电路原理

信息学院　　常 青

changqing@ecust.edu.cn

第3章　电路分析方法

✦ 问题的提出

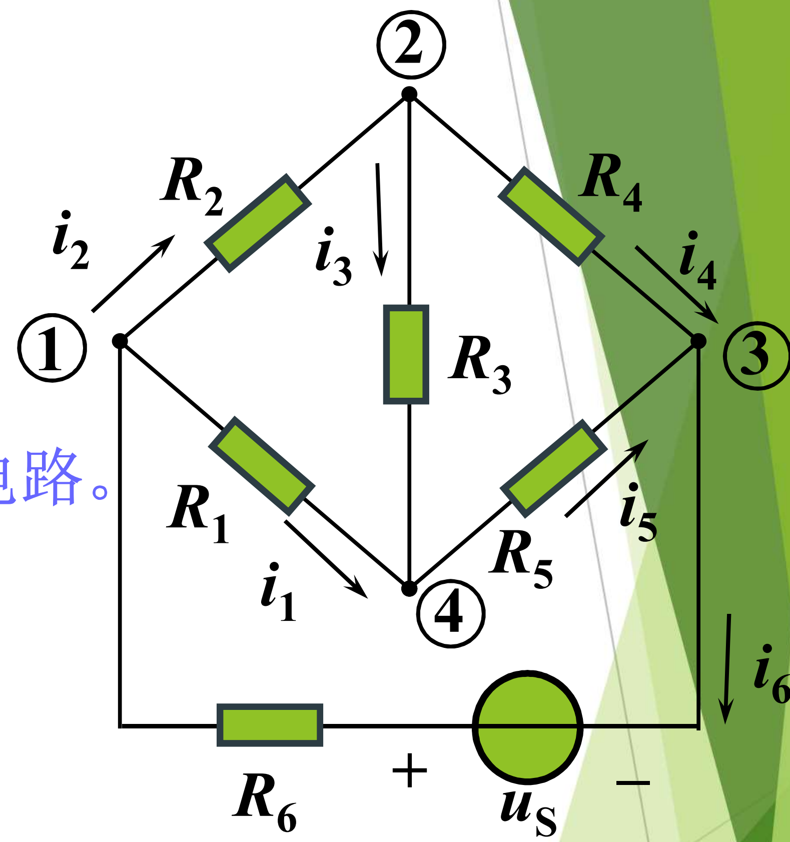
3.1　支路电流法

3.2　节点电压法

3.3　回路电流法

✦ 问题的提出

求图示电路中支路电流 $i_1 \sim i_6$（各支路电压与电流采用关联参考方向）。



可用**KCL, KVL**,元件约束求解电路。

问题：

方程数多（**12**个方程）

复杂电路难以手工计算

计算机的存储能力与计算能力要求高

有必要寻找减少列写方程数量的方法 。

等效变换

- 求等效电阻的方法
  - (1) 串并联；
  - (2) 平衡电桥；
  - (3) Δ --Y变换 。
  - (4) 加流求压法。
  - (5) 加压求流法；
- 电源等效变换方法
  - 实际电压源
  - 实际电流源

目的：找出求解线性电路的系统化分析方法 。

对象：含独立源、受控源的电阻网络。

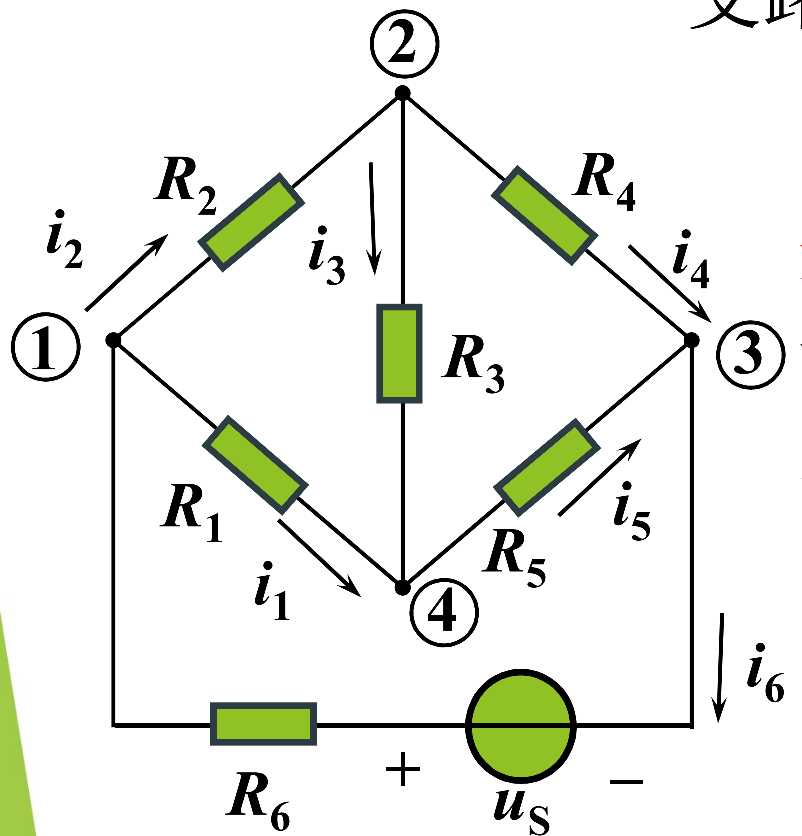
应用：主要用于复杂的线性电路的求解。

基础
- 电路的连接关系——**KCL，KVL**定律
- 元件特性——约束关系

3.1 支路电流法（*Branch Current Method*）

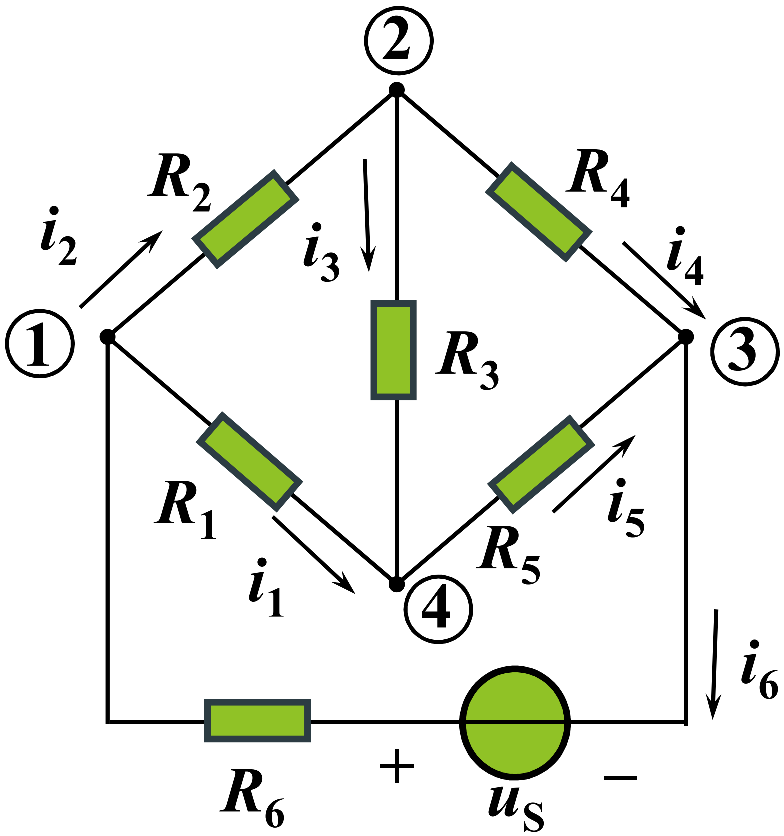
支路电流法：以各支路电流为未知量列写电路方程分析电路的方法。

举例说明



支路数 b=6　　节点数 n=4

（1） 取支路电流 i_1～ i_6为独立变量，并在图中标定各支路电流参考方向；支路电压u_1～ u_6的参考方向与电流的方向一致（图中未标出）。



（2）根据KCL列各节点电流方程

节点 1　$i_1+i_2-i_6=0$

节点 2　$-i_2+i_3+i_4=0$

节点 3　$-i_4-i_5+i_6=0$

节点4　$-i_1-i_3+i_5=0$

出为正

进为负

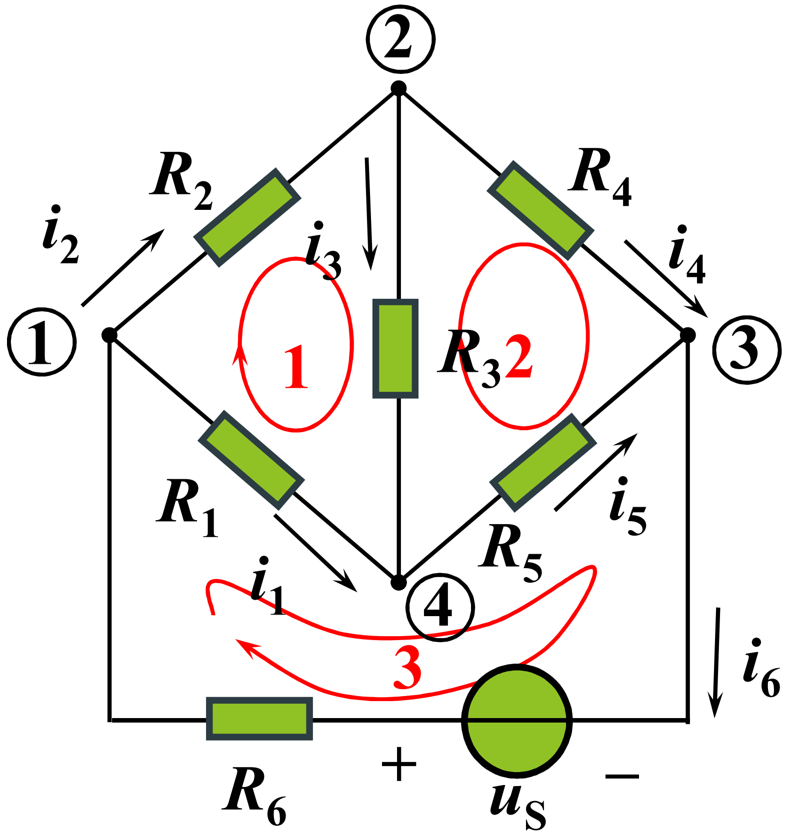
可以证明：对有*n*个节点的电路，独立的KCL方程只有*n*-1个 。

节点 1　$i_1+i_2-i_6=0$

节点 2　$-i_2+i_3+i_4=0$　(1)

节点 3　$-i_4-i_5+i_6=0$

节点4设为参考节点



（3） 选定$b–n+1$个独立回路，根据KVL列写回路电压方程。

$$\left.\begin{aligned} &\text{回路1} \quad -u_1+u_2+u_3=0 \\ &\text{回路2} \quad -u_3+u_4-u_5=0 \\ &\text{回路3} \quad u_1+u_5+u_6=0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

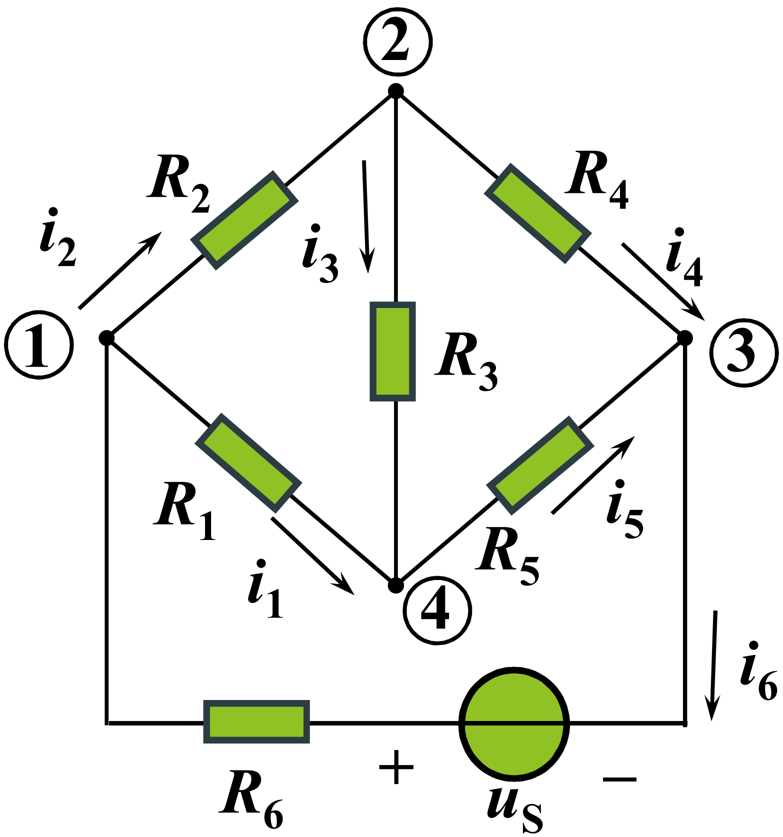
用支路电流表示支路电压

$$\left\{\begin{aligned} &u_1=R_1 i_1, \quad u_4=R_4 i_4, \\ &u_2=R_2 i_2, \quad u_5=R_5 i_5, \\ &u_3=R_3 i_3, \quad u_6=-u_S+R_6 i_6 \end{aligned}\right.$$

将各支路电压、电流关系代入方程（2）

$$\left\{\begin{aligned} &-R_1 i_1+R_2 i_2+R_3 i_3=0 \\ &-R_3 i_3+R_4 i_4-R_5 i_5=0 \\ &R_1 i_1+R_5 i_5+R_6 i_6-u_S=0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

图示电路用支路电流法求解所列写的方程：



$$
\begin{cases}
\left.\begin{aligned}
i_1 + i_2 - i_6 &= 0 \\
-i_2 + i_3 + i_4 &= 0 \\
-i_4 - i_5 + i_6 &= 0
\end{aligned}\right\} \text{KCL} \\
\left.\begin{aligned}
-R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_3 i_3 &= 0 \\
-R_3 i_3 + R_4 i_4 - R_5 i_5 &= 0 \\
R_1 i_1 + R_5 i_5 + R_6 i_6 - u_S &= 0
\end{aligned}\right\} \text{KVL}
\end{cases}
$$

联立求解，求出各支路电流，
进一步求出各支路电压。

规　律

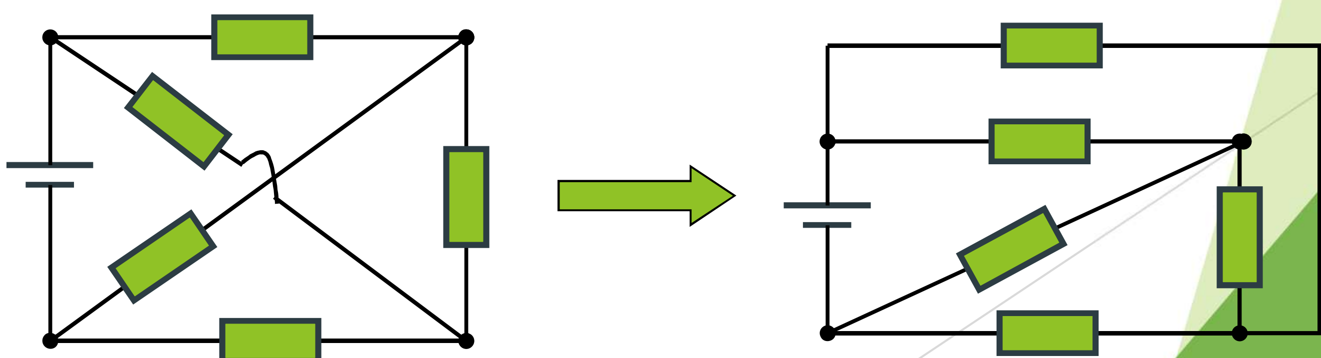
KCL：（$n-1$）个独立方程。

KVL：（$b-n+1$）个独立方程。

独立节点：与独立方程对应的节点，有n-1个。好找！

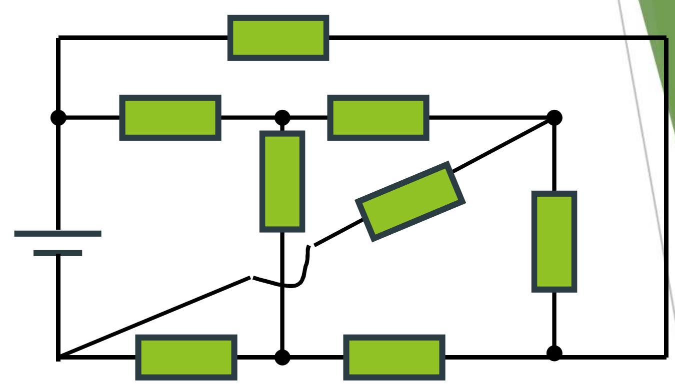
独立回路：与独立方程对应的回路。　　如何找？

平面电路：可以画在平面上，不出现支路交叉的电路。



非平面电路：在平面上无论将电路怎样画，总有支路相互交叉。

列写独立的**KVL**方程相对麻烦



如何选择独立回路

- 平面电路可选网孔作为独立回路。
- 一般情况（适合平面和非平面电路）。

  每增选一个回路使这个回路至少具有一条新支路。

支路法的一般步骤：

（1） 标定各支路电流（电压）的参考方向；

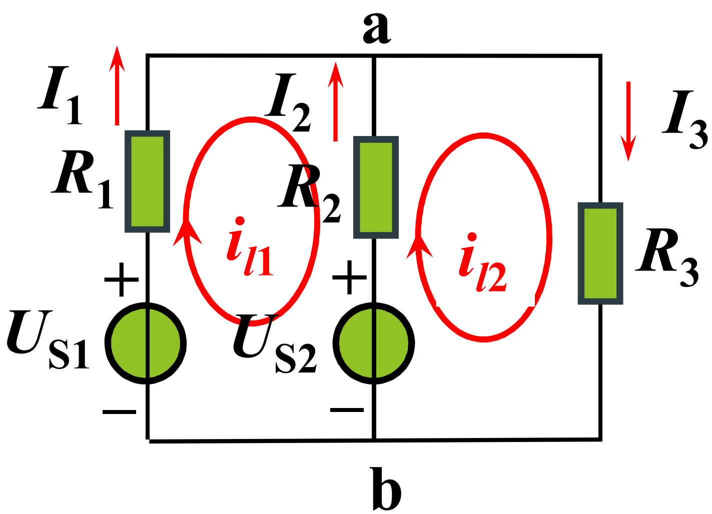
（2） 选定$(n-1)$个独立节点，列写KCL方程；

（3） 选定$b-(n-1)$个独立回路，列写KVL方程；

（4） 求解上述方程，得到b个支路电流。

3.2 回路电流法（*Loop Current Method*）

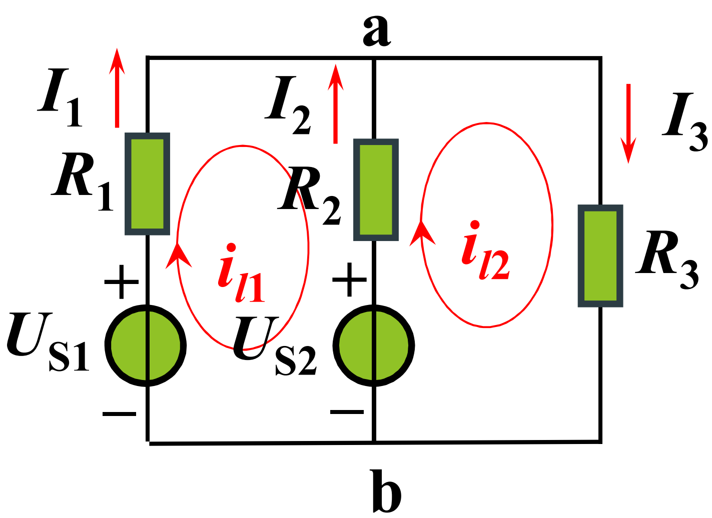
基本思想：以假想的回路电流为未知量列写回路的KVL方程。若回路电流已求得，则各支路电流可用回路电流线性组合表 示。



选图示的两个独立回路，设回路电流分别为i_{l1}、 i_{l2}。

支路电流可由回路电流表出

$$i_1= i_{l1} \qquad i_2= i_{l2}- i_{l1} \qquad i_3= i_{l2}$$



回路法的一般步骤：

（1）选定$l=b-n+1$个独立回路，标明各回路电流及方向。

（2）对l个独立回路，以回路电流为未知量，列写KVL方程；

回路1　$R_1 i_{l1}+R_2(i_{l1}- i_{l2})-u_{S1}+u_{S2}=0$

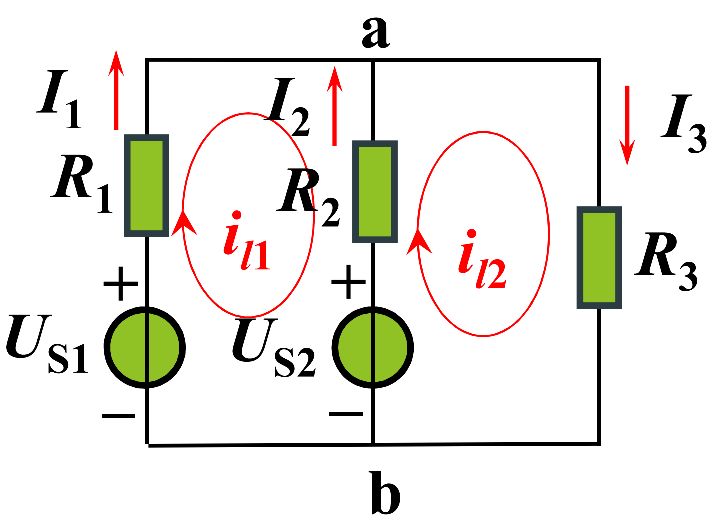
回路2　$R_2(i_{l2}- i_{l1})+ R_3 i_{l2} -u_{S2}=0$

整理得

$$(R_1+ R_2) i_{l1}-R_2 i_{l2}=u_{S1}-u_{S2}$$

$$- R_2 i_{l1}+ (R_2 +R_3) i_{l2} =u_{S2}$$

（3）解上述方程，求出各回路电流，进一步求各支路电压、电流。



令$R_{11}=R_1+R_2$— 回路1的自电阻。

等于回路1中所有电阻之和。

令$R_{22}=R_2+R_3$— 回路2的自电阻。

等于回路2中所有电阻之和。

自电阻总为正

令$R_{12}=R_{21}=-R_2$— 回路1、2间互电阻。

是回路1、回路2之间公共支路的电阻。

$$\begin{cases}(R_1+R_2)\,i_{l1}-R_2 i_{l2}=u_{S1}-u_{S2}\\ -R_2 i_{l1}+(R_2+R_3)\,i_{l2}=u_{S2}\end{cases}$$

当两个回路电流流过公共支路方向相同时，互电阻取正号；否则为负号。

$u_{l1}=u_{S1}-u_{S2}$— 回路1中所有电压源电压升的代数和。

$u_{l2}=u_{S2}$— 回路2中所有电压源电压升的代数和。

当电压源电压升高方向与该回路电流方向一致时，取正号；反之取负号。

推广到有 l 个回路仅含电阻、独立电压源的电路

$$
\begin{aligned}
&R_{11}i_{l1}+R_{12}i_{l2}+\cdots+R_{1l}\,i_{ll}=u_{Sl1}\\
&R_{21}i_{l1}+R_{22}i_{l2}+\cdots+R_{2l}\,i_{ll}=u_{Sl2}\\
&\cdots\\
&R_{l1}i_{l1}+R_{l2}i_{l2}+\cdots+R_{ll}\,i_{ll}=u_{Sll}
\end{aligned}
$$

其中

R_{kk}: 第k个回路的自电阻(为正)， $k=1,2,\cdots,l$

R_{jk}: 第j个回路和第k个回路的互电阻
$$
\begin{cases}
+: \text{流过互阻的两个回路电流方向相同}\\
-: \text{流过互阻的两个回路电流方向相反}\\
0: \text{无关}
\end{cases}
$$

u_{Slk}: 第k个回路中所有电压源电压升的代数和。

回路法的一般步骤：

(1) 选定$l=b-(n-1)$个独立回路，标明回路电流及方向；

(2) 对l个独立回路，以回路电流为未知量，列写其**KVL**方程；

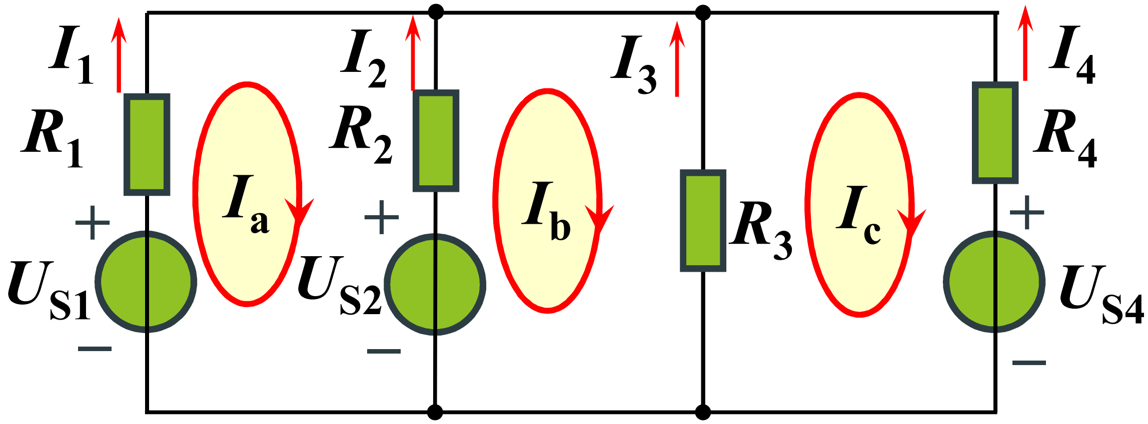
(3) 求解上述方程，得到l个回路电流；

(4) 求各支路电流(用回路电流表示)；

网孔电流法（***mesh current method***）

对平面电路（**planar circuit**），若以网孔为独立回 路，此时回路电流也称为网孔电流，对应的分析方法称 为网孔电流法。

例　用回路法求各支路电流。



解

（1） 设独立回路电流（顺时针）

（2） 列 KVL 方程

$$\left.\begin{aligned}(R_1+R_2)I_a-R_2I_b&=U_{S1}-U_{S2}\\-R_2I_a+(R_2+R_3)I_b-R_3I_c&=U_{S2}\\-R_3I_b+(R_3+R_4)I_c&=-U_{S4}\end{aligned}\right\}$$

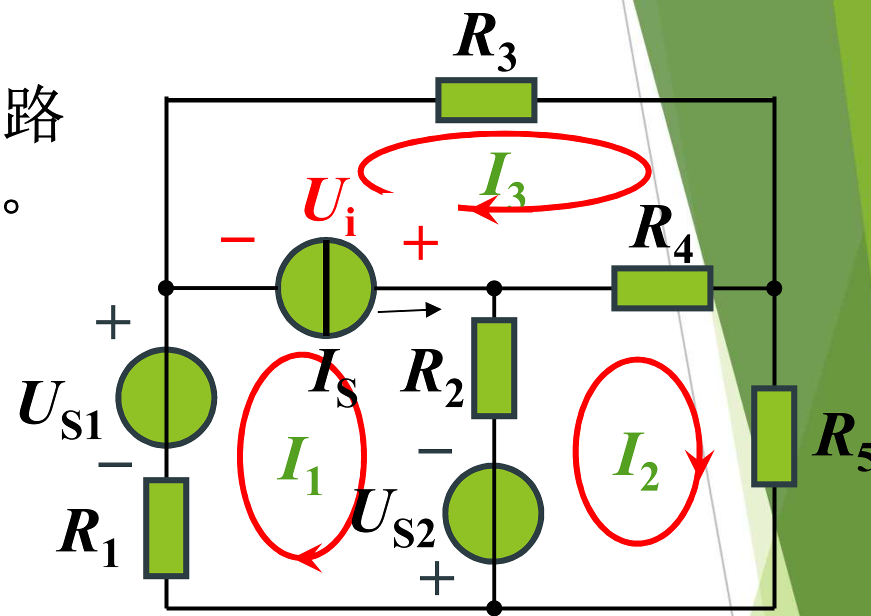
对称阵，且互电阻为负

（3） 求解回路电流方程，得 I_a , I_b , I_c

（4） 求各支路电流： $I_1=I_a$ ， $I_2=I_b-I_a$ ， $I_3=I_c-I_b$ ， $I_4=-I_c$

特殊情况1：电路中含有独立电流源支路

例　列写含有理想电流源支路的电路的回路电流方程。



方法1：

* 引入电流源的端电压变量U_i列回路的KVL方程

$$(R_1+R_2)I_1-R_2I_2=U_{S1}+U_{S2}+U_i$$

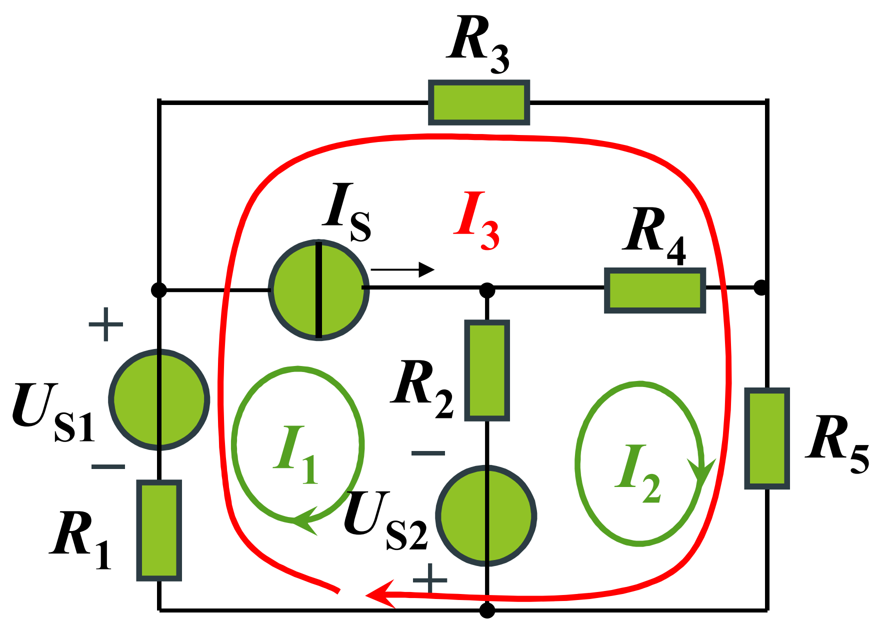
$$-R_2I_1+(R_2+R_4+R_5)I_2-R_4I_3=-U_{S2}$$

$$-R_4I_2+(R_3+R_4)I_3=-U_i$$

** 增加回路电流和电流源电流的关系方程

$$I_S=I_1-I_3$$

方法2：选取独立回路时，使理想电流源支路仅仅属于一个回路, 则该回路电流即为 I_S 。



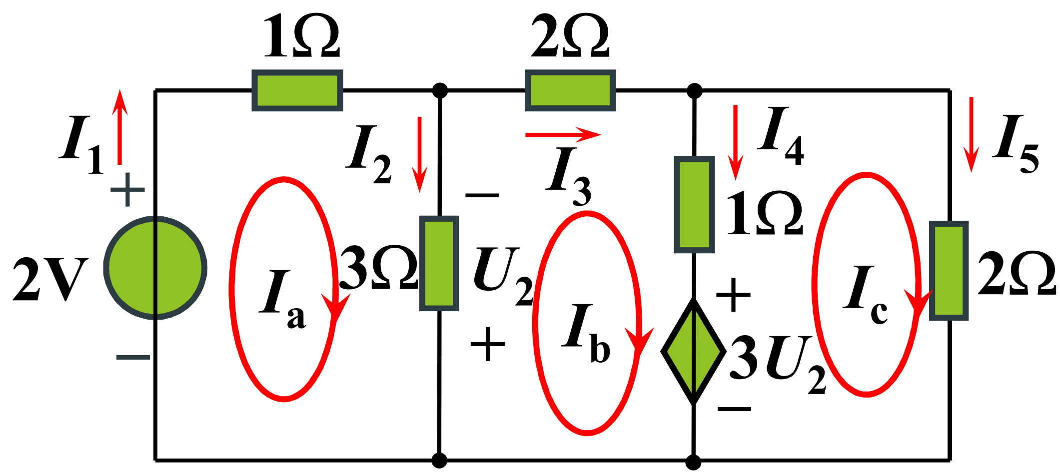
$I_1=I_S$

$-R_2I_1+(R_2+R_4+R_5)I_2+R_5I_3=-U_{S2}$

$R_1I_1+R_5I_2+(R_1+R_3+R_5)I_3=U_{S1}$

特殊情况2：电路中含有受控电压源

例　用回路法求含有受控电压源电路的各支路电流。



设回路电流I_a、I_b和I_C，参考方向如图所示。

（1）将**VCVS**看作独立源建立方程；

$$\left.\begin{aligned}&4I_a-3I_b=2\\&-3I_a+6I_b-I_c=-3U_2\\&-I_b+3I_c=3U_2\end{aligned}\right\}\quad ①$$

（2）找出控制量和回路电流关系。

$$U_2=3(I_b-I_a)\qquad ②$$

将②代入①，得

$$\begin{cases} 4I_a \quad -3I_b \qquad\quad = 2 \\ -12I_a+15I_b-I_c \ = 0 \\ 9I_a \quad -10I_b+3I_c = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{解得}} \begin{cases} I_a=1.19\text{A} \\ I_b=0.92\text{A} \\ I_c=-0.51\text{A} \end{cases}$$

各支路电流为：

$I_1= I_a=1.19\text{A}$ ，$I_2= I_a- I_b=0.27\text{A}$ ，$I_3= I_b=0.92\text{A}$

$I_4= I_b- I_c=1.43\text{A}$ ，$I_5= I_c= -0.52\text{A}$

* 由于含受控源，方程的系数矩阵一般不对称。

思考：当电路中含有受控电流源时该如何列写回路电流方程？

支路电流法需要（b-n+1）个KVL方程，（n-1）个KCL方程。

如何减少方程的数量？

选择参考节点，设所有其它节点的电压为未知变量。

如果能确定(n–1)个独立节点的电压，就可以确定电路中所有支路的电压、电流。

以(n–1)个独立节点的电压为变量列写方程

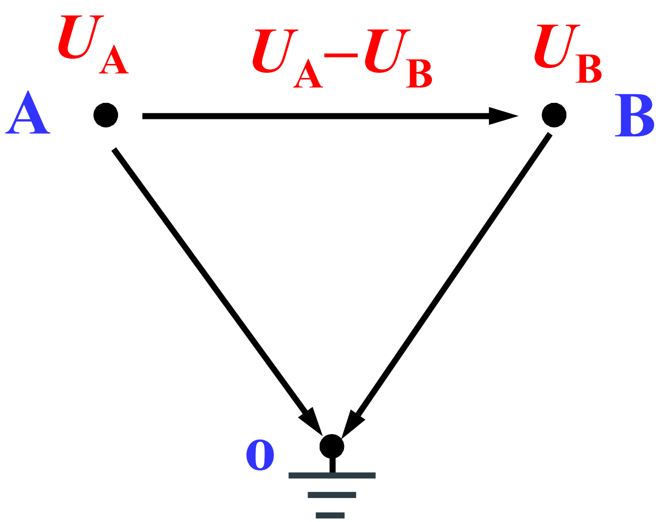
方程个数？ n–1

方程形式？ **KCL**

为什么不用列写KVL方程？

任意选择参考点，节点电压就是节点与参考点的电压（降），也即是节点电位，方向为（独立）节点指向参考节点。

由于电位的单值性，节点电压自动满足**KVL**方程。



$$(U_A-U_B)+U_B-U_A=0$$

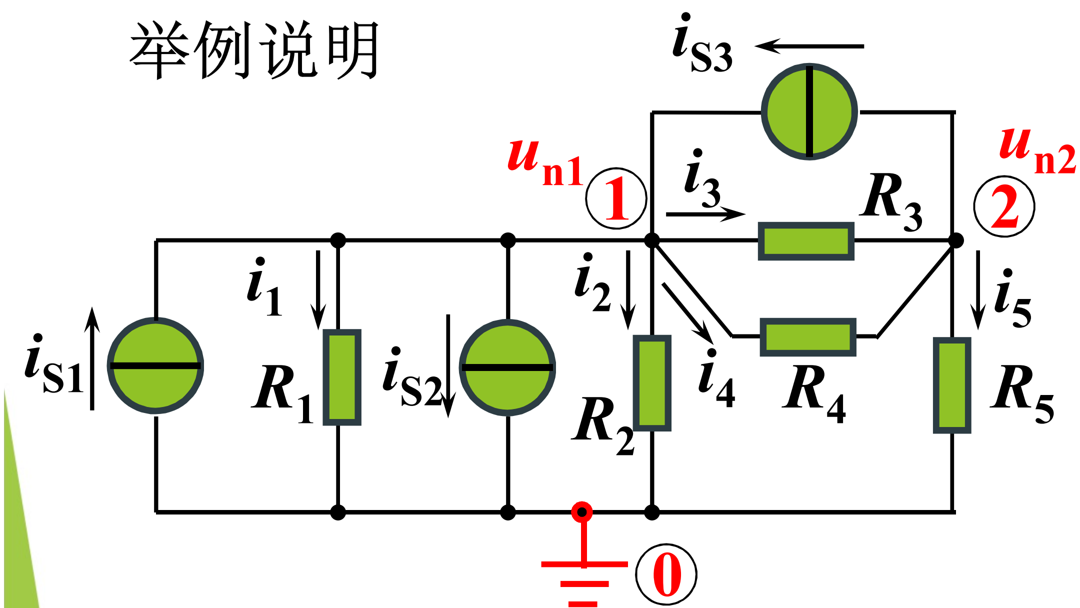
以节点电压为变量的**KVL**自动满足

只需列写以节点电压为变量的**KCL**方程。

3.3 节点电压法（*Node Voltage Method*）

节点电压法：以节点电压为未知变量列写电路方程分析电路的方法。

举例说明



（1） 选定参考节点，标明其余n-1个独立节点的电压。

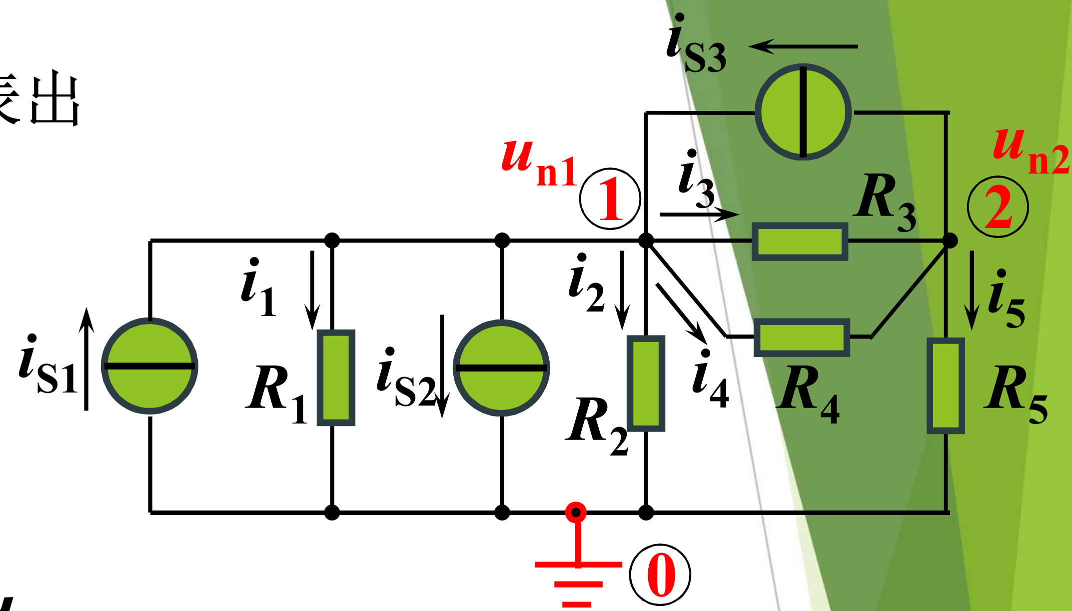
（2） 列KCL方程

$$\sum i_{R出}=\sum i_{S入}$$

$$\begin{cases} i_1+i_{S2}+i_2+i_3+i_4=i_{S1}+i_{S3} \\ i_5+i_{S3}=i_3+i_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1+i_2+i_3+i_4=i_{S1}-i_{S2}+i_{S3} \\ -i_3-i_4+i_5=-i_{S3} \end{cases} \quad (1)$$

将支路电流用节点电压表出



$$i_1 = \frac{u_{n1}}{R_1} \qquad i_2 = \frac{u_{n1}}{R_2}$$

$$i_3 = \frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_3}$$

$$i_4 = \frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_4} \qquad i_5 = \frac{u_{n2}}{R_5}$$

将支路电流表达式代入（1）式

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n1}}{R_1} + \dfrac{u_{n1}}{R_2} + \dfrac{u_{n1} - u_{n2}}{R_3} + \dfrac{u_{n1} - u_{n2}}{R_4} = i_{S1} - i_{S2} + i_{S3} \\[2ex] -\dfrac{u_{n1} - u_{n2}}{R_3} - \dfrac{u_{n1} - u_{n2}}{R_4} + \dfrac{u_{n2}}{R_5} = -i_{S3} \end{cases}$$

整理，得

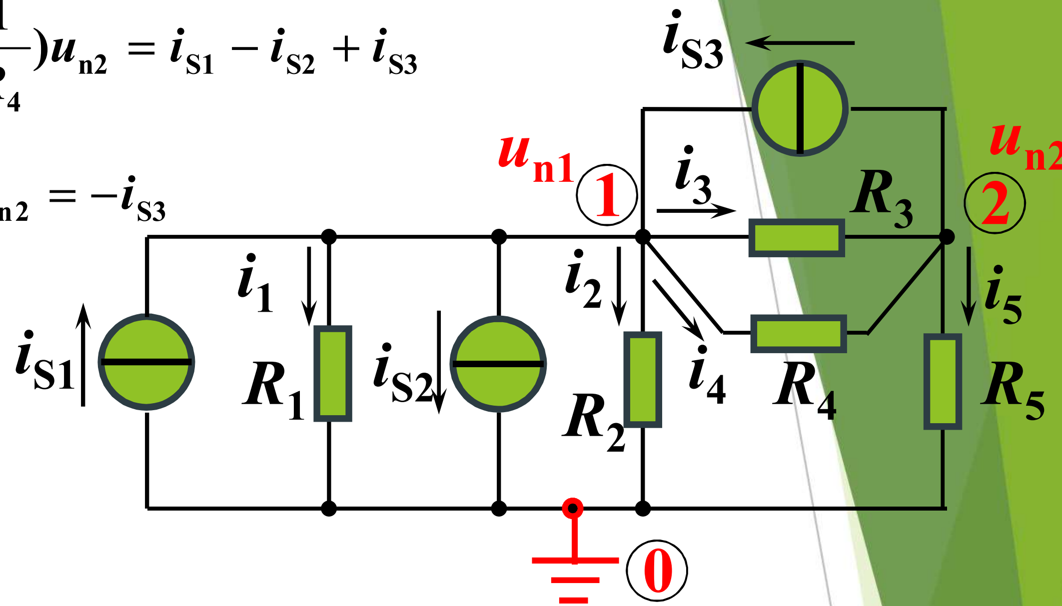
$$\begin{cases}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4})u_{n1}-(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4})u_{n2}=i_{S1}-i_{S2}+i_{S3} \\ -(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4})u_{n1}+(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5})u_{n2}=-i_{S3}\end{cases} \quad (2)$$

（3）求解上述方程得节点电压。

式（2）简记为

$$\begin{cases}G_{11}u_{n1}+G_{12}u_{n2}=i_{sn1} \\ G_{21}u_{n1}+G_{22}u_{n2}=i_{sn2}\end{cases} \Leftarrow \text{标准形式的节点电压方程}$$

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)u_{n1}-\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)u_{n2}=i_{S1}-i_{S2}+i_{S3} \\
-\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)u_{n1}+\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}\right)u_{n2}=-i_{S3}
\end{cases}
$$



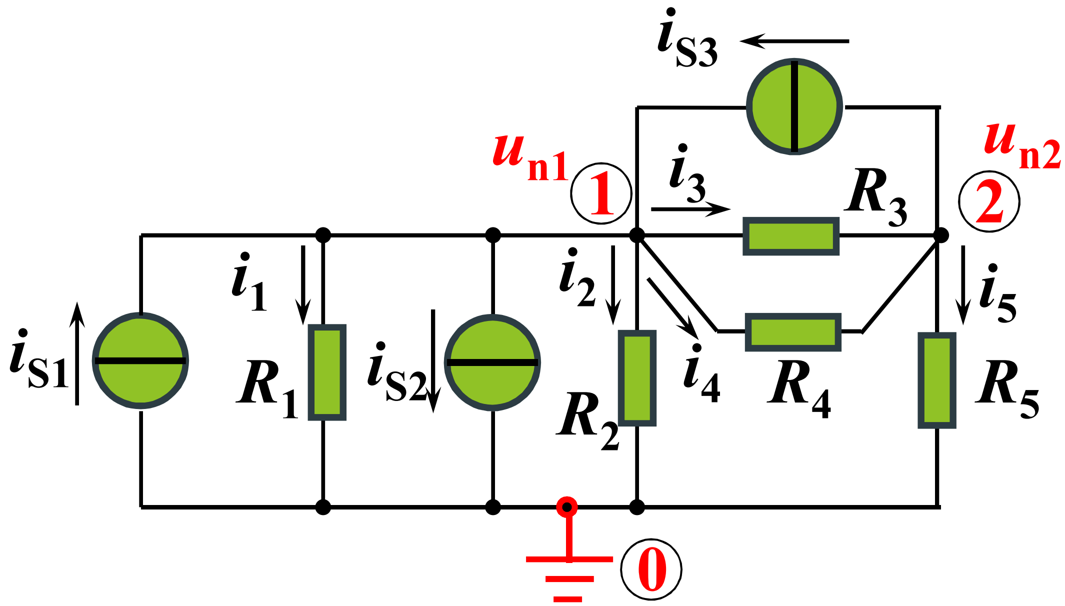
令 $G_k=1/R_k$，

$k=1，2，3，4，5$

$G_{11}=G_1+G_2+G_3+G_4$ —节点1的自电导，等于接在节点1上所有支路的电导之和。

$G_{22}=G_3+G_4+G_5$ — 节点2的自电导，等于接在节点2上所有支路的电导之和。

$G_{12}=G_{21}=-(G_3+G_4)$ — 节点1与节点2之间的互电导，等于接在节点1与节点2之间的所有支路的电导之和，并冠以负号。



$i_{Sn1} = i_{S1} - i_{S2} + i_{S3}$ — 流入节点1的电流源电流的代数和。

$i_{Sn2} = -i_{S3}$ —流入节点2的电流源电流的代数和。

* 电流源电流流入节点取正号，流出取负号。

将上述结论推广到有n-1个独立节点的仅含电阻、电流源的电路

$$\begin{cases} G_{11}u_{n1}+G_{12}u_{n2}+\dots+G_{1n}u_{nn}=i_{Sn1} \\ G_{21}u_{n1}+G_{22}u_{n2}+\dots+G_{2n}u_{nn}=i_{Sn2} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ G_{n1}u_{n1}+G_{n2}u_{n2}+\dots+G_{nn}u_{nn}=i_{Snn} \end{cases}$$

其中 G_{ii} —自电导，等于接在节点i上所有支路的电导之和，总为正。

$G_{ij}=G_{ji}$ —互电导，等于接在节点i与节点j之间的所支路的电导之和，并冠以负号。

i_{Sni}— 流入节点i的所有电流源电流的代数和。

* 当电路含受控源时，系数矩阵一般不再为对称阵。

节点法的一般步骤：

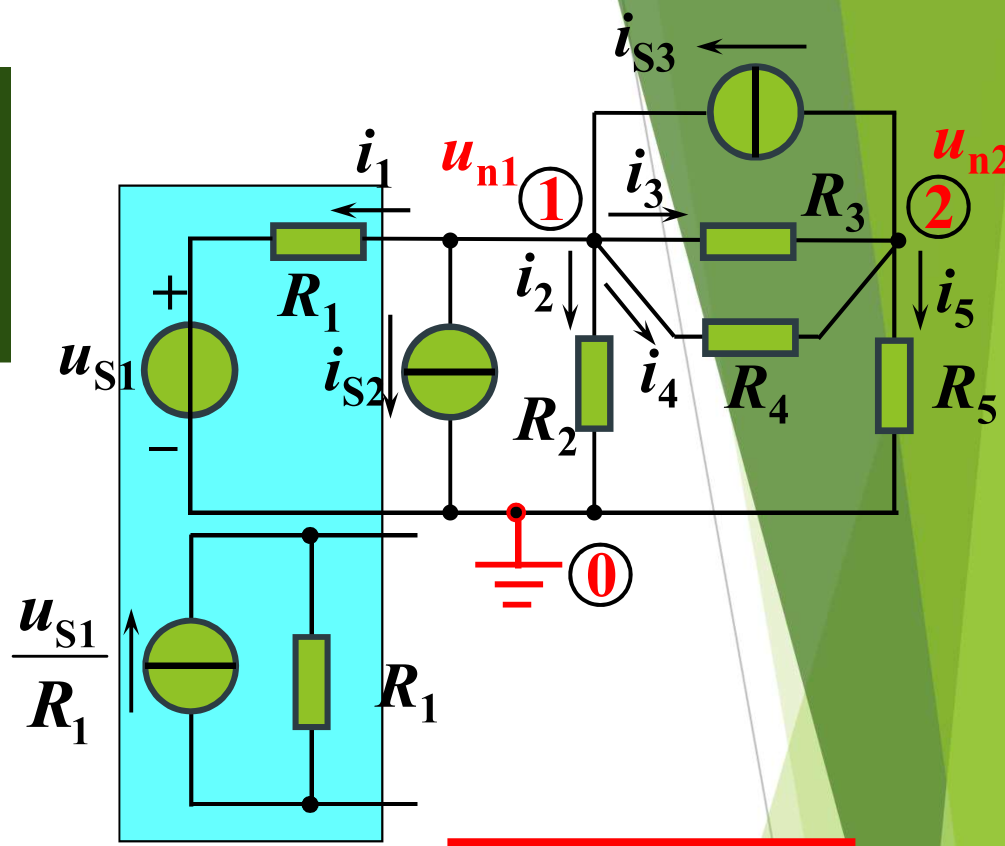
（1） 选定参考节点，标定n-1个独立节点；

（2） 对n-1个独立节点，以节点电压为未知量，列写其KCL方程；

（3） 求解上述方程，得到n-1个节点电压；

（4） 求各支路电流。

特殊情况1：电路中含电压源与电阻串联的支路



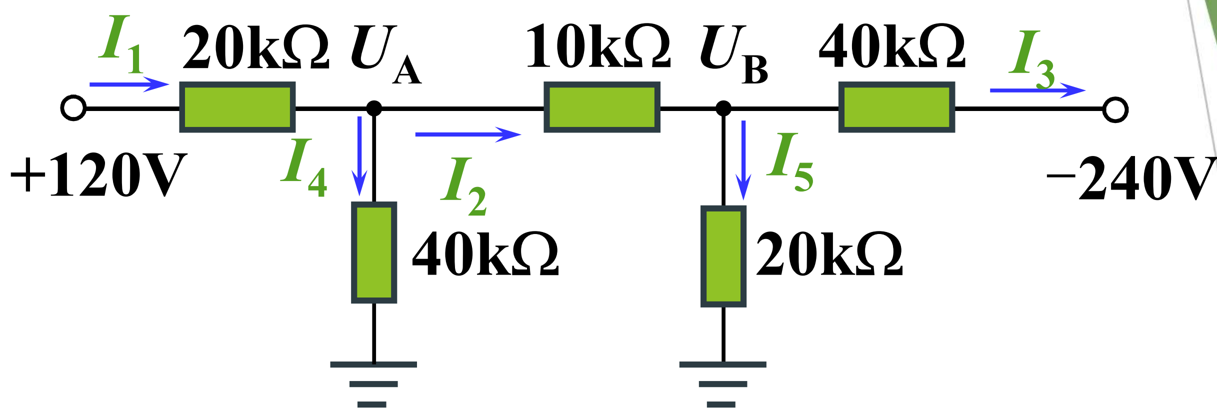
可 将该支路进行电源等效变换后，再列方程。

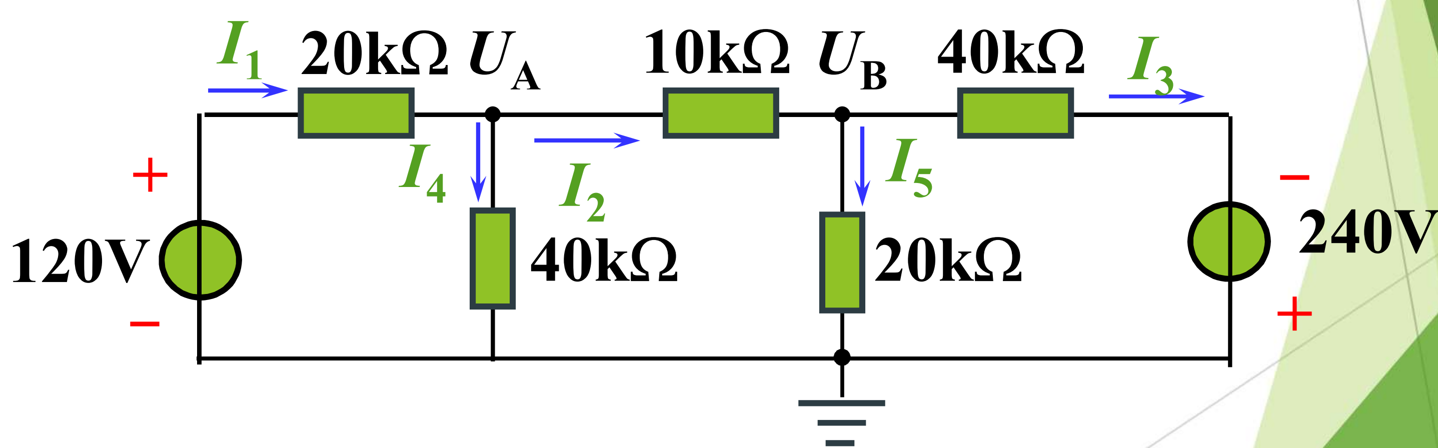
记G_k=1/R_k，得

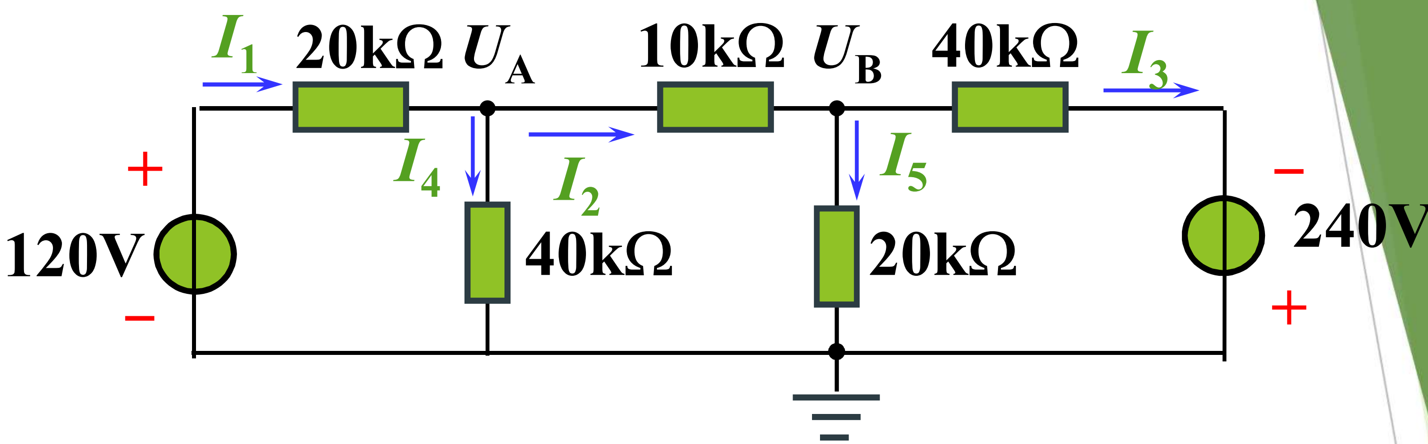
等效电流源

$$
\begin{cases}
(G_1+G_2+G_3+G_4)u_{n1}-(G_3+G_4)\,u_{n2} = G_1\,u_{S1}-i_{S2}+i_{S3} \\
-(G_3+G_4)\,u_{n1}+(G_3+G_4+G_5)u_{n2}=-i_{S3}
\end{cases}
$$

例　用节点法求各支路电流。







解

$$\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{10}\right)U_A-\frac{1}{10}U_B=\frac{120}{20}$$

$$-\frac{1}{10}U_A+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}\right)U_B=-\frac{240}{40}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_A=21.8\text{V} \\ U_B=-21.82\text{V} \end{cases}$$

各支路电流：

$I_1=(120-U_A)/20=4.91\text{mA}$

$I_2=(U_A-U_B)/10=4.36\text{mA}$

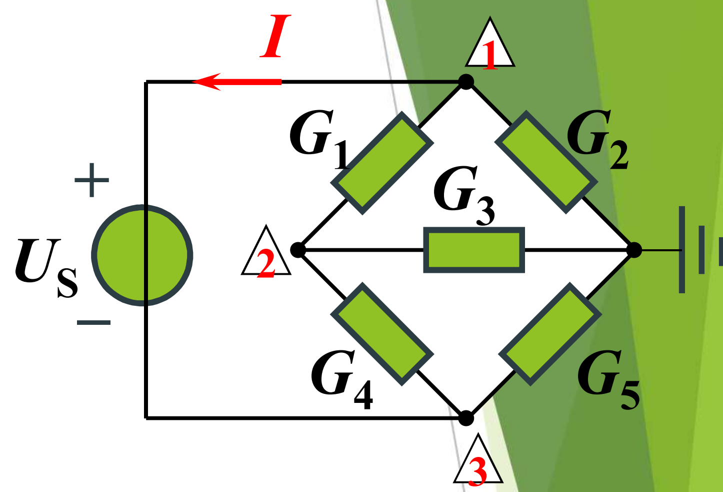
$I_3=(U_B+240)/40=5.46\text{mA}$

$I_4=U_A/40=0.546\text{mA}$

$I_5=U_B/20=-1.09\text{mA}$

特殊情况2：两个独立节点之间连接有理想电压源

例 列写图示电路的节点电压方程。



方法1:

先假设电压源支路的电流为I，列方程如下：

$$(G_1+G_2)U_1-G_1U_2+I=0$$

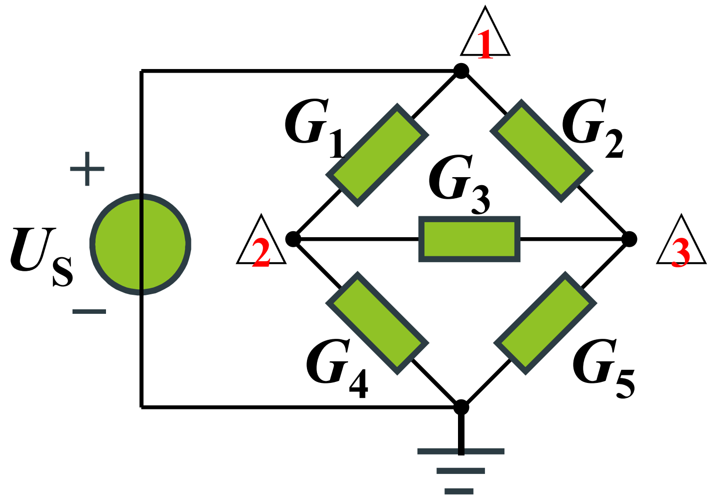
$$-G_1U_1+(G_1+G_3+G_4)U_2-G_4U_3=0$$

$$-G_4U_2+(G_4+G_5)U_3-I=0$$

再增加一个节点电压与电压源间的关系：

$$U_1-U_3=U_S$$

方法2：选择合适的参考点（如图所示）



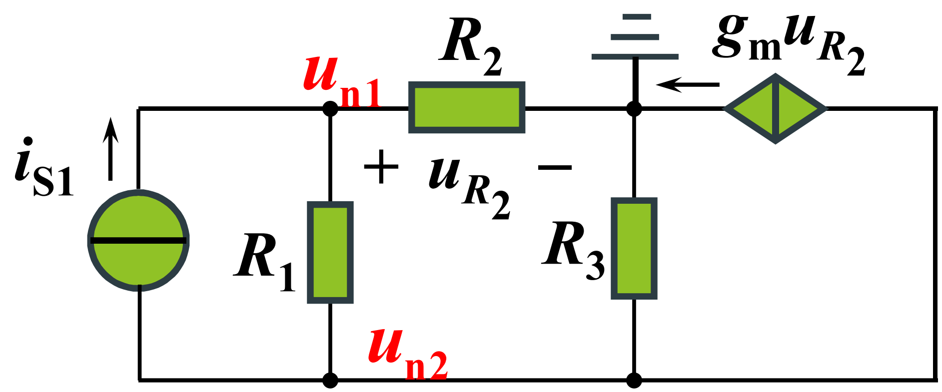
$$U_1 = U_S$$

$$-G_1U_1+(G_1+G_3+G_4)U_2-G_3U_3=0$$

$$-G_2U_1-G_3U_2+(G_2+G_3+G_5)U_3=0$$

特殊情况3：电路中含有受控电流源

例　列写下图含VCCS电路的节点电压方程。



解　（1）先把受控源当作独立源看待，列方程：

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)u_{n1}-\dfrac{1}{R_1}u_{n2}=i_{S1} \\ -\dfrac{1}{R_1}u_{n1}+\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_3}\right)u_{n2}=-g_m u_{R_2}-i_{S1} \end{cases}$$

（2） 用节点电压表示控制量。

$$u_{R_2} = u_{n1}$$

整理

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)u_{n1}-\dfrac{1}{R_1}u_{n2}=i_{S1} \\ -\left(\dfrac{1}{R_1}-g_m\right)u_{n1}+\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_3}\right)u_{n2}=-i_{S1} \end{cases}$$

思考：当电路中含有受控电压源时该如何列写节点电压方程？

支路法、回路法、节点法的比较

（1） 方程数的比较

	KCL方程	KVL方程	方程总数
支路法	$n-1$	$b-n+1$	b
回路法	0	$b-n+1$	$b-n+1$
节点法	$n-1$	0	$n-1$

（2） 对于非平面电路，选独立回路不容易，选独立节点较容易。

（3） 回路法、节点法易于编程。目前用计算机分析网络（电网络，集成电路设计等）采用节点法较多。