УДК 517.5

Применение W-функции Ламберта в решении некоторых трансцендентных уравнений

Мусатов И.А.

студент кафедры ИиППО ИИТ РТУ МИРЭА

Батиенков Р.В.

к.т.н., доцент кафедры высшей математики ИПТИП РТУ МИРЭА

Аннотация. *В работе исследуется приложение функции Ламберта к решению некоторых трансцендентных уравнений, возникающих в различных областях математики и физики. Рассматривается непосредственно понятие W-функции Ламберта. Проанализированы некоторые элементарные свойства функции. Введены и доказаны обобщения некоторых трансцендентных уравнений. Приводятся различные примеры практического использования рассмотренных уравнений. Проведенное исследование позволяет в первом приближении ознакомиться с функцией Ламберта и ее приложениями.*

Ключевые слова: *теория функций, W-функция Ламберта, трансцендентные уравнения*

Application of the Lambert W Function in Some Transcendental Equations Solving

Musatov I. A.,

Student of the Department of Instrumental and Applied Software, IIT of MIREA – Russian Technological University

Batienkov R.V.,

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of High Mathematics, IPTIP of MIREA – Russian Technological University

Annotation. *The subject of this article is the application of Lambert W function (also known as product logarithm) to the solving of some kinds of transcendental equations that are take place in different areas of mathematics and physics. First, the definition and some elementary properties of the function are considered. Then, generalizations of some transcendental equations are yielded and proved. Different examples of practical applications are taken into consideration. The article allows to learn in a first approximation the Lambert W function and its applications.*

Keywords: *Lambert W function, transcendental equations, function theory*

Существует большое количество численных методов нахождения приближенных значений корней трансцендентных уравнений. В противоположность этим методам стоит не менее значимая задача нахождения аналитического решения подобных уравнений (т.е.

выражение корней уравнения через композиции элементарных функций и арифметических операций). Нахождение аналитического решения позволяет отсекать погрешности численных методов, что делает решение максимально точным.

Одной из функций, которые способствуют аналитическому нахождению корней некоторых трансцендентных уравнений, является так называемая «W-функция Ламберта».

Понятие функции Ламберта

В конце 1980-х группой математиков, состоящей из Р. Корлесса, Г. Гоннета, Д. Харе, Д. Джефри и Д. Кнута, в обращение была введена W-функция. Она была названа в честь немецкого математика и оптика Ламберта, который проводил некоторые исследования вокруг триномиального уравнения. [1] Благодаря тому, что некоторые из указанных математиков были разработчиками системы Maple, функция была добавлена в данный программный пакет, и с тех пор получила широкое распространение. [2]

Функция Ламберта определяется как функция комплексного переменного, обратная к $f(z) = ze^z$. Ее можно задать как решение функционального уравнения:

$$W(z)e^{W(z)} = z, \text{где } W: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \tag{1}$$

Для вещественных значений график функции Ламберта может быть представлен как симметричное отражение графика функции $y = xe^x, x \in \mathbb{R}$ относительно прямой y = x (см. рис. 1). Очевидно, что на промежутке $(-{}^{1}/_{e}; 0)$ данная функция является многозначной. Поэтому традиционно ее подразделяют на две ветви: $W_0(x)$, $E(W_0) = [-1; +\infty)$ и $W_{-1}(x)$, $E(W_{-1}) = (-\infty; -1]$. [3]

Верхняя ветвь называется основной и проходит через начало координат. Нижняя же ветвь имеет вертикальную асимптоту при x = 0. Другие целые значения $k \neq -1, 0$ для функции $W_k(x)$ относятся к комплекснозначным ветвям и в данной работе рассматриваться не будут.[2]

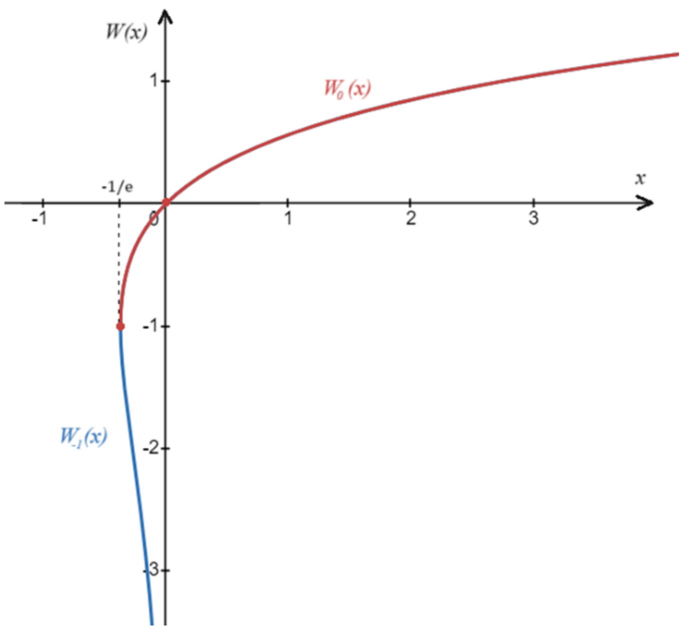

Рис. 1. График действительных ветвей W-функции

Некоторые свойства функции

Рассмотрим некоторые элементарные свойства этой функции. Функция Ламберта на области определения является непрерывной и дифференцируемой. Найдем ее производную, пользуясь правилом дифференцирования обратных функций:

$$W'(x) = \frac{1}{\left(1 + W(x)\right)e^{W(x)}} = \frac{W(x)}{x\left(1 + W(x)\right)} \tag{2}$$

В окрестности нуля функция может быть разложена в ряд Тейлора с интервалом сходимости $(-{}^{1}/_{e}; {}^{1}/_{e})$:

$$W_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n \tag{3}$$

Пользуясь правилом интегрирования обратных функций (формула Шарля Лезана), определим семейство первообразных для W(x):

$$\int W(x)dx = x\left(W(x) - 1 + \frac{1}{W(x)}\right) + C \tag{4}$$

Решение некоторых трансцендентных уравнений

Перейдем к основной части данной работы, а именно: к рассмотрению некоторых трансцендентных уравнений, корни которых могут быть выражены через элементарные функции и функцию Ламберта.

Начнем рассмотрение с элементарного уравнения (см. уравнение 5). Применяя функцию Ламберта к обеим частям уравнения, получаем выражение для корня:

$$xe^x = a\,;\;\; x = W(a) \tag{5}$$

Теперь пусть сумма переменной с ее натуральным логарифмом равна некоторой константе. Тогда взяв экспоненту от обеих частей уравнения, в левой части получим выражение $e^{x+\ln x} = e^x e^{\ln x} = xe^x$, а справа некоторое число. Получили равенство, сведенное к (5). Поэтому корнем данного уравнения является:

$$x + \ln x = a\,;\;\; x = W(e^a) \tag{6}$$

Пусть тетрация переменной (или же показательно-степенная функция) равна некоторому числу. Тогда прологарифмировав обе части уравнения, также сведем задачу к уравнению (5):

$$x^x = a\,;\;\; x = e^{W(\ln a)} = \frac{\ln a}{W(\ln a)} \tag{7}$$

Вообще говоря, при определенных допущениях, уравнение (7) может быть обобщено до тетрации некоторой функции. Но это тема, достойная отдельного анализа, поэтому в данной работе она исследоваться не будет.

Рассмотрим более сложное выражение (см. уравнение (8)). Для нахождения корня в равенстве перейдем к обратным величинам $e^{x^2} = \frac{1}{ax}$. Затем прологарифмируем обе части и перенесем выделившийся квадрат переменной к логарифму, не забывая поменять знак показателя: $x^{-2} \cdot \ln\frac{1}{ax} = 1$. Такая запись эквивалентна: $\left(\frac{1}{ax}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{ax}\right)^2 = \frac{2}{a^2}$. Несложным преобразованием сведем к формуле (5): $\ln\left(\frac{1}{ax}\right)^2 e^{\ln\left(\frac{1}{ax}\right)^2} = \frac{2}{a^2}$ и получим решение нашего уравнения:

$$e^{-x^2} = ax\,;\;\; x = \frac{1}{a} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2}W\left(\frac{2}{a^2}\right)\right)} \tag{8}$$

Перейдем к рассмотрению уравнения (9). Экспонента в левой части имеет отрицательную степень, поэтому можем перенести ее в правую часть равенства, изменив при этом знак показателя. Чтобы использовать функцию Ламберта, преобразуем степень экспоненты так, чтобы она соответствовала выражению с «иксом», стоящим перед экспонентой: $1 = a(x-b)e^{c(x-b)+bc}$. Слагаемое-константу из показателя степени можно вынести. Тогда получим преобразование, сводящееся к уравнению (5): $\frac{ce^{-bc}}{a} = c(x-b)e^{c(x-b)}$. Откуда получаем аналитическое выражение для корня:

$$e^{-cx} = a(x-b)\,;\ \ x = b + \frac{1}{c} W\left(\frac{ce^{-bc}}{a}\right) \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что более лаконичное уравнение (10) линейными преобразованиями может быть сведено к (9). Таким образом, получили обобщенное решение уравнений вида: экспонента в степени полинома первого порядка равна полиному первого порядка:

$$e^{P_1(x)} = Q_1(x)\ \equiv\ e^{ax+b} = cx+d\,;\ \ x = -\frac{d}{c} - \frac{1}{a}\cdot W\left(\frac{-a\cdot e^{b-\frac{ad}{c}}}{c}\right) \tag{10}$$

Области применимости рассматриваемых уравнений

Основоположники функции интересно замечают, что, следуя принципу Парето[1], W - функция в силу своей простоты должна иметь множество приложений. [1]

И это действительно так. Приведем примеры использования рассмотренных уравнений в различных областях математики и физики.

Пусть имеется дифференциальное уравнение с запаздыванием (например, возникшее при анализе устойчивости динамических систем с запаздыванием):

$$\frac{dy(t)}{dt} = a\cdot y(t-1) \tag{11}$$

Тогда, применяя преобразование Лапласа, можем получить его характеристическое уравнение в виде (5).

Уравнение (6) часто возникает в различных физических задачах, например, при решении задачи о распределении плотности плазмы в высокочастотном разряде или при исследовании поведения характеристик автомодельного движения квазинейтральной разреженной плазмы. А уравнение (8) встречается в теории броуновского движения. [2]

В законе смещения Вина в процессе решения уравнения спектрального распределения возникает упрощение в виде (см. формулу (12)). При замене $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ оно очевидным образом сводится к уравнению $(x-5)e^{x} = -5$, которое разрешимо при помощи функции Ламберта. В результате получаем аналитическое выражение для постоянной Вина (см. формулу (13)). [4]

$$-5e^{\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)} + 5 + e^{\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)}\frac{hc}{\lambda kT} = 0 \tag{12}$$

$$b = \lambda_{max}T = \frac{{}^{hc}/_{k}}{5 + W_0(-5e^{-5})} \tag{13}$$

При решении некоторых одномерных квантовых задач возникают уравнения (см. уравнение (14)), в частных случаях сводящиеся к (9) [5].

$$e^{-cx} = a_0(x-r_1)(x-r_2) \tag{14}$$

[1] Согласно эмпирическому принципу Парето, двадцать процентов усилий дают восемьдесят процентов результата

Это лишь несколько примеров использования функции Ламберта для нахождения аналитических решений трансцендентных уравнений. Большое количество других примеров описано в источниках [1] и [2].

Заключение

В результате анализа источников по предмету функции Ламберта, можно сделать вывод об ее практической значимости для решения уравнений, возникающих во многих областях физики и математики. Проведенное исследование функции позволило убедиться в достаточной простоте ее использования.

Относительно недавнее введение функции Ламберта в обращение все еще оставляет определенное поле для ее дальнейшего исследования. Она стала удобным инструментом наряду с элементарными функциями и, кто знает, быть может, когда-нибудь пополнит их число.

Список использованной литературы:

1. Corless, R.M., Gonnet, G.H., Hare, D.E.G., Jeffrey, D.J., Knuth, D.E. «On the LambertW function» // Advances in Computational Mathematics. – 1996. – 5: 329–359.
2. Дубинов, А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К. W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики: учебное пособие для вузов. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2006. – 161 с.
3. Глушков А.И., Агеева А.В., Котова И.А. Методические приемы решения уравнений с помощью производной и с помощью функции Ламберта // Информационные технологии в строительных, социальных и экономических системах. – 2019. – №2(16). – С. 121-125.
4. Valluri S.R., Jeffrey D.J., Corless R.M. Some applications of the Lambert W function to physics. // Canadian J. Physics, 2000. Vol 78. P. 823-831.
5. Scott, T.C., Mann. R.B. General Relativity and Quantum Mechanics: Towards a Generalization of the Lambert W Function // AAECC (Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing). — 2006. — Vol. 17, no. 1. — P. 41—47.