电路原理

信息学院 常青
changqing@ecust.edu.cn

第9章 正弦稳态分析

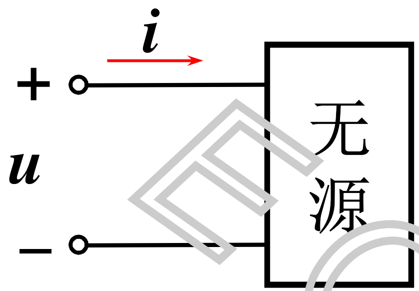
——————正弦激励下动态电路的稳态响应

9.4 正弦稳态电路的功率

- 瞬时功率
- 平均功率
- 无功功率
- 视在功率与复功率
- 功率的传输

一、瞬时功率 (*instantaneous power*)

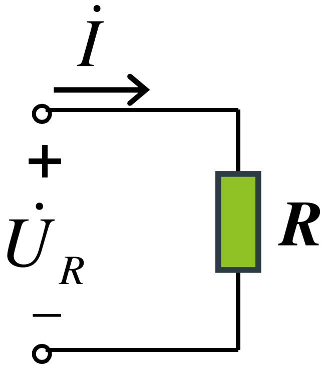
1. 定义

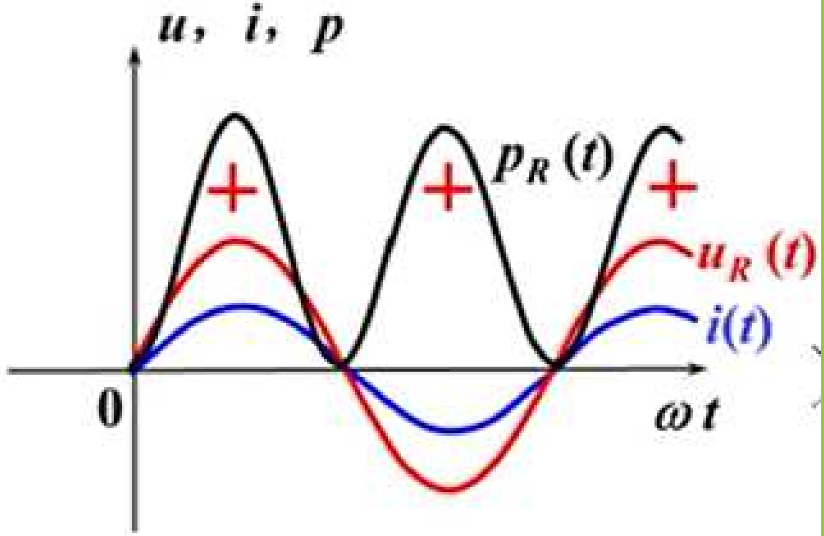


单位：瓦[特]，符号**W**

瞬时功率守恒：电路中所有元件在任一瞬间吸收的功率代数和为零。

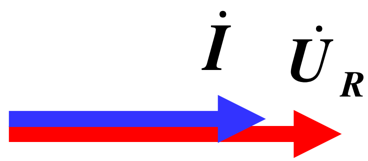
2. 电阻的瞬时功率





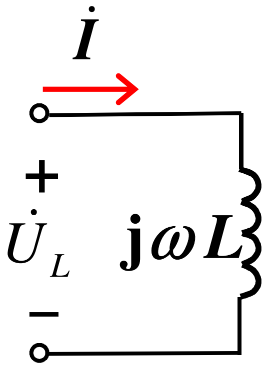
$$u(t)=\sqrt{2}U_R\sin\omega t$$
$$i(t)=\sqrt{2}I\sin\omega t$$

$$p_R=u_R i$$
$$=\sqrt{2}U_R\sin(\omega t)\sqrt{2}I\sin(\omega t)$$
$$=U_R I[1-\cos 2(\omega t)]$$



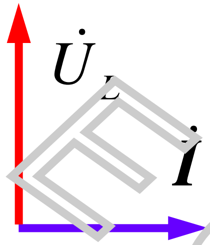
电阻总是吸收功率

3. 电感的瞬时功率



$$i(t)=\sqrt{2}I\sin\omega t$$

$$u_L(t)=\sqrt{2}U_L\sin(\omega t+90^\circ)$$

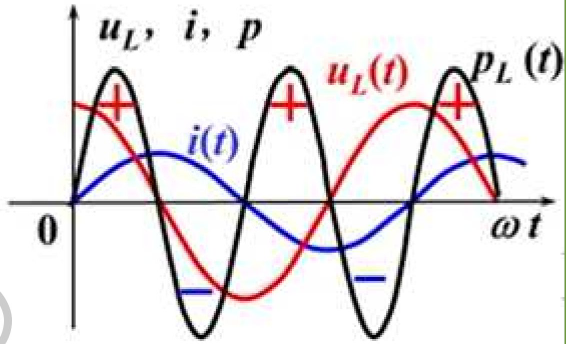


电感吸收功率与发出功率交替进行

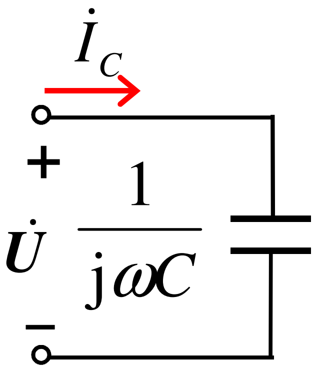
$$p_L=u_L i$$

$$=\sqrt{2}U_L\sin(\omega t+90^\circ)\sqrt{2}I\sin(\omega t)$$

$$=-U_L I\cos(2\omega t+90^\circ)=U_L I\sin(2\omega t)$$

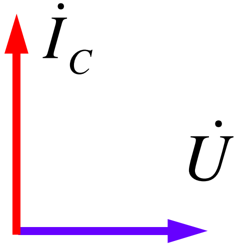


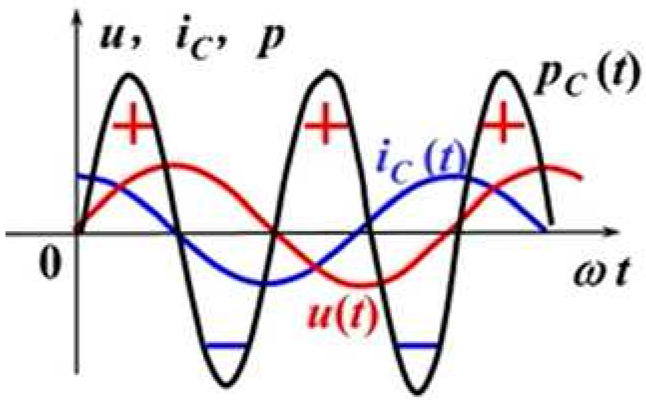
4. 电容的瞬时功率



$$u(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t)$$

$$i_C(t)=\sqrt{2}I_C\sin(\omega t+90^\circ)$$





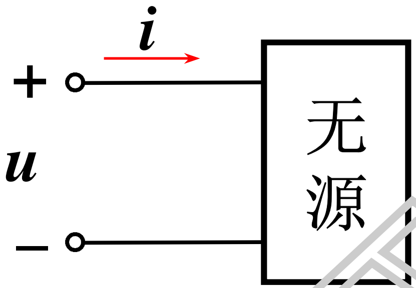
$$p_C=ui_C$$

$$=\sqrt{2}U\sin(\omega t)\sqrt{2}I_C\sin(\omega t+90^\circ)$$

$$=-UI_C\cos(2\omega t+90^\circ)=UI_C\sin(2\omega t)$$

电容吸收功率与发出功率交替进行

5. 任意无源一端口网络吸收的瞬时功率



$$u(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

$$p(t)=ui=\sqrt{2}U\sin\omega t\cdot\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

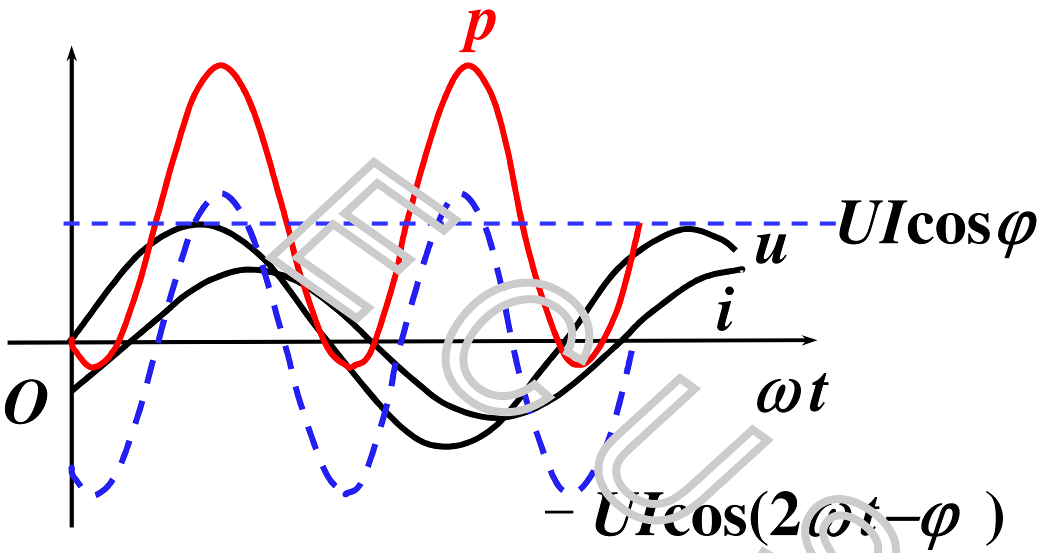
$$=2UI\sin\omega t\sin(\omega t-\varphi)$$

$$=UI[\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi)]$$

$$=UI\cos\varphi-UI\cos(2\omega t-\varphi)$$

第1表达式

$$p(t)=UI\cos\varphi-UI\cos(2\omega t-\varphi)$$



恒定 部分

可逆 部分

- p有时为正，有时为负；
- $p>0$，电路吸收功率；
- $p<0$，电路发出功率。

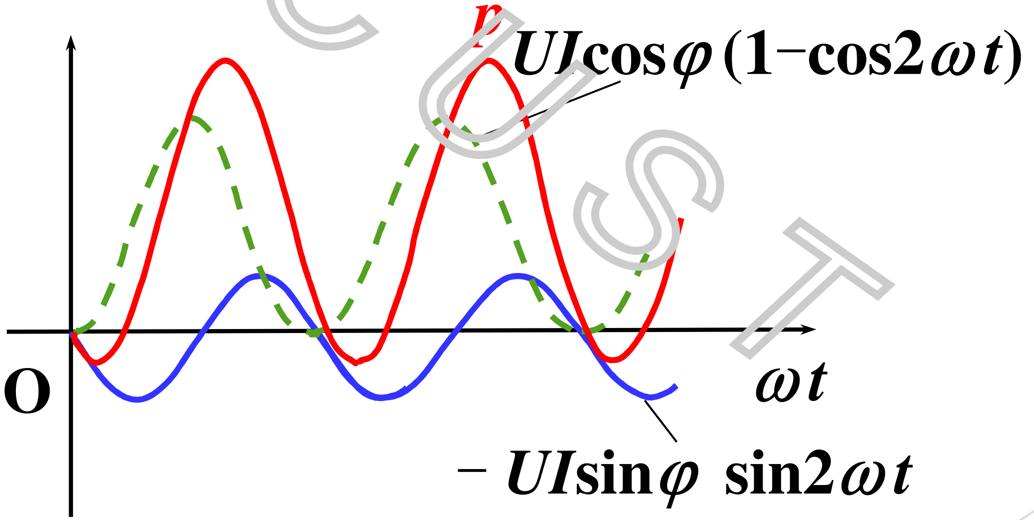
$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

瞬时功率的另一种分解方法:

$$p(t) = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t - \varphi)$$

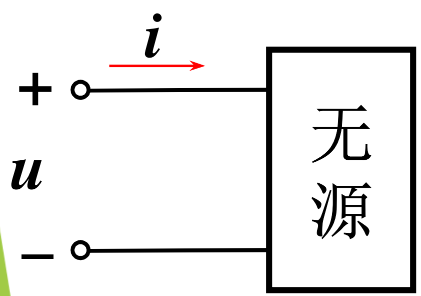
$$= UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t) - UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

第2表达式



不可逆部分

可逆部分



二、平均功率 (*average power*) *P*

1. 定义

$$u(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

瞬时功率的平均值

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T[UI\cos\varphi-UI\cos(2\omega t-\varphi)]\mathrm{d}t$$

$$=UI\cos\varphi$$

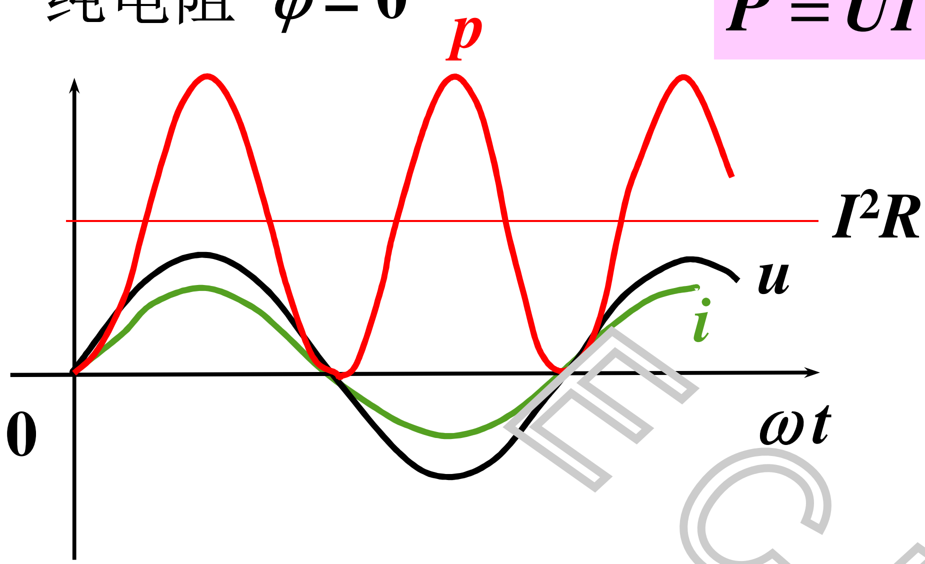
P 的单位：**W**（瓦）

$\cos\varphi$： 功率因数。

$\varphi=\psi_u-\psi_i$： 功率因数角。对无源网络，为其等效阻抗的阻抗角

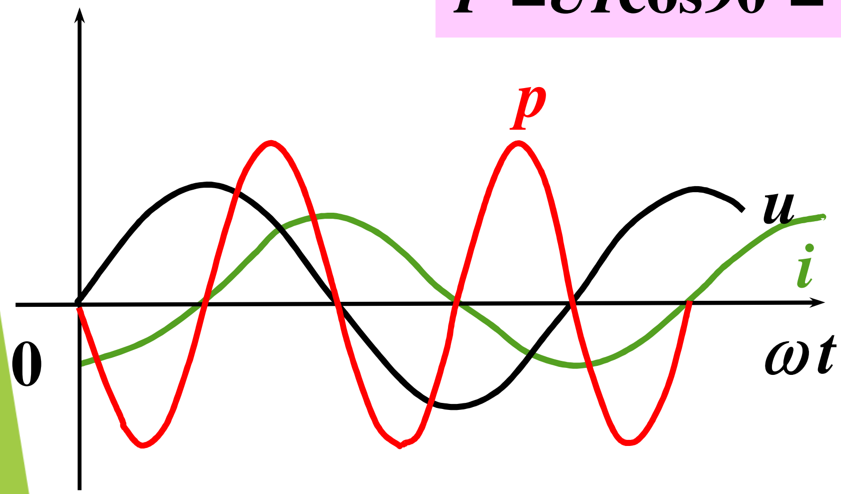
纯电阻 $\varphi = 0^\circ$

$$P = UI\cos\varphi = UI = I^2R = U^2/R$$



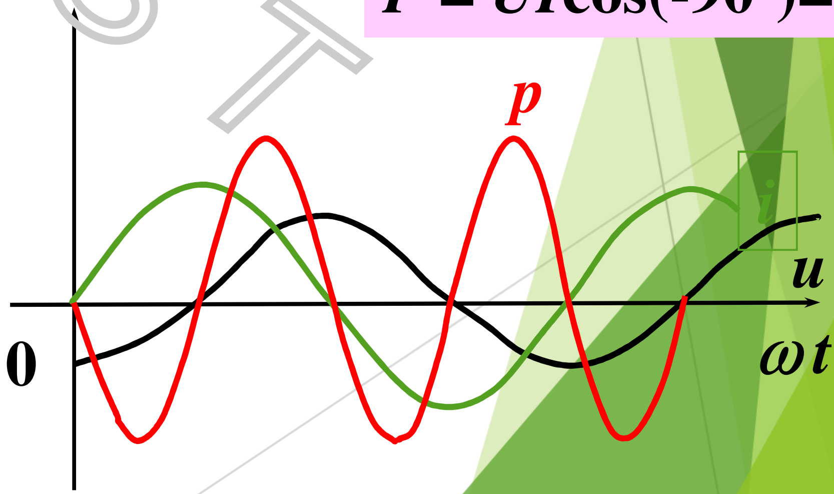
纯电感 $\varphi = 90^\circ$

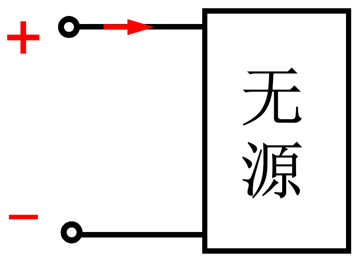
$$P = UI\cos 90^\circ = 0$$

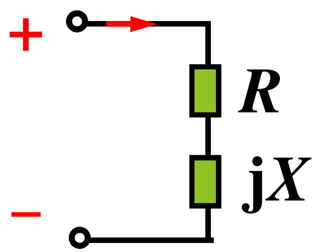


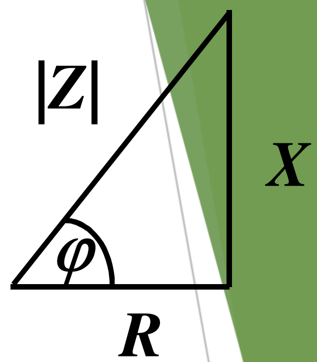
纯电容 $\varphi = -90^\circ$

$$P = UI\cos(-90^\circ) = 0$$









$$P = UI\cos\varphi = |Z|\,I\,I\cos\varphi = I^2|Z|\cos\varphi = I^2R$$

平均功率为消耗在电阻上的功率

有功功率(*active power*)

功率因数 $\cos\varphi$ $\begin{cases} 1, & \text{纯电阻} \\ 0, & \text{纯电抗} \end{cases}$

一般地，有 $0 \le \cos\varphi \le 1$

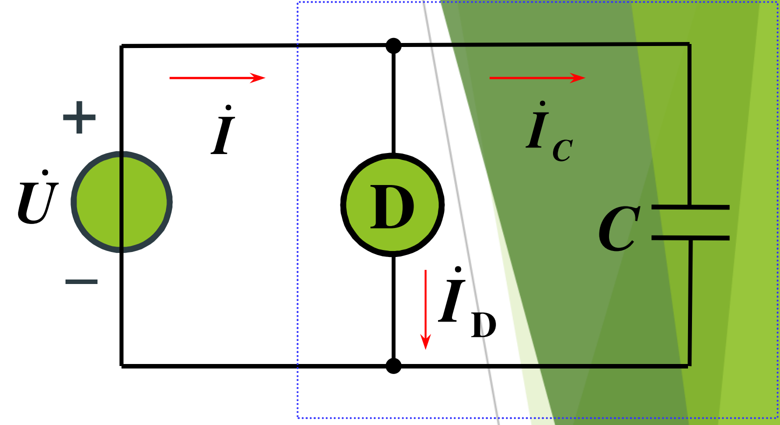
$X > 0$, $\varphi > 0$ ，感性， 滞后功率因数

$X < 0$, $\varphi < 0$ ，容性， 超前功率因数

例： $\cos\varphi = 0.5$ (滞后)， 则 $\varphi = 60^{\circ}$

有功功率守恒：电路中所有元件吸收的有功功率代数和为零。

例1 已知：电动机 P_D=1000W，U=220V，f=50Hz，C=30μF，$\cos\varphi_D$=0.8(滞后）。求负载电路的功率因数。



解:

$$I_D=\frac{P}{U\cos\varphi_D}=\frac{1000}{220\times 0.8}=5.68\text{A}$$

$$\cos\varphi_D=0.8(\text{滞后）}\qquad \varphi_D=36.9^\circ$$

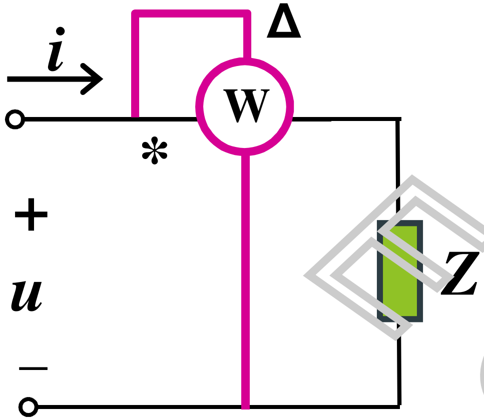
$$\dot{I}_D=5.68\angle-36.9^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_C=\mathrm{j}\omega C\,220\angle 0^\circ=\mathrm{j}2.08\ \text{A}$$

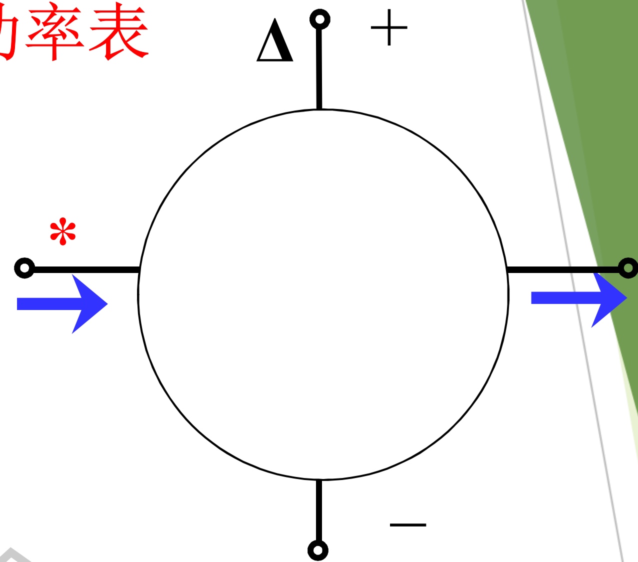
$$\dot{I}=\dot{I}_D+\dot{I}_C=4.54-\mathrm{j}1.33=4.73\angle-16.3^\circ\ \text{A}$$

$$\therefore\ \cos\varphi=\cos[0^\circ-(-16.3^\circ)]=0.96\ \ (\text{滞后})$$

2. 有功功率的测量



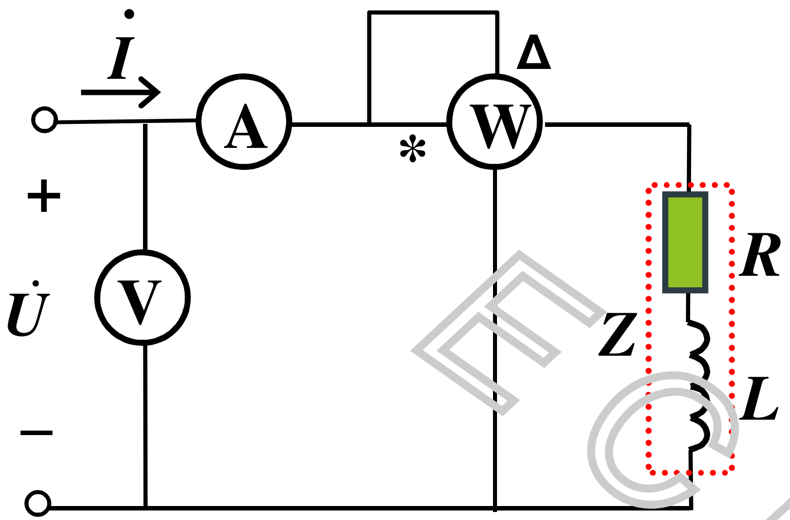
功率表



(1) 接法：负载电压*u*和*i*取关联参考方向。负载电流 *i* 从电流线圈“*”号端流入，负载电压*u*正端接电压线圈“Δ”号端，此时读数表示负载吸收的有功功率。

(2) 量程：测量时，*P*、*U*、*I* 均不能超量程。

例2　三表法测线圈的电路模型参数.



f=50Hz，U=50V，

I=1A，P=30W.

解：

$$P = I^2R \longrightarrow R = \frac{P}{I^2} = \frac{30}{1^2} = 30\Omega$$

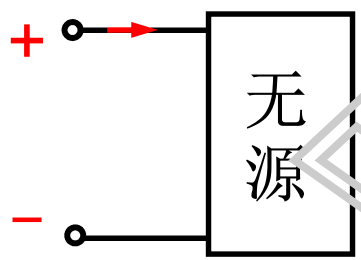
$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{50}{1} = 50\,\Omega$$

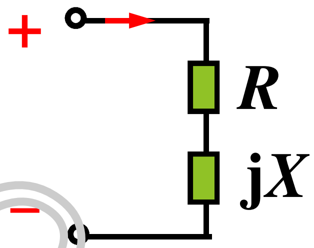
$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

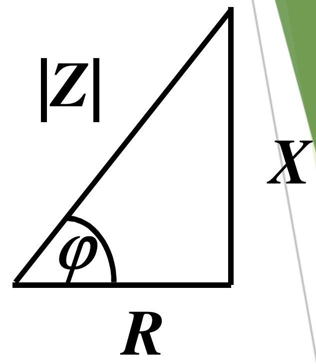
$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{|Z|^2 - R^2} = \frac{1}{314}\sqrt{50^2 - 30^2} = \frac{40}{314} = 0.127\text{H}$$

三、无功功率 (*reactive power*) *Q*

1. 定义







$\varphi=\psi_u-\psi_i$： 功率因数角。

$$p(t)=UI\cos\varphi-UI\cos(2\omega t-\varphi)$$

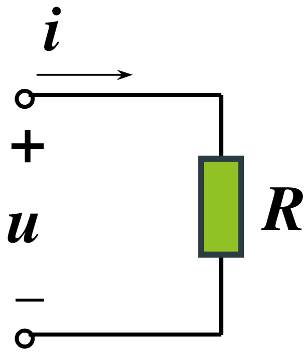
单位：var (乏)

$$=UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t)-UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

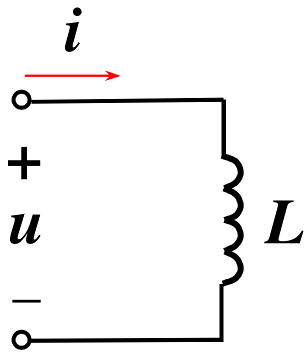
$$=|Z|\,I\,I\sin\varphi=I^2|Z|\sin\varphi=I^2X$$

无功功率守恒：电路中所有元件吸收的无功功率代数和为零。

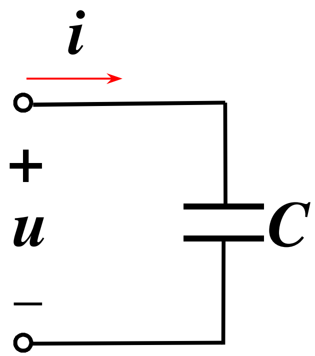
2. *R*、*L*、*C*元件的无功功率



$$Q_R = UI\sin\varphi = UI\sin 0^\circ = 0$$

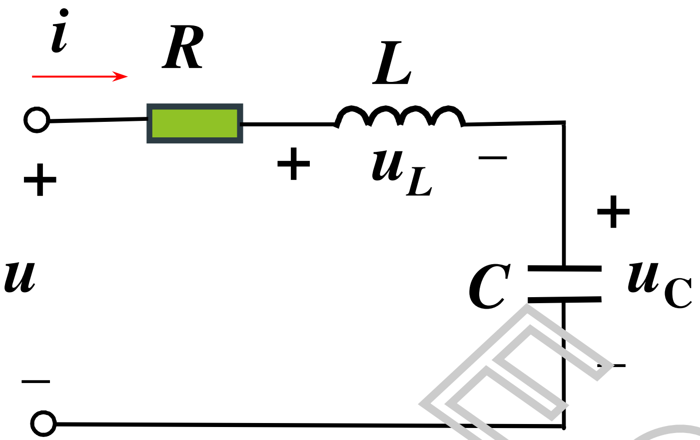


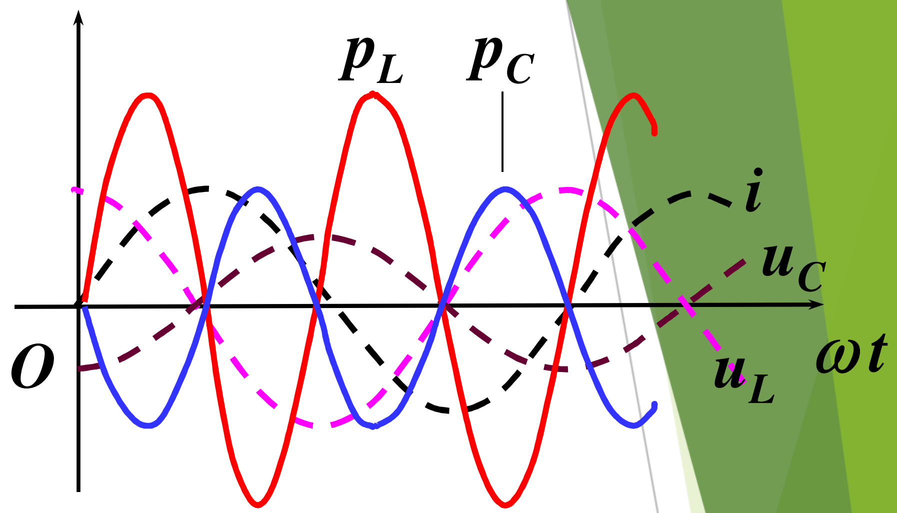
$$Q_L = UI\sin\varphi = UI\sin 90^\circ = UI = U^2/X_L = I^2X_L > 0$$



$$Q_C = UI\sin\varphi = UI\sin(-90^\circ) = -UI = U^2/X_C = I^2X_C < 0$$

电感、电容的无功补偿作用：





当L发出功率时，C 刚好吸收功率，因此L、C 的无功具有互相补偿的作用。通常说：L吸收无功、C发出无功。

无功的物理意义：

$$Q_L = I^2 X_L = I^2 \omega L = \omega \cdot \frac{1}{2} L(\sqrt{2} I)^2$$

$$= \omega \cdot \frac{1}{2} L I_m^{\ 2} = \frac{2\pi}{T} W_{max}$$

反映电源与负载之间交换能量的速率。

四. 视在功率(表观功率) S

$$S \overset{\text{def}}{=} UI$$

单位：VA（伏安）

反映电气设备的容量

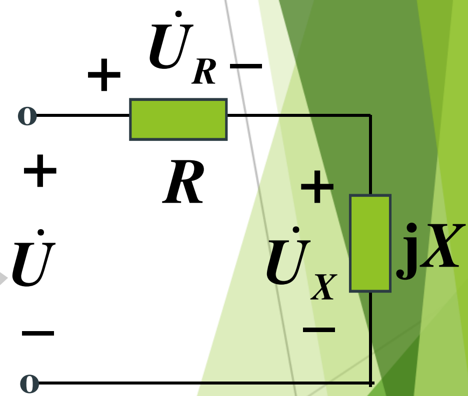
有功、无功和视在功率的关系：

$$\bar{S} = \dot{U}\dot{I}^* = UI\angle\varphi = S\angle\varphi = P + \mathrm{j}Q$$

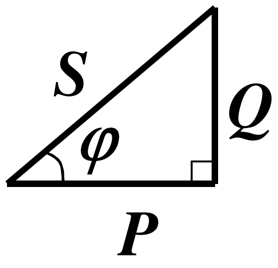
有功功率：$P=UI\cos\varphi$　　单位：W

无功功率：$Q=UI\sin\varphi$　　单位：var

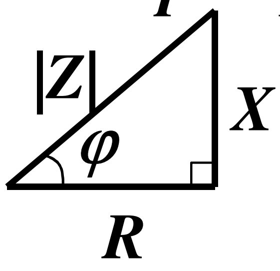
视在功率：$S=UI$　　单位：VA



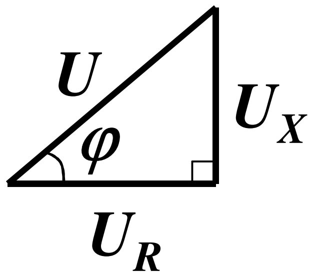
$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{50}{1} = 50\,\Omega$$



功率三角形



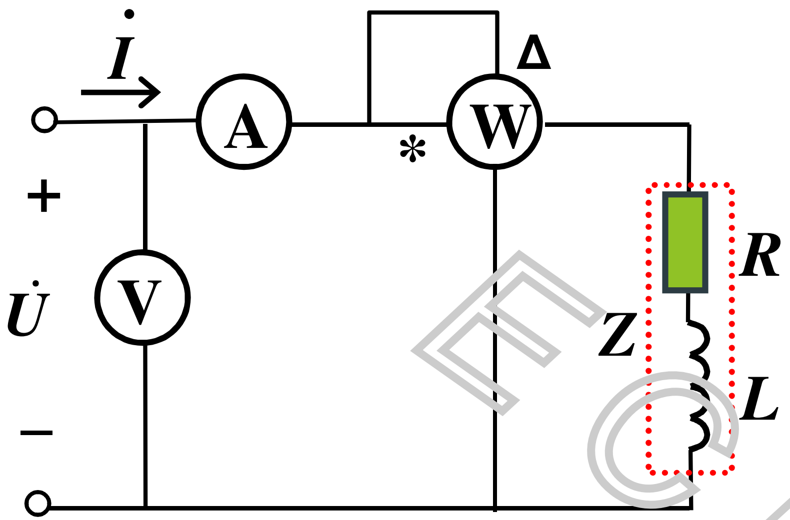
阻抗三角形



电压三角形

三个三角形相似。

例2　三表法测线圈的电路模型参数.



f=50Hz，U=50V，

I=1A，P=30W.

解：$P = I^2 R \longrightarrow R = \dfrac{P}{I^2} = \dfrac{30}{1^2} = 30\Omega$

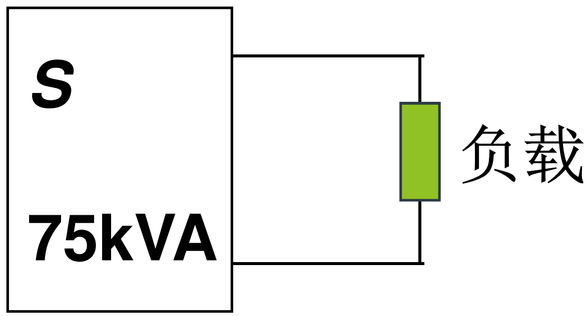
- 功率因数的提高---- 为什么要提高功率因数？

异步电机	空载	$\cos\varphi = 0.2 \sim 0.3$
	满载	$\cos\varphi = 0.7 \sim 0.85$
日光灯		$\cos\varphi = 0.45 \sim 0.6$

功率因数低带来的问题：

当吸收相同的有功功率时，对电源容量的要求高，线路损耗大。

(1) 充分利用设备容量



$P = S\cos\varphi$

$\cos\varphi = 1$, $P = S = 75\text{kW}$

$\cos\varphi = 0.7$, $P = 0.7S = 52.5\text{kW}$

$\cos\varphi = 0$ 则 $P = 0$

(2) 减少线路损耗。 当 P, U 一定时

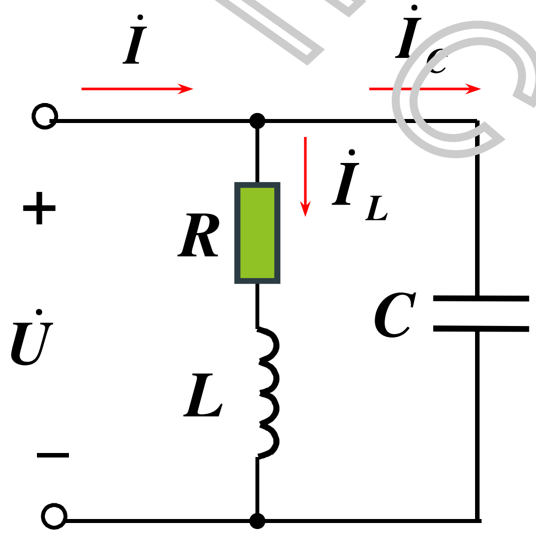
$$I = \frac{P}{U\cos\varphi}$$

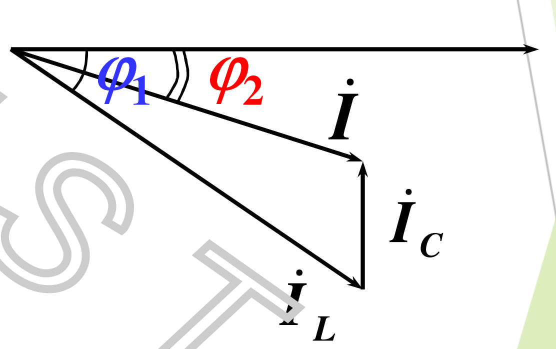
$$\cos\varphi \uparrow \rightarrow I \downarrow$$

功率因数的提高

在不影响与功功率的前提下使得电源侧电压和电流夹角变小。

分析:





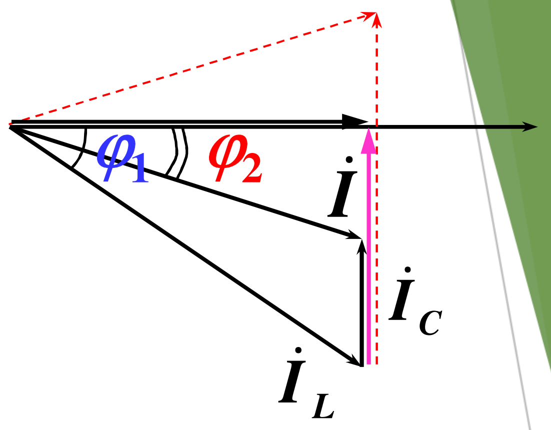
再从功率这个角度来看：

有功：$UI_L\cos\varphi_1 = \boxed{UI\cos\varphi_2}$

无功：$UI_L\sin\varphi_1 > \boxed{UI\sin\varphi_2}$

并C后

补偿容量的确定：



$$I_C = I_L \sin\varphi_1 - I \sin\varphi_2$$

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{P}{U\cos\varphi_2} \\ I_L &= \frac{P}{U\cos\varphi_1} \end{aligned}\right\} \text{代入上式}$$

$$I_C = \frac{P}{U}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)$$

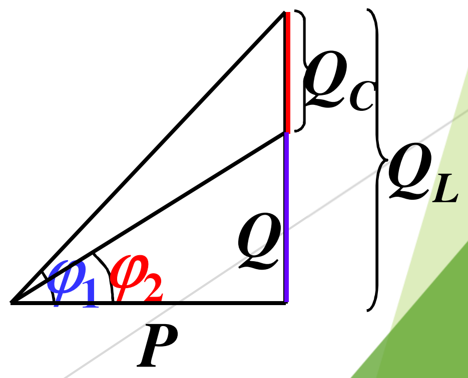
$$\therefore \quad C = \frac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)$$

补偿容量不同 $\begin{cases} \text{欠} \\ \text{全} \\ \text{过} \end{cases}$

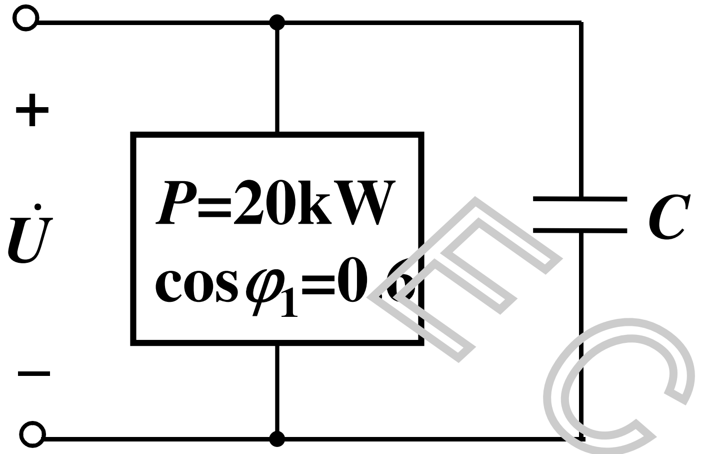
取舍: $\begin{cases} \text{性能} \\ \text{成本} \end{cases}$

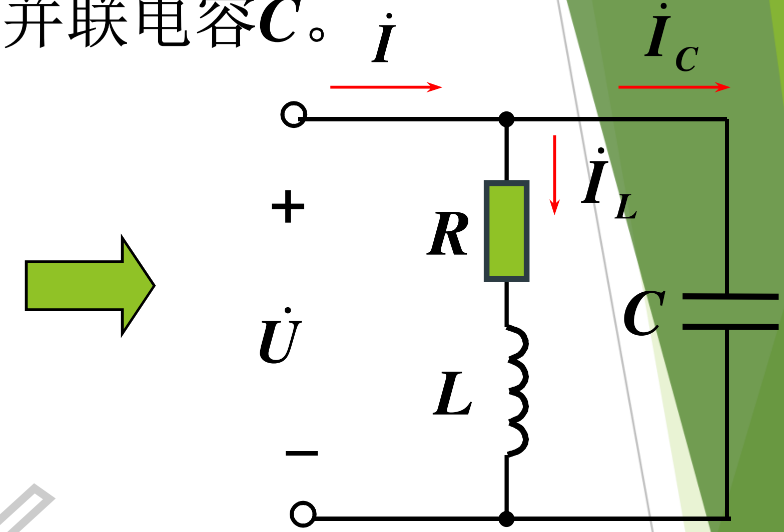
实际中一般补偿到 λ=0. 95(滞后)

补偿容量也可以用功率三角形确定：



例3　已知：f=50Hz, U=380V, P=20kW, $\cos\varphi_1$=0.6(滞后)。要使功率因数提高到0.9，求并联电容C。





解：

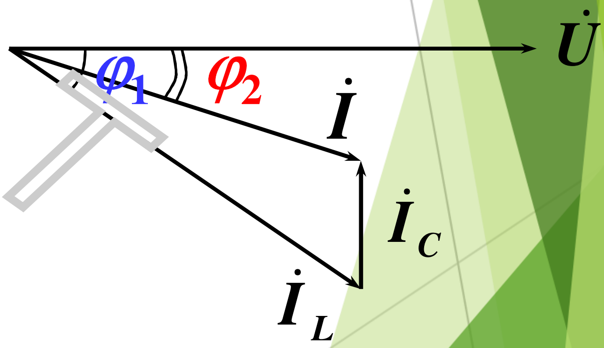
由 $\cos\varphi_1 = 0.6$　得　$\varphi_1 = 53.13^\circ$

由 $\cos\varphi_2 = 0.9$　得　$\varphi_2 = 25.84^\circ$

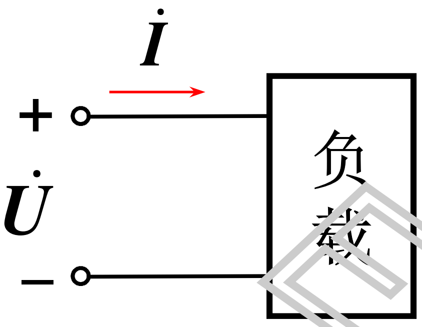
$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)$$

$$= \frac{20\times10^3}{314\times380^2}(\tan53.13^\circ - \tan25.84^\circ)$$

$$= 375\ \mu\text{F}$$



四、复功率 (*complex power*)



$$\dot{U} = U\angle\psi_u \;,\qquad \dot{I} = I\angle\psi_i$$

$$P = UI\cos(\psi_u - \psi_i)$$

$$= UI\,\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_u - \psi_i)}]$$

$$= \mathrm{Re}[U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_u}\; I\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_i}]$$

记 $\overline{S} = \dot{U}\dot{I}^*$ 为复功率，单位: **VA**

$$\overline{S} = \dot{U}\dot{I}^* = UI\angle(\psi_u - \psi_i) = UI\angle\varphi$$

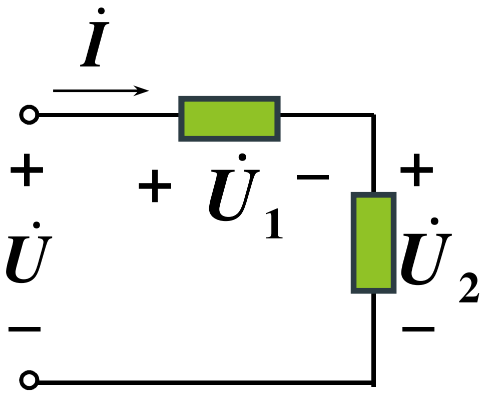
$$= UI\cos\varphi + \mathrm{j}UI\sin\varphi$$

$$= P + \mathrm{j}Q$$

复功率守恒

$$\sum_{k=1}^{b}\bar{S}_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{b}\dot{U}_k\dot{I}_k^* = 0$$

$$\sum_{k=1}^{b}(P_k + \mathrm{j}Q_k) = 0 \qquad \begin{cases} \sum_{k=1}^{b} P_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{b} Q_k = 0 \end{cases}$$



$$\bar{S} = \dot{U}\dot{I}^* = (\dot{U}_1 + \dot{U}_2)\dot{I}^*$$

$$= \dot{U}_1\dot{I}^* + \dot{U}_2\dot{I}^* = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$$

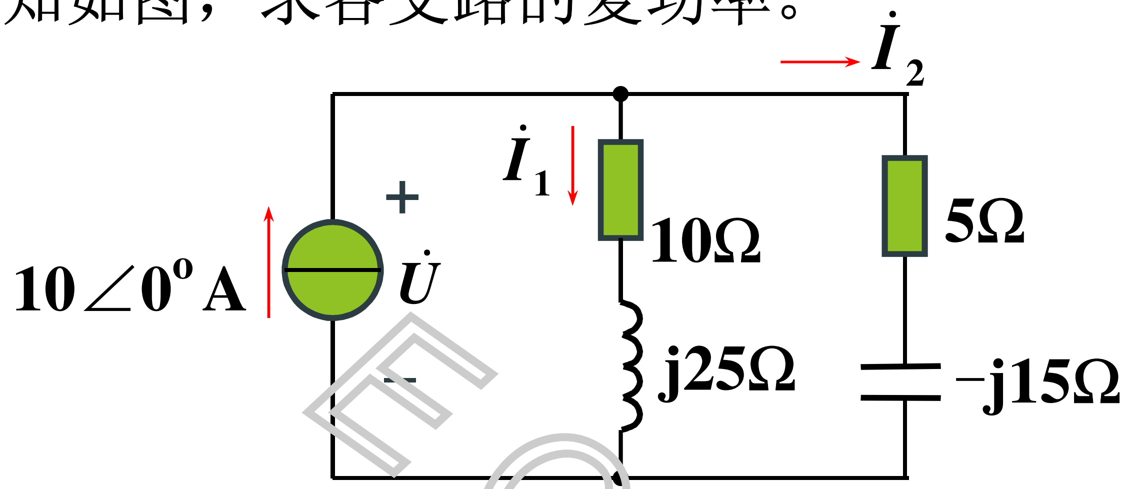
$$S = UI \qquad S_1 = U_1 I \qquad S_2 = U_2 I$$

$$\because U \neq U_1 + U_2$$

$$\therefore S \neq S_1 + S_2$$

一般情况下：

例4　已知如图，求各支路的复功率。



解：

$$\dot{U}=10\angle 0^{\circ}\times[(10+j25)//(5-j15)]=236\angle(-37.1^{\circ})\ \text{V}$$

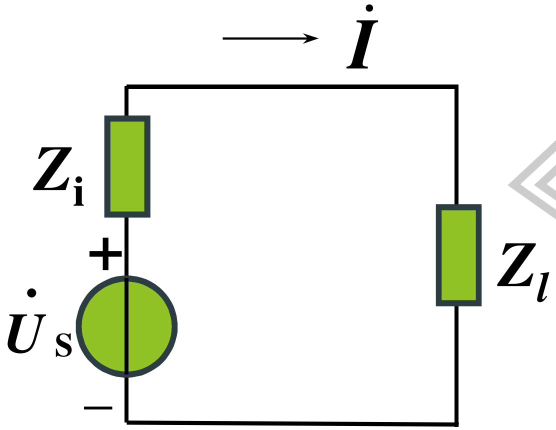
电流源　$\bar{S}_{发}=236\angle(-37.1^{\circ})\times 10\angle 0^{\circ}=1882-j1424\ \text{VA}$

支路1　$\bar{S}_{1吸}=U^2Y_1^*=236^2\left(\dfrac{1}{10+j25}\right)^*=768+j1920\ \text{VA}$

支路2　$\bar{S}_{2吸}=U^2Y_2^*=1113-j3345\ \text{VA}$

五、最大功率传输

讨论正弦电流电路中负载获得最大功率P_{max}的条件。



$$Z_i = R_i + jX_i, \quad Z_l = R_l + jX_l$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z_i + Z_l}, \quad I = \frac{U_S}{\sqrt{(R_i + R_l)^2 + (X_i + X_l)^2}}$$

(1) $Z_l = R_l + jX_l$ 可任意改变

有功功率 $$P = R_l I^2 = \frac{R_l U_S^2}{(R_i + R_l)^2 + (X_i + X_l)^2}$$

$$P = R_l I^2 = \frac{R_l U_S^2}{(R_i + R_l)^2 + (X_i + X_l)^2}$$

负载上获得最大功率的条件是：

$$Z_l = Z_i^*，即 \begin{cases} R_l = R_i \\ X_l = -X_i \end{cases}$$

最大功率为 $P_{max} = \dfrac{U_S^2}{4R_i}$

此结果可由P分别对X_l、R_l求偏导数得到。

(2) 若$Z_l = R_l + jX_l$只允许X_l改变

此时获得最大功率的条件$X_i + X_l = 0$，即$X_l = -X_i$。

最大功率为 $P_{max} = \dfrac{R_l U_S^2}{(R_i + R_l)^2}$

(3) 若$Z_l = R_l + jX_l = |Z_l|\angle\varphi$，$R_l$、 X_l均可改变，但X_l / R_l不变

(即$|Z_l|$可变，φ不变)

此时获得最大功率的条件$|Z_l| = |Z_i|$。

最大功率为 $$P_{max} = \frac{\cos\varphi U_S^2}{2|Z_i| + 2(R_i\cos\varphi + X_i\sin\varphi)}$$

小结：

复功率 $\bar{S}$ $\bar{S} = P + jQ = \sqrt{P^2 + Q^2}\angle\varphi$

视在功率 S $S = UI = |\bar{S}|$

有功 P $P = UI\cos\varphi = \mathrm{Re}[\bar{S}]$

无功 Q $Q = UI\sin\varphi = \mathrm{Im}[\bar{S}]$