Теоретическая справка на тему «Ряд Тейлора»

Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производные всех порядков (дифференцируема бесконечное кол-во раз), то на этой окрестности ее можно представить в виде ряда Тейлора.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \qquad (1)$$

Уравнение (1) называют разложением функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Уточним обозначения в формуле:

- $\sum_{k=0}^{\infty}$ [чит. “*Сумма по k от нуля до бесконечности*”] – обозначение для ряда или, проще говоря, бесконечная сумма выражений, в которые вместо k подставлены соответствующие числовые значения. Например: $\sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot k = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots$
- $f^{(k)}(x)$ [чит. “*Производная k-ого порядка функции f”]* – k-я производная функции $f(x)$
- $k!$ [чит. “*k факториáл*”] – факториал целого неотрицательного числа k. По определению, $k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ – произведение всех натуральных чисел по k включительно. При этом полагают $0! = 1$

Стоит также отметить, что множитель $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ называют коэффициентом Тейлора. При разложении функции в окрестности конкретной точки x_0 этот коэффициент становится конкретным числом для каждого слагаемого суммы.

Иначе говоря, в некоторой окрестности т. x_0 функция $f(x)$, благодаря разложению в ряд Тейлора, может быть представлена бесконечным полиномом (многочленом).

Во многих практических задачах не требуется абсолютная точность преобразования. Поэтому в них используется вычисление приближенного значения. Так и с разложением в ряд Тейлора. Для получения приближенного значения функции достаточно найти сумму нескольких первых слагаемых из ее разложения в ряд Тейлора.

Домашнее задание к 7.11.24

№1

1.1) Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 с точностью до 8-го слагаемого (т.е. в разложении получить многочлен не выше 7-ой степени).

1.2) Построить в онлайн графическом калькуляторе (например, здесь) график исходной функции $f(x)$ и график получившегося приближенного разложения. Проанализировать результат:

а) $f(x) = cosx,\ x_0 = 0$

б) $f(x) = \ln(x+1)\,,\ x_0 = 0$

№2

Вычислить значение производной функции $f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{5},\ x_0 = 1$

б) $f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x},\ x_0 = e^{\frac{\pi}{4}}$

в) $f(x) = 2^{arctgx},\ x_0 = 1$

г) $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}} \cdot tgx,\ x_0 = 0$

Ответы к заданиям[1]

№1

а) Должно получиться разложение: $cosx \cong 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$

б) Должно получиться разложение:

$$\ln(x+1) \cong x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7}$$

№2

а) $\frac{1}{15}$

б) 0

в) $2^{\frac{\pi-4}{4}} \cdot \ln 2$

г) 1

[1] Задания в файле составлены студентом-преподавателем Мусатовым И.А.