^{-j\omega\tau}}{\pi A} = 3\omega^2 - j\omega(2 - \omega^2)$$

$$= \omega \sqrt{4 + 5\omega^2 + \omega^4} \angle \left(-\arctan \frac{2 - \omega^2}{3\omega} \right)$$

代入 $\begin{cases} M = 1 \\ A = 4 \\ \omega = 1 \end{cases}$ 比较模和相角得

$$\begin{cases} K = \sqrt{10} \cdot \pi = 9.93 \\ \tau = \arctan \frac{1}{3} = 0.322 \end{cases}$$



2) 非线性系统工程描述函数分析方法举例(3)

例 非线性系统结构图如右图所示,

已知:
$$\begin{cases} M=2, h=1 \\ N(A) = \frac{8}{\pi A^2} \sqrt{A^2-1} - j \frac{8}{\pi A^2} \quad (A>1) \end{cases}$$

((1)) 自振时, 调整K使 $\angle G(s) = \angle \left(\frac{2K}{s(s+1)} \right) = -135^\circ$ 。

求此时的K值和自振参数(A, ω)。

((2)) 定性分析K增大后自振参数(A, ω)的变化规律。

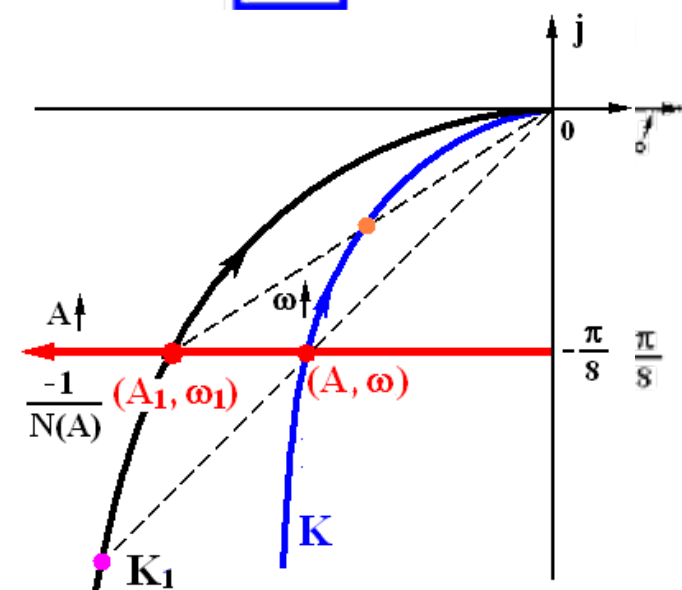
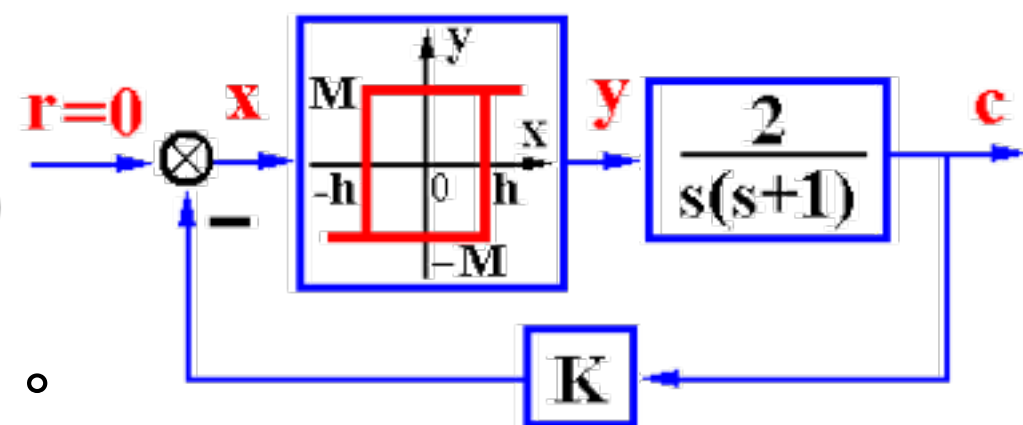
解(1)
$$N(A) = \frac{8}{\pi A^2} [\sqrt{A^2-1} - j]$$

$$\frac{-1}{N(A)} = \frac{-\pi}{8} [\sqrt{A^2-1} + j] = -\frac{\pi}{8} - j \frac{\pi}{8} \Rightarrow A = \sqrt{2}$$

$$G(j\omega) = \frac{2K}{j\omega(1+j\omega)} = \frac{-2K}{1+\omega^2} \left[1 + j \frac{1}{\omega} \right] = -\frac{\pi}{8} - j \frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega = 1 \\ K = \pi/8 = 0.3927 \end{cases}$$

((2)) 依图分析: $K \uparrow \Rightarrow A \uparrow, \omega \uparrow$



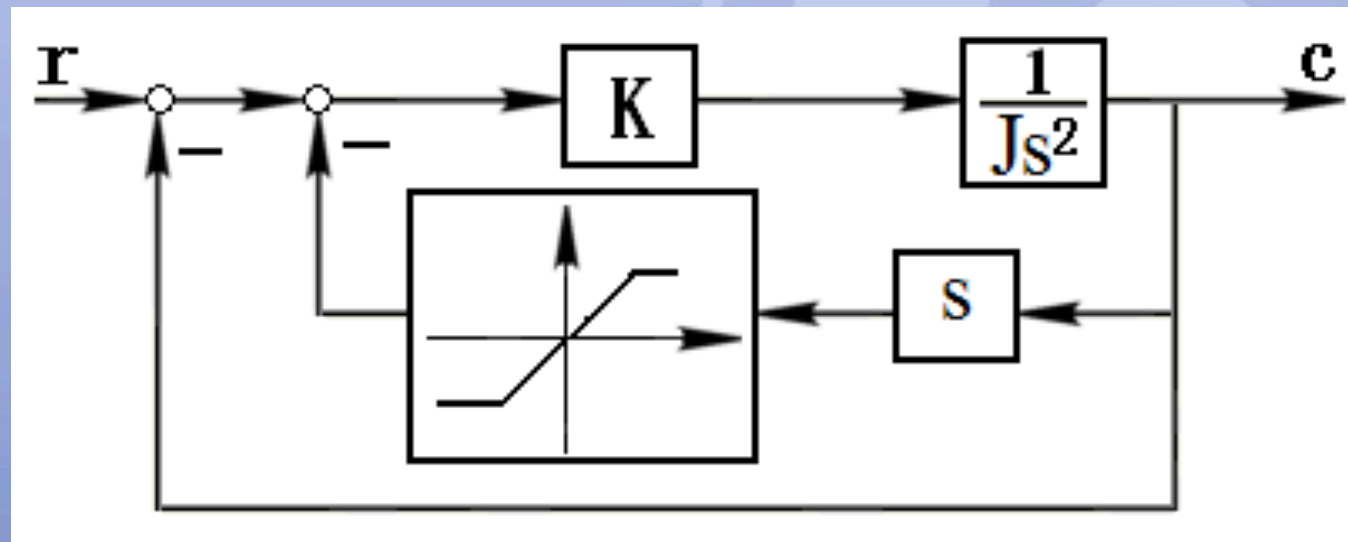


2) 非线性系统工程描述函数分析方法举例(4)

非线性系统结构图的简化

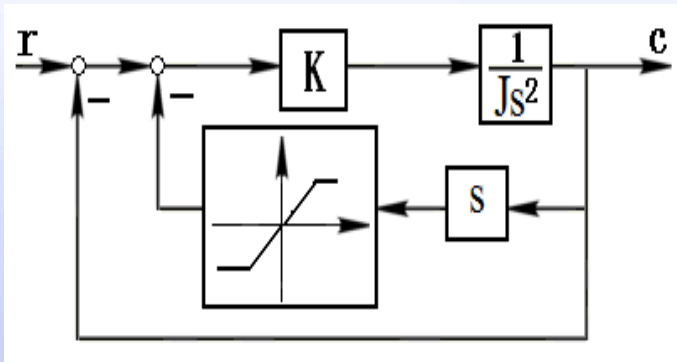
在讨论非线性系统的自振及稳定性时，只研究由系统内部造成的周期运动，并不考虑外界作用。在化简规范系统结构时，设定外作用为零，只考虑系统的封闭回路。

例：将下图非线性系统化为串联形式，求出等效开环传递函数





解法一：将非线性特性视为线性环节来对待，则由梅逊公式：



$$\phi(s) = \frac{\frac{K}{Js^2}}{1 + \frac{KN(x)}{Js} + \frac{K}{Js^2}} = \frac{K}{Js^2 + K + KsN(x)}$$

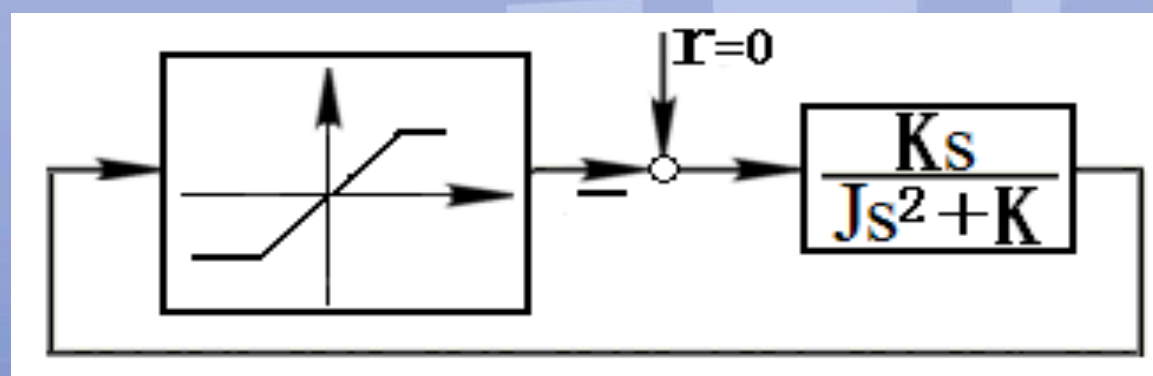
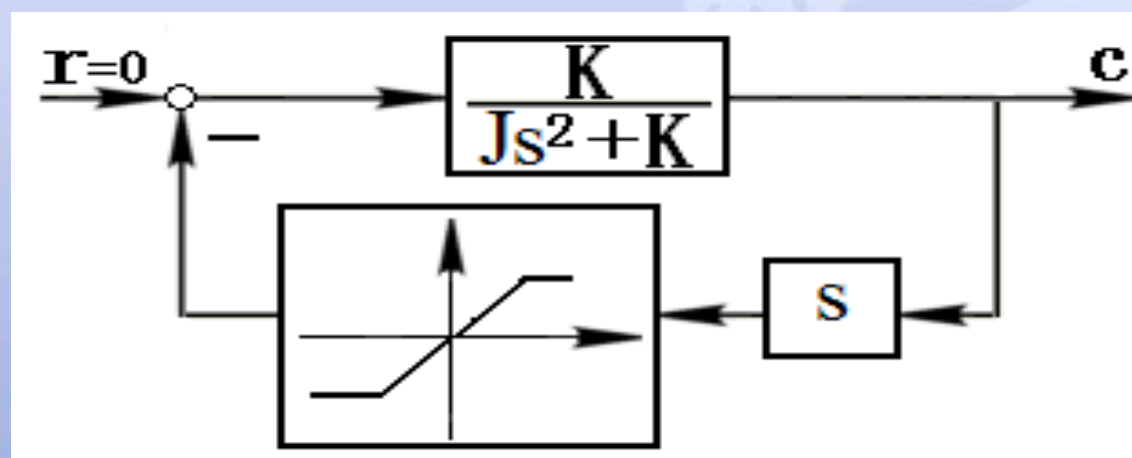
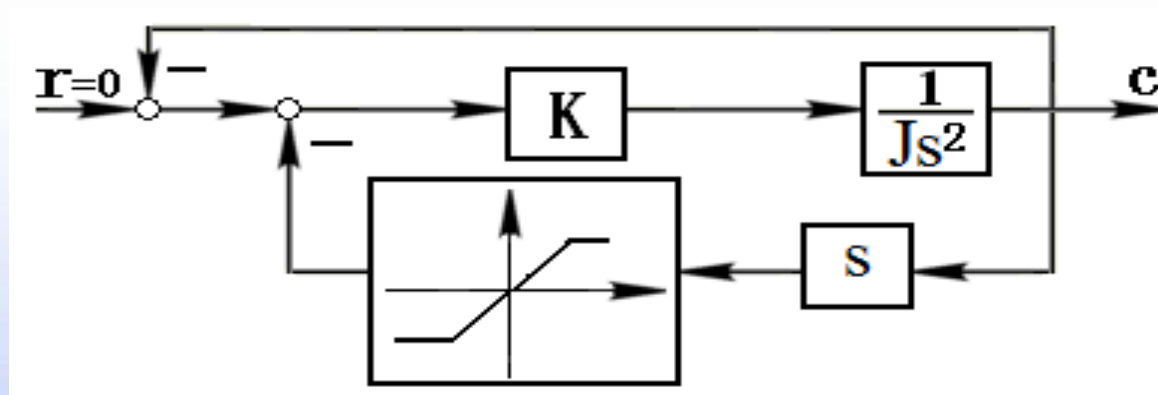
$$D(s) = Js^2 + K + KsN(x) = 0$$

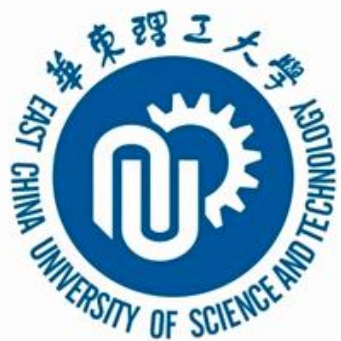
$$KsN(x) = -(Js^2 + K)$$

$$N(x) \cdot \frac{Ks}{Js^2 + K} = -1$$

$$\therefore G^*(s) = \frac{Ks}{Js^2 + K}$$

解法二：用结构图等效化简法：





2) 非线性系统工程描述函数分析方法举例(5)

例 非线性系统结构图如右图所示,

已知:
$$\begin{cases} G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}, & G_2(s) = \frac{K}{s} \\ N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} & (A \geq h) \end{cases}$$

((1)) $G_3(s) = 1$ 时, 系统是否自振?

确定使系统自振的K值范围; 求K=2时的自振参数。

(2) $G_3(s) = s$ 时, 分析系统的稳定性。

解 先将系统结构图化为典型结构

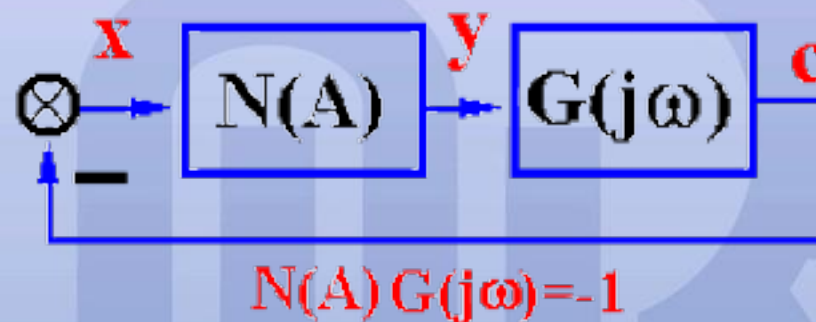
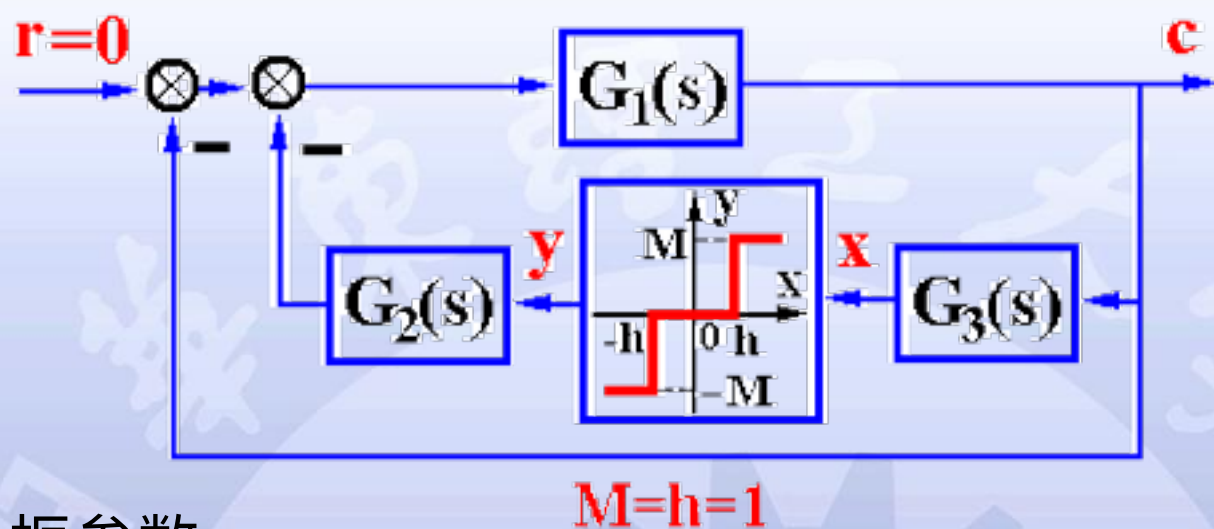
解法I 等效变换法

解法II 特征方程法

$$G(s) = \frac{G_1}{1 + G_1} G_2 G_3$$

$$\Phi(s) = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2 G_3 N + G_1}$$

$$D(s) = 1 + G_1 G_2 G_3 N + G_1 = 0$$



$$N \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1} = -1 \quad G(s) = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1}$$



2) 非线性系统工程描述函数分析方法举例(6)

例5 非线性系统结构图如下图所示，用描述函数法说明系统是否自振，并确定使系统稳定的初值(A)范围。

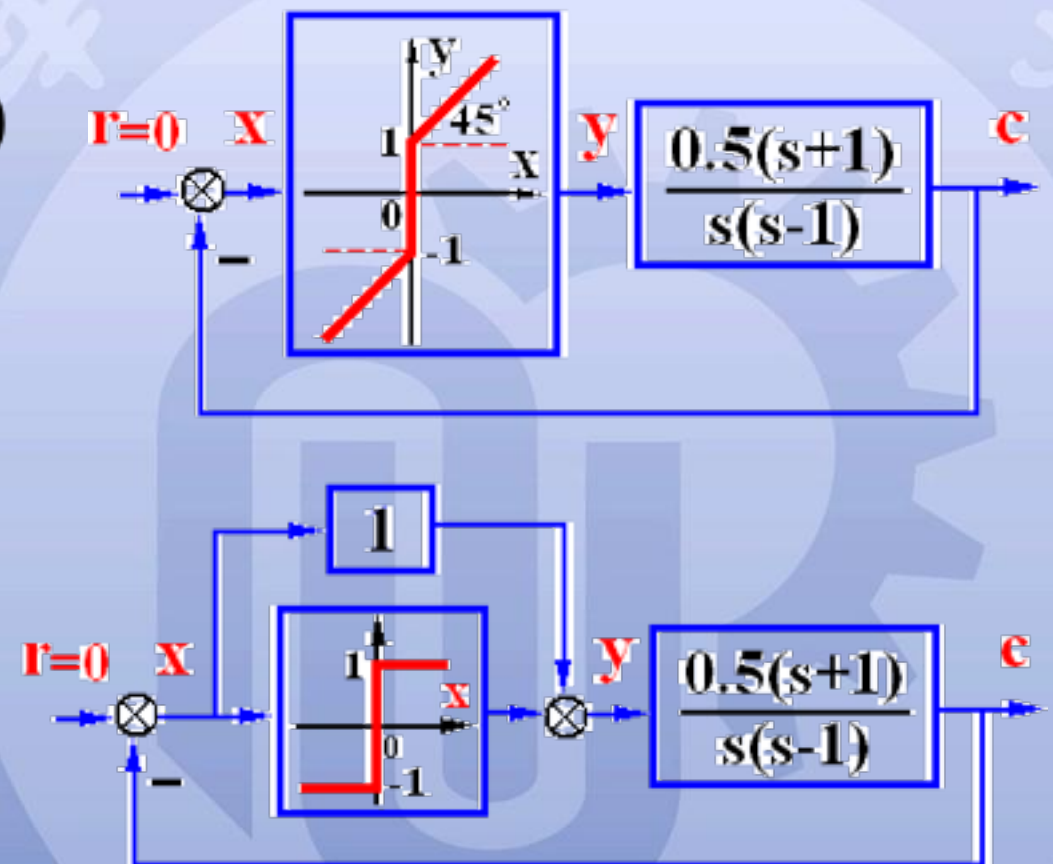
解 将系统结构图等效变换，求等效 $G^*(s)$

$$D(s) = 1 + N(A) \cdot G_1(s) + G_1(s) = 0$$

$$N(A) \cdot G_1(s) = -[1 + G_1(s)]$$

$$N(A) \cdot \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)} = -1$$

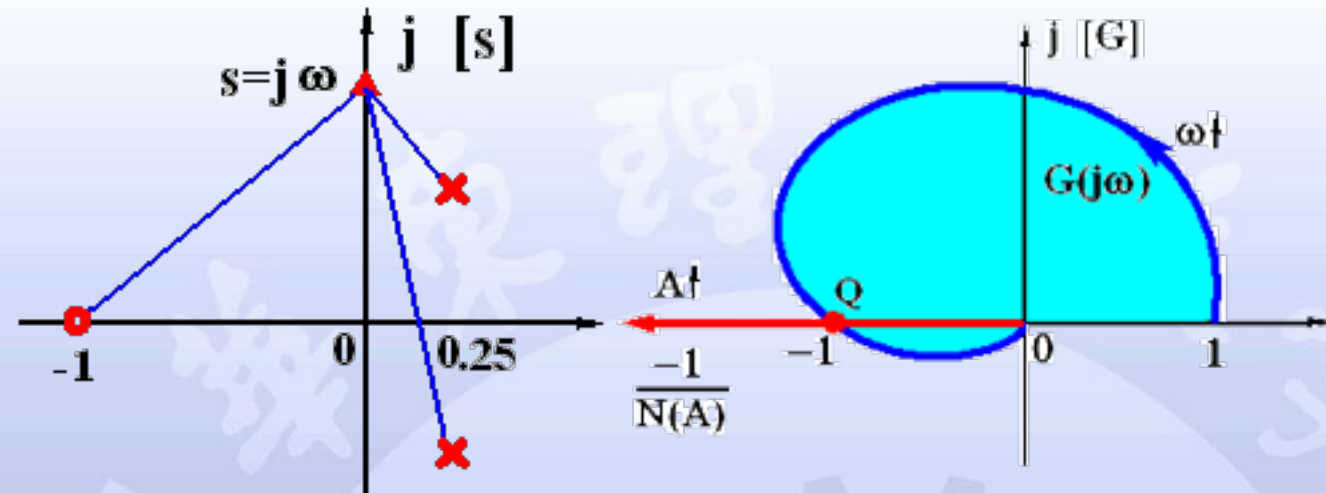
$$G^*(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)} = \frac{0.5(s+1)}{s^2 - 0.5s + 0.5}$$





$$G^*(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)} = \frac{0.5(s+1)}{s^2 - 0.5s + 0.5}$$

$$G^*(j\omega) \begin{cases} G^*(j0) = 1 \angle -360^\circ \\ G^*(j\infty) = 0 \angle -90^\circ \end{cases}$$



Q : 从稳定区穿到不稳定区的点 — 不是自振点

分析可知：使系统稳定的初始扰动范围为

$$0 \leq A < A_Q$$

$$\text{令 } N(A) \cdot G(j\omega) = \frac{4M}{\pi A} \cdot \frac{0.5(1+j\omega)}{0.5 - \omega^2 - j0.5\omega} \stackrel{M=1}{=} \frac{4}{\pi A} \cdot \frac{1+j\omega}{1 - 2\omega^2 - j\omega} = -1$$

$$\frac{4}{\pi A}(1+j\omega) = -1 + 2\omega^2 + j\omega \quad \begin{cases} 4/(\pi A) = 1 \\ 2\omega^2 - 1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A_Q = 1.273 \\ \omega = 1 \end{cases}$$

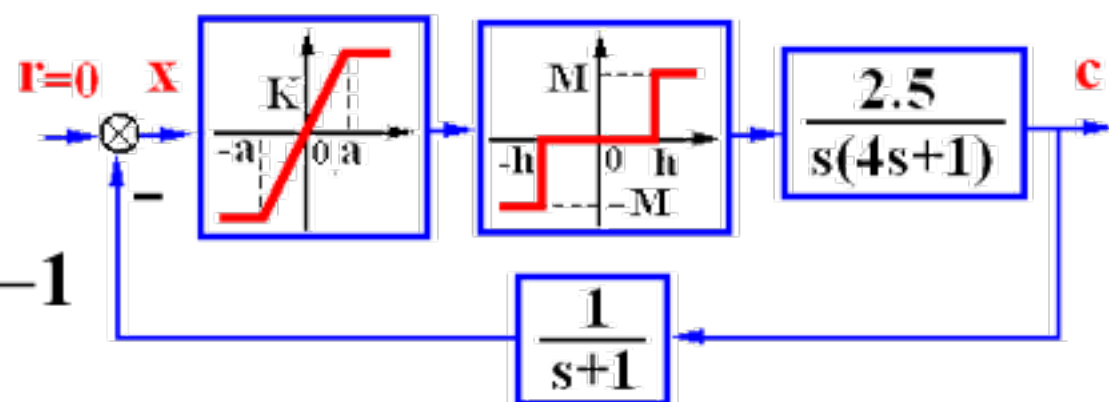
2) 非线性系统工程描述函数分析方法举例(7)

例6 非线性系统如图所示 $a = M, h = 1, K = 2$, 分析系统是否存在自振; 若存在自振, 确定输出端信号 $c(t)$ 的振幅和频率。

解 将两非线性环节等效合并, 结构图化为

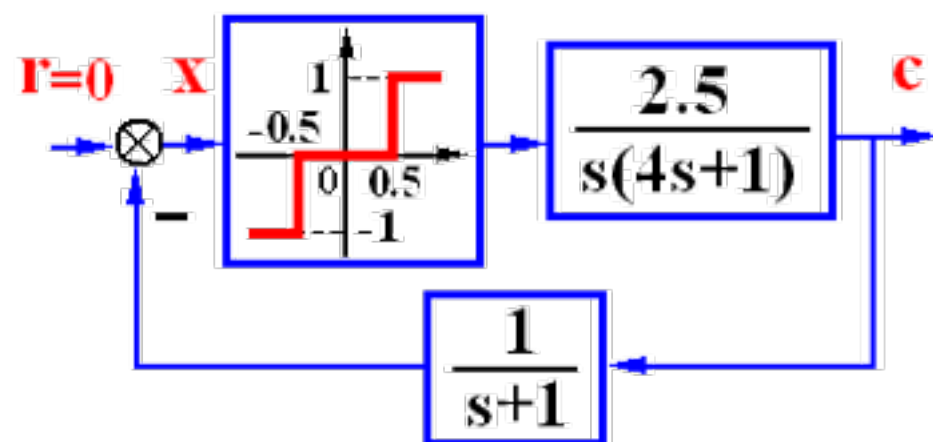
依自振条件 $N(A) \cdot G(j\omega) = -1$

$$\frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{\hat{h}}{A}\right)^2} \cdot \frac{2.5}{j\omega(1+j\omega)(1+j4\omega)} = -1$$



$$\begin{aligned} \frac{10}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - 0.5^2} &= -j\omega(1 - 4\omega^2 + j5\omega) \\ &= 5\omega^2 - j\omega(1 - 4\omega^2) \end{aligned}$$

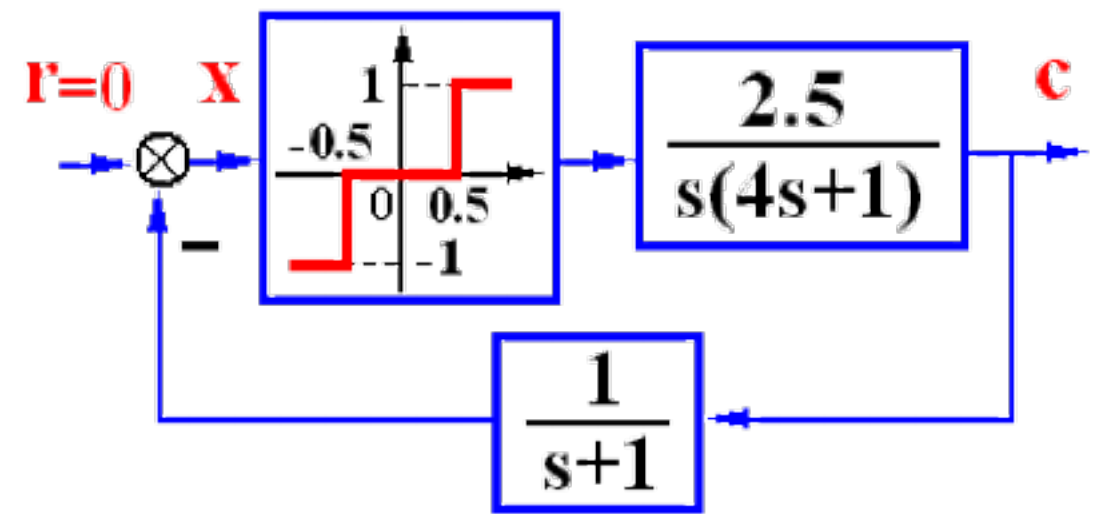
比较虚实部 $\begin{cases} \omega = 0.5 \\ \frac{10}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - 0.5^2} = 5 \times 0.5^2 = 1.25 \end{cases}$



$$\begin{cases} \omega = 0.5 \\ \frac{10}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - 0.5^2} = 5 \times 0.5^2 = 1.25 \end{cases}$$

$$A^4 - 6.486A^2 + 1.621 = 0$$

$$A^2 = \begin{cases} 0.2605 \\ 6.2241 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = 0.5104 \\ A_2 = 2.495 \end{cases}$$

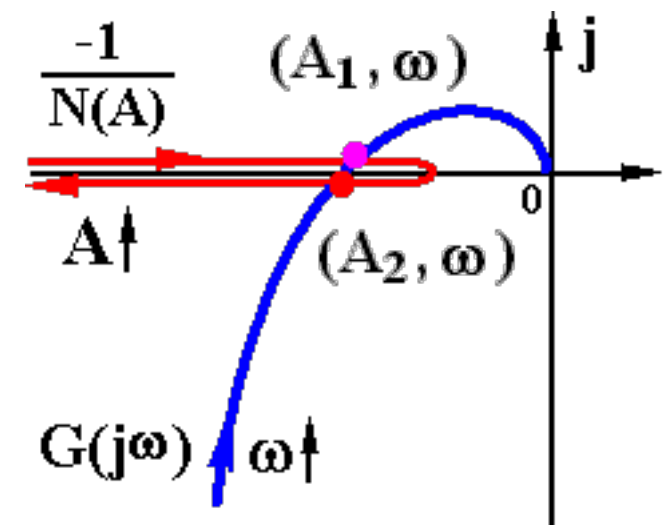


分析可知：系统存在自振 $\begin{cases} \omega = 0.5 \\ A = A_2 = 2.495 \end{cases}$

$$\frac{|x|}{|c|} = \frac{A}{A_c} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \stackrel{\omega=0.5}{=} \frac{1}{\sqrt{1.25}} = 0.894$$

$$A_c = \frac{A}{0.894} = \frac{2.495}{0.894} = 2.79$$

$$\begin{cases} \omega = 0.5 \\ A_c = 2.79 \end{cases}$$



7.3 相平面法

7.3.1 相平面的基本概念

(1) 相平面和相轨迹

相平面：

由系统变量及其导数构成的用以描述系统状态的平面。

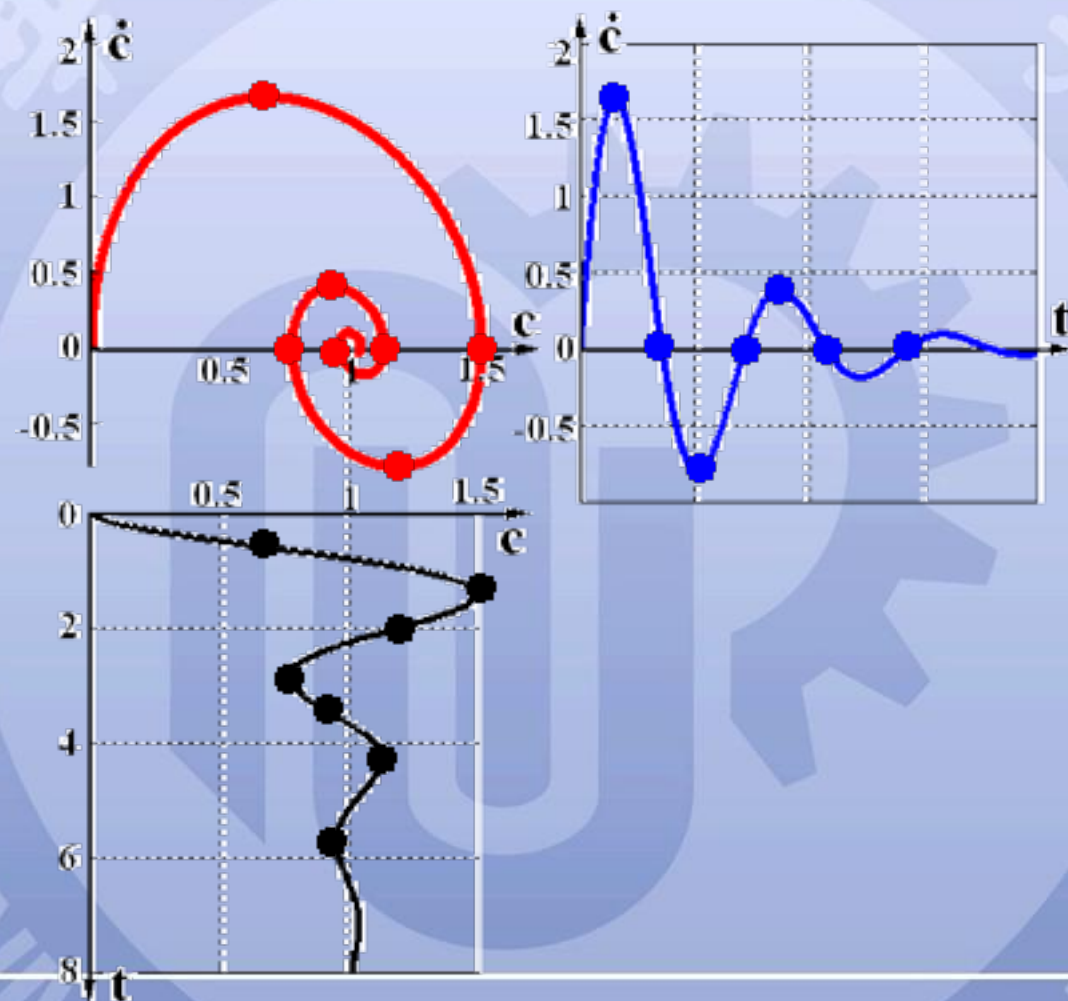
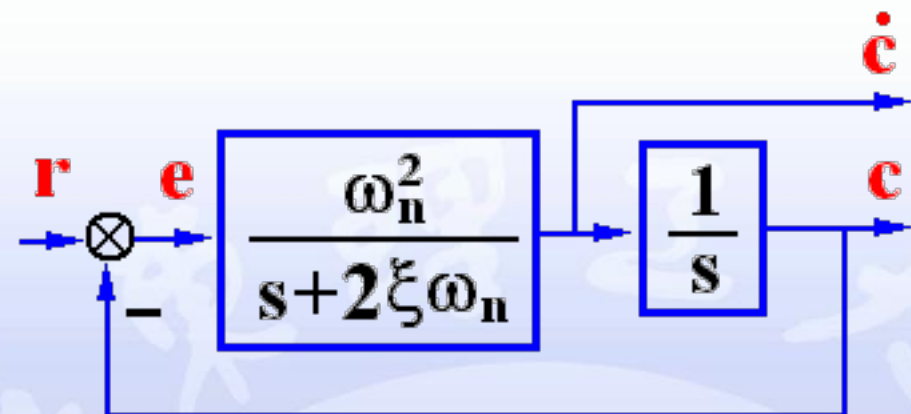
相轨迹：

在一定初始条件下，系统变量及其导数随时间变化在相平面上描绘出来的轨迹。

例 单位反馈系统

$$G(s) = \frac{5}{s(s+1)} \quad \begin{cases} \omega_n = 2.236 \\ \xi = 0.2236 \end{cases}$$

$$r(t) = 1(t)$$





(2) 相平面图

所用可能初始条件下绘制的相轨迹簇，称为相平面图。

(3) 相轨迹的性质

设系统方程为： $\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$

运动方向 $\left\{ \begin{array}{l} \text{上半平面 } \dot{x} > 0 \text{ — 向右移动} \\ \text{下半平面 } \dot{x} < 0 \text{ — 向左移动} \end{array} \right\}$ 顺时针运动

通过横轴时 ($\dot{x} = 0$)，以 90° 穿越 x 轴

奇点 (平衡点)： 相轨迹上斜率不确定的点

$$a = \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{d\dot{x}/dt}{dx/dt} = \frac{-f(x, \dot{x})}{\dot{x}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

对于线性定常系统，原点是惟一的平衡点。

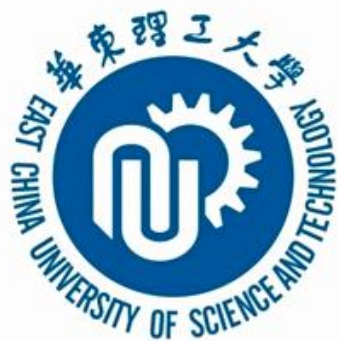


奇点的物理解释

奇点是相平面上无穷多条相轨迹的汇合点，每条相轨迹以不同的斜率进入该点，而相轨迹到该点后不会再运动，此时 $\dot{x} = 0$ ，系统达到平衡态。

对于非线性系统，奇点(平衡点)可以有多个，奇点必然出现在X轴上。

在相平面上，除奇点外，不同初始条件的相轨迹不会相交。



7.3.2 相平面图的绘制

1) 解析法

例2 设系统方程为 $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$,
试绘制系统的相轨迹。

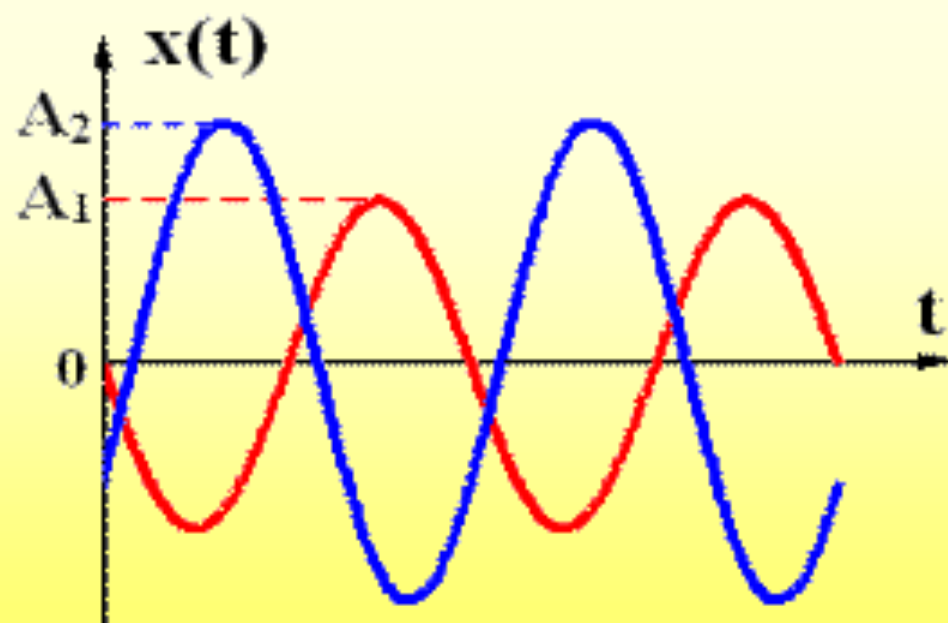
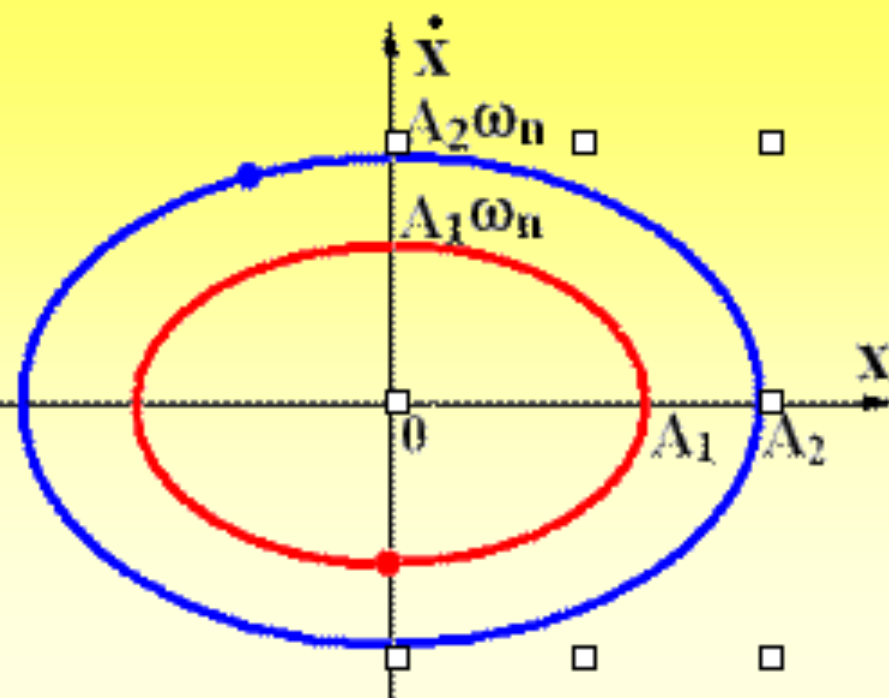
解 $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -\omega_n^2 x$

$$\dot{x} \cdot d\dot{x} = -\omega_n^2 x \cdot dx$$

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = -\frac{\omega_n^2}{2} \cdot x^2 + C$$

$$x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_n^2} = \frac{2C}{\omega_n^2} = A^2$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2 \omega_n^2} = 1 \quad \text{— 椭圆方程}$$





2) 等倾斜线法绘制相平面图

系统方程 $\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -f(x, \dot{x})$$

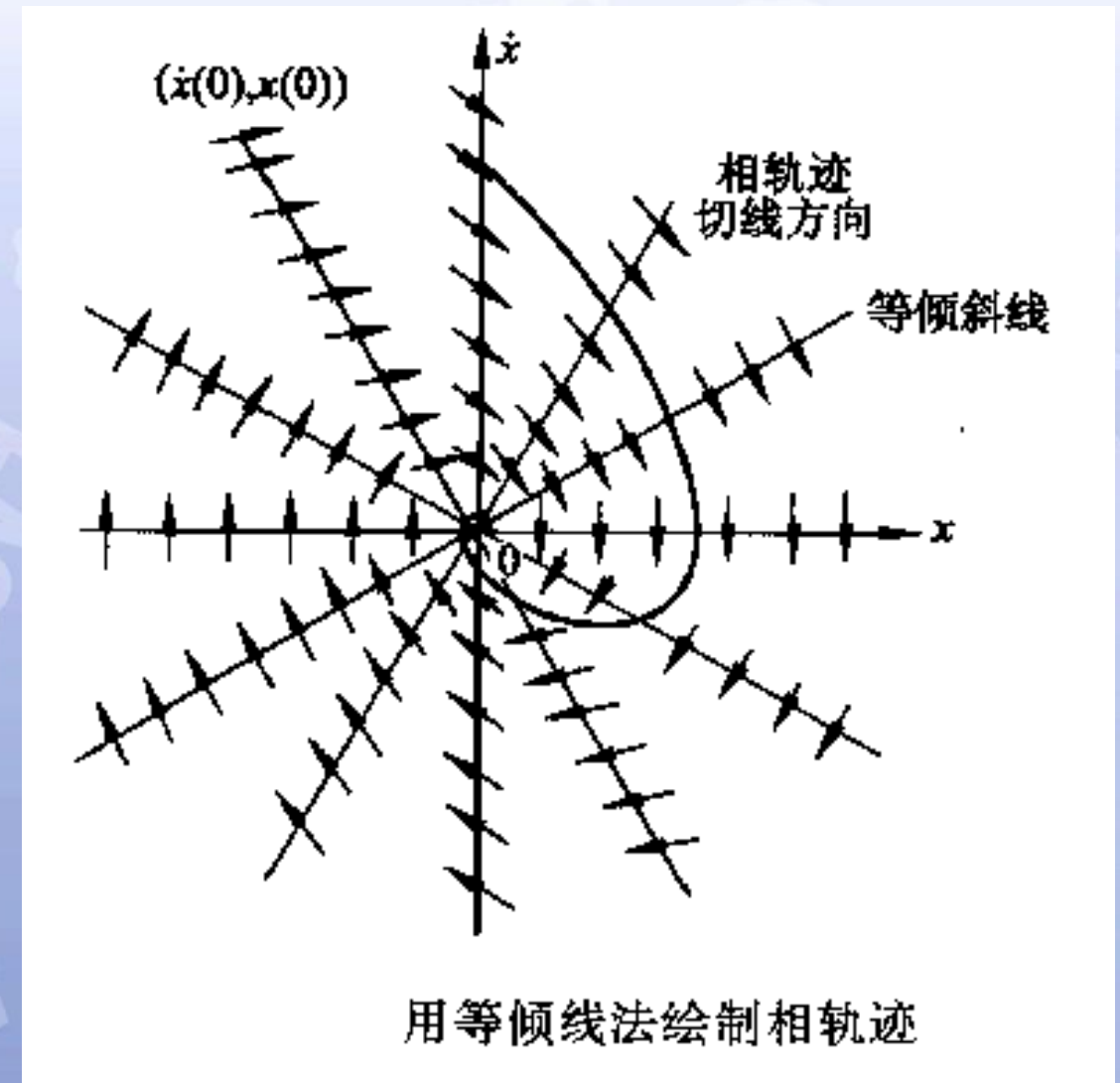
$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{-f(x, \dot{x})}{\dot{x}}$$

$$a = \frac{-f(x, \dot{x})}{\dot{x}}$$

等倾斜线 —— 相轨迹斜率为常数的曲线

等倾斜线法绘制相平面图

对于若干不同的 α 常数，可以在相平面上绘制出相对应的等倾线，在等倾线上各点作斜率为 α 的有向短直线表示切线方向，构成相轨迹的切线方向场。





等倾线法绘制相平面图举例

系统方程 $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ ，用等倾斜线法绘制系统相轨迹图。

解

$$\ddot{x} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -(x + \dot{x})$$

$$a = \frac{-(x + \dot{x})}{\dot{x}}$$

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = a = \frac{-f(x, \dot{x})}{\dot{x}}$$

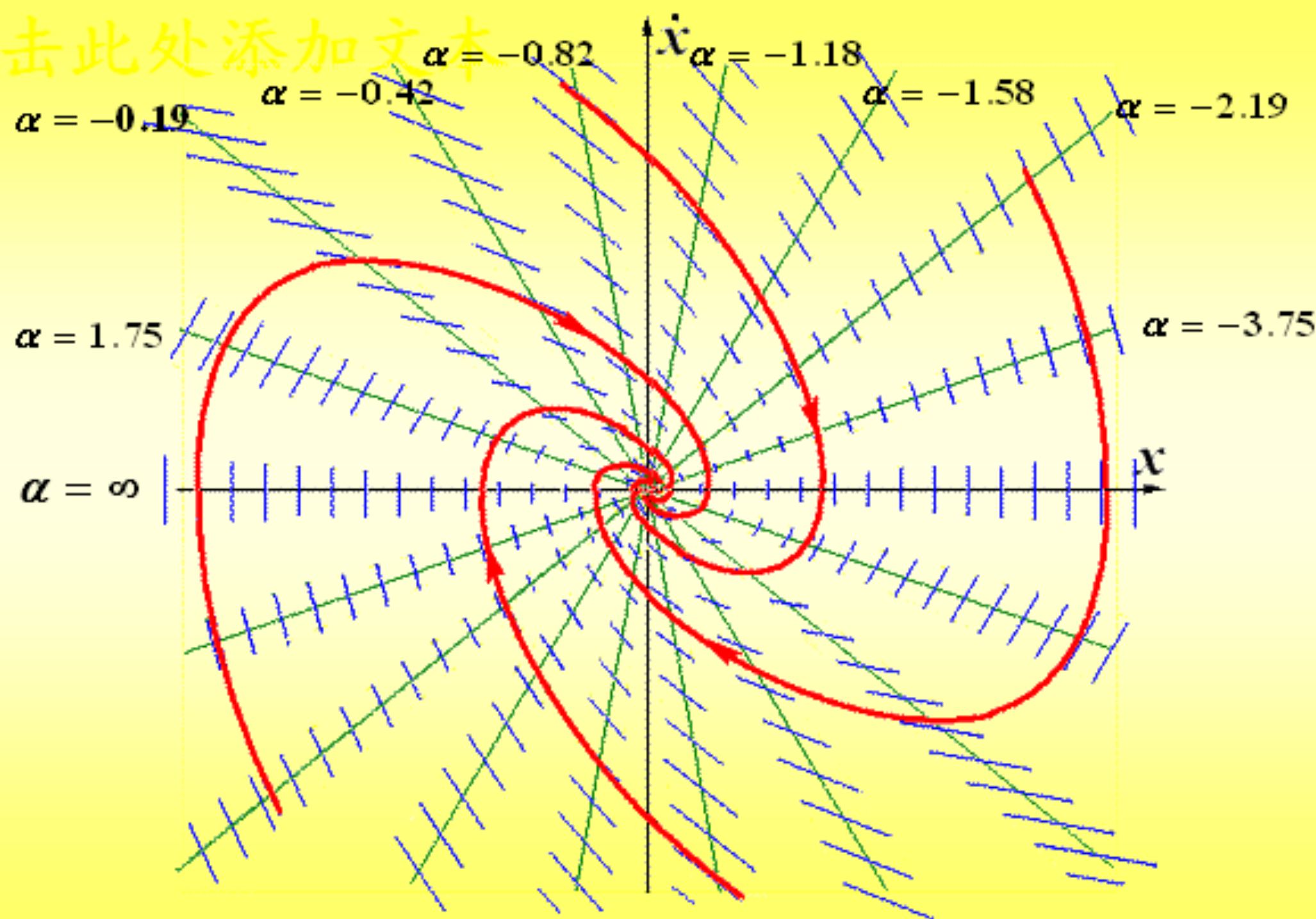
等倾斜线方程

$$\dot{x} = \frac{-x}{1+a}$$

$$(1+a)\dot{x} = -x$$

α	-3.75	-2.19	-1.58	-1.18	-0.82	-0.42	0.19	1.75	∞
$\dot{x} = \frac{-x}{1+\alpha}$	0.36	0.84	1.73	5.67	-5.76	-1.73	-0.84	-0.36	0.00
β	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	180°

• 单击此处添加文本



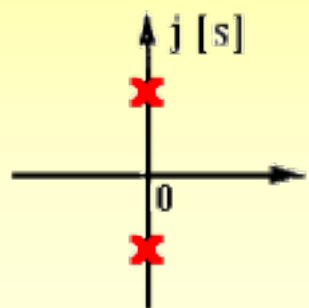
7.3.3 线性系统的相轨迹

二阶系统的相轨迹

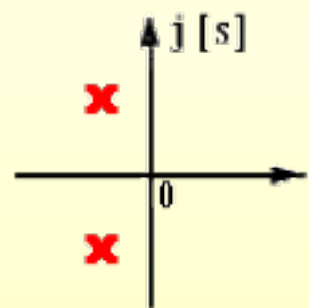
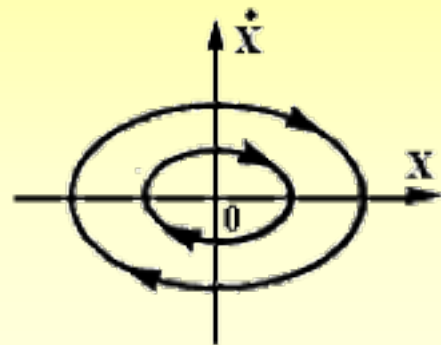
$$\ddot{c} + 2\zeta\omega_n\dot{c} + \omega_n^2 c = 0$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

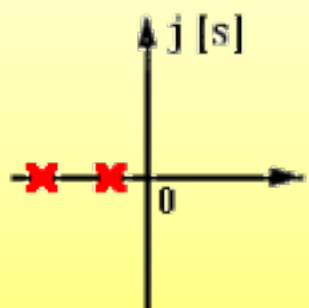
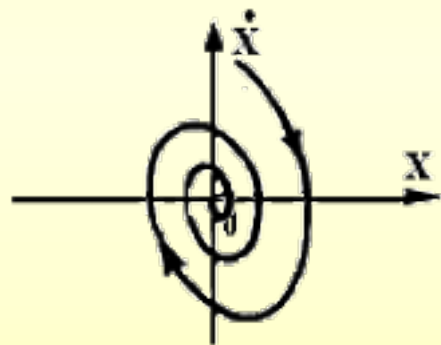
极点分布 奇点 相迹图



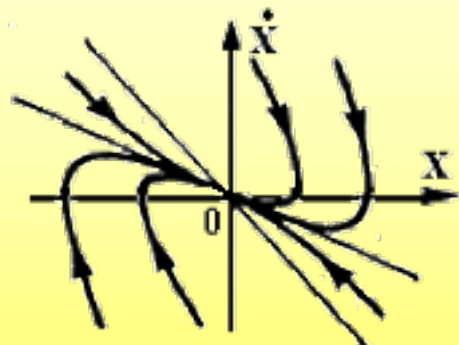
中心点



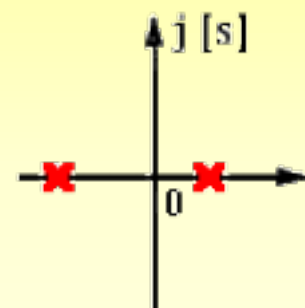
稳定的
焦点



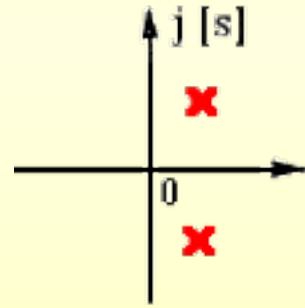
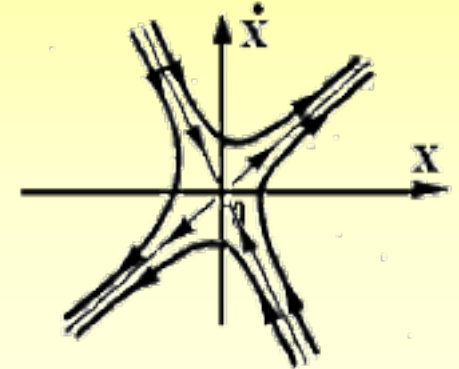
稳定的
节点



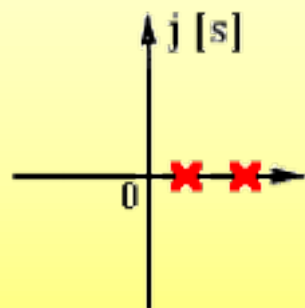
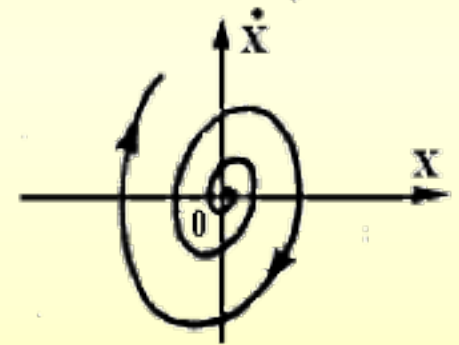
极点分布 奇点 相迹图



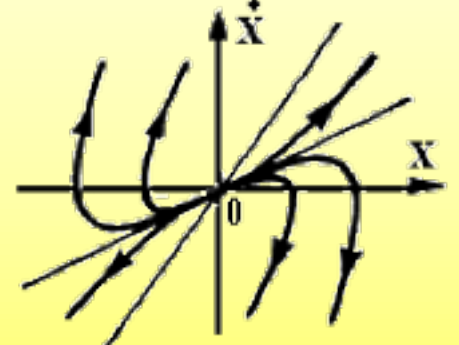
鞍点



不稳定的
焦点



不稳定的
节点





7.4.4 非线性系统的相平面分析

对于非线性系统，通常有多个奇点，每个奇点附近的相轨迹可以视描述非线性过程的函数情况采用不同的方法处理：

(1) 对于非线性系统采用解析的微分方程描述的系统，可以通过在平衡点处线性化微分方程，基于近似的二阶线性系统的特征根分布，确定奇点的类型，进而确定平衡点附近的相轨迹运动形式。

$$\ddot{x} = - \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} (x - x_0) - \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} (\dot{x} - \dot{x}_0)$$



(2) 若非线性系统不能采用解析的微分方程描述，非线性系统中含有分段折线表示的常见非线性环节，可以根据非线性特性，将相平面划分若干个区域，在各个区域，非线性方程或满足解析条件或可直接表示为线性微分方程，分别分析。



非线性系统的相平面分析举例(1)

设系统方程为 $\ddot{x} + (3\dot{x} - 0.5)\dot{x} + x + x^2 = 0$

求系统的平衡点 x_e ，并判定平衡点附近相轨迹的性质。

解 令 $f(x, \dot{x}) = (3\dot{x} - 0.5)\dot{x} + x + x^2$

$$\begin{cases} \dot{x}_{e1} = 0 \\ x_{e1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_{e2} = 0 \\ x_{e2} = -1 \end{cases}$$
$$x + x^2 = x(1 + x) = 0$$

$$\ddot{x} = -\frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} (x - x_0) - \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} (\dot{x} - \dot{x}_0)$$

$$\ddot{x} - 0.5\dot{x} + x = 0$$

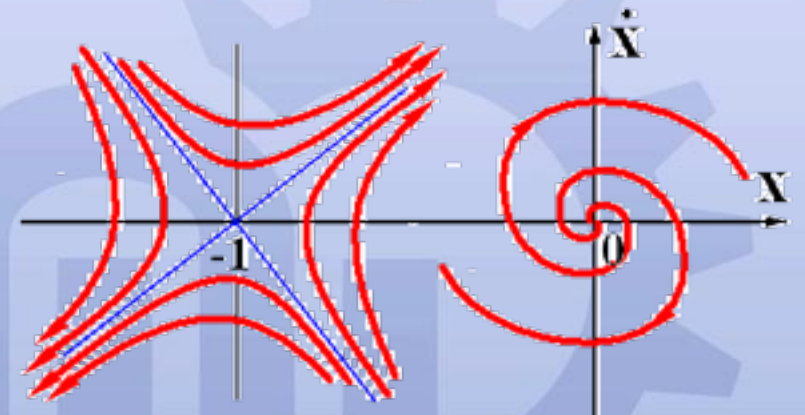
$$\ddot{x} - 0.5\dot{x} - (x + 1) = 0$$

特征方程 $\begin{cases} s^2 - 0.5s + 1 = 0 \\ s^2 - 0.5s - 1 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} s = 0.5 \pm j0.97 \\ s = \begin{cases} 0.78 \\ -1.28 \end{cases} \end{cases}$$

不稳定焦点

鞍点



非线性系统的相平面分析举例(2)

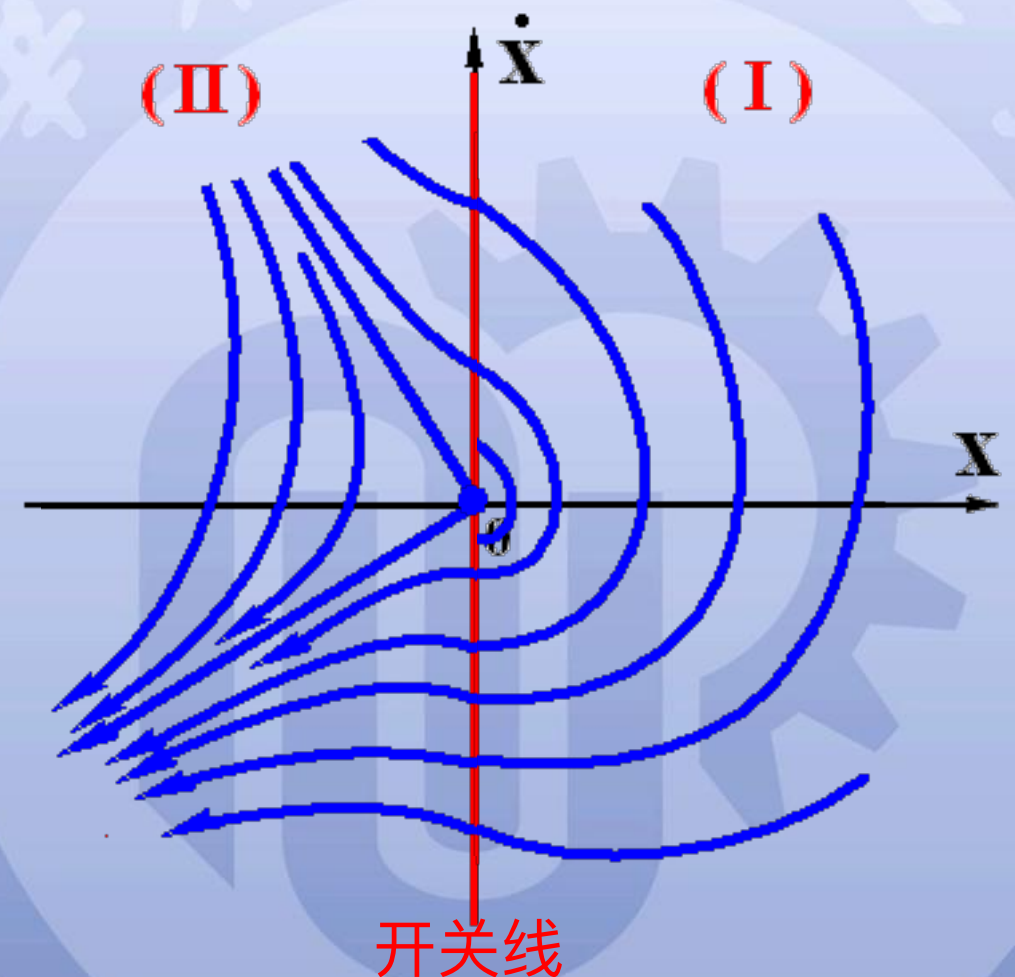
例 系统方程为 $\ddot{x} + \dot{x} + |x| = 0$ 分析系统的自由响应。

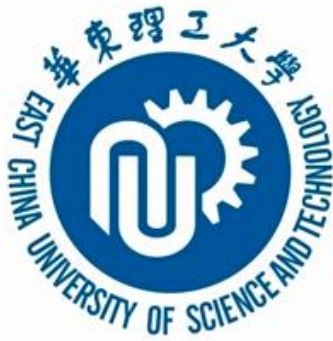
解
$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + x = 0 & x \geq 0 & \text{I} \\ \ddot{x} + \dot{x} - x = 0 & x < 0 & \text{II} \end{cases}$$

奇点
$$\begin{cases} \text{I} & x_{e1} = 0 \\ \text{II} & x_{e2} = 0 \end{cases}$$

特征方程
$$\begin{cases} \text{I} & s^2 + s + 1 = 0 \\ \text{II} & s^2 + s - 1 = 0 \end{cases}$$

极点
$$\begin{cases} s_{1,2} = -0.5 \pm j0.866 & \text{稳定焦点} \\ s_{1,2} = \begin{cases} 0.62 \\ -1.62 \end{cases} & \text{鞍点} \end{cases}$$





非线性系统的相平面分析举例(3)

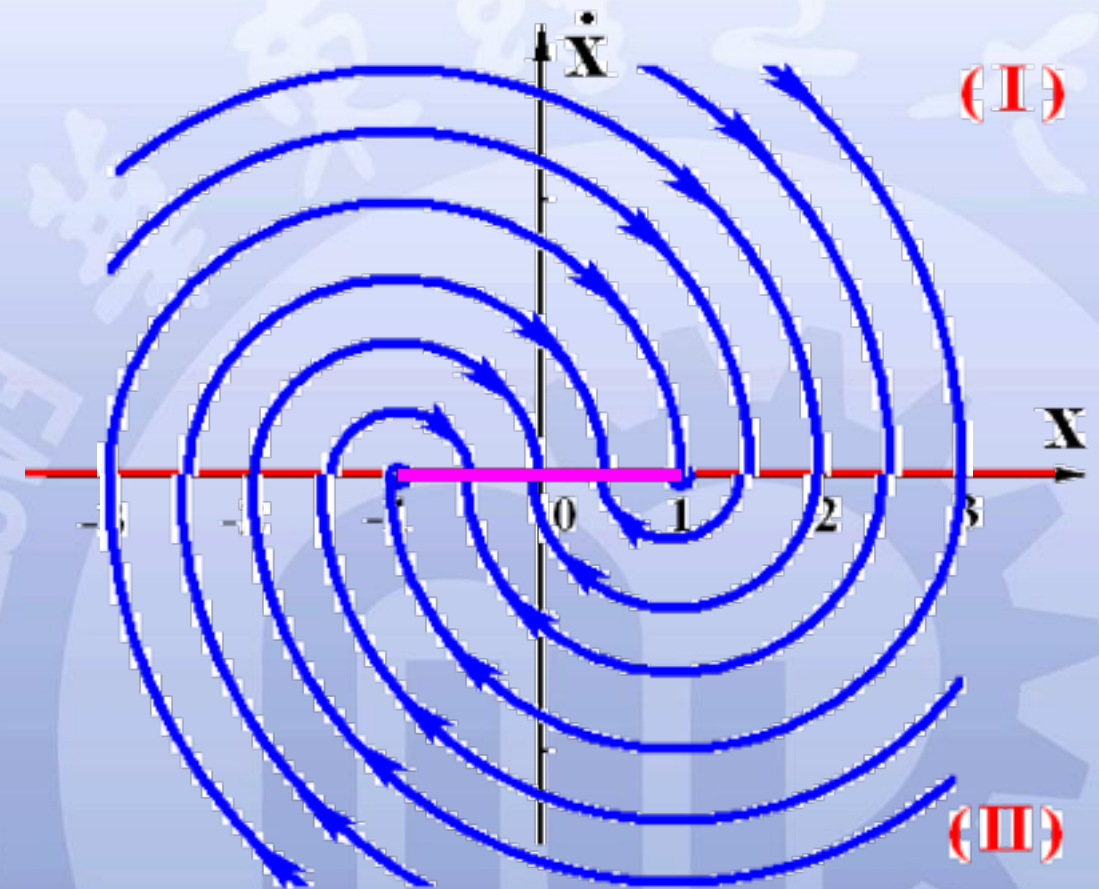
例 系统方程为 $\ddot{x} + x + \text{sign}\dot{x} = 0$ 分析系统的自由响应。

解
$$\begin{cases} \ddot{x} + x + 1 = 0 & \dot{x} \geq 0 & \text{I} \\ \ddot{x} + x - 1 = 0 & \dot{x} < 0 & \text{II} \end{cases}$$

奇点
$$\begin{cases} \text{I} & x_{e1} = -1 \\ \text{II} & x_{e2} = 1 \end{cases}$$

特征方程
$$\begin{cases} \text{I} & s^2 + 1 = 0 \\ \text{II} & s^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

极点
$$\begin{cases} s_{1,2} = \pm j1 & \text{中心点} \\ s_{1,2} = \pm j1 & \text{中心点} \end{cases}$$



开关线 —— 划分不同线性区域的边界线

平衡线 (奇线) —— 不同区域的相轨迹相互影响而产生



非线性系统的相平面分析举例(4)

例 系统如图, 已知 $\begin{cases} c(0) = 0 \\ r(t) = 4 \times 1(t) \end{cases}$ 确定开关线方程, 奇点

位置和类型, 绘制相平面图。

解

线性部分

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \ddot{c}(t) = u(t)$$

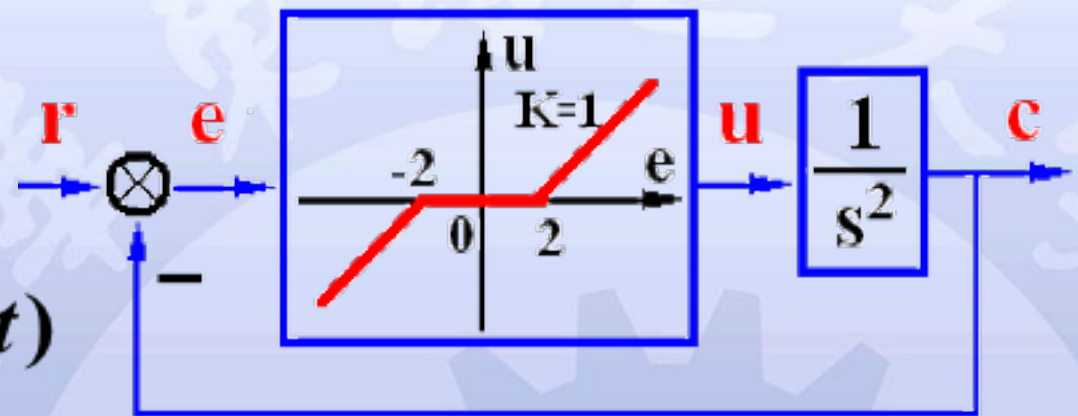
非线性部分

$$u = \begin{cases} 0 & |e| \leq 2 \quad (\text{I}) \\ e - 2 & e > 2 \quad (\text{II}) \\ e + 2 & e < -2 \quad (\text{III}) \end{cases}$$

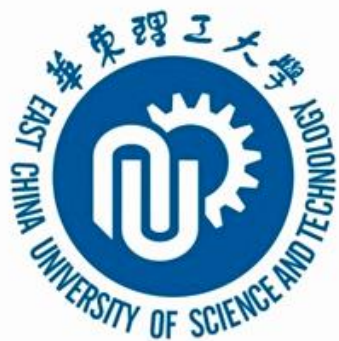
综合点

$$e = r - c = 4 - c$$

$$\begin{cases} c = 4 - e \\ \dot{c} = -\dot{e} \\ \ddot{c} = -\ddot{e} \end{cases} \quad \ddot{e} = -\ddot{c} = -u = \begin{cases} 0 & |e| \leq 2 \quad (\text{I}) \\ 2 - e & e > 2 \quad (\text{II}) \\ -2 - e & e < -2 \quad (\text{III}) \end{cases}$$



$$\text{开关线方程} \begin{cases} e = 2 \\ e = -2 \end{cases}$$

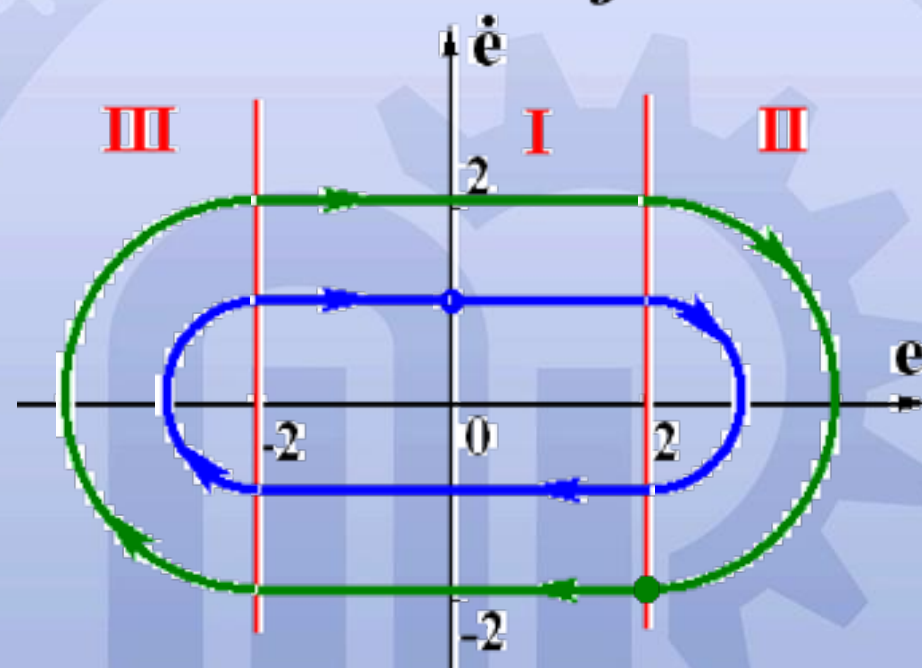
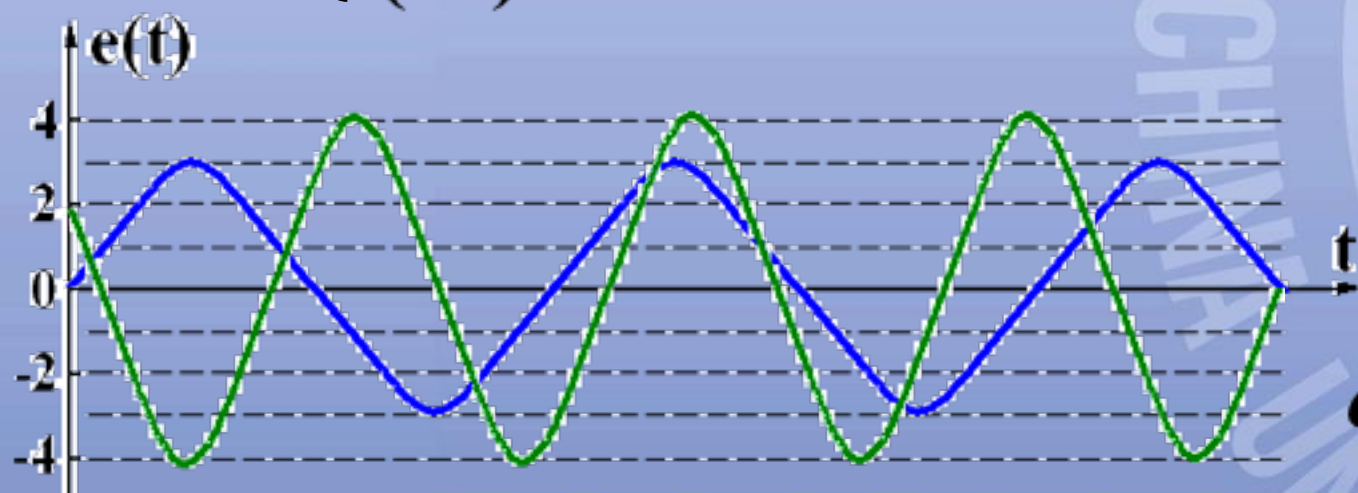


$$\ddot{e} = -\ddot{c} = -u = \begin{cases} 0 & |e| \leq 2 \quad (\text{I}) \\ 2 - e & e > 2 \quad (\text{II}) \\ -2 - e & e < -2 \quad (\text{III}) \end{cases}$$

区域	运动方程	奇点	特征方程	极点	奇点性质
----	------	----	------	----	------

奇点类型	I	$\ddot{e} = 0$	e_1	$s^2 = 0$	$s = 0$	
	II	$\ddot{e} + e - 2 = 0$	$e_2 = 2$	$s^2 + 1 = 0$	$s = \pm j$	中心点
	III	$\ddot{e} + e + 2 = 0$	$e_3 = -2$	$s^2 + 1 = 0$	$s = \pm j$	中心点

相轨迹	(I)	$\ddot{e} = 0$	$\dot{e} = C$	水平线
	(II)	以 $e_2 = 2$ 为中心的圆		
	(III)	以 $e_3 = -2$ 为中心的圆		



$c(t)$ 响应

$$\begin{cases} e = r - c \\ c = r - e = 4 - e \end{cases}$$



非线性系统的相平面分析举例(5)

例 系统如图, $r(t) = 1(t)$ $T = 0, 0.5$ 分别讨论系统运动。

解 线性部分

$$\ddot{c}(t) = u(t)$$

非线性部分

$$u = \begin{cases} 1 & e + T\dot{e} > 0 \quad (\text{I}) \\ -1 & e + T\dot{e} < 0 \quad (\text{II}) \end{cases}$$

比较点

$$e = r - c = 1 - c$$

整理

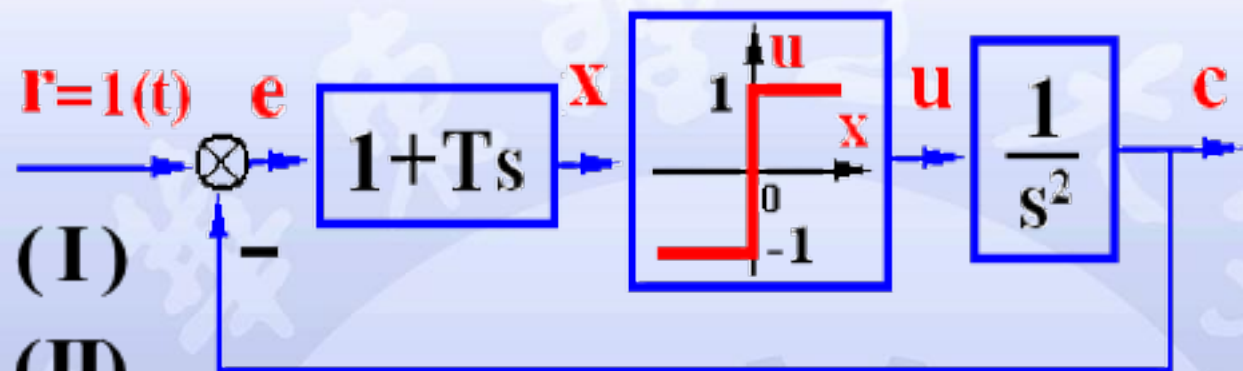
$$\ddot{e} = \begin{cases} -1 & e + T\dot{e} > 0 \quad (\text{I}) \\ 1 & e + T\dot{e} < 0 \quad (\text{II}) \end{cases}$$

在 I 区:

$$\ddot{e} = \frac{d\dot{e}}{de} \frac{de}{dt} = \dot{e} \frac{d\dot{e}}{de} = -1$$

同理在 II 区:

$$\text{当 } T = \begin{cases} 0 \\ 0.5 \end{cases} \text{ 时, 开关线为: } \begin{cases} e = 0 \\ \dot{e} = -2e \end{cases}$$



$$\text{开关线方程 } \dot{e} = \frac{-1}{T} e$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{e}^2 &= -2e + C_1 \\ \Rightarrow \dot{e}^2 &= 2e + C_2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Rightarrow \dot{e}^2 &= -2e + C_1 \\ \Rightarrow \dot{e}^2 &= 2e + C_2 \end{aligned}} \right\} \text{抛物线方程}$$

(I) $e + T\dot{e} > 0$

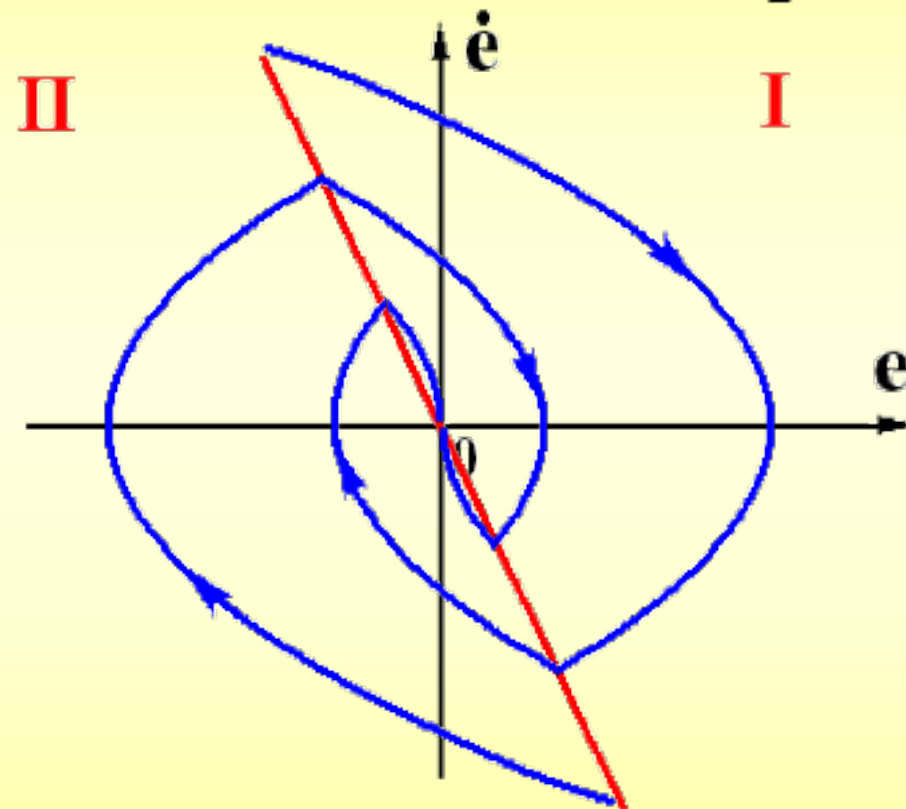
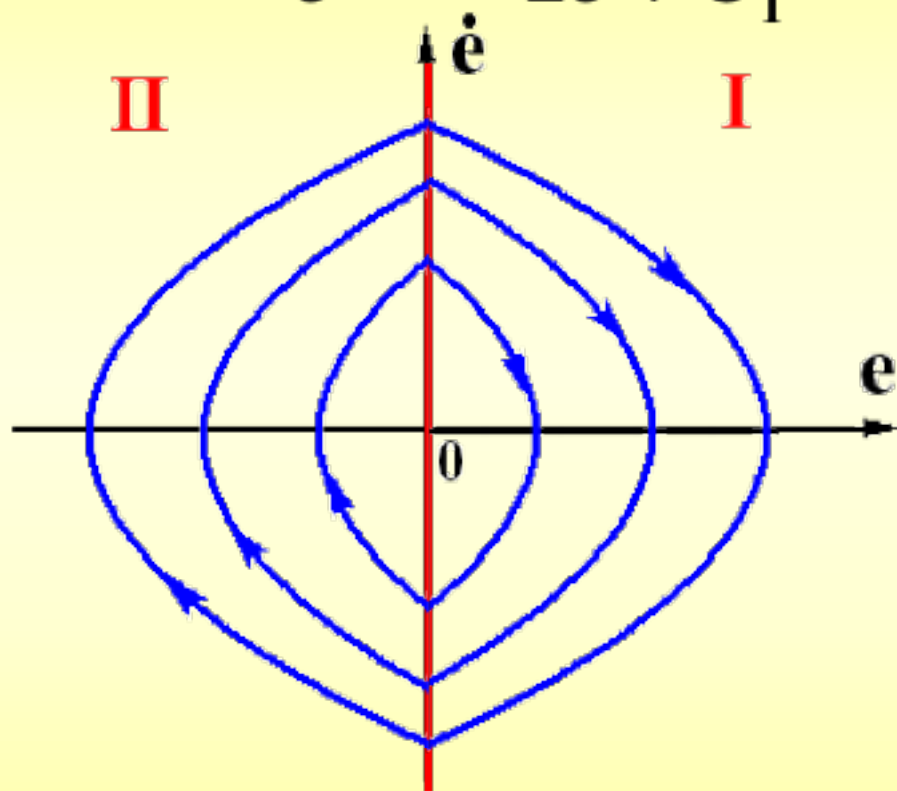
(II) $e + T\dot{e} < 0$

系统方程

$$\begin{cases} \ddot{e} = -1 \\ \dot{e}^2 = -2e + C_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{e} = 1 \\ \dot{e}^2 = 2e + C_2 \end{cases}$$

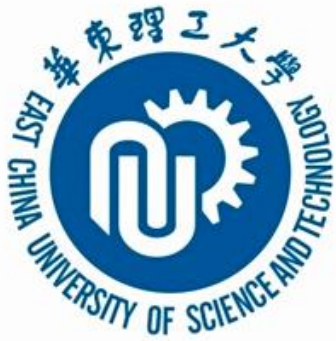
相轨迹图



开关线

$$\begin{cases} T = 0 \\ e = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = 0.5 \\ \dot{e} = -2e \end{cases}$$



非线性系统的相平面分析举例(6)

例 系统如图，在 $(c \sim \dot{c})$ 平面上分析系统的自由响应运动。

解 线性部分

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + s}$$

$$\ddot{c} + \dot{c} = u$$

非线性部分

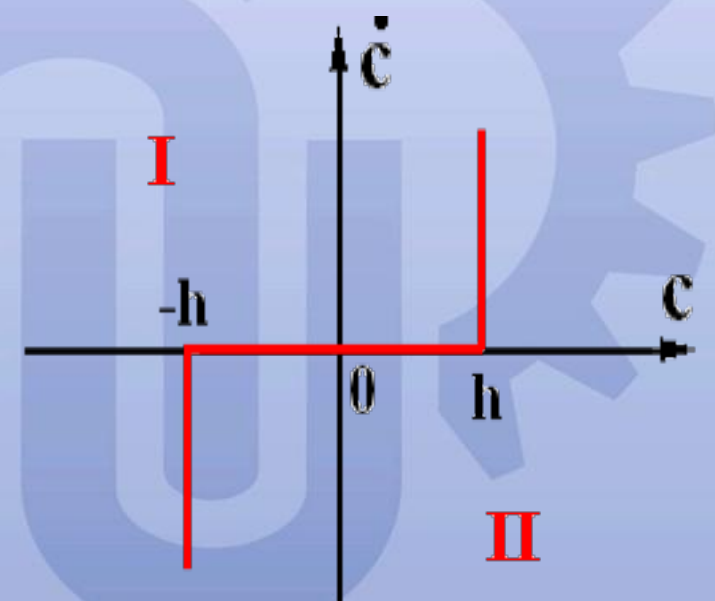
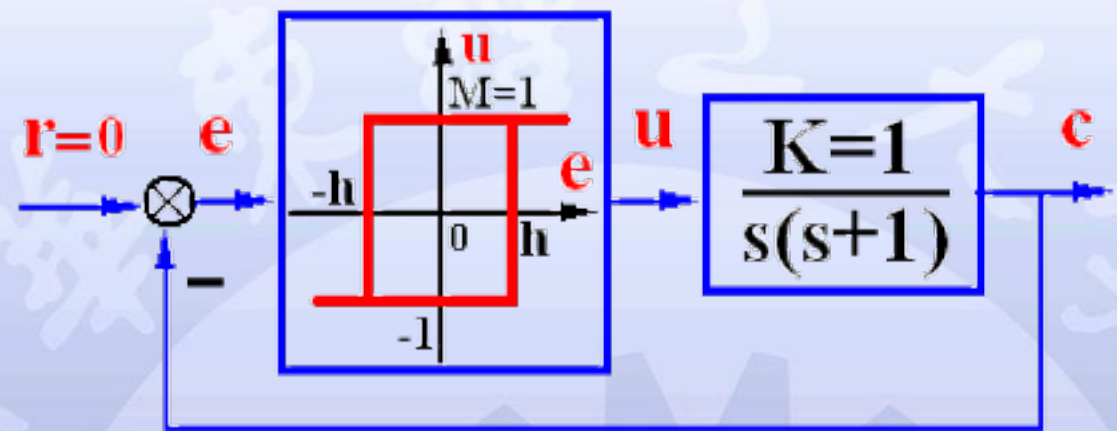
$$u = \begin{cases} 1 & \begin{cases} e > h \\ e > -h, \dot{e} < 0 \end{cases} \\ -1 & \begin{cases} e < -h \\ e < h, \dot{e} > 0 \end{cases} \end{cases}$$

比较点

$$e = r - c$$

整理

$$\ddot{c} + \dot{c} = u = \begin{cases} 1 & \begin{cases} c < -h \\ c < h, \dot{c} > 0 \end{cases} \\ -1 & \begin{cases} c > h \\ c > -h, \dot{c} < 0 \end{cases} \end{cases}$$



单击

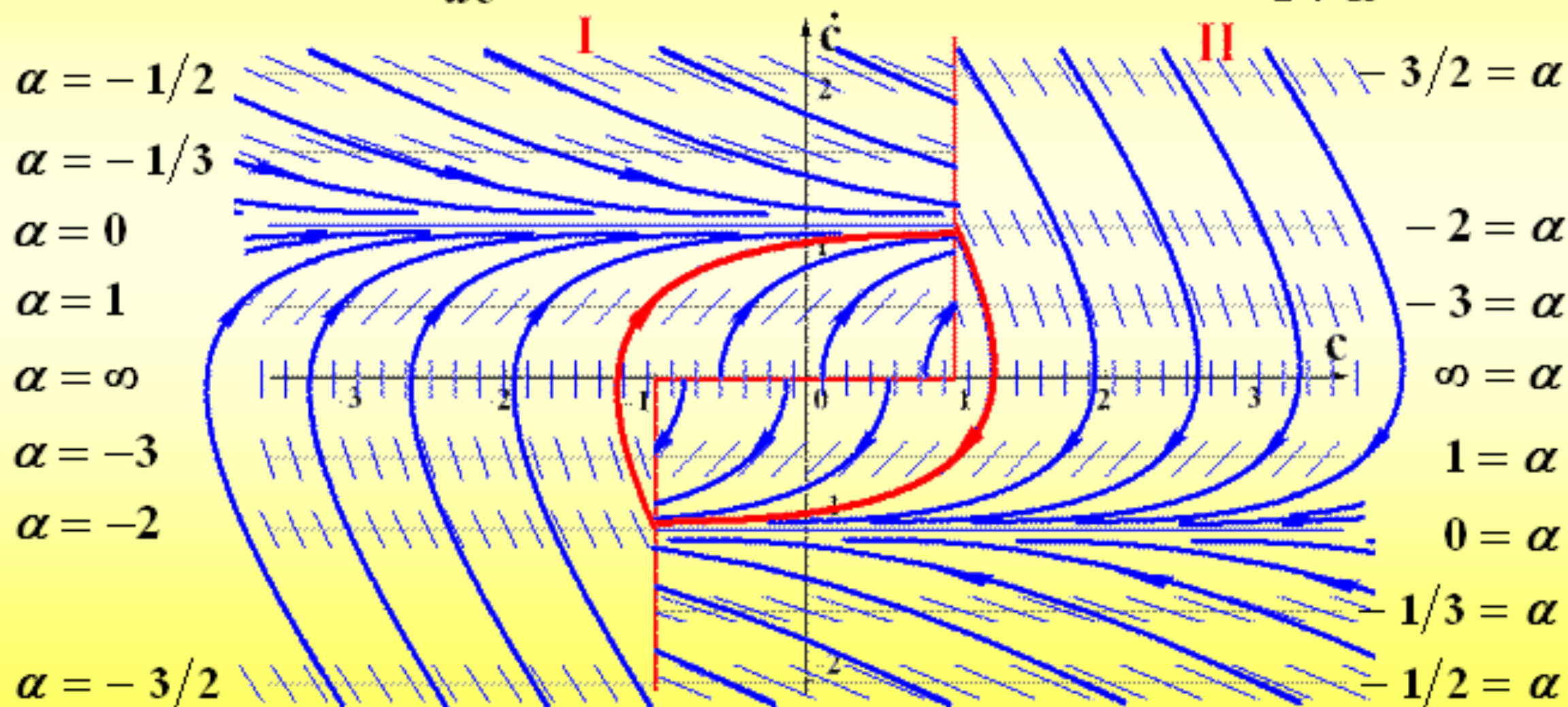
α	$-1/2$	$-1/3$	0	1	∞	-3	-2	$-3/2$
I $1/(1+\alpha)$	2	3/2	1	1/2	0	-1/2	-1	-2
II $-1/(1+\alpha)$	-2	-3/2	-1	-1/2	0	1/2	1	2

单击 (I) $\dot{c} = c \cdot \frac{d\dot{c}}{dc} = \alpha \dot{c} = 1 - \dot{c}$

等倾斜线 $\dot{c} = \frac{1}{1+\alpha}$

(II) $\ddot{c} = \dot{c} \cdot \frac{d\dot{c}}{dc} = \alpha \dot{c} = -1 - \dot{c}$

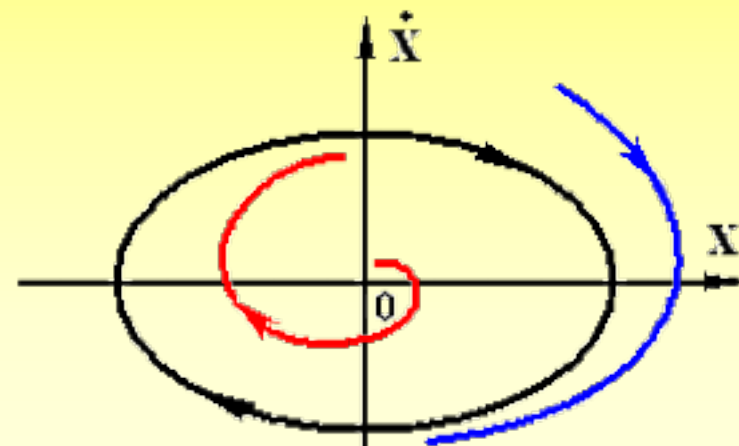
等倾斜线 $\dot{c} = \frac{-1}{1+\alpha}$



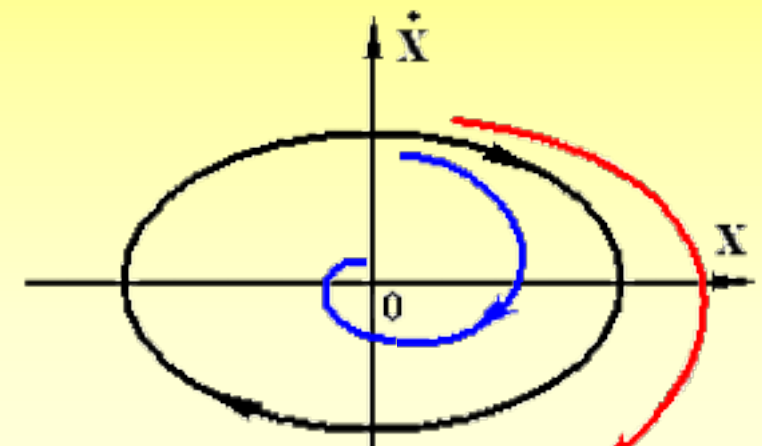
二阶系统极限环概念

极限环 —— 对应二阶非线性系统的周期运动

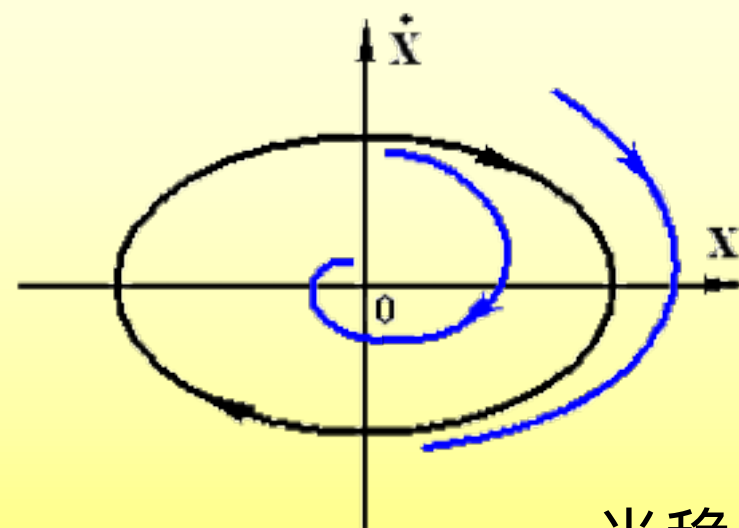
各类极限环



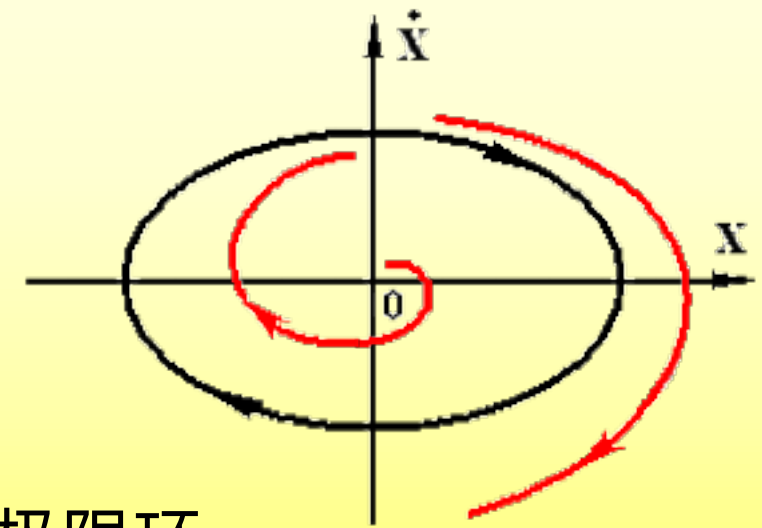
稳定的极限环



不稳定的极限环



半稳定的极限环





非线性系统的相平面分析举例(7)

例 系统如下，在 $(c \sim \dot{c})$ 平面上分析系统的自由响应运动。

解 线性部分

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + s}$$

$$\ddot{c} + \dot{c} = u$$

非线性部分

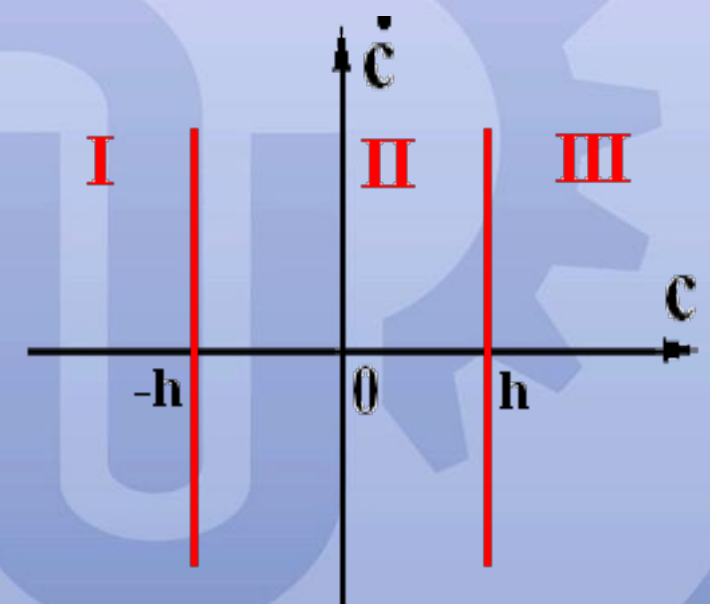
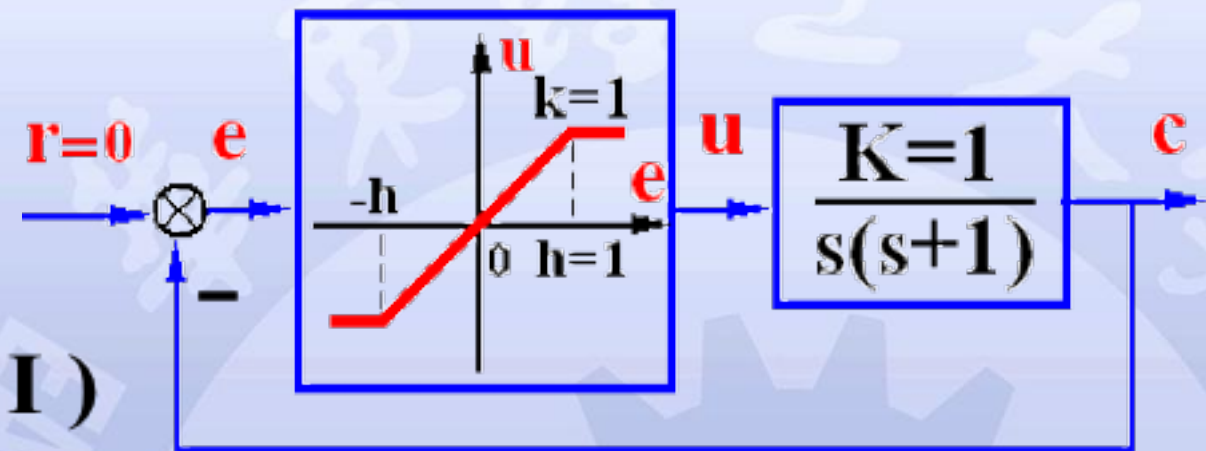
$$u = \begin{cases} 1 & e > h \quad (\text{I}) \\ e & |e| \leq h \quad (\text{II}) \\ -1 & e < -h \quad (\text{III}) \end{cases}$$

比较点

$$e = r - c = -c$$

整理

$$\ddot{c} + \dot{c} = u = \begin{cases} 1 & c < -h \quad (\text{I}) \\ -c & |c| \leq h \quad (\text{II}) \\ -1 & c > h \quad (\text{III}) \end{cases}$$



$$(I) \quad \ddot{c} = \dot{c} \cdot \frac{d\dot{c}}{dc} = \alpha \dot{c} = 1 - \dot{c}$$

$$\dot{c} = \frac{1}{1 + \alpha}$$

$$(II) \quad \ddot{c} = \dot{c} \cdot \frac{d\dot{c}}{dc} = \alpha \dot{c} = -(c + \dot{c})$$

$$\dot{c} = \frac{-c}{1 + \alpha}$$

$$(III) \quad \ddot{c} = \dot{c} \cdot \frac{d\dot{c}}{dc} = \alpha \dot{c} = -1 - \dot{c}$$

$$\dot{c} = \frac{-1}{1 + \alpha}$$

