电路原理

信息学院　常青

changqing@ecust.edu.cn

第8章 相量法

● 正弦稳态电路

激励和响应均为正弦量且达到稳态的电路，简称为正弦电路或交流电路。

● 研究正弦电路的意义：

（1）正弦稳态电路在电力系统和电子技术领域占有十分重要的地位。

优点：

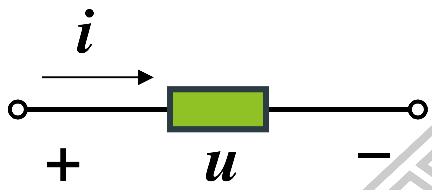
正弦函数是周期函数，其加、减、求导、积分运算后仍是同频率的正弦函数

正弦信号容易产生、传送和使用。

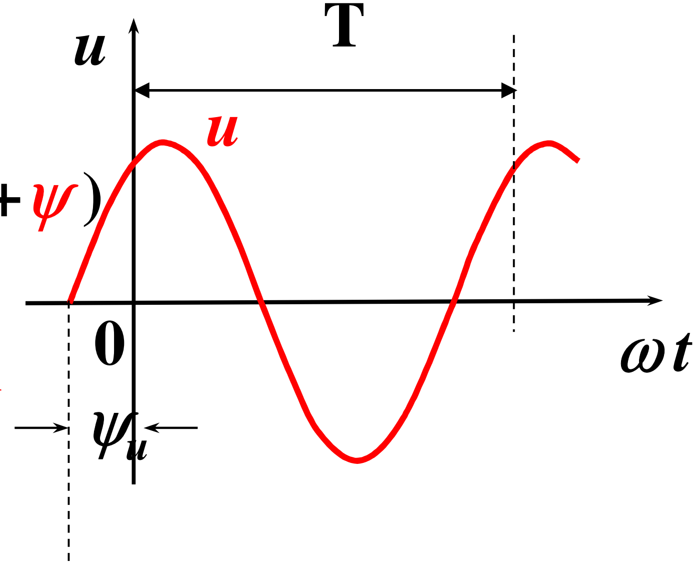
（2）正弦信号是一种基本信号，任何变化规律复杂的信号可以分解为按正弦规律变化的分量。

8.2 正弦量和相量

一、正弦量的三要素



$i(t)=I_m \sin(\omega t+\psi)$



(1) 幅值 (*amplitude*) (振幅、 最大值) I_m

(2) 角频率(*angular frequency*) ω

$$\omega = \frac{\mathrm{d}(\omega t+\psi)}{\mathrm{d}t} \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

单位： rad/s

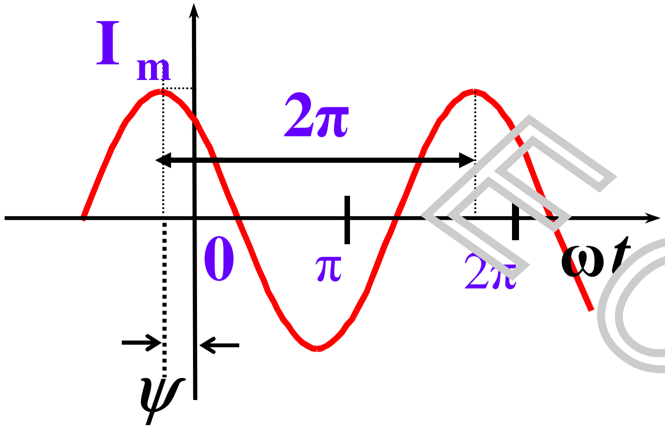
(3) 初相位(*initial phase angle*) ψ

$$f = \frac{1}{T}$$

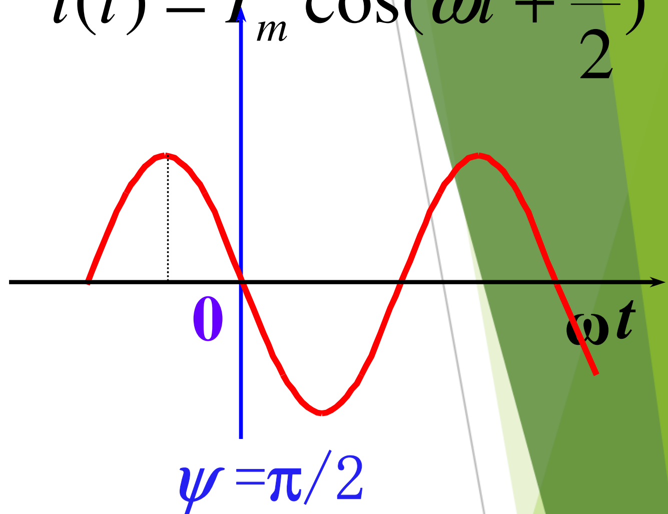
$(\omega t+\psi)$ 相位 $\quad i(t)\big|_{t=0} = I_m \sin\psi$

同一个正弦量，计时起点不同，初相位不同。

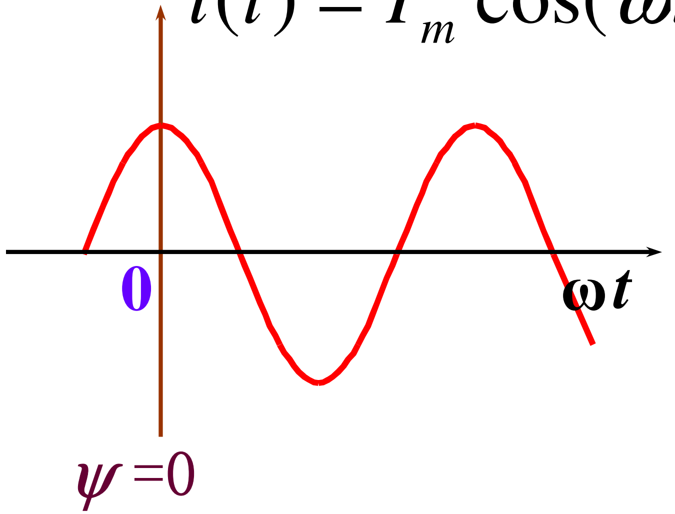
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$$



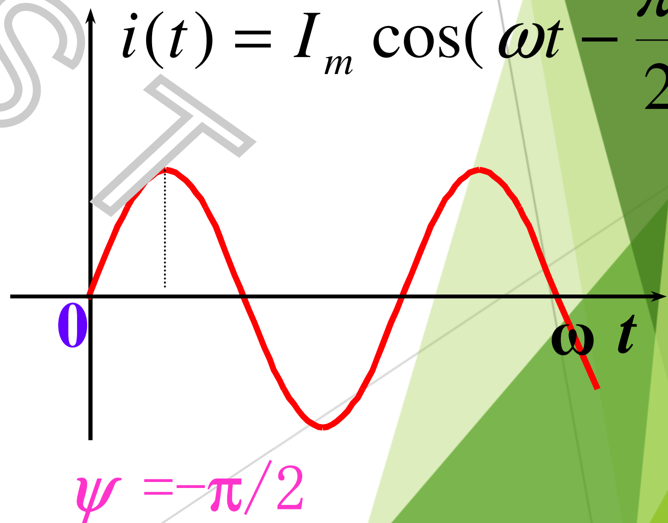
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



$$i(t) = I_m \cos(\omega t)$$

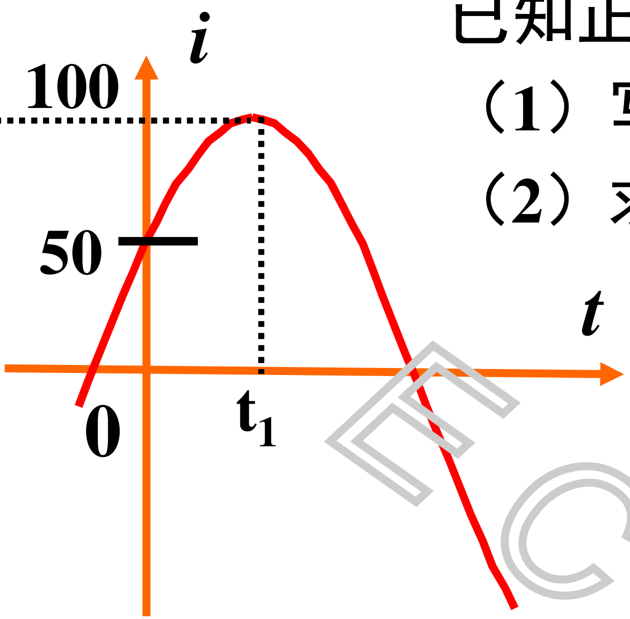


$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$



一般规定：$|\psi| \le \pi$ 。

例



已知正弦电流波形如图，ω＝10^3rad/s，

（1）写出$i(t)$表达式；

（2）求最大值发生的时间t_1

解 $i(t)=100\cos(10^3 t+\psi)$

$t=0 \rightarrow 50=100\cos\psi$

$\longrightarrow \psi=\pm\pi/3$

由于最大值发生在计时起点右侧 $\longrightarrow \psi=-\dfrac{\pi}{3}$

$$i(t)=100\cos(10^3 t-\frac{\pi}{3})$$

当 $10^3 t_1=\pi/3$ 有最大值 $\longrightarrow t_1=\dfrac{\pi/3}{10^3}=1.047ms$

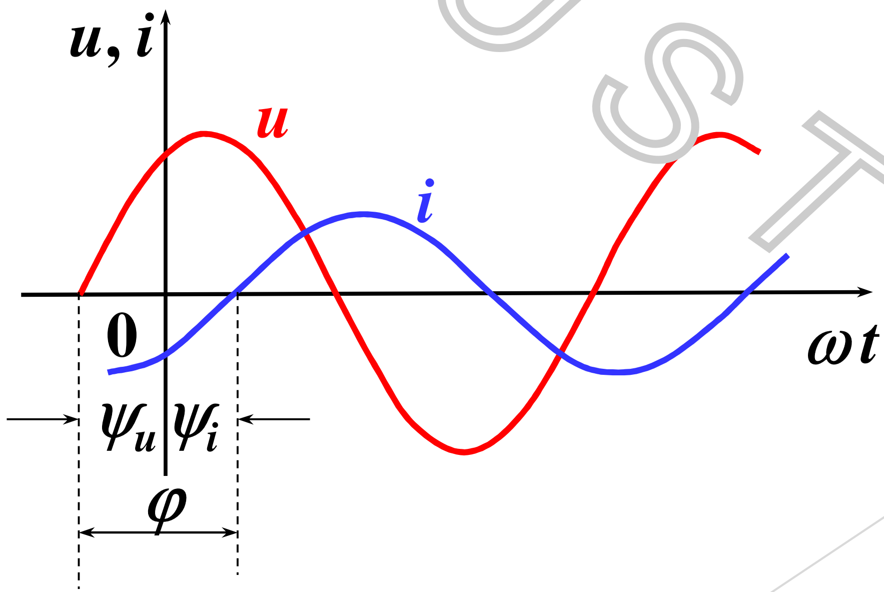
二、同频率正弦量的相位差 (*phase difference*)

设 $u(t)=U_m\sin(\omega t+\psi_u)$，$i(t)=I_m\sin(\omega t+\psi_i)$

相位差 $\varphi=(\omega t+\psi_u)-(\omega t+\psi_i)=\psi_u-\psi_i$

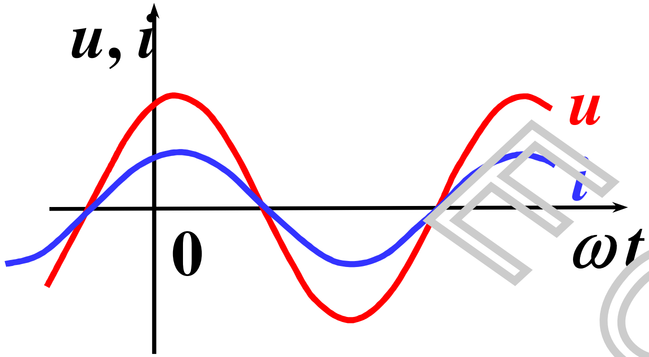
$\varphi>0$， u 领先(超前) i，或 i 落后(滞后) u

$\varphi<0$， i 领先(超前) u，或 u 落后(滞后) i

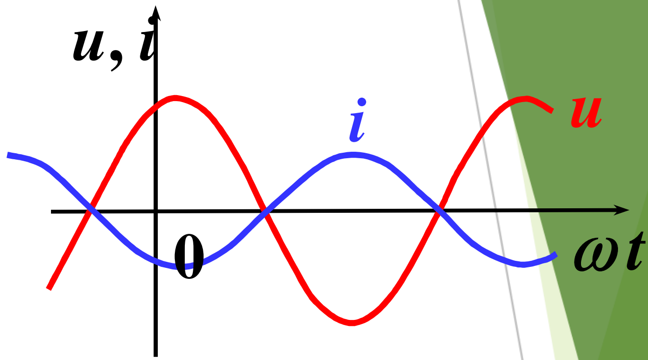


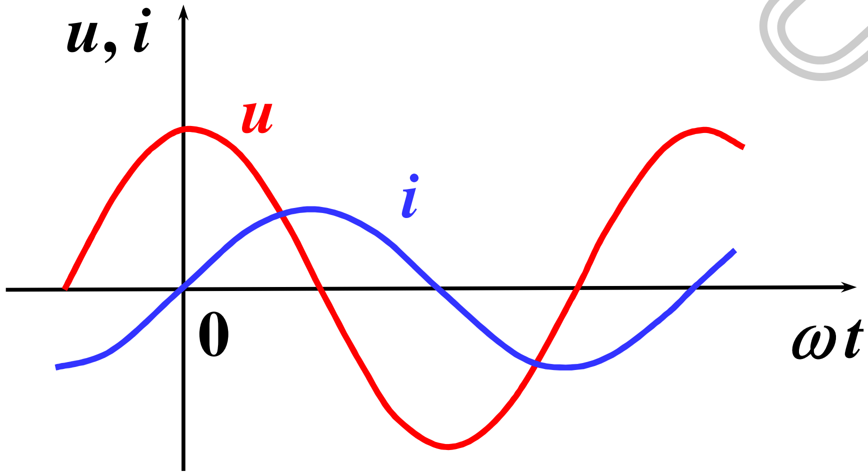
特殊相位关系：

$\varphi = 0$， 同相：



$\varphi = \pm\pi$ $(\pm 190^{o})$， 反相：





$\varphi = 90^{\circ}$

u 领先 i 90°

或 i 落后 u 90°

不说 u 落后 i 270°

或i 领先 u 270°

规定： $|\varphi| \leq \pi$ (190°)

例　计算下列两正弦量的相位差。　**解**

(1) $i_1(t)=10\cos(100\pi\, t+3\pi/4)$

$i_2(t)=10\cos(100\pi\, t-\pi/2)$

$\varphi=3\pi/4-(-\pi/2)=5\pi/4>\pi$

$\varphi=2\pi-5\pi/4=3\pi/4$

(2) $i_1(t)=10\cos(100\pi\, t+30^0)$

$i_2(t)=10\sin(100\pi\, t-15^0)$

$i_2(t)=10\cos(100\pi t-105^0)$

$\varphi=30^0-(-105^0)=135^0$

(3) $u_1(t)=10\cos(100\pi\, t+30^0)$

$u_2(t)=10\cos(200\pi\, t+45^0)$

$\omega_1\neq\omega_2$

不能比较相位差

(4) $i_1(t)=5\cos(100\pi\, t-30^0)$

$i_2(t)=-3\cos(100\pi\, t+30^0)$

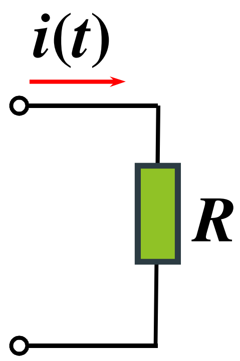
$i_2(t)=3\cos(100\pi t-150^0)$

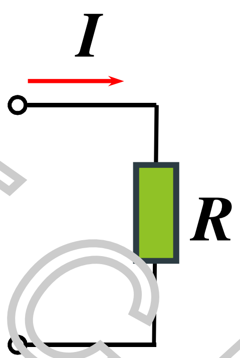
$\varphi=-30^0-(-150^0)=120^0$

两个正弦量进行相位比较时应满足同频率、同函数、同符号，且在主值范围比较。

三、有效值(*effective value*)

物理含义





$$I^2RT = \int_0^T i^2(t)R\mathrm{d}t$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}$$

$$W_1 = \int_0^T i^2(t)R\mathrm{d}t$$

$$W_2 = I^2RT$$

1. 定义

$$I \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}$$

电压有效值

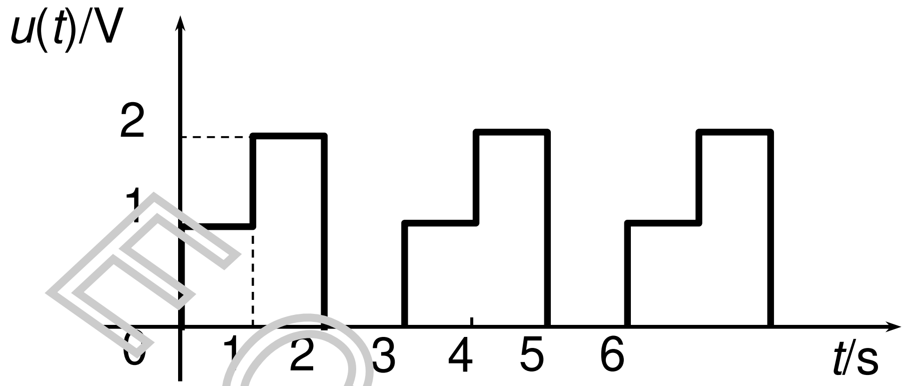
$$U \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}$$

有效值也称方均根值

(*root-mean-square*,

简记为 rms)

例 周期电压如图所示。求其有效值U。



解 根据有效值的定义，有

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{3}\left(\int_0^1 1^2\mathrm{d}t+\int_1^2 2^2\mathrm{d}t+\int_2^3 0^2\mathrm{d}t\right)}=1.29\ \mathrm{V}$$

2. 正弦电流、电压的有效值

$$I \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}$$

设 $i(t)=I_m\sin(\omega t+\psi)$

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\sin^2(\omega t+\psi)\,dt}$$

$$\because \int_0^T \sin^2(\omega t+\psi)\,dt=\int_0^T\frac{1-\cos 2(\omega t+\psi)}{2}\,dt=\frac{1}{2}t\Big|_0^T=\frac{1}{2}T$$

$$\therefore \quad I=\sqrt{\frac{1}{T}I_m^2\cdot\frac{T}{2}}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=0.707I_m$$

注意:只适用正弦量

$$I_m=\sqrt{2}I$$

$$i(t)=I_m\sin(\omega t+\psi)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi)$$

同理，可得正弦电压有效值与最大值的关系：

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}U_{\mathrm{m}} \qquad 或 \qquad U_{\mathrm{m}}=\sqrt{2}U$$

若一交流电压有效值为U=220V，则其最大值为U_{m}≈311V；

U=390V，　　　　　　U_{m}≈537V。

注:

（1）工程上说的正弦电压、电流一般指有效值,如设备额定值，但耐压值指的是最大值。

（2）测量中，交流测量仪表指示的电压、电流读数一般为有效值。

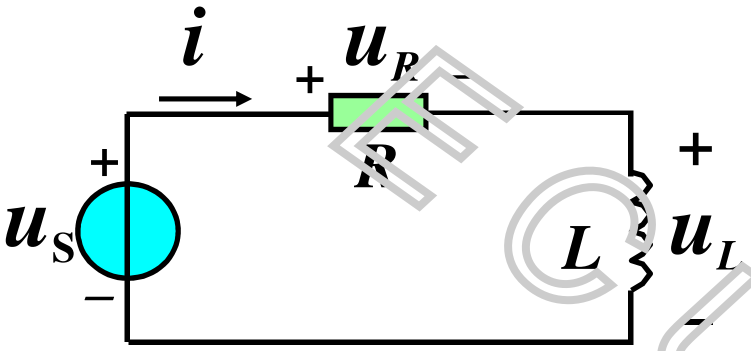
（3）区分电压、电流的瞬时值、最大值、有效值的符号。

$$i(x),\quad I_m,\quad I$$

$$u(x),\quad U_m,\quad U$$

8-3　相量法的基础

1.　问题的提出



$$u_S = U_m \sin(\omega t + \psi_u)\varepsilon(t)$$

求：$i(t), u_L(t), u_R(t)$

$$Ri + L\frac{di}{dt} = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$i = A\sin(\omega t + B) + Ce^{-\alpha t}$$

$$\boxed{i = A\sin(\omega t + B)}$$

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \psi_u)$$

$$i = A\sin(\omega t + B)$$

$$RA\sin(\omega t + B) + LA\omega\cos(\omega t + B) = U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \Psi_u)$$

$$A\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\sin(\omega t + B) + \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\cos(\omega t + B)\right)$$

$$= U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \Psi_u)$$

$$A\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\,\sin\left(B + \arctan\frac{\omega L}{R}\right) = U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \Psi_u)$$

$$\begin{cases} A\sqrt{R^2+(\omega L)^2}=U_m & \Rightarrow \quad A=\dfrac{U_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}=I_m \\ B+\arctan\left(\dfrac{\omega L}{R}\right)=\Psi_u & \Rightarrow \quad B=\Psi_u-\arctan\left(\dfrac{\omega L}{R}\right)=\Psi_u-\varphi \end{cases}$$

$$i(t)=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin\left(\omega t+\Psi_u-\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$$

$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{L\omega U_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin\left(\omega t+\Psi_u-\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)+90^\circ\right)$$

$$u_R(t)=Ri(t)=u_S-u_L(t)=\frac{RU_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin\left(\omega t+\Psi_u-\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$$

所有支路电压电流均以相同频率变化!!

$$i(t)=\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin\left(\omega t+\Psi_u-\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$$

$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{L\omega U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin\left(\omega t+\Psi_u-\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)+90^\circ\right)$$

$$u_R(t)=Ri(t)=u_{\mathrm{S}}-u_L(t)=\frac{RU_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin\left(\omega t+\Psi_u-\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$$

所有支路电压电流均以相同频率变化!!

(b) 幅值 (I_{m})

(c) 初相角(ψ)

用什么可以同时表示幅值和相位？

复数!!

KCL、KVL、元件特性如何得到简化？

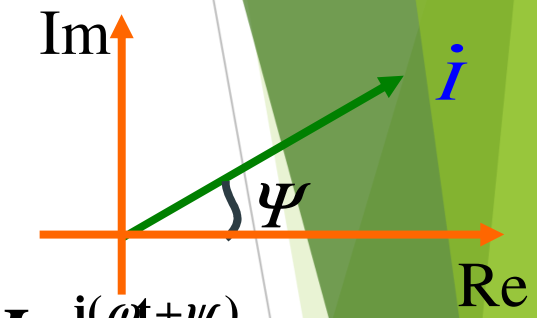
微分方程的求解如何得到简化？

3. 正弦量的相量 (*phasor*) 表示

复函数 $$A(t)=\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}$$

$$=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi)+\mathrm{j}\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi)$$

若对$A(t)$取虚部：



$$\mathrm{Im}[A(t)]=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi)$$

$$\boxed{i=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi)} \leftrightarrow A(t)=\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}$$

$A(t)$还可以写成 $$A(t)=\sqrt{2}\underbrace{I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}}_{\text{复常数}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\sqrt{2}\underbrace{\dot{I}}_{\text{相量}}\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}_{\text{旋转因子}}$$

称 $\boxed{\dot{I}=I\angle\psi}$ 为正弦量 $i(t)$ 对应的相量。

$A(t)$包含了三要素：I， ψ， ω。 复常数包含了 I，ψ。

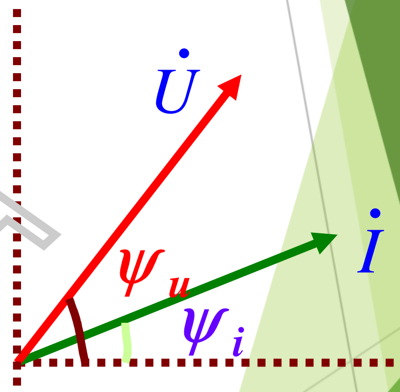
注意，相量并不等于正弦量。

$\dot{I} = I\angle\Psi$ 为正弦量 $i(t)$ 对应的相量。

$$i(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \psi) \Leftrightarrow \dot{I} = I\angle\psi$$

$\begin{cases} \text{相量的模表示正弦量的有效值} \\ \text{相量的幅角表示正弦量的初相位} \end{cases}$

同样可以建立正弦电压与相量的对应关系：



$$u(t) = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \psi_u) \rightarrow \dot{U} = U\angle\psi_u$$

相量的几何意义:

$$\dot{I} = I\angle\psi \leftrightarrow A(t) = \sqrt{2} I e^{j(wt+\psi)} = \sqrt{2}\ \underbrace{\dot{I}}_{\text{相量}}\ \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{旋转因子}}$$

$\boxed{A(t)\text{是旋转相量}}$

$$A(t) = \sqrt{2} I\cos(\omega t + \psi) + j\sqrt{2} I\sin(\omega t + \psi)$$

旋转相量在实轴上的投影就是正弦函数!

例1 已知

$$i = 141.4\sin(314t + 30^\circ)\text{A}$$
$$u = 311.1\sin(314t - 60^\circ)\text{V}$$

试用相量表示 i, u 。

解： $\dot{I} = 100\angle 30^\circ\ \text{A}$

$\dot{U} = 220\angle -60^\circ\ \text{V}$

例2 已知 $\dot{I} = 50\angle 15^\circ\ \text{A},\ f = 50\text{Hz}$.

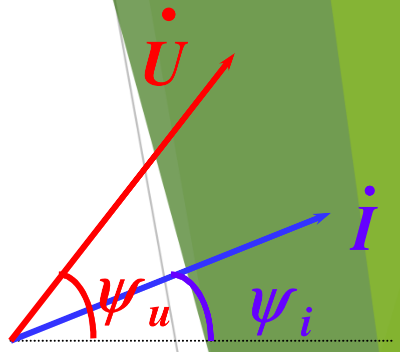
试写出电流的瞬时值表达式。

解： $i = 50\sqrt{2}\sin(314t + 15^\circ)\ \text{A}$

4. 相量图(*phasor diagram*)

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi_i)\rightarrow \dot{I}=I\angle\psi_i$$

$$u(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\psi_u)\rightarrow \dot{U}=U\angle\psi_u$$



5. 相量运算

(1) 同频率正弦量相加减

$$u_1(t)=\sqrt{2}\,U_1\sin(\omega t+\psi_1)=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\,\dot{U}_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$u_2(t)=\sqrt{2}\,U_2\sin(\omega t+\psi_2)=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\,\dot{U}_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$u(t)=u_1(t)+u_2(t)=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\,\dot{U}_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})+\mathrm{Im}(\sqrt{2}\,\dot{U}_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\,\dot{U}_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\sqrt{2}\,\dot{U}_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\underbrace{(\dot{U}_1+\dot{U}_2)}_{\dot{U}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

得: $\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2$

例3 $u_1(t)=6\sqrt{2}\sin(314t+30^\circ)\ \text{V}$

$u_2(t)=4\sqrt{2}\sin(314t+60^\circ)\ \text{V}$

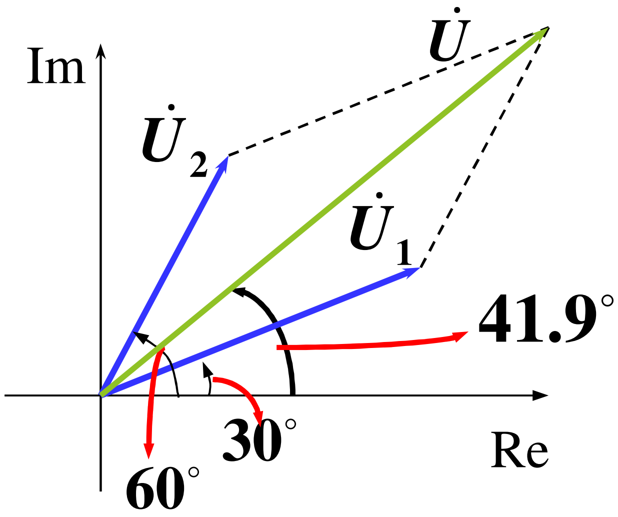
$\Rightarrow \begin{cases}\dot{U}_1=6\angle 30^\circ\ \text{V}\\ \dot{U}_2=4\angle 60^\circ\ \text{V}\end{cases}$

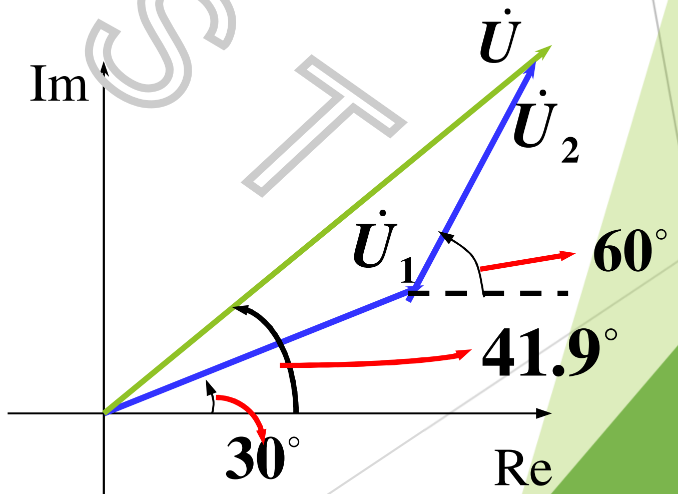
$$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2=6\angle 30^\circ+4\angle 60^\circ=5.196+\text{j}3+2+\text{j}3.464$$

$$=7.196+\text{j}6.464=9.67\angle 41.9^\circ\ \text{V}$$

$$\therefore u(t)=u_1(t)+u_2(t)=9.67\sqrt{2}\sin(314t+41.9^\circ)\ \text{V}$$

同频正弦量的加、减运算可借助相量图进行。相量图在正弦稳态分析中有重要作用，尤其适用于定性分析。





(2) 正弦量的微分、积分运算

$$i \leftrightarrow \dot{I} \qquad i \leftrightarrow \dot{I} \qquad u \leftrightarrow \dot{U}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow \mathrm{j}\omega\dot{I} \qquad \int i\mathrm{d}t \leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\dot{I} \qquad \int u\mathrm{d}t \leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\dot{U}$$

证明：

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$= \mathrm{Im}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$= \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}\,\mathrm{j}\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$\int u\mathrm{d}t = \int \sqrt{2}U\sin(\omega t + \psi)\mathrm{d}t$$

$$= -\sqrt{2}\frac{U}{\omega}\cos(\omega t + \psi)$$

$$= \frac{\sqrt{2}U}{\omega}\sin(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2})$$

$$= \mathrm{Im}[\frac{\sqrt{2}U}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \psi - \pi/2)}]$$

$$= \mathrm{Im}[\sqrt{2}\frac{\dot{U}}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

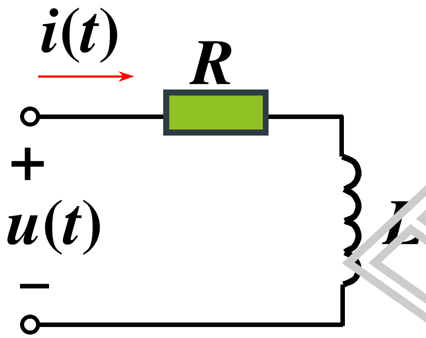
$$\dot{U} = Ue^{j\psi}$$

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

6. 相量法的应用

求解正弦电流电路的稳态解(微分方程的特解)。

例4



$$u(t)=U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi_u)$$

解: $$u(t)=Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$ 一阶常系数线性微分方程

$$\begin{cases}\text{自由分量(齐次方程通解)}: & Ae^{-(R/L)\,t} \\ \text{强制分量(特解)}: & I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi_i)\end{cases}$$

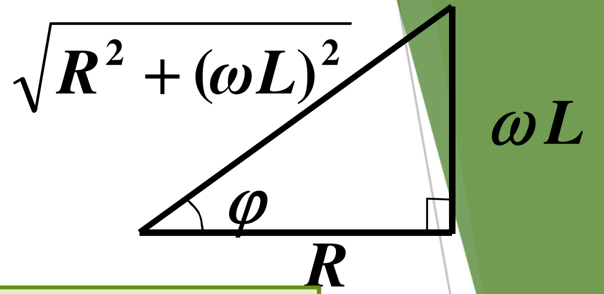
$$U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi_u)=RI_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi_i)+\omega LI_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi_i)$$

$$=\sqrt{(RI_{\mathrm{m}})^2+(\omega LI_{\mathrm{m}})^2}\sin(\omega t+\psi_i+\varphi)$$

$$U_{\mathrm{m}}=\sqrt{(RI_{\mathrm{m}})^2+(\omega LI_{\mathrm{m}})^2}\quad\Rightarrow\quad I_{\mathrm{m}}=\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

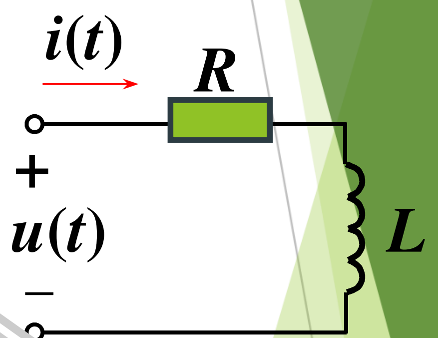
$$\psi_u = \psi_i + \varphi$$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}$$



$$\boxed{i = \frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R})}$$

用相量法求：



$$u(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

取相量　$\dot{U} = R\dot{I} + \mathrm{j}\omega L\dot{I}$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + \mathrm{j}\omega L} = \frac{U\angle\psi_u}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\angle\arctan\frac{\omega L}{R}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\angle\psi_u - \arctan\frac{\omega L}{R}$$

$$\boxed{i = \frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R})}$$

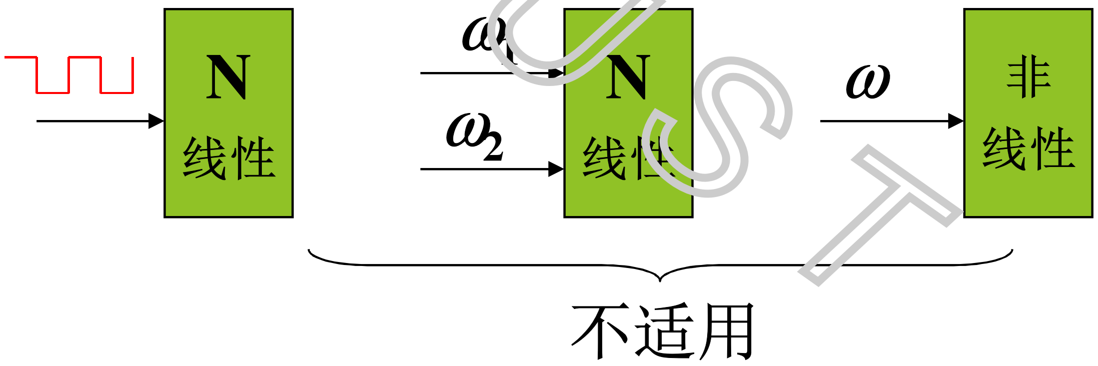
小结

① 正弦量 ⇄ 相量

时域 频域

正弦波形图 ⇄ 相量图

② 相量法只适用于激励为同频正弦量的线性时不变电路。



③ 相量法可以用来分析正弦稳态电路。