4. 进化策略

堵威

华东理工大学 自动化系

2021.4.8

ECUST WEI DU

回顾

- **选择方案**
  - 选择压力：φ = Pr(选择适应性最强的个体) / Pr(选择平均个体)
  - 随机遍历采样：轮盘赌选择可能会漏掉最好的个体
  - 超比例选择：适应性强的个体具有与其适应度不成比例的更大的概率被选中
  - Sigma缩放：让差别较大的适应度值的选择概率更均衡，让聚在一起的适应度值的选择概率更分散
  - 基于排名的选择，线性排名
  - 锦标赛选择

ECUST, WEI DU

回顾

- **交叉**
  - 二进制/连续算法：单点交叉、多点交叉、分段交叉、均匀交叉、多父代交叉、全局均匀交叉、洗牌交叉
  - 连续算法：平交叉/算术交叉，混合交叉，线性交叉，模拟二进制交叉
- **变异**
  - 方式1：采用以搜索域中心为均值的均匀分布或高斯分布生成$x_i(k)$
  - 方式2：以非变异的$x_i(k)$的值为均值的均匀分布和高斯分布生成xi(k)

ECUST, WEI DU

回顾

- **进化策略：** 初始化单个个体并评价它的适应度，让候选解（父代）变异并评价变异后的个体（子代）适应度，父代和子代中最好的个体成为下一代的起点
- **(1+1)进化策略/(1+1)-ES/二元进化策略：** 每一代由1个父代和1个子代组成，并从父代和子代中选出最好的作为下一代的个体

初始化非负变异方差σ^2

$\mathbf{x}_0 \leftarrow$ 随机生成的个体

While not (终止准则)

  生成一个随机向量$\mathbf{r}$，其中$r_i \sim N(0, \sigma^2)$, $i \in [1,n]$

  $\mathbf{x}_1 \leftarrow \mathbf{x}_0 + \mathbf{r}$

  If $\mathbf{x}_1$比$\mathbf{x}_0$好 then

    $\mathbf{x}_0 \leftarrow \mathbf{x}_1$

  End if

下一代

如果有足够的时间，采用随机变异探索搜索空间最终能访问到整个搜索空间并找到全局最优解

ECUST, WEI DU

回顾

- **1/5规则：** 在(1+1)-ES中，如果成功的变异与总变异的比值小于1/5，则应该减小标准差σ；如果这个比值大于1/5，则应该增大标准差

  标准差减小：$\sigma \leftarrow c\sigma$；标准差增大：$\sigma \leftarrow \sigma/c$，其中 $c = 0.817$

  自适应(1+1)-ES

- **(μ+1)进化策略：** 每一代用μ个父代，组合形成1个子代，从μ个父代和这个子代中选出最好的μ个父代作为下一代的父代；离散性交叉、中间性交叉、离散全局交叉、中间全局交叉

ECUST, WEI DU

本章内容

1. (1+1)进化策略

2. (μ+1)进化策略

3. **(μ+λ)和(μ,λ)进化策略**

4. 自身自适应进化策略

ECUST, WEI DU

(μ+λ)和(μ,λ)进化策略

- (μ+λ)-ES和(μ,λ)-ES
  - (μ+λ)-ES：种群规模为μ，每一代生成λ个子代；在生成子代之后，父代和子代共有(μ+λ)个个体；在这些个体中选出最好的μ个作为下一代的父代
  - (μ, λ)-ES：从λ个子代中选出最好的μ个个体作为下一代的父代（父代无一生存到下一代，保证λ≥μ）
  - 若(μ+λ)-ES和(μ, λ)-ES中μ>1：多元进化策略
  - 最初有人强烈反对让μ和λ大于1的：反对λ >1，因为会拖延对信息的利用；反对μ>1，因为让较差的个体存活会拖慢进化

ECUST WEI DU

(μ+λ)和(μ,λ)进化策略

- (μ+λ)-ES和(μ,λ)-ES
  - 在(μ+λ)-ES中，已知个体(**x**,**σ**)的适应度较好，但是由于**σ**不合适，它可能得不到改进，因此个体(**x**,**σ**)会持续很多代都留在种群中却没有改进
  - 在(μ, λ)-ES中，强迫所有种群在一代之后离开种群，只让最好的子代存活（有助于让**σ**好的子代活到下一代）
  - 当适应度函数有噪声或是时变的，(μ, λ)-ES常常比(μ+λ)-ES好
  - 对于搜索空间无界的问题：推荐(μ, λ)-ES
  - 对于搜索空间离散的问题：推荐(μ+λ)-ES

ECUST WEI DU

$(\mu+\lambda)$和(μ,λ)进化策略

- $(\mu+\lambda)$-ES和(μ,λ)-ES伪代码

$\{(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\sigma}_k)\} \leftarrow$ 随机生成个体，$k \in [1, \mu]$

每个$\mathbf{x}_k$是候选解，每个$\boldsymbol{\sigma}_k$是标准差向量

While not (终止准则)

  For $k = 1, 2, \ldots, \lambda$

    从$\{(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\sigma}_k)\}$ 中随机选择两个父代

    将两个父代进行交叉得到一个子代，记为$(\mathbf{x}'_k, \boldsymbol{\sigma}'_k)$

    $\Sigma'_k \leftarrow \mathrm{diag}(\sigma'^2_{k1}, \ldots, \sigma'^2_{kn})$

    由$N(\mathbf{0}, \Sigma_k)$生成一个随机向量$\mathbf{r}$

    $\mathbf{x}'_k \leftarrow \mathbf{x}'_k + \mathbf{r}$

  下一个k

  If 这是$(\mu+\lambda)$-ES

    $\{(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\sigma}_k)\} \leftarrow \{(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\sigma}_k)\} \cup \{(\mathbf{x}'_k, \boldsymbol{\sigma}'_k)\}$ 中最好的μ个个体

  Elseif 这是(μ, λ)-ES

    $\{(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\sigma}_k)\} \leftarrow \{(\mathbf{x}'_k, \boldsymbol{\sigma}'_k)\}$ 中最好的μ个个体

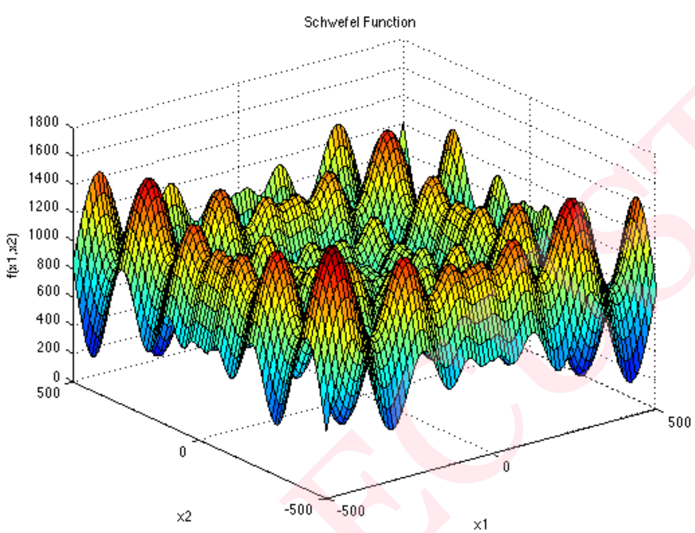
  Endif

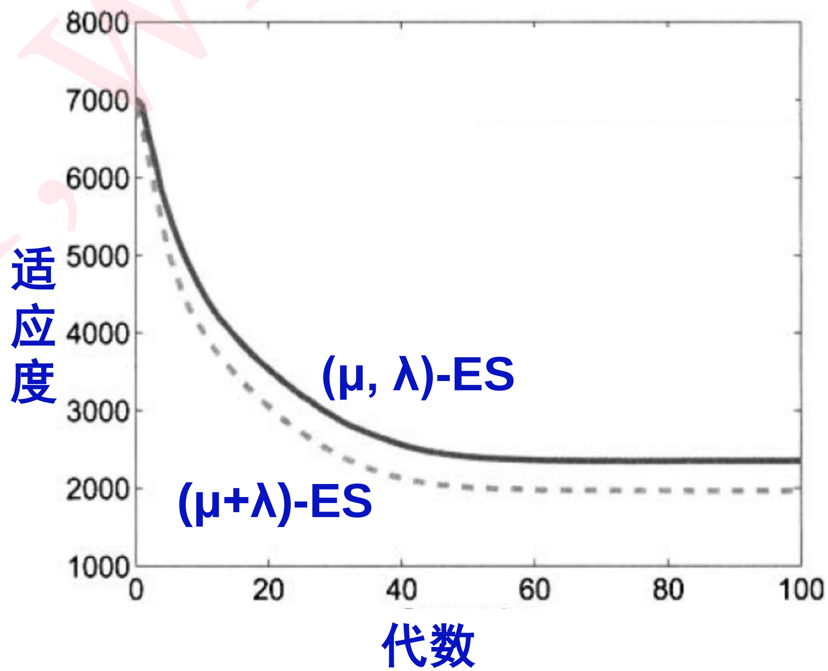
下一代

ECUST WEI DU

(μ+λ)和(μ,λ)进化策略

- 比较(μ+λ)-ES和(μ,λ)-ES性能
  - 设置μ=10，λ=20，离散性交叉，问题为20维Schwefel2.26函数



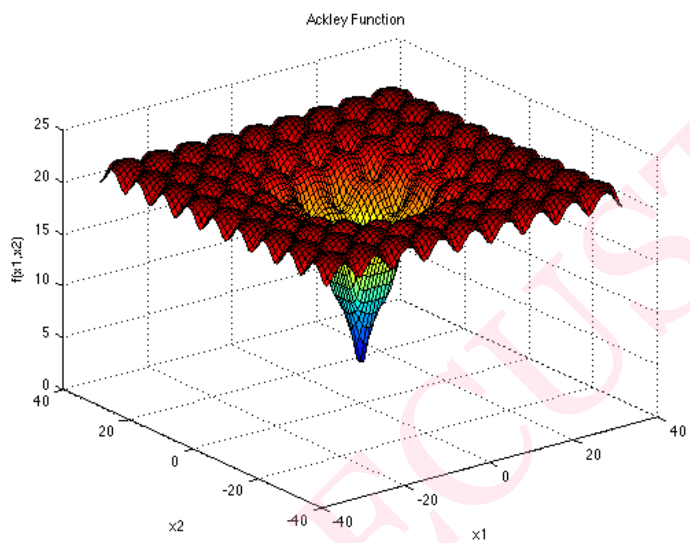


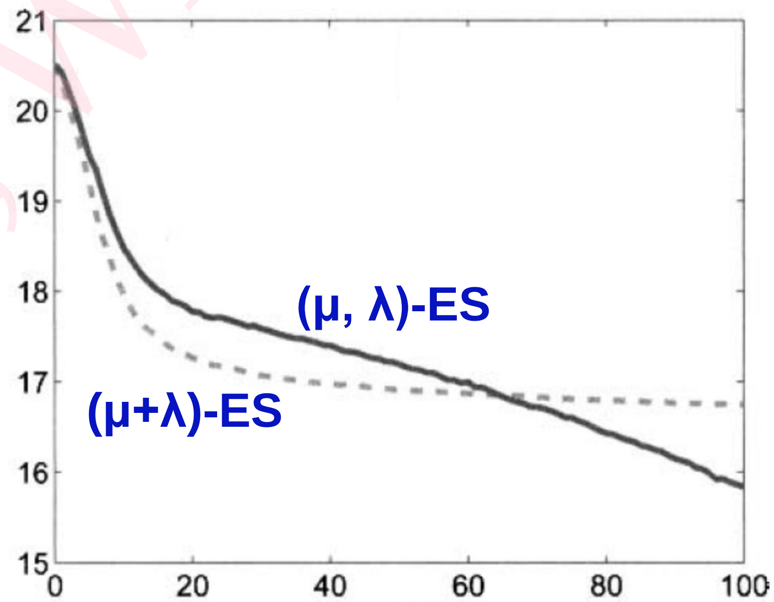
(μ+λ)-ES比(μ, λ)-ES好：(μ, λ)-ES限定每一个个体只存活一代（同时也依赖于优化问题）

ECUST, WEI DU

(μ+λ)和(μ,λ)进化策略

- 比较(μ+λ)-ES和(μ,λ)-ES性能
  - 设置μ=10，λ=20，离散性交叉，问题为20维Ackley函数





(μ, λ)-ES比(μ+λ)-ES好：重视探索

ECUST, WEI DU

本章内容

1. (1+1)进化策略

2. (μ+1)进化策略

3. (μ+λ)和(μ,λ)进化策略

4. 自身自适应进化策略

ECUST, WEI DU

自身自适应进化策略

- 自适应(1+1)-ES
  - 1/5规则： 在(1+1)-ES中，如果成功的变异与总变异的比值小于1/5，则应该减小标准差σ；如果这个比值大于1/5，则应该增大标准差

初始化非负变异方差σ^2
$\mathbf{x}_0 \leftarrow$ 随机生成的个体
While not (终止准则)
    生成一个随机向量$\mathbf{r}$，其中$r_i \sim N(0, \sigma^2)$，$i \in [1,n]$
    $\mathbf{x}_1 \leftarrow \mathbf{x}_0 + r$
    If $\mathbf{x}_1$ 比 $\mathbf{x}_0$ 好 then
        $\mathbf{x}_0 \leftarrow \mathbf{x}_1$
    Endif
    $\varphi \leftarrow$ 在过去G代中成功变异的比例
    If $\varphi < 1/5$ then
        $\sigma \leftarrow c\sigma$
    elseif $\varphi > 1/5$ then
        $\sigma \leftarrow \sigma/c$
    Endif
下一代

ECUST WEI DU

自身自适应进化策略

- (μ+λ)-ES、(μ, λ)-ES的自适应
  - 变异标准差σ（得到子代{**x**', **σ**'}之后）

$$\sigma_i' \leftarrow \sigma_i' \exp(\tau' \rho_0 + \tau \rho_i) \qquad x_i' \leftarrow x_i' + \sigma_i' r_i$$

  - ρ_0，ρ_i和r_i为N(0,1)的随机标量，τ和τ'为调试参数，因子$\tau'\rho_0$让**x**'的变异率有一个总改变，因子$\tau\rho_i$则让**x**'的具体元素变异率改变，**σ**'的变异形式保证**σ**'为正数
  - ρ_0，ρ_i有可能为正数和负数，导致指数会大于1或小于1，即σ'会增大或减小
  - 建议

$$\tau = P_1\left(\sqrt{2\sqrt{n}}\right)^{-1} \qquad \tau' = P_2\left(\sqrt{2n}\right)^{-1}$$

P_1,P_2为比例常数，通常取1，n是问题维数

ECUST WEI DU

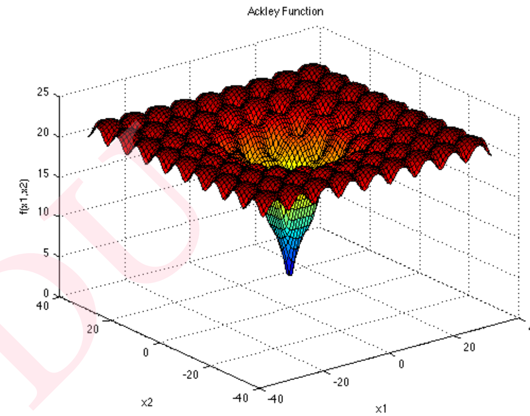
自身自适应进化策略

- $(\mu+\lambda)$-ES、(μ, λ)-ES的自适应
  - $\boldsymbol{\sigma}'$的变异要在$\mathbf{x}'$的变异之前完成
  - 自身自适应$(\mu+\lambda)$-ES、(μ, λ)-ES（self-adaptive）

自身自适应$(\mu+\lambda)$-ES、(μ, λ)-ES伪代码

初始化常数τ和τ'
$\{(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\sigma}_k)\}\leftarrow$随机生成个体，$k\in[1,\mu]$
每个$\mathbf{x}_k$是候选解，每个$\boldsymbol{\sigma}_k$是标准差向量
While not (终止准则)
　For $k=1,2, \ldots, \lambda$
　　从$\{(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\sigma}_k)\}$ 中随机选择两个父代
　　将两个父代进行交叉得到一个子代，记为$(\mathbf{x}'_k, \boldsymbol{\sigma}'_k)$
　　由$N(0,1)$生成一个随机标量ρ_0
　　由$N(\mathbf{0},\mathbf{I})$生成一个随机向量$[\rho_1,\rho_2,\ldots, \rho_n]$
　　$\sigma'_{ki}\leftarrow \sigma'_{ki} \exp(\tau'\rho_0+\tau\rho_i)$，对于$i\in[1,n]$
　　$\Sigma'_k \leftarrow \mathrm{diag}(\sigma'^2_{k1}, \ldots, \sigma'^2_{kn})$
　　由$N(\mathbf{0}, \Sigma_{k+1})$生成一个随机向量$\mathbf{r}$
　　$\mathbf{x}'_k \leftarrow \mathbf{x}'_k + \mathbf{r}$
　下一个k
　If 这是$(\mu+\lambda)$-ES
　　$\{(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\sigma}_k)\} \leftarrow \{(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\sigma}_k)\} \cup \{(\mathbf{x}'_k, \boldsymbol{\sigma}'_k)\}$ 中最好的μ个个体
　Elseif 这是(μ, λ)-ES
　　$\{(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\sigma}_k)\} \leftarrow \{(\mathbf{x}'_k, \boldsymbol{\sigma}'_k)\}$ 中最好的μ个个体
　Endif
下一代

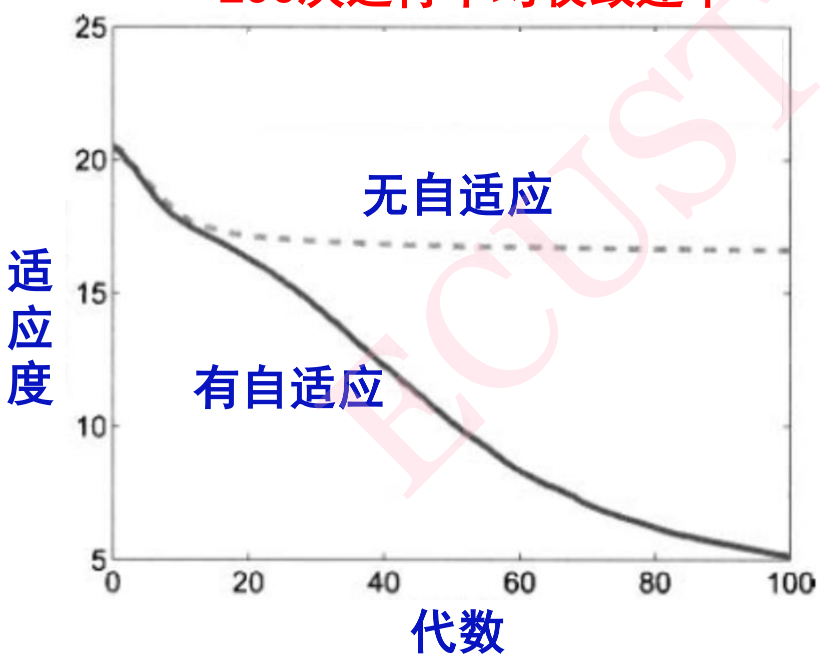
ECUST, WEI DU



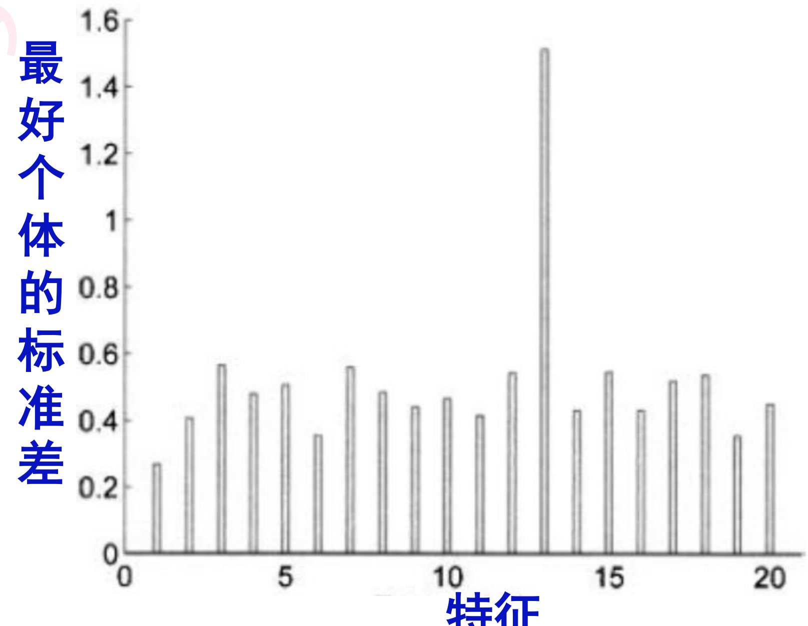
自身自适应进化策略

- (μ+λ)-ES、(μ, λ)-ES的自适应
  - 例：用(μ+λ)-ES优化Ackley基准函数，比较标准(μ+λ)-ES算法和自身自适应(μ+λ)-ES算法；μ=10，λ=20，离散性交叉，问题维数为20。

100次运行平均收敛速率

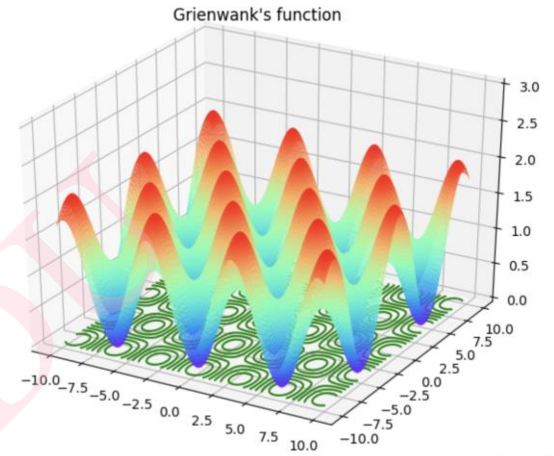


最后一代中最好个体的标准差值



ECUST, WEI DU

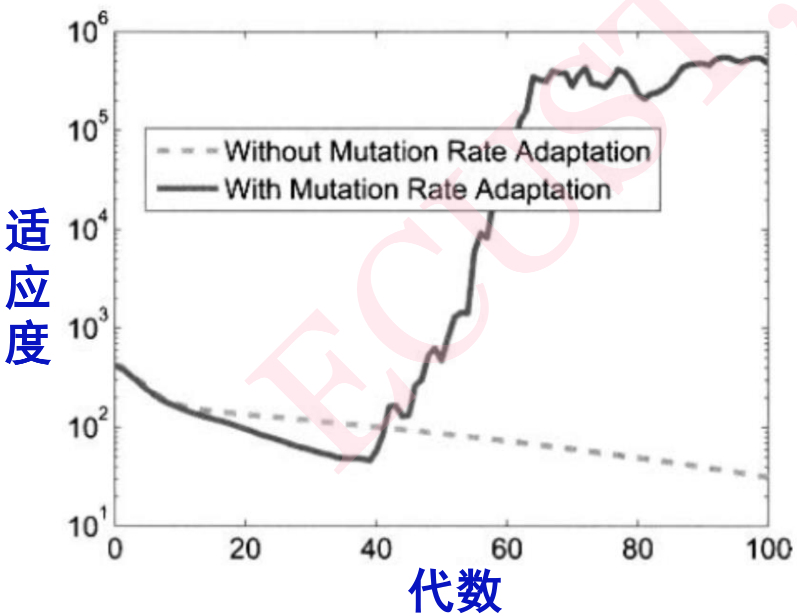
自身自适应进化策略



- (μ+λ)-ES、(μ, λ)-ES的自适应
  - 例：用(μ,λ)-ES优化Griewank基准函数，比较标准(μ,λ)-ES算法和自身自适应(μ,λ)-ES算法；μ=10，λ=20，离散性交叉，问题维数为20。

$$\sigma_i' \leftarrow \sigma_i' \exp(\tau' \rho_0 + \tau \rho_i)$$
$$x_i' \leftarrow x_i' + \sigma_i' r_i$$

100次运行平均收敛速率



- ρ_0, ρ_i为N(0,1)的随机标量，τ和τ’为调试参数
- ρ_0, ρ_i有可能为正数和负数，导致指数会大于1或小于1，即σ’会增大或减小

$$\begin{aligned} E[\exp(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{PDF}(x)\exp(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)\exp(x)\,dx \\ &= \exp(1/2) \approx 1.65. \end{aligned}$$

ECUST, WEI DU

总结

- ES，ES&GA
  - (1+1)-ES
  - (μ+1)-ES
  - (μ+λ)-ES
  - (μ, λ)-ES
  - GA：对候选解编码，ES：连续参数上操作
  - GA：强调交叉，ES：强调变异

ECUST, WEI DU

结束

ECUST, WEI DU