电路原理

信息学院　　常青

changqing@ecust.edu.cn

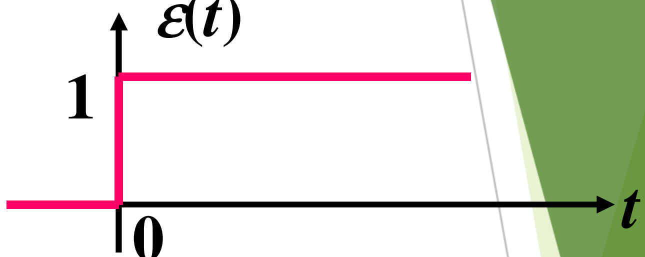
第7章 一二阶电路时域分析

单位阶跃响应和单位冲激响应

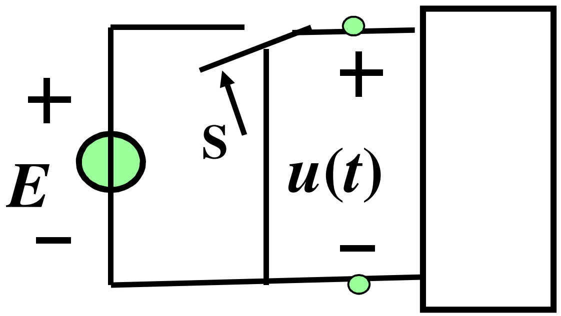
一、单位阶跃函数(*unit-step function*) $\varepsilon(t)$

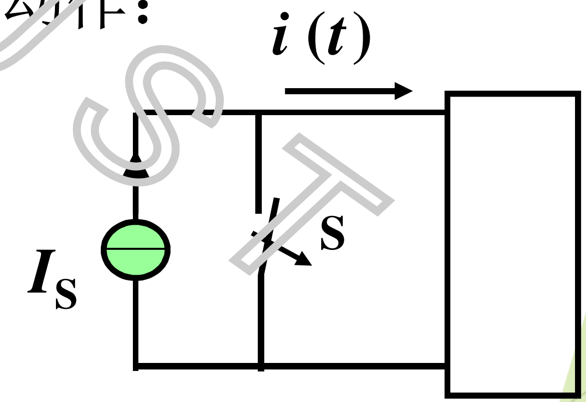
1. 定义

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}$$



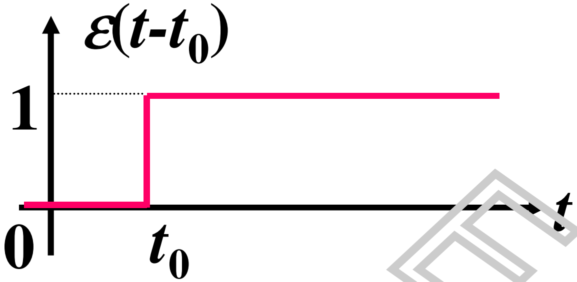
2. 作用　**1**）用来模拟开关的动作：





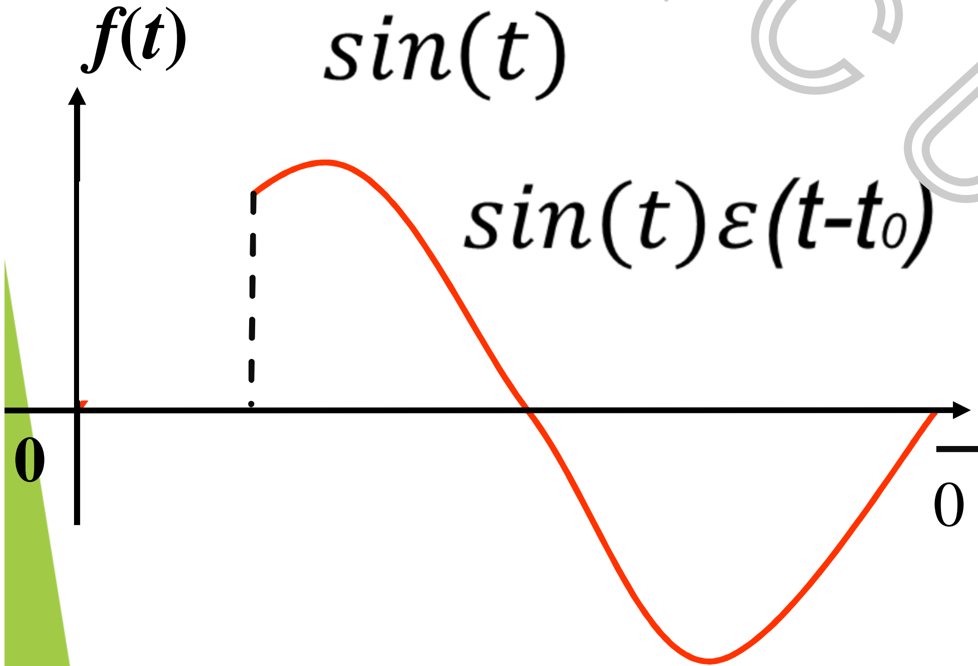
$t=0$合上　$u(t)=E\varepsilon(t)$　　　$t=0$拉闸　$i(t)=I_S\varepsilon(t)$

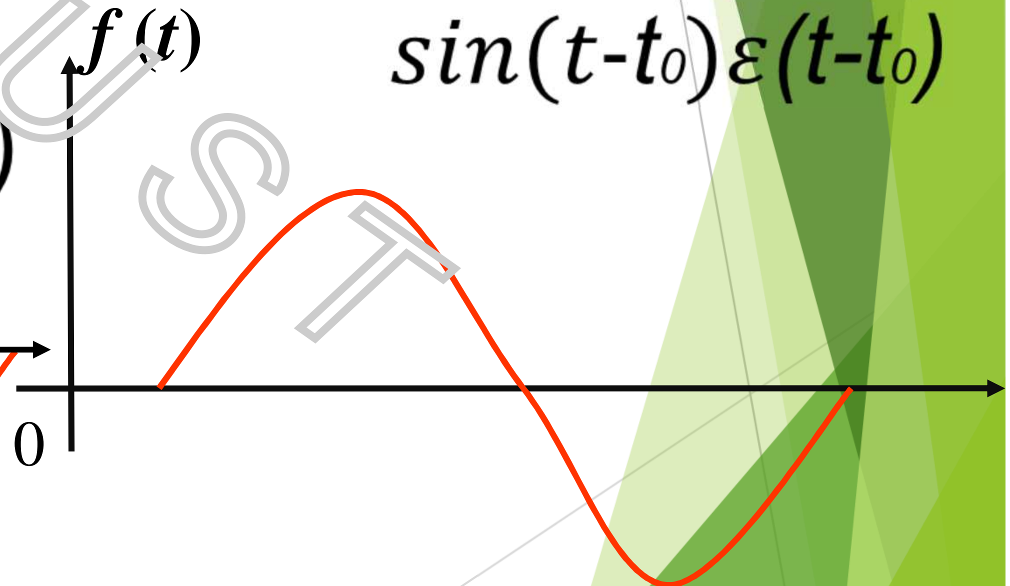
2） 起始或延迟一个函数



单位阶跃延迟函数

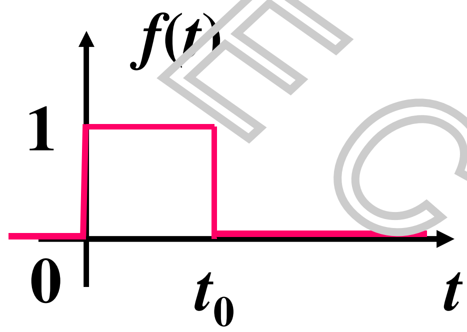
$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & (t<t_0)\\ 1 & (t>t_0)\end{cases}$$

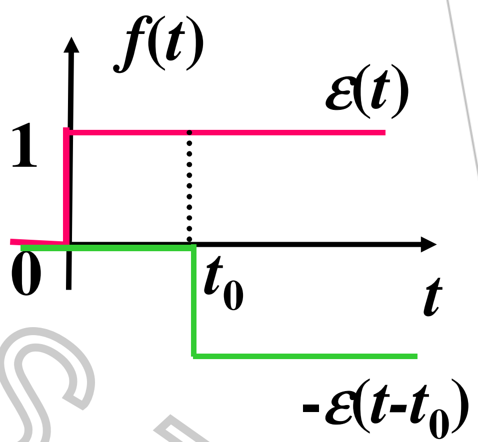




3） 由单位阶跃函数表示复杂的信号

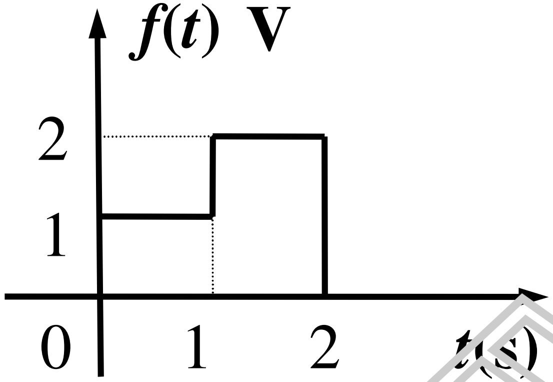
例 1





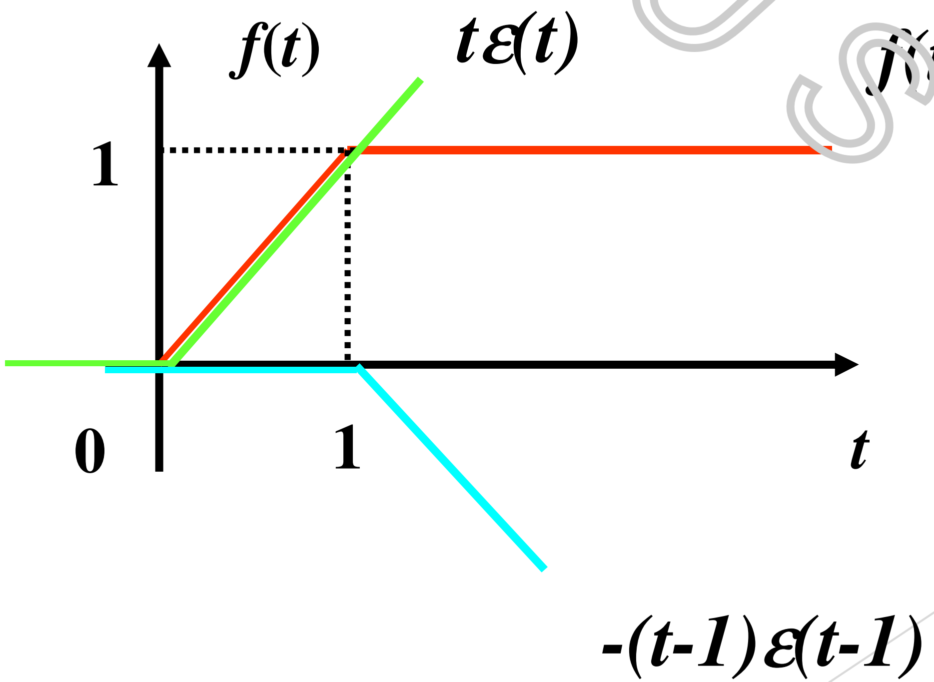
$$f(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - t_0)$$

例2



$$f(t)=\varepsilon(t)+\varepsilon(t-1)-2\varepsilon(t-2)$$

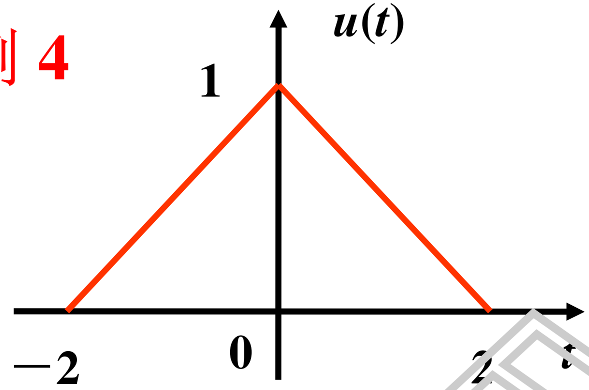
例 3



$$f(t)=t\,[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+\varepsilon(t-1)$$

$$=\ t\,\varepsilon(t)-(t-1)\varepsilon(t-1)$$

例 4



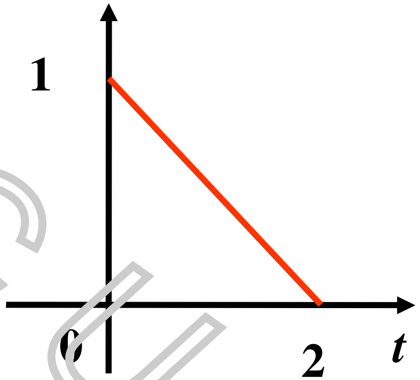
已知电压$u(t)$的波形如图，试画出下列电压的波形。

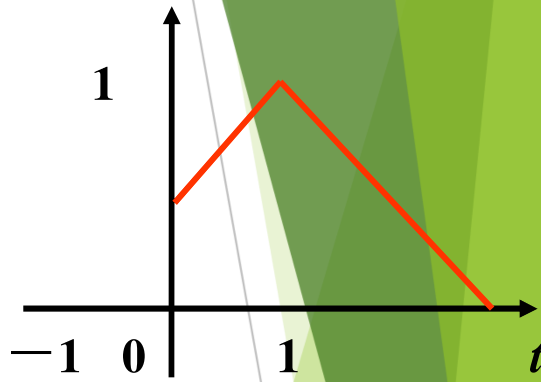
(1) $u(t)\varepsilon(t)$

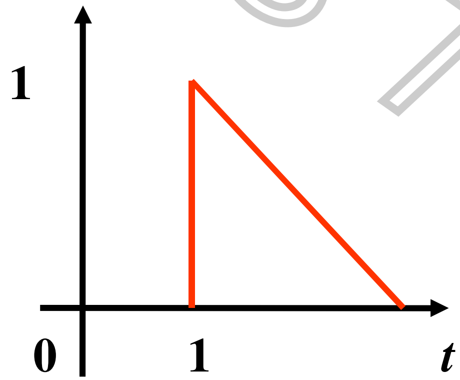
(2) $u(t-1)\varepsilon(t)$

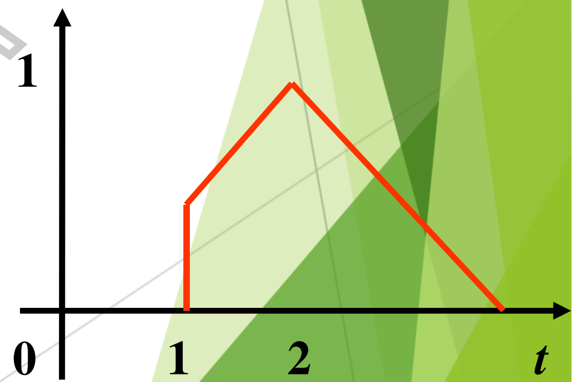
(3) $u(t-1)\varepsilon(t-1)$

(4) $u(t-2)\varepsilon(t-1)$

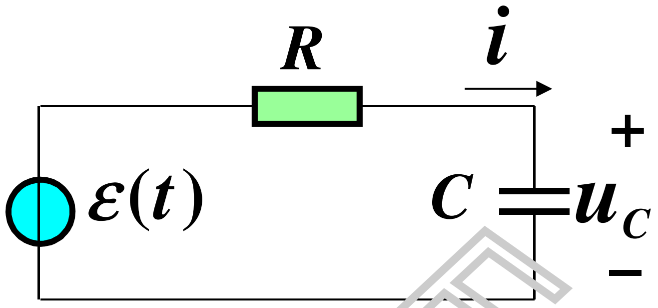








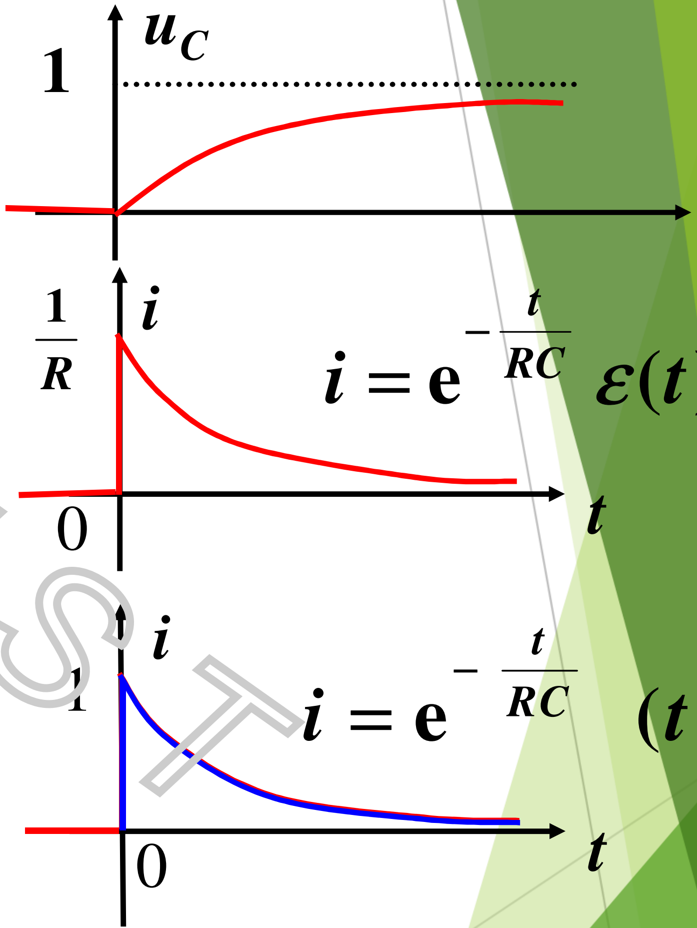
二、一阶电路的单位阶跃响应——单位阶跃激励下电路的零状态响应



$u_C(0^-)=0$

$$u_C(t)=(1-e^{-\frac{t}{RC}})\ \varepsilon(t)$$

$$i(t)=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\ \varepsilon(t)$$

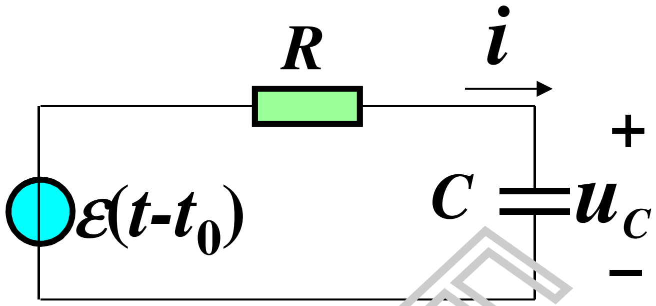


$$i=e^{-\frac{t}{RC}}\ \varepsilon(t)$$

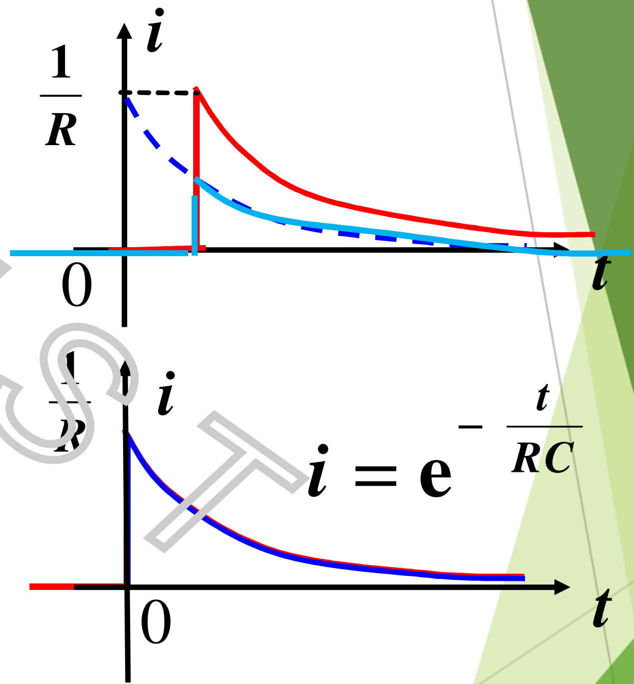
$$i=e^{-\frac{t}{RC}}\quad (t>0)$$

注意 $i=e^{-\frac{t}{RC}}\ \varepsilon(t)$ 和 $i=e^{-\frac{t}{RC}}\quad (t>0)$ 的区别

注意 激励在t=t0时加入，则响应从t=t0开始



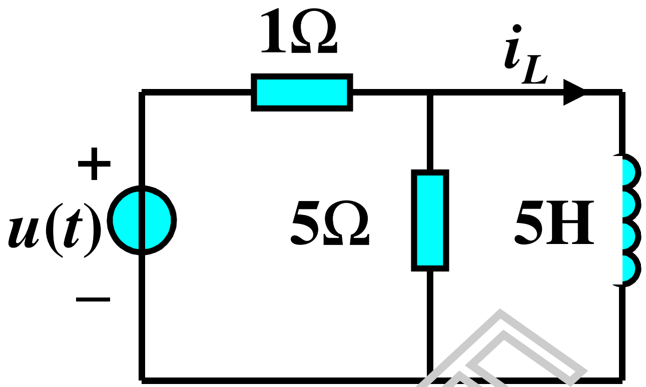
$$i_C = \frac{1}{R} e^{-\frac{t-t_0}{RC}} \varepsilon(t-t_0)$$



$$i = e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t>0)$$

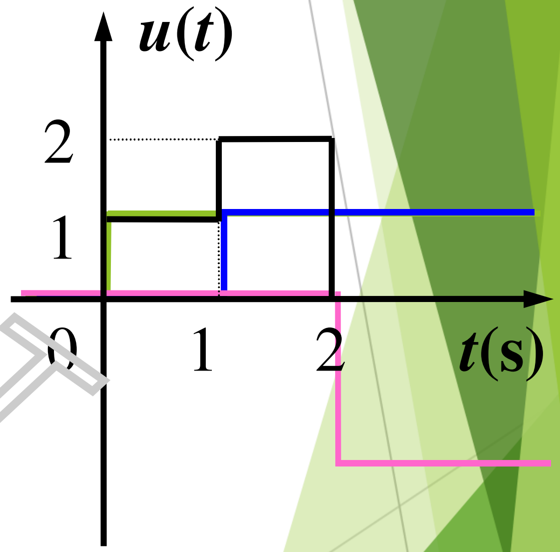
$$\cancel{i(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t-t_0)}$$

例



已知： $u(t)$如图示，$i_L(0^-)= 0$。

求：$i_L(t)$，并定性画出其波形。



$$u(t)= \varepsilon(t)+ \varepsilon(t-1) -2\varepsilon(t-2)$$

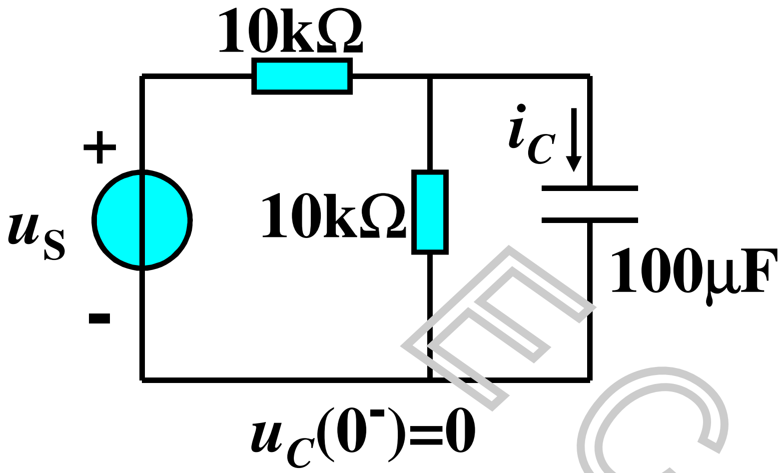
$$\varepsilon(t) \longrightarrow (1-e^{-t/6})\, \varepsilon(t)$$

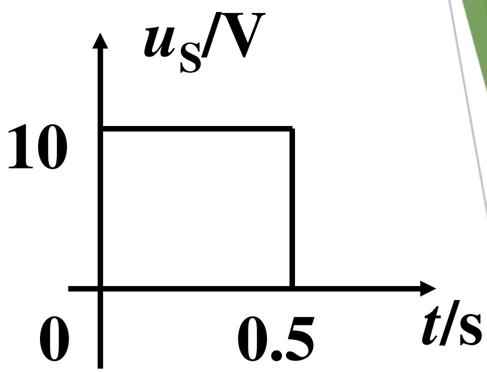
$$\varepsilon(t-1) \longrightarrow (1-e^{-(t-1)/6})\, \varepsilon(t-1)$$

$$-2\varepsilon(t-2) \longrightarrow -2(1-e^{-(t-2)/6})\, \varepsilon(t-2)$$

$$i_L(t) = (1-e^{-t/6})\, \varepsilon(t) + (1-e^{-(t-1)/6})\, \varepsilon(t-1) -2(1-e^{-(t-2)/6})\, \varepsilon(t-2)$$

例　求图示电路中电流 $i_C(t)$。

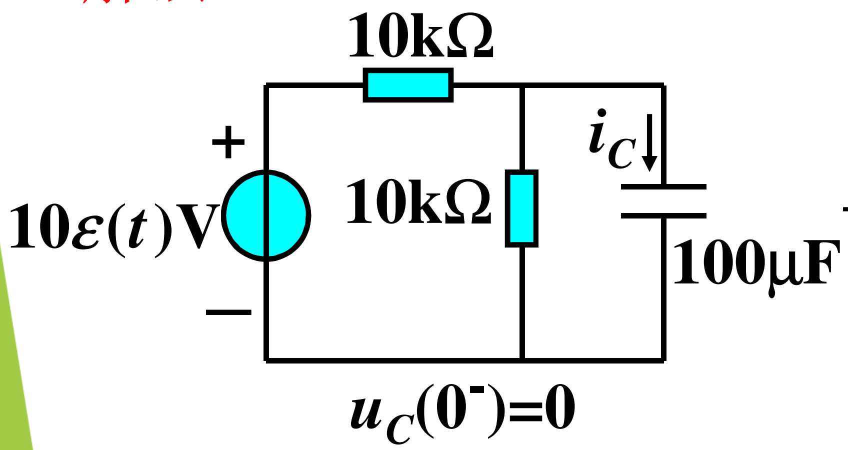


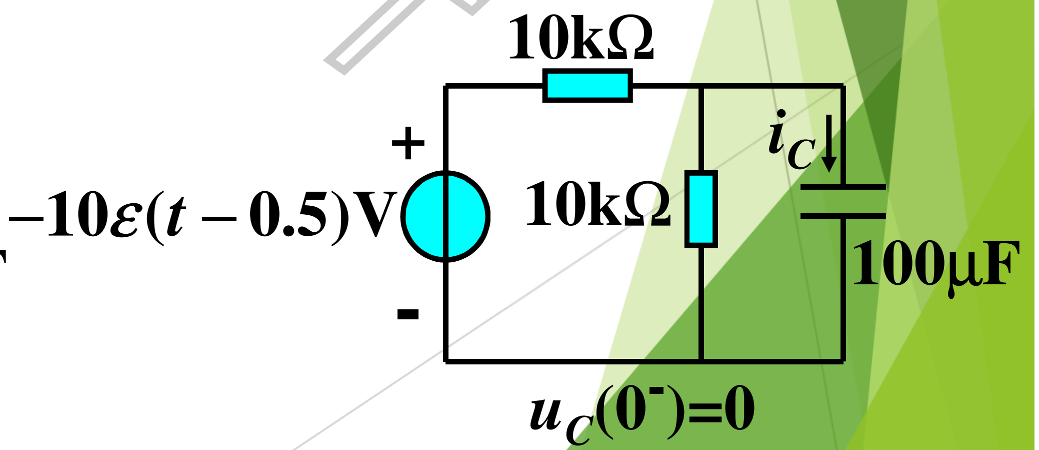


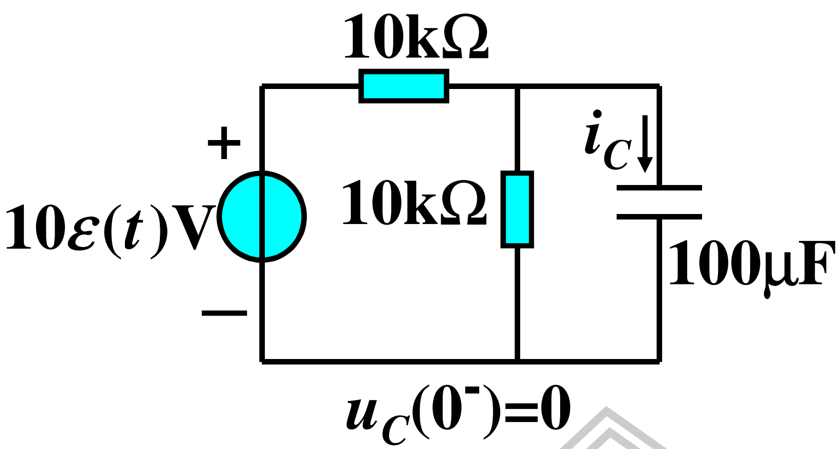
$$u_S = 10\varepsilon(t) - 10\varepsilon(t-0.5)$$

解法一：　两次换路，三要素法。

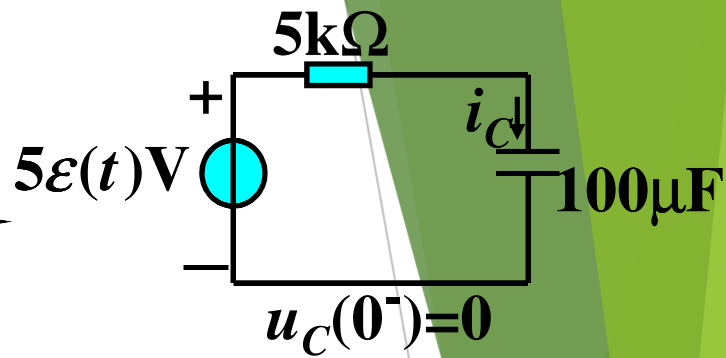
解法二：







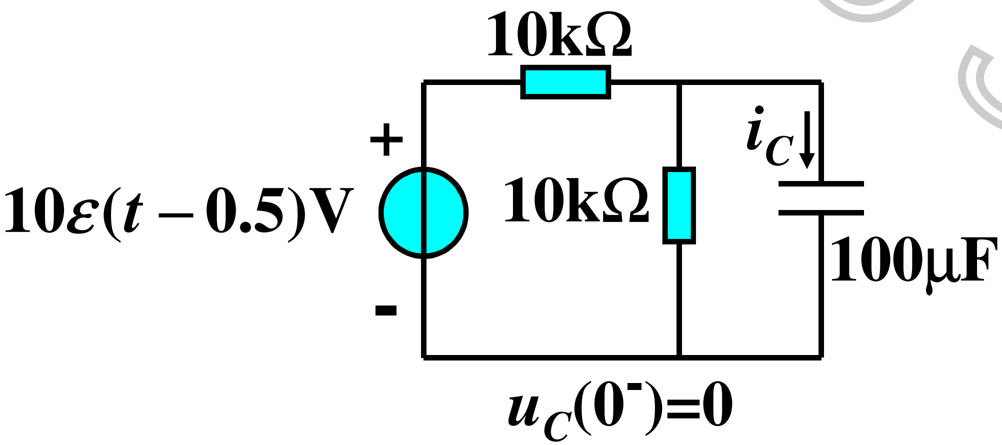
等效



$$\tau = RC = 100\times10^{-6}\times5\times10^{3} = 0.5\text{s}$$

$$i_C = \mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)\ \text{mA}$$

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_S}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$



$$i_C = \mathrm{e}^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5)\ \text{mA}$$

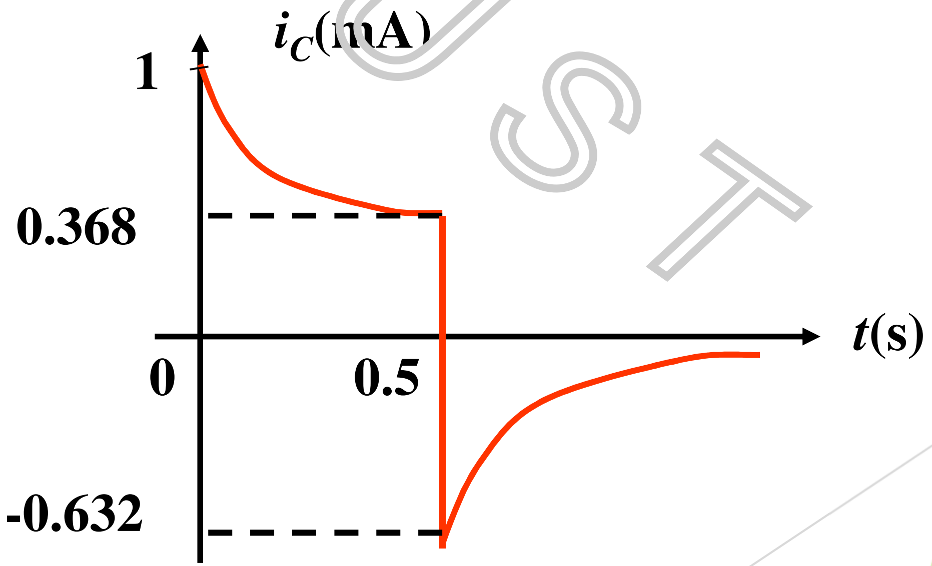
$$\therefore i_C = \mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t) - \mathrm{e}^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5)\ \text{mA}$$

$$\therefore i_C = \mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t) - \mathrm{e}^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5)\ \mathrm{mA}$$

分段表示为：

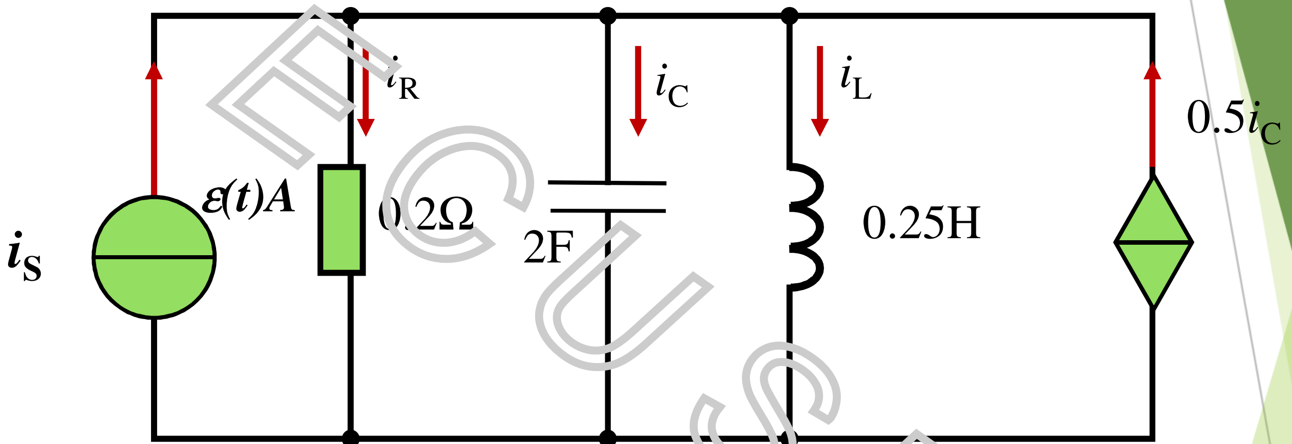
$$i_C(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-2t}\ \mathrm{mA} & (0 < t < 0.5s) \\ -\mathrm{e}^{-2(t-0.5)}\ \mathrm{mA} & (t > 0.5s) \end{cases}$$

波形



三、二阶电路的单位阶跃响应

例　已知图示电路中$u_C(0_-)=0$，$i_L(0_-)=0$，求单位阶跃响应 $i_L(t)$）



解

对电路应用KCL:

$$i_R + i_C + i_L - 0.5i_C = i_S$$

$$i_R + 0.5i_C + i_L = \varepsilon(t)$$

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}$$

代入已知参数并整理得：

$$\frac{\mathrm{d}i_L^2}{\mathrm{d}t^2} + 5\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + 4i_L = 4\varepsilon(t)$$

这是一个关于i_L的二阶线性非齐次方程，其解为

$$i_L = i' + i''$$

特解 $i' = 1$ 通解 $i'' = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$

特征方程 $p^2 + 5p + 4 = 0$

解得特征根 $p_1 = -1$ $p_2 = -4$

$$i_L = 1 + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t}$$

代入初始条件

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

$$\begin{cases} 1 + A_1 + A_2 = 0 \\ -A_1 - 4A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -\dfrac{4}{3} \\ A_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

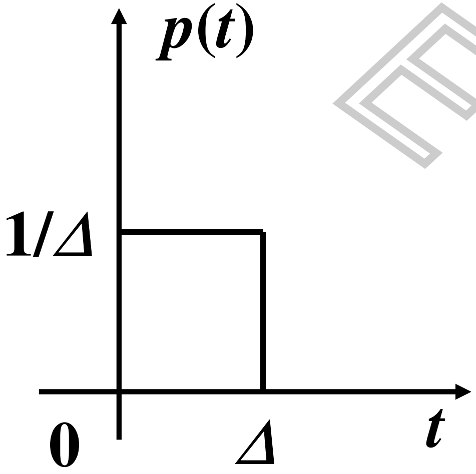
阶跃响应

$$i_L(t) = s(t) = \left(1 - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)\,\mathrm{A}$$

电路的动态过程是过阻尼性质的。

四、单位冲激函数（*unit impulse function*）

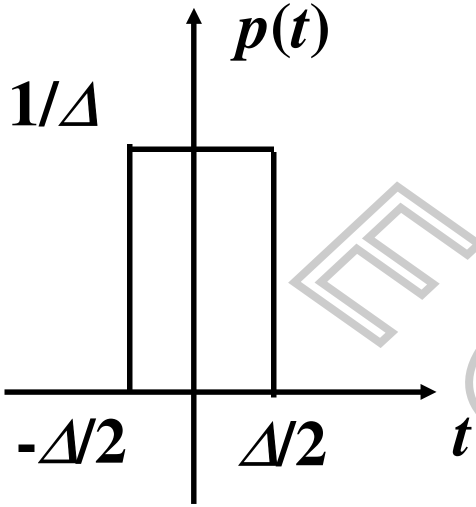
1. 单位脉冲函数 $p(t)$



$$p(t)=\frac{1}{\Delta}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta)]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(t)\mathrm{d}t=1$$

2. 单位冲激函数 $\delta(t)$



$$p(t)=\frac{1}{\Delta}\left[\varepsilon\left(t+\frac{\Delta}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{\Delta}{2}\right)\right]$$

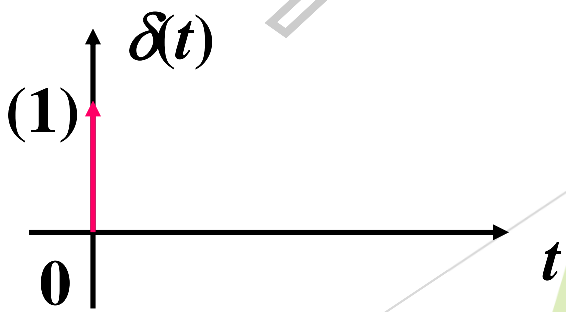
$$\Delta\to 0,\quad \frac{1}{\Delta}\to\infty$$

$$\lim_{\Delta\to 0} p(t)=\delta(t)$$

定义：

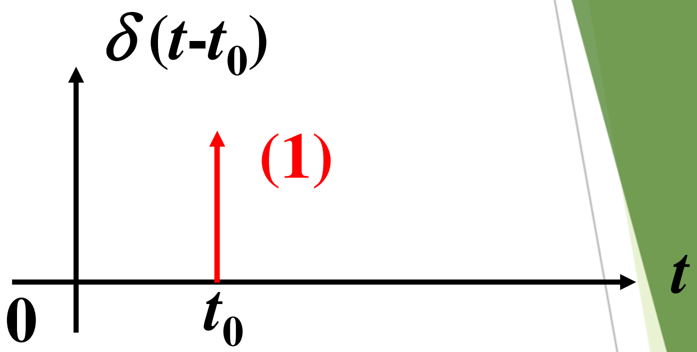
$$\delta(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 0 & (t>0)\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$



3. 单位冲激函数的延迟 $\delta(t-t_0)$

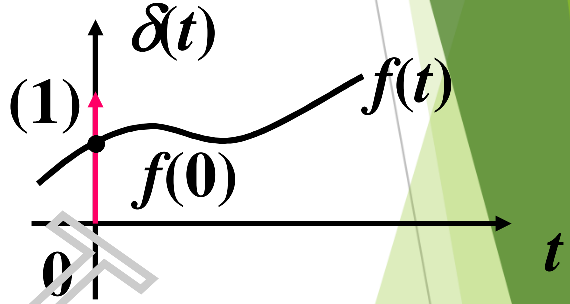
$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 \quad (t \neq t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{d}t = 1 \end{cases}$$



4. δ函数的筛分性

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t)\delta(t)}_{f(0)\delta(t)} \mathrm{d}t = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$$

同理有：　$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$

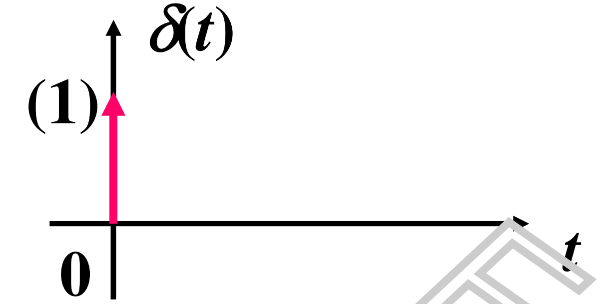


* $f(t)$在 t_0 处连续

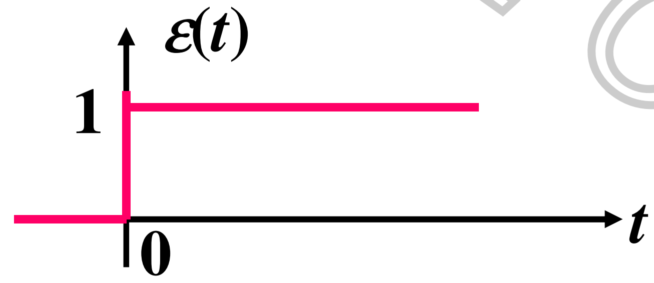
例7　$\int_{-\infty}^{\infty} (\sin t + t)\delta(t-\frac{\pi}{6})\mathrm{d}t$

$$= \sin\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} = 1.02$$

五、$\delta(t)$与$\varepsilon(t)$的关系

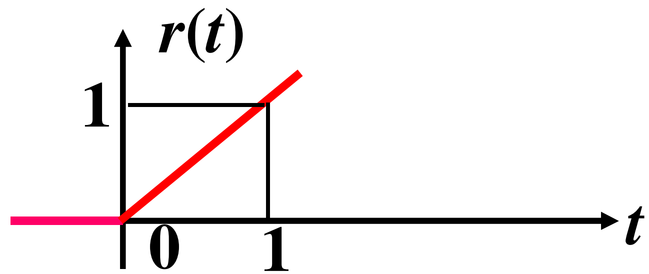


$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t)$$



$$\varepsilon(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)$$

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\mathrm{d}t$$



单位斜升函数

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(t)\mathrm{d}t$$

六、一阶电路的冲激响应

单位冲激响应：单位冲激激励在电路中产生的零状态响应。

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{零状态}} \longrightarrow h(t)$$

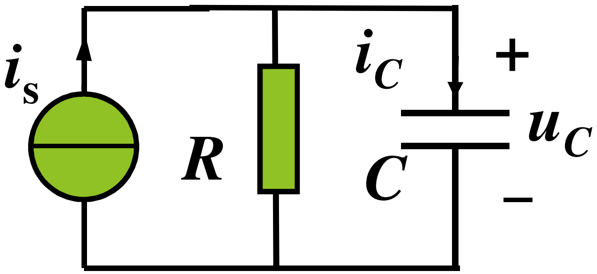
方法1. 由单位阶跃响应求单位冲激响应

单位阶跃	单位阶跃响应
$\varepsilon(t)$	$s(t)$
单位冲激	单位冲激响应
$\delta(t)$	$h(t)$

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$h(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} s(t)$$

例



已知：$u_C(0^-)=0$

求：$i_S(t)$为单位冲激时，电路响应 $u_C(t)$和 $i_C(t)$。

先求单位阶跃响应 令 $i_s(t)=\varepsilon(t)$

$u_C(0^+)=0$ $u_C(\infty)=R$ $\tau=RC$ $i_C(0^+)=1$ $i_C(\infty)=0$

$$u_C(t)=R(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) \qquad i_C=\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

再求单位冲激响应 令 $i_S(t)=\delta(t)$

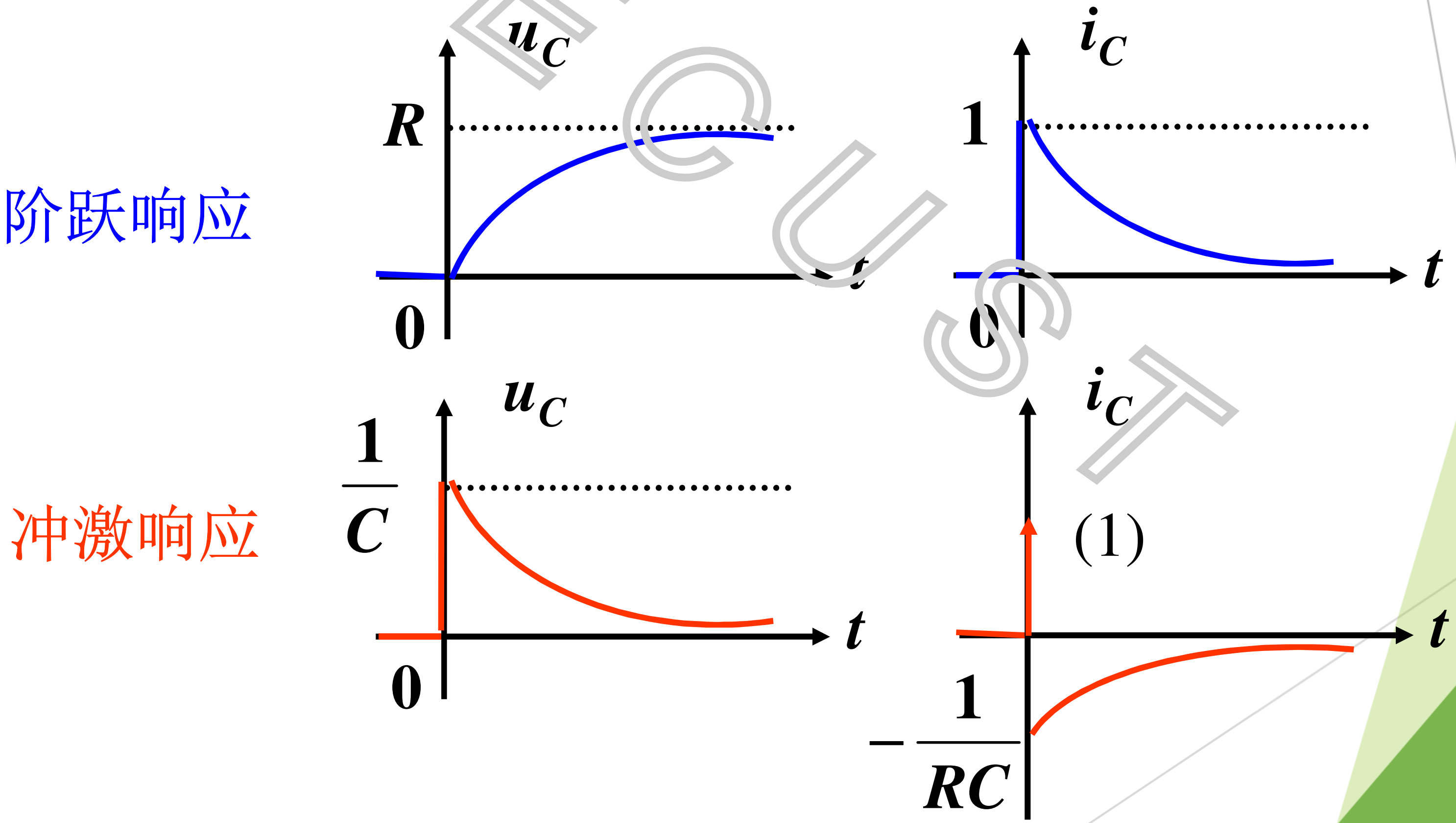
$$u_C(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)=\underbrace{R(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\delta(t)}_{0}+\frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$=\frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

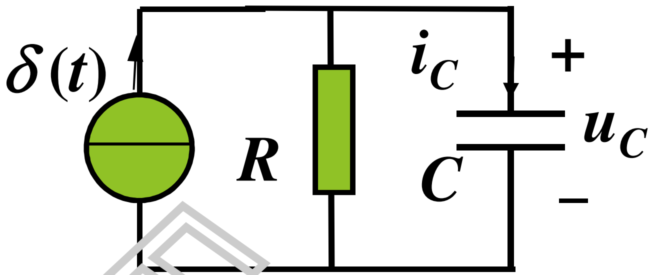
$f(t)\delta(t)$
$=f(0)\delta(t)$

$$i_C(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)]=\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\delta(t)-\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$=\delta(t)-\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$



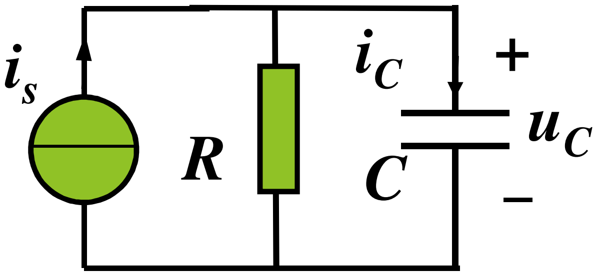
方法2. 分两个时间段来考虑冲激响应



$u_C(0^-)=0$

t $\begin{cases} 0^- \longrightarrow 0^+ & \text{电容充电} \\ 0^+ \longrightarrow \infty & \text{零输入响应} \end{cases}$

关键在于求$u_C(0^+)$ ！



(1) t 在 $0^- \longrightarrow 0^+$ 间

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{u_C}{R}=\delta(t)$$

u_C 不可能是冲激函数，否则**KCL**不成立。

方法1：对微分方程$0^- \sim 0^+$积分

$$\int_{0^-}^{0^+} C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\frac{u_C}{R}\mathrm{d}t}_{=0}=\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t}_{=1}$$

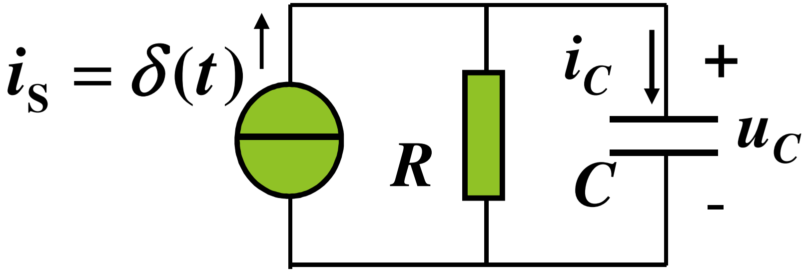
步骤：
(1) 列写方程；
(2) 观察方程求$u_C(0^+)$；
(3) 求i_C。

$$C[u_C(0^+)-u_C(0^-)]=1$$

$$u_C(0^+)=\frac{1}{C}\neq u_C(0^-)$$

电容中的冲激电流使电容电压发生跳变

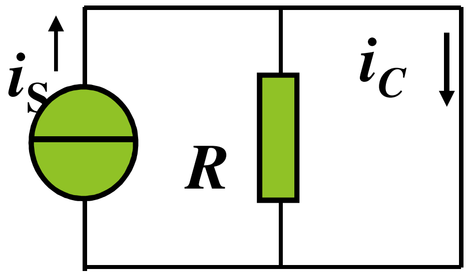
$$i_C=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\delta(t) \qquad \Delta q=\int_{0^-}^{0^+} i_C\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$



$u_C(0^-)=0$

方法2：电路直接观察法 在0^-～0^+范围内将C用电压源替代。

在$\delta(t)$作用的0^-～0^+范围内的等效电路为



$$i_C = \delta(t)$$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i_C \mathrm{d}t$$

$$u_C(0^+) = \frac{1}{C} \neq u_C(0^-) = 0$$

步骤：

(1) 画0^-～0^+范围内电路；

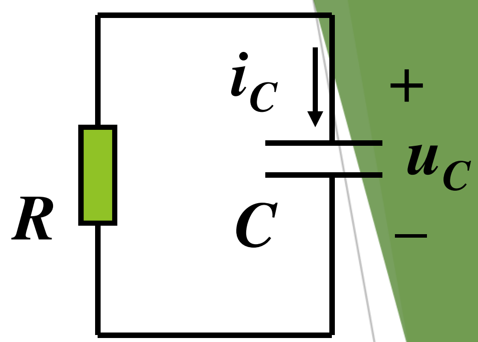
(2) 求i_C；

(3) 求u_C。

(2) $t>0^+$ 零输入响应（*RC*放电）

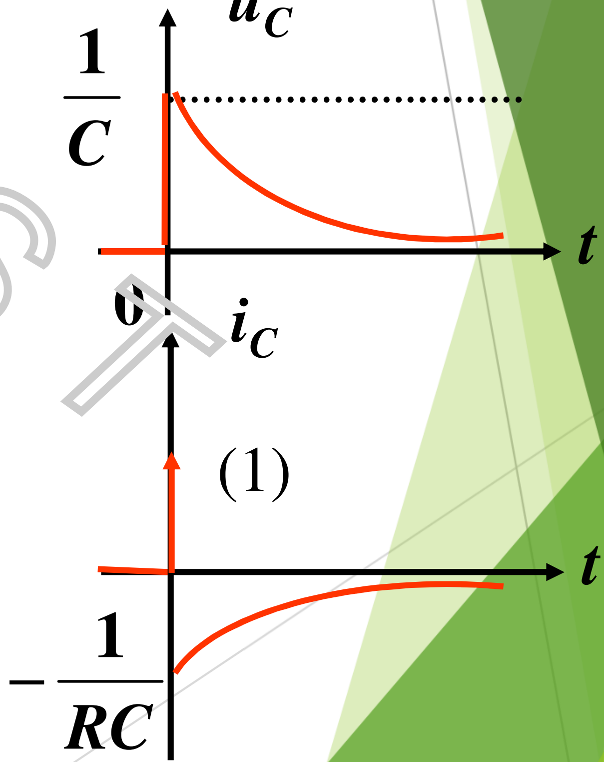
$$u_C(t)=\frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\quad(t\ge 0^+)$$

$$i_C(t)=-\frac{u_C}{R}=-\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\quad(t\ge 0^+)$$

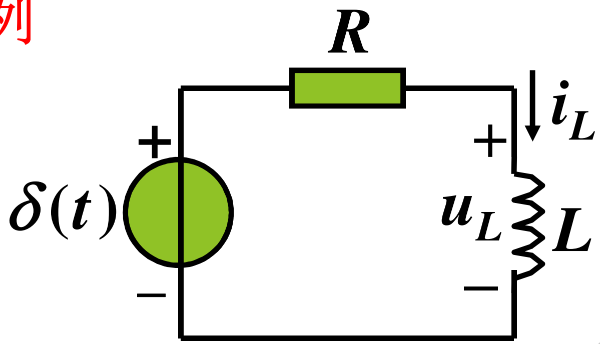


$$u_C(0^+)=\frac{1}{C}$$

$$\begin{cases} u_C(t)=\dfrac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \\ i_C(t)=\delta(t)-\dfrac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \end{cases}$$



例



$$i_L(0^-)=0$$

(1) t 在 $0^-\longrightarrow 0^+$间

$$Ri_L + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \delta(t)$$

i_L不可能是冲激

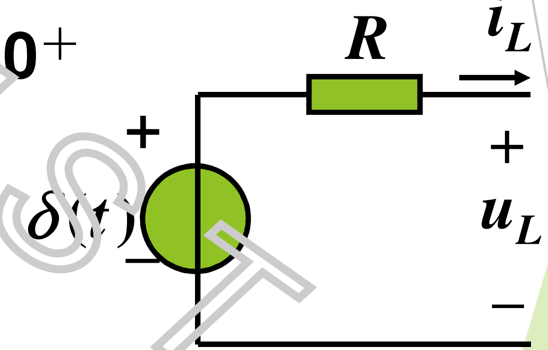
$$\cancel{\int_{0^-}^{0^+} Ri_L\mathrm{d}t} + \int_{0^-}^{0^+} L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_{0^-}^{0^+} L\mathrm{d}i_L = 1$$

$$L\left(i_L(0^+) - i_L(0^-)\right) = 1$$

$$i_L(0^+) = \frac{1}{L}$$

$0^- \sim 0^+$

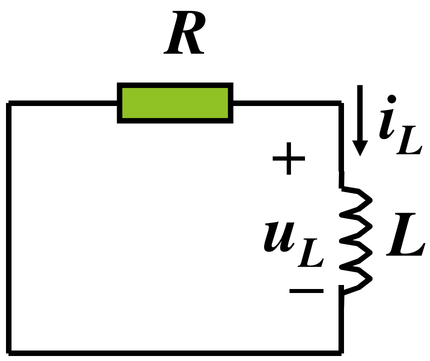


$$u_L = \delta(t)$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) + \frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} u_L\mathrm{d}\xi = \frac{1}{L}$$

（2） $t > 0^+$ RL放电

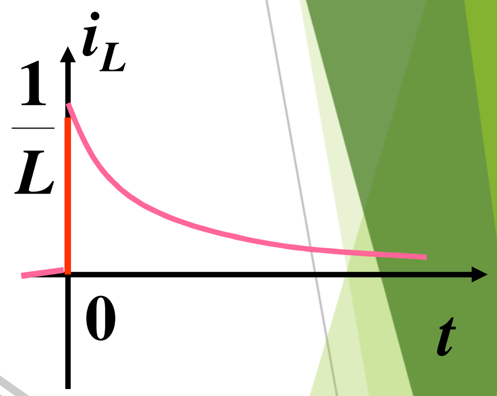
$$\tau = \frac{L}{R}$$



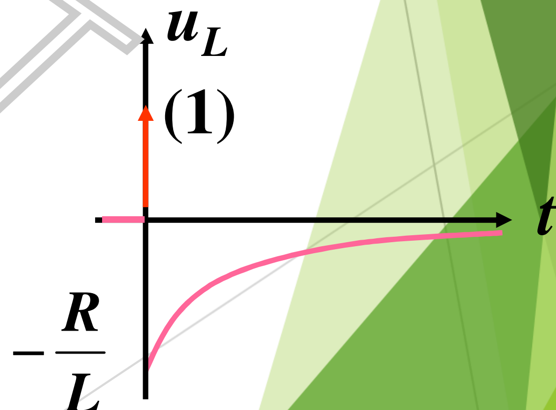
$$i_L(0^+) = \frac{1}{L}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0^+)$$

$$u_L(t) = -i_L R = -\frac{R}{L}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0^+)$$

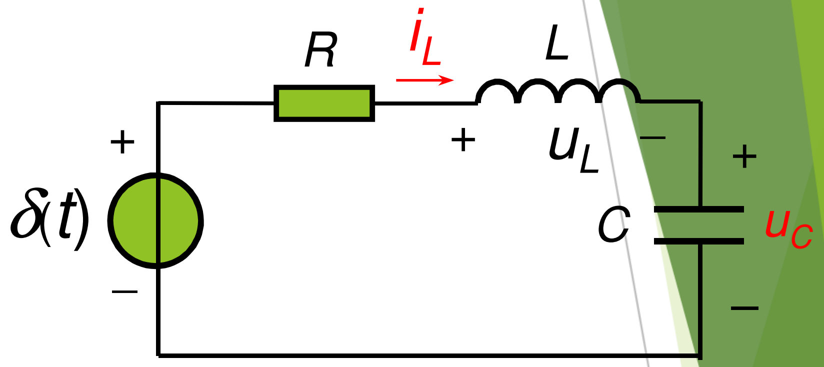


$$\begin{cases} i_L(t) = \dfrac{1}{L}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t) \\[2ex] u_L(t) = \delta(t) - \dfrac{R}{L}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t) \end{cases}$$



七、 二阶电路的冲激响应

t =0⁻ ~ 0⁺:



$u_C(0^-)=0$, $i_L(0^-)=0$

$$u_L = \delta(t)$$

$$\Delta\Psi = \int_{0^-}^{0^+} u_L \mathrm{d}t = 1$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) + \frac{\Delta\Psi}{L} = \frac{1}{L}$$ (电感储能)

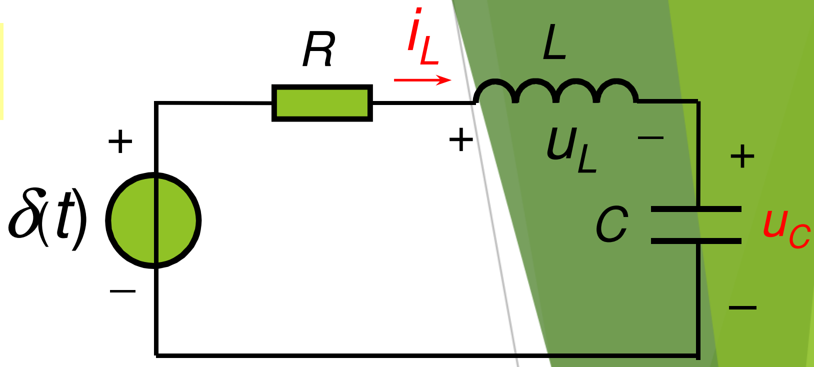
$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$$

结论:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$$

$$i_L(0^+) = \frac{1}{L} \neq i_L(0^-)$$

由方程来判断 t =0⁻ ~ 0⁺的变化：



$u_C(0^-)=0$， $i_L(0^-)=0$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=\delta(t)$$

u_C是跳变和冲激上式都不满足

设u_C不跳变，$\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t$ 发生跳变

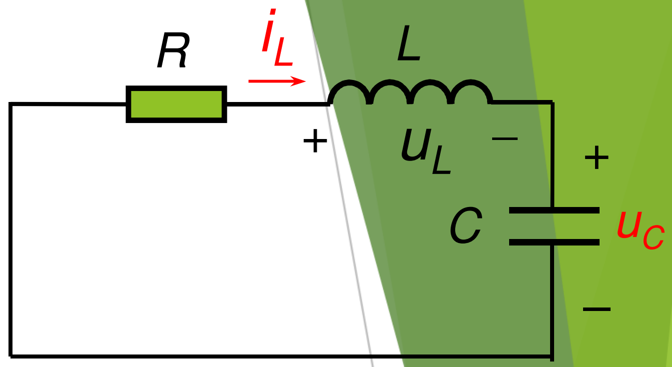
$$\int_{0^-}^{0^+}LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t+\int_{0^-}^{0^+}RC\underbrace{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}}_{\text{有限值}}\mathrm{d}t+\int_{0^-}^{0^+}\underbrace{u_C}_{\text{有限值}}\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t$$

$$LC\Big[\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\Big|_{0^+}-\underbrace{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\Big|_{0^-}}_{0}\Big]+RC[\underbrace{u_C(0^+)-u_C(0^-)}_{\text{相等}}]=1$$

$$LC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\Big|_{0^+}=1 \qquad C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\Big|_{0^+}=i_L(0^+)=\frac{1}{L}$$

$t>0^+$ 为零输入响应

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$



$u_C(0^+)=0$, $i_L(0^+)=1/L$

特征方程 $$p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}=0$$

$$(\frac{R}{L})^2-4\frac{1}{LC}>0 \quad 即 \quad R>2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad u_C=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}$$

$$(\frac{R}{L})^2-4\frac{1}{LC}=0 \quad 即 \quad R=2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad u_C=(A_1+A_2t)e^{pt}$$

$$(\frac{R}{L})^2-4\frac{1}{LC}<0 \quad 即 \quad R<2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad u_C=Ke^{-\delta t}\sin(\omega t+\beta)$$

由初始值 $$u_C(0^+)=u_C(0^-)=0$$

$$i_L(0^+)=\frac{1}{L}\neq i_L(0^-)$$

定常数 A_1, A_2 或 K, β