

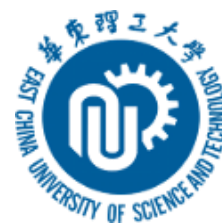


4. 进化策略

堵威

华东理工大学 自动化系

2021.4.1





本章内容

1. $(1+1)$ 进化策略
2. $(\mu+1)$ 进化策略
3. $(\mu+\lambda)$ 和 (μ,λ) 进化策略
4. 自身自适应进化策略



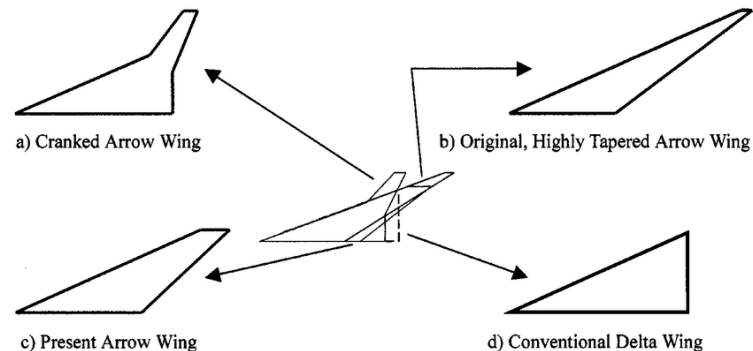
本章内容

1. **(1+1)进化策略**
2. $(\mu+1)$ 进化策略
3. $(\mu+\lambda)$ 和 (μ,λ) 进化策略
4. 自身自适应进化策略

进化策略

• 背景知识

- 20世纪60年代，柏林技术大学的三位学生试图找到在风洞中能使空气阻力最小的最优体型：解析方法求解失败
- 对体型**随机地变化其中最好的**，并重复这个过程直到找到问题的一个好的解
- 其中一位学生Ingo Rechenberg 1964年首次发表了在**进化策略** (evolution strategy) 上的工作





(1+1)进化策略

• 算法内容

- 问题：假设 $f(x)$ 是实随机向量 x 的函数，想要最大化适应度 $f(x)$
- **进化策略**：初始化单个个体并评价它的适应度，让候选解（父代）变异并评价变异后的个体（子代）适应度，父代和子代中最好的个体成为下一代的起点
- (1+1)进化策略，(1+1)-ES，二元进化策略
- 每一代由1个父代和1个子代组成，并**从父代和子代中选出最好的作为下一代的个体**



(1+1)进化策略

• 算法内容

- 算法4.1: (1+1)-ES的伪代码, 其中 n 是问题的维数, \mathbf{x}_0 的每个元素经过变异得到 \mathbf{x}_1

初始化非负变异方差 σ^2

$\mathbf{x}_0 \leftarrow$ 随机生成的个体

While not (终止准则)

 生成一个随机向量 \mathbf{r} , 其中 $r_i \sim N(0, \sigma^2)$, $i \in [1, n]$

$\mathbf{x}_1 \leftarrow \mathbf{x}_0 + \mathbf{r}$

 If \mathbf{x}_1 比 \mathbf{x}_0 好 then

$\mathbf{x}_0 \leftarrow \mathbf{x}_1$

 End if

下一代



(1+1)进化策略

• 算法内容

- **定理**: 如果 $f(x)$ 是定义在闭域中的连续函数, 并有一个全局最优解 $f^*(x)$, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(x) = f^*(x)$$

其中 t 是代数。

- 如果有足够的时间, 采用**随机变异探索搜索空间**最终能访问到整个搜索空间并找到全局最优解

- (1+1)-ES算法4.1中方差 σ^2 是可调参数

σ 应足够大以使变异能在合理的时间到达搜索空间的每个区域

σ 应足够小以便找到在用户所需分辨率之内的最优解



(1+1)进化策略

- 1/5规则

- 算法4.1中的变异称为**各向同性**：因为 \mathbf{x}_0 的每个元素的变异方差相同
- **非各向同性变异**： $\mathbf{x}_1 \leftarrow \mathbf{x}_0 + N(\mathbf{0}, \Sigma)$ ，其中 Σ 是一个 $n \times n$ 的对角矩阵，其对角元素为 σ_i , $i \in [1, n]$ （ \mathbf{x}_0 的每个元素以不同的方差进行变异）
- **Rechenberg**在分析了一些简单优化问题的(1+1)-ES后，得出了**1/5规则**：在(1+1)-ES中，如果成功的变异与总变异的比值小于1/5，则应该减小标准差 σ ；如果这个比值大于1/5，则应该增大标准差



(1+1)进化策略

- 1/5规则

- 1/5规则只适用于几个特别的目标函数，但是是一个有用的指导原则；但是标准差 σ 应该如何调整呢？

- Schwefel从理论上推导出让 σ 减小或增大的因子：

- 标准差减小： $\sigma \leftarrow c\sigma$

- 标准差增大： $\sigma \leftarrow \sigma/c$ ，其中 $c = 0.817$

- 自适应(1+1)-ES



(1+1)进化策略

• 自适应(1+1)-ES伪代码

- n 是问题的维数, \mathbf{x}_0 的每一个特征变异后得到 \mathbf{x}_1 , ϕ 是过去 G 代中使 \mathbf{x}_1 优于 \mathbf{x}_0 的变异的比列

初始化非负变异方差 σ^2

$\mathbf{x}_0 \leftarrow$ 随机生成的个体

While not (终止准则)

 生成一个随机向量 \mathbf{r} , 其中 $r_i \sim N(0, \sigma^2)$, $i \in [1, n]$

$\mathbf{x}_1 \leftarrow \mathbf{x}_0 + \mathbf{r}$

 If \mathbf{x}_1 比 \mathbf{x}_0 好 then

$\mathbf{x}_0 \leftarrow \mathbf{x}_1$

 Endif

$\phi \leftarrow$ 在过去 G 代中成功变异的比列

 If $\phi < 1/5$ then

$\sigma \leftarrow c\sigma$

 elseif $\phi > 1/5$ then

$\sigma \leftarrow \sigma/c$

 Endif

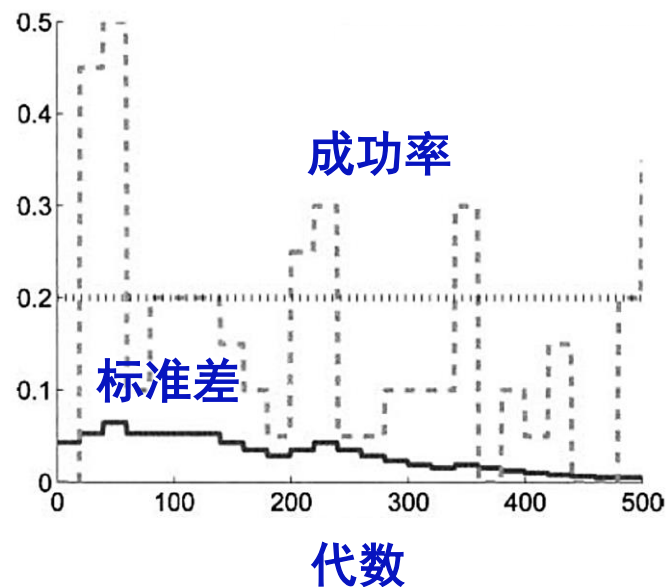
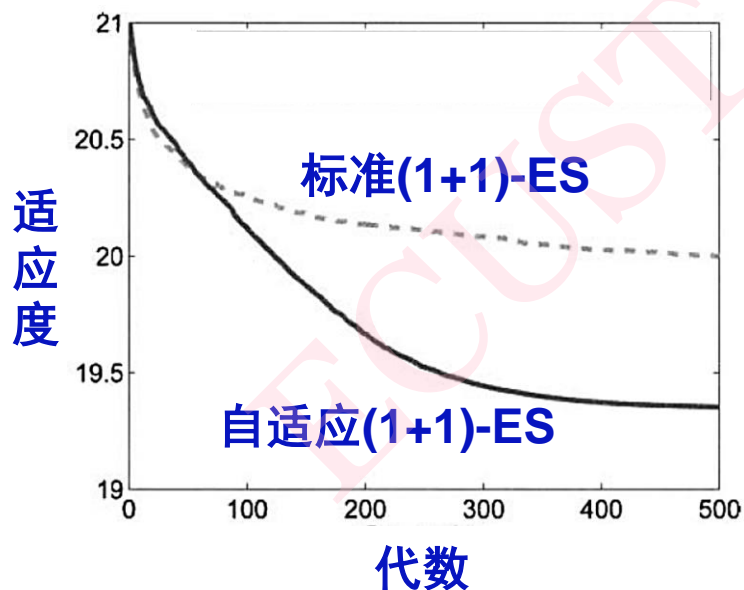
下一代

$G = \min\{n, 30\}$

(1+1)进化策略

• 举例

- 用(1+1)-ES优化20维Ackley函数，检验标准(1+1)-ES和自适应(1+1)-ES的性能。左图：100次仿真取平均；右图：自适应(1+1)-ES的变异成功率和变异标准差。





本章内容

1. $(1+1)$ 进化策略
- 2. $(\mu+1)$ 进化策略**
3. $(\mu+\lambda)$ 和 (μ,λ) 进化策略
4. 自身自适应进化策略



$(\mu+1)$ 进化策略

- 基本概念

- $(\mu+1)$ -ES: 对 $(1+1)$ -ES 的一般化

1. 每代用 μ 个父代, 每个父代由相应的 σ 向量控制其变异的大小;
2. 父代组合形成单个子代, 然后让子代变异;
3. 在 μ 个父代和这个子代中选出最好的 μ 个个体成为下一代的 μ 个父代

- 精英主义, 稳态进化策略, 最差灭绝 (适者生存)



$(\mu+1)$ 进化策略

• $(\mu+1)$ -ES算法伪代码

n 为问题的维数

$\{(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\sigma}_k)\} \leftarrow$ 随机生成个体, $k \in [1, \mu]$

每个 \mathbf{x}_k 是候选解, 每个 $\boldsymbol{\sigma}_k$ 是标准差向量

While not (终止准则)

从 $\{(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\sigma}_k)\}$ 中随机选择两个父代

将两个父代进行交叉得到一个子代, 记为 $(\mathbf{x}_{\mu+1}, \boldsymbol{\sigma}_{\mu+1})$

交叉/重组的方式
不唯一

$\Sigma_{k+1} \leftarrow \text{diag}(\sigma_{\mu+1,1}^2, \dots, \sigma_{\mu+1,n}^2)$

由 $N(\mathbf{0}, \Sigma_{k+1})$ 生成一个随机向量 \mathbf{r}

$\mathbf{x}_{\mu+1} \leftarrow \mathbf{x}_{\mu+1} + \mathbf{r}$

从种群中去掉最差的个体, 即,

$\{(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\sigma}_k)\} \leftarrow \{(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\sigma}_1), \dots, (\mathbf{x}_{\mu+1}, \boldsymbol{\sigma}_{\mu+1})\}$ 中最好的 μ 个个体

下一代

$(\mu+1)$ 进化策略

- 交叉举例：离散性交叉（discrete sexual crossover）
 - 问题维数为5，子代中每个解的特征和标准差从两个父代中随机选择

父代1

y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}	σ_{14}	σ_{15}
----------	----------	----------	----------	----------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------

父代2

y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{24}	y_{25}	σ_{21}	σ_{22}	σ_{23}	σ_{24}	σ_{25}
----------	----------	----------	----------	----------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------

子代

y_{11}	y_{22}	y_{13}	y_{14}	y_{25}	σ_{21}	σ_{22}	σ_{13}	σ_{14}	σ_{25}
----------	----------	----------	----------	----------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------

$(\mu+1)$ 进化策略

- 交叉举例：中间性交叉（intermediate sexual crossover）
 - 问题维数为3，子代中每个解的特征和标准差在两个父代的中间

父代1

y_{11}	y_{12}	y_{13}
----------	----------	----------

σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}
---------------	---------------	---------------

父代2

y_{21}	y_{22}	y_{23}
----------	----------	----------

σ_{21}	σ_{22}	σ_{23}
---------------	---------------	---------------

子代

$\frac{y_{11} + y_{21}}{2}$	$\frac{y_{12} + y_{22}}{2}$	$\frac{y_{13} + y_{23}}{2}$
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------

$\frac{\sigma_{11} + \sigma_{21}}{2}$	$\frac{\sigma_{12} + \sigma_{22}}{2}$	$\frac{\sigma_{13} + \sigma_{23}}{2}$
---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------

($\mu+1$)进化策略

- 交叉举例：离散全局交叉（discrete global crossover）
 - (5+1)-ES，问题维数为5，子代中每个解的特征和标准差随机地从整个种群中选出

父代1

y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}	σ_{14}	σ_{15}
----------	----------	----------	----------	----------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------

父代2

y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{24}	y_{25}	σ_{21}	σ_{22}	σ_{23}	σ_{24}	σ_{25}
----------	----------	----------	----------	----------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------

父代3

y_{31}	y_{32}	y_{33}	y_{34}	y_{35}	σ_{31}	σ_{32}	σ_{33}	σ_{34}	σ_{35}
----------	----------	----------	----------	----------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------

父代4

y_{41}	y_{42}	y_{43}	y_{44}	y_{45}	σ_{41}	σ_{42}	σ_{43}	σ_{44}	σ_{45}
----------	----------	----------	----------	----------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------

父代5

y_{51}	y_{52}	y_{53}	y_{54}	y_{55}	σ_{51}	σ_{52}	σ_{53}	σ_{54}	σ_{55}
----------	----------	----------	----------	----------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------

子代

y_{11}	y_{32}	y_{53}	y_{14}	y_{25}	σ_{51}	σ_{32}	σ_{13}	σ_{44}	σ_{45}
----------	----------	----------	----------	----------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------

($\mu+1$)进化策略

- 交叉举例：中间全局交叉（intermediate global crossover）
 - (5+1)-ES，问题维数为3，子代中每个解的特征和标准差在随机选出的父代的中间（一对父代的线性组合，建议选取）

父代1

y_{11}	y_{12}	y_{13}
----------	----------	----------

σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}
---------------	---------------	---------------

父代2

y_{21}	y_{22}	y_{23}
----------	----------	----------

σ_{21}	σ_{22}	σ_{23}
---------------	---------------	---------------

父代3

y_{31}	y_{32}	y_{33}
----------	----------	----------

σ_{31}	σ_{32}	σ_{33}
---------------	---------------	---------------

父代4

y_{41}	y_{42}	y_{43}
----------	----------	----------

σ_{41}	σ_{42}	σ_{43}
---------------	---------------	---------------

父代5

y_{51}	y_{52}	y_{53}
----------	----------	----------

σ_{51}	σ_{52}	σ_{53}
---------------	---------------	---------------

子代

$\frac{y_{21} + y_{31}}{2}$	$\frac{y_{12} + y_{42}}{2}$	$\frac{y_{23} + y_{53}}{2}$
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------

$\frac{\sigma_{41} + \sigma_{51}}{2}$	$\frac{\sigma_{22} + \sigma_{42}}{2}$	$\frac{\sigma_{13} + \sigma_{33}}{2}$
---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------