电路原理

信息学院　常青

changqing@ecust.edu.cn

第7章 一二阶电路时域分析

7.1 动态电路方程的列写

7.2 动态电路的初始条件

7.3 一阶电路时域分析

7.4 全响应

7.5 二阶RLC电路的零输入响应

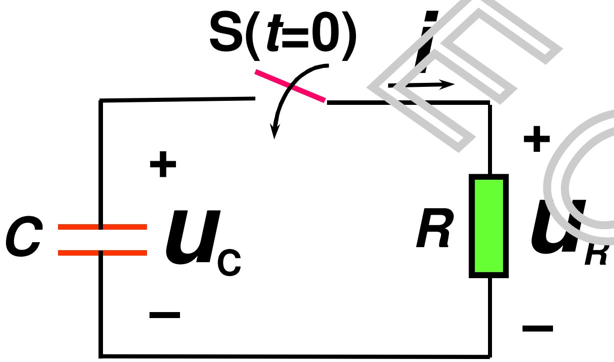
7.6 二阶RLC电路的零状态响应

7.7 单位阶跃响应和单位冲激响应

一阶电路的零输入响应

零输入响应(Zero–input response)：激励(电源)为零，由初始储能引起的响应。

一、 *RC*电路的零输入响应（*C*对*R*放电)



$u_C(0^-)=U_0$

$$i=-C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$u_C+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=0$$

特征方程 $RC\lambda+1=0$

特征根 $\therefore \lambda=-\frac{1}{RC}$ 则 $u_C=Ae^{-\frac{1}{RC}t}$

代入初始值 $U_C(0^+)=U_C(0^-)=U_0$

$$U_0=Ae^{-\frac{1}{RC}t}\Big|_{t=0} \quad \rightarrow A=U_0$$

$$u_C=U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \qquad (t\geq 0)$$

$$i_C=-C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

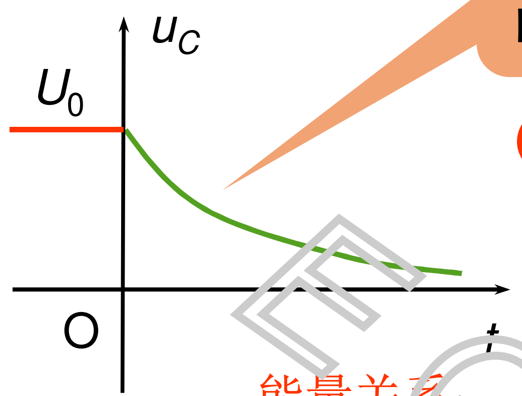
$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

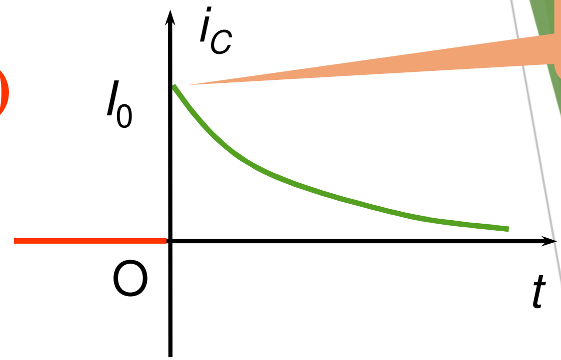
连续函数

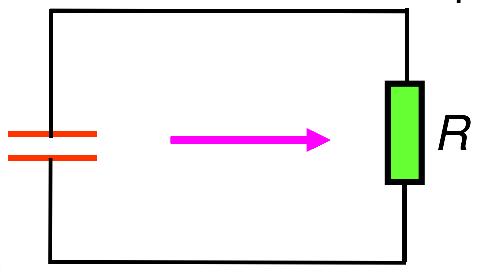
$(t > 0)$

$$i_C = -C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

跃变







能量关系：

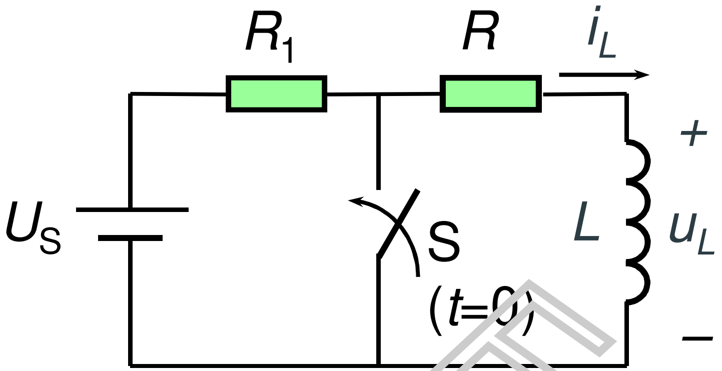
C的能量不断释放，被***R***消耗，直到全部储能消耗完毕.

$$W_R = \int_0^\infty i^2 R\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R\mathrm{d}t = \frac{1}{2}CU_0^2$$

（1）电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数；

(2)其衰减快慢与一阶电路的时间常数有关

二、*RL*电路的零输入响应



$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{U_S}{R_1 + R} = I_0$$

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + Ri = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = 0 \qquad (t > 0)$$

其解答形式为： $i(t) = Ae^{\lambda t}$

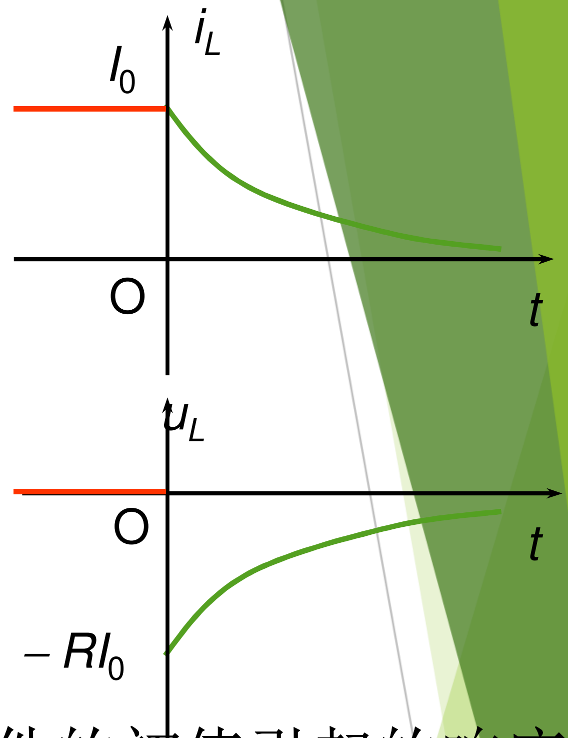
由特征方程 $L\lambda + R = 0$ 得 $\lambda = -\frac{R}{L}$

由初值 $i(0^+) = i(0^-) = I_0$ 得 $i(0^+) = A = I_0$

得 $i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (t \geq 0)$

$$i_L(t) = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \qquad (t \geq 0)$$

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -RI_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \quad (t > 0)$$



小结：

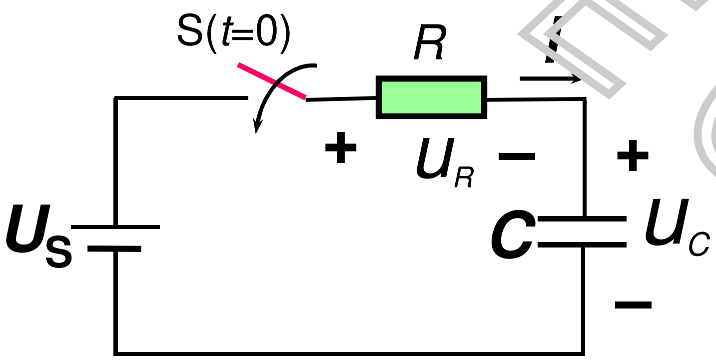
1. 一阶电路的零输入响应是由储能元件的初值引起的响应都是一个指数衰减函数。
2. 衰减快慢取决于时间常数 τ.

   ***RC*电路 ： $\tau = RC$,　　 *RL*电路： $\tau = L/R$**
3. 同一电路中所有响应具有相同的时间常数。
4. 一阶电路的零输入响应和初值成正比。

一阶电路的零状态响应

零状态响应(Zero–state response)：储能元件初始能量为零，在激励(电源)作用下产生的过渡过程。

1. *RC*电路的零状态响应



$U_C(0^-)=0$

列方程：

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

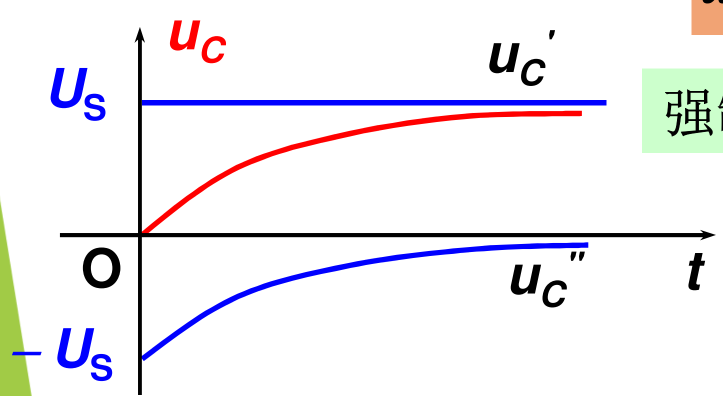
非齐次线性常微分方程

$$u_C=u_C'+u_C''=U_S+Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

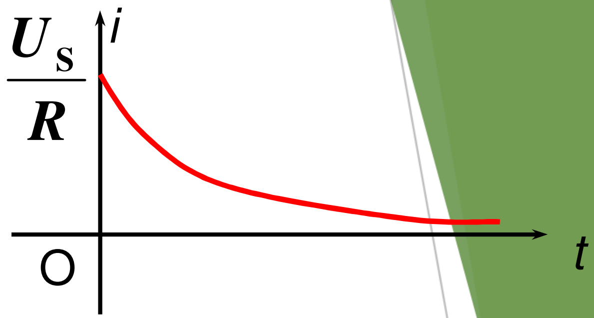
$U_C(0^+)=A+U_S=0$　　　$\therefore\ A=-U_S$

$$u_C=U_S-U_Se^{-\frac{t}{RC}}=U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}})\qquad(t>0)$$

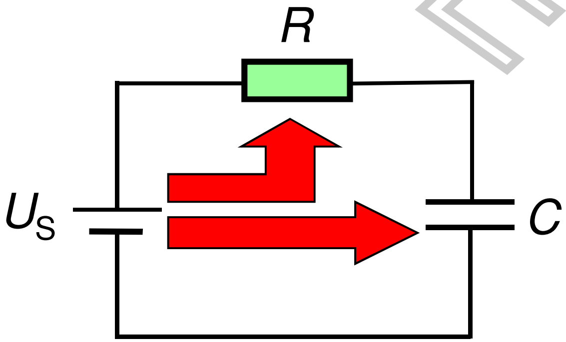
强制响应(稳态)　　自然响应（暂态）



$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_S}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$



能量关系：



电源提供的能量一部分被电阻消耗掉，

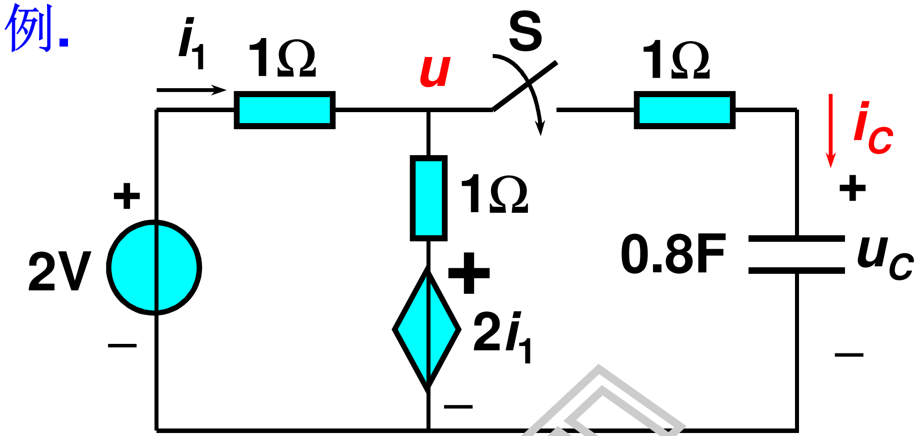
一部分储存在电容中，且$W_C=W_R$

$$W_R = \int_0^\infty p_R\mathrm{d}t = \int_0^\infty i^2R\mathrm{d}t = \int_0^\infty (\frac{U_S^2}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})^2R\mathrm{d}t$$

$$= \frac{U_S^2}{R}(-\frac{\tau}{2})\mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{2}CU_S^2\mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}CU_S^2 = W_C$$

充电效率为**50%**

例.



t= 0时闭合开关S.

求u_C、i_1的零状态响应。

解法1:

$$\begin{cases} \dfrac{2-u}{1}+\dfrac{2i_1-u}{1}=i_C \\ u=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C \end{cases} \Rightarrow 4\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+4u_C=6$$

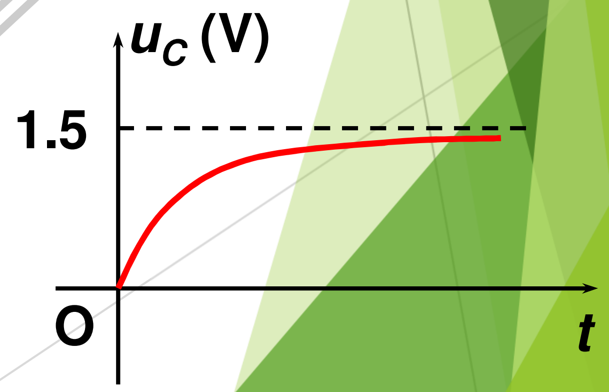
$$4\lambda+4=0\rightarrow\lambda=-1$$

$$u_C'=A\mathrm{e}^{-t}$$

$$u_C''=6/4=1.5\mathrm{V}$$

$$u_C=1.5+A\mathrm{e}^{-t}$$

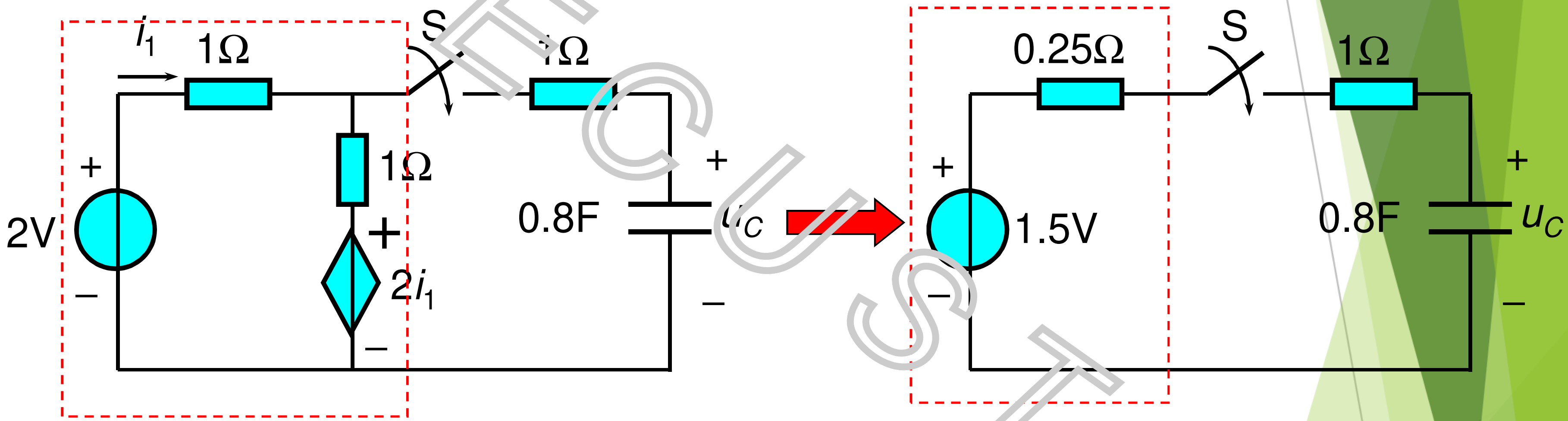
$$\boxed{u_C=1.5-1.5\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{V}\quad (t>0)}$$



$$i_1 = \frac{2-(C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C)}{1} = 0.5+0.3\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{A} \quad (t>0)$$

$$i_1(0^+) \neq i_1(0^-)$$

解法2:　　戴维南等效.



$$\tau = RC = (1+0.25)\times 0.8 = 1\,\mathrm{s}$$

$$u_C'' = 1.5\ \mathrm{V}$$

$$\boxed{u_C = 1.5-1.5\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{V} \quad (t>0)}$$

小结:

1. 一阶电路的零状态响应是储量元件无初始储量时，由输入激励引起的响应。有二个分量:

$$u_C = u_C' + u_C''$$

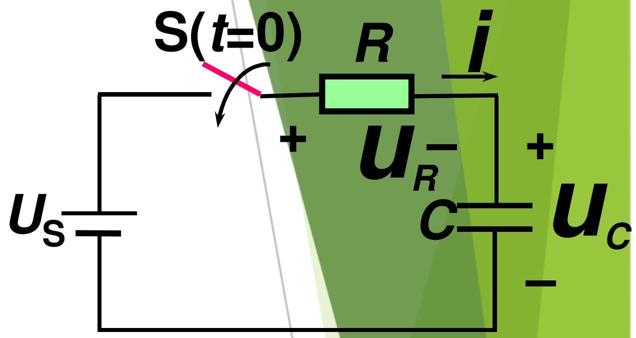
2. 时间常数与激励源无关。

3. 线性一阶网络的零状态响应与激励成正比。

全响应：非零初始状态的电路受到激励时电路中产生的响应。

一、一阶电路的全响应

以*RC*电路为例



1. 全响应 = 强制响应+自然响应

全响应 = 稳态分量 + 瞬态分量

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

$$u_C(t)=u_C'+u_C''$$

$$\therefore u_C=\underbrace{U_S}_{\text{强制响应}}+\underbrace{(U_0-U_S)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{自然响应}}\quad (t>0)$$

强制响应：与输入激励的变化规律有关 —— 微分方程特解

自然响应：变化规律由电路参数和结构决定 —— 微分方程通解

强制分量

稳态分量：直流或正弦激励的一阶电路，换路后达到的新的稳态的解

瞬态分量：描述自由分量随时间增长按指数规律衰减的状态

自由分量

2. 全响应= 零状态响应 + 零输入响应

外部输入（独立源）

动态元件的初始储能

→ 产生响应

零输入：输入激励为零

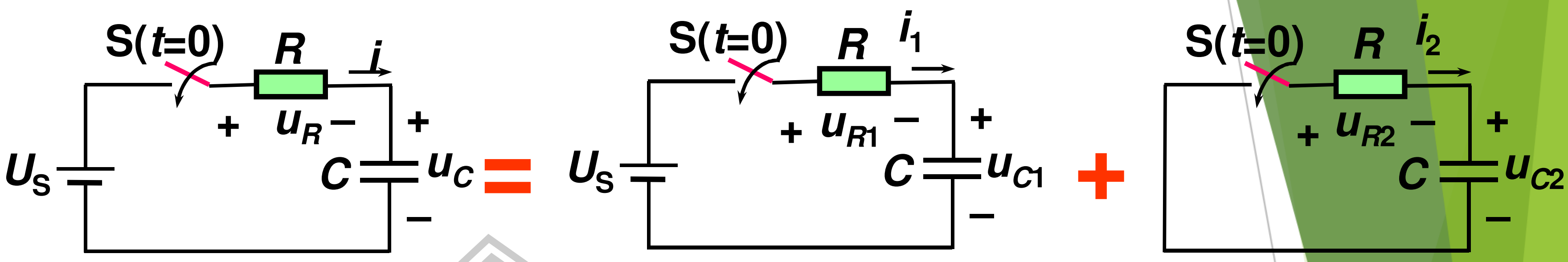
$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

零状态：电路中所有动态元件的初始储能为零。

$$u_C = U_S - U_S e^{-\frac{t}{RC}} = U_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t > 0)$$

零输入响应 → 换路后动态电路外加激励为零，仅由动态元件初始储能产生的响应。

零状态响应 → 储能元件初始能量为零的电路在激励作用下产生的响应。

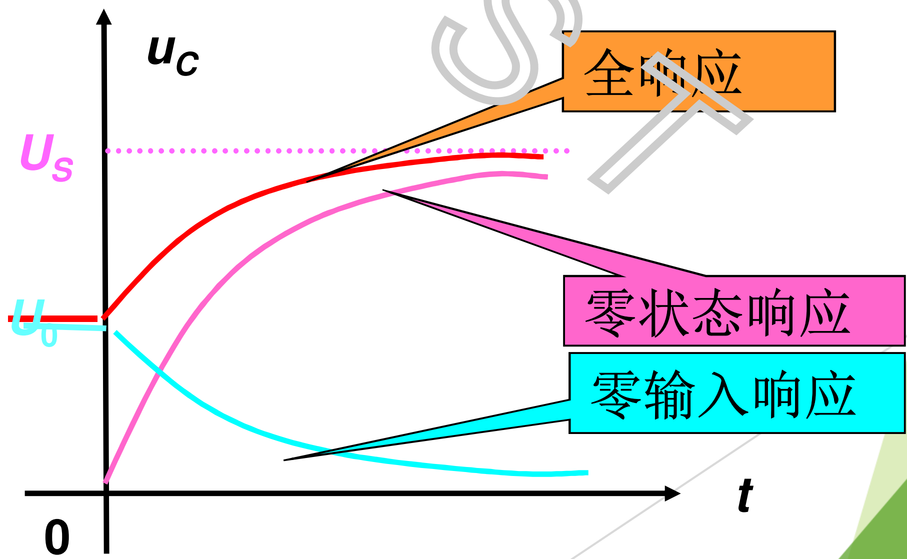


$u_C(0^-)=U_0$　　$u_{C1}(0^-)=0$　　$u_{C2}(0^-)=U_0$

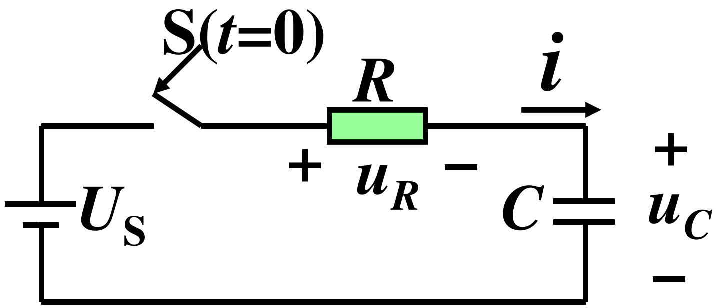
$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0)$$

零状态响应

零输入响应



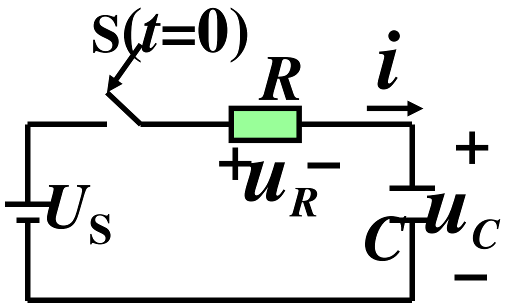
例



$u_C(0^-)=U_0$

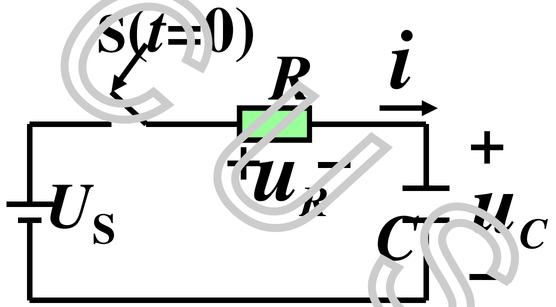
$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

全响应= 零状态响应 + 零输入响应



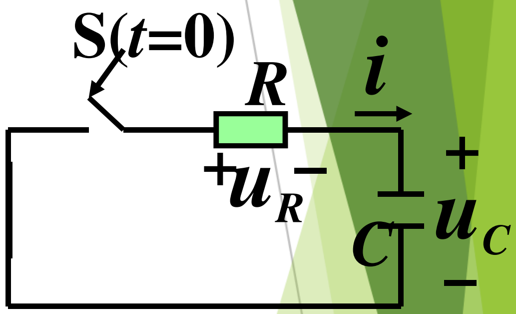
$u_C(0^-)=U_0$

=



$u_C(0^-)=0$

+



$u_C(0^-)=U_0$

$$u_C=U_S+(U_0-U_S)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\quad(t\geq 0)$$

强制响应(稳态解)

自然响应(暂态解)

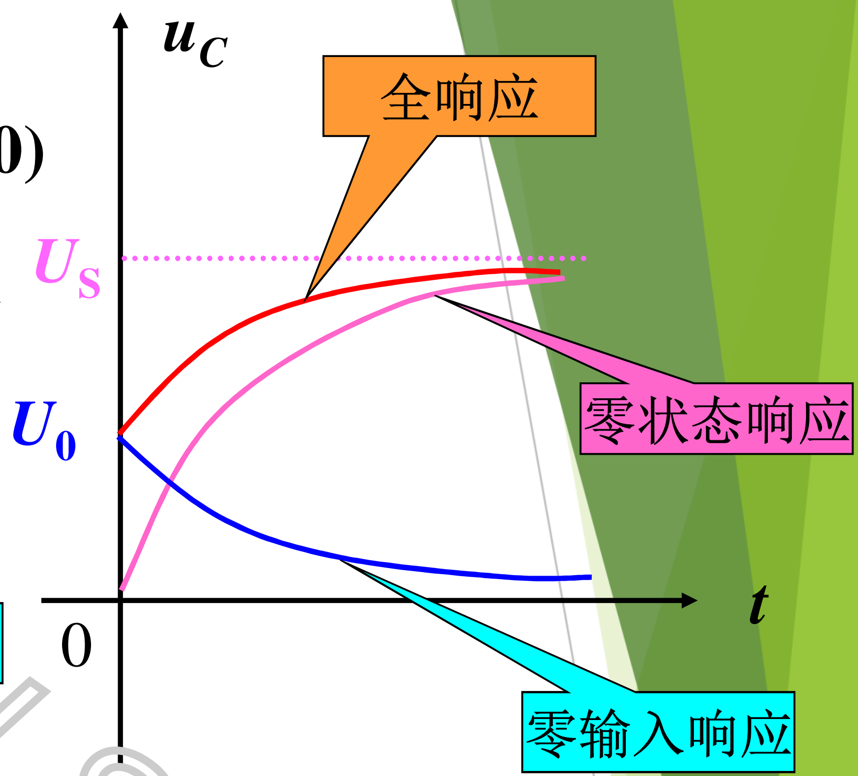
$$u_C=U_S(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\quad+U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\quad(t\geq 0)$$

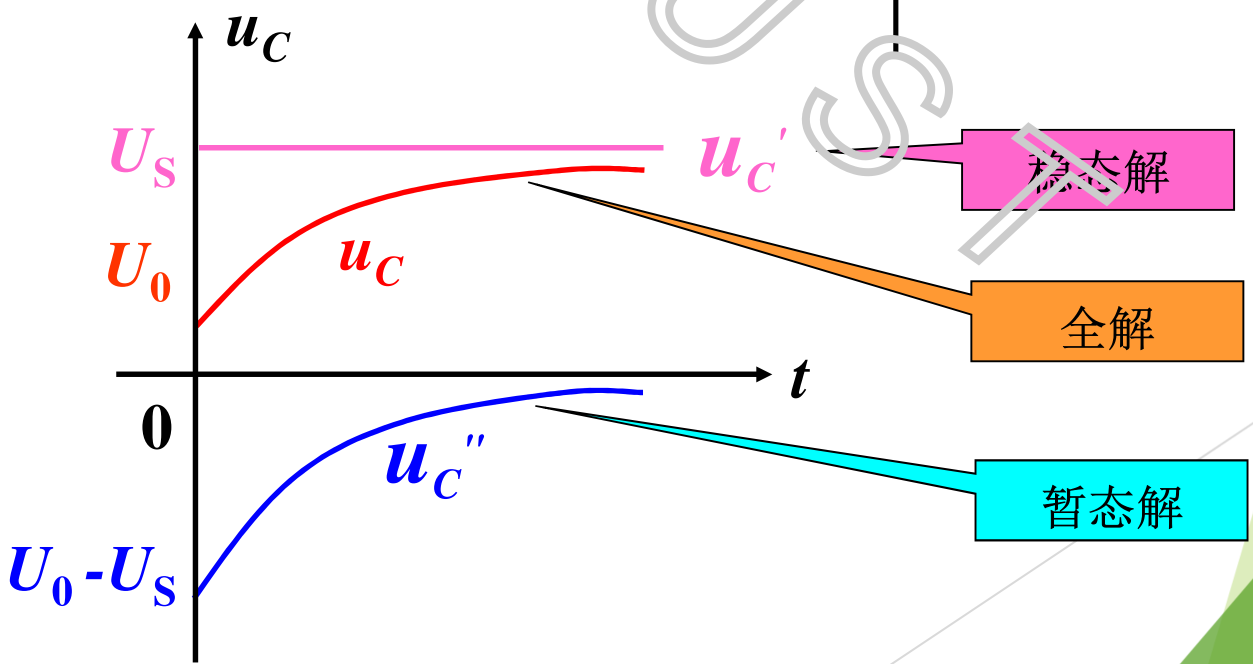
零状态响应

零输入响应

$$u_C = \underbrace{U_S(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{零输入响应}} \qquad (t \ge 0)$$

$$u_C = \underbrace{U_S}_{\text{强制分量(稳态解)}} + \underbrace{(U_0 - U_S)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{自由分量(暂态解)}} \qquad (t \ge 0)$$





两种分解方式的比较：

全响应 = 强制响应(稳态解)+自然响应(暂态解)

$$u_C = U_S + (U_0 - U_S)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \ge 0)$$

强制响应(稳态解)

自然响应(暂态解)

计算简单

全响应= 零状态响应 + 零输入响应

$$u_C = U_S(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \ge 0)$$

零状态响应

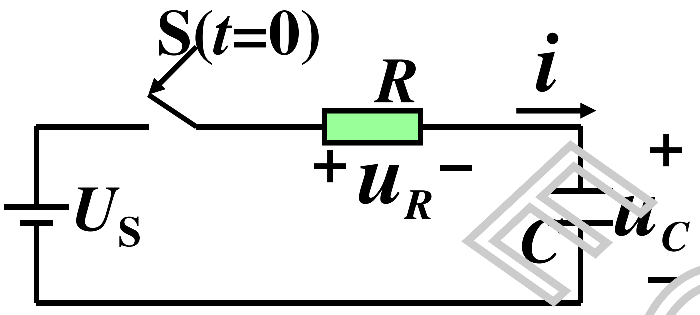
零输入响应

物理概念清楚
利于叠加

原因1：**ZIR** 和 **ZSR** 都是可能单独出现的过渡过程

原因2：**ZSR** 对于分析一般激励的响应非常重要

输入－输出线性关系



$u_C(0^-)=0$　　零状态

$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (t \geq 0)$$

激励	响应
U_S	$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (t \geq 0)$
$2U_S$	$u_C = 2U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (t \geq 0)$
$U_{S1}+U_{S2}$	$u_C = (U_{S1}+U_{S2})(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (t \geq 0)$

小结：

1. 一阶电路的零状态响应与输入成正比，称为零状态线性。

2. 一阶电路的零输入响应和初始值成正比，称为零输入线性。

一阶电路的零输入响应是由储能元件的初始储能引起的响应，都是从初始值衰减为零的指数衰减函数。

$$y(t) = y(0^+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

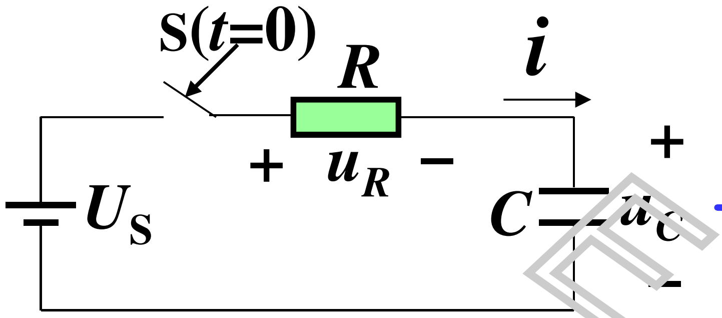
3. 衰减快慢取决于时间常数 τ

RC电路 $\tau = RC$ ， RL电路 $\tau = L/R$

4. 同一电路中所有响应具有相同的时间常数。

5. 一阶电路的全响应既不与初始值成正比，也不与输入成正比。

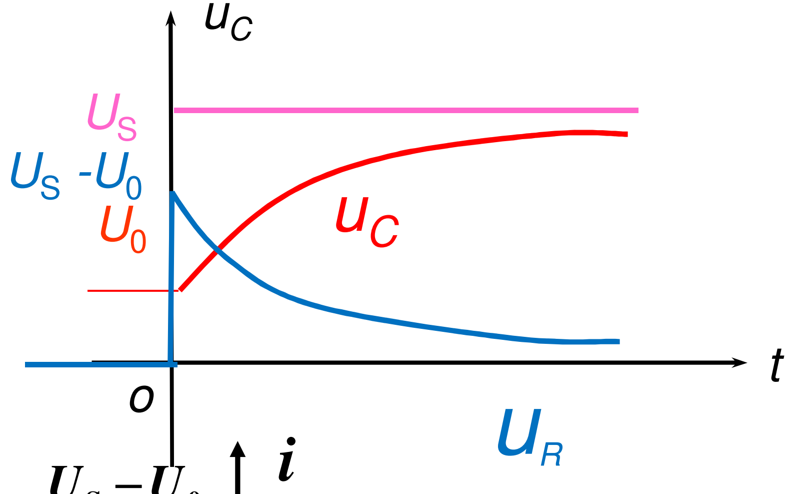
三要素法

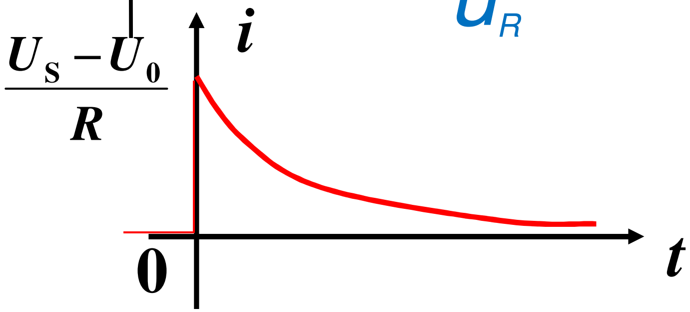


$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S \\ u_C(0^+)=u_C(0^-) \end{cases}$$

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+i=0 \\ i(0^+)=\dfrac{U_S-u_C(0^+)}{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}+u_R=0 \\ u_R(0^+)=U_S-u_C(0^+) \end{cases}$$





特点:

（1）同一电路不同支路变量微分方程的特征方程完全相同

同一电路不同支路变量解的自由分量形式完全相同

（2）同一电路不同支路变量微分方程等号右端项和初始值不同

同一电路不同支路变量解的强制分量和待定系数不同

（3）同一电路不同支路变量解的强制分量均为该变量的稳态解

任意支路量方程的形式： $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+af(t)=u(t)$

恒定激励下一阶电路的解的一般形式为

$$f(t)=f(\infty)+A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

自然响应

强制响应(稳态解)

令 $t=0^+$

$$f(0^+)=f(\infty)\big|_{0^+}+A$$

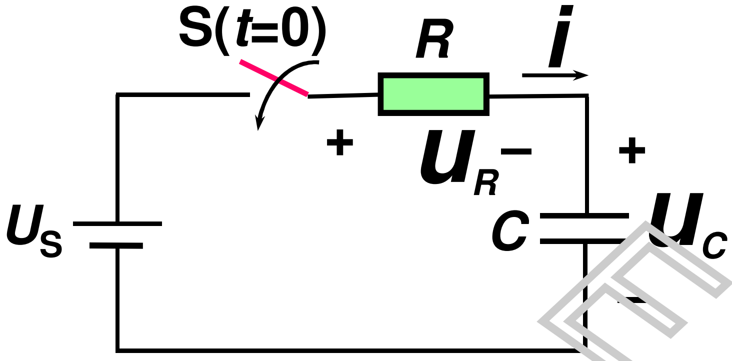
$$A=f(0^+)-f(\infty)\big|_{0^+}$$

三要素 $\begin{cases} f(\infty) & \text{稳态解} \\ f(0^+) & \text{初始值} \\ \tau & \text{时间常数} \end{cases}$

$$f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)\big|_{0^+}]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

适用范围：激励为直流和正弦交流!!!

Review：



非齐次方程的特解

齐次方程的通解

$$u_C = U_S + (U_0 - U_S)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

强制响应(稳态)

自然响应(暂态)

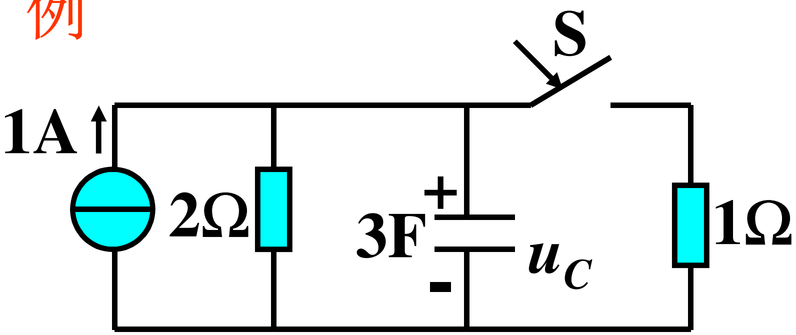
$$u_R = (U_S - U_0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \qquad (t \geq 0)$$

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_S - U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad (t > 0)$$

$$f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)\big|_{0^+}]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

激励为直流和正弦交流

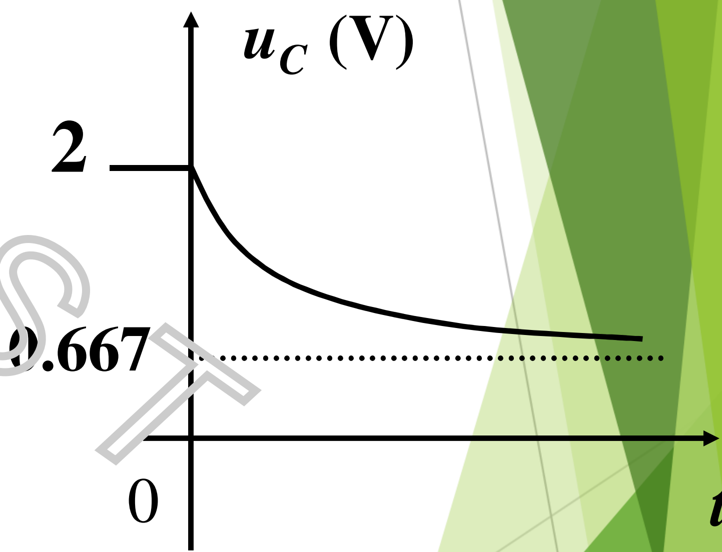
例



已知： t=0时合开关S。

求 换路后的$u_C(t)$的全响应.

解:



$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 2\text{V}$$

$$\tau = R_{eq}C = \frac{2}{3} \times 3 = 2\ \text{s}$$

$$u_C(\infty) = \frac{2}{2+1} \times 1 = 0.667\text{V}$$

$$u_C = 0.667 + (2 - 0.667)\mathrm{e}^{-0.5t}$$

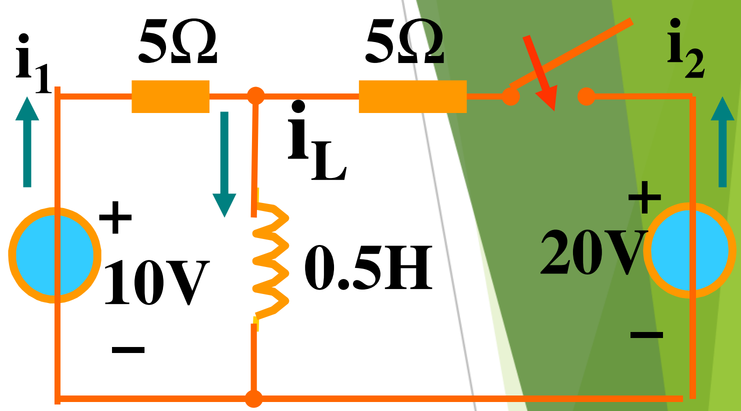
$$= 0.667 + 1.33\mathrm{e}^{-0.5t}\ \text{V} \qquad (t \geq 0)$$

强制响应

自然响应

例　　t=0时，开关闭合，求t>0后的i_L、i_1、i_2

解1　三要素为：



$$i_L(0^-)=i_L(0^+)=10/5=2A$$

$$i_L(\infty)=10/5+20/5=6A$$

$$\tau=L/R=0.6/(5//5)=1/5s$$

应用三要素公式　$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0^+)-i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$i_L(t)=6+(2-6)e^{-5t}\ =6-4e^{-5t}\quad t\geq 0$$

$$u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=0.5\times(-4e^{-5t})\times(-5)=10e^{-5t}V$$

$$i_1(t)=(10-u_L)/5=2-2e^{-5t}A$$

$$i_2(t)=(20-u_L)/5=4-2e^{-5t}A$$

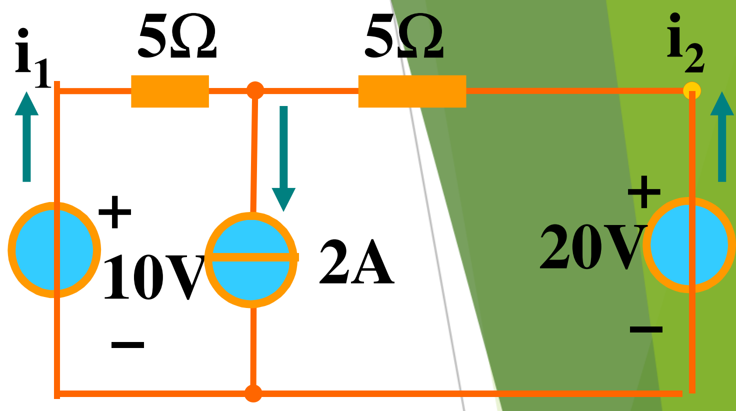
解2

三要素为：

$$i_L(0^-)=i_L(0^+)=10/5=2A$$

$$i_L(\infty)=10/5+20/5=6A$$

$$\tau=L/R=0.6/(5//5)=1/5s$$



0^+等效电路

$$i_1(0^+)=\frac{(10-20)}{10}+1=0A \qquad i_1(\infty)=10/5=2A$$

$$i_2(0^+)=\frac{(20-10)}{10}+1=2A \qquad i_2(\infty)=20/5=4A$$

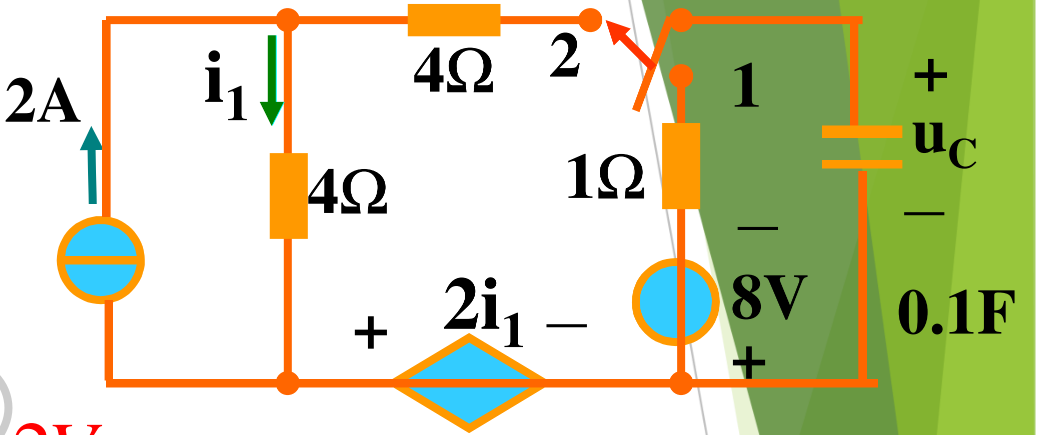
$$i_L(t)=6+(2-6)e^{-5t}=6-4e^{-5t} \quad t\geq 0$$

$$i_1(t)=2+(0-2)e^{-5t}=2-2e^{-5t}A$$

$$i_2(t)=4+(2-4)e^{-5t}=4-2e^{-5t}A$$

例　已知：t=0时开关由1→2，求换路后的$u_C(t)$ 。

解　三要素为：

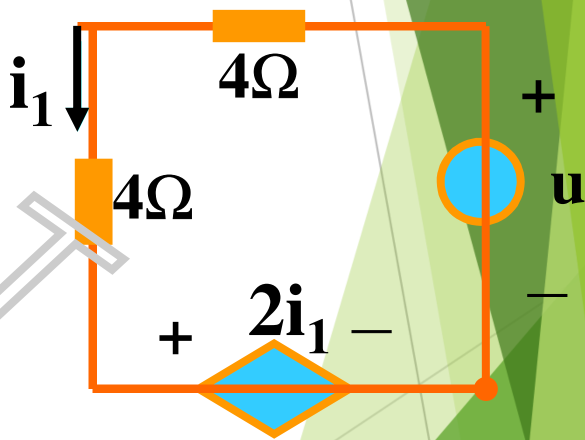


$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = -8V$$

$$u_C(\infty) = 4i_1 + 2i_1 = 6i_1 = 12V$$

$$\tau = R_{eq}C = 10\times 0.1 = 1s$$

$$u_c(t) = u_c(\infty) + [u_c(0^+) - u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$



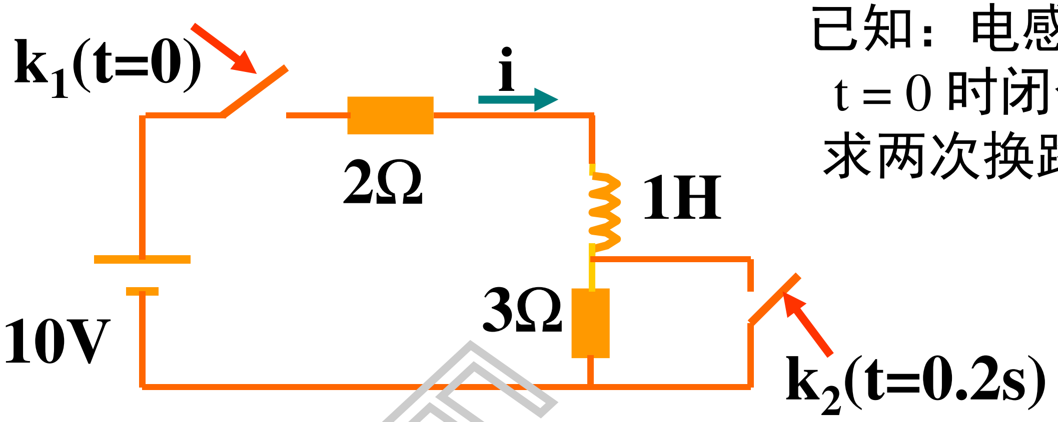
$$u = 10i_1 \rightarrow$$

$$R_{eq} = u / i_1 = 10\Omega$$

$$u_c(t) = 12 + [-8 - 12]e^{-t}$$

$$= 12 - 20e^{-t}V$$

例



已知：电感无初始储能

$t=0$ 时闭合k_1，$t=0.2s$时闭合k_2

求两次换路后的电感电流i(t)。

解

0 < t < 0.2s

$$i(0^+)=i(0^-)=0$$

$$\tau_1=L/R_{eq}=1/5=0.2\ \text{s}$$

$$i(\infty)=10/5=2\text{A}$$

$$i(t)=2-2e^{-5t}\ \text{A}$$

t > 0.2s

$$i(0.2^-)=2-2e^{-5\times0.2}=1.26$$

$$i(0.2^+)=1.26A$$

$$\tau_2=L/R_{eq}=1/2=0.5$$

$$i(\infty)=10/2=5A$$

$$i(t)=5-3.74e^{-2(t-0.2)}\ A$$

$$f(t)=f(\infty)+\left[f(t_0^{\ +})-f(\infty)\right]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\quad (t>t_0)$$

$$\begin{cases} i = 2 - 2e^{-5t} & (0 < t \leq 0.2s) \\ i = 5 - 3.74e^{-2(t-0.2)} & (t \geq 0.2s) \end{cases}$$