Теоретическая справка на тему «Двойной интеграл. Правильность области»

Область D определения подынтегральной функции называется «правильной» в направлении оси Оу, если она однозначно описывается уравнениями ее нижней и верхней границы: $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Т.е., двигаясь вдоль оси Оу от минус бесконечности, мы всегда попадаем в данную область через линию, заданную одним и тем же уравнением, и выходим из области также через линию, описываемую одним и тем же уравнением.

Если область D правильная в направлении оси Оу, то двойной интеграл может быть записан как повторный в следующем виде:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

И тогда он может быть вычислен последовательно: сначала считается внутренний определенный интеграл, причем переменной считается только у, а другие переменные – константами. Результатом вычисления этого внутреннего интеграла будет некая функция, зависящая от х. Затем нетрудно вычислить внешний интеграл, подынтегральной функцией которого будет эта «некая» функция от х. Результатом вычисления внешнего интеграла будет число.

Аналогичным образом определяется «правильность» области в направлении оси Ох и соответствующий повторный интеграл.

Если же область D в направлении данной оси не является правильной, то ее нужно разбить на правильные подобласти, представив при этом двойной интеграл по области как сумму двойных интегралов по этим подобластям.

Рассмотрим пример. Пусть имеется двойной интеграл от функции $f(x,y) = x + y$, определенной на области D.

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy\,, \qquad \text{область } D = \begin{cases} y = 3\sqrt{x} \\ y = 4 - x \\ y = x \end{cases}$$

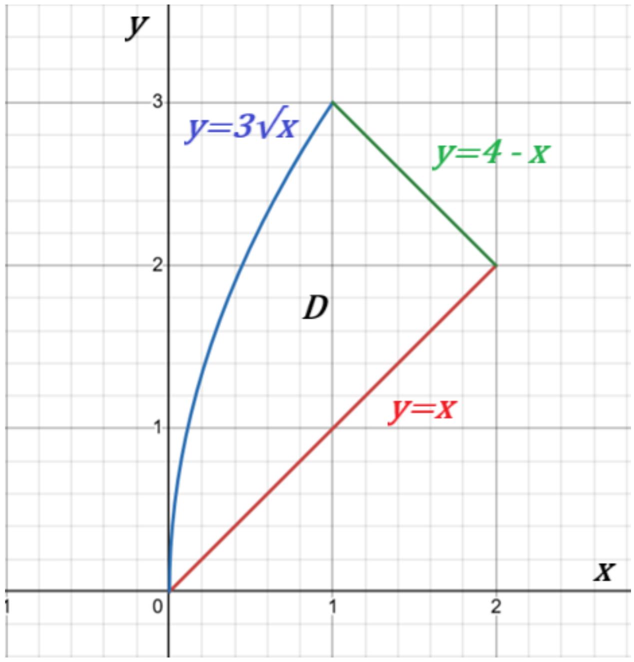

Рисунок 1.1 – График области D

Допустим, требуется составить повторный интеграл, делая обход в направлении оси Оу.

Видим, что область D не является правильной в направлении Оу. Т.к. нет однозначной функции, которая описывала бы верхнюю границу области. В таком случае разобьем область D на правильные подобласти D_1 и D_2 так, что $D_1 \cup D_2 = D$, а $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

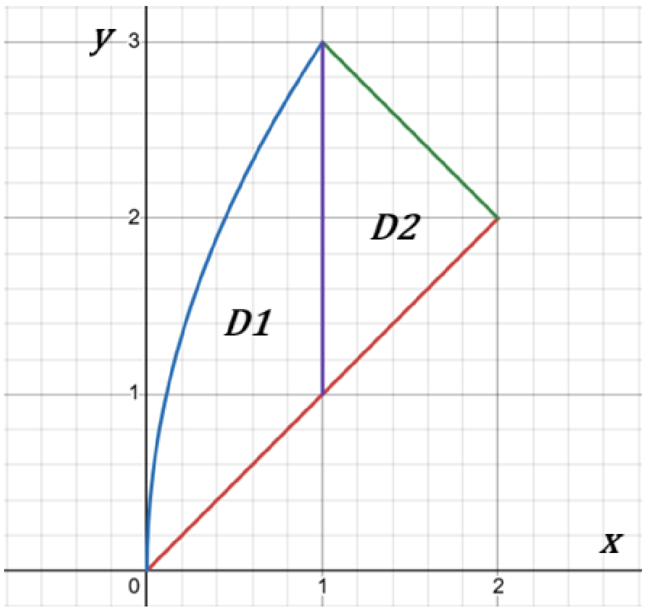

Рисунок 1.2 – График разбиения области D

Теперь двойной интеграл по области D может быть представлен как сумма интегралов по областям D_1 и D_2:

$$\iint\limits_{D}(x+y)dxdy = \iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy + \iint\limits_{D_2}(x+y)dxdy$$

Области D_1 и D_2 – правильные в направлении оси Oy, поэтому двойной интеграл на них можем записать как повторный:

$$\iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{y_1=x}^{y_2=3\sqrt{x}} (x+y)dy = \int\limits_0^1 dx \cdot \left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_x^{3\sqrt{x}} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(3x\sqrt{x} + \frac{1}{2}\cdot 9x - x^2 - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \int\limits_0^1 \left(3x^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{2}x - \frac{3}{2}x^2\right)dx =$$

$$= \left(3\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{59}{20}$$

$$\iint\limits_{D_2}(x+y)dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{y_1=x}^{y_2=4-x} (x+y)dy = \int\limits_1^2 dx \cdot \left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_x^{4-x} =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(x(4-x) + \frac{1}{2}(4-x)^2 - x^2 - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \int\limits_1^2 (8-2x^2)dx =$$

$$= \left(8x - 2\cdot\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2 = \frac{10}{3}$$

Итак,

$$\iint\limits_{D}(x+y)dxdy = \iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy + \iint\limits_{D_2}(x+y)dxdy = \frac{59}{20} + \frac{10}{3} = \frac{377}{60}$$

Ответ: $\frac{377}{60}$.

Домашнее задание к 23.04.25

№1

Для данного двойного интеграла, определенного на области D, записать представление в виде повторных интегралов в направлении оси Oy. Вычислять их значения не обязательно.

$$\iint\limits_D x^2 y\, dxdy\,, \qquad \text{область } D: \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ y = \dfrac{1}{4}x \\ y = 4x \\ y = e^{1.6\ln 6 - 0.4\ln(6)x} \end{cases}$$

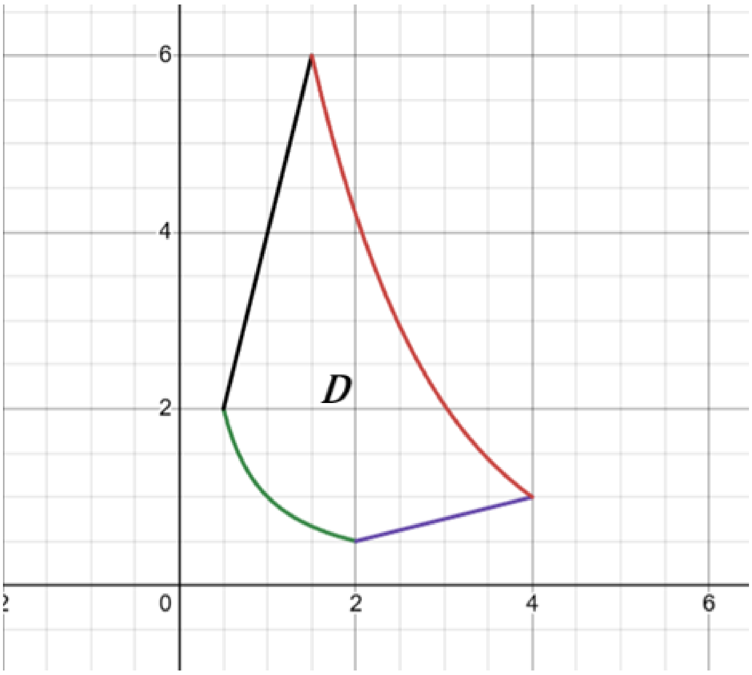

Рисунок 1.3 – График области D

Примечание: для начала требуется разбить область D на «правильные» подобласти, однозначно определив их границы.

№2

Вычислить значение двойного интеграла на области D:

$$\iint\limits_D y\,dxdy\,, \qquad \text{область } D\colon \begin{cases} y = 2 - x \\ y = \sqrt{3 - 2x} \\ y = 0 \end{cases}$$

Ответы к заданиям[1]

№1

$$\iint\limits_D x^2y\,dxdy = \int\limits_{0.5}^{1.5} dx \int\limits_{y_1=\frac{1}{x}}^{y_2=4x} x^2ydy + \int\limits_{1.5}^{2} dx \int\limits_{y_1=\frac{1}{x}}^{y_2=e^{1.6\ln 6-0.4\ln(6)x}} x^2ydy +$$

$$+\int\limits_{2}^{4} dx \int\limits_{y_1=\frac{1}{4}x}^{y_2=e^{1.6\ln 6-0.4\ln(6)x}} x^2ydy$$

№2

Ответ: $\frac{1}{24}$

[1] Задания в файле составлены студентом-преподавателем Мусатовым И.А.