Мусатов И.А.

Методическое пособие для подготовки к экзамену по математическому анализу (3 семестр)

Москва – 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Числовые ряды 4
Понятие числового ряда, частичных сумм и сходимости 4
Необходимое условие сходимости 4
Некоторые часто используемые ряды 5
2 Сходимость рядов с положительными членами 6
Первый признак сравнения 6
Предельный (второй) признак сравнения 6
Признак Даламбера 8
Радикальный признак Коши 8
Интегральный признак Коши 9
3 Сходимость знакопеременных рядов 11
Ряд Лейбница 11
Абсолютная и условная сходимость 11
4 Вычисление суммы ряда 13
Точная сумма некоторых рядов 13
Остаток ряда 14
Приближенная сумма ряда 14
5 Функциональные ряды 15
Понятие функционального ряда 15
Равномерная сходимость 15
Степенные ряды и их сходимость 17
6 Ряд Тейлора 21
Разложения элементарных функций в ряд Маклорена 21
Типовые задачи, связанные с рядом Тейлора 23
7 Приложения теории рядов 26
Нахождение суммы числового ряда 26
Вычисление определенных интегралов 26
Вычисление значения производной в точке 27
8 Ряд Фурье 28
Частные случаи разложения 28
Сумма тригонометрического ряда 29

Типовые задачи, связанные с рядом Фурье 29
Равенство Парсеваля 32
Приложение А. Эквивалентность бесконечно малых функций 34

1 Числовые ряды

Понятие числового ряда, частичных сумм и сходимости

<u>Опр</u>: пусть задана некоторая бесконечная числовая последовательность $\{a_n\}: a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Тогда сумма членов этой последовательности: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_1^{\infty} a_n$ называется числовым рядом. Члены этой последовательности называются членами ряда. А a_n – запись члена ряда в общем виде.

Рассмотрим частичные суммы ряда: $S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$; … ; $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Они, в свою очередь, также составляют числовую последовательность: $\{S_n\}: S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$

<u>Опр</u>: Числовой ряд называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Где S – конкретное число, которое и называют суммой ряда. (Т.е. $\sum_1^{\infty} a_n = S$). Если предел равен бесконечности или не существует, то ряд называется расходящимся.

Необходимое условие сходимости

<u>Теорема</u>: если числовой ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$. Т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Логическим следствием из этой теоремы становится утверждение, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

➢***Пример 1.1:*** пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1-n}$. Предел его общего члена $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{1-n} = -\infty \neq 0$. Следовательно, он расходится.

➢***Пример 1.2:*** пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{ar}ctg(n)$. Предел его общего члена $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{ar}ctg(n) = \frac{\pi}{2} \neq 0$. Следовательно, он расходится.

➢***Пример 1.3:*** пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Предел его общего члена $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Тем не менее, на основании этого факта мы не можем говорить о том, что этот ряд сходится. Напротив, мы знаем, что это расходящийся ряд Дирихле при $\alpha = 1$. Равенство нулю предела общего члена ряда является лишь необходимым условием сходимости, но не достаточным. Этот пример наглядно показывает область применимости следствия из необходимого условия сходимости.

Некоторые часто используемые ряды

На практике довольно часто используются два ряда: ряд Дирихле и ряд, составленный из членов геометрической прогрессии.

Ряд Дирихле в общем виде: $\sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha}$. Для данного ряда известно, что при $\alpha \leq 1$ он расходится, а при $\alpha > 1$ сходится.

Пусть задана геометрическая прогрессия с первым членом b и знаменателем (множителем) прогрессии: q. Тогда n-й член прогрессии вычисляется как: $b_n = bq^{n-1}$. А ряд, составленный из членов геометрической прогрессии, выглядит как: $\sum_{n=1}^\infty bq^{n-1}$. Для такого ряда известно, что он сходится при $|q| < 1$. Причем известна его сумма: $S = \frac{b}{1-q}$. Если же $|q| \geq 1$, то ряд расходится.

➢***Пример 1.4:*** пусть дан ряд $\sum_{n=1}^\infty \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^n$. Приведем его к виду ряда, составленного из членов геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^\infty bq^{n-1}$, тогда $\sum_{n=1}^\infty \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^n = \sum_{n=1}^\infty \sqrt{2} \cdot \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$ и $b = \frac{\sqrt{2}}{e}, q = \frac{1}{e}$. $q < 1$. Значит, данный ряд сходится и его сумма $S = \frac{b}{1-q} = \frac{\sqrt{2}}{e(1-\frac{1}{e})} = \frac{\sqrt{2}}{e-1}$

2 Сходимость рядов с положительными членами

Опр: числовой ряд $\sum_1^\infty \mathrm{a_n}$, все члены которого неотрицательны: $\mathrm{a_n} \geq 0\ \forall \mathrm{n}$, называется положительным рядом.

Для положительных рядов определены следующие признаки сходимости:

Первый признак сравнения

Теорема: пусть даны два положительных ряда: $\sum_1^\infty \mathrm{a_n}$, $\sum_1^\infty \mathrm{b_n}$. Если $\mathrm{a_n} \leq \mathrm{b_n}\ \forall \mathrm{n}$, то из сходимости $\sum_1^\infty \mathrm{b_n}$ следует сходимость $\sum_1^\infty \mathrm{a_n}$. А из расходимости $\sum_1^\infty \mathrm{a_n}$ следует расходимость $\sum_1^\infty \mathrm{b_n}$

Применение: если данный ряд по структуре похож на некоторый ряд, сходимость которого мы знаем.

➢***Пример 2.1:*** пусть дан ряд $\sum_{\mathrm{n}=1}^\infty \frac{\sin^2 \mathrm{n}}{\mathrm{n}^2}$. Сравним его со сходящимся рядом Дирихле при $\alpha = 2$: $\sum_{\mathrm{n}=1}^\infty \frac{1}{\mathrm{n}^2}$. Знаем, что для любых значений аргумента $\sin^2 \mathrm{n} \leq 1$. А значит, $\frac{\sin^2 \mathrm{n}}{\mathrm{n}^2} \leq \frac{1}{\mathrm{n}^2}$. Выполняется первый признак сравнения, значит, ряд сходится.

➢***Пример 2.2:*** пусть дан ряд $\sum_{\mathrm{n}=1}^\infty \frac{\ln \mathrm{n}}{\mathrm{n}}$. Сравним его с расходящимся рядом Дирихле при $\alpha = 1$: $\sum_{\mathrm{n}=1}^\infty \frac{1}{\mathrm{n}}$. Знаем, что для любых $\mathrm{n} \geq 3, \ln \mathrm{n} \geq 1$. А значит, $\frac{1}{\mathrm{n}} \leq \frac{\ln \mathrm{n}}{\mathrm{n}}$. По следствию из первого признака сравнения получаем, что данный ряд расходится.

Предельный (второй) признак сравнения

Теорема: пусть даны два положительных ряда: $\sum_1^\infty \mathrm{a_n}$, $\sum_1^\infty \mathrm{b_n}$, $\mathrm{b_n} \neq 0$. Если существует конечный предел отношения: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{a_n}}{\mathrm{b_n}} = \mathrm{c} \neq \infty \neq 0$, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Если же $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{a_n}}{\mathrm{b_n}} = 0$ и $\sum_1^\infty \mathrm{b_n}$ сходится, то и $\sum_1^\infty \mathrm{a_n}$ сходится.

Если же $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\mathrm{b}_n} = \infty$ и $\sum_1^\infty b_n$ расходится, то и $\sum_1^\infty a_n$ расходится.

Применение: если данный ряд похож на некоторый ряд, сходимость которого мы знаем. Или же он содержит в себе множитель, сходимость ряда из которого нам известна.

➢***Пример 2.3:*** пусть дан ряд $\sum_1^\infty \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{2^n}$. Мы знаем, что ряд $\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^n$ сходится как ряд, составленный из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Исходный ряд содержит такой множитель. Поэтому найдем предел отношения общего члена исходного ряда к общему члену ряда сравнения: $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{2^n} \Big/ \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$. Предел отношения равен 0, ряд сравнения сходится, а значит, сходится и данный ряд.

➢***Пример 2.4:*** пусть дан ряд $\sum_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{4}{n^3}\right)}{\sqrt[5]{n^3-2n}}$. Мы знаем, что ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\frac{18}{5}}}$ сходится как ряд Дирихле с показателем $\alpha = \frac{18}{5} > 1$. Поэтому найдем предел отношения общего члена исходного ряда к общему члену ряда сравнения: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{4}{n^3}\right)}{\sqrt[5]{n^3-2n}} \Big/ \frac{1}{n^{\frac{18}{5}}} = \lim_{n\to\infty} 4 \cdot n^{\frac{18}{5}} \Big/ n^3 \cdot \sqrt[5]{n^3-2n} = 4$. Предел отношения – конечное число, значит, исходный ряд тоже сходится.

P.S.: При высчитывании предела отношения использовали эквивалентность бесконечно малых для синуса: $\sin\left(\frac{4}{n^3}\right) \sim \frac{4}{n^3}$ при $\frac{4}{n^3} \to 0$. А также делили числитель и знаменатель на наибольшую степень переменной: $n^{\frac{18}{5}}$.

➢***Пример 2.5:*** пусть дан ряд $\sum_1^\infty \frac{\ln n}{n}$. Мы знаем, что ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ расходится. Исходный ряд содержит такой множитель. Поэтому найдем предел отношения общего члена исходного ряда к общему члену ряда сравнения: $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \Big/ \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$. Предел отношения равен бесконечности, ряд сравнения расходится, а значит, расходится и данный ряд.

Проще говоря, предел отношения показывает, как соотносится исходный ряд с рядом сравнения. Если предел равен нулю, то исходный ряд намного «меньше» ряда сравнения. Если предел равен бесконечности, то исходный ряд намного «больше» ряда сравнения. Если же предел равен конечному числу, то ряды «ведут» себя одинаково.

Признак Даламбера

Теорема: пусть дан положительный ряд: $\sum_1^\infty a_n$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$.

Тогда если D < 1, то ряд сходится,

Если D > 1, то ряд расходится.

И если D = 1, то сходимость ряда остается неизвестной.

Применение: если общий член данного ряда содержит показательные выражения или факториалы. Т.е. отношение двух соседних членов ряда заведомо не будет равным 1.

➢***Пример 2.6:*** пусть дан ряд $\sum_1^\infty \frac{n!}{4^n \cdot n^7}$. Найдем предел отношения двух соседних членов ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{4^{n+1}\cdot(n+1)^7} \Big/ \frac{n!}{4^n \cdot n^7} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{4} = \infty > 1$. Значит, по признаку Даламбера, ряд расходится.

➢***Пример 2.7:*** пусть дан ряд $\sum_1^\infty \frac{n!}{n^n}$. Найдем предел отношения двух соседних членов ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\cdot n^n/(n+1)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\left(-\frac{1}{n+1}\right)\cdot n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-\frac{n}{n+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$. Значит, по признаку Даламбера, ряд сходится.

Радикальный признак Коши

Теорема: пусть дан положительный ряд: $\sum_1^\infty a_n$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K$.

Тогда если K < 1, то ряд сходится,

Если K > 1, то ряд расходится.

И если K = 1, то сходимость ряда остается неизвестной.

Применение: если общий член данного ряда возведен в степень, содержащую n.

➢***Пример 2.8:*** пусть дан ряд $\sum_1^\infty \frac{1}{2^n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. Найдем предел корня n-ой степени из общего члена ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot e > 1$. Значит, по радикальному признаку Коши, ряд расходится.

➢***Пример 2.9:*** пусть дан ряд $\sum_1^\infty 3^n \cdot \arcsin^n\left(\frac{4}{n+1}\right)$. Найдем предел корня n-ой степени из общего члена ряда: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 3\cdot\arcsin\left(\frac{4}{n+1}\right) = 3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n+1} = 0 < 1$. Значит, по радикальному признаку Коши, ряд сходится.

Интегральный признак Коши

<u>**Теорема**</u>: пусть дан положительный ряд: $\sum_1^\infty a_n$. Определим положительную, непрерывную и монотонно убывающую при $x \geq 1$ функцию $f(x)$: $\forall n \in \mathbb{N}$: $f(n) = a_n$. Т.е. данная функция обобщала бы нашу числовую последовательность до всех действительных чисел. А на натуральных числах была бы равна соответствующим членам ряда.

Тогда $\sum_1^\infty a_n$ сходится, если сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$. И расходится, если интеграл расходится.

P.S.: Несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся, если существует конечный предел определенного интеграла $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b f(x)dx = c$.

<u>*Применение*</u>: универсальное средство для определения сходимости рядов, общий член которых может быть представлен в виде легко интегрируемой функции (не забываем про различные методы интегрирования: заменой, по частям и проч.).

➢***Пример 2.10:*** пусть дан ряд $\sum_2^\infty \frac{1}{n\cdot\sqrt[5]{\ln n}}$. Определим соответствующую функцию $f(x) = \frac{1}{x\cdot\sqrt[5]{\ln x}}$. Отметим, что при $n \geq 2, n \in \mathbb{N}: f(n) = a_n$. Рассмотрим несобственный интеграл $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\sqrt[5]{\ln x}}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{1}{x\cdot\sqrt[5]{\ln x}}dx$. Отдельно вычислим первообразную для подынтегральной функции:

$$\int \frac{1}{x\cdot\sqrt[5]{\ln x}}dx = \left|\begin{matrix}\ln x = t\\ d(\ln x) = dt\\ \dfrac{dx}{x} = dt\end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{\sqrt[5]{t}} = \int t^{-\frac{1}{5}}dt = \frac{5}{4}\cdot t^{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}\cdot(\ln x)^{\frac{4}{5}}$$

Подставим в вычисление неопределенного интеграла: $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{5}{4}\cdot(\ln x)^{\frac{4}{5}}\Big|_2^b = \frac{5}{4}\cdot\lim\limits_{b\to+\infty}\left((\ln b)^{\frac{4}{5}} - (\ln 2)^{\frac{4}{5}}\right) = \infty$. Значит, неопределенный интеграл расходится. Тогда по интегральному признаку Коши расходится и исходный ряд.

➢***Пример 2.11:*** пусть дан ряд $\sum_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\mathrm{n}}}}{\sqrt{\mathrm{n}}}$. Определим соответствующую функцию $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\mathrm{x}}}}{\sqrt{\mathrm{x}}}$. Отметим, что при $\mathrm{n} \geq 1, \mathrm{n} \in \mathbb{N}: f(\mathrm{n}) = \mathrm{a_n}$. Рассмотрим несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\mathrm{x}}}}{\sqrt{\mathrm{x}}} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\mathrm{x}}}}{\sqrt{\mathrm{x}}} dx$. Отдельно вычислим первообразную для подынтегральной функции:

$$\int \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\mathrm{x}}}}{\sqrt{\mathrm{x}}} dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{\mathrm{x}} = \mathrm{t} \\ \mathrm{d}(\sqrt{\mathrm{x}}) = dt \\ \dfrac{dx}{2\sqrt{\mathrm{x}}} = dt \end{matrix} \right| = 2\int e^{-t} dt = -2e^{-t} = -2\mathrm{e}^{-\sqrt{\mathrm{x}}}$$

Подставим в вычисление неопределенного интеграла: $\lim_{b \to +\infty} -2\mathrm{e}^{-\sqrt{\mathrm{x}}}\Big|_1^{\mathrm{b}} = -2 \cdot \lim_{b \to +\infty} (\mathrm{e}^{-\sqrt{b}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{1}}) = -2 \cdot \lim_{b \to +\infty} (\frac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{b}}} - \frac{1}{\mathrm{e}}) = -1/\mathrm{e}$. Предел равен конечному числу, значит, несобственный интеграл сходится. Следовательно, по интегральному признаку Коши, сходится и исходный ряд.

3 Сходимость знакопеременных рядов

Опр: ряд называется знакопеременным, если среди его членов есть как положительные, так и отрицательные числа.

Опр: числовой ряд вида $\sum_1^\infty(-1)^n a_n$, $a_n > 0$ называется знакочередующимся и является частным случаем знакопеременного ряда.

Ряд Лейбница

Теорема Лейбница (признак сходимости з/ч ряда): пусть дан знакочередующийся ряд: $\sum_1^\infty(-1)^n a_n$. Если выполняются следующие условия:

1) Все члены ряда монотонно убывают по модулю: $a_n > a_{n+1}\ \forall n$
2) Общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

То ряд сходится.

Если же не выполнено хотя бы одно условие, то ряд расходится.

Опр: рядом Лейбница называется знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница.

Абсолютная и условная сходимость

Пусть дан знакопеременный ряд: $\sum_1^\infty a_n$. Ряд $\sum_1^\infty |a_n|$ – ряд, составленный из модулей его членов.

Теорема: если ряд из модулей сходится, то сходится и сам знакопеременный ряд. При этом он называется абсолютно сходящимся.

Опр: если сам знакопеременный ряд сходится, а ряд из его модулей расходится, то ряд называется условно сходящимся.

➢***Пример 3.1:*** пусть дан знакочередующийся ряд $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}$. Рассмотрим ряд из модулей: $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$. Известно, что он расходится. Тем не менее, сам знакочередующийся ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница: $\forall n\ \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Значит, данный знакочередующийся ряд сходится условно.

➢***Пример 3.2:*** пусть дан знакочередующийся ряд $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{2^n}$. Рассмотрим ряд из модулей: $\sum_1^\infty \frac{1}{2^n}$. Известно, что он сходится как ряд, составленный из членов убывающей геометрической прогрессии. Значит, исходный знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

<u>Примечание</u>: не стоит думать, что условная сходимость знакопеременного ряда – это некий «урезанный» вариант сходимости. Условная сходимость – это соответствие данного знакопеременного ряда условиям теоремы Лейбница. Т.е. критерий его сходимости как такового.

Абсолютная же сходимость – это некоторое стороннее средство, т.е. сведение задачи определения сходимости знакопеременного ряда к определению сходимости ряда из модулей (ряда, составленного из положительных членов). Удобство состоит в том, что у нас есть большое кол-во методов определения сходимости положительных рядов. Поэтому если нам «повезет», и ряд из модулей будет сходиться, то заведомо будет сходиться и сам знакопеременный ряд. (Подумайте, почему. Подсказка: модуль выражения всегда больше либо равен этому выражению)

4 Вычисление суммы ряда

Точная сумма некоторых рядов

Ранее уже было отмечено, что для рядов, составленных из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, известна их сумма:

$$\mathrm{S} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{bq}^{\mathrm{n}-1} = \frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{q}}$$

➢***Пример 4.1:*** дан ряд, составленный из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{\mathrm{n}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{\mathrm{n}-1}$. $\mathrm{b}=\frac{1}{5}, \mathrm{q}=\frac{1}{5}$. $\mathrm{S}=\frac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{q}}=\frac{1}{5}\Big/\frac{4}{5}=\frac{1}{4}$.

Точную сумму можно посчитать также и для некоторых других типов рядов. Например, ряды вида $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}+1)}$ (в знаменателе произведение нескольких скобок, содержащих n в первой степени) называются телескопическими, так как при разложении их членов методом неопределенных коэффициентов и последующем суммировании, некоторые слагаемые будут сокращаться, как бы «складываясь в телескоп».

➢***Пример 4.2:*** дан телескопический ряд $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)}$.

Разложим общий член методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{n}} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{n}+1} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{n}+2}$$

$$1 = \mathrm{A}(\mathrm{n}^2+3\mathrm{n}+2) + \mathrm{B}(\mathrm{n}^2+2\mathrm{n}) + \mathrm{C}(\mathrm{n}^2+\mathrm{n})$$

$$\mathrm{A}=\frac{1}{2}, \mathrm{B}=-1, \mathrm{C}=\frac{1}{2}, \text{ т.е.:}$$

$$\frac{1}{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{n}} - \frac{1}{\mathrm{n}+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{n}+2}$$

Тогда $\mathrm{S}_\mathrm{n} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{a}_\mathrm{i} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{n}} - \frac{1}{\mathrm{n}+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{n}+2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{n}+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{n}+2}$

$$\mathrm{S} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{n}+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{n}+2}\right) = \frac{1}{4}$$

Остаток ряда

<u>Опр</u>: если отбросить первые n членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, то получится ряд $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, который называется остатком данного ряда с номером n и обозначается:

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

<u>Теорема</u>: если $\sum_1^{\infty} a_n$– положительный ряд, то его остаток меньше некоторого числа, кратного первому отброшенному члену. Т.е.:

$$R_n < M \cdot a_{n+1}$$

<u>Теорема</u>: если $\sum_1^{\infty} (-1)^n a_n$– знакочередующийся ряд, то его остаток по модулю всегда меньше модуля первого отброшенного члена. А знак остатка равен знаку первого отброшенного члена, т.е.:

$$|R_n| < a_{n+1}\ ;\ \mathrm{sign}(R_n) = \mathrm{sign}(a_{n+1})$$

Приближенная сумма ряда

Если нахождение точной суммы ряда не всегда возможно, то приближенное значение можно посчитать всегда. В таком случае приближенным значением S будет некоторая частичная сумма $S_n \approx S$.

Тогда погрешность вычисления – это остаток ряда после n-ного члена:

$$R_n = S - S_n\ ;\ \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = 0$$

Пусть задана некоторая точность ε. Для вычисления суммы с точностью ε требуется, чтобы $|R_n| < \varepsilon$.

Рассмотрим нахождение суммы знакочередующегося ряда $\sum_1^{\infty} (-1)^n a_n$ с данной точностью. Известно, что $|R_n| < a_{n+1}$. Тогда найдем минимальное n такое, что $a_{n+1} < \varepsilon$. Найденное число n и есть то количество первых членов ряда, сумма которых будет равна приближенной сумме ряда.

➢***Пример 4.3:*** дан знакочередующийся ряд $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$. Требуется найти его сумму с точностью до $\varepsilon = 0{,}01$. Найдем минимальное n такое, что $|a_{n+1}| < \varepsilon$.

Учитывая наши данные, имеем: $\frac{1}{2^{n+1}} < 0{,}01 \Rightarrow n = 6$. Тогда $S \approx S_6 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = -0{,}328125 \approx -0{,}33$.

5 Функциональные ряды

Понятие функционального ряда

<u>Опр</u>: пусть задана некоторая бесконечная последовательность определенных на множестве X функций $\{\mathrm{u_n(x)}\}$: $\mathrm{u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots}$. Тогда сумма: $u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} u_n(x)$ называется функциональным рядом, а X – областью определения ряда.

При подстановке в ряд конкретного значения x из множества X функциональный ряд $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} u_n(x)$ становится числовым. В зависимости от значения x функциональный ряд может сходиться или нет.

Сумма функционального ряда $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ представляет собой функцию, определенную на области сходимости ряда.

<u>Примечание</u>: функциональный ряд можно воспринимать как обобщение некоторой серии одинаково устроенных числовых рядов. Например, функциональный ряд $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{x}}{5}\right)^{\mathrm{n}}$ является обобщением числовых рядов $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \left(\frac{-1}{5}\right)^{\mathrm{n}}, \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^{\mathrm{n}}, \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \left(\frac{7}{5}\right)^{\mathrm{n}}$ и других с подобной структурой. Мы видим, что некоторые из этих числовых рядов являются сходящимися, а некоторые – расходящимися. Т.е., подставляя в наш функциональный ряд конкретные значения x, получаем конкретный числовой ряд, для которого мы можем определить его сходимость. Тогда областью сходимости нашего функционального ряда будет множество тех значений (точек), которые обращают функциональный ряд в сходящийся числовой.

Равномерная сходимость

<u>Опр</u>: Функциональный ряд называется равномерно сходящимся на X, если этот ряд сходится при $\forall x \in$ X, и $\forall x \in$ X $\exists \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ (существует конечный предел частичных сумм функционального ряда).

<u>Теорема Вейерштрасса (достаточное условие равномерной сходимости)</u>: если члены функционального ряда $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} u_n(x)$ при всех x из X удовлетворяют неравенству: $|u_n(x)| \le \mathrm{a_n}$, где $\mathrm{a_n}$ – члены некоего сходящегося числового ряда $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathrm{a}_n$, то функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно на X.

<u>Опр</u>: Числовой ряд $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathrm{a}_n$, удовлетворяющий условию теоремы Вейерштрасса, называется мажорирующим числовым рядом (или числовой мажорантой) для функционального ряда $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} u_n(x)$.

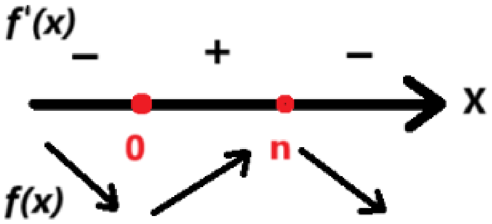
<u>Свойства</u> равномерно сходящихся рядов:

- Сумма S(x) равномерно сходящегося ряда непрерывна
- Интеграл суммы ряда равен сумме интегралов от членов ряда: $\int_a^b \mathrm{S(x)dx} = \sum_1^\infty \int_a^b \mathrm{u_n(x)}dx$
- Производная суммы ряда равна сумме ряда из производных: $\mathrm{S}'(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^\infty u_n'(x)$.

➤***Пример 5.1:*** дан функциональный ряд $\sum_1^\infty \frac{n\cdot x^3}{\mathrm{n}^6+x^6}$. Требуется доказать его равномерную сходимость на области $\mathrm{x} \in (-\infty; +\infty)$.

Для доказательства воспользуемся теоремой Вейерштрасса. Т.е. нам нужно найти такой сходящийся числовой ряд, элементы которого были бы больше соответствующих элементов данного ряда для любых x из указанной области. Пожалуй, наиболее надежным способом определения такого мажорирующего ряда будет нахождение максимального значения общего члена ряда. Т.е. определение такого конкретного x, при котором запись ряда будет больше записей для всех других x.

Для этого определим $\mathrm{f(x)} = \frac{n\cdot x^3}{\mathrm{n}^6+x^6}$ и найдем ее максимум. Для нахождения максимума сначала найдем нули производной: $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{3nx^2\cdot(n^6+x^6)-6x^5\cdot nx^3}{(n^6+x^6)^2} = \frac{3n^7x^2+3nx^8-6nx^8}{(n^6+x^6)^2} = \frac{3n^7x^2-3nx^8}{(n^6+x^6)^2}$ $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3n^7x^2 - 3nx^8 = 0 \Leftrightarrow 3nx^2(n^6 - x^6) = 0 \Rightarrow x = 0$ или $x = n$



При переходе через x=n производная функции меняет знак с «+» на «-», что является достаточным условием точки максимума. Значит, $\mathrm{f_{max}} = \mathrm{f(n)} = \frac{n\cdot \mathrm{n}^3}{\mathrm{n}^6+\mathrm{n}^6} = \frac{\mathrm{n}^4}{2\cdot\mathrm{n}^6} = \frac{1}{2\cdot\mathrm{n}^2}$. Т.е. для любого $\mathrm{x} \in (-\infty; +\infty)$ будет выполняться неравенство $\frac{n\cdot x^3}{\mathrm{n}^6+x^6} \le \frac{1}{2\cdot\mathrm{n}^2}$. Отметим, что числовой ряд $\sum_1^\infty \frac{1}{2\cdot\mathrm{n}^2}$ сходится (это доказывается тривиально). Тогда мы имеем всё необходимое для доказательства:

$\begin{cases} \forall x \in (-\infty; +\infty) \ \left|\frac{n \cdot x^3}{n^6 + x^6}\right| \le \frac{1}{2 \cdot n^2} \\ \sum_1^\infty \frac{1}{2 \cdot n^2} - \text{сходящийся ряд} \end{cases} \Rightarrow \sum_1^\infty \frac{1}{2 \cdot n^2}$ по теореме Вейерштрасса является мажорантой, и равномерная сходимость функционального ряда на $(-\infty; +\infty)$ доказана.

Степенные ряды и их сходимость

<u>Опр</u>: Степенным рядом называется функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$. В более общем виде: $\sum_{n=0}^\infty a_n (x - x_0)^n$.

<u>Теорема Абеля</u>: если степенной ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ сходится в некоторой точке $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при $\forall x$: $|x| < |x_0|$.

<u>Опр</u>: интервал (-R;R) называется интервалом сходимости степенного ряда, а число R – радиусом сходимости. Если степенной ряд сходится на всей числовой оси, то его радиус сходимости $R = \infty$, а если ряд сходится только в одной точке $x_0 = 0$, то R=0.

<u>Замечание</u>: интервал сходимости степенного ряда может быть найден с помощью признаков Даламбера или радикального Коши. Для установления сходимости или расходимости на концах интервала требуется дополнительное исследование.

<u>Теорема (о равномерной сходимости степенного ряда)</u>: степенной ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ сходится равномерно на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости.

➢***Пример 5.2:*** дан степенной ряд $\sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{(x+5)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$. Требуется найти его область и радиус сходимости.

Воспользуемся признаком Даламбера:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+5)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \Big/ \frac{(x+5)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \right| = |x+5|$$

Нужно определить такие x, при которых функциональный ряд будет сходиться. В данном случае, зная об условии признака Даламбера, соответствующие числовые ряды будут сходиться, если $D < 1$. Поэтому если мы составим неравенство $D = |x+5| < 1$, то получим интервал значений x, при которых функциональный ряд сходится. Это $|x+5| < 1 \ \Leftrightarrow x \in (-6; -4)$. Однако признак Коши не дает ответа о сходимости ряда при $D = 1$. Поэтому эти значения нужно будет уточнить особо: $|x+5| = 1 \Rightarrow \ x = -6$ и $x = -4$.

Уточним сходимость ряда в точке $x = -6$. В данной точке функциональный ряд принимает значение числового ряда: $\sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{(-6+5)^n}{\sqrt{n(n+1)}} = -\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. Данный ряд является расходящимся (нетрудно предельным признаком сравнения сравнить его с гармоническим рядом). Т.е. точку $x = -6$ в область сходимости включать не будем.

Теперь уточним сходимость ряда в точке $x = -4$. В данной точке функциональный ряд принимает значение числового ряда: $\sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{(-4+5)^n}{\sqrt{n(n+1)}} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}}$. Это знакочередующийся ряд. Несложно проверить, что он удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. А значит, он является условно сходящимся. Поэтому данную точку включаем в область сходимости.

В таком случае итоговая область сходимости данного степенного ряда имеет вид: $(-6; -4]$. Радиус сходимости – это половина длины области сходимости, т.е. $R = \frac{-4+6}{2} = 1$.

➢***Пример 5.3:*** дан степенной ряд $\sum_1^\infty \left(\frac{n}{n+3}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot (x-2)^n$. Требуется найти его область и радиус сходимости.

Воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{n}{n+3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (x-2) \right| = |x-2| \,.$$

Нужно определить такие x, при которых соответствующие числовые ряды будут сходиться. В данном случае, зная об условии радикального признака Коши, числовые ряды будут сходиться, если $K < 1$. Поэтому если мы составим неравенство $K = |x-2| < 1$, то получим интервал значений x, при которых функциональный ряд сходится. Это $|x-2| < 1 \iff x \in (1; 3)$. Однако признак Коши не дает ответа о сходимости ряда при $K = 1$. Поэтому эти значения нужно будет уточнить особо: $|x-2| = 1 \Longrightarrow x = 1$ и $x = 3$.

Уточним сходимость ряда в точке $x = 1$. В данной точке функциональный ряд принимает значение числового ряда: $\sum_1^\infty \left(\frac{n}{n+3}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot (1-2)^n = \sum_1^\infty (-1)^n \left(\frac{n}{n+3}\right)^{\frac{n}{2}}$. Получили знакочередующийся ряд. Предел модуля его общего члена: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n+3}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-3}\cdot\frac{-3}{n+3}\cdot\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-3}{n+3}\cdot\frac{n}{2}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-3n}{2n+6}} = e^{-\frac{3}{2}} \neq 0.$ Т.е. не выполняется необходимое условие сходимости, а значит, данный ряд расходится и точку $x = 1$ в область сходимости включать не будем.

Теперь уточним сходимость ряда в точке $x = 3$. В данной точке функциональный ряд принимает значение числового ряда: $\sum_1^\infty \left(\frac{n}{n+3}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot (3-2)^n = \sum_1^\infty \left(\frac{n}{n+3}\right)^{\frac{n}{2}}$. Предел его общего члена мы уже считали выше, он не равен нулю, а значит, ряд расходится и данную точку в область брать также не будем.

В таком случае итоговая область сходимости данного степенного ряда имеет вид: $(1;3)$. Радиус сходимости – это половина длины области сходимости, т.е. $R = \frac{3-1}{2} = 1$.

Примечание: еще раз уточним суть нахождения области сходимости функционального степенного ряда. Функциональный ряд при подстановке в него конкретных значений x становится числовым. Поэтому для полученного числового ряда мы можем определить его сходимость. Нас интересуют только полученные сходящиеся числовые ряды, т.е. те точки, в которых данный функциональный ряд обращается в сходящийся числовой. Для степенных рядов отдельно известно (см. т. Абеля), что их область сходимости непрерывна, т.е. область представляет собой интервал, полуинтервал или отрезок. В таком случае достаточно будет только определить граничные точки этой области. Этого можно добиться, получив ограничение на x, т.е. получив некоторое неравенство, содержащее x. Раз мы работаем со степенным функциональным рядом, то в записи его общего члена обязательно есть множитель с x, возведенный в степень, зависящую от n. Например, множитель $(x+1)^{2n}$. Теперь, чтобы получить неравенство для x, можно использовать те признаки сходимости, которые строятся на неравенствах. Для положительных числовых рядов это были: признак Даламбера и радикальный признак Коши.

Они характеризуются числами D и K соответственно. (Ряд признавался сходящимся в случае $D < 1$ или $K < 1$). Получается, применяя данные признаки, получим выражения D или K, которые в своей записи содержат x. Полагая $D < 1$ или $K < 1$ мы намеренно добиваемся того, чтобы множество значений x, заданных неравенством, соответствовали сходящимся числовым рядам. Т.е. мы делаем обратную задачу. Не определяем сходимость числового ряда, а ставим такие условия, чтобы получающиеся числовые ряды были сходящимися. Стоит также отметить, что при $D = 1$ или $K = 1$ признаки сходимости не дают ответа о сходимости ряда. В таком случае в данных точках (они будут совпадать с границами полученного ранее интервала сходимости) сходимость нужно уточнять отдельно. Т.е. подставлять граничные x в исходный функциональный ряд и методами, изученными ранее, определять сходимость функционального ряда в этих точках.

6 Ряд Тейлора

<u>Опр</u>: если функция f(x) в некоторой окрестности точки x_0 имеет производные всех порядков (дифференцируема бесконечное кол-во раз), то на этой окрестности ее можно представить в виде степенного ряда Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Уравнение называют разложением функции f(x) в ряд Тейлора в окрестности точки x_0.

При $x_0 = 0$ ряд Тейлора называют рядом Маклорена:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$$

<u>Примечание</u>: ряд Тейлора, по сути, позволяет представить некоторые функции в виде бесконечного полинома (многочлена). Т.е. на некоторой области трансцендентные функции (экспонента, логарифм, тригонометрические) могут быть элементарно представлены в виде многочлена.

Разложения элементарных функций в ряд Маклорена

Разложение	Область сходимости ряда
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$ln\,(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$	$x \in (-1; 1]$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$(1 + x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!}\, x^n$	$x \in (-1; 1)$
$\frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	$x \in (-1; 1)$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad x\in(-1;1)$$

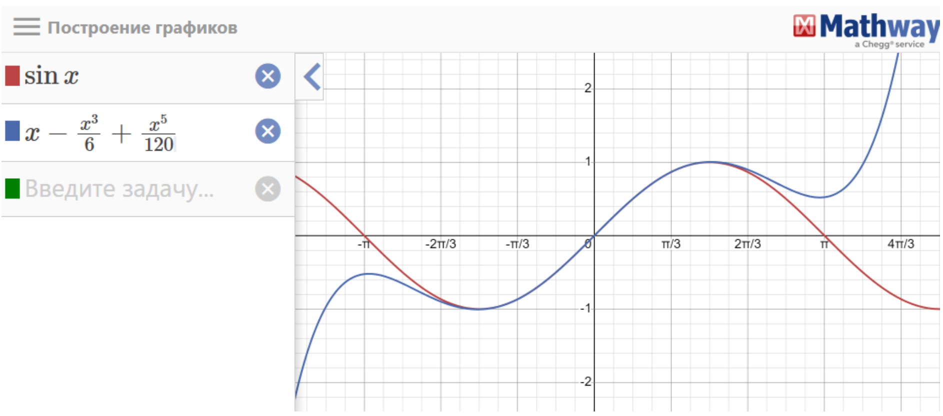
$$arctgx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad x\in[-1;1]$$

$$shx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x\in(-\infty;+\infty)$$

$$chx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x\in(-\infty;+\infty)$$

Упражнение: для лучшего понимания сути ряда Тейлора предлагаем следующее геометрическое задание. Откройте графический онлайн-калькулятор. Например, *Mathway*. Для начала постройте график какой-то раскладываемой функции из вышеизложенной таблицы. Например, sinx. Затем запишите себе разложение синуса в ряд Маклорена вплоть по n=3. Такое разложение имеет вид: $\sum_{n=0}^{3}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}$.

Начните постепенно строить график данного разложения. Каждый раз прибавляйте к функции по одному слагаемому из разложения и смотрите, как меняется график приближающей функции. Вы убедитесь в том, что она начинает огибать исходную функцию. Теперь представьте, что мы сделаем разложение не до n=3, а до бесконечности. Тогда данные графики на области определения совпадут абсолютно.



Для закрепления проделайте подобное разложение, например, для экспоненты.

Примечание: разложение элементарных функций в ряд Маклорена используется, например, для определения эквивалентности бесконечно малых функций (см. приложение А).

Типовые задачи, связанные с рядом Тейлора

➢***Пример 6.1:*** дана функция $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+2x-3}$. Требуется разложить ее в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -2$ и определить область сходимости полученного ряда.

Так как мы знаем только разложения элементарных функций в ряд Маклорена, нам нужно преобразовать нашу переменную таким образом, чтобы разложение происходило в окрестности нуля новой переменной. Для этого делаем универсальную в таком случае замену смещением: $t = x - x_0 = x + 2$. Выражаем $x = t - 2$ и делаем подстановку в исходную функцию так, чтобы она стала зависеть только от t: $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+2x-3} = \frac{3(t-2)+2}{(t-2)^2+2(t-2)-3} = \frac{3t-4}{t^2-2t-3}$

Теперь мы должны преобразовать или разбить функцию таким образом, чтобы у нас получились элементарные функции, разложения которых мы знаем. В данной задаче дана т.н. рациональная функция (отношение двух полиномов), поэтому можем разбить ее на сумму двух дробей с константными числителями методом неопределенных коэффициентов. Разложим знаменатель дроби: $t^2 - 2t - 3 = (t+1)(t-3)$ (сделать это можно путем нахождения корней соответствующего квадратного уравнения). Метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{3t-4}{(t+1)(t-3)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-3}$$

$$3t - 4 = A(t-3) + B(t+1)$$

$$A = \frac{7}{4}, B = \frac{5}{4}, \text{ т.е.:}$$

$$\frac{3t-4}{(t+1)(t-3)} = \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{t+1} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{t-3}$$

Видим, что в получившемся разбиении вырисовывается разложение $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$. Первое слагаемое уже имеет удовлетворительную форму. А второе слагаемое можно привести к подобной форме путем вычленения коэффициента: $\frac{1}{t-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}t}$.

<u>Примечание</u>: здесь важно уточнить, что формулы разложения в ряд Маклорена можно применять только в случае соответствия нашего выражения функции из разложения. Т.е. если в функции в качестве слагаемого указано число 1, то должно быть именно оно. В качестве же x из функции должна использоваться наша переменная t (в окрестности нуля которой мы производим разложение), которой позволительно быть возведенной в степень и помноженной на любую

конечную константу. Т.е. заместо x в нашей функции могут быть выражения $-\frac{1}{3}t$; $\sqrt{2}\cdot t^2$; t^{-1} , но никак не $t+1; 7-t^2$;

Возвращаясь к нашей функции, запишем ее текущий вид: $\mathrm{f}=\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{1+t}+\frac{5}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{3}t}=\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{1+t}-\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}t}$. Для выражений $\frac{1}{1+t}$; $\frac{1}{1-\frac{1}{3}t}$ уже можем записать разложения:

$$\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n;$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{1}{3}t\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}$$

Тогда $\mathrm{f}=\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{1+t}-\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}t}=\frac{7}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n-\frac{5}{12}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}=$

$=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\left(\frac{7}{4}(-1)^n-\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{3^n}\right).$

В примере также требуется определить область сходимости полученного ряда. Для этого снова нужно обратиться к таблице разложений и посмотреть, какая область сходимости у данного разложения. В нашем случае, у разложения $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ область сходимости: $(-1;1)$. Поэтому те самые выражения с t, которые мы подставляем в данное разложение, должны также удовлетворять этой области. Иначе равенство функции ряду достигаться не будет. Поэтому наложим ограничения на t столько раз, сколько мы использовали разложения:

$$t\in(-1;1);$$

$$-\frac{1}{3}\cdot t\in(-1;1)\Leftrightarrow t\in(-3;3)$$

Учитывая оба эти ограничения (выбираем самые строгие ограничения на переменную), получаем: $t\in(-1;1)$.

Теперь осталось только вернуться к исходной переменной x. Заменяем все t на $x+2$ и получаем:

$$\mathrm{f}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\left(\frac{7}{4}(-1)^n-\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{3^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(x+2)^n\left(\frac{7}{4}(-1)^n-\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{3^n}\right)$$

$$t\in(-1;1)\Leftrightarrow x+2\in(-1;1)\Leftrightarrow x\in(-3;-1)$$

Итак, в результате получили, что исходная функция в окрестности точки $x_0=-2$ раскладывается в ряд Тейлора следующим образом:

$\sum_{n=0}^{\infty}(x+2)^n\left(\frac{7}{4}(-1)^n-\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{3^n}\right)$ и имеет область сходимости $(-3;-1)$.

➢***Пример 6.2:*** дана функция $f(x)=\ln(x^2+5x+6)$. Требуется разложить ее в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=0$ и определить область сходимости полученного ряда.

В данном задании ввиду того, что $x_0=0$, замену переменной делать не обязательно.

Разложим квадратный многочлен в аргументе логарифма на множители: $\ln(x^2+5x+6)=\ln((x+2)(x+3))$. По свойству логарифмов разобьем логарифм произведения на сумму логарифмов: $\ln((x+2)(x+3))=\ln(x+2)+\ln(x+3)$. Теперь можем преобразовывать логарифмы к удобной для разложения форме. Для этого, согласно таблице разложений, нужно, чтобы в аргументе логарифма было слагаемое 1. Добьемся этого выносом свободного коэффициента за скобки: $\ln(x+2)+\ln(x+3)=\ln\left(2\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right)+\ln\left(3\left(\frac{1}{3}x+1\right)\right)$. Избавимся от лишних коэффициентов также свойством логарифмов: $\ln\left(2\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right)+\ln\left(3\left(\frac{1}{3}x+1\right)\right)=\ln 2+\ln\left(\frac{1}{2}x+1\right)+\ln 3+\ln\left(\frac{1}{3}x+1\right)=\ln 6+\ln\left(\frac{1}{2}x+1\right)+\ln\left(\frac{1}{3}x+1\right)$. Разложим логарифмы в ряд Маклорена по формуле: $ln\,(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

$$\ln\left(\frac{1}{2}x+1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x)^n}{n\cdot 2^n};$$

$$\ln\left(\frac{1}{3}x+1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{3}x\right)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x)^n}{n\cdot 3^n}$$

Получаем, что исходная функция имеет вид:

$$f(x)=\ln 6+\ln\left(\frac{1}{2}x+1\right)+\ln\left(\frac{1}{3}x+1\right)=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x)^n}{n\cdot 2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x)^n}{n\cdot 3^n}$$

$$=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x)^n}{n}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x)^n}{n}\cdot\frac{2^n+3^n}{6^n}$$

А область сходимости имеет вид: $x\in(-2;2]$.

7 Приложения теории рядов

Нахождение суммы числового ряда

Пусть задан некоторый числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, который может быть представлен как функциональный ряд в конкретной точке: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Тогда если данный функциональный ряд представляет собой разложение в ряд Тейлора, то мы сможем свернуть этот ряд до элементарной функции, которую он раскладывает, а затем найти значение функции в точке x_0.

➢***Пример 7.1:*** найти сумму S числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Нам известно следующее разложение в ряд Маклорена: $ln\,(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$. В точке x=1 это разложение принимает форму числового ряда, указанного в задании, а значит:

$$ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = S$$

➢***Пример 7.2:*** найти сумму S числового ряда: $\frac{3^2}{2!} - \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} - \frac{3^5}{5!} + \frac{3^6}{6!} - \cdots$

Для начала запишем данный ряд в общем виде: $\frac{3^2}{2!} - \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} - \frac{3^5}{5!} + \frac{3^6}{6!} - \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$

Вид данного ряда явно напоминает разложение экспоненты $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Поэтому можем воспользоваться ее разложением для нахождения суммы нашего числового ряда. Для этого подставим в разложение экспоненты точку x=-3:

$$e^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!} = 1 - 3 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$$

Тогда сумма исходного ряда $S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!} = \frac{1}{e^3} + 2$.

Вычисление определенных интегралов

Пусть требуется посчитать интеграл «неберущейся» функции. Тогда мы можем записать этот интеграл как сумму интегралов от членов ряда Тейлора соответствующего разложения.

$$\int_a^b f(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \sum_0^{\infty} \int_a^b \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k dx$$

➢***Пример 7.3:*** найти определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}\mathrm{dx}$

Нам известно следующее разложение в ряд Маклорена: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Заменяя x на $-\mathrm{x}^2$ имеем: $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{x}^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \mathrm{x}^{2\mathrm{n}}}{n!}$. Тогда $\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}\mathrm{dx} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \mathrm{x}^{2\mathrm{n}}}{n!}\right) \mathrm{dx} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \mathrm{x}^{2\mathrm{n}}}{n!}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{n}}}{n!}$

Получили числовой ряд, сумму которого можем найти с определенной точностью.

Вычисление значения производной в точке

Пусть задана $f(\mathrm{x})$ и требуется найти производную n-ного порядка $\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(\mathrm{x}_0)$ при конкретном n в точке x_0. Тогда можем воспользоваться разложением $f(\mathrm{x})$ в ряд Тейлора: $f(\mathrm{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$. Видим, что в этом ряду встречалось слагаемое, содержащее искомую производную $\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(\mathrm{x}_0)$. Это слагаемое $c_n(x - x_0)^n$. Числовой коэффициент Тейлора перед степенью равен $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, откуда $\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(\mathrm{x}_0) = c_n \cdot n!$

➢***Пример 7.4:*** найти $\mathrm{f}^{(6)}(0)$, если $\mathrm{f}(x) = \frac{sinx}{x}$

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{\mathrm{x}} \cdot sinx = \frac{1}{\mathrm{x}} \cdot \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{n}} \mathrm{x}^{2\mathrm{n}+1}}{(2\mathrm{n}+1)!} = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{n}} \mathrm{x}^{2\mathrm{n}}}{(2\mathrm{n}+1)!} = 1 - \frac{\mathrm{x}^2}{3!} + \frac{\mathrm{x}^4}{5!} - \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{6}}}{\mathbf{7}!} + \cdots$$

$$\mathrm{f}^{(6)}(0) = -\frac{1}{7!} \cdot 6! = -\frac{1}{7}$$

8 Ряд Фурье

Тригонометрический ряд Фурье позволяет представить периодическую функцию в виде тригонометрического ряда.

<u>Опр</u>: пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, периодична с периодом $T = 2l$ и непрерывна (или кусочно-непрерывна) на отрезке $[-l; l]$.

Тогда тригонометрическим рядом Фурье данной функции называется:

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}\right)$$

Где a_0, a_n, b_n – коэффициенты Фурье данной функции, которые высчитываются следующим образом:

$$a_0 = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos\frac{\pi n x}{l} dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} dx$$

Частные случаи разложения

В случае, если раскладываемая функция на отрезке $[-l; l]$ определена четным либо нечетным образом (напомним, что функция может быть четной, нечетной либо общего вида), вычисление коэффициентов может значительно упроститься.

Рассмотрим случай четного определения. Это равносильно тому, что $\forall x \in [-l; l]$ $f(-x) = f(x)$. Тогда формулы для коэффициентов имеют следующий вид:

$$a_0 = \frac{2}{l} \cdot \int_{0}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{l} \cdot \int_{0}^{l} f(x) \cdot \cos\frac{\pi n x}{l} dx$$

$$b_n = 0$$

В случае же нечетного определения для функции выполняется следующее условие: $\forall x \in [-l; l]$ $f(-x) = -f(x)$. А коэффициенты Фурье упрощаются до:

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} dx$$

Если же функция ни четная, ни нечетная (т.е. она общего вида), то упрощений для высчитывания коэффициентов не будет.

Сумма тригонометрического ряда

Теорема Дирихле: пусть функция $f(x)$ определена и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-l; l]$. Тогда тригонометрический ряд Фурье данной функции сходится в каждой точке $[-l; l]$, и сумма $S(x)$ этого ряда удовлетворяет условиям:

1) $S(x) = f(x)\ \forall x \in (-l; l)$

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}\big(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\big)$ $\forall$ точек разрыва функции

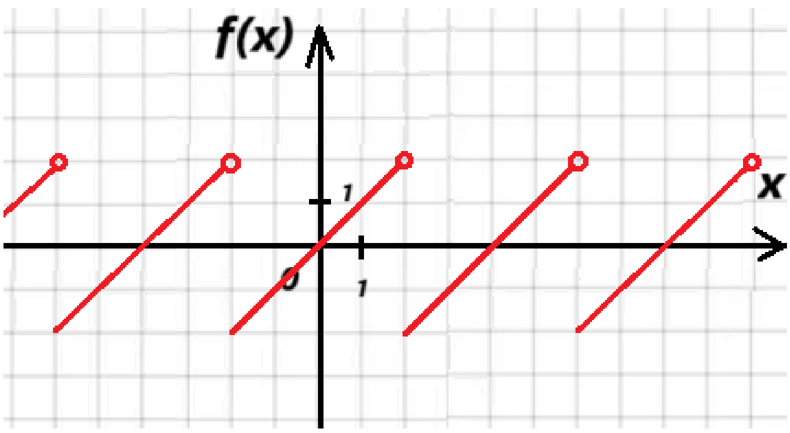
3) $S(-l) = S(l) = \frac{1}{2}\big(f(-l + 0) + f(l - 0)\big)$,

Где обозначения $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ обозначают $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, т.е. левосторонний и правосторонний предел функции в точке x_0 соответственно.

Типовые задачи, связанные с рядом Фурье

➢***Пример 8.1:*** разложить $f(x) = 2x$ в ряд Фурье с периодом $T = 4$.

Начнем с построения графика исходной функции.



Видим, что данная функция на элементарном интервале определена нечетным образом. Значит, коэффициенты Фурье значительно упростятся. В данной задаче $l = \frac{T}{2} = 2$.

$$a_0 = 0\,;$$

$$a_n = 0\,;$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}dx = 2\int_0^2 x\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}dx = \left|\begin{matrix} u = x, dv = \sin\frac{\pi n x}{2}dx \\ du = dx, v = \frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\end{matrix}\right|$$

$$= 2\left(\frac{-2x}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^2 + \frac{2}{\pi n}\int_0^2 \cos\frac{\pi n x}{2}dx\right) = 2\left(\frac{-2x}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{2}\right)\Big|_0^2$$

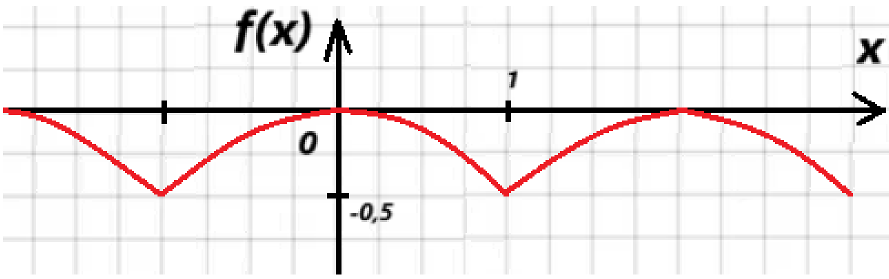
$$= -8\cdot\frac{(-1)^n}{\pi n}\,;$$

Запишем получившееся разложение в ряд Фурье:

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos\frac{\pi n x}{2} + b_n\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}\right) = -8\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi n}\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}$$

➢***Пример 8.2:*** разложить $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ в ряд Фурье с периодом $T = 2$.

Построим график исходной функции.



Видим, что данная функция определена четным образом. Поэтому коэффициенты будут иметь следующий вид:

$$a_0 = \frac{2}{l}\cdot\int_0^l f(x)dx = 2\int_0^1 -\frac{1}{2}x^2 dx = -\frac{1}{3}\,;$$

$$a_n = \frac{2}{l}\cdot\int_0^l f(x)\cdot\cos\frac{\pi n x}{l}dx = -\int_0^1 x^2\cdot\cos\pi n x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x^2, \\ du = 2xdx\,, \\ dv = \cos\pi n x\,dx\,, \\ v = \frac{1}{\pi n}\sin\pi n x\end{matrix}\right| =$$

$$= -\left(\frac{x^2}{\pi n}\sin\pi n x\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi n}\int_0^1 x\cdot\sin\pi n x\,dx\right) = \left|\begin{matrix} u = x, \\ du = dx\,, \\ dv = \sin\pi n x\,dx\,, \\ v = \frac{-1}{\pi n}\cos\pi n x\end{matrix}\right| =$$

$$= -\left(\frac{x^2}{\pi n}\sin\pi nx\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi n}\left(-\frac{x}{\pi n}\cos\pi nx\Big|_0^1 + \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \cos\pi nx\,dx\right)\right) =$$

$$= -\left(\frac{x^2}{\pi n}\sin\pi nx - \frac{2}{\pi n}\left(-\frac{x}{\pi n}\cos\pi nx + \frac{1}{\pi^2 n^2}\sin\pi nx\right)\right)\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{2}{\pi^2 n^2}\cdot\cos\pi n = -\frac{2\cdot(-1)^n}{\pi^2 n^2};$$

$$b_n = 0;$$

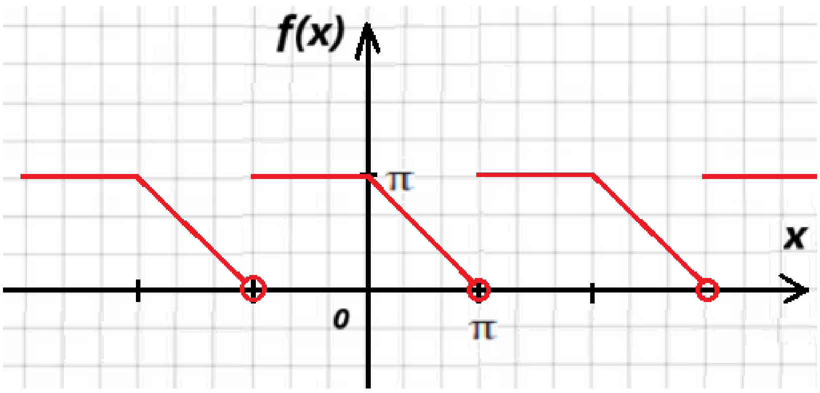
Запишем получившееся разложение в ряд Фурье:

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\pi nx + b_n\sin\pi nx) = -\frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\cdot(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cdot \cos\pi nx\right)$$

➢***Пример 8.3:*** разложить $f(x)$ в ряд Фурье с периодом $T = 2\pi$. Нарисовать график суммы ряда. $f(x)$ задана на $[-\pi;\pi)$:

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \pi, & -\pi \le x < 0 \\ \pi - x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

Начнем с того, что построим график периодической функции, соответствующей исходной функции.



Наглядно видим, что данная функция на $[-\pi;\pi)$ ни четная, ни нечетная, поэтому придется искать все коэффициенты. В нашем случае $l = \pi$.

$$a_0 = \frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\pi dx + \int_0^{\pi}(\pi - x)dx\right) = \frac{3\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\pi\cos nx\,dx + \int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx\right) =$$

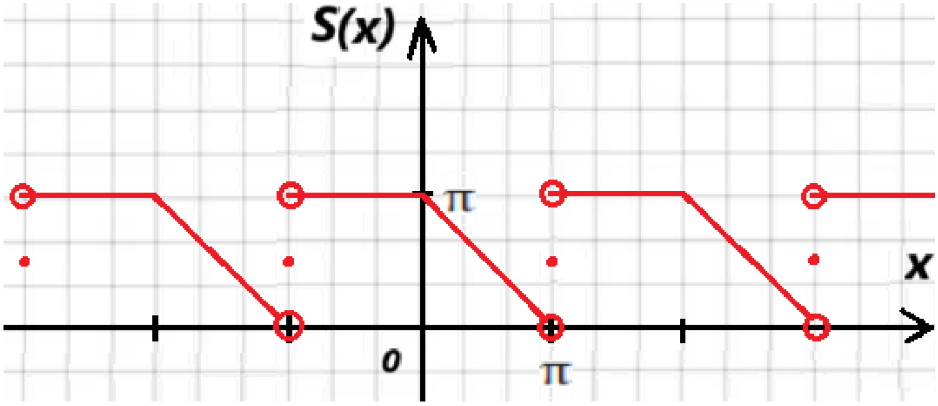
$$= -\frac{1}{\pi n^2}(\cos nx - 1) = -\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1);$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\pi\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx\right) = \frac{(-1)^n}{n};$$

Запишем получившееся разложение в ряд Фурье:

$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1) \cdot \cos nx + \frac{(-1)^n}{n} \cdot \sin nx\right)$

Теперь воспользуемся теоремой Дирихле и определим функцию суммы ряда: $\forall x \in (-\pi;\pi)$: $S(x) = f(x)$; $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}(\pi + 0) = \frac{\pi}{2}$. В таком случае график суммы имеет вид:



Равенство Парсеваля

В бесконечномерном пространстве функций, кусочно-дифференцируемых на $[-l;l]$, существует свой аналог теоремы Пифагора.

<u>Теорема (равенство Парсеваля)</u>: пусть a_0, a_n, b_n – коэффициенты Фурье некоторой функции $f(x)$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^{l} f^2(x)dx$$

Подобно приложениям ряда Тейлора, данное равенство также может использоваться для вычисления суммы числового ряда.

➢***Пример 8.4:*** пусть дана $f(x) = 3x - 3$ и составлено ее разложение в ряд Фурье с периодом $T = 2$: $f(x) \to \sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cdot \sin \pi n x) = -\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin \pi n x}{n}$. Требуется на основе данной информации и при использовании равенства Парсеваля определить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Запишем равенство Парсеваля для данной функции (но учтем, что функция разложена нечетным образом):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{36}{\pi^2 n^2} = 2\int_{0}^{1}(3x - 3)^2 dx$$

$$\frac{36}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 18\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx$$

$$\frac{36}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 18\left(\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_0^1$$

$$\frac{36}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 6$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Путем несложных преобразований получили сумму искомого ряда.

Приложение А. Эквивалентность бесконечно малых функций

При $x \to 0$ справедливы следующие эквивалентности:

$\sin x \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$
$tg\, x \sim x$	$\log_a x \sim \dfrac{x}{\ln a}$
$\arcsin x \sim x$	$a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$
$\mathrm{arctg}\, x \sim x$	$e^x - 1 \sim x$
$1 - \cos x \sim {x^2}/{2}$	$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$