电路原理

信息学院　常青

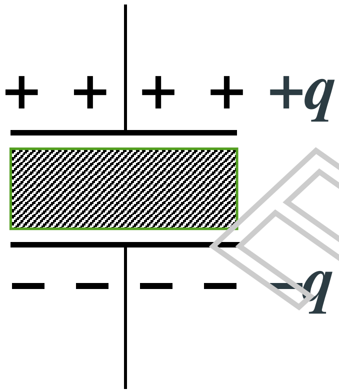
changqing@ecust.edu.cn

第6章 一阶电路时域分析

6.1 电感元件和电容元件

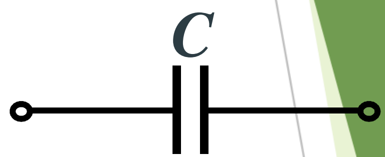
一、电容元件（*capacitor*）

电容器



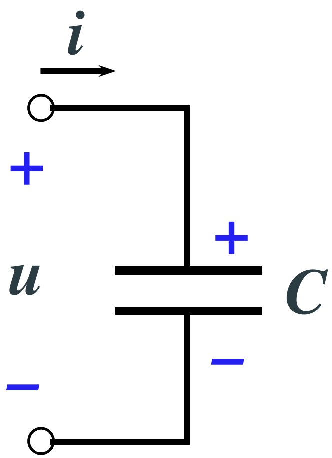
线性定常电容元件

电路符号



电容以电场形式存储能量。

1. 元件特性



描述电容的两个基本变量：u, q

对于线性电容，有：$q = Cu$

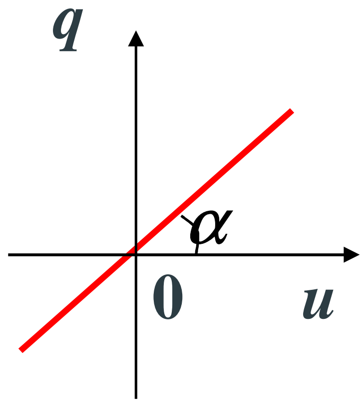
$$C \overset{\text{def}}{=} \frac{q}{u}$$

电容 C 的单位：法[拉]，

符号：F (Farad)

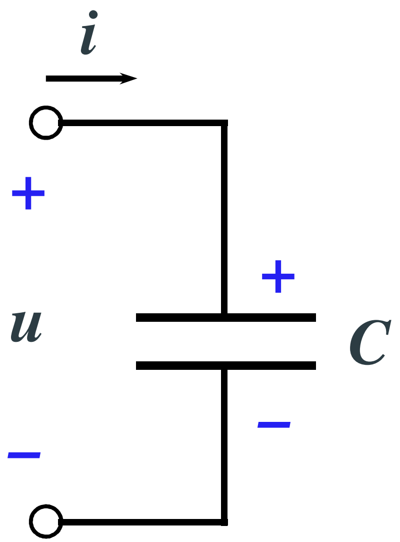
常用μF，pF等表示。

库伏（q-u）特性



$$C \propto \tan\alpha$$

2. 线性电容的电压、电流关系



$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,\mathrm{d}\tau$$

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,\mathrm{d}\tau$$

$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} i\,\mathrm{d}\tau$$

电容的电压-电流关系：

(1) i的大小与 u 的变化率成正比，与 u 的大小无关；

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

(2) 当 u 为常数(直流)时，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t=0 \rightarrow i=0$。电容在直流电路中相当于开路，电容有隔直作用；

(3) 电容元件是一种记忆元件；

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,\mathrm{d}\tau$$

(4) 表达式前的正、负号与u，i 的参考方向有关。当

u，i为关联方向时，$i= C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$；

u，i为非关联方向时，$i= -C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ 。

3. 电容的储能

$$p_{吸} = ui = u \cdot C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$W_C = \int_{-\infty}^{t} Cu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}Cu^2\Big|_{u(-\infty)}^{u(t)} = \frac{1}{2}Cu^2(t) - \frac{1}{2}Cu^2(-\infty)$$

$$\overset{若u(-\infty)=0}{=} \frac{1}{2}Cu^2(t) = \frac{1}{2C}q^2(t) \geq 0$$

无源元件

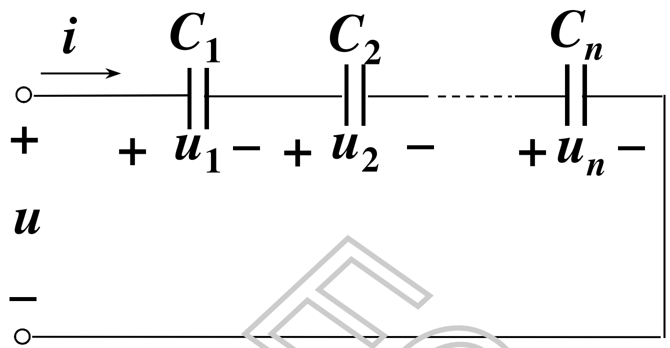
从t_0到 t 电容储能的变化量：

$$W_C = \frac{1}{2}Cu^2(t) - \frac{1}{2}Cu^2(t_0)$$

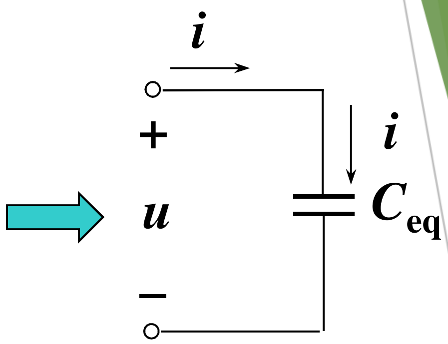
不消耗能量

4. 电容的串并联

（1）电容的串联



n个电容串联



等效电容

由KVL，有 $u(t)=u_1(t)+u_2(t)+\cdots+u_n(t)$

代入各电容的电压、电流关系式，得

$$u(t)=\frac{1}{C_1}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau+u_1(0)+\frac{1}{C_2}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau+u_2(0)+\cdots+\frac{1}{C_n}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau+u_n(0)$$

$$=(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n})\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau+\sum_{k=1}^{n}u_k(0)$$

$$=\frac{1}{C_{eq}}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau+u(0)$$

等效电容与各电容的关系式为

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k}$$

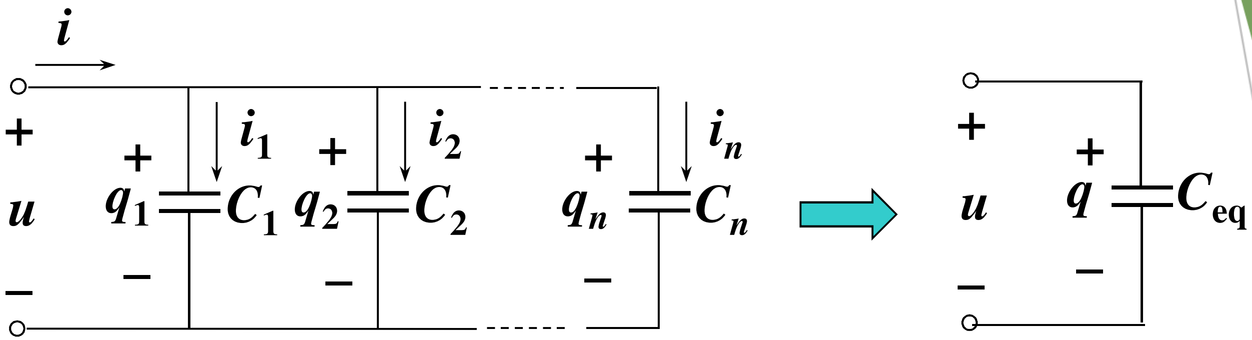
$$u(0)=\sum_{k=1}^{n}u_k(0)$$

结论：*n*个串联电容的等效电容值的倒数等于各电容值的倒数之和。

当两个电容串联（*n*=2）时，等效电容值为

$$C_{\text{eq}}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

（2）电容的并联



*n*个电容并联　　　　等效电容

由KCL，有　$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$

代入各电容的电压、电流关系式，得

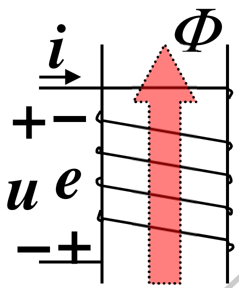
$$i(t) = C_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + C_2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \cdots + C_n \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$
$$= (C_1 + C_2 + \cdots + C_n)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$
$$= C_{eq} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

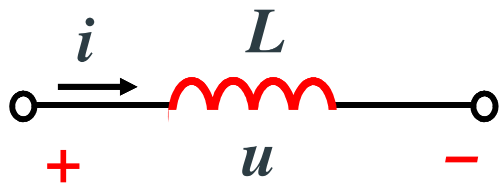
等效电容与各电容的关系式为

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} C_k$$

结论：*n*个并联电容的等效电容值等于各电容值之和。

二、电感元件 (*inductor*)





变量：电流 i ，磁链 Ψ

1. 线性定常电感元件

$$L \overset{\text{def}}{=} \frac{\Psi}{i}$$

$\Psi = N\Phi$ 为电感线圈的磁链

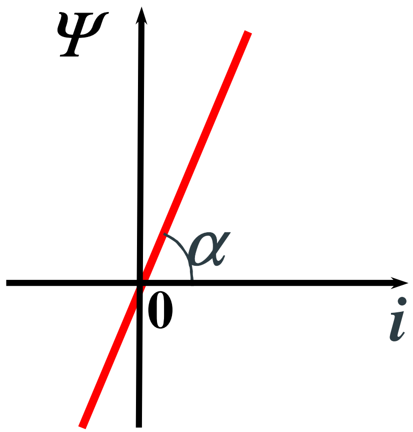
L 称为自感系数 $\boxed{\textit{inductance}}$

L 的单位名称：亨[利] 符号：**H** (**Henry**）

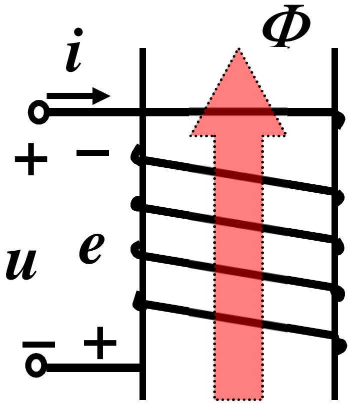
$$亨(\mathrm{H}) = \frac{韦(\mathrm{Wb})}{安(\mathrm{A})} = \frac{[伏][秒]}{[安]} = [欧][秒]$$

电感以<u>磁场形式存储能量</u>。

韦安（Ψ-i）特性



2. 线性电感电压、电流关系：



i , Φ 右螺旋

e , Φ 右螺旋

u , i 关联

由电磁感应定律与楞次定律

$$e = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$u = -e = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$i = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} u\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u\,\mathrm{d}\tau = i(0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u\,\mathrm{d}\tau$$

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u\,\mathrm{d}\tau$$

$$\Psi = \Psi(0) + \int_{0}^{t} u\,\mathrm{d}\tau$$

电感的电压-电流关系：

(1) u的大小与 i 的变化率成正比，与 i 的大小无关；

(2) 当 i 为常数(直流)时，$\mathrm{d}i / \mathrm{d}t = 0 \rightarrow u=0$,

电感在直流电路中相当于短路；

(3) 电感元件是一种记忆元件；

(4) 当 u，i 为关联方向时，$u=L\,\mathrm{d}i / \mathrm{d}t$；

u，i 为非关联方向时，$u= -L\,\mathrm{d}i / \mathrm{d}t$ 。

3. 电感的储能

$$p_{吸} = ui = i\,L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$W_{吸} = \int_{-\infty}^{t} Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}Li^2\Big|_{i(-\infty)}^{i(t)} = \frac{1}{2}Li^2(t) - \frac{1}{2}Li^2(-\infty)$$

$$\overset{若 i(-\infty)=0}{=} \frac{1}{2}Li^2(t) = \frac{1}{2L}\Psi^2(t) \geq 0$$

无源元件

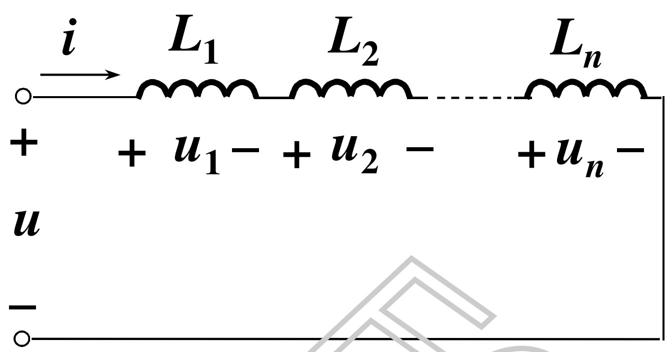
从t_0 到t 电感储能的变化量：

$$W_L = \frac{1}{2}Li^2(t) - \frac{1}{2}Li^2(t_0)$$

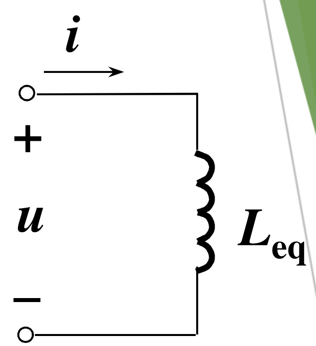
不消耗能量

4. 电感的串并联

（1）电感的串联



*n*个电感串联



等效电感

根据KVL和电感的电压电流的关系，有

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

$$= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \cdots + L_n \frac{di}{dt}$$

$$= (L_1 + L_2 + \cdots + L_n) \frac{di}{dt}$$

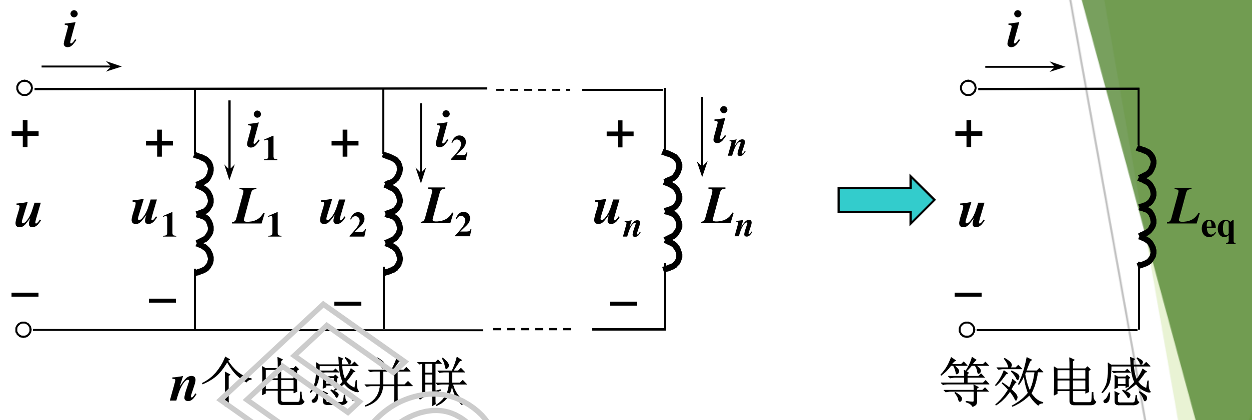
$$= L_{eq} \frac{di}{dt}$$

等效电感与各电感的关系式为

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$

结论：*n*个串联电感的等效电感值等于各电感值之和。

(2) 电感的并联



根据KCL及电感的电压与电流的关系式，有

$$i(t)=i_1(t)+i_2(t)+\cdots+i_n(t)$$

$$=\frac{1}{L_1}\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau+i_1(0)+\frac{1}{L_2}\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau+i_2(0)+\cdots+\frac{1}{L_n}\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau+i_n(0)$$

$$=(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\cdots+\frac{1}{L_n})\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau+i_1(0)+i_2(0)+\cdots+i_n(0)$$

$$=\frac{1}{L_{eq}}\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau+i(0)$$

等效电感与各电感的关系式为

$$\frac{1}{L_{\mathrm{eq}}}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\cdots+\frac{1}{L_n}$$

$$i(0)=\sum_{k=1}^{n} i_k(0)$$

结论：n个并联电感的等效电感值 的倒数等于各电感值倒数之和。

当两个电感并联（n=2）时，等效电感值为

$$L_{\mathrm{eq}}=\frac{L_1 L_2}{L_1+L_2}$$

电容元件与电感元件的比较：

	电容 C	电感 L
变量	电压 u 电荷 q	电流 i 磁链 Ψ
关系式	$q = Cu$ $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ $W_C = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2C}q^2$	$\Psi = Li$ $u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ $W_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2L}\Psi^2$

(1) 元件方程是同一类型；

(2) 若把 u-i，q-Ψ，C-L，i-u互换,可由电容元件的方程得到电感元件的方程；

(3) C 和 L 称为对偶元件, Ψ、q 等称为对偶元素。

u

i

q

φ