5.5 奈奎斯特稳定性判据和系统的相对稳定性

基于系统闭环特征方程和开环传递函数来判别系统的稳定性，是基于系统的闭环传递函数、开环传递函数是已知的前提下完成的

1933年，乃奎斯特(Nyquist)提出了另一种判定闭环系统稳定性的方法，称为乃奎斯特稳定判据，简称乃氏判据。

这个判据的主要特点是利用开环频率特性判定闭环系统的稳定性。此外，乃氏稳定判据还能够指出稳定的程度，揭示改善系统稳定性的方法。因此，乃氏稳定判据在频率域控制理论中有着重要的地位。

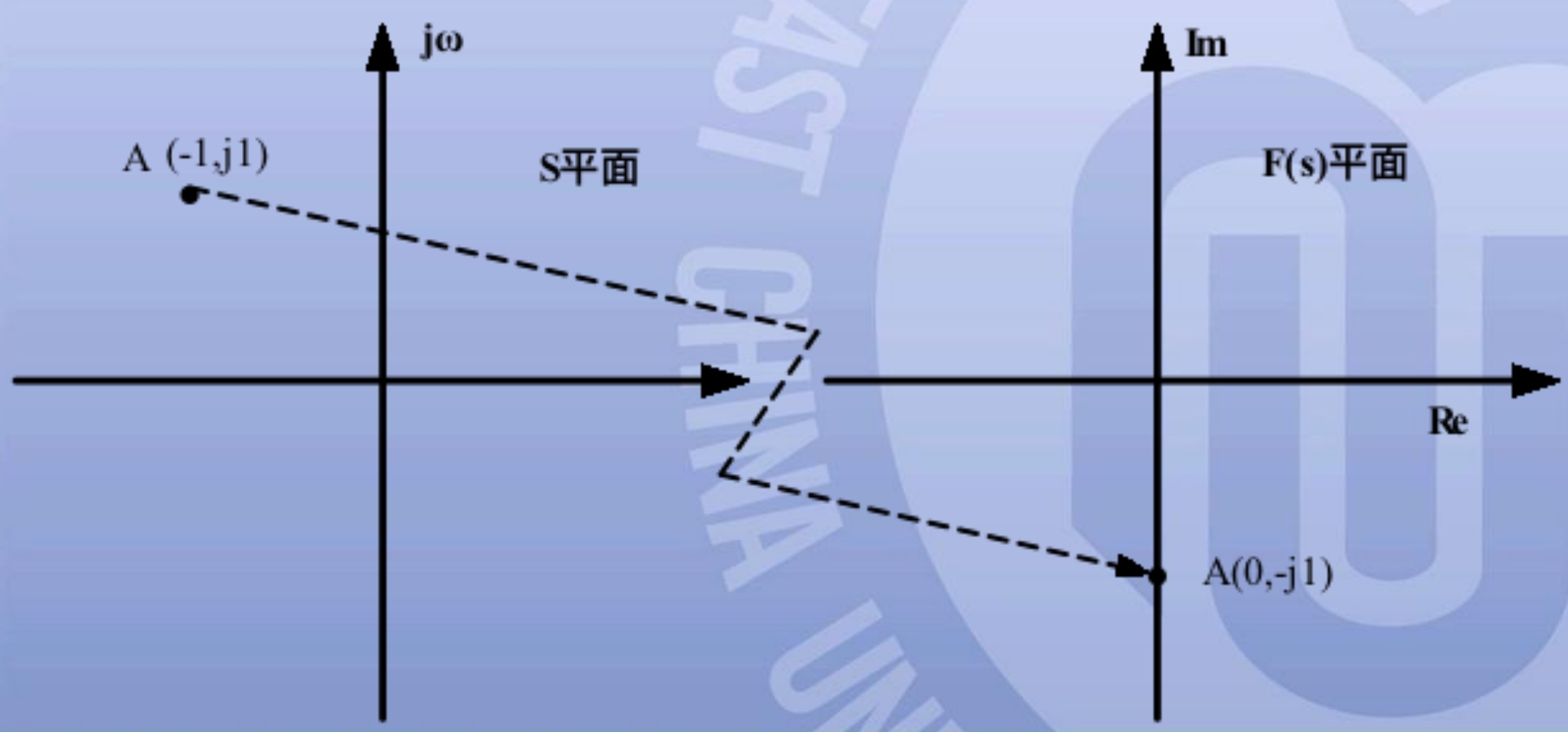
5.5.1 幅角原理

$$s = \sigma + j\omega$$

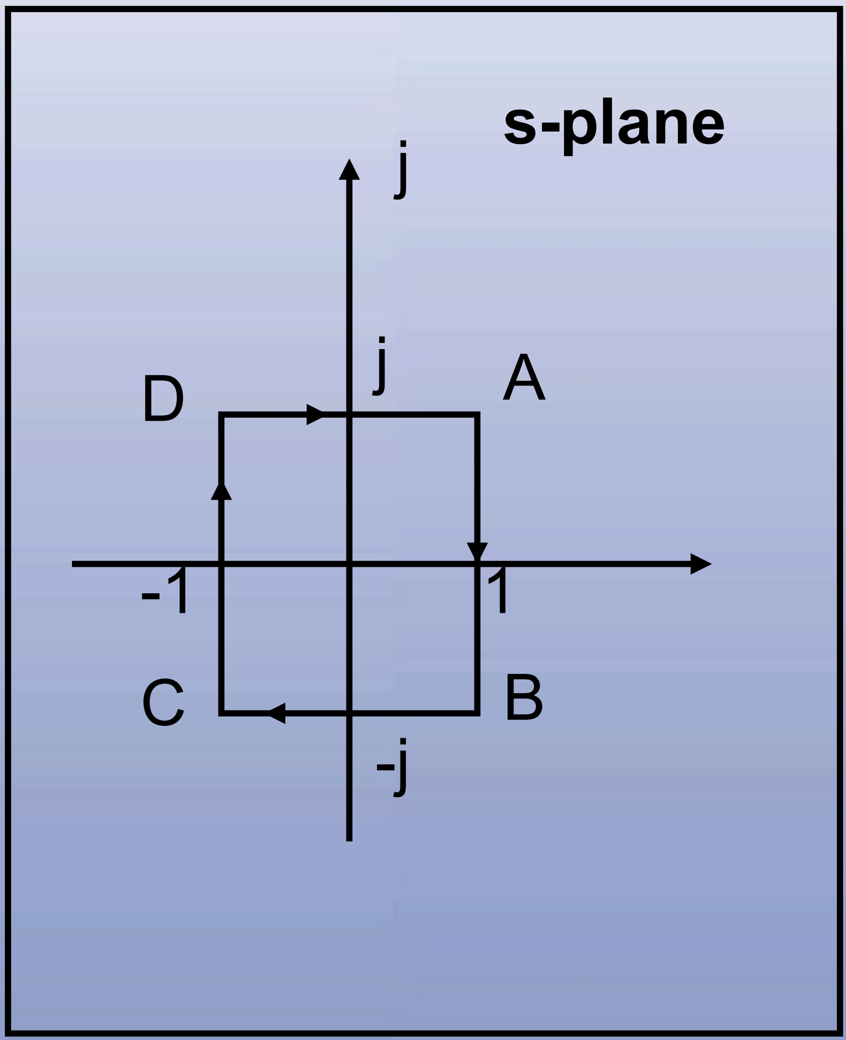
$$F(s) = 1 + \frac{2}{s}$$

$$F(s) = 1 + \frac{2}{\sigma + j\omega} = 1 + \frac{2\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} - j\frac{2\omega}{\sigma^2 + \omega^2}$$

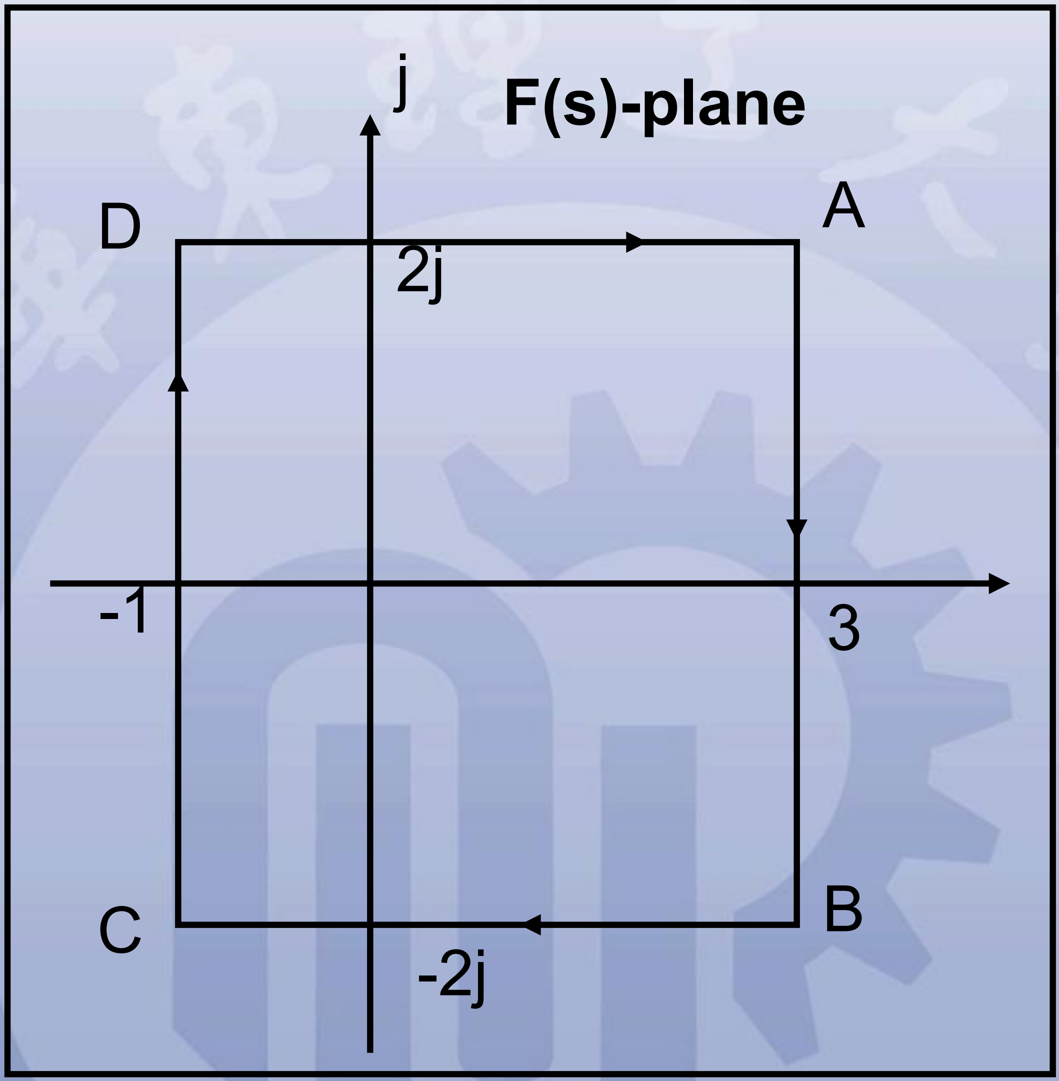
$$F(s) = u - jv$$



S平面在F(s)平面上的映射

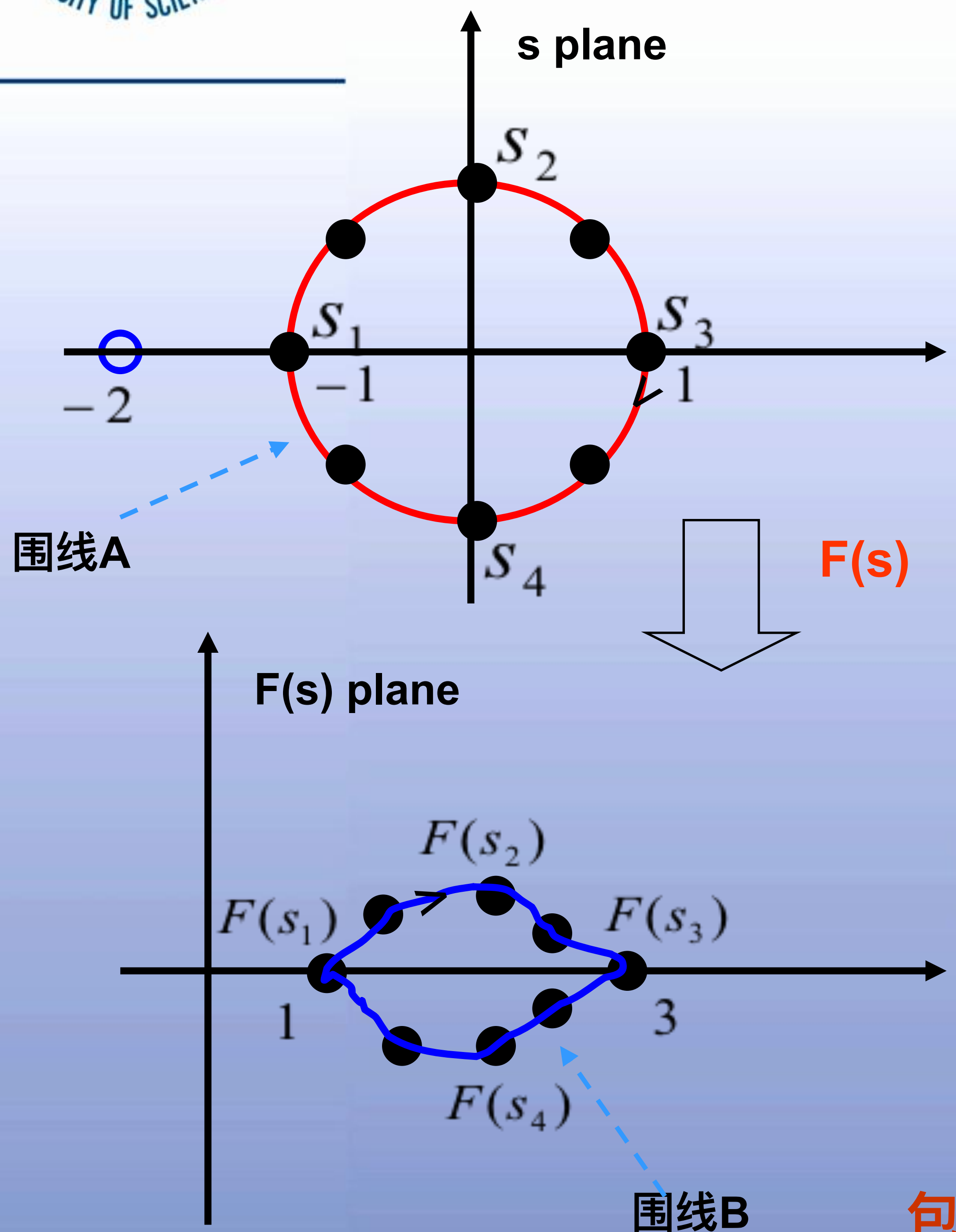


F(s)=2s+1



围线包围零极点不同情况下的映射情况

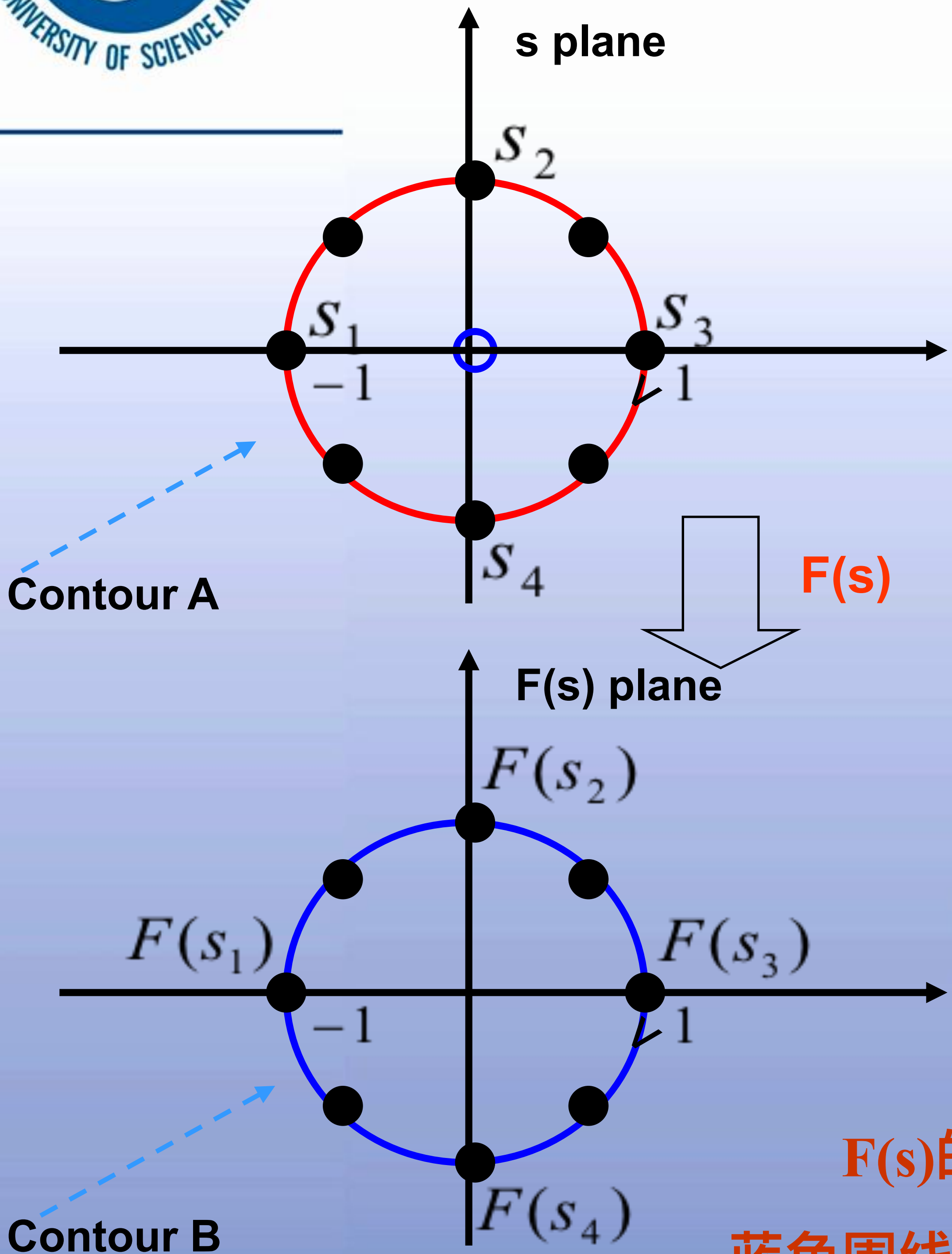
$$F(s) = s + 2$$



Points	Magnitude	Phase
-1	1	0º
-0.707+j0.707	1.47	28.70º
j	2.24	26.57º
0.707+j0.707	2.80	14.64º
1	3	0º
0.707-j0.707	2.80	-14.64º
-j	2.24	-26.57º
-0.707-j0.707	1.47	-28.70º

F(s)的零点不在红色围线的包围中,蓝色围线不包围坐标的原点

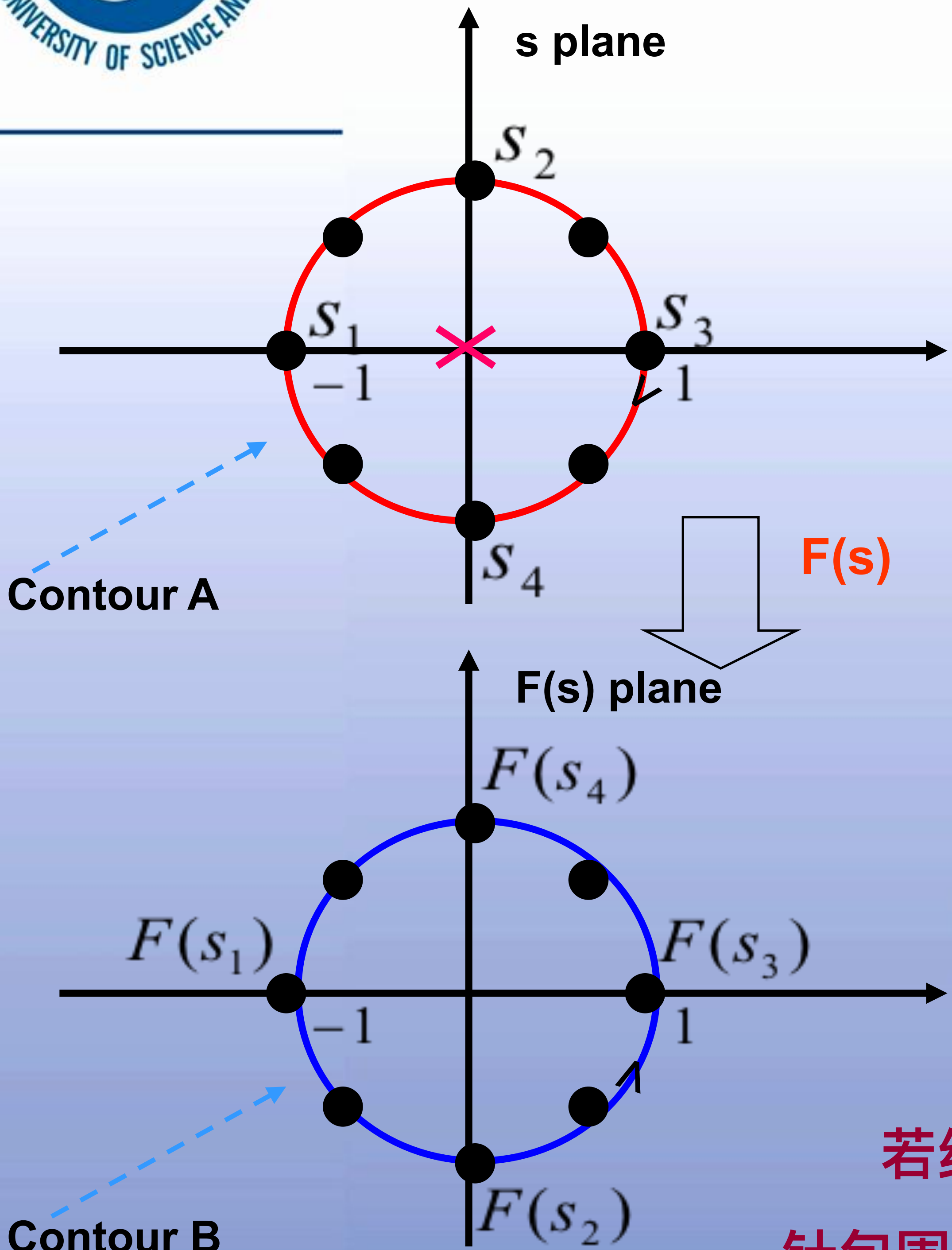
$$F(s) = s$$



Points	Magnitude	Phase
-1	1	180°
-0.707+j0.707	1	135°
j	1	90°
0.707+j0.707	1	45°
1	1	0°
0.707-j0.707	1	-45°
-j	1	-90°
-0.707-j0.707	1	-135°

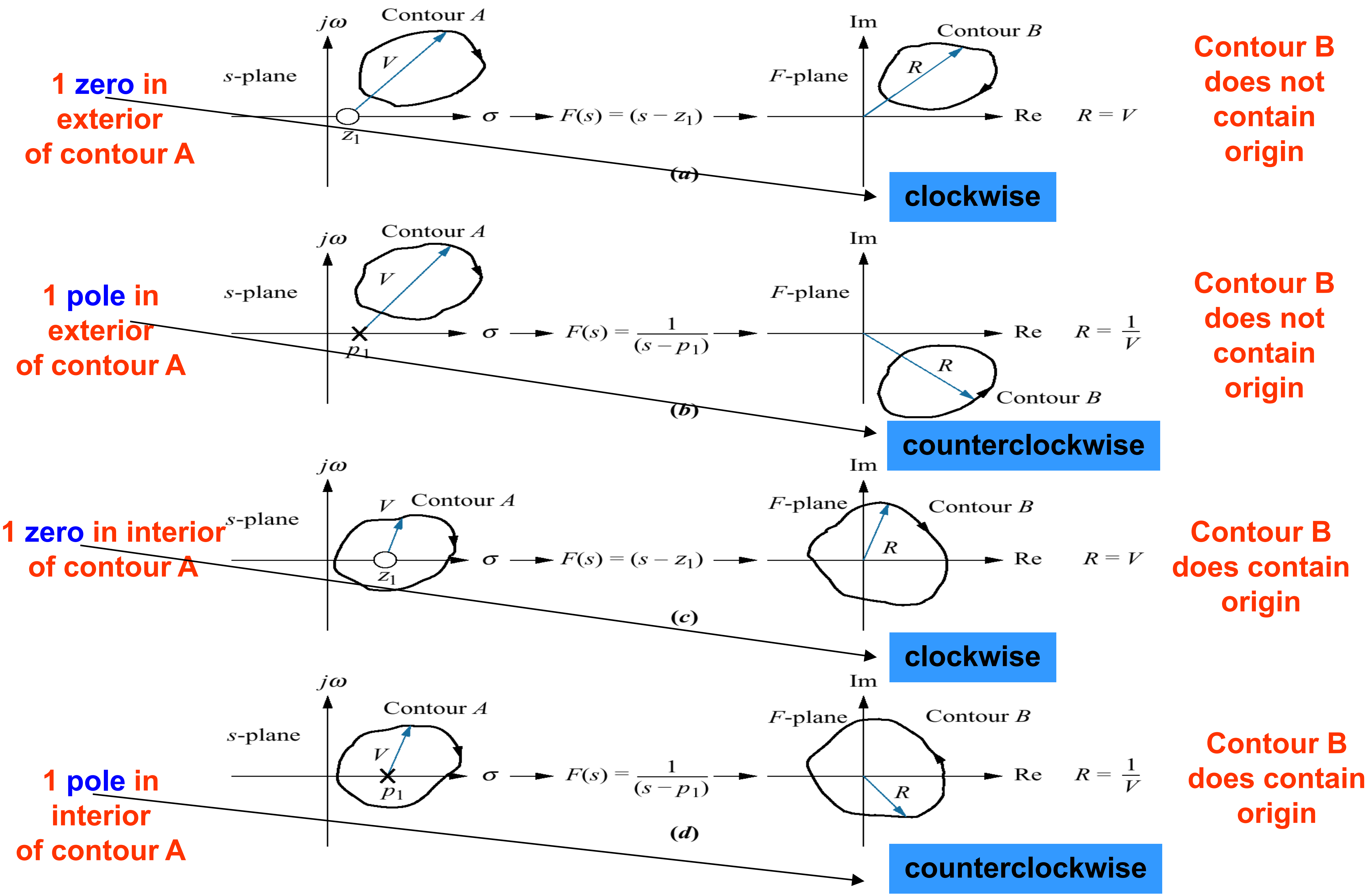
F(s)的一个零点被红色围线顺时针包围的情况下，蓝色围线顺时针包围坐标原点一次

$$F(s) = s^{-1}$$



Points	Magnitude	Phase
-1	1	-180º
-0.707+j0.707	1	-135º
j	1	-90º
0.707+j0.707	1	-45º
1	1	0º
0.707-j0.707	1	45º
-j	1	90º
-0.707-j0.707	1	135º

若红色的围线顺时针包围1个极点，蓝色曲线逆时针包围坐标原点1次



1 zero in exterior of contour A
Contour A
s-plane
$j\omega$
V
z_1
σ
$F(s) = (s - z_1)$
Im
Contour B
F-plane
R
Re
$R = V$
(a)
Contour B does not contain origin
clockwise
1 pole in exterior of contour A
p_1
$F(s) = \frac{1}{(s - p_1)}$
$R = \frac{1}{V}$
(b)
Contour B does not contain origin
counterclockwise
1 zero in interior of contour A
$R = V$
(c)
Contour B does contain origin
clockwise
1 pole in interior of contour A
$F(s) = \frac{1}{(s - p_1)}$
$R = \frac{1}{V}$
(d)
Contour B does contain origin
counterclockwise

幅角原理

设s为复数变量，$F(s)$为s 的有理分式函数，且有

$$F(s)=\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

由复变函数理论知道，在s平面上任选一条闭合曲线Γ，且不通过$F(s)$的任一零点和极点，s从闭合曲线Γ上任一点A起，顺时针沿Γ运动一周，再回到A点，则对应 $F(s)$的平面上亦从点起 $F(A)$ 到 $F(A)$点止形成一条闭合曲线Γ_F 。

幅角原理

复变函数的相角为

$$\angle F(s)=\sum_{i=1}^{n}\angle(s-z_i)-\sum_{l=1}^{n}\angle(s-p_l)$$

当s沿围线г顺时针变化一周时，由各个零、极点出发的向量对$\angle F(s)$的增量所提供的幅角贡献如下：

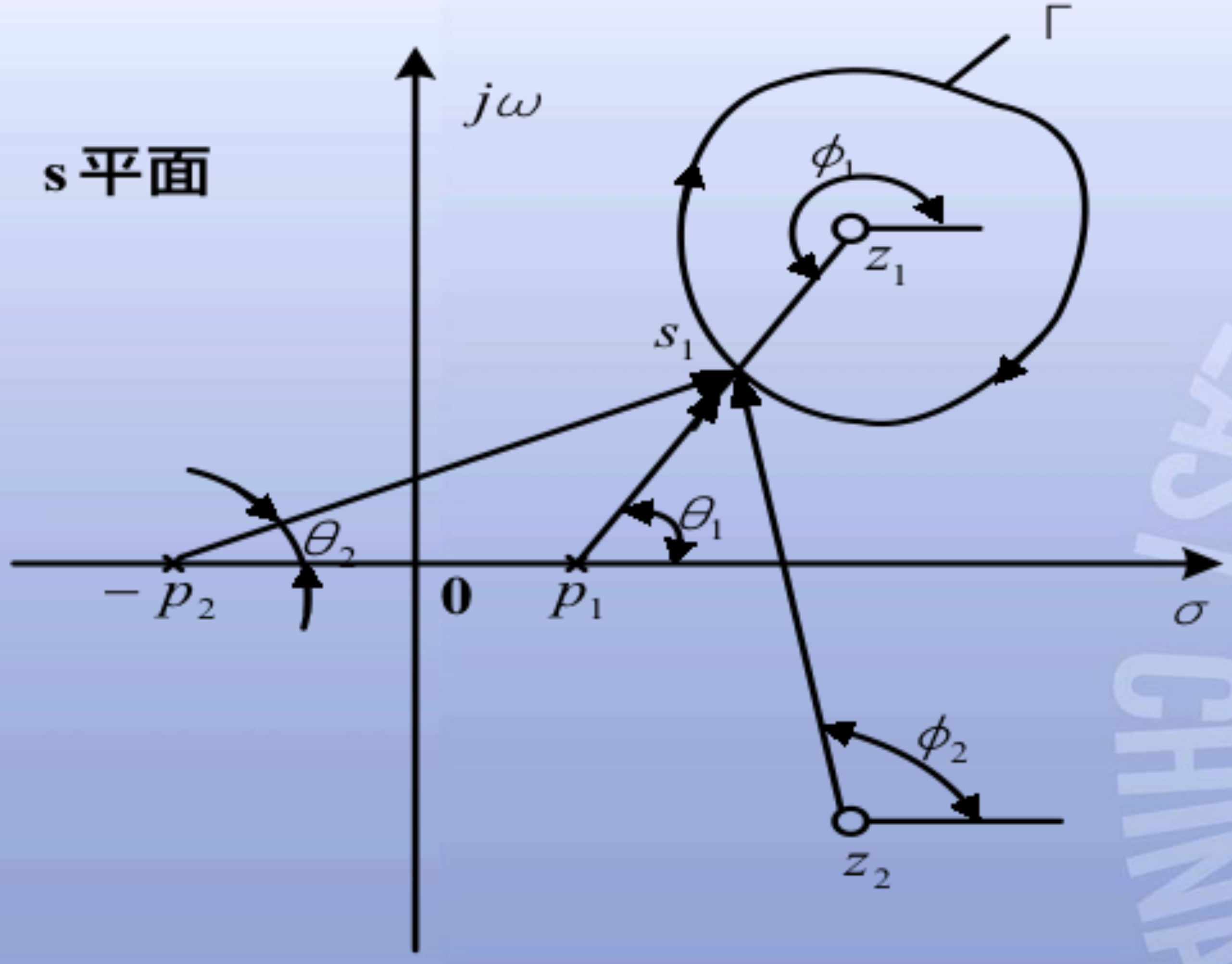
(1)在г以内的零点对应的幅角贡献为-360°

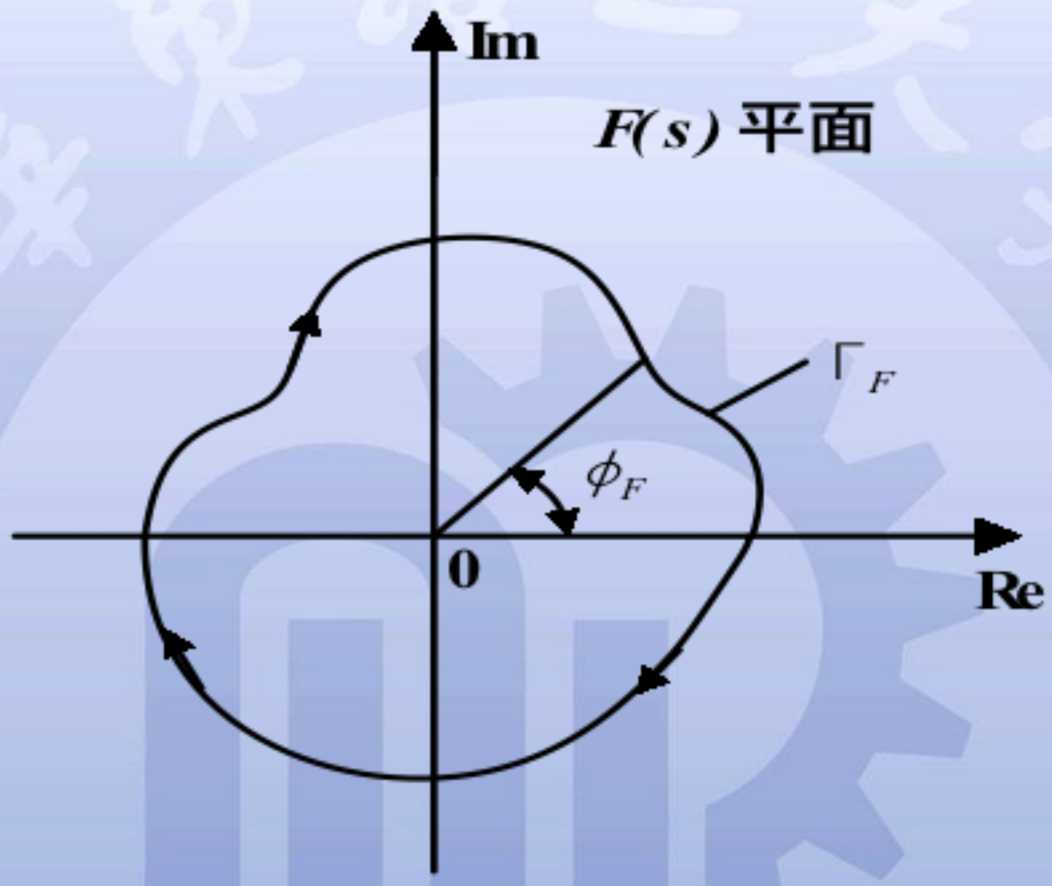
(2)在г以内的极点对应的幅角贡献为+360°

(3)在г以外的零点或极点对应的幅角贡献为零

幅角原理

$$\angle F(s)=\sum_{i=1}^{n}\angle(s-z_i)-\sum_{l=1}^{n}\angle(s-p_l)$$





柯西辐角定理

设F(s)在Γ上及在Γ内除有限个数的极点外是处处解析的，F(s)在Γ上既无极点也无零点，则当围线Γ走向为顺时针时，映射围线Γ’包围F(s)平面原点的次数为：

$$N=Z-P$$

其中，Z为F(s)在Γ内的零点个数，P为F(s)在Γ内的极点个数，**N为正表示顺时针包围，N为负表示逆时针包围**。

5.5.2 奈奎斯特稳定判据

$$G_0(s)=G(s)H(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$$

闭环传递函数 $$W(s)=\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}=\frac{B(s)}{A(s)+B(s)}$$

辅助函数 $$F(s)=1+G_0(s)=1+\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{A(s)+B(s)}{A(s)}$$

1) F(s) 的零点为闭环传递函数的极点(闭环特征方程的根)，F(s)的极点是开环传递函数的极点；

2) 因为开环传递函数分母多项式的阶次一般大于或等于分子多项式的阶次，故F(s)的零点和极点数相同；

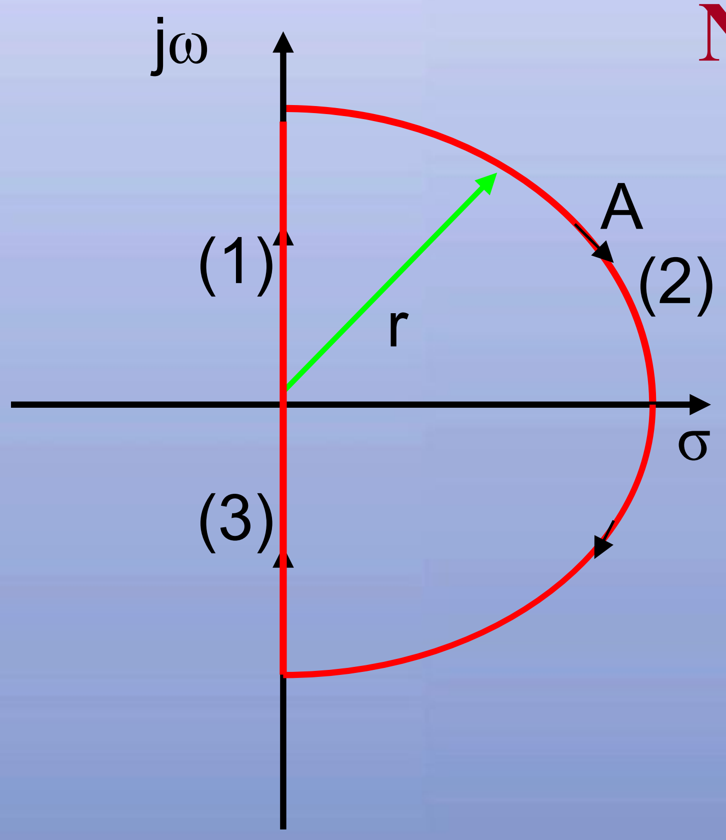
3) 闭环系统稳定，则F(s)的零点必须全部在S平面的左半部。

柯西幅角定理应用的设想

$$F(s)=\frac{A(s)+B(s)}{A(s)}=1+\mathbf{G}_0(s)$$

如果有一条S平面的封闭围线г能顺时针包围整个右半平面，则在F(s)平面上映射围线г'顺时针包围原点的次数N应该为：

N=Z-P=闭环右极点-开环右极点



奈奎斯特围线

该封闭曲线按顺时针方向包围整个右半s平面。

(1) 正虚轴 $s=j\omega$ ω: $0\to+\infty$

(2) $s=Re^{j\theta}$ ω $R\to+\infty$ θ: $+90°\to-90°$

(3) 负虚轴 $s=j\omega$ ω: $-\infty\to0$

奈奎斯特曲线

$$F(s)=1+G(s)H(s)=1+G_0(s)$$

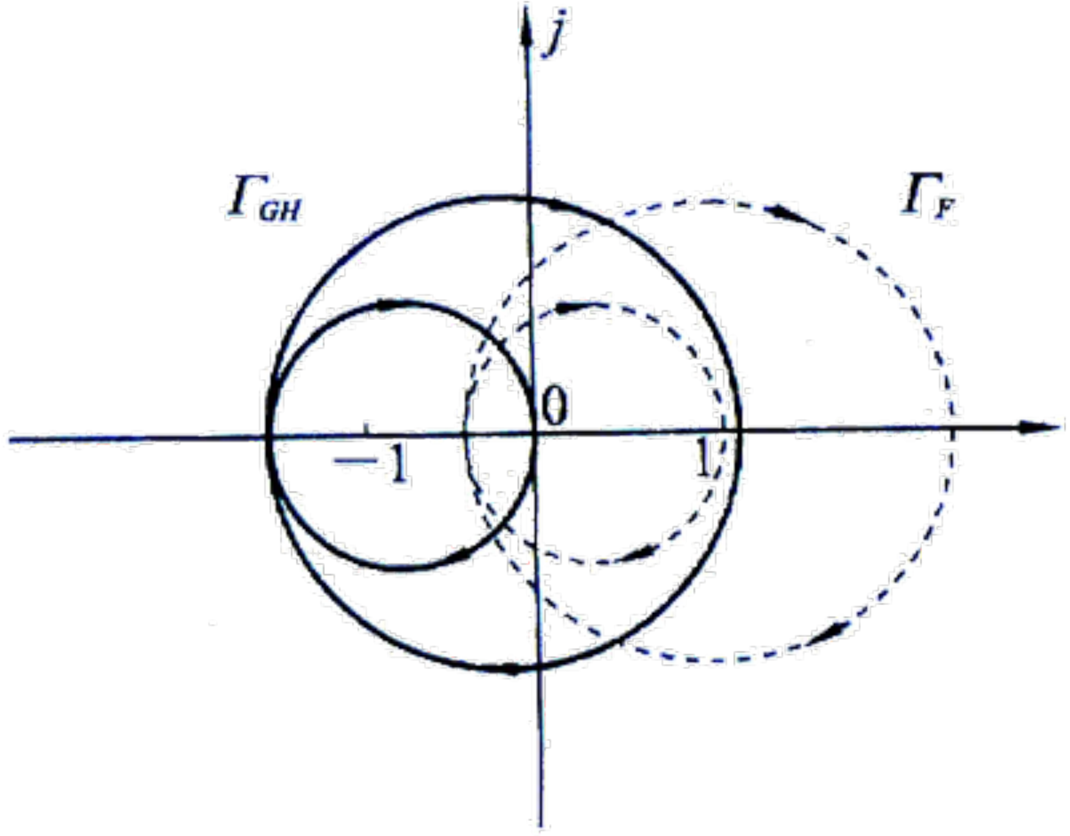
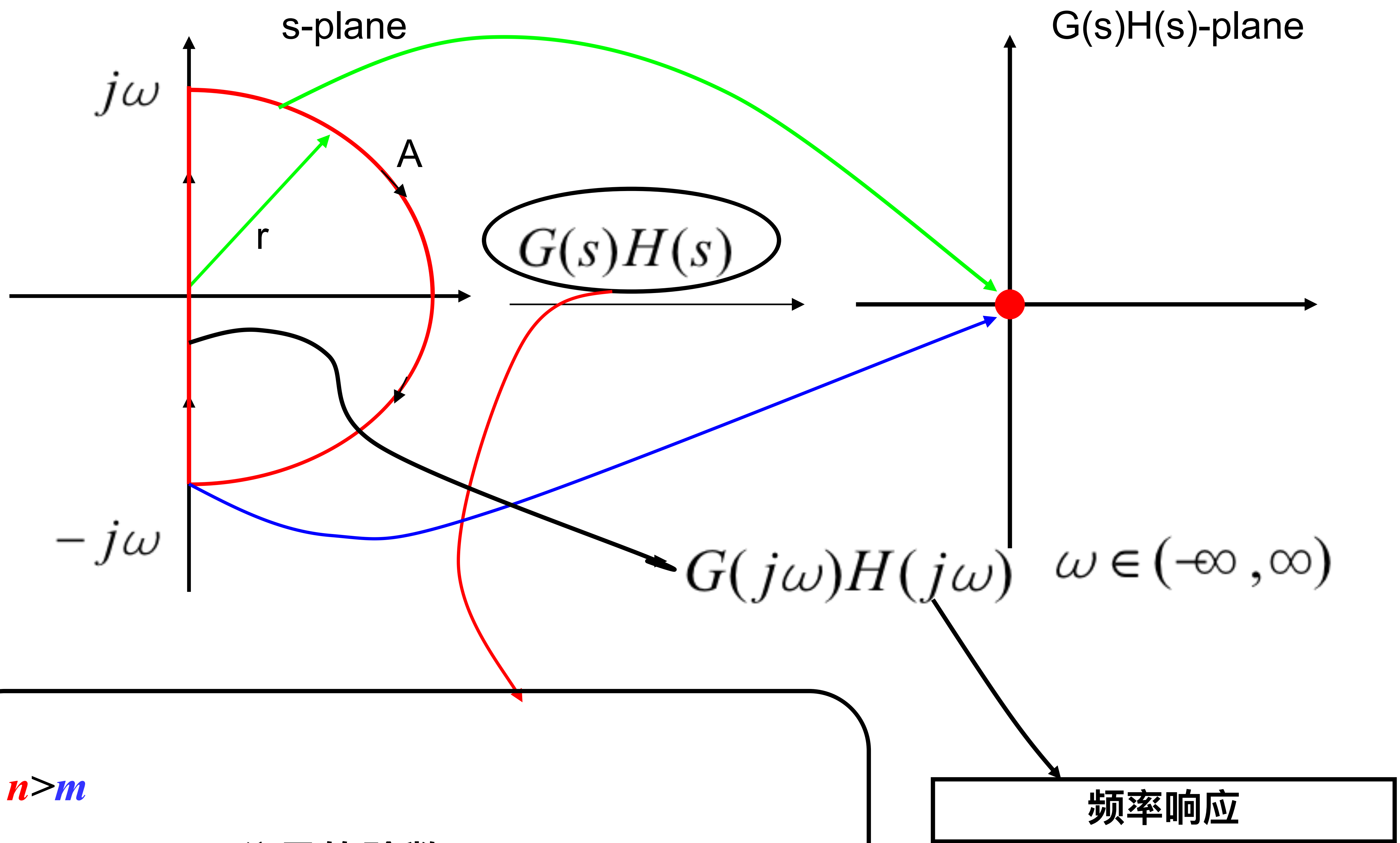


图 Γ_F 与 Γ_{GH}的几何关系

(1) 奈奎斯特围线г在F(s)平面的映射可以由其在$G_0(s)$的映射求得，它们之间相差一个右移单位。

(2) 奈奎斯特围线г在$G_0(s)$的映射曲线成为奈奎斯特曲线

(3) г 的映射围线г ′在F(s)平面，即$1+G_0(s)$平面上对原点的包围，相当于г ′在$G_0(s)$平面上的映射曲线对(-1,j0)点的包围。



$n > m$

n: G(s)H(s)分母的阶数

m: G(s)H(s)分子的阶数

奈奎斯特稳定性判据

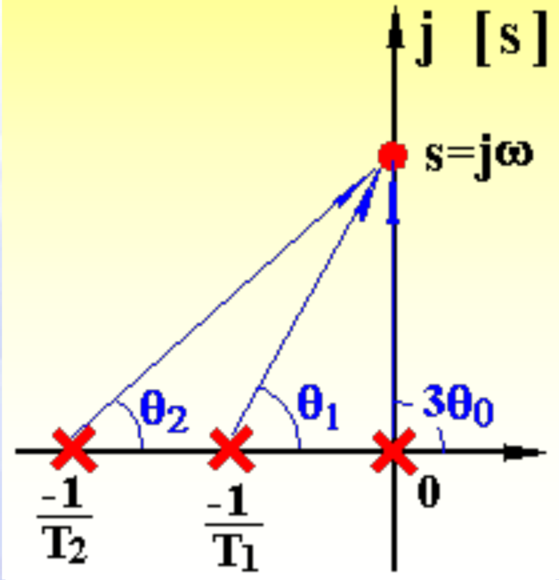
如果系统**开环传递函数**在右半s平面内有P个极点，且奈奎斯特曲线对**(-1,j0)**点的包围次数为N(N＞0表示顺时针，N＜0表示逆时针)，则系统**闭环特征方程**在右半s平面内的根数为：

$$Z=N+P$$

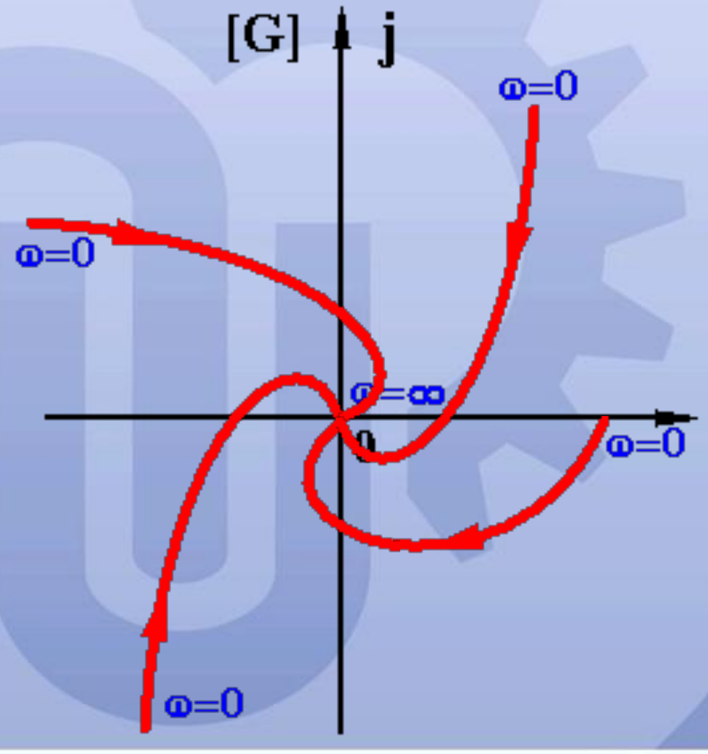
若Z=0，闭环系统稳定；否则不稳定。

开环系统奈奎斯特曲线绘制方法复习(1)

$$G(s)=\frac{K}{s^{\nu}(T_1 s+1)(T_2 s+1)}=\frac{K/(T_1T_2)}{s^{\nu}(s+1/T_1)(s+1/T_2)}$$



ν	$G(j\omega)$	$G(j0)$	$G(j\infty)$
0	$\dfrac{K}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_1)}$	$K\angle 0^\circ$	$0\angle -180^\circ$
I	$\dfrac{K}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_1)}$	$\infty\angle -90^\circ$	$0\angle -270^\circ$
II	$\dfrac{K}{(j\omega)^2(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_1)}$	$\infty\angle -180^\circ$	$0\angle -360^\circ$
III	$\dfrac{K}{(j\omega)^3(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_1)}$	$\infty\angle -270^\circ$	$0\angle -450^\circ$



起点 $\begin{cases} K\angle 0^\circ & \nu=0 \\ \infty\angle -90^\circ\nu & \nu>0 \end{cases}$ 终点 $0\angle -90^\circ(n-m)$

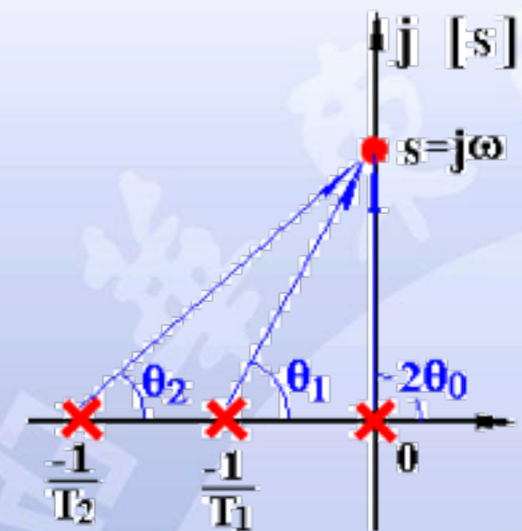
开环系统奈奎斯特曲线绘制方法复习(2)

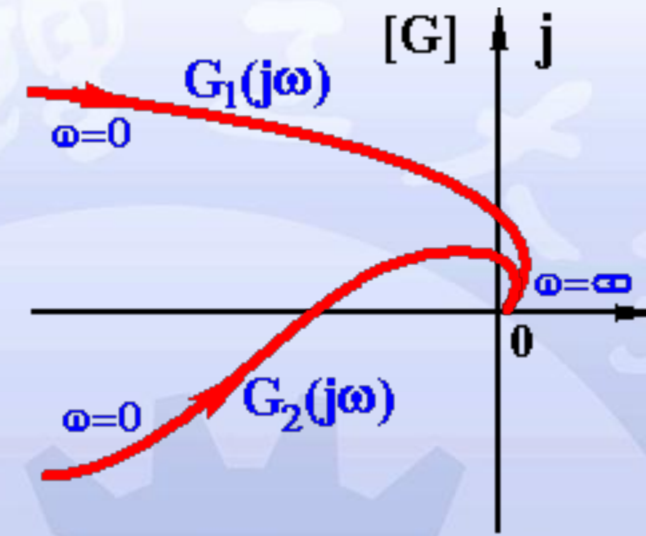
$$G_1(s)=\frac{K}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

$$G_1(j0)=\infty\angle-180^\circ$$

$$|G_1|\downarrow \quad \angle G_1\downarrow$$

$$G_1(j\infty)=0\angle-360^\circ$$





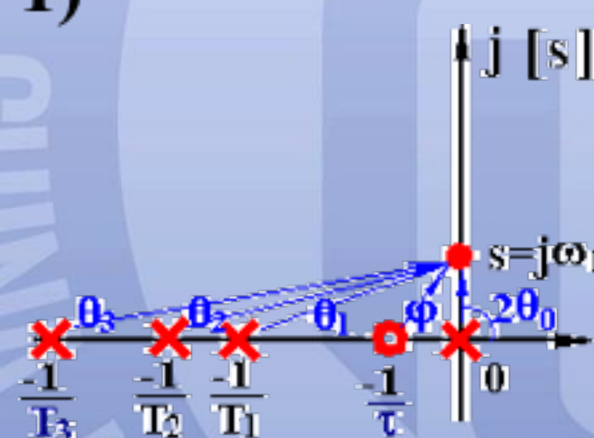
$$G_2(s)=\frac{K(\tau s+1)}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$$

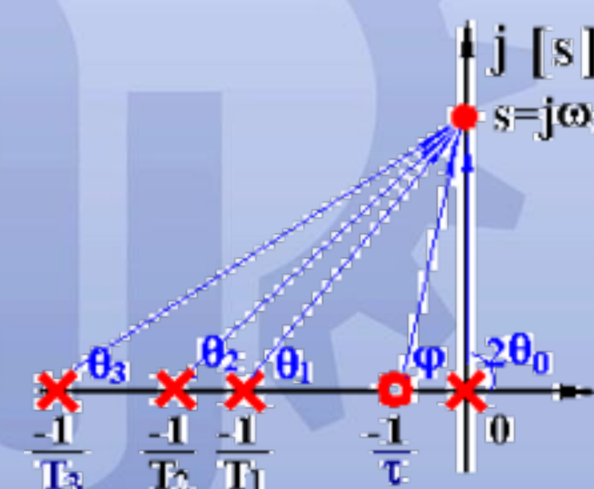
$$G_2(j0)=\infty\angle-180^\circ$$

$$|G_2|\downarrow \quad \angle G_2\downarrow\ (>-180^\circ)$$

$$|G_2|\downarrow \quad \angle G_2\downarrow\ (<-180^\circ)$$

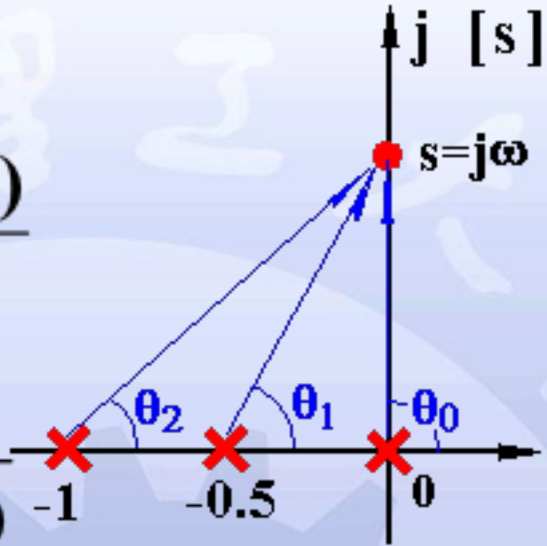
$$G_2(j\infty)=0\angle-360^\circ$$





开环系统奈奎斯特曲线绘制方法复习(3)

$$G(s)=\frac{5}{s(s+1)(2s+1)}$$



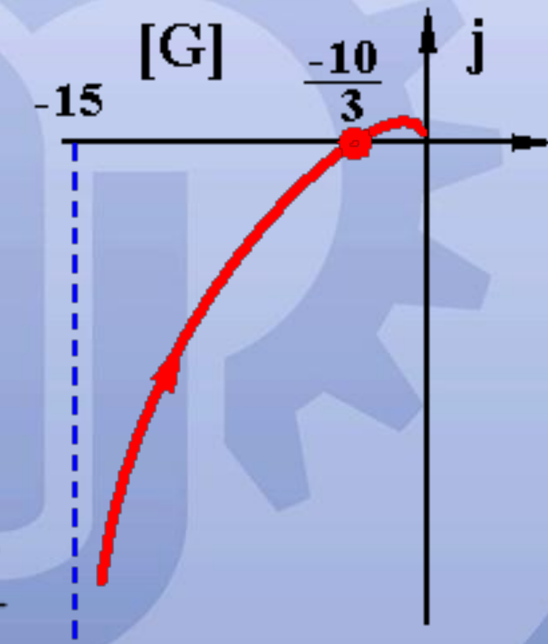
解

$$G(j\omega)=\frac{5}{j\omega(1+j\omega)(1+j2\omega)}=\frac{-j5(1-j\omega)(1-j2\omega)}{\omega(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$$

$$=\frac{-15}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}-j\frac{5(1-2\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$$

$$G(j0)=\infty\angle-90^\circ$$

$$G(j\infty)=0\angle-270^\circ$$



渐近线：

$$\mathrm{Re}[G(j0)]\Rightarrow-15$$

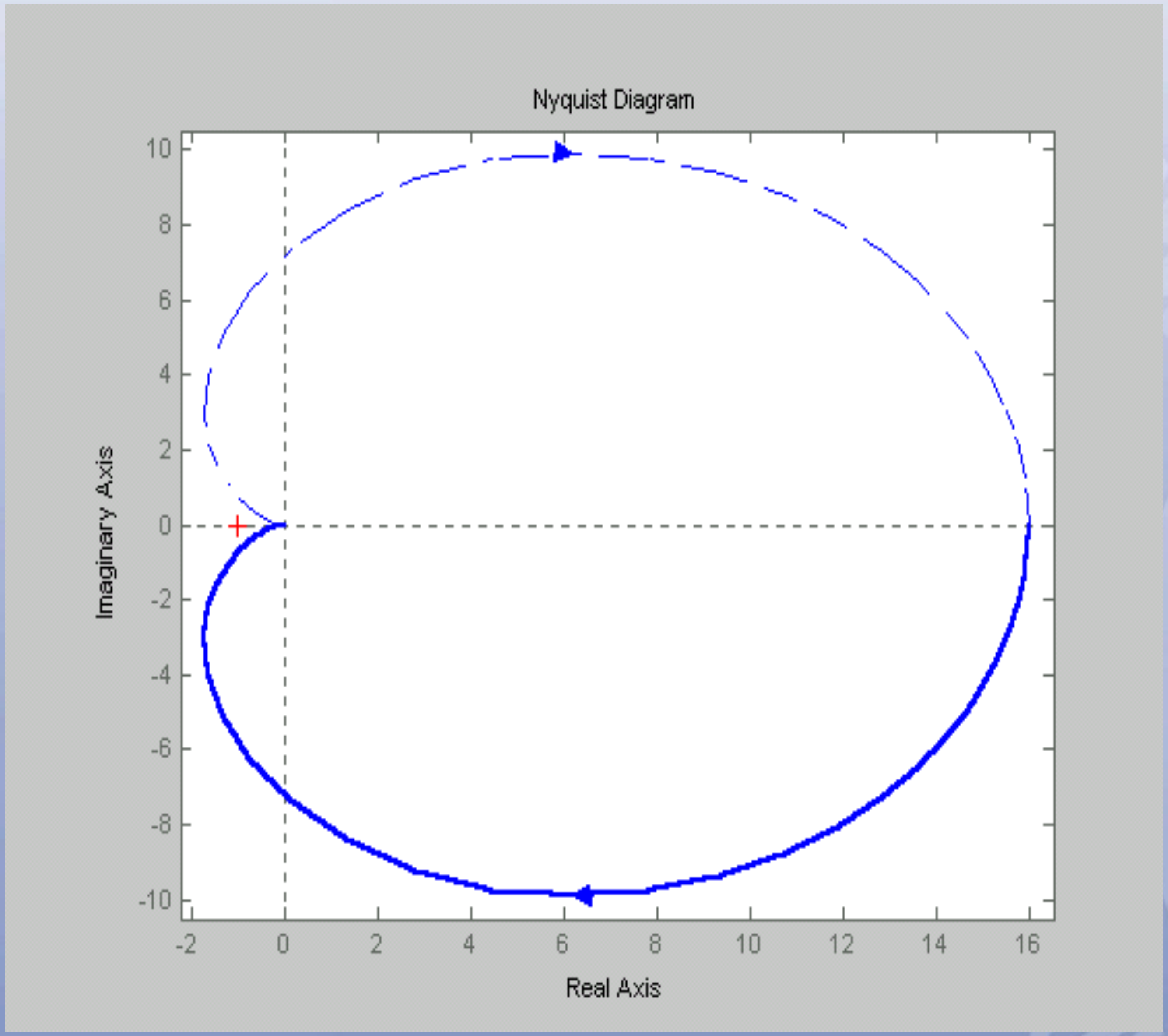
与实轴交点：

$$\mathrm{Im}[G(j\omega)]=0\quad\Rightarrow\quad\omega=1/\sqrt{2}=0.707$$

$$\mathrm{Re}[G(j0.707)]=\frac{-15}{(1+0.5)(1+4\times0.5)}=-\frac{10}{3}$$

例：设开环传递函数如下，试用奈奎斯特稳定性判据判别闭环系统的稳定性

$$G(s)H(s)=\frac{1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$



解:

P=0

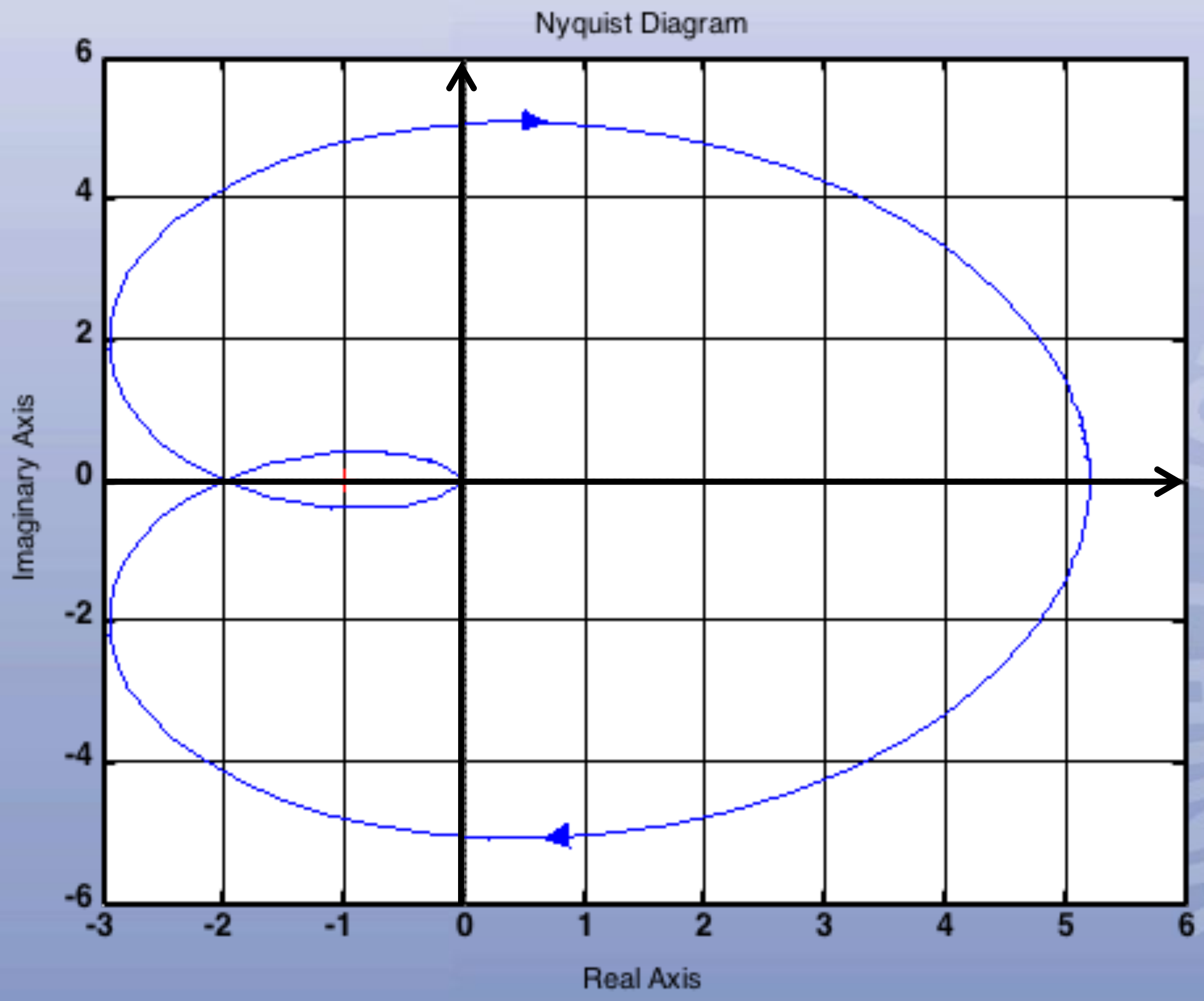
N=0

Z=P+N=0

闭环系统在右半s平面不存在极点，闭环系统是稳定的。

例：设开环传递函数如下，试用奈奎斯特稳定性判据判别闭环系统的稳定性

$$G_0(s)=\frac{52}{(s+2)(s^2+2s+5)}$$



解：

ω=0时，曲线的起点在实轴的(5.2,j0)点

ω→+∞时，曲线的终点在原点处：　$G(j\infty)=0\angle-270°$

分别计算与实轴和虚轴的交点

$$G_0(j\omega) = \frac{52}{(2+j\omega)(-\omega^2+2\omega j+5)}$$

$$= \frac{52}{(2+j\omega)\left[(5-\omega^2) \ \ +2\omega j\right]}$$

$$= \frac{52(2-j\omega)\left[(5-\omega^2)-2\omega j\right]}{(4+\omega^2)\left[(5-\omega^2)^2+4\omega^2\right]}$$

$$= \frac{52(10-4\omega^2)}{(4+\omega^2)\left[(5-\omega^2)^2+4\omega^2\right]} + \frac{52(\omega^3-9\omega)j}{(4+\omega^2)\left[(5-\omega^2)^2+4\omega^2\right]}$$

$$\mathrm{Re}[G_0(j\omega)] = \frac{52(10-4\omega^2)}{(4+\omega^2)\left[(5-\omega^2)^2+4\omega^2\right]}$$

$$\mathrm{Im}[G_0(j\omega)] = \frac{52(\omega^3-9\omega)}{(4+\omega^2)\left[(5-\omega^2)^2+4\omega^2\right]}$$

求与虚轴的交点

$$\mathrm{Re}[G_0(j\omega)] = \frac{52(10-4\omega^2)}{(4+\omega^2)\left[(5-\omega^2)^2+4\omega^2\right]} = 0$$

$\omega = \sqrt{2.5} = 1.5811$ $\mathrm{Im}[G_0(j2.5)] = -5.06$

求与实轴的交点

$$\mathrm{Im}[G_0(j\omega)] = \frac{52(\omega^3-9\omega)}{(4+\omega^2)\left[(5-\omega^2)^2+4\omega^2\right]} = 0$$

$\omega = 3$ $\mathrm{Re}[G_0(j\omega)] = -2$

$P = 0$

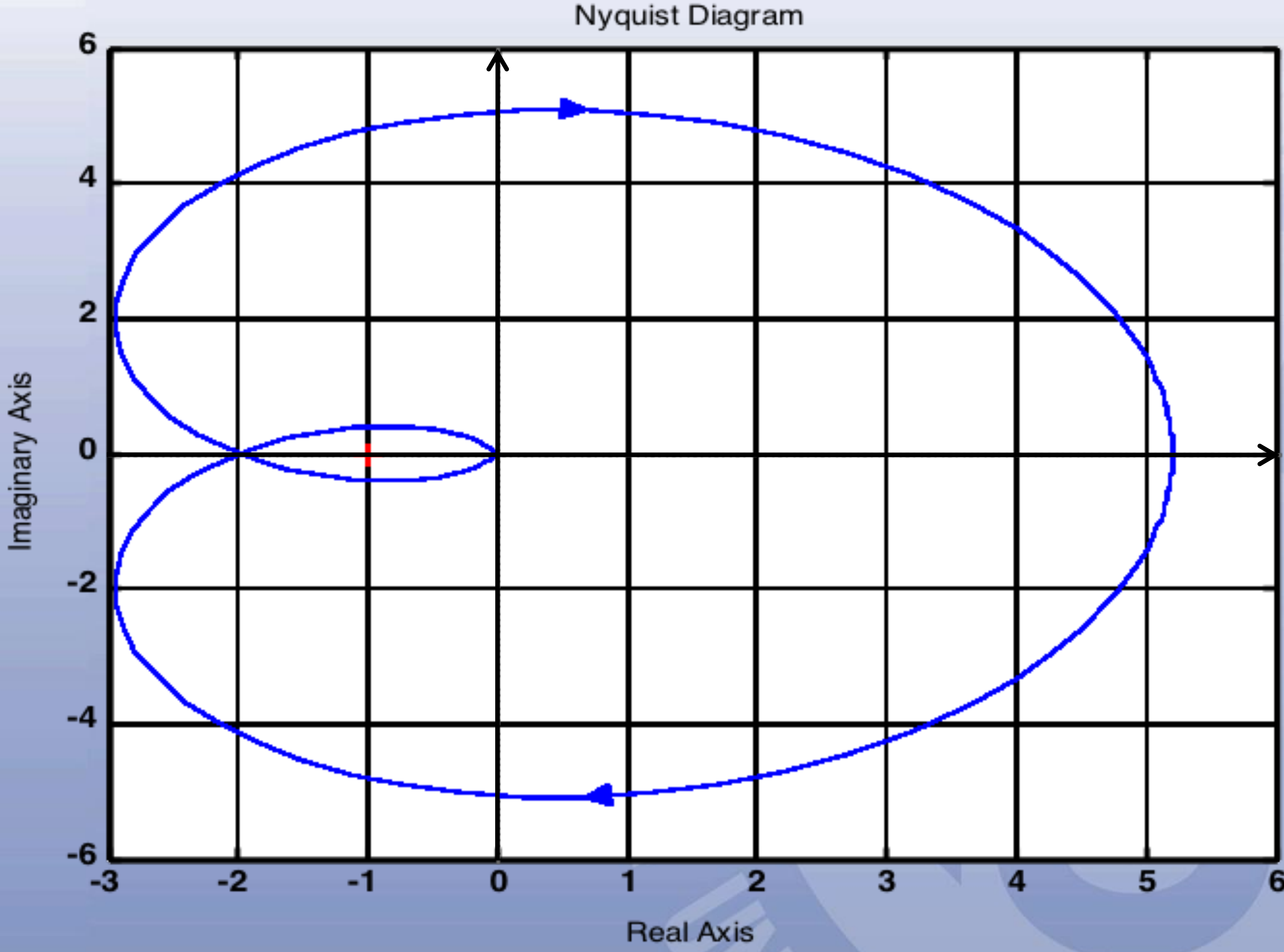
$N = 2$

$Z = N + P = 2$

闭环系统在右半s平面存在2个右极点，闭环系统是不稳定的。

$$G_0(s)=\frac{52}{(s+2)(s^2+2s+5)}$$

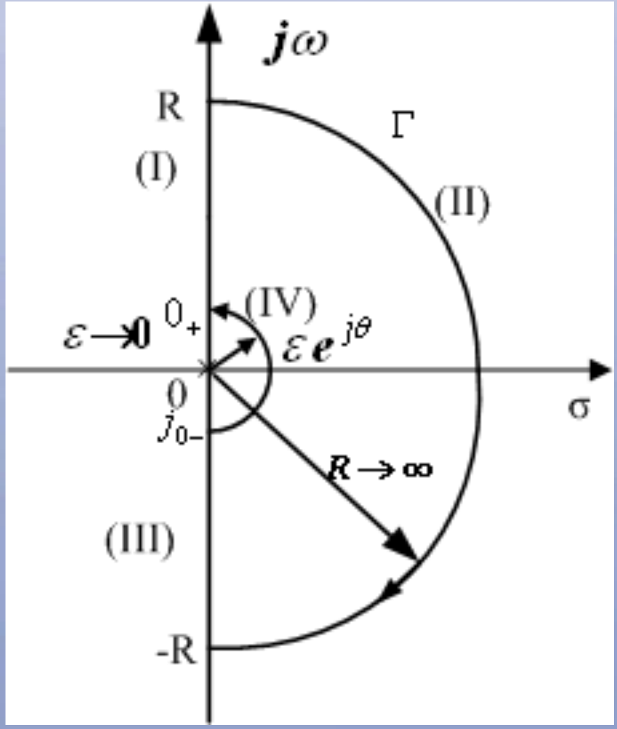
之奈奎斯特曲线



5.5.3 开环系统含有积分环节时奈奎斯特稳定性判据的应用

$$G_0(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(T_i s+1)}{s^{\nu}\prod_{j=1}^{n-\nu}(T_j s+1)}$$

在奈奎斯特围线Γ的路径上存在极点。



修正奈奎斯特围线Γ

(I) 正虚轴 s=jω, $\omega:0^{+}\to\infty$

(II) 半径为无穷大的右半圆

$$s=Re^{j\theta}\quad R\to\infty,\theta:\frac{\pi}{2}\to-\frac{\pi}{2}$$

(III) 负虚轴s=jω $\omega:-\infty\to0^{-}$

(IV) 半径为无穷小的右半圆

$$s=\varepsilon e^{j\theta}\quad \varepsilon\to0,\theta:-\frac{\pi}{2}\to+\frac{\pi}{2}$$

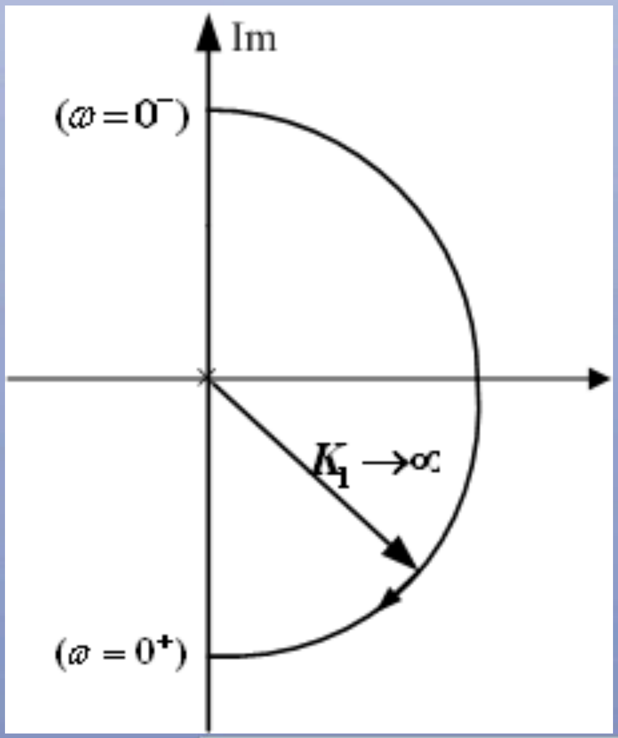
对I型系统和II型系统的讨论

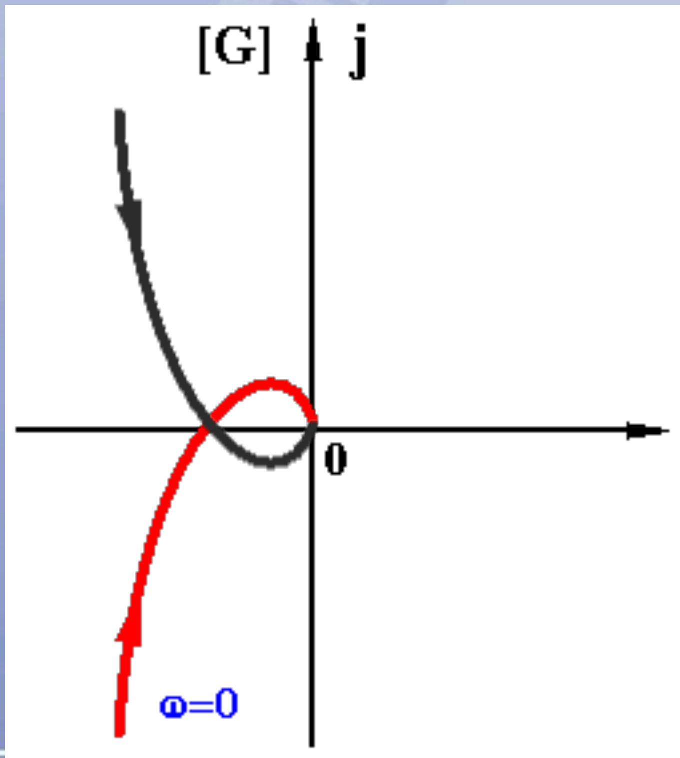
$$G_0(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{s^{\nu}\prod_{j=1}^{n-\nu}(T_j s+1)}$$

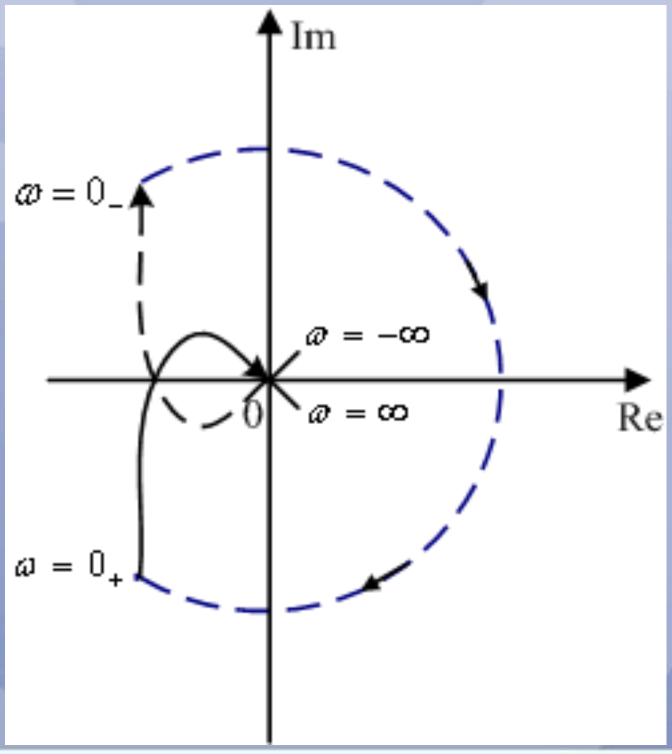
对于I型系统:

奈奎斯特围线第IV部分

$$\lim_{\substack{s\to 0\\ \varepsilon\to 0}} G_0(s)=\frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}}=K_1 e^{-j\theta}$$

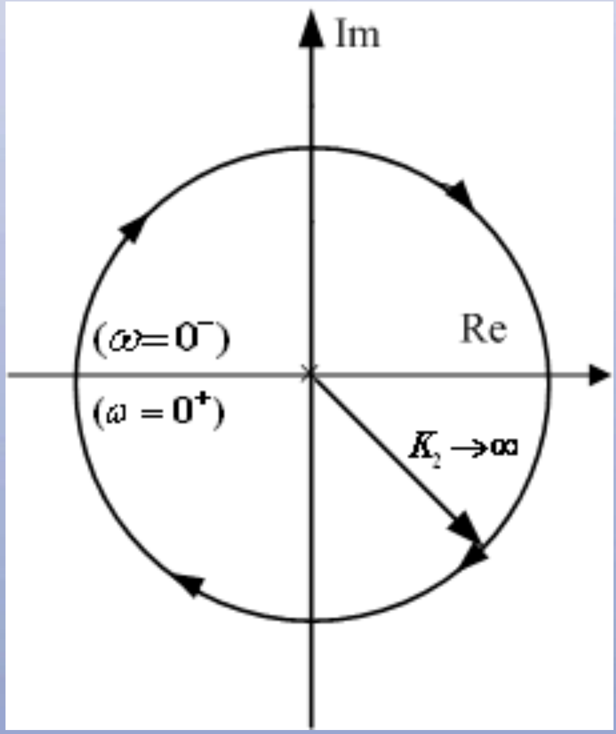


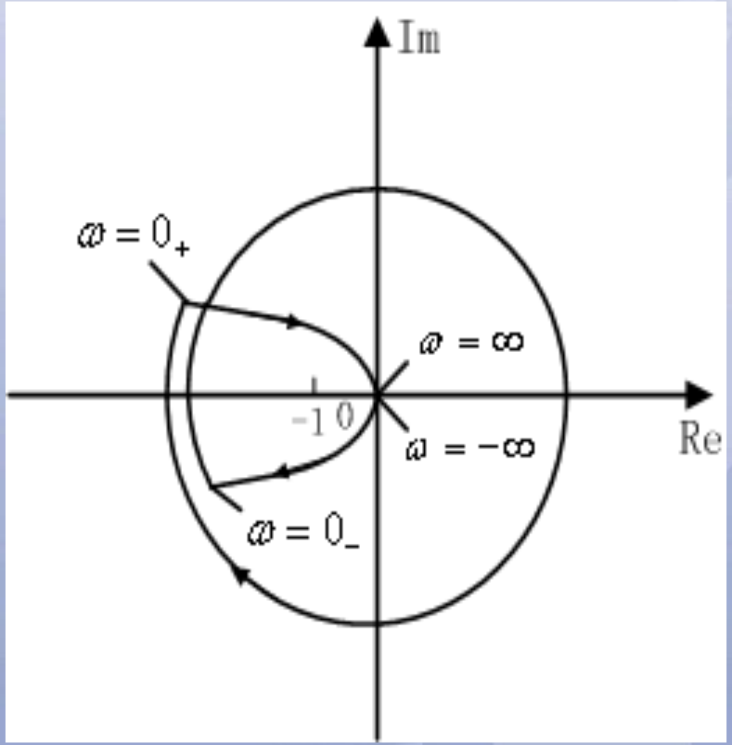


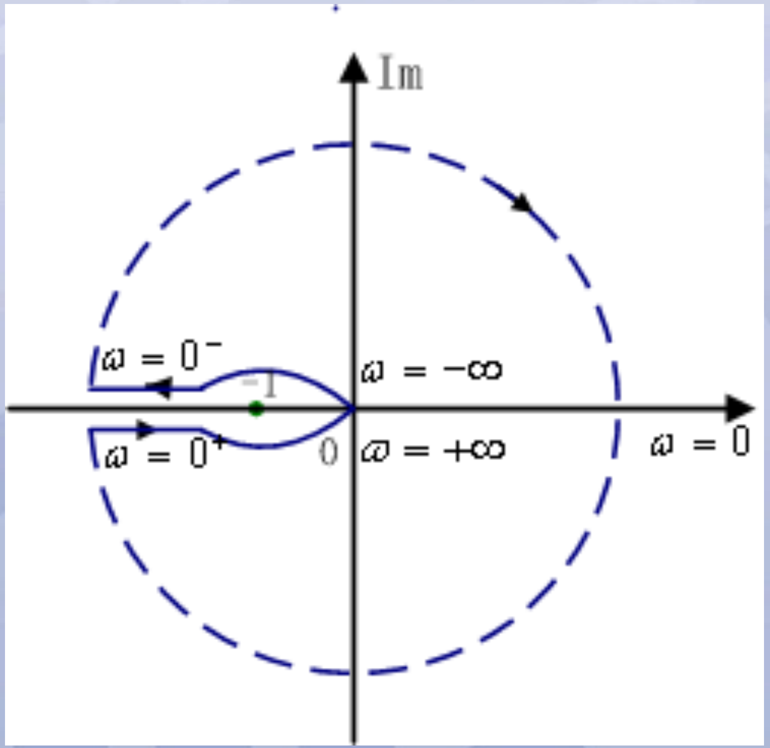


对于II型系统：

奈奎斯特围线第IV部分 $$\lim_{\substack{s\to 0\\ \varepsilon\to 0}} G_0(s)=\frac{K}{(\varepsilon e^{j\theta})^2}=K_2 e^{-j2\theta}$$





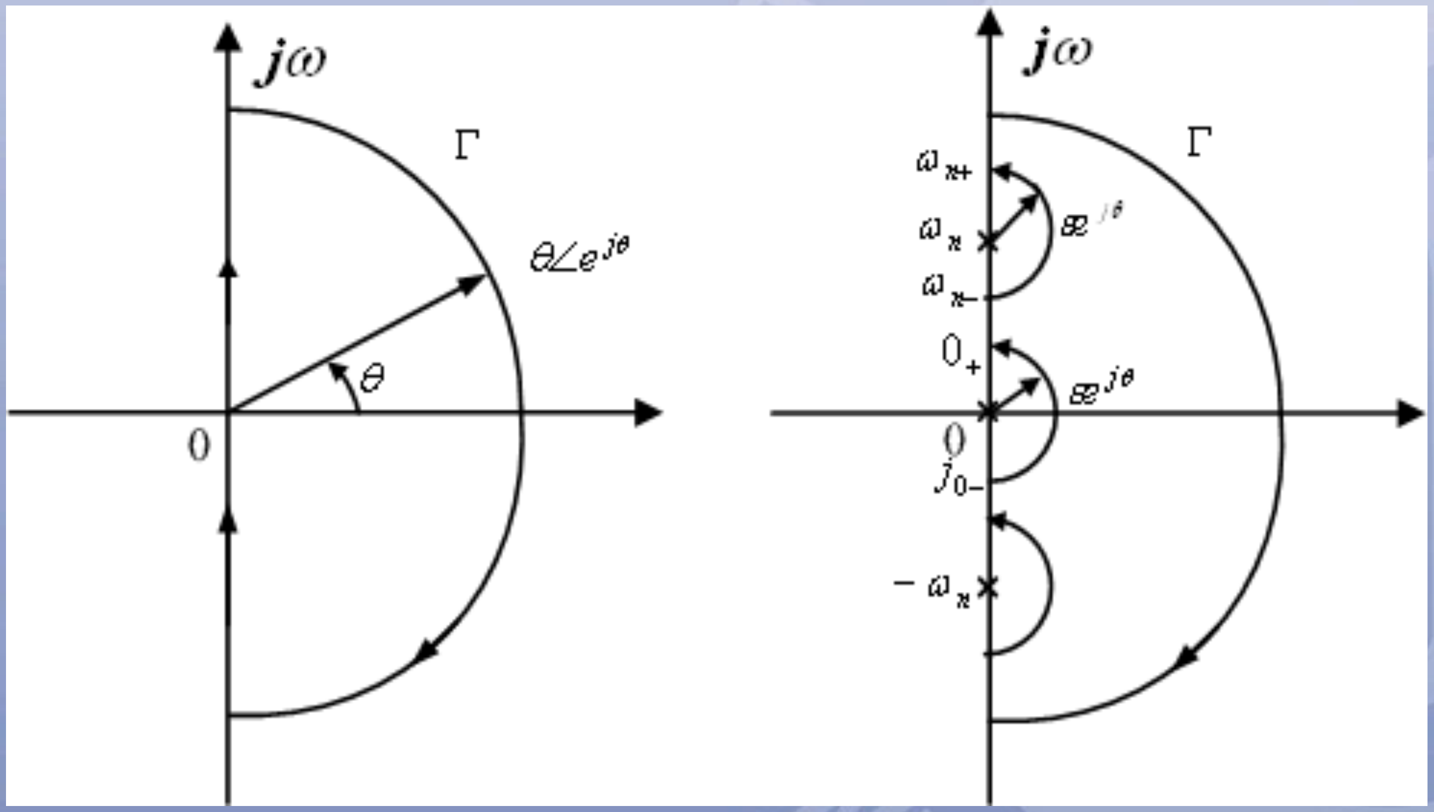


开环系统在虚轴上有极点的情况讨论

需要修正奈奎斯特围线Γ

开环系统含等幅振荡环节时，在 $\pm j\omega_n$附近，取 $s=\pm j\omega_n+\varepsilon e^{j\theta}$

ε为正无穷小量，$\theta\in\left[-90^\circ,+90^\circ\right]$，即圆心为 $\pm j\omega_n$，半径为无穷小的半圆。



奈奎斯特稳定性判据的简化

考虑Γ_{GH}闭合曲线关于实轴对称，通常在利用奈奎斯特图(极坐标图)判别闭环系统的稳定性时，为了简便起见，只要画出ω从0变化到+∞的曲线段 (G(s)H(s)的半闭合曲线，频率特性曲线)。

$$Z = 2N' + P$$

P为开环系统在右半s平面的极点数；N’为ω从0变化到+∞时，开环频率特性曲线顺时针包围(-1,j0)点的圈数

闭环系统稳定的充要条件

[G(jω)H(jω)]平面上的开环频率响应G(jω)H(jω)，当ω从-∞变化到+ ∞时，按逆时针方向包围(-1,j0)点P次，其中P为开环传递函数G(s)H(s)位于右半s平面的极点数

闭合曲线 Γ_F 包围原点圈数R的计算

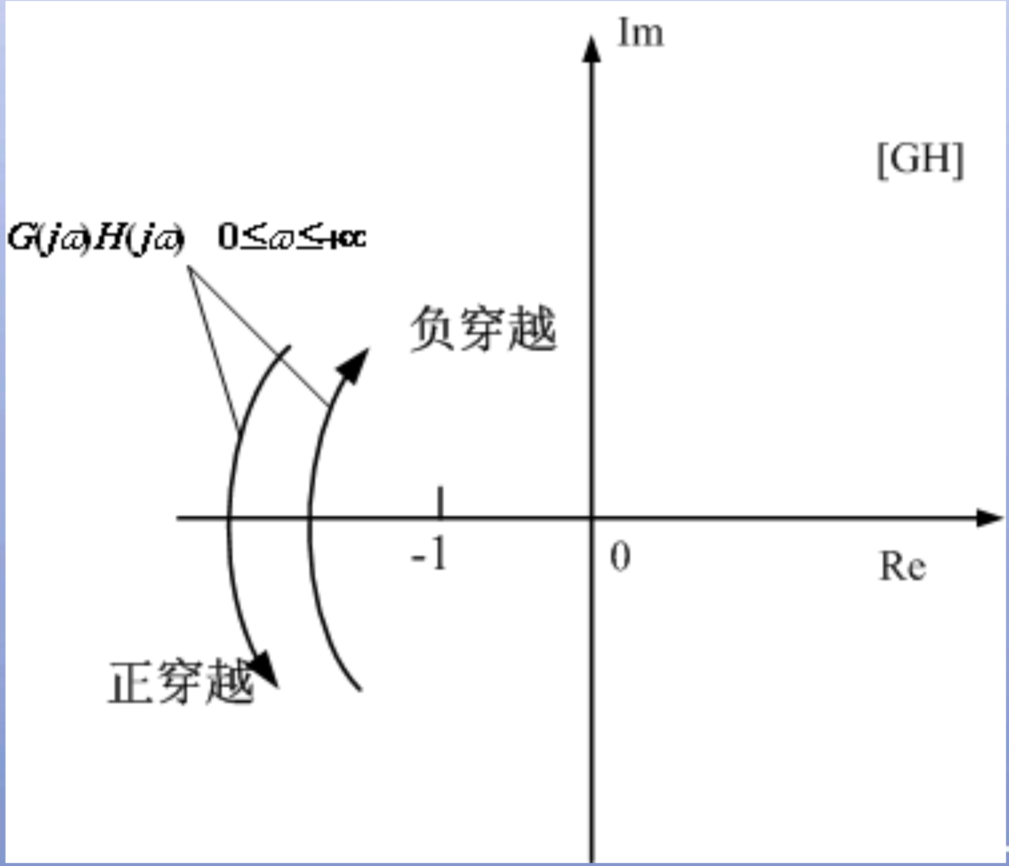
根据半闭合曲线 Γ_{GH} 可获得 Γ_F 包围原点的圈数R。设N为 Γ_{GH} 穿越 $(-1, j0)$ 点**左侧**负实轴的次数。

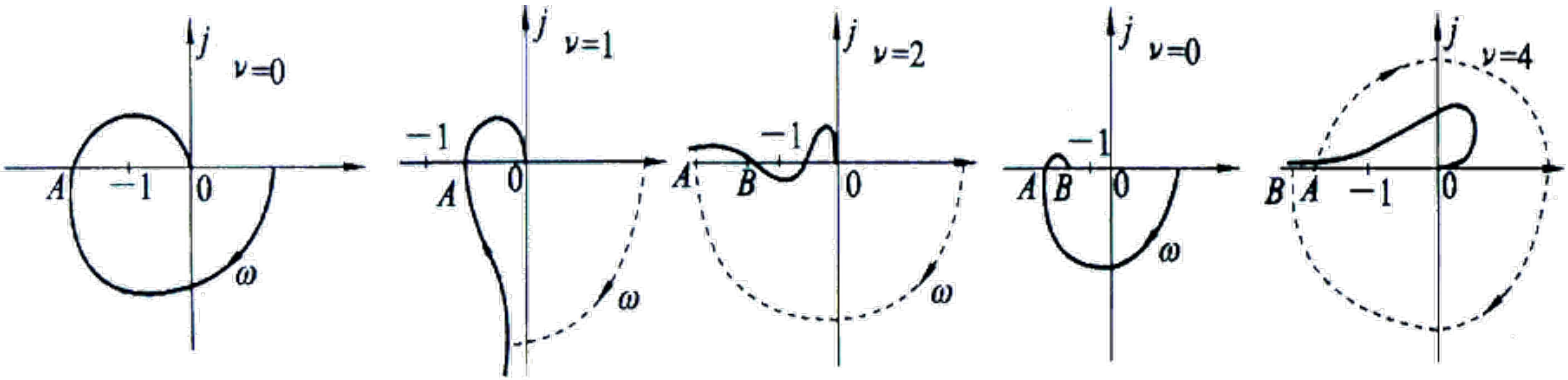
逆时针包围

$$R = 2(N_+ - N_-)$$

N_+：正穿越的次数，从上向下穿越

N-：负穿越的次数，从下向上穿越





(a) (b) (c) (d) (e)

图a： $N_{-}=1, N_{+}=0, R=-2N_{-}=-2$

图b $N_{+}=N_{-}=0, R=0$

图c $N_{+}=N_{-}=1, R=0$

图d $N_{-}=1, N_{+}=\dfrac{1}{2}, R=-1$

图e $N_{-}=\dfrac{3}{2}, N_{+}=0, R=-3$

例：试确定系统闭环稳定时K值的范围。

已知单位反馈系统开环幅相曲线如图所示，(K=10,P=0,v=1)

解:

如图所示，开环幅相曲线与负实轴有三个交点，设交点处穿越频率分别为 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$

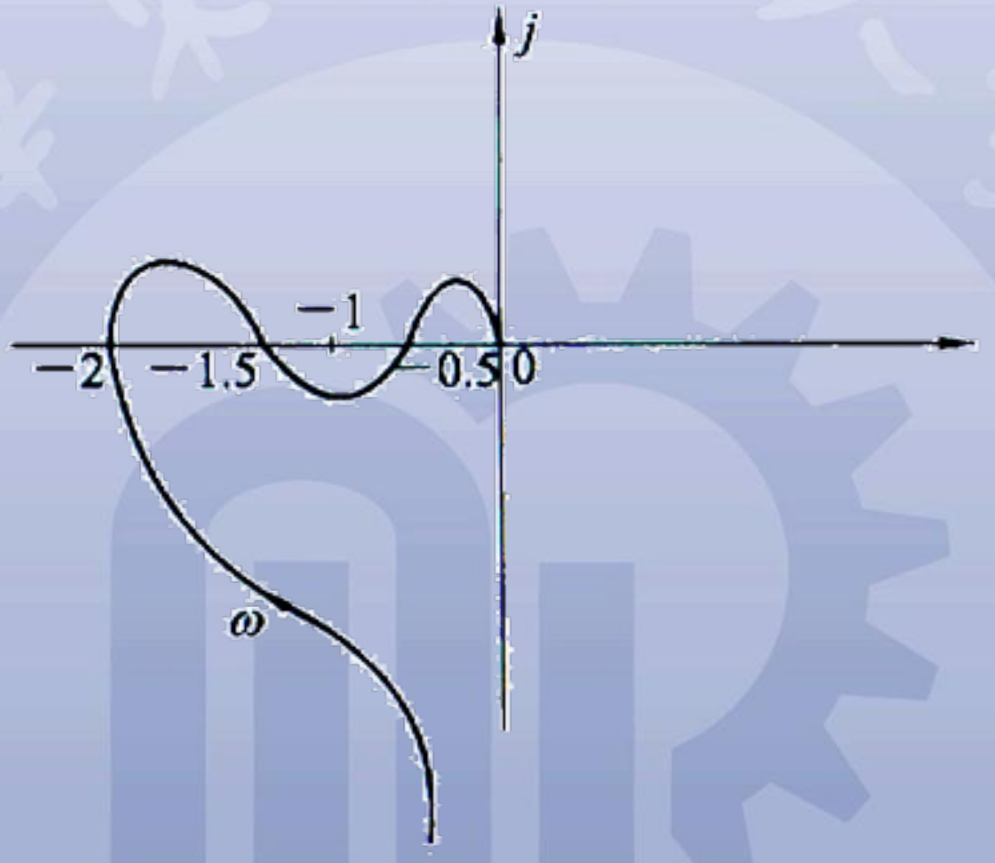


图 5-33　系统 $K=10$ 时开环幅相曲线

系统开环传函数 $G(s)=\frac{K}{s^{\nu}}G_1(s)$

由题设条件知 $\nu=1, \lim_{s\to 0}G_1(s)=1$

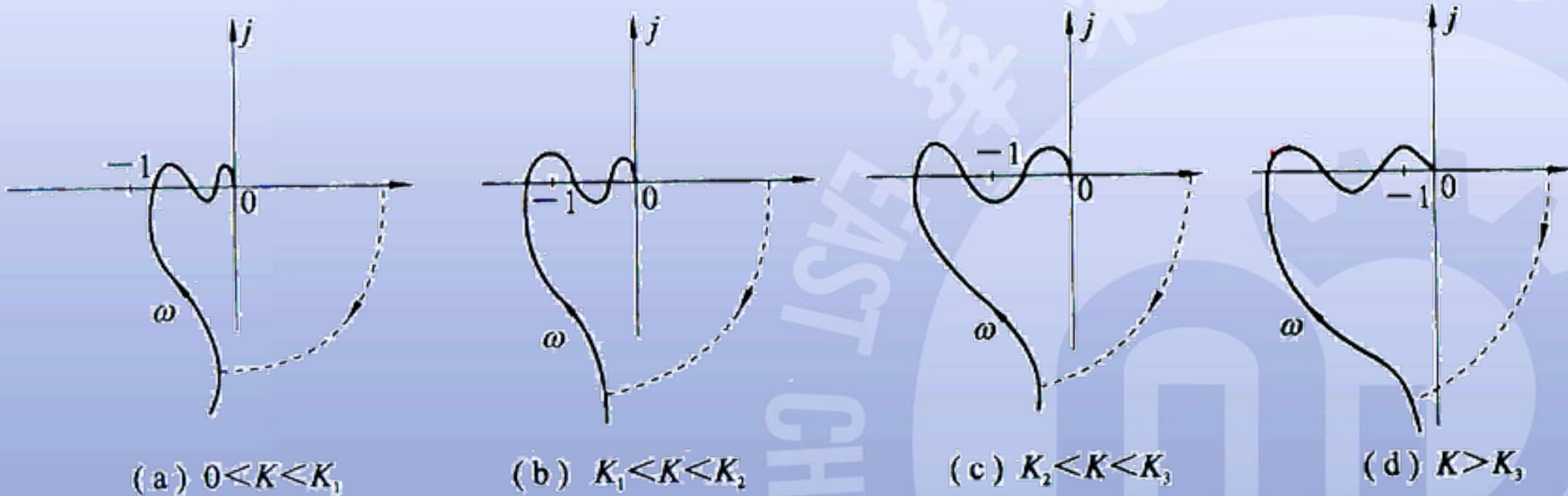
$$\boldsymbol{G}(j\omega_i)=\frac{\boldsymbol{K}}{j\omega_i}\boldsymbol{G}_1(j\omega_i); \quad \boldsymbol{i}=1,2,3$$

当取 $\boldsymbol{K}=10$ $\boldsymbol{G}(j\omega_1)=-2,\quad \boldsymbol{G}(j\omega_2)=-1.5,\quad \boldsymbol{G}(j\omega_3)=-0.5$

若令 $\boldsymbol{G}(j\omega_i)=-1$ 可得对应的K值

$$\boldsymbol{K}_1=\frac{-1}{\frac{1}{j\omega_1}\boldsymbol{G}_1(j\omega_1)}=\frac{-1}{\frac{-2}{10}}=5,\quad \boldsymbol{K}_2=\frac{20}{3},\quad \boldsymbol{K}_3=20$$

对应地，分别取 $0<K<K_1, K_1<K<K_2, K_2<K<K_3$ 和 $K>K_3$ 时，开环幅相曲线分别如图所示，图中按 补作虚圆弧得半闭合曲线 Γ_G 。



系统在不同 K 值条件下的开环幅相曲线及 Γ_G 曲线

根据曲线计算包围次数，并判断系统闭环稳定性：

$0 < K < K_1, R = 0, Z = 0,$ 闭环系统稳定； $(0, 5)$

$K_1 < K < K_2, R = -2, Z = 2,$ 闭环系统不稳定；

$K_2 < K < K_3, N_+ = N_- = 1, R = 0, z = 0$ 闭环系统稳定； $(20/3, 20)$

$K > K_3, N_+ = 1, N_- = 2, R = -2, z = 2$ 闭环系统不稳定

例　已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{Ts-1};T>0,K>0$$

试用乃氏判据确定使该闭环系统稳定的K值范围。

解：开环系统频率特性为

$$G(j\omega)=\frac{K}{-1+jT\omega}=\frac{-K-jKT\omega}{1+T^2\omega^2}$$

当$\omega=0$时，$G(j\omega)=-K=K\angle-180^0$，即乃氏曲线

与负实轴相交于$(-K,j0)$点。

例 已知系统的开环传递函数为

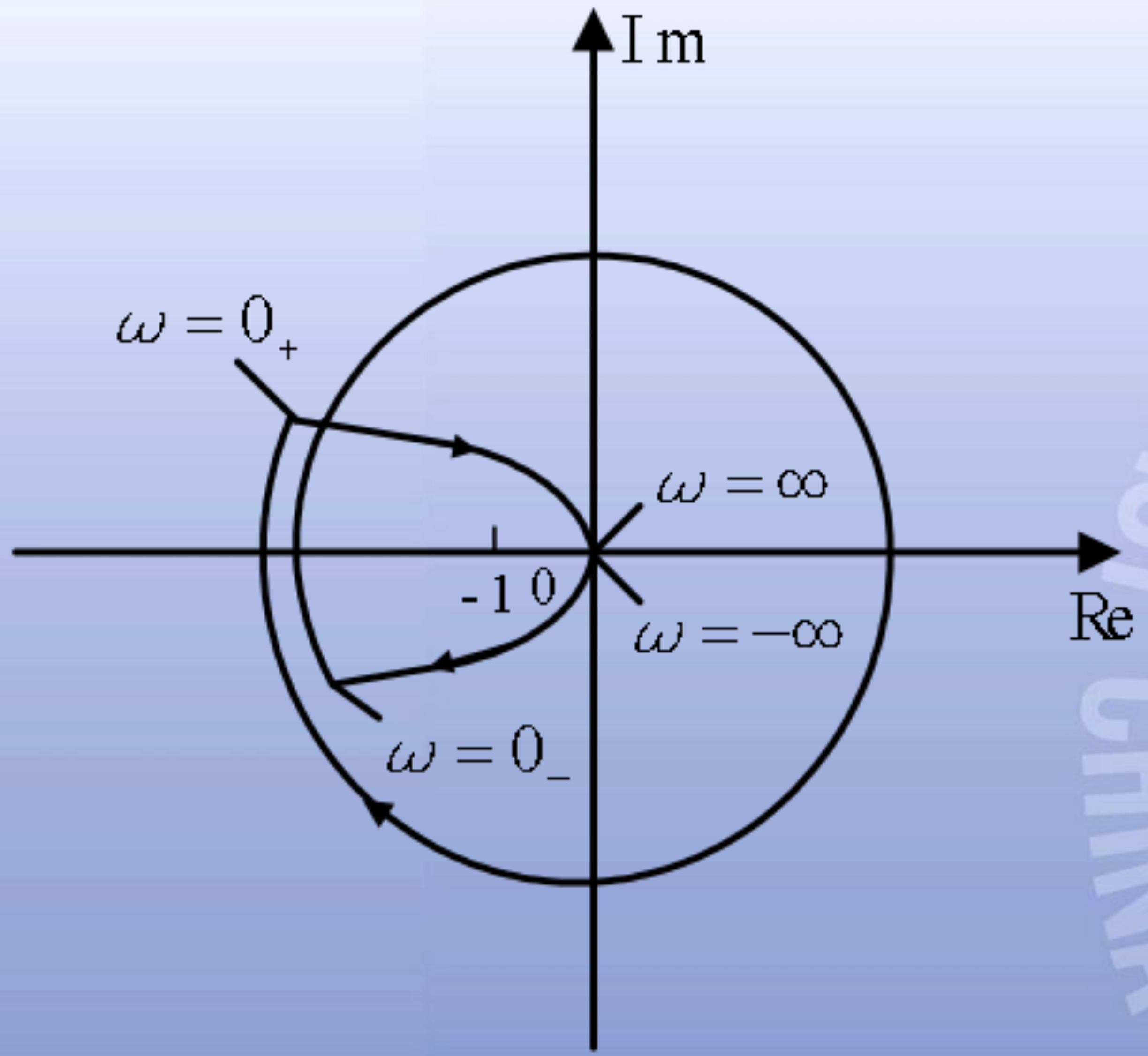
$$G(s)H(s)=\frac{K}{s^2(1+Ts)},K>0,T>0$$

试用乃氏稳定判据判别该闭环系统的稳定性。

解： 由于开环传递函数在坐标原点处有重极点

逆时针围绕原点的半径为ε的半圆在GH平面上的映射曲线为一半径无穷大的圆

补充绘制 $G(j\omega)H(j\omega)$



由图可见，不论K值的大小如何，乃氏曲线总是以顺时针方向围绕点（-1，j0）旋转两周，即R=-2。由于开环系统P=0，所以Z=2，表示该闭环系统总是不稳定的,且其在s的右半平面上有2个极点。

例 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K(\tau s+1)}{s^{2}(Ts+1)}$$

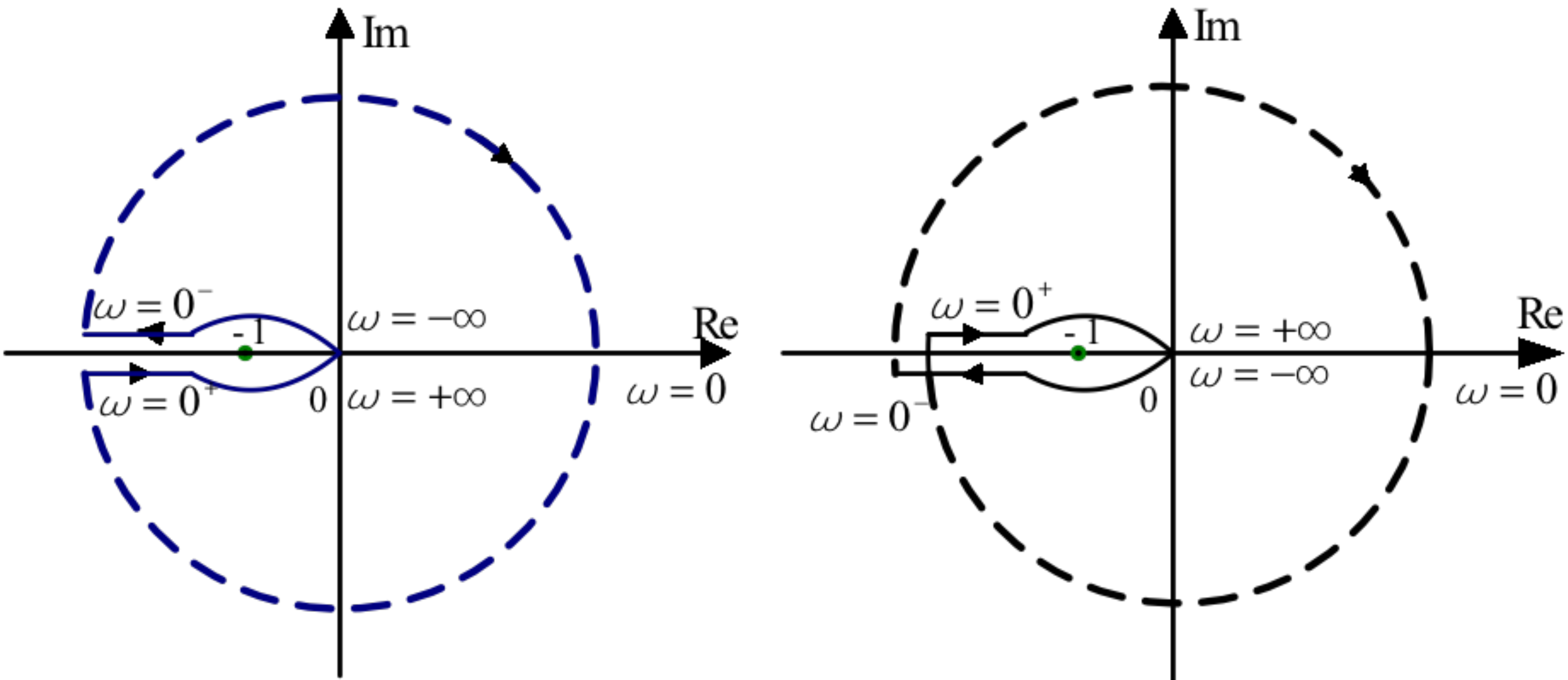
试分析 $T>\tau$和$T<\tau$时系统的稳定性，并画出它们所对应的乃氏图。

解：系统开环频率特性为

$$\left|G(j\omega)H(j\omega)\right|=\frac{K\sqrt{1+(\tau\omega)^{2}}}{\omega^{2}\sqrt{1+(T\omega)^{2}}}$$

$$\varphi(\omega)=-180^{0}+\arctan\tau\omega-\arctan T_{0}\omega$$

作出在 $T > \tau$和$T < \tau$ 二种情况下的曲线，如下图所示。

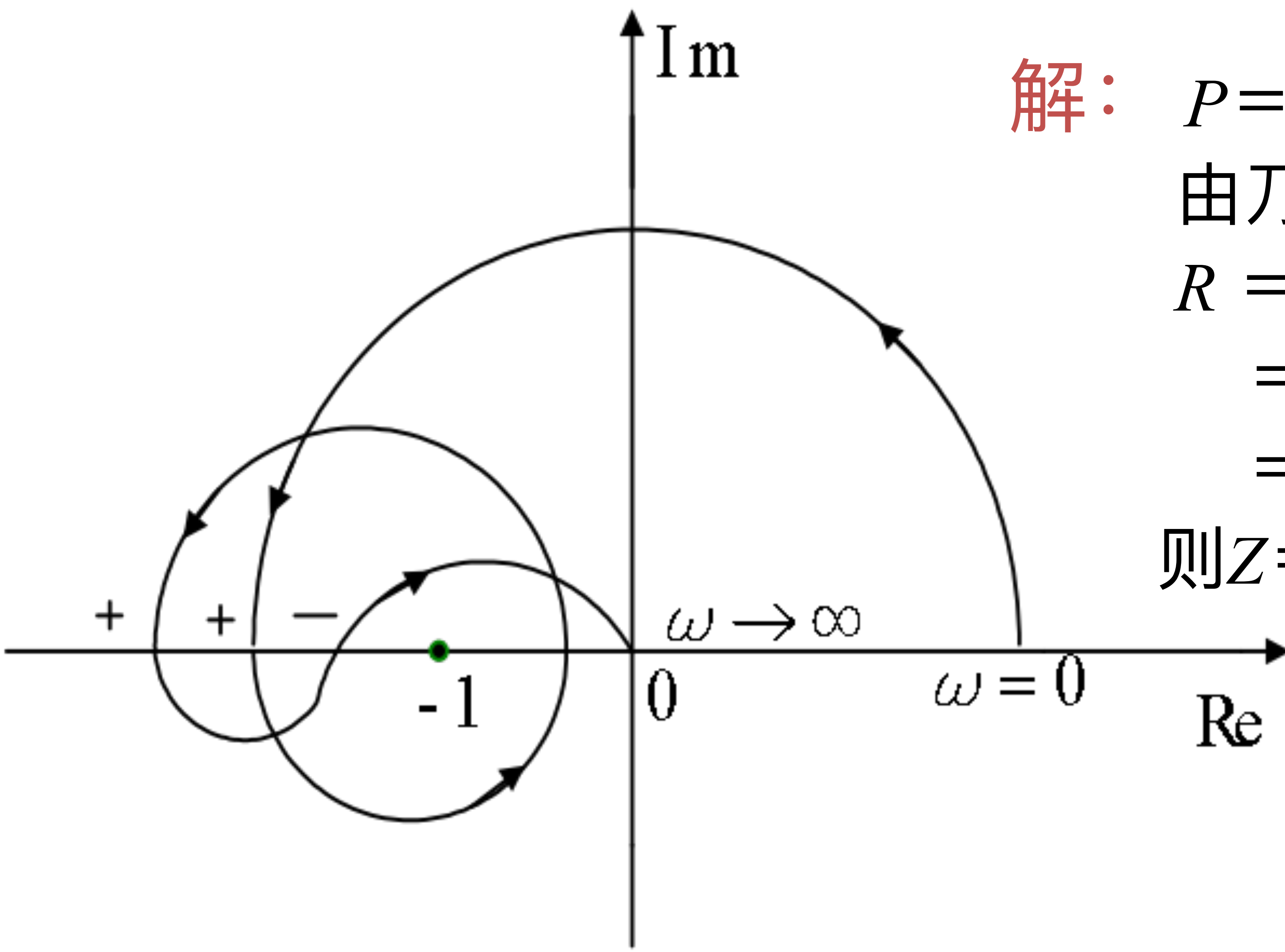


(a) $T < \tau$ (b) $T > \tau$

由于$P=0$，当 $T_{.} < \tau$时，$G(j\omega)H(j\omega)$曲线不包围点（-1，j0），因而闭环系统是稳定的；

当 $T_{.} > \tau$ 时，$G(j\omega)H(j\omega)$曲线以顺时针方向包围点（-1，j0）旋转二周，这意味着有两个闭环极点位于s 的右半平面上，该闭环系统不稳定。

例 系统开环传递函数有2个正实部极点，开环乃氏图如下图所示，试问闭环系统是否稳定?



解： $P=2$，ω由 $0 \to \infty$时，

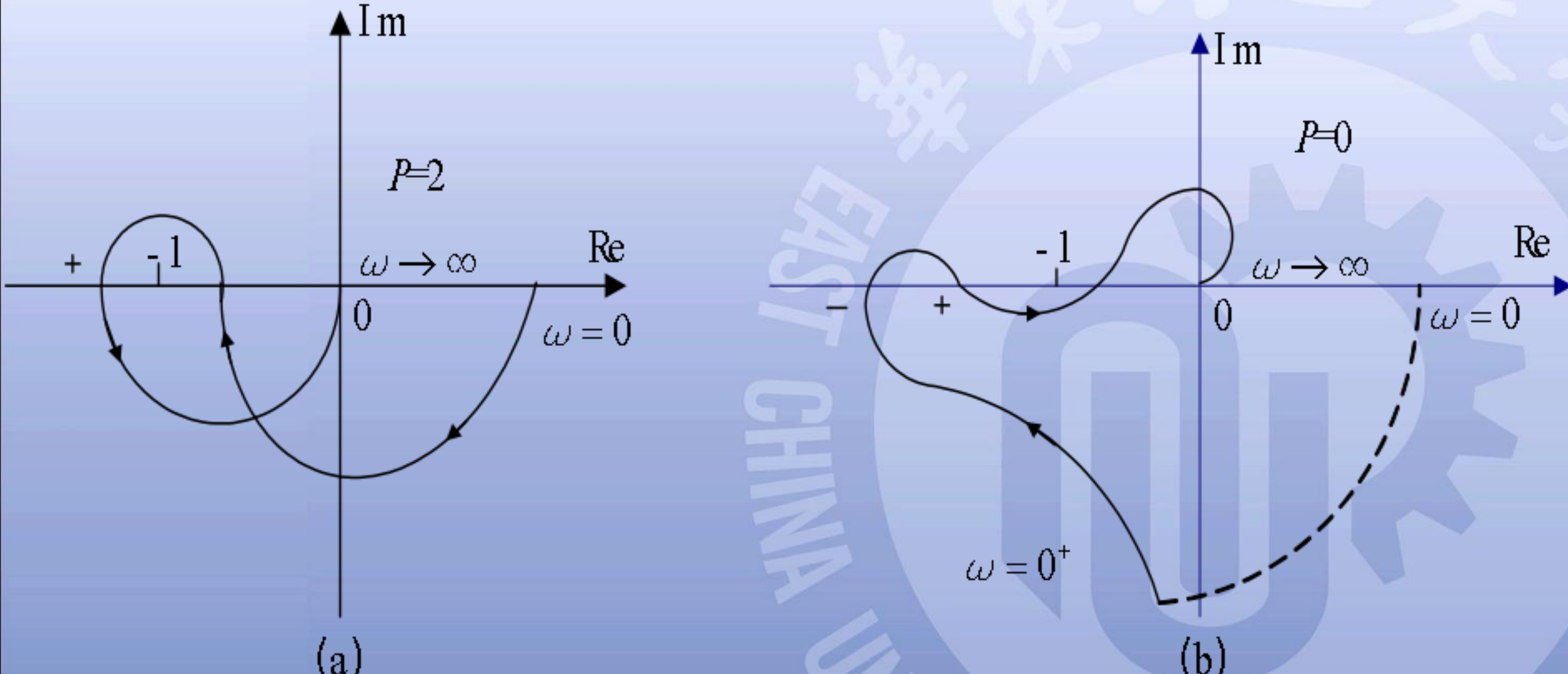
由乃氏图知$N_+=2$，$N_-=1$，

$$R = 2N$$
$$= 2\ (N_+ - N_-)$$
$$= 2$$

则$Z=P-R=0$，

闭环系统稳定。

例 系统开环乃氏图如下图所示，P为开环正实部极点个数，试判定闭环系统的稳定性。



解： 当ω由$0\rightarrow\infty$时，图a中 $N_{+}=1$，$N_{-}=0$，$R=2$，
而$P=2$，则$Z=0$，闭环系统稳定。

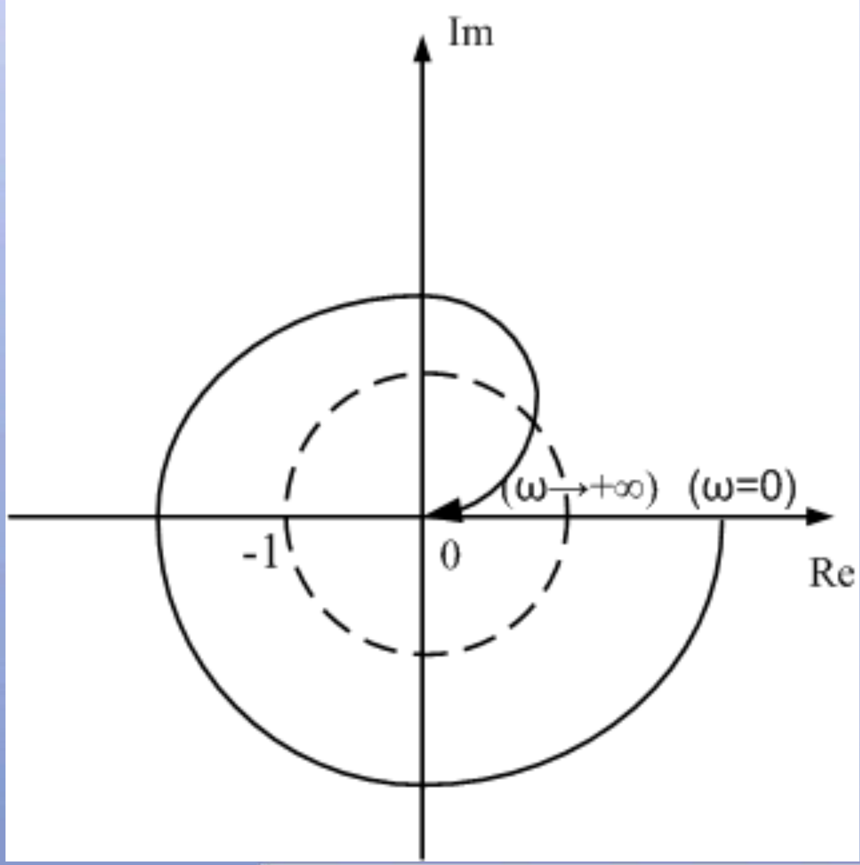
图b中，$N_{+}=1$，$N_{-}=1$，$R=0$，
而$P=0$，则$Z=0$，闭环系统稳定。

5.5.4 奈奎斯特稳定性判据在伯德图中表示形式

开环系统的奈奎斯特图和其伯德图有如下对应关系：

(1) 奈奎斯特图上的单位圆对应于伯德图上的零分贝线；

(2) 奈奎斯特图上的负实轴对应于伯德图上的-180°相位线；



穿越点

$$\omega = \omega_c$$

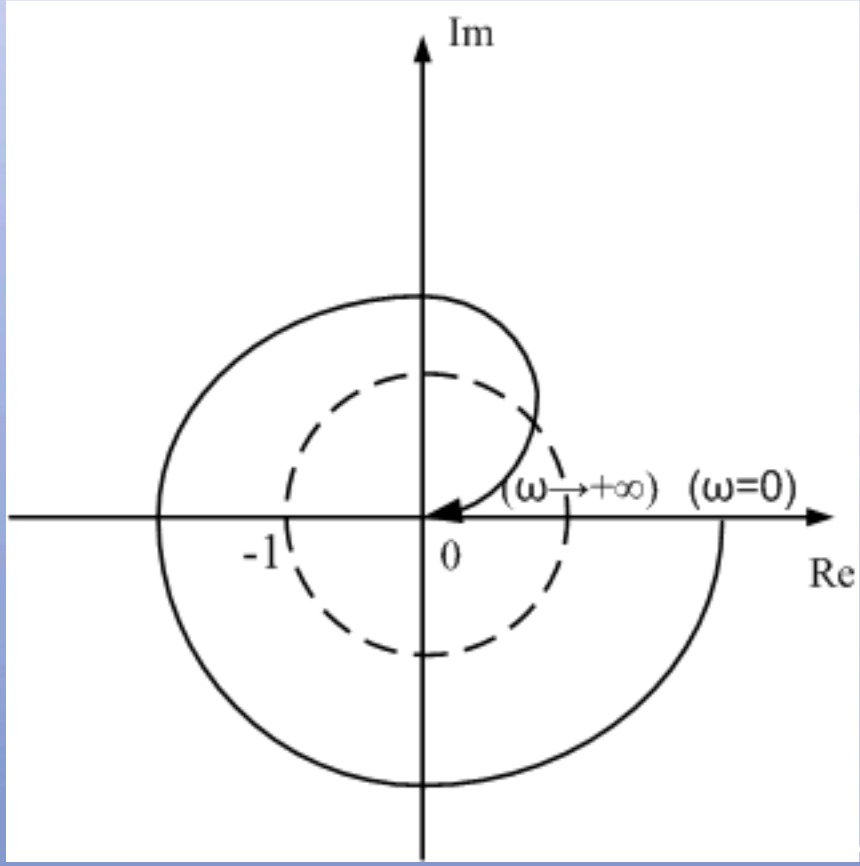
$$\begin{cases} A(\omega_c) = \left| G(j\omega_c)H(j\omega_c) \right| = 1 \\ L(\omega_c) = 20\lg A(\omega_c) = 0 \end{cases}$$

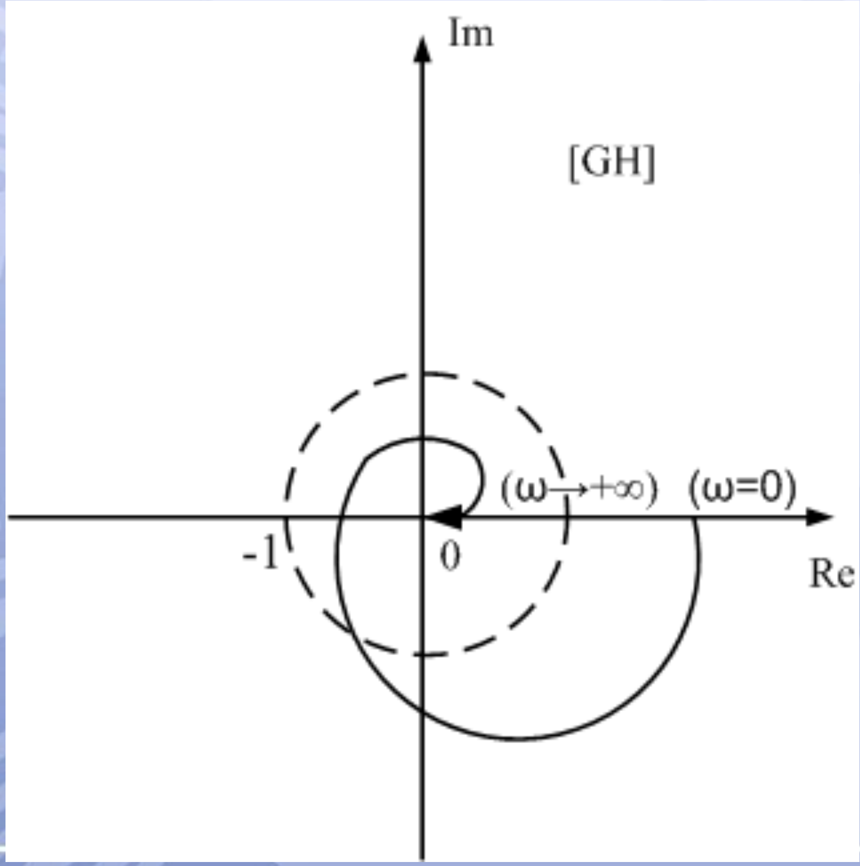
ω_c **为截止频率**

对于复平面的负实轴和开环对数相频特性，当取频率为穿越频率ω_g时，$\varphi(\omega_g)=(2k+1)\pi; \quad k=0,\pm1,\ldots$

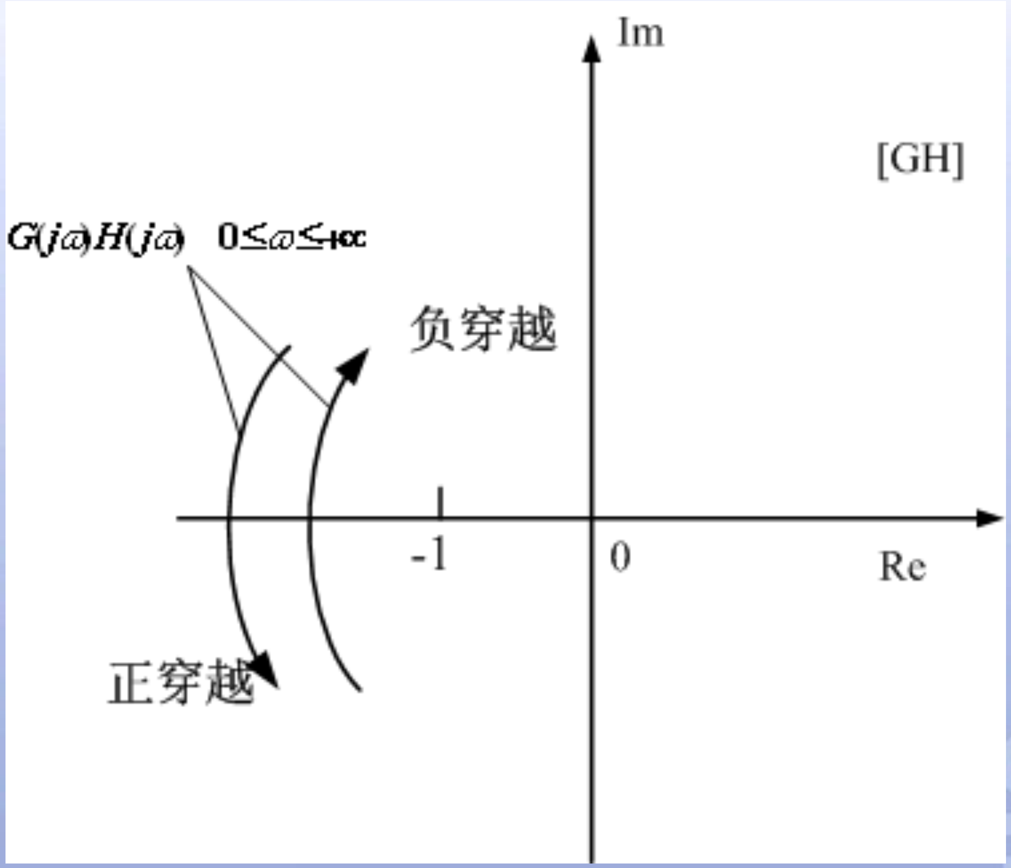
伯德图对于奈奎斯特图包围(-1,j0)的等效表示

在L(ω)>0的频段内，随着ω的增加，Bode图的相频特性由大于-180°的区域进入小于-180°的区域，相当于奈奎斯特曲线顺时针包围(-1，j0)点一圈。

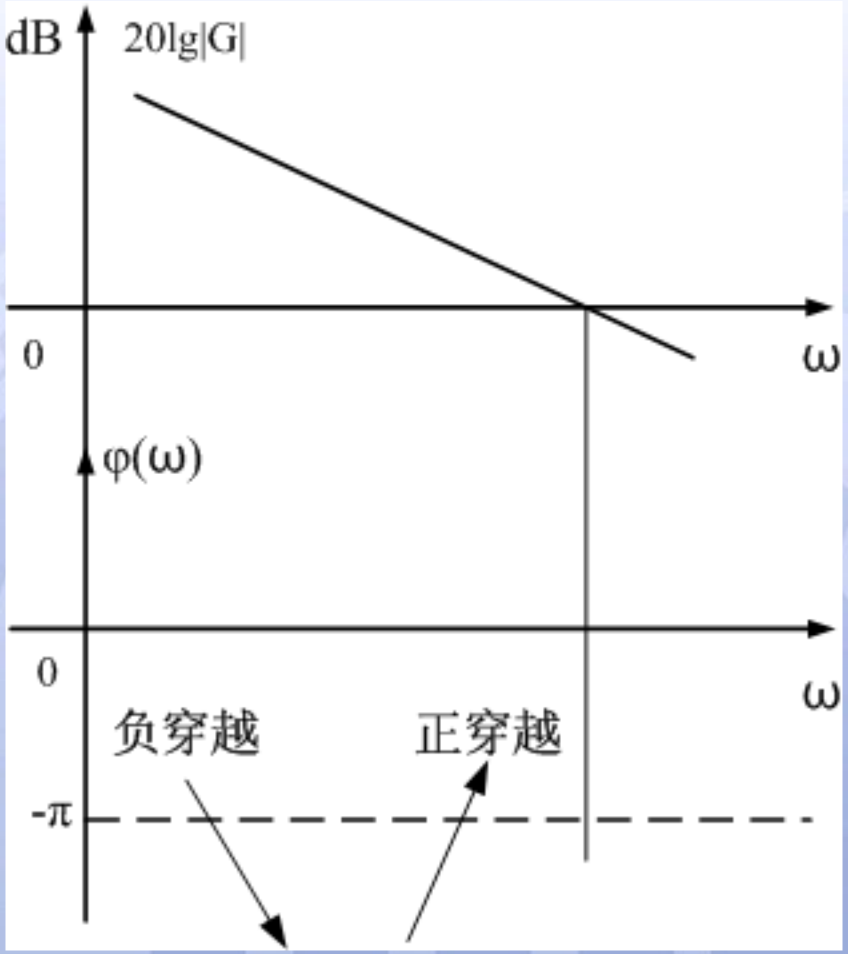




正穿越与负穿越



Im
[GH]
$G(j\omega)H(j\omega)$ $0\leq\omega\leq+\infty$
负穿越
-1
0
Re
正穿越



dB
20lg|G|
0
ω
φ(ω)
0
ω
负穿越
正穿越
-π

奈奎斯特稳定性判据的伯德图表述

如果系统的开环传递函数在右半s平面内有P个极点，在Bode上$L(\omega)>0$的频段内，随着ω的增加，Bode图的相频特性曲线对-180°相位线的正、负穿越次数差为P/2，则闭环系统稳定，否则系统不稳定，其在右半s平面内的极点为：

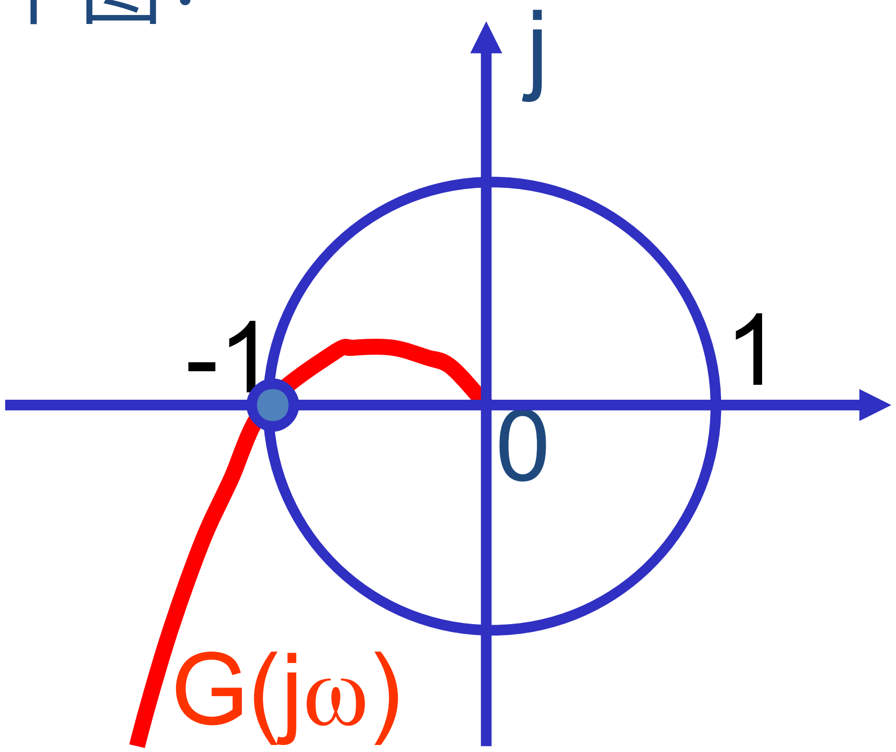
$$Z=2N'+P$$

其中，N’为负穿越次数减去正穿越次数的差。

5.5.5 系统的相对稳定性和稳定裕度

若z=p-2N中p=0,则G(jω)过(-1,j0)点时，

系统临界稳定，见下图：

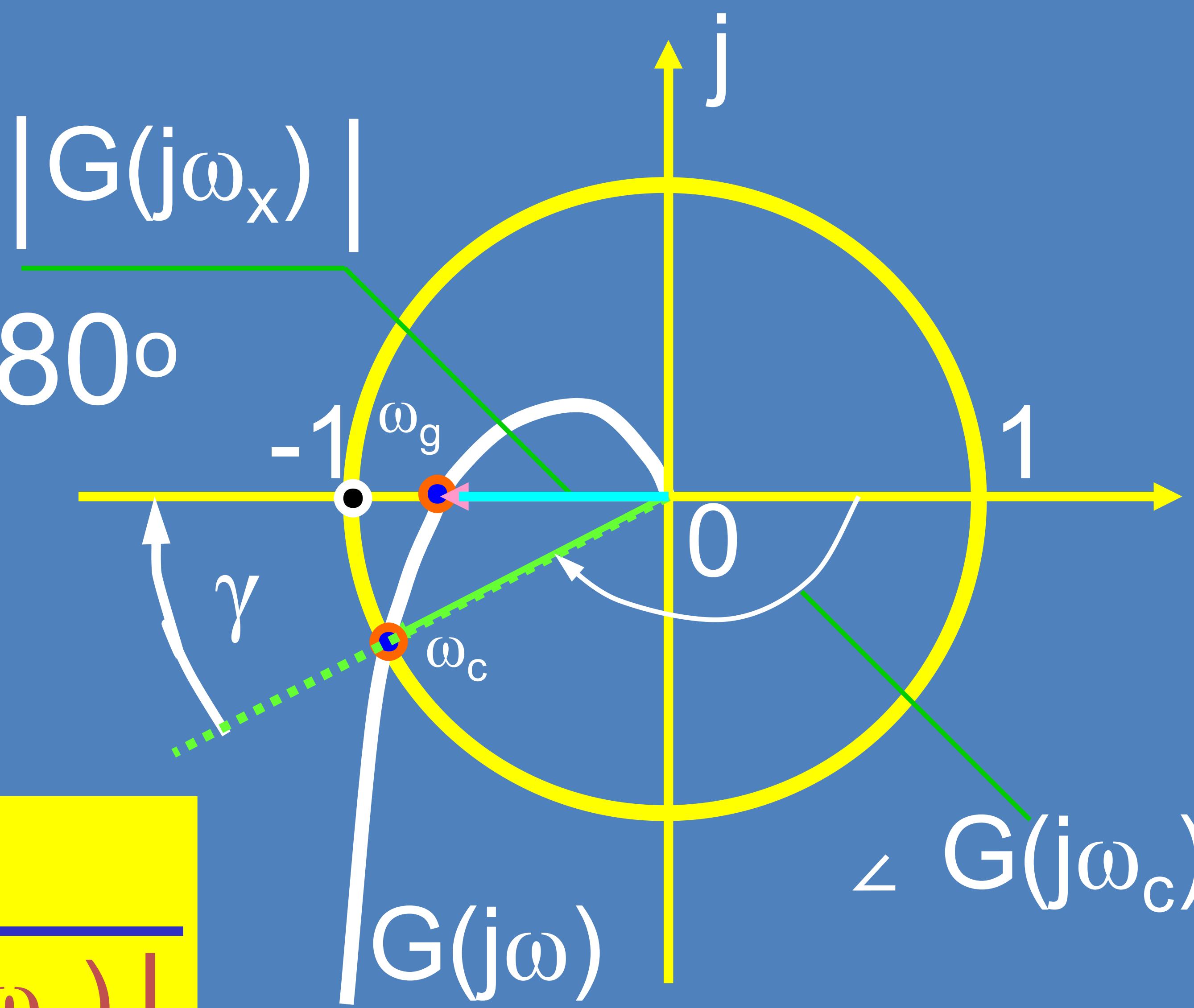


特点： G(jω)曲线过(-1, j0)点时，

$$\left.\begin{aligned} &|G(j\omega)| = 1 \\ &\angle G(j\omega) = -180^\circ \end{aligned}\right\}$$ 同时成立

$K_g|G(j\omega_g)|=1$

$\angle G(j\omega_c) - \gamma = -180^o$

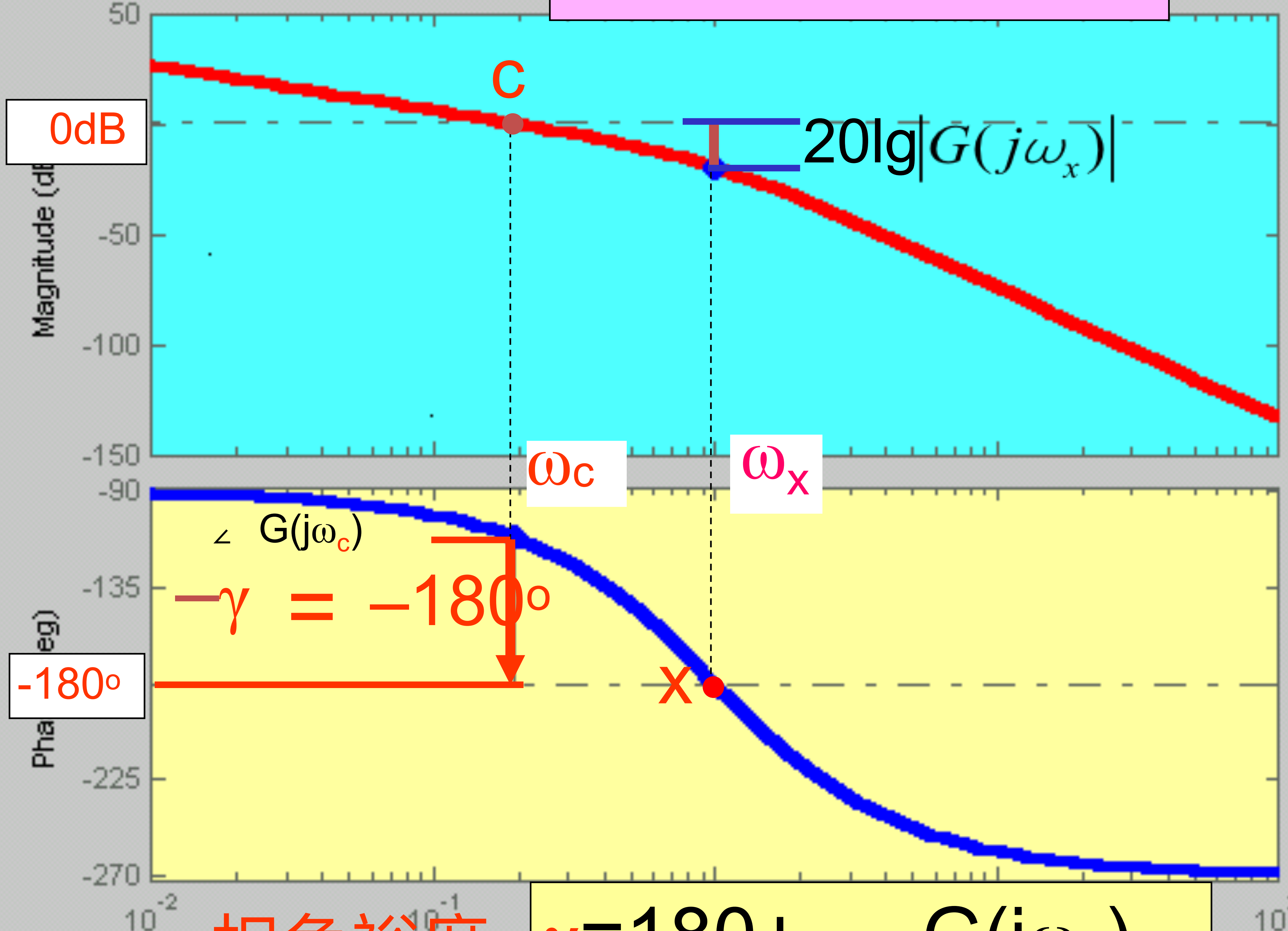


幅值裕度 $K_g = \dfrac{1}{|G(j\omega_g)|}$

$$L_g \mathrm{dB} = -20\lg|G(j\omega_g)|$$

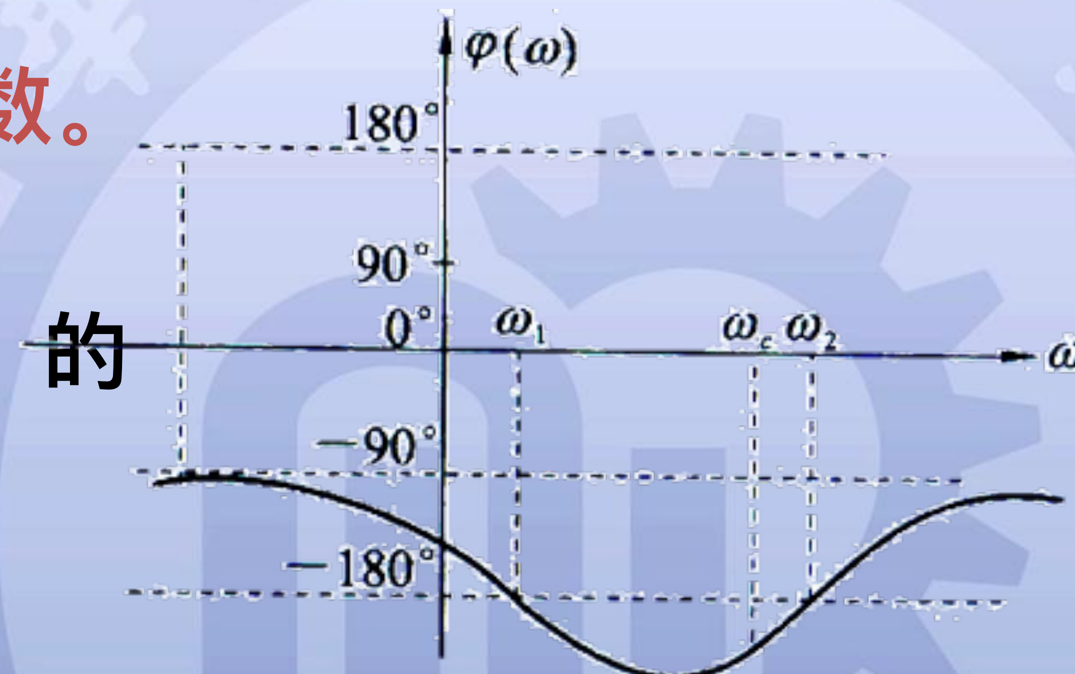
相角裕度 $\gamma = 180^o + \angle G(j\omega_c)$

幅值裕度: $h\text{dB} = -20\lg|G(j\omega_x)|$



相角裕度: $\gamma = 180 + \angle G(j\omega_c)$

例 已知开环系统型次 $v=3, P=0$，开环对数相频特性曲线如图所示，图中 $\omega<\omega_c$ 时，$L(\omega)>L(\omega_c)$，试确定闭环不稳定极点的个数。



解 因为 $v=3$，需在低频处由 $\varphi(\omega)$ 曲线向上补作 $270°$ 的虚直线于 $180°$

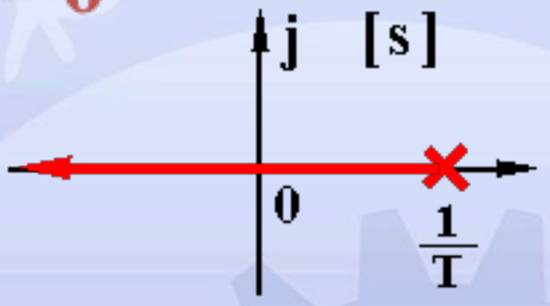
$N_- = 1.5, N_+ = 0$

按对数稳定判据 $Z = P - 2N = 3$

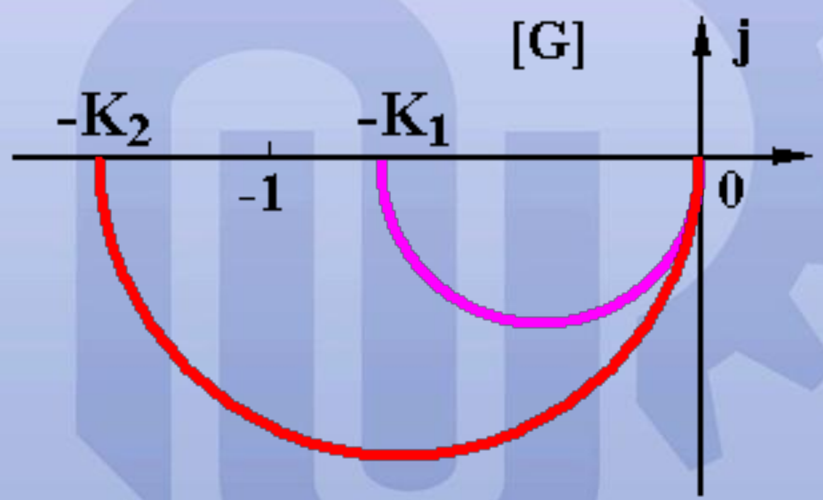
故闭环不稳定极点的个数为3。

例 已知单位反馈系统开环传递函数,分析系统稳定性。

$$G(s)=\frac{K}{Ts-1} \qquad D(s)=Ts-1+K=0$$



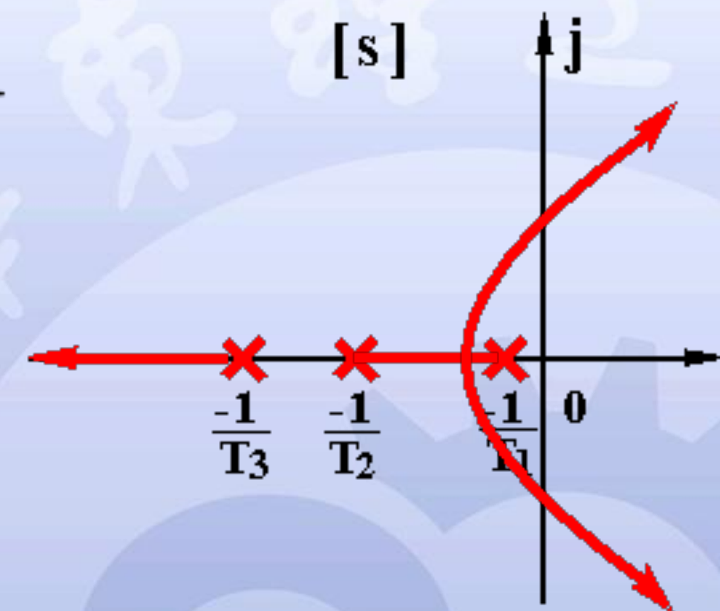
解 依题有 $\begin{cases} G(j0)=K\angle-180^\circ \\ G(j\infty)=0\angle-90^\circ \end{cases}$



$$K=\begin{cases} K_1<1 \qquad N=0 \qquad \text{(不稳定)} \\ Z=P-2N=1-2\times0=1 \\ K_2>1 \qquad N=\frac{1}{2} \qquad \text{(稳定)} \\ Z=P-2N=1-2\times\frac{1}{2}=0 \end{cases}$$

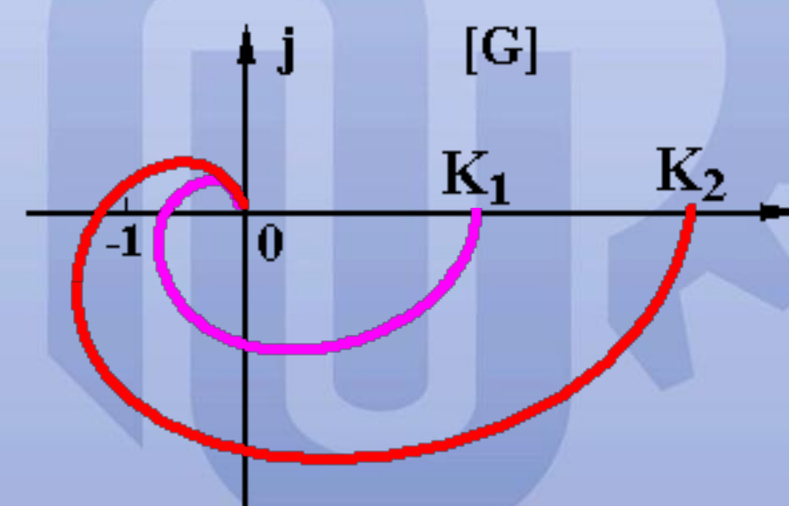
例 已知单位反馈系统开环传递函数,分析系统稳定性

$$G(s)=\frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$$



解 依题有 $\begin{cases} G(j0)=K\angle 0^\circ \\ G(j\infty)=0\angle -270^\circ \end{cases}$

$$K=\begin{cases} K_1\ (\text{小}) \quad N=0 \quad \text{(稳定)} \\ Z=P-2N=0-2\times 0=0 \\ K_2\ (\text{大}) \quad N=-1 \quad \text{(不稳定)} \\ Z=P-2N=0-2(-1)=2 \end{cases}$$

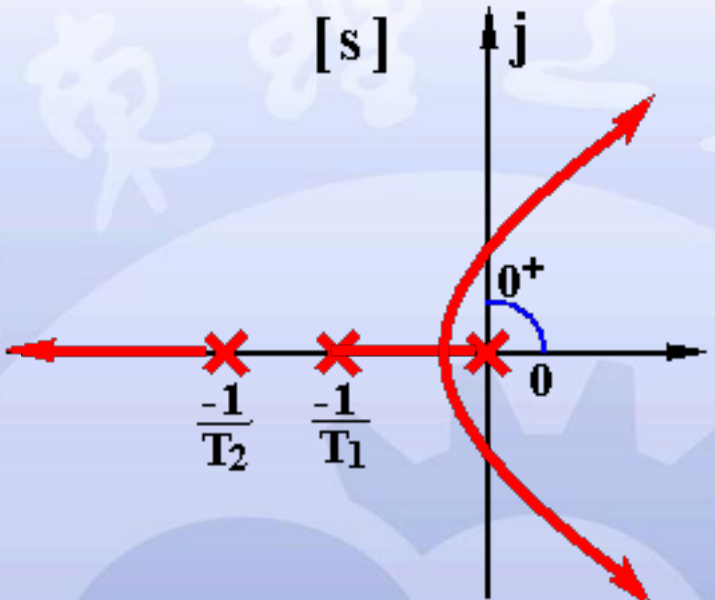


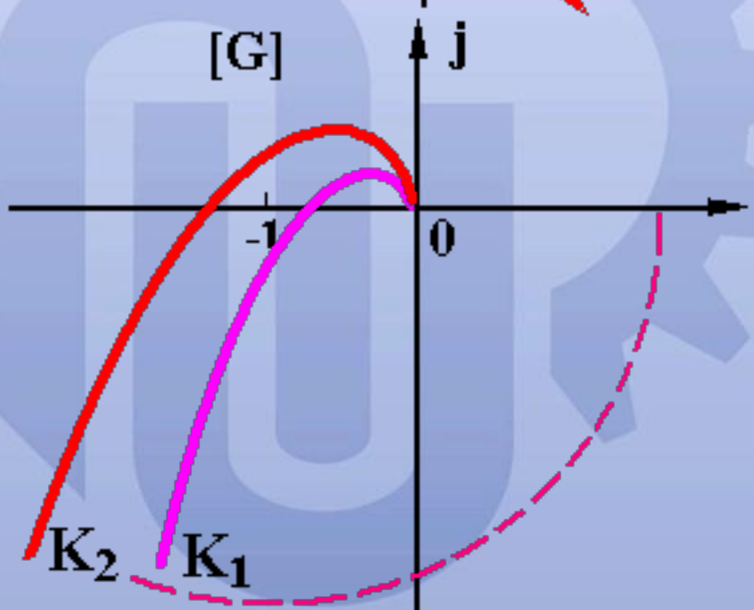
例 已知单位反馈系统开环传递函数,分析系统稳定性。

$$G(s)=\frac{K}{s(\mathrm{T}_1 s+1)(\mathrm{T}_2 s+1)}$$

解 依题有
$$\begin{cases} G(j0)=\infty\angle 0^\circ \\ G(j0^+)=\infty\angle -90^\circ \\ G(j\infty)=0\angle -270^\circ \end{cases}$$

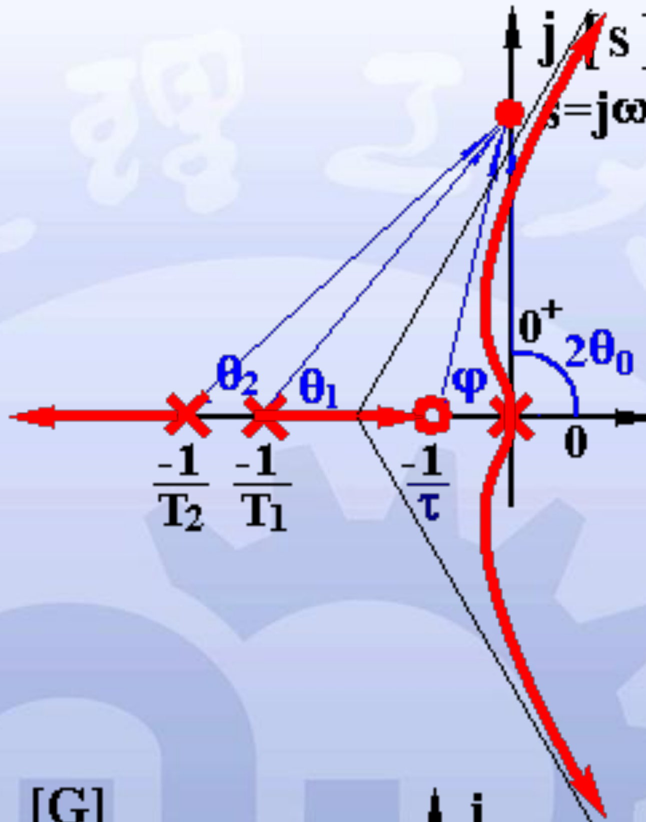
$$K=\begin{cases} K_1\ (小) \quad N=0 \quad (稳定) \\ Z=P-2N=0-2\times 0=0 \\ K_2\ (大) \quad N=-1 \quad (不稳定) \\ Z=P-2N=0-2\times(-1)=2 \end{cases}$$





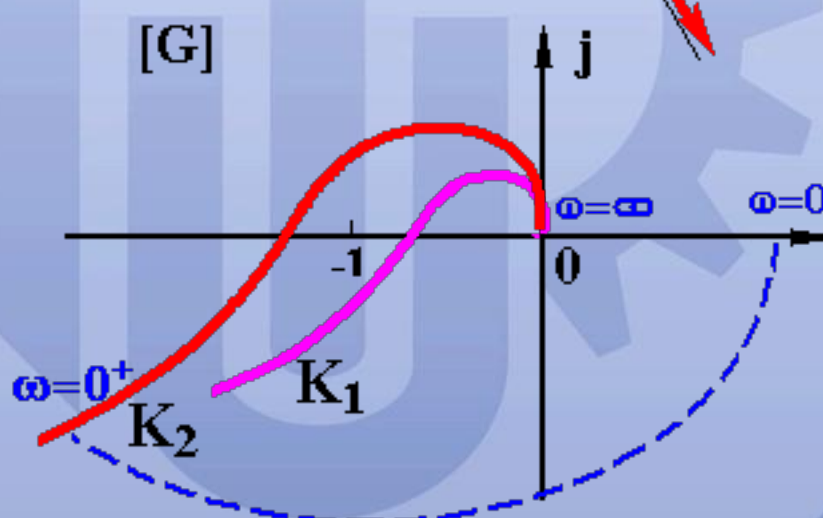
例 已知单位反馈系统开环传递函数,分析系统稳定性

$$G(s)=\frac{K(\tau s+1)}{s^2(T_1 s+1)(T_2 s+1)} \qquad \tau > T_1 > T_2$$



解 依题有
$$\begin{cases} G(j0)=\infty\angle 0^\circ \\ G(j0^+)=\infty\angle -180^\circ \\ G(j\infty)=0\angle -270^\circ \end{cases}$$

$$K=\begin{cases} K_1\ (\text{小}) \quad N=0 \quad (\text{稳定}) \\ Z=P-2N=0-2\times 0=0 \\ K_2\ (\text{大}) \quad N=-1 \quad (\text{不稳定}) \\ Z=P-2N=0-2\times(-1)=2 \end{cases}$$

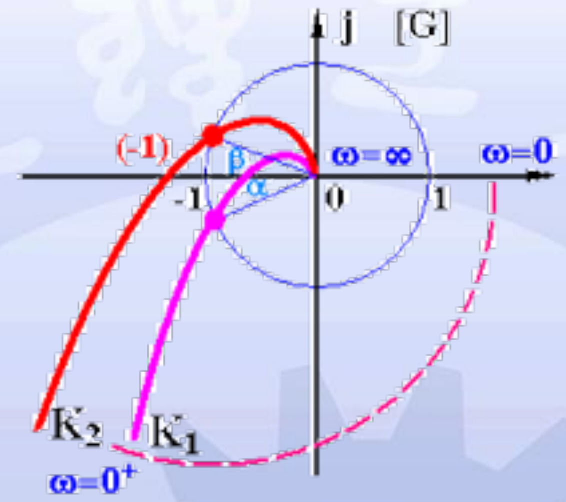


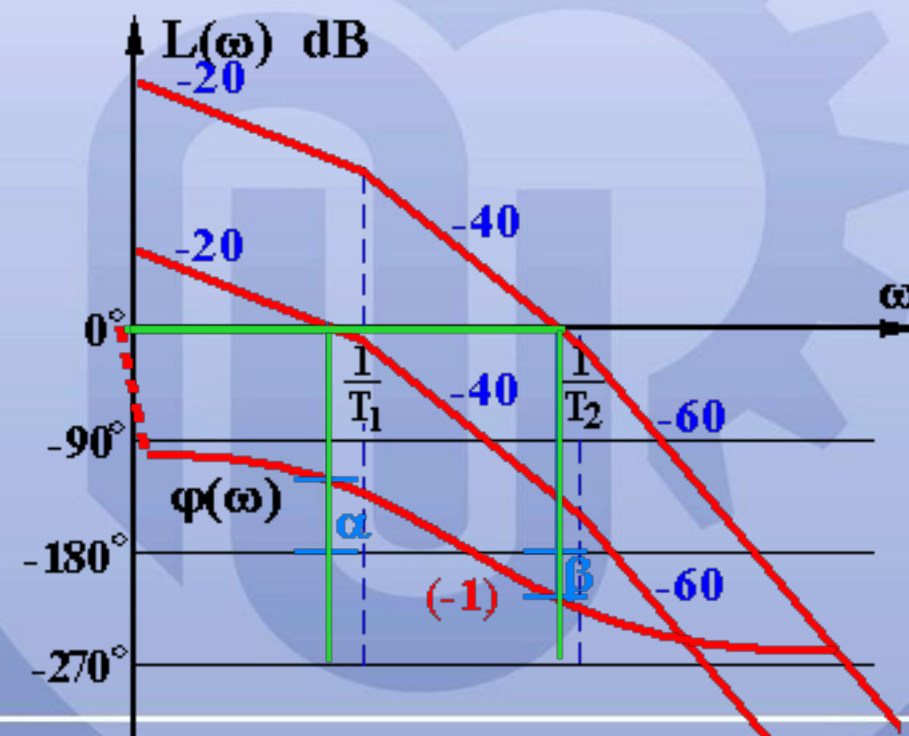
例 已知单位反馈系统开环传递函数,分析系统稳定性

$$G(s)=\frac{K}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$

对数稳定判据 $\begin{cases} Z=P-2N \\ N=N_+-N_- \end{cases}$

$$K=\begin{cases} K_1 \begin{cases} N=N_+-N_-=0-0=0 \\ Z=P-2N=0-2\times 0=0 \\ \text{(稳定)} \end{cases} \\ K_2 \begin{cases} N=N_+-N_-=0-1=-1 \\ Z=P-2N=0-2\times(-1)=2 \\ \text{(不稳定)} \end{cases} \end{cases}$$



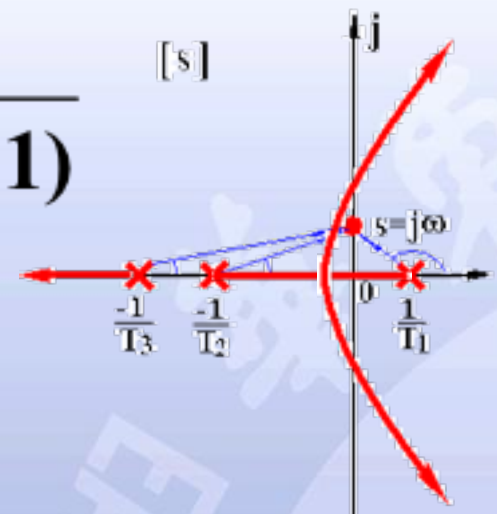


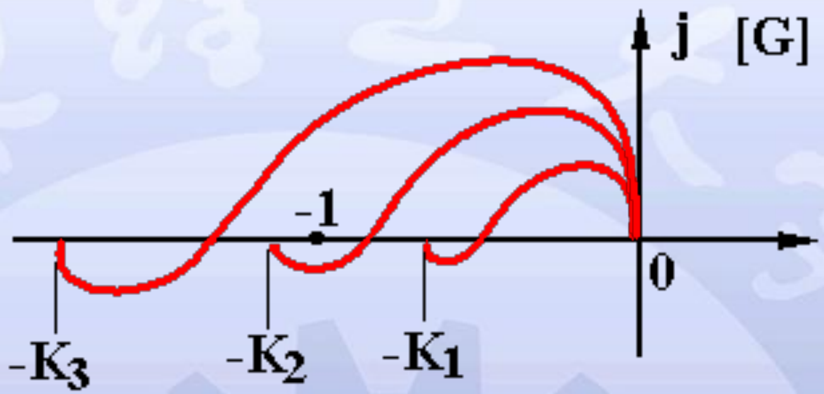
例 已知单位反馈系统开环传递函数,分析系统稳定性

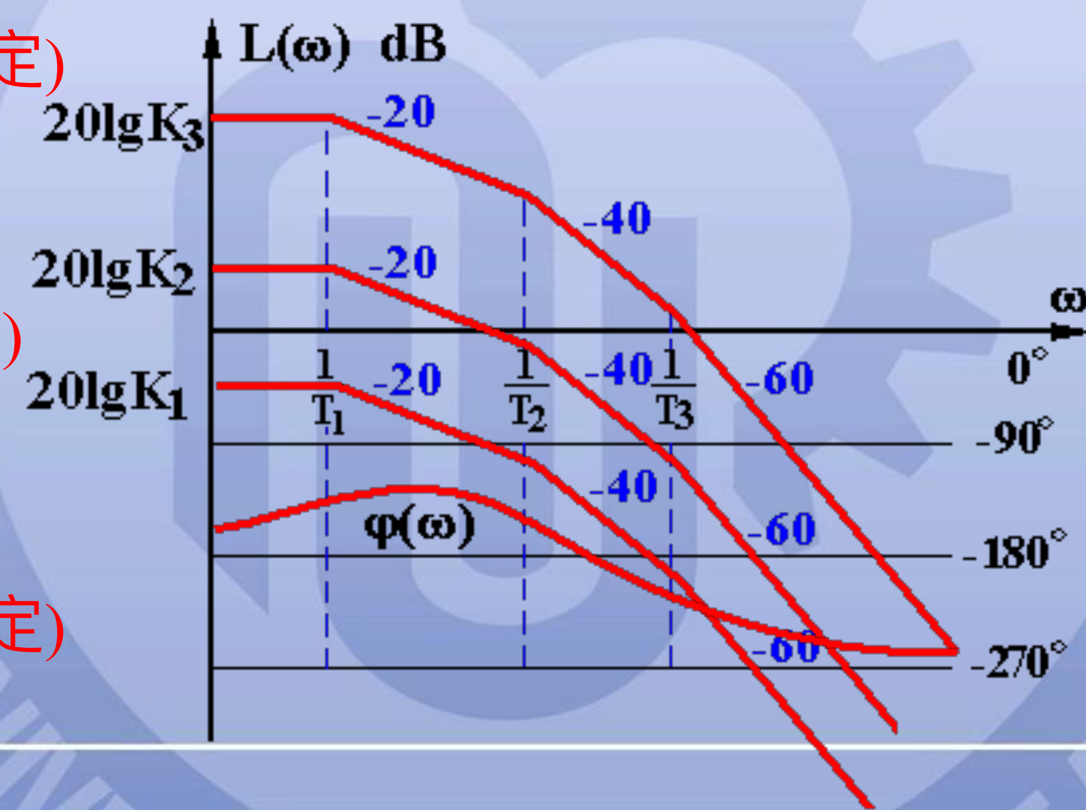
$$G(s)=\frac{K}{(\mathrm{T}_1 s-1)(\mathrm{T}_2 s+1)(\mathrm{T}_3 s+1)}$$

$$\begin{cases} G(j0)=K\angle-180^\circ \\ G(j\infty)=0\angle-270^\circ \end{cases}$$

$$K=\begin{cases} K_1\begin{cases} N=N_+-N_-=0-0=0 \\ Z=P-2N=1-2\times 0=1 \end{cases} & \text{(不稳定)} \\ K_2\begin{cases} N=N_+-N_-=\dfrac{1}{2}-0=\dfrac{1}{2} \\ Z=P-2N=1-2\times\dfrac{1}{2}=0 \end{cases} & \text{(稳定)} \\ K_3\begin{cases} N=N_+-N_-=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2} \\ Z=P-2N=1-2\times(-\dfrac{1}{2})=2 \end{cases} & \text{(不稳定)} \end{cases}$$







5.6 控制系统的频域性能指标

(1) 开环频域指标

(A) 截止频率ω_c

设二阶系统具有传递函数形式：

$$G(s)H(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

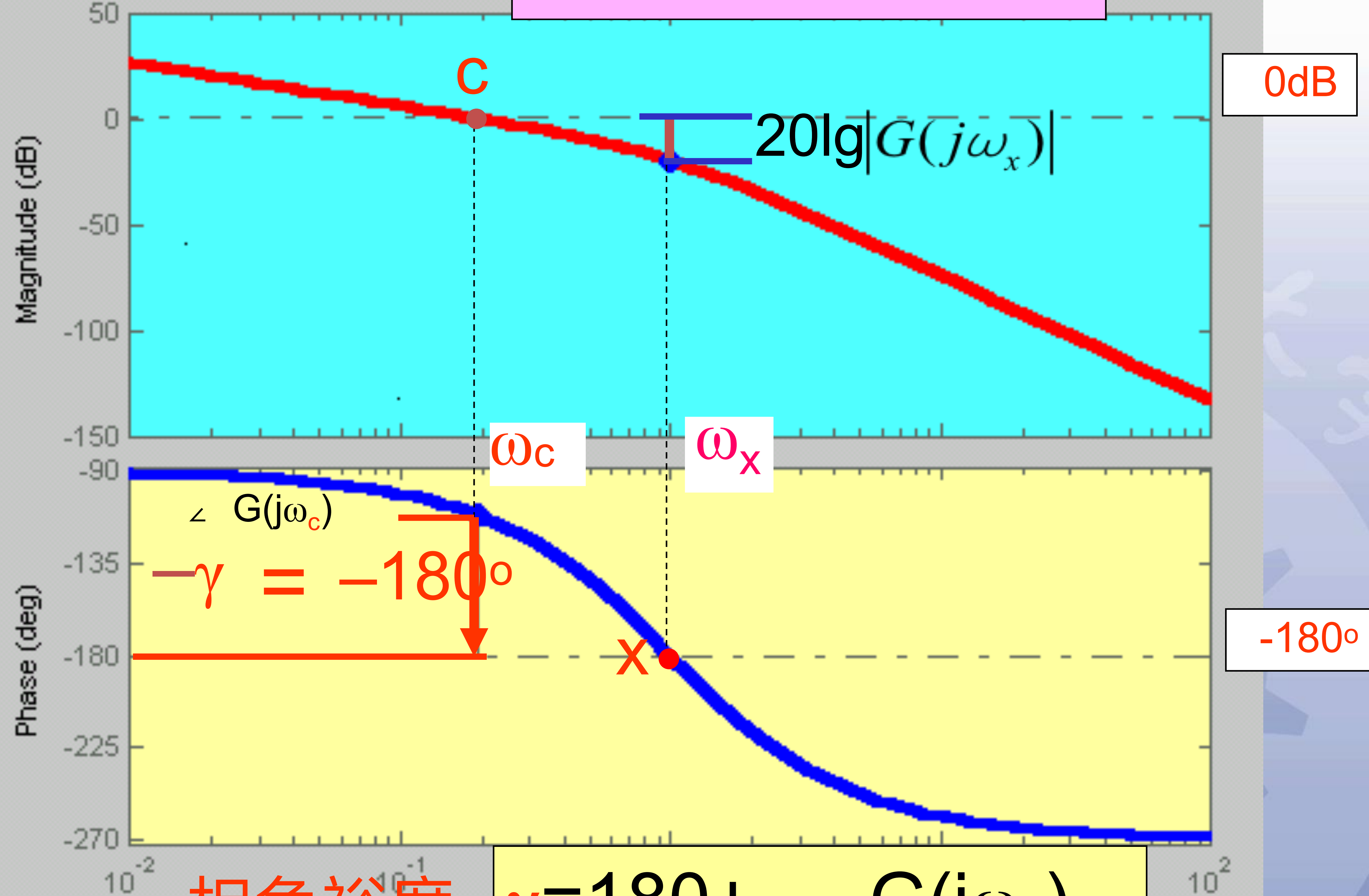
系统开环频率响应为：

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega+2\zeta\omega_n)}$$

可以求得系统的开环幅频特性及相频特性：

$$\left|G(j\omega)H(j\omega)\right|=\frac{\omega_n^2}{\omega\sqrt{\omega^2+(2\zeta\omega_n)^2}}\qquad \angle G(j\omega)H(j\omega)=-90^\circ-\arctan\frac{\omega}{2\zeta\omega_n}$$

幅值裕度: $hdB = -20\lg|G(j\omega_x)|$



相角裕度: $\gamma = 180 + \angle G(j\omega_c)$

控制系统的频域性能指标(2)

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2+(2\zeta\omega_n)^2}}=1 \qquad \omega_c^4+4\xi^2\omega_n^2\omega_c^2-\omega_n^4=0$$

$$\omega_c=\omega_n\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega)=-90^\circ-\arctan\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}{2\zeta}$$

(B) 相角裕度

$$\gamma=180^\circ+\angle G(j\omega)H(j\omega)$$

$$=90^\circ-\arctan\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}{2\zeta} \qquad =\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}{2\zeta}$$

$$\gamma=\arctan\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}$$

时域性能指标t_s与频域性能指标的关系

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n}$$

$$t_s\omega_c = \frac{3}{\xi}\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}$$

$$= 6\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}}{2\xi}$$

$$\gamma = \arctan\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}$$

$$\boxed{t_s = \frac{6}{\omega_c \tan\gamma}}$$

时域性能指标δ%与频域性能指标的关系

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\zeta \le 1/\sqrt{2})$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{M_r^2}}}{2}} \quad (M_r \ge 1)$$

$$\delta\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \quad (0 < \zeta < 1)$$

$$\delta\% = e^{-\pi\sqrt{\frac{(M_r-\sqrt{M_r^2-1})}{(M_r+\sqrt{M_r^2-1})}}} \times 100\%$$

$$= e^{-\pi(M_r-\sqrt{M_r^2-1})} \times 100\%$$

控制系统的频域性能指标(3)

(2) 闭环频域指标

(A) 谐振峰值

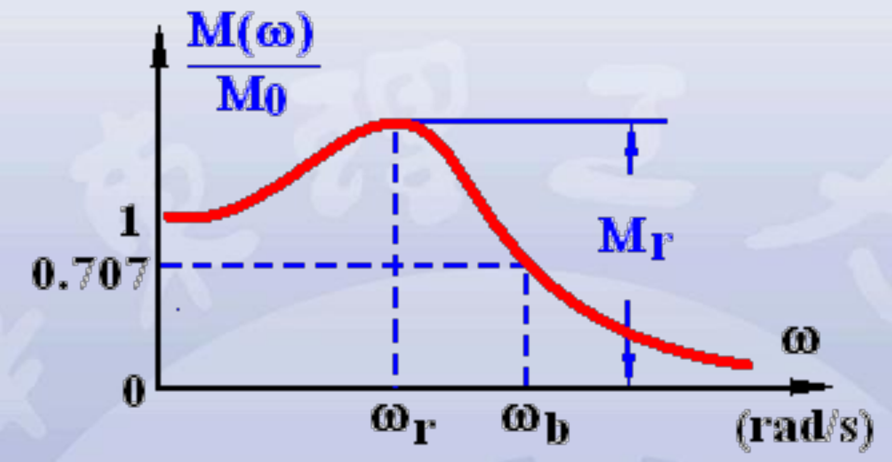
$$M_r = A(\omega_r) = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

(B) 谐振频率

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

(C) 带宽频率 ω_b

$M(\omega)$下降到0.707 M_0对应的频率值ω_b



控制系统的频域性能指标(4)

反馈控制系统的闭环传递函数为：

$$W(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{1}{H(s)}\cdot\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$$

H(s)为主反馈通道的传递函数，一般为常数，H(s)为常数的情况下，闭环频率特性的形状不受影响。研究闭环系统频域指标时，通常选择单位反馈系统展开工作。

$$W(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

控制系统的频域性能指标(5)

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + 4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

$$|W(j0)| = 1$$

由带宽频率的定义：

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\omega_b^2}{\omega_n^2})^2 + 4\zeta^2\frac{\omega_b^2}{\omega_n^2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\omega_b = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}$$

高阶系统性能指标的经验公式

(A) 谐振峰值

设单位反馈系统的闭环频率响应为：

$$W(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}=A(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

系统的开环环频率响应为：

$$G(j\omega)=B(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

开环相频特性

$$\varphi(\omega)=-180^{\circ}+\gamma(\omega)$$

$$G(j\omega)=B(\omega)e^{j[-180^{\circ}+\gamma(\omega)]}$$

高阶系统性能指标的经验公式(2)

$$
\begin{aligned}
G(j\omega) &= B(\omega)e^{j[-180^\circ+\gamma(\omega)]} \\
&= B(\omega)\left[\cos(-180^\circ+\gamma(\omega))+j\sin(-180^\circ+\gamma(\omega))\right] \\
&= B(\omega)\left[-\cos\gamma(\omega)-j\sin\gamma(\omega)\right]
\end{aligned}
$$

单位反馈系统的闭环幅频特性为 $W(j\omega)=\dfrac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}=A(\omega)e^{j\theta(\omega)}$

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{B(\omega)}{\left|1+B(\omega)\left[-\cos\gamma(\omega)-j\sin\gamma(\omega)\right]\right|} \\
&= \frac{B(\omega)}{\sqrt{[(1-B(\omega)\cos\gamma(\omega))^2+B^2(\omega)\sin^2\gamma(\omega)]}} \\
&= \frac{B(\omega)}{\sqrt{[1-2B(\omega)\cos\gamma(\omega)+B^2(\omega)(\sin^2\gamma(\omega)+\cos^2\gamma(\omega))]}}
\end{aligned}
$$

高阶系统性能指标的经验公式(3)

$$A(\omega)=\frac{B(\omega)}{\sqrt{[1-2B(\omega)\cos\gamma(\omega)+B^2(\omega)]}}$$

在工程实际中，出现谐振时，谐振角频率ω_r附近$\gamma(\omega)$变化较小，同时考虑

$\omega_r \approx \omega_c$

$$\cos\gamma(\omega)\approx\cos\gamma$$

$$\frac{dA(\omega)}{dB(\omega)}=0$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\cos\gamma(\omega)}\approx\frac{1}{\cos\gamma}$$

$$A_{\max}\approx\frac{1}{\sin\gamma}$$

$$M_r\approx\frac{1}{\sin\gamma}$$

高阶系统性能指标的经验公式(4)

(B) 超调量

通过大量系统的研究，归纳经验公式：

$$\delta = 0.16 + 0.4(M_r - 1), \quad 1 \le M_r \le 1.8$$

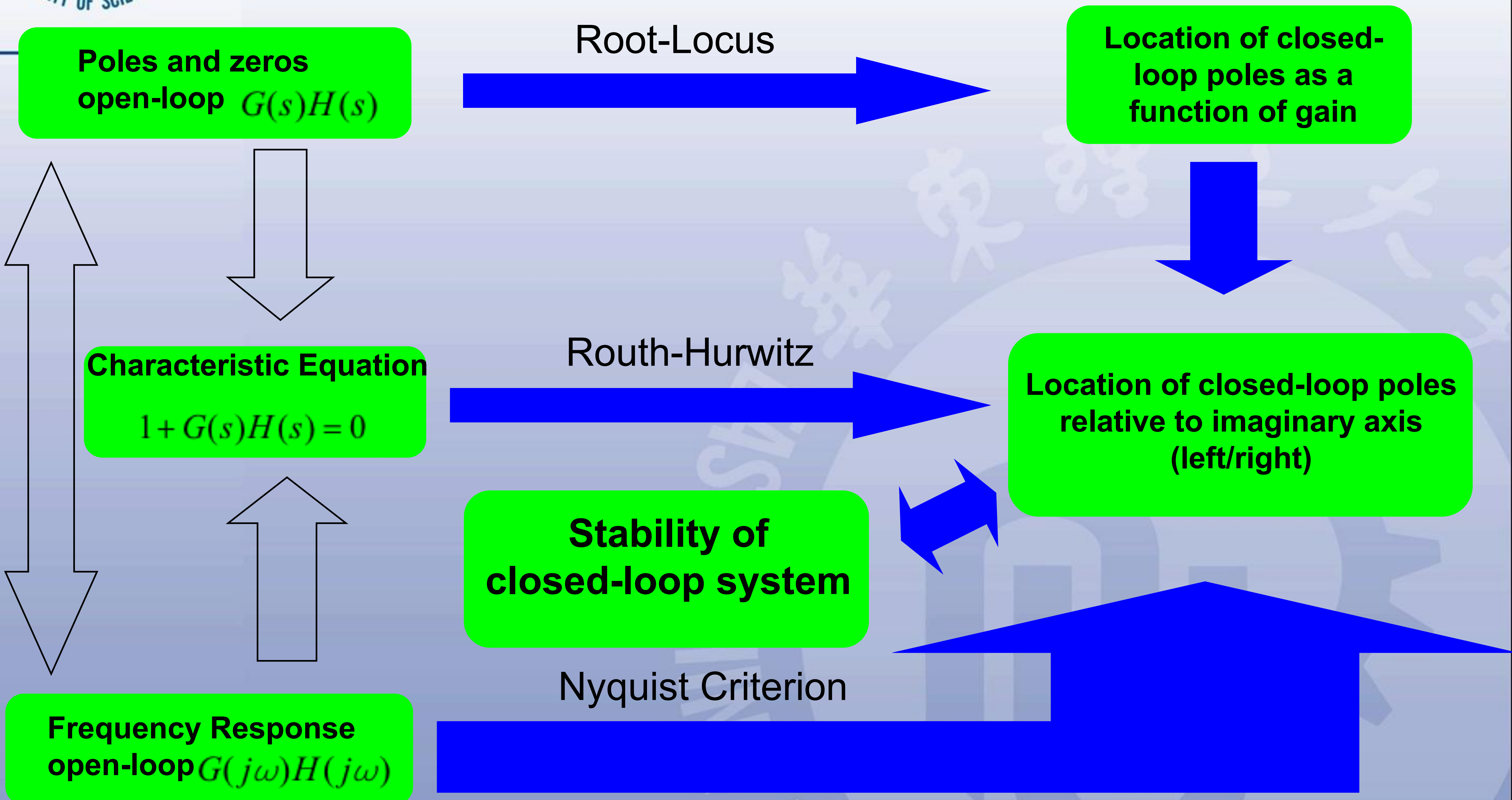
$$\delta = 0.16 + 0.4(\frac{1}{\sin\gamma} - 1), \quad 34^\circ \le \gamma \le 90^\circ$$

(C) 调节时间

$$t_s = \frac{k\pi}{\omega_c}, \quad k = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2, \quad 1 \le M_r \le 1.8$$

$$k = 2 + 1.5(\frac{1}{\sin\gamma} - 1) + 2.5(\frac{1}{\sin\gamma} - 1)^2, \quad 34^\circ \le \gamma \le 90^\circ$$

stability



Poles and zeros open-loop $G(s)H(s)$
Root-Locus
Location of closed-loop poles as a function of gain
Characteristic Equation $1+G(s)H(s)=0$
Routh-Hurwitz
Location of closed-loop poles relative to imaginary axis (left/right)
Stability of closed-loop system
Nyquist Criterion
Frequency Response open-loop $G(j\omega)H(j\omega)$