电路原理

周期

信息学院　常青
changqing@ecust.edu.cn

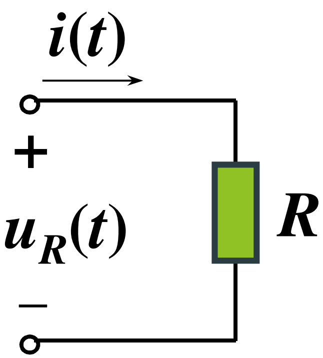
第9章 正弦稳态分析

——————正弦激励下动态电路的稳态响应

9.1 阻抗和导纳

一、元件特性的相量形式

1. 电阻



已知 $i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi)$

则 $u_R(t)=Ri(t)=\sqrt{2}RI\sin(\omega t+\psi)$

相量形式：

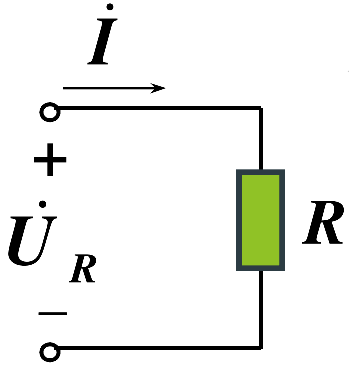
$\dot{I}=I\angle\psi$

$\dot{U}_R=RI\angle\psi$

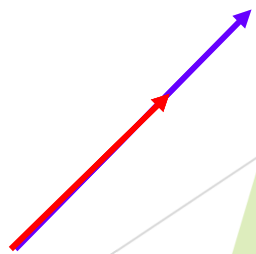
有效值关系：$U_R=RI$

相位关系：u , i 同相

相量关系

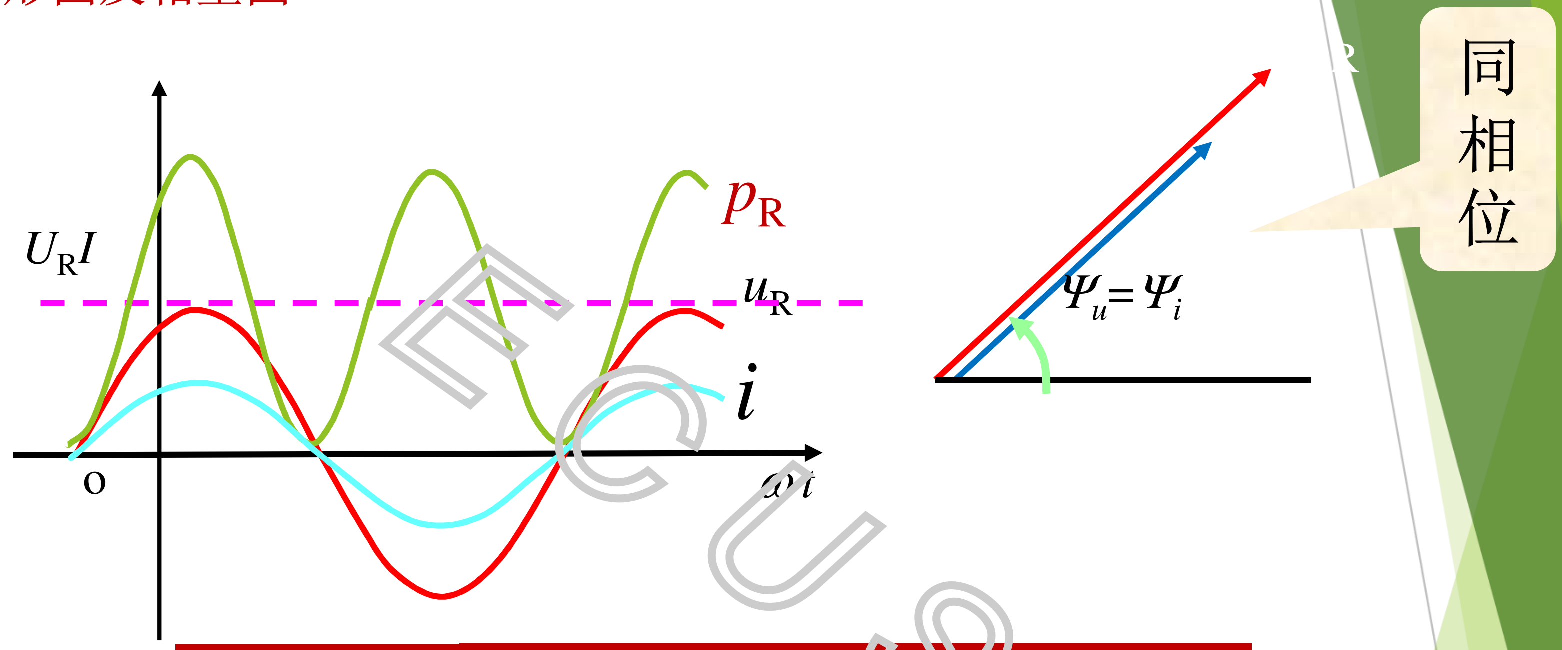


相量模型



相量图

波形图及相量图



瞬时功率 $p_R = u_R i = \sqrt{2}U_R \sqrt{2}I\cos^2(\omega t + \Psi_i)$

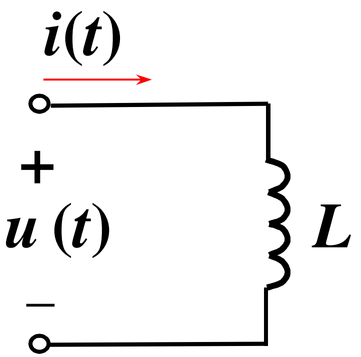
$$= U_R I[1+\cos 2(\omega t + \Psi_i)]$$

瞬时功率以2ω交变，始终大于零，表明电阻始终吸收功率

2. 电感

时域

频域



时域模型

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin\omega t$$

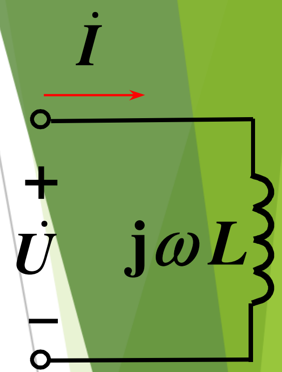
$$u(t)=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$=\sqrt{2}\omega L I\cos\omega t$$

$$=\sqrt{2}\omega L I\sin(\omega t+90^\circ)$$

$$\dot{I}=I\angle 0^\circ$$

$$\dot{U}=\mathrm{j}\omega L\dot{I}$$



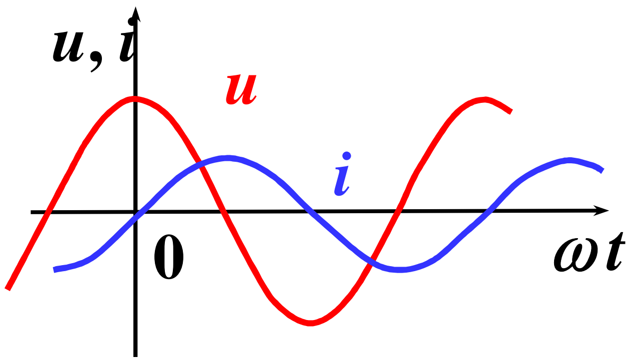
相量模型

有效值关系

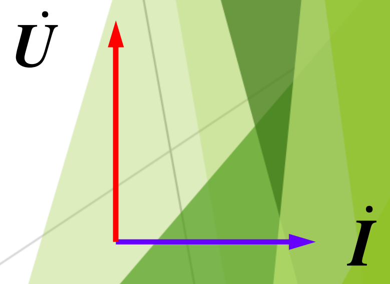
$U=\omega L I$

相位关系

u 超前 i 90°



波形图



相量图

$U = \omega L I$

$X_L = U/I = \omega L = 2\pi f L$，　单位：Ω

感抗(*inductive reactance*)

错误的写法

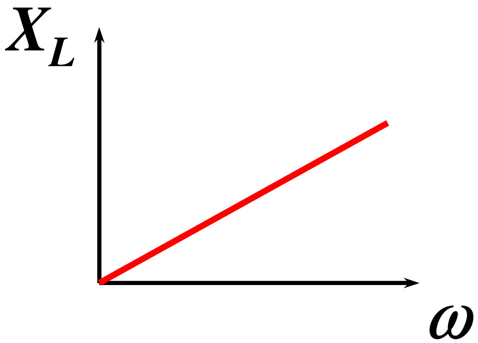
$\omega L \neq \dfrac{u}{i}$

$\omega L \neq \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}$

感抗的物理意义：

(1) 表示限制电流的能力；

(2) 感抗和频率成正比。

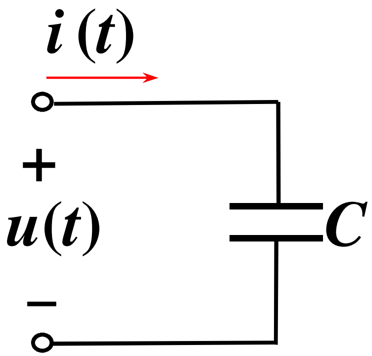


$\omega = 0$(直流)，$X_L = 0$，短路；

$\omega \to \infty$，$X_L \to \infty$，开路；

(3) 由于感抗的存在使电流落后电压。

3. 电容



时域模型

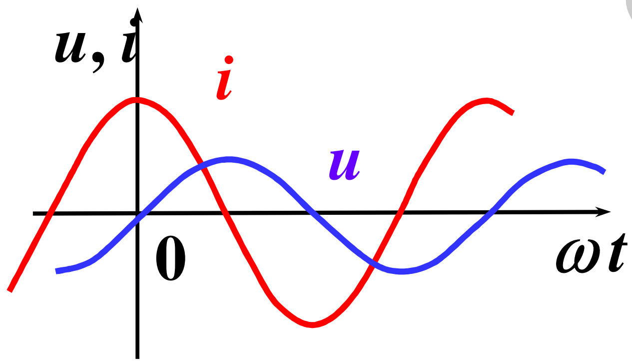
时域

$$u(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t$$

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$=\sqrt{2}\omega CU\cos\omega t$$

$$=\sqrt{2}\omega CU\sin(\omega t+90^\circ)$$



波形图

频域

$$\dot{U}=U\angle 0^\circ$$

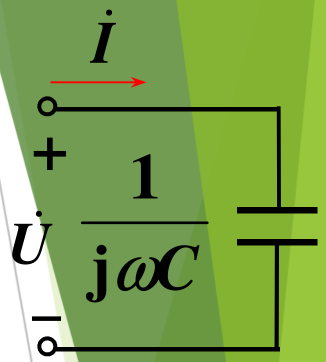
$$\dot{I}=\mathrm{j}\omega C\dot{U}$$

有效值关系

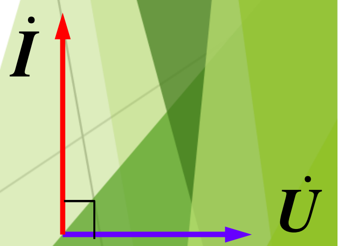
$I=\omega C\,U$

相位关系

i 超前 u 90°



相量模型



相量图

$I = \omega C U$

$$\frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C}$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

容抗 (*capacitive reactance*)

错误的写法

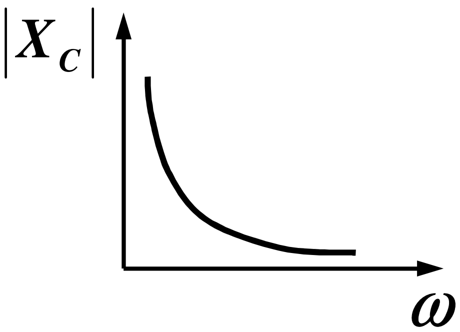
$$\frac{1}{\omega C} \neq \frac{u}{i}$$

$$\frac{1}{\omega C} \neq \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

容抗的物理意义:

(1) 表示限制电流的能力;

(2) 容抗的绝对值和频率成反比。



$\omega = 0$(直流), $|X_C| \to \infty$, 隔直作用;

$\omega \to \infty$, $X_C \to 0$, 旁路作用;

(3) 由于容抗的存在使电流领先电压。

二、电路定律的相量形式和电路的相量模型

1. 基尔霍夫定律的相量形式

$$\sum i(t)=0 \quad \Rightarrow \quad \sum \dot{I}=0$$

$$\sum u(t)=0 \quad \Rightarrow \quad \sum \dot{U}=0$$

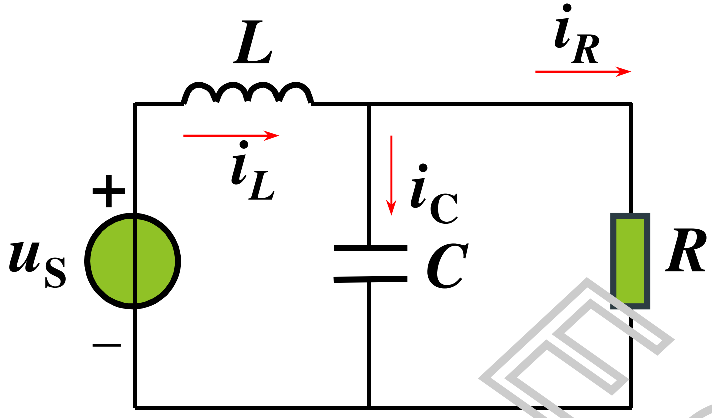
2. 电路元件的相量关系

$$u=Ri \qquad \dot{U}=R\dot{I}$$

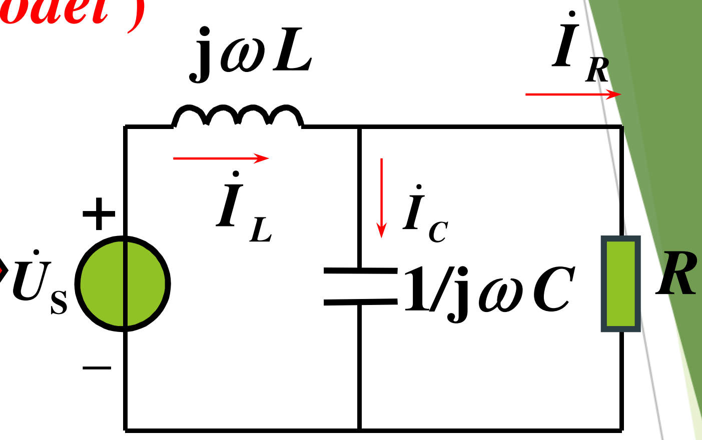
$$u=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \dot{U}=\mathrm{j}\omega L\dot{I}$$

$$u=\frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t \qquad \dot{U}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}$$

3. 电路的相量模型 (*phasor model*)



时域电路



相量模型

$$\begin{cases} i_L = i_C + i_R \\ L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C \mathrm{d}t = u_S \\ R i_R = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C \mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{I}_L = \dot{I}_C + \dot{I}_R \\ \mathrm{j}\omega L \dot{I}_L + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_C = \dot{U}_S \\ R\dot{I}_R = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_C \end{cases}$$

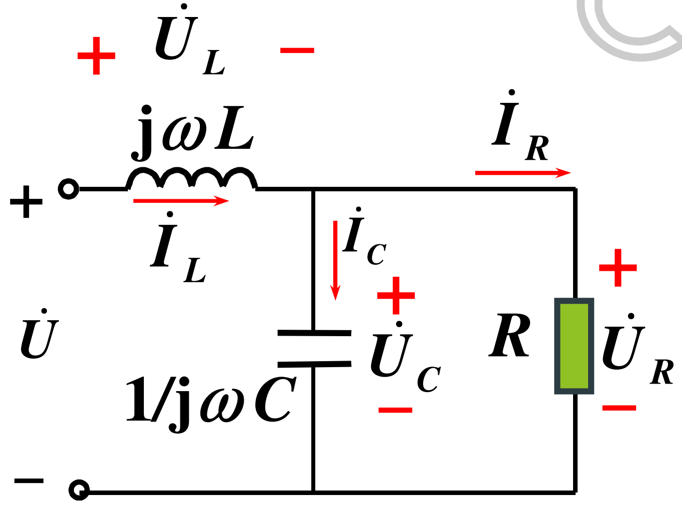
时域列写微分方程　　　　相量形式代数方程

4. 相量图(*phasor diagram*)

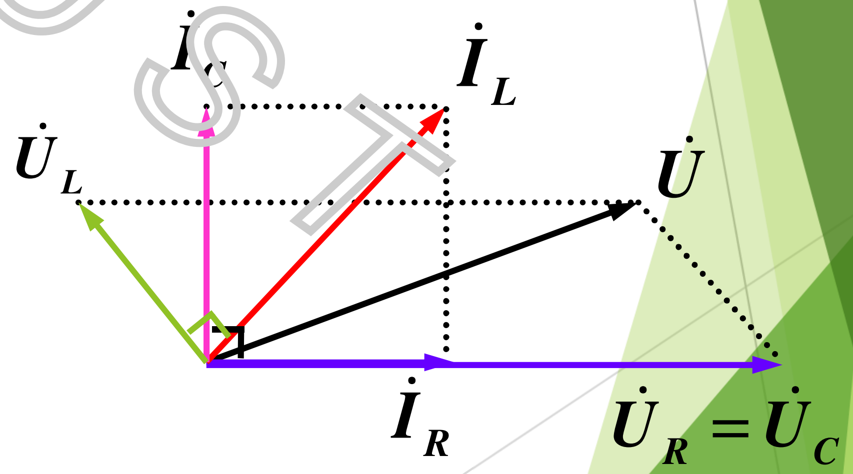
（1） 同频率的正弦量才能表示在同一个相量图中；

（2） 相量以ω角速度逆时针方向旋转；

（3） 选定一个参考相量(设初相位为零)。

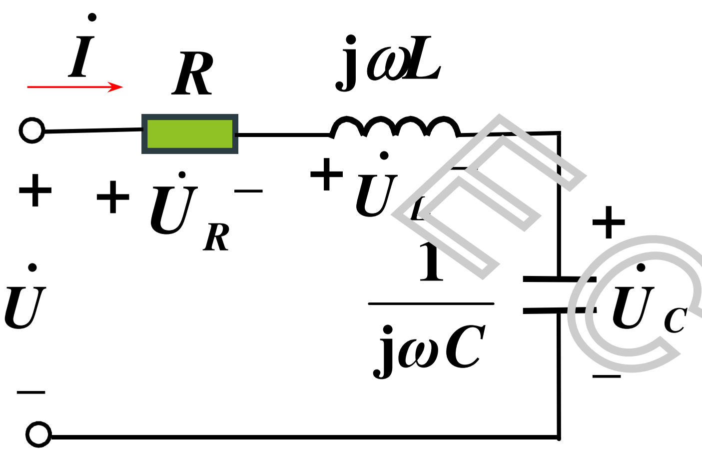


选$\dot{U}_R$为参考相量



三、复阻抗和复导纳

1. 复阻抗(*complex impedance*)



复阻抗 $Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{\dot{U}_R+\dot{U}_L+\dot{U}_C}{\dot{I}}$

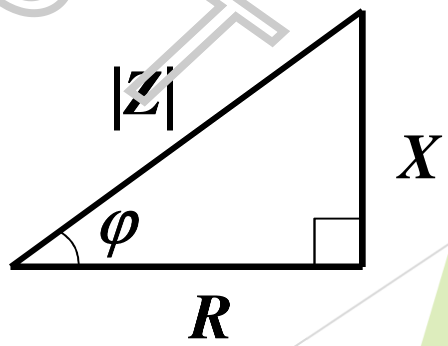
$$=R+\mathrm{j}\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

$$=R+\mathrm{j}(\omega L-\frac{1}{\omega C})$$

$$=R+\mathrm{j}X$$

电阻　电抗

$$Z=R+\mathrm{j}X=|Z|\angle\varphi$$



阻抗三角形

$|Z|=\frac{U}{I}$　阻抗模　单位：Ω

$\varphi=\psi_u-\psi_i$　阻抗角

具体分析一下 *RLC* 串联电路：

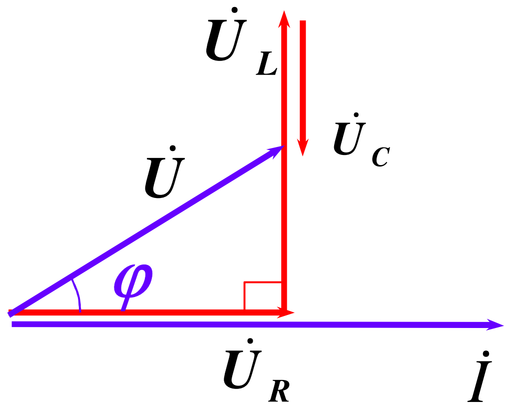
$$Z=R+j(\omega L-1/\omega C)=|Z|\angle\varphi$$

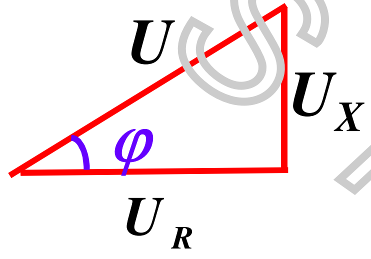
$\omega L > 1/\omega C$，$X>0$，$\varphi>0$，电压领先电流，电路呈感性；

$\omega L<1/\omega C$，$X<0$，$\varphi<0$，电压落后电流，电路呈容性；

$\omega L=1/\omega C$，$X=0$，$\varphi=0$，电压与电流同相，电路呈电阻性。

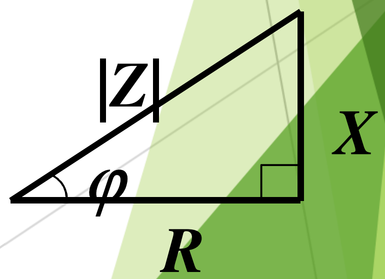
画相量图：选电流为参考向量($\omega L > 1/\omega C$)





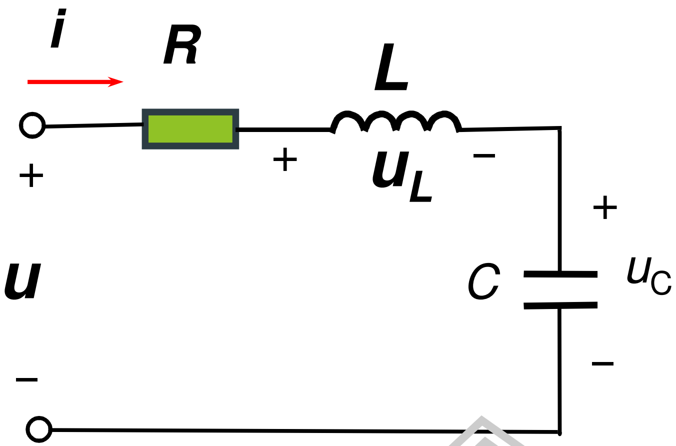
电压三角形

$$U=\sqrt{U_R^2+U_X^2}$$



阻抗三角形

例

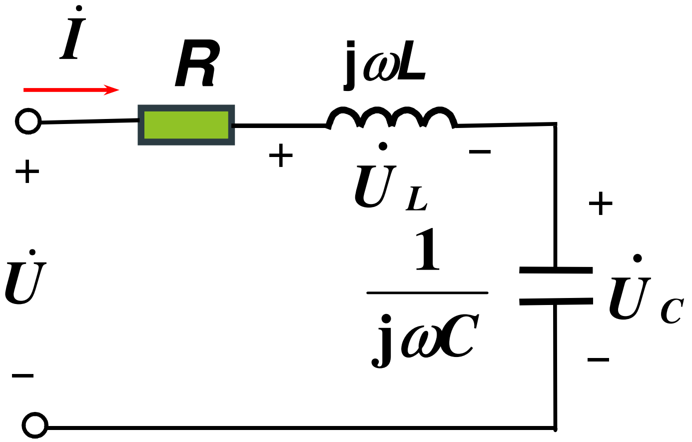


已知：R=15Ω, L=0.3mH, C=0.2μF,

$$u = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + 60°)\,\mathrm{V}, \quad f = 3\times10^4\,\mathrm{Hz}$$

求 i , u_R , u_L ， u_C 。

解　其相量模型为



$$\dot U = 5\angle 60°\ \mathrm{V}$$

$$\mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}2\pi\times3\times10^4\times0.3\times10^{-3} = \mathrm{j}56.5\Omega$$

$$-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C} = -\mathrm{j}\frac{1}{2\pi\times3\times10^4\times0.2\times10^{-6}} = -\mathrm{j}26.5\Omega$$

$$Z = R + \mathrm{j}\omega L - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} = 15 + \mathrm{j}56.5 - \mathrm{j}26.5 = 33.54\angle 63.4^\circ\ \Omega$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{Z}=\frac{5\angle 60^\circ}{33.54\angle 63.4^\circ}=0.149\angle -3.4^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{U}_R=R\dot{I}=15\times 0.149\angle -3.4^\circ=2.235\angle -3.4^\circ\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_L=\mathrm{j}\omega L\dot{I}=56.5\angle 90^\circ\times 0.149\angle -3.4^\circ=8.42\angle 86.4^\circ\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_C=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I}=26.5\angle -90^\circ\times 0.149\angle -3.4^\circ=3.95\angle -93.4^\circ\ \mathrm{V}$$

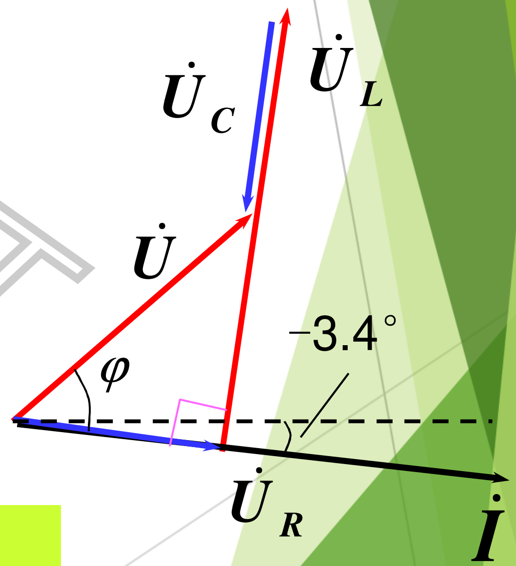
则

$$i=0.149\sqrt{2}\sin(\omega t-3.4^\circ)\ \mathrm{A}$$

$$u_R=2.235\sqrt{2}\sin(\omega t-3.4^\circ)\ \mathrm{V}$$

$$u_L=8.42\sqrt{2}\sin(\omega t+86.6^\circ)\ \mathrm{V}$$

$$u_C=3.95\sqrt{2}\sin(\omega t-93.4^\circ)\ \mathrm{V}$$

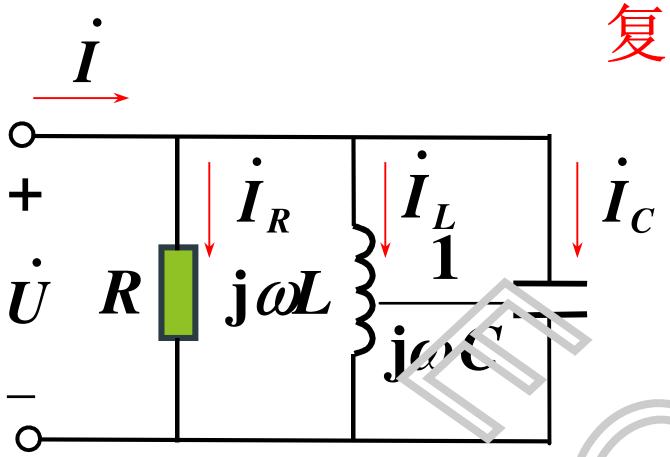


相量图

U_L=8.42V>U=5V，分电压大于总电压，

为什么？

2. 复导纳(*admittance*)



复导纳 $Y=\dfrac{\dot I}{\dot U}=\dfrac{\dot I_R+\dot I_L+\dot I_C}{\dot U}$

$$=\frac{1}{R}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}+\frac{1}{1/\mathrm{j}\omega C}$$

$$=G-\mathrm{j}\frac{1}{\omega L}+\mathrm{j}\omega C$$

$$=G+\mathrm{j}(B_L+B_C)$$

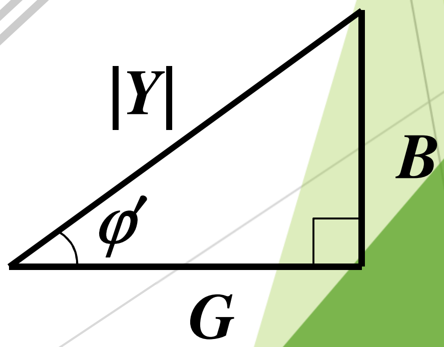
$$=G+\mathrm{j}B$$

电导　　电纳

$$Y=\frac{\dot I}{\dot U}=G+\mathrm{j}B=|Y|\angle\varphi'$$

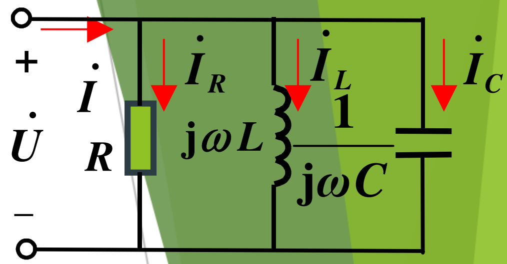
$$\begin{cases}|Y|=\dfrac{I}{U} & \text{导纳的模}\\ \varphi'=\psi_i-\psi_u & \text{导纳角}\end{cases}$$

单位：S



导纳三角形

具体分析一下 *RLC* 并联电路

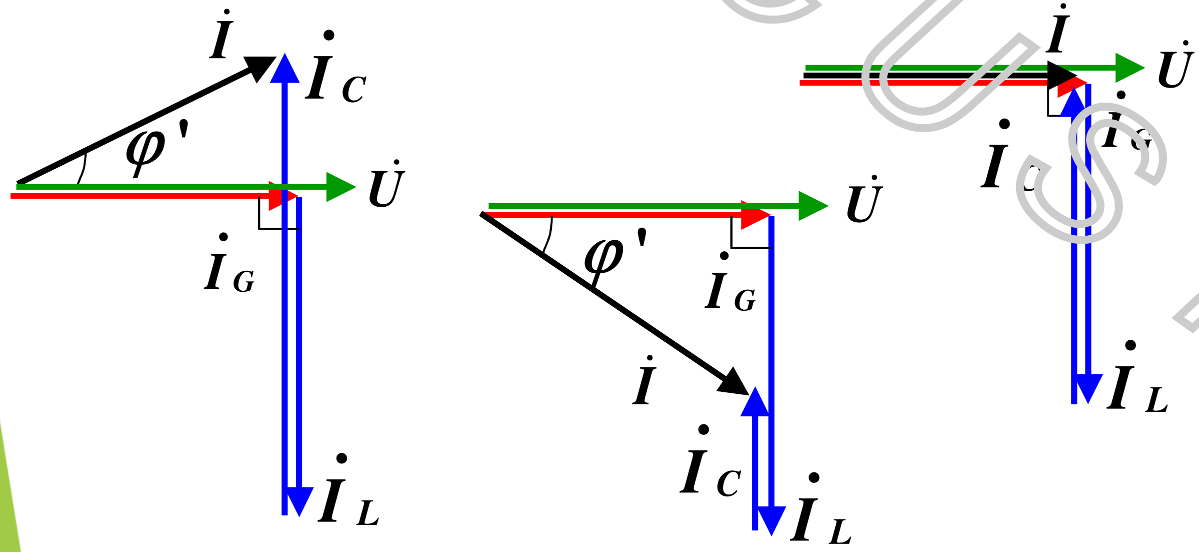


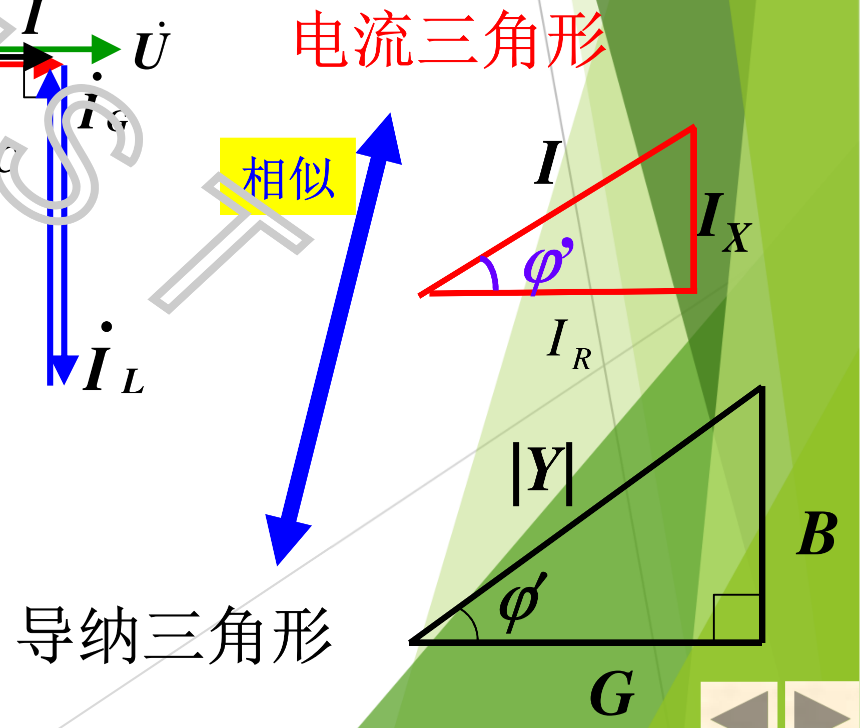
$$Y=G+j(\omega C-1/\omega L)=|Y|\angle\varphi'$$

$\omega C>1/\omega L$，$B>0$，$\varphi'>0$，电压落后电流，电路呈容性；

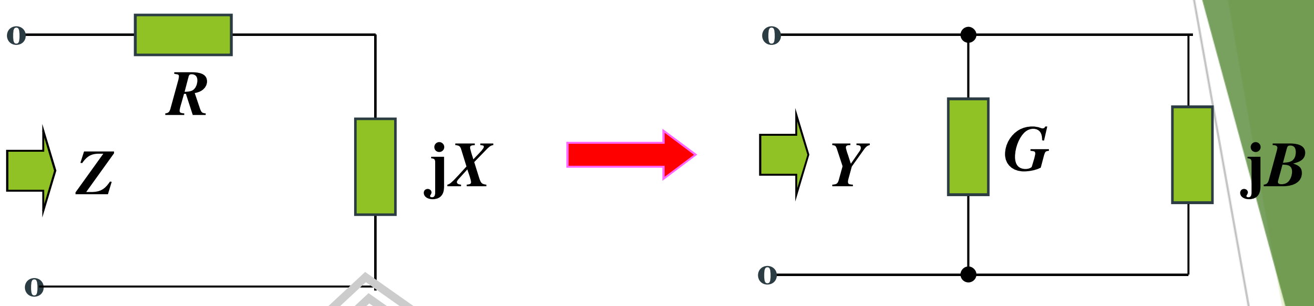
$\omega C<1/\omega L$，$B<0$，$\varphi'<0$，电压领先电流，电路呈感性；

$\omega C=1/\omega L$，$B=0$，$\varphi'=0$，电压与电流同相，电路呈阻性。





3. 复阻抗和复导纳的等效变换



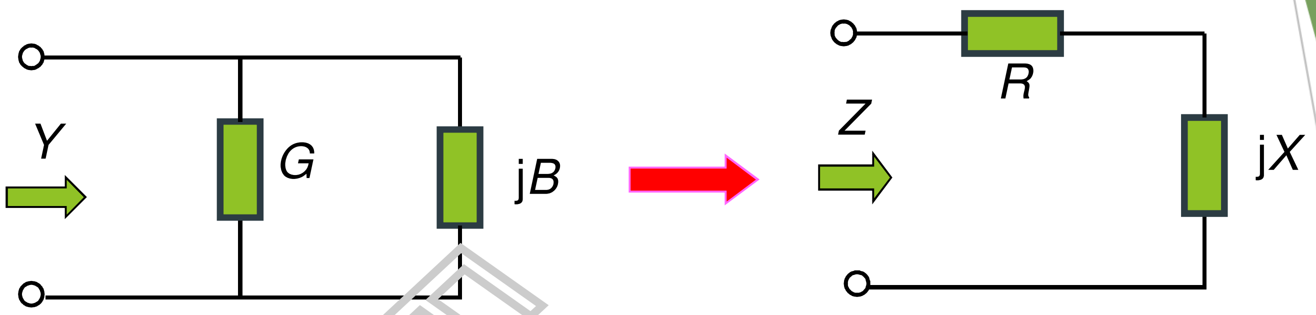
$$Z = R + \mathrm{j}X = |Z|\angle\varphi \quad \Rightarrow \quad Y = G + \mathrm{j}B = |Y|\angle\varphi'$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R+\mathrm{j}X} = \frac{R-\mathrm{j}X}{R^2+X^2} = G + \mathrm{j}B \qquad Y = \frac{1}{Z}$$

$$\therefore \quad G = \frac{R}{R^2+X^2}, \quad B = \frac{-X}{R^2+X^2} \qquad |Y| = \frac{1}{|Z|}, \quad \varphi' = -\varphi$$

一般情况 $G \neq 1/R \quad B \neq 1/X$

同样，若由Y变为Z，则有：



$$Y = G + \mathrm{j}B = |Y|\angle\varphi' , \qquad Z = R + \mathrm{j}X = |Z|\angle\varphi$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G+\mathrm{j}B} = \frac{G-\mathrm{j}B}{G^2+B^2} = R + \mathrm{j}X$$

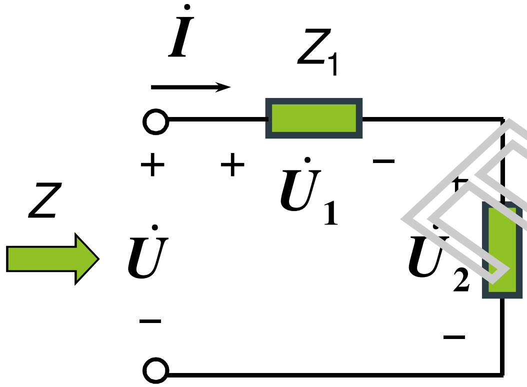
$$\therefore \quad R = \frac{G}{G^2+B^2}, \qquad X = \frac{-B}{G^2+B^2}$$

$$|Y| = \frac{1}{|Z|} \ , \quad \varphi = -\varphi'$$

4. 阻抗串、并联

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = \dot{I}Z_1 + IZ_2 = \dot{I}(Z_1 + Z_2)$$

两个阻抗串联



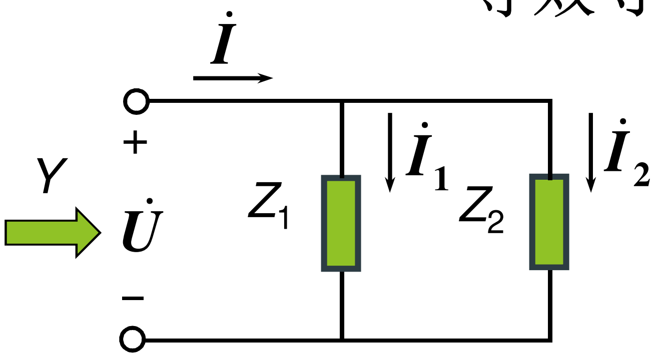
等效阻抗 $Z = Z_1 + Z_2$

分压公式 $\dot{U}_1 = \dfrac{Z_1}{Z_1 + Z_2}\dot{U}$,

$$\dot{U}_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\dot{U}$$

两个阻抗并联

等效导纳 $Y = Y_1 + Y_2 = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2} = \dfrac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2}$



等效阻抗 $Z = \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$

分流公式 $\dot{I}_1 = \dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\dot{I}$, $\dot{I}_2 = \dfrac{Z_1}{Z_1 + Z_2}\dot{I}$

n个阻抗串联

等效阻抗 $$Z=\sum_{k=1}^{n}Z_k$$

分压公式 $$\dot{U}_k=\frac{Z_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}Z_k}\dot{U}\qquad (k=1,2,\cdots n)$$

n个导纳并联

等效导纳 $$Y=\sum_{k=1}^{n}Y_k$$

分流公式 $$\dot{I}_k=\frac{Y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}Y_k}\dot{I}\qquad (k=1,2,\cdots n)$$

串联：$Z=\sum Z_k$ ， $\dot{U}_k=\dfrac{Z_k}{\sum Z_k}\dot{U}$

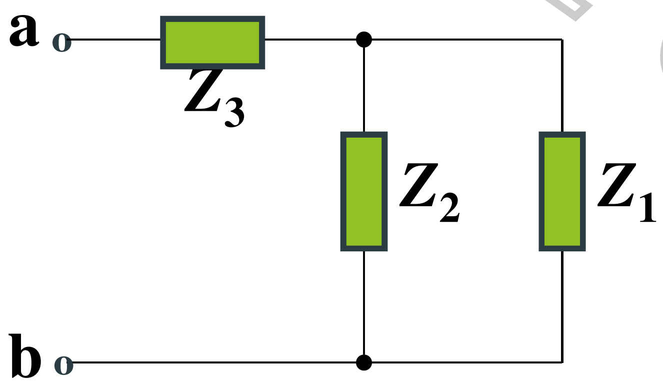
并联：$Y=\sum Y_k$ ， $\dot{I}_k=\dfrac{Y_k}{\sum Y_k}\dot{I}$

例1　已知 $Z_1=10+j6.28\Omega$

$Z_2=20-j31.9\ \Omega$

$Z_3=15+j15.7\ \Omega$

求 Z_{ab}。



$$Z_{ab}=Z_3+\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}=Z_3+Z$$

$$Z=\frac{(10+j6.28)(20-j31.9)}{10+j6.28+20-j31.9}$$

$$=\frac{11.81\angle 32.13^{o}\times 37.65\angle -57.61^{o}}{39.45\angle -40.5^{o}}$$

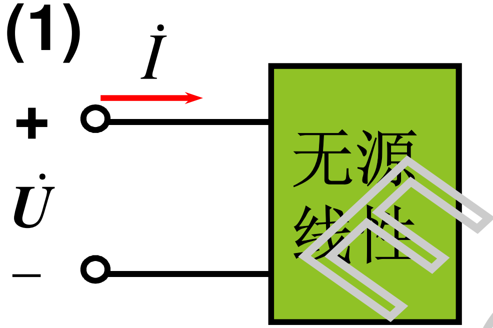
$$=10.89+j2.86\Omega$$

$$\therefore Z_{ab}=Z_3+Z=15+j15.7+10.89+j2.86$$

$$=25.89+j18.56=31.9\angle 35.6^{o}\ \Omega$$

小结：

(1)



$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}} \qquad \dot{U}=\dot{I}Z$$ 相量形式

$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}} \qquad \dot{I}=Y\dot{U}$$ 欧姆定理

(2) ***Z***是与***u,i***无关的复数。

(3) 根据***Z***、***Y***可确定无源二端网络的性能

(4) 一般情况***Z***、***Y***均是ω的函数

9-2 用相量图分析电路

1. 定性画相量图方法

关键：选择合适参考相量

串联电路以电流为参考相量，并联电路以电压为参考相量。

明白元件和支路的电压、电流相量关系：

元件：

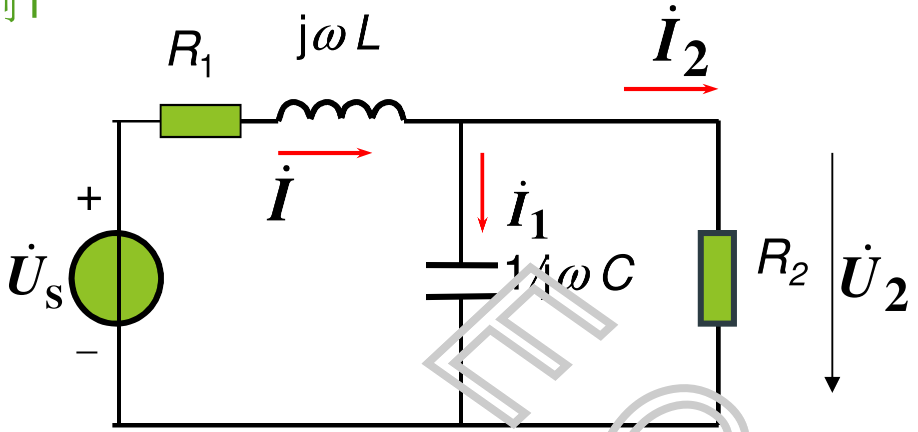
- ***R***：电压与电流同相
- ***L***：电压超前电流90º
- ***C***：电流超前电压90º

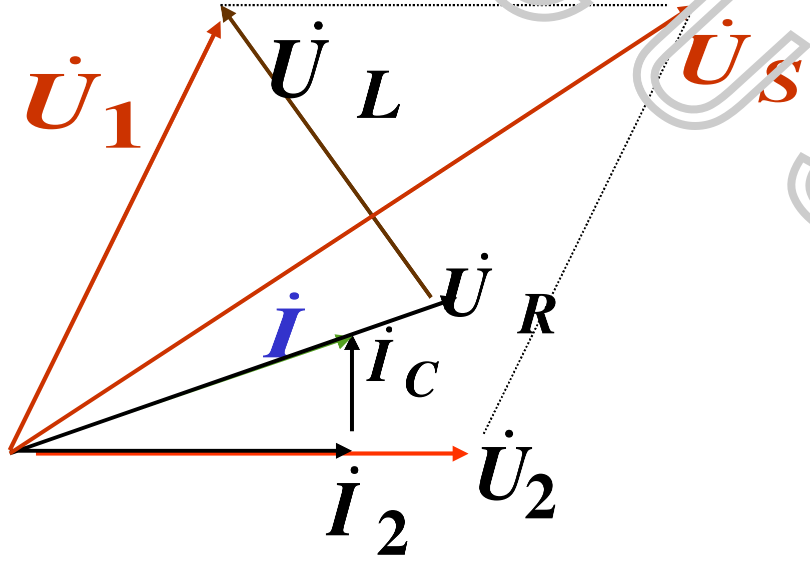
支路：

- ***RL***支路：电压超前电流φ角
- ***RC***支路：电流超前电压φ角

$90^\circ > \varphi > 0^\circ$

例1





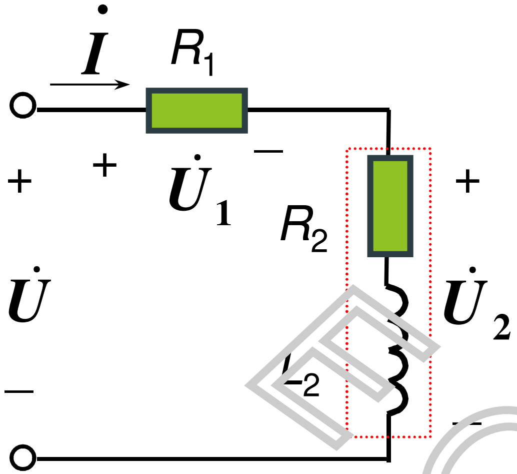
以$\dot{U}_2$为参考相量

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_R + \dot{U}_L$$

$$\dot{U}_S = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

例2.

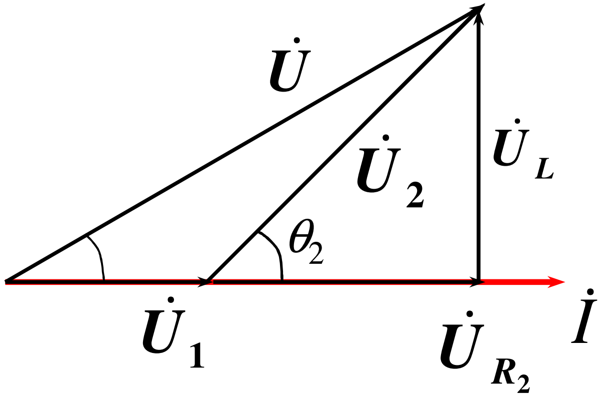


已知：U=115V，U_1=55.4V，U_2=80V，

R_1=32Ω，f=50Hz

求： 线圈的电阻R_2和电感L_2。

解一用相量图分析。



$$I = U_1 / R_1 = 55.4 / 32 = 1.73\text{A}$$

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2\cos(180^\circ - \theta_2)$$

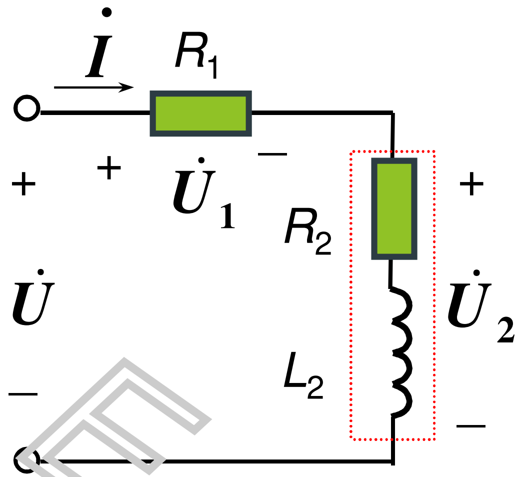
$$= U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos\theta_2$$

$$\therefore\ \theta_2 = 64.9^\circ$$

$$U_L = U_2 \sin\theta = 72.46\text{V}$$

$$X_L = \frac{U_L}{I} = 41.88\Omega \qquad L = X_2 / (2\pi f) = 0.133\text{H}$$

$$U_R = U_2 \cos\theta = 33.92V \qquad R = \frac{U_R}{I} = 19.6\Omega$$



解二 $$I = U_1 / R_1 = 55.4/32 = 1.73\text{A}$$

$$I = \frac{115}{\sqrt{(32+R_2)^2 + (\omega L_2)^2}} = 1.73$$

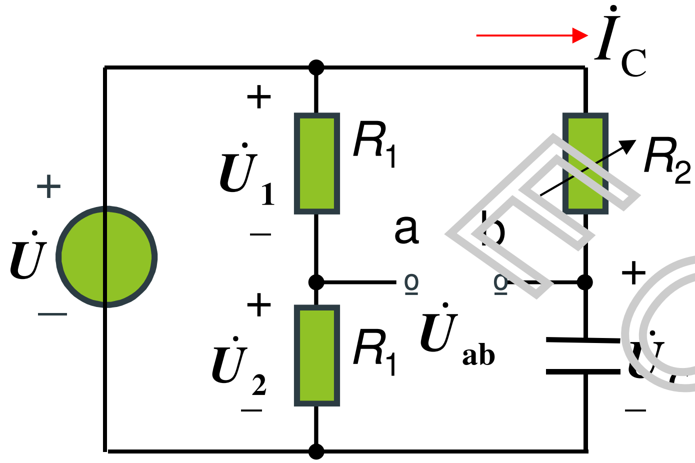
$$I = \frac{80}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L_2)^2}} = 1.73$$

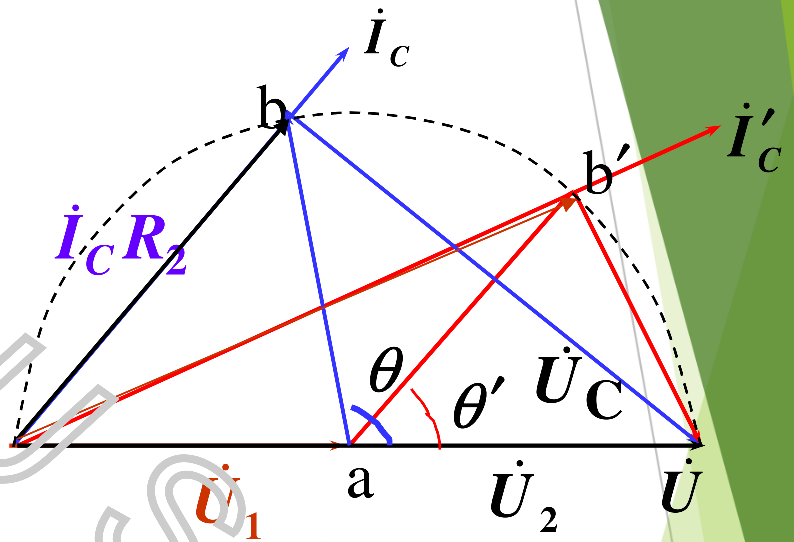
解得：

$$R_2 = 19.58\Omega,\quad L_2 = \frac{41.86}{2\pi f} = 0.133\text{H}\,.$$

例3. 移相桥电路。当R_2由0→∞时，

$\dot{U}_{ab}$大小不变，相位从 $180^\circ \to 0$ 说明其工作原理。





解：用相量图分析

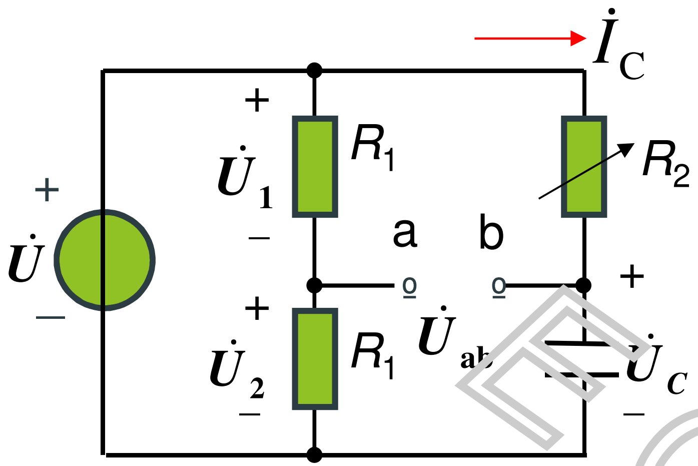
1)选$\dot U$为参考相量

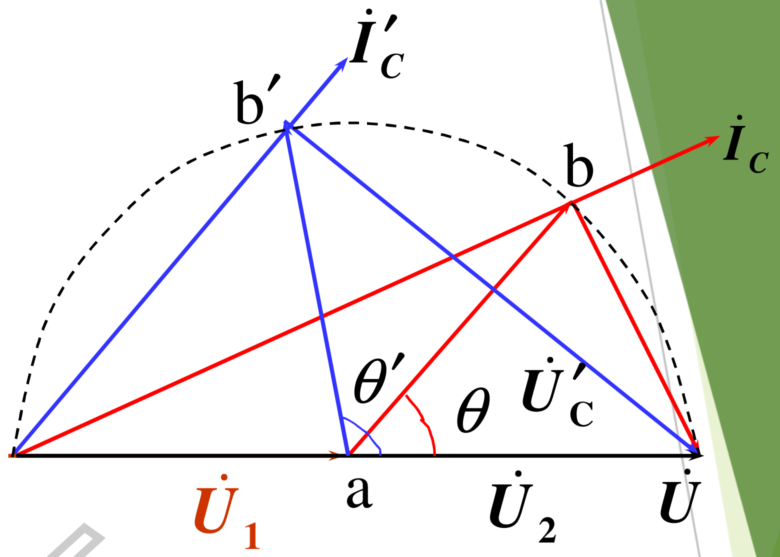
2)$\dot U_1,\dot U_2$与$\dot U$同相

3)$\dot I_C$超前$\dot U$ φ角

4)$\dot U_{ab} = -\dot U_1 + \dot I_C R_2$

5)改变R_2(红线示)





由相量图可知，当R_2改变，$\dot{U}_{ab}$ 大小不变，相位改变；

且R_2↑，$|\theta|$↓。

当$R_2\to\infty$，$\theta=0°$。

当$R_2=0$，$\theta=180°$；

θ为移相角，移相范围：180° ~ 0°