



第6章 线性系统的校正

6.1 引言

自动控制系统设计：{ (A)系统综合方法
(B)系统校正方法

(A)系统综合方法

根据预先设定的某种设计指标(这种指标通常以严格的数学形式给出), 确定相应的控制形式, 通过解析的方式找到满足预定指标的最优(或次优)控制器。



自动控制系统设计方法

(B)系统校正方法

预先制定控制系统的期望性能指标，依据这些性能指标计算出开环系统特性，通过比较期望的开环特性与实际的开环特性，确定在开环系统中增加某种校正装置，并计算校正装置的参数。

6.1.1 性能指标

(A) 时域性能指标

根轨迹设计方法

(B) 频域性能指标

频域设计方法



控制系统时域性能指标(1)

(1) 稳态性能指标

- (a) 无静差度(系统的型别)
- (b) 典型输入作用下的稳态误差或者静态误差系数(K_p, K_v, K_a)
- (c) 典型扰动作用下的稳态性能指标

(2) 瞬态性能指标

(a) 调节时间

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}, \quad \Delta \leq 5$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}, \quad \Delta \leq 2$$



控制系统时域性能指标(2)

(B) 超调量

$$\delta\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \quad (0 < \zeta < 1)$$

(C) 上升时间 t_r

$$t_r = \frac{\pi - \phi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi - \phi}{\omega_d}$$

(D) 峰值时间 t_p

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{1}{2} T_d$$

(E) 振荡次数

$$N = \frac{-2}{\ln \delta\%}, \quad \Delta = 2$$
$$N = \frac{-1.5}{\ln \delta\%}, \quad \Delta = 5$$



控制系统的频域性能指标(1)

(1) 开环频域指标

(A) 截止频率 ω_c

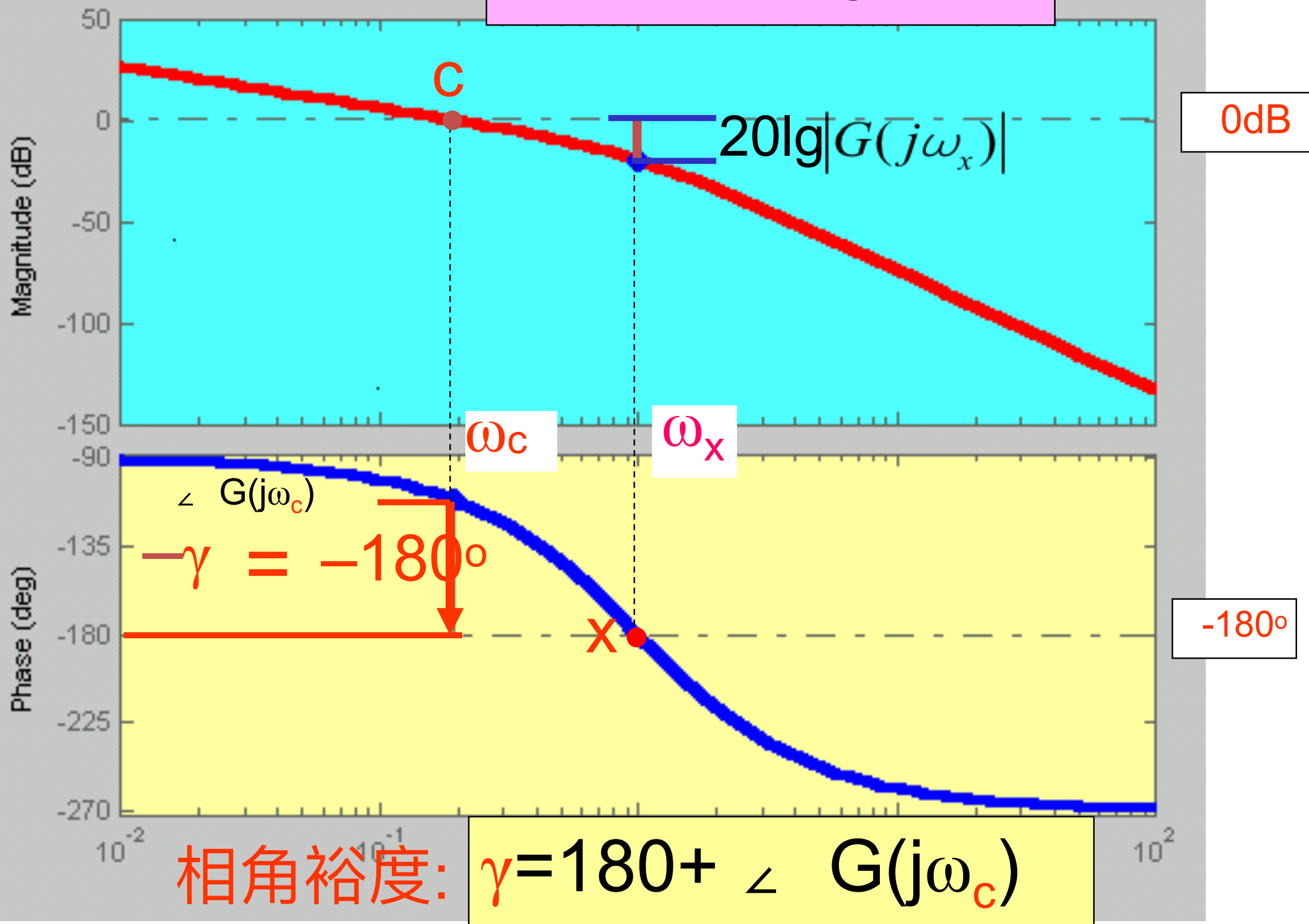
设二阶系统具有传递函数形式：
$$G(s)H(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

系统开环频率响应为：
$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\zeta\omega_n)}$$

可以求得系统的开环幅频特性及相频特性：

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\omega\sqrt{\omega^2 + (2\zeta\omega_n)^2}} \quad \angle G(j\omega)H(j\omega) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega}{2\zeta\omega_n}$$

幅值裕度: $h_{dB} = -20 \lg |G(j\omega_x)|$



相角裕度: $\gamma = 180 + \angle G(j\omega_c)$



控制系统的频域性能指标(2)

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -90^\circ - \arctan \frac{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}}{2\zeta}$$

(B) 相角裕度

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega)H(j\omega)$$

$$\gamma = \arctan \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}}$$



控制系统的频域性能指标(3)

时域性能指标 t_s 与频域性能指标的关系

$$t_s = \frac{6}{\omega_c \tan \gamma}$$

时域性能指标 $\delta\%$ 与频域性能指标的关系

$$\begin{aligned}\delta\% &= e^{-\pi \sqrt{\frac{(M_r - \sqrt{M_r^2 - 1})}{(M_r + \sqrt{M_r^2 - 1})}}} \times 100\% \\ &= e^{-\pi (M_r - \sqrt{M_r^2 - 1})} \times 100\%\end{aligned}$$

控制系统的频域性能指标(4)

(2) 闭环频域指标

(A) 谐振峰值

$$M_r = A(\omega_r) = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

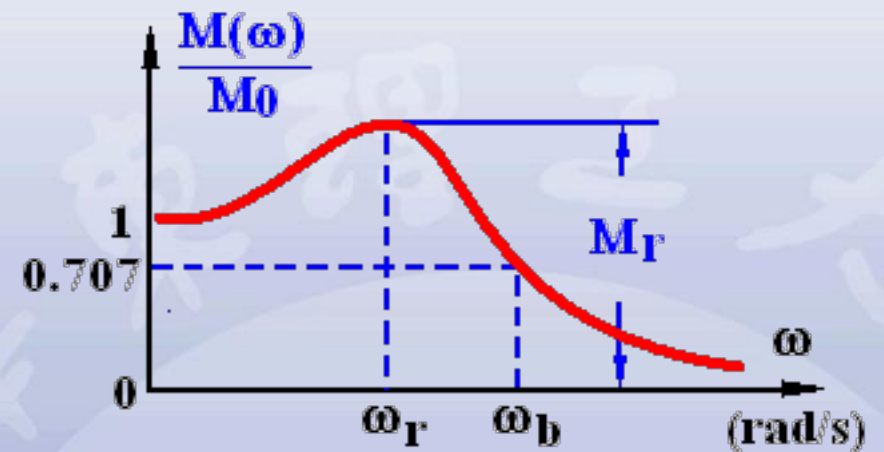
(B) 谐振频率

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$$

(C) 带宽频率 ω_b

$M(\omega)$ 下降到 $0.707 M_0$ 对应的频率值 ω_b

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2 + \sqrt{2-4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$



P133 (5-38)、(5-39)



控制系统的频域性能指标(5)

高阶系统性能指标的经验公式

(A) 谐振峰值

$$M_r \approx \frac{1}{\sin \gamma}$$

$$\delta = 0.16 + 0.4(M_r - 1), \quad 1 \leq M_r \leq 1.8$$

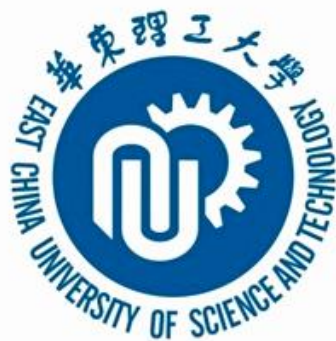
(B) 超调量

$$\delta = 0.16 + 0.4\left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1\right), \quad 34^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$$

(C) 调节时间

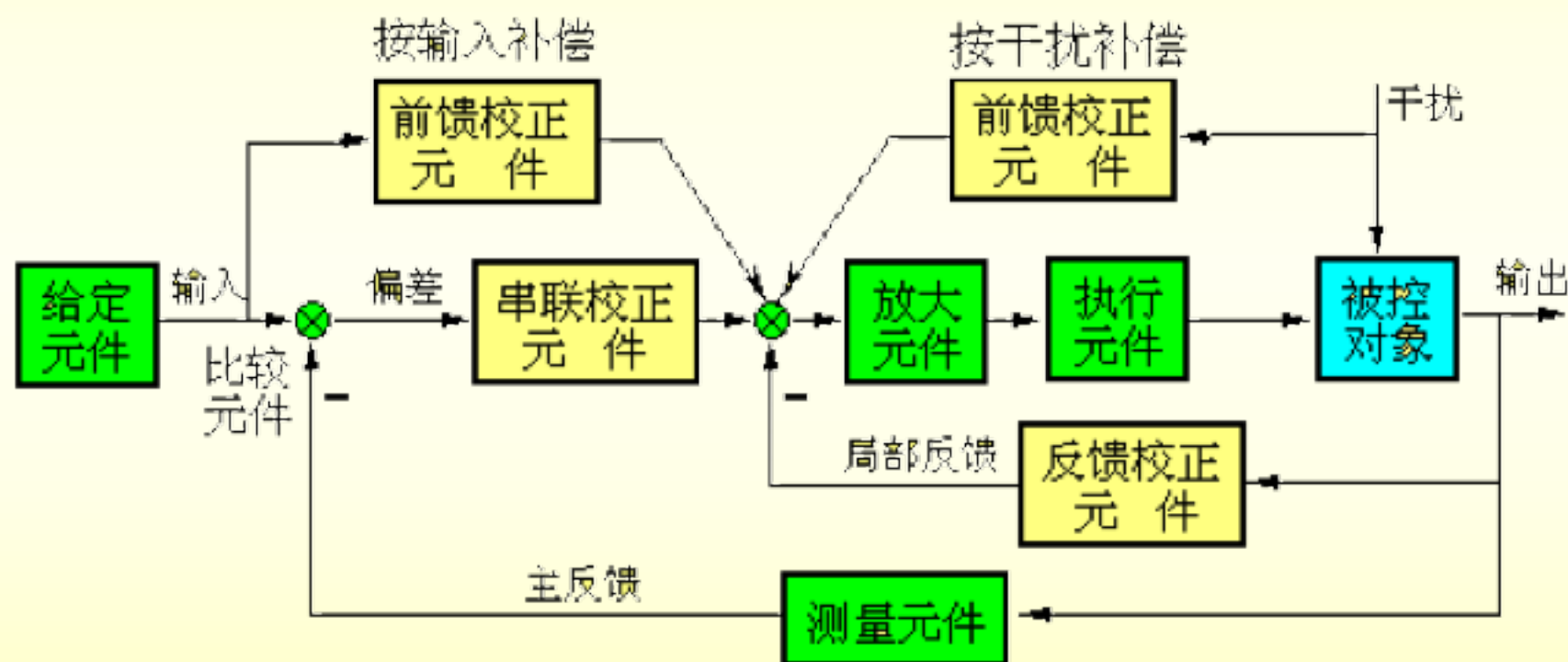
$$t_s = \frac{k\pi}{\omega_c}, \quad k = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2, \quad 1 \leq M_r \leq 1.8$$

$$k = 2 + 1.5\left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1\right) + 2.5\left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1\right)^2, \quad 34^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$$



6.1.2 校正方式

校正：采用适当方式，在系统中加入一些参数和结构可调整的装置（校正装置），用以改变系统结构，进一步提高系统的性能，使系统满足指标要求。



校正方式： 串联校正， 反馈校正， 复合校正



6.2 系统校正的根轨迹法

6.2.1 增加零、极点对根轨迹的影响

系统的稳定性、瞬态性能和稳态性能与系统的闭环极点位置有直接关系。

闭环极点位置调整方法：

- (A) 调整开环增益；
- (B) 改造系统的根轨迹(校正环节)。

1) 增加极点对根轨迹的影响

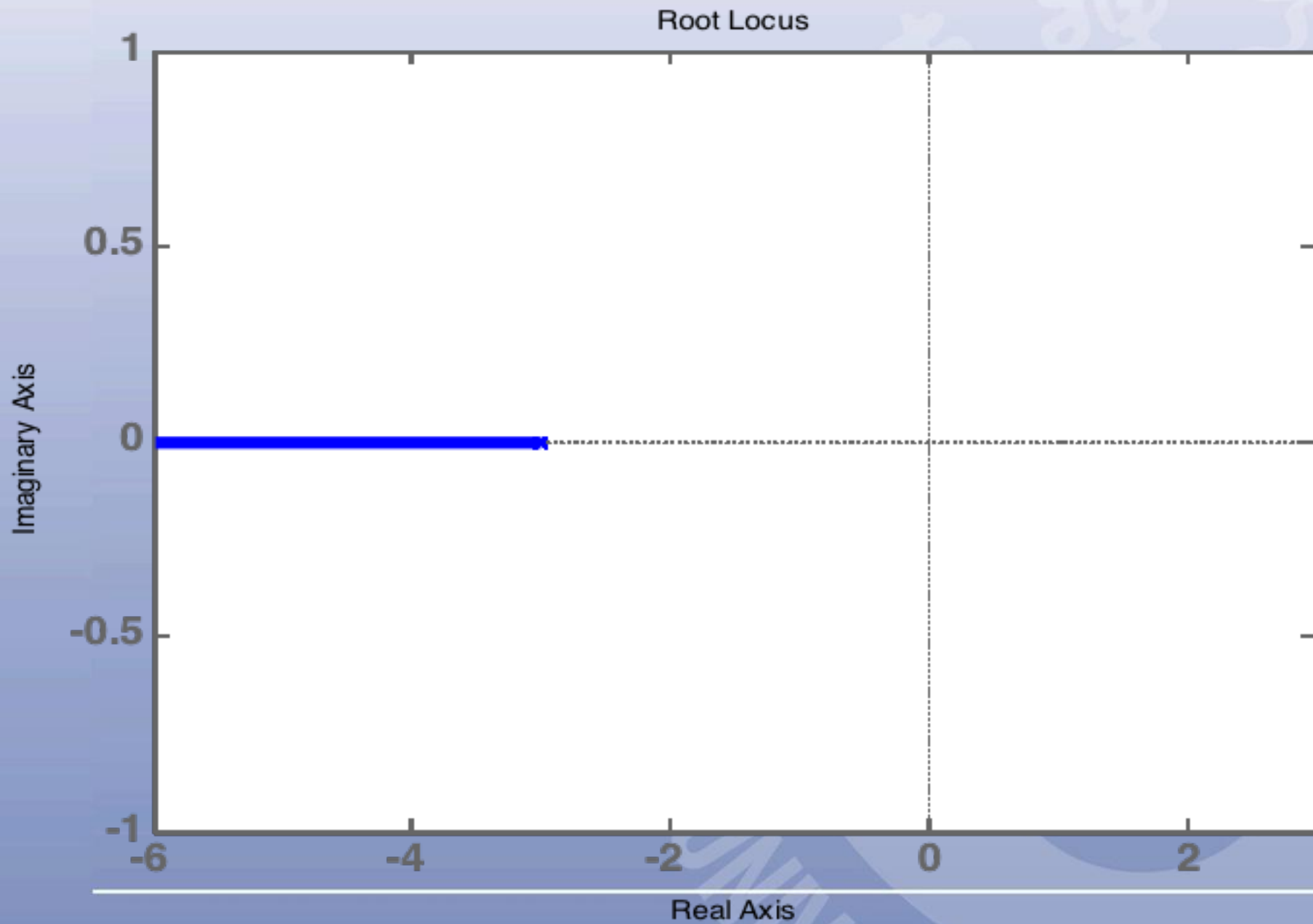
在开环系统中增加极点，可以使根轨迹向右方移动。

降低系统的相对稳定性

增加系统响应的调节时间

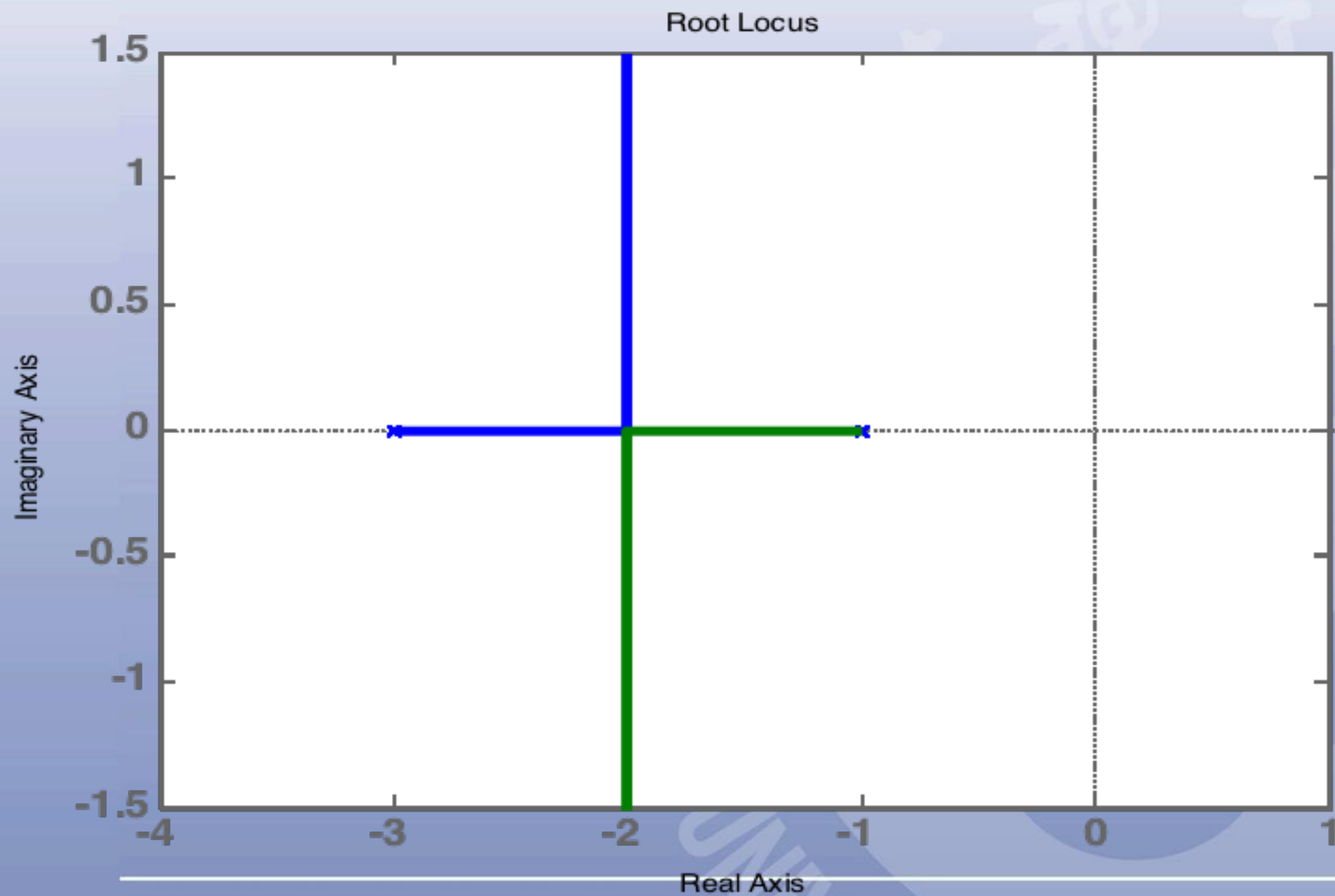
增加极点对根轨迹的影响(1)

$$G(s) = \frac{1}{s+3}$$



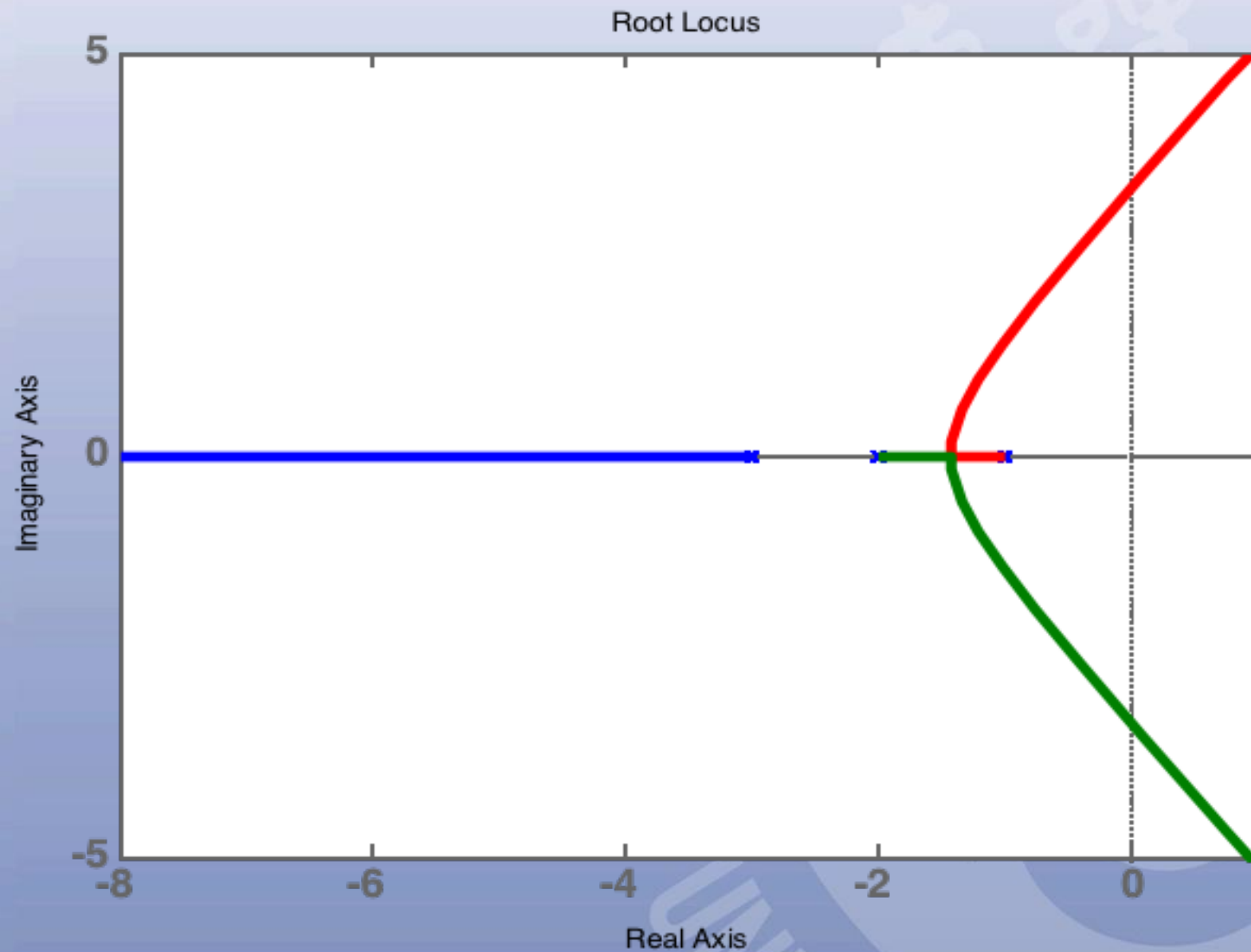
增加极点对根轨迹的影响(2)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$



增加极点对根轨迹的影响(3)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$





6.2.1 增加零、极点对根轨迹的影响

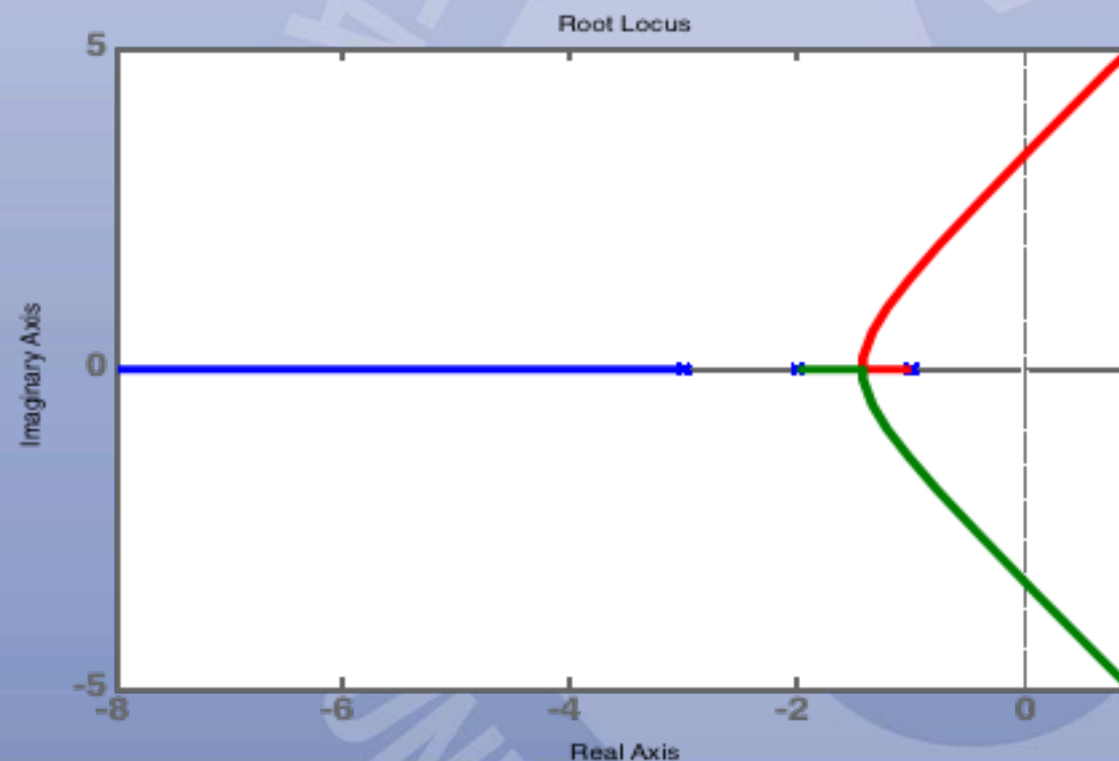
2) 增加零点对根轨迹的影响

在开环系统中增加零点，可以使根轨迹向左方移动。

增加系统的相对稳定性

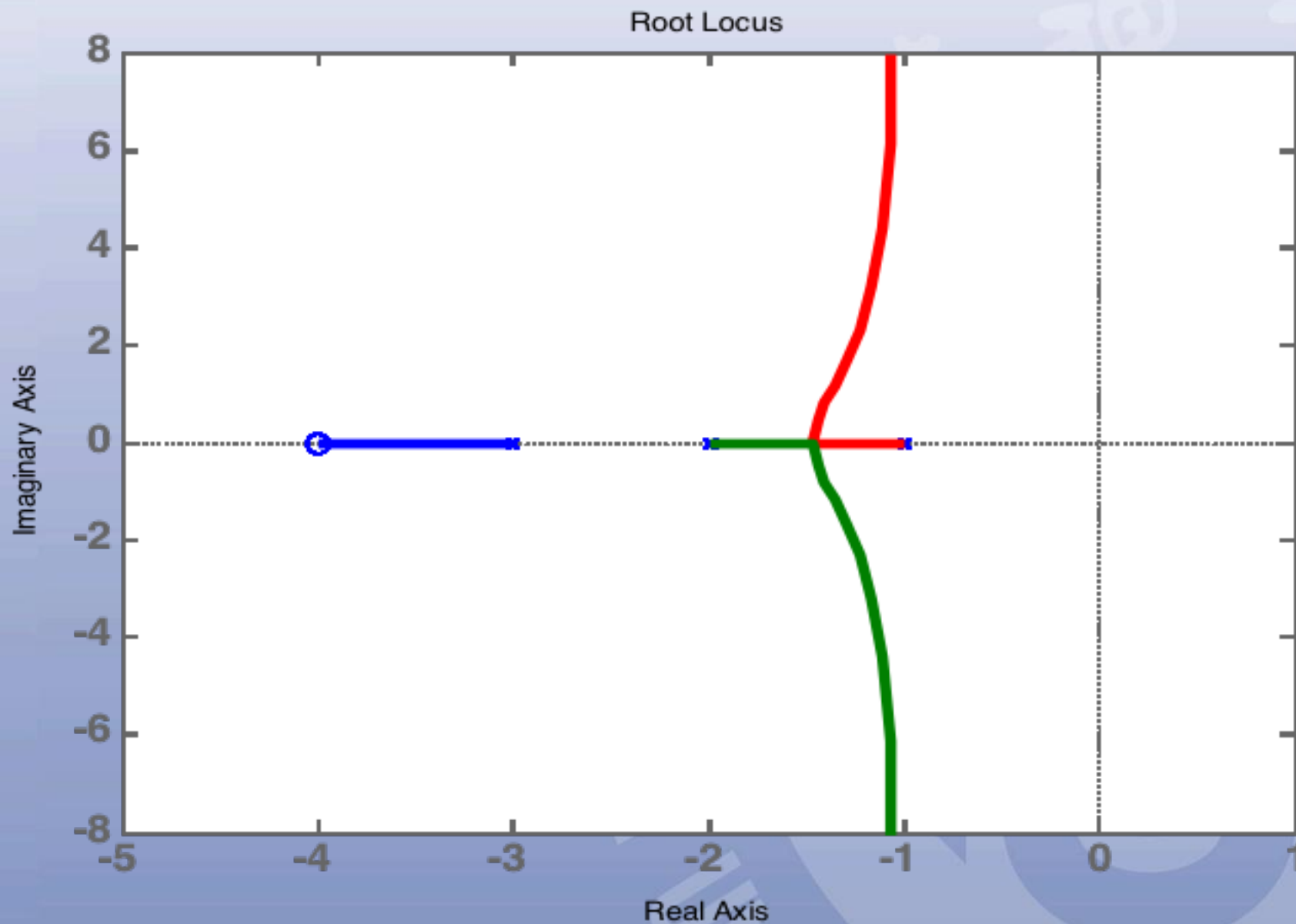
减少系统响应的调节时间

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$



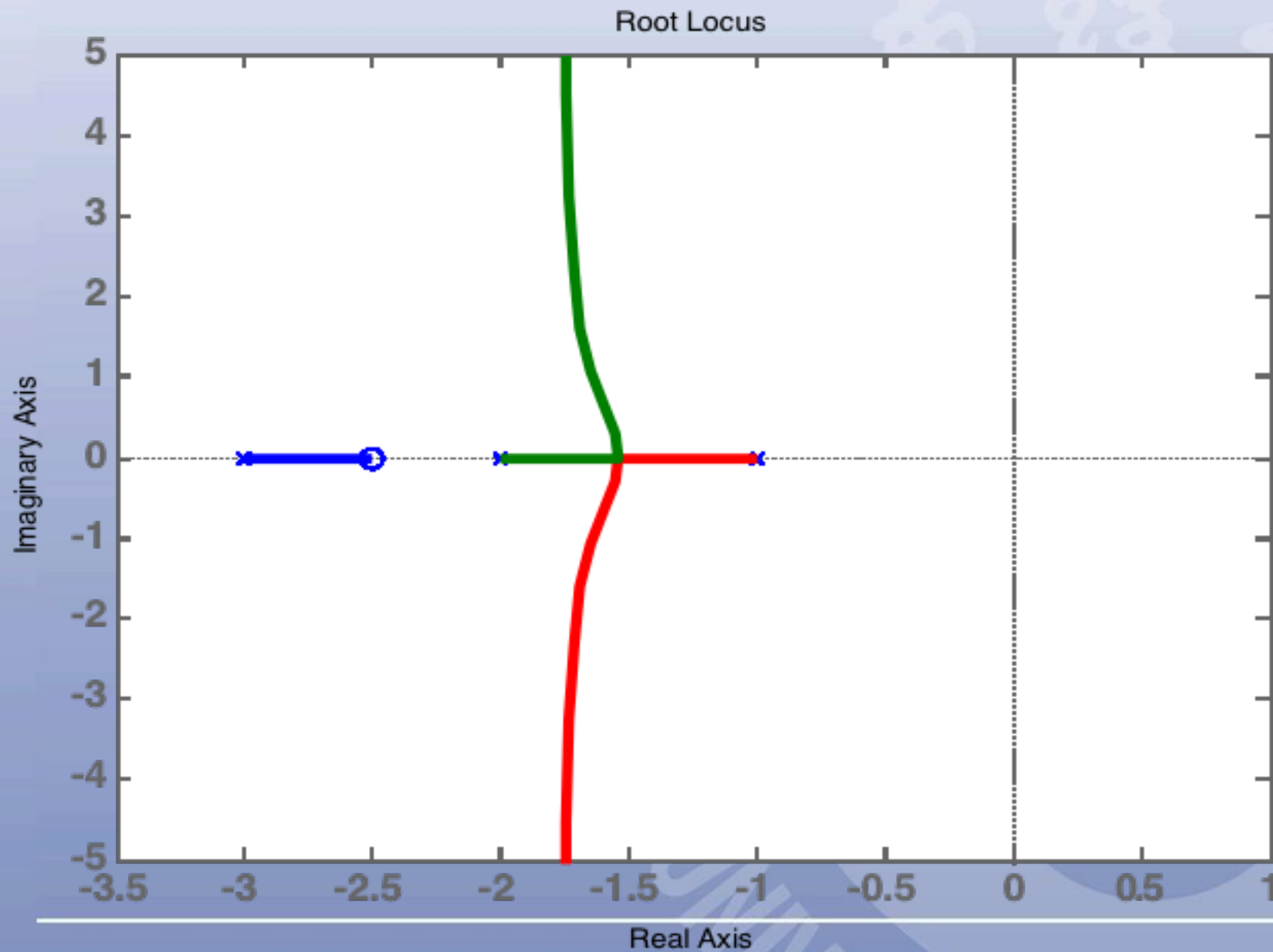
增加零点对根轨迹的影响(1)

$$G(s) = \frac{(s + 4)}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$



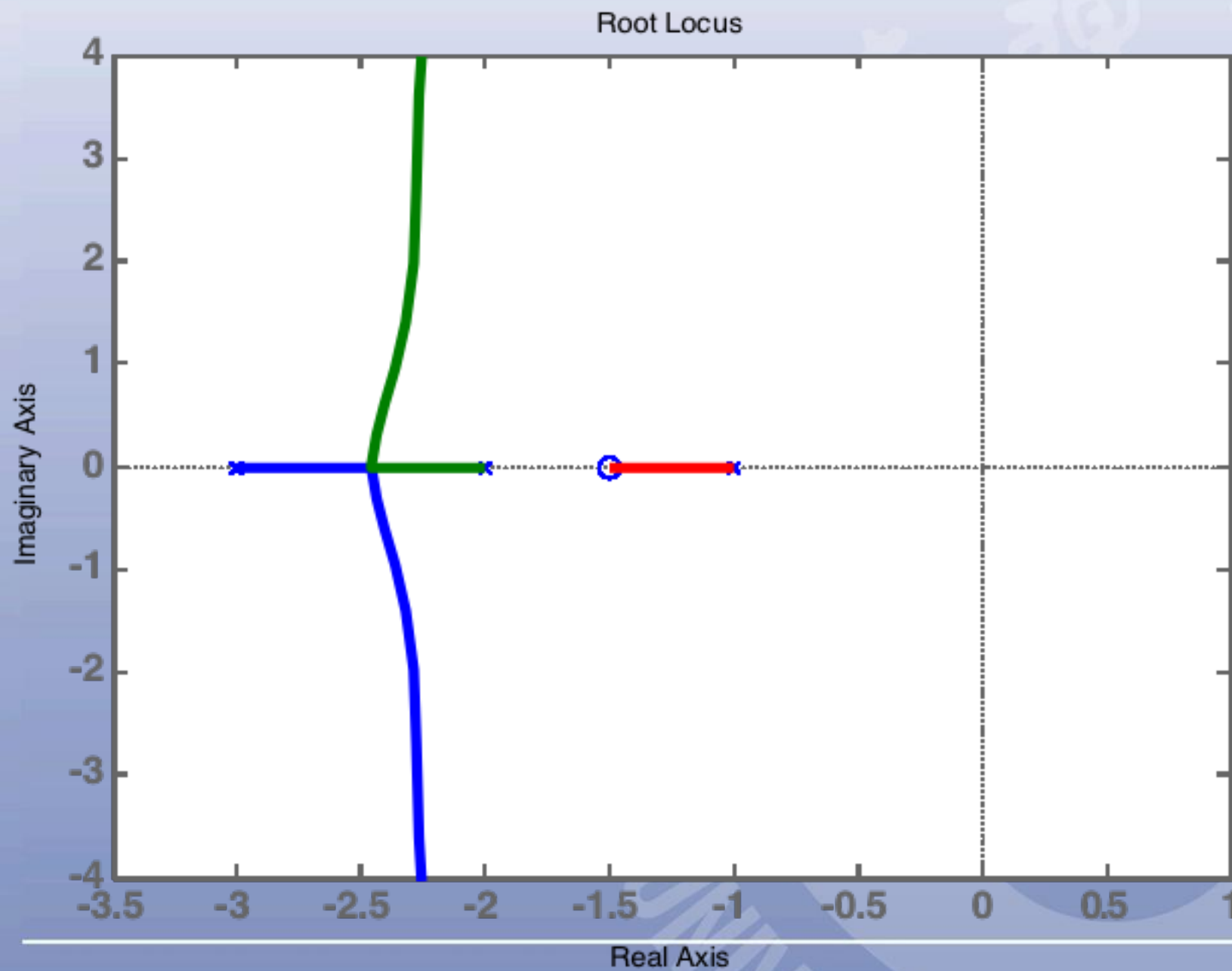
增加零点对根轨迹的影响(2)

$$G(s) = \frac{(s + 2.5)}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$



增加零点对根轨迹的影响(3)

$$G(s) = \frac{(s + 1.5)}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$





6.2.1 增加零、极点对根轨迹的影响

3) 增加开环偶极子对根轨迹的影响

开环偶极子

开环系统中相距很近(和其他零极点相比)的一对极点和零点。

偶极子到其他零极点的矢量近似相等，它们在根轨迹的幅值条件和幅角条件中的作用相互抵消几乎不改变根轨迹的形状，它们对系统的**稳定性**和**瞬态性能**几乎没有影响。

偶极子如果靠近原点(它们的模很小)，它们改变系统的开环增益，会较大地影响系统的**稳态性能**。



偶极子对系统稳态性能影响分析

$$G_0(s) = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^\nu \prod_{j=1}^{n-\nu} (s + p_j)}$$

K_g 为根轨迹增益

时间常数形式:

$$G_0(s) = \frac{K_g \prod_{i=1}^m z_i \prod_{i=1}^m \left(\frac{1}{z_i} s + 1\right)}{s^\nu \prod_{j=1}^{n-\nu} p_j \prod_{j=1}^{n-\nu} \left(\frac{1}{p_j} s + 1\right)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^\nu \prod_{j=1}^{n-\nu} (T_j s + 1)}$$

系统的开环增益:

$$K = K_g \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^{n-\nu} p_j}$$



偶极子对系统稳态性能影响分析(2)

考虑在原点附近增加一对偶极子 $z_c = 10p_c$

$$K' = K_g \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^{n-\gamma} p_j} \cdot \frac{z_c}{p_c} = 10K_g \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^{n-\gamma} p_j}$$

$$K' = 10K$$

在原点附近增加一对偶极子，且 $|z_c| > |p_c|$ ，开环增益提高了10倍，可以改善系统的稳态特性。



例：偶极子作用考察

系统的开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)}$$

在系统中附加偶极点对，相应的新开环传递函数为

$$W'_K(s) = \frac{K_g(s+0.1)}{s(s+0.01)(s+1)(s+2)}$$

讨论： 系统的闭环传递函数为：

$$W_B(s) = \frac{1.06}{s(s+1)(s+2) + 1.06}$$

其闭环的极点为： $s_{1,2} = -0.33 \pm j0.58$, $s_3 = -2.34$

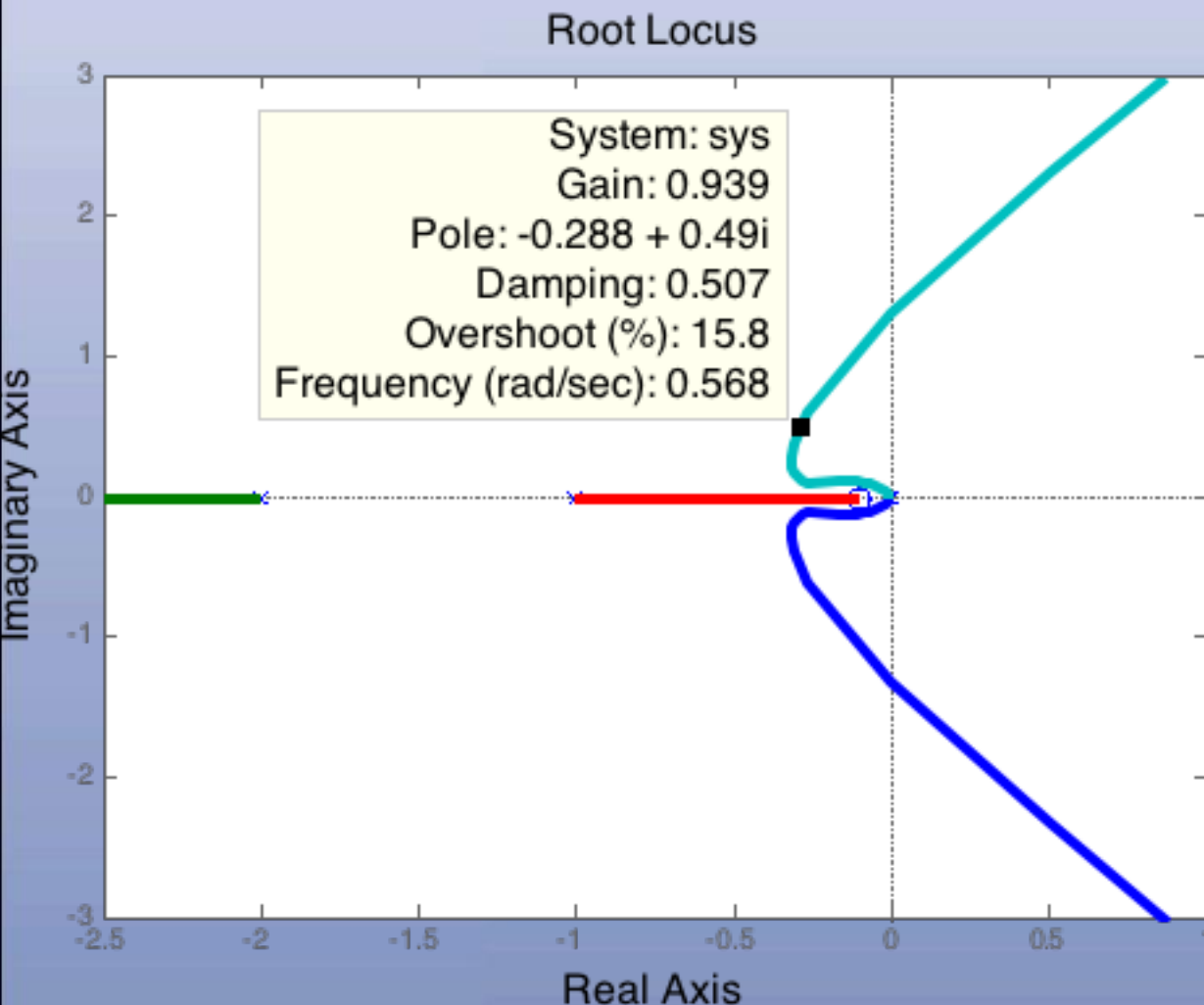
对应的阻尼比及自然振荡角频率为： $\zeta=0.5$, $\omega_n = 0.67$



系统的速度误差系数: $K_v = 0.53$

对系统附加开环偶极子时:

$$W'_K(s) = \frac{K_g(s + 0.1)}{s(s + 0.01)(s + 1)(s + 2)} \quad \text{其中} \quad K_g = \frac{1.06K_c}{10}$$



开环零极点形成的偶极子距离原点非常近，新系统的根轨迹除S平面原点附近外，与原系统的根轨迹相比无明显变化。

如果保持新的闭环主导极点阻尼比不变:

$$\zeta = 0.5$$



闭环主导极点为：

$$s'_{1,2} = -0.28 \pm j0.51$$

相应的另外两个极点分别为

$$s'_3 = -2.31, \quad s'_4 = -0.137$$

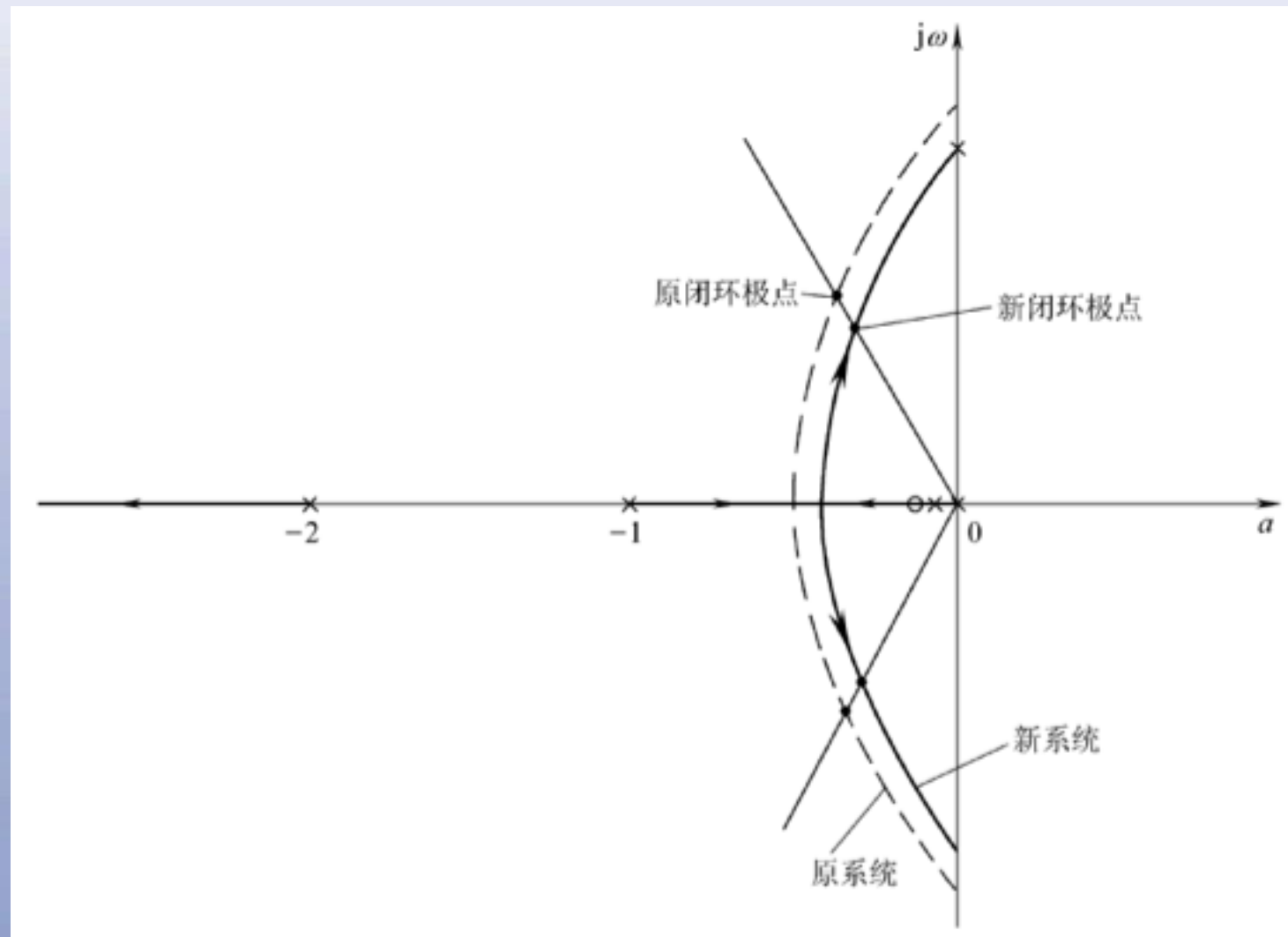
偶极子在原点附近增加了一个新的闭环极点 s'_4 ,它和附加开环零点组成一对闭环的偶极子,它们对系统的动态性能影响很小。

$$K_g = \left| \frac{s(s+0.01)(s+1)(s+2)}{(s+0.1)} \right|_{s=-0.28+j0.51} = 0.98$$

$$K_g = \frac{1.06K_c}{10} \quad K_c = \frac{10}{1.06} K_g = 9.25$$

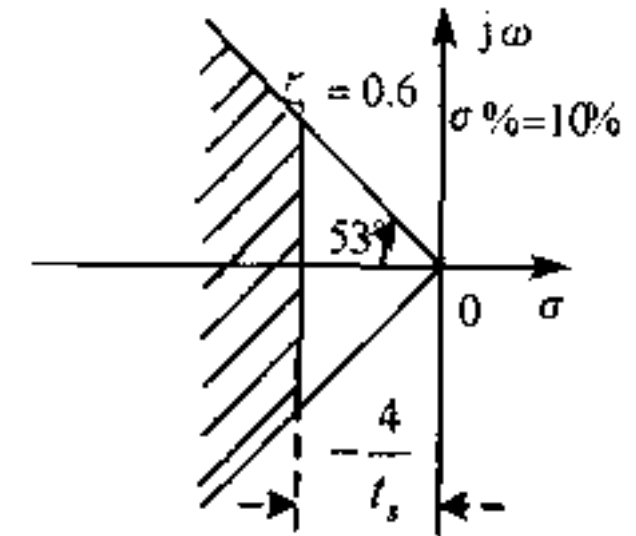
$$K'_v = \lim_{s \rightarrow 0} sW'_k(s) = 4.9$$

系统附加开环偶极子对根轨迹的影响



新系统的根轨迹除 s 平面原点附近外，与原系统根轨迹相比无明显变化。

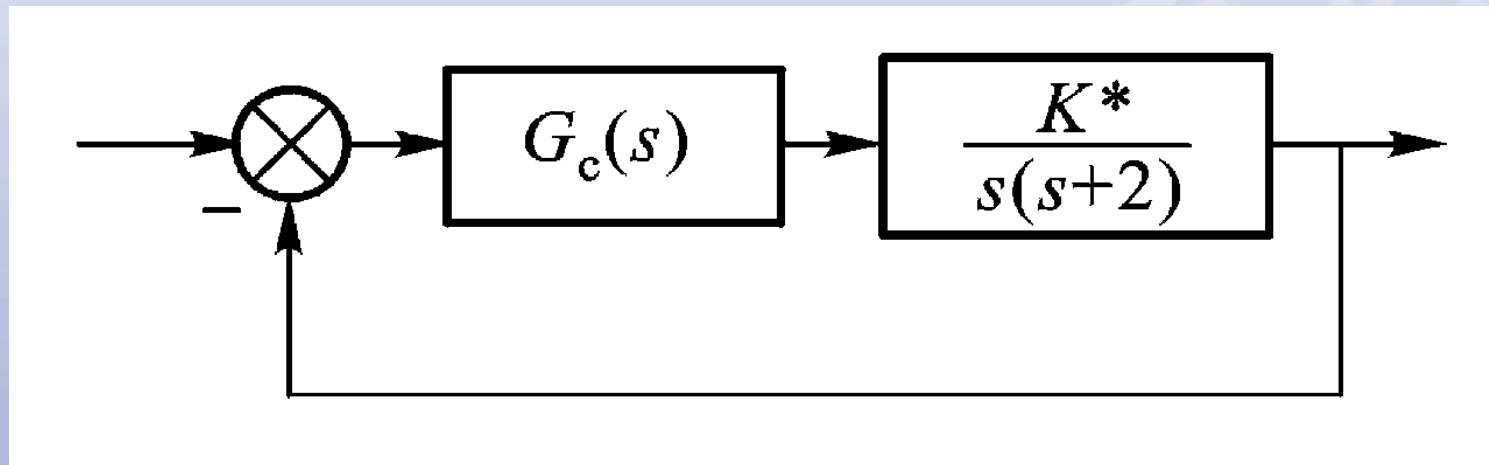
基于根轨迹校正的一般步骤



- ((1))根据给定的瞬态性能指标确定主导极点的位置；
- ((2))绘制未校正系统的根轨迹。若希望的主导极点不在此根轨迹上，说明仅靠调整系统的增益不能满足性能指标要求，需要增加适当的校正装置改造系统的根轨迹，使其通过希望的主导极点；
- ((3))当校正后的根轨迹已通过希望的主导极点，还需要检验相应的开环增益是否满足稳态要求。若不满足，可以采用在原点附近增加开环偶极子的办法来调节开环增益，同时保持根轨迹仍通过希望的主导极点。

6.2.2 基于根轨迹的系统校正

1) 超前校正



要求设计串联超前校正环节，使得系统阶跃响应满足以下要求，超调量 $\sigma < 0.30$ ，调节时间 $t_s < 2s$ ，开环增益 $K \geq 5$



解： (A) 根据期望瞬态性能指标确定闭环主导极点位置

$$\delta\% \leq 30\%$$

选择阻尼比

$$\zeta = 0.5$$

$$\cos \theta = 0.5 \quad \theta = 60^\circ$$

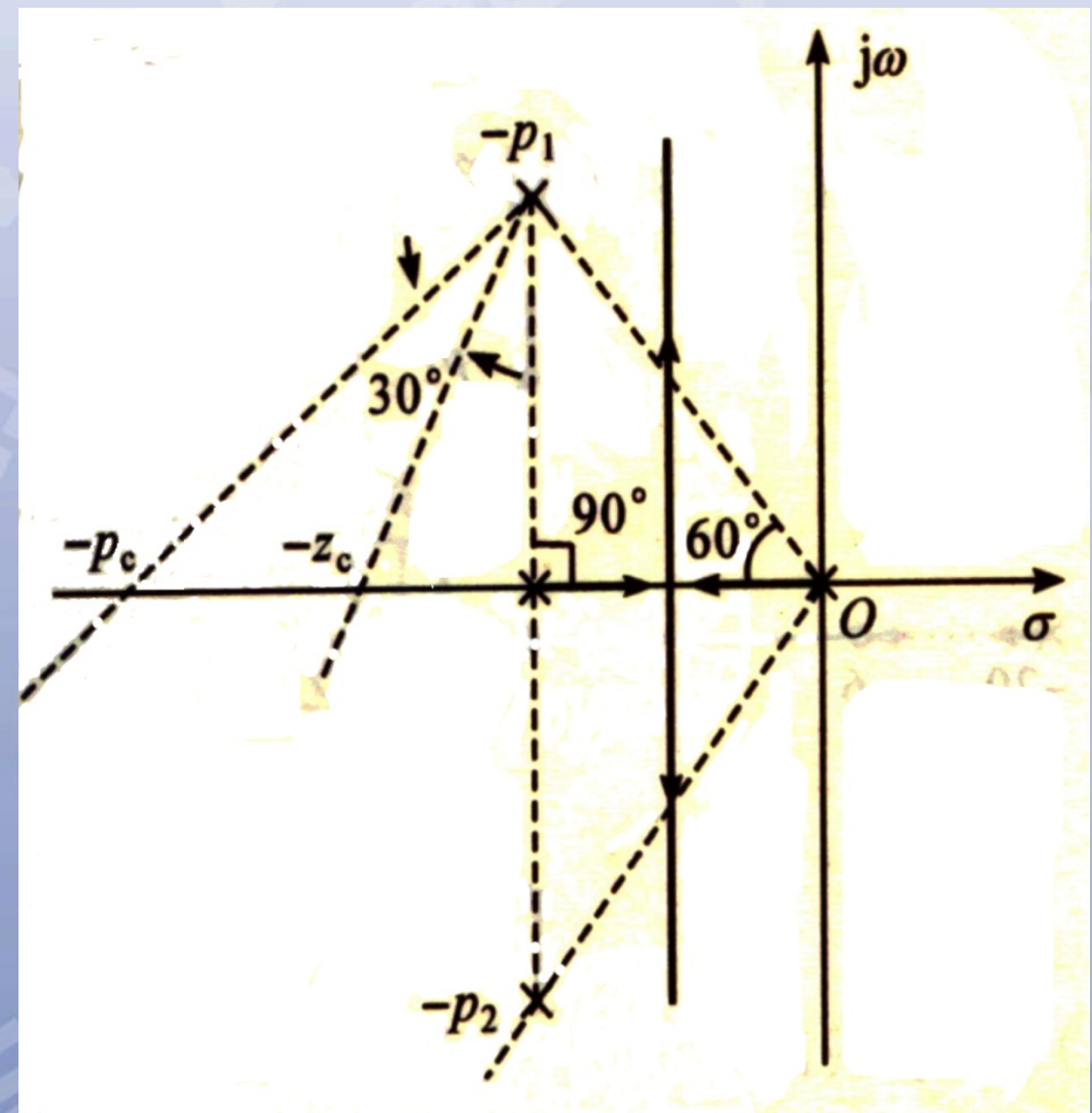
$$t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n} \quad \omega_n = 4$$

可以求得主导极点为：

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -2 \pm j 2\sqrt{3}$$

(B) 作出未校正系统的根轨迹

根轨迹不通过希望的主导极点，
需要加入校正环节



$$c(s) = \frac{s + z_c}{s + p_c}, \quad |z_c| < |p_c|$$

超前校正装置

校正后系统的开环传递函数为：

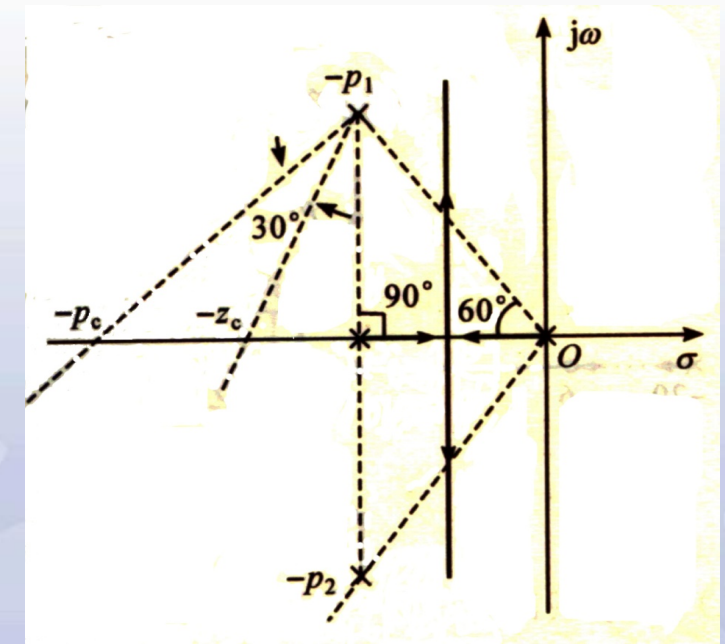
$$G_0(s) = \frac{K_g(s + z_c)}{s(s + 2)(s + p_c)}$$

根据幅角条件：

$$\angle(-p_1 + z_c) - \angle(-p_1) - \angle(-p_1 + 2) - \angle(-p_1 + p_c) = (2k + 1) \times 180^\circ$$

$$\begin{cases} \angle(-p_1) = 120^\circ \\ \angle(-p_1 + 2) = 90^\circ \end{cases}, \quad k = -1$$

$$\angle(-p_1 + z_c) - \angle(-p_1 + p_c) = 30^\circ$$



为使系统校正后满足闭环主导极点的条件，应保证校正环节的零极点远离闭环系统的主导极点

如果取 $-Z_c = -6$

$$-p_c = -20$$

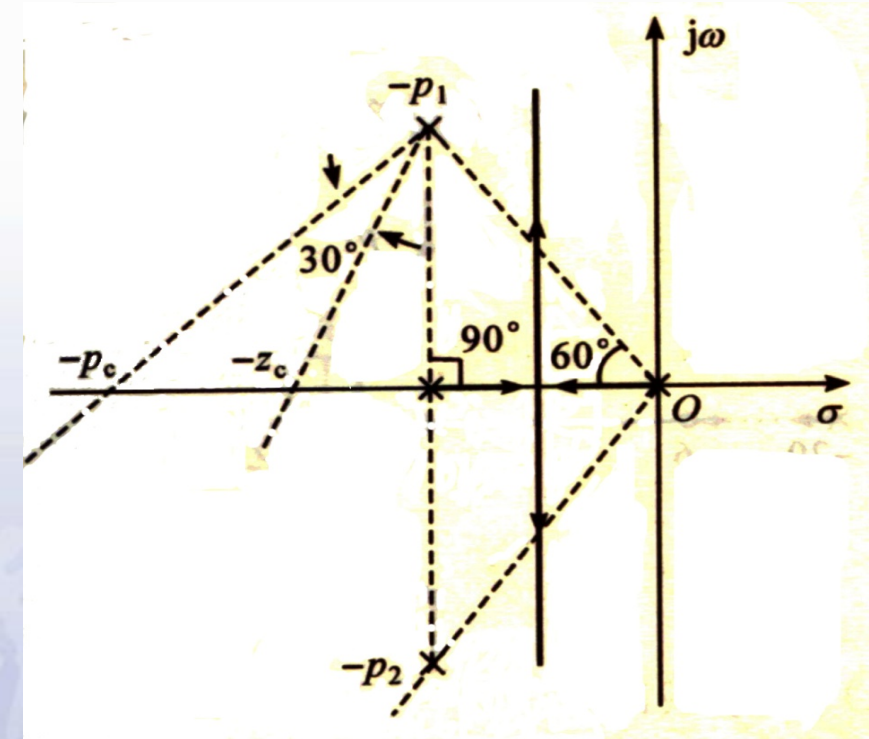
$$C(s) = \frac{s+6}{s+20}$$

(C) 检验系统校正后稳态性能指标

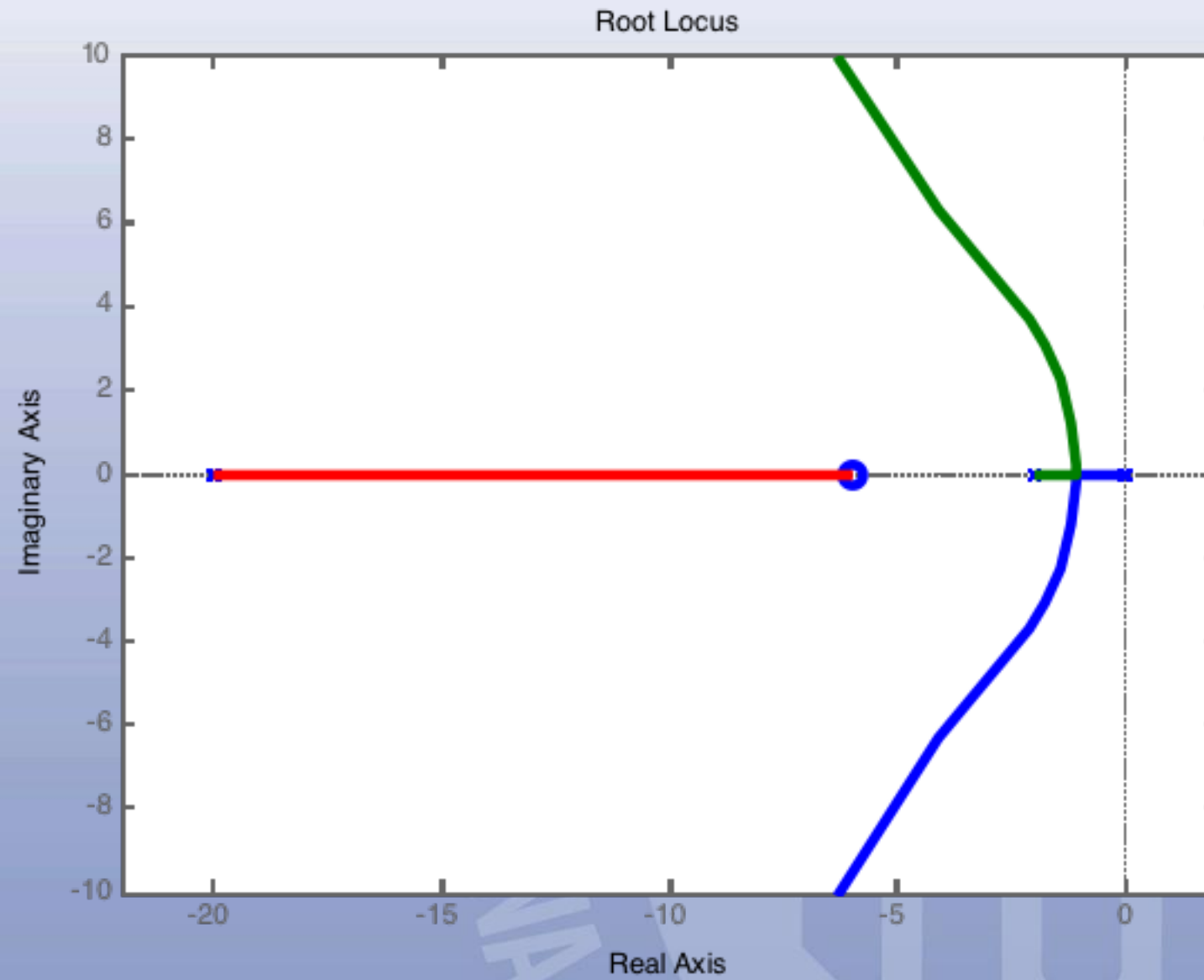
$$k_g \frac{|-p_1 + z_c|}{|-p_1| |-p_1 + 2| |-p_1 + p_c|} = 1$$

$$k_g = 48$$

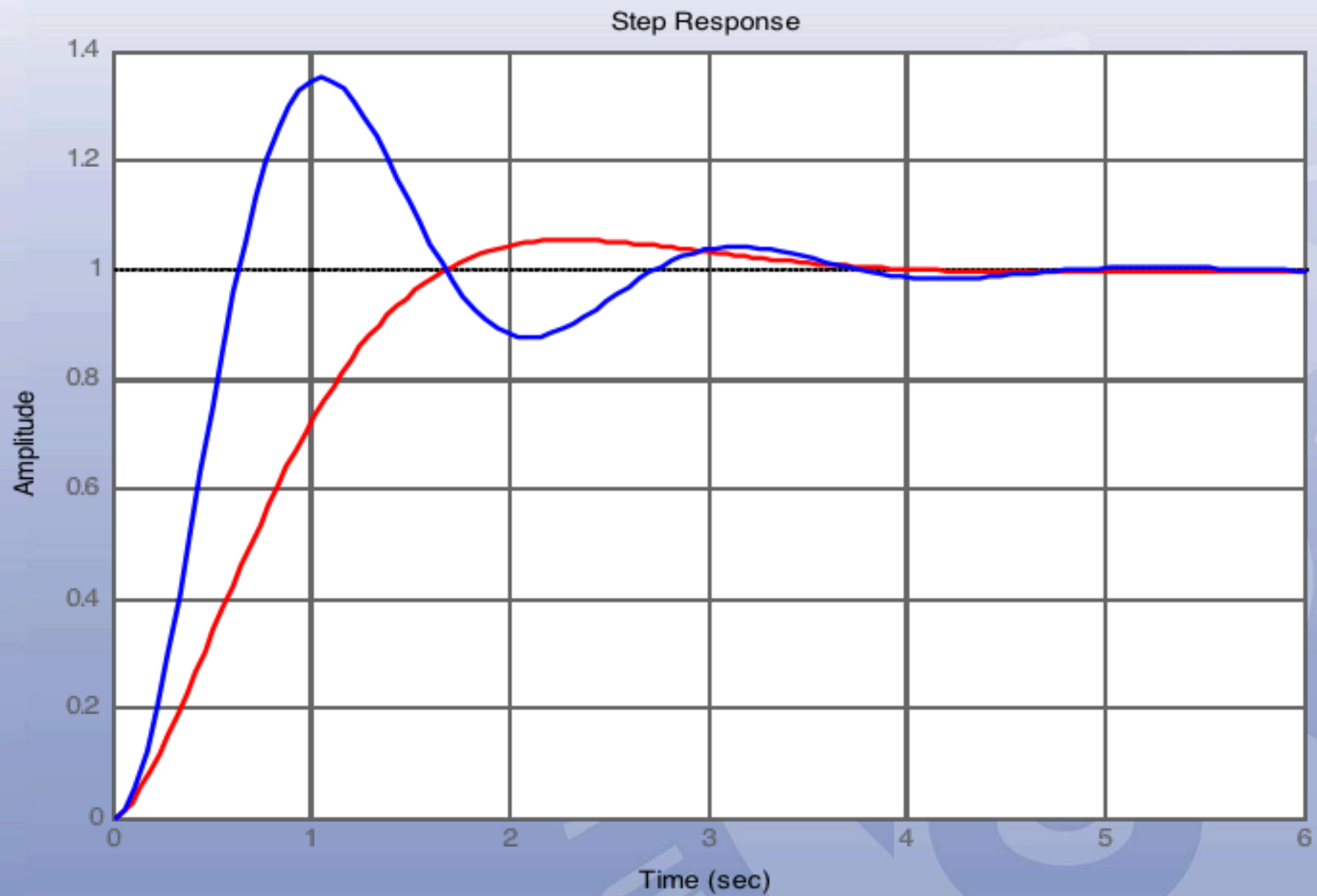
$$K = K_g \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^{n-\gamma} p_j} = 48 \times \frac{6}{2 \times 20} = 7.2$$



超前校正后的系统根轨迹



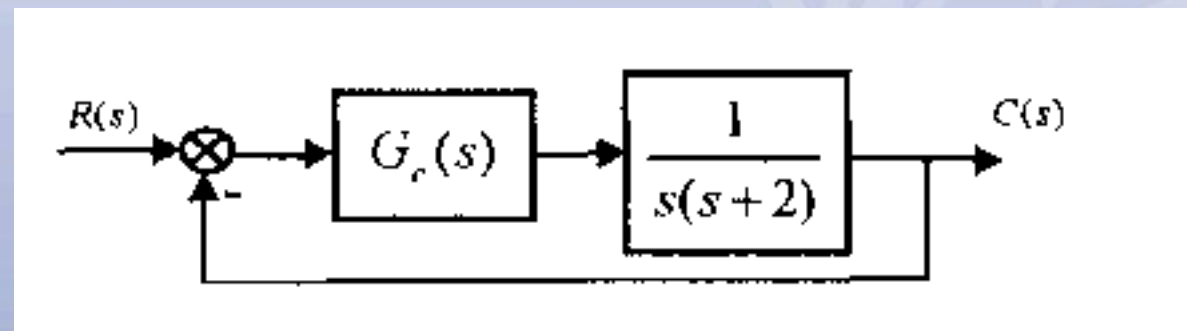
系统单位阶跃响应





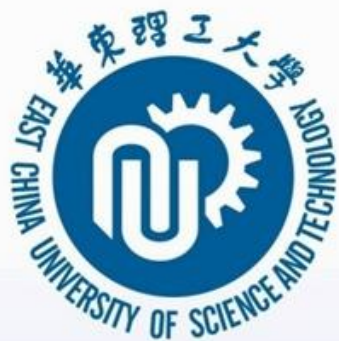
例2：基于根轨迹法串联补偿(超前校正)

已知控制系统结构图如下图所示，选取 $G_c(s) = \frac{K(0.25s + 1)}{Ts + 1}$ 试采用根轨迹法进行串联超前校正，使闭环系统的主导极点为 $\omega_n = 9, \zeta = 0.45$ 。



解： 主导极点为： $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \approx -4 \pm j8$

开环传递函数为： $G_0(s) = \frac{K(0.25s + 1)}{(Ts + 1)} \cdot \frac{1}{s(s + 2)} = \frac{0.25K(s + 4)}{Ts(s + \frac{1}{T})(s + 2)}$



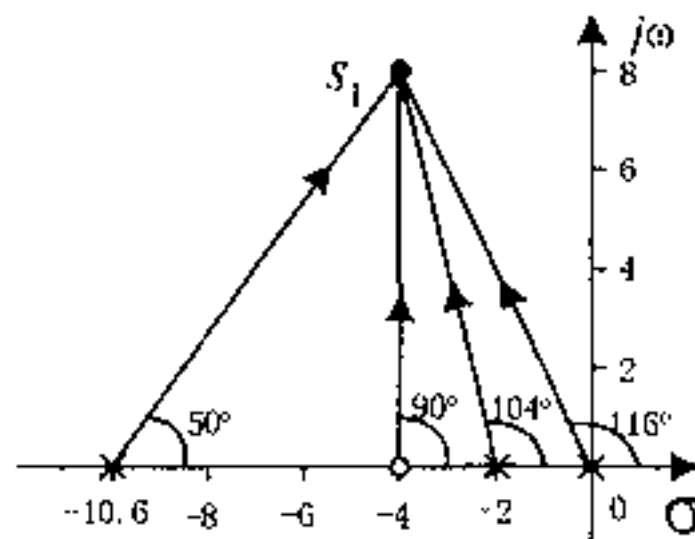
$$G_0(s) = K^* \frac{(s+4)}{s(s+2)(s+\frac{1}{T})}$$

根据根轨迹幅角条件求解补偿环节参数

$$\angle(s_1 + 4) - \angle(s_1 + 0) - \angle(s_1 + 2) - \angle(s_1 + \frac{1}{T}) = 180^\circ$$

$$\angle(s_1 + \frac{1}{T}) = -180^\circ - 90^\circ + 104.04^\circ + 116.57^\circ = 49.4^\circ \approx 50^\circ$$

$$\frac{8}{\frac{1}{T} - 4} = \tan 50^\circ \quad \frac{1}{T} = 10.7 \quad T = 0.093$$



根据根轨迹模条件确定开环增益:

$$\left| \frac{0.25K}{T} \cdot \frac{(s+4)}{s(s+\frac{1}{T})(s+2)} \right| = 1$$

$$\frac{0.25K}{0.093} \cdot \frac{8}{8.94 \times 10 \times 8.24} = 1$$

解得: $K = 34.25$ 。于是,校正网络为

$$G(s) = \frac{34.25(0.25s + 1)}{0.093s + 1}$$



6.2.2 基于根轨迹的系统校正(2)

2) 滞后校正

系统已经具有满意的瞬态性能指标，但是其稳态性能指标不符合要求。面对这种情况：

可采用增加开环偶极子的办法来最大开环增益。

$$C(s) = \frac{s + z_c}{s + p_c}, \quad |z_c| > |p_c|$$

滞后校正环节

校正装置的零点和极点相距很近，而且靠近原点，不对系统的根轨迹形状产生显著的影响，不会明显影响瞬态性能。

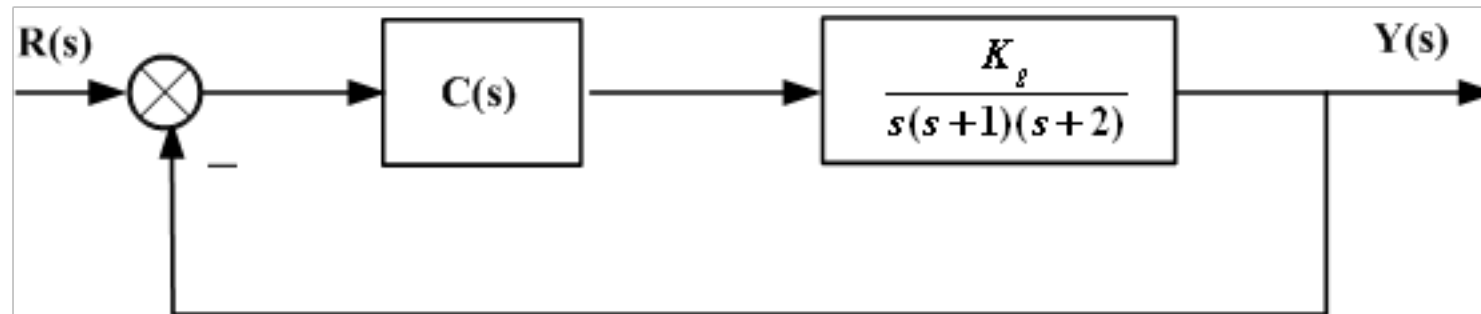


例：滞后校正讨论

设系统开环传递函数为：
$$P(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+2)}$$

要求闭环系统的主导极点参数为 $\zeta = 0.5, \omega_n \geq 0.6$ ，静态速度误差系数

$$K_v \geq 5$$





讨论:

$$\cos \theta = \zeta \quad \theta = 60^\circ$$

$\zeta = 0.5$ 的两条射线OA和OB, 分别与根轨迹交于 $-p_1, -p_2$ 。

闭环主导极点的实部: $\sigma = \zeta \omega_n = 0.33$ $\omega_n = \frac{0.33}{0.5} = 0.66$

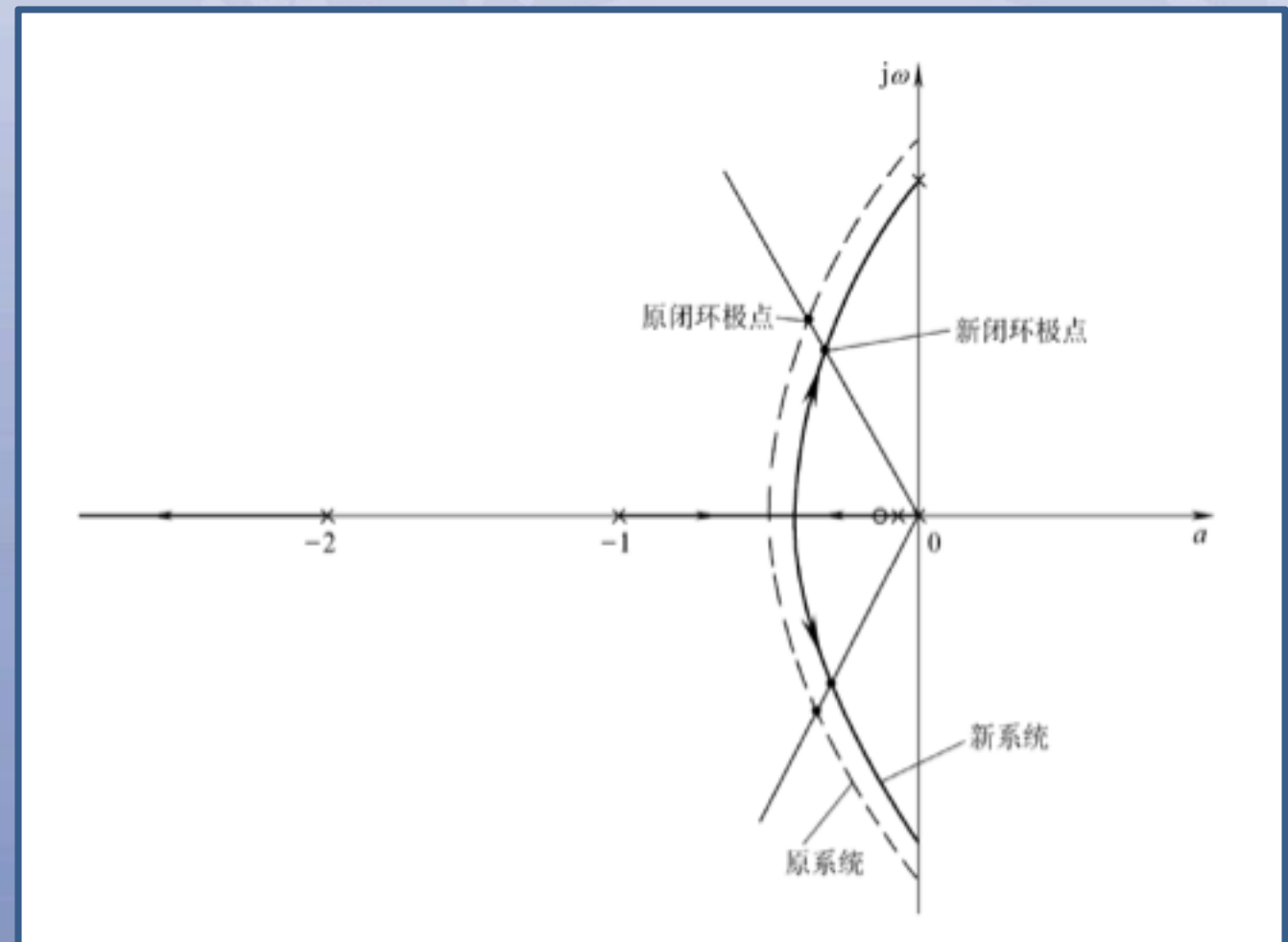
根据根轨迹模条件:

$$K_g = 1.04$$

系统的静态速度误差系数为:

$$K_v = K = \frac{K_g}{1 \times 2} = 0.52 < 5$$

系统的稳态性能指标不符合要求。





注解：闭环极点的求解

系统的闭环特征方程为：

$$1 + \frac{K_g}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K_g = 0$$

令主导闭环极点为： $s_{1,2} = A \pm Bj$

$$s_1^3 + 3s_1^2 + 2s_1 + K_g = 0$$

$$(A + Bj)^3 + 3(A + Bj)^2 + 2(A + Bj) + K_g = 0$$

利用上式虚部相等的条件：

$$3A^2B - B^3 + 6AB + 2B = 0$$

$$3A^2 - B^2 + 6A + 2 = 0$$

$$\begin{cases} A = \omega_n \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\omega_n \\ B = \omega_n \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_n \end{cases}$$

$$3\left(\frac{1}{2}\omega_n\right)^2 - \frac{3}{4}\omega_n^2 + 6 \cdot \frac{1}{2}\omega_n + 2 = 0$$

$$\omega_n = \frac{2}{3}$$



为满足系统的稳态指标要求，应将系统的开环增益提高10倍。

引入校正环节：
$$C(s) = \frac{s + z_c}{s + p_c}, \quad |z_c| = 10|p_c|$$

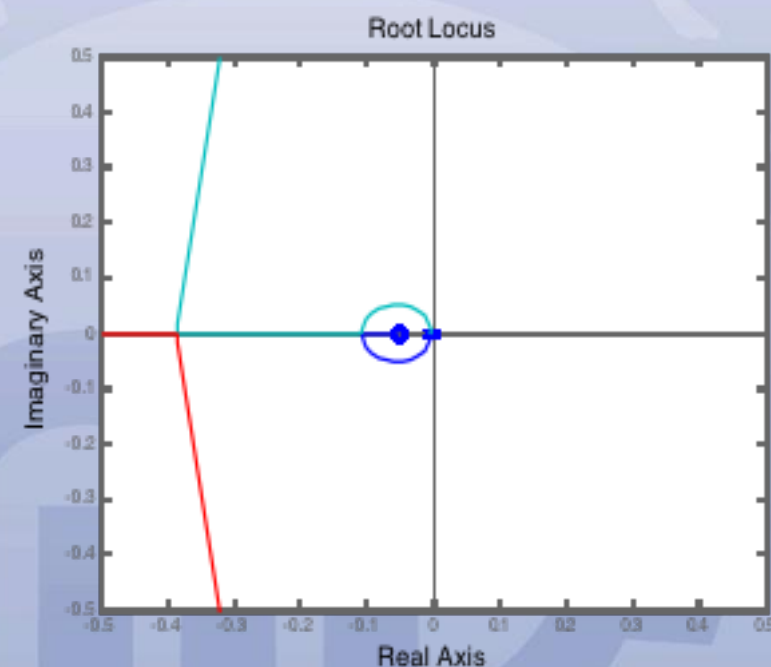
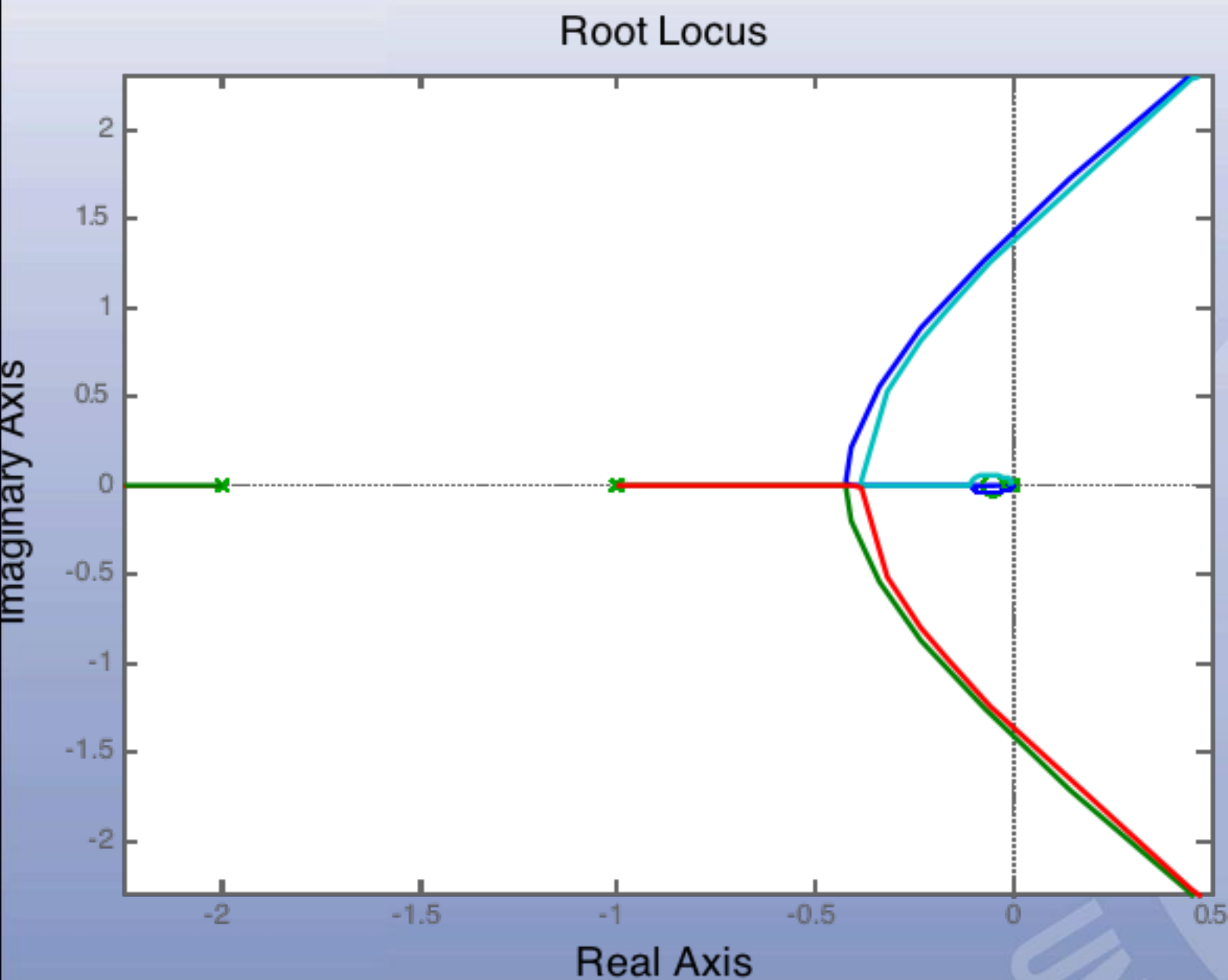
为确保系统暂态特性不受显著影响：

滞后校正环节为：
$$C(s) = \frac{s + 0.05}{s + 0.005}, \quad |z_c| = 10|p_c|$$

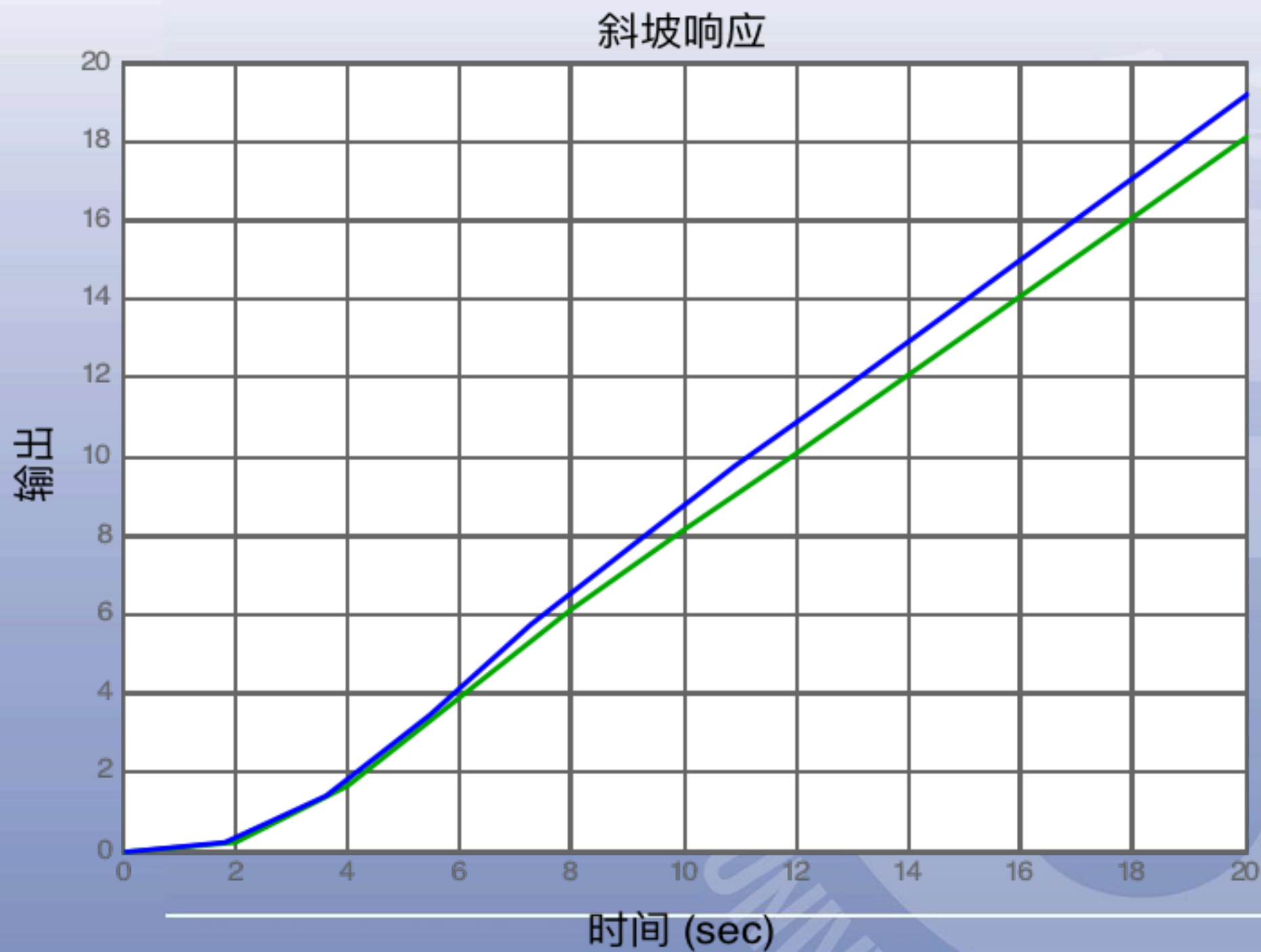
校正后开环传递函数为：

$$G_0(s) = \frac{1.04(s + 0.05)}{s(s + 1)(s + 2)(s + 0.05)}$$

校正前后根轨迹变化情况



系统单位斜坡响应





系统单位阶跃响应





6.2.2 基于根轨迹的系统校正(3)

超前校正：可以较大地改善系统地瞬态性能，提高系统的相对稳定性；

滞后校正：可以较大明显改善系统的稳态性能，增大系统的开环增益。

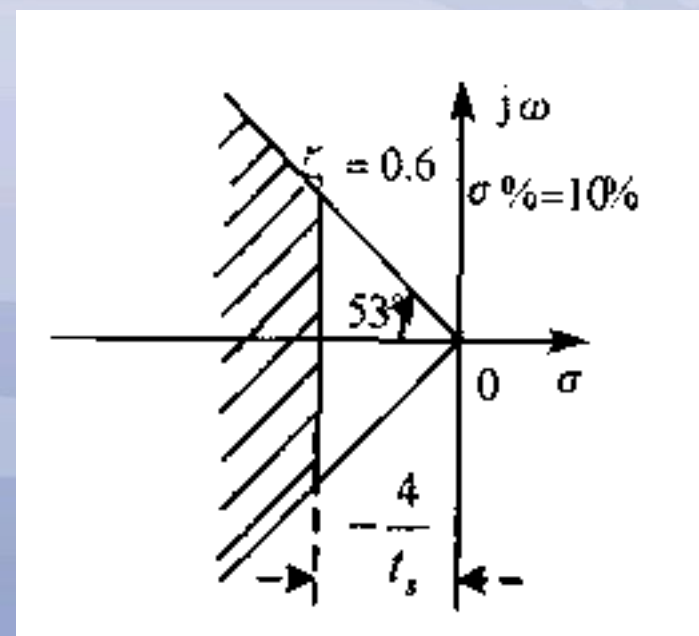
3) 滞后-超前校正装置

$$C(s) = K_c \frac{(s + z_{c1})(s + z_{c2})}{(s + p_{c1})(s + p_{c2})}$$

设计步骤：

(1) 根据给定的性能指标，确定希望的主导极点的位置；

(2) 根据根轨迹幅角条件，计算主导极点位于的期望位置时，幅角的缺额；





$$\sum_{i=1}^m \angle(s_d + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s_d + p_j) + \varphi = (2k + 1) \times 180^\circ, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

$-z_i, -p_j$ 为未校正系统的开环零点和极点。

(3) 幅角的缺额应该由校正装置的超前部分承担。

$$\arg \left[\frac{s_d + z_{c1}}{s_d + p_{c1}} \right] \geq \varphi \quad \text{选择 } -z_{c1}, -p_{c1}$$

(4) 利用模条件确定校正环节的增益 K_c 的值

$$\left| K_c \frac{s_d + z_{c1}}{s_d + p_{c1}} P(s_d) \right| = 1$$

$P(s_d)$ 为未校正系统的开环传递函数。



(5) 根据稳态性能指标(开环增益K), 确定校正装置滞后部分的零极点关系。

$$K = K_c \frac{z_{c1} z_{c2}}{p_{c1} p_{c2}} P(0) \quad \alpha = \left| \frac{z_{c2}}{p_{c2}} \right|$$

(6) 根据 α 值, 在S平面原点附近选择滞后部分的零极点。

$$\left| \frac{s_d + z_{c2}}{s_d + p_{c2}} \right| \approx 1$$

$$\arg \left[\frac{s_d + z_{c2}}{s_d + p_{c2}} \right] < 5^\circ$$



例：基于根轨迹法串联补偿(超前-滞后校正)

单位负反馈控制系统的开环传递函数为： $G_0(s) = \frac{4}{s(s+0.5)}$

试采用根轨迹法进行滞后-超前校正。设计指标为：

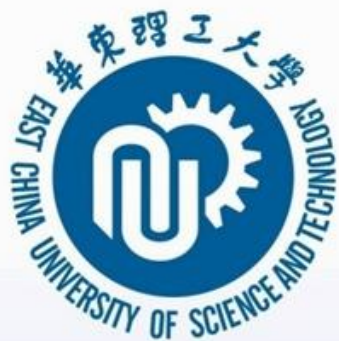
- (1) 主导极点 $\zeta=0.5$, $\omega_n=5(1/\text{秒})$;
- (2) $K_V=80$ 。

解： 设满足系统性能的超前-滞后校正环节：

$$G_c(s) = K_c^* \frac{\left(s + \frac{1}{\beta T_1}\right) \left(s + \frac{1}{\alpha T_2}\right)}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{T_2}\right)}, \alpha > 1, \beta < 1$$

主导极点为： $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \approx -2.5 \pm j4.33$

根据根轨迹幅角条件，计算幅角的缺额：



$$\begin{aligned}\varphi &= -\angle \left[\frac{4}{s(s+0.5)} \right] \bigg|_{s=-2.5+j4.33} - 180^\circ \\ &= 120^\circ + 114.8^\circ - 180^\circ \approx 55^\circ\end{aligned}$$

相角缺额由超前环节承担：

$$\angle \left[s_1 + \frac{1}{aT_2} \right] - \angle \left[s_1 + \frac{1}{T_2} \right] = 55^\circ$$

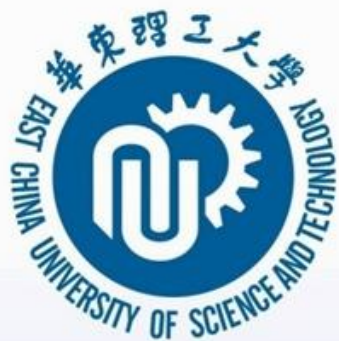
令 $\frac{1}{aT_2} = 0.5$ 使校正网络超前部分的零点与 $G_0(s)$ 的极点相消

$$\angle(-2.5 + j4.33 + 0.5) - \angle(-2.5 + j4.33 + \frac{1}{T_2}) = 55^\circ$$

$$\arctan\left(\frac{4.33}{-2.5 + 0.5}\right) - \arctan\left(\frac{4.33}{-2.5 + \frac{1}{T_2}}\right) = 55^\circ$$

$$\frac{1}{T_2} = 4.52, \quad T_2 = 0.2212$$

$$\frac{1}{aT_2} = 0.5, \quad a = 9.04$$



注解：三角公式

$$\arctan x + \arctan y = \begin{cases} \arctan \frac{x+y}{1-xy} & xy < 1 \\ \pi + \arctan \frac{x+y}{1-xy} & x > 0, xy > 1 \\ -\pi + \arctan \frac{x+y}{1-xy} & x < 0, xy > 1 \end{cases}$$
$$\arctan x - \arctan y = \begin{cases} \arctan \frac{x-y}{1+xy} & xy > -1 \\ \pi + \arctan \frac{x-y}{1+xy} & x > 0, xy < -1 \\ -\pi + \arctan \frac{x-y}{1+xy} & x < 0, xy < -1 \end{cases}$$



校正网络超前部分的传递函数为

$$\frac{s + \frac{1}{aT_2}}{s + \frac{1}{T_2}} = \frac{s + 0.5}{s + 4.52}$$

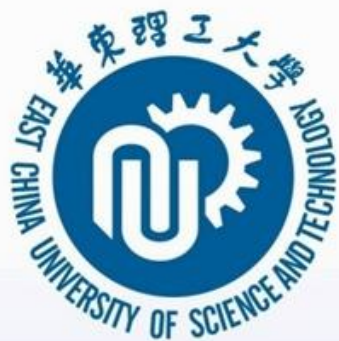
根据幅值条件确定 K_c 值.

$$\left| K_c^* \frac{s + 0.5}{s + 4.52} \cdot \frac{4}{s(s + 0.5)} \right|_{s=-2.5+j4.33} = 1$$

$$k_c^* = \left| \frac{s(s + 4.52)}{4} \right|_{s=-2.5+j4.33} = 5.1$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G_0(s) = 5.1 \cdot \frac{1}{a\beta} \cdot \frac{4}{0.5} = 80$$

$$\frac{1}{\beta} = 17.73, \quad \beta = 0.06$$



选择 βT_1 足够大, 使得

$$\left| \frac{s + \frac{1}{\beta T_1}}{s + \frac{1}{T_1}} \right| \approx 1 \quad -5^\circ < \angle \frac{s + \frac{1}{\beta T_1}}{s + \frac{1}{T_1}} \bigg|_{s=-2.5+4.33j} < 0$$

取 $\beta T_1 \approx 5$, 满足上两项要求, $T_1 = 83.3$

$$G_c(s) = 5.1 \frac{(s + 0.5)(s + 0.2)}{(s + 4.52)(0.012)} = \frac{9.4(2s + 1)(5s + 1)}{(0.221s + 1)(83.3s + 1)}$$

$$G(s) = G_0(s)G_c(s) = \frac{75.2(5s + 1)}{s(0.221s + 1)(83.3s + 1)}$$



6.3 系统校正的频率特性法

通过校正系统的开环频率特性使闭环系统满足指定的瞬态和稳态性能指标。

用频率法校正控制系统时，通常以频率指标如**相位裕度**，**增益裕度**，**谐振峰值**、**频带宽度**等来衡量和调整控制系统动态性能。

基于系统频率特性与时域性能指标间的关系，可以在频率特性图上开展校正控制系统的工作。



6.3.1 开环频率特性与时域性能指标间的关系

频率特性的低频段表征系统的稳态特性，中频段表征系统的瞬态性能，高频段体现系统的抗高频干扰性能。

(1) 低频段

$$G_0(j\omega) = \frac{K(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)\cdots}{(j\omega)^v(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)\cdots}$$

$$\omega \rightarrow 0$$

$$G_0(j\omega) \approx \frac{K}{(j\omega)^v}$$

$$L(\omega) = 20\lg K - v20\lg \omega$$



(A) 0型系统($v=0$)

$$L(\omega) = 20\lg K - v20\lg \omega = 20\lg K$$

低频段的幅频特性是斜率为0dB/dec的直线，其高度可以确定系统的稳态位置误差系数 K_p

(B) I型系统($v=1$)

$$L(\omega) = 20\lg K - v20\lg \omega = 20\lg K - 20\lg \omega$$

低频段的幅频特性是斜率为-20dB/dec的直线， $\omega=1$ 时， $L(1)=20\lg K$ ，当 $\omega=K$ 时， $L(K)=0$ 。低频段与0dB横坐标的相交处等于开环增益 K ，可以确定系统的稳态速度误差系数 K_v



II型系统($v=2$)

$$L(\omega) = 20\lg K - v20\lg \omega = 20\lg K - 40\lg \omega$$

低频段的幅频特性是斜率为-40dB/dec的直线， $\omega=1$ 时， $L(1)=20\lg K$ ，当 $\omega = \sqrt{K}$ 时， $L(\omega)=0$ 。低频段与0dB横坐标的相交处等于 $\omega = \sqrt{K}$ ，可以确定系统的稳态加速度误差系数 K_a 开环增益 K

(2) 中频段

开环对数幅频特性曲线在截止频率 ω_c 附近的区域，其特性的斜率和宽度反映了系统动态响应的平稳性和快速性。



(A) 中频段幅频特性的斜率

$$G_0(s) = \frac{1}{Ts} = \frac{\omega_c}{s}$$

闭环传递函数为：

$$W(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_c}s + 1}$$

惯性环节

系统总是稳定的，瞬态响应没有超调， ω_c 越大，调节时间越短。

$$G_0(s) = \frac{K}{s^2} = \frac{\omega_c^2}{s^2}$$

$$\omega_c = \sqrt{K}$$

闭环传递函数为：

$$W(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{\frac{\omega_c^2}{s^2}}{1 + \frac{\omega_c^2}{s^2}} = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \omega_c^2}$$

系统临界稳定，无阻尼等幅振荡。



小 结

当中频段的幅频特性斜率为 -20dB/dec ,且占据一定的宽度时,系统有较好的瞬态性能和较大的相对稳定性(稳定裕度)

在系统设计过程中,应尽量将中频段幅频特性的斜率设计成 -20 dB /dec ,且占据一定的宽度。若中频段幅频特性斜率为 -40dB/dec 或更高,则系统不易稳定,稳定裕度小,超调量大。



(B) 截止频率与通频带宽

$$t_s = \frac{6}{\omega_c \tan \gamma}$$

截止频率 ω_c 越大，通频带宽 ω_b 越宽。 ω_c 、 ω_b 应设计得尽量大些。

(C) 相角裕度与瞬态性能

如果系统的相角裕度很小，开环频率特性接近 $(-1, j0)$ 点：

$$|G_0(j\omega_c)| = 1, \quad \angle G_0(j\omega_c) \approx -180^\circ$$

$$G_0(j\omega_c) \approx -1$$



闭环传递函数为：

$$W(j\omega) = \frac{G_0(j\omega)}{1 + G_0(j\omega)} \quad |W(j\omega_c)| \gg 1$$

在这种情况下，在截止频率 ω_c 附近存在很大谐振峰值，系统对中频段的输入有强烈振荡的倾向。

$$M_r = \frac{1}{\sin \gamma}$$

为确保系统有良好的瞬态性能，中频段设计过程中，应保证系统一定的相角裕度。



(3) 高频段

高频段是指离截止频率 ω_c 较远($\omega > 10\omega_c$)的频段, 该部分的频率特性由小时间常数的环节决定。

$$L(\omega) \ll 0, \quad |G_0(j\omega)| \ll 1$$

$$|W(j\omega)| = \frac{|G_0(j\omega)|}{|1 + G_0(j\omega)|} \approx |G_0(j\omega)|$$

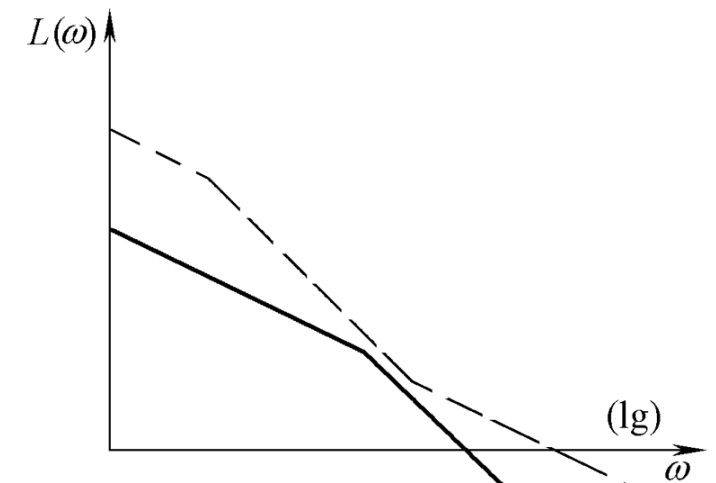
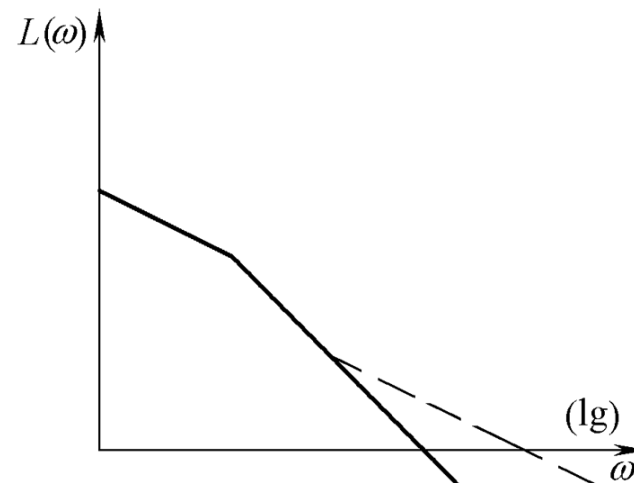
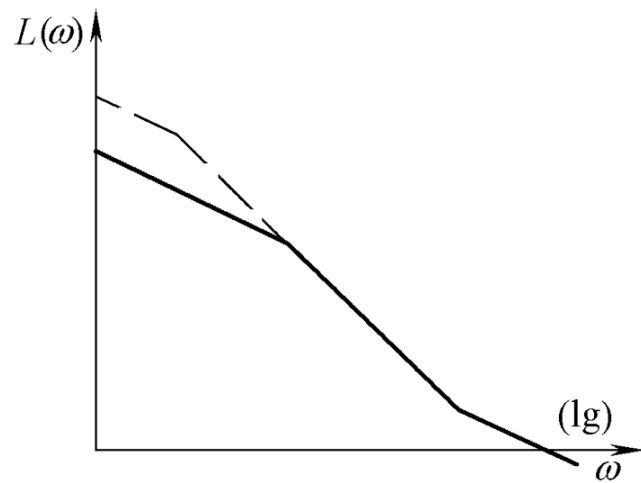
体现系统对高频噪声的抑制作用。



频率法校正的特点

- 用频率法校正控制系统，主要是改变频率特性形状，使之具有合适的高频、中频、低频特性和稳定裕量，以得到满意的闭环品质。
- 在初步设计时，常常采用波德图来校正系统。
- 用频率法校正控制系统时，通常是以频率法指标来衡量和调整系统的暂态性能，因而是一种间接的方法。

频率法校正的几种基本类型



- ① 增加低频增益
- ② 改善中频段特性
- ③ 兼有前两种补偿



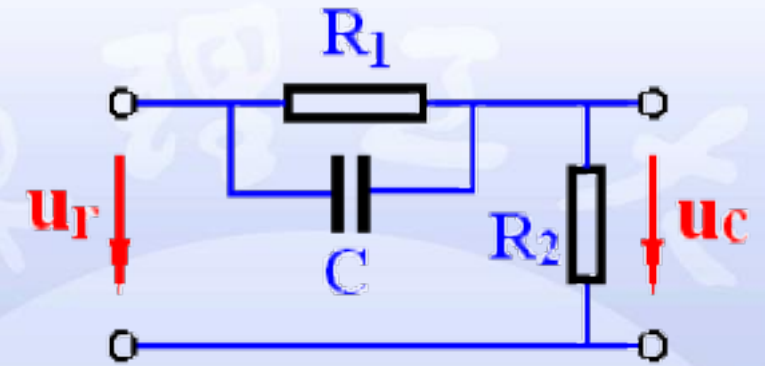
控制系统的频域法设计

在系统加入频率特性形状合适的校正装置，使开环系统的频率特性形状变成所期望的形状：低频段增益充分大，以保证稳态误差的要求；中频段对数幅频特性的斜率一般为 $-20dB/dec$ ，并占据充分宽的频带，以保证具备适当的相角裕度；高频段增益尽快减小，以削弱噪声影响。

6.3.2 串联超前校正(频域法)

超前环节特性

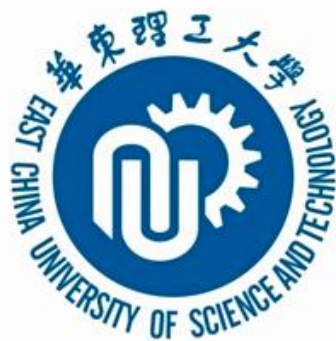
$$G_c(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{R_2}{R_1 \frac{1}{Cs}} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{CR_1s + 1}}$$



$$= \frac{R_2(CR_1s + 1)}{R_2(CR_1s + 1) + R_1} = \frac{R_2(CR_1s + 1)}{R_1R_2Cs + R_1 + R_2} = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2}(CR_1s + 1)}{\frac{R_1R_2C}{R_1 + R_2}s + 1}$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{aTs + 1}{Ts + 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1 \\ T = \frac{R_1R_2C}{R_1 + R_2} \end{array} \right.$$

$$a \cdot G_c(s) = \frac{aTs + 1}{Ts + 1}$$



$$a \cdot G_c(s) = \frac{aTs + 1}{Ts + 1} \quad (a > 1)$$

$$H = 20 \lg \frac{1/T}{1/aT} = 20 \lg a$$

$$\varphi(\omega) = \arctan(aT\omega) - \arctan(T\omega) = \arctan \frac{T\omega(a-1)}{1+aT^2\omega^2}$$

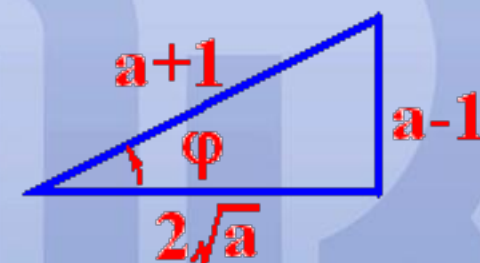
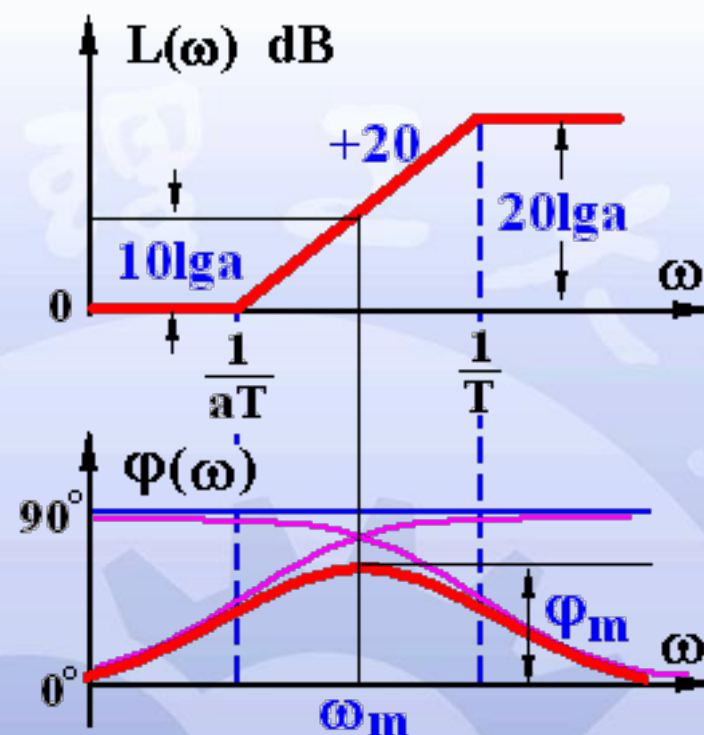
$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\omega} [\tan \varphi(\omega)] = 0$$

$$\frac{d}{d\omega} \left[\frac{T\omega(a-1)}{1+aT^2\omega^2} \right] = \frac{T(a-1)[1-aT^2\omega^2]}{(1+aT^2\omega^2)^2} = 0$$

$$\omega_m = 1/\sqrt{aT} \quad \text{转折频率的几何中心}$$

$$\tan \varphi(\omega_m) = \left. \frac{T\omega(a-1)}{1+aT^2\omega^2} \right|_{\omega_m = \frac{1}{\sqrt{aT}}} = \frac{a-1}{2\sqrt{a}}$$

$$\varphi_m = \varphi(\omega_m) = \arctan \frac{a-1}{2\sqrt{a}} = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$$

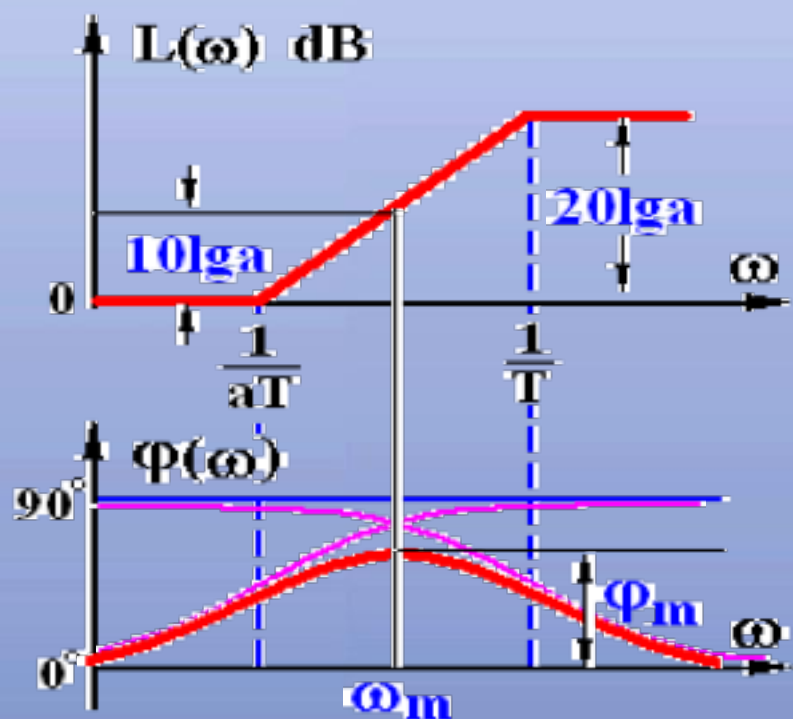


可解出

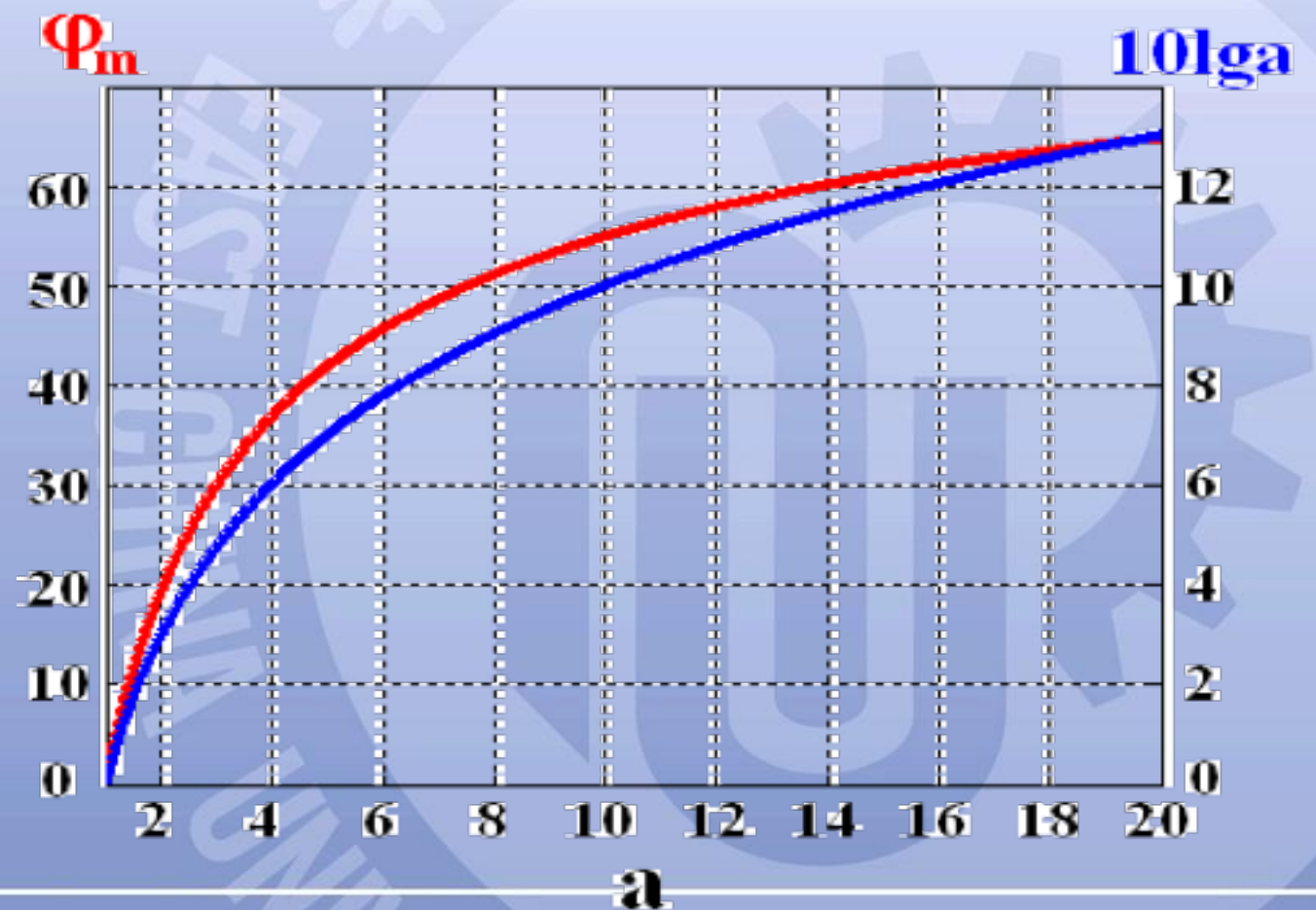
$$\begin{cases} a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \\ L(\omega_m) = 10 \lg a \end{cases}$$

超前网络特性(2)

$$\begin{cases} \varphi_m = \arcsin \frac{a-1}{a+1} \\ a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \end{cases}$$



- 超前网络特点：相角超前，幅值增加
- 一级超前网络最大超前角为 60°
- 最有效的 $a \in (4, 10)$



超前校正网络的思路

$$G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts} \quad a > 1$$

低频段: 1 (0dB)

转折频率: $\frac{1}{aT}$ $\frac{1}{T}$

斜率: $[+20]$ $[-20]$

$\omega=0$ $\omega=\infty$

$0^\circ \longrightarrow +90^\circ$

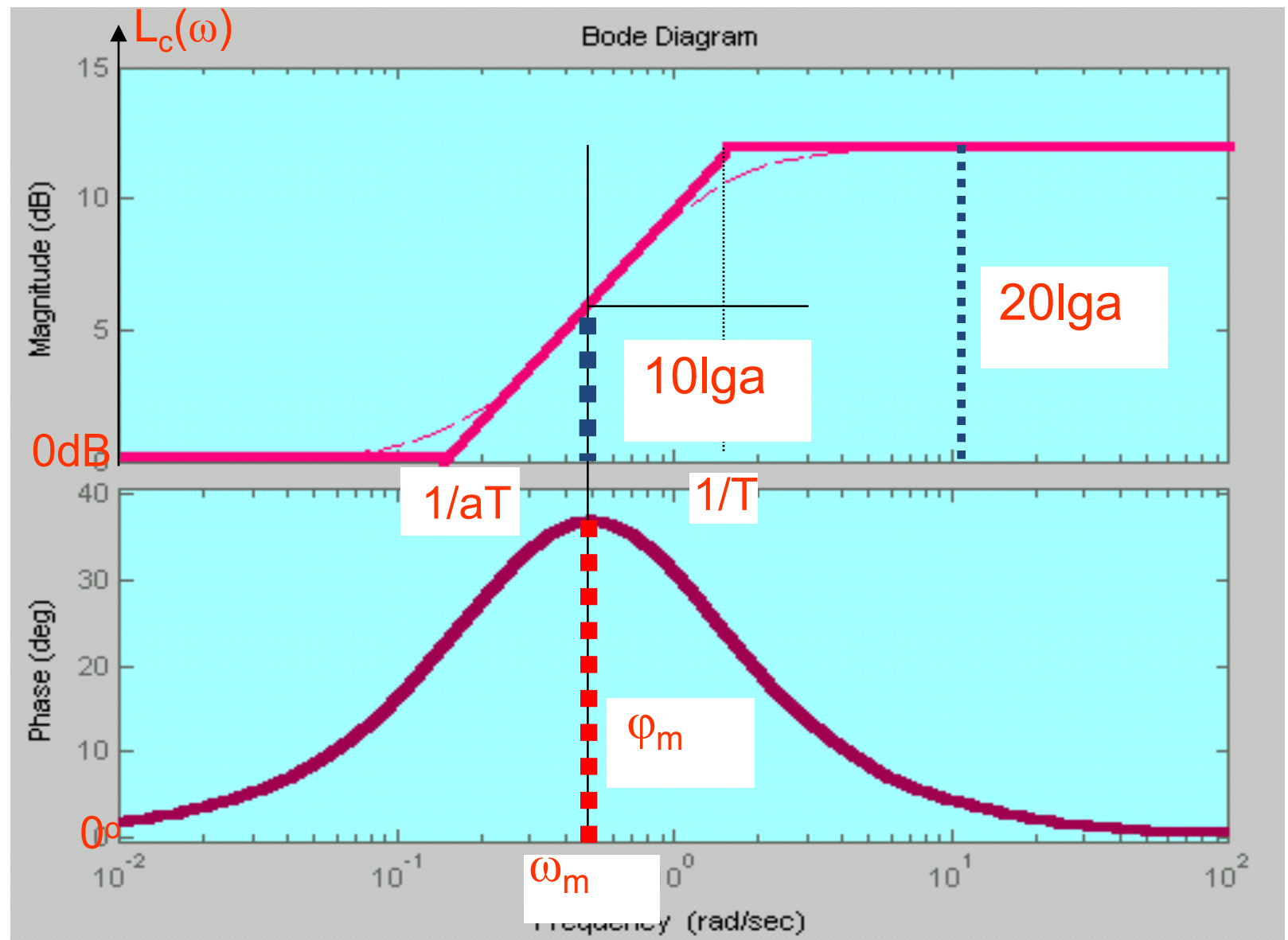
$0^\circ \longrightarrow -90^\circ$

0° 0°

$$\text{令 } \frac{d\phi_c(\omega)}{d\omega} = 0$$

得 $\omega_m = \sqrt{\frac{1}{aT} \cdot \frac{1}{T}} = \frac{1}{T\sqrt{a}}$

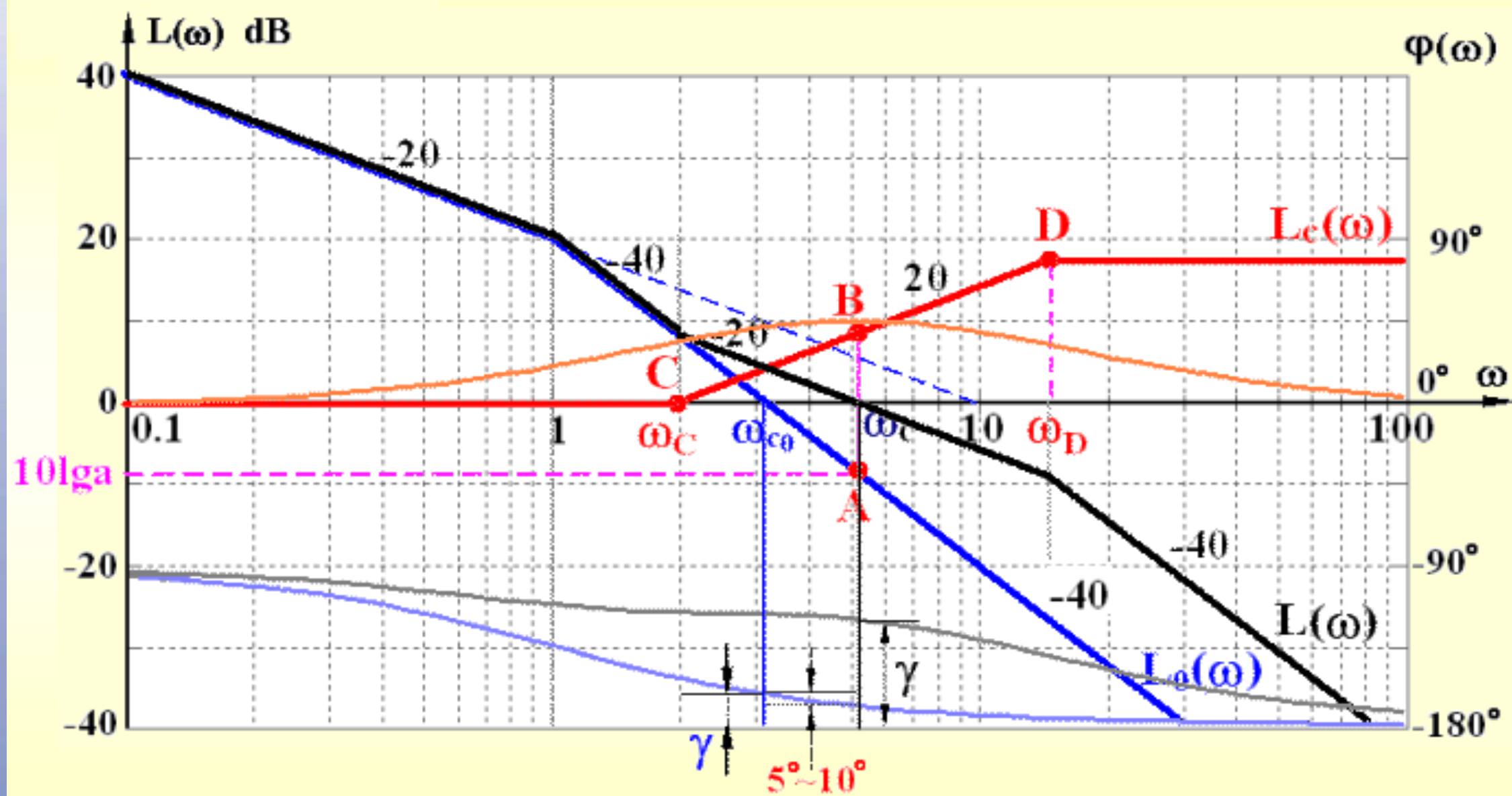
$$\phi_m = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$$



关键思路: 让 $\omega_m = \omega_c''$

$$L_c(\omega_m) = 10lga$$

举 例





频率法设计超前校正装置的步骤(1)

- (1) 根据稳态误差要求，确定开环增益K。 $G_c(s) = \frac{aTs + 1}{Ts + 1}$
- (2) 根据已确定的开环增益K，绘制未补偿系统开环传递函数 $G_0(s)$ ，伯德图，确定未补偿系统的截止频率 ω'_c 和相位裕度 γ' 。
- (3) 计算超前补偿环节所需提供的最大相位超前角 φ_m 为

$$\varphi_m = \gamma - \gamma'$$

$$\varphi_m = \gamma - \gamma' + (5^\circ \sim 10^\circ)$$

其中 γ 是相位裕度的设计指标， γ' 是未补偿系统的相位裕度， $(5^\circ \sim 10^\circ)$ 用来补偿由于超前补偿使系统截止频率增加而产生的附加相位滞后角。



频率法设计超前校正装置的步骤(2)

(4) 计算 a 值及 $L_c(\omega_m)$

$$a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m}$$

$$L_c(\omega_m) = 10 \lg a \quad (\text{dB})$$

(5) 为了把 ω_m 对准补偿后的系统截止频率 ω_c ，在未补偿系统的对数幅频特性上查找一点 ω_c ，该点的幅值为 $20 \lg |G_0(j\omega_c)| = -L_c(\omega_m) = -10 \lg a \text{ (dB)}$ ，该点的频率即为已补偿的系统的截止频率。令 $\omega_m = \omega_c = \frac{1}{\sqrt{a}T}$ 超前补偿环节参数 a, T 初步确定。

(6) 绘制补偿后的系统的对数坐标图，检验幅值裕度是否满足要求。



例:控制系统超前校正环节频域法设计

设单位反馈系统的开环传递函数为: $G_0(s) = \frac{K}{s(s+1)}$

试设计校正装置 $G_c(s)$, 使校正后系统足如下指标:

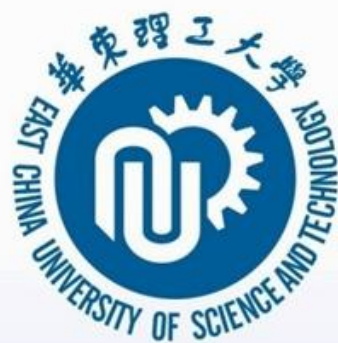
(1) 当 $r = t$ 时稳态误差 $e_{ss}^* \leq 0.1$

(2) 开环系统截止频率 $\omega_c^* \geq 6 \text{ rad/s}$

(3) 相角裕度 $r^* \geq 60^\circ$

(4) 幅值裕度 $h^* \geq 10 \text{ dB}$

解 根据稳态精度要求 $e_{ss}^* = 1/K \leq 0.1$ $K \geq 10$ $K = 10$



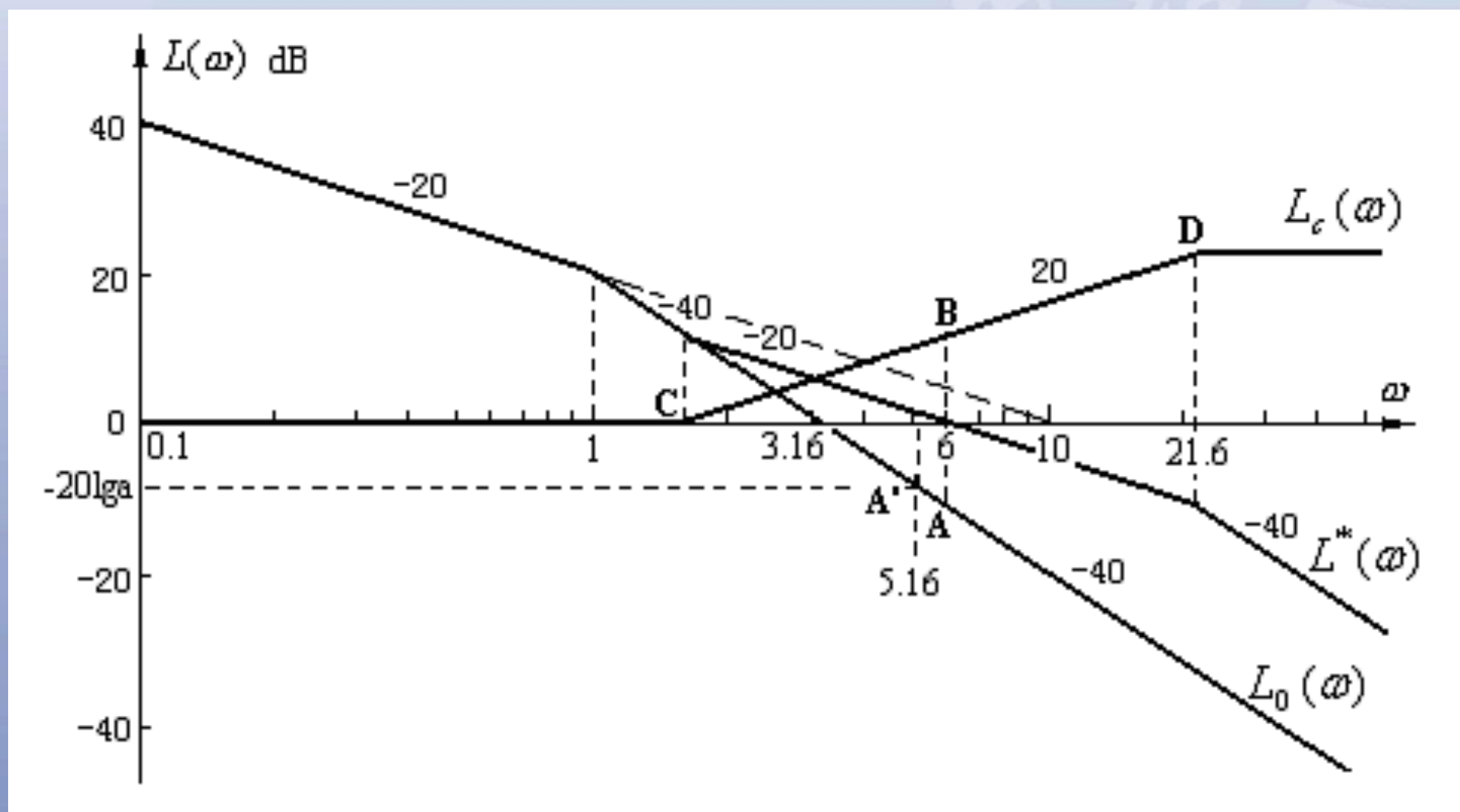
$$\frac{20-0}{\lg 1 - \lg \omega'_{c0}} = -40$$

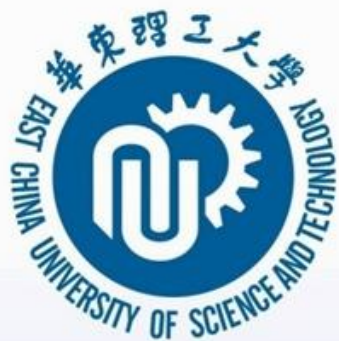
$$\lg \omega_{c0} = 0.5$$

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

$$\omega_{c0} = 3.16 < \omega_c^* = 6s$$

$$\gamma_0 = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 3.16 = 17.5^\circ < \gamma^* = 60^\circ$$





可采用超前校正。所需要的相角最大超前量为：

$$\phi_m = \gamma^* - \gamma_0 + 5^\circ = 60^\circ - 17.5^\circ + 5^\circ = 47.5^\circ$$

$$\frac{20 - L'(\omega_c)}{\lg 1 - \lg 6} = -40 \quad L'(\omega_c) = 20 - 40 \lg 6 = -11.126$$

$$-10 \lg a = -11.13 \quad a = 12.96$$

$$\omega_m = \omega_c = \frac{1}{\sqrt{a}T}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{a}\omega_c} = \frac{1}{\sqrt{12.96} \times 6} = 0.046$$

$$C(s) = \frac{10(0.596s + 1)}{(0.046s + 1)}$$



检验校正后的相角裕度和幅值裕度：

$$W(s) = \frac{10(0.596s + 1)}{s(0.046s + 1)(s + 1)}$$

$$\begin{aligned}\gamma &= 180^\circ + (\arctan 0.596 \times 6 - 90^\circ - \arctan 6 - \arctan 0.046 \times 6) \\ &= 68.41^\circ\end{aligned}$$

幅值裕度： $h \rightarrow \infty$

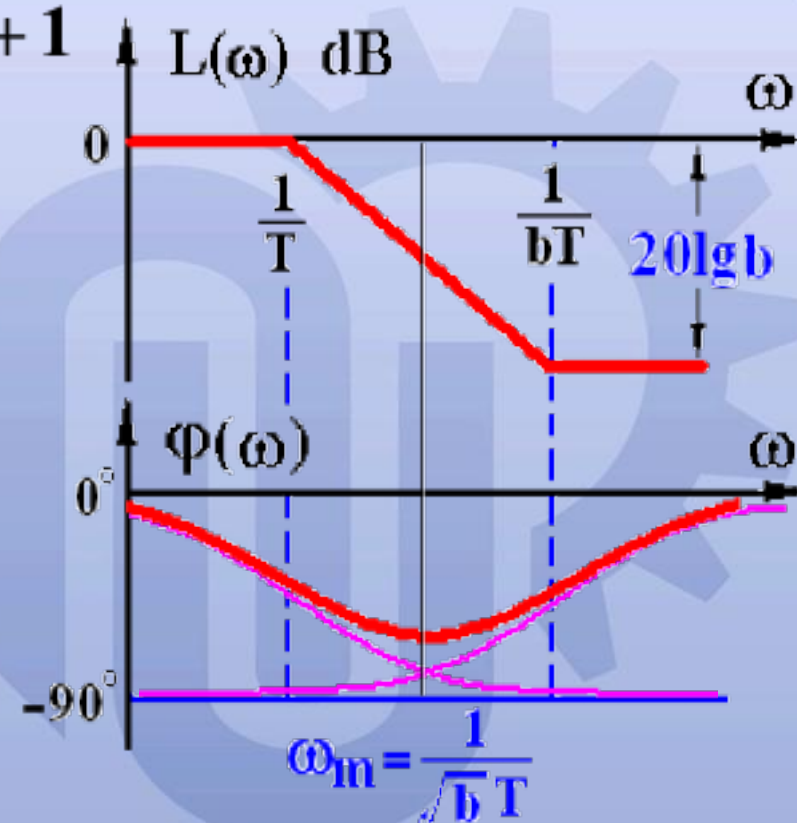
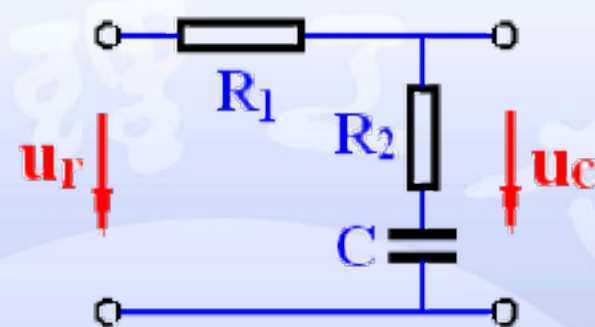
6.3.3 串联滞后校正(频域法)

迟后环节特性

$$G_c(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{R_2Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1}$$

$$= \frac{bTs + 1}{Ts + 1} \quad \begin{cases} b = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1 \\ T = (R_1 + R_2)C \end{cases}$$

$$G_c(s) = \frac{bTs + 1}{Ts + 1}$$

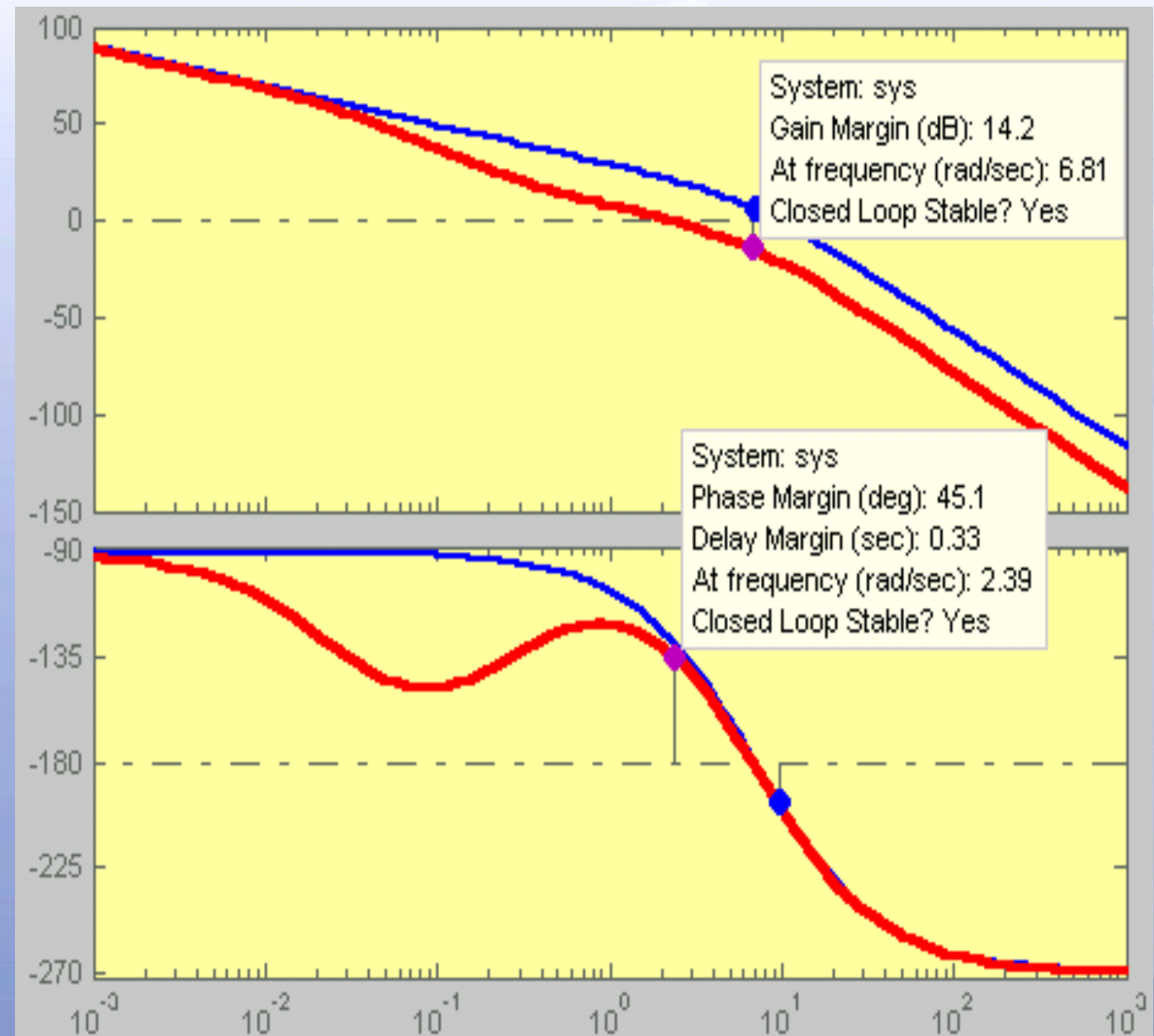


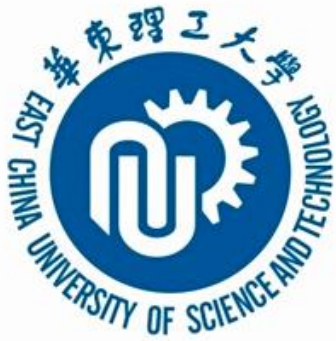


最大滞后角 φ_m 和相应的最大滞后角频率 ω_m 分别为:

$$\varphi_m = \arcsin \frac{1-b}{1+b}, \omega_m = \frac{1}{\sqrt{bT}}$$

滞后校正环节的主要作用
为高频衰减, 通过减小截止频率,
达到增加相角裕度, 不显著
影响系统稳态性能的目的。





频率法设计滞后校正装置的步骤(1)

- (1) 根据稳态误差要求确定开环增益K。
- (2) 根据已确定的开环增益K，绘制未补偿系统开环传递函数 $G_0(s)$ 。
- (3) 如果未补偿系统不满足设计指标要求，则在对数相频特性上找一点 ω_c ， ω_c 满足下面条件：

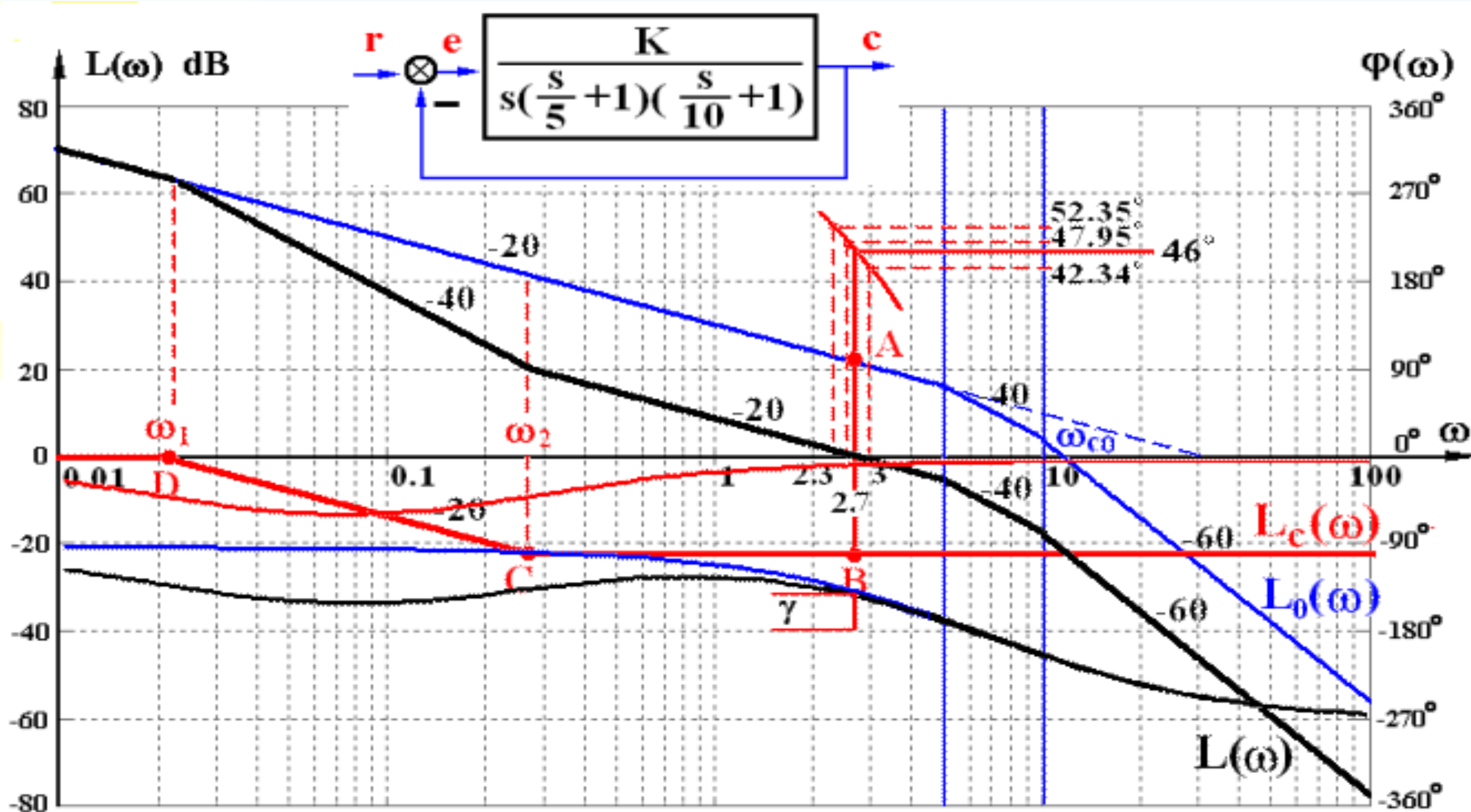
$$\angle G_0(j\omega_c) = -180^\circ + \gamma + (5^\circ \sim 12^\circ)$$

对于一些简单系统，采用试算法可根据上式计算出 ω_c 值。

- (4) 在未补偿系统的开环对数幅频特性上，求在频率 $\omega = \omega_c$ 处，

$$20\lg |G_0(j\omega_c)| \quad 20\lg b = -20\lg |G_0(j\omega_c)|$$

滞后校正举例





(5)为使串联滞后网络在 ω_c 处产生的滞后角处于 $5^\circ \sim 12^\circ$ 的范围内,取

$$\frac{1}{\beta T} \approx (0.1 \sim 0.2) \omega_c$$

解出 T ,这样滞后网络参数 β 、 T 全部确定。

(6)绘制补偿后的系统的对数坐标图, 检验幅值裕度是否满足要求。



例:控制系统滞后校正环节频域法设计

单位反馈系统的开环传递函数为: $G_0(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.125s+1)}$

要求开环增益 $K=10$, 相角裕度 $\gamma > 30^\circ$, 设计滞后校正环节。

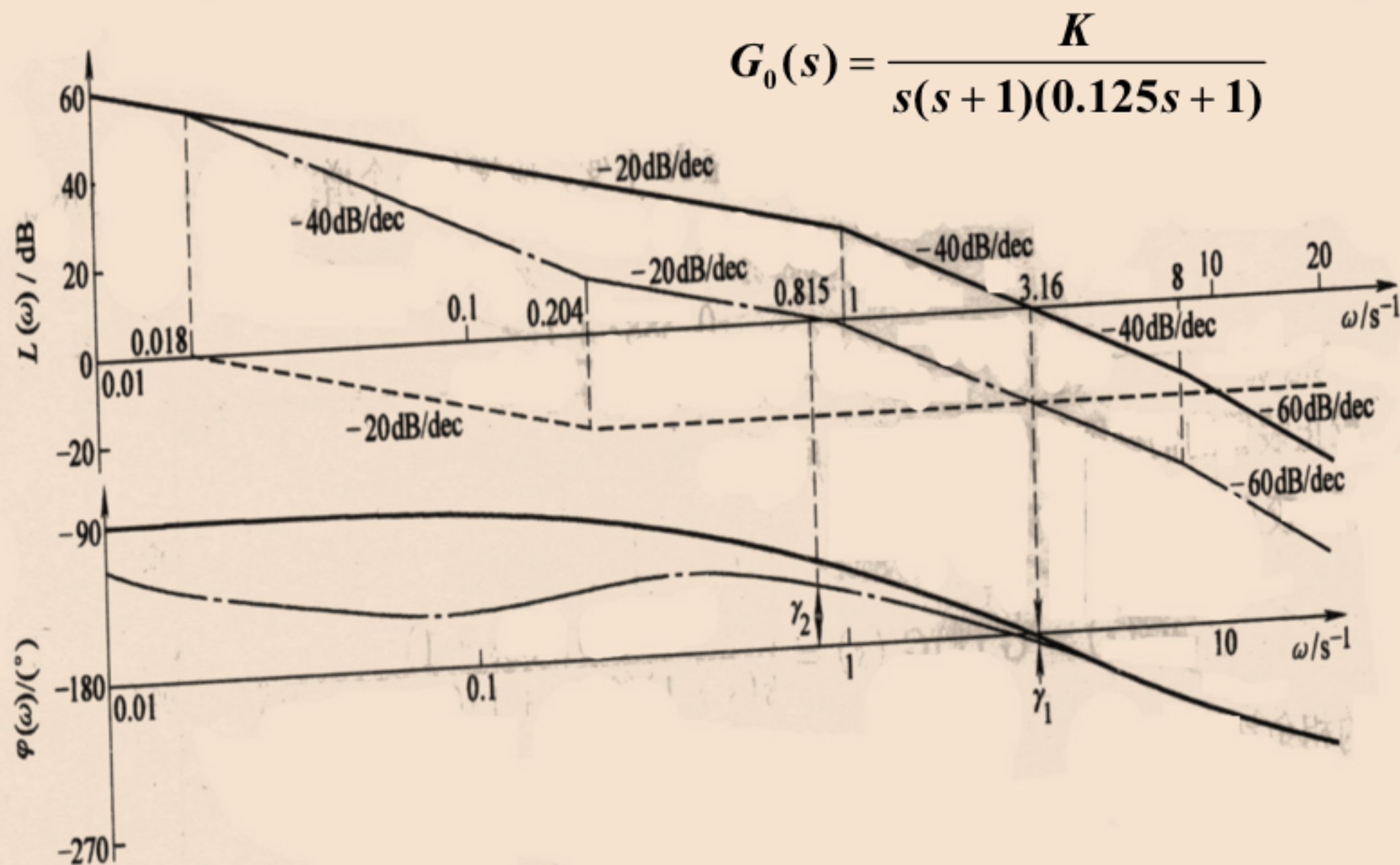
解:

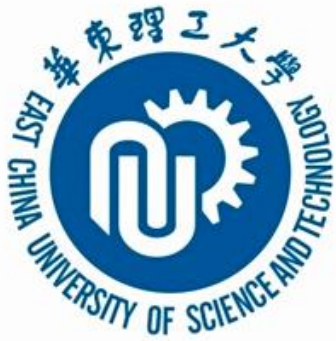
(1) 由 $K=10$

$$G_0(s) = \frac{10}{s(s+1)(0.125s+1)}$$

做出未校正系统的Bode,如图实线所示:

系统的伯德图





未校正系统的截止频率:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.125s+1)}$$

$$\omega_{c1} = \sqrt{K} = \sqrt{10} = 3.16s^{-1}$$

相角裕度为:

$$\gamma_1 = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_{c1} - \arctan 0.125\omega_{c1} = -3.99^\circ$$

系统是不稳定的。

(2) 根据相角裕度的要求, 确定校正后的截止频率

$$\varphi(\omega_{c2}) = -180^\circ + \gamma + \varepsilon = -180^\circ + 30^\circ + 15^\circ = -135^\circ$$

$$\varphi(\omega_{c2}) = -90^\circ - \arctan \omega_{c2} - \arctan 0.125\omega_{c2} = -135^\circ$$

利用三角公式:

$$\arctan \frac{1.125\omega_{c2}}{1 - 0.125\omega_{c2}^2} = 45^\circ$$



$$0.125\omega_{c2}^2 + 1.125\omega_{c2} - 1 = 0$$

$$\omega_{c2} = 0.815s^{-1}$$

(3) 确定b值

$$-20\lg b = 20\lg k - 20\lg \omega_{c2}$$

$$b = 0.08907$$

(4) 确定滞后校正装置的两个转折频率。

$$\omega_2 = \frac{1}{bT} = \frac{\omega_{c2}}{4} = 0.204s^{-1}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{T} = \omega_2 b = 0.204 \times 0.08907s^{-1} = 0.018s^{-1}$$

$$G_c(s) = \frac{4.9s + 1}{55.1s + 1}$$



半对数坐标系的直线方程

$[\omega_1, L_a(\omega_1)]$ 和 $[\omega_2, L_a(\omega_2)]$ 为直线上的两点

$$k = \frac{L_a(\omega_2) - L_a(\omega_1)}{\lg \omega_2 - \lg \omega_1}$$



(5) 验证稳定裕度

$$G(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{10(4.9s + 1)}{s(s + 1)(0.125s + 1)(55.1s + 1)}$$

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ + \arctan 4.9\omega_{c2} - \arctan \omega_{c2} - \arctan 0.125\omega_{c2} - \arctan 55.1\omega_{c2} = 31^\circ$$

满足设计要求



关于超前、滞后校正环节的小结(1)

- ((1)) 超前校正方式 主要利用校正装置的超前相角，使校正后系统的相位裕度增大，在校正环节设计过程中，将最大超前角频率选在校正后系统的截止频率附近。
- ((2)) 超前校正装置使中高频段的幅值增大，使校正后系统的截止频率比校正前截止频率大，增大了系统的通频带宽，有利于提高系统的快速性。
- ((3)) 超前环节增加的超前角一般不可过大(通常不大于 65°)，否则要求参数 $1/a$ 选的较大，使校正后系统的高频幅值在增加过大，从而加强了高频噪声的干扰，不利于系统工作。



关于超前、滞后校正环节的小结(2)

- ((4)) 滞后校正环节主要利用校正装置的中高频幅值衰减特性，通过使系统校正后的截止频率下降，达到增大相角裕度的目的。增大的相角裕度并不是校正装置所附加的，而是挖掘原系统所固有的潜力。
- ((5)) 为了减小滞后校正装置滞后相角对系统相角裕度的不利影响，滞后环节的最大滞后角频率(滞后环节的转折频率)应选在低频段，并远离校正后系统的截止频率。
- ((6)) 滞后环节允许系统有较大的开环增益，改善系统的稳态性能。

6.3.4 串联滞后-超前校正(频域法)

滞后-超前网络

$$G_c(s) = \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1)}{T_a T_b s^2 + (T_a + T_b + T_{ab})s + 1}$$

$$\begin{cases} T_a = R_1 C_1 \\ T_b = R_2 C_2 \\ T_{ab} = R_1 C_2 \end{cases}$$

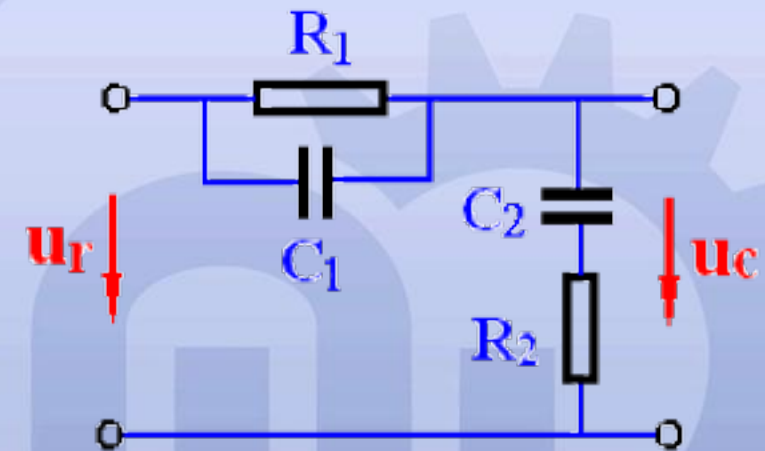
$$T_1 T_2 = T_a T_b$$

$$T_1 + T_2 = T_a + T_b + T_{ab}$$

$$T_1 > T_a$$

$$T_1 / T_a = T_b / T_2 = a > 1$$

$$G_c(s) = \frac{(T_a s + 1)}{(a T_a s + 1)} \cdot \frac{(T_b s + 1)}{(\frac{T_b}{a} s + 1)}$$

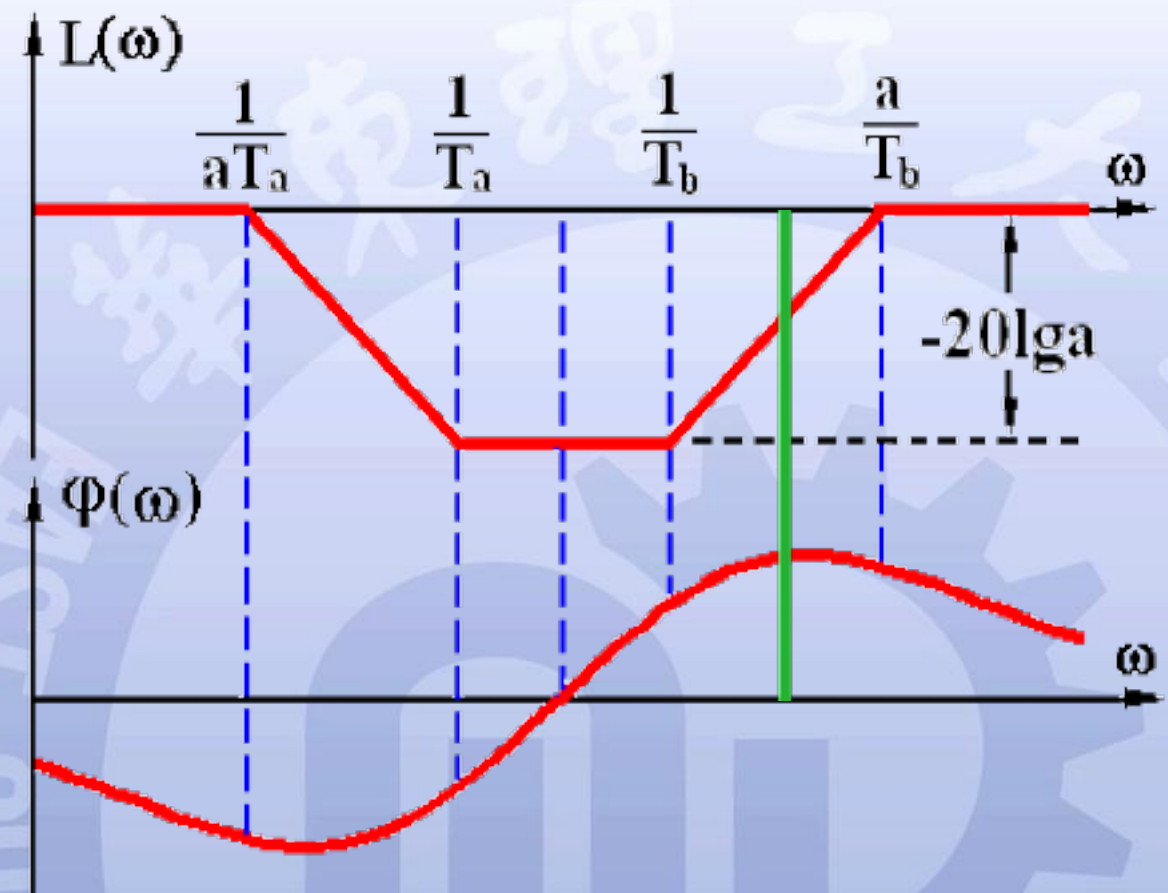


$$a T_a = T_1 > T_a > T_b > T_2 = \frac{T_b}{a}$$

滞后-超前网络特性

$$G_c(s) = \underbrace{\frac{(s + \frac{1}{T_a})}{(s + \frac{1}{aT_a})}}_{\text{滞后部分}} \cdot \underbrace{\frac{(s + \frac{1}{T_b})}{(s + \frac{a}{T_b})}}_{\text{超前部分}}$$

$$(a > 1)$$



滞后后-超前网络特点：幅值衰减，相角超前



频率法设计滞后-超前校正装置的步骤(1)

$$C(s) = K_c \frac{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{(aT_1s + 1)(\beta T_2s + 1)}, \beta \geq a^{-1} > 1, T_2 > T_1$$

- (1) 根据稳态误差要求确定开环增益K。
- (2) 根据已确定的开环增益K，绘制未补偿系统开环传递函数 $G_0(s)$ 。

计算未校正系统的频率指标，决定应采用的校正方式：

确定校正前系统的 ω_{c_0} 和 γ_0 当 $\gamma_0 < \gamma^*$ ，用超前校正所需要的最大超前角 $\phi_m > 60^\circ$ ；而用迟后校正时系统在 ω_c^* 处系统又没有足够的相角贮备量

$$\gamma_0(\omega_c^*) = 180^\circ + \angle G_0(\omega_c^*) < \gamma^* + 6^\circ$$

因而分别用超前、迟后校正均不能达到目的时，可以考虑用迟后-超前校正。



频率法设计滞后-超前校正装置的步骤(2)

((3)) 选择校正后系统的截止频率 $\omega_c = \omega_c^*$ 。计算 ω_c 处系统需要的最大

超前角: $\phi_m(\omega_c) = \gamma^* - \gamma_0(\omega_c) + 6^\circ$

6° 是为了补偿校正网络迟后部分造成的相角损失而预置的。

计算超前部分参数: $a = \frac{1 - \sin \phi_m}{1 + \sin \phi_m}$

再由 $\omega_c = \omega_m = \frac{1}{\sqrt{a}T}$ 确定 $T = \frac{1}{\sqrt{a}\omega_c}$

(4) 确定超前校正环节

$$C_1(s) = \frac{Ts + 1}{aTs + 1}$$



频率法设计滞后-超前校正装置的步骤(3)

(5) 确定滞后校正环节参数

$$\Delta L = L_0(\omega_c) + 10 \lg a^{-1}$$

$$20 \lg \beta = \Delta L$$

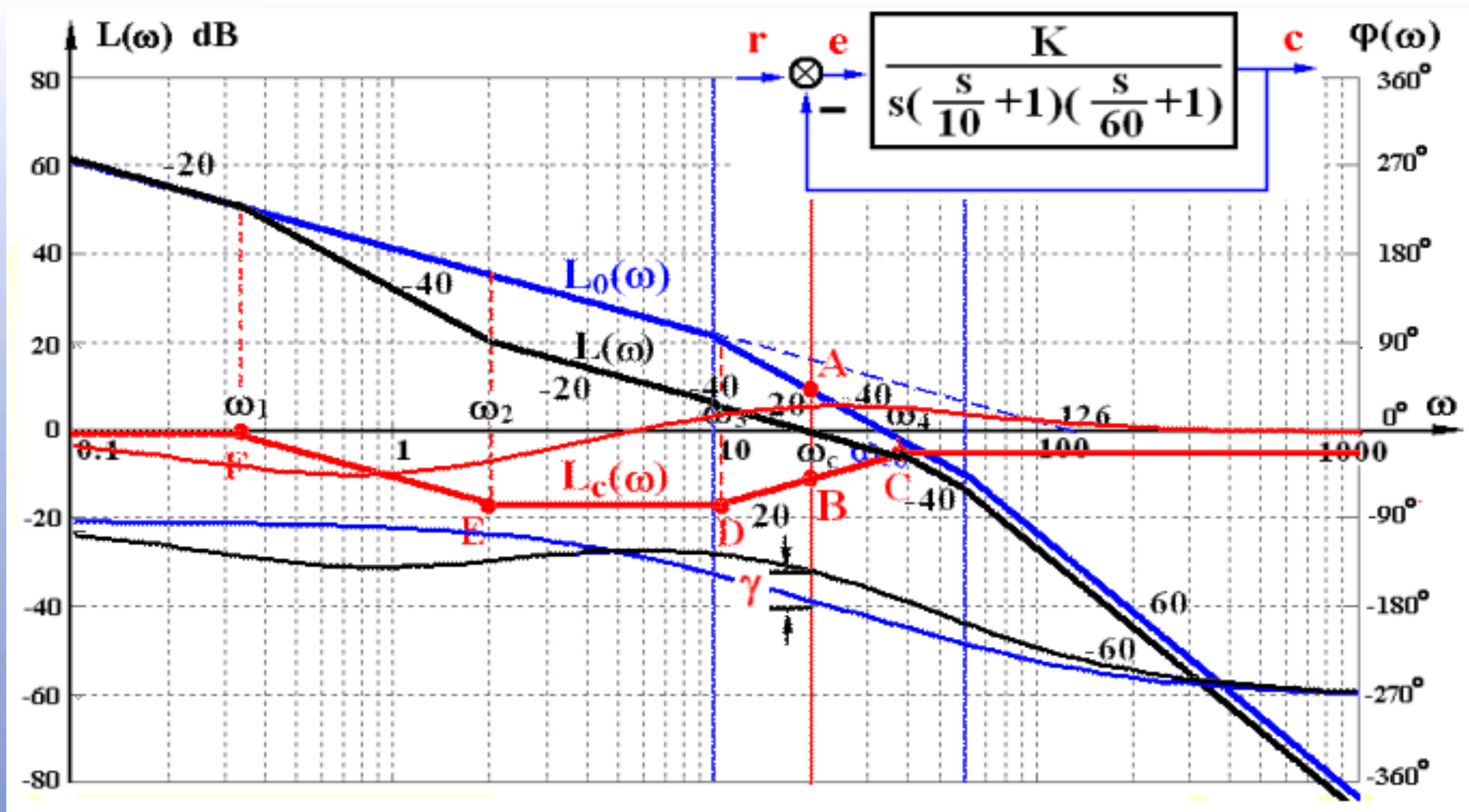
$$\frac{1}{T_2} = \left(\frac{1}{10} \sim \frac{1}{5} \right) \omega_c$$

(6) 验算

写出校正后系统的开环传递函数: $G(s) = G_0(s)G_c(s)$

考察性能指标

举 例





6.4 基本控制规律分析

6.4.1 比例控制(P)规律

$$G_c(s) = K_p$$

调整系统的开环增益，提高系统的稳态精度，降低系统的惰性，加快响应速度。

$$G_0(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

$$G(s) = \frac{G_c(s)G_0(s)}{1 + G_c(s)G_0(s)} = \frac{K_p}{Ts + 1 + K_p} = \frac{K_p}{1 + K_p} \cdot \frac{1}{\left(\frac{T}{1 + K_p}s + 1\right)}$$



$$T' = \frac{T}{1 + K_p}$$

$$G(s) = \frac{K_p}{1 + K_p} \cdot \frac{1}{(T's + 1)}$$

K_p 越大，稳态精度越高，系统的时间常数越小，响应速度越快。

$$G_0(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$

$$G(s) = \frac{K_p}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1 + K_p} = \frac{K_p}{1 + K_p} \cdot \frac{1}{\left(\frac{T^2}{K_p + 1} s^2 + \frac{2\zeta T}{K_p + 1} s + 1\right)}$$

$$T' = \frac{T}{\sqrt{K_p + 1}}, \zeta' = \frac{\zeta}{\sqrt{K_p + 1}}$$

K_p 越大，稳态精度越高，时间常数，阻尼系数越小，带宽加大，响应速度加快，超调增大，稳定裕度变小。

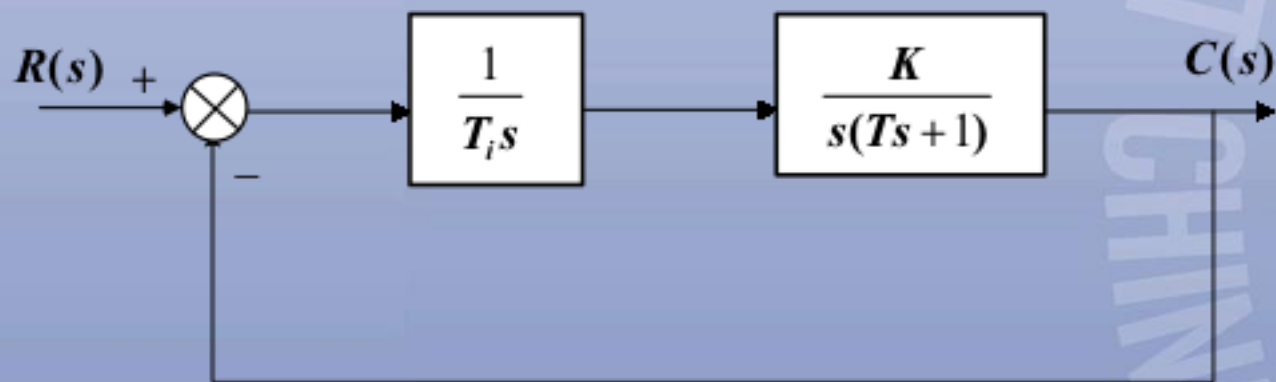


6.4.2 积分控制(I)规律

$$G_c(s) = \frac{1}{T_i s}$$

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau$$

积分的重要作用是消除稳态误差。采用积分控制器可以提高系统的型别，消除或减小稳态误差，改善系统的稳态性能。但积分控制器通常对系统稳定性有负面影响，降低系统的稳定裕度，降低系统的响应速度。



$$G_0(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

$$G_1(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{K}{Ts^2 + s + K}$$

s^2	T	K
s^1	1	0
s^0	k	



$$G_1(s) = \frac{G_c(s)G_0(s)}{1 + G_c(s)G_0(s)} = \frac{K}{T_i Ts^3 + T_i s^2 + K}$$

$$\begin{array}{ccc} s^3 & T_i T & 0 \\ s^2 & T_i & K \\ s^1 & -TK & \\ s^0 & K & \end{array}$$

系统不稳定

6.4.3 比例加积分(PI)控制规律

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau$$

闭环系统的特征方程：

$$T_i Ts^3 + T_i s^2 + T_i K_p K s + K_p K = 0$$

适当地调节参数，可以保持系统稳定性，提高型别。



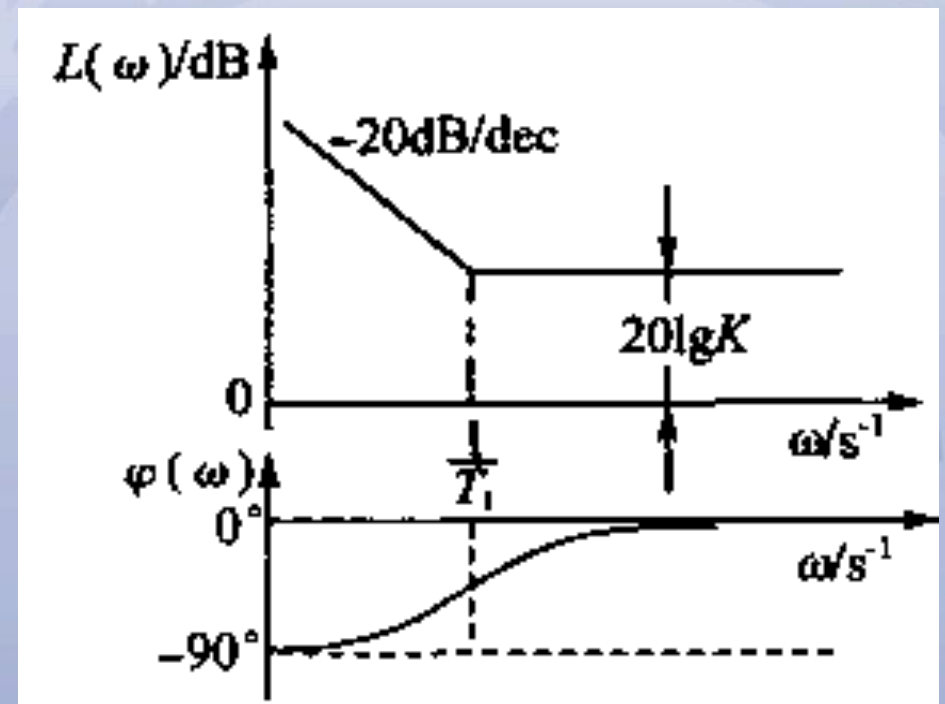
频率特性角度考察：

$$G_c(s) = K_p \left(\frac{T_i s + 1}{T_i s} \right)$$

$$L_c(\omega) = 20 \lg K_p + 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T_i^2} - 20 \lg \omega T_i$$

$$\varphi_c(\omega) = \arctan \omega T_i - 90^\circ$$

校正作用主要在低频段，引入-20 dB/dec的幅频特性，提高系统型别，改善系统稳态特性，对系统的中高频特性影响较小，基本保持原来的稳定裕度和响应速度，PI控制是滞后校正。





6.4.4 比例加微分(PD)控制规律

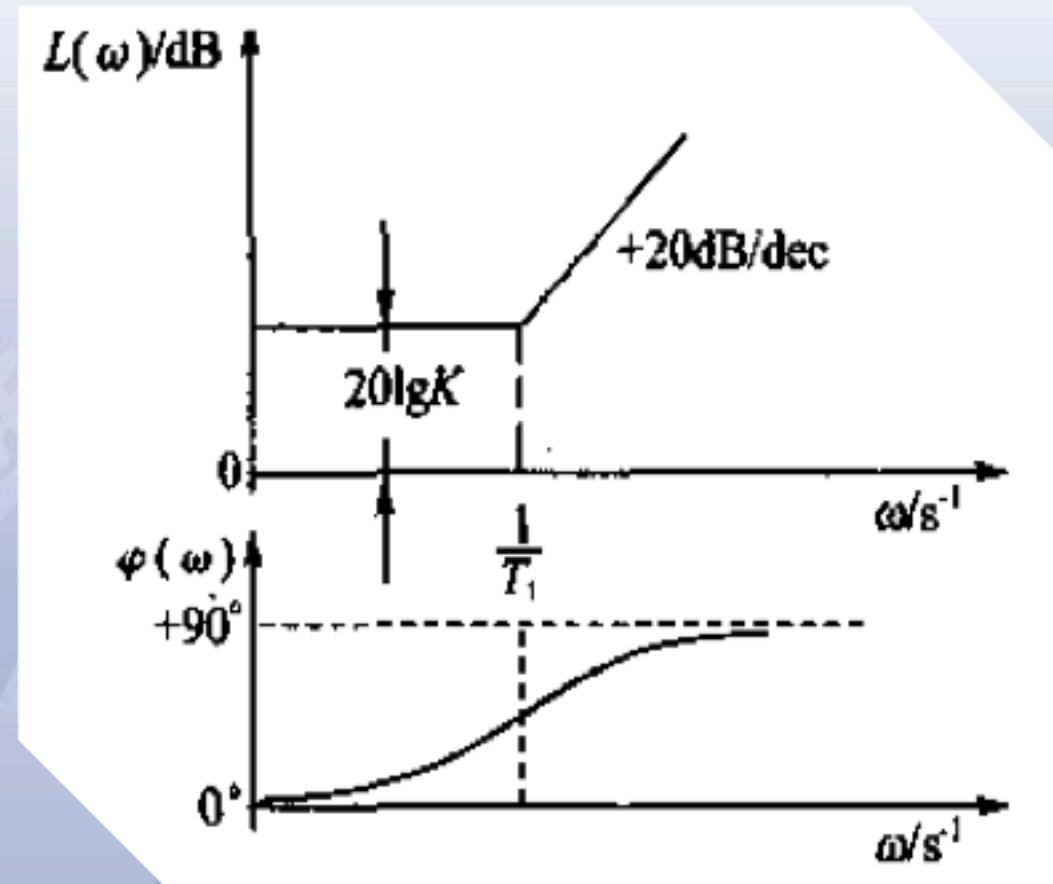
$$G_c(s) = K_p(1 + T_d s)$$

$$u(t) = K_p \left[e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

微分控制在任何情况下都不单独起作用。

$$L_c(\omega) = 20 \lg K_p + 20 \sqrt{1 + \omega^2 T_d^2}$$

$$\varphi_c(\omega) = \arctan \omega T_d$$



适当的选取微分时间常数，就可以利用PD控制提供的超前相角增大系统的相位裕度，增大系统的截止频率，系统地响应速度加快。本质上PD控制作用是超前校正



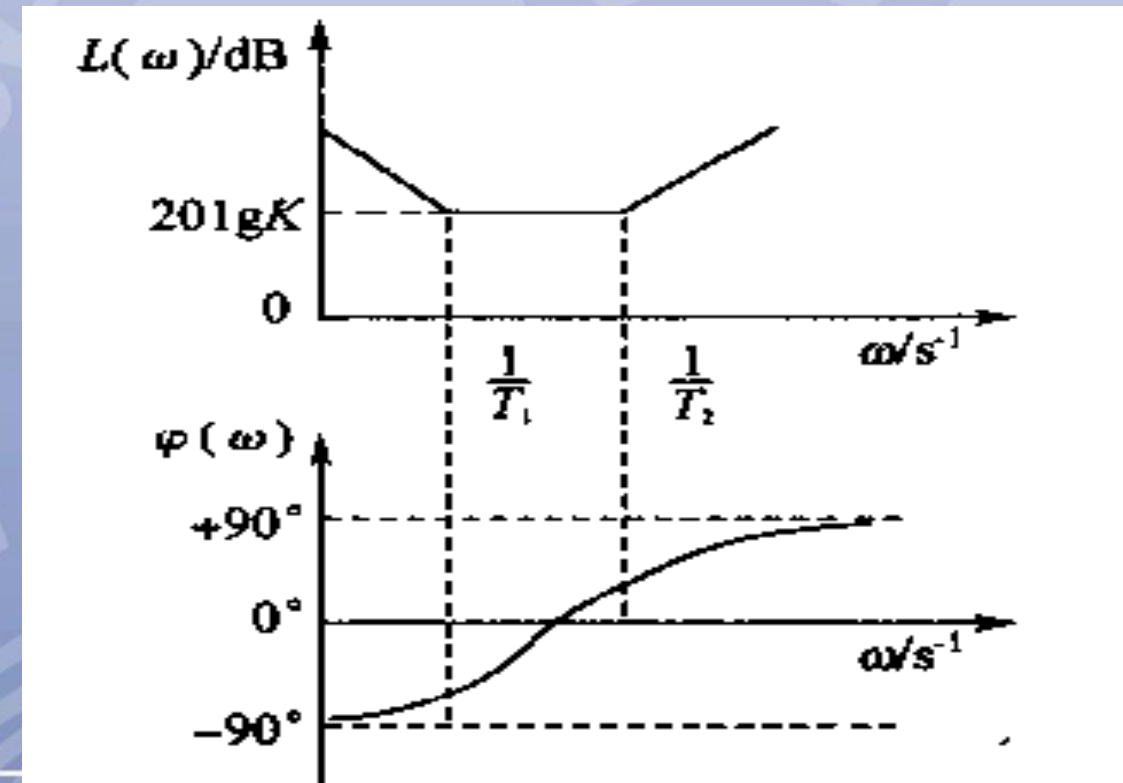
6.4.5 比例加积分加微分(PID)控制规律

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) = K_p \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s}$$

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

$$L_c(\omega) = 20 \lg K_p + 20 \lg \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_i \omega_d}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_i^2}} - 20 \lg \frac{\omega}{\omega_i}$$

$$\varphi_c(\omega) = \arctan \frac{\frac{\omega^2}{\omega_i \omega_d} - 1}{\frac{\omega}{\omega_i}}$$

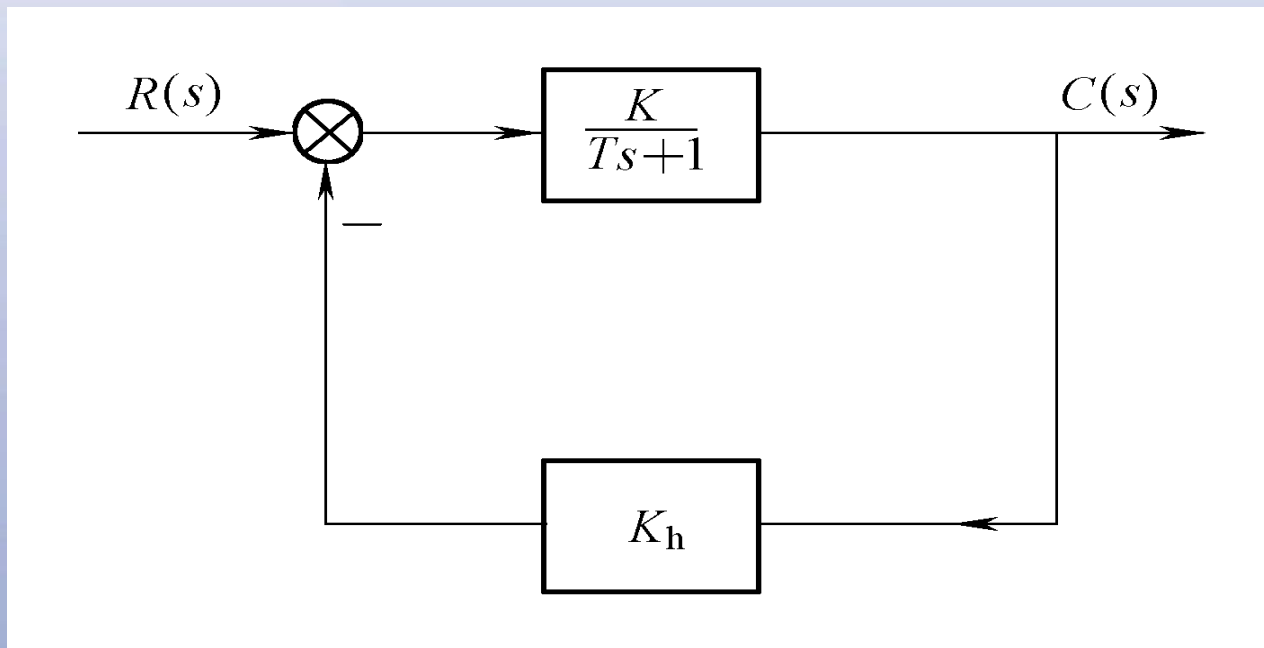




6.5 反馈校正

6.5.1 引言

1) 比例负反馈



校正前

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$$

校正后

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts + 1 + KK_h} = \frac{K'}{T's + 1}$$

式中

$$T' = \frac{1}{1 + KK_h} T \quad K' = \frac{1}{1 + KK_h} K$$

讨 论

从上式中可以看到，由于采用了比例负反馈，使得 T' 大为减小，而由惯性影响的动态特性得到改善。但这种减少是从系统放大倍数同时减小为前提的，这就是平常所说的以牺牲放大倍数来换取动态性能的改善。但是放大倍数的减少可以通过提高串接在系统中的放大环节增益来补偿。

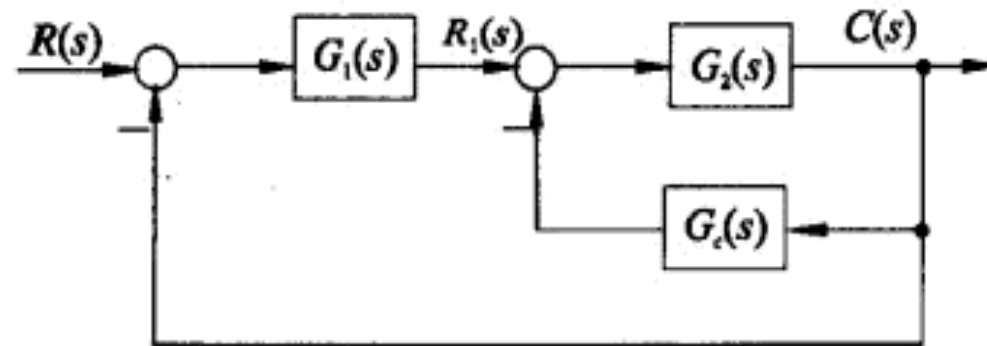
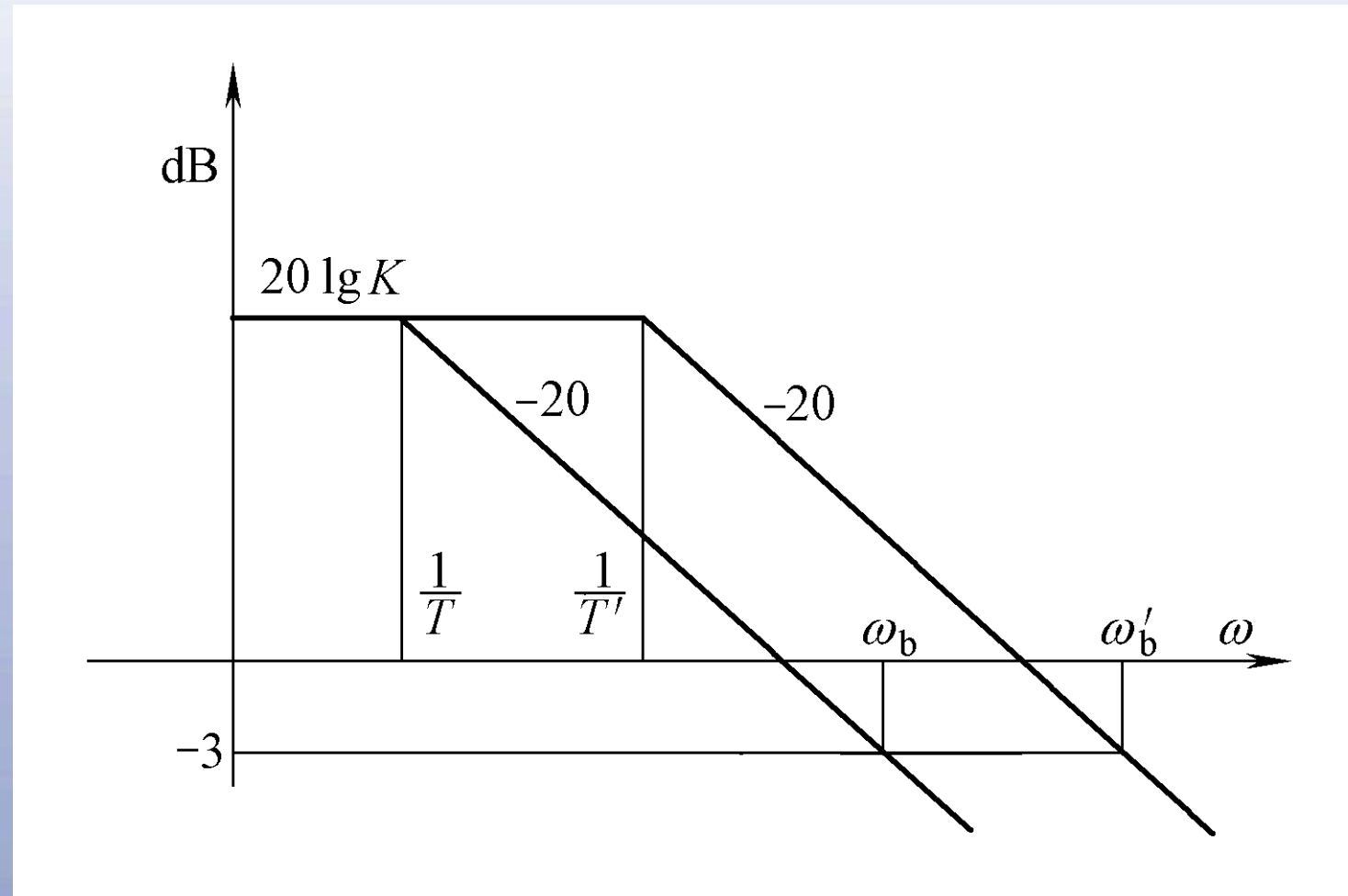


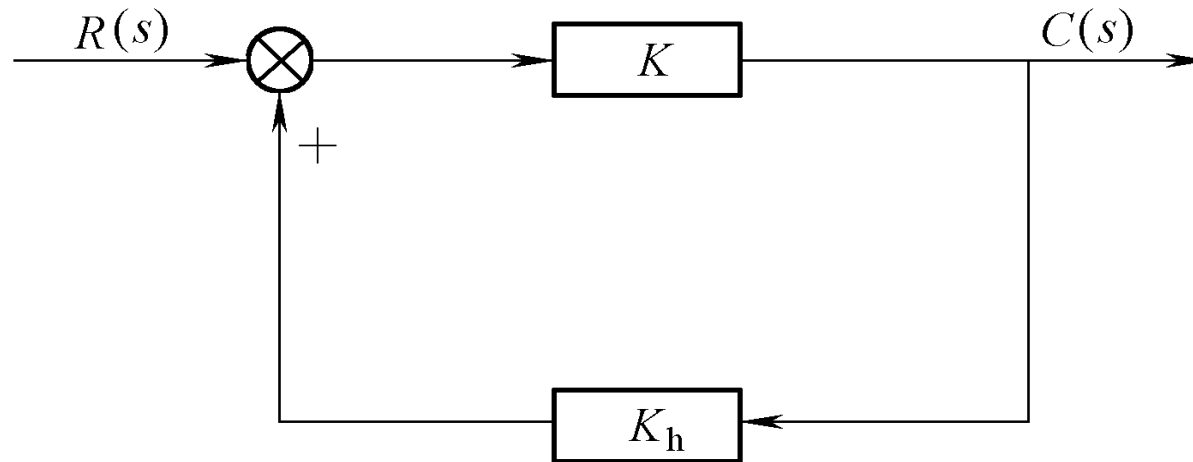
图 6-30 反馈校正系统

校正前后系统的对数幅频特性如下图所示



说明：从上图中可以很清楚地看到反馈后系统的**带宽得到扩展**，系统的**响应速度加快**；对**改善**系统的**动态性能**有利。这是在反馈校正中常用的一种方法。

2) 正反馈



校正后

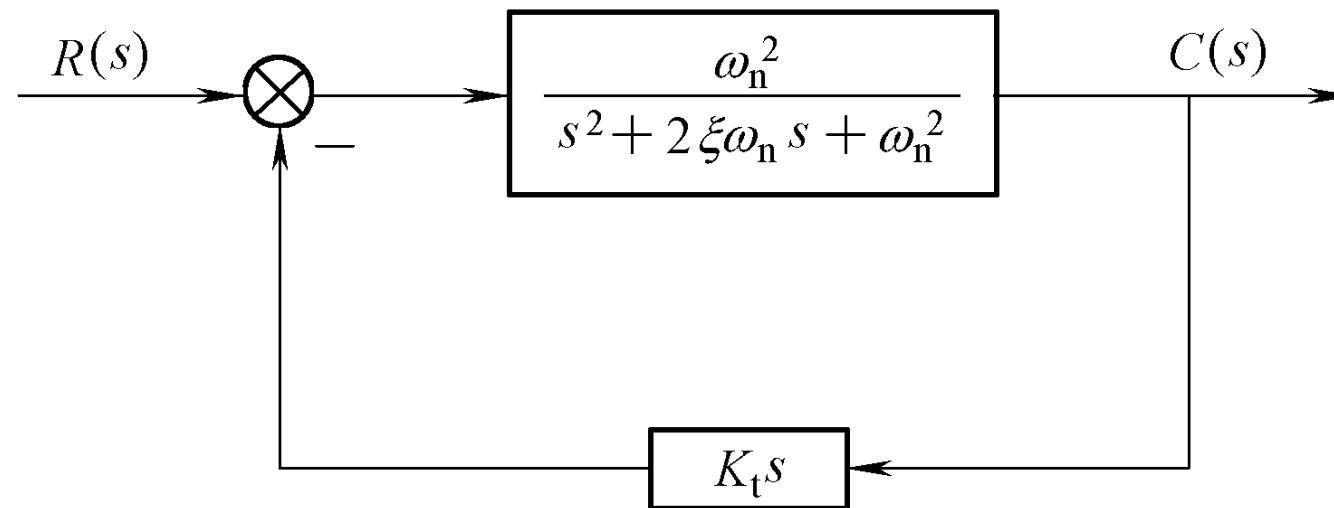
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{1 - KK_h}$$

当 KK_h 趋于1时，校正后系统的放大倍数将远大于原来的值。这正是正反馈所独具的特点之一。

即：正反馈可以提高系统的放大倍数。



3) 微分负反馈



校正前 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

校正后 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\xi\omega_n + K_t\omega_n^2)s + \omega_n^2}$



校正后阻尼比为

$$\xi_t = \xi + \frac{1}{2} K_t \omega_n$$

说明：微分负反馈在动态中可以**增加阻尼比**，**改善系统的相对稳定性能**。微分负反馈是反馈校正中使用得最广泛的一种控制规律。