Теоретическая справка на тему «Формула Лейбница»

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ n раз дифференцируемы в окрестности некоторой точки x_0. Тогда в окрестности этой же точки n-ая производная произведения функций $f(x) \cdot g(x)$ определяется как конечная сумма:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

Где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n по k. Также может быть известно как биномиальный коэффициент.

Указание к нахождению частных производных

Пусть задана некоторая функция многих переменных. Например, $f(x, y, z)$. Тогда для нахождения ее частной производной по какой-либо переменной (по x, по y или по z) нужно воспринимать данную переменную как переменную в обычном смысле, а остальные переменные как константы. Тогда задача нахождения частной производной функции многих переменных сведется к нахождению производной функции одной переменной. Для лучшего понимания рассмотрим примеры:

<u>Пример 1</u>: Пусть дана $f(x, y) = x + xy + y^2$. Требуется найти ее частные производные по x и по y. Т.е. $\frac{\partial f}{\partial x}$ –? ; $\frac{\partial f}{\partial y}$ –?

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x + xy + y^2) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial (xy)}{\partial x} + \frac{\partial (y^2)}{\partial x} = 1 + y + 0 = 1 + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x + xy + y^2) = \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial (xy)}{\partial y} + \frac{\partial (y^2)}{\partial y} = 0 + x + 2y = x + 2y$$

<u>Пример 2</u>: Дана $f(x, y, z) = xz^2 + y^2 - 5x^2yz$. Требуется найти значение ее частной производной второго порядка по переменным z и x в точке $M_0(2; 1; 3)$. Т.е. $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right|_{M_0}$ –?

Для начала найдем $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$ в общем виде:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}(xz^2 + y^2 - 5x^2yz)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(xz^2)}{\partial z} + \frac{\partial(y^2)}{\partial z} - \frac{\partial(5x^2yz)}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2xz + 0 - 5x^2y) = \frac{\partial(2xz)}{\partial x} - \frac{\partial(5x^2y)}{\partial x} = 2z - 10xy$$

Теперь найдем значение в конкретной точке $M_0(1; 9; 0)$:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right|_{M_0} = (2z - 10xy)|_{M_0(2;1;3)} = (2 \cdot 3 - 10 \cdot 2 \cdot 1) = -14$$

Домашнее задание к 21.11.24

№1

По формуле Лейбница найти аналитическое выражение производной n-ного порядка произведения функций f и g, а затем найти значение этого выражения в точке x_0.

Т.е.: $(f \cdot g)^{(n)} - ?$; $(f \cdot g)^{(n)}\Big|_{x_0} - ?$

а) $f(x) = sinx,\ g(x) = \frac{1}{x},\ n = 3,\ x_0 = \pi$

б) $f(x) = 3x^2,\ g(x) = \ln(x),\ n = 2,\ x_0 = e^2$

№2

Вычислить значение указанной частной производной функции многих переменных f в точке M_0:

а) $f(x, y) = x^2 y + x \cdot 2^{arctg(y)};\ M_0(0; 1);\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Big|_{M_0} - ?$

б) $f(x, y, z) = xy + xz + yz + x^2 yz;\ M_0(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2);\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\Big|_{M_0} - ?$

в) $f(x, y, z, w) = 2^{\ln(x \cdot w) - \sin(y)} + y\sqrt[5]{z};\ M_0\left(\frac{1}{5}; \pi; 32; 5e^3\right);\ \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0} - ?$

Ответы к заданиям[1]

№1

Выражение	Значение
а) $(f\cdot g)^{(n)} = \left(\frac{3}{x^2} - \frac{6}{x^4}\right)sinx + \left(-\frac{1}{x} + \frac{6}{x^3}\right)cosx$	$(f\cdot g)^{(n)}\big\|_{x_0=\pi} = \frac{\pi^2-6}{\pi^3}$
б) $(f\cdot g)^{(n)} = 6\cdot lnx + 9$	$(f\cdot g)^{(n)}\big\|_{x_0=e^2} = 21$

№2

Выражение	Значение
а) $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 2x + \frac{2^{arctg(y)}\cdot ln2}{1+y^2}$	$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right\|_{M_0} = 2^{\frac{\pi-4}{4}}\cdot ln2$
б) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = 1 + 2xy$	$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right\|_{M_0} = 5$
в) $\frac{\partial f}{\partial y} = -2^{\ln(xw)-siny}\cdot cosy + \sqrt[5]{z}$	$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right\|_{M_0} = 10$

[1] Задания в файле составлены студентом-преподавателем Мусатовым И.А.