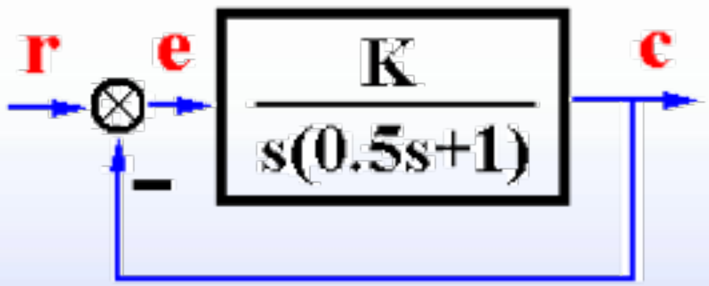
第4章　线性系统的根轨迹分析

系统的闭环极点也就是特征方程的根。当系统中的某一或某些参量变化时，特征方程的根在s平面上运动的轨迹被称为根轨迹。

采用根轨迹法可以在已知系统的开环零、极点条件下，绘制出系统特征方程的根（闭环传递函数的极点）在s平面上随参数变化而形成的轨迹。

比较简便、直观地分析系统特征方程式的根与系统参数之间的关系，研究自动控制系统的有效分析工具。

4.1 根轨迹的基本概念



$$K = K_g \frac{\prod_{i=1}^{m} z_i}{\prod_{j=1}^{n} p_j}$$

$$G(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)} = \frac{K^* = 2K}{s(s+2)}$$

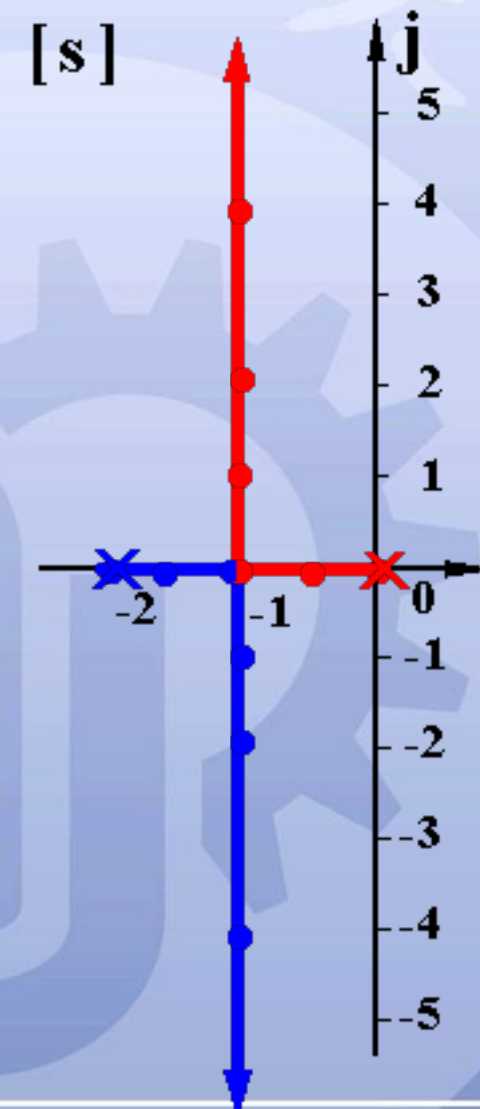
$\begin{cases} K: 开环增益 \\ K^*: 根轨迹增益 \end{cases}$

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K^*}{s^2 + 2s + K^*}$$

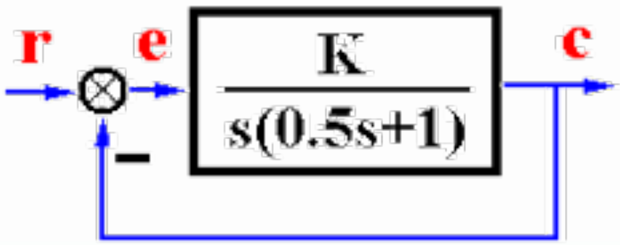
$$D(s) = s^2 + 2s + K^* = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - K^*}$$

K*=2K	λ_1	λ_2
0	0	-2
0.64	-0.4	-1.6
1	-1	-1
2	-1+j1	-1-j1
5	-1+j2	-1-j2
17	-1+j4	-1-j4
⋮	⋮	⋮
∞	-1+j∞	-1-j∞



根轨迹与系统性能



$$D(s)=s^2+2s+K^*=0$$

$$\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-K^*}$$

$K^*=2K=0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \infty$

动态性能

	K^*: 0 → 1	K^*: 1 → ∞
	$\xi>1$	$0<\xi<1$
	$\sigma\%=0$	$\beta\uparrow \Rightarrow \xi\downarrow \Rightarrow \sigma\%\uparrow$
	$t_s\downarrow$	$t_s=\dfrac{3.5}{\xi\omega_n}\sim$

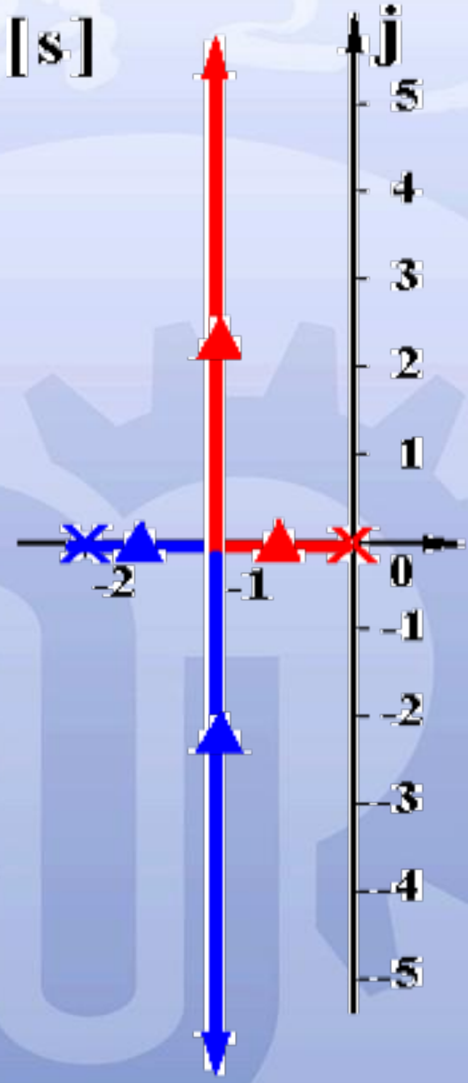
稳定性

$\mathrm{Re}[\lambda_{1,2}]<0$，系统绝对稳定

稳态误差

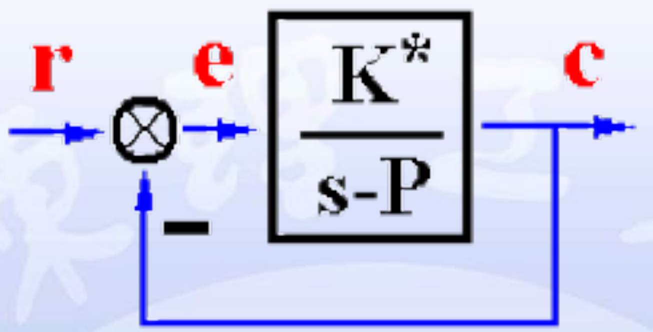
$[\ r(t)=At\ ]$

$K^*\uparrow \Rightarrow e_{ss}=\dfrac{A}{K}=\dfrac{2A}{K^*}\downarrow$



4.2 根轨迹方程的幅值条件和幅角条件

根轨迹方程及其含义



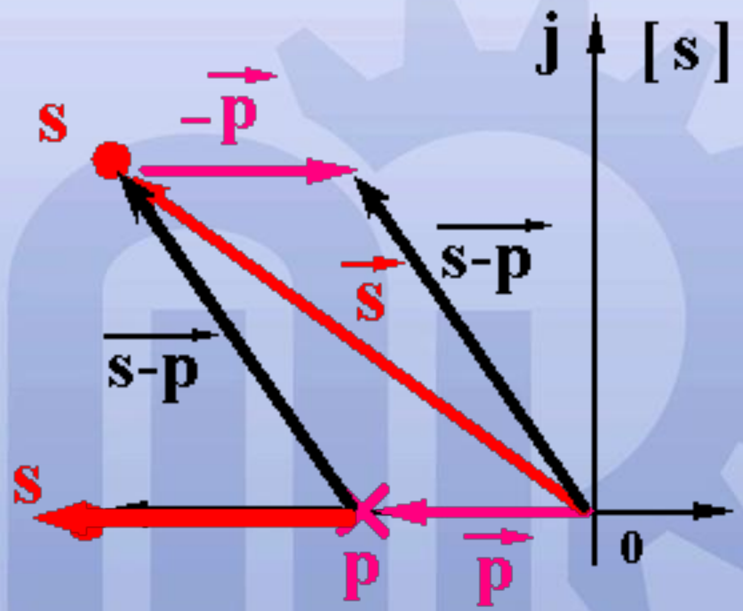
$$G(s)=\frac{K^*}{s-p}$$

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$1+G(s)=0$$

$$G(s)=-1$$

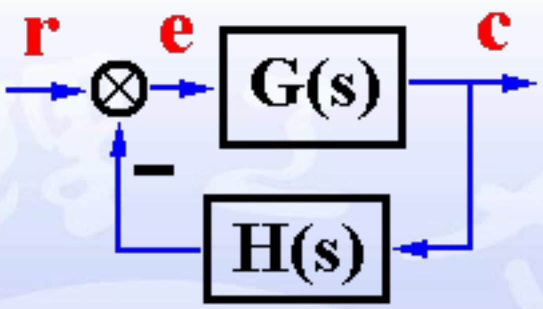
$$\begin{cases} \left|G(s)\right|=\dfrac{K^*}{\left|s-p\right|}=1 \\ \angle G(s)=-\angle(s-p)=\pm(2k+1)\pi \end{cases}$$



一般情况下的根轨迹方程

开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$



$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

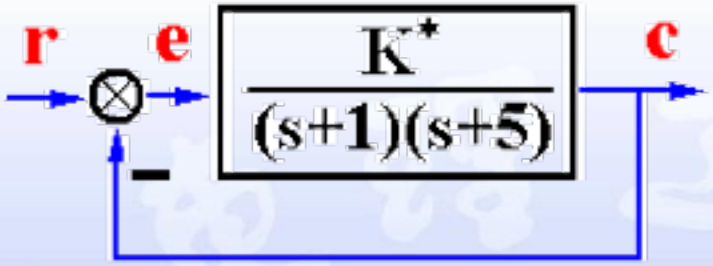
$$K=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}|z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|p_j|}$$

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=-1$$ - 根轨迹方程

$$|G(s)H(s)|=\frac{K^*|s-z_1|\cdots|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_n|}=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}|(s-z_i)|}{\prod_{j=1}^{n}|(s-p_j)|}=1$$ - 模值条件

$$\angle G(s)H(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)=(2k+1)\pi$$ - 相角条件

例：判定s_i是否为根轨迹上的点。



解. $G(s)=\dfrac{K^*}{(s+1)(s+5)}$

模值条件 $K^*=|s+1|\,|s+5|$

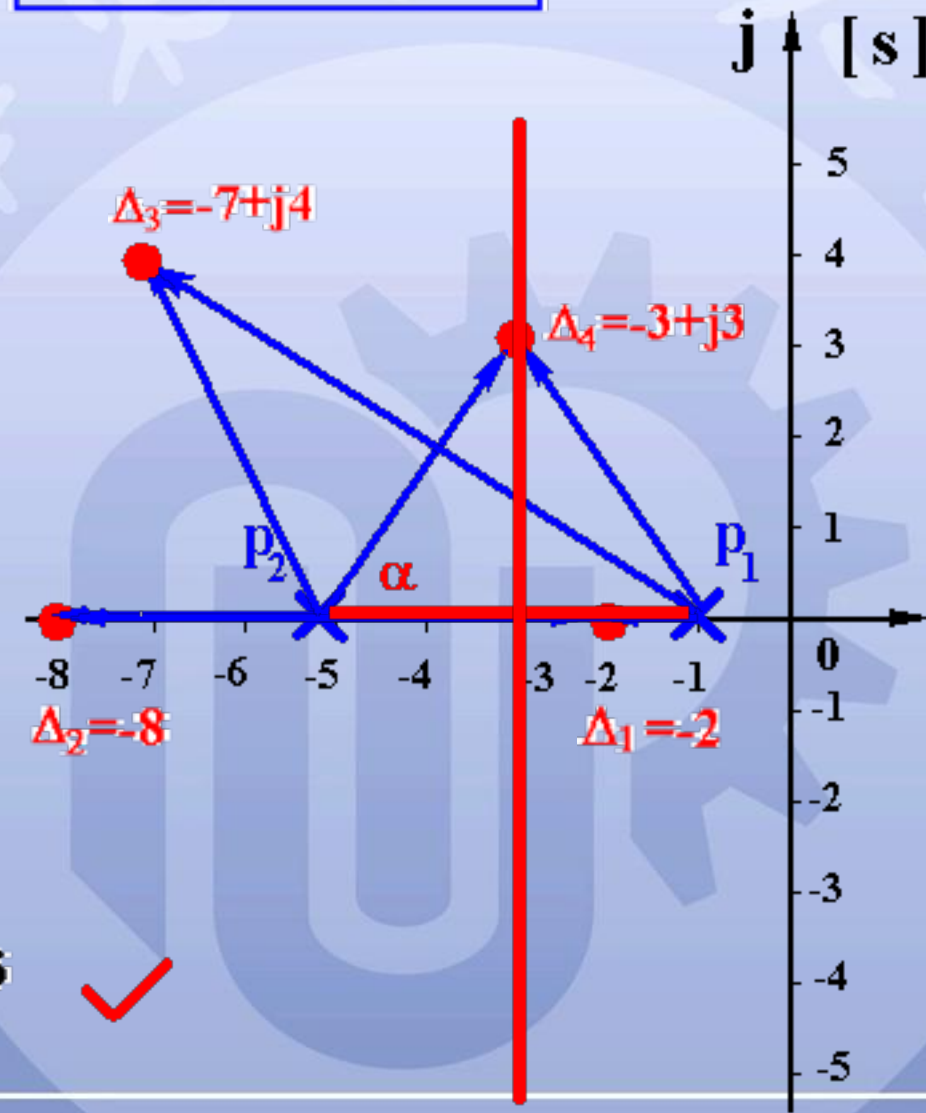
相角条件 $-\angle s-p_1-\angle s-p_2=(2k+1)\pi$

$\Delta_1=-2\ \begin{cases} K^*_{\Delta_1}=|-2+1|\,|-2+5|=3 \\ -\angle -2+1-\angle -2+5=-180-0=-180 \end{cases}$ ✓

$\Delta_2=-8\ \begin{cases} K^*_{\Delta_2}=|-8+1|\,|-8+5|=21 \\ -\angle -8+1-\angle -8+5=-180-180=-360 \end{cases}$ ✗

$\Delta_3=-7+j4\ \begin{cases} K^*_{\Delta_3}=|-7+j4+1|\,|-7+j4+5| \\ \quad =\sqrt{6^2+4^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2}=32.25 \\ -\angle -7+j4+1-\angle -7+j4+5\neq(2k+1)\pi \end{cases}$ ✗

$\Delta_4=-3+j3\ \begin{cases} K^*_{\Delta_4}=|-3+j3+1|\,|-3+j3+5|=\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}=13 \\ -\angle -3+j3+1-\angle -3+j3+5=-(180-\alpha)-\alpha=-180 \end{cases}$ ✓



关于幅值条件、幅角条件的说明

- 对s平面上任意的点，总存在一个 K^*，使其满足模值条件，但该点不一定是根轨迹上的点。幅值条件为必要条件
- s平面上满足相角条件的点（必定满足幅值条件）一定在根轨迹上。

  满足相角条件是s点位于根轨迹上的充分必要条件。

- 根轨迹上某点对应的 K^* 值，应由模值条件来确定。

4.3　绘制根轨迹的基本法则(1)

法则1　根轨迹的起点和终点

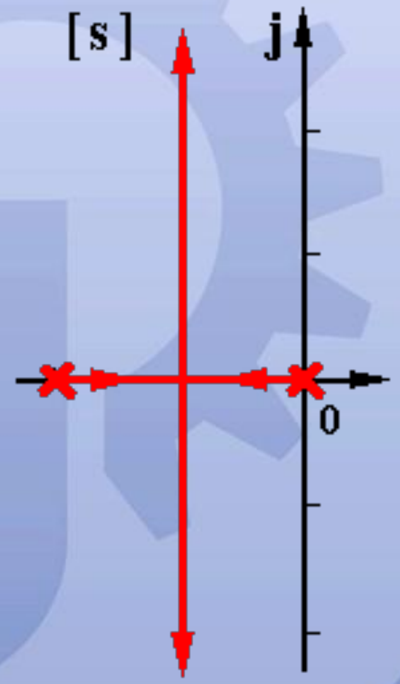
根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点；如果开环零点个数少于开环极点个数，则有 n-m 条根轨迹终止于无穷远处。

$$K^* = \frac{|s-p_1|\cdots|s-p_n|}{|s-z_1|\cdots|s-z_m|} = \frac{|s^{n-m}|\left|1-\frac{p_1}{s}\right|\cdots\left|1-\frac{p_n}{s}\right|}{\left|1-\frac{z_1}{s}\right|\cdots\left|1-\frac{z_m}{s}\right|} = 0$$

$$s = p_i \quad i = 1, 2, \cdots n$$

$$K^* = \frac{|s-p_1|\cdots|s-p_n|}{|s-z_1|\cdots|s-z_m|} = \frac{|s^{n-m}|\left|1-\frac{p_1}{s}\right|\cdots\left|1-\frac{p_n}{s}\right|}{\left|1-\frac{z_1}{s}\right|\cdots\left|1-\frac{z_m}{s}\right|} = \infty \quad \begin{cases} s = z_j \\ s = \infty \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \cdots m$$



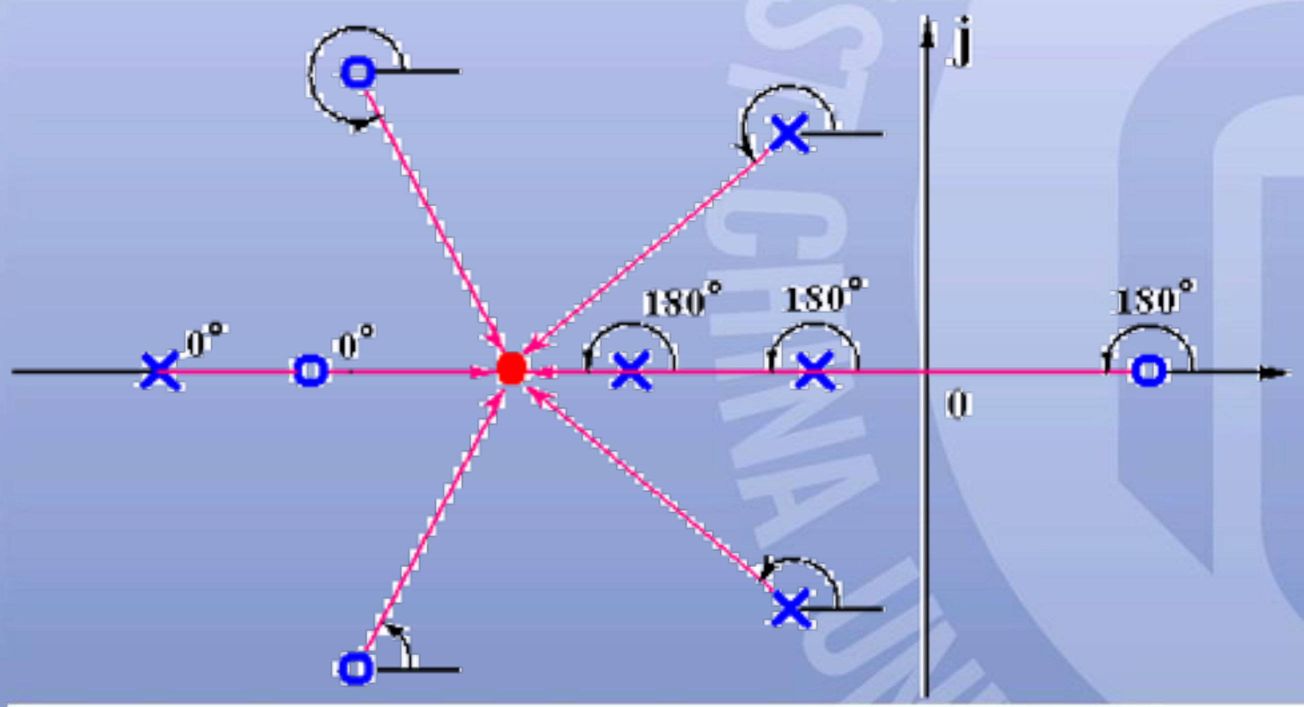
绘制根轨迹的基本法则(2、3)

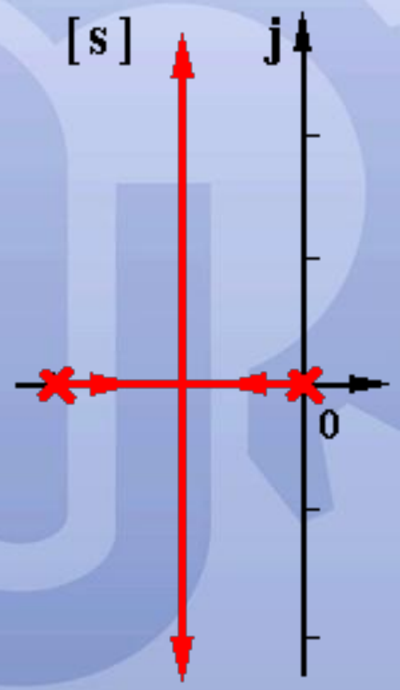
法则2 根轨迹的分支数，对称性和连续性

根轨迹的分支数=开环极点数；根轨迹连续且对称于实轴。

法则3 实轴上的根轨迹

实轴上的任意点，只要在它右方的开环零、极点数目的总和为奇数则该点必为根轨迹上的点。





例　某单位反馈系统的开环传递函数如下式，证明复平面的根轨迹为圆弧。

$$G(s)=\frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$$

$$G(s)=\frac{K^*(s+2)}{s(s+1)} \qquad \begin{cases} K=2K^* \\ v=1 \end{cases}$$

$$D(s)=s(s+1)+K^*(s+2)=s^2+(1+K^*)s+2K^*$$

$$s_{1,2}=\frac{-(1+K^*)\pm\sqrt{(1+K^*)^2-8K^*}}{2}$$

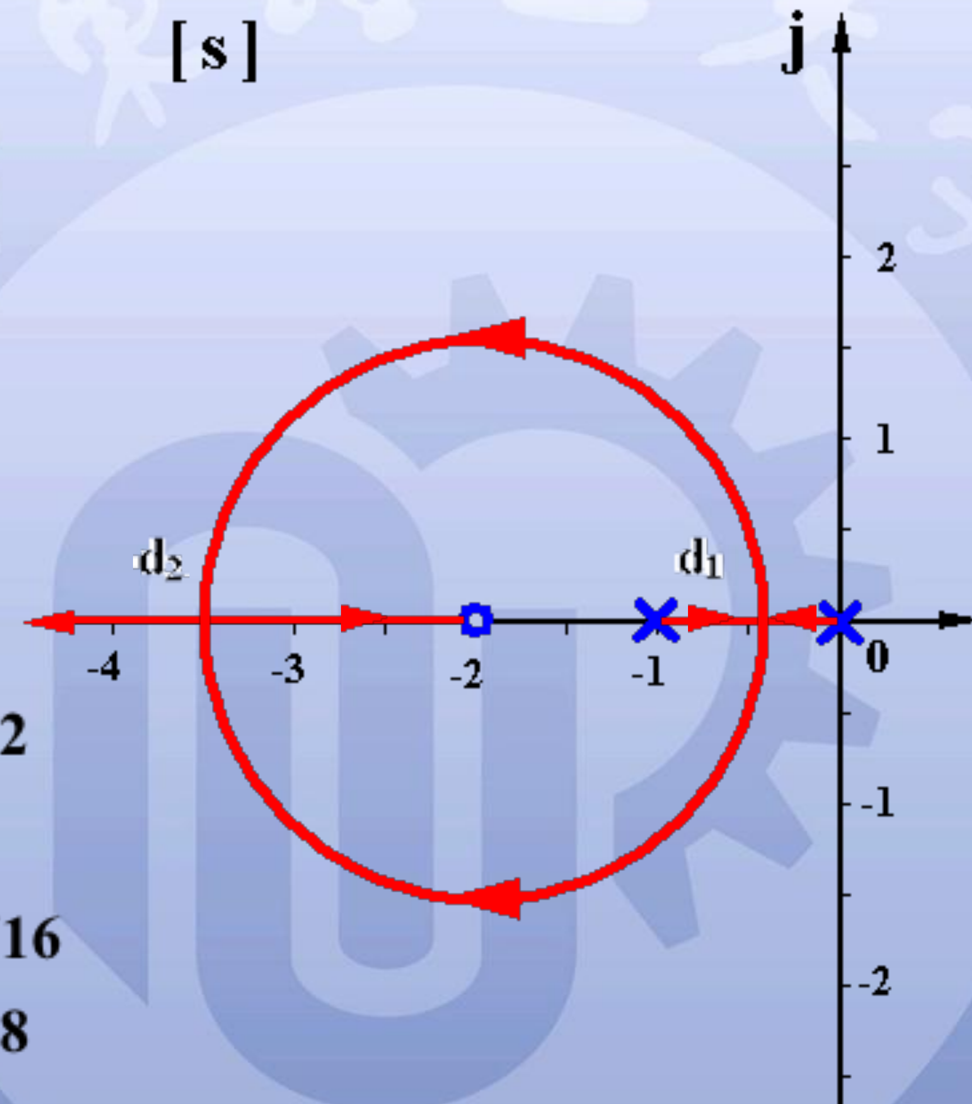
$$=\frac{-(1+K^*)}{2}\pm j\frac{\sqrt{8K^*-(1+K^*)^2}}{2}=\sigma\pm j\omega$$

$$\sigma=\frac{-(1+K^*)}{2} \qquad \Rightarrow K^*=-2\sigma-1$$

$$\omega^2=\frac{8K^*-(1+K^*)^2}{4}=\frac{-8(2\sigma+1)-4\sigma^2}{4}=-\sigma^2-4\sigma-2$$

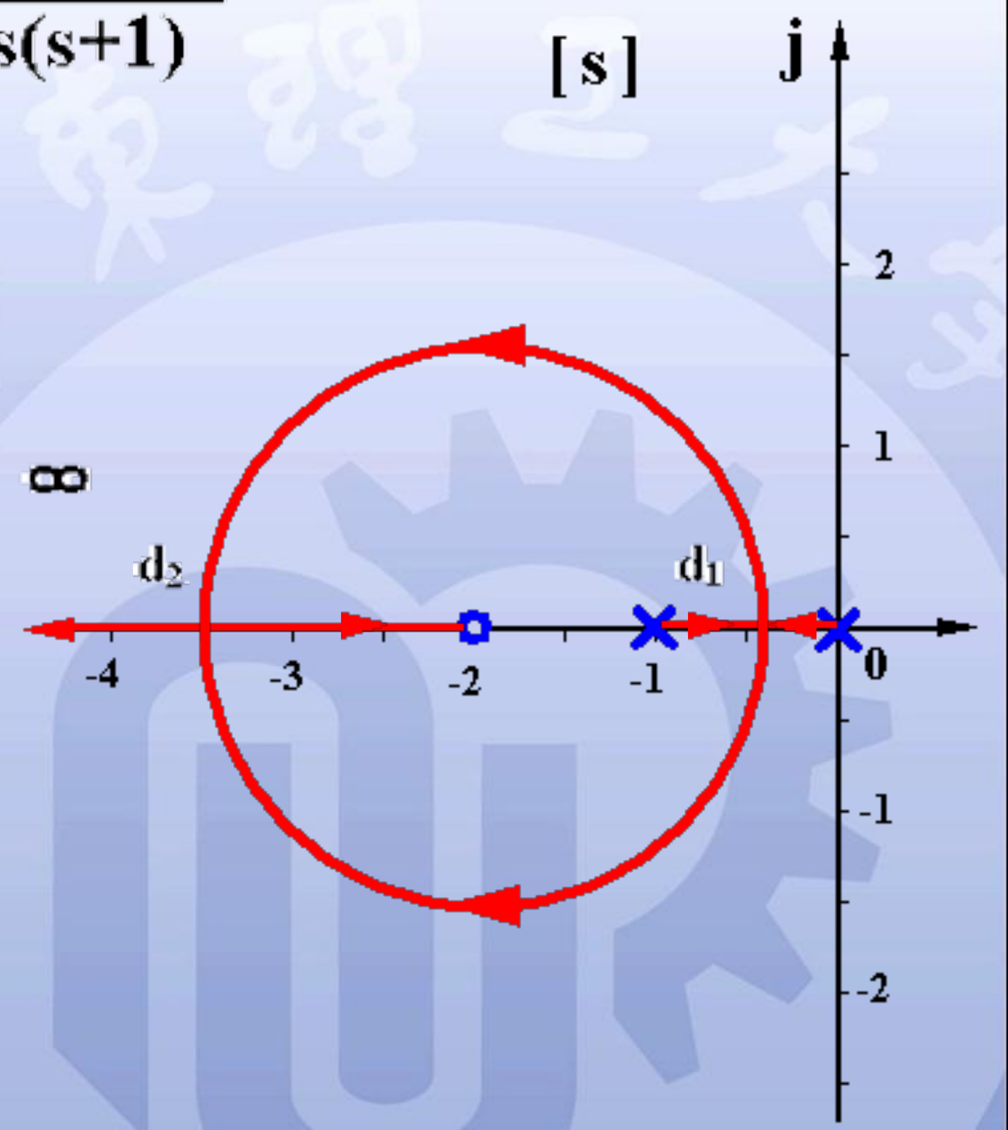
$$\sigma^2+4\sigma+4+\omega^2=2 \qquad (\sigma+2)^2+\omega^2=\sqrt{2}^2$$

$$\Delta=(1+K^*)^2-8K^*=K^{*2}-6K^*+1=0 \qquad \begin{cases} K^*_{d_1}=0.1716 \\ K^*_{d_2}=5.828 \end{cases}$$



例　某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$

$K^*=0 \rightarrow \infty$，证明复平面的根轨迹为圆弧。



系统性能分析

$K^*=0 \xRightarrow{h(t)\text{单调}} K^*_{d1} \xRightarrow{h(t)\text{振荡}} K^*_{d2} \xRightarrow{\xi>0} \infty$

$t_s\downarrow$　0.1716　$t_s\downarrow$　5.828　$t_s\downarrow$

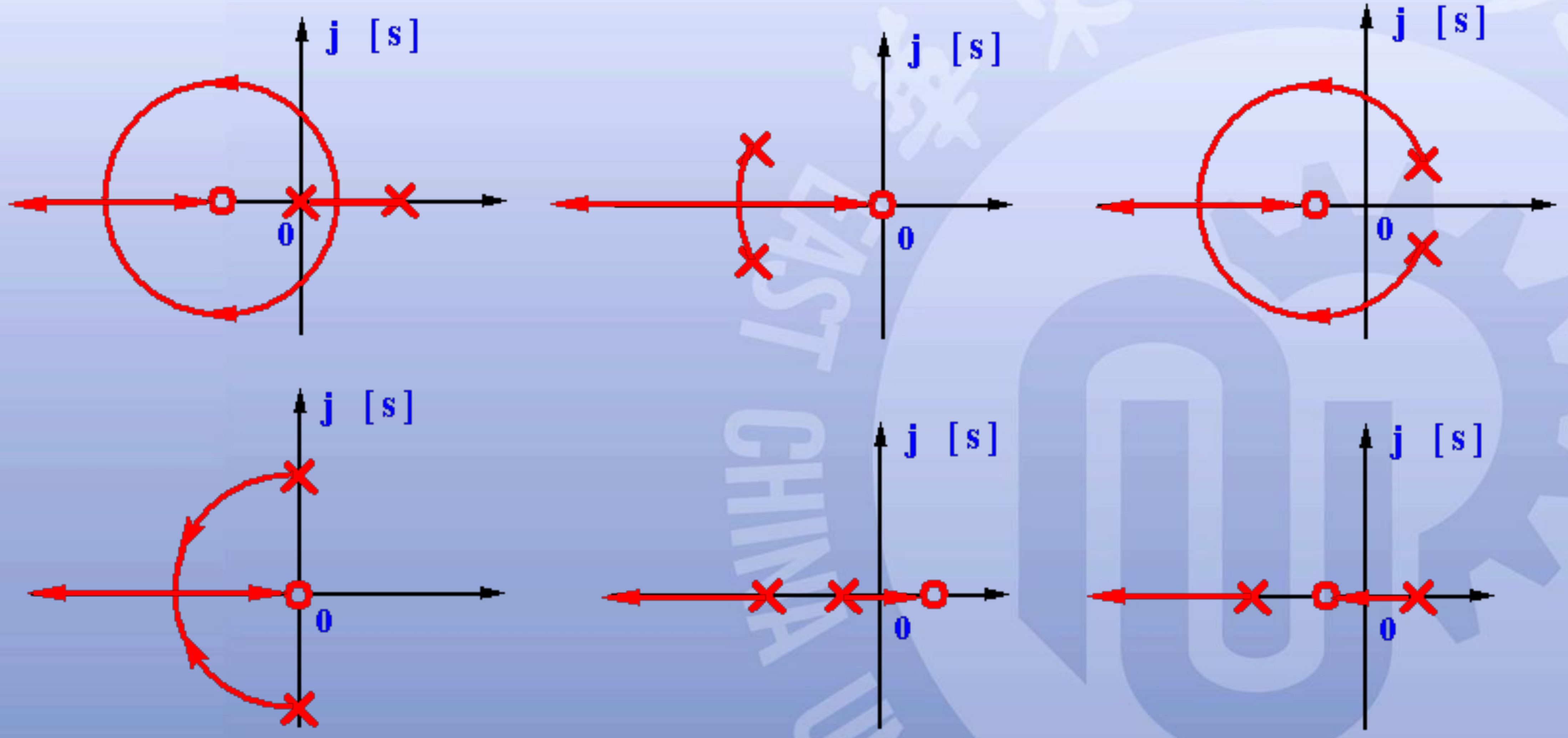
$\sigma\%=0$　　$\sigma\%\ \frown$

系统绝对稳定

$K^*\uparrow \Rightarrow e_{ss} \xlongequal{r(t)=t} \dfrac{A}{K}=\dfrac{1}{2K^*}\downarrow$

定理

若系统有2个开环极点，1个开环零点，且在复平面存在根轨迹，则复平面的根轨迹一定是以该零点为圆心的圆弧。



绘制根轨迹的基本法则(4)

法则4 根轨迹的渐近线

若n>m,则当$K_g \to \infty$时，有n-m条根轨迹趋于复平面的无穷远处。

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)} = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = -\frac{1}{K_g}$$

由韦达定理可以得知：

$$b_{m-1} = \sum_{i=1}^{m} z_i,\quad a_{n-1} = \sum_{j=1}^{n} p_j$$

$$K_g \to \infty, \quad \Rightarrow \quad s \to \infty$$

$$\frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \approx s^{m-n} + (b_{m-1} - a_{n-1})s^{m-n-1}$$

$$s^{m-n} + (b_{m-1} - a_{n-1})s^{m-n-1} = -\frac{1}{K_g}$$

$$s^{m-n}(1 + \frac{b_{m-1} - a_{n-1}}{s}) = -\frac{1}{K_g}$$

$$s(1 + \frac{b_{m-1} - a_{n-1}}{s})^{\frac{1}{m-n}} = \left(-\frac{1}{K_g}\right)^{\frac{1}{m-n}}$$

根据二项式定理

$$(1 + \frac{b_{m-1} - a_{n-1}}{s})^{\frac{1}{m-n}} = 1 + \frac{1}{m-n}\frac{b_{m-1} - a_{n-1}}{s} + \frac{1}{2!} \times \frac{1}{m-n}(\frac{1}{m-n} - 1)(\frac{b_{m-1} - a_{n-1}}{s})^2 + \cdots$$

略去高次项

$$\left(1+\frac{b_{m-1}-a_{n-1}}{s}\right)^{\frac{1}{m-n}}=1+\frac{1}{m-n}\frac{b_{m-1}-a_{n-1}}{s}$$

$$s\left(1+\frac{b_{m-1}-a_{n-1}}{s}\right)^{\frac{1}{m-n}}=\left(-\frac{1}{K_g}\right)^{\frac{1}{m-n}}$$

$$\Rightarrow \qquad s\left(1+\frac{1}{m-n}\frac{b_{m-1}-a_{n-1}}{s}\right)=\left(-\frac{1}{K_g}\right)^{\frac{1}{m-n}}$$

令: $\dfrac{b_{m-1}-a_{n-1}}{m-n}=\dfrac{a_{n-1}-b_{m-1}}{n-m}=\sigma$

$$\Rightarrow \qquad s\left(1+\frac{\sigma}{s}\right)=\left(-\frac{1}{K_g}\right)^{\frac{1}{m-n}}$$

$$s=-\sigma+\left(-K_g\right)^{\frac{1}{n-m}}$$

$$-1 = e^{j(2k+1)\pi}$$

$$s = -\sigma + K_g^{\frac{1}{n-m}} \cdot e^{j\frac{(2k+1)\pi}{n-m}}$$ 渐近线方程

渐近线与实轴的交点：

$$-\sigma = -\frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n-m}$$

$$b_{m-1} = \sum_{i=1}^{m} z_i, \quad a_{n-1} = \sum_{j=1}^{n} p_j$$

$$\sigma_a = -\sigma = -\frac{\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

渐近线与实轴的夹角：

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \qquad k = 0, 1, 2, 3, \cdots (n-m-1)$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$s\left(1 + \frac{1}{m-n}\frac{b_{m-1} - a_{n-1}}{s}\right) = \left(-\frac{1}{K_g}\right)^{\frac{1}{m-n}}$$

$$\sigma + \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n-m} + j\omega = \left(-K_g\right)^{n-m}$$

$$\sigma + \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n-m} + j\omega = \sqrt[n-m]{K_g}\left[\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n-m}\right) + j\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n-m}\right)\right]$$

$$\sigma + \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n-m} = \sqrt[n-m]{K_g}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n-m}\right)$$

$$\omega = \sqrt[n-m]{K_g}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n-m}\right)$$

$$\sqrt[n-m]{K_g} = \frac{\sigma + \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n-m}}{\cos\frac{(2k+1)\pi}{n-m}} = \frac{\omega}{\sin\frac{(2k+1)\pi}{n-m}}$$

$$\sqrt[n-m]{K_g} = \frac{\sigma + \dfrac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n-m}}{\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}} = \frac{\omega}{\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}}$$

$$\sigma_a = -\frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n-m} \qquad \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \quad k = 0,1,\cdots,(n-m-1)$$

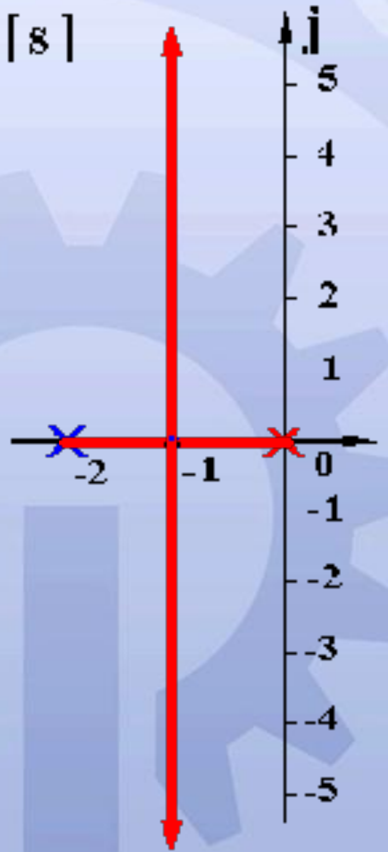
$$\sqrt[n-m]{K_g} = \frac{\sigma - \sigma_a}{\cos\varphi_a} = \frac{\omega}{\sin\varphi_a}$$

$$\omega = (\sigma - \sigma_a)\frac{\sin\varphi_a}{\cos\varphi_a} = (\sigma - \sigma_a)\tan\varphi_a$$

$$\begin{cases} \sigma_a = -\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_i}{n-m} \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m} \end{cases}$$

n > m时，n-m条根轨迹分支趋于无穷远处的规律。

例 系统开环传递函数为 $G(s) = \dfrac{K^*}{s(s+2)}$ ，试考察根轨迹渐近线的特点。



解. ① 实轴上的根轨迹：[-2，0]

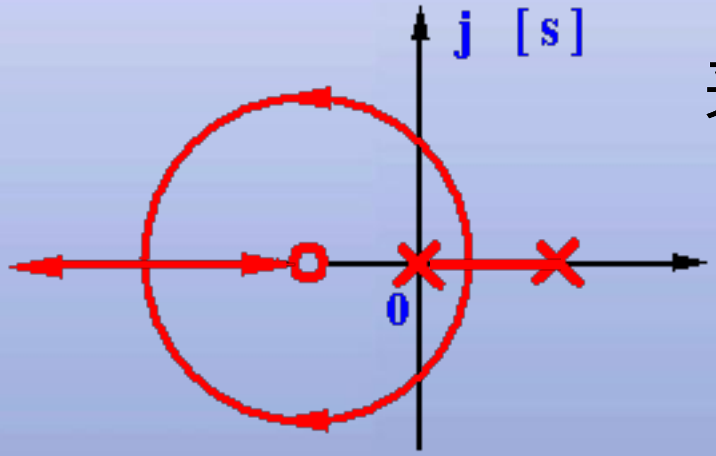
② 渐近线：
$$\begin{cases} \sigma_a = -\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_i}{n-m} = \dfrac{-2+0}{2-0} = -1 \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m} = \pm 90^\circ \end{cases}$$

绘制根轨迹的基本法则(5)

法则5 实轴上根轨迹的分离点和汇合点

若干支根轨迹从实轴离开或进入实轴的点，叫做分离点或汇合点。

在分离点或汇合点处，根轨迹的切线和实轴的夹角成为分离角



$$\theta_d = \frac{180^\circ}{k}$$

确定分离点或汇合点的位置的方法:

(1) 重根法　　　　(2) 利用幅角条件求解法

(1) 重根法求解分离点(汇合点)

$$G_0(s) = K_g \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)} = K_g \frac{N(s)}{D(s)}$$

系统的特征方程为：

$$1 + G_0(s) = 1 + K_g \frac{N(s)}{D(s)} = 0$$

$$D(s) + K_g N(s) = 0$$

设当 $K_g = K_{gd}$ 系统的特征方程在实轴上有重根 $-\delta_d$

$$D(-\delta_d) + K_{gd} N(-\delta_d) = 0$$

$$D'(-\delta_d) + K_{gd} N'(-\delta_d) = 0$$

$$N(-\delta_d)D'(-\delta_d) - N'(-\delta_d)D(-\delta_d) = 0$$

重根法求解分离点(汇合点)另一种表现形式

$$G_0(s)=K_g\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

$$D(s)=\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)+K_g\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)=0$$

$$\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)=-K_g\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)$$

$$\dot{D}(s)=\frac{d}{ds}\left[\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)+K_g\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)\right]=0$$

$$\frac{d}{ds}\left[\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)\right]=-\frac{d}{ds}\left[K_g\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)\right]$$

$$\frac{\dfrac{d}{ds}\left[\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)\right]}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=\frac{\dfrac{d}{ds}\left[\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)\right]}{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}$$

$$\frac{d}{ds}\ln\left[\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)\right]=\frac{d}{ds}\ln\left[\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)\right]$$

$$\ln\left[\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)\right]=\sum_{j=1}^{n}\ln(s-p_i) \qquad \ln\left[\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)\right]=\sum_{i=1}^{m}\ln(s-z_i)$$

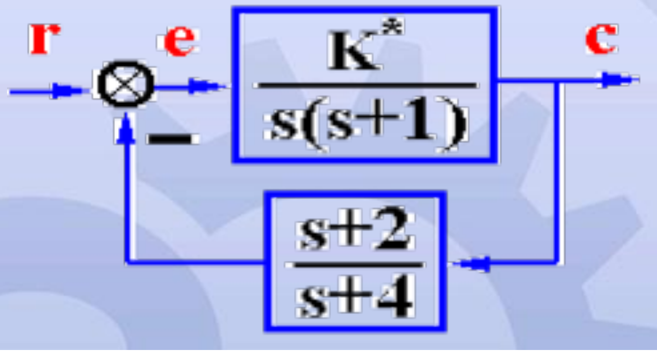
$$\sum_{j=1}^{n}\frac{d\ln(s-p_j)}{ds}=\sum_{i=1}^{m}\frac{d\ln(s-z_i)}{ds}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(s-p_j)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(s-z_i)}$$

分离点 d: $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$ （对应重根）

说明：$D(s)=s(s+1)(s+4)+K^*(s+2)=(s+\lambda_3)(s-d)^2=0$

$$\frac{dD(s)}{ds}=\frac{d}{ds}\left[s(s+1)(s+4)\right]+K^*\frac{d}{ds}(s+2)=(s-d)^2+2(s-d)(s-\lambda_3)\overset{s=d}{=}0$$

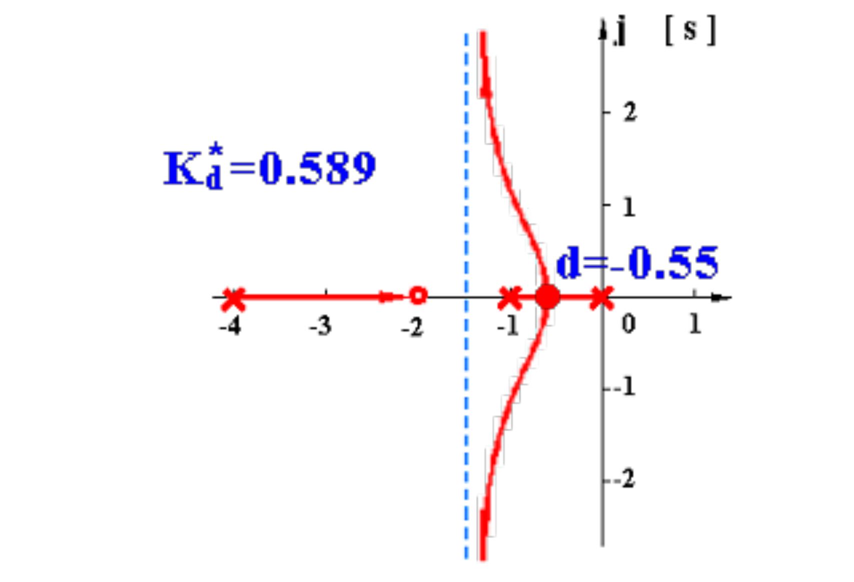


$$\frac{\frac{d}{ds}\left[s(s+1)(s+4)\right]}{s(s+1)(s+4)}=\frac{-K^*\frac{d}{ds}(s+2)}{-K^*(s+2)}=\frac{\frac{d}{ds}(s+2)}{s+2}$$

$$\frac{d}{ds}\ln\left[s(s+1)(s+4)\right]=\frac{d}{ds}\ln(s+2)$$

$$\frac{d}{ds}\left[\ln s+\ln(s+1)+\ln(s+4)\right]\overset{s=d}{=}\frac{d}{ds}\ln(s+2)$$

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+1}+\frac{1}{d+4}=\frac{1}{d+2}$$ （无零点时右端为0）



例 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$ 绘制根轨迹。

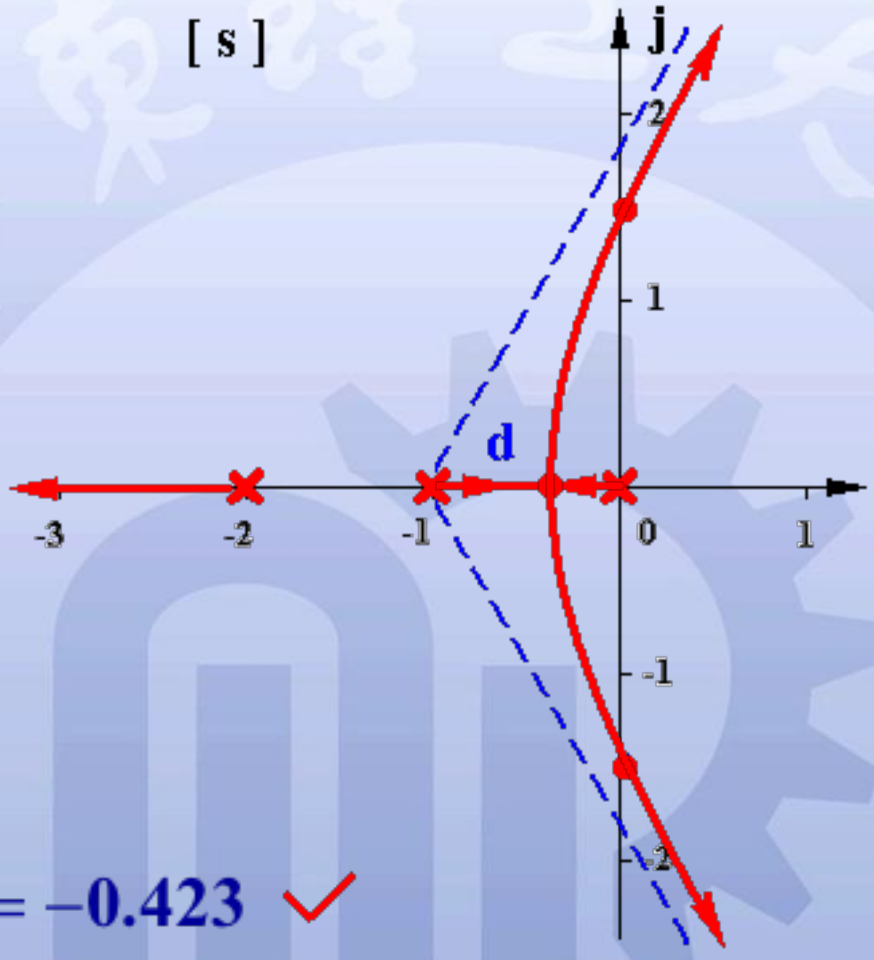
解. $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$ $\begin{cases} K=K^*/2 \\ v=1 \end{cases}$

① 实轴上的根轨迹：[-∞,-2], [-1,0]

② 渐近线：$\begin{cases} \sigma_a=\dfrac{0-1-2}{3}=-1 \\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3}=\pm 60°,180° \end{cases}$

③ 分离点：$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+1}+\dfrac{1}{d+2}=0$

整理得：$3d^2+6d+2=0$ 解根：$\begin{cases} d_1=-0.423 \ ✓ \\ d_2=-1.577 \ ✗ \end{cases}$



$K_d^*=|d||d+1||d+2|\Big|_{d=-0.423}=0.385$

④ 与虚轴交点：?

绘制根轨迹的基本法则(6)

法则6　与虚轴交点

$$\begin{cases} 1）\text{系统临界稳定点} \\ 2）s = jw \ \text{是根的点} \end{cases}$$

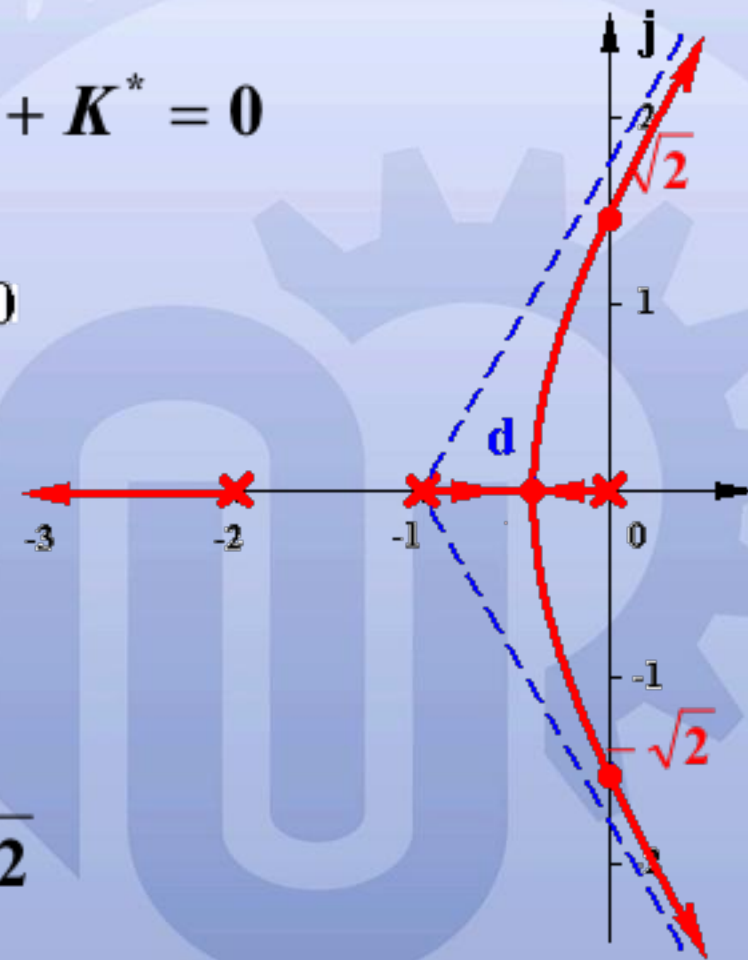
稳定范围：0<K<3

[接上例]　$G(s) = \dfrac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$

$$D(s) = s(s+1)(s+2) + K^* = s^3 + 3s^2 + 2s + K^* = 0$$

解法I：Routh：

s^3	1	2	
s^2	3	K^*	$\Rightarrow$ 令 $K^*=6$ $\begin{cases} 3s^2+6=0 \\ s=\pm j\sqrt{2} \end{cases}$
s^1	$\dfrac{6-K^*}{3}$		$\Rightarrow K^*<6$
s^0	K^*		$\Rightarrow K^*>0$



解法II：$D(j\omega) = -j\omega^3 - 3\omega^2 + j2\omega + K^* = 0$

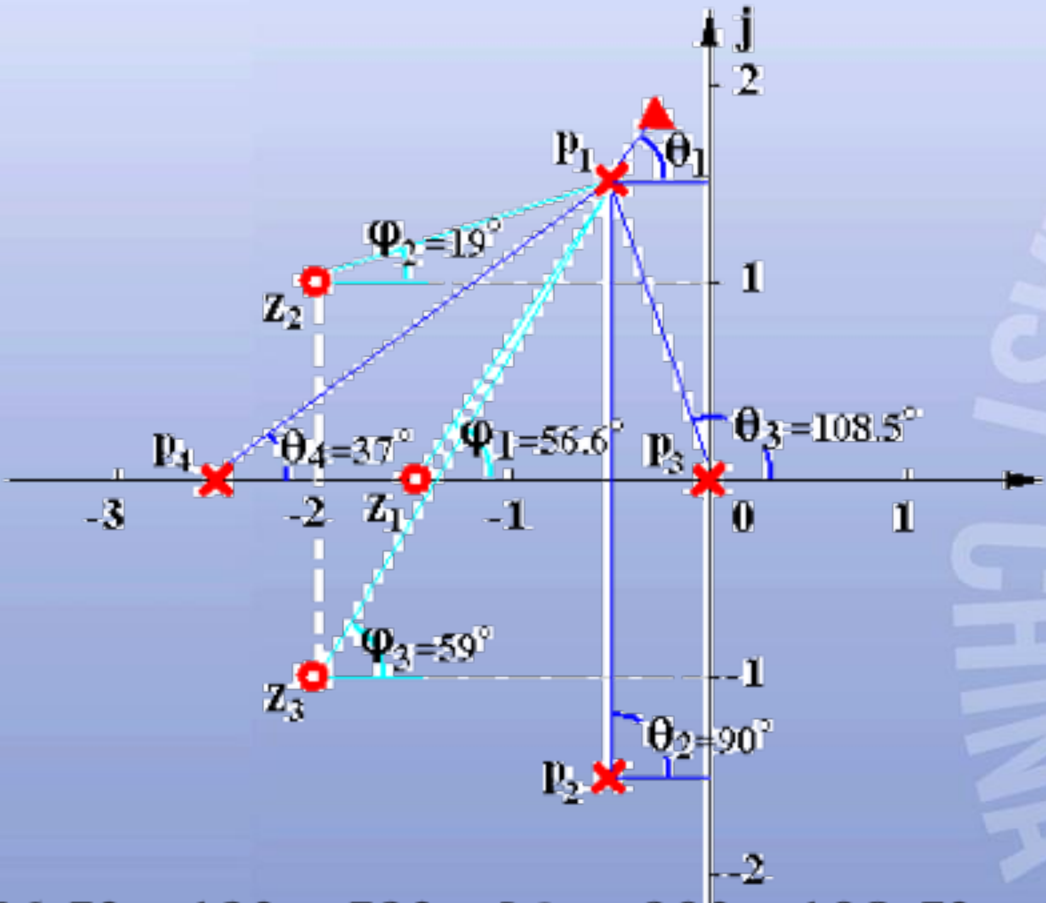
$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left[D(j\omega)\right] = -3\omega^2 + K^* = 0 \\ \mathrm{Im}\left[D(j\omega)\right] = -\omega^3 + 2\omega = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ K^* = 6 \end{cases}$$

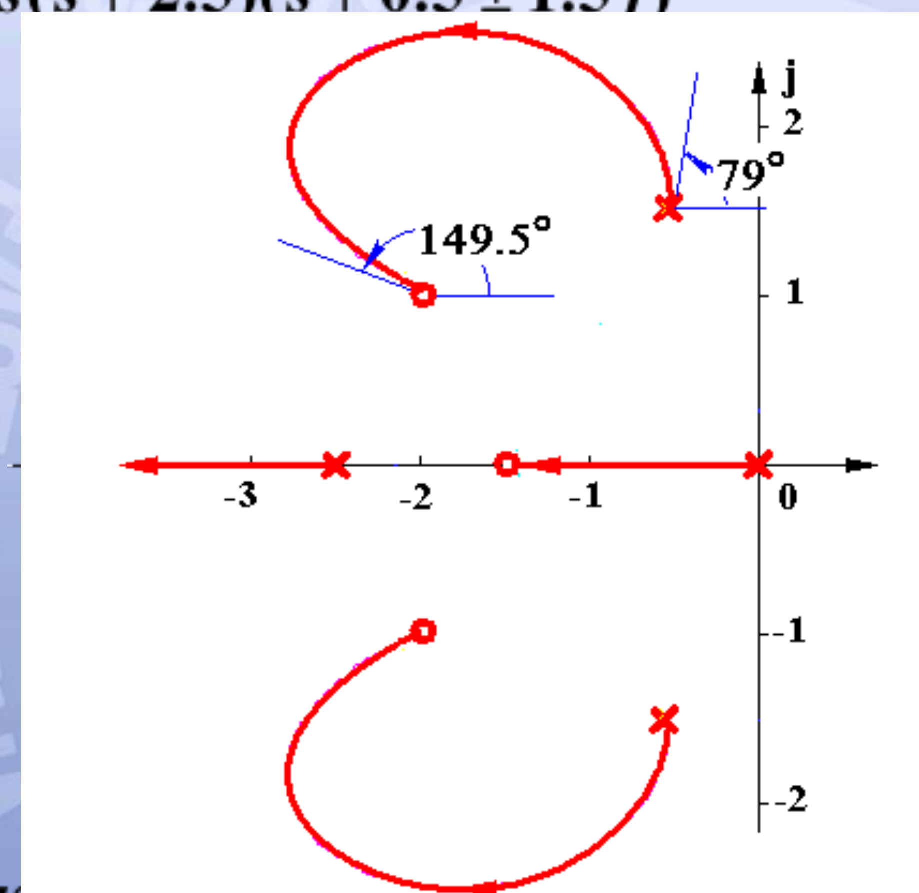
绘制根轨迹的基本法则(7)

法则7　出射角/入射角(起始角/终止角)

$$\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)-\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)=(2k+1)\pi$$

例 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*(s+1.5)(s+2\pm j)}{s(s+2.5)(s+0.5\pm 1.5j)}$，绘制根轨迹。

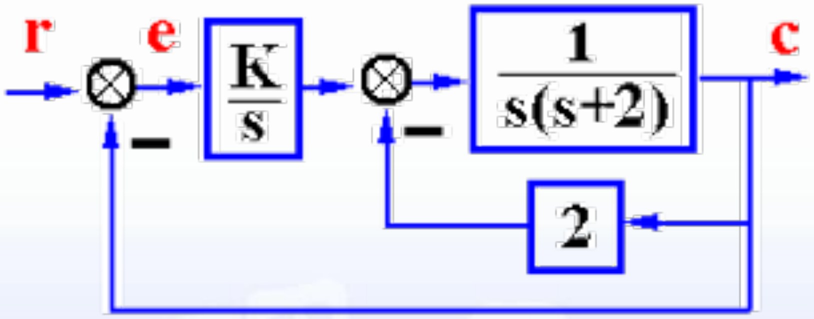




$$56.5°+19°+59°-[\theta_1+90°+108.5°+37°]=-180° \qquad \theta_1=79°$$

$$[117°+\varphi_2+90°]-[199°+121°+153°+63.5]=-180° \qquad \varphi_2=149.5°$$

例： 已知系统结构图，绘制根轨迹。



解.

$$G(s)=\frac{K}{s}\frac{\frac{1}{s(s+2)}}{1+\frac{2}{s(s+2)}}=\frac{K}{s[s^2+2s+2]}\quad \begin{cases}K_k=K/2\\ v=1\end{cases}$$

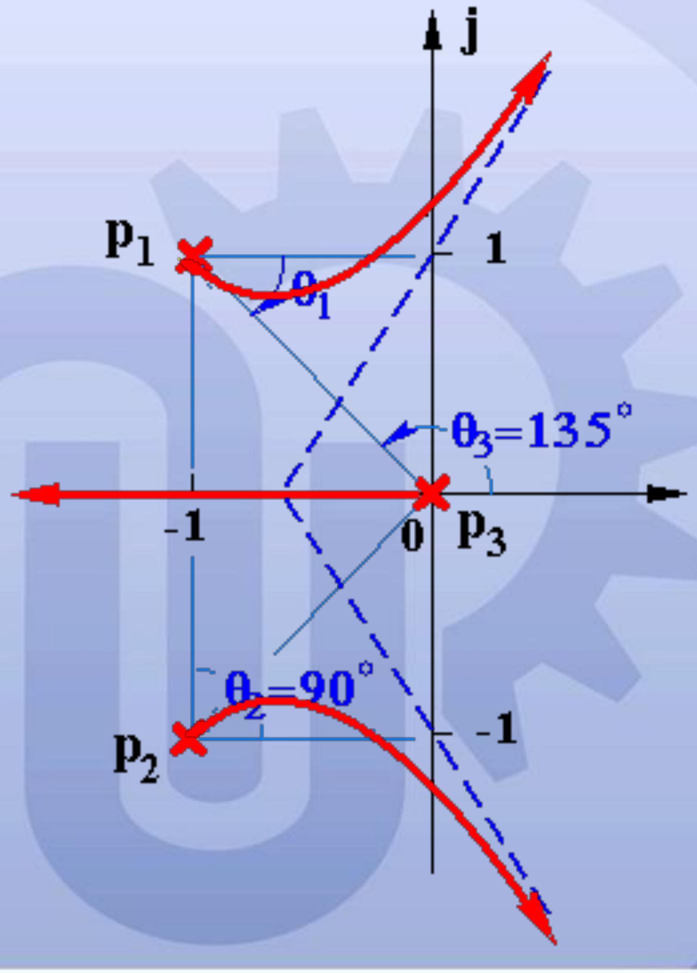
① 实轴上的根轨迹：[-∞,0]

② 渐近线：$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{0-1-1}{3}=-\dfrac{2}{3}\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3}=\pm60^\circ,180^\circ\end{cases}$

③ 出射角： $0-[\theta_1+90^\circ+135^\circ]=-180^\circ \Rightarrow \theta_1=-45^\circ$

④ 与虚轴交点： $D(s)=s^3+2s^2+2s+K=0$

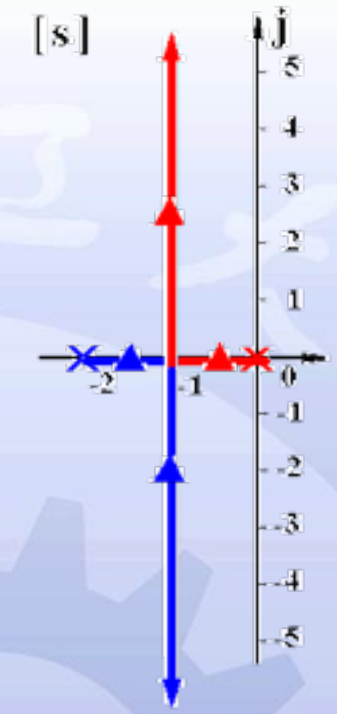
$$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=-2\omega^2+K=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-\omega^3+2\omega=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\omega=\pm\sqrt{2}\\ K=4\end{cases}$$



绘制根轨迹的基本法则(8)

法则8 根之和 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = C \quad (n-m\ge 2)$

n-m ≥ 2时，闭环根之和保持一个常值。



证明

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}=\frac{K^*(s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}$$

由代数定理：$-a_{n-1}=\sum_{i=1}^{n}p_i \; \boxed{=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=-a_{n-1}=C}$

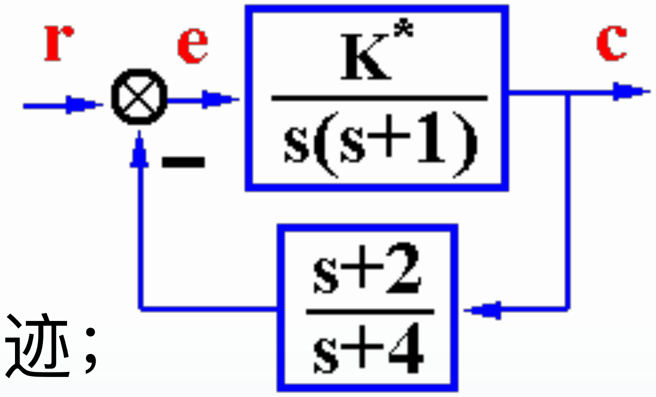
$$\begin{aligned}D(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}\quad &+a_{n-2}s^{n-2}\quad + \quad a_{n-3}s^{n-3}\quad +\cdots+\ a_0\\ &+K^*s^{n-2}\quad +K^*b_{n-3}s^{n-3}\quad +\cdots+K^*b_0\end{aligned}$$

$$=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+(a_{n-2}+K^*)s^{n-2}+(a_{n-3}+K^*b_{n-3})s^{n-3}+\cdots+(a_0+K^*b_0)$$

$$D(s)=(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)=0$$

n-m ≥ 2时，一部分根左移，另一部分根必右移，且移动总量为零。

例 系统结构图如图所示。



（1）绘制当$K^*= 0\to\infty$时系统的根轨迹；

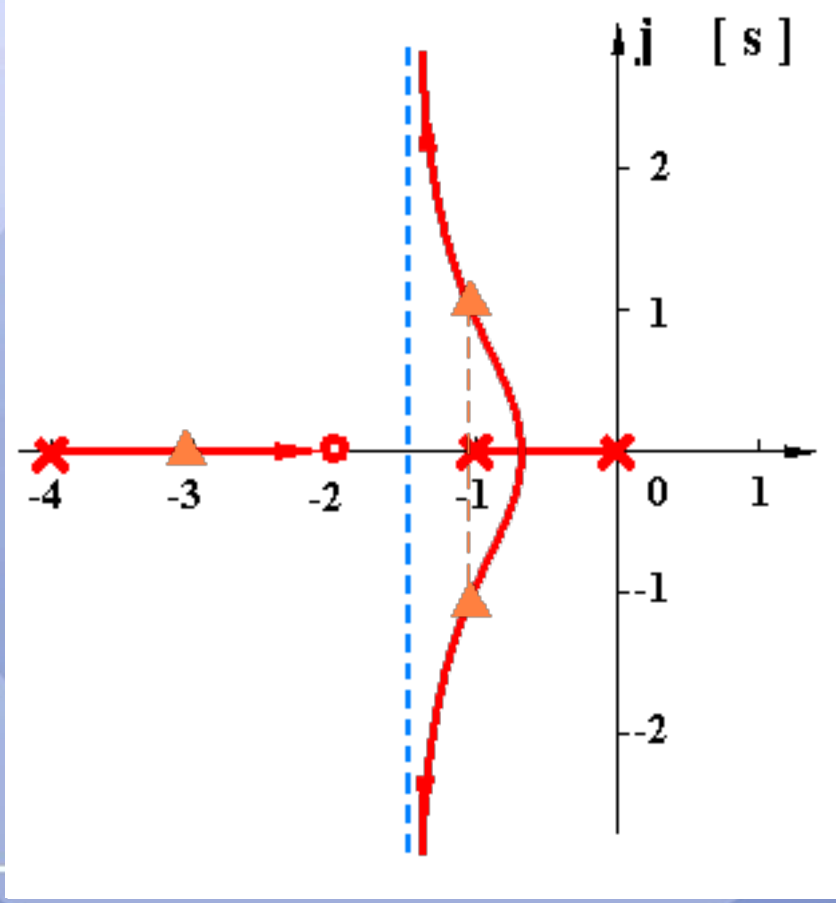
（2）当$\mathrm{Re}[\lambda_1] = -1$ 时，$\lambda_3=?$

解. (1) $$G(s)=\frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+4)} \qquad \begin{cases} K = K^*/2 \\ v = 1 \end{cases}$$

① 实轴上的根轨迹：[-4,-2], [-1,0]

② 渐近线：$$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{0-1-4+2}{3-1} = -\dfrac{3}{2} \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{3-1} = \pm 90^\circ \end{cases}$$

用根之和法则分析绘制根轨迹：



(2) $$a_{n-1} = 0-1-4 = -5 = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 2(-1)+\lambda_3$$

$$\lambda_3 = -5+2 = -3$$

例 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+20)(s^2+4s+20)}$$

，绘制根轨迹。

解

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+20)(s+2\pm j4)}\qquad \begin{cases}K=K^*/400\\ v=1\end{cases}$$

① 实轴上的根轨迹： [-20, 0]

② 渐近线： $\sigma_a=\frac{0-20-2-2}{4}=-6\qquad \varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{4}=\pm45^\circ,\pm135^\circ$

③ 出射角： $-[\theta_1+90^\circ+116.5^\circ+12.5^\circ]=-180^\circ\ \Rightarrow\ \theta_1=-39^\circ$

③ 分离点： $\frac{1}{d}+\frac{1}{d+20}+\frac{1}{d+2+j4}+\frac{1}{d+2-j4}=0$

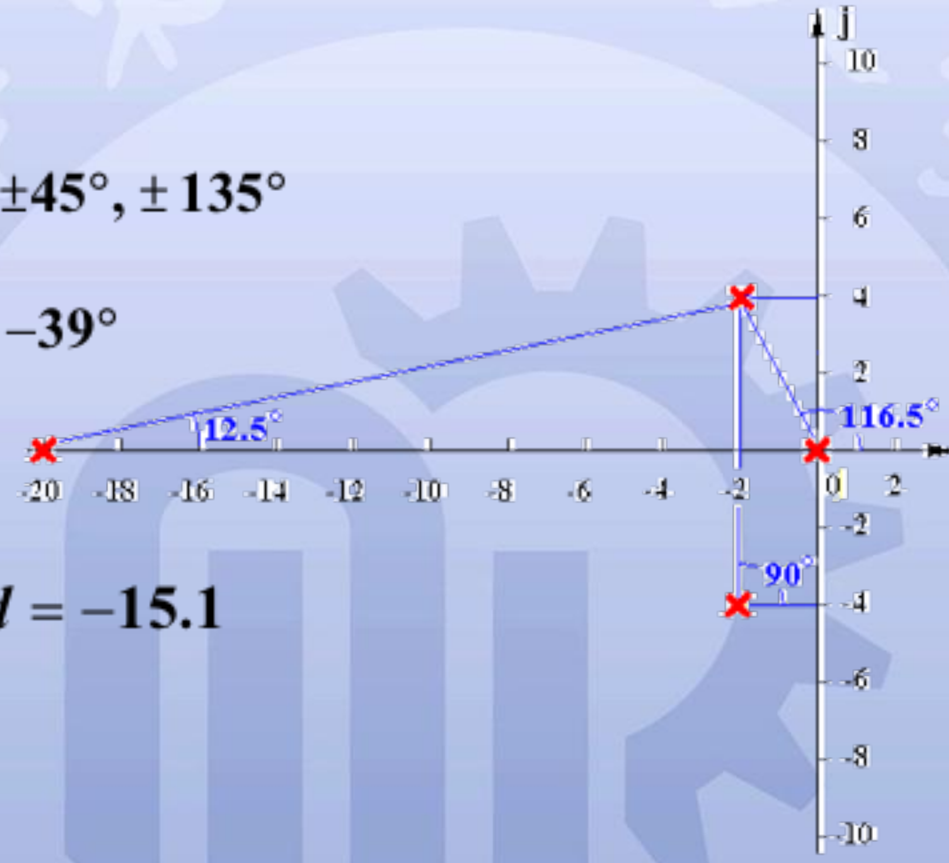
$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+20}+\frac{2(d+2)}{(d+2)^2+4^2}=0$$

试根得： $d=-15.1$

$$K_d^*=|d||d+20||(d+2)^2+4^2|\overset{d=-15.1}{=}13881$$

④ 虚轴交点： $D(s)=s^4+24s^3+100s^2+400s+K^*=0$

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=\omega^4-100\omega^2+K^*=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-24\omega^3+400\omega=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\omega=\sqrt{400/24}=4.1\\ K^*=1389\end{cases}$$



例(续)

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+20)(s+2\pm j4)}$$

$$\begin{cases} K=K^*/400 \\ v=1 \end{cases}$$

① 实轴上的根轨迹：[-20, 0]

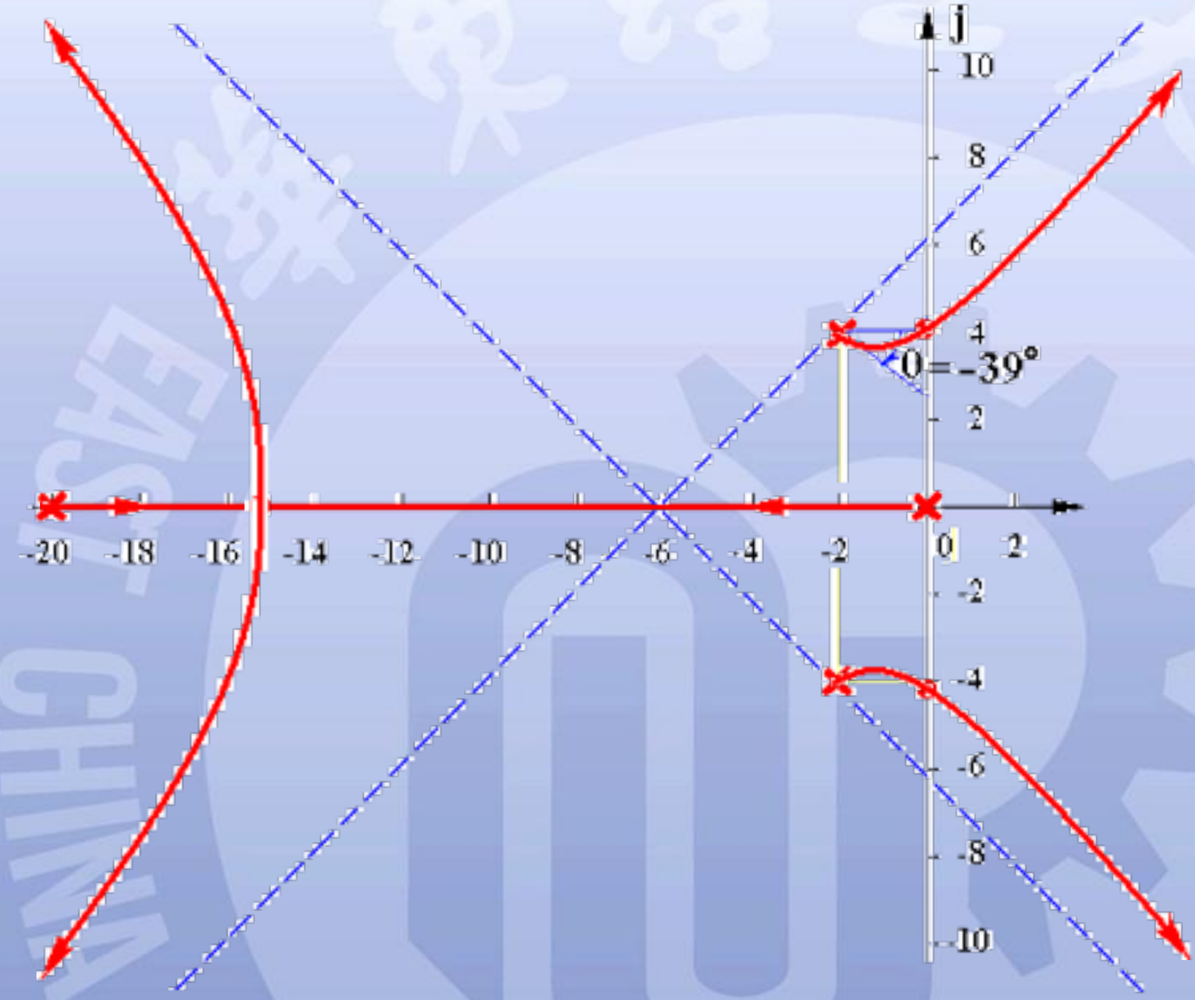
② 渐近线：$\begin{cases} \sigma_a=-6 \\ \varphi_a=\pm45^\circ,\pm135^\circ \end{cases}$

③ 出射角：$\theta=-39^\circ$

③ 分离点：$d=-15.1$

$K_d^*=13881$

④ 虚轴交点：$\begin{cases} \omega=4.1 \\ K^*=1389 \end{cases}$



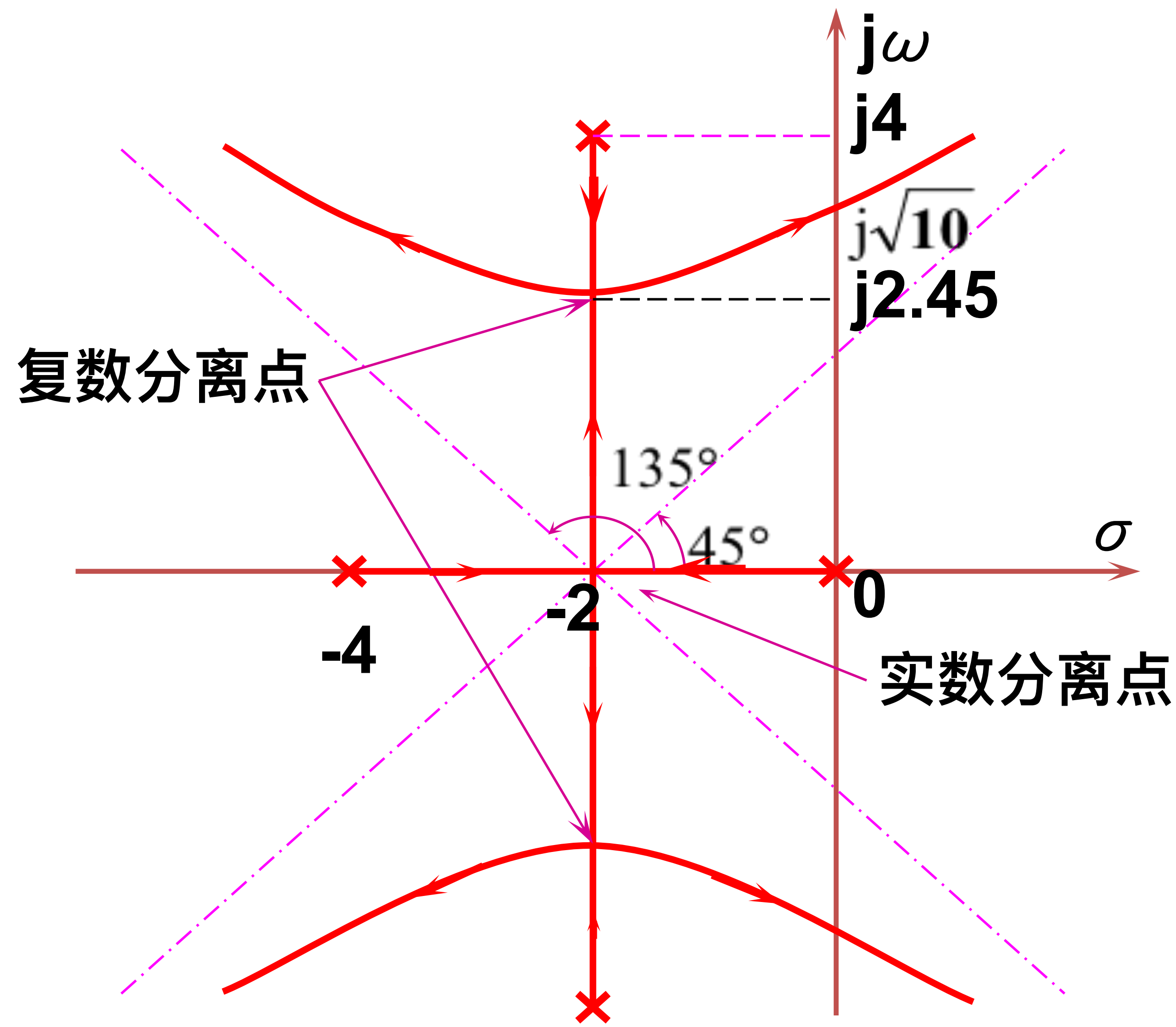
稳定的开环增益范围：0 < K < 3.4725

若开环零、极点个数均为偶数，且左右对称分布于一条平行于虚轴的直线，则根轨迹一定关于该直线左右对称。

- **例:**

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$

$$= \frac{K^*}{s(s+4)(s+2+j4)(s+2-j4)}$$



例 已知 $G(s)=\dfrac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$，(1)绘根轨迹;

(2) 求稳定的K范围。

解 $G(s)=\dfrac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s+2\pm j2\sqrt{3})}$ $\begin{cases} K=K^*/16 \\ v=1 \end{cases}$

① 实轴上的根轨迹：(-∞,-1], [0, 1]

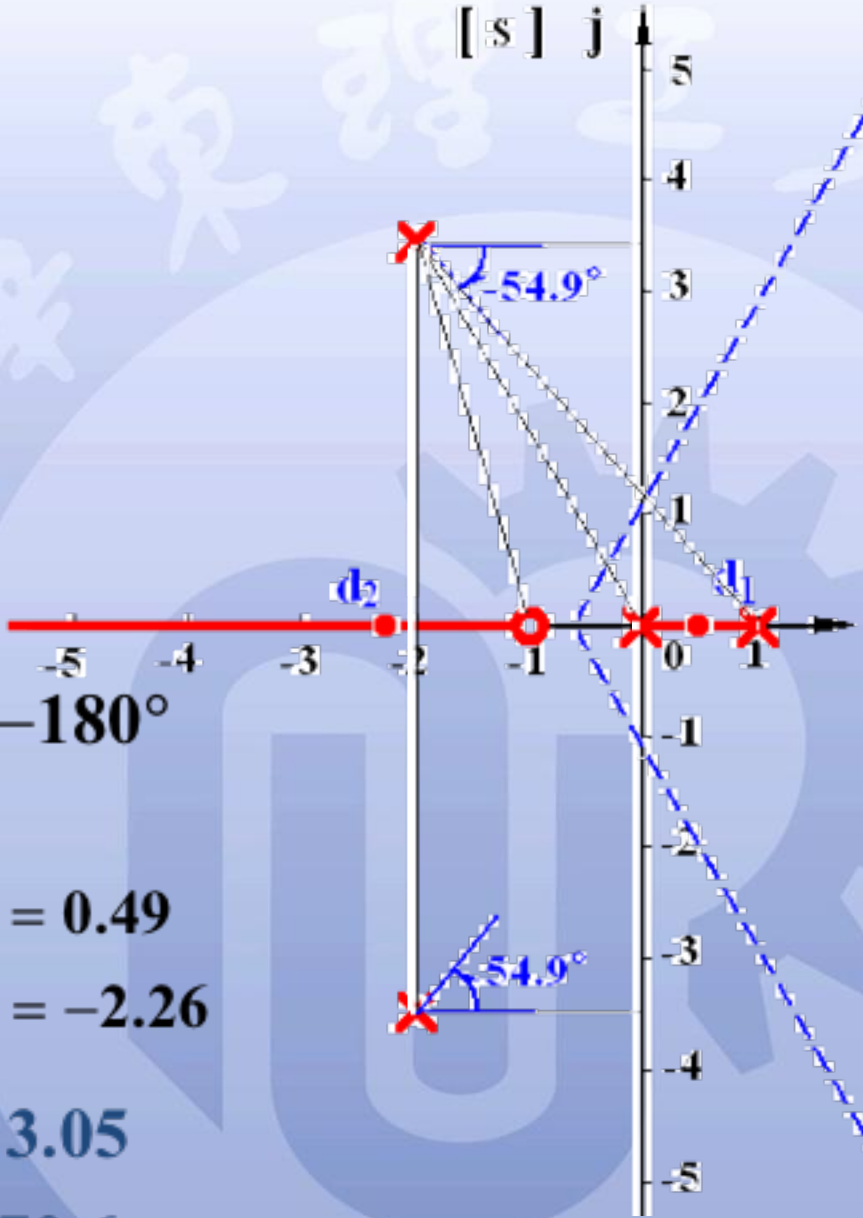
② 渐近线：$\begin{cases} \sigma_a=(1-4+1)/3=-2/3 \\ \varphi_a=(2k+1)\pi/3=\pm 60°,\ 180° \end{cases}$

③ 出射角：$106.1°-[\theta_1+90°+120°+130.9°]=-180°$

$\Rightarrow\ \theta_1=-54.9°$

④ 分离点：$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d-1}+\dfrac{2(d+2)}{d^2+4d+16}=\dfrac{1}{d+1}$ $\begin{cases} d_1=0.49 \\ d_2=-2.26 \end{cases}$

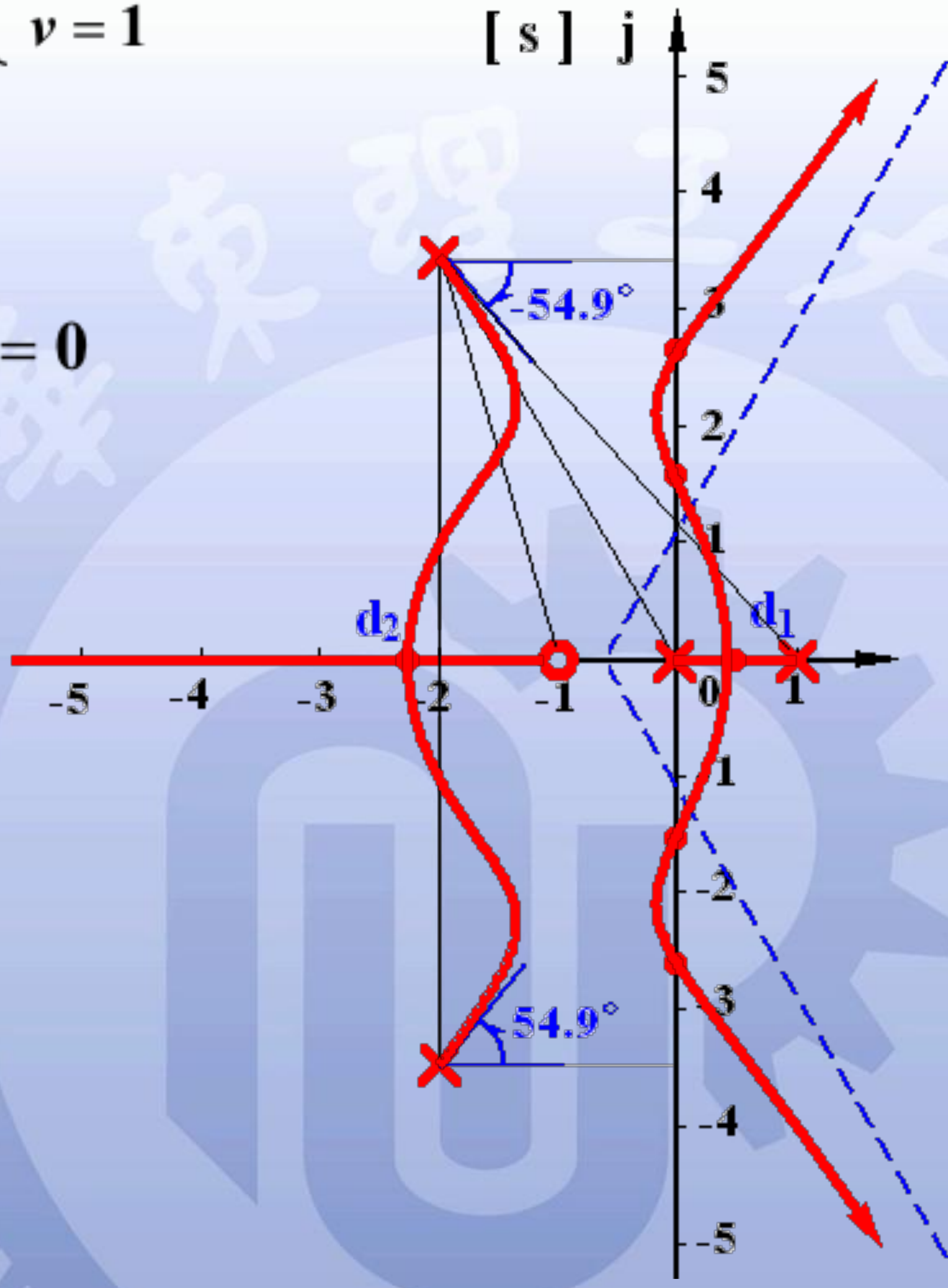
$$K^*_{d_{1,2}}=\frac{|d||d-1||d^2+4d+16|}{|d+1|}\ \underset{d=-2.26}{\overset{d=0.49}{=}}\ \begin{cases} 3.05 \\ 70.6 \end{cases}$$



例(续)

$$G(s)=\frac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}\qquad\begin{cases}K=K^*/16\\ v=1\end{cases}$$

⑤ 虚轴交点:



$$D(s)=s^4+3s^3+12s^2+(K^*-16)s+K^*=0$$

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=\omega^4-12\omega^2+K^*=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-3\omega^3+(K^*-16)\omega=0\end{cases}$$

$$K^*=3\omega^2+16$$

$$\omega^4-9\omega^2+16=0$$

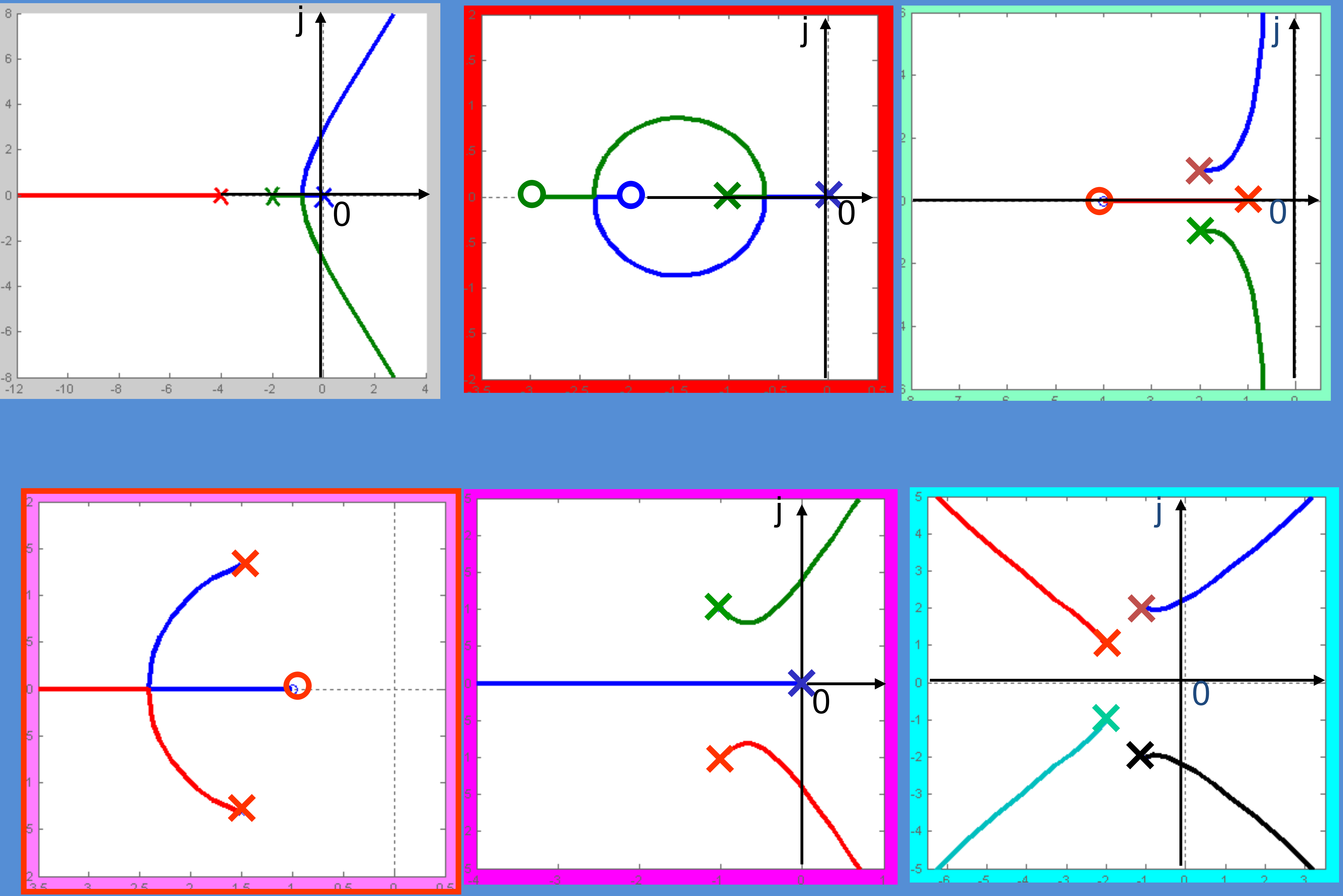
$$\begin{cases}\omega_1=1.56\\ \omega_2=2.56\end{cases}\qquad\begin{cases}K_1^*=19.7\\ K_2^*=35.7\end{cases}$$

稳定的范围:

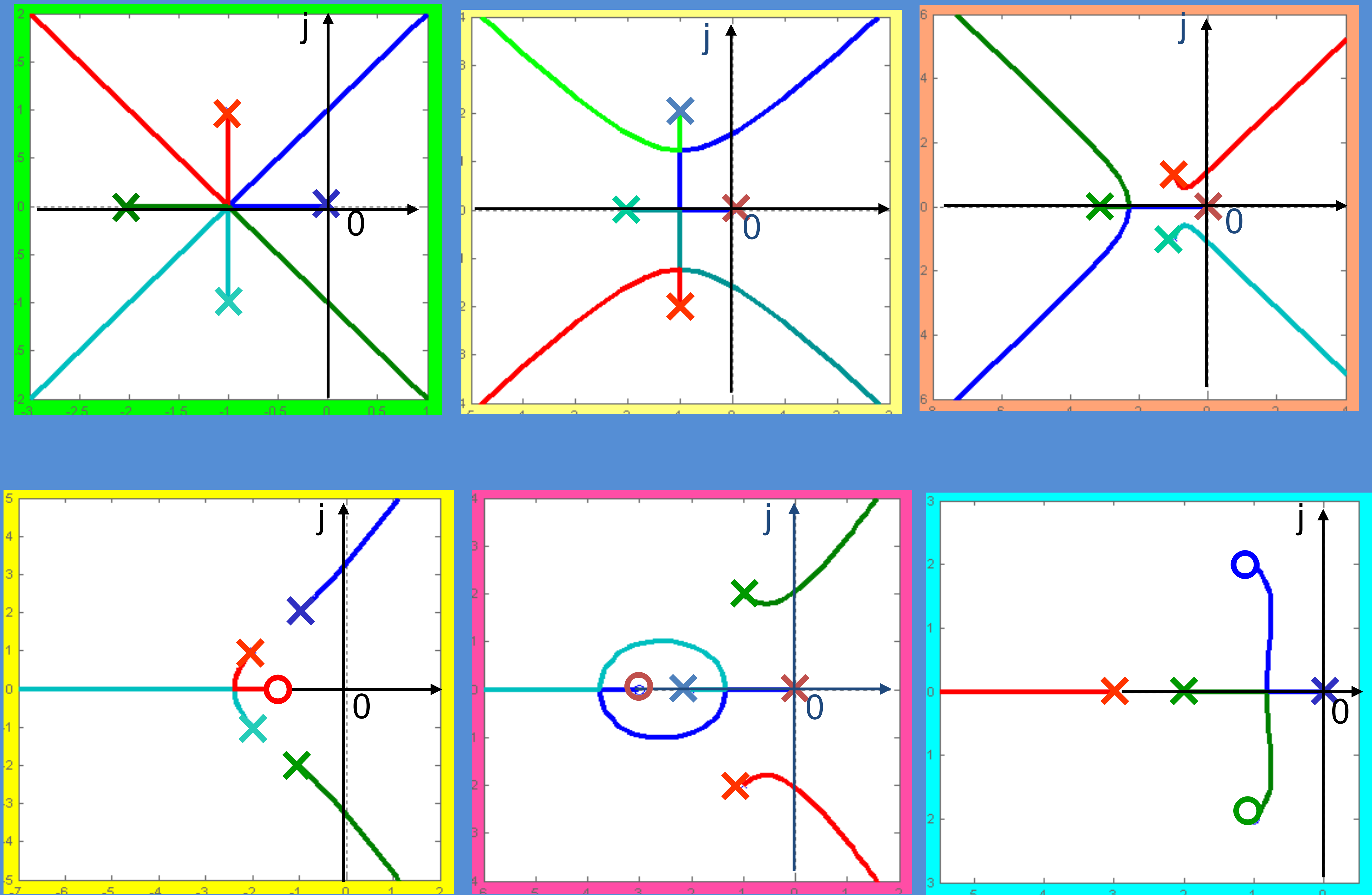
$$19.7<K^*<35.7$$

$$1.234<K=\frac{K^*}{16}<2.23$$

常见根轨迹类型(1)



常见根轨迹类型(2)



4.4 广义根轨迹

在负反馈系统中， K*变化时的根轨迹叫做常规根轨迹。其他情况下的根轨迹称广义根轨迹。通常有：

(1)参数根轨迹　(2)多回路系统的根轨迹　(3)正反馈回路和零度根轨迹。

4.4.1 参数根轨迹

变化的参数不是开环根轨迹增益K*的根轨迹叫参数根轨迹。**将开环传函变形让变化的参数处于开环增益的位置**就可以采用绘制常规根轨迹时的法则。

参数根轨迹

解题关键：通过引入等效传递函数，要将开环传函变形，将非开环增益的参数变换到开环增益的地位。

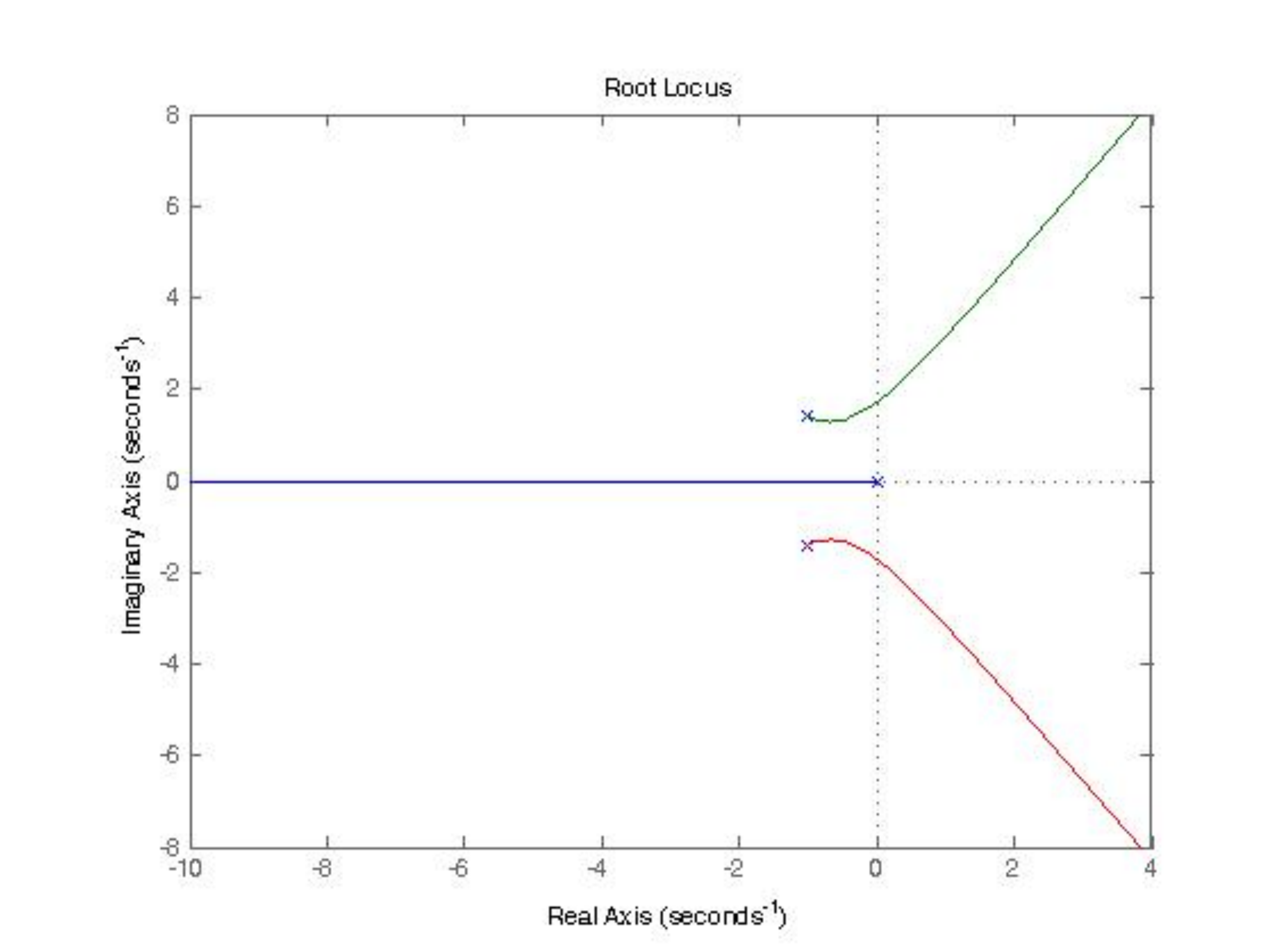
$$G(s)H(s)=\frac{K_1(s+a)}{s(s^2+2s+2)}$$

系统的特征方程为 $$1+\frac{K_1(s+a)}{s(s^2+2s+2)}=0$$ $$s(s^2+2s+2)+k_1(s+a)=0$$

以a为变量时考察： $$1+\frac{K_1a}{s\left[s^2+2s+(2+K_1)\right]}=0$$

$k_1=1$ $$\frac{a}{s\left[s^2+2s+3\right]}=-1$$

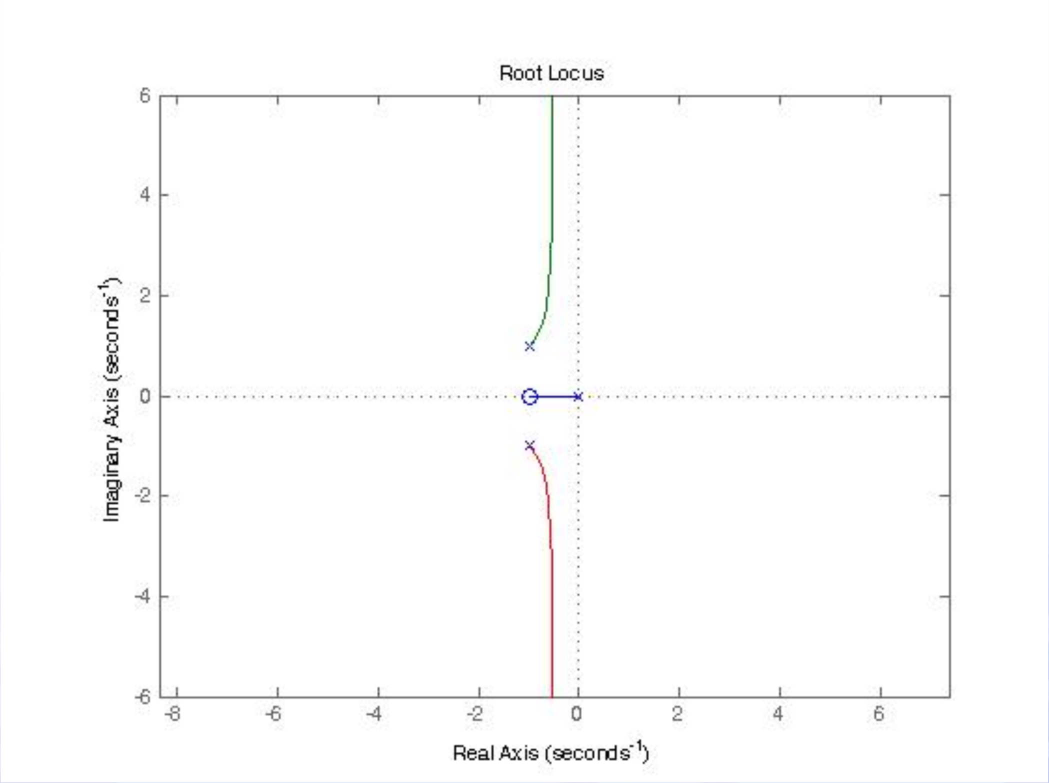
参数根轨迹

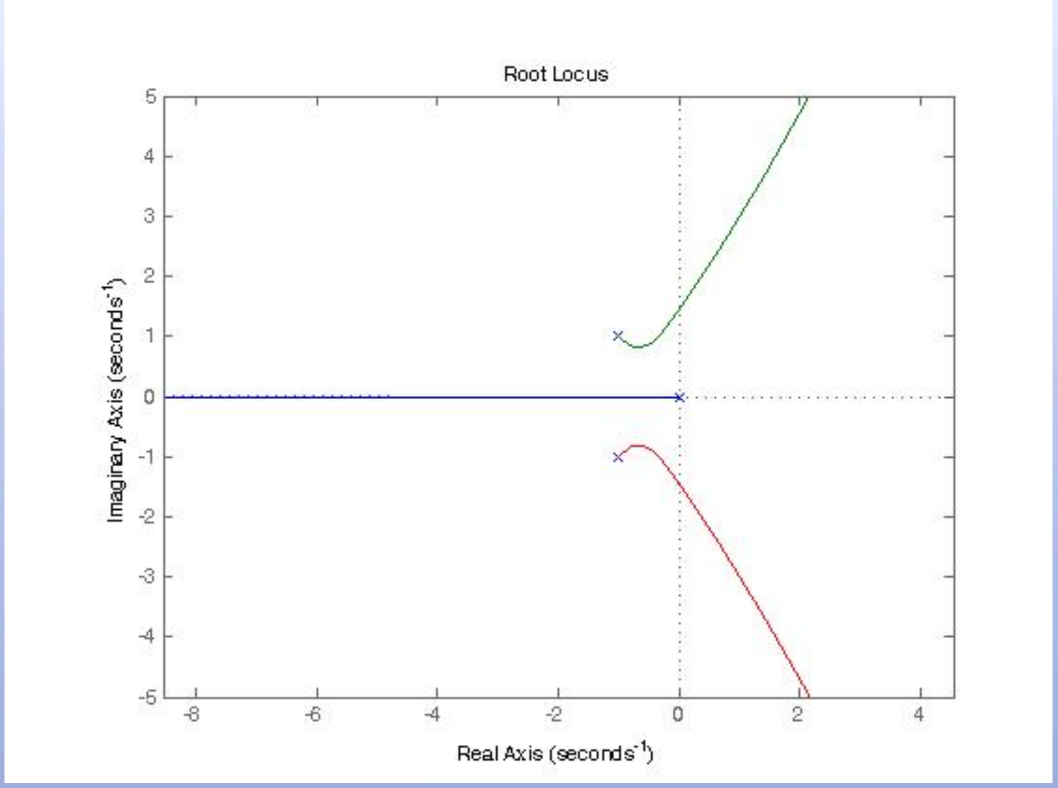


Root Locus
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4

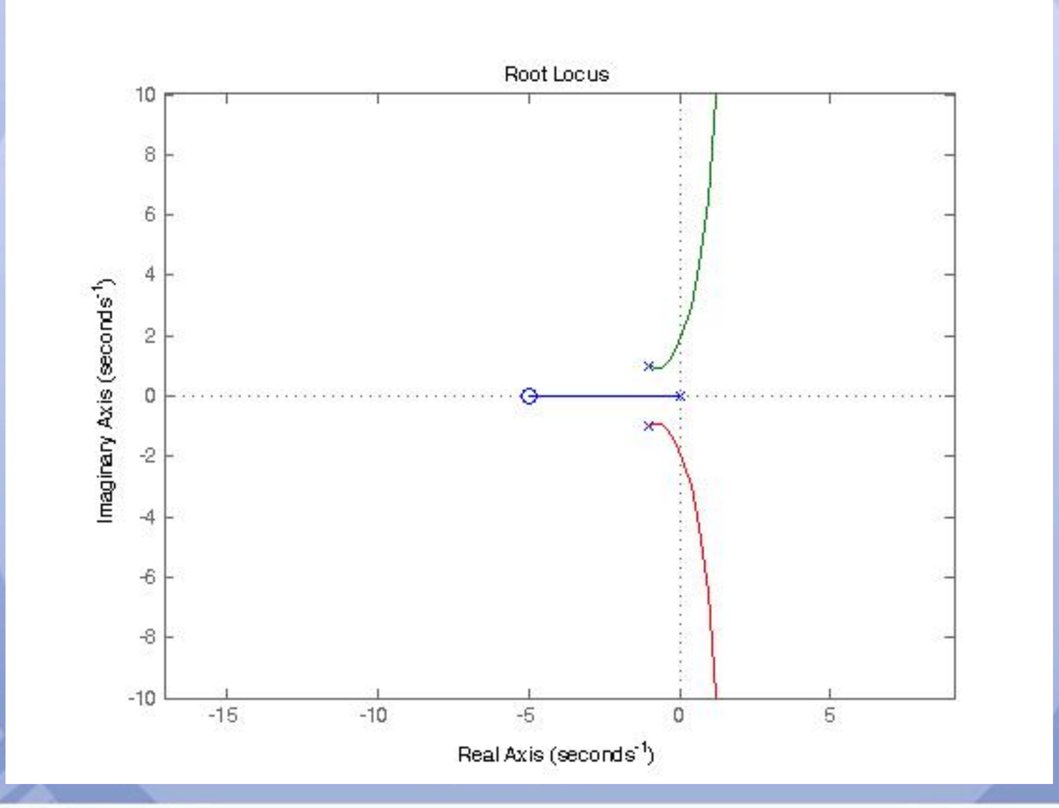
$$1+\frac{K_1(s+a)}{s(s^2+2s+2)}=0$$

$a=1$





$a=5$



$a=\infty$

4.4.2 多回路系统的根轨迹

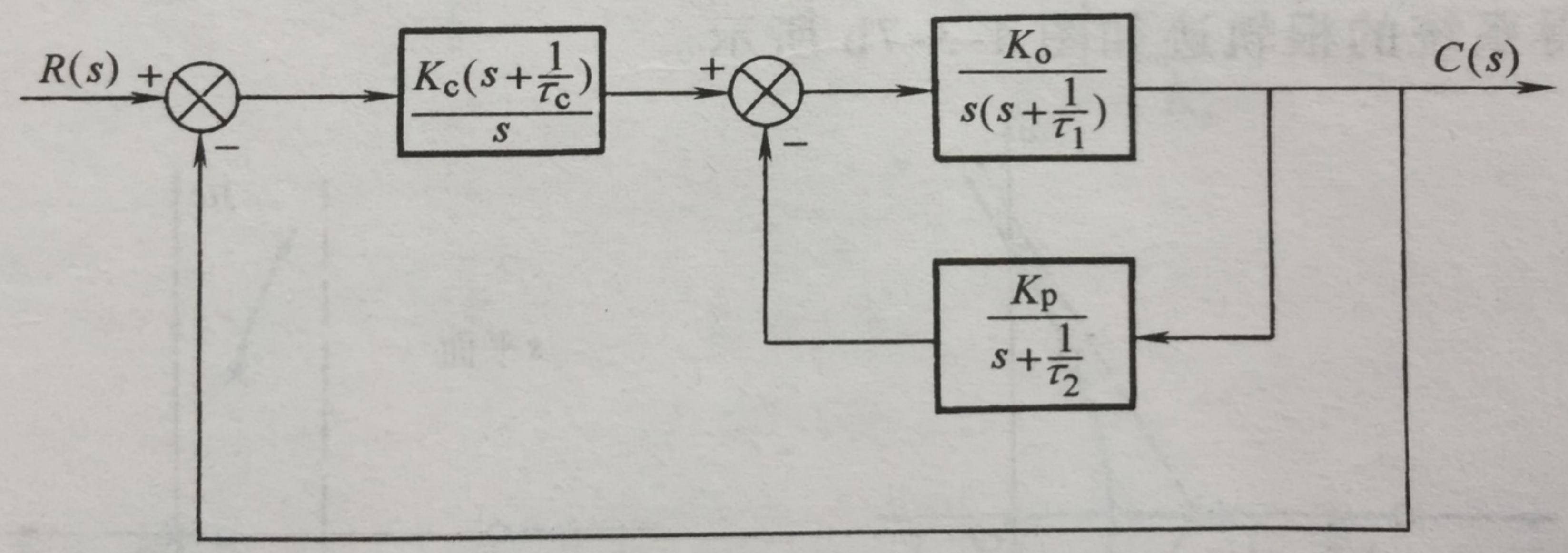


图 4-3-6 双回路反馈控制系统

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K_cK_o\left(s+\frac{1}{T_2}\right)\left(s+\frac{1}{T_c}\right)}{s\left[s\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)+K_oK_p\right]+K_cK_o\left(s+\frac{1}{T_2}\right)\left(s+\frac{1}{T_c}\right)}$$

4.4.2 多回路系统的根轨迹

系统的特征方程为：

$$s\left[s\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)+K_oK_p\right]+K_cK_o\left(s+\frac{1}{T_2}\right)\left(s+\frac{1}{T_c}\right)=0$$

$$\frac{K_cK_o\left(s+\frac{1}{T_2}\right)\left(s+\frac{1}{T_c}\right)}{s\left[s\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)+K_oK_p\right]}=-1$$

根轨迹起始于系统开环极点

$$s\left[s\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)+K_oK_p\right]=0$$

4.4.2　多回路系统的根轨迹

系统内环传递函数为：

$$G'(s)=\frac{K_o\left(s+\frac{1}{T_2}\right)}{s\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)+K_oK_p}$$

系统内环特征方程：

$$s\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)+K_oK_p=0$$

$$\frac{K_oK_p}{s\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)}=-1$$

4.4.2　多回路系统的根轨迹

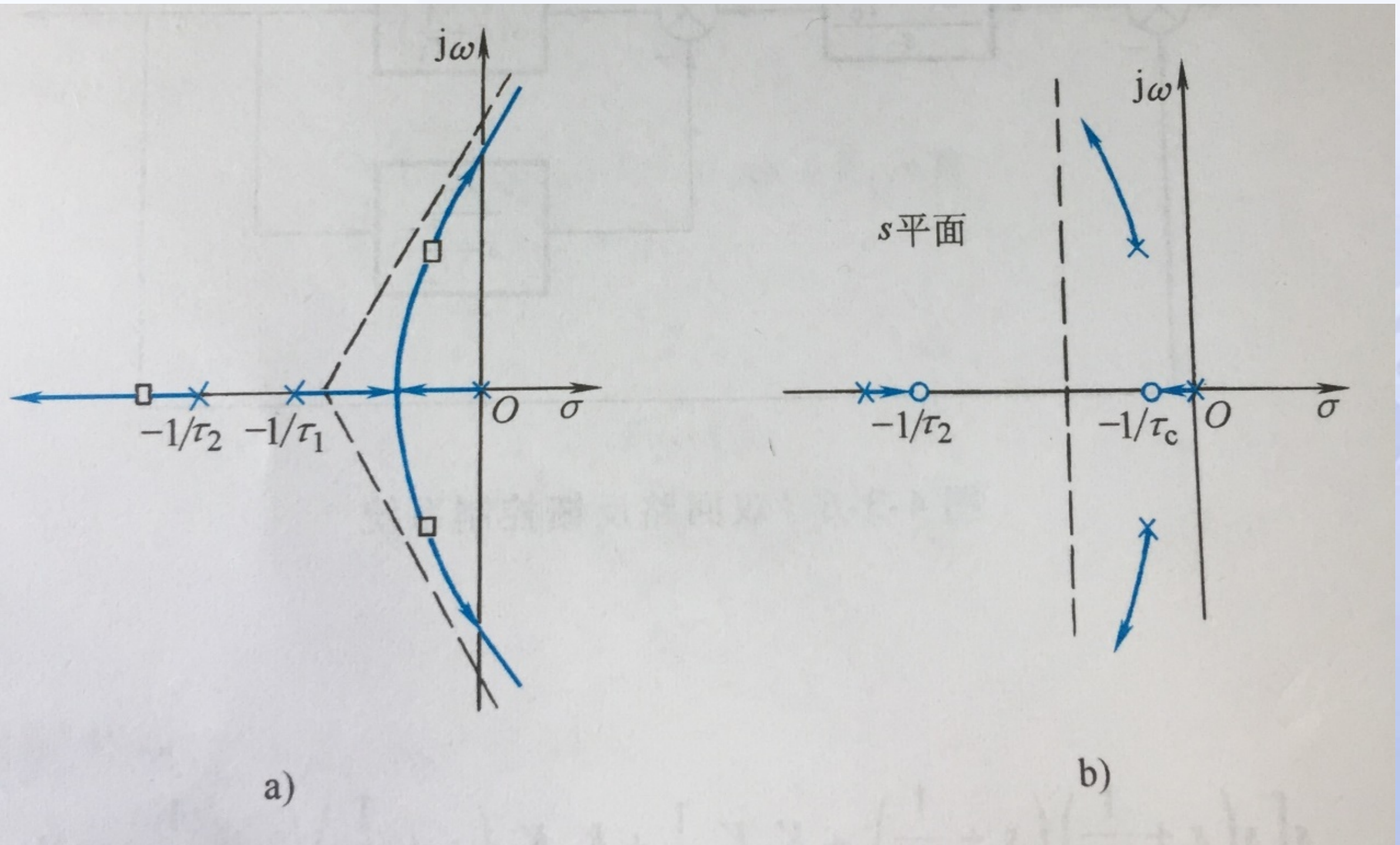
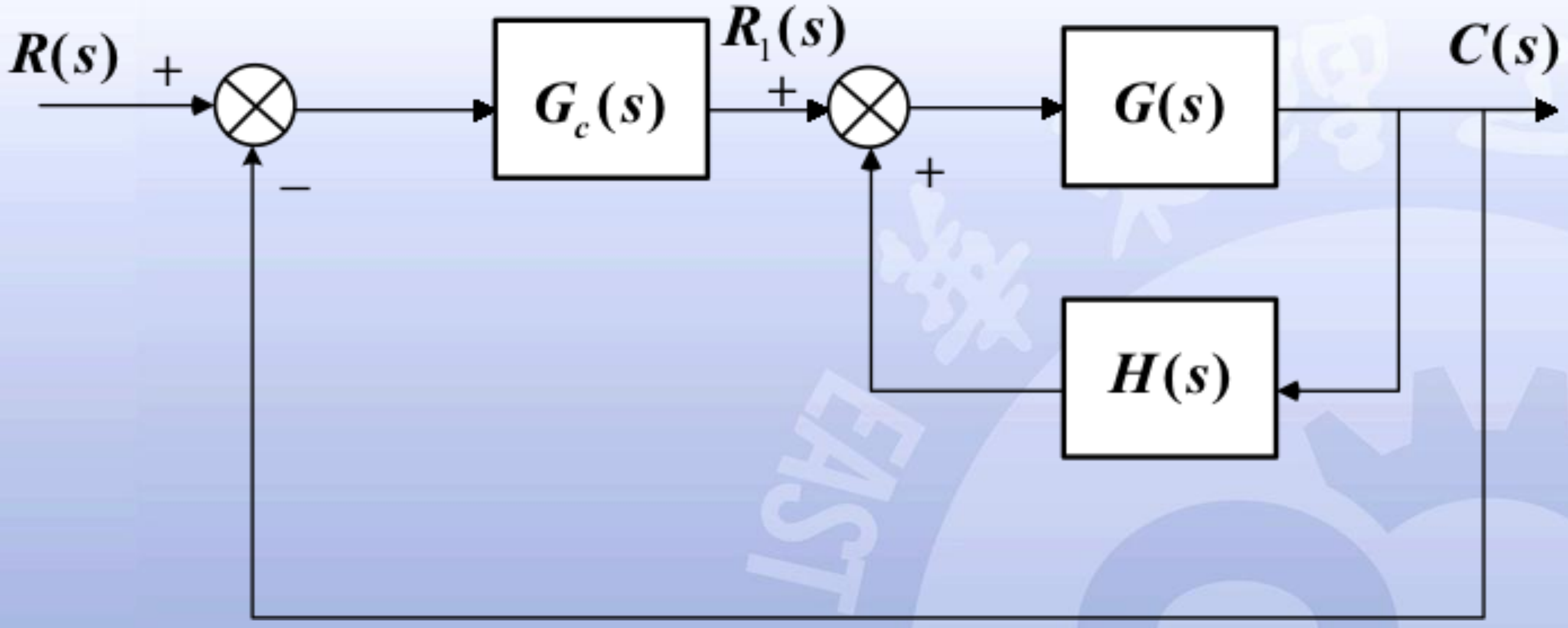


图 4-3-7　例 4-9 系统的根轨迹

a）内环的根轨迹　b）系统的根轨迹

绘制多回路反馈控制系统的根轨迹的方法是：**从内环开始，分层绘制，逐步扩展到整个系统**

4.4.2　正反馈回路和零度根轨迹



$$\frac{C(s)}{R_1(s)}=\frac{G(s)}{1-G(s)H(s)}$$

正反馈回路的特征方程：　$1-G(s)H(s)=0$　　　$G(s)H(s)=1$

4.4.2　正反馈回路和零度根轨迹

$$|G(s)H(s)| = \frac{K_1 \prod_{j=1}^{m} |s - z_j|}{\prod_{i=1}^{n} |s - p_i|} = 1$$

$$\angle G(s)H(s) = \sum_{j=1}^{m} (s - z_j) - \sum_{i=1}^{n} (s - p_i)$$

$$= 2K\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

针对零度根轨迹的相角条件变化，需要相应修订根轨迹的绘制规则：

规则三　在实轴的线段上存在根轨迹的条件是：其右边的开环零、极点数目之和为偶数。

4.4.2 正反馈回路和零度根轨迹

规则四　（n-m）条渐进线的相角为：

$$\varphi_a = \frac{2k}{(n-m)} 180^\circ \qquad (k = 0,1,2\cdots)$$

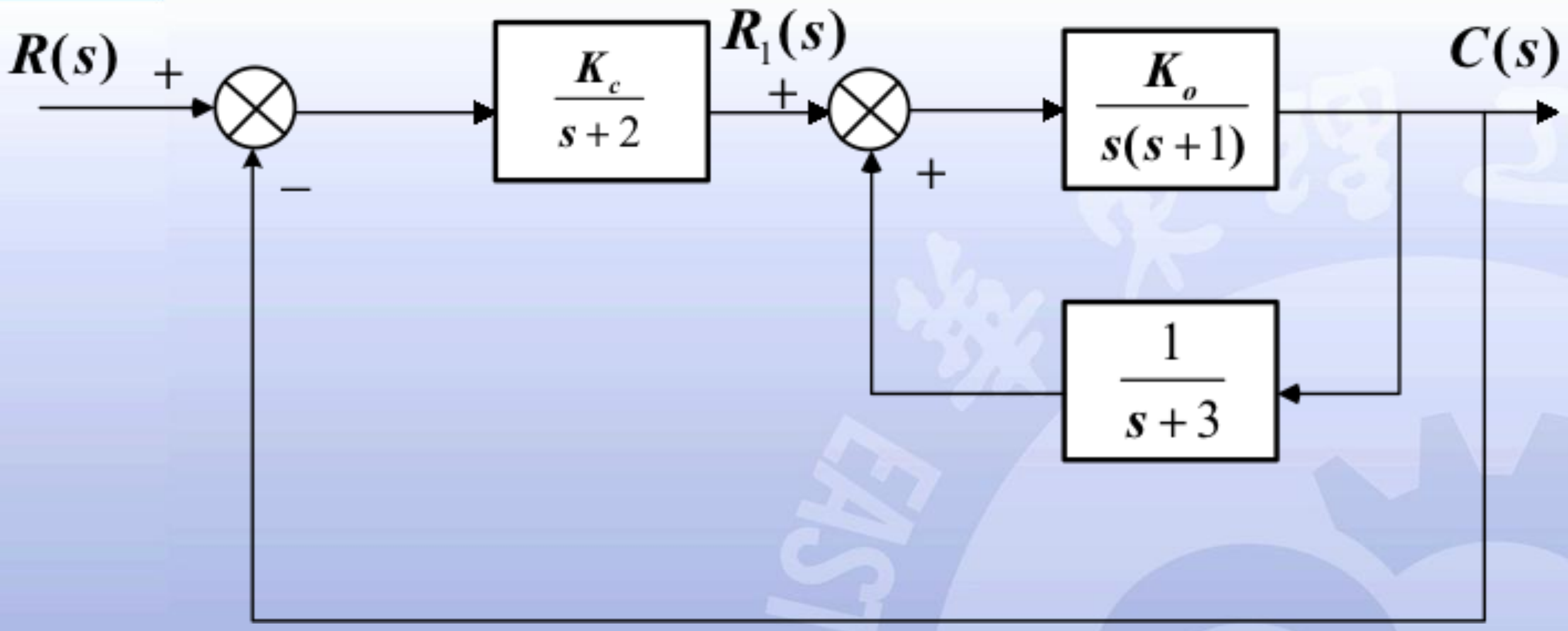
规则七　根轨迹的出射角为

$$\varphi_p = \mp 180^\circ (2k) + (\sum \theta_z - \sum \theta_p)$$

根轨迹的出射角为

$$\varphi_p = \pm 180^\circ (2k) - (\sum \theta_z - \sum \theta_p)$$

4.4.2　正反馈回路和零度根轨迹



（1）绘制内环的根轨迹

$$G_1(s)H_1(s)=\frac{K_o}{s(s+1)(s+3)}$$

4.4.2　正反馈回路和零度根轨迹

$$G_1(s)H_1(s)=\frac{K_o}{s(s+1)(s+3)}$$

1）内环的根轨迹有3支，分别起始于开环极点，等$K_o \to \infty$,三条根轨迹分支趋于无穷远处

2）实轴上的根轨迹：[0，∞]，[-3，-1]

3）渐近线与实轴的夹角：$\varphi_a=\pm\frac{2k\times180^\circ}{3}=0^\circ,\pm120^\circ,k=0,1$

渐近线与实轴的交点：$\sigma_a=\frac{0-1-3}{3}=-\frac{4}{3}=-1.33$

4.4.2 正反馈回路和零度根轨迹

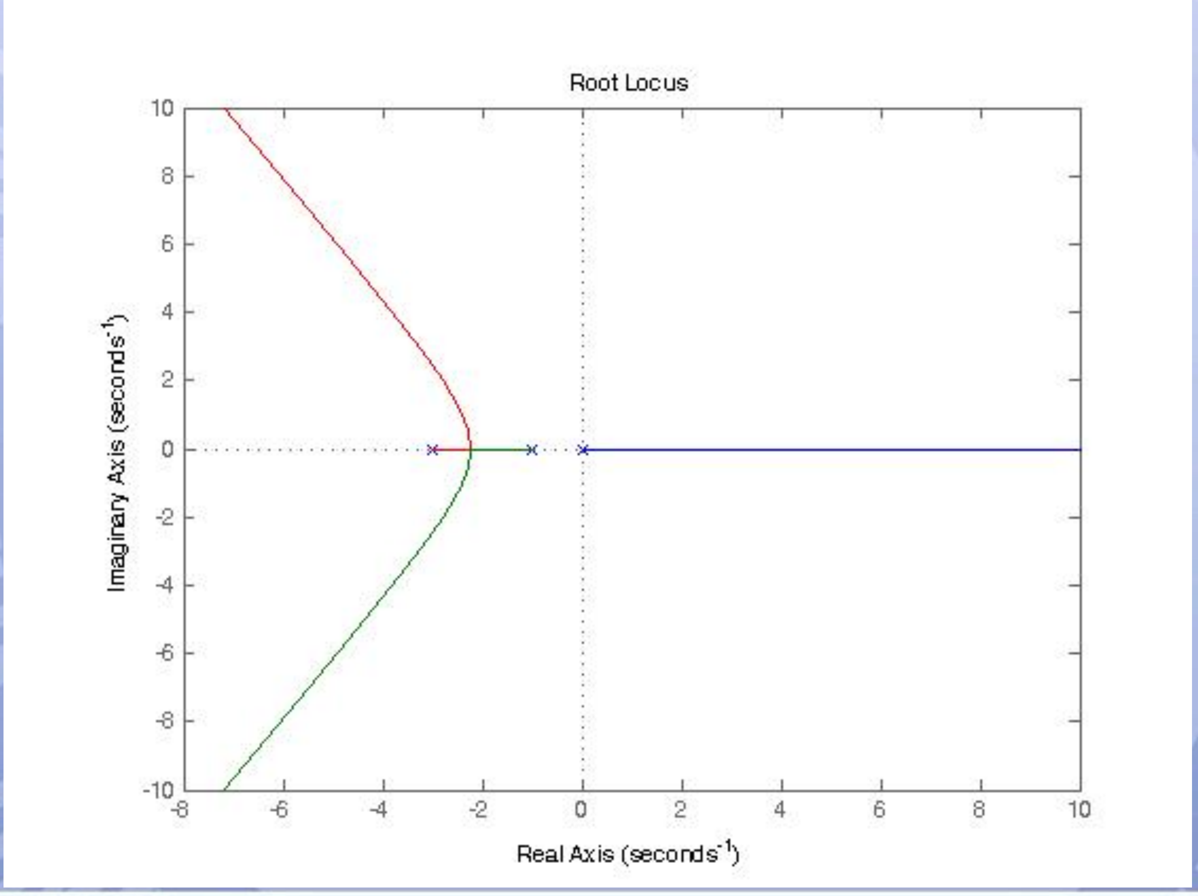
4）内环的特征方程为：

$$s^3+4s^2+3s-K_o=0$$

5）分离点的坐标：

$$\frac{dK_o}{ds}=3s^2+8s+3=0 \qquad \begin{cases} s_1=-2.22 \\ s_2=-0.45 \end{cases}$$

5）$K_o=4$,确定闭环极点坐标



为简便首先确定闭环实极点

$$K_o=|p_1-0||p_1+1||p_1+3|=4$$

$$p_1=0.66$$

$$K_o=0.66\times1.66\times3.66=4.01\approx4$$

4.4.2 正反馈回路和零度根轨迹

$$s^3+4s^2+3s-4=(s-0.66)(s^2+4.66s+6.075)=0$$

$$s_{2,3}=-2.33\pm j0.8$$

（1）绘制外环的根轨迹（常规根轨迹）

外环的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K_c}{s+2}\bullet\frac{\frac{4}{s(s+1)}}{1-\frac{4}{s(s+1)(s+3)}}=\frac{K_c(s+3)}{(s+2)(s-0.66)(s^2+4.66s+6.075)}$$

系统具有s平面右半部的开环零、极点，系统被称为非最小相位系统；当系统的所有开环零、极点都位于s平面的左半部时，系统称为最小相位系统

4.4.2　正反馈回路和零度根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{K_c(s+3)}{(s+2)(s-0.66)(s^2+4.66s+6.075)}$$

1）系统有4条根轨迹分支

2）实轴上的根轨迹：[-2,0.66]、[-∞,-3]

3）渐进线的相位角及与实轴的交点坐标：

$$\varphi_a=\pm\frac{(2k+1)180^\circ}{4-1}=\pm 60^\circ,\pm 180^\circ,k=0,1$$

$$\sigma_a=\frac{-2+0.66-4.66+3}{4-1}=-1$$

4）渐进线的相位角及与虚轴的交点坐标及临界K_c：

闭环特征方程　$(s+2)(s-0.66)(s^2+4.66s+6.075)+K_c(s+3)=0$

4.4.2　正反馈回路和零度根轨迹

闭环特征方程　$(s+2)(s-0.66)(s^2+4.66s+6.075)+K_c(s+3)=0$

多次试差方法确定与虚轴的交点：

$$\angle(j1.3+3)-\angle(j1.3+2)-\angle(j1.3-0.66)-\angle(j1.3+2.33-j0.8)-\angle(j1.3+2.33+j0.8)$$

$$=-180.57^\circ \approx 180^\circ$$

$$K_c=\frac{|j1.3-0.66|\times|j1.3+2|\times|j1.3+2.33-j0.8|\times|j1.3+2.33+j0.8|}{|j1.3+2|}$$

$$=7.96$$

4.4.2　正反馈回路和零度根轨迹

5）分离点及汇合点

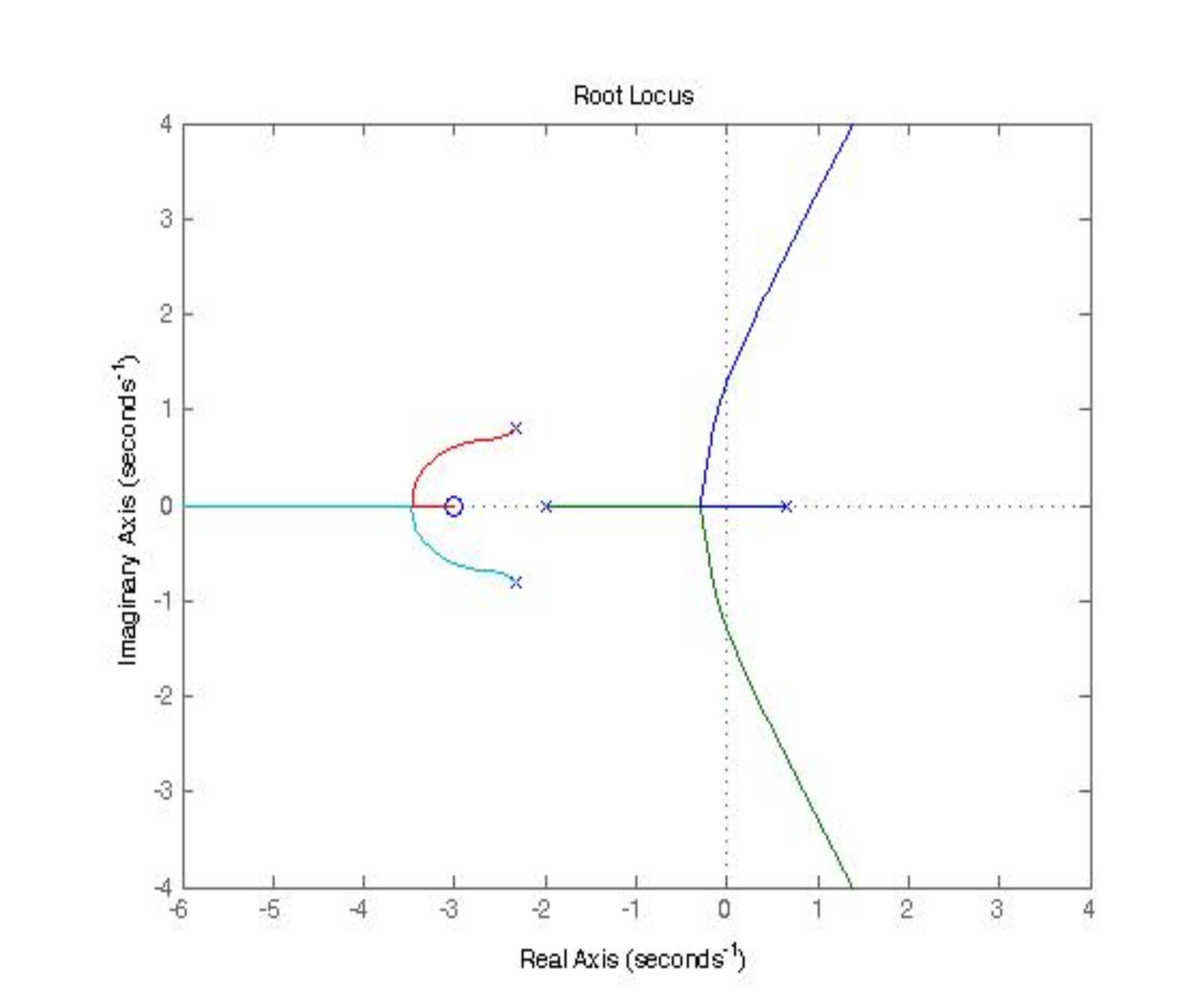
按照相位条件反复验算后

$(-0.283, j0)$　　$(-3.478, j0)$

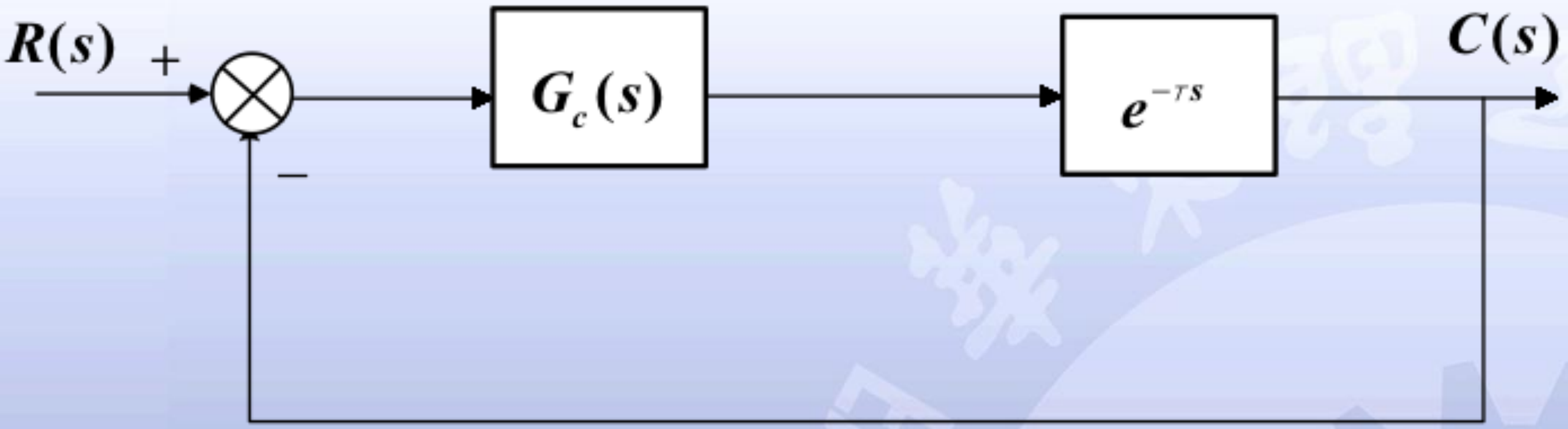
6）复数极点的根轨迹的出射角为

$$\varphi_p = 180^\circ + (\sum \theta_z - \sum \theta_p)$$

$$= 220^\circ, -138^\circ$$



4.5 滞后系统根轨迹



系统闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{e^{-\tau s}G(s)}{1+e^{-\tau s}G(s)}$$

系统特征方程为

$$1+e^{-\tau s}G(s)=0$$

系统特征方程为超越方程，无限多个根

4.5 滞后系统根轨迹

$$e^{-\tau s}=\frac{1}{e^{\tau s}}=\frac{1}{1+\tau s+\dfrac{\tau^2}{2!}s^2+\cdots}$$

$$e^{-\tau s}\approx\frac{1}{1+\tau s}$$

$$e^{-\tau s}=1-\tau s+\frac{\tau^2}{2!}s^2-\frac{1}{3!}(\tau s)^3+\cdots$$

$$e^{-\tau s}\approx 1-\tau s$$

$$e^{-\tau s}=\frac{e^{-\tau s/2}}{e^{\tau s/2}}=\frac{1-\dfrac{\tau}{2}s+\dfrac{\tau^2}{8}s^2+\cdots}{1+\dfrac{\tau}{2}s+\dfrac{\tau^2}{8}s^2+\cdots}$$

$$e^{-\tau s}\approx\frac{1-\dfrac{\tau}{2}s}{1+\dfrac{\tau}{2}s}$$

4.5 滞后系统根轨迹

系统特征方程为 $$1+e^{-\tau s}G(s)=0$$

$$G(s)=K_1\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_j)}$$

$$e^{-\tau s}G(s)=-1$$

$$e^{-\tau s}=e^{-\tau(\sigma+j\omega)}=e^{-\tau\sigma}e^{-j\omega\tau}=e^{-\tau\sigma}\angle\varphi_\tau \qquad \varphi_\tau=-57.3^\circ\omega\tau$$

$$K_1\frac{\prod_{j=1}^{m}\left|s-z_j\right|}{\prod_{i=1}^{n}\left|s-p_j\right|}e^{-\sigma\tau}=1$$

$$\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_j)=57.3^\circ\omega\tau\pm180^\circ(2k+1)$$

$$k=0,1,2,\cdots$$

相位条件取决于ω，可以得到无限多条根轨迹

4.5 滞后系统根轨迹

规则一　滞后系统根轨迹是连续的，并对称与实轴。

规则二　$K_1=0$时，滞后系统根轨迹从开环极点p_i和$\sigma=-\infty$处出发；K1→∞时，根轨迹趋向于开环零点和$\sigma=\infty$处

$$\frac{\prod_{j=1}^{m}\left|s-z_j\right|}{\prod_{i=1}^{n}\left|s-p_j\right|}e^{-\sigma\tau}=\frac{1}{K_1}$$

规则三　滞后系统根轨迹在实轴上的线段存在的条件是，其右边开环零、极点数目之和为奇数

4.5 滞后系统根轨迹

规则四　滞后系统根轨迹的渐近线有无穷多条，且都平行于s平面实轴。

规则五　滞后系统根轨迹渐近线与虚轴的交点为

$$\omega = \frac{180^{\circ} N}{57.3^{\circ} \tau}$$

N值根据相位条件式得到,参见P151表4-4-1

规则六　滞后系统根轨迹的分离点必须满足

$$\frac{d\left[e^{-\tau s}G(s)\right]}{ds} = 0$$

4.5　滞后系统根轨迹

规则七　滞后系统根轨迹出射角与入射角根据相位条件式确定

$$\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_j)=57.3^{\circ}\omega\tau\pm180^{\circ}(2k+1)$$

规则八　滞后系统根轨迹与虚轴的交点，用s=jω代入特征方程求解

4.6 利用根轨迹分析系统的性能

4.6.1 暂态响应性能分析

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{M(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

单位阶跃输入信号的作用下

$$C(s)=\frac{1}{s}K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

4.6 利用根轨迹分析系统的性能

$$C(s)=\frac{1}{s}K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

$$C(s)=K\left(\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{s-p_1}+\frac{A_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{A_n}{s-p_n}\right)$$

$$C(s)=K\left(\frac{A_0}{s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s-p_i}\right)$$

$$\frac{1}{s}K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=K\left(\frac{A_0}{s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{A_k}{s-p_k}\right)$$

$$A_k=\frac{\prod_{j=1}^{m}(p_k-z_j)}{p_k\prod_{i=1}^{n}(p_k-p_i)}\qquad i\neq k$$

$$A_k=\left|A_k\right|e^{j\varphi_k}\qquad i\neq k$$

4.6 利用根轨迹分析系统的性能

$$A_k = \frac{\prod_{j=1}^{m}(p_k - z_j)}{p_k \prod_{i=1}^{n}(p_k - p_i)} \qquad i \neq k \qquad\qquad A_k = |A_k| e^{j\varphi_k} \qquad i \neq k$$

$$|A_k| = \frac{\prod_{j=1}^{m}|p_k - z_j|}{|p_k| \prod_{i=1}^{n}|p_k - p_i|} \qquad (i \neq k)$$

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{m} \angle(p_k - z_j) - \left[\angle(p_k) + \sum_{i=1}^{n} \angle(p_k - p_i)\right] \qquad (i \neq k)$$

当p_k为实数极点时：

$$\varphi_k = q\pi$$

q为p_k右面实数零、极点数目之和

4.6 利用根轨迹分析系统的性能

$$A_k = (-1)^q \frac{\prod_{j=1}^{m} |p_k - z_j|}{|p_k| \prod_{i=1}^{n} |p_k - p_i|}$$

当p_1、p_2为复数极点时，共轭的复数极点：

$$A_1 = |A_1| e^{j\varphi_1} \qquad A_2 = |A_2| e^{j\varphi_2} = |A_1| e^{-j\varphi_1}$$

其所对应的输出分量

$$\begin{aligned}
C_1(t) + C_2(t) &= K\left\{A_1 e^{(-\sigma_1 + j\omega_1)t} + A_2 e^{(-\sigma_1 - j\omega_1)t}\right\} \\
&= K\left\{|A_1| e^{j\varphi_1} e^{(-\sigma_1 + j\omega_1)t} + |A_1| e^{-j\varphi_1} e^{(-\sigma_1 - j\omega_1)t}\right\} \\
&= K|A_1| e^{-\sigma_1 t}\left\{e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{-j(\omega_1 t + \varphi_1)}\right\} \\
&= K|A_1| e^{-\sigma_1 t}\left\{e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{-j(\omega_1 t + \varphi_1)}\right\} = a_1 e^{-\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1)
\end{aligned}$$

4.6 利用根轨迹分析系统的性能

$$a_1 = 2K|A_1| = 2K\frac{\prod_{j=1}^{m}|p_1 - z_j|}{|p_1|\prod_{i=1}^{n}|p_1 - p_i|}$$

$$\varphi_1 = \sum_{j=1}^{m}\angle(p_1 - z_j) - \left[\angle(p_1) + \sum_{i=1}^{n}\angle(p_1 - p_i)\right] \qquad i \neq 1$$

$$C(t) = a_0 + a_1 e^{-\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \sum_{k=3}^{n} a_k e^{-\sigma_k t}$$

$$a_k = K|A_k|e^{jq\pi} = K(-1)^q\frac{\prod_{j=1}^{m}|p_1 - z_j|}{|p_1|\prod_{i=1}^{n}|p_1 - p_i|} \qquad (i \neq k)$$

4.6 利用根轨迹分析系统的性能

闭环零点、极点与虚轴距离远近对于暂态性能的分析

$$a_1 = 2K\left|A_1\right| = 2K\frac{\prod_{j=1}^{m}\left|p_1 - z_j\right|}{\left|p_1\right|\prod_{i=1}^{n}\left|p_1 - p_i\right|} \qquad a_i = 2K\left|A_i\right| = K(-1)^q\frac{\prod_{j=1}^{m}\left|p_1 - z_j\right|}{\left|p_1\right|\prod_{i=1}^{n}\left|p_1 - p_i\right|}$$

闭环极点距离虚轴较近时，所对应单位阶跃响应的分量在t=0时的初值较大，随时间推移衰减得缓慢

闭环极点距离虚轴较远时，所对应单位阶跃响应的分量在t=0时的初值较小，随时间推移衰减得迅速

4.6 利用根轨迹分析系统的性能

闭环零点、极点与虚轴距离远近对于暂态性能的分析

$$a_1 = 2K\left|A_1\right| = 2K\frac{\prod_{j=1}^{m}\left|p_1 - z_j\right|}{\left|p_1\right|\prod_{i=1}^{n}\left|p_1 - p_i\right|} \qquad a_i = 2K\left|A_i\right| = K(-1)^q\frac{\prod_{j=1}^{m}\left|p_1 - z_j\right|}{\left|p_1\right|\prod_{i=1}^{n}\left|p_1 - p_i\right|}$$

闭环零点越靠近极点时，该极点所对应单位阶跃响应的分量在t=0时的初值越小

闭环零点与闭环极点相互抵消，该极点所对应单位阶跃响应的分量在t=0时的初值等于零

4.6 利用根轨迹分析系统的性能

闭环零点、极点与虚轴距离远近对于暂态性能的分析

$$a_1 = 2K\left|A_1\right| = 2K\frac{\prod_{j=1}^{m}\left|p_1 - z_j\right|}{\left|p_1\right|\prod_{i=1}^{n}\left|p_1 - p_i\right|} \qquad a_i = 2K\left|A_i\right| = K(-1)^q\frac{\prod_{j=1}^{m}\left|p_1 - z_j\right|}{\left|p_1\right|\prod_{i=1}^{n}\left|p_1 - p_i\right|}$$

无闭环零点靠近且又距离虚轴最近的闭环极点，所对应单位阶跃响应的分量在t=0时具有最大的初值，又在全部分量中衰减的最慢，在系统响应中起主导作用，成为闭环主导极点

4.6 利用根轨迹分析系统的性能

闭环主导极点

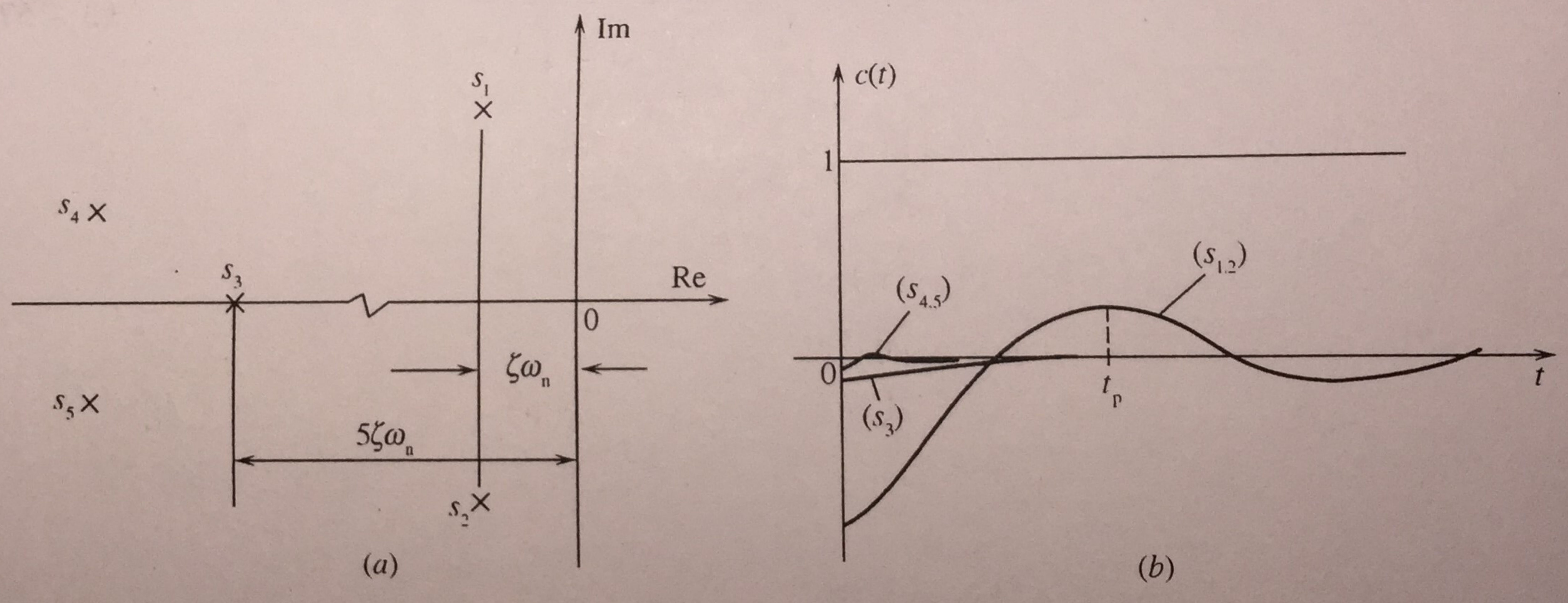


图 3－18 高阶系统的闭环极点分布及构成高阶系统单位阶跃响应的各分量

闭环主导极点

$$\left|\mathrm{Re}(s_3)\right| \geq 5\zeta\omega_n \qquad t_{s3} \leq \frac{4}{5\zeta\omega_n} = 0.2 t_{s1}$$

$$\frac{t_{r1}}{t_{s1}} = \left[\frac{\pi - \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right] \Bigg/ \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{\pi - \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{4} \bullet \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\frac{t_{p1}}{t_{s1}} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \Bigg/ \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{\pi}{4} \bullet \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

阻尼比0.4-0.707时

$$t_{r1} = (0.216 \sim 0.59) t_{s1}$$

$$t_{p1} = (0.34 \sim 0.785) t_{s1}$$

闭环主导极点

共轭复极点S_1和S_2的 阻尼比0.4-0.707时，在构成高阶系统单位阶跃响应的各个分量中，由S_3决定的响应分量将早在有S_1、S_2决定的响应分量达到第一个峰值，甚至在第一次达到其稳态值之前已基本衰减完毕。其对系统单位阶跃响应影响可以忽略不计。

$$\frac{M(0)}{D(0)}=1$$

$$C(s)\approx\frac{M(s)}{D(s)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}+\left(\frac{M(s)}{\dot{D}(s)}\frac{1}{s}\right)\bigg|_{s=p_1}\frac{1}{s-p_1}+\left(\frac{M(s)}{\dot{D}(s)}\frac{1}{s}\right)\bigg|_{s=p_2}\frac{1}{s-p_2}$$

$$C(t)\approx 1+2\left|\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)}\right|e^{-\sigma t}\cos(\omega_d t+\angle\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)})\qquad(t\geq 0)$$

闭环主导极点

峰值时间计算

$$C(t) \approx 1 + 2\left|\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)}\right| e^{-\sigma t}\cos(\omega_d t + \angle\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)}) \quad (t \ge 0)$$

$$\left.\frac{dC(t)}{dt}\right|_{t=t_p} = 0$$

$$\omega_d \sin\left(\omega_d t + \angle\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)}\right) = -\sigma\cos\left(\omega_d t + \angle\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)}\right)$$

$$\omega_d t + \angle\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)} = \arctan\left(\frac{-\sigma}{\omega_d}\right)$$

$$\angle\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)} = \angle\frac{K\prod_{j=1}^{m} p_1 - z_j}{p_1\prod_{i=2}^{n} p_1 - p_i} = \sum_{j=1}^{m}\angle(p_1 - z_j) - \left[\angle(p_1) + \angle(p_1 - p_2) + \sum_{i=3}^{n}\angle(p_1 - p_i)\right]$$

闭环主导极点

共轭复极点p_1和p_2

$$\angle p_1 = \pi - \varphi \qquad \varphi = \mathbf{arctan}\left(\frac{\omega_d}{\sigma}\right)$$

$$\angle(p_1 - p_2) = \frac{\pi}{2} \qquad \mathbf{arctan}\left(-\frac{\sigma}{\omega_d}\right) = -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$\omega_d t_p + \sum_{j=1}^{m} \angle(p_1 - z_j) - (\pi - \varphi) - \frac{\pi}{2} - \sum_{i=3}^{n} \angle(p_1 - p_i) = -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$t_p = \frac{1}{\omega_d}\left(\pi - \sum_{j=1}^{m} \angle(p_1 - z_j) + \sum_{i=3}^{n} \angle(p_1 - p_i)\right) \qquad \omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$$

闭环主导极点

$$t_p = \frac{1}{\omega_d}\left(\pi - \sum_{j=1}^{m} \angle(p_1 - z_j) + \sum_{i=3}^{n} \angle(p_1 - p_i)\right)$$

闭环零点对高阶系统单位阶跃响应的影响，表现为峰值时间的减小，其作用在于提高系统的响应速度，闭环零点越靠近虚轴，作用越显著。

非主导闭环极点对高阶系统单位阶跃响应的影响，表现为峰值时间的增大，其作用在于降低系统的响应速度。

闭环极点与零点彼此靠近时，它们对系统单位阶跃响应的影响将削弱，若二者相等，影响将完全抵消。

闭环主导极点

超调量计算

$$C(t)\approx 1+2\left|\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)}\right|e^{-\sigma t}\cos(\omega_d t+\angle\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)})\qquad (t\geq 0)$$

$$\sigma_p\approx 2\left|\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)}\right|e^{-\sigma t}\left|\cos(\omega_d t+\angle\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)})\right|$$

$$\cos\left(\omega_d t+\angle\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)}\right)=\cos\left\{\omega_d\frac{1}{\omega_d}\left(\pi-\sum_{j=1}^{m}\angle(p_1-z_j)+\sum_{i=3}^{n}\angle(p_1-p_i)\right)\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{m}\angle(p_1-z_j)-(\pi-\varphi)-\frac{\pi}{2}-\sum_{i=3}^{n}\angle(p_1-p_i)\right\}$$
$$=\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\omega_d}{|p_1|}$$

闭环主导极点

$$\frac{M(s)}{D(s)}=K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

$$\frac{M(0)}{D(0)}=1 \qquad K=\frac{\prod_{i=1}^{n}(-p_i)}{\prod_{j=1}^{m}(-z_j)} \qquad \frac{M(s)}{D(s)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}(-p_i)}{\prod_{j=1}^{m}(-z_j)}\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

$$\dot{D}(p_1)=\prod_{i=1}^{m}(-z_i)\prod_{i=2}^{n}(p_1-p_i) \qquad \left|\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)}\right|=\left|\frac{\prod_{i=1}^{n}(-p_i)}{p_1\prod_{j=1}^{m}(-z_j)}\frac{\prod_{j=1}^{m}(p_1-z_j)}{\prod_{i=2}^{n}(p_1-p_i)}\right|$$

闭环主导极点

$$\sigma_p \approx 2\left|\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)}\right| e^{-\sigma t}\cos(\omega_d t + \angle\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)})$$

$$= 2\left|\frac{\prod_{i=1}^{n}(-p_i)}{p_1\prod_{j=1}^{m}(-z_j)} \frac{\prod_{j=1}^{m}(p_1 - z_j)}{\prod_{i=2}^{n}(p_1 - p_i)}\right| \frac{\omega_d}{|p_1|} e^{-\sigma t_p}$$

$$|p_1| = |p_2|$$

$$= \frac{|p_1 - p_2|}{|p_1||p_2|} \frac{\prod_{i=1}^{n}|p_i| \bullet \prod_{j=1}^{m}|p_1 - z_j|}{\prod_{j=1}^{m}|z_j| \bullet \prod_{i=2}^{n}(p_1 - p_i)} e^{-\sigma t_p}$$

$$|p_1 - p_2| = 2\omega_d$$

$$\frac{|p_1 - p_2|}{2} = \omega_d$$

$$= \frac{\prod_{i=3}^{n}|p_i| \bullet \prod_{j=1}^{m}|p_1 - z_j|}{\prod_{i=3}^{n}(p_1 - p_i) \bullet \prod_{j=1}^{m}|z_j|} e^{-\sigma t_p}$$

闭环主导极点

超调量计算

$$\sigma_p = \frac{\prod_{i=3}^{n}|p_i| \cdot \prod_{j=1}^{m}|p_1 - z_j|}{\prod_{i=3}^{n}(p_1 - p_i) \cdot \prod_{j=1}^{m}|z_j|} e^{-\sigma t_p}$$

闭环零点，例如负实零点z_1距虚轴较近，致使$|p_1-z_1|$远大于$|z_1|$时，超调将增大。闭环零点可以提高系统的响应速度，但这种零点因距离虚轴太近，将导致超调量过分增大而使系统阻尼特性变差，响应速度与阻尼程度存在矛盾。

闭环非主导极点，例如负实零点p_3靠近虚轴，致使$|p_1-p_3|$远大于$|p_3|$时，超调将减小，阻尼特性增强。但峰值时间加强，降低系统的响应速度。

闭环主导极点

$$\left|C(t)-C(\infty)\right| \le \Delta C(\infty), \qquad t > t_s$$

调整时间计算

$$C(t) \approx 1 + 2\left|\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)}\right| e^{-\sigma t}\cos(\omega_d t + \angle\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)}) \qquad (t \ge 0)$$

$$\left|2\left|\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)}\right| e^{-\sigma t}\cos(\omega_d t + \angle\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)})\right| < \Delta \qquad (t \ge t_s)$$

$$\left|2\left|\frac{M(p_1)}{p_1\dot{D}(p_1)}\right| e^{-\sigma t}\right| < \Delta \qquad (t \ge t_s)$$

$$t_s = \frac{1}{\zeta\omega_n}\ln\left(\frac{2}{\Delta}\frac{\prod_{i=2}^{n}\left|p_i\right|\cdot\prod_{j=1}^{m}\left|p_1-z_j\right|}{\prod_{i=2}^{n}(p_1-p_i)\cdot\prod_{j=1}^{m}\left|z_j\right|}\right)$$