

Project of Signals & Systems

多径传输信号的恢复

范皓年 1900012739 信息科学技术学院

2021 年 1 月 3 日

目录

1	问题背景	2
2	问题模型	2
2.1	系统辨识	2
2.2	低通滤波	3
2.3	维纳滤波	3
2.4	自适应滤波	4
3	问题求解	5
3.1	Basic 0: 朴素低通滤波	5
3.2	Basic 1: 自适应滤波尝试	5
3.3	Basic 2: 维纳滤波	6
3.4	Advance: 多次维纳滤波法	6
3.5	最简化尝试: 直接系统辨识法	10
4	未来工作和改进	10
5	参考资料汇总	10

1 问题背景

无线信号在空中传播时会碰到障碍物发生发射，接收端接收到的直射波和多个反射波存在幅度、相位和时延上的差异，这种情况叫做多径传输。反射波信号和直射波信号在接收端叠加在一起，造成干扰，除此之外信道还存在加性噪声的干扰。

本项目意在通过对系统的研究，利用已有训练序列得出一个 LTI 滤波系统来降低多径传输的失真。

2 问题模型

在这个课题中，我们将整个传输过程等效成为如下的系统：

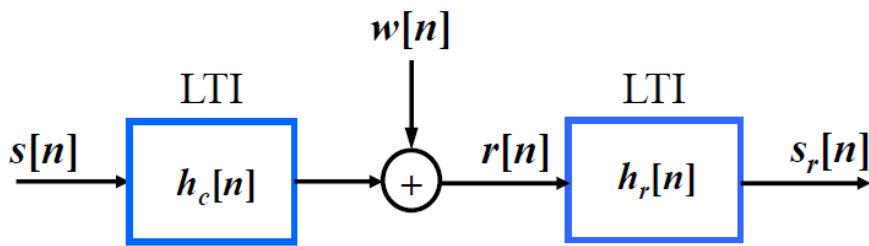


图 1: 多径传输及恢复原理框图

2.1 系统辨识

核心在于设计第二个框中的系统。显然，如果我们已知一个系统的输入和输出，这个系统是很有可能被唯一确定下来的。这正是我们研究系统辨识的基础。

如图1，我们只需要知道 $r[n]$ 和对应恢复信号 $s_r[n]$ ，利用系统辨识可以进行非常简洁的设计。但这个方法没有任何技术含量，我们在问题解决部分3.5中给出简单地尝试。

尽管如此这个方法对于后续2.3中介绍的维纳滤波具有重要的作用。我们这里借助 MATLAB 软件包 System Identification Toolbox 进行实现。

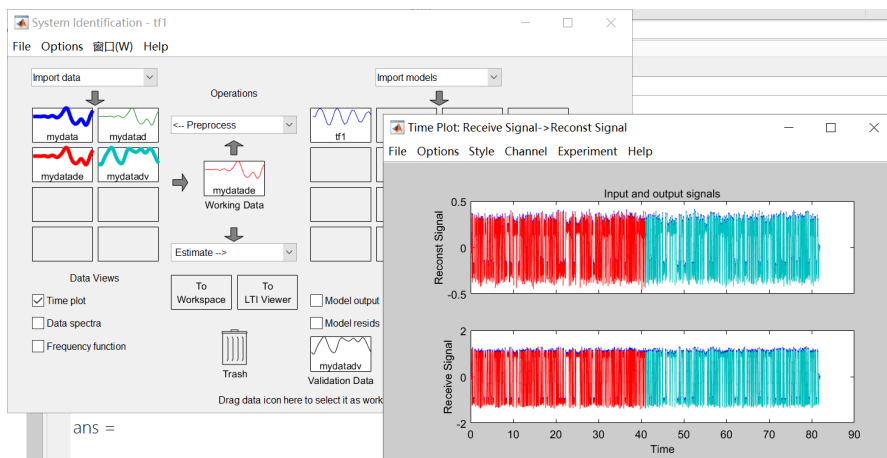


图 2: MATLAB 系统辨识工具箱操作界面

在进行维纳滤波之后，我们将系统进行系统辨识，近似出一个传输函数，再结合 filter 函数就构建出我们所需要的滤波器。

2.2 低通滤波

此题有一个很重要的信号特征，就是带限，我们自然可以联想到 FIR 窗函数法。

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (1)$$

其对应时域响应为：

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin \omega_c n}{n\pi} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c n) \quad (2)$$

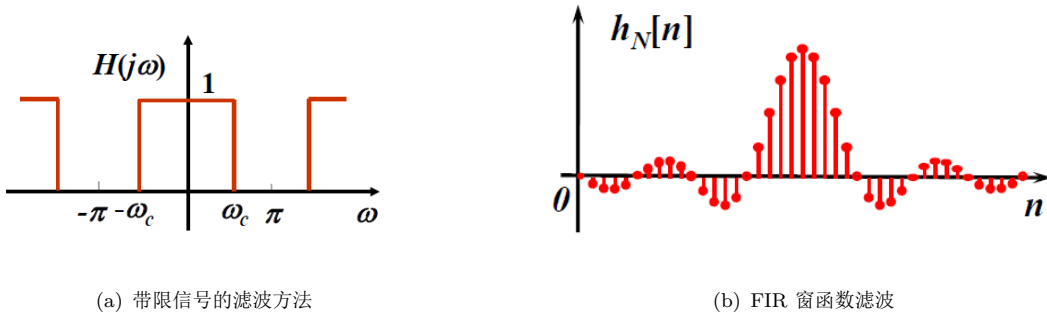


图 3

由于理想带限滤波器非因果，所以我们将 Sa 函数时移，选取其中有限个并时移，可以得到因果且高度近似的低通滤波器：

$$h_N[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(n - N)] (u[n] - u[n - 2N - 1]) \quad (3)$$

但是延时将会是此题重要的影响因素。

MATLAB 内置了相当多的低通滤波函数，经过对 lowpass、Butterworth 和 FIR 多种实现的比较测试，我们这里选用 Butterworth 滤波器进行滤波。

2.3 维纳滤波

继上述传统滤波之后，维纳滤波是现代滤波器的一个要点。我们这里简单提及维纳滤波的原理以及实现方法。设计一个滤波器 h 使得输出信号 $y = \hat{s}$ 尽可能地接近原始信号，利用均方误差分析（LMS 判据），希望其数学期望尽可能小。

$$E\{e^2\} = E\{(s - x * h)^2\} \rightarrow \min \quad (4)$$

在离散域上对 h 求导,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E}{\partial h} &= 2E \left\{ \left[\sum_m h(m)x(n-m) - s(n) \right] \sum_j x(n-j) \right\} \\
 &= 2E \left\{ \sum_m h(m) \sum_j x(n-j)x(n-m) - \sum_j s(n)x(n-j) \right\} \\
 &= 2 \sum_m h(m) E \left\{ \sum_j x(n-j)x(n-m) \right\} - 2E \left\{ \sum_j s(n)x(n-j) \right\} \\
 &= 2 \sum_m h(m) R_{xx}(j-m) - 2R_{xs}(j)
 \end{aligned} \tag{5}$$

令导数为 0, 得到:

$$R_{xs}(j) = \sum_m h(m) R_{xx}(j-m), j \geq 0 \tag{6}$$

此即 Wiener-Hopf 方程。

如果假设系统滤波器 $h(n)$ 是一个因果序列且可用有限长 N 点序列去逼近, 即可将上述式子扩写成 N 个方程组成的线性方程组, 写成矩阵形式可得:

$$\begin{pmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \cdots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \cdots & R_{xx}(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{xx}(N-1) & R_{xx}(N-2) & \cdots & R_{xx}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xs}(0) \\ R_{xs}(1) \\ \vdots \\ R_{xs}(N-1) \end{pmatrix} \tag{7}$$

简写成:

$$R_{xx} \mathcal{H} = R_{xs} \tag{8}$$

只要 R_{xx} 非奇异即可解得

$$\mathcal{H} = \frac{R_{xs}}{R_{xx}} \tag{9}$$

通过一系列的迭代, 我们可以得到一个滤波结果, 再结合 2.1 中给出的系统辨识方法, 我们就可以构建出一个因果的维纳滤波器。

2.4 自适应滤波

自适应滤波是基于维纳滤波的一类更加动态且有效的现代滤波方法。核心思路是利用批梯度下降法, 结合 LMS 判据将误差最小化。

MS 误差:

$$J(j) = E[e(j)^2] = E[(d(j) - W^T(j) \cdot X(j))^2] \tag{10}$$

MS 误差的梯度

$$\nabla J(j) = -2E[X(j) \cdot (d(j) - W^T(j) \cdot X(j))] = -2E[X(j)e(j)] \tag{11}$$

更新方程:

$$W(j+1) = W(j) + X(j)e(j) \tag{12}$$

这样进行批处理, 如果学习率 μ 选择合适, 那么收敛快, 且结果优良。

3 问题求解

3.1 Basic 0: 朴素低通滤波

在 Basic 0 文件夹中，我们利用了 `butterworth` 函数进行低通滤波。
效果如下：给出的 U 值为：-1.727019。

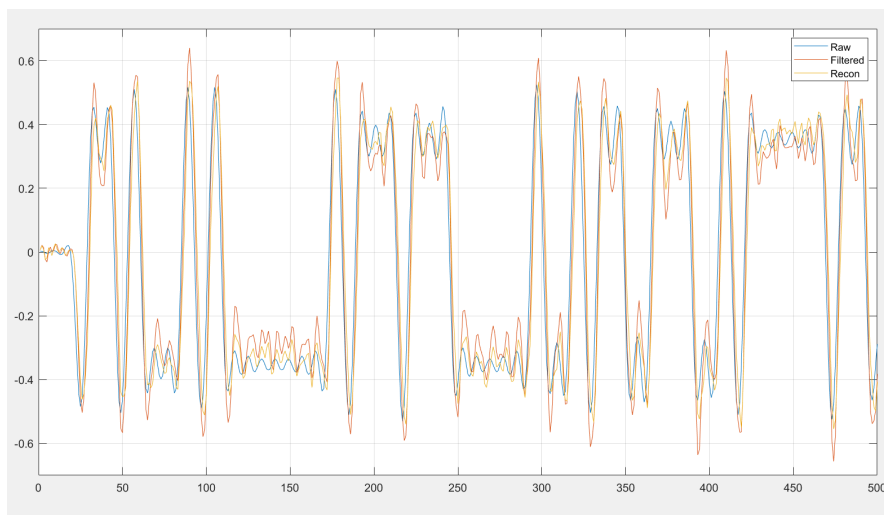


图 4: 朴素的 *Butterworth* 滤波

频谱，其中 `sr` 为恢复信号，`st` 为原始训练信号 在截止频率边缘还是比较出色的。

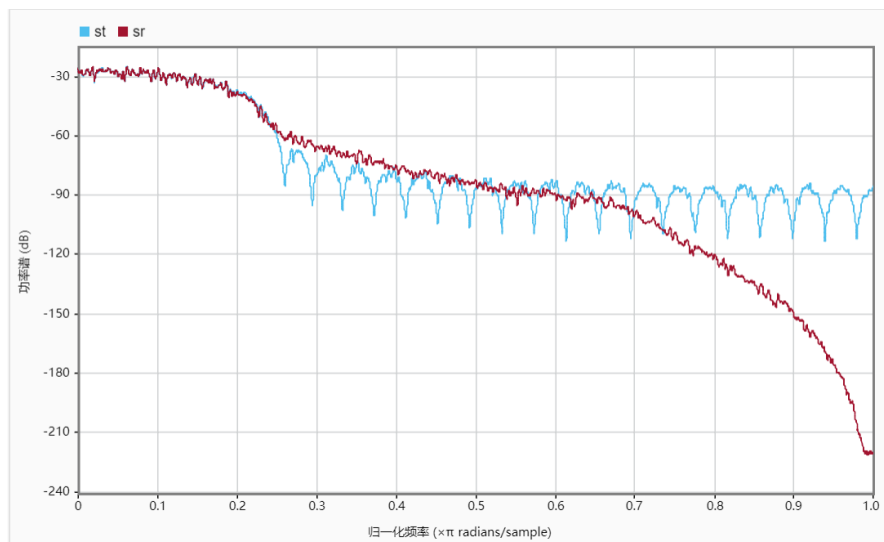


图 5: *Butterworth* 滤波的功率谱

代码见附录 Basic 0 文件夹。

3.2 Basic 1: 自适应滤波尝试

自适应滤波器原理上是一种非常好的动态方法，但是在实际使用过程当中，调整参数比较复杂，有限的时间内很难找到一组合适的参数用于描述。

时域上出现较大的时延，在 2000+ 点之后才能较好地显示出波形的趋势。

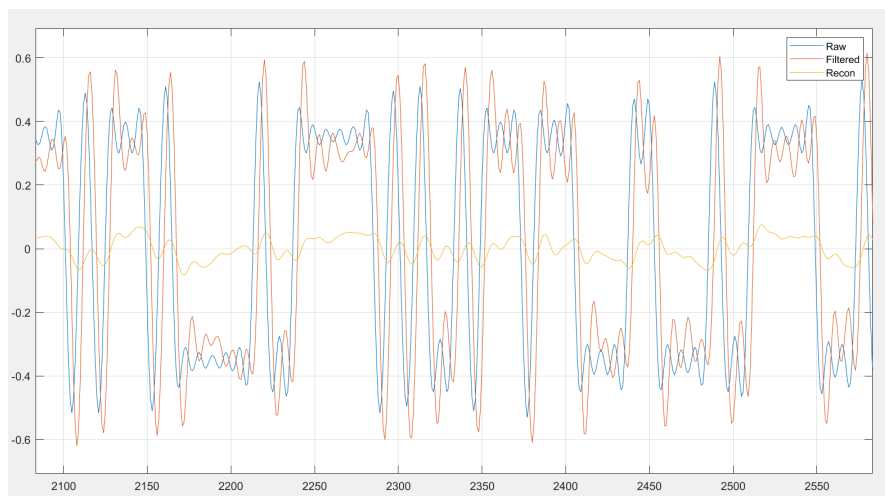


图 6: 一个自适应滤波的时域特性

另一方面，也可以看到不同频段都被不同程度地压低，且普遍蓝移。如果将恢复信号频谱向低频移动，且各频段都加强，应该可以看到较好的恢复效果。

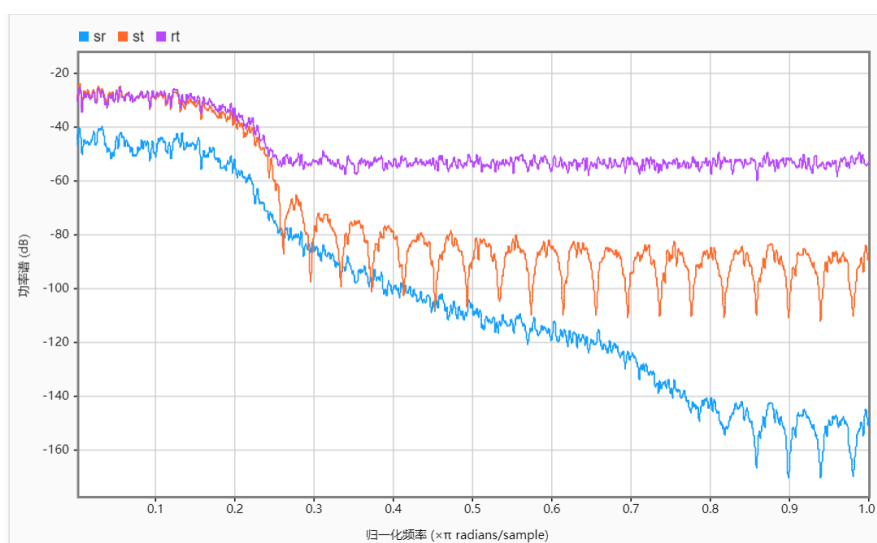


图 7: 一个自适应滤波的频域特性

由于效果不佳，我们没有采用这样的方法。

3.3 Basic 2: 维纳滤波

维纳滤波是一个相对有效的方法，对比上述自适应滤波，我们在 Basic 2 中得到如下：可以看到有较好的恢复效果。在频域上，出现了高频段的拱形形态，相比之前的方法更好：给出的 U 值为-1.385870

3.4 Advance: 多次维纳滤波法

经过如上尝试，我们利用维纳滤波的方法完成 Advance 题。

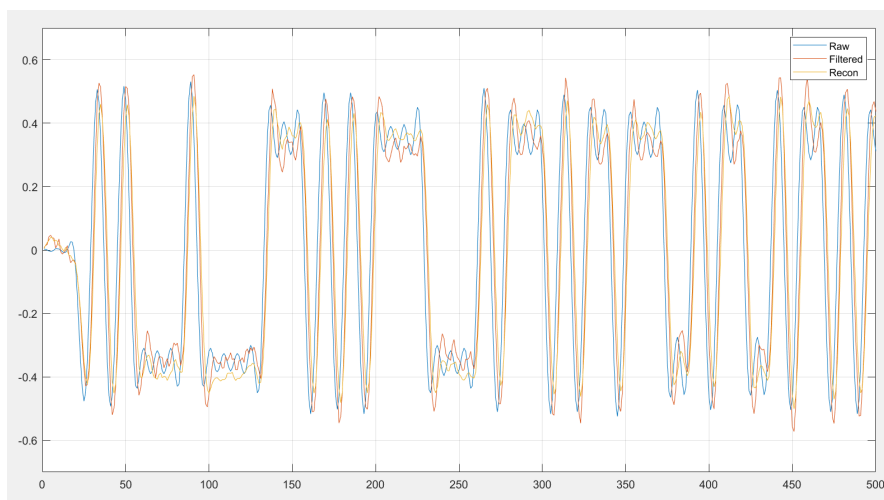


图 8: 维纳滤波的时域特性

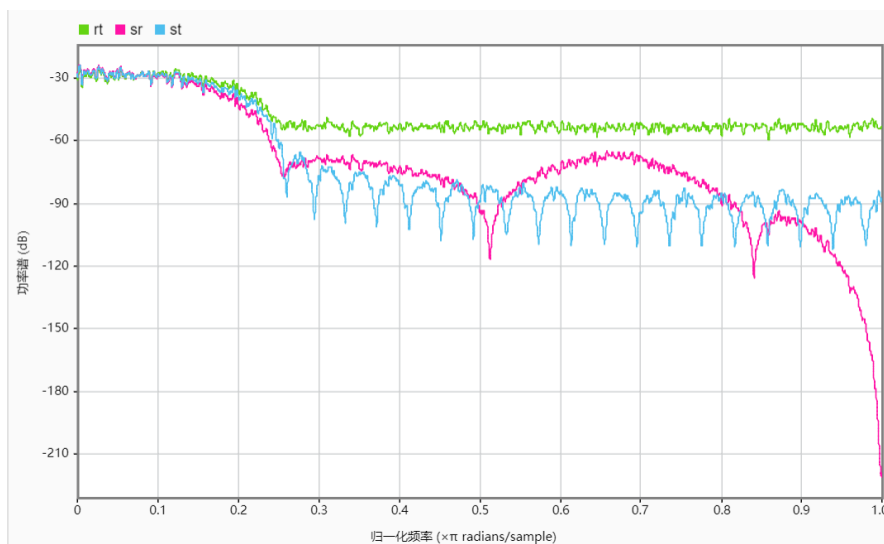


图 9: 维纳滤波的频域特性

由于题目的信道传输参数没有给出，我们在这里进行遍历。一个有趣的发现是，得出最优信道参数 $(1, -0.1, 0, 0.9)$ 之后将这一组数据代入，将不能一次性得到最好的维纳滤波结果，只有进行多次维纳滤波才能得到良好的收效。所以在进行训练的时候，我们每次都进行参数粗筛。这相当于进行 20^3 次微调的维纳滤波。另一方面，我们发现，在最优信道参数附近进行细筛并不能取得良好的收效。如下：

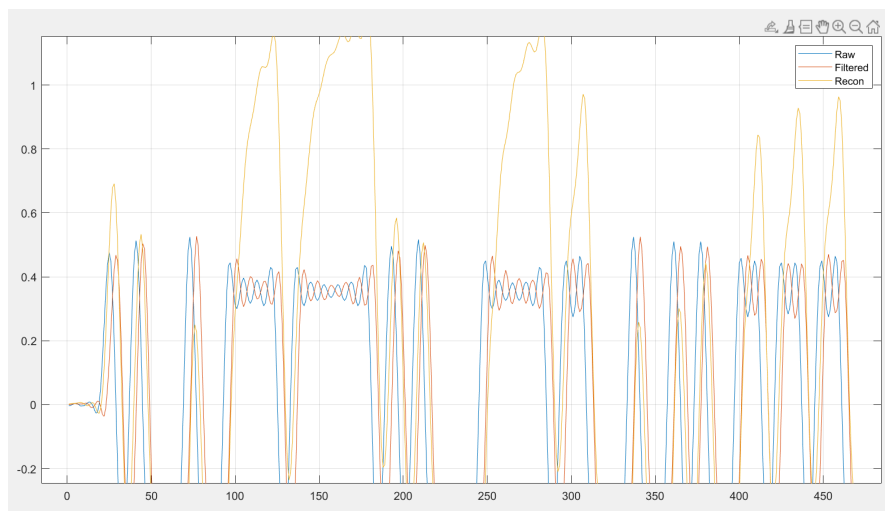


图 10: 信道参数细筛之后造成的过冲

完成粗筛之后，可以得到相对平滑的滤波结果，但是幅度受到了一定的影响。如下：

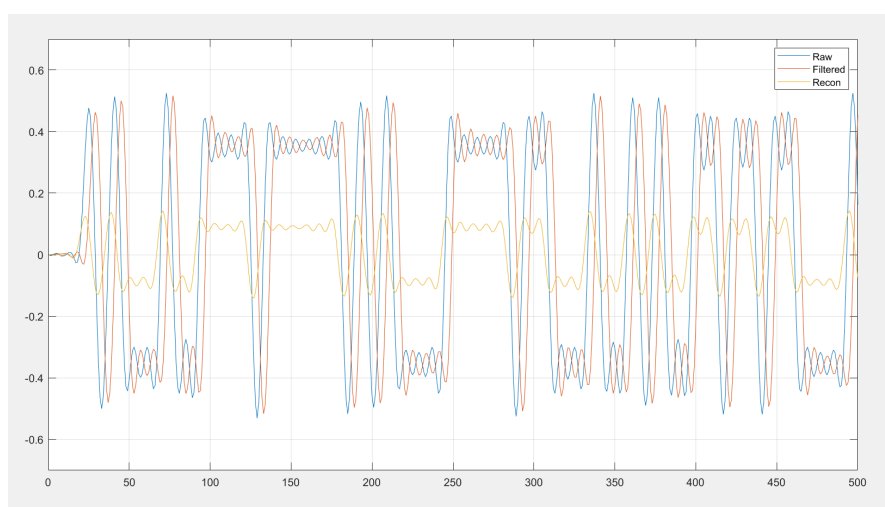


图 11: 信道参数粗筛之后造成的幅度损失

我们进行相应的幅度补偿之后，可以得到，在幅度为 2.85 倍时获得最优解。

此时得到了一定程度的优化，U 值为 -1.250340。

或许由于进行了较多次数的维纳滤波，其物理可实现性得到了进一步的提升。系统辨识的拟合度得到了显著的提升（比较先开始的 Basic 中，系统拟合程度只有约 80%）

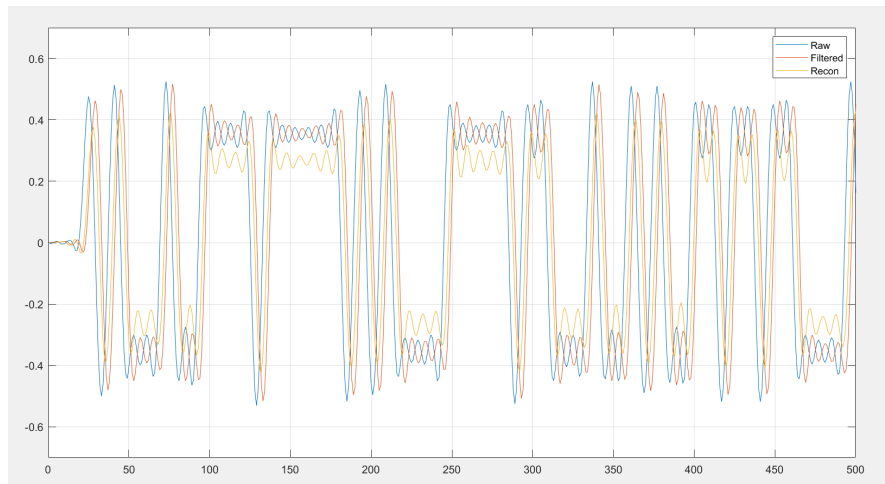


图 12: 幅度补偿之后的结果

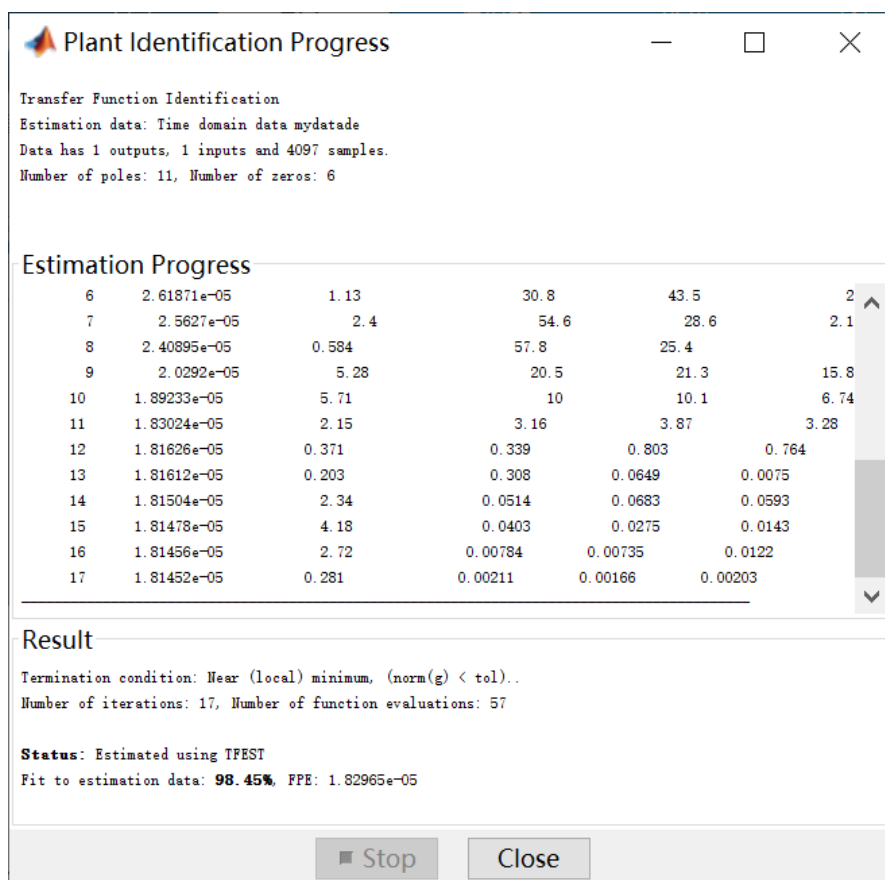


图 13: 系统辨识结果

3.5 最简化尝试：直接系统辨识法

虽然这个方法非常的浅显，但是最后我们还是尝试一下。即将 `s_training` 和 `r_training` 直接运用系统辨识。

时域上看，效果仍然是不错的。

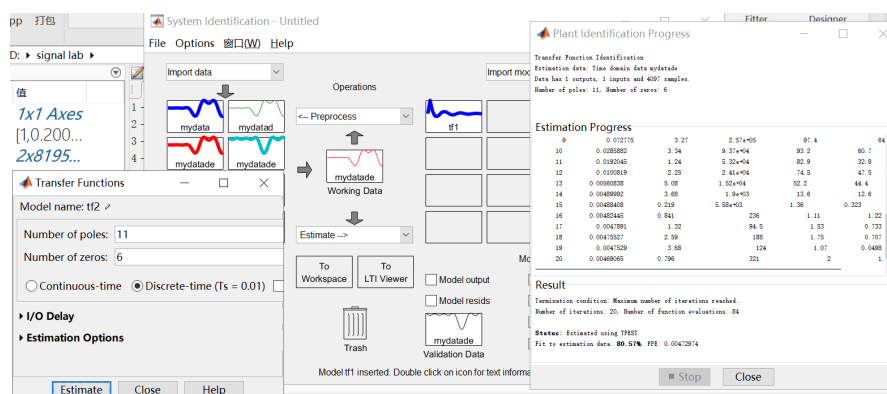


图 14: 系统辨识的最简方法

U 值为 $U = -2.322312$ 。甚至高于先开始设计不佳的一些高级滤波器。

4 未来工作和改进

- 掌握自适应滤波的调参方法，利用自适应滤波以优化滤波效果
- 说明维纳滤波多次进行对于滤波效果助益的原理
- 进一步探索系统辨识方法，简化滤波器设计流程，提升精确度。

5 参考资料汇总

- 多径信道理论的直观感受: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/116761401>
- 七种重要滤波方法: https://blog.csdn.net/weixin_45502929/article/details/112017409
- 卷积消除法: http://ddjy.hnust.edu.cn/ch/reader/create_pdf.aspx?file_no=201803013&year_id=2018&quarter_id=4
- OFDM: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/57967971>
- 系统辨识: <https://ww2.mathworks.cn/help/ident/gs/identify-linear-models-using-the-gui.html>
- FIR: <https://blog.csdn.net/u010592995/article/details/86684204>
- 自适应滤波器 http://blog.sina.com.cn/s/blog_bb81c2230102xdfu.html
- 维纳滤波器 <https://zhuanlan.zhihu.com/p/20850601>