

HANS-JOCHEN

BARTSCH

MATEMATICKÉ VZORCE

$$\int_b^{a+b} x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_b^{a+b} = \frac{1}{3} [(a+b)^3 - b^3]$$

SNTL

MATEMATICKÉ VZORCE

SNTL

MATEMATICKÉ VZORCE

Dr.Ing.Hans-Jochen Bartsch

*Přeložil, upravil a doplnil
Ing. Zdeněk Tichý*

Praha 1983

SNTL –
Nakladatelství
technické
literatury

Příručka zahrnuje nejdůležitější definice, věty a metody ze základních oborů užité matematiky. Zvláštní pozornost je věnována výběru matematických vzorců a ilustrativním řešeným příkladům.

Kromě základů matematické logiky a teorie množin obsahuje aritmetiku a elementární algebru, rovnice a nerovnice, základní funkce, procentový a úrokový počet, vektorový a maticový počet, elementární geometrii, rovinnou a sférickou trigonometrii, analytickou geometrii v rovině a prostoru, diferenciální a integrální počet, diferenciální geometrii, obyčejné a parciální diferenciální rovnice, posloupnosti a řady, Fourierův integrál a Laplaceovu transformaci, počet pravděpodobnosti a matematickou statistiku, lineární optimalizaci, spinačovou algebru a vzorce z regulační techniky.

Příručku doplňují matematické tabulky, přehled znaků a symbolů, přehled literatury a věcný rejstřík.

Je určena studujícím středních škol všech zaměření, posluchačům vysokých škol technických, ale hlavně těm čtenářům, kteří při své pracovní nebo studijní činnosti potřebují rychlou a přesnou informaci ze základních oblastí aplikované matematiky.

Redakce teoretické literatury

Hlavní redaktorka RNDr. Blanka Kutinová, CSc.

Odpovědný redaktor Vladimír Doležal, promovaný matematik

© Dr. Ing. Hans-Jochen Bartsch: Taschenbuch mathematischer Formeln. 17. Auflage. Leipzig,
VEB Fachbuchverlag 1979

Translation © Ing. Zdeněk Tichý, 1983

OBSAH

PŘEDMLUVA K ČESKÉMU VYDÁNÍ	14
PŘEDMLUVA K 17. NĚMECKÉMU VYDÁNÍ	16
0. PŘEHLED ZNAKŮ A SYMBOLŮ, ČÍSELNÉ TABULKY, MATEMATICKÁ LOGIKA A MNOŽINY	19
0.1. Přehled znaků a symbolů	19
0.1.1. Matematická logika	19
0.1.2. Množiny, zobrazení, funkce	20
0.1.3. Standardní označení některých množin	24
0.1.4. Číselné konstanty	26
0.1.5. Elementární aritmetika a algebra	27
0.1.6. Komplexní čísla	28
0.1.7. Vektorová algebra a vektorová analýza	28
0.1.8. Matice a determinanty	30
0.1.9. Geometrie	31
0.1.10. Matematická analýza	34
0.1.11. Elementární funkce	38
0.1.12. Speciální funkce	40
0.1.13. Diferenciální geometrie	41
0.1.14. Laplaceova transformace	42
0.1.15. Počet pravděpodobnosti, matematická statistika a teorie chyb	42
0.1.16. Regulační technika	44
0.2. Číselné tabulky	45
0.2.1. Tabulky hodnot n^2 , n^3 , \sqrt{n} , $\frac{1}{2}\pi n^2$, πn a $\lg n$ pro n od 1 do 100	45
0.2.2. Goniometrické funkce	47
0.2.3. Mocniny o základu 2	56
0.2.4. Desítkové zápisy pro $a \cdot 8^n$	57
0.2.5. Osmičkové zápisy pro $a \cdot 10^n$	58
0.3. Matematická logika	59
0.3.1. Výrokový počet	59
0.3.2. Predikátový počet	65
0.4. Množiny, zobrazení a funkce	68
0.4.1. Množiny	68
0.4.2. Množinové operace	71
0.4.3. Věty o množinách	73
0.4.4. Kartézský souběh dvou množin	76

0.4.5.	Binární relace	77
0.4.6.	Zobrazení, operace, funkce	83
0.4.7.	Konečné, nekonečné a spočetné množiny, mohutnost množiny	89
0.4.8.	Algebraické struktury	91
0.4.9.	Několik topologických pojmu	98
1.	ARITMETIKA A ELEMENTÁRNÍ ALGEBRA	103
1.1.	Číselné množiny	103
1.1.1.	Množina všech přirozených čísel	103
1.1.2.	Množina všech celých čísel	104
1.1.3.	Množina všech racionálních čísel	105
1.1.4.	Množina všech reálných čísel	106
1.2.	Operace na množinách \mathbb{Z} , \mathbb{Q} a \mathbb{R}	106
1.2.1.	Základní operace na množinách \mathbb{Z} , \mathbb{Q} a \mathbb{R}	106
1.2.2.	Absolutní hodnota reálného čísla	110
1.2.3.	Mocnina a odmocnina	111
1.2.4.	Číselné soustavy	114
1.2.5.	Dělení se zbytkem a bez zbytku v množině \mathbb{Z} . Dělitelnost v množině \mathbb{Z}	121
1.2.6.	Uspořádání na množině \mathbb{R}	128
1.3.	Komplexní čísla	129
1.3.1.	Množina všech komplexních čísel	129
1.3.2.	Ryze imaginární čísla	131
1.3.3.	Komplexní čísla v kartézském tvaru	132
1.3.4.	Komplexní čísla v goniometrickém tvaru	134
1.3.5.	Komplexní čísla v exponenciálním tvaru	138
1.3.6.	Grafické metody	139
1.4.	Přibližná čísla a jejich chyby	143
1.4.1.	Přibližná čísla	143
1.4.2.	Zaokrouhlená čísla	144
1.4.3.	Pravidla pro přibližné výpočty	146
1.5.	Úměry	149
1.6.	Logaritmování	151
1.6.1.	Základní pojmy	151
1.6.2.	Vlastnosti logaritmů	153
1.6.3.	Určování desítkových logaritmů z logaritmických tabulek	153
1.6.4.	Přirozené logaritmy komplexních čísel	155
1.7.	Kombinatorika	156
1.7.1.	Binomické koeficienty, binomická věta	156
1.7.2.	Permutace	160
1.7.3.	Variace	163
1.7.4.	Kombinace	164

1.8.	Posloupnosti reálných čísel	165
1.8.1.	Základní pojmy	165
1.8.2.	Aritmetické posloupnosti	167
1.8.3.	Geometrické posloupnosti	170
1.8.4.	Vyvolená čísla	171
1.9.	Procentový počet, úrokový počet	172
1.9.1.	Procentový počet, promilový počet	172
1.9.2.	Úrokový počet	174
1.9.3.	Složený úrokový počet	175
1.9.4.	Důchodový počet	177
1.10.	Matici	180
1.10.1.	Základní pojmy	180
1.10.2.	Operace s maticemi	184
1.10.3.	Některé typy matic	193
1.10.4.	Použití maticového počtu	196
1.11.	Determinanty	198
1.11.1.	Základní pojmy	198
1.11.2.	Vlastnosti determinantu čtvercové matice	202
1.11.3.	Řešení soustavy lineárních rovnic pomocí determinantů	207
2.	ROVNICE, FUNKCE, VEKTOROVÝ POČET	209
2.1.	Rovnice	209
2.1.1.	Základní pojmy	209
2.1.2.	Algebraické rovnice s jednou neznámou	211
2.1.2.1.	Lineární rovnice s jednou neznámou	212
2.1.2.2.	Kvadratická rovnice s jednou neznámou	212
2.1.2.3.	Kubická rovnice s jednou neznámou	214
2.1.2.4.	Algebraická rovnice n -tého stupně s jednou neznámou	217
2.1.3.	Transcendentní rovnice	220
2.1.3.1.	Exponenciální rovnice	220
2.1.3.2.	Logaritmické rovnice	221
2.1.4.	Přibližné metody k určení kořenů rovnice	222
2.1.4.1.	Metoda tětiv [regula falsi, lineární interpolace]	222
2.1.4.2.	Metoda tečen [Newtonova metoda]	223
2.1.4.3.	Iterační metoda	225
2.1.4.4.	Grafické řešení rovnic	225
2.1.5.	Soustavy rovnic	227
2.1.5.1.	Soustavy lineárních rovnic se dvěma neznámými	227
2.1.5.2.	Soustavy lineárních rovnic se třemi neznámými	230
2.1.5.3.	Soustava n lineárních rovnic s n neznámými	233
2.1.5.4.	Soustava dvou kvadratických rovnic se dvěma neznámými	235
2.1.5.5.	Grafické řešení soustav rovnic se dvěma neznámými	237
2.2.	Nerovnice	239

2.2.1.	Základní pojmy	239
2.2.2.	Řešení nerovnice	239
2.3.	Reálné funkce	241
2.3.1.	Základní pojmy	241
2.3.2.	Přibližné vyjádření funkcí pomocí interpolačních vzorců	250
2.3.3.	Funkce několika proměnných	252
2.3.4.	Implicitní funkce	253
2.3.5.	Kartézské grafy funkci	254
2.3.5.1.	Algebraické funkce	254
2.3.5.2.	Transcendentní funkce	260
2.4.	Vektorový počet	261
2.4.1.	Základní pojmy	261
2.4.2.	Použití vektorového počtu v geometrii	273
2.5.	Kruhová inverze	279
3.	ELEMENTÁRNÍ GEOMETRIE	283
3.1.	Základní pojmy	283
3.1.1.	Přímka, rovina, prostor a jejich části	283
3.1.2.	Rovinný a prostorový úhel	286
3.1.3.	Míry v geometrii	287
3.1.3.1.	Míra jako zobrazení	287
3.1.3.2.	Součet úseček a součet úhlů	287
3.1.3.3.	Délka [velikost] úsečky	289
3.1.3.4.	Velikost úhlu	290
3.1.3.5.	Obsah obrazce	296
3.1.3.6.	Objem tělesa	296
3.1.3.7.	Pojem veličiny	296
3.1.4.	Geometrická zobrazení v rovině	298
3.1.5..	Použití shodnosti a podobnosti	301
3.2.	Planimetrie	307
3.2.1.	Trojúhelník	307
3.2.1.1.	Pravoúhlý trojúhelník	317
3.2.1.2.	Rovnoramenný trojúhelník	318
3.2.1.3.	Rovnostranný trojúhelník	319
3.2.2.	Čtyřúhelníky	319
3.2.2.1.	Rovnoběžník	320
3.2.2.2.	Obdélník	320
3.2.2.3.	Kosočtverec	321
3.2.2.4.	Čtverec	321
3.2.2.5.	Lichoběžník	322
3.2.2.6.	Tětivový čtyřúhelník	322
3.2.2.7.	Tečnový čtyřúhelník	323
3.2.2.8.	Deltoid	323
3.2.3.	Mnohoúhelníky [n -úhelníky]	323

3.2.3.1.	Pravidelné n -úhelníky	324
3.2.4.	Kružnice a kruh	328
3.2.5.	Kružová úseč	330
3.2.6.	Mezikruží	331
3.2.7.	Elipsa, hyperbola a parabola	332
3.2.7.1.	Elipsa	332
3.2.7.2.	Hyperbola	333
3.2.7.3.	Parabola	334
3.3.	Stereometrie	334
3.3.1.	Obecné věty	335
3.3.2.	Mnohostény	335
3.3.3.	Oblá tělesa a jejich části	344
3.4.	Goniometrické, cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické funkce	357
3.4.1.	Goniometrické funkce	357
3.4.2.	Goniometrické rovnice	372
3.4.3.	Cyklotrigonometrické funkce	376
3.4.4.	Hyperbolické funkce	379
3.4.5.	Hyperbolometrické funkce	384
3.5.	Sférická trigonometrie	386
3.5.1.	Základní pojmy	386
3.5.2.	Pravouhlý sférický trojúhelník	388
3.5.3.	Kosoúhlý sférický trojúhelník	389
3.5.4.	Matematický zeměpis	394
4.	ANALYTICKÁ GEOMETRIE	399
4.1.	Analytická geometrie v rovině	399
4.1.1.	Různé souřadnicové soustavy	399
4.1.2.	Bódy a úsečky	404
4.1.3.	Přímka	406
4.1.4.	Kružnice	413
4.1.5.	Parabola	418
4.1.6.	Elipsa	427
4.1.7.	Hyperbola	438
4.1.8.	Obecná algebraická rovnice druhého stupně v x a y	449
4.2.	Analytická geometrie v prostoru	455
4.2.1.	Různé souřadnicové soustavy	455
4.2.2.	Body a úsečky v prostoru	459
4.2.3.	Rovina v prostoru	461
4.2.4.	Přímka v prostoru	466
4.2.5.	Plochy druhého stupně	471
4.2.5.1.	Kulová plocha	471
4.2.5.2.	Elipsoid	472
4.2.5.3.	Hyperboloid	473

4.2.5.4.	Paraboloid	475
4.2.5.5.	Kuželová plocha	477
4.2.5.6.	Válcová plocha	478
4.2.6.	Obecná algebraická rovnice druhého stupně v proměnných x , y a z	480
5.	DIFERENCIÁLNÍ POČET	482
5.1.	Limity	482
5.1.1.	Limity posloupností	482
5.1.2.	Limity funkcí	486
5.2.	Diferenční podíl, derivace, diferenciál	491
5.3.	Pravidla pro derivování funkcí	496
5.4.	Derivace funkcí několika proměnných, totální diferenciál	499
5.5.	Derivace elementárních funkcí	505
5.6.	Derivování vektorové funkce v E_3	508
5.7.	Grafické derivování	511
5.8.	Extrémy funkcí	511
5.9.	Inflexní body	518
5.10.	Věty o střední hodnotě v diferenciálním počtu	519
5.11.	Neurčité výrazy	520
5.11.1.	Limita typu $0/0$ nebo ∞/∞	520
5.11.2.	Limita typu $0 \cdot \infty$	521
5.11.3.	Limita typu $\infty - \infty$	522
5.11.4.	Limity typů 0^0 , ∞^0 , 1^∞	522
6.	DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE	524
6.1.	Rovinné křivky	524
6.1.1.	Základní prvky rovinných křivek	525
6.1.2.	Některé důležité rovinné křivky	537
6.1.2.1.	Semikubická parabola [Neilova parabola]	537
6.1.2.2.	Cyklické křivky [trochoidy]	537
6.1.2.3.	Cassiniovy křivky	545
6.1.2.4.	Spirály	547
6.1.2.5.	Řetězovka	549
6.1.2.6.	Traktrix	550
6.1.2.7.	Kisoida	551
6.1.2.8.	Strofoida	553
6.1.2.9.	Konchoida	554
6.2.	Prostorové křivky	556
6.2.1.	Základní prvky prostorových křivek	557
6.3.	Plochy	567

7.	INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ	571
7.1.	Definice neurčitého integrálu	571
7.2.	Základní integrály	571
7.3.	Základní integrační pravidla	573
7.4.	Některé důležité integrály	585
7.4.1.	Integrály racionálních funkcí	585
7.4.2.	Integrály iracionálních funkcí	587
7.4.3.	Integrály goniometrických funkcí	589
7.4.4.	Integrály hyperbolických funkcí	594
7.4.5.	Integrály exponenciálních funkcí	597
7.4.6.	Integrály logaritmických funkcí	598
7.4.7.	Integrály cyklotimetrických funkcí	599
7.4.8.	Integrály hyperbolometrických funkcí	600
7.5.	Určitý integrál	601
7.5.1.	Základní pojmy	601
7.5.2.	Věty o střední hodnotě integrálního počtu	602
7.5.3.	Přibližné metody pro výpočet určitých integrálů	604
7.5.4.	Grafická integrace	607
7.5.5.	Nevlastní integrály	607
7.5.6.	Přehled některých určitých integrálů	609
7.5.7.	Vyjádření některých integrálů řadami	616
7.5.8.	Použití určitých integrálů	619
7.6.	Křivkový integrál	631
7.6.1.	Křivkový integrál po oblouku rovinné křivky	631
7.6.2.	Křivkový integrál po prostorové křivce	633
7.6.3.	Křivkový integrál vektoru	634
7.7.	Množné [n-rozměrné] integrály	635
7.7.1.	Dvojně [dvojrozměrné] integrály	635
7.7.2.	Trojně [trojrozměrné] integrály	642
8.	DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE	648
8.1.	Obyčejné diferenciální rovnice	648
8.2.	Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu	649
8.2.1.	Geometrický význam	649
8.2.2.	Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými	652
8.2.3.	Lineární diferenciální rovnice prvního řádu	654
8.2.4.	Homogenní diferenciální rovnice prvního řádu	658
8.2.5.	Exaktní diferenciální rovnice prvního řádu	659
8.2.6.	Integrující faktor [Eulerův multiplikátor]	660
8.2.7.	Bernoulliova <diferenciální> rovnice	662
8.2.8.	Riccatiova <diferenciální> rovnice	663

8.2.9.	Clairautova <diferenciální> rovnice	664
8.3.	Obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu	665
8.3.1.	Zvláštní případy	666
8.3.2.	Homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty	672
8.3.3.	Homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s proměnnými koeficienty	673
8.3.4.	Eulerova diferenciální rovnice druhého řádu bez pravé strany [homogenní Eulerova diferenciální rovnice]	675
8.3.5.	Nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu	677
8.3.6.	Nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty	680
8.3.7.	Eulerova diferenciální rovnice druhého řádu s pravou stranou [úplná Eulerova diferenciální rovnice]	682
8.4.	Obyčejné diferenciální rovnice třetího řádu	684
8.4.1.	Homogenní lineární diferenciální rovnice třetího řádu s konstantními koeficienty	684
8.4.2.	Nehomogenní lineární diferenciální rovnice třetího řádu s konstantními koeficienty	685
8.5.	Integrování diferenciálních rovnic pomocí mocninných řad	686
8.6.	Parciální diferenciální rovnice	688
8.6.1.	Základní pojmy	688
8.6.2.	Jednoduché parciální diferenciální rovnice	689
8.6.3.	Lineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu ve dvou proměnných	690
9.	NEKONEČNÉ ŘADY, FOURIEROVY ŘADY, FOURIERŮV INTEGRÁL, LAPLACEOVA TRANSFORMACE	692
9.1.	Řady	692
9.1.1.	Základní pojmy	692
9.1.2.	Kritéria konvergence řad	692
9.1.3.	Některé nekonečné konvergentní číselné řady	695
9.1.4.	Mocninné řady	697
9.1.5.	Přibližné vzorce pro počítání s malými čísly	705
9.2.	Základní pojmy k Fourierovým řadám	706
9.3.	Výpočet Fourierovy řady; příklady	709
9.4.	Fourierův integrál, Fourierova transformace	718
9.5.	Laplaceova transformace	720
9.6.	Použití Laplaceovy transformace k řešení diferenciálních rovnic	725
9.7.	Tabulka korespondencí některých racionálních Laplaceových integrálů	730
10.	POČET PRAVDĚPODOBNOSTI, MATEMATICKÁ STATISTIKA, TEORIE CHYB A VYROVNÁVACÍ POČET	732
10.1.	Počet pravděpodobnosti	732

10.2.	Matematická statistika	743
10.2.1.	Sumační znak	743
10.2.2.	Multiplikační znak	744
10.2.3.	Střední hodnoty	745
10.2.4.	Míry rozptýlení	747
10.2.5.	Metoda nejmenších čtverců	749
10.2.6.	Lineární regrese, lineární korelace	751
10.3.	Teorie chyb	752
10.4.	Vyrovnávací počet	753
11.	LINEÁRNÍ OPTIMALIZACE [LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ]	760
11.1.	Základní pojmy	760
11.2.	Grafická metoda řešení	762
11.3.	Simplexová metoda	764
11.4.	Simplexová tabulka	770
12.	LOGICKÁ ALGEBRA [SPÍNAČOVÁ ALGEBRA]	772
12.1.	Základní pojmy	772
12.2.	Základní logické zákony a pravidla	774
12.3.	Další boolovské funkce se dvěma proměnnými [lexikografické uspořádání]	776
12.4.	Normální tvary	779
12.5.	Karnaughovy mapy	781
13.	VZORCE Z REGULAČNÍ TECHNIKY	784
13.1.	Základní pojmy	784
13.2.	Testovací [zkušební] funkce	785
13.3.	Symbolická vyjádření	787
13.4.	Řazení řidicích [regulačních] členů	790
13.5.	Charakteristické hodnoty některých přenosových členů	791
14.	DODATKY	795
14.1.	Řecká abeceda	795
14.2.	Německá abeceda [gotické písmo]	796
14.3.	Často používané konstanty a jejich dekadické logaritmy	797
15.	LITERATURA	799
15.1.	Literatura z německého originálu	799
15.2.	Literatura připojená při českém překladu	801
15.2.1.	Matematická logika a množiny	801
15.2.2.	Algebra (rovnice, matice, determinnty)	802
15.2.3.	Analytická geometrie	802

15.2.4.	Matematická analýza	803
15.2.5.	Nekonečné řady	804
15.2.6.	Diferenciální geometrie křivek a ploch	804
15.2.7.	Obyčejné a parciální diferenciální rovnice	804
15.2.8.	Funkce komplexní proměnné	805
15.2.9.	Laplaceova transformace	805
15.2.10.	Numerické a grafické metody	805
15.2.11.	Počet pravděpodobnosti a matematická statistika	806
15.2.12.	Příručky, sbírky příkladů a přehledy vzorců	806
15.2.13.	Tabulky konstant a funkcí	807
	VĚCNÝ REJSTŘÍK	808

PŘEDMLUVA K ČESKÉMU VYDÁNÍ

Příručka „Matematické vzorce“ se v původním německém znění i v překladech všeestranně osvědčila, o čemž svědčí dosavadních sedmnáct vydání v Německé demokratické republice, čtyři vydání v Německé spolkové republice a Švýcarsku, překlad do angličtiny a tři předchozí vydání v češtině podle původního zpracování (v druhém německém vydání), která měla u širokého okruhu českých čtenářů velmi dobrý ohlas a stala se vyhledávanou pomůckou v technické praxi i na středních a vysokých školách.

Posláním této obsažné příručky je dát studujícím na středních a vysokých školách s převážně technickým zaměřením, stejně jako technickým pracovníkům a inženýrům na pracovišti pohotově a spolehlivě bezprostředně použitelné matematické poznatky a vzorce s udáním podmínek jejich platnosti pro řešení praktických problémů. Přitom vzhledem k charakteru této sbírky matematických vzorců lze považovat za samozrejmé, že do ní nebyly zařazeny ryze teoretické poznatky ani důkazy uváděných pouček a algoritmů; lze z ní však vycházet při studiu speciální teoretické literatury.

Názorný výklad pojmu a četné řešené příklady usnadňují pochopení látky, která byla do příručky pojata s přihlédnutím k různým potřebám techniků a inženýrů.

Při zavádění názvů v definicích jsou v českém překladu pro lepší srozumitelnost dávány alternativní termíny do lomených závorek a fakultativní rozšíření termínů do úhlových závorek. Odvolávky na pořadová čísla bibliografických citací z přehledu literatury na konci knihy jsou uváděny v lomených závorkách.

Nynější české vydání je zcela novým překladem podle úplně přerepracovaných, doplněných a modernizovaných posledních německých vydání. Přitom v osobní spolupráci mezi autorem a překladatelem bylo se souhlasem autora nové české znění přizpůsobeno domácím zvyklostem nejen v terminologii, dikci a značení, ale také v pojetí a způsobu výkladu příslušných matematických oborů na středních a vysokých školách v ČSSR.

Stávající české vydání je tedy založeno na moderně pojatých matematických pojmech ve snaze zajistit maximálně možnou přesnost formulací definic, matematických vět a početních metod.

Můj vřelý dík patří překladateli Ing. Zdeňku Tichému za uvědomělé zpracování mé knihy při překladu i za jeho doplňky a úpravy, kterými české znění přizpůsobil způsobu podání v češtině.

Dr. Ing. Hans-Jochen Bartsch

Karl-Marx-Stadt, 1980

V dnešní době, kdy věda a technika učinily obrovské pokroky, jsou na celý výchovný systém, zejména však na výchovu vědeckotechnických kádrů kladený značně zvýšené požadavky. Platí to ovšem hlavně pro matematiku.

Jen spolehlivé a moderně pojaté matematické znalosti umožňují inženýrům, technikům, konstruktérům a mistrům neustále držet krok s technickým rozvojem a s matematickou přesností plnit požadavky na ně kladené. Předpokladem k tomu je především pečlivá základní matematická výchova r.a školách všech stupňů a v příslušných institucích. Této přípravě má pomáhat i tato sbírka vzorců, která vychází v podstatě z všeobecných poznatků získaných v základní desetileté škole a je určena hlavně studujícím na odborných školách a posluchačům vysokých škol. Avšak také žákům odborných středních škol a gymnázií, stejně jako pracujícím, kteří si s rozsáhlou pomocí vlády zvyšují při povolání svou kvalifikaci při samostatném, dálkovém nebo večerním studiu, může tato příručka být účinným pomocníkem při racionalizaci duševní práce.

Samozřejmě nebylo možno do této knihy pojmut všechny speciální obory matematiky. Výběr látky této sbírky vzorců, která kromě základních početních operací a metod, planimetrie a stereometrie, analytické geometrie v rovině a prostoru, lineární algebry a vektorového počtu, diferenciálního a integrálního počtu, diferenciální geometrie a diferenciálních rovnic obsahuje také Fourierovy řady a základy počtu pravděpodobnosti, lineární optimalizace, matematické logiky a Laplaceovy transformace, je však tak široký, že vyhovuje potřebám velkého okruhu zájemců o literaturu tohoto druhu.

Již dvanácté německé vydání bylo vylepšeno, pokud jde o uspořádání a umístění některých výkladových celků v rámci této příručky. Zároveň bylo zpracováno ještě více přizpůsobeno modernímu výkladu matematiky na základě matematické logiky a teorie množin. Aby čtenář snadno našel, co oka-mžitě potřebuje, byla zvláštní pozornost věnována věcnému rejstříku a přehlednému členění látky.

Četné řešené příklady mají čtenářům usnadnit pochopení abstraktních matematických vzorců. Poznámky v textu mají čtenáře vést k tomu, aby ke studiu matematiky nepřistupoval jen formálně, ale aby si ji osvojil vlastním myšlením. Mají zároveň přispívat k tvůrčímu použití matematiky v praxi.

Autor a nakladatelství

0. PŘEHLED ZNAKŮ A SYMBOLŮ, ČÍSELNÉ TABULKY, MATEMATICKÁ LOGIKA A MNOŽINY

0.1. PŘEHLED ZNAKŮ A SYMBOLŮ

0.1.1. Matematická logika

x, y, z, \dots

výrokové proměnné, též výroky

$\varphi, \psi, \chi, \dots$

výrokové formule, též výroky

$\bar{\varphi}, \neg\varphi, \sim\varphi, \text{non } \varphi, \varphi'$

není pravda, že φ ; negace výrokové formule (popř. výroku) φ

$\varphi \wedge \psi, \varphi . \psi, \varphi\psi, \varphi \cap \psi, \varphi \& \psi$

φ a \langle zároveň $\rangle \psi, \varphi$ i ψ ; konjunkce [logický součin] výrokových formulí (popř. výroků) φ, ψ

$\varphi \vee \psi, \varphi + \psi, \varphi \cup \psi, \varphi$ vel ψ

φ nebo ψ ; disjunkce [logický součet] výrokových formulí (popř. výroků) φ, ψ jestliže φ, \langle pak $\rangle \psi; \langle$ přímá \rangle implikace výrokových formulí (popř. výroků) φ, ψ (v tomto pořadí)

$\varphi, \text{právě když } \psi; \varphi$ tehdy a jen tehdy, když ψ ; ekvivalence výrokových formulí (popř. výroků) φ, ψ

negace konjunkce [operace NAND, Shefferova operace, funkce ani]

výrokových formulí (popř. výroků) φ, ψ nepřímá [zpětná] implikace výrokových formulí (popř. výroků) φ, ψ (v tomto pořadí)

negace implikace [inhibice, přímá inhibice, nonimplikace] výrokových formulí (popř. výroků) φ, ψ (v tomto pořadí)

negace nepřímé implikace [nepřímá inhibice, zpětná inhibice] výrokových formulí (popř. výroků) φ, ψ (v tomto pořadí)

$\varphi \Leftrightarrow \psi, \varphi \leftrightarrow \psi$

$\varphi \mid \psi$

$\varphi \Leftarrow \psi, \varphi \leftarrow \psi, \varphi \subset \psi$

$\varphi \rightarrow \psi$

$\varphi \leftrightarrow \psi$

$\varphi \succcurlyeq \psi$, $\varphi \oplus \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$	negace ekvivalence [antivalence, alternativa, operace „bud, nebo“, operace vylučovací nebo, nonekvivalence, logický součet modulo 2] výrokových formulí (popř. výroků) φ, ψ
$p(\varphi)$	pravdivostní ohodnocení výroku φ
$\varphi \equiv \psi$	φ je logicky ekvivalentní s ψ
P	obor pravdivosti predikátové formule [výrokové formy]
\forall	pro všechna, pro libovolné; obecný [velký] kvantifikátor, obecný [velký] kvantor, generalizátor
\exists	existuje; existenční [malý] kvanti- fikátor, existenční [malý] kvantor, partikularizátor
∞	pro nejvýše konečně mnoho
\forall	pro nejvýše konečně mnoho
\exists	existuje právě jeden
$\exists!$	existuje nekonečně mnoho
\exists^*	existuje nejvýše konečně mnoho

0.1.2. Množiny, zobrazení, funkce

\in	\langle je \rangle prvkem \langle množiny \rangle , patří do \langle množiny \rangle ; incidence [příslušnost] prvku k množině
\notin	není prvkem \langle množiny \rangle , nepatří do \langle množiny \rangle
$x_1, x_2, \dots, x_n \in A$	$x_1 \in A \wedge x_2 \in A \wedge \dots \wedge x_n \in A$ množina A se rovná množině B ; rovnost množin A, B
$A \neq B$	množina A se nerovná množině B ; nerovnost množin A, B
$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	množina $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} =$ $= \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_n\}$ obsahuje právě jen prvky x_1, x_2, \dots, x_n

$\emptyset, \{ \}$	prázdná množina
$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$	systém \mathcal{A} množin obsahuje právě jen množiny A_1, A_2, \dots, A_n
$\{x \in U \mid V(x)\},$	množina právě těch prvků oboru U
$\{x \in U: V(x)\},$	proměnné x , které mají vlastnost V
$\{x \in U; V(x)\}$	
$\forall x \in M [V(x)],$	pro každý prvek x množiny M platí
$\forall x \in M: V(x),$	vlastnost $V(x)$
$\forall x \in M; V(x)$	
$\exists x \in M [V(x)],$	existuje aspoň jeden prvek množiny M ,
$\exists x \in M: V(x),$	pro který platí vlastnost $V(x)$
$\exists x \in M; V(x)$	
$A \subseteq B, A \subseteq B$	množina A je částí [podmnožinou] množiny B ; neostrá inkluze množin A, B (v tomto pořadí)
$A \subset B$	množina A je vlastní částí [vlastní podmnožinou] množiny B ; ostrá inkluze množin A, B (v tomto pořadí)
$A \supseteq B, A \supseteq B$	množina A je nadmnožinou množiny B
$A \supset B$	množina A je vlastní nadmnožinou množiny B
$A \cup B, A + B$	sjednocení [součet] množin (tříd) A, B
$A \cap B, AB$	průnik množin (tříd) A, B
$A \setminus B, A - B$	rozdíl množin (tříd) A, B (v tomto pořadí)
$A \Delta B, A \dot{-} B$	symetrický rozdíl množin (tříd) A, B
$A'_Z, A_Z^{\sim}, C_Z A, A_Z^C$	doplňek množiny A v \langle základní \rangle množině Z
$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, \bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcup_1^n A_i$	sjednocení množin A_1, A_2, \dots, A_n
$\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$	sjednocení systému \mathcal{S} množin S
$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n, \bigcap_{i=1}^n A_i, \bigcap_1^n A_i$	průnik množin A_1, A_2, \dots, A_n
$\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S$	průnik systému \mathcal{S} množin S
$[a, b]$	uspořádaná dvojice objektů a, b
$[a_1, a_2, \dots, a_n]$	uspořádaná n -tice objektů a_1, a_2, \dots, a_n
$A \times B$	kartézský součin množin A, B (v tomto pořadí)

$A^2, A \times A$	druhá kartézská mocnina [kartézský čtverec] množiny A
$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n, \bigtimes_{i=1}^n A_i, \bigtimes_1^n A_i$	kartézský součin množin A_1, A_2, \dots, A_n
A^n	n -tá kartézská mocnina množiny A
$[R; A, B], R: A \rightarrow B$	\langle binární \rangle relace R mezi množinami A, B (v tomto pořadí)
$[R; M], R: M \rightarrow M$	\langle binární \rangle relace v množině M
$xRy, x \xrightarrow{R} y, x \overset{R}{\rightarrow} y$	x je v \langle binární \rangle relaci R s \langle prvkem \rangle y , prvku x je přiřazen prvek y v relaci R ; přiřazení prvku y prvku x v relaci R prvku x je přiřazen prvek y
$x \mapsto y, x \rightarrow y,$	
$x \bar{R} y$	\langle prvek \rangle x není v \langle binární \rangle relaci R s \langle prvkem \rangle y
$O_1(R), D(R), \text{dom } R$	první [definiční, vstupní, levý] obor [vzor] relace R
$O_2(R), R(R), \text{rng } R, H(R)$	druhý [výstupní, pravý] obor [obraz] relace R
R_{-1}, R^{-1}	inverzní relace k relaci R
$R \circ S, R * S, RS$	R složeno s S ; relace složená z relací R a S , kompozice [kompozit, součin] relací R a S
$\text{id}_M, \Delta_M, \varepsilon_M$	identická relace [relace identity] na množině M
\prec	ryze [striktně] předchází, \langle je \rangle menší než;
\succ	znak ostrého uspořádání
\preccurlyeq	ryze [striktně] následuje za, \langle je \rangle větší než; znak ostrého uspořádání
\succcurlyeq	předchází, \langle je \rangle nejvýše roven, není větší než; znak \langle neostrého \rangle uspořádání
$f: x \mapsto y, x \xrightarrow{f} y, x \overset{f}{\rightarrow} y, y = fx,$ $y = f(x), f(x)$	následuje, je nejméně roven, není menší než; znak \langle neostrého \rangle uspořádání prvek y je obrazem prvku x v zobrazení f , hodnota zobrazení (funkce) f v bodě x , též funkce f jedné \langle nezávisle \rangle pro- menné [argumentu] x (y je závisle proměnná)

$f: A \rightarrow B$	zobrazení f množiny A do množiny B
$f: A \xrightarrow{\text{na}} B$	zobrazení f množiny A na množinu B
$f: A \leftrightarrow B$	vzájemně jednoznačné zobrazení
$[bijekce] f$	[bijekce] f množin A, B
$f(A)$	obraz množiny A v zobrazení f
$f_{-1}(B), f^{-1}(B)$	vzor množiny B v zobrazení f
f_{-1}, f^{-1}	inverzní zobrazení (funkce) k zobrazení (funkci) f
$f_{-1}(y), f^{-1}(y)$	jediný vzor prvku y v zobrazení f
$f M$	parciální zobrazení (funkce) indukované na množinu M zobrazením (funkcí) f , parcializace [zúžení, restrikce]
$h = g(f), h = g \circ f$	zobrazení (funkce) f na množinu M
$y = g(f(x)) = h(x)$	složené zobrazení (funkce) h s vnější složkou g a vnitřní složkou f
$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$	hodnota složeného zobrazení (funkce) h s vnější složkou g a vnitřní složkou f
$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	v bodě x , též zobrazení (funkce) h složené ze zobrazení (funkcí) g a f při argumentu x (y je závisle proměnná)
$a(\omega)$	hodnota zobrazení (funkce) f v bodě $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, též zobrazení (funkce) f <nezávisle> proměnných [argumentů] x_1, x_2, \dots, x_n (y je závisle proměnná)
$A \sim B$	árnost operace ω
$\text{card } A, m(A)$	množina A je ekvivalentní [ekvipotentní] s množinou B
$ A $	mohutnost [kardinální číslo] množiny A
\aleph_0	mohutnost [kardinální číslo] konečné množiny A
\aleph	alef nula; mohutnost množiny \aleph_0
$2^{m(M)}$	alef; mohutnost kontinua
$\sup_M A, \sup A$	mohutnost systému \mathcal{M} všech podmnožin množiny M
$\inf_M A, \inf A$	supremum množiny A v množině M
	infimum množiny A v množině M

$\max A$	maximální prvek úplně uspořádané množiny A
$\max \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	maximální prvek číselné množiny $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
$\min A$	minimální prvek úplně uspořádané množiny A
$\min \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	minimální prvek číselné množiny $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
(M, ϱ)	metrický prostor s nosičem M a metrikou ϱ
A_M°, A°	vnitřek množiny A v metrickém prostoru (M, ϱ)
$\text{Ext}_M A, \text{Ext } A$	vnějšek množiny A v metrickém prostoru (M, ϱ)
$\text{Fr}_M A, \text{Fr } A$	hranice množiny A v metrickém prostoru (M, ϱ)
\bar{A}_M, \bar{A}	uzávěr množiny A v metrickém prostoru (M, ϱ)

0.1.3. Standardní označení některých množin

\mathbb{N}	$\{1, 2, 3, \dots\}$; množina všech kladných celých čísel
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$; množina všech nezáporných celých čísel (viz článek 1.1.1)
\mathbb{Z}	množina všech celých čísel
\mathbb{Q}	množina všech racionálních čísel
\mathbb{R}, \mathbb{R}^1	množina všech reálných čísel, reálná [číselná] osa
\mathbb{Z}^-	množina všech záporných celých čísel
\mathbb{Z}_0^-	množina všech nekladných celých čísel
\mathbb{Q}^+	množina všech kladných racionálních čísel
\mathbb{Q}_0^+	množina všech nezáporných racionálních čísel
\mathbb{Q}^-	množina všech záporných racionálních čísel
\mathbb{Q}_0^-	množina všech nekladných racionálních čísel

\mathbb{R}^+	množina všech kladných reálných čísel
\mathbb{R}_0^+	množina všech nezáporných reálných čísel
\mathbb{R}^-	množina všech záporných reálných čísel
\mathbb{R}_0^-	množina všech nekladných reálných čísel
\mathbb{R}^n	množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel
$-\infty$	
$+\infty$	minus nekonečno
∞	plus nekonečno
$\langle \text{bod} \rangle$	nekonečno, nevlastní prvek, nekonečně vzdálený bod
\mathbb{R}^*	$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
$\mathbb{R}^*, \mathbb{E}_1^*, \langle -\infty, +\infty \rangle$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; rozšířená reálná [číselná] osa
${}^*\mathbb{R}, {}^*\mathbb{E}_1$	$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$
$\mathbb{C}, \mathbb{C}^1, \mathbb{G}$	množina všech konečných komplexních čísel, otevřená \langle Gaussova \rangle rovina komplexních čísel
\mathbb{P}	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$
\mathbb{C}^n	množina všech uspořádaných n -tic konečných komplexních čísel
$\mathbb{C}^*, \mathbb{S}, \bar{\mathbb{G}}$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$; uzavřená [rozšířená] Gaussova rovina
U_{0n}	$\{0, 1, 2, \dots, n\}$; n -tý úsek množiny \mathbb{N}_0
U_n	$\{1, 2, \dots, n\}$; n -tý úsek množiny \mathbb{N}
(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$; otevřený interval od a do b [s krajními body a, b]
$\langle a, b \rangle$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$; uzavřený interval od a do b [s krajními body a, b]
$\langle a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$; zleva uzavřený a zprava otevřený interval od a do b [polouzavřený interval od a do b]
$(a, b\rangle$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$; zleva otevřený a zprava uzavřený interval od a do b [polootevřený interval od a do b]
$\langle a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
$(-\infty, a\rangle$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
$(-\infty, +\infty)$	množina \mathbb{R} všech reálných čísel
$U(a, \delta), U_\delta(a), U(a)$	$(a - \delta, a + \delta); \delta$ -okolí [δ -ové okolí] bodu a \langle v prostoru E_1 \rangle
$\tilde{U}(a, \delta), \tilde{U}_\delta(a), \tilde{U}(a)$	$U(a, \delta) \setminus \{a\}$; neúplné δ -okolí [δ -ové okolí] bodu a \langle v prostoru E_1 \rangle
$K(a, \delta), K_\delta(a), K(a)$	\langle otevřená \rangle koule v metrickém prostoru (M, ϱ) (se středem a a poloměrem δ), δ -okolí bodu a v metrickém prostoru (M, ϱ)
$\tilde{K}(a, \delta), \tilde{K}_\delta(a), \tilde{K}(a)$	$K(a, \delta) \setminus \{a\}$; neúplné δ -okolí bodu a v metrickém prostoru (M, ϱ)
E_n	n -rozměrný \langle bodový \rangle euklidovský prostor
A_n	n -rozměrný afinní prostor
P_n	n -rozměrný projektivní prostor
$C(M)$	prostor spojitých funkcí na množině M ; pro $M = (a, b)$, resp. $M = \langle a, b \rangle$ se používá symbolu $C(a, b)$, resp. $C\langle a, b \rangle$
$C^{(n)}(M)$, resp. $C^{(\infty)}(M)$	prostor spojitých funkcí na množině M se spojitymi derivacemi až do řádu n včetně, resp. všech řadů

0.1.4. Číselné konstanty

e	2,718 281 828 459 0 ...; Eulerovo číslo
π	3,141 592 654 ...; Ludolfovovo číslo
γ	0,577 215 664 90 ...; Eulerova konstanta
M	$\lg e \doteq 0,434 294 48$; součinitel pro převod přirozeného logaritmu na dekadický logaritmus
m	$\ln 10 \doteq 2,302 585 09$; součinitel pro převod dekadického logaritmu na přirozený logaritmus

0.1.5. Elementární aritmetika a algebra

=	$\langle je \rangle$ rovno
≠	není rovno, je různé od
≡	$\langle je \rangle$ identicky rovno
≢	není identicky rovno
≈	$\langle je \rangle$ přibližně rovno
÷	$\langle je \rangle$ po zaokrouhlení rovno
<	$\langle je \rangle$ menší než
≪	$\langle je \rangle$ mnohem [řádově] menší než
>	$\langle je \rangle$ větší než
≫	$\langle je \rangle$ mnohem [řádově] větší než
≤	$\langle je \rangle$ menší nebo rovno, $\langle je \rangle$ nejvýše rovno, není větší než
≥	$\langle je \rangle$ větší nebo rovno, $\langle je \rangle$ nejméně rovno, není menší než
+	plus; kladné znaménko
-	minus; záporné znaménko
., ×	krát, násobeno; při násobení čísel vyjádřených písmeny lze tyto znaky vyněchat
/, −, :	lomeno, děleno; šikmá, popř. vodorovná zlomková čára
~	$\langle je \rangle$ úměrno
≡	odpovídá
(), [], { }, < >	okrouhlé, lomené, složené a úhlové závorky
$n!$	n faktoriál, faktoriál čísla n
$(2n + 1)!!$	$1 \cdot 3 \dots (2n + 1)$
$(2n)!!$	$2 \cdot 4 \dots (2n)$
$\binom{n}{k}$, $C_k(n)$, C_n^k	n nad k ; kombináční číslo, binomický koeficient; počet k -prvkových kombinací [počet kombinací k -té třídy] z n prvků
$C'_k(n)$	počet k -prvkových kombinací [počet kombinací k -té třídy] z n prvků s opakováním
$V_k(n)$	počet k -prvkových variací [počet variací k -té třídy] z n prvků

$V'_k(n)$

$x_1 + x_2 + \dots + x_n, \sum_{i=1}^n x_i, \sum_1^n x_i$

$x_1 x_2 \dots x_n, \prod_{i=1}^n x_i, \prod_1^n x_i$

0.1.6. Komplexní čísla

i

$z = a + bi$

$\operatorname{Re} z$

$\operatorname{Im} z$

$|z|$

\bar{z}, z^*

$\arg z$

počet k -prvkových variací [počet variací k -té třídy] z n prvků s opakováním

suma [součet] čísel x_1, x_2, \dots, x_n

součin čísel x_1, x_2, \dots, x_n

0.1.7. Vektorová algebra a vektorová analýza

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$

\circ

\circ_n

$\overrightarrow{AB}, [A, B], \mathbf{a}(A), B - A$

$\mathbf{a} = \mathbf{b}$

$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

$\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$

vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (v obrázcích se někdy značí $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$; v této knize se však v obrázcích značí stejně jako v textu tučným písmem)

nulový vektor

n -rozměrný nulový vektor

vázaný vektor [umístění vektoru, orientovaná úsečka] s počátečním bodem A a koncovým bodem B

rovnost vektorů \mathbf{a}, \mathbf{b}

vektor \mathbf{a} je kolineární [rovnoběžný] s vektorem \mathbf{b}

vektor \mathbf{a} je souhlasně kolineární [souhlasně rovnoběžný] s vektorem \mathbf{b}

$\mathbf{a} \uparrow \downarrow \mathbf{b}$	vektor \mathbf{a} je nesouhlasně kolineární [nesouhlasně rovnoběžný] s vektorem \mathbf{b}
\mathbf{a}^0	jednotkový vektor souhlasně kolineární [souhlasně rovnoběžný] s vektorem \mathbf{a}
V_n	n -rozměrný reálný (popř. komplexní) vektorový prostor
i, j, k , resp. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	základní vektory [orty] souřadnicové soustavy $(O; i, j, k)$, resp. $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$
$\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$	průměty polohového vektoru \mathbf{a} do souřadnicových os x, y, z [složky vektoru \mathbf{a}]
a_x, a_y, a_z	souřadnice polohového vektoru \mathbf{a} vzhledem k základním jednotkovým vektorům i, j, k [projekce polohového vektoru \mathbf{a} do souřadnicových os x, y, z]
$(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$	velikost úhlu nenulových vektorů \mathbf{a}, \mathbf{b}
a_s	$a_s = [\mathbf{a} \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{s}})] s^0$; projekce vektoru \mathbf{a} do vektoru [směru] \mathbf{s}
\mathbf{a}_s	$\mathbf{a}_s = \mathbf{a} \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{s}})$; průmět vektoru \mathbf{a} do vektoru [směru] \mathbf{s}
(a_1, a_2, \dots, a_n)	n -rozměrný vektor se souřadnicemi a_1, a_2, \dots, a_n
$a, \mathbf{a} , \overline{AB} $	velikost [modul, délka] vektoru $\mathbf{a} = \overline{AB}$
$\mathbf{a} + \mathbf{b}$	součet vektorů \mathbf{a}, \mathbf{b}
$\mathbf{a} - \mathbf{b}$	rozdíl vektorů \mathbf{a}, \mathbf{b} (v tomto pořadí)
$c\mathbf{a}$	součin vektoru \mathbf{a} a skaláru c [c -násobek vektoru \mathbf{a}]; násobení vektoru \mathbf{a} skalárem c
$-\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}}$	opačný vektor k vektoru \mathbf{a}
$\mathbf{ab}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, (\mathbf{a}, \mathbf{b})$	\mathbf{a} skalárně \mathbf{b} ; skalární součin vektorů \mathbf{a}, \mathbf{b} skalární kvadrát vektoru \mathbf{a}
\mathbf{a}^2	\mathbf{a} vektorově \mathbf{b} ; vektorový součin vektorů \mathbf{a}, \mathbf{b}
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$	smíšený součin vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (v tomto pořadí)
$[\mathbf{abc}]$	vektorová funkce [vektorové pole] \mathbf{v} skalární \langle reálné \rangle proměnné t
$\mathbf{v}(t)$	

0.1.8. Matice a determinancy

Poznámka:

Je-li znám typ, popř. řád matice, pak se v příslušném symbolu neuvádí.

A, B, C, ...

matice

matice **A** typu (m, n) s prvky a_{ik}
 $(i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n)$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\left\| \begin{array}{c} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{array} \right\|,$$

$$(a_{ik})_m^n, (a_{ik})_{(m,n)},$$

$$[a_{ik}]_m^n, \|a_{ik}\|_m^n,$$

$$(a_{ik}), [a_{ik}], \|a_{ik}\|$$

A_(m,n)

matice **A** typu (m, n)

A_n

〈čtvercová〉 matice **A** rádu n

S(**A**)

stopa matice **A**

a_i

i-tý řádkový vektor matice **A**

a_k^T

k-tý sloupcový [transponovaný] vektor
matice **A**

0_(m,n), resp. **0**_m, **0**

nulová matice typu (m, n) , resp. rádu n

o

řádkový nulový vektor

o^T

sloupcový [transponovaný] nulový vektor

D_n, **D**

diagonální matice rádu n

S_n, **S**

násobná [skalární] matice rádu n

E_n, (e_{ik})_n, **E**

jednotková matice rádu n

A^T

transponovaná matice k matici **A**

γ , nul **A**

nulita [defekt, degenerace] matice **A**

h(A), **h**

hodnost matice **A**

A ~ **B**

matice **A** je ekvivalentní s maticí **B**

[matice **A**, **B** mají stejnou hodnost]

A = **B**

rovnost matic **A**, **B**

A + **B**

součet matic **A**, **B**

α **A**

součin matice **A** a skaláru α

AB = **C**

součin matic **A** a **B**

A*	komplexně sdružená matice k matici A
A"	n-tá mocnina matice A
adj A	adjungovaná matice k čtvercové matici A
$A, \det A, A $	determinant čtvercové matice A
$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix}$	determinant n-tého řádu s prvky a_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$)

$\det(a_{ik})_n, |a_{ik}|_n$

M_{ik}

A_{ik}

$V(a_1, a_2, \dots, a_n)$

0.1.9. Geometrie

\equiv

$\not\equiv$

\parallel

$\not\parallel$

$\uparrow\uparrow$

$\uparrow\downarrow$

\perp

\cong

\approx

přímka $A, \overrightarrow{AB}, \leftrightarrow AB$

polopřímka $AB, \overrightarrow{AB}, \rightarrow AB, \mapsto AB$

$\overleftarrow{AB}, \leftarrow AB, \leftarrow\leftarrow AB$

úsečka AB, AB

$|AB|_E, d(AB)_E, \varrho(A, B)_E$

orientovaná úsečka AB, \overline{AB}

$\|\overline{AB}\|_E$

oblouk AB, \widehat{AB}

subdeterminant [minor] příslušný prvku
 a_{ik} determinantu A

$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik};$ \langle algebraický
doplňek prvku a_{ik} determinantu A

Vandermondův determinant

$\langle j e \rangle$ totožné, $\langle j e \rangle$ identické, splývá
není totožné, není identické, nesplývá

$\langle j e \rangle$ rovnoběžné
není rovnoběžné

$\langle j e \rangle$ souhlasně rovnoběžné

$\langle j e \rangle$ nesouhlasně rovnoběžné

$\langle j e \rangle$ kolmá na $[k]$

$\langle j e \rangle$ shodné

$\langle j e \rangle$ podobné

přímka určená body $A, B (A \neq B)$

polopřímka s počátkem A a vnitřním
bodem B

opačná polopřímka k polopřímce AB

úsečka s krajními body A, B

délka [velikost] úsečky AB [vzdálenost
bodů A, B] při délkové jednotce E

orientovaná úsečka s počátečním bodem
 A a koncovým bodem B , vázaný

vektor umístěný do bodu A

orientovaná délka [velikost]

orientované úsečky AB při délkové
jednotce E

oblouk s krajními body A, B

oblouk ACB , \widehat{ACB}	oblouk s krajními body A , B a vnitřním bodem C
$ \widehat{AB} $	délka [velikost] oblouku AB
rovina ABC , ABC	rovina určená třemi různými body A , B , C , které neleží v téže přímce
rovina pq	rovina určená přímkami p , q ($p \neq q$)
rovina pA	rovina určená přímkou p a bodem A ($A \notin p$)
poloprostor αA , $\overrightarrow{\alpha A}$	poloprostor určený rovinou α a bodem A ($A \notin \alpha$)
polorovina ABC , \overrightarrow{ABC} , $\rightarrow ABC$, $\mapsto ABC$	polorovina s hraniční přímkou AB a s vnitřním bodem C
\overleftarrow{ABC} , $\leftarrow ABC$, $\leftarrow\leftarrow ABC$	opačná polorovina k polorovině ABC
polorovina pA , \overrightarrow{pA} , $\rightarrow pA$, $\mapsto pA$	polorovina s hraniční přímkou p a vnitřním bodem A
\overleftarrow{pA} , $\leftarrow pA$, $\leftrightarrow pA$	opačná polorovina k polorovině pA
$\varrho(A, M)$	vzdálenost bodu A od množiny (útvaru) M
$ Ap $	vzdálenost bodu A od přímky p
úhel AVB , $\star AVB$	konvexní (neorientovaný) úhel s vrcholem V a rameny VA , VB
$ \star AVB _E$, $v(\star AVB)_E$	velikost konvexního (neorientovaného) úhlu AVB při úhlové jednotce E
$\circlearrowleft AVB$	nekonvexní úhel ke konvexnímu úhlu AVB
$ \circlearrowleft AVB _E$, $v(\circlearrowleft AVB)_E$	velikost nekonvexního (neorientovaného) úhlu AVB při úhlové jednotce E
orientovaný úhel ABV , \widehat{ABV}	orientovaný úhel s vrcholem V , počátečním ramenem VA a koncovým ramenem VB
$ \widehat{ABV} _E$, $v(\widehat{ABV})_E$	\langle orientovaná \rangle velikost orientovaného úhlu ABV při úhlové jednotce E
$\star pq$	odchylka přímek p , q
$\star \varrho \sigma$	odchylka rovin ϱ , σ
$\star p \varrho$	odchylka přímky p a roviny ϱ
"	stupeň minuta } úhlové jednotky v stupňové vteřina } míře (při šedesátinném dělení)

rad	radián
$\text{arc } \alpha$	(úhlová jednotka v obloukové míře)
s	arkus úhlu α ; oblouková míra úhlu α
c°	grad
cc°	centigrad, setina gradu
	centicentigrad,
	desetitisícina gradu
$A_1 A_2 \dots A_n K$	úhlové jednotky při setinném dělení
$A_1 A_2 \dots A_n A_1$	lomená čára s počátečním bodem P , koncovým bodem K a vrcholy A_1, A_2, \dots, A_n (v tomto pořadí)
trojúhelník ABC , $\triangle ABC$	uzavřená lomená čára s vrcholy
čtyřúhelník $ABCD$	A_1, A_2, \dots, A_n
$k = (S, r)$, $k(S, r)$	trojúhelník s vrcholy A, B, C
poloprostor $ABCD$	čtyřúhelník s vrcholy A, B, C, D (v tomto pořadí)
poloprostor ϱD	kružnice k se středem S a poloměrem r
čtyřstěn $ABCD$	poloprostor s hraniční rovinou ABC
kvádr $ABCDA'B'C'D'$	a vnitřním bodem D
$\varkappa = (S, r)$, $\varkappa(S, r)$	poloprostor s hraniční rovinou ϱ
λ_{ABC} , $(A\bar{B}C)$, λ	a vnitřním bodem D
δ_{ABCD} , $(ABCD)$, δ	čtyřstěn s vrcholy A, B, C, D
$A[x]$	kvádr s protějšími stěnami $ABCD$, $A'B'C'D'$ ($AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$)
$A[x, y]$	kulová plocha \varkappa se středem S
$A[\varrho, \varphi]$	a poloměrem r
$A[x, y, z]$	dělící poměr bodu C na přímce
	vzhledem k základním bodům A, B
	na téže přímce
	bod A na přímce se souřadnicí x
	(někdy také $A = [x]$)
	bod A v rovině s kartézskými
	souřadnicemi x, y
	bod A v rovině s polárními
	souřadnicemi ϱ, φ
	bod A v prostoru s kartézskými
	souřadnicemi x, y, z

$A[\varrho, \varphi, z]$	bod A v prostoru s cylindrickými souřadnicemi ϱ, φ, z
$A[\varrho, \vartheta]$	bod A v prostoru se sférickými souřadnicemi $\varrho, \varphi, \vartheta$
$(O; x), O(x)$	souřadnicová soustava na přímce s počátkem O a souřadnicí x
$(O; x, y), O(x, y)$	kartézská souřadnicová soustava v rovině s počátkem O a souřadnicemi x, y
$(O; x, y, z), O(x, y, z)$	kartézská souřadnicová soustava v prostoru s počátkem O a souřadnicemi x, y, z
$(O; \varrho, \varphi), O(\varrho, \varphi)$	polární souřadnicová soustava v rovině s polom O , průvodičem ϱ a argumentem φ
$(O; \varrho, \varphi, z), O(\varrho, \varphi, z)$	cylindrická souřadnicová soustava s počátkem O , průvodičem ϱ , argumentem φ a souřadnicí z
$(O; \varrho, \vartheta), O(\varrho, \vartheta)$	sférická souřadnicová soustava s počátkem O a souřadnicemi $\varrho, \vartheta, \varphi$

0.1.10. Matematická analýza

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n\}, (a_n), (a_1, a_2, \dots)$	nekonečná posloupnost čísel a_1, a_2, \dots
Δa_n	$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$
$\Delta^n a_n$	$\Delta^n a_n = \Delta^{n-1} a_{n+1} - \Delta^{n-1} a_n$
$n \rightarrow \infty$	$n (n \in \mathbb{N})$ se blíží k plus nekonečnu [n roste bez omezení v kladných celých číslech]
$n \rightarrow -\infty$	$n (n \in \mathbb{Z})$ se blíží k minus nekonečnu
$x \rightarrow a$	x se blíží k a [x konverguje k a]
$x \rightarrow a+$	x se blíží k a zprava
$x \rightarrow a-$	x se blíží k a zleva
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$	vlastní limita posloupnosti $\{a_n\}$ pro $n \rightarrow \infty$ se rovná číslu a
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, resp. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$	posloupnost $\{a_n\}$ pro $n \rightarrow \infty$ má nevlastní limitu $+\infty$, resp. $-\infty$
$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$	limes superior posloupnosti a_n

$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	limes inferior posloupnosti a_n
$\max_{\langle a,b \rangle} f(x)$, resp. $\max_{x \in A} f(x)$	maximum <reálné> funkce f <reálné> proměnné x na intervalu $\langle a, b \rangle$, resp. na množině A
$\min_{\langle a,b \rangle} f(x)$, resp. $\min_{x \in A} f(x)$	minimum <reálné> funkce f <reálné> proměnné x na intervalu $\langle a, b \rangle$, resp. na množině A
$\sup_{\langle a,b \rangle} f(x)$, resp. $\sup_{x \in A} f(x)$	supremum <reálné> funkce f <reálné> proměnné x na intervalu $\langle a, b \rangle$, resp. na množině A
$\inf_{\langle a,b \rangle} f(x)$, resp. $\inf_{x \in A} f(x)$	infimum <reálné> funkce f <reálné> proměnné x na intervalu $\langle a, b \rangle$, resp. na množině A
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	limita <reálné> funkce f <reálné> proměnné x v bodě a
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $f(a^+)$, $f(a + 0)$	limita <reálné> funkce f <reálné> proměnné x v bodě a zprava
$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $f(a^-)$, $f(a - 0)$	limita <reálné> funkce f <reálné> proměnné x v bodě a zleva
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	limita <reálné> funkce f <reálné> proměnné x v nevlastním bodě $+\infty$, resp. $-\infty$
Δx	přírůstek [diference] argumentu x v bodě x_0
Δy , $\Delta f(x)$	přírůstek [diference] funkce f [přírůstek závisle proměnné y] v bodě x_0
f' , $\frac{df}{dx}$, $\frac{d}{dx} f$, Df , y' , $\frac{dy}{dx}$	<první> derivace <reálné> funkce f <reálné> proměnné x (y je závisle proměnná)
$f'(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, $Df(x)$, $y'(x)$, y'_x	<první> derivace <reálné> funkce f <reálné> proměnné x v bodě x , též <první> derivace <reálné> funkce f <reálné> proměnné x (y je závisle proměnná)
D	$\frac{d}{dx}$; diferenciální operátor

$f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$	<první> derivace <reálné> funkce f
$Df(x_0)$, y'_{x_0} , $y'(x_0)$	<reálné> proměnné x v bodě x_0 (y je závisle proměnná)
$f'_+(x_0)$, $f'(x_0+)$	<první> derivace <reálné> funkce f v bodě x_0 zprava
$f'_-(x_0)$, $f'(x_0-)$	<první> derivace <reálné> funkce f v bodě x_0 zleva
$f, f \cdot$	<první> derivace <reálné> funkce $y = f(t)$ podle parametru t
$f(t_0)$, $f \cdot(t_0)$	<první> derivace <reálné> funkce $y = f(t)$ podle parametru t v bodě t_0
$f'', \frac{df'}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, y'', \frac{dy'}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$	druhá derivace <reálné> funkce f <reálné> proměnné x (y je závisle proměnná)
$f', f ..$	druhá derivace <reálné> funkce $y = f(t)$ podle parametru t
$f^{(n)}, \frac{df^{(n-1)}}{dx}, \frac{d^n f}{dx^n},$	n -tá derivace <reálné> funkce f <reálné> proměnné x (y je závisle proměnná)
$y^{(n)}, \frac{dy^{(n-1)}}{dx}, \frac{d^n y}{dx^n}$	
dx	diferenciál argumentu x
df, dy	diferenciál <reálné> funkce $y = f(x)$
$df(x), dy_x$	diferenciál <reálné> funkce f v bodě x , též diferenciál <reálné> funkce f <reálné> proměnné x (y je závisle proměnná)
$f(\mathbf{x}), f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	hodnota <reálné> funkce f n <reálných> proměnných v bodě $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, též <reálná> funkce f n <reálných> proměnných
$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}),$ $\lim_{x_1 \rightarrow a_1, \dots, x_n \rightarrow a_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	limita <reálné> funkce f n <reálných> proměnných pro $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$, tj. pro $x_1 \rightarrow a_1, x_2 \rightarrow a_2, \dots, x_n \rightarrow a_n$, přičemž $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}, f'_{x_k}, f_{x_k}$$

parciální derivace <prvního řádu>
<reálné> funkce $y = f(\mathbf{x})$ podle
proměnné x_k

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}), f'_{x_k}(\mathbf{a})$$

parciální derivace <reálné> funkce
 $y = f(\mathbf{x})$ podle proměnné x_k v bodě
 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}, f''_{x_k x_k}, f_{x_k x_k}$$

parciální derivace druhého řádu <reálné>
funkce $y = f(\mathbf{x})$ dvakrát podle
proměnné x_k

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, f''_{x_i x_j}, f_{x_i x_j}$$

parciální derivace druhého řádu <reálné>
funkce $y = f(\mathbf{x})$ nejprve podle
proměnné x_i a pak podle proměnné x_j
[smíšená parciální derivace druhého
řádu]

totální [úplný] diferenciál <reálné>
funkce $y = f(\mathbf{x})$

totální [úplný] diferenciál n -tého řádu
<reálné> funkce $y = f(\mathbf{x})$

totální [úplný] diferenciál <reálné>
funkce $y = f(\mathbf{x})$ v bodě \mathbf{a}

totální [úplný] diferenciál n -tého řádu
<reálné> funkce $y = f(\mathbf{x})$ v bodě \mathbf{a}

primitivní funkce k <reálné> funkci f

neurčitý integrál <z> <reálné> funkce
 $y = f(x)$

určitý integrál <z> <reálné> funkce
 $y = f(x)$ od a do b

[na intervalu $\langle a, b \rangle$]

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

statický moment vzhledem k ose x , resp. y
statický moment vzhledem k rovině xy ,
resp. xz , resp. yz

moment setrvačnosti vzhledem k ose x ,
resp. y , resp. z

$$df$$

totální [úplný] diferenciál <reálné>
funkce $y = f(\mathbf{x})$

totální [úplný] diferenciál n -tého řádu
<reálné> funkce $y = f(\mathbf{x})$

totální [úplný] diferenciál <reálné>
funkce $y = f(\mathbf{x})$ v bodě \mathbf{a}

totální [úplný] diferenciál n -tého řádu
<reálné> funkce $y = f(\mathbf{x})$ v bodě \mathbf{a}

primitivní funkce k <reálné> funkci f

neurčitý integrál <z> <reálné> funkce
 $y = f(x)$

určitý integrál <z> <reálné> funkce
 $y = f(x)$ od a do b

[na intervalu $\langle a, b \rangle$]

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

statický moment vzhledem k ose x , resp. y
statický moment vzhledem k rovině xy ,
resp. xz , resp. yz

moment setrvačnosti vzhledem k ose x ,
resp. y , resp. z

$$[F(x)]_a^b, F(x)|_a^b$$

S_x , resp. S_y

S_{xy} , resp. S_{xz} , resp. S_{yz}

I_x , resp. I_y , resp. I_z

I_p
 D_{xy} , resp. D_{xz} , resp. D_{yz}

$$\int_A^B (P \, dx + Q \, dy)_C$$

$$\int_A^B (P \, dx + Q \, dy + R \, dz)_C$$

\oint

$$\int_A^B (\mathbf{F} \, d\mathbf{r})_C$$

$$\iint_{\Omega_2} f(x, y) \, dS, \quad \iint_{\Omega_2} f(x, y) \, dx \, dy$$

$$\iiint_{\Omega_3} f(x, y, z) \, dV,$$

$$\iiint_{\Omega_3} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_1^{\infty} a_n, \quad \sum a_n$$

R_n

moment setrvačnosti vzhledem k počátku
deviační moment vzhledem k osám x a y ,
resp. x a z , resp. y a z

křivkový integrál ⟨reálných⟩ funkcií
 $z = P(x, y)$ a $z = Q(x, y)$ po oblouku
rovinné křivky C od A do B

křivkový integrál ⟨reálných⟩ funkcií
 $u = P(x, y, z)$, $u = Q(x, y, z)$ a
 $u = R(x, y, z)$ po oblouku prostorové
křivky C od A do B

znak křivkového integrálu po uzavřené
křivce

křivkový integrál vektoru \mathbf{F} po křivce C
ve vektorovém tvaru $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ od A do B

dvojní [dvojrozměrný] integrál ⟨ z ⟩
⟨reálné⟩ funkce $z = f(x, y)$ přes
rovinnou uzavřenou oblast Ω_2

trojný [trojrozměrný] integrál ⟨ z ⟩
⟨reálné⟩ funkce $u = f(x, y, z)$ přes
prostorovou uzavřenou oblast Ω_3

nekonečná řada se členy a_i ($i = 1, 2, \dots$)

zbytek nekonečné řady po n -tému členu

0.1.11. Elementární funkce ($x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$)

$\operatorname{sgn} x$

$[x]$, $E(x)$

x^s

z^s

x^n, z^n

signum [znaménko] reálného čísla x

celá část ⟨reálného⟩ čísla x

obecná mocnina ⟨reálného⟩ čísla x

s exponentem s ($x > 0, s \in \mathbb{R}$)

obecná mocnina ⟨komplexního⟩ čísla z

s exponentem s ($z \in \mathbb{P}, s \in \mathbb{C}$)

n -tá mocnina ($n \in \mathbb{N}$)

$\sqrt[n]{x}, x^{1/n}$	n -tá odmocnina $\langle z \rangle$ (reálného) čísla x ($x \geq 0, n \in \mathbb{N}$); $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$
$\sqrt[n]{z}, z^{1/n}$	n -tá odmocnina $\langle z \rangle$ (komplexního) čísla z ($z \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}$)
$a^x, \exp_a x$	\langle obecná \rangle exponenciální funkce proměnné x se základem a ($a > 0$)
$a^z, \exp_a z$	\langle obecná \rangle exponenciální funkce proměnné z se základem a ($a \neq 0$)
$e^x, \exp x, e^z, \exp z$	přirozená exponenciální funkce (tj. se základem e)
$\log_a x$	\langle obecná \rangle logaritmická funkce proměnné x se základem a ($x > 0, a > 0, a \neq 1$), logaritmus (reálného) čísla x ($x > 0$) se základem a ($a > 0, a \neq 1$)
$\lg x, \log x$	logaritmická funkce proměnné x se základem 10 ($x > 0$), desítkový [dekadický, Briggsův] logaritmus (reálného) čísla x ($x > 0$)
$\ln x$	přirozená logaritmická funkce proměnné x ($x > 0$), přirozený logaritmus (reálného) čísla x ($x > 0$) (tj. se základem e)
$\ln z$	\langle přirozená \rangle logaritmická funkce proměnné z ($z \in \mathbb{P}$), přirozený logaritmus (komplexního) čísla z ($z \neq 0$)
$\sin x, \sin z$	sinus x , sinus z
$\cos x, \cos z$	kosinus x , kosinus z
$\operatorname{tg} x, \operatorname{tg} z$	tangens x [$x \neq (k + \frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}$], tangens z
$\operatorname{cotg} x, \operatorname{cotg} z$	kotangens x ($x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$), kotangens z
$\sec x$	sekans x [$x \neq (k + \frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}$]
$\operatorname{cosec} x$	kosekans x ($x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$)
$\arcsin x, \arcsin z$	arkussinus x ($x \in (-1, 1)$), arkussinus z
$\arccos x, \arccos z$	arkuskosinus x ($x \in (-1, 1)$), arkuskosinus z
$\operatorname{arctg} x, \operatorname{arctg} z$	arkustangens x , arkustangens z
$\operatorname{arccotg} x, \operatorname{arccotg} z$	arkuskotangens x , arkuskotangens z

$\sinh x$, $\sinh z$	hyperbolický sinus x , hyperbolický sinus z
$\cosh x$, $\cosh z$	hyperbolický kosinus x , hyperbolický kosinus z
$\tgh x$, $\tgh z$	hyperbolický tangens x , hyperbolický tangens z
$\cotgh x$, $\cotgh z$	hyperbolický kotangens x ($x \neq 0$), hyperbolický kotangens z
$\operatorname{argsinh} x$, $\operatorname{argsinh} z$	argument hyperbolického sinu x , argument hyperbolického sinu z
$\operatorname{argcosh} x$, $\operatorname{argcosh} z$	argument hyperbolického kosinu x $[x \in (1, +\infty)]$, argument hyperbolického kosinu z
$\operatorname{artgth} x$, $\operatorname{artgth} z$	argument hyperbolického tangens x $[x \in (-1, 1)]$, argument hyperbolického tangens z
$\operatorname{arcotgh} x$, $\operatorname{arcotgh} z$	argument hyperbolického kotangens x $[x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)]$, argument hyperbolického kotangens z

0.1.12. Speciální funkce

$\Gamma(x)$	funkce gama
$B(p, q)$	funkce beta
$J_p(x)$	Besselovy funkce [cylindrické funkce] prvního druhu
$Y_p(x)$	Besselovy funkce [cylindrické funkce] druhého druhu
$N_p(x)$	Neumannovy funkce
$E_p(x)$	Weberovy funkce
$H_p^{(1)}(x)$, $H_p^{(2)}(x)$	Besselovy funkce [cylindrické funkce] třetího druhu [Hankelovy funkce prvního a druhého druhu]
$\operatorname{Si} x$	integrální sinus [integrál sinus, sinusintegrál]
$\operatorname{Ci} x$	integrální kosinus [integrál kosinus, kosinusintegrál]
$\operatorname{Ei} x$	modifikovaná integrální exponenciální funkce

$\ln x$	integrální logaritmus
$\operatorname{erf} x$	[integrállogaritmus, logaritmusintegrál] funkce chyb [chybová funkce error function]
$\operatorname{erfc} x$	doplňek funkce chyb [error function complement]
$\Phi(x)$	Gaussův pravděpodobnostní integrál [Gaussova funkce chyb]
$F(k, \varphi)$	neúplný eliptický integrál prvního druhu
$E(k, \varphi)$	neúplný eliptický integrál druhého druhu
$K, F(k, \pi/2)$	úplný eliptický integrál prvního druhu
$E, E(k, \pi/2)$	úplný eliptický integrál druhého druhu

0.1.13. Diferenciální geometrie

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$	$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$; vektor skalárního argumentu t
T	délka úseku tečny [tangenta] rovinné křivky
N	délka úseku normály [normála] rovinné křivky
S_T	subtangenta rovinné křivky
S_N	subnormála rovinné křivky
t	délka úseku polární tečny rovinné křivky
n	délka úseku polární normály rovinné křivky
s_t	polární subtangenta rovinné křivky
s_n	polární subnormála rovinné křivky
R, R_1	poloměr <první> křivosti rovinné křivky
κ, κ_1	<první> křivost [flexe] rovinné křivky
R_2	poloměr druhé křivosti [poloměr torze]
κ_2	druhá křivost [torze, kroucenost]
δ_{ik}	Kroneckerův symbol [Kroneckerovo delta]

0.1.14. Laplaceova transformace

$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}f,$	funkce F je Laplaceovým obrazem
$f(t) \doteq F(p), f(t) \doteq F(p)$	funkce f ; Laplaceova transformace
$\mathcal{L}_{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}_{-1}F(p) = f(t),$	funkce f proměnné t
$F(p) \doteq f(t), F(p) \doteq f(t)$	inverzní Laplaceova transformace
$f_1(t) * f_2(t)$	funkce F proměnné p
	konvoluce funkcí f_1, f_2

0.1.15. Počet pravděpodobnosti, matematická statistika a teorie chyb

E_1, E_2, \dots	náhodné jevy
\emptyset, V	nemožný náhodný jev
U	jistý náhodný jev
\bar{E}	opačný náhodný jev k náhodnému jevu E
$P(E)$	pravděpodobnost náhodného jevu E
$P(E_2/E_1)$	podmíněná pravděpodobnost náhodného jevu E_2 za podmínky, že nastal náhodný jev E_1
$P_n(m_1, m_2, \dots, m_n)$	pravděpodobnost, že při n pokusech náhodný jev E_i nastal m_i -krát ($i = 1, 2, \dots, k$); $\sum_{i=1}^k m_i = n$;
	multinomické rozložení
$P_n(m)$	binomické rozložení
ξ, X	náhodné veličiny
$F(x), P(\xi < x)$	distribuční funkce náhodné veličiny
$p(x)$	hustota pravděpodobnosti diskrétní náhodné veličiny
$f(x)$	hustota pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny
$m(\xi - x)^k$	moment k -tého rádu pro diskrétní náhodnou veličinu ξ
$m(\xi - c)^k$	moment k -tého rádu pro spojitu náhodnou veličinu ξ
$m(\xi)$	počáteční moment pro spojitu náhodnou veličinu ξ

$m(\xi - \mu)^k$	centrální moment pro spojitu náhodnou veličinu ξ
$\mu, E\xi$	střední hodnota [očekávaná hodnota] náhodné veličiny
$\sigma^2, D\xi$	rozptyl náhodné veličiny
σ	směrodatná odchylka, střední kvadratická odchylka
v	variační koeficient
γ_1	šikmost
γ_2	špičatost [exces]
$N(\mu, \sigma^2)$	obecné normální rozložení s parametry μ, σ^2
$f(x; \mu, \sigma^2)$	$\langle \text{Gaussova} \rangle$ hustota pravděpodobnosti rozložení $N(\mu, \sigma^2)$
$F(x; \mu, \sigma^2), \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$	$\langle \text{Gaussova} \rangle$ distribuční funkce rozložení $N(\mu, \sigma^2)$
$N(0, 1)$	normované normální rozložení
$f(x; 0, 1), \varphi(x)$	s parametry $\mu = 0, \sigma^2 = 1$
$F(x; 0, 1), \Phi(x)$	$\langle \text{Gaussova} \rangle$ hustota pravděpodobnosti rozložení $N(0, 1)$
\bar{X}	$\langle \text{Gaussova} \rangle$ distribuční funkce rozložení $N(0, 1)$
S^2	výběrový průměr
S	výběrový rozptyl
s^2	výběrová směrodatná odchylka
s	empirický rozptyl
\bar{x}	empirická směrodatná odchylka
\bar{x}'	$\langle \text{empirický} \rangle$ aritmetický průměr
\bar{x}_G	$\langle \text{empirický} \rangle$ vážený aritmetický průměr
\bar{x}'_G	$\langle \text{empirický} \rangle$ geometrický průměr
\bar{W}	$\langle \text{empirický} \rangle$ vážený geometrický průměr
\bar{x}_K	průměrné tempo
\bar{x}'_K	$\langle \text{empirický} \rangle$ kvadratický průměr
\bar{x}_H	$\langle \text{empirický} \rangle$ vážený kvadratický průměr
\bar{x}'_H	$\langle \text{empirický} \rangle$ harmonický průměr
\tilde{x}	$\langle \text{empirický} \rangle$ vážený harmonický průměr
	$\langle \text{empirický} \rangle$ medján

\hat{x}	$\langle \text{empirický} \rangle.$ modus
R	$\langle \text{empirické} \rangle$ rozpětí
d	$\langle \text{empirická} \rangle$ střední odchylka
$v_{\bar{x}}$	výběrový variační koeficient
$s_{xy}, \text{cov}(x, y)$	výběrová kovariance dvojice náhodných veličin x, y
r_{xy}	$\langle \text{empirický} \rangle$ korelační koeficient dvojice náhodných veličin x, y
$[a]$	$\sum_{i=1}^n a_i;$ Gaussův sumační symbol
$[ab]$	$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$
X	skutečná hodnota měřené veličiny
x_i	naměřená hodnota měřené veličiny
ε_i	$\langle \text{nevyhnutelná} \rangle$ skutečná chyba měřené veličiny
Δx	absolutní chyba měřené veličiny
δ	relativní chyba měřené veličiny
\bar{x}	zdánlivá $\langle \text{střední} \rangle$ hodnota měřené veličiny
v_i	zdánlivá [domnělá] chyba [oprava]
m	střední chyba jednotlivé hodnoty [míra rozptýlení]
$m_{\bar{x}}$	střední chyba aritmetického průměru

0.1.16. Regulační technika

$x_v(t)$	vstupní veličina
$x_e(t)$	výstupní veličina
$K(t)$	přenosová funkce
$\sigma(t)$	jednotková skoková funkce
$h(t)$	přechodová funkce
$G(i\omega)$	komplexní frekvenční přenos, frekvenční charakteristika
$\delta(t)$	impulsová funkce, Diracova funkce delta
$f(i\omega)$	spektrum impulsu delta
$g(t)$	impulsová přechodová funkce
$G(p)$	přenosová funkce

0.2. ČÍSELNÉ TABULKY

0.2.1. Tabulky hodnot n^2 , n^3 , \sqrt{n} , $\frac{1}{4}\pi n^2$, πn , $\lg n$ pro n od 1 do 100

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\frac{1}{4}\pi n^2$	πn	$\lg n$
1	1	1	1,000	0,785	3,142	0,000 0
2	4	8	1,414	3,142	6,283	0,301 0
3	9	27	1,732	7,069	9,425	0,477 1
4	16	64	2,000	12,57	12,57	0,602 1
5	25	125	2,236	19,64	15,71	0,699 0
6	36	216	2,449	28,27	18,85	0,778 2
7	49	343	2,646	38,48	21,99	0,845 1
8	64	512	2,828	50,27	25,13	0,903 1
9	81	729	3,000	63,62	28,27	0,954 2
10	100	1 000	3,162	78,54	31,42	1,000 0
11	121	1 331	3,317	95,03	34,56	1,041 4
12	144	1 728	3,464	113,1	37,70	1,079 2
13	169	2 197	3,606	132,7	40,84	1,113 9
14	196	2 744	3,742	153,9	43,98	1,146 1
15	225	3 375	3,873	176,7	47,12	1,176 1
16	256	4 096	4,000	201,1	50,27	1,204 1
17	289	4 913	4,123	227,0	53,41	1,230 4
18	324	5 832	4,243	254,5	56,55	1,255 3
19	361	6 859	4,359	283,5	59,69	1,278 8
20	400	8 000	4,472	314,2	62,83	1,301 0
21	441	9 261	4,583	346,4	65,97	1,322 2
22	484	10 648	4,690	380,1	69,12	1,342 4
23	529	12 167	4,796	415,5	72,26	1,361 7
24	579	13 824	4,899	452,4	75,40	1,380 2
25	625	15 625	5,000	490,9	78,54	1,397 9
26	676	17 576	5,099	530,9	81,68	1,415 0
27	729	19 683	5,196	572,6	84,82	1,431 4
28	784	21 952	5,292	615,8	87,97	1,447 2
29	841	24 389	5,385	660,5	91,11	1,462 4
30	900	27 000	5,477	706,9	94,25	1,477 1
31	961	29 791	5,568	754,8	97,39	1,491 4
32	1 024	32 768	5,657	804,2	100,5	1,505 1
33	1 089	35 937	5,745	855,3	103,7	1,518 5
34	1 156	39 304	5,831	907,9	106,8	1,531 5
35	1 225	42 875	5,916	962,1	110,0	1,544 1
36	1 296	46 656	6,000	1 018	113,1	1,556 3
37	1 369	50 653	6,083	1 075	116,2	1,568 2
38	1 444	54 872	6,164	1 134	119,4	1,579 8
39	1 521	59 319	6,245	1 195	122,5	1,591 1
40	1 600	64 000	6,325	1 257	125,7	1,602 1
41	1 681	68 921	6,403	1 320	128,8	1,612 8
42	1 764	74 088	6,481	1 385	132,0	1,623 2
43	1 849	79 507	6,557	1 452	135,1	1,633 5
44	1 936	85 184	6,633	1 521	138,2	1,643 5
45	2 025	91 125	6,708	1 590	141,4	1,653 2
46	2 116	97 336	6,782	1 662	144,5	1,662 8
47	2 209	103 823	6,856	1 735	147,7	1,672 1
48	2 304	110 592	6,928	1 810	150,8	1,681 2
49	2 401	117 649	7,000	1 886	153,9	1,690 2
50	2 500	125 000	7,071	1 964	157,1	1,699 0
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\frac{1}{4}\pi n^2$	πn	$\lg n$

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\frac{1}{4}\pi n^2$	πn	$\lg n$
51	2 601	132 651	7,141	2 043	160,2	1,707 6
52	2 704	140 608	7,211	2 124	163,4	1,716 0
53	2 809	148 877	7,280	2 206	166,5	1,724 3
54	2 916	157 464	7,349	2 290	169,6	1,732 4
55	3 025	166 375	7,416	2 376	172,8	1,740 4
56	3 136	175 616	7,483	2 463	175,9	1,748 2
57	3 249	185 193	7,550	2 552	179,1	1,755 9
58	3 364	195 112	7,616	2 642	182,2	1,763 4
59	3 481	205 379	7,681	2 734	185,4	1,770 9
60	3 600	216 000	7,746	2 827	188,5	1,778 2
61	3 721	226 981	7,810	2 922	191,6	1,785 3
62	3 844	238 328	7,874	3 019	194,8	1,792 4
63	3 969	250 047	7,937	3 117	197,9	1,799 3
64	4 096	262 144	8,000	3 217	201,1	1,806 2
65	4 225	274 625	8,062	3 318	204,2	1,812 9
66	4 356	287 496	8,124	3 421	207,4	1,819 5
67	4 489	300 763	8,185	3 526	210,5	1,826 1
68	4 624	314 432	8,246	3 632	213,6	1,832 5
69	4 761	328 509	8,307	3 739	216,8	1,838 8
70	4 900	343 000	8,367	3 848	219,9	1,845 1
71	5 041	357 911	8,426	3 959	223,1	1,851 3
72	5 184	373 248	8,485	4 072	226,2	1,857 3
73	5 329	389 017	8,544	4 185	229,3	1,863 3
74	5 476	405 224	8,602	4 301	232,5	1,869 2
75	5 625	421 875	8,660	4 418	235,6	1,875 1
76	5 776	438 976	8,718	4 536	238,8	1,880 8
77	5 929	456 533	8,775	4 657	241,9	1,886 5
78	6 084	474 552	8,832	4 778	245,0	1,892 1
79	6 241	493 039	8,888	4 902	248,2	1,897 6
80	6 400	512 000	8,944	5 027	251,3	1,903 1
81	6 561	531 441	9,000	5 153	254,5	1,908 5
82	6 724	551 368	9,055	5 281	257,6	1,913 8
83	6 889	571 787	9,110	5 411	260,8	1,919 1
84	7 056	592 704	9,165	5 542	263,9	1,924 3
85	7 225	614 125	9,220	5 675	267,0	1,929 4
86	7 396	636 056	9,274	5 809	270,2	1,934 5
87	7 569	658 503	9,327	5 945	273,3	1,939 5
88	7 744	681 472	9,381	6 082	276,5	1,944 5
89	7 921	704 969	9,434	6 221	279,6	1,949 4
90	8 100	729 000	9,487	6 362	282,7	1,954 2
91	8 281	753 571	9,539	6 504	285,9	1,959 0
92	8 464	778 688	9,592	6 648	289,0	1,963 8
93	8 649	804 357	9,644	6 793	292,2	1,968 5
94	8 836	830 584	9,695	6 940	295,3	1,973 1
95	9 025	857 375	9,747	7 088	298,5	1,977 7
96	9 216	884 736	9,798	7 238	301,6	1,982 3
97	9 409	912 673	9,849	7 390	304,7	1,986 8
98	9 604	941 192	9,900	7 543	307,9	1,991 2
99	9 801	970 299	9,950	7 698	311,0	1,995 6
100	10 000	1 000 000	10,000	7 854	314,2	2,000 0
n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\frac{1}{4}\pi n^2$	πn	$\lg n$

2.2. Goniometrické funkce

φ	$\text{arc } \varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{ctg} \varphi$	\uparrow	\downarrow	
0°	0	0,000 0	0,000 0	1,000 0	0,000 0	+ ∞	1,570 8	0 90
6	0,001 7	0,001 7	1,000 0	0,001 7	572,96	1,569 1	54	
12	0,003 5	0,003 5	1,000 0	0,003 5	286,48	1,567 3	48	
18	0,005 2	0,005 2	1,000 0	0,005 2	190,98	1,565 6	42	
24	0,007 0	0,007 0	1,000 0	0,007 0	143,24	1,563 8	36	
30	0,008 7	0,008 7	1,000 0	0,008 7	114,59	1,562 1	30	
36	0,010 5	0,010 5	0,999 9	0,010 5	95,49	1,560 3	24	
42	0,012 2	0,012 2	0,999 9	0,012 2	81,85	1,558 6	18	
48	0,014 0	0,014 0	0,999 9	0,014 0	71,62	1,556 8	12	
54	0,015 7	0,015 7	0,999 9	0,015 7	63,66	1,555 1	6	
1°	0	0,017 5	0,017 5	0,999 8	0,017 5	57,29	1,553 3	0 89
6	0,019 2	0,019 2	0,999 8	0,019 2	52,08	1,551 6	54	
12	0,020 9	0,020 9	0,999 8	0,020 9	47,74	1,549 9	48	
18	0,022 7	0,022 7	0,999 7	0,022 7	44,07	1,548 1	42	
24	0,024 4	0,024 4	0,999 7	0,024 4	40,92	1,546 4	36	
30	0,026 2	0,026 2	0,999 7	0,026 2	38,19	1,544 6	30	
36	0,027 9	0,027 9	0,999 6	0,027 9	35,80	1,542 9	24	
42	0,029 7	0,029 7	0,999 6	0,029 7	33,69	1,541 1	18	
48	0,031 4	0,031 4	0,999 5	0,031 4	31,82	1,539 4	12	
54	0,033 2	0,033 2	0,999 5	0,033 2	30,14	1,537 6	6	
2°	0	0,034 9	0,034 9	0,999 4	0,034 9	28,64	1,535 9	0 88
6	0,036 7	0,036 6	0,999 3	0,036 7	27,27	1,534 1	54	
12	0,038 4	0,038 4	0,999 3	0,038 4	26,03	1,532 4	48	
18	0,040 1	0,040 1	0,999 2	0,040 2	24,90	1,530 7	42	
24	0,041 9	0,041 9	0,999 1	0,041 9	23,86	1,528 9	36	
30	0,043 6	0,043 6	0,999 0	0,043 7	22,90	1,527 2	30	
36	0,045 4	0,045 4	0,999 0	0,045 4	22,02	1,525 4	24	
42	0,047 1	0,047 1	0,998 9	0,047 2	21,20	1,523 7	18	
48	0,048 9	0,048 8	0,998 8	0,048 9	20,45	1,521 9	12	
54	0,050 6	0,050 6	0,998 7	0,050 7	19,74	1,520 2	6	
3°	0	0,052 4	0,052 3	0,998 6	0,052 4	19,08	1,518 4	0 87
6	0,054 1	0,054 1	0,998 5	0,054 2	18,46	1,516 7	54	
12	0,055 9	0,055 8	0,998 4	0,055 9	17,89	1,514 9	48	
18	0,057 6	0,057 6	0,998 3	0,057 7	17,34	1,513 2	42	
24	0,059 3	0,059 3	0,998 2	0,059 4	16,83	1,511 5	36	
30	0,061 1	0,061 0	0,998 1	0,061 2	16,35	1,509 7	30	
36	0,062 8	0,062 8	0,998 0	0,062 9	15,89	1,508 0	24	
42	0,064 6	0,064 5	0,997 9	0,064 7	15,46	1,506 2	18	
48	0,066 3	0,066 3	0,997 8	0,066 4	15,06	1,504 5	12	
54	0,068 1	0,068 0	0,997 7	0,068 2	14,67	1,502 7	6	
4°	0	0,069 8	0,069 8	0,997 6	0,069 9	14,30	1,501 0	0 86
6	0,071 6	0,071 5	0,997 4	0,071 7	13,95	1,499 2	54	
12	0,073 3	0,073 2	0,997 3	0,073 4	13,62	1,497 5	48	
18	0,075 0	0,075 0	0,997 2	0,075 2	13,30	1,495 7	42	
24	0,076 8	0,076 7	0,997 1	0,076 9	13,00	1,494 0	36	
30	0,078 5	0,078 5	0,996 9	0,078 7	12,71	1,492 3	30	
36	0,080 3	0,080 2	0,996 8	0,080 5	12,43	1,490 5	24	
42	0,082 0	0,081 9	0,996 6	0,082 2	12,16	1,488 8	18	
48	0,083 8	0,083 7	0,996 5	0,084 0	11,91	1,487 0	12	
54	0,085 5	0,085 4	0,996 3	0,085 7	11,66	1,485 3	6	
5°	0	0,087 3	0,087 2	0,996 2	0,087 5	11,43	1,483 5	0 85
↓	↓	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	$\operatorname{ctg} \varphi$	$\operatorname{tg} \varphi$	$\text{arc } \varphi$	φ	

φ	arc φ	sin φ	cos φ	tg φ	cotg φ	\uparrow	\uparrow
5 0	0,087 3	0,087 2	0,996 2	0,087 5	11,430	1,483 5	0 85
6	0,089 0	0,088 9	0,996 0	0,089 2	11,205	1,481 8	54
12	0,090 8	0,090 6	0,995 9	0,091 0	10,988	1,480 0	48
18	0,092 5	0,092 4	0,995 7	0,092 8	10,780	1,478 3	42
24	0,094 2	0,094 1	0,995 6	0,094 5	10,579	1,476 5	36
30	0,096 0	0,095 8	0,995 4	0,096 3	10,385	1,474 8	30
36	0,097 7	0,097 6	0,995 2	0,098 1	10,199	1,473 1	24
42	0,099 5	0,099 3	0,995 1	0,099 8	10,019	1,471 3	18
48	0,101 2	0,101 1	0,994 9	0,101 6	9,845	1,469 6	12
54	0,103 0	0,102 8	0,994 7	0,103 3	9,677	1,467 8	6
6 0	0,104 7	0,104 5	0,994 5	0,105 1	9,514	1,466 1	0 84
6	0,106 5	0,106 3	0,994 3	0,106 9	9,357	1,464 3	54
12	0,108 2	0,108 0	0,994 2	0,108 6	9,205	1,462 6	48
18	0,110 0	0,109 7	0,994 0	0,110 4	9,058	1,460 8	42
24	0,111 7	0,111 5	0,993 8	0,112 2	8,915	1,459 1	36
30	0,113 4	0,113 2	0,993 6	0,113 9	8,777	1,457 3	30
36	0,115 2	0,114 9	0,993 4	0,115 7	8,643	1,455 6	24
42	0,116 9	0,116 7	0,993 2	0,117 5	8,513	1,453 9	18
48	0,118 7	0,118 4	0,993 0	0,119 2	8,386	1,452 1	12
54	0,120 4	0,120 1	0,992 8	0,121 0	8,264	1,450 4	6
7 0	0,122 2	0,121 9	0,992 5	0,122 8	8,144	1,448 6	0 83
6	0,123 9	0,123 6	0,992 3	0,124 6	8,028	1,446 9	54
12	0,125 7	0,125 3	0,992 1	0,126 3	7,916	1,445 1	48
18	0,127 4	0,127 1	0,991 9	0,128 1	7,806	1,443 4	42
24	0,129 2	0,128 8	0,991 7	0,129 9	7,700	1,441 6	36
30	0,130 9	0,130 5	0,991 4	0,131 7	7,596	1,439 9	30
36	0,132 6	0,132 3	0,991 2	0,133 4	7,495	1,438 2	24
42	0,134 4	0,134 0	0,991 0	0,135 2	7,396	1,436 4	18
48	0,136 1	0,135 7	0,990 7	0,137 0	7,300	1,434 7	12
54	0,137 9	0,137 4	0,990 5	0,138 8	7,207	1,432 9	6
8 0	0,139 6	0,139 2	0,990 3	0,140 5	7,115	1,431 2	0 82
6	0,141 4	0,140 9	0,990 0	0,142 3	7,026	1,429 4	54
12	0,143 1	0,142 6	0,989 8	0,144 1	6,940	1,427 7	48
18	0,144 9	0,144 4	0,989 5	0,145 9	6,855	1,425 9	42
24	0,146 6	0,146 1	0,989 3	0,147 7	6,772	1,424 2	36
30	0,148 4	0,147 8	0,989 0	0,149 5	6,691	1,422 4	30
36	0,150 1	0,149 5	0,988 8	0,151 2	6,612	1,420 7	24
42	0,151 8	0,151 3	0,988 5	0,153 0	6,535	1,419 0	18
48	0,153 6	0,153 0	0,988 2	0,154 8	6,460	1,417 2	12
54	0,155 3	0,154 7	0,988 0	0,156 6	6,386	1,415 5	6
9 0	0,157 1	0,156 4	0,987 7	0,158 4	6,314	1,413 7	0 81
6	0,158 8	0,158 2	0,987 4	0,160 2	6,243	1,412 0	54
12	0,160 6	0,159 9	0,987 1	0,162 0	6,174	1,410 2	48
18	0,162 3	0,161 6	0,986 9	0,163 8	6,107	1,408 5	42
24	0,164 1	0,163 3	0,986 6	0,165 5	6,041	1,406 7	36
30	0,165 8	0,165 0	0,986 3	0,167 3	5,976	1,405 0	30
36	0,167 6	0,166 8	0,986 0	0,169 1	5,912	1,403 2	24
42	0,169 3	0,168 5	0,985 7	0,170 9	5,850	1,401 5	18
48	0,171 0	0,170 2	0,985 4	0,172 7	5,789	1,399 8	12
54	0,172 8	0,171 9	0,985 1	0,174 5	5,730	1,398 0	6
10 0	0,174 5	0,173 6	0,984 8	0,176 3	5,671	1,396 3	0 80
↓	↓	cos φ	sin φ	cotg φ	tg φ	arc φ	φ

φ		arc φ	sin φ	cos φ	tg φ	cotg φ	\uparrow	\uparrow
10	0	0,174 5	0,173 6	0,984 8	0,176 3	5,671	1,396 3	0 80
6		0,176 3	0,175 4	0,984 5	0,178 1	5,614	1,394 5	54
12		0,178 0	0,177 1	0,984 2	0,179 9	5,558	1,392 8	48
18		0,179 8	0,178 8	0,983 9	0,181 7	5,503	1,391 0	42
24		0,181 5	0,180 5	0,983 6	0,183 5	5,449	1,389 3	36
30		0,183 3	0,182 2	0,983 3	0,185 3	5,396	1,387 5	30
36		0,185 0	0,184 0	0,982 9	0,187 1	5,343	1,385 8	24
42		0,186 8	0,185 7	0,982 6	0,189 0	5,292	1,384 0	18
48		0,188 5	0,187 4	0,982 3	0,190 8	5,242	1,382 3	12
54		0,190 2	0,189 1	0,982 0	0,192 6	5,193	1,380 6	6
11	0	0,192 0	0,190 8	0,981 6	0,194 4	5,145	1,378 8	0 79
6		0,193 7	0,192 5	0,981 3	0,196 2	5,097	1,377 1	54
12		0,195 5	0,194 2	0,981 0	0,198 0	5,050	1,375 3	48
18		0,197 2	0,195 9	0,980 6	0,199 8	5,005	1,373 6	42
24		0,199 0	0,197 7	0,980 3	0,201 6	4,959	1,371 8	36
30		0,200 7	0,199 4	0,979 9	0,203 5	4,915	1,370 1	30
36		0,202 5	0,201 1	0,979 6	0,205 3	4,872	1,368 3	24
42		0,204 2	0,202 8	0,979 2	0,207 1	4,829	1,366 6	18
48		0,205 9	0,204 5	0,978 9	0,208 9	4,787	1,364 8	12
54		0,207 7	0,206 2	0,978 5	0,210 7	4,745	1,363 1	6
12	0	0,209 4	0,207 9	0,978 1	0,212 6	4,705	1,361 4	0 78
6		0,211 2	0,209 6	0,977 8	0,214 4	4,665	1,359 6	54
12		0,212 9	0,211 3	0,977 4	0,216 2	4,625	1,357 9	48
18		0,214 7	0,213 0	0,977 0	0,218 0	4,586	1,356 1	42
24		0,216 4	0,214 7	0,976 7	0,219 9	4,548	1,354 4	36
30		0,218 2	0,216 4	0,976 3	0,221 7	4,511	1,352 6	30
36		0,219 9	0,218 1	0,975 9	0,223 5	4,474	1,350 9	24
42		0,221 7	0,219 8	0,975 5	0,225 4	4,437	1,349 1	18
48		0,223 4	0,221 5	0,975 1	0,227 2	4,402	1,347 4	12
54		0,225 1	0,223 3	0,974 8	0,229 0	4,366	1,345 6	6
13	0	0,226 9	0,225 0	0,974 4	0,230 9	4,331	1,343 9	0 77
6		0,228 6	0,226 7	0,974 0	0,232 7	4,297	1,342 2	54
12		0,230 4	0,228 4	0,973 6	0,234 5	4,264	1,340 4	48
18		0,232 1	0,230 0	0,973 2	0,236 4	4,230	1,338 7	42
24		0,233 9	0,231 7	0,972 8	0,238 2	4,198	1,336 9	36
30		0,235 6	0,233 4	0,972 4	0,240 1	4,165	1,335 2	30
36		0,237 4	0,235 1	0,972 0	0,241 9	4,134	1,333 4	24
42		0,239 1	0,236 8	0,971 5	0,243 8	4,102	1,331 7	18
48		0,240 9	0,238 5	0,971 1	0,245 6	4,071	1,329 9	12
54		0,242 6	0,240 2	0,970 7	0,247 5	4,041	1,328 2	6
14	0	0,244 3	0,241 9	0,970 3	0,249 3	4,011	1,326 5	0 76
6		0,246 1	0,243 6	0,969 9	0,251 2	3,981	1,324 7	54
12		0,247 8	0,245 3	0,969 4	0,253 0	3,952	1,323 0	48
18		0,249 6	0,247 0	0,969 0	0,254 9	3,923	1,321 2	42
24		0,251 3	0,248 7	0,968 6	0,256 8	3,895	1,319 5	36
30		0,253 1	0,250 4	0,968 1	0,258 6	3,867	1,317 7	30
36		0,254 8	0,252 1	0,967 7	0,260 5	3,839	1,316 0	24
42		0,256 6	0,253 8	0,967 3	0,262 3	3,812	1,314 2	18
48		0,258 3	0,255 4	0,966 8	0,264 2	3,785	1,312 5	12
54		0,260 1	0,257 1	0,966 4	0,266 1	3,758	1,310 7	6
15	0	0,261 8	0,258 8	0,965 9	0,267 9	3,732	1,309 0	0 75
\downarrow	\downarrow	cos φ	sin φ	cotg φ	tg φ	arc φ	φ	\circ

φ	$\text{arc } \varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{cotg} \varphi$	\uparrow	\uparrow
15 0	0,261 8	0,258 8	0,965 9	0,267 9	3,732	1,309 0	0 75
6	0,263 5	0,260 5	0,965 5	0,269 8	3,706	1,307 3	54
12	0,265 3	0,262 2	0,965 0	0,271 7	3,681	1,305 5	48
18	0,267 0	0,263 9	0,964 6	0,273 6	3,655	1,303 8	42
24	0,268 8	0,265 6	0,964 1	0,275 4	3,630	1,302 0	36
30	0,270 5	0,267 2	0,963 6	0,277 3	3,606	1,300 3	30
36	0,272 3	0,268 9	0,963 2	0,279 2	3,582	1,298 5	24
42	0,274 0	0,270 6	0,962 7	0,281 1	3,558	1,296 8	18
48	0,275 8	0,272 3	0,962 2	0,283 0	3,534	1,295 0	12
54	0,277 5	0,274 0	0,961 7	0,284 9	3,511	1,293 3	6
16 0	0,279 3	0,275 6	0,961 3	0,286 7	3,487	1,291 5	0 74
6	0,281 0	0,277 3	0,960 8	0,288 6	3,465	1,289 8	54
12	0,282 7	0,279 0	0,960 3	0,290 5	3,442	1,288 1	48
18	0,284 5	0,280 7	0,959 8	0,292 4	3,420	1,286 3	42
24	0,286 2	0,282 3	0,959 3	0,294 3	3,398	1,284 6	36
30	0,288 0	0,284 0	0,958 8	0,296 2	3,376	1,282 8	30
36	0,289 7	0,285 7	0,958 3	0,298 1	3,354	1,281 1	24
42	0,291 5	0,287 4	0,957 8	0,300 0	3,333	1,279 3	18
48	0,293 2	0,289 0	0,957 3	0,301 9	3,312	1,277 6	12
54	0,295 0	0,290 7	0,956 8	0,303 8	3,291	1,275 8	6
17 0	0,296 7	0,292 4	0,956 3	0,305 7	3,271	1,274 1	0 73
6	0,298 5	0,294 0	0,955 8	0,307 6	3,251	1,272 3	54
12	0,300 2	0,295 7	0,955 3	0,309 6	3,230	1,270 6	48
18	0,301 9	0,297 4	0,954 8	0,311 5	3,211	1,268 9	42
24	0,303 7	0,299 0	0,954 2	0,313 4	3,191	1,267 1	36
30	0,305 4	0,300 7	0,953 7	0,315 3	3,172	1,265 4	30
36	0,307 2	0,302 4	0,953 2	0,317 2	3,152	1,263 6	24
42	0,308 9	0,304 0	0,952 7	0,319 1	3,133	1,261 9	18
48	0,310 7	0,305 7	0,952 1	0,321 1	3,115	1,260 1	12
54	0,312 4	0,307 4	0,951 6	0,323 0	3,096	1,258 4	6
18 0	0,314 2	0,309 0	0,951 1	0,324 9	3,078	1,256 6	0 72
6	0,315 9	0,310 7	0,950 5	0,326 9	3,060	1,254 9	54
12	0,317 6	0,312 3	0,950 0	0,328 8	3,042	1,253 1	48
18	0,319 4	0,314 0	0,949 4	0,330 7	3,024	1,251 4	42
24	0,321 1	0,315 6	0,948 9	0,332 7	3,006	1,249 7	36
30	0,322 9	0,317 3	0,948 3	0,334 6	2,989	1,247 9	30
36	0,324 6	0,319 0	0,947 8	0,336 5	2,971	1,246 2	24
42	0,326 4	0,320 6	0,947 2	0,338 5	2,954	1,244 4	18
48	0,328 1	0,322 3	0,946 6	0,340 4	2,937	1,242 7	12
54	0,329 9	0,323 9	0,946 1	0,342 4	2,921	1,240 9	6
19 0	0,331 6	0,325 6	0,945 5	0,344 3	2,904	1,239 2	0 71
6	0,333 4	0,327 2	0,944 9	0,346 3	2,888	1,237 4	54
12	0,335 1	0,328 9	0,944 4	0,348 2	2,872	1,235 7	48
18	0,336 8	0,330 5	0,943 8	0,350 2	2,856	1,233 9	42
24	0,338 6	0,332 2	0,943 2	0,352 2	2,840	1,232 2	36
30	0,340 3	0,333 8	0,942 6	0,354 1	2,824	1,230 5	30
36	0,342 1	0,335 5	0,942 1	0,356 1	2,808	1,228 7	24
42	0,343 8	0,337 1	0,941 5	0,358 1	2,793	1,227 0	18
48	0,345 6	0,338 7	0,940 9	0,360 0	2,778	1,225 2	12
54	0,347 3	0,340 4	0,940 3	0,362 0	2,762	1,223 5	6
20 0	0,349 1	0,342 0	0,939 7	0,364 0	2,747	1,221 7	0 70
\downarrow	\downarrow	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	$\operatorname{cotg} \varphi$	$\operatorname{tg} \varphi$	$\text{arc } \varphi$	φ

φ	arc φ	sin φ	cos φ	tg φ	cotg φ	\uparrow	\uparrow	
20	0	0,349 1	0,342 0	0,939 7	0,364 0	2,747 5	1,221 7	0 70
6	0,350 8	0,343 7	0,939 1	0,365 9	2,732 6	1,220 0	54	
12	0,352 6	0,345 3	0,938 5	0,367 9	2,717 9	1,218 2	48	
18	0,354 3	0,346 9	0,937 9	0,369 9	2,703 4	1,216 5	42	
24	0,356 0	0,348 6	0,937 3	0,371 9	2,688 9	1,214 7	36	
30	0,357 8	0,350 2	0,936 7	0,373 9	2,674 6	1,213 0	30	
36	0,359 5	0,351 8	0,936 1	0,375 9	2,660 5	1,211 3	24	
42	0,361 3	0,353 5	0,935 4	0,377 9	2,646 4	1,209 5	18	
48	0,363 0	0,355 1	0,934 8	0,379 9	2,632 5	1,207 8	12	
54	0,364 8	0,356 7	0,934 2	0,381 9	2,618 7	1,206 0	6	
21	0	0,366 5	0,358 4	0,933 6	0,383 9	2,605 1	1,204 3	0 69
6	0,368 3	0,360 0	0,933 0	0,385 9	2,591 6	1,202 5	54	
12	0,370 0	0,361 6	0,932 3	0,387 9	2,578 2	1,200 8	48	
18	0,371 8	0,363 3	0,931 7	0,389 9	2,564 9	1,199 0	42	
24	0,373 5	0,364 9	0,931 1	0,391 9	2,551 7	1,197 3	36	
30	0,375 2	0,366 5	0,930 4	0,393 9	2,538 6	1,195 6	30	
36	0,377 0	0,368 1	0,929 8	0,395 9	2,525 7	1,193 8	24	
42	0,378 7	0,369 7	0,929 1	0,397 9	2,512 9	1,192 1	18	
48	0,380 5	0,371 4	0,928 5	0,400 0	2,500 2	1,190 3	12	
54	0,382 2	0,373 0	0,927 8	0,402 0	2,487 6	1,188 6	6	
22	0	0,384 0	0,374 6	0,927 2	0,404 0	2,475 1	1,186 8	0 68
6	0,385 7	0,376 2	0,926 5	0,406 1	2,462 7	1,185 1	54	
12	0,387 5	0,377 8	0,925 9	0,408 1	2,450 4	1,183 3	48	
18	0,389 2	0,379 5	0,925 2	0,410 1	2,438 3	1,181 6	42	
24	0,391 0	0,381 1	0,924 5	0,412 2	2,426 2	1,179 8	36	
30	0,392 7	0,382 7	0,923 9	0,414 2	2,414 2	1,178 1	30	
36	0,394 4	0,384 3	0,923 2	0,416 3	2,402 3	1,176 4	24	
42	0,396 2	0,385 9	0,922 5	0,418 3	2,390 6	1,174 6	18	
48	0,397 9	0,387 5	0,921 9	0,420 4	2,378 9	1,172 9	12	
54	0,399 7	0,389 1	0,921 2	0,422 4	2,367 3	1,171 1	6	
23	0	0,401 4	0,390 7	0,920 5	0,424 5	2,355 9	1,169 4	0 67
6	0,403 2	0,392 3	0,919 8	0,426 5	2,344 5	1,167 6	54	
12	0,404 9	0,393 9	0,919 1	0,428 6	2,333 2	1,165 9	48	
18	0,406 7	0,395 5	0,918 4	0,430 7	2,322 0	1,164 1	42	
24	0,408 4	0,397 1	0,917 8	0,432 7	2,310 9	1,162 4	36	
30	0,410 2	0,398 7	0,917 1	0,434 8	2,299 8	1,160 6	30	
36	0,411 9	0,400 3	0,916 4	0,436 9	2,288 9	1,158 9	24	
42	0,413 6	0,401 9	0,915 7	0,439 0	2,278 1	1,157 2	18	
48	0,415 4	0,403 5	0,915 0	0,441 1	2,267 3	1,155 4	12	
54	0,417 1	0,405 1	0,914 3	0,443 1	2,256 6	1,153 7	6	
24	0	0,418 9	0,406 7	0,913 5	0,445 2	2,246 0	1,151 9	0 66
6	0,420 6	0,408 3	0,912 8	0,447 3	2,235 5	1,150 2	54	
12	0,422 4	0,409 9	0,912 1	0,449 4	2,225 1	1,148 4	48	
18	0,424 1	0,411 5	0,911 4	0,451 5	2,214 8	1,146 7	42	
24	0,425 9	0,413 1	0,910 7	0,453 6	2,204 5	1,144 9	36	
30	0,427 6	0,414 7	0,910 0	0,455 7	2,194 3	1,143 2	30	
36	0,429 4	0,416 3	0,909 2	0,457 8	2,184 2	1,141 4	24	
42	0,431 1	0,417 9	0,908 5	0,459 9	2,174 2	1,139 7	18	
48	0,432 8	0,419 5	0,907 8	0,462 1	2,164 2	1,138 0	12	
54	0,434 6	0,421 0	0,907 0	0,464 2	2,154 3	1,136 2	6	
25	0	0,436 3	0,422 6	0,906 3	0,466 3	2,144 5	1,134 5	0 65
↓	↓	cos φ	sin φ	cotg φ	tg φ	arc φ	φ	°

φ	arc φ	sin φ	cos φ	tg φ	cotg φ	\uparrow	\uparrow	
25	0	0,436 3	0,422 6	0,906 3	0,466 3	2,144 5	1,134 5	0 65
6	0,438 1	0,424 2	0,905 6	0,468 4	2,134 8	1,132 7	54	
12	0,439 8	0,425 8	0,904 8	0,470 6	2,125 1	1,131 0	48	
18	0,441 6	0,427 4	0,904 1	0,472 7	2,115 5	1,129 2	42	
24	0,443 3	0,428 9	0,903 3	0,474 8	2,106 0	1,127 5	36	
30	0,445 1	0,430 5	0,902 6	0,477 0	2,096 5	1,125 7	30	
36	0,446 8	0,432 1	0,901 8	0,479 1	2,087 2	1,124 0	24	
42	0,448 5	0,433 7	0,901 1	0,481 3	2,077 8	1,122 2	18	
48	0,450 3	0,435 2	0,900 3	0,483 4	2,068 6	1,120 5	12	
54	0,452 0	0,436 8	0,899 6	0,485 6	2,059 4	1,118 8	6	
26	0	0,453 8	0,438 4	0,898 8	0,487 7	2,050 3	1,117 0	0 64
6	0,455 5	0,439 9	0,898 0	0,489 9	2,041 3	1,115 3	54	
12	0,457 3	0,441 5	0,897 3	0,492 1	2,032 3	1,113 5	48	
18	0,459 0	0,443 1	0,896 5	0,494 2	2,023 3	1,111 8	42	
24	0,460 8	0,444 6	0,895 7	0,496 4	2,014 5	1,110 0	36	
30	0,462 5	0,446 2	0,894 9	0,498 6	2,005 7	1,108 3	30	
36	0,464 3	0,447 8	0,894 2	0,500 8	1,997 0	1,106 5	24	
42	0,466 0	0,449 3	0,893 4	0,502 9	1,988 3	1,104 8	18	
48	0,467 7	0,450 9	0,892 6	0,505 1	1,979 7	1,103 0	12	
54	0,469 5	0,452 4	0,891 8	0,507 3	1,971 1	1,101 3	6	
27	0	0,471 2	0,454 0	0,891 0	0,509 5	1,962 6	1,099 6	0 63
6	0,473 0	0,455 5	0,890 2	0,511 7	1,954 2	1,097 8	54	
12	0,474 7	0,457 1	0,889 4	0,513 9	1,945 8	1,096 1	48	
18	0,476 5	0,458 6	0,888 6	0,516 1	1,937 5	1,094 3	42	
24	0,478 2	0,460 2	0,887 8	0,518 4	1,929 2	1,092 6	36	
30	0,480 0	0,461 7	0,887 0	0,520 6	1,921 0	1,090 8	30	
36	0,481 7	0,463 3	0,886 2	0,522 8	1,912 8	1,089 1	24	
42	0,483 5	0,464 8	0,885 4	0,525 0	1,904 7	1,087 3	18	
48	0,485 2	0,466 4	0,884 6	0,527 2	1,896 7	1,085 6	12	
54	0,486 9	0,467 9	0,883 8	0,529 5	1,888 7	1,083 8	6	
28	0	0,488 7	0,469 5	0,882 9	0,531 7	1,880 7	1,082 1	0 62
6	0,490 4	0,471 0	0,882 1	0,534 0	1,872 8	1,080 4	54	
12	0,492 2	0,472 6	0,881 3	0,536 2	1,865 0	1,078 6	48	
18	0,493 9	0,474 1	0,880 5	0,538 4	1,857 2	1,076 9	42	
24	0,495 7	0,475 6	0,879 6	0,540 7	1,849 5	1,075 1	36	
30	0,497 4	0,477 2	0,878 8	0,543 0	1,841 8	1,073 4	30	
36	0,499 2	0,478 7	0,878 0	0,545 2	1,834 1	1,071 6	24	
42	0,500 9	0,480 2	0,877 1	0,547 5	1,826 5	1,069 9	18	
48	0,502 7	0,481 8	0,876 3	0,549 8	1,819 0	1,068 1	12	
54	0,504 4	0,483 3	0,875 5	0,552 0	1,811 5	1,066 4	6	
29	0	0,506 1	0,484 8	0,874 6	0,554 3	1,804 0	1,064 7	0 61
6	0,507 9	0,486 3	0,873 8	0,556 6	1,796 6	1,062 9	54	
12	0,509 6	0,487 9	0,872 9	0,558 9	1,789 3	1,061 2	48	
18	-0,511 4	0,489 4	0,872 1	0,561 2	1,782 0	1,059 4	42	
24	0,513 1	0,490 9	0,871 2	0,563 5	1,774 7	1,057 7	36	
30	0,514 9	0,492 4	0,870 4	0,565 8	1,767 5	1,055 9	30	
36	0,516 6	0,493 9	0,869 5	0,568 1	1,760 3	1,054 2	24	
42	0,518 4	0,495 5	0,868 6	0,570 4	1,753 2	1,052 4	18	
48	0,520 1	0,497 0	0,867 8	0,572 7	1,746 1	1,050 7	12	
54	0,521 9	0,498 5	0,866 9	0,575 0	1,739 1	1,048 9	6	
30	0	0,523 6	0,500 0	0,866 0	0,577 4	1,732 1	1,047 2	0 60
		↓	cos φ	sin φ	cotg φ	tg φ	arc φ	φ

φ	arc φ	sin φ	cos φ	tg φ	cotg φ	\uparrow	\uparrow	
30	0	0,523 6	0,500 0	0,866 0	0,577 4	1,732 1	1,047 2	0 60
6	0,525 3	0,501 5	0,865 2	0,579 7	1,725 1	1,045 5	54	
12	0,527 1	0,503 0	0,864 3	0,582 0	1,718 2	1,043 7	48	
18	0,528 8	0,504 5	0,863 4	0,584 4	1,711 3	1,042 0	42	
24	0,530 6	0,506 0	0,862 5	0,586 7	1,704 5	1,040 2	36	
30	0,532 3	0,507 5	0,861 6	0,589 0	1,697 7	1,038 5	30	
36	0,534 1	0,509 0	0,860 7	0,591 4	1,690 9	1,036 7	24	
42	0,535 8	0,510 5	0,859 9	0,593 8	1,684 2	1,035 0	18	
48	0,537 6	0,512 0	0,859 0	0,596 1	1,677 5	1,033 2	12	
54	0,539 3	0,513 5	0,858 1	0,598 5	1,670 9	1,031 5	6	
31	0	0,541 1	0,515 0	0,857 2	0,600 9	1,664 3	1,029 7	0 59
6	0,542 8	0,516 5	0,856 3	0,603 2	1,657 7	1,028 0	54	
12	0,544 5	0,518 0	0,855 4	0,605 6	1,651 2	1,026 3	48	
18	0,546 3	0,519 5	0,854 5	0,608 0	1,644 7	1,024 5	42	
24	0,548 0	0,521 0	0,853 6	0,610 4	1,638 3	1,022 8	36	
30	0,549 8	0,522 5	0,852 6	0,612 8	1,631 9	1,021 0	30	
36	0,551 5	0,524 0	0,851 7	0,615 2	1,625 5	1,019 3	24	
42	0,553 3	0,525 5	0,850 8	0,617 6	1,619 1	1,017 5	18	
48	0,555 0	0,527 0	0,849 9	0,620 0	1,612 8	1,015 8	12	
54	0,556 8	0,528 4	0,849 0	0,622 4	1,606 6	1,014 0	6	
32	0	0,558 5	0,529 9	0,848 0	0,624 9	1,600 3	1,012 3	0 58
6	0,560 3	0,531 4	0,847 1	0,627 3	1,594 1	1,010 5	54	
12	0,562 0	0,532 9	0,846 2	0,629 7	1,588 0	1,008 8	48	
18	0,563 7	0,534 4	0,845 3	0,632 2	1,581 8	1,007 1	42	
24	0,565 5	0,535 8	0,844 3	0,634 6	1,575 7	1,005 3	36	
30	0,567 2	0,537 3	0,843 4	0,637 1	1,569 7	1,003 6	30	
36	0,569 0	0,538 8	0,842 5	0,639 5	1,563 7	1,001 8	24	
42	0,570 7	0,540 2	0,841 5	0,642 0	1,557 7	1,000 1	18	
48	0,572 5	0,541 7	0,840 6	0,644 5	1,551 7	0,998 3	12	
54	0,574 2	0,543 2	0,839 6	0,646 9	1,545 8	0,996 6	6	
33	0	0,576 0	0,544 6	0,838 7	0,649 4	1,539 9	0,994 8	0 57
6	0,577 7	0,546 1	0,837 7	0,651 9	1,534 0	0,993 1	54	
12	0,579 4	0,547 6	0,836 8	0,654 4	1,528 2	0,991 3	48	
18	0,581 2	0,549 0	0,835 8	0,656 9	1,522 4	0,989 6	42	
24	0,582 9	0,550 5	0,834 8	0,659 4	1,516 6	0,987 9	36	
30	0,584 7	0,551 9	0,833 9	0,661 9	1,510 8	0,986 1	30	
36	0,586 4	0,553 4	0,832 9	0,664 4	1,505 1	0,984 4	24	
42	0,588 2	0,554 8	0,832 0	0,666 9	1,499 4	0,982 6	18	
48	0,589 9	0,556 3	0,831 0	0,669 4	1,493 8	0,980 9	12	
54	0,591 7	0,557 7	0,830 0	0,672 0	1,488 2	0,979 1	6	
34	0	0,593 4	0,559 2	0,829 0	0,674 5	1,482 6	0,977 4	0 56
6	0,595 2	0,560 6	0,828 1	0,677 1	1,477 0	0,975 6	54	
12	0,596 9	0,562 1	0,827 1	0,679 6	1,471 5	0,973 9	48	
18	0,598 6	0,563 5	0,826 1	0,682 2	1,465 9	0,972 1	42	
24	0,600 4	0,565 0	0,825 1	0,684 7	1,460 5	0,970 4	36	
30	0,602 1	0,566 4	0,824 1	0,687 3	1,455 0	0,968 7	30	
36	0,603 9	0,567 8	0,823 1	0,689 9	1,449 6	0,966 9	24	
42	0,605 6	0,569 3	0,822 1	0,692 4	1,444 2	0,965 2	18	
48	0,607 4	0,570 7	0,821 1	0,695 0	1,438 8	0,963 4	12	
54	0,609 1	0,572 1	0,820 2	0,697 6	1,433 5	0,961 7	6	
35	0	0,610 9	0,573 6	0,819 2	0,700 2	1,428 1	0,959 9	0 55
↓	↓	cos φ	sin φ	cotg φ	tg φ	arc φ	φ	°

φ	arc φ	sin φ	cos φ	tg φ	cotg φ	\uparrow	\uparrow	
35	0	0,610 9	0,573 6	0,819 2	0,700 2	1,428 1	0,959 9	0 55
6	0,612 6	0,575 0	0,818 1	0,702 8	1,422 9	0,958 2	54	
12	0,614 4	0,576 4	0,817 1	0,705 4	1,417 6	0,956 4	48	
18	0,616 1	0,577 9	0,816 1	0,708 0	1,412 4	0,954 7	42	
24	0,617 8	0,579 3	0,815 1	0,710 7	1,407 1	0,952 9	36	
30	0,619 6	0,580 7	0,814 1	0,713 3	1,401 9	0,951 2	30	
36	0,621 3	0,582 1	0,813 1	0,715 9	1,396 8	0,949 5	24	
42	0,623 1	0,583 5	0,812 1	0,718 6	1,391 6	0,947 7	18	
48	0,624 8	0,585 0	0,811 1	0,721 2	1,386 5	0,946 0	12	
54	0,626 6	0,586 4	0,810 0	0,723 9	1,381 4	0,944 2	6	
36	0	0,628 3	0,587 8	0,809 0	0,726 5	1,376 4	0,942 5	0 54
6	0,630 1	0,589 2	0,808 0	0,729 2	1,371 3	0,940 7	54	
12	0,631 8	0,590 6	0,807 0	0,731 9	1,366 3	0,939 0	48	
18	0,633 6	0,592 0	0,805 9	0,734 6	1,361 3	0,937 2	42	
24	0,635 3	0,593 4	0,804 9	0,737 3	1,356 4	0,935 5	36	
30	0,637 0	0,594 8	0,803 9	0,740 0	1,351 4	0,933 8	30	
36	0,638 8	0,596 2	0,802 8	0,742 7	1,346 5	0,932 0	24	
42	0,640 5	0,597 6	0,801 8	0,745 4	1,341 6	0,930 3	18	
48	0,642 3	0,599 0	0,800 7	0,748 1	1,336 7	0,928 5	12	
54	0,644 0	0,600 4	0,799 7	0,750 8	1,331 9	0,926 8	6	
37	0	0,645 8	0,601 8	0,798 6	0,753 6	1,327 0	0,925 0	0 53
6	0,647 5	0,603 2	0,797 6	0,756 3	1,322 2	0,923 3	54	
12	0,649 3	0,604 6	0,796 5	0,759 0	1,317 5	0,921 5	48	
18	0,651 0	0,606 0	0,795 5	0,761 8	1,312 7	0,919 8	42	
24	0,652 8	0,607 4	0,794 4	0,764 6	1,307 9	0,918 0	36	
30	0,654 5	0,608 8	0,793 4	0,767 3	1,303 2	0,916 3	30	
36	0,656 2	0,610 1	0,792 3	0,770 1	1,298 5	0,914 6	24	
42	0,658 0	0,611 5	0,791 2	0,772 9	1,293 8	0,912 8	18	
48	0,659 7	0,612 9	0,790 2	0,775 7	1,289 2	0,911 1	12	
54	0,661 5	0,614 3	0,789 1	0,778 5	1,284 6	0,909 3	6	
38	0	0,663 2	0,615 7	0,788 0	0,781 3	1,279 9	0,907 6	0 52
6	0,665 0	0,617 0	0,786 9	0,784 1	1,275 3	0,905 8	54	
12	0,666 7	0,618 4	0,785 9	0,786 9	1,270 8	0,904 1	48	
18	0,668 5	0,619 8	0,784 8	0,789 8	1,266 2	0,902 3	42	
24	0,670 2	0,621 1	0,783 7	0,792 6	1,261 7	0,900 6	36	
30	0,672 0	0,622 5	0,782 6	0,795 4	1,257 2	0,898 8	30	
36	0,673 7	0,623 9	0,781 5	0,798 3	1,252 7	0,897 1	24	
42	0,675 4	0,625 2	0,780 4	0,801 2	1,248 2	0,895 4	18	
48	0,677 2	0,626 6	0,779 3	0,804 0	1,243 7	0,893 6	12	
54	0,678 9	0,628 0	0,778 2	0,806 9	1,239 3	0,891 9	6	
39	0	0,680 7	0,629 3	0,777 1	0,809 8	1,234 9	0,890 1	0 51
6	0,682 4	0,630 7	0,776 0	0,812 7	1,230 5	0,888 4	54	
12	0,684 2	0,632 0	0,774 9	0,815 6	1,226 1	0,886 6	48	
18	0,685 9	0,633 4	0,773 8	0,818 5	1,221 8	0,884 9	42	
24	0,687 7	0,634 7	0,772 7	0,821 4	1,217 4	0,883 1	36	
30	0,689 4	0,636 1	0,771 6	0,824 3	1,213 1	0,881 4	30	
36	0,691 2	0,637 4	0,770 5	0,827 3	1,208 8	0,879 6	24	
42	0,692 9	0,638 8	0,769 4	0,830 2	1,204 5	0,877 9	18	
48	0,694 6	0,640 1	0,768 3	0,833 2	1,200 2	0,876 2	12	
54	0,696 4	0,641 4	0,767 2	0,836 1	1,196 0	0,874 4	6	
40	0	0,698 1	0,642 8	0,766 0	0,839 1	1,191 8	0,872 7	0 50
\downarrow	\downarrow	cos φ	sin φ	cotg φ	tg φ	arc φ	φ	

φ	arc φ	sin φ	cos φ	tg φ	cotg φ	\uparrow	\uparrow	
40	0	0,698 1	0,642 8	0,766 0	0,839 1	1,191 8	0,872 7	0 50
6	0,699 9	0,644 1	0,764 9	0,842 1	1,187 5	0,870 9	54	
12	0,701 6	0,645 5	0,763 8	0,845 1	1,183 3	0,869 2	48	
18	0,703 4	0,646 8	0,762 7	0,848 1	1,179 2	0,867 4	42	
24	0,705 1	0,648 1	0,761 5	0,851 1	1,175 0	0,865 7	36	
30	0,706 9	0,649 4	0,760 4	0,854 1	1,170 8	0,863 9	30	
36	0,708 6	0,650 8	0,759 3	0,857 1	1,166 7	0,862 2	24	
42	0,710 3	0,652 1	0,758 1	0,860 1	1,162 6	0,860 4	18	
48	0,712 1	0,653 4	0,757 0	0,863 2	1,158 5	0,858 7	12	
54	0,713 8	0,654 7	0,755 9	0,866 2	1,154 4	0,857 0	6	
41	0	0,715 6	0,656 1	0,754 7	0,869 3	1,150 4	0,855 2	0 49
6	0,717 3	0,657 4	0,753 6	0,872 4	1,146 3	0,853 5	54	
12	0,719 1	0,658 7	0,752 4	0,875 4	1,142 3	0,851 7	48	
18	0,720 8	0,660 0	0,751 3	0,878 5	1,138 3	0,850 0	42	
24	0,722 6	0,661 3	0,750 1	0,881 6	1,134 3	0,848 2	36	
30	0,724 3	0,662 6	0,749 0	0,884 7	1,130 3	0,846 5	30	
36	0,726 1	0,663 9	0,747 8	0,887 8	1,126 3	0,844 7	24	
42	0,727 8	0,665 2	0,746 6	0,891 0	1,122 4	0,843 0	18	
48	0,729 5	0,666 5	0,745 5	0,894 1	1,118 4	0,841 2	12	
54	0,731 3	0,667 8	0,744 3	0,897 2	1,114 5	0,839 5	6	
42	0	0,733 0	0,669 1	0,743 1	0,900 4	1,110 6	0,837 8	0 48
6	0,734 8	0,670 4	0,742 0	0,903 6	1,106 7	0,836 0	54	
12	0,736 5	0,671 7	0,740 8	0,906 7	1,102 8	0,834 3	48	
18	0,738 3	0,673 0	0,739 6	0,909 9	1,099 0	0,832 5	42	
24	0,740 0	0,674 3	0,738 5	0,913 1	1,095 1	0,830 8	36	
30	0,741 8	0,675 6	0,737 3	0,916 3	1,091 3	0,829 0	30	
36	0,743 5	0,676 9	0,736 1	0,919 5	1,087 5	0,827 3	24	
42	0,745 3	0,678 2	0,734 9	0,922 8	1,083 7	0,825 5	18	
48	0,747 0	0,679 4	0,733 7	0,926 0	1,079 9	0,823 8	12	
54	0,748 7	0,680 7	0,732 5	0,929 3	1,076 1	0,822 1	6	
43	0	0,750 5	0,682 0	0,731 4	0,932 5	1,072 4	0,820 3	0 47
6	0,752 2	0,683 3	0,730 2	0,935 8	1,068 6	0,818 6	54	
12	0,754 0	0,684 5	0,729 0	0,939 1	1,064 9	0,816 8	48	
18	0,755 7	0,685 8	0,727 8	0,942 4	1,061 2	0,815 1	42	
24	0,757 5	0,687 1	0,726 6	0,945 7	1,057 5	0,813 3	36	
30	0,759 2	0,688 4	0,725 4	0,949 0	1,053 8	0,811 6	30	
36	0,761 0	0,689 6	0,724 2	0,952 3	1,050 1	0,809 8	24	
42	0,762 7	0,690 9	0,723 0	0,955 6	1,046 4	0,808 1	18	
48	0,764 5	0,692 1	0,721 8	0,959 0	1,042 8	0,806 3	12	
54	0,766 2	0,693 4	0,720 6	0,962 3	1,039 2	0,804 6	6	
44	0	0,767 9	0,694 7	0,719 3	0,965 7	1,035 5	0,802 9	0 46
6	0,769 7	0,695 9	0,718 1	0,969 1	1,031 9	0,801 1	54	
12	0,771 4	0,697 2	0,716 9	0,972 5	1,028 3	0,799 4	48	
18	0,773 2	0,698 4	0,715 7	0,975 9	1,024 7	0,797 6	42	
24	0,774 9	0,699 7	0,714 5	0,979 3	1,021 2	0,795 9	36	
30	0,776 7	0,700 9	0,713 3	0,982 7	1,017 6	0,794 1	30	
36	0,778 4	0,702 2	0,712 0	0,986 1	1,014 1	0,792 4	24	
42	0,780 2	0,703 4	0,710 8	0,989 6	1,010 5	0,790 6	18	
48	0,781 9	0,704 6	0,709 6	0,993 0	1,007 0	0,788 9	12	
54	0,783 7	0,705 9	0,708 3	0,996 5	1,003 5	0,787 1	6	
45	0	0,785 4	0,707 1	0,707 1	1,000 0	1,000 0	0,785 4	0 45
↓	↓	cos φ	sin φ	cotg φ	tg φ	arc φ	φ	°

0.2.3. Mocniny o základu 2

n	2^n	2^{-n}
0	1	1
1	2	0,5
2	4	0,25
3	8	0,125
4	16	0,0625
5	32	0,03125
6	64	0,015625
7	128	0,0078125
8	256	0,00390625
9	512	0,001953125
10	1 024	0,000976563
11	2 048	0,000488281
12	4 096	0,000244141
13	8 192	0,000122070
14	16 384	0,000061035
15	32 768	0,000030518
16	65 536	0,000015259
17	131 072	0,000007629
18	262 144	0,000003815
19	524 288	0,000001907
20	1 048 576	0,000000954

0.2.4. Dešítkové zápisy pro $a \cdot 8^n$ (viz článek 1.2.4)

n	a	1	2	3	4	5	6	7
7	2 097 152	4 194 304	6 291 456	8 388 608	10 485 760	12 582 912	14 680 064	
6	262 144	524 288	786 432	1 048 576	1 310 720	1 572 864	1 835 008	
5	32 768	65 536	98 304	131 072	163 840	196 608	229 376	
4	4 096	8 192	12 288	16 384	20 480	24 576	28 672	
3	512	1 024	1 536	2 048	2 560	3 072	3 584	
2	64	128	192	256	320	384	448	
1	8	16	24	32	40	48	56	
0	1	2	3	4	5	6	7	
-1	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	
-2	0,015 625	0,031 25	0,046 875	0,062 5	0,078 125	0,093 75	0,109 375	
-3	0,001 953 1	0,003 906 2	0,005 859 3	0,007 812 5	0,009 765 6	0,011 718 7	0,013 671 8	
-4	0,000 244 1	0,000 488 2	0,000 732 4	0,000 976 5	0,001 220 7	0,001 464 8	0,001 708 9	
-5	0,000 030 5	0,000 061 0	0,000 091 5	0,000 122 0	0,000 152 5	0,000 183 1	0,000 213 6	
-6	0,000 003 8	0,000 007 6	0,000 011 4	0,000 015 0	0,000 019 0	0,000 022 8	0,000 026 6	
-7	0,000 000 4	0,000 000 9	0,000 001 4	0,000 001 9	0,000 002 3	0,000 002 8	0,000 003 3	

0.2.5. Osmičkové zápisy pro $a \cdot 10^n$ (viz článek 1.2.4)

$n \backslash a$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	3 641 100	7 502 200	13 343 300	17 204 400	23 045 500	26 706 600	32 547 700	36 411 000	42 252 100
5	303 240	606 500	1 111 740	1 415 200	1 720 440	2 223 700	2 527 140	3 032 400	3 335 640
4	23 420	47 040	72 460	116 100	141 520	165 140	210 560	234 200	257 620
3	1 750	3 720	5 670	7 640	11 610	13 560	15 530	17 500	21 450
2	144	310	454	620	764	1 130	1 274	1 440	1 604
1	12	24	36	50	62	74	106	120	132
0	1	2	3	4	5	6	7	10	11
-1	0,063 146 314	0,146 314 630	0,231 463 144	0,314 631 460	0,377 777 774	0,463 145 310	0,546 314 624	0,631 463 140	0,714 631 454
-2	0,005 075 341	0,012 102 702	0,017 270 243	0,024 365 604	0,031 463 145	0,036 560 506	0,043 676 047	0,050 753 410	0,056 050 751
-3	0,000 406 111	0,001 014 222	0,001 422 333	0,002 030 444	0,002 436 555	0,003 044 666	0,003 452 777	0,004 061 110	0,004 467 221

Příklad:

K desítkovému zápisu 579 čísla najdeme jeho dvojkový a osmičkový zápis pomocí tabulek 0.2.3 a 0.2.5.

$$\begin{aligned}579 &= 512 + 64 + 2 + 1 = 2^9 + 2^6 + 2^1 + 2^0 = (1\ 001\ 000\ 011)_2; \\579 &= 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 = (764)_8 + (106)_8 + (11)_8 = \\&= (1\ 103)_8.\end{aligned}$$

0.3. MATEMATICKÁ LOGIKA

V této kapitole uvedeme základní pojmy a pravidla matematické logiky, zatímco v částech 12 a 13 se poznatky matematické logiky budeme zabývat z hlediska technických aplikací.

0.3.1. Výrokový počet

Výrokovým počtem [*výrokovým kalkulem*] rozumíme tu část matematické logiky, která vyšetřuje vztahy mezi výroky jen se zřetelem k jejich pravdivosti nebo nepravdivosti, aniž se zabývá vnitřní strukturou atomárních výroků nebo zákonitostmi, podle nichž se tyto výroky tvoří.

Abeceda, druhy slov, metaznaky

Abecedou v nějaké oblasti matematiky nazýváme seznam všech znaků, kterých se v této oblasti používá. Skupina konečně mnoha znaků psaných zleva doprava se nazývá *slovo v dané abecedě*. Přitom každý znak abecedy se považuje za slovo. Abecedu a souhrn všech slov v této abecedě nazýváme *jazykem příslušné oblasti matematiky*. Slova označujeme znaky (tzv. *metaznaky*) z nové abecedy (tzv. *metaabecedy*). Skutečnost, že slovo označené metaznakem φ je totožné se slovem označeným metaznakem ψ , zapisujeme ve tvaru $\varphi \sim \psi$.

Slovem složeným ze slov φ a ψ (v tomto pořadí) v nějaké abecedě nazýváme slovo v téže abecedě, které dostaneme tak, že slova φ a ψ napišeme zleva doprava bezprostředně za sebou ve tvaru $\varphi\psi$.

Prázdným slovem nazýváme slovo, k jehož zapsání nepoužijeme žádného znaku.

Slovo φ nazýváme *pod словem slova ψ* [říkáme také, že *slovo φ se vyskytuje ve slově ψ*], právě když existují taková slova χ, γ , že platí

$$\psi \sim \chi\varphi\gamma.$$

Přitom jedno ze slov χ , γ může být prázdné nebo obě tato slova mohou být prázdná.

Výroky, funktry, složené výroky

Každé sdělení, u něhož má smysl se ptát, zda je nebo není pravdivé (tzv. *princip vyloučení třetího*), a pro něž může nastat právě jedna z těchto možností (tzv. *princip sporu*), se nazývá **výrok**.

Znaky (nebo jejich slovní vyjádření), pomocí nichž se tvoří nové výroky, se nazývají **⟨výrokotvorné funktry [logické spojky]**.

Nejdůležitějšími jsou tyto funktry (alternativní znaky a slovní vyjádření pro tyto funktry viz v článku 0.1.1 a v části 12):

Funktor negace se značí znakem \neg (pruh) nebo vyjadřuje slovy „není pravda, že“.

Funktor konjunkce se značí znakem \wedge nebo vyjadřuje slovy „a ⟨zároveň⟩“.

Funktor disjunkce se značí znakem \vee nebo vyjadřuje slovem „nebo“.

Funktor implikace se značí znakem \Rightarrow nebo vyjadřuje slovy „jestliže ..., \langle pak \rangle “.

Funktor ⟨logické ekvivalence se značí znakem \Leftrightarrow nebo vyjadřuje slovy „právě když“ [„tehdy a jen tehdy, když“].

Znaky a slovní vyjádření pro ostatní funktry viz v článku 0.1.1, popř. v části 12.

Atomárním výrokem výrokového počtu nazýváme výrok bez funktorů. Výrok, který není atomární, se nazývá **složený**.

Proměnná, obor proměnné

Každému objektu studovanému v matematice jednoznačně přiřazujeme název [jméno], popř. znak (zpravidla písmeno), který nazýváme *konstantou*. Název, popř. znak, kterého používáme místo určitých konstant, se nazývá *názrová [jmenná] proměnná* nebo stručně *proměnná*. Stručně říkáme, že *dosazujeme za proměnnou příslušné objekty*, místo správného vyjádření, že dosazujeme za proměnnou názvy, popř. znaky příslušných objektů. Názrovou proměnnou, za kterou je možno dosazovat právě jen čísla, resp. právě jen výroky, resp. právě jen množiny, lze nazývat *číselnou*, resp. *výrokovou*, resp. *množinovou proměnnou*.

Konstanty, které lze za proměnnou x dosazovat, se nazývají *hodnoty proměnné x* . Množina právě těch konstant, které lze za proměnnou x dosazovat, se nazývá **⟨definiční obor proměnné x** .

Abeceda výrokového počtu

- Abecedu výrokového počtu* [*výrokovou abecedu*] tvoří tyto znaky:
- znaky výrokových proměnných (např. písmena malé latinské abecedy);
 - znaky funktorů \neg , \wedge , \vee , \Rightarrow , \Leftrightarrow ;
 - znaky $(,)$ pro levou a pravou závorku;
 - znak \sim pro totožnost výroků.

Výrokové formule

Výrokové formule, popisující strukturu výroků, jsou definovány takto:

- a) Každá výroková proměnná je výrokovou formulí.
- b) Jsou-li slova φ , ψ výrokovými proměnnými, pak každé ze slov $\overline{(\varphi)}$, $(\varphi) \wedge (\psi)$, $(\varphi) \vee (\psi)$, $(\varphi) \Rightarrow (\psi)$, $(\varphi) \Leftrightarrow (\psi)$ je výrokovou formulí.
- c) Žádné slovo, které nelze vytvořit postupným použitím zásad a) a b), není výrokovou formulí.

Vynechávání závorek ve výrokovém počtu

Zápis výrokových formulí lze zjednodušit vynecháním závorek podle těchto zásad:

- α) Jestliže v zápisu výrokové formule je podslovo (x) , kde x je výroková proměnná, pak závorky vynecháme.
- β) Znaku \neg (průh) se dá přednost před ostatními funktry a závorky, které tuto přednost stanoví, se vynechají.
- γ) Znakům \wedge , \vee se dá přednost před znaky \Rightarrow a \Leftrightarrow a závorky, které tuto přednost stanoví, se vynechají.

Počet levých závorek se vždy musí rovnat počtu pravých závorek.

Při větším počtu dvojic závorek lze dvojice okrouhlých závorek vhodně nahrazovat dvojicemi lomených, popř. složených závorek.

Příklad 1:

Místo $\overline{(x)} \wedge (y)$ lze psát $\bar{x} \wedge y$.

Příklad 2:

Místo $(x) \Rightarrow ((x) \vee (y))$ lze psát $x \Rightarrow x \vee y$, ale místo $(x) \vee ((y) \Rightarrow (z))$ a $((x) \Rightarrow (y)) \vee (z)$ lze psát jen $x \vee (y \Rightarrow z)$ a $(x \Rightarrow y) \vee z$, kde závorky již nelze vynechat.

Příklad 3:

Slovo $x \Rightarrow ((u \wedge v) \vee (v \wedge z))$, které lze psát ve tvaru
 $x \Rightarrow [(u \wedge v) \vee (v \wedge z)]$

neboli podle zásady γ)

$$x \rightarrow (u \wedge v) \vee (v \wedge z),$$

je výrokovou formulí, neboť podle bodu a) je x výrokovou formulí, takže $\varphi \sim x$. Slova $u \wedge v$ a $v \wedge z$ jsou podle bodů a), b) výrokovými formulemi, stejně jako slovo $\psi \sim (u \wedge v) \vee (v \wedge z)$. Dané slovo $\varphi \Rightarrow \psi$ je tedy podle bodu b) výrokovou formulí.

Úmluva:

Protože po dosazení výroků za všechny výrokové proměnné do dané výrokové formule φ dostaneme výrok, lze výrokovou formuli φ považovat za zápis tohoto výroku. Proto místo o výrokové formuli φ , která popisuje strukturu daného výroku, se někdy stručně mluví o výroku φ . Z téhož důvodu se výrokové formule $\bar{\varphi}$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$, $\varphi \Leftrightarrow \psi$, které se správně postupně nazývají *negace výrokové formule* φ , *konjunkce*, *disjunkce*, *implikace* a *ekvivalence [oboustranná implikace]* výrokových formulí φ a ψ , obvykle postupně nazývají *negace výroku* φ , *konjunkce*, *disjunkce*, *implikace* a *ekvivalence [oboustranná implikace]* výroků φ a ψ .

Pravdivostní ohodnocení výrokových formulí

Rozšíříme-li výrokovou abecedu o znak I (někdy se používá znaku 1) pro pravdivost a znak 0 pro nepravdivost výroku, lze použít označení

$$\begin{aligned} p(\varphi) &= I && \text{pro pravdivý výrok } \varphi, \\ p(\varphi) &= 0 && \text{pro nepravdivý výrok } \varphi. \end{aligned}$$

Znaky I, 0 se nazývají *pravdivostní hodnoty*.

Pravdivostním ohodnocením výrokové formule nazýváme tzv. *pravdivostní tabulku* (podmínky pravdivosti pro danou výrokovou formuli), která uvádí, jakých pravdivostních hodnot nabude výroková formule při všech možných pravdivostních hodnotách výrokových proměnných. Tabulky 0.1 a 0.2 jsou pravdivostními ohodnoceními výrokových formulí $\bar{\varphi}$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$ a $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

Tabulka 0.1

$p(\varphi)$	$p(\bar{\varphi})$
0	I
I	0

Tabulka 0.2

$p(\varphi)$	$p(\psi)$	$p(\varphi \wedge \psi)$	$p(\varphi \vee \psi)$	$p(\varphi \Rightarrow \psi)$	$p(\varphi \Leftrightarrow \psi)$
0	0	0	0	I	I
0	I	0	I	I	0
I	0	0	I	0	0
I	I	I	I	I	I

Předpoklad a závěr implikace

V implikaci $\varphi \Rightarrow \psi$ se výrok φ nazývá *předpoklad* [premisa, přední člen, antecedent, postačující podmínka nebo stručně podmínka] a výrok ψ *závěr* [tvrzení, zadní člen, konsekvent, nutná podmínka]. Říkáme tedy, že v implikaci $\varphi \Rightarrow \psi$ výrok φ je postačující podmínkou pro výrok ψ , zatímco výrok (závěr) ψ je nutnou podmínkou pro výrok (předpoklad) φ .

Ekvivalentní výrokové formule

Výrokové formule φ a ψ nazýváme *logicky ekvivalentními* a píšeme $\varphi \equiv \psi$, právě když mají stejnou tabulku pravdivostních hodnot neboli mají stejné pravdivostní ohodnocení.

Tautologie, kontradikce

Výroková formule φ , resp. ψ , ježíž pravdivostní hodnota je $p(\varphi) = 1$, resp. $p(\psi) = 0$ pro jakoukoli volbu pravdivostních hodnot výrokových proměnných, které se v této výrokové formuli vyskytují, se nazývá *tautologie*, resp. *kontradikce výrokového počtu*.

Příklad:

Ověřme, že výroková formule $\bar{\varphi} \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$ je tautologií.

Tabulka 0.3

$p(\varphi)$	$p(\psi)$	$p(\bar{\varphi})$	$p(\varphi \Rightarrow \psi)$	$p(\bar{\varphi} \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi))$
0	0	I	I	I
0	I	I	I	I
I	0	0	0	I
I	I	0	I	I

Z pátého sloupce pravdivostní tabulky 0.3, v níž jsme nejprve určili pravdivostní hodnoty atomárních výrokových formulí, je zřejmé, že daná výroková formule je tautologií (pátý sloupec obsahuje totiž ve všech řádcích jen znak I).

Některé zákony a vztahy výrokového počtu

Zákony *idempotence*:

$$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi, \quad \varphi \vee \varphi \equiv \varphi.$$

Vztah mezi ekvivalencí a implikacemi:

$$\varphi \Leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi).$$

Zákon o vyloučeném třetím [*tercium non datur*]:

$$p(\varphi \vee \bar{\varphi}) = I.$$

Zákon sporu:

$$p(\varphi \wedge \bar{\varphi}) = 0.$$

Zákon identity:

$$p(\varphi \Rightarrow \varphi) = I.$$

Zákon simplifikace:

$$p(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)) = I.$$

Zákon transpozice:

$$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \bar{\psi} \Rightarrow \bar{\varphi}.$$

Pravidlo odloučení [*modus ponens*]:

$$p(\varphi) = I \wedge p(\varphi \Rightarrow \psi) = I \Rightarrow p(\psi) = I.$$

De Morganovy zákony:

$$\overline{\varphi \wedge \psi} \equiv \bar{\varphi} \vee \bar{\psi}, \quad \overline{\varphi \vee \psi} \equiv \bar{\varphi} \wedge \bar{\psi}.$$

V článku 12.2 je obsáhlý přehled logických zákonů a vztahů pro konjunkci a disjunkci, který doplňuje tyto logicky ekvivalentní výrokové formule:

$$\varphi \Leftrightarrow \psi \equiv \psi \Leftrightarrow \varphi,$$

$$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \bar{\varphi} \vee \psi,$$

$$p(\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)) = I,$$

$$p(\varphi \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)) = I.$$

Příklad:

Dokažme zákon transpozice $\varphi \Rightarrow \psi \equiv \bar{\psi} \Rightarrow \bar{\varphi}$.

Tabulka 0.4

$p(\varphi)$	$p(\psi)$	$p(\varphi \Rightarrow \psi)$	$p(\bar{\psi})$	$p(\bar{\varphi})$	$p(\bar{\psi} \Rightarrow \bar{\varphi})$
0	0	I	I	I	I
0	I	I	0	I	I
I	0	0	I	0	0
I	I	I	0	0	I

Porovnáním třetího a šestého sloupce v tabulce 0.4 lze zjistit, že výrokové formule $\varphi \Rightarrow \psi$ a $\bar{\psi} \Rightarrow \bar{\varphi}$ jsou logicky ekvivalentní.

0.3.2. Predikátový počet

Predikátovým počtem [*predikátovým kalkulem*] rozumíme tu část matematické logiky, která se zabývá popisem a studiem vnitřní (sémantické) struktury atomárních výroků pomocí slov ve vhodné abecedě.

Abeceda predikátového počtu

Abecedu predikátového počtu [*predikátovou abecedu*] tvoří tyto znaky:

- a) znaky proměnných pro objekty, které jsou předměty úvah;
- b) znaky $,$, \wedge , \vee , \Rightarrow , \Leftrightarrow pro logické spojky (funktory),
- c) znak \forall pro obecný [velký] kvantifikátor [*obecný [velký] kvantor, generalizátor*], který čteme: „pro všechna“ nebo „pro libovolné“;
- d) znak \exists pro existenční [malý] kvantifikátor [*existenční [malý] kvantor, partikularizátor*], který čteme; „existuje“;
- e) znaky $(,$) pro levou a pravou závorku;
- f) specifické znaky pro obor, který chceme predikátovým počtem popisovat, a znak \sim pro totožnost predikátových formulí.

Někdy se do predikátové abecedy zařazují ještě např. tyto kvantifikátory:

- \forall^∞ čteme „pro nekonečně mnoho“,
- $\forall^{<\infty}$ čteme „pro nejvýše konečně mnoho“,
- $\exists!$ čteme „existuje právě jeden“,
- \exists^∞ čteme „existuje nekonečně mnoho“,
- $\exists^{<\infty}$ čteme „existuje nejvýše konečně mnoho“.

Primitivní predikátová formule

Atomárním výrokem predikátového počtu nazýváme výrok bez logických spojek a kvantifikátorů.

Primitivní predikátovou formulí [primitivním predikátem] nazýváme slovo v predikátové abecedě, které se stane zápisem atomárního výroku po dosazení konkrétních objektů daného oboru za všechny jeho proměnné.

Druhy proměnných

Proměnná x se nazývá *vázaná ve slově φ* , právě když slovo $\forall x$ nebo $\exists x$ (předpokládáme, že predikátová abeceda obsahuje jen kvantifikátory \forall a \exists) je podsludem slova φ . Proměnná, která není ve slově φ vázaná, se nazývá *volná ve slově φ* (volnou proměnnou je tedy také každá proměnná, která se ve slově φ nevyskytuje). Vyskytuje-li se ve slově φ volná proměnná, nazýváme ji *podstatně volnou proměnnou ve slově φ* .

Slučitelná slova

Dvě slova φ a ψ se nazývají *slučitelná*, právě když žádná vázaná proměnná ve slově φ není podstatně volnou proměnnou ve slově ψ , a obráceně.

Predikátová formule

Predikátová formule [výroková forma, predikát] nebo stručně *formule* \langle predikátového počtu \rangle se definuje takto:

- Každá primitivní predikátová formule je predikátovou formulí.
- Je-li slovo φ predikátovou formulí, pak také slovo $(\overline{\varphi})$ je predikátovou formulí.
- Jestliže slova φ, ψ jsou slučitelná a jsou predikátovými formulemi, pak také slova $(\varphi) \wedge (\psi)$, $(\varphi) \vee (\psi)$, $(\varphi) \Rightarrow (\psi)$, $(\varphi) \Leftrightarrow (\psi)$ jsou predikátovými formulemi [na tyto formule včetně formule $(\overline{\varphi})$ přenášíme odpovídající názvy z výrokového počtu].
- Jestliže slovo φ je predikátovou formulí, jejíž proměnná x není vázanou proměnnou, pak také slova $(\forall x) \varphi$, $(\exists x) \varphi$ jsou predikátovými formulemi.
- Žádné slovo, které nelze vytvořit postupným použitím bodů a) až d), není predikátovou formulí.

Podstatně volnou proměnnou lze v predikátové formuli nahradit individuálním objektem, ale vázanou proměnnou jím nahradit nelze.

Vynechávání závorek v predikátovém počtu

Úmluvy z výrokového počtu v článku 0.3.1 o vynechávání závorek lze zachovat také u predikátových formulí. Kromě toho budeme kvantifikátorům \forall, \exists dávat přednost před znaky pro logické spojky, takže závorky určující toto pořadí lze vynechat.

Uzavřené a otevřené predikátové formule

Predikátová formule, která neobsahuje podstatně volné proměnné, se nazývá *uzavřená*. Predikátová formule s podstatně volnými proměnnými se se nazývá *otevřená*.

Definiční obor a obor pravdivosti predikátové formule

Predikátovou formuli, která obsahuje právě jen proměnné x_1, x_2, \dots, x_n , označíme $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Množina právě těch uspořádaných n -tic (a_1, a_2, \dots, a_n) [a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) je konstanta z oboru proměnné x_i], že po dosazení všech členů každé z těchto n -tic za všechny proměnné predikátové formule $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se tato formule změní ve výrok, resp. v pravdivý výrok, se nazývá *definiční obor D*, resp. *obor pravdivosti P predikátové formule V(x₁, x₂, ..., x_n)*.

Tautologie a kontradikce predikátového počtu

Tautologií, resp. *kontradikcí* *<predikátového počtu>* nazýváme predikátovou formuli, která se stane zápisem pravdivého, resp. nepravdivého výroku, jestliže do ní za všechny podstatně volné proměnné dosadíme libovolné konkrétní objekty bez ohledu na obor studovaný predikátovým počtem.

Při zjišťování existence tautologie a kontradikce predikátového počtu je nutno používat deduktivních metod, neboť obecná metoda není k dispozici.

Vlastnosti kvantifikátorů

Označíme-li $V(x)$ predikátovou formuli s právě jednou podstatně volnou proměnnou x , říkáme, že objekt, pro který po dosazení jeho znaku do predikátové formule $V(x)$ dostaneme pravdivý výrok, má *<charakteristickou vlastnost V*. Slovo-

$$\forall x [V(x)]$$

čteme „každé x má vlastnost V “, popř. „všechna x mají vlastnost V “, přičemž predikátová formule $V(x)$ se nazývá *dosah obecného kvantifikátoru*. Obdobně slovo

$$\exists x [V(x)]$$

čteme „existuje (aspoň jedno) x , které má vlastnost V “, popř. „pro některá x platí V “, přičemž predikátová formule $V(x)$ se nazývá *dosah existenčního kvantifikátoru*.

Pořadí kvantifikátorů \forall, \exists u predikátových formulí se dvěma proměnnými nelze obecně zaměňovat.

**De Morganovy zákony pro predikátový počet
[negace uzavřených predikátových formulí]**

Není-li pravda, že objekt x s vlastností V existuje, pak žádný objekt x němá vlastnost V , a obráceně, tj.

$$\overline{\exists x [V(x)]} \Leftrightarrow \forall x [\overline{V(x)}].$$

Není-li pravda, že každý objekt x má vlastnost V , pak existuje objekt x , který nemá vlastnost V , a obráceně, tj.

$$\overline{\forall x [V(x)]} \Leftrightarrow \exists x [\overline{V(x)}].$$

Není-li pravda, že ke každému objektu y existuje objekt x s vlastností V , pak existuje takový objekt y , že žádný objekt x nemá vlastnost V , a obráceně, tj.

$$\overline{(\exists x \forall y) [V(x, y)]} \Leftrightarrow \forall x \exists y [\overline{V(x, y)}].$$

Příklad:

Výrok „neexistuje největší reálné číslo y “ lze vyjádřit ve tvaru ($x \in \mathbb{R}$)

$$\overline{\exists y \forall x (x \leqq y)} \Leftrightarrow \forall y \exists x (x > y).$$

0.4. MNOŽINY, ZOBRAZENÍ A FUNKCE

0.4.1. Množiny

Soubor právě těch objektů, které mají určitou vlastnost V , se nazývá *množina definovaná vlastností V* . Přitom je třeba poznamenat, že nejde o přesnou definici pojmu množiny, ale jen o intuitivní vymezení pojmu množiny (korektní definici množiny v implicitním tvaru axiomatického systému viz např. v [45]). Množinu lze tedy považovat za *určenou [danou, definovanou]*, jestliže o každém objektu lze jednoznačně rozhodnout, zda danou vlastnost má nebo nemá, tj. zda do uvažované množiny patří nebo nepatří.

Množiny se v této příručce zpravidla označují velkými písmeny latinské abecedy.

Objekty patřící do množiny A se nazývají *prvky množiny A* a v této příručce se zpravidla označují malými písmeny latinské abecedy.

Množina, jejíž prvky jsou množiny, se nazývá *systém množin*. Systémy množin označujeme zpravidla velkými skriptovými písmeny (např. $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{M}$).

Rčení „ \langle prvek \rangle a patří do \langle množiny \rangle A “ resp. „ \langle prvek \rangle a nepatří do \langle množiny \rangle A “ zapisujeme

$$a \in A, \text{ resp. } a \notin A.$$

Přitom místo $x_1 \in A, x_2 \in A, \dots, x_n \in A$, resp. $x_1 \notin A, x_2 \notin A, \dots, x_n \notin A$ lze stručně psát

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in A, \text{ resp. } x_1, x_2, \dots, x_n \notin A.$$

Vztah \in se nazývá *incidence* [příslušnost] prvku k množině.

Je-li možno vyjmenovat všechny prvky množiny M (tzv. *výčet prvků*), pak se při jejím zápisu znaky všech jejich prvků umístí mezi složenými závorkami (popř. se vypíšou jen některé její prvky, je-li zřejmé, jak lze vypsat všechny ostatní prvky); např. množina A , kterou tvoří právě prvky 3, 7 a 11, se zapíše ve tvaru

$$A = \{3, 7, 11\},$$

přičemž nezáleží na pořadí prvků (znak $=$ zde vyjadřuje, že jde o různé zápisy téže množiny).

Množina, která obsahuje právě ty prvky oboru U proměnné x , které mají vlastnost $V(x)$, tj. tvoří obor pravdivosti predikátové formule $V(x)$ (viz článek 0.3.2), se zapisuje

$$\{x \in U \mid V(x)\}, \{x \in U: V(x)\}, \text{ nebo } \{x \in U; V(x)\}$$

(čteme: množina právě těch prvků x množiny U , které mají vlastnost V) nebo stručně

$$\{x \mid V(x)\}, \{x: V(x)\} \text{ nebo } \{x; V(x)\},$$

není-li třeba připomínat obor U proměnné x .

K názornější interpretaci množin se používá tzv. *Vennových diagramů*, kde množina M se znázorňuje jako množina právě těch bodů, které leží ve vnitřní oblasti rovinné jednoduché uzavřené Jordanovy křivky (obr. 1) (definice Jordanovy křivky je např. v [199]).

Množina A se nazývá *část* [*podmnožina*] množiny B (popř. množina B se nazývá *nadmnožina* množiny A), přičemž píšeme

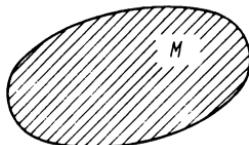
$$A \subseteq B \text{ nebo } B \supseteq A,$$

právě když každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B (obr. 2), tj.

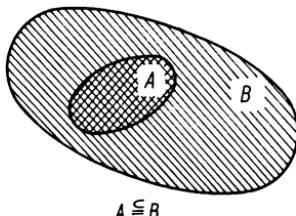
$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

Vztah \subseteq se nazývá *neostrá inkluze*.

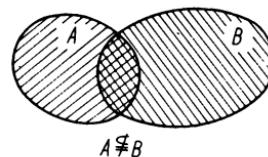
Jestliže pro množiny A, B neplatí $A \subseteq B$, píšeme $A \not\subseteq B$ nebo $B \not\subseteq A$ (obr. 3).



Obr. 1. Vennův diagram množiny M



Obr. 2. Podmnožina A množiny B



Obr. 3. Vennův diagram množin A, B
($A \not\subseteq B \not\subseteq A$)

Existuje právě jedna množina, která neobsahuje žádný prvek. Označuje se \emptyset a nazývá *prázdná množina*. Přitom pro každou množinu A platí $\emptyset \subseteq A$.

Říkáme, že množina A se rovná množině B [množiny A, B jsou identické, sobě rovné, splývají] a píšeme $A = B$, právě když $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$, tj.

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

(antisimetrickost inkluze).

Jestliže pro množiny A, B neplatí $A = B$, píšeme $A \neq B$ a říkáme, že množina A je různá od množiny B [množina A se nerovná množině B].

Množina A se nazývá *vlastní část* [*vlastní podmnožina*] množiny B , přičemž píšeme

$$A \subset B \quad \text{nebo} \quad B \supset A,$$

právě když $A \subseteq B$ a zároveň $A \neq B$, tj.

$$A \subseteq B \wedge A \neq B \Leftrightarrow A \subset B.$$

Relace \subset se nazývá *ostrá inkluze*.

Tvoří-li množinu n prvků, pak počet všech jejich podmnožin se rovná 2^n .

Systém všech podmnožin množiny M se značí $\mathcal{P}(M)$ (někdy také 2^M nebo $\exp M$) a nazývá se *potenční množina množiny M* .

0.4.2. Množinové operace

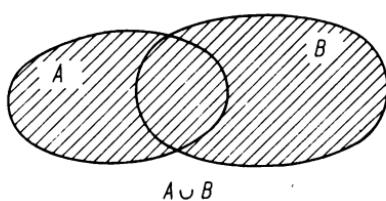
Sjednocením množin A a B nazýváme množinu $A \cup B$ (čteme: A sjednoceno s B) právě těch prvků, které patří aspoň do jedné z množin A a B (obr. 4).

Sjednocením neprázdného systému \mathcal{A} množin A nazýváme množinu

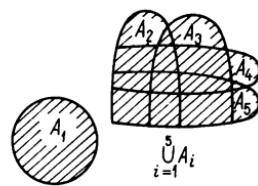
$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \quad (\text{stručně } \bigcup \mathcal{A})$$

právě těch prvků, které patří aspoň do jedné z množin patřících do systému \mathcal{A} (obr. 5). Sjednocení konečného systému množin A_1, A_2, \dots, A_n , resp. nekonečného systému množin A_1, A_2, \dots značíme

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad \text{resp.} \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$



Obr. 4. Sjednocení $A \cup B$ množin A a B



Obr. 5. Sjednocení $\bigcup \mathcal{A}$ systému
 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$

Průnikem množin A a B nazýváme množinu $A \cap B$ (čteme: A průnik B) právě těch prvků, které patří do množiny A a zároveň do množiny B (obr. 6).

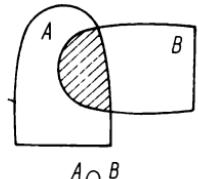
Průnikem neprázdného systému \mathcal{A} množin A nazýváme množinu

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \quad (\text{stručně } \bigcap \mathcal{A})$$

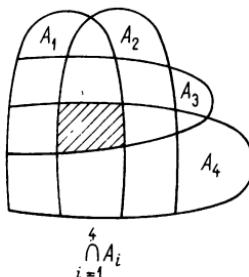
právě těch prvků, které patří zároveň do všech množin patřících do systému \mathcal{A} (obr. 7). Průnik konečného systému množin A_1, A_2, \dots, A_n , resp. nekonečného systému množin A_1, A_2, \dots značíme

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i, \quad \text{resp.} \quad A_1 \cap A_2 \cap \dots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

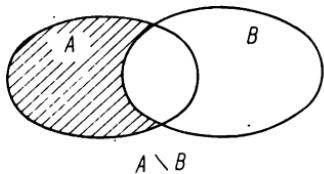
Rozdílem množin A a B (v tomto pořadí) nazýváme množinu $A \setminus B$ (někdy také $A - B$) právě těch prvků, které patří do množiny A , ale nepatří do množiny B , tj. rozdíl $A \setminus B$ obsahuje právě ty prvky množiny A , které nepatří do množiny B (obr. 8).



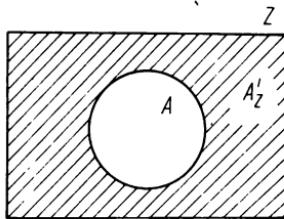
Obr. 6. Průnik $A \cap B$ množin A a B



Obr. 7. Průnik $\cap A$ systému $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$



Obr. 8. Rozdíl $A \setminus B$ množin A a B



Obr. 9. Doplněk A'_Z množiny A v množině Z

Doplňkem [komplementem] množiny A v množině $Z \supseteq A$ nazýváme množinu $A'_Z = Z \setminus A$ (někdy ji také značíme A_Z^c , $C_Z A$ nebo A_Z^C) (obr. 9). Množina Z se nazývá základní množina nebo univerzum. Je-li zřejmé, ke které základní množině se doplněk vztahuje, lze jej stručně označit A' nebo A^c .

Symetrickým rozdílem [symetrickou diferencí] množin A a B nazýváme množinu (obr. 10)

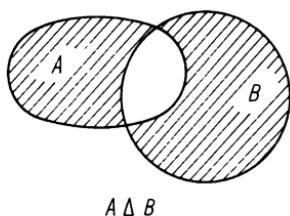
$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(někdy ji také značíme $A \dot{-} B$).

Množiny A, B sě nazývají disjunktní, resp. konjunktivní, právě když $A \cap B = \emptyset$ (obr. 11), resp. $A \cap B \neq \emptyset$ (viz obr. 6).

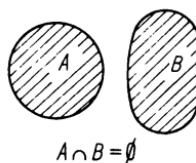
Systém \mathcal{B} množin se nazývá disjunktní, právě když každé dvě různé množiny systému \mathcal{B} jsou disjunktní (obr. 12); říkáme také, že množiny systému \mathcal{B} tvoří disjunktní systém [jsou po dvou disjunktní].

Sjednocení $\bigcup A$ systému \mathcal{A} množin se nazývá *disjunktní*, jestliže všechny množiny systému \mathcal{A} tvoří disjunktní systém.



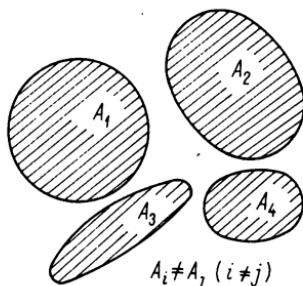
$$A \Delta B$$

Obr. 10. Symetrický rozdíl $A \Delta B$
množin A a B



$$A \cap B = \emptyset$$

Obr. 11. Vennův diagram disjunktních množin A a B



$$A_i \neq A_j \quad (i \neq j)$$

Obr. 12. Disjunktní systém \mathcal{A} množin A_1, A_2, A_3, A_4

0.4.3. Věty o množinách

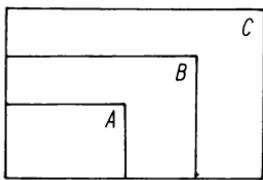
Nechť $A, B, C, A_1, A_2, \dots, A_n$ jsou libovolné podmnožiny základní množiny Z .

Vlastnosti rovnosti a inkluze množin

$A = A$	(reflexivnost rovnosti),
$A = B \Leftrightarrow B = A$	(symetričnost rovnosti),
$A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$	(tranzitivnost rovnosti),
$A \subseteq A$	(reflexivnost inkluze),
$\emptyset \subseteq A$,	
$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$	(tranzitivnost inkluze, obr. 13),
$A \subseteq (A \cup B)$,	$(A \cap B) \subseteq A$,
$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$,	$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$,
$A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Leftrightarrow (A \cup B) \subseteq C$,	$C \subseteq A \wedge C \subseteq B \Leftrightarrow C \subseteq (A \cap B)$,
$A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$,	

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B', \\ A \cup B = Z \Leftrightarrow A' \subseteq B,$$

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq A', \\ A \cup B = Z \Leftrightarrow B' \subseteq A.$$



Obr. 13. Tranzitivnost inkluze $A \subseteq B$, $B \subseteq C$

Vlastnosti sjednocení a průniku množin

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

(komutativnost sjednocení a průniku),

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C, \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

(asociativnost sjednocení a průniku),

$$(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$$

(distributivnost sjednocení vzhledem k průniku),

$$(A_1 \cap \dots \cap A_n) \cup B = (A_1 \cup B) \cap \dots \cap (A_n \cup B)$$

(distributivnost průniku vzhledem k sjednocení),

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$

(idempotentnost sjednocení a průniku),

$$A \cup Z = Z, \quad A \cap Z = A, \\ A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \\ A \cap (A \cup B) = A.$$

Vlastnosti rozdílu množin

$$\emptyset \setminus A = \emptyset, \quad A \setminus \emptyset = A, \quad A \setminus A = \emptyset;$$

$$A \setminus B \subseteq A,$$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B),$$

$$(A \setminus B) \cap B = \emptyset,$$

$$(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset,$$

$$\begin{aligned}
 (A \setminus B) \cap (B \setminus A) &= \emptyset, \\
 A \cup B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B), \\
 (A_1 \cup \dots \cup A_n) \setminus B &= (A_1 \setminus B) \cup \dots \cup (A_n \setminus B), \\
 (A_1 \cap \dots \cap A_n) \setminus B &= (A_1 \setminus B) \cap \dots \cap (A_n \setminus B), \\
 (A \setminus B) \cap (A \setminus C) &= A \setminus (B \cup C), \\
 (A \setminus B) \cup (A \setminus C) &= A \setminus (B \cap C), \\
 A \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_n) &= (A \setminus B_1) \cap \dots \cap (A \setminus B_n), \\
 A \setminus (B_1 \cap \dots \cap B_n) &= (A \setminus B_1) \cup \dots \cup (A \setminus B_n)
 \end{aligned}$$

(poslední dva vzorce se nazývají *de Morganovy vzorce*).

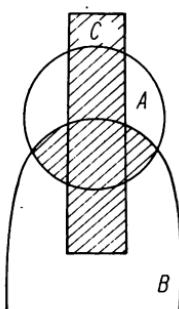
Vlastnosti doplňku množiny

$$\begin{aligned}
 (A')' &= A; \\
 A \cup A' &= Z, \quad A \cap A' = \emptyset; \\
 Z' &= \emptyset, \quad \emptyset' = Z; \\
 (A_1 \cup \dots \cup A_n)' &= A'_1 \cap \dots \cap A'_n, \\
 (A_1 \cap \dots \cap A_n)' &= A'_1 \cup \dots \cup A'_n
 \end{aligned}$$

(poslední dva vzorce jsou důsledky de Morganových vzorců).

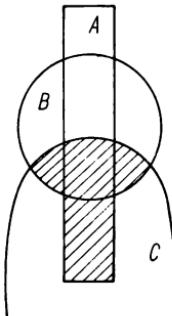
Příklad:

V obrázcích 14 až 16 jsou po řadě znázorněny množiny $(A \cap B) \cup C$, $(A \cup B) \cap C$ a $(A \Delta B) \Delta C$.



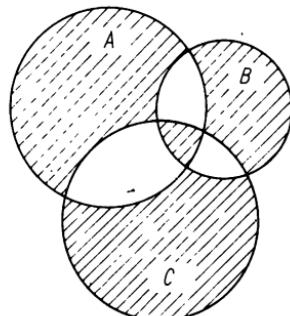
$$(A \cap B) \cup C$$

Obr. 14. Množina
 $(A \cap B) \cup C =$
 $= (A \cup C) \cap (B \cup C)$



$$(A \cup B) \cap C$$

Obr. 15. Množina
 $(A \cup B) \cap C =$
 $= (A \cap C) \cup (B \cap C)$



$$(A \Delta B) \Delta C$$

Obr. 16. Množina
 $(A \Delta B) \Delta C$

0.4.4. Kartézský součin dvou množin

Uspořádanou dvojicí objektů a b (v tomto pořadí) nazýváme systém $[a, b] = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

množin, kde a, resp. b se nazývá *první*, resp. *druhý člen uspořádané dvojice* $[a, b]$.
Přitom

$$[a, b] \neq [b, a] \Leftrightarrow a \neq b$$

neboli

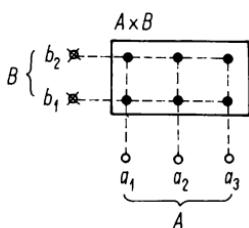
$$[a, b] = [b, a] \Leftrightarrow a = b.$$

Obdobně se zavádí pojem *uspořádané n-tice* $[a_1, a_2, \dots, a_n]$.

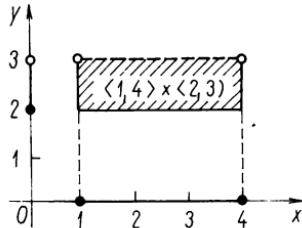
Neuspořádanou dvojicí objektů a, b nazýváme množinu

$$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}.$$

Obdobně se zavádí pojem *neuspořádané n-tice* $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.



Obr. 17. Kartézský součin množin A a B



Obr. 18. Kartézský součin intervalů $(1, 4) \times (2, 3)$

Kartézským součinem A × B neprázdné množiny A a neprázdné množiny B (v tomto pořadí) nazývám množinu právě těch uspořádaných dvojic [a, b], kde $a \in A$ a $b \in B$ (obr. 17 a 18). Jestliže aspoň jedna z množin A, B je prázdná, klademe $A \times B = \emptyset$.

Kartézský součin množin

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}, \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

se tedy rovná

$$A \times B = \{[a_1, b_1], \dots, [a_1, b_n], [a_2, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_2, b_n], \dots, [a_m, b_1], [a_m, b_2], \dots, [a_m, b_n]\},$$

což lze zapsat ve tvaru tabulky 0.5.

Tabulka 0.5

$A \backslash B$	b_1	b_2	...	b_n
a_1	$[a_1, b_1]$	$[a_1, b_2]$...	$[a_1, b_n]$
a_2	$[a_2, b_1]$	$[a_2, b_2]$		$[a_2, b_n]$
.
.
a_m	$[a_m, b_1]$	$[a_m, b_2]$...	$[a_m, b_n]$

Speciálně při $A = B$ se kartézský součin $A \times A$ nazývá *druhá kartézská mocnina množiny A* a značí se stručně A^2 .

Obdobně $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, kde A_1, A_2, \dots, A_n jsou neprázdné množiny, značí množinu právě těch uspořádaných n -tic $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, kde $a_i \in A_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Speciálně $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ pro $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ se nazývá *n-tá kartézská mocnina množiny A* a značí se stručně A^n .

Množiny, jejichž prvky jsou právě jen čísla (reálná, popř. komplexní), se nazývají *číselné množiny* (viz tabulku 0.6 na str. 90).

0.4.5. Binární relace

Definice binární relace

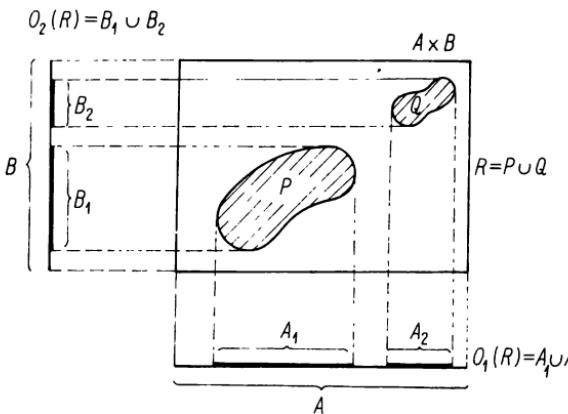
Každou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$ nazýváme *binární relaci z množiny A do množiny B* [*binární relaci mezi množinami A a B* (v tomto pořadí)] a zapisujeme jako uspořádanou trojici $[R; A, B]$ (obr. 19). Známe-li množiny A, B nebo uvažujeme-li o vlastnostech binárních relací bez ohledu na tyto množiny, pak místo $[R; A, B]$ lze stručně psát jen R a mluvit o *binární relaci R*. Je však třeba si uvědomit, že i při $R_1 = R_2$ je $[R_1; A, B] = [R_2; C, D]$, právě když $A = C$ a $B = D$.

Jestliže $[x, y] \in R$, říkáme, že *prvek x je v binární relaci R s prvkem y*, a píšeme

$$xRy \quad \text{nebo} \quad x \stackrel{R}{\mapsto} y,$$

přičemž tyto zápisu představují tzv. *přiřazení prvků* y v *binární relaci* R princiemu x . Proto také říkáme, že *prvek* y je v *binární relaci* R *přiřazen* princiemu x .

Jestliže $[x, y] \notin R$, píšeme $x \bar{R} y$ a říkáme, že *prvek* x *není v binární relaci* R s *prvkem* y .



Obr. 19. Binární relace
 $R \subset A \times B$

Prvním [definičním, vstupním, levým] oborem nebo *vzorem* $O_1(R)$ [někdy též $D(R)$, dom R] *relace* $[R; A, B]$ nazýváme množinu právě těch prvků $x \in A$, z nichž ke každému existuje aspoň jeden takový prvek $y \in B$, že xRy , tj.

$$O_1(R) = \{x \in A \mid \exists y \in B: xRy\}$$

(viz obr. 19).

Druhým [výstupním, pravým] oborem nebo *obrazem* $O_2(R)$ [někdy také $R(R)$, rng R] *relace* $[R; A, B]$ nazýváme množinu právě těch prvků $y \in B$, z nichž ke každému existuje aspoň jeden takový prvek $x \in A$, že xRy , tj.

$$O_2(R) = \{y \in B \mid \exists x \in A: xRy\}.$$

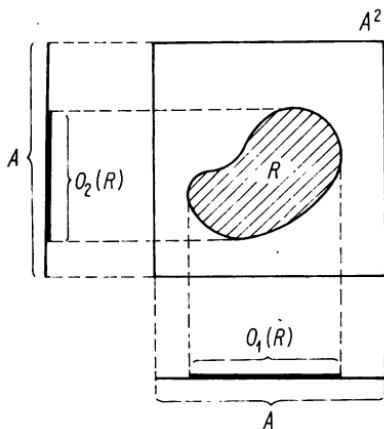
Relace v množině a na množině

Speciálně každou podmnožinu R množiny $A \times A = A^2$ nazýváme *binární relaci* v množině A a značíme $[R; A]$ (obr. 20); přitom množinu A nazýváme *nosnou množinou* [*nosičem*] *binární relace* R . Protože

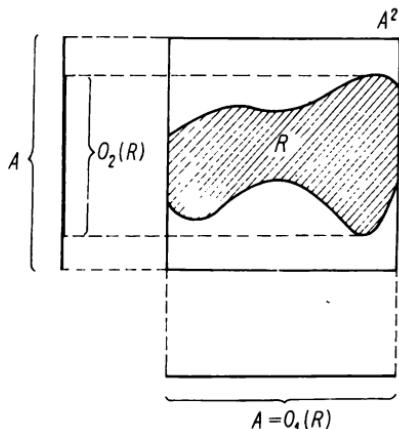
$$A \times B \subseteq (A \cup B) \times (A \cup B),$$

lze místo relace $[R; A, B]$ uvažovat relaci $[R; M]$, kde nosná množina $M = A \cup B$.

Každou podmnožinu R množiny $A \times A = A^2$, kde $A = O_1(R)$, nazýváme *binární relaci* $[R; A]$ na množině A (obr. 21). Každá relace $[R; A]$ na množině A je zřejmě také relací $[R; A]$ v množině A , ale ne každá relace $[R; A]$ v množině A je relaci na množině A . V binární relaci $[R; A]$ na množině A je tedy každý z prvků množiny A prvním členem aspoň jedné z uspořádaných dvojic z binární relace $[R; A]$.



Obr. 20. Binární relace v množině A

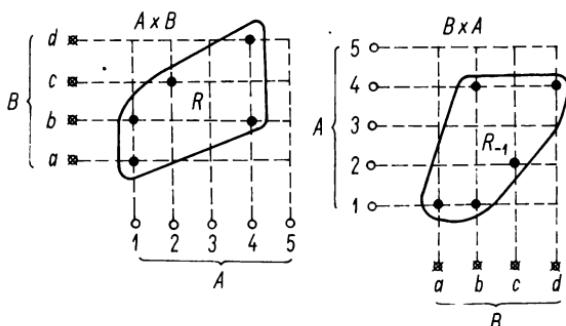


Obr. 21. Binární relace na množině A

Inverzní relace

Inverzní relací k relaci R [inverzí relace R] z množiny A do množiny B nazýváme takovou binární relaci R_{-1} (někdy se také značí R^{-1}) z množiny B do množiny A , která obsahuje právě ty uspořádané dvojice $[y, x] \in B \times A$, že $[x, y] \in R$ (obr. 22), tj.

$$R_{-1} = \{[y, x] \mid [x, y] \in R\}.$$



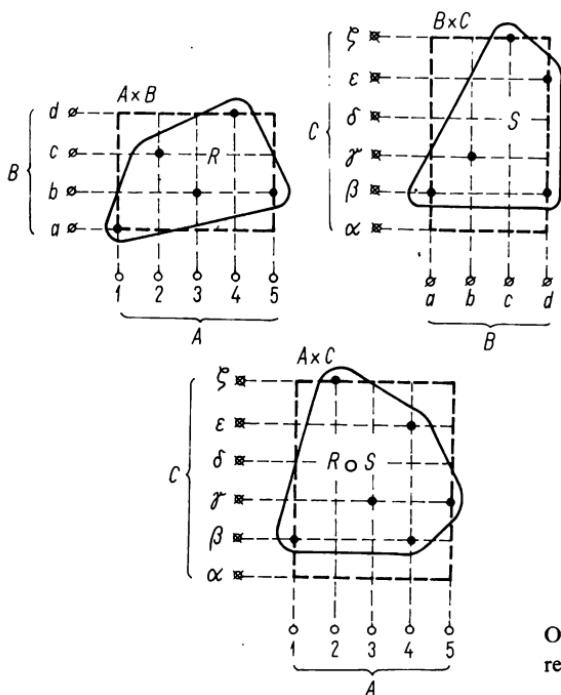
Obr. 22. Inverzní relace R_{-1} k relaci R

Skládání binárních relací

Relací složenou z relaci R $\langle z$ množiny A do množiny $B\rangle$ a S $\langle z$ množiny B do množiny $C\rangle$ [kompozici, kompozitem, součinem relací R a S] nazýváme takovou binární relaci $T = R \circ S$ (čteme: R složeno s S) (někdy také $R * S$, RS) z množiny A do množiny C , která obsahuje právě ty uspořádané dvojice $[x, z] \in A \times C$, pro něž existuje takový prvek $y \in B$, že $[x, y] \in R$ a $[y, z] \in S$ (obr. 23), tj.

$$R \circ S = \{[x, z] \mid \exists y \in B: [x, y] \in R \wedge [y, z] \in S\}.$$

Uvedená operace se nazývá **skládání** [**násobení**] **relací R a S** .



Obr. 23. Kompozit $T = R \circ S$
relací R a S

Protože pro skládání relací platí asociativní zákon, tj. $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$, lze závorky vynechat a psát $A \circ B \circ C$. Pro $A_1 = A_2 = \dots = A_n$ místo $A_1 \circ A_2 \circ \dots \circ A_n$ stručně píšeme A^n .

Vlastnosti binárních relací

Jestliže R je libovolná relace na množině A a $x, y, z \in A$, říkáme, že **binární relace R je na množině A** :

– identická [identitou` totožnosti rovnosti], a označujeme ji id_A , právě když pro $\forall x \in A$ z přiřazení $x \text{id}_A y$ plyne $x = y \in A$;

– reflexivní, právě když pro $\forall x \in A$ platí xRx , tj. právě když $\text{id}_A \subseteq R$ (obr. 24);

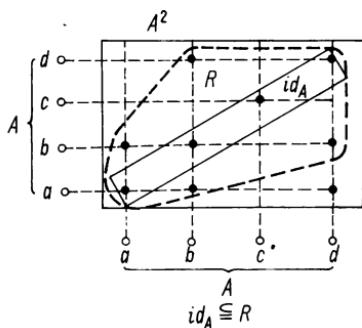
– areflexivní, právě když pro $\forall x \in A$ platí $x\bar{R}x$ (z každého přiřazení xRy plyne $x \neq y$), tj. právě když $\text{id}_A \cap R = \emptyset$;

– symetrická, právě když z každého přiřazení xRy plyne yRx , tj. právě když $R = R_{-1}$ (viz obr. 24);

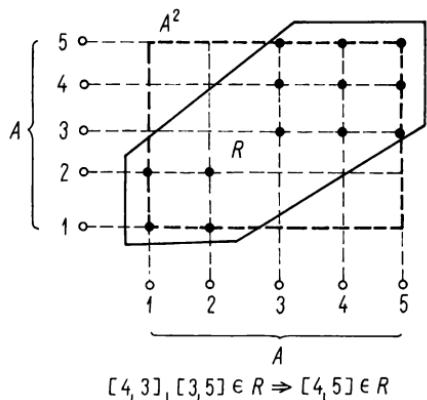
– asymetrická, právě když z každého přiřazení xRy plyne $y\bar{R}x$, tj. právě když $R \cap R_{-1} = \emptyset$;

– antisymetrická, právě když z každých dvou přiřazení xRy , yRx plyne $x = y$, tj. právě když $R \cap R_{-1} \subseteq \text{id}_A$;

– tranzitivní, právě když z každých dvou přiřazení xRy , yRz plyne xRz , tj. právě když $R \circ R \subseteq R$ (obr. 25);



Obr. 24. Reflexivní a symetrická relace



Obr. 25. Tranzitivní relace

– atranzitivní, právě když z každých n ($n \geq 2$) přiřazení $x_1Rx_2, x_2Rx_3, \dots, x_nRx_{n+1}$ plyne $x_1\bar{R}x_{n+1}$, tj. právě když $(\bigcup_{k=2}^{\infty} R^k) \cap R = \emptyset$;

– úplná, právě když obsahuje všechna přiřazení xRy , yRx , tj. právě když $R \cap R_{-1} \supseteq A^2 \setminus \text{id}_A$;

– univerzální, právě když obsahuje všechna přiřazení xRx , xRy , yRx , tj. právě když $R \cap R_{-1} = A^2$;

- cyklická, právě když $\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k \subseteq R_{-1}$;
- acyklická, právě když $(\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k) \cap R_{-1} = \emptyset$.

Druhy binárních relací

Binární relaci nazýváme:

- tolerancí [relaci tolérance], právě když je reflexívni a symetrická;
- ekvivalencí [relaci ekvivalence], právě když je reflexívni, symetrická a tranzitivní;
- kvaziuspořádáním, právě když je reflexívni a tranzitivní;
- \langle neostrým \rangle uspořádáním [relaci \langle neostrého \rangle uspořádání] (znak \leqslant), právě když je reflexívni, antisymetrická a tranzitivní;
- ostrým uspořádáním [relaci ostrého uspořádání] (znak $<$), právě když je areflexívni a tranzitivní;
- úplným \langle neostrým \rangle uspořádáním, resp. úplným ostrým uspořádáním [lineárním \langle neostrým \rangle uspořádáním, resp. lineárním ostrým uspořádáním], právě když relace R je \langle neostrým \rangle uspořádáním, resp. ostrým uspořádáním a pro každou dvojici různých prvků $x, y \in A$ platí buď xRy , nebo yRx .

Uspořádaná a úplně uspořádaná množina

Množina A , v níž je dáno uspořádání \leqslant , resp. ostré uspořádání $<$ se nazývá uspořádaná, resp. ostré uspořádaná a značí se $[\leqslant; A]$, resp. $[<; A]$.

Uspořádanou množinu, v níž uspořádání je úplným uspořádáním, nazýváme úplně [lineárně] uspořádanou množinou nebo řetězcem.

Porovnatelné prvky

Prvky $x, y \in [\leqslant; A]$ se nazývají porovnatelné, resp. neporovnatelné, právě když platí aspoň jedno z přiřazení $x \leqslant y$, $y \leqslant x$, resp. neplatí žádné z nich.

Prvek a se nazývá maximalní, resp. minimální prvek uspořádané množiny $[\leqslant; A]$, právě když pro všechny prvky $x \in A$ z přiřazení $a \leqslant x$, resp. $x \leqslant a$ plyne $a = x$. Prvek a se nazývá největší, resp. nejmenší prvek uspořádané množiny $[\leqslant; A]$, právě když pro všechny prvky $x \in A$ je $x \leqslant a$, resp. $a \leqslant x$. Maximální, resp. minimální prvek úplně uspořádané množiny A značíme $\max A$, resp. $\min A$.

Dobře uspořádaná množina

Dobře uspořádanou množinou nazýváme úplně uspořádanou množinu, právě když každá její neprázdná podmnožina obsahuje nejmenší prvek.

Horní a dolní závora úplně uspořádané množiny

Horní, resp. dolní závorou [horní, resp. dolní mezí] \langle úplně uspořádané \rangle množiny $[\leqslant ; A]$ v \langle úplně uspořádané \rangle množině $[\leqslant ; M]$ ($A \subseteq M$) nazýváme každý takový prvek $k \in M$, že $x \leqslant k$, resp. $k \leqslant x$ pro všechny prvky $x \in A$.

Supremum a infimum úplně uspořádané množiny

Supremem, resp. infimem \langle úplně uspořádané \rangle množiny $[\leqslant ; A]$ v \langle úplně uspořádané \rangle množině $[\leqslant ; M]$ ($A \subseteq M$) nazýváme nejmenší horní závoru, resp. největší dolní závoru množiny A v množině M . Supremum, resp. infimum množiny A v množině M zhačíme

$$\sup_M A, \text{ resp. } \inf_M A \quad (\text{stručně sup } A, \text{ resp. inf } A).$$

Speciálně v množině \mathbb{R} zavádíme:

Prvek $T \in \mathbb{R}$ nazýváme supremem neprázdné množiny $A \subset \mathbb{R}$, splňuje-li tyto podmínky:

1. Pro každý prvek $x \in A$ platí $x \leq T$.
2. Jestliže $T' < T$, pak existuje takový prvek $x_0 \in A$, že $x_0 > T'$.

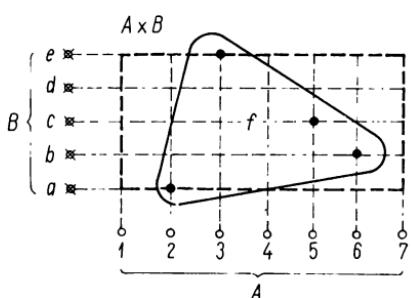
Prvek $t \in \mathbb{R}$ nazýváme infimum neprázdné množiny $A \subset \mathbb{R}$, splňuje-li tyto podmínky:

1. Pro každý prvek $x \in A$ platí $x \geq t$.
2. Jestliže $t' > t$, pak existuje takový prvek $x_0 \in A$, že $x_0 < t'$.

0.4.6. Zobrazení, operace, funkce

Zobrazení

Zobrazením f z množiny A do množiny B ($A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$) nazýváme binární relaci $[f; A, B]$, o níž platí, že každému prvku $x \in A$ je přiřazen nejvýše jeden takový prvek $y \in B$, že $[x, y] \in f$ (obr. 26). Zobrazení má tedy tu vlastnost,



Obr. 26. Zobrazení f z množiny A do množiny B

že jestliže $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in f$ a $x_1 = x_2$, pak $y_1 = y_2$. Místo $[x, y] \in f$ často píšeme $y = f(x)$ [někdy též $y = fx$, $f: x \mapsto y$ nebo $x \mapsto y$, popř. jen $x \mapsto y$, víme-li, o jaké zobrazení jde]. Prvek $y = f(x) \in B$ nazýváme hodnotou zobrazení f v bodě x nebo obrazem prvku x v zobrazení f , kdežto prvek $x \in A$ nazýváme vzorem prvku $y = f(x)$ v zobrazení f . Množinu všech vzorů prvku $y \in B$ nazýváme úplným vzorem prvku y v zobrazení f . Má-li prvek y právě jeden vzor, pak tento vzor označujeme $f_{-1}(y)$.

Množinu $O_1(f)$ [někdy také $f_{-1}(B)$, $D(f)$ nebo $\text{dom } f$] právě těch prvků $x \in A$, z nichž ke každému existuje právě jeden takový prvek $y \in B$, že $[x, y] \in f$, nazýváme oborem hodnot nebo obrazem zobrazení f z množiny A do množiny B .

Množinu $O_2(f)$ [někdy také $f(A)$, $R(f)$, $H(f)$ nebo $\text{rng } f$] právě těch prvků $y \in B$, z nichž ke každému existuje aspoň jeden takový prvek $x \in A$, že $[x, y] \in f$, nazýváme oborem zobrazení f z množiny A do množiny B .

Jestliže $M \subseteq O_1(f)$, pak množina $\{f(a) \mid a \in M\} = f(M)$ se nazývá obraz množiny M v zobrazení f .

Jestliže $N \subseteq O_2(f)$, pak množina $\{a \in O_1(f) \mid f(a) \in N\} = f_{-1}(N)$ se nazývá úplným vzorem množiny N v zobrazení f .

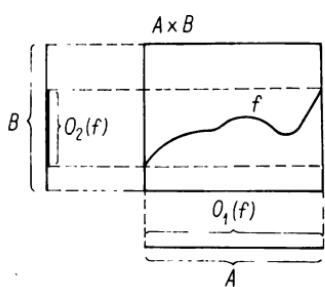
Druhy zobrazení

Zobrazení f z množiny A do množiny B se nazývá:

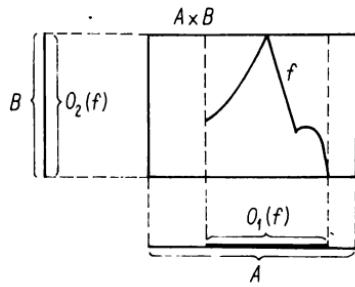
- zobrazení f množiny A do množiny B , právě když vzorem zobrazení f je množina A (obr. 27), tj.

$$f_{-1}(B) = A \wedge f(A) \subseteq B$$

(toto zobrazení se někdy značí $f: A \rightarrow B$);



Obr. 27. Zobrazení f množiny A do množiny B



Obr. 28. Zobrazení f z množiny A na množinu B

– zobrazení f z množiny A na množinu B [surjektivní zobrazení, surjekce, nakrytí z množiny A na množinu B], právě když obrazem zobrazení f je množina B (obr. 28), tj.

$$f_{-1}(B) \subseteq A \wedge f(A) = B;$$

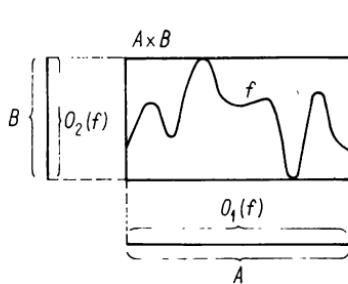
– zobrazení f množiny A na množinu B [surjektivní zobrazení, surjekce, nakrytí množiny A na množinu B], právě když vzorem, resp. obrazem zobrazení f je množina A , resp. B (obr. 29), tj.

$$f_{-1}(B) = A \wedge f(A) = B$$

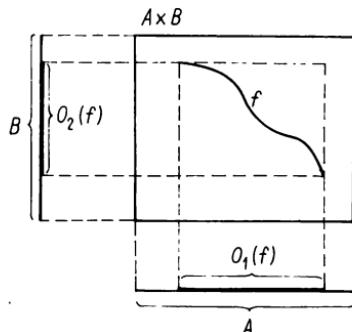
(toto zobrazení se někdy značí $f: A \xrightarrow{\text{na}} B$);

– prosté [injektivní] zobrazení [injekce, vložení] f z množiny A do množiny B , právě když pro každé dva různé prvky $x_1, x_2 \in f_{-1}(B)$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$ (obr. 30), tj. právě když

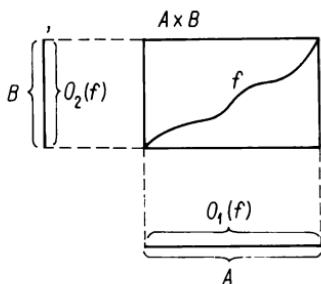
$$f_{-1}(B) \subseteq A \wedge f(A) \subseteq B \wedge (\forall [x_1, y_1], [x_2, y_2] \in f: x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2);$$



Obr. 29. Zobrazení f množiny A na množinu B



Obr. 30. Prosté [injektivní] zobrazení f z množiny A do množiny B



Obr. 31. Vzájemně jednoznačné [bijektivní] zobrazení množin A a B

– vzájemně jednoznačné [jednojednoznačné, bijektivní] zobrazení [bijekce] f množin A a B (v tomto pořadí), právě když je prostým zobrazením množiny A na množinu B (obr. 31), tj. je injektivním [prosté] a surjektivním zobrazením množiny A na množinu B (toto zobrazení se někdy značí $f: A \leftrightarrow B$);

– identické zobrazení f množiny A na množinu A , právě když každému prvku $x \in A$ je přiřazen právě prvek x ;

– zobrazení f v množině A , právě když $A = B$;

– zobrazení f na množině A , právě když je zobrazením množiny A do množiny $B = A$.

Parciální zobrazení

Jestliže f je zobrazení množiny A do množiny B a platí $M \subseteq A$, pak zobrazení $f|_M$, jehož definičním oborem je množina M a které každému prvku $x \in M$ přiřazuje právě prvek $(f|_M)(x) = f(x)$, nazýváme *parciálním zobrazením $f|_M$ [indukovaným na množinu M zobrazením f]* nebo *parcializací [zúžením, restrikcí]* z množiny A na množinu M zobrazení f .

Zúžení a prodloužení zobrazení

Jsou-li f a g dvě zobrazení, pak zobrazení f nazýváme *parcializací [zúžením]* zobrazení g z $O_1(g)$ na $O_1(f)$ a zobrazení g nazýváme *prodloužením zobrazení f z $O_1(f)$ na $O_1(g)$* , právě když $O_1(f) \subseteq O_1(g)$ a $g|_{O_1(f)} = f$.

Inverzní zobrazení

Jestliže f je bijektivní zobrazení množin A a B , pak ke každému prvku $y \in B$ existuje právě jeden takový prvek $x \in A$, že $f(x) = y$. Tím je definováno *inverzní zobrazení f^{-1} k zobrazení f* .

Složené zobrazení

Jestliže f je zobrazení množiny A do množiny B a g je zobrazení množiny $f(A)$ do množiny C , pak zobrazení h , které každému prvku $x \in A$ přiřazuje právě prvek $h(x) = g(f(x)) \in C$, se nazývá *složené zobrazení h s vnější složkou g a vnitřní složkou f* ; píšeme $h = g(f)$ nebo $h = g \circ f$ (v některé literatuře je zaměněno pořadí a piše se $f \circ g$).

Operace

Zobrazení ω n -té kartézské mocniny A^n do množiny A nazýváme *n -árni operaci na množině A* ($n \in \mathbb{N}$); *nulární (0-árni) ($n = 0$) operaci na množině A* rozumíme volbu určitého (tzv. *vyznačeného*) prvku z množiny A . Číslo $n = a(\omega)$

se nazývá *árnost* operace ω , přičemž pro $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ se příslušná operace postupně nazývá *nulární*, *unární*, *binární*, *ternární*, ... operace na množině A .

Příklad:

Jestliže $A = \{1, 0\}$ je množina všech pravdivostních ohodnocení výrokových proměnných, kde 1, resp. 0 značí pravdivost, resp. nepravdivost, pak negace N je unární operací na množině A , kdežto konjunkce K , disjunkce D , implikace I a ekvivalence E jsou binárními operacemi na množině A . Označíme-li

$$a = [1, 1], \quad b = [1, 0], \quad c = [0, 1], \quad d = [0, 0],$$

platí

$$\begin{aligned} N &= \{[1, 0], [0, 1]\}, \\ K &= \{[a, 1], [b, 0], [c, 0], [d, 0]\}, \\ D &= \{[a, 1], [b, 1], [c, 1], [d, 0]\}, \\ I &= \{[a, 1], [b, 0], [c, 1], [d, 1]\}, \\ E &= \{[a, 1], [b, 0], [c, 0], [d, 1]\}. \end{aligned}$$

Mnohoznačné zobrazení

Někdy se zavádí pojednání *mnohoznačného zobrazení* α z množiny A do množiny B (tj. některému prvku $x \in A$ jsou přiřazeny aspoň dva prvky množiny B) tak, že se místo množiny B uvažuje systém 2^B a prvku $x \in \text{dom } \alpha$ je přiřazena právě jedna množina $B_x \in 2^B$. Dříve definované zobrazení se pak pro odlišení nazývá *jednoznačné*.

Funkce

Funkcí nazýváme zobrazení f z libovolné množiny A do nějaké číselné množiny B . Funkce f z množiny A do číselné množiny B je tedy binární relaci $[f; A, B]$, o níž platí, že každému určitému prvku $x \in A$ je přiřazeno nejvýše jedno takové číslo $y \in B$, že $[x, y] \in f$, tj. jestliže $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in f$ a $x_1 = x_2$, pak $y_1 = y_2$. Místo $[x, y] \in f$ často píšeme $y = f(x)$ (někdy též $y = fx$, $f: x \mapsto y$ nebo $x \mapsto y$, popř. jen $x \mapsto y$, víme-li, o jakou funkci jde). Číslo y z uspořádané dvojice $[x, y] \in f$ nazýváme *<funkční> hodnotou funkce f v prvku $x \in A$* .

Množinu $O_1(f)$ [někdy také $f_{-1}(B)$, $D(f)$ nebo $\text{dom } f$] právě těch prvků $x \in A$, z nichž ke každému existuje právě jedno takové číslo $y \in B$, že $[x, y] \in f$, nazýváme *<definiční> oborem funkce f* . Množinu $O_2(f)$ [někdy také $f(A)$, $R(f)$ nebo $\text{rng } f$] právě těch prvků $y \in B$, z nichž ke každému existuje aspoň jeden takový prvek $x \in A$, že $[x, y] \in f$, nazýváme *oborem*

\langle funkčních \rangle hodnot [funkčním oborem, množinou všech funkčních hodnot] funkce f .

Rovnost funkcí

Jestliže funkce f a g mají stejný definiční obor $O_1(f) = O_1(g) = A \neq \emptyset$ a pro každý prvek $x \in A$ platí rovnost $f(x) = g(x)$, říkáme, že funkce f a g jsou si rovny na množině A .

Součet, součin a podíl funkcí

Mají-li funkce f a g stejný definiční obor $O_1(f) = O_2(g) = A \neq \emptyset$, pak funkci h , resp. k nazýváme součtem, resp. součinem funkcí f a g na množině A , jestliže pro každý prvek $x \in A$ platí $h(x) = f(x) + g(x)$, resp. $k(x) = f(x)g(x)$. Jestliže pro každý prvek $x \in A$ platí $g(x) \neq 0$ a $l(x) = f(x)/g(x)$, pak funkci l nazýváme podilem funkcí f a g na množině A .

Prostá funkce

Funkce f se nazývá prostá, právě když pro každé dva různé prvky $x_1, x_2 \in O_1(f)$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Druhy funkcí

Funkci f nazýváme:

- reálnou funkcí \langle jedné \rangle reálné proměnné, právě když

$$O_1(f) \subseteq \mathbb{R}, \quad O_2(f) \subseteq \mathbb{R};$$

- reálnou funkcí n reálných proměnných, právě když

$$O_1(f) \subseteq \mathbb{R}^n, \quad O_2(f) \subseteq \mathbb{R};$$

- reálnou funkcí \langle jedné \rangle komplexní proměnné, právě když

$$O_1(f) \subseteq \mathbb{C}^*, \quad O_2(f) \subseteq \mathbb{R};$$

- reálnou funkcí n komplexních proměnných, právě když

$$O_1(f) \subseteq (\mathbb{C}^*)^n, \quad O_2(f) \subseteq \mathbb{R};$$

- komplexní funkcí \langle jedné \rangle reálné proměnné, právě když

$$O_1(f) \subseteq \mathbb{R}, \quad O_2(f) \subseteq \mathbb{C}^*;$$

- komplexní funkcí n reálných proměnných, právě když

$$O_1(f) \subseteq \mathbb{R}^n, \quad O_2(f) \subseteq \mathbb{C}^*;$$

– komplexní funkcí \langle jedné \rangle komplexní proměnné, právě když

$$O_1(f) \subseteq \mathbb{C}^*, \quad O_2(f) \subseteq \mathbb{C}^*;$$

– komplexní funkcí n komplexních proměnných, právě když

$$O_1(f) \subseteq (\mathbb{C}^*)^n, \quad O_2(f) \subseteq \mathbb{C}^*.$$

Posloupnosti

\langle Nekonečnou \rangle posloupnosti nazýváme zobrazení množiny \mathbb{N} všech kladných celých čísel do libovolné množiny M . Konečnou posloupností nazýváme zobrazení úseku $\mathbb{U}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ do libovolné množiny M . Je-li $M = \mathbb{R}$, mluvíme o posloupnosti reálných čísel. Je-li M systém funkcí, mluvíme o posloupnosti funkci.

0.4.7. Konečné, nekonečné a spočetné množiny, mohutnost množiny

Říkáme, že množiny A a B jsou ekvivalentní [ekvivalentní] nebo že množina A je ekvivalentní [ekvivalentní] s množinou B , a píšeme $A \sim B$, právě když existuje bijektivní zobrazení množin A a B .

Množina M se nazývá konečná, právě když není ekvivalentní se žádnou svou vlastní podmnožinou, tj. právě když každé injektivní zobrazení $f: M \rightarrow M$ je surjektivní. Množina se nazývá nekonečná, právě když není konečná, tj. právě když je ekvivalentní s nějakou svou vlastní podmnožinou.

Množina se nazývá spočetná, právě když je ekvivalentní s podmnožinou množiny \mathbb{N}_0 všech přirozených čísel. (Někdy se za spočetné množiny považují právě jen množiny ekvivalentní s množinou \mathbb{N}_0 . Pak konečné množiny a spočetné množiny se souhrnně nazývají nejvyšše spočetné množiny.)

Říkáme, že množiny A a B mají stejnou mohutnost nebo že množiny A a B mají stejné kardinální číslo, právě když jsou ekvivalentní. Mohutnost množiny A se značí $\text{card } A$ [nebo též $m(A)$, popř. $|A|$, jde-li o konečnou množinu].

Pro konečné množiny pojem mohutnosti splývá se známým pojmem počtu prvků množiny. Mohutnost množiny \mathbb{N}_0 všech přirozených čísel se značí \aleph_0 (čteme: alef nula). Říkáme, že množina má mohutnost kontinua, právě když je ekvivalentní s množinou \mathbb{R} všech reálných čísel; tato mohutnost se značí \aleph_1 .

Existuje-li bijektivní zobrazení mezi množinami A a M , přičemž $M \subset B$ (tj. M je vlastní částí množiny B), ale neexistuje-li bijektivní zobrazení mezi

množinami A a B , pak říkáme, že množina A má menší mohutnost než množina B , nebo že množina B má větší mohutnost než množina A .

Systém $\mathcal{P}(M)$ všech podmnožin množiny M má větší mohutnost než množina M . Označíme-li $2^{m(M)}$ mohutnost $m(M)$ systému \mathcal{M} všech podmnožin množiny M , platí $m(M) < 2^{m(M)}$. Platí $2^{\aleph_0} = \aleph$, tj. mohutnost systému všech podmnožin množiny \mathbb{N}_0 všech přirozených čísel se rovná mohutnosti kontinua.

Císelné množiny

Tabulka 0.6

Popis množiny	Označení	Proveditelné operace a vlastnosti
<i>Množina všech nezáporných celých čísel [množina všech přirozených čísel]</i> <i>Množina všech kladných celých čísel</i>	$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	sčítání, násobení
<i>Množina všech celých čísel</i>	$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$	sčítání, odčítání, násobení; tvoří komutativní okruh
<i>Množina všech racionalních čísel</i>	$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$	sčítání, odčítání, násobení, dělení; tvoří komutativní těleso (tzv. těleso racionalních čísel)
<i>Množina všech reálných čísel</i>	\mathbb{R} , $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$	sčítání, odčítání, násobení, dělení (věta o supremu a infimu); tvoří komutativní těleso (tzv. těleso reálných čísel); obsahuje těleso racionalních čísel a všechny nekonečné desítkové rozvoje (reálná čísla, která nejsou racionalní, se nazývají iracionální čísla, přičemž jejich desítkové rozvoje nejsou periodické)
<i>Množina všech <konečných> komplexních čísel</i>	$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	stejné operace jako u množiny \mathbb{R} (každá algebraická rovnice má v množině \mathbb{C} aspoň jeden kořen); tvoří komutativní těleso (tzv. těleso komplexních čísel)

0.4.8. Algebraické struktury

Rovnost na množině

Každý neprázdný disjunktní systém \mathcal{M} množin, jehož sjednocením je množina $M \neq \emptyset$, nazýváme *rozkladem* $\langle v \text{ třídy} \rangle$ na množině M [*rozkladem množiny M, rozkladem pokrývajícím množinu M, faktorovou množinou na množině M*]. Řekneme, že dva prvky $a, b \in M$ jsou si *rovny* a píšeme $a = b$, právě když prvek a patří do téže třídy rozkladu na množině M jako prvek b . Řekneme, že dva prvky $a, b \in M$ jsou *od sebe různé*, a píšeme $a \neq b$, právě když prvky a a b patří do různých tříd rozkladu na množině M . Tím jsou definovány *rovnost* a *nerovnost* na množině M . Na rovnost na množině M ($a, b, c \in M$) klademe tyto základní požadavky (tzv. *axiomy rovnosti na množině M*):

R_0 : Pro každé dva prvky a, b platí právě jedno ze dvou přiřazení $a = b$, $a \neq b$.

R_1 (*axiom reflexivnosti*): Pro každý prvek a platí $a = a$.

R_2 (*axiom symetrienosti*): Jestliže $a = b$, pak $b = a$.

R_3 (*axiom tranzitivnosti*): Jestliže $a = b$ a $b = c$, pak $a = c$.

Z axioma R_3 plyne, že místo $a = b$, $b = c$ lze stručně psát $a = b = c$.

Příklad 1:

Množinu \mathbb{N} všech kladných celých čísel lze vyjádřit jako disjunktní systém jednoprvkových množin, takže každé kladné celé číslo pokládáme za různé od všech ostatních kladných celých čísel.

Příklad 2:

Množinu M všech uspořádaných dvojic kladných celých čísel lze vyjádřit jako takový disjunktní systém, že uspořádané dvojice $[a, b], [c, d] \in M$ patří do téže třídy (tj. $[a, b] = [c, d]$), právě když součiny ad a bc jsou týmž kladným celým číslem.

Algebraické struktury

Binární operaci [*stručně operaci*] nebo *vnitřním zákonem kompozice* \square na množině M nazýváme zobrazení $\square: M^2 \rightarrow M$, přičemž prvek $a \square b$ ($a, b, a \square b \in M$) nazýváme *kompozicí* prvků a, b *vzhledem k binární operaci* \square na množině M .

Podle základních požadavků (tzv. *axiómů*) kladených na binární operace (vyšetřované v algebře) na dané množině dostáváme objekty s různými algebraickými vlastnostmi neboli dostáváme tzv. *algebraické struktury*. Binární operace na určité množině, které splňují axiomy příslušné algebraické struktury, nazýváme *operacemi této struktury*.

Komutativní grupa

Komutativní grupou [Abelovou grupou] $[M; \square]$ s grupovou operací \square nazýváme algebraickou strukturu definovanou na množině M jedinou binární operací \square na množině M , která splňuje tyto axiomy:

G_0 (uzavřenosť operace \square): Ke každé uspořádané dvojici $[a, b]$ prvků $a, b \in M$ je přiřazen právě jeden prvek množiny M , který označujeme $a \square b$ a nazýváme kompozicí prvků $a, b \in M$ vzhledem k vnitřnímu zákonu kompozice \square na množině M .

G_1 (asociativní zákon pro operaci \square):

$$a \square (b \square c) = (a \square b) \square c$$

pro všechny prvky $a, b, c \in M$.

G_2 (komutativní zákon pro operaci \square):

$$a \square b = b \square a$$

pro všechny prvky $a, b \in M$.

G_3 (existence neutrálního prvku vzhledem k operaci \square): Existuje takový prvek $e \in M$ (tzv. neutrální prvek vzhledem k vnitřnímu zákonu kompozice \square na množině M), že pro každý prvek $a \in M$ platí

$$a \square e = e \square a = a.$$

G_4 (existence symetrického prvku vzhledem k operaci \square): Ke každému prvku $a \in M$ existuje takový prvek $a' \in M$ (tzv. symetrický prvek k prvku a množiny M vzhledem k vnitřnímu zákonu kompozice \square na množině M , majícímu neutrální prvek $e \in M$), že platí

$$a \square a' = a' \square a = e.$$

Pro konkrétní binární operace se místo znaku \square používá speciálních znaků. U konkrétní algebraické struktury se kromě toho používá jednak speciálního názvu pro každou binární operaci této struktury, jednak speciálního názvu pro kompozici prvků vzhledem k příslušné binární operaci.

Nejčastěji se používá aditivního a multiplikativního označení a příslušné terminologie.

Aditivní komutativní grupa

Použije-li se pro binární operaci komutativní grupy aditivního označení (názvem operace je pak sčítání a znakem operace je +), dostaneme *aditivní*

komutativní grupu $[M; +]$. Příslušné axiomy pak místo G_0 až G_4 značíme A_0 až A_4 .

Prvek $a + b$ nazýváme *součtem prvků* (tzv. *sčítanců*) $a, b \in M$ < vzhledem k sčítání $+$ na množině M >.

Neutrální prvek vzhledem k sčítání $+$ nazýváme *nulovým prvkem* nebo *nulou* < vzhledem k sčítání $+$ na množině M > a značíme 0.

Symetrický prvek k prvku a vzhledem k sčítání $+$ nazýváme *opačným prvkem k prvku a* a značíme $-a$.

Příklad:

Množina \mathbb{Z} všech celých čísel s obvyklým sčítáním tvoří aditivní komutativní grupu, přičemž nulovým prvkem je číslo $0 \in \mathbb{Z}$ a opačným prvkem k číslu $a \in \mathbb{Z}$ je číslo $-a \in \mathbb{Z}$.

Multiplikativní komutativní grupa

Použije-li se pro binární operaci komutativní grupy multiplikativního označení (názvem operace je pak *násobení* a znakem operace je \cdot), dostaneme *multiplikativní komutativní grupu* $[M; \cdot]$. Příslušné axiomy pak místo G_0 až G_4 značíme M_0 až M_4 .

Prvek $a \cdot b$ (stručně ab) nazýváme *součinem prvků* (tzv. *činitelů*) $a, b \in M$ < vzhledem k násobení \cdot na množině M >.

Neutrální prvek vzhledem k násobení \cdot nazýváme *jednotkovým prvkem* nebo *jednotkou* < vzhledem k násobení \cdot na množině M > a značíme 1.

Symetrický prvek k prvku a vzhledem k násobení \cdot nazýváme *inverzním prvkem* nebo *převráceným prvkem k prvku a* a značíme a^{-1} .

Příklad:

Množina \mathbb{Q} všech racionálních čísel různých od nuly s obvyklým násobením tvoří multiplikativní komutativní grupu, přičemž jednotkovým prvkem je číslo 1 a inverzním prvkem k číslu $a \in \mathbb{Q}$ je číslo $a^{-1} \in \mathbb{Q}$.

Obecnější algebraické struktury než komutativní grupa jsou algebraické struktury grupoid, kvazigrupa, lupa, pologrupa a monoid.

Grupoid

Grupoidem $[M; \square]$ nazýváme algebraickou strukturu definovanou na množině M (na tzv. *nosiči grupoidu*) jedinou binární operací \square na množině M (tzv. *operace grupoidu*), přičemž na operaci grupoidu se nekladou žádné požadavky. Je-li operací grupoidu sčítání, resp. násobení, nazýváme jej *aditivním*, resp. *multiplikativním grupoidem*.

Kvazigrupa

Kvazigrupou nazýváme takový grupoid $[M; \square]$, že pro každé dva prvky $a, b \in M$ má každá z rovnic $a \square x = b$, $y \square a = b$ právě jedno řešení v množině M .

Lupa

Lupou nazýváme kvazigrupu, jejíž operace má neutrální prvek.

Pologrupa

Pologrupou [*semigrupou, asociativním grupoidem*] nazýváme grupoid, jehož operace je asociativní, tj. platí axiómy G_0 a G_1 .

Monoid

Monoidem nazýváme pologrupu, jejíž operace má neutrální prvek, tj. platí axiómy G_0 , G_1 a G_3 .

Je-li operace dosud uvedených struktur komutativní, připojí se k jejich názvům přívlastek „komutativní“.

Poznámka:

Monoid $[M; \square]$, v němž ke každému prvku množiny M existuje inverzní prvek vzhledem k operaci monoidu, tj. platí axiómy G_0 , G_1 , G_3 a G_4 , nazýváme *grupou*.

Distributivní zákony

Říkáme, že binární operace \bigcirc je distributivní zprava vzhledem k binární operaci \square , platí-li axióm:

D_1 (*pravý distributivní zákon*):

$$a \bigcirc (b \square c) = (a \bigcirc b) \square (a \bigcirc c).$$

Říkáme, že binární operace \bigcirc je distributivní zleva vzhledem k binární operaci \square , platí-li axióm:

D_2 (*levý distributivní zákon*):

$$(a \square b) \bigcirc c = (a \bigcirc c) \square (b \bigcirc c).$$

Jestliže axiómy D_1 a D_2 platí zároveň, říkáme, že binární operace \bigcirc je distributivní vzhledem k binární operaci \square .

Okruh

Okruhem $[M; +, \cdot]$ nazýváme algebraickou strukturu definovanou na množině M takovými dvěma binárními operacemi $+$ (sčítání) a \cdot (násobení),

že $[M; +]$ je komutativní grupa s grupovou operací $+$ (tzv. *aditivní grupa okruhu* $[M; +, .]$), $[M; .]$ je grupoid (tzv. *množinový grupoid* $[M; +, .]$) a operace $.$ je distributivní vzhledem k operaci $+$.

Pro operace $+$ a $.$ okruhu tedy platí axiómy A_0 až A_4 , M_0 a D_1 a D_2 .

Asociativní okruh, komutativní okruh, okruh s jednotkou

Jestliže násobení na okruhu $[M; +, .]$ je asociativní, resp. je komutativní, resp. má jednotkový prvek $e \in M$, pak okruh $[M; +, .]$ nazýváme *asociativním okruhem*, resp. *komutativním okruhem*, resp. *okruhem s jednotkou*.

Prvek $a \in M$ se nazývá *levý*, resp. *pravý dělitel nuly v okruhu* $[M; +, .]$, právě když $a \neq 0$ a existuje takový prvek $b \in M$, $b \neq 0$, že platí $a \cdot b = 0$, resp. $b \cdot a = 0$. Platí-li $a \cdot b = 0$ a zároveň $b \cdot a = 0$, pak prvek $a \in M$ nazýváme *dělitelem nuly v okruhu* $[M; +, .]$.

Prvek $a \in M$ okruhu $[M; +, .]$ s jednotkou se nazývá *levý*, resp. *pravý invertovatelný prvek okruhu* $[M; +, .]$, právě když k němu existuje inverzní prvek a^{-1} , pro který platí $a^{-1} \cdot a = 1$, resp. $a \cdot a^{-1} = 1$. Platí-li $a^{-1} \cdot a = 1$ a zároveň $a \cdot a^{-1} = 1$, pak prvek $a \in M$ nazýváme *invertovatelným prvkem okruhu* $[M; +, .]$.

Singulárním prvkem okruhu nazýváme prvek, který není invertovatelný.

Regulárním prvkem okruhu nazýváme invertovatelný prvek asociativního okruhu.

Asociativní okruh nemá dělitele nuly, právě když v tomto okruhu lze krátit nenulovým prvkem, tj. právě když z každé rovnosti $a \cdot x = b \cdot x$, $x \cdot a = x \cdot b$ při $x \neq 0$ plyne $a = b$ (takový okruh se nazývá *asociativní okruh bez dělitelů nuly*).

Příklad 1:

Množina všech sudých čísel s obvyklými operacemi sčítání a násobení tvoří asociativní a komutativní okruh bez jednotky a bez dělitelů nuly.

Příklad 2:

Množina Z všech celých čísel s obvyklými operacemi sčítání a násobení tvoří asociativní a komutativní okruh s jednotkou bez dělitelů nuly. Neutrálním prvkem vzhledem k sčítání, resp. násobení je číslo 0, resp. 1.

Obor integrity

Oborem integrity nazýváme asociativní a komutativní okruh bez dělitelů nuly, tj. pro operace oboru integrity platí axiómy A_0 až A_4 , M_0 až M_2 , D_1 a D_2 . Platí-li také axióm M_3 , mluvíme o *oboru integrity s jednotkou*.

Příklad:

Množina všech reálných čísel tvaru $a + b\sqrt{2}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) s obvyklými operacemi sčítání a násobení je oborem integrity s jednotkou.

Těleso

Tělesem nebo *asociativním okruhem s dělením* [*division ring*] nazýváme asociativní okruh s jednotkou, jehož každý nenulový prvek je invertovatelný, tj. pro operace tělesa platí axiómy A_0 až A_4 , M_0 , M_1 , M_3 , M_4 , D_1 a D_2 .

Nenulové prvky tělesa tvoří vzhledem k násobení grupu (tzv. *multiplikativní grupu tělesa*). Je-li tato grupa komutativní (tj. platí-li ještě axióm M_2), pak příslušné těleso nazýváme *komutativním tělesem* nebo *polem*.

Příklady:

S obvyklými operacemi sčítání a násobení tvoří komutativní tělesa např. tyto množiny: množina \mathbb{Q} všech racionálních čísel (tzv. *těleso racionálních čísel*), množina \mathbb{R} všech reálných čísel (tzv. *těleso reálných čísel*) množina \mathbb{C} všech komplexních čísel (tzv. *těleso komplexních čísel*).

Poznámka:

V matematické literatuře se někdy asociativní okruh nazývá stručně *okruhem*. U oboru integrity se někdy nepožaduje komutativnost násobení a někdy se požaduje existence neutrálního prvku vzhledem k násobení.

Vnější zákon kompozice

Vnější operací [*operátorovou operaci, vnějsím zákonem kompozice*] Δ na množině M s množinou operátorů A [*vnější operací z množiny A na množinu M*] nazýváme zobrazení $\Delta: A \times M \rightarrow M$, přičemž prvek $\alpha \Delta a$ ($\alpha \in A$, $a \in M$) nazýváme *kompozicí operátoru α a prvku a vzhledem k vnější operaci Δ z množiny A na množinu M* .

Modul

Modulem $[M, \square, \Delta]$ nad asociativním okruhem $[A, +, .]$ (stručně *modulem M nad okruhem A*) nazýváme algebraickou strukturu definovanou na množině M , přičemž $[M, \square]$ je komutativní (zpravidla aditivní) grupa a Δ je vnější operace na množině M s asociativním okruhem $[A, +, .]$ jako množinou operátorů. Vnější operace Δ je distributivní vzhledem k sčítání $+$ na množině A a vzhledem k binární operaci \square na množině M a je asociativní vzhledem k násobení na množině A , tj. pro každé dva prvky $\alpha, \beta \in A$ a pro každé dva prvky $a, b \in M$

 platí

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \Delta a &= (\alpha \Delta a) \square (\beta \Delta a), \\ \alpha \Delta (a \square b) &= (\alpha \Delta a) \square (\alpha \Delta b), \\ \alpha \Delta (\beta \Delta a) &= (\alpha \cdot \beta) \Delta a.\end{aligned}$$

Lineární prostor

Lineárním prostorem [vektorovým prostorem] L nad tělesem T nazýváme modul L nad tělesem T , takže pro každý prvek $a \in L$ platí

$$e \Delta a = a,$$

kde e je jednotkový prvek tělesa T . Prvky lineárního prostoru nazýváme *body* nebo *vektory*. Těleso T nazýváme *tělesem skalářů* a jeho prvky *skaláry*. Je-li nosičem tělesa T množina \mathbb{R} , resp. \mathbb{C} , mluvíme o *reálném*, resp. *komplexním lineárním prostorem*.

Příklad:

Množina všech volných vektorů v rovině je lineárním prostorem nad tělesem reálných čísel.

Uspořádaná grupa

Uspořádanou grupou $[M; \square, \leqslant]$ nazýváme grupu $[M; \square]$ s grupovou operací \square , právě když množina M je uspořádaná a pro každé dva porovnatelné prvky $a, b \in M$, $a \leqslant b$, a libovolný prvek $c \in M$ platí

$$a \square c \leqslant b \square c$$

a zároveň

$$c \square a \leqslant c \square b.$$

Prvek $a \in M$ se nazývá *kladný*, resp. *nezáporný*, právě když $a \geqslant e$, $a \neq e$, resp. $a \geqslant e$, kde e je neutrální prvek grupy $[M; \square]$. Prvek $a \in M$ se nazývá *záporný*, resp. *nezáporný*, právě když $a \leqslant e$, $a \neq e$, resp. $a \leqslant e$.

Uspořádaná grupa $[M; \square, \leqslant]$ se nazývá *úplně uspořádaná* [*lineárně uspořádaná*], právě když \leqslant je úplným uspořádáním.

V úplně uspořádané grupě $[M; \square, \leqslant]$ tedy platí tyto tzv. *axiomy uspořádání*:

U_0 (*axióm trichotomie*): Pro každé dva prvky $a, b \in M$ platí právě jedno ze tří přiřazení

$$a \prec b, \quad a = b, \quad b \prec a.$$

U_1 (*axióm tranzitivnosti*): Jestliže pro nějaké prvky $a, b, c \in M$ platí $a \leqslant b$, $b \leqslant c$, pak $a \leqslant c$.

U_2 (*axióm monotonie*): Jestliže pro nějaké prvky $a, b \in M$ platí $a \leqslant b$, pak $a \square c \leqslant b \square c$ a $c \square a \leqslant c \square b$ pro každý prvek $c \in M$.

Uspořádaný okruh

Uspořádaným okruhem $[M; +, ., \leqslant]$ nazýváme okruh $[M; +, .]$, právě když množina M je uspořádaná, pro každé dva porovnatelné prvky $a, b \in M$, $a \leqslant b$, a pro všechny prvky $c \in M$ platí

$$a + c \leqslant b + c,$$

a pro prvky $a, b \in M$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, platí

$$ab \geqslant 0 \wedge ba \geqslant 0.$$

Uspořádaný okruh $[M; +, ., \leqslant]$ se nazývá *úplně uspořádaný* [*lineárně uspořádaný*], právě když grupa $[M; +]$ je úplně uspořádaná.

V úplně uspořádaném okruhu $[M; +, \dots, \leqslant]$ tedy platí axiomy uspořádání U_0 , U_1 , U_2 (v tomto případě axióm U_2 nazýváme *axiómem monotonie pro sčítání*) a kromě toho tento axióm:

U_3 (*axióm monotonie pro násobení*): Pro prvky $a, b \in M$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, platí

$$ab \geqslant 0 \wedge ba \geqslant 0.$$

0.4.9. Několik topologických pojmu

Metrický prostor

Metrickým prostorem (M, ϱ) nazýváme neprázdnou množinu M , na níž je definováno zobrazení $\varrho: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$, které splňuje tyto axiomy:

- a) $\varrho(x, y) \geq 0$ pro $\forall x, y \in M$.
- b) $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*axióm totožnosti*).
- c) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ pro $\forall x, y \in M$ (*axióm symetričnosti*).
- d) $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ pro $\forall x, y, z \in M$ (*trojúhelníková nerovnost*).

Přitom prvky množiny M se nazývají *body*, zobrazení ϱ se nazývá *metrika* a číslo $\varrho(x, y)$ se nazývá *vzdálenost bodů* x, y .

Nemůže-li dojít k nedorozumění, lze metrický prostor značit stejným písmenem jako samu množinu M .

Euklidovský prostor

Euklidovskou metrikou na množině \mathbb{R}^n všech uspořádaných n -tic reálných čísel nazýváme metriku $\varrho(x, y)$, při níž vzdáenosť

$$\varrho(x, y) = \sqrt{[(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2]},$$

kde $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Množina \mathbb{R}^n s euklidovskou metrikou se nazývá n -rozměrný euklidovský prostor a označuje se E_n .

Otevřená koule, okolí bodu

Otevřenou koulí v metrickém prostoru (M, ϱ) (se středem a a poloměrem $\delta, \delta > 0$) [δ-okolím bodu a] nazýváme množinu všech bodů $x \in M$, jejichž vzdáenosť $\varrho(x, a)$ od bodu a jsou menší než δ ; značíme ji $K(a, \delta)$, $K_\delta(a)$ nebo stručně $K(a)$.

Neúplným δ-okolím bodu a nazýváme množinu $K(a, \delta) \setminus \{a\}$, kterou značíme $\tilde{K}(a, \delta)$, $\tilde{K}_\delta(a)$ nebo stručně $\tilde{K}(a)$.

Okolí bodu $a \in E_1$

Jestliže a je libovolné reálné číslo a $\delta > 0$, pak:

a) levým, resp. pravým δ-okolím bodu a nazýváme interval tvaru $(a - \delta, a)$, resp. $(a, a + \delta)$; značíme je $U_-(a, \delta)$, resp. $U_+(a, \delta)$, popř. stručně $U_-(a)$, resp. $U_+(a)$;

b) δ-okolím bodu a nazýváme interval tvaru $(a - \delta, a + \delta)$; značíme je $U(a, \delta)$, $U_\delta(a)$ nebo stručně $U(a)$;

c) levým, resp. pravým neúplným δ-okolím, resp. neúplným δ-okolím bodu a nazýváme množinu $U_-(a, \delta) \setminus \{a\}$, resp. $U_+(a, \delta) \setminus \{a\}$, resp. $U(a, \delta) \setminus \{a\}$ a značíme po řadě $\tilde{U}_-(a, \delta)$, $\tilde{U}_+(a, \delta)$ a $\tilde{U}(a, \delta)$.

Spojité zobrazení

Spojitým zobrazením metrického prostoru (X, ϱ_1) do metrického prostoru (Y, ϱ_2) v bodě a nazýváme takové zobrazení f , že k libovolnému bodu okolí $K(f(a), \varepsilon)$ existuje takové okolí $K(a, \delta)$, že $f(x) \in K(f(a), \varepsilon)$ pro všechny body $x \in K(a, \delta)$.

Spojitým zobrazením metrického prostoru (X, ϱ_1) do metrického prostoru (Y, ϱ_2) nazýváme zobrazení, které je spojité v každém bodě metrického prostoru (X, ϱ_1) .

Otevřená a uzavřená množina

Vnějším bodem množiny $A \subset (M, \varrho)$ v prostoru (M, ϱ) nazýváme bod prostoru (M, ϱ) , právě když nějaké jeho okolí je disjunktní s množinou A .

Vnitřním bodem množiny $A \subset (M, \varrho)$ v prostoru (M, ϱ) nazýváme bod prostoru (M, ϱ) , právě když nějaké jeho okolí je částí množiny A .

Hranicním bodem množiny $A \subset (M, \varrho)$ v prostoru (M, ϱ) nazýváme bod prostoru (M, ϱ) , právě když každé jeho okolí obsahuje aspoň jeden bod patřící do množiny A a aspoň jeden bod nepatřící do množiny A .

Izolovaným bodem množiny $A \subset (M, \varrho)$ nazýváme bod $a \in A$, právě když existuje takové okolí bodu a v prostoru (M, ϱ) , že z tohoto okolí patří do množiny A jen bod a .

Vnitřkem A_M° (stručně A°), resp. *vnějkem* $\text{Ext}_M A$ (stručně $\text{Ext } A$), resp. *hranicí* $\text{Fr}_M A$ (stručně $\text{Fr } A$) množiny $A \subset (M, \varrho)$ v prostoru (M, ϱ) nazýváme množinu všech vnitřních, resp. všech vnějších, resp. všech hraničních bodů množiny A .

Otevřenou množinou v prostoru (M, ϱ) nazýváme množinu $A \subset (M, \varrho)$, právě když existuje její neprázdná hranice a všechny body množiny A jsou vnitřními body.

Uzavřenou množinou v prostoru (M, ϱ) nazýváme množinu $A \subset (M, \varrho)$, právě když je sjednocením svého vnitřku a své neprázdné hranice.

Obojetnou množinou v prostoru (M, ϱ) nazýváme množinu $A \subset (M, \varrho)$, právě když její hranice je prázdnou množinou.

Příklady:

V prostoru E_1 je interval $\langle a, b \rangle$ uzavřenou množinou, interval (a, b) otevřenou množinou, interval $(-\infty, a)$ otevřenou množinou, interval $\langle a, +\infty \rangle$ uzavřenou množinou a interval $(-\infty, +\infty)$ obojetnou množinou.

Souvislá množina

Souvislou množinou v prostoru (M, ϱ) nazýváme množinu $A \subset (M, \varrho)$, právě když pro každé dvě disjunktní neprázdné podmnožiny A_1, A_2 množiny A , pro něž platí $A_1 \cup A_2 = A$, existuje aspoň jeden bod v množině A , který je společným hraničním bodem množin A_1, A_2 , tj. platí

$$\begin{aligned} A &= A_1 \cup A_2 \wedge A_1 \neq \emptyset \neq A_2 \wedge A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow \\ &\Rightarrow A \cap \text{Fr}_M A_1 \cap \text{Fr}_M A_2 \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Sjednocení dvou souvislých množin A_1, A_2 , které mají aspoň jeden společný, je souvislou množinou. Protože lomená čára je souvislou množinou, je každá množina, jejíž každé dva body lze spojit lomenou čárou, souvislou množinou.

Oblast

Oblastí nazýváme souvislou otevřenou množinu.

Uzavřenou oblastí [kontinuem] nazýváme sjednocení oblasti a její neprázdné hranice.

Oblast $\Omega_2 \subset E_2$ se nazývá *ohraničená* [omezená], právě když existuje takový uzavřený kruh K_2 s konečným poloměrem, že $\Omega_2 \subset K_2$.

Ohraničená oblast $\Omega_2 \subset E_2$ se nazývá *jednoduše souvislá*, právě když její doplněk $E_2 \setminus \Omega_2$ je souvislou množinou.

Příklady:

Vnitřek kruhu a vnějšek kruhu jsou jednoduše souvislými oblastmi. Vnitřek kruhu bez libovolného bodu tohoto vnitřku a vnitřek mezikruží nejsou jednoduše souvislými oblastmi.

Oblast $\Omega_3 \subset E_3$ se nazývá *ohraničená* [omezená], právě když existuje taková uzavřená koule K_3 s konečným poloměrem, že $\Omega_3 \subset K_3$.

Ohraničená oblast $\Omega_3 \subset E_3$ se nazývá *jednoduše souvislá*, právě když existuje taková uzavřená koule K_3 a takové zobrazení f , které je spojité a prosté a jehož inverzní zobrazení je také spojité; že platí $f(K_3) = \Omega_3$.

Příklady:

Vnitřek koule je jednoduše souvislou oblastí. Vnitřek koule bez libovolného bodu tohoto vnitřku a vnitřní oblast anuloidu nejsou jednoduše souvislými oblastmi.

Vnitřní a vnější oblast kružnice, popř. kulové plochy

Vnitřní oblastí kružnice K_1 v prostoru E_2 nazýváme oblast $\Omega_2 \subset E_2$, která obsahuje střed kružnice K_1 a jejíž hranicí je kružnice K_1 . *Vnější oblastí kružnice* K_1 v prostoru E_2 nazýváme množinu $E_2 \setminus (\Omega_2 \cup K_1)$. Sjednocení vnější a vnitřní oblasti kružnice je vnějkem kružnice v prostoru E_2 . Vnitřek kružnice v E_2 je prázdnou množinou.

Vnitřní oblastí kulové plochy K_2 v prostoru E_3 nazýváme oblast $\Omega_3 \subset E_3$, která obsahuje střed kulové plochy K_2 a jejíž hranicí je kulová plocha K_2 . *Vnější oblastí kulové plochy* K_2 v prostoru E_3 nazýváme množinu $E_3 \setminus (\Omega_3 \cup K_2)$.

Podobně se definuje vnitřní a vnější oblast např. elipsy, n -úhelníku a elipsoidu.

Poznámka:

Vnitřní oblast kružnice v prostoru E_2 je vnitřkem příslušného kruhu. Vnější oblast kružnice je vnějkem příslušného kruhu, ale není vnějkem

kružnice. Vnější bod kružnice je bodem vnějšku kružnice, tj. bodem vnitřní nebo vnější oblasti kružnice, kdežto vnitřní bod kružnice neexistuje. Mluvíme-li o bodu uvnitř, resp. vně kružnice, pak tím zpravidla myslíme, že jde o bod vnitřní, resp. vnější oblasti kružnice.

Hromadný bod, derivace a uzávěr množiny

Hromadným bodem množiny $A \subset (M, \varrho)$ v prostoru (M, ϱ) nazýváme bod $a \in (M, \varrho)$, právě když v každém okolí bodu a leží aspoň jeden bod množiny A , který je různý od bodu a .

Množinu všech hromadných bodů množiny $A \subset (M, \varrho)$ nazýváme *derivací množiny A vzhledem k prostoru (M, ϱ)* .

Sjednocení množiny $A \subset (M, \varrho)$ a derivace množiny A vzhledem k prostoru (M, ϱ) nazýváme *uzávěrem množiny A v prostoru (M, ϱ)* a označujeme \bar{A}_M nebo stručně \bar{A} .

1.1. ČÍSELNÉ MNOŽINY

1.1.1. Množina všech přirozených čísel

Přirozeným [nezáporným celým] číslem nazýváme kardinální číslo konečné množiny.

Množina

$$\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

všech přirozených čísel s obvyklou operací + (sčítání) a s obvyklým uspořádáním \leq je komutativní dobře uspořádaná pologrupa s neutrálním prvkem 0 (tj. platí axiómy U_0 až U_3 , A_1 až A_3), v níž lze krátit, tj. pro každé tři prvky $a, b, c \in \mathbf{N}_0$ z předpokladu $a + c = b + c$ plyne $a = b$. Množina \mathbf{N}_0 s obvyklou operací . (násobení) a s obvyklým uspořádáním \leq je komutativní dobře uspořádaná pologrupa s neutrálním prvkem 1 (tj. platí axiómy U_0 až U_3 , M_1 až M_3), v níž lze krátit nenulovým prvkem, tj. pro každé tři prvky $a, b, c \in \mathbf{N}_0$ ($c \neq 0$) z předpokladu $ac = bc$ plyne $a = b$. Pro každé tři prvky $a, b, c \in \mathbf{N}_0$ platí $(a + b)c = ac + bc$.

Peanovy axiómy

1. Jestliže $x \in \mathbf{N}_0$, pak $x + 1 \in \mathbf{N}_0$.
2. $0 \in \mathbf{N}_0$.
3. Jestliže $x \in \mathbf{N}_0$, pak $x + 1 \neq 0$.
4. Jestliže $x, y \in \mathbf{N}_0$ a $x + 1 = y + 1$, pak $x = y$.
5. Jestliže $M \subseteq \mathbf{N}_0$, $0 \in M$ a z předpokladu $x \in M$ plyne $x + 1 \in M$, pak $M = \mathbf{N}_0$ (tzv. *princip matematické indukce*).

Důkaz matematickou indukcí

Důkaz matematickou indukcí se skládá z těchto dvou kroků:

1. Ověříme, že výrok V_n platí pro $n = p$ ($p \in \mathbf{N}_0$).
2. Předpokládáme platnost výroku V_n pro $n = k \geq p$ a dokážeme platnost výroku V_n pro $n = k + 1$ (tzv. *indukční krok*).

Pak výrok V_n platí pro všechna přirozená čísla $n \geq p$.

Příklad:

Dokažme matematickou indukcí platnost vzorce

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Vzorec je zřejmě správný pro $n = 1$, neboť $1 = 1^2$.

Z předpokladu, že daný vzorec platí pro $n = k$, dokážeme platnost vzorce pro $n = k + 1$:

$$[1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)] + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Daný vzorec tedy platí pro všechna přirozená čísla $n \geq 1$.

Úsek množiny \mathbf{N}_0

Podmnožinu $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ množiny \mathbf{N}_0 všech přirozených čísel nazýváme *n-tým úsekem množiny \mathbf{N}_0* a označujeme \mathbf{U}_{0n} (např. $\mathbf{U}_{04} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$).

1.1.2. Množina všech celých čísel

Množina

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

všech celých čísel s obvyklými operacemi sčítání a násobení a s obvyklým uspořádáním tvoří uspořádaný obor integrity s jednotkovým prvkem 1 a nulovým prvkem 0. Opačným prvkem k číslu k je číslo $-k$.

Rozdílem celých čísel a, b (v tomto pořadí) nazýváme celé číslo d , pro něž platí $a = b + d$, a pišeme $a - b = d$. Číslo a , resp. b se nazývá *menšenec*, resp. *menšitel*.

Pro $a, b \in \mathbf{Z}$ platí

$$a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbf{N}.$$

Konstrukce množiny \mathbf{Z}

Celá čísla lze sestrojit jako třídy ekvivalence na množině všech uspořádaných dvojic přirozených čísel, splňují-li tyto požadavky ($m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbf{N}_0$):

$$[m_1, m_2] = [n_1, n_2] \Leftrightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1,$$

$$[m_1, m_2] < [n_1, n_2] \Leftrightarrow m_1 + n_2 < m_2 + n_1,$$

$$[m_1, m_2] > [n_1, n_2] \Leftrightarrow m_1 + n_2 > m_2 + n_1,$$

$$[m_1, m_2] + [n_1, n_2] = [m_1 + n_1, m_2 + n_2],$$

$$[m_1, m_2] \cdot [n_1, n_2] = [m_1 n_1 + m_2 n_2, m_1 n_2 + m_2 n_1].$$

Kladným celým číslom k nazýváme třídu obsahující dvojici tvaru $[k+1, 1]$ a ztotožňujeme je s přirozeným číslem $k \neq 0$. Množinu všech kladných celých čísel značíme \mathbb{N} .

Záporným celým číslom $-k$ nazýváme třídu obsahující dvojici tvaru $[1, k+1]$.

Celým číslem nula nazýváme třídu obsahující dvojici tvaru $[1, 1]$ a ztotožňujeme je s přirozeným číslem 0.

Množina \mathbb{Z} je tedy rozšířením množiny \mathbb{N}_0 o všechna záporná celá čísla a na rozdíl od množiny \mathbb{N}_0 je uzavřená vzhledem k operaci odčítání.

Úsek množiny \mathbb{N}

Podmnožinu $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ množiny \mathbb{N} všech kladných celých čísel nazýváme n -tým úsekem množiny \mathbb{N} a označujeme U_n (např. $U_4 = \{1, 2, 3, 4\}$).

1.1.3. Množina všech racionálních čísel

Množina \mathbb{Q} všech racionálních čísel s obvyklými operacemi sčítání a násobení a s obvyklým uspořádáním tvoří uspořádané komutativní těleso s jednotkovým prvkem 1 a nulovým prvkem 0:

Podílem racionálních čísel p, q ($q \neq 0$) nazýváme racionální číslo r , pro něž platí $p = qr$, a píšeme $p : q$ nebo ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$, popř. p/q . Číslo p , resp. q se nazývá *dělenec*, resp. *dělitel* (u zlomku *čitatel*, resp. *jmenovatel*).

Konstrukce množiny \mathbb{Q}

Racionální čísla lze sestrojit jako třídy ekvivalence na množině všech uspořádaných dvojic celých čísel, splňují-li tyto požadavky ($p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, $p_2 \neq 0$, $q_2 \neq 0$):

$$[p_1, p_2] = [q_1, q_2] \Leftrightarrow p_1 q_2 = p_2 q_1,$$

$$\begin{aligned} [p_1, p_2] < [q_1, q_2] \Leftrightarrow (p_1 q_2 < p_2 q_1 \text{ pro } p_2 q_2 > 0) \vee \\ &\quad \vee (p_1 q_2 > p_2 q_1 \text{ pro } p_2 q_2 < 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [p_1, p_2] > [q_1, q_2] \Leftrightarrow (p_1 q_2 > p_2 q_1 \text{ pro } p_2 q_2 > 0) \vee \\ &\quad \vee (p_1 q_2 < p_2 q_1 \text{ pro } p_2 q_2 < 0). \end{aligned}$$

$$[p_1, p_2] + [q_1, q_2] = [p_1 q_2 + p_2 q_1, p_2 q_2],$$

$$[p_1, p_2] [q_1, q_2] = [p_1 q_1, p_2 q_2].$$

Třídu obsahující dvojici tvaru $[p, 1]$ ztotožňujeme s celým číslem p .

Třídu obsahující dvojici tvaru $[1, p]$ ztotožňujeme s inverzním číslem k číslu p a zapisujeme $1/p$ nebo p^{-1} . Třídu obsahující dvojici tvaru $[p_1, p_2]$ pak zapisujeme p_1/p_2 .

Množina \mathbb{Q} je tedy rozšířením množiny \mathbb{Z} o všechna necelá racionální čísla p_1/p_2 , kde p_1, p_2 ($p_2 \neq 0$) jsou nesoudělná celá čísla, a na rozdíl od množiny \mathbb{Z} je uzavřená vzhledem k operaci dělení.

1.1.4. Množina všech reálných čísel

Množina \mathbb{R} všech reálných čísel s obvyklými operacemi sčítání a násobení a s obvyklým uspořádáním tvoří uspořádané komutativní těleso s jednotkovým prvkem 1 a nulovým prvkem 0.

Konstrukce množiny \mathbb{R}

Množinu \mathbb{R} lze sestrojit několika způsoby. Hlavní z nich jsou konstrukce reálných čísel pomocí Dedekindových řezů a konstrukce reálných čísel pomocí cauchyovských posloupností (viz např. [73], [101]).

Množina \mathbb{R} je rozšířením množiny \mathbb{Q} o všechna tzv. *iracionální čísla* a na rozdíl od množiny \mathbb{Q} existuje ke každému kladnému reálnému číslu a a ke každému celému číslu n právě jedno takové kladné číslo b , že $b^n = a$. Každá neprázdná shora, resp. zdola ohraničená množina reálných čísel má supremum, resp. infimum. Každá cauchyovská posloupnost reálných čísel má v množině \mathbb{R} limitu.

1.2. OPERACE NA MNOŽINÁCH \mathbb{Z} , \mathbb{Q} A \mathbb{R}

1.2.1. Základní operace na množinách \mathbb{Z} , \mathbb{Q} a \mathbb{R}

Sčítání a odčítání na množinách \mathbb{Z} , \mathbb{Q} a \mathbb{R}

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c,$$

$$a + b = b + a,$$

$$a + 0 = 0 + a = a,$$

$$(+a) + (+b) = +(a + b) = a + b,$$

$$(-a) + (-b) = -(a + b),$$

$$(+a) + (-b) = +(a - b) = -(b - a),$$

$$(-a) + (+b) = -(a - b) = +(b - a),$$

$$(+a) - (+b) = (+a) + (-b) = a - b,$$

$$(-a) - (-b) = (-a) + (+b) = b - a,$$

$$\begin{aligned}(+a) - (-b) &= (+a) + (+b) = a + b, \\ (-a) - (+b) &= (-a) + (-b) = -(a + b).\end{aligned}$$

Odstraňování závorek obsahujících slučování výrazů

Závorky, před nimiž je znak sčítání (plus), lze vynechat.

Závorky, před nimiž je znak odčítání (minus), lze vynechat, jestliže se zároveň uvnitř závorek změní všechny znaky sčítání a odčítání v opačné (včetně prvního členu, i když je znak plus vynechán).

Příklady:

$$\begin{aligned}a + (b + c - d) &= a + b + c - d, \\ a - (b + c - d) &= a - b - c + d.\end{aligned}$$

Zavedení závorek u slučovaných výrazů

Slučované výrazy lze uzavřít do závorek, jestliže před závorky dáme znak sčítání (plus). Jestliže však před nově zavedenými závorkami dáme znak odčítání (minus), pak v závorkách musíme změnit všechny znaky sčítání a odčítání v opačné (včetně prvního členu, i když je znak plus vynechán).

Příklady:

$$\begin{aligned}a + b - c + d &= a + (b - c + d), \\ a - b - c + d &= a - (b + c - d).\end{aligned}$$

Násobení na množinách \mathbf{Z} , \mathbf{Q} a \mathbf{R}

$$a(bc) = (ab)c = abc,$$

$$ab = ba,$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a,$$

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0,$$

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0.$$

$$(+a) \cdot (+b) = +ab, \quad (-a) \cdot (+b) = -ab,$$

$$(+a) \cdot (-b) = -ab, \quad (-a) \cdot (-b) = +ab.$$

Distributivní zákon pro násobení na množinách \mathbf{Z} , \mathbf{Q} a \mathbf{R} vzhledem k sčítání

$$(a + b)c = c(a + b) = ac + bc.$$

Součet několika čísel násobíme číslem tak, že tímto číslem násobíme všechny sčítance a pak je sečteme.

Jestliže všechny sčítance obsahují téhož činitele, pak tohoto činitele lze vytknout před závorky.

Násobení mnohočlenu mnohočlenem (viz články 2.1.1 a 2.3.1)

$$(a + b - c)(d - e + f) = ad + bd - cd - ae - be + ce + af + bf - cf$$

(každý člen v prvních dvou závorkách se násobí každým členem z dalších dvou závorek).

Příklady:

$$(a + b - c)m = am + bm - cm,$$

$$am + bm - cm = m(a + b - c),$$

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd,$$

$$(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd,$$

$$(a - b)(c + d) = ac - bc + ad - bd,$$

$$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd.$$

Dělení na množinách \mathbf{Q} a \mathbf{R} (počítání se zlomky)

Ve zlomku

$$\frac{a}{b} = c$$

se číslo a , resp. b ($b \neq 0$) nazývá *čitatel*, resp. *jmenovatel*. Ve všech zlomcích uvažujeme vždy jmenovatele různého od nuly.

Rovnost zlomků

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

Rozšiřování zlomků

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$

(zlomek a/b byl rozšířen číslem $c \neq 0$).

Jestliže některé sčítance neobsahují téhož činitele $m \neq 0$, lze je před vytýkáním před závorky činitelem m rozšířit.

Příklad:

$$am + bm - c = am + bm - \frac{cm}{m} = m\left(a + b - \frac{c}{m}\right).$$

Krácení zlomků

$$\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}$$

(zlomek a/b byl krácen číslem $c \neq 0$).

Při rozšiřování a krácení zlomku nenulovým číslem se hodnota zlomku nezmění.

Početní operace se zlomky

$$\frac{a_1}{b} + \frac{b_2}{b} = \frac{a_1 + a_2}{b}, \quad \frac{a_1}{b} - \frac{a_2}{b} = \frac{a_1 - a_2}{b}$$

$$\frac{a_1}{b_1d} + \frac{a_2}{b_2d} = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{b_1b_2d}, \quad \frac{a_1}{b_1d} - \frac{a_2}{b_2d} = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{b_1b_2d},$$

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}, \quad c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ca}{b},$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}, \quad a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b},$$

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1a_2}{b_1b_2}, \quad \frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} = \frac{a_1b_2}{b_1a_2}.$$

Součet několika čísel dělíme číslem tak, že tímto číslem dělíme všechny sčítance a pak výsledné podíly sečteme.

Příklad:

$$(a + b - c)/m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} = \frac{a + b - c}{m}.$$

Složený zlomek ($bcd \neq 0$)

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Delší zlomková čára mezi tzv. *jednoduchými zlomky* a/b a c/d se nazývá *hlavní zlomková čára*, kdežto ostatní zlomkové čáry jednoduchých zlomků se nazývají *vedlejší zlomkové čáry*. Čísla a, d , resp. b, c nazýváme *vnějšími*, resp. *vnitřními členy složeného zlomku*.

Složený zlomek převedeme na jednoduchý tak, že součin jeho vnějších členů lomíme součinem jeho vnitřních členů.

Je-li v čitateli a jmenovateli složeného zlomku součet jednoduchých zlomků, pak složený zlomek převedeme na jednoduchý tak, že jej rozšíříme nejmenším společným násobkem jmenovatelů všech jednoduchých zlomků.

Příklad:

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}{\frac{1}{4} + \frac{5}{7}} = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)84}{\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{7}\right)84} = \frac{42 - 56}{21 + 60} = -\frac{14}{81}.$$

1.2.2. Absolutní hodnota reálného čísla

Absolutní hodnota reálného čísla a se značí $|a|$ a definuje jako nezáporný prvek množiny $\{a, -a\}$, tj. $|a| = \max \{a, -a\}$. Platí tedy

$$\begin{aligned} a \geq 0 &\Rightarrow |a| = a, \\ a < 0 &\Rightarrow |a| = -a. \end{aligned}$$

Plati

$$\begin{aligned} a &\leq |a|, \\ |a| &= 0 \Leftrightarrow a = 0, \\ |a| &> 0 \Leftrightarrow a \neq 0, \\ |ab| &= |a||b|, \\ \left|\frac{a}{b}\right| &= \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0), \\ |a| - |b| &\leq ||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b| \quad (\text{trojúhelníková nerovnost}), \\ |a| &= |-a|, \\ |a_1 + a_2 + \dots + a_n| &\leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|. \end{aligned}$$

Signum [znaménko] reálného čísla

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1 & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -1 & (a < 0), \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn} a = \frac{|a|}{a} \quad (a \neq 0).$$

1.2.3. Mocnina a odmocnina

Mocnina

α -tá mocnina a^α ($a, \alpha \in \mathbb{R}$) reálného čísla a , kde číslo a , resp. α se nazývá základ mocniny [mocněnec], resp. exponent [mocnitel], je definována v závislosti na oboru proměnné α .

Mocnina s kladným celým exponentem ($a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$)

$$a^n = \underbrace{aa \dots a}_{n\text{-krát}}$$

Platí ($a, b \in \mathbb{R}$; $m, n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} 0^n &= 0, & 1^n &= 1, \\ (-1)^{2m} &= 1, & (-1)^{2m+1} &= -1, \\ a^m b^m &= (ab)^m, \\ a^m a^n &= a^{m+n}, \\ (a^m)^n &= a^{mn}. \end{aligned}$$

Mocnina s celočíselným exponentem ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$)

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^0 = 1.$$

Platí ($a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k, l \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} 1^k &= 1, & (-1)^{2k} &= 1, & (-1)^{2k+1} &= -1, \\ a^k b^k &= (ab)^k, \\ a^k a^l &= a^{k+l}, \\ \frac{a^k}{a^l} &= a^{k-l}, \\ (a^k)^l &= a^{kl}. \end{aligned}$$

Odmocnina ($a, b \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N}$):

Nezáporné číslo b , pro něž platí $b^n = a$, se nazývá n -tá odmocnina $\langle z \rangle$ čísla a a značí se $\sqrt[n]{a}$ (místo $\sqrt[2]{a}$ píšeme \sqrt{a}). Číslo a se nazývá základ odmocniny [odmocněnec] a číslo n se nazývá odmocnitel.

Pro odmocniny platí ($a, b \in \mathbb{R}_0^+, m, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$): Existuje právě jedno číslo b , pro něž platí $b^n = a$. Dále

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{0} &= 0, & \sqrt[n]{1} &= 1, & \sqrt[1]{a} &= a, \\ \sqrt[n]{(ab)} &= (\sqrt[n]{a})\sqrt[n]{b}, \\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} & (b \neq 0), \\ (\sqrt[n]{a})^k &= \sqrt[n]{a^k} = a^{k/n} & (a \neq 0), \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{a^{m+n}}, \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} &= \sqrt{[a+b+2\sqrt{(ab)}]}, \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} &= \sqrt{[a+b-2\sqrt{(ab)}]} & (a \geq b), \\ \sqrt{(a \pm \sqrt{b})} &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{(a^2 - b)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{(a^2 - b)}}{2}} & (a^2 \geq b). \end{aligned}$$

Usměrňování zlomků [racionálizování jmenovatele]

Usměrnit zlomek znamená odstranit odmocninu nebo odmocniny ze jmenovatele vhodným rozšířením zlomku.

Příklady:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a}} &= \frac{\sqrt{a}}{a} & (a > 0), \\ \frac{1}{a \pm \sqrt{b}} &= \frac{a \mp \sqrt{b}}{a^2 - b} & (a^2 \neq b, b > 0), \\ \frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} &= \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a - b} & (a \neq b, a > 0, b > 0). \end{aligned}$$

Odmocnina ze záporného čísla ($a \in \mathbb{R}_0^+, m \in \mathbb{N}_0, n = 2m + 1$)

$$\sqrt[n]{(-a)} = -\sqrt[n]{a}.$$

Pro m -tou odmocninu z m -té mocniny platí ($a \in \mathbb{R}_0^+, m \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{a^m} &= a, \\ \sqrt[n]{(-a)^n} &= -\sqrt[n]{a^n} = -a & (n = 2m + 1), \\ \sqrt[n]{(-a)^n} &= a & (n = 2m). \end{aligned}$$

Každá m -tá ($m \in \mathbb{N}$) odmocnina z m -té mocniny racionálního čísla je opět racionálním číslem. Každá m -tá odmocnina z nezáporného reálného čísla, které není m -tou mocninou racionálního čísla, je iracionálním číslem.

Příklady:

$$[\sqrt{3a}][\sqrt{5b}][\sqrt{15ab}] = \sqrt{(3a \cdot 5b \cdot 15ab)} = \sqrt{(15^2 a^2 b^2)} = 15ab \quad (a, b \in \mathbb{R}_0^+),$$

$$\sqrt[3]{(27x^3)} = (\sqrt[3]{27}) \sqrt[3]{x^3} = 3x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\sqrt[3]{\frac{x^{4n}}{x^n}} = \sqrt[3]{\frac{x^{4n}}{x^n}} = \sqrt[3]{x^{4n-n}} = \sqrt[3]{x^{3n}} = x^n \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

$$\sqrt{\frac{49p^2q^4}{25m^2n^6}} = \frac{\sqrt{(49p^2q^4)}}{\sqrt{(25m^2n^6)}} = \frac{7pq^2}{5mn^3} \quad (m, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, p, q \in \mathbb{R}),$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[12]{x} \quad (x \in \mathbb{R}_0^+),$$

$$\sqrt[3]{64^2} = (\sqrt[3]{64})^2 = 4^2 = 16,$$

$$\sqrt[5]{a^2} = \sqrt[10]{a^4} = \sqrt[15]{a^6} = \dots \quad (a \in \mathbb{R}),$$

$$\sqrt[5]{(-5)^5} = -5, \quad \sqrt[6]{(-5)^6} = 5.$$

Mocnina s racionálním exponentem ($a \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$)

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Mocnina s reálným exponentem [obecná mocnina]

$$(a \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R})$$

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n},$$

kde $\{x_n\}$ je taková libovolná posloupnost racionálních čísel x_n , že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.
Pro $x > 0$ se definuje $0^x = 0$.

Pro mocniny s reálným exponentem platí tytéž vzorce jako pro mocniny s celočíselným exponentem.

Příklady:

$$4^4 c^4 d^4 = (4cd)^4 \quad (c, d \in \mathbb{R}).$$

$$(0,5ax)^3 = 0,125a^3x^3 \quad (a, x \in \mathbb{R}),$$

$$\frac{0,14^4}{0,21^4} = \left(\frac{0,14}{0,21}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81},$$

$$\left(\frac{5yx}{2z}\right)^2 = \frac{(5xy)^2}{(2z)^2} = \frac{25x^2y^2}{4z^2} \quad (x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

$$(-a^3)^{2n-1} = -(a^3)^{2n-1} = -a^{3(2n-1)} = -a^{6n-3} \quad (n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}).$$

Dělení mnohočlenu mnohočlenem (viz články 2.1.1 a 2.3.1)

1. krok: Členy v obou mnohočlenech uspořádáme podle sestupných mocnin téhož základu.

2. krok: První člen dělence dělíme prvním členem dělitele a dostaneme první člen podílu.

3. krok: Dělitele násobíme prvním členem podílu, který dostaneme při 2. kroku, a odečteme tento součin od dělence. Zbytek dělíme týmž způsobem. Pokračujeme tak dlouho, až je zbytek buď nula, nebo mnohočlen nižšího stupně než dělitel.

Příklad:

$$\begin{array}{r} (a^2 - 2ac - b^2 + c^2) : (a - c + b) = a - c - b \\ \underline{-(a^2 - ac + ab)} \\ \hline -ac - b^2 + c^2 - ab \\ \underline{-(-ac + c^2 - bc)} \\ \hline -b^2 - ab + bc \\ \underline{-(-b^2 - ab + bc)} \\ \hline 0 \end{array}$$

1.2.4. Číselné soustavy

Množina určitých znaků s pravidly, která slouží k zobrazení čísel, se nazývá *číselná soustava*.

K zápisu reálných čísel používáme pozičních soustav, u nichž význam znaku závisí na jeho poloze v zápisu a z nichž nejrozšířenější jsou polyadické číselné soustavy.

Polyadické číselné soustavy

V *z-adické číselné soustavě* lze každé přirozené číslo p vyjádřit ve tvaru tzv. *z-adického rozvoje*

$$p = \sum_{i=0}^n a_i z^i = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z^1 + a_0 z^0,$$

kde $z \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a_i \in U_{0,z-1}$ a pak zapsat pomocí tzv. *z-adického zápisu* [*z-adického číselného obrazu*]

$$(\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_2 \alpha_1 \alpha_0)_z.$$

Zde z se nazývá *základ [báze] z-adické číselné soustavy* a α_i jsou znaky reprezentující čísla a_i . Znaky α_i (popř. někdy také čísla a_i) se nazývají *číslice [cifry]*.

Index i číslice α_i , resp. pozice, která tomuto indexu v číselném obrazu přísluší, se nazývá *řad číslice α_i* , resp. *řad číselného obrazu*. Číslice s indexem i se nazývá *číslice řádu i* nebo *číslice i -tého řádu*. Nenulová číslice, která je v číselném obrazu přirozeného čísla p první zleva, se nazývá *číslice největšího řádu čísla p* . Řad číslice největšího řádu přirozeného čísla p se nazývá *řad přirozeného čísla p* . Přirozené číslo řádu $n - 1$ se nazývá *n -ciferné*.

Číslo z^i se nazývá *jednotka řádu i* nebo *jednotka i -tého řádu*. Jednotka nultého řádu se nazývá *základní jednotka* nebo *stručně jednotka*.

Polyadická soustava se základem dvě se nazývá *dvojková* [*binární, dyadickej*], se základem tři *trojková* [*ternární*], se základem osm *osmičková* [*oktalová*], se základem deset *desítková* [*dekadickej*], se základem šestnáct *šestnáctková* [*hexadecimální*] atd.

Nekonečný z -adický zlomek

Každé nezáporné reálné číslo a lze vyjádřit ve tvaru

$$a = k + d \quad [k \in \mathbf{N}_0, d \in \langle 0, 1 \rangle],$$

kde číslo k se nazývá *celá část čísla a* a číslo

$$d = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{z^i} \quad (z \in \mathbf{N} \setminus \{1\}, a_i \in \mathbf{U}_{0,z-1})$$

(viz část 9) se nazývá *nekonečný z -adický zlomek* nebo *zlomková část čísla a* a zapisuje se ve tvaru *z -adického zápisu*

$$(0, \alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots \alpha_{-n} \dots)_z \quad (n \in \mathbf{N}),$$

kde 0 je znak reprezentující nulu a α_i jsou znaky (tzv. *číslice*) reprezentující čísla a_i . Jestliže $\alpha_i = 0$ pro všechny indexy $i < -n$ a $\alpha_{-n} \neq 0$, říkáme u desítkového zápisu, že *číslo a má n desetinných míst*. Číslo $a = k + d$ pak zapisujeme ve tvaru *z -adického zápisu*

$$(\alpha, \alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots \alpha_{-n} \dots)_z,$$

kde α je *z -adický zápis čísla k* . Je-li reálné číslo a záporné, zapisujeme je ve tvaru

$$a = (-\alpha, \alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots \alpha_{-n} \dots)_z.$$

S výjimkou čísel tvaru m/z^n ($m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbf{N}$), která lze zapsat ve tvaru dvou různých *z -adických zápisů*, je *z -adický zápis každého z ostatních reálných čísel jednoznačný*.

Poznámka:

Nemůže-li dojít k nedorozumění, lze u z -adického zápisu reálného čísla vynechat závorky i základ z , což se zpravidla dělá u desítkové, popř. dvojkové číselné soustavy.

Číslice polyadických číselných soustav

Pro zápis reálných čísel se běžně používá desítkové číselné soustavy, kde číslicemi jsou znaky 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Za číslice dvojkové číselné soustavy se zpravidla volí znaky 0, 1 (někdy také znaky 0, I).

U ostatních z -adických číselných soustav se základem $z < 10$ se většinou používá číslic desítkové číselné soustavy. Při $z > 10$ se číslice desítkové číselné soustavy zpravidla doplňují velkými písmeny latinské abecedy.

Příklad 1:

Desítkový číselný obraz	Dvojkový číselný obraz
0	0 = 0
1	1 = I
2	10 = IO
3	11 = II
4	100 = I00
5	101 = IOI
6	110 = II0
7	111 = III
8	1 000 = I 000
9	1 001 = I 00I
:	:
30	11 110 = II III0
:	:

Příklad 2:

$$(30)_{10} = (1E)_{16}, \text{ neboť } (E)_{16} = (14)_{10}.$$

Příklad 3:

Dva různé desítkové číselné obrazy

$$0,002\,000\dots,$$

$$0,001\,999\dots,$$

vyjadřují totéž číslo $2/10^3$.

Základní operace v různých polyadicích číselných soustavách

Provádějí se obdobně jako v desítkové číselné soustavě tak, že kdykoli při sčítání (resp. násobení) v některém řádu dostaneme součet (resp. součin) větší nebo roven základu příslušné číselné soustavy, je třeba provést přenos do nejbližší většího řádu.

Příklady:

$$\begin{array}{r}
 (423)_6 \\
 + (1\ 341)_6 \\
 + (521)_6 \\
 \hline
 (3\ 125)_6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 (42\ 714)_8 \\
 - (17\ 043)_8 \\
 \hline
 (23\ 651)_8
 \end{array}$$

Násobení a dělení usnadní tabulka násobení pro příslušnou číselnou soustavu, sestavená ze součinů všech čísel menších než základ dané soustavy.

Příklad 1:

Před výpočtem součinu $(325)_6 \cdot (245)_6$ sestavíme tabulku násobení pro šestkovou soustavu.

1	1				
2	2	4			
3	3	10	13		
4	4	12	20	24	
5	5	14	23	32	41
	1	2	3	4	5

Příklad 2:

$$\begin{array}{r}
 (352)_6 \\
 \cdot (245)_6 \\
 \hline
 (3124)_6 \\
 (2332)_6 \\
 (1144)_6 \\
 (145244)_6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 (120101)_3 : (102)_3 = (1101)_3 \\
 (102)_3 \\
 \hline
 (111)_3 \\
 (102)_3 \\
 \hline
 (201)_3 \\
 (102)_3 \\
 \hline
 (22)_3
 \end{array}$$

Převádění p -adického zápisu čísla na z -adický

Při převádění p -adického zápisu přirozeného čísla na z -adický zápis dělíme p -adický zápis základem z a dostaneme jako zbytek číslici α_0 (tj. číslici řádu 0) z -adického zápisu. Potom částečný podíl dělíme opět základem z a dostaneme číslici α_1 (tj. číslici řádu 1) z -adického zápisu. Takto postupně určujeme všechny hledané číslice z -adického zápisu čísla daného v p -adickém zápisu, dokud nedostaneme nulový částečný podíl.

Příklady:

$$\begin{array}{r}
 (3287)_{10} \quad | :7 \quad (100)_{10} \quad | :2 \\
 4 \quad 469 \quad | :7 \quad 0 \quad 50 \quad | :2 \\
 0 \quad 67 \quad | :7 \quad 0 \quad 25 \quad | :2 \\
 4 \quad 9 \quad | :7 \quad 1 \quad 12 \quad | :2 \\
 2 \quad 1 \quad | :7 \quad 0 \quad 6 \quad | :2 \\
 1 \quad 0 \quad \quad \quad 0 \quad 3 \quad | :2 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 1 \quad 1 \quad | :2 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 1 \quad 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (212)_3 \quad | :2 \\
 1 \quad 102 \quad | :2 \\
 1 \quad 12 \quad | :2 \\
 1 \quad 2 \quad | :2 \\
 0 \quad 1 \quad | :2 \\
 1 \quad 0
 \end{array}$$

Dostali jsme tyto výsledky:

$$\begin{aligned}
 (3287)_{10} &= (12\ 404)_7, \\
 (100)_{10} &= (1\ 100\ 100)_2, \\
 (212)_3 &= (10\ 111)_2.
 \end{aligned}$$

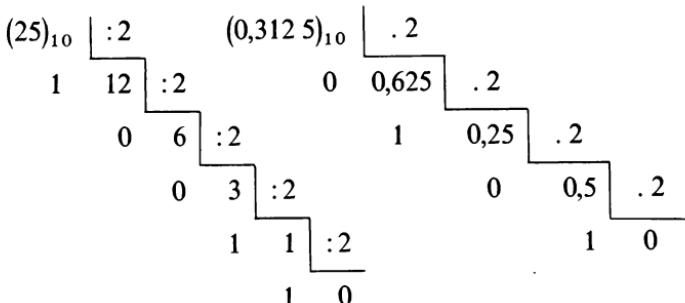
Při převádění p -adického zápisu reálného čísla na z -adický zápis převeďeme zvlášť jeho celou část a zvlášť jeho zlomkovou část. Přitom z -adický zápis zlomkové části určime tak, že zlomkovou část v p -adickém zápisu vynásobíme základem z a dostaneme α_{-1} (tj. číslici řádu -1) jako celou část

součinu. Po vynásobení zlomkové části tohoto součinu opět základem z dostaneme α_{-2} jako celou část takto získaného součinu. Tak postupujeme dále, dokud zlomková část součinu není nulová.

Příklad:

$$(25,312\ 5)_{10} = (11\ 001,010\ 1)_2,$$

neboť



Nepolyadicke číselné soustavy

Poziční číselné soustavy, které nejsou polyadicke, se nazývají *nepolyadicke*. Z nepolyadickejch soustav uvedeme římskou číselnou soustavu.

Římská číselná soustava

Římská číselná soustava je založena na použití zvláštních znaků jednak pro jednotky řádů 0, 1, 2 a 3 desítkové číselné soustavy: I = 1, X = 10, C = 100 a M = 1 000, jednak pro poloviny jednotek řádů 1, 2 a 3 desítkové číselné soustavy: V = 5, L = 50, D = 500. Římskými číslicemi lze zapsat jen kladná celá čísla podle těchto pravidel:

- Římské číslice zapisujeme zprava doleva podle nerostoucích řádů s výjimkou pravidla d).
- Číslice I, X a C lze zapsat nejvýše třikrát bezprostředně za sebou, kdežto číslice V, L a D nejvýše jednou.
- Jsou-li větší číslice před menšími nebo jsou-li stejné číslice vedle sebe, pak tyto číslice sčítáme (např. CCLXII = 100 + 100 + 50 + 10 + 1 + 1 = 262).
- Je-li právě jedna z číslic I, X a C před větší číslicí, pak se menší číslice odečte od číslice větší [např. CMXLIV = (1 000 - 100) + (50 - 10) + (5 - 1) = 944, XMIV = (1 000 - 10) + (5 - 1) = 994]. Tímto pravidlem se nahrazuje čtyřnásobné opakování některé z číslic I, X a C.

Periodická a neperiodická čísla

z -adický zápis

$$((\operatorname{sgn} a) \alpha_m \alpha_{m-1} \dots \alpha_0, \overline{\alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots \alpha_{-k} \alpha_{-k-1} \alpha_{-k-2} \dots \alpha_{-k-r}})_z$$

($k, m \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{N}$) reálného čísla a se nazývá *periodický*, právě když existují taková čísla $k, r \in \mathbb{N}$, že $\alpha_{-n-r} = \alpha_{-n}$ pro všechna kladná celá čísla $n > k$.

Polyadický zápis reálného čísla, který není periodický, se nazývá *neperiodický*.

Reálné číslo, které má (resp. nemá) periodický polyadický zápis, se nazývá *periodické* (resp. *neperiodické*).

Právě všechna racionální, resp. právě všechna iracionální čísla jsou periodická, resp. neperiodická.

Příklad:

Racionální čísla $0,750\,000\dots = 0,7\bar{50}$, $0,\overline{592}$ a $0,640\,\overline{96}$ jsou periodická, kdežto iracionální čísla $\sqrt{2} = 1,414\,21\dots$ a $\sqrt{\pi} = 1,772\,45\dots$ jsou neperiodická.

Ryze periodická a neryze periodická čísla

Periodický polyadický zápis se při $k = 0$, resp. $k > 0$ nazývá *ryze*, resp. *neryze periodický*. Reálné číslo, které má ryze, resp. neryze periodický polyadický zápis, se nazývá *ryze*, resp. *neryze periodické*.

Předperioda a perioda periodického čísla

Číslo u , resp. v , které má z -adický zápis

$$(\alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots \alpha_{-k})_z \text{ při } k > 0, \quad \text{resp.} \quad (\alpha_{-k-1} \alpha_{-k-2} \dots \alpha_{-k-r})_z$$

a bylo vytvořeno z čísel periodického z -adického zápisu reálného čísla a , se nazývá *předperioda*, resp. *perioda periodického čísla a*.

Převádění periodických čísel na obyčejný zlomek

Ryze periodické číslo a ($0 < a \leq 1$) v desítkovém zápisu lze zapsat jako obyčejný zlomek, jehož čitatelem je perioda a jmenovatelem je kladné celé číslo s desítkovým zápisem, který obsahuje právě tolik devítek, kolik čísel má perioda (tj. r devítek).

Příklad:

$$0,\overline{592} = \frac{592}{999} = \frac{592 : 37}{999 : 37} = \frac{16}{27}.$$

Neryze periodické číslo a ($0 < a \leq 1$) v desítkovém zápisu lze zapsat jako obyčejný zlomek. Jeho čitatelem je rozdíl, kde menšencem je kladné celé číslo s desítkovým zápisem vytvořeným právě z číslic předperiody a periody ve stejném pořadí jako v číselném zápisu a menšitelem je předperioda. Jmenovatelem je číslo s desítkovým zápisem, který obsahuje nejprve právě tolik devítek, kolik číslic má perioda, a za nimi právě tolik nul, kolik číslic má předperioda.

Příklad:

$$0,640\overline{96} = \frac{64\,096 - 640}{99\,000} = \frac{63\,456 : 24}{99\,000 : 24} = \frac{2\,644}{4\,125}.$$

1.2.5. Dělení se zbytkem a beze zbytku v množině \mathbb{Z} . Dělitelnost v množině \mathbb{Z}

Dělení se zbytkem v množině \mathbb{Z}

Dělením se zbytkem v množině \mathbb{Z} všech celých čísel nazýváme zoobrazení, které každé uspořádané dvojici $[a, b]$ ($b \neq 0$) celých čísel přiřazuje uspořádanou dvojici $[q, r]$ celých čísel, přičemž platí

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

Číslo q se nazývá částečný [neúplný] podíl čísel a, b (v tomto pořadí) a číslo r nejmenší nezáporný zbytek čísla a při dělení číslem b [nejmenší nezáporný zbytek čísla a podle modulu b [modulo b]], stručně zbytek při dělení.

Dělení beze zbytku v množině \mathbb{Z}

Ve speciálním případě pro $r = 0$ mluvíme o *dělení beze zbytku*.

Dělitelnost v množině \mathbb{Z}

Říkáme, že číslo $b \in \mathbb{Z}$ je dělitelem čísla $a \in \mathbb{Z}$ [číslo b dělí číslo a , číslo a je dělitelné číslem b , číslo a je násobkem [q-násobkem] čísla b], a označujeme $b | a$, právě když existuje takové číslo $q \in \mathbb{Z}$, že $a = bq$. Číslo q se nazývá podíl čísla a při dělení číslem b . Neplatí-li $b | a$, říkáme, že číslo b není dělitelem čísla a [číslo b nedělí číslo a] a pišeme $b \nmid a$.

Zobrazení $|$ v množině \mathbb{Z} nazýváme *dělitelností v množině \mathbb{Z}* .

Pro dělitelnost $|$ na množině \mathbb{Z} platí ($a, b, c, m, n \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} a | b \wedge b | c &\Rightarrow a | c && (\text{tranzitivnost dělitelnosti}), \\ c | a \wedge c | b &\Rightarrow c | am + bn, \\ a | b &\Rightarrow a | bc, \\ a | b &\Rightarrow |a| \leq |b| && (b \neq 0). \end{aligned}$$

Každé celé číslo je dělitelem nuly, ale nula není dělitelem žádného celého čísla různého od nuly.

Každé číslo $a \in \mathbb{Z}$ je dělitelné tzv. *nevlastními* [samořejmými] děliteli $1, -1, a, -a$. Existují-li další dělitele čísla $a \in \mathbb{Z}$, nazývají se *vlastní* [nesamořejmí] dělitelé.

Kongruence na množině \mathbb{Z}

Jestliže rozdíl $a - b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) je dělitelný číslem $m \in \mathbb{N}$, říkáme, že číslo a je *kongruentní* s číslem b podle modulu m [stručně *kongruentní* s b modulo m] a píšeme $a \equiv b \pmod{m}$.

Každá množina těch celých čísel, která při dělení číslem $m \in \mathbb{N}$ dávají týž nejmenší nezáporný zbytek, se nazývá *zbytková třída* podle modulu m [*modulo m*] nebo *zbytková třída* mod m .

Kritéria dělitelnosti celým číslem

Určit dělitele celého čísla zapsaného v desítkové číselné soustavě nebo zjišťovat zbytky při tomto dělení, umožňují bez dělení pravidla, zvaná *kritéria* [znaky] *dělitelnosti celým číslem*, která se zakládají na této větě: Jestliže celé číslo b lze napsat jako součet dvou sčítanců, z nichž jeden je násobek kladného celého čísla a , pak druhý sčítanec patří do téže zbytkové třídy podle modulu a jako číslo b .

Celé číslo má týž zbytek při dělení číslem:

2 (resp. **5**, resp. **10**) jako při dělení jeho číslice řádu 0 číslem 2
(resp. 5, resp. 10);

3 (resp. **9**) jako při dělení součtu jeho číslic číslem 3 (resp. 9);

4 jako při dělení součtu jeho číslice řádu 0 a dvojnásobku číslice řádu 1;

4 (resp. **20**, resp. **25**, resp. **50**, resp. **100**) jako při dělení jeho posledního dvojcíslí číslem 4 (resp. 20, resp. 25, resp. 50, resp. 100);

7 (resp. **13**) jako při dělení rozdílu posledního trojčíslí a čísla psaného ostatními číslicemi číslem 7 (resp. 13); je-li menšenec menší než menšitel, pak menšence zvětšíme nebo menšitele zmenšíme o vhodný násobek čísla 7 (resp. 13).

8 (resp. **40**, resp. **125**, resp. **200**, resp. **250**, resp. **500**, resp. **1000**) jako při dělení posledního trojčíslí číslem 8 (resp. 40, resp. 125, resp. 200, resp. 250, resp. 500, resp. 1000);

11 jako při dělení rozdílu součtu číslic sudých řadů a součtu číslic lichých řadů číslem 11; je-li menšenec menší než menšitel, zvětšíme jej o vhodný násobek čísla 11;

- 11** jako při dělení součtu dvojčíslí počínajíc od číslice řádu 0;
27 (resp. 37) jako při dělení součtu posledního trojčíslí a čísla psaného ostatními číslicemi číslem 27 (resp. 37).

Příklad 1:

Číslo 4 193 dává při dělení číslem 3, resp. 9 zbytek 2, resp. 8, neboť $4 + 1 + 9 + 3 = 17 = 5 \cdot 3 + 2 = 9 + 8$.

Příklad 2:

Číslo 4 210 573 dává při dělení číslem 11 zbytek 4, neboť $3 + 5 + 1 + 4 - (7 + 0 + 2) = 13 - 9 = 4$, popř. podle druhého kritéria $73 + 05 + 21 + 4 = 103$ a dále $03 + 1 = 4$.

Příklad 3:

Číslo 941 326 dává při dělení číslem 7, resp. 13 zbytek 1, resp. 9, neboť $(700 + 326) - 941 = 326 - (941 - 700) = 85 = 7 \cdot 12 + 1$, resp. $(650 + 326) - 941 = 326 - (941 - 650) = 35 = 13 \cdot 2 + 9$.

Prvočísla, složená čísla

Každé celé číslo p ($|p| \neq 1, p \neq 0$), které má jen nevlastní dělitele, se nazývá *prvočíslo* (někdy se za prvočísla považují jen všechna kladná celá čísla $n > 1$, vyhovující uvedeným podmínkám).

Každé celé číslo různé od nuly, které má aspoň jednoho vlastního dělitele, se nazývá *složené*.

Čísla 1, -1 nejsou ani složenými číslami, ani prvočísly.

Celá čísla $2k$, resp. $2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) se nazývají *sudá*, resp. *lichá*.

Je-li složené číslo a dělitelné prvočíslem p , pak prvočíslo p nazýváme *prvočinitelem čísla a*.

Věty o prvočíslech

Každé složené číslo m má aspoň jednoho kladného prvočinitele p , pro něhož platí $p \leq \sqrt{|m|}$. Z toho plyne, že každé celé číslo $m > 1$ je prvočíslem, právě když všechna dělení prvočíslily p ($p^2 \leq m$) jsou dělením s nenulovým zbytkem.

Každé liché prvočíslo p ($p > 3, p < -3$) lze psát ve tvaru $6k - 1$ nebo $6k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$). Každé číslo tvaru $6k - 1$ nebo $6k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) nemusí však být prvočíslem.

Malá Fermatova věta: Jestliže $p > 1$ je prvočíslem, pak každé číslo tvaru $a^p - a$ ($a \in \mathbb{Z}$) je násobkem prvočísla p .

Wilsonova věta: Jestliže $p > 1$ ($p \in \mathbb{N}$), pak číslo $(p - 1)! + 1$ je dělitelné číslem p , právě když číslo p je prvočíslem.

Příklad 1:

Císlo 137 je prvočíslem, neboť žádné z dělení prvočíslly 2, 3, 5, 7 a 11 (pomocí kritérií dělitelnosti) není beze zbytku. Prvočíslem 13 již není třeba dělit, neboť $13 \geq \sqrt{137}$.

Příklad 2:

Prvočísla 53 a 37 lze psát po řadě ve tvaru $6 \cdot 9 - 1$ a $6 \cdot 6 + 1$. Avšak $35 = 6 \cdot 6 - 1$, $25 = 6 \cdot 4 + 1$.

Příklad 3:

Podle malé Fermatovy věty pro prvočíslo $p = 3$ a číslo $a = 5 \in \mathbb{Z}$ je $a^p - a = 5^3 - 5 = 120$ 40-násobkem prvočísla 3.

Příklad 4:

Císlo $(p - 1)! + 1 = (5 - 1)! + 1 = 25$ je podle Wilsonovy věty dělitelné prvočíslem $p = 5$.

Příklad 5:

Všechna prvočísla od 2 do n najdeme pomocí metody zvané *Eratostenovo síto* takto: Napíšeme za sebou celá čísla 2 až n . Prvočíslo 2 ponecháme a škrtneme všechny jeho větší násobky. První neškrtnuté číslo je prvočíslo (3). Číslo 3 ponecháme a škrtneme všechny jeho větší násobky, pokud nebyly již škrtnuty. První neškrtnuté číslo je opět prvočíslo (5). Tak postupujeme dále, až škrtneme všechny větší násobky čísel menších než \sqrt{n} . Všechna neškrtnutá čísla jsou hledaná prvočísla.

Rozklad složeného čísla v prvočinitele

Každé složené číslo a lze jednoznačně až na pořadí a znaménka činitelů vyjádřit jako součin konečně mnoha prvočísel. Napíšeme-li složené číslo a pomocí prvočísel p_1, p_2, \dots, p_n (která nemusí být od sebe různá) ve tvaru

$$a = p_1 p_2 \cdots p_n,$$

říkáme, že jsme provedli *rozklad složeného čísla a v prvočinitele* [*rozklad složeného čísla a v součin prvočísel, prvočíselný rozklad složeného čísla a*]. Vyjádříme-li složené číslo a ve tvaru

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_m^{e_m}$$

(p_1, p_2, \dots, p_m) jsou vzájemně různá prvočísla a $e_1, e_2, \dots, e_m \in \mathbb{N}$), říkáme, že jsme provedli *kanonický rozklad složeného čísla a v prvočinitele*.

Příklad:

Rozklad $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$ čísla 21 420 v prvočinitele najdeme takto:

21 420	2
10 710	2
5 355	3
1 785	3
595	5
119	7
17	17
1	

tj. zjistíme nejmenší prvočíslo, kterým je dané číslo dělitelné, a zapíšeme je do pravého sloupce. Se získaným podílem, který zapíšeme do levého sloupce pod dělence, postup opakujeme, dokud nedostaneme podíl rovný číslu 1.

Každé složené číslo a je dělitelné libovolným součinem s ($|s| \leq a$) svých prvočinitelů.

Společný dělitel celých čísel

Celé číslo $d \neq 0$, které je dělitelem každého z daných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ ($n > 1$), se nazývá *společný dělitel celých čísel* a_1, a_2, \dots, a_n .

Protože čísla 1, -1 jsou společnými děliteli každých dvou celých čísel, nazývají se *nevlastní [samořejmí] společní dělitelé*. Ostatní společní dělitelé se nazývají *vlastní*.

Celá čísla a_1, a_2, \dots, a_n ($n > 1$) se nazývají *nesoudělná*, právě když nemají jiné společné dělitele než nevlastní společné dělitele. Celá čísla a_1, a_2, \dots, a_n ($n > 1$) se nazývají *po dvou nesoudělná*, právě když jsou nesoudělná každá dvě čísla a_i, a_j ($i \neq j$). Celá čísla, která mají aspoň jednoho vlastního společného dělitele, se nazývají *soudělná*.

Příklad:

Čísla 25, 12 a 24 jsou nesoudělná, ale nejsou po dvou nesoudělná, neboť čísla 12 a 24 jsou soudělná.

Největší společný dělitel celých čísel

Společného dělitele celých čísel a_1, a_2, \dots, a_n , který je násobkem každého jiného jejich společného dělitele (tj. je největším ze společných dělitelů), nazýváme *největším společným dělitellem celých čísel* a_1, a_2, \dots, a_n a značíme $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nebo stručně D . Jestliže $a_i = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, pak $D(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$. Jestliže aspoň jedno číslo a_i je různé od 0, pak vždy

existují dva největší společní dělitelé D_1 , D_2 , pro něž platí $D_1(a_1, a_2, \dots, a_n) = -D_2(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Společný násobek celých čísel

Celé číslo k , které je násobkem každého z daných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ ($n > 1$), se nazývá *společný násobek celých čísel* a_1, a_2, \dots, a_n .

Nejmenší společný násobek celých čísel

Společný násobek celých čísel a_1, a_2, \dots, a_n , který je dělitelem každého jiného jejich společného násobku, nazýváme *nejmenším společným násobkem celých čísel* a_1, a_2, \dots, a_n a značíme $n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nebo stručně n .

Jestliže aspoň jedno číslo $a_i = 0$, pak $n(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$. Jestliže $a_i \neq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, pak existují dva nejmenší společné násobky n_1, n_2 , pro něž platí $n_1(a_1, a_2, \dots, a_n) = -n_2(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Výpočet $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$ a $n(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Největšího společného dělitele n kladných celých čísel a_1, a_2, \dots, a_n určíme pomocí jejich kanonických rozkladů v prvočinitele

$$a_i = p_1^{e_{i1}} p_2^{e_{i2}} \cdots p_m^{e_{im}} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

kde p_1, p_2, \dots, p_m jsou vzájemně různá kladná prvočísla, mezi než patří všechna prvočísla, která dělí aspoň jedno číslo a_i , a exponenty $e_{ij} \in \mathbb{N}_0$ jsou jednoznačně určeny čísla a_i a p_j ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$). Největší společný dělitel čísel a_1, a_2, \dots, a_n je číslo

$$D(a_1, a_2, \dots, a_n) = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \cdots p_m^{f_m},$$

kde

$$f_j = \min \{e_{1j}, e_{2j}, \dots, e_{nj}\} \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Největšího společného dělitele několika kladných celých čísel vypočteme tedy tak, že každé z daných čísel rozložíme v součin prvočinitelů a z těchto prvočinitelů vybereme všechny, jež se zároveň vyskytují ve všech rozkladech (tj. každého prvočinitele vezmeme s nejmenším mocnitem, jaký se vyskytuje v rozkladech všech daných čísel). Součin takto vybraných prvočinitelů je hledaným největším společným dělitelem.

Nejmenší společný násobek n kladných celých čísel a_1, a_2, \dots, a_n je číslo

$$n(a_1, a_2, \dots, a_n) = p_1^{g_1} p_2^{g_2} \cdots p_m^{g_m},$$

kde

$$g_j = \max \{e_{1j}, e_{2j}, \dots, e_{nj}\} \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Nejmenší společný násobek několika kladných celých čísel vypočteme tak, že každé z daných čísel rozložíme v součin prvočinitelů a z těchto prvočinitelů vybereme všechny, jež se vyskytují aspoň v jednom rozkladu (tj. každého prvočinitele vezmeme s největším mocnitem, jaký se vyskytuje v rozkladu aspoň jednoho z daných čísel). Součin takto vybraných prvočinitelů je hledaným nejmenším společným násobkem.

Příklad:

Protože $24 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^0$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ a $72 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0$, dostaneme

$$D(24, 60, 72) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^0 = 12,$$

$$n(24, 60, 72) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360.$$

Platí

$$D(a_1, a_2, \dots, a_n) = D(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}),$$

$$n(a_1, a_2, \dots, a_n) = n(a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n}),$$

kde

$$\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{k_1, k_2, \dots, k_n\} = \{1, 2, \dots, n\},$$

tj. největší společný dělitel a nejmenší společný násobek nezávisí na pořadí čísel a_1, a_2, \dots, a_n .

Platí $D(a_1, a_2, \dots, a_n) = D(D_1, D_2)$, kde $D_1 = D(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $D_2 = D(a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n)$ ($k \geq 1$), přičemž pro $k = 1$ klademe $D_1 = a_1$ a pro $k = n - 1$ klademe $D_2 = a_n$.

Obdobně $n(a_1, a_2, \dots, a_n) = n(n_1, n_2)$, kde $n_1 = n(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $n_2 = n(a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n)$ ($k \geq 1$), přičemž pro $k = 1$ klademe $n_1 = a_1$ a pro $k = n - 1$ klademe $n_2 = a_n$.

Označíme-li $P = a_1 a_2 \dots a_n$ ($a_i \in \mathbb{N}$) a $A_1 = P/a_1$, $A_2 = P/a_2, \dots, A_n = P/a_n$, platí

$$n(a_1, a_2, \dots, a_n) D(A_1, A_2, \dots, A_n) = P$$

neboli speciálně

$$n(a_1, a_2) = \frac{a_1 a_2}{D(a_1, a_2)}.$$

Euklidův algoritmus pro celá čísla

Při výpočtu největšího společného dělitele $D(a, b)$ ($a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $a > b$) podle Euklidova algoritmu postupujeme takto: Číslo a dělíme číslem b . Při zbytku $r_1 \neq 0$ dělíme číslo b číslem r_1 a určíme zbytek r_2 . Při $r_2 \neq 0$ dělíme číslo r_1 číslem r_2 . Dojdeme-li po n krocích ke zbytku $r_n = 0$, je $D(a, b) = r_{n-1}$.

Příklad:

Postup výpočtu $D(648, 252)$ zapíšeme do schématu

	2	1	1	3
648	252	144	108	36
144	108	36	0	

tak, že v prostředním řádku napišeme nejprve větší číslo 648 (co do absolutní hodnoty) a pak menší dané číslo 252. Jejich neúplný podíl 2 napišeme do prvního řádku nad dělitele 252 a do třetího řádku napišeme zbytek 144, který zároveň vypíšeme do středního řádku za číslo 252. Takto postupujeme až k dělení beze zbytku. Poslední nenulový zbytek $36 = D(648, 252)$.

1.2.6. Uspořádání na množině \mathbb{R}

Říkáme, že číslo a je menší (resp. větší) než číslo b , jestliže číslo $b - a$ je kladné (resp. záporné) a pišeme $a < b$ (resp. $a > b$). Zápis $a \leq b$ (resp. $a \geq b$) znamená, že $a < b$ nebo $a = b$ (resp. $a > b$ nebo $a = b$). Relace $[<; \mathbb{R}]$, $[>; \mathbb{R}]$, $[\leq; \mathbb{R}]$ a $[\geq; \mathbb{R}]$ se nazývají *nerovnosti na množině \mathbb{R}* .

Z axiómů uspořádání U_0 až U_3 plynou tyto axiomy pro nerovnosti na množině \mathbb{R} :

Pro každá dvě čísla $a, b \in \mathbb{R}$ platí právě jedno z přiřazení

$$a = b, \quad a < b, \quad a > b.$$

Pro každá tři čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned} a < b \wedge b < c &\Rightarrow a < c, \\ a < b &\Rightarrow a + c < b + c, \\ a < b \wedge 0 < c &\Rightarrow ac < bc. \end{aligned}$$

Z axiómů pro nerovnosti plynou tato pravidla ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $k, u, v \in \mathbb{R}^+$):

$$\begin{aligned} a < b \wedge c < d &\Rightarrow a + c < b + d, \\ a < b \wedge c \leq d &\Rightarrow a + c < b + d, \\ a < b \wedge c < 0 &\Leftrightarrow ac > bc, \\ 0 < a < b &\Leftrightarrow 0 < 1/b < 1/a, \\ a < b < 0 &\Leftrightarrow 1/b < 1/a < 0, \\ u < v \wedge a > 0 &\Rightarrow u^a < v^a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u < v \wedge a < 0 &\Rightarrow u^a > v^a, \\ u > 1 \wedge a < b &\Rightarrow u^a < u^b, \\ u < 1 \wedge a < b &\Rightarrow u^a > u^b, \\ b - k < a < b + k &\Leftrightarrow |a - b| < k. \end{aligned}$$

Intervaly

Množinu všech reálných čísel x , pro něž platí

$$\left\{ \begin{array}{l} a \leqq x \leqq b, \\ a \leqq x < b, \\ a < x \leqq b, \\ a < x < b, \\ a \leqq x, \\ a < x, \\ x \leqq b, \\ x < b. \end{array} \right\} \text{ označujeme po řadě} \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle a, b \rangle, \\ \langle a, b), \\ (a, b], \\ (a, b), \\ \langle a, +\infty), \\ (a, +\infty), \\ (-\infty, b], \\ (-\infty, b) \end{array} \right\}$$

a nazýváme *interval* v prostoru E_1 . Interval $\langle a, b \rangle$, resp. (a, b) se nazývá *uzavřený*, resp. *otevřený*. Intervaly $\langle a, b \rangle$ a (a, b) se nazývají *polootevřené* [*polouzavřené*]. Interval $\langle a, a \rangle = \{a\}$ je jednobodovou množinou. Interval $(-\infty, +\infty)$ značí množinu \mathbb{R} všech reálných čísel. Intervaly $\langle a, b \rangle$, $\langle a, b)$, $(a, b]$, (a, b) se nazývají *ohraničené*, kdežto intervaly $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $\langle a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ se nazývají *neohraničené*.

Symbol $\langle -\infty, +\infty \rangle = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} = \mathbb{R}^\# = E_1^\#$, kde $+\infty, -\infty$ jsou nevlastní body reálné osy, značí tzv. *rozšířenou reálnou* [*číselnou*] osu.

1.3. KOMPLEXNÍ ČÍSLA

1.3.1. Množina všech komplexních čísel

Množina \mathbb{C} všech uspořádaných dvojic $[a, b]$ reálných čísel s rovností a operacemi sčítání a násobení, které jsou definovány vztahy

$$\begin{aligned} [a_1, b_1] = [a_2, b_2] &\Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2, \\ [a_1, b_1] + [a_2, b_2] &= [a_1 + a_2, b_1 + b_2], \\ [a_1, b_1][a_2, b_2] &= [a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1], \end{aligned}$$

tvoří komutativní těleso s nulovým prvkem $[0, 0]$ a jednotkovým prvkem $[1, 0]$. Prvky tohoto tělesa se nazývají *komplexní čísla*. Pro uvedené

operace sčítání a násobení na množině \mathbb{C} tedy platí axiómy A_0 až A_4 , M_0 až M_4 , D_1 a D_2 , takže pro $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ platí

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \quad z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$$

(asociativní zákony),

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1$$

(komutativní zákony),

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3, \quad z_3(z_1 + z_2) = z_3 z_1 + z_3 z_2$$

(distributivní zákony).

Opačným prvkem k prvku $z = [a, b]$ je prvek $\bar{z} = [-a, -b]$ a převráceným [inverzním] prvkem k prvku $z = [a, b] \neq [0, 0]$ je prvek

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z\bar{z}} \bar{z} = \left[\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right].$$

Komplexní číslo $[0, 1]$ se nazývá *ryze imaginární jednotka* a značí se i, popř. v elektrotechnice j. Pro číslo i platí $i^2 = [-1, 0]$.

Množina všech komplexních čísel tvaru $[a, 0]$ tvoří podtěleso komutativního tělesa \mathbb{C} a je izomorfní s tělesem \mathbb{R} reálných čísel, takže lze klást $[a, 0] = a$; speciálně $[0, 0] = 0$. Těleso \mathbb{C} vznikne připojením prvku i k tělesu \mathbb{R} .

Pro komplexní číslo $z = [a, b]$ se zavádějí tyto pojmy:

$a = \operatorname{Re} z$, resp. $b = \operatorname{Im} z$ se nazývá *reálná*, resp. *imaginární část komplexního čísla* z .

$\bar{z} = [a, -b]$ se nazývá *komplexně sdružené k číslu* z [*čísla* z , \bar{z} se nazývají *vzájemně komplexně sdružená*].

$|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ se nazývá *absolutní hodnota [modul]* komplexního čísla z .

Reálné číslo $a^2 + b^2$ se nazývá *norma komplexního čísla* z .

Komplexní číslo z , kde $\operatorname{Im} z \neq 0$, se nazývá *imaginární číslo*. Imaginární číslo z , kde $\operatorname{Re} z = 0$, se nazývá *ryze imaginární číslo*.

Z definic sčítání a násobení na množině \mathbb{C} plynou tyto další operace:

Rozdíl komplexních čísel

$$z_1 - z_2 = [a, b] - [c, d] = [a - c, b - d].$$

Podíl komplexních čísel

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{[a, b]}{[c, d]} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \left[\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right] \quad (z_2 \neq 0).$$

Pro každá dvě komplexně sdružená čísla $z = [a, b]$, $\bar{z} = [a, -b]$ platí:

$$\begin{aligned}\overline{(\bar{z})} &= z, & \overline{(-z)} &= -\bar{z}, \\ z + \bar{z} &= 2a, & z\bar{z} &= a^2 + b^2, \\ \overline{(z_1 + z_2)} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, & \overline{(z_1 - z_2)} &= \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \\ \overline{(z_1 z_2)} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2, & \overline{(z^n)} &= (\bar{z})^n, \\ \left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} & (z_2 \neq 0).\end{aligned}$$

Pro absolutní hodnoty libovolných komplexních čísel z, z_1, z_2 platí:

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{(a^2 + b^2)} \geqq 0, \\ |z| &= 0 \Leftrightarrow z = 0, \\ |z| &= |-z| = |\bar{z}| = \sqrt{(z\bar{z})}, \\ |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2|, \\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0), \\ |z_1| - |z_2| &\leqq |z_1 \pm z_2| \leqq |z_1| + |z_2| \quad (\text{trojúhelníková nerovnost}), \\ \operatorname{Re} z &\leqq |z|, \quad \operatorname{Im} z \leqq |z|.\end{aligned}$$

1.3.2. Ryze imaginární čísla

Imaginární jednotka

$$i^2 = -1.$$

Mocniny imaginární jednotky

$$\left. \begin{array}{lcl} i^{4n} & = & 1, \\ i^{4n+1} & = & i, \\ i^{4n+2} & = & -1, \\ i^{4n+3} & = & -i \end{array} \right\} \quad \text{pro } \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Řešení rovnice $x^2 = -a$ ($a \in \mathbb{R}^+$)

Oborem pravdivosti rovnice $x^2 = -a = (-1)a$ je množina

$$P = \{i\sqrt{a}, -i\sqrt{a}\}.$$

Součet ryze imaginárních čísel je buď ryze imaginárním číslem, nebo nulou.

Příklady:

$$4i - 7i + 9i = 6i,$$

$$4i - 7i + 3i = 0.$$

Součin ryze imaginárních čísel je buď reálným číslem, nebo ryze imaginárním číslem.

Příklady:

$$5i \cdot 7i = 35i^2 = -35,$$

$$5i \cdot 7i \cdot 8i = 280i^3 = -280i.$$

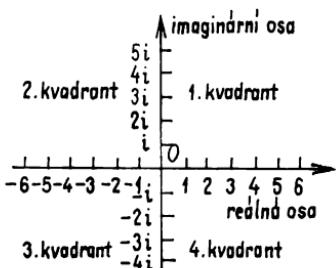
Podíl ryze imaginárních čísel je vždy reálným číslem.

Příklad:

$$\frac{14i}{15i} = \frac{14}{15}.$$

Znázornění ryze imaginárních čísel

Ryze imaginární číslo bi se v kartézské souřadnicové soustavě znázorňuje jako bod $[0, b]$ osy y , která se proto nazývá *imaginární osa* (obr. 32). Osu x pak nazýváme *reálnou osou*.



Obr. 32. Znázornění ryze imaginárních čísel na imaginární ose

1.3.3. Komplexní čísla v kartézském tvaru

Protože platí

$$z = [a, b] = [a, 0] + [0, 1][b, 0],$$

lze komplexní čísla z psát v tzv. *kartézském* [*algebraickém*, *binomickém*] *tvaru*

$$z = a + ib = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R}),$$

kde $a = \operatorname{Re} z$, resp. $b = \operatorname{Im} z$ je reálná, resp. imaginární část komplexního čísla z , a počítat s nimi jako s dvojčleny.

Vzorce pro počítání s komplexními čísly lze přepsat v kartézském tvaru takto:

Komplexně sdružená čísla

$$z = a + ib, \quad \bar{z} = a - ib.$$

Rovnost komplexních čísel

$$a + ib = c + id \Leftrightarrow a = c \wedge b = d;$$

speciálně

$$a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0.$$

Sčítání komplexních čísel

$$\begin{aligned}(a + ib) + (c + id) &= (a + c) + i(b + d), \\ (a + ib) + (a - ib) &= 2a.\end{aligned}$$

Odčítání komplexních čísel

$$\begin{aligned}(a + ib) - (c + id) &= (a - c) + i(b - d), \\ (a + ib) - (a - ib) &= 2ib.\end{aligned}$$

Násobení komplexních čísel

$$\begin{aligned}(a + ib)(c + id) &= (ac - bd) + i(ad + bc), \\ (a + ib)(a - ib) &= a^2 + b^2.\end{aligned}$$

Dělení komplexních čísel (usměrňování jmenovatele)

$$\begin{aligned}\frac{a + ib}{c + id} &= \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + ibc - iad - i^2bd}{c^2 - i^2d^2} = \\ &= \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.\end{aligned}$$

Násobíme-li dělence a dělitele číslem komplexně sdruženým k děliteli, dostaneme vždy podíl ve tvaru zlomku, jehož jmenovatel je reálným číslem.

Příklad:

$$\frac{1 + 2i}{3 - i} = \frac{(1 + 2i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{1 + 7i}{10} = \frac{1}{10} + i \frac{7}{10}.$$

Umocňování komplexních čísel

$$(a + ib)^2 = a^2 + 2abi + b^2 i^2 = a^2 + 2abi - b^2,$$

$$\begin{aligned}(a + ib)^3 &= a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 = \\ &= a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a + ib)^4 &= a^4 + 4a^3bi + 6a^2b^2i^2 + 4ab^3i^3 + b^4i^4 = \\ &= a^4 + 4a^3bi - 6a^2b^2 - 4ab^3i + b^4.\end{aligned}$$

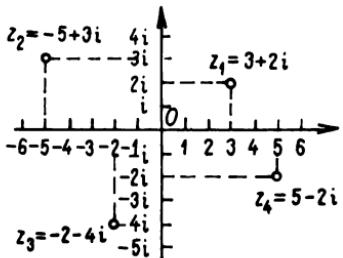
Komplexní hodnoty odmocniny z komplexního čísla

Kořeny rovnice $x^2 = a + ib = z$ jsou komplexními hodnotami x_1, x_2 odmocniny z komplexního čísla z :

$$x_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{(a^2 + b^2)}}{2}} + ib\sqrt{\frac{1}{2[a + \sqrt{(a^2 + b^2)}]}} \right).$$

Znázornění komplexních čísel

Protože každému komplexnímu číslu z přísluší právě jedna uspořádaná dvojice $[a, b]$, lze je znázornit jako bod $[a, b]$ v kartézské souřadnicové soustavě. Jde tedy o bijektivní zobrazení množiny $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ na množinu všech bodů tzv. *Gaussovy roviny* [*roviny komplexních čísel*] (obr. 33).



Obr. 33. Znázornění komplexních čísel v Gaussově rovině

V obrázku 33 jsou v Gaussově rovině znázorněna čísla $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -5 + 3i$, $z_3 = -2 - 4i$ a $z_4 = 5 - 2i$.

1.3.4. Komplexní čísla v goniometrickém tvaru

Každé komplexní číslo z lze znázornit jako bod v rovině s polární souřadnicovou soustavou a vyjádřit pomocí polárních souřadnic φ a ϱ (obr. 34):

$$\begin{aligned}z &= a + ib = |\varrho|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= \varrho[\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)] \quad \text{pro } \forall k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

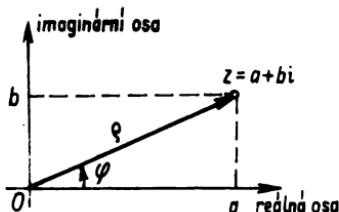
Proměnná $\varrho \in \mathbb{R}_0^+$ je absolutní hodnota komplexního čísla z ; proměnnou $\varphi = \arg z$ nazýváme argumentem [amplitudou] komplexního čísla z . Platí

$$a = \varrho \cos \varphi, \quad b = \varrho \sin \varphi,$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \frac{a}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \frac{b}{|z|} \quad (z \neq 0),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

(čísla a a b určují polohu bodu v Gaussově rovině, a tedy také úhel o velikosti φ).



Obr. 34. Modul ϱ a argument φ komplexního čísla z

Argument φ je komplexním číslem z ($z \neq 0$) určen jednoznačně, požadujeme-li, aby platily nerovnosti $-\pi < \varphi \leq \pi$; argument z tohoto intervalu se nazývá hlavní hodnota argumentu komplexního čísla z a značí se $\operatorname{Arg} z$.

Příklad:

Vyjádřeme číslo $z = 3 - 4i$ v goniometrickém tvaru:

$$\varrho = \sqrt{[3^2 + (-4)^2]} = 5;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}, \quad \varphi = -53^\circ 8' = -0,93 \text{ rad},$$

$$3 - 4i = 5[\cos(-53^\circ 8') + i \sin(-53^\circ 8')].$$

[Druhá hodnota $126^\circ 52'$ argumentu φ z intervalu $(0^\circ, 360^\circ)$ nepřichází v úvahu, neboť při $a > 0$ a $b < 0$ je obraz daného čísla z ve čtvrtém kvadrantu.]

Násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru

$$z_1 = \varrho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = \varrho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \\ z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Dělení komplexních čísel v goniometrickém tvaru

$$z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Umocňování komplexních čísel v goniometrickém tvaru

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$
$$z^k = \rho^k [\cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi)] \quad \text{pro } \forall k \in \mathbb{Z}$$

(tzv. *Moivrova věta*), speciálně

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^k = \cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi).$$

Odmocnina z komplexního čísla v goniometrickém tvaru

Pro každé komplexní číslo z a pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ nazýváme n -tou odmocninou $\langle z \rangle$ komplexního čísla z takové komplexní číslo x , pro něž platí $x^n = z$. Značíme je $\sqrt[n]{z}$. Je-li komplexní číslo z vyjádřeno v goniometrickém tvaru $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, pak n -tými odmocninami z čísla z jsou právě čísla

$$x_{k+1} = (\sqrt[n]{z})_{k+1} = (\sqrt[n]{\rho}) \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

kde $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Komplexní n -té odmocniny z jedné

Ze vzorce pro n -tou odmocninu komplexního čísla dostaneme pro $\rho = 1$ a $\varphi = 0$ právě n jednoduchých kořenů x'_1, \dots, x'_n rovnice $x^n = 1$ ($n \in \mathbb{N}$):

$$x'_{k+1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

pro $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$.

Rovnice

$$x^n = -1$$

má právě n jednoduchých kořenů x''_1, \dots, x''_n :

$$x''_{k+1} = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{n}$$

pro $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$.

Příklady:

$$x^3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \end{cases} \quad x^3 = -1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \end{cases}$$

$$x^4 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = i, \\ x_3 = -1, \\ x_4 = -i; \end{cases} \quad x^4 = -1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i. \end{cases}$$

Řešení binomických rovnic

Binomická rovnice

$$x^n - z = 0 \quad (n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C})$$

má pro $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ právě n jednoduchých kořenů x_1, \dots, x_n :

$$x_{k+1} = (\sqrt[n]{\rho}) \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

pro $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Speciálně pro $a \in \mathbb{R}$ v množině \mathbb{C} platí

$$x^n + a = 0, \quad x_{k+1} = \begin{cases} (\sqrt[n]{|a|}) x''_{k+1} & \text{pro } a \geq 0 \text{ a } (x''_{k+1})^n = -1, \\ [\sqrt[n]{(-a)}] x'_{k+1} & \text{pro } a < 0 \text{ a } (x'_{k+1})^n = -1 \end{cases}$$

pro $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, přičemž x'_{k+1} , resp. x''_{k+1} je komplexní n -tá odmocnina z čísla 1, resp. -1.

1.3.5. Komplexní čísla v exponenciálním tvaru

Z Eulerových vzorců (viz str. 366)

$$\sin \varphi = \frac{1}{2i} (e^{i(\varphi + 2k\pi)} - e^{i(\varphi + 2k\pi)}),$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i(\varphi + 2k\pi)} + e^{i(\varphi + 2k\pi)})$$

plyne

$$e^{i(\varphi + 2k\pi)} = \cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi),$$

takže

$$\begin{aligned} z &= |z| e^{i(\varphi + 2k\pi)} = |z| [\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)] = \\ &= a + ib \quad \text{pro } \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vyjádřeme číslo $z = -2 + 3i$ v exponenciálním tvaru:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt[3]{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{3}{-2} = -1,5, \quad \varphi = 123^\circ 41' = 2,16 \text{ rad} \end{aligned}$$

(obraz čísla z je v druhém kvadrantu);

$$z = -2 + 3i = (\sqrt{13}) e^{2,16i}.$$

Stručný zápis v technických aplikacích:

$$-2 + 3i = (\sqrt{13}) e^{2,16i} = (\sqrt{13}) \underline{123^\circ 41'},$$

přičemž symbol $\underline{\varphi}$ (kde φ je ve stupňové míře) čteme: verzor φ .

Příklad 2:

Vyjádřeme $17 e^{0,65i}$ v algebraickém tvaru $a + bi$:

$$0,65 \text{ rad} = 37^\circ 22',$$

$$\begin{aligned} 17 e^{0,65i} &= 17(\cos 37^\circ 22' + i \sin 37^\circ 22') = \\ &= 17(0,795 + 0,607i) = 13,5 + 10,3i. \end{aligned}$$

Násobení komplexních čísel v exponenciálním tvaru

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \rho_1 e^{i\varphi_1}, \\ z_2 &= \rho_2 e^{i\varphi_2}, \end{aligned} \right\} z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad \text{pro } \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Dělení komplexních čísel v exponenciálním tvaru

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \\ z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}, \end{array} \right\} \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad \text{pro } \forall z_1 \in \mathbb{C} \wedge \forall z_2 \in \mathbb{P}.$$

Umocňování komplexních čísel v exponenciálním tvaru

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad z^n = \rho^n e^{in\varphi} \quad \text{pro } \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

n -tá odmocnina z komplexního čísla v exponenciálním tvaru

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad (\sqrt[n]{z})_{k+1} = x_{k+1} = (\sqrt[n]{\rho}) e^{i(\varphi + 2k\pi)/n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Zvláštní hodnoty činitele $e^{i\varphi}$

$$\left. \begin{array}{l} e^{2k\pi i} = 1, \\ e^{(2k+1)\pi i} = -1 \end{array} \right\} \quad \text{pro } \forall k \in \mathbb{Z},$$

$$e^{(\pi/2)i} = i, \quad e^{(2\pi/3)i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$e^{(3\pi/2)i} = -i, \quad e^{(4\pi/3)i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$e^{2k\pi i} = 1 \Rightarrow e^{\varphi + 2k\pi i} = e^\varphi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Periodou exponenciální funkce je tedy $2\pi i$.

Vztahy mezi exponenciálními a goniometrickými funkcemi viz na str. 366.

1.3.6. Grafické metody

Grafické slučování komplexních čísel

Protože komplexní čísla lze považovat za dvojrozměrné vektory v Gaussově rovině, vede grafické slučování komplexních čísel na slučování vektorů.

Při grafickém výpočtu součtu $z_1 + z_2$ komplexních čísel se k vektoru $z_1 = \overrightarrow{OA}$ pomocí rovnoběžného posunutí připojí vektor $z_2 = \overrightarrow{OB}$ podle obrázku 35. Součtem komplexních čísel z_1, z_2 je pak komplexní číslo $z = z_1 + z_2 = \overrightarrow{OC}$.

Při konstrukci rozdílu

$$z = z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

se postupuje tak, že se k vektoru $z_1 = \overrightarrow{OA}$ místo vektoru $z_2 = \overrightarrow{OB}$ pomocí rovnoběžného posunutí připojí opačný vektor $\overrightarrow{AC} = -z_2$ (obr. 36).

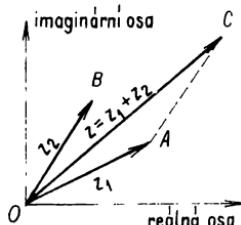
Grafické násobení komplexních čísel

Grafické násobení komplexních čísel neodpovídá žádnému z možných vektorových násobení.

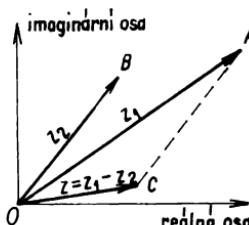
Ze vzorce

$$z_1 z_2 = \varrho_1 \varrho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = z = \varrho e^{i\varphi}$$

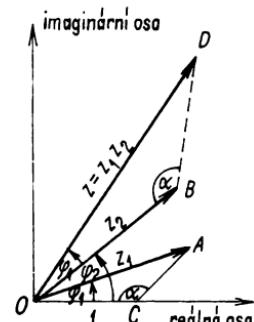
pro součin komplexních čísel z_1, z_2 dostaneme porovnáním argument $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ a modul $\varrho = \varrho_1 \varrho_2$, přičemž poslední rovnost lze vyjádřit jako úměru $\varrho : \varrho_2 = \varrho_1 : 1$.



Obr. 35. Grafické sčítání komplexních čísel



Obr. 36. Grafické odčítání komplexních čísel



Obr. 37. Grafické násobení komplexních čísel

Konstrukce (obr. 37):

1. krok: Sestrojíme vektory \overrightarrow{OA} a \overrightarrow{OB} , odpovídající po řadě komplexním číslům z_1 a z_2 .

2. krok: K vektoru \overrightarrow{OB} naneseme podle rovnosti $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ v kladném smyslu úhel velikosti φ_1 .

3. krok: Od bodu O naneseme na reálnou osu úsečku délky 1 a dostaneme bod C .

4. krok: Vedeme spojnici bodu C s bodem A .

5. krok: K úsečce OB naneseme úhel OCA velikosti α tak, že bod B je vrcholem sestrojeného úhlu.

Průsečík D ramen úhlů sestrojených podle kroků 2 a 5 určuje vektor součinu $z_1 z_2$.

Odůvodnění: $\triangle OCA \sim \triangle OBD$ (trojúhelníky se shodují ve dvou úhlech), takže platí uvedená úměra $\varrho : \varrho_2 = \varrho_1 : 1$.

Grafické dělení komplexních čísel

Ze vzorce

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = z = \varrho e^{i\varphi}$$

pro podíl komplexních čísel z_1, z_2 dostaneme porovnáním argument $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ a modul $\varrho = \varrho_1/\varrho_2$, přičemž poslední rovnost lze vyjádřit jako úměru $\varrho : \varrho_1 = 1 : \varrho_2$.

Konstrukce (obr. 38):

1. krok: Sestrojíme vektory \overrightarrow{OA} a \overrightarrow{OB} , odpovídající po řadě komplexním číslům z_1 a z_2 .

2. krok: K vektoru \overrightarrow{OA} naneseme podle rovnosti $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ v záporném smyslu úhel velikosti φ_2 neboli naneseme orientovaný úhel velikosti $-\varphi_2$.

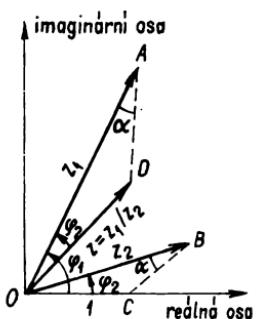
3. krok: Od bodu O naneseme na reálnou osu úsečku délky 1 a dostaneme bod C .

4. krok: Vedeme spojnici bodu B s bodem C .

5. krok: K úsečce OA naneseme úhel OCB velikosti α tak, že bod A je vrcholem sestrojeného úhlu.

Průsečík D ramen úhlů sestrojených podle kroků 2 a 5 určuje vektor podílu z_1/z_2 .

Odůvodnění: $\triangle OCB \sim \triangle ODA$ (trojúhelníky se shodují ve dvou úhlech), takže platí uvedená úměra $\varrho : \varrho_1 = 1 : \varrho_2$.

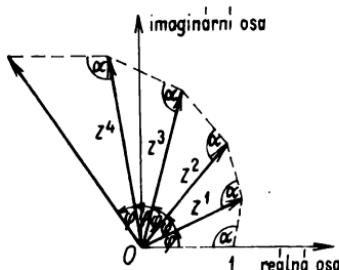


Obr. 38. Grafické dělení komplexních čísel

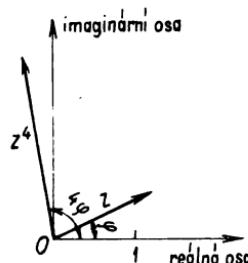
Grafické umocňování komplexních čísel

Postup grafického výpočtu n -té mocniny z^n ($n \in \mathbb{N}$) komplexního čísla z je založen na n -násobném provedení grafického násobení (obr. 39).

Jiný způsob grafického výpočtu mocniny z^n vychází z výpočtu argumentu $n\varphi$ a modulu $\sqrt[n]{\varrho}$ (obr. 40). Obrázky 39 a 40 uvádějí konstrukce mocniny z^n pro $n = 4$.



Obr. 39. Grafické umocňování komplexních čísel



Obr. 40. Grafické umocňování komplexních čísel

Grafické znázornění hodnot n -té odmocniny komplexního čísla

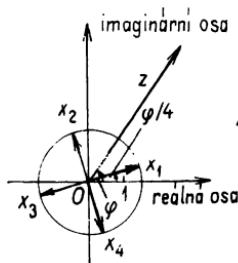
n -tá odmocnina $\sqrt[n]{z}$ komplexního čísla z je dána všemi řešeními rovnice

$$x^n = z = \varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

v proměnné x .

Postup grafického výpočtu odmocniny $\sqrt[n]{z}$ vychází z výpočtu argumentu φ/n a modulu $\sqrt[n]{\varrho}$.

Obrázek 41 uvádí konstrukci hodnot x_1, x_2, x_3 a x_4 odmocniny $\sqrt[4]{z}$ pro $n = 4$, jejichž obrazy leží na ramenech úhlů, posunutých vždy o $2\pi/n$ rad = $= 2\pi/4$ rad = 90° .

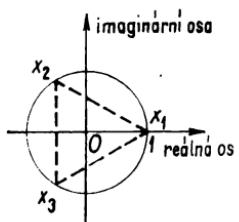


Obr. 41. Grafické odmocňování komplexních čísel

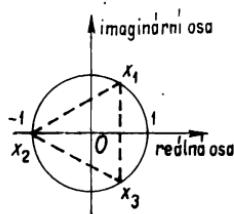
Grafické znázornění hodnot n -té odmocniny čísel 1 a -1

V obrázcích 42 až 45 jsou po řadě znázorněny všechny hodnoty odmocnin $\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{-1}, \sqrt[4]{1}, \sqrt[4]{-1}$. Body x_i znázorňující n -té odmocniny čísel 1 a -1

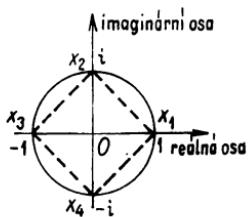
rozdělují jednotkovou kružnici (tj. kružnici o poloměru 1) na n ($n = 3, 4$) stejných částí.



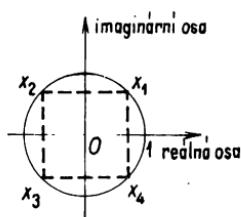
Obr. 42. Grafické znázornění $\sqrt[3]{1}$



Obr. 43. Grafické znázornění $\sqrt[3]{(-1)}$



Obr. 44. Grafické znázornění $\sqrt[4]{1}$



Obr. 45. Grafické znázornění $\sqrt[4]{(-1)}$

1.4. PŘIBLIŽNÁ ČÍSLA A JEJICH CHYBY

1.4.1. Přibližná čísla

O mnoha údajích, které konkrétně zjišťujeme v technické praxi nebo ve výzkumu, nelze vždy tvrdit, že jsou úplně přesné.

Označme-li d , resp. h číslo, o němž určitě víme, že je menší, resp. větší než přesná hodnota X vyšetřované veličiny, pak rozdíl $h - d$ ($h > d$) nazýváme *nepřesností*. Číslo h , resp. d se nazývá *horní*, resp. *dolní odhad přesné hodnoty X* . Za odhad přesné hodnoty X mohou sloužit všechna čísla x z intervalu $\langle d, h \rangle$, která nazveme *přibližným číslem* [*neúplným číslem*]. Přitom h , resp. d nazveme *horní*, resp. *dolní mezí přibližného čísla*. Číslo x , které vyhovuje nerovnostem $d \leq x \leq h$, se nazývá *přípustná hodnota* [*přibližná hodnota, approximace, odhad*] *přibližného čísla*.

Podrobnější informace o přibližných číslech dávají tyto charakteristiky:

a) Střední hodnota přibližného čísla se rovná

$$a = \frac{d + h}{2};$$

nahrazujeme jí přesnou hodnotu X , kterou neznáme.

b) Prostá [absolutní] chyba [stručně chyba] přibližného čísla se rovná

$$\alpha = \frac{h - d}{2} = h - a \quad (d < h).$$

Přibližné číslo tedy definujeme jako množinu všech reálných čísel x , která vyhovují nerovnici

$$|x - a| \leq \alpha$$

a která se zapisuje ve tvaru $x = a \pm \alpha$.

c) Poměrná [relativní] chyba přibližného čísla se rovná

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{a}.$$

1.4.2. Zaokrouhlená čísla

Úmluva:

Budeme uvažovat, že reálná čísla jsou vyjádřena v desítkovém zápisu.

Jestliže přibližné číslo x má střední hodnotu

$$a_k = a_0 \cdot 10^k \quad (a_0 \in \mathbb{Z})$$

a prostou chybu

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \cdot 10^k,$$

nazýváme je číslem zaokrouhleným na jednotky řádu k [stručně zaokrouhleným číslem] a místo

$$x = a_0 \cdot 10^k \pm \frac{1}{2} \cdot 10^k$$

stručně píšeme

$$x \doteq_k a_0 \cdot 10^k,$$

kde znak \doteq_k čteme „je po zaokrouhlení na jednotky řádu k rovno“. Říkáme také, že přibližné číslo x jsme zaokrouhlili na jednotky řádu k . Číslo a_k ve tvaru

$a_0 \cdot 10^k$ nazýváme hodnotou přibližného čísla x při zaokrouhlení na jednotky řádu k [stručně zaokrouhlenou hodnotou]. Všechny číslice čísla $a_0 \in \mathbb{Z}$ nazýváme platnými číslicemi. Zaokrouhlit <přibližné, popř. přesné> číslo na n platných číslic znamená, že číslo a_0 má n platných číslic, přičemž prvních $n - 1$ platných číslic čísla a_0 nazýváme správnými číslicemi.

Zobrazení $[\doteq_k; \mathbb{R}]$ množiny \mathbb{R} všech reálných čísel s poslední číslicí řádu menšího než k na množinu všech reálných čísel zaokrouhlených na jednotky řádu k , tj. na množinu všech uzavřených okolí $U(a_0 \cdot 10^k, \frac{1}{2} \cdot 10^k)$, nazýváme zaokrouhlením na jednotky řádu k . Přitom víme-li, že jde o zaokrouhlení na jednotky řádu k (a nemůže-li dojít k nedorozumění), píšeme místo \doteq_k jen \doteq . To umožňuje zjednodušený tvar zaokrouhlené hodnoty, jimž lze nahradit tvar $a_0 \cdot 10^k$ ($a_0 \in \mathbb{Z}$) zaokrouhlené hodnoty tak, že číslo $a_0 \cdot 10^k$ vyjádříme v pouhém jeho desítkovém zápisu jen s tou výjimkou, že při $k > 0$ posledních k nul desítkového zápisu bude mít menší velikost.

Příklad:

Zaokrouhlené hodnoty $428 \cdot 10^0$ ($k = 0$), $78\,651 \cdot 10^{-3}$ ($k = -3$), $110 \cdot 10^3$ ($k = 3 > 0$) lze po řadě psát v zjednodušeném tvaru 428; 78,651; 110 000.

Pravidlo pro zaokrouhlení

Viz ČSN 01 1010 Zaokrouhlování čísel a jejich zápis, 1975.

Máme-li dané (přibližné, popř. přesné) číslo a s poslední číslicí řádu $r < k$ nahradit číslem b s poslední číslicí řádu k při prosté chybě $\frac{1}{2} \cdot 10^k$ (tzv. zaokrouhlovací chybě), používáme k tomu tohoto pravidla pro zaokrouhlení na jednotky řádu k neboli stručně zaokrouhlovacího pravidla (píšeme pak $a \doteq b$):

a) Všechny číslice řádů menších než k vypustíme [s výjimkou při $|a| \notin \langle 0, 10 \rangle$, $a \in \mathbb{Z}$, kdy místo vypuštěných číslic píšeme malé nuly] a zbývající číslice ponecháme s případnými změnami podle bodů c) až e).

b) Je-li číslice řádu $k - 1$ menší než 5, pak číslice řádů větších než $k - 1$ ponecháme beze změny, a dostaneme tak číslo p (např. při $k = -1$ je $8,739 \doteq \doteq 8,7$).

c) Je-li číslice řádu $k - 1$ větší než 5, přičteme k číslu p , získanému podle bodu b), jednotku řádu k (např. při $k = -2$ je $0,176 \doteq 0,18$).

d) Pravidlo sudé číslice: Jestliže číslice řádu $k - 1$ je 5 a všechny číslice daného čísla a řádů menších než $k - 1$ jsou nuly (popř. číslice 5 řádu $k - 1$ je poslední číslicí daného čísla a), pak je-li číslice řádu k sudá, ponecháme ji beze změny, a je-li lichá, přičteme k číslu p , získanému podle bodu b), jednotku řádu k (např. při $k = 3$ je $14\,500 \doteq 14\,000$ a při $k = -2$ je $0,035 \doteq 0,04$).

e) Jestliže číslice řádu $k - 1$ je 5 a číslice kteréhokoli řádu menšího než $k - 1$ je u daného čísla a různá od nuly, pak k číslu p , získanému podle bodu b), přičteme jednotku řádu k (např. při $k = 0$ je $37,500\ 02 \doteq 38$).

Platnými číslicemi hodnoty přibližného čísla při zaokrouhlení na jednotky řádu k jsou všechny její číslice bez nul vlevo od první nenulové číslice a bez případných (malých) nul řádů menších než k .

Příklad:

Zaokrouhlené hodnoty

0,003 08; 308; 30,8; 30 800

mají všechny právě po třech platných číslicích 3, 0, 8. Zaokrouhlené hodnoty

0,430 0; 4 300; 430 000

mají všechny právě po čtyřech platných číslicích 4, 3, 0, 0.

Zaokrouhlení nahoru a dolů

Jestliže při $a \doteq b$ je $a < b$, resp. $a > b$, říkáme, že jsme číslo a zaokrouhlili *nahoru* (a někdy pak pod poslední platnou číslicí čísla b děláme pruh), resp. *dolů* (a někdy pak nad poslední platnou číslicí čísla b děláme tečku).

Příklad:

$247,36 \doteq 247,\underline{4}$ (zaokrouhlení nahoru),
 $247,45 \doteq 247,\dot{4}$ (zaokrouhlení dolů).

Znak přibližné rovnosti

Víme-li že číslo a se od čísla b liší jen o zaokrouhlovací chybu, píšeme $a \doteq b$, kdežto jinak pro přibližnou rovnost používáme znaku \approx .

Příklad:

$247,36 \doteq 247,4$, ale $247,36 \approx 240$.

1.4.3. Pravidla pro přibližné výpočty

V praxi je při výpočtech s přibližnými čísly třeba se omezit na takový počet platných číslic u daných údajů, mezivýsledků a výsledků, který zaručí výsledek s minimální chybou. Přitom se používá těchto pravidel pro přibližné výpočty:

1. Při sčítání a odčítání přibližných čísel vypustíme podle zaokrouhlo-

vacího pravidla číslice těch míst, na nichž aspoň v jednom z přibližných čísel není platná číslice.

Při sčítání a odčítání přibližných čísel s desetinnými místy ponecháme ve výsledku tolik platných desetinných míst, kolik jich má přibližné číslo s nejmenším počtem platných desetinných míst.

Prostá chyba součtu několika přibližných čísel je rovna součtu prostých chyb všech sčítanců. Pro $x_1 = a_1 \pm \alpha_1$ a $x_2 = a_2 \pm \alpha_2$ platí tedy

$$x_1 + x_2 = (a_1 + a_2) \pm (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Poměrná chyba součtu kladných přibližných čísel leží mezi největší a nejmenší poměrnou chybou sčítanců.

Při sčítání kladného přibližného čísla s kladným přesným číslem je poměrná chyba součtu menší než poměrná chyba přibližného čísla.

Prostá chyba rozdílu dvou přibližných čísel je rovna součtu prostých chyb menšence a menšítele. Pro $x_1 = a_1 \pm \alpha_1$ a $x_2 = a_2 \pm \alpha_2$ tedy platí

$$x_1 - x_2 = (a_1 - a_2) \pm (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Prostá chyba algebraického součtu několika přibližných čísel je rovna součtu prostých chyb sčítanců.

Poměrná chyba rozdílu dvou přibližných čísel navzájem blízkých může být velká, i když jsou poměrné chyby těchto čísel malé.

2. Při násobení a dělení přibližných čísel ponecháme ve výsledku tolik platných čísel, kolik jich má dané přibližné číslo s nejmenším počtem platných čísel. Výjimkou (kdy ponecháváme o jednu platnou číslici více) je případ, kdy součin začíná číslicí 1 a přibližné číslo s nejmenším počtem platných čísel začíná nějakoujinou platnou číslicí.

Pro prostou chybu součinu dvou přibližných čísel $x_1 = a_1 \pm \alpha_1$ a $x_2 = a_2 \pm \alpha_2$ platí

$$x_1 x_2 = a_1 a_2 \pm (a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1).$$

Poměrná chyba součinu několika kladných přibližných čísel o malých poměrných chybách je přibližně rovna součtu poměrných chyb všech činitelů.

Při násobení přibližného čísla přesným číslem roste prostá chyba úměrně s přesným číslem a poměrná chyba zůstane beze změny.

Pro prostou chybu podílu dvou přibližných čísel $x_1 = a_1 \pm \alpha_1$ a $x_2 = a_2 \pm \alpha_2$ platí

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2} \pm \frac{a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1}{a_2^2}.$$

Poměrná chyba podílu dvou kladných přibližných čísel o malých poměrných chybách je přibližně rovna součtu poměrných chyb dělence a dělíteli.

Při dělení přibližného čísla přesným číslem X se zmenší prostá chyba podílu X -krát, kdežto poměrná chyba zůstane beze změny.

3. Při umocňování dvěma nebo třemi ponecháme ve výsledku tolik platných číslic, kolik jich má umocňované přibližné číslo. Přitom poslední číslice druhé, a zejména třetí mocniny je méně spolehlivá než poslední číslice umocňovaného přibližného čísla.

4. Při odmocňování dvěma nebo třemi ponecháme ve výsledku tolik platných číslic, kolik jich má odmocňované přibližné číslo. Přitom poslední číslice druhé, a zejména třetí odmocniny je spolehlivější než poslední číslice odmocňovaného přibližného čísla.

5. Při vyčíslování dílčích výsledků bereme o jednu číslici více, než se doporučuje v předchozích pravidlech. Přitom v mezivýpočtech „zá sobní číslice“ nepovažujeme za platné.

Není-li ve výpočtu sčítání nebo odčítání, lze v konečném výsledku ponechat tolik platných číslic, kolik jich má číslo s nejmenším počtem platných číslic. Přitom lze všechny mezivýpočty provádět s počtem platných míst o jednotku větším. V konečném výsledku zásobní číslice po zaokrouhlení zmizí. Zásobní číslice je vhodné při výpočtech psát menším písmenem nebo podtrhnout.

6. Mají-li při sčítání nebo odčítání některá čísla větší počet desetinných míst, resp. při násobení, dělení, umocňování nebo odmocňování větší počet platných číslic než ostatní, pak je před výpočtem zaokrouhlíme na nejmenší počet desetinných míst, resp. platných číslic, který se v daných číslech vyskytuje, zvětšený o jednu číslici.

7. Vyhledání čísla v tabulkách se považuje za samostatný výkon. Jde-li o mezivýsledek, bereme je s jednou zásobní číslicí.

8. Lze-li čísla brát s libovolnou přesností, pak k tomu, abychom dostali konečný výsledek s k platnými číslicemi, musíme přibližná čísla zaokrouhlit na takový počet platných číslic, aby předběžný výsledek měl $k + 1$ platných číslic.

9. Při výpočtech pomocí logaritmů volíme takové tabulky, které mají o jedno desetinné místo více než logaritmované přibližné číslo s nejmenším počtem platných číslic. V konečném výsledku se poslední platná číslice po zaokrouhlení vypustí.

Při použití pravidel pro výpočty s přibližnými čísly je nutno pamatovat, že nezaručují správnost poslední číslice výsledku. Chyba této poslední číslice řádu r může v některých případech činit i několik jednotek řádu r .

1.5. ÚMĚRY

Názvy a označení

Rovnost dvou poměrů

$$a:b = c:d \quad \text{neboli} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (abcd \neq 0)$$

se nazývá *úměra*, přičemž se pro členy a, b, c, d úměry zavádějí tyto názvy:

- a, d jsou *vnější členy*,
- b, c – *vnitřní členy*,
- a, c – *přední členy*,
- b, d – *zadní členy*,

Rozšiřování a krácení členů úměry ($r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$):

$$a:b = c:d \Rightarrow \begin{cases} ar:br = c:d, \\ ar:b = cr:d; \end{cases}$$

$$a:b = c:d \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{r}:\frac{b}{r} = c:d, \\ \frac{a}{r}:b = \frac{c}{r}:d. \end{cases}$$

Platí

$$a:b = c:d \Leftrightarrow ad = bc,$$

tj. součin vnějších členů se rovná součinu vnitřních členů.

Vzájemná výměna členů úměry

Z úměry $a:b = c:d$ plyne:

$$\begin{aligned} a:c &= b:d, \\ d:b &= c:a, \\ d:c &= b:a. \end{aligned}$$

Sčítání a odčítání v úměrách

Z úměry $a:b = c:d$ pro všechna čísla $p, q, r, s \in \mathbb{R}$, pro něž jmenovatelé zlomků nejsou rovni nule, plyně

$$\frac{pa + qb}{ra + sb} = \frac{pc + qd}{rc + sd},$$

$$\frac{pa + qc}{ra + sc} = \frac{pb + qd}{rb + sd},$$

odkud při speciální volbě čísel p, q, r a s dostaneme (pokud úměry mají smysl)

$$(a+b):a = (c+d):c,$$

$$(a+b):b = (c+d):d,$$

$$(a-b):a = (c-d):c,$$

$$(a-b):b = (c-d):d,$$

$$(a+b):(a-b) = (c+d):(c-d):$$

Součinitel úměrnosti

$$a:b = c:d \Rightarrow a = pc \wedge b = pd,$$

kde p se nazývá *součinitel úměrnosti*.

Spojitá úměra

$$a:b = b:c$$

(vnitřní členy jsou si rovny).

Třetí úměrná

$$a:b = b:x; \quad x = \frac{b^2}{a}$$

(x se nazývá *třetí úměrná k číslům a a b*).

Čtvrtá úměrná

$$a:b = c:x; \quad x = \frac{bc}{a}$$

(x se nazývá *čtvrtá úměrná k číslům a, b, c*). Geometrický význam viz na str. 302.

Střední úměrná

$$a:x = x:b; \quad x = \sqrt{(ab)} \quad (ab > 0)$$

(x se nazývá střední úměrná [geometrický průměr] z čísel a a b). Geometrický význam viz na str. 303.

Spojitá harmonická úměra

$$(a - x):(x - b) = a:b; \quad x = \frac{2ab}{a + b}$$

(x se nazývá harmonický průměr z čísel a a b) neboli v jiném tvaru

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Postupná úměra

$$a:b:c:d:\dots = a_1:b_1:c_1:d_1:\dots \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a_1 = pa \wedge b_1 = pb \wedge c_1 = pc \wedge d_1 = pd \wedge \dots$$

Každou postupnou úměru lze rozepsat v jednotlivé úměry:

$$a:b = a_1:b_1, \quad b:c = b_1:c_1, \\ a:c = a_1:c_1, \quad b:d = b_1:d_1, \\ a:d = a_1:d_1, \quad c:d = c_1:d_1, \text{ atd.}$$

1.6. LOGARITMOVÁNÍ

1.6.1. Základní pojmy

Pojem logaritmu a označení

Logaritmem kladného reálného čísla x při základu $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ nazýváme takové reálné číslo

$$y = \log_a x,$$

že $a^y = x$. Číslo a se nazývá základ [báze], x numerus [logaritmované číslo] a y logaritmus.

Logaritmování

Logaritmování je při daném základu inverzní operací k umocňování, přičemž k dané hodnotě x mocniny a^y se základem a hledáme exponent y . Platí

$$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a(a^y) = y, \quad \log_a(a^{-y}) = -y.$$

Desítkové logaritmy

Logaritmus při základu 10 značíme

$$y = \log_{10} x = \lg x \quad (x > 0)$$

a nazýváme desítkovým [dekadickým, Briggsovým] logaritmem, tj.

$$\lg x = y \Leftrightarrow x = 10^y.$$

Přirozené logaritmy

Logaritmus při základu

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h} = 2,718\,281\,828\,459\,0\dots$$

značíme

$$\log_e x = \ln x \quad (x > 0)$$

a nazýváme přirozeným [Napierovým] logaritmem, tj.

$$\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y.$$

Vztah mezi soustavami logaritmů

$$\log_b a = \frac{1}{\log_c b} \log_c a = \log_b c \log_c a,$$

kde převodní součinitel

$$\frac{1}{\log_c b} = \log_b c$$

se nazývá modul přechodu od soustavy logaritmů o základu b k soustavě logaritmů o základu c .

Vztahy mezi desítkovými a přirozenými logaritmy

$$\lg a = \frac{\ln a}{\ln 10} = \lg e \ln a,$$

kde

$$\frac{1}{\ln 10} = \lg e = M = 0,434\,294\,48\dots$$

se nazývá modul soustavy dekadických logaritmů;

$$\ln a = \ln 10 \lg a,$$

kde

$$\ln 10 = \frac{1}{M} = m = 2,302\,585\,09\dots$$

se nazývá *modul soustavy přirozených logaritmů*.

1.6.2. Vlastnosti logaritmů

Pro $\forall a, c \in \mathbb{R}^+ \wedge \forall b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \wedge \forall r \in \mathbb{R} \wedge \forall n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c,$$

$$\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c,$$

$$\log_b a^r = r \log_b a,$$

$$\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_b a,$$

$$\log_b b = 1,$$

$$\log_b 1 = 0.$$

1.6.3. Určování desítkových logaritmů z logaritmických tabulek

Protože každé kladné číslo N lze vyjádřit ve tvaru $N = 10^n N_0$, kde $N_0 \in (1, 10)$ a n je celé číslo, můžeme jeho desítkový logaritmus vyjádřit jako součet $\log N = n + \log N_0$, kde celé číslo n , které je řádem první něnulové číslice čísla N , se nazývá *charakteristika* a $\log N_0 \in (0, 1)$ se nazývá *mantisa*.

Charakteristika nepravého desetinného zlomku (tj. čísla většího než 1) s n místy před desetinnou čárkou se rovná $n - 1$.

Charakteristika pravého desetinného zlomku je záporná a rovná se počtu nul před první něnulovou číslicí, počítajíc v to i nulu před desetinnou čárkou.

Je-li $N \geq 1$, resp. $N < 1$, píšeme $\log N$ ve tvaru $n.a_1a_2\dots a_s$ ($n \geq 1$), resp. $0.a_1a_2\dots a_s - |n|$ ($n < 0$), kde n je charakteristika čísla $\log N$.

Příklad:

Charakteristiky čísel 3 745; 75; 4; 0,007 3 jsou po řadě 3, 1, 0, -3.

Mantisy logaritmů najdeme v logaritmických tabulkách.

Má-li logaritmované číslo (numerus) o jednu platnou číslici více, než uvádějí tabulky, pak k nalezené hodnotě v tabulkách pomocí lineární interpolace připojíme přírůstek

$$d = \frac{Dp}{10},$$

kde D je tabulková diferencia (tabulkový rozdíl mezi bezprostředně následující hodnotou v tabulkách a nalezenou hodnotou) a p je další číslice, která se má vzít v úvahu.

Příklad 1:

$$\lg 37\,489 \approx 4,573\,91,$$

neboť podle pětimístných tabulek je

$$\lg 37\,480 \doteq 4,573\,80,$$

$$\lg 37\,490 \doteq 4,573\,92.$$

Tabulková diferencia $D = 12$; další číslice je $p = 9$, takže přírůstek je

$$d = \frac{Dp}{10} = \frac{12 \cdot 9}{10} = 10,8 \doteq 11.$$

Dostaneme

$$\begin{array}{r} \lg 37\,489 \approx 4,573\,80 \\ + \quad \quad \quad \frac{11}{4,573\,91} \end{array}$$

Příklad 2:

Podobně vypočteme

$$\lg 0,123\,67 \approx 0,092\,27 - 1,$$

přičemž

$$D = 35, \quad p = 7, \quad d = \frac{35 \cdot 7}{10} \doteq 25.$$

Přírůstek mantisy lze také přímo najít v tabulkách poměrných částí, které jsou ve všech logaritmických tabulkách.

Hledání logaritmovaného čísla (numera) k danému logaritmu

Charakteristika logaritmu udává přímo polohu desetinné čárky ve výsledku (v numeru). Je-li příslušná mantisa právě uvedena v tabulkách, můžeme všechny číslice numera přímo číst. Jinak najdeme v tabulkách nejblíže nižší hodnotu a z přírůstku d mantisy a tabulkové diferencia D vypočteme další číslici p numera:

$$p = \frac{10d}{D}.$$

Také při hledání numera je výhodné používat tabulek poměrných částí.

Příklad 1:

$$\begin{aligned}\lg x &= 3,598\,14, & d &= 1, \\ x &\approx 3\,964,1, & D &= 11, \\ p &= \frac{10 \cdot 1}{11} \doteq 1.\end{aligned}$$

Příklad 2:

$$\begin{aligned}\lg x &= 0,996\,37 - 3, & d &= 3, \\ x &\approx 0,009\,916\,8, & D &= 4, \\ p &= \frac{10 \cdot 3}{4} \doteq 8.\end{aligned}$$

1.6.4. Přirozené logaritmy komplexních čísel

Přirozeným logaritmem [stručně logaritmem] komplexního čísla

$$z = \varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{pro} \quad \forall z \in \mathbb{P}$$

je komplexní číslo

$$\ln z = \ln [\varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi)] = \ln \varrho + i(\varphi + 2k\pi) \quad \text{pro} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Hlavní hodnotou $\ln z$ přirozeného logaritmu komplexního čísla $z = \varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ nazýváme komplexní číslo

$$\text{Ln } z = \ln \varrho + i\varphi, \quad \varphi \in (-\pi, \pi).$$

Příklad:

Vypočtěme $\ln(3 - 7i)$.

$$r = \sqrt{(9 + 49)} = \sqrt{58}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{-7}{3} = -2,3,$$

$$\varphi \approx 293^\circ 12' \doteq 5,12 \text{ rad};$$

$$\begin{aligned}\ln(3 - 7i) &= \ln \sqrt{58} + i(5,12 + 2k\pi) = \\ &= 2,030\,22 + i(5,12 + 2k\pi);\end{aligned}$$

$$k = 0: \ln(3 - 7i) \approx 2,030\,22 + 5,12i,$$

$$k = 1: \ln(3 - 7i) \approx 2,030\,22 + i(5,12 + 2\pi) \approx 2,030\,22 + 11,4i,$$

$$k = 2: \ln(3 - 7i) \approx 2,030\,22 + i(5,12 + 4\pi) \approx 2,030\,22 + 17,68i,$$

atd.

Zvláštní případy

Ryze imaginární číslo bi ($b > 0$):

$$\ln(bi) = \ln(b e^{i(\pi/2 + 2k\pi)}) = \ln b + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad \text{pro } \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Ryze imaginární číslo $-bi$ ($b > 0$):

$$\ln(-bi) = \ln(b e^{i(3\pi/2 + 2k\pi)}) = \ln b + i\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) \quad \text{pro } \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Kladné reálné číslo a :

$$\ln a = \ln(a e^{i(0 + 2k\pi)}) = \ln a + 2k\pi i \quad \text{pro } \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Záporné reálné číslo $-a$ ($a > 0$):

$$\ln(-a) = \ln(a e^{i(\pi + 2k\pi)}) = \ln a + i(\pi + 2k\pi) \quad \text{pro } \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Pro $\forall k \in \mathbb{Z}$ tedy je

$$\ln 1 = 2k\pi i,$$

$$\ln(-1) = i(\pi + 2k\pi),$$

$$\ln i = i(\frac{1}{2}\pi + 2k\pi),$$

$$\ln(-i) = i(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi).$$

1.7. KOMBINATORIKA

1.7.1. Binomické koeficienty, binomická věta

Faktoriál čísla n

Faktoriálem čísla n [n-faktoriálem] nazýváme funkci F na množině všech nezáporných celých čísel, definovanou takto:

$$F(0) = 1,$$

$$F(n+1) = (n+1)F(n) \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Místo $F(n)$ píšeme $n!$. Platí $0! = 1$. Pro $n \geq 1$ je

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1)n.$$

Binomický koeficient

Pro libovolné komplexní číslo α a celé číslo k se tzv. *binomický koeficient*

[binomické číslo] $\binom{\alpha}{k}$ (čteme: α nad k) definuje takto:

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} & (k > 0), \\ 1 & (k = 0), \\ 0 & (k < 0). \end{cases}$$

Pro binomické koeficienty platí vztahy ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}, k, n \in \mathbb{Z}$)

$$\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1},$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{\alpha+k}{k} = \binom{\alpha+n+1}{n},$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}.$$

Kombinační čísla

Pro nezáporná celá čísla k, n se tzv. *kombinační číslo* $\binom{n}{k}$ definuje takto:

$$\binom{n}{k} = C_k^n = \begin{cases} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} & (n \geq k), \\ 0 & (0 < n < k). \end{cases}$$

Plati

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Příklady:

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5040}{24} = 210,$$

$$\binom{-5}{3} = \frac{(-5)(-6)(-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -35,$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2} = \frac{3}{8},$$

$$\binom{3}{5} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 0.$$

Pascalův trojúhelník k určení kombinačních čísel

$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
\vdots

První a poslední číslo v každém řádku schématu je vždy rovno 1. Každé číslo uvnitř schématu se rovná součtu dvou nejbližších čísel z předchozího řádku. Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ je v tomto schématu v $(n+1)$ -ním řádku na $(k+1)$ -ním místě.

Příklad:

$$\binom{4}{2} = 6 \quad \text{je v 5. řádku na 3. místě.}$$

Vztahy mezi kombinačními čísly ($k, n \in \mathbb{N}_0$)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{symetričnost}),$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1},$$

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1},$$

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \dots + \binom{k+n}{n} = \binom{k+n+1}{n},$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n,$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0,$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1},$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1},$$

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Binomická věta pro kladné celočíselné exponenty n

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

$$(a-b)^n = \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Obecná binomická věta pro reálné exponenty α

$$(a+b)^\alpha = \binom{\alpha}{0} a^\alpha + \binom{\alpha}{1} a^{\alpha-1} b + \binom{\alpha}{2} a^{\alpha-2} b^2 + \binom{\alpha}{3} a^{\alpha-3} b^3 + \dots$$

(viz též str. 702). Podmínka konvergence: $|b| < |a|$.

Binomická věta pro některé exponenty

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \text{ odkud } (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4,$$

$$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5;$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2 +$$

$$+ 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_1a_m + a_2a_3 + a_2a_4 + \dots + a_2a_m + \dots + a_{m-1}a_m).$$

Součty a rozdíly mocnin

$$\begin{aligned}
 a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b), \\
 a^2 + b^2 &= (a - b)^2 + 2ab = (a + ib)(a - ib), \\
 a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2), \\
 a^4 + b^4 &= (a^2 + b^2 + ab\sqrt{2})(a^2 + b^2 - ab\sqrt{2}), \\
 a^4 - b^4 &= (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b), \\
 a^n - b^n &= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\
 (n \in \mathbb{N}), \\
 a^n + b^n &= (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \\
 (n = 2m + 1, m \in \mathbb{N}),
 \end{aligned}$$

Příklady ($m, n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}
 (a^6 - b^6)/(a^3 - b^3) &= a^3 + b^3, \\
 (a^6 - b^6)/(a^3 + b^3) &= a^3 - b^3, \\
 (a^4 - b^2)/(a^2 + b) &= a^2 - b, \\
 (a^{2m} - b^{2n})/(a^m - b^n) &= a^m + b^n, \\
 (a^{2n} - b^{2n})/(a^2 - b^2) &= a^{2n-2} + a^{2n-4}b^2 + a^{2n-6}b^4 + \\
 &\quad + \dots + a^2b^{2n-4} + b^{2n-2}, \\
 (a^{3m} \pm b^{3m})/(a^m \pm b^m) &= a^{2m} \mp a^m b^m + b^{2m}, \\
 (a^n - 1)/(a - 1) &= a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \dots + a + 1, \\
 (a^{2n+1} + 1)/(a + 1) &= a^{2n} - a^{2n-1} + a^{2n-2} - \dots - a + 1.
 \end{aligned}$$

1.7.2. Permutace

Permutace bez opakování

Permutací [pořadím] z n -prvkové množiny M \langle bez opakování \rangle nebo n -člennou permutací [n -členným pořadím] \langle bez opakování \rangle nazýváme každou uspořádanou n -tici navzájem různých prvků vytvořenou z prvků množiny M .

Počet všech permutací z n prvků bez opakování:

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!.$$

Permutace s opakováním

n -člennou permutací z p -prvkové množiny $M = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ s opakováním prvku a_1 právě k_1 -krát, prvku a_2 právě k_2 -krát, ..., prvku a_p právě k_p -krát nazýváme každou takovou uspořádanou n -tici vytvořenou ze všech p ($p \leq n$) prvků množiny M , že se v této uspořádané n -tici prvek a_1 vyskytuje právě k_1 -krát, prvek a_2 právě k_2 -krát, ..., prvek a_p právě k_p -krát ($k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$).

Počet všech n -členných permutací z p -prvkové množiny $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ s opakováním prvku a_1 právě k_1 -krát, prvku a_2 právě k_2 -krát, ..., prvku a_p právě k_p -krát:

$$P'_{k_1, k_2, \dots, k_p}(n) = \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_p} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_p!},$$

kde symbol

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_p}$$

se nazývá *polynomický koeficient*.

Speciálně pro $p = 2$ počet všech n -členných permutací ze dvou prvků a_1, a_2 s opakováním prvku a_1 k -krát a prvku a_2 $(n - k)$ -krát je

$$P'_{k, n-k}(n) = \binom{n}{k, n-k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}.$$

Číslo $\binom{n}{k, n-k}$ je rovno číslu $\binom{n}{k}$.

Příklad 1:

Kolik různých pětimístných kladných celých čísel lze vytvořit z čísel 2, 3 a 5, jestliže se v každém čísle každá z čísel 3 a 5 vyskytuje právě dvakrát?

$$P_{1,2,2}(5) = \frac{5!}{1! 2! 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 30.$$

Příklad 2:

Kolik různých šestimístných kladných celých čísel lze vytvořit z čísel 1 a 4, jestliže se v každém čísle číslice 1, resp. 4 vyskytuje právě dvakrát, resp. právě čtyřikrát?

$$P_{2,4}(6) = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2! 4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15.$$

Transpozice

Permutaci, v níž vzájemně zaměníme dva členy a všechny ostatní členy ponecháme beze změny pořadí, nazýváme *transpozicí původní permutace*. Každou permutaci lze převést v jinou permutaci postupnými transpozicemi. *Základní permutací* nazýváme pevně zvolenou permutaci, s níž se porovnávají jiné permutace.

Permutace množiny

Permutaci množiny M nazýváme každé prosté zobrazení množiny M na množinu M .

Speciálně permutaci P množiny (úseku) $U_n = \{1, 2, \dots, n\}$ zapisujeme ve tvaru schématu

$$P = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ k_1, & k_2, & \dots, & k_n \end{pmatrix},$$

kde $k_i = P(i)$ je číslo z množiny U_n , které je při permutaci P obrazem čísla $i \in M$. Mezi čísla k_1, k_2, \dots, k_n se vzhledem k definici permutace každé číslo z čísel $1, 2, \dots, n$ vyskytuje právě jednou. Základní [hlavní, identickou] permutaci množiny U_n nazýváme permutaci

$$P = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ 1, & 2, & \dots, & n \end{pmatrix}.$$

Inverzní permutaci k permutaci

$$P = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ k_1, & k_2, & \dots, & k_n \end{pmatrix}$$

nazýváme permutaci

$$P_{-1} = \begin{pmatrix} k_1, & k_2, & \dots, & k_n \\ 1, & 2, & \dots, & n \end{pmatrix}.$$

Inverze u permutace

Říkáme, že permutace

$$P = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ k_1, & k_2, & \dots, & k_n \end{pmatrix}$$

množiny $U_n = \{1, 2, \dots, n\}$ má inverzi, právě když existují takové indexy i, j ($i < j$), že $k_i > k_j$ ($i, j \in U_n$). Označíme-li $v(P)$ počet všech inverzí v permutaci P , pak permutaci P nazýváme sudou, resp. lichou, právě když $v(P)$ je sudé, resp. liché číslo. Znaménko [signum] permutace P je číslo

$$z(P) = (-1)^{v(P)}.$$

Obdobně se definuje inverze u permutace

$$P = \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \dots, & i_n \\ k_1, & k_2, & \dots, & k_n \end{pmatrix}$$

libovolné n -prvkové množiny $M = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ tak, že permutace P má inverzi, právě když pro $i_m < i_n$ je $k_m > k_n$ ($i_m, i_n \in M$), přičemž $<$, resp. $>$ je znakem předcházení, resp. následování.

Příklad:

Permutace

$$P = \begin{pmatrix} 4, 5, 6, 7, 8 \\ 8, 4, 6, 5, 7 \end{pmatrix}$$

má právě pět inverzí

$$8 \text{ a } 4, \quad 8 \text{ a } 6, \quad 8 \text{ a } 5, \quad 8 \text{ a } 7, \quad 6 \text{ a } 5,$$

takže jde o lichou permutaci.

Počet všech možných sudých permutací množiny o mohutnosti n se rovná počtu všech jejích možných lichých permutací, tj. $n!/2$.

1.7.3. Variace

Variace bez opakování

Variaci k -té třídy z n -prvkové množiny \langle bez opakování \rangle nebo variaci k -té třídy z n prvků \langle bez opakování \rangle nazýváme každou uspořádanou k -tici nazvájem různých prvků, vytvořenou z n -prvkové množiny, tj. každý prvek z daných n prvků se v jedné variaci může vyskytnout právě jednou.

Počet všech variací k -té třídy z n -prvkové množiny bez opakování:

$$V_k(n) = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!} = \binom{n}{k} k!.$$

Variace n -té třídy z n prvků bez opakování je tedy permutací z n prvků, takže platí

$$V_n(n) = P(n) = n!.$$

Mohutnost systému všech prostých zobrazení množiny B o mohutnosti k do množiny A o mohutnosti n se rovná $V_k(n)$.

Příklad:

Považujme za zdařilý takový vrh, při němž třikrát za sebou hodíme kostkou a pokaždé padne jiný počet bodů. Kolik takových různých zdařilých vrhů existuje, příhližíme-li k pořadí bodů ve vrhu?

$$V_3(6) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Variace s opakováním

Variací k -té třídy z n -prvkové množiny M s opakováním nazýváme každou uspořádanou k -tici vytvořenou z prvků množiny M tak, že v této uspořádané k -tici se každý prvek z prvků množiny M může vyskytovat až k -krát.

Počet všech variací k -té třídy z n prvků s opakováním:

$$V'_k(n) = n^k.$$

Mohutnost množiny všech zobrazení množiny B o mohutnosti k do množiny A o mohutnosti n se rovná $V'_k(n)$.

Příklad:

Kolik možností je při vyplňování sázenky Sazky o 12 utkáních?

$n = 3$ (vítězství, prohra, nerozhodně),

$k = 12$,

$$V'_{12}(3) = 3^{12} = 531\,441.$$

1.7.4. Kombinace

Kombinace bez opakování

Kombinací k -té třídy z n -prvkové množiny \langle bez opakování \rangle nebo kombinaci k -té třídy z n prvků \langle bez opakování \rangle nazýváme každou k -prvkovou podmnožinu n -prvkové množiny, tj. u kombinace bez opakování nepřihlížíme k uspořádání prvků a každý prvek z daných n prvků se v jedné kombinaci může vyskytnout nejvýše jednou.

Počet všech kombinací k -té třídy z n prvků bez opakování:

$$\begin{aligned} C_k(n) &= \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \\ &= \frac{V_k(n)}{P(k)} \quad (n \geq k). \end{aligned}$$

Má-li systém $\mathcal{P}(A)$ všech podmnožin množiny A mohutnost 2^n , pak systém $\mathcal{P}(A)$ obsahuje právě $C_k(n)$ k -prvkových podmnožin množiny A .

Příklad:

Kolik možností by bylo při tahu Sportky, kdyby se počet sportů rozšířil na 90 a počet tažených čísel se změnil na pět?

$$n = 90, \quad k = 5,$$

$$C_5(90) = \binom{90}{5} = 43\,949\,268.$$

Kombinace s opakováním

Kombinací k -té třídy z n -prvkové množiny M s opakováním nazýváme každou skupinu o k prvcích vytvořenou z prvků množiny M tak, že v této skupině se každý prvek může vyskytovat až k -krát.

Počet všech kombinací k -té třídy z n prvků s opakováním:

$$C_k(n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Příklad:

Kolik kombinací třetí třídy s opakováním lze vytvořit z pěti číslic 2, 3, 4, 5, 6?

$$C_3(5) = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

1.8. POSLOUPNOSTI REÁLNÝCH ČÍSEL

1.8.1. Základní pojmy

⟨Nekonečnou⟩ posloupnosti reálných čísel [*⟨nekonečnou⟩ posloupnosti, číselnou ⟨nekonečnou⟩ posloupnosti*] nazýváme každé zobrazení množiny \mathbb{N} všech kladných celých čísel do množiny \mathbb{R} všech reálných čísel.

Konečnou posloupností reálných čísel [*konečnou posloupností*] nazýváme každé zobrazení množiny (úseku) $U_n = \{1, 2, \dots, n\}$ do množiny \mathbb{R} všech reálných čísel (na neprázdnou podmnožinu množiny \mathbb{R}).

⟨Nekonečná⟩ posloupnost, resp. *konečná posloupnost* reálných čísel je tedy reálná funkce jedné reálné proměnné, jejímž definičním oborem je množina \mathbb{N} , resp. nějaký úsek U_n množiny \mathbb{N} .

Označení:

n je index (vzor),

a_1 – počáteční člen,

a_n – n -tý člen posloupnosti (obecný člen posloupnosti, obraz),

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, popř. $\{a_n\}_1^{\infty}$, popř. (a_1, a_2, \dots) , popř. a_1, a_2, \dots – posloupnost,

$\{a_n\}_{n=1}^k$, popř. $\{a_n\}_1^k$, popř. (a_1, a_2, \dots, a_k) , popř. a_1, a_2, \dots, a_k – konečná posloupnost.

Posloupnost je dána:

– *slovním vyjádřením*: například každému kladnému celému číslu n je přiřazena jeho druhá mocnina;

– *analyticky* (vzorcem pro n -tý člen): například $a_n = n^2$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$;

- *tabelárně* (výčtem všech členů): například $\{n^2\}_{n=1}^{\infty} = (1, 4, 9, 16, \dots)$,
- *rekurentně* (tj. je dáno několik prvních členů posloupnosti a je dán předpis, jak se vypočte n -tý člen na základě znalosti předchozích členů): například $a_1 = 1, a_2 = 4, a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2$, takže $a_3 = 2 + 2 \cdot 4 - 1 = 9$.

Diferenční posloupnosti prvního řádu k posloupnosti $\{a_n\}$ nazýváme posloupnost $\{\Delta^1 a_n\} = \{\Delta a_n\} = \{b_n\}$, kde $b_n = a_{n+1} - a_n = \Delta a_n$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Příklad:

Diferenční posloupností prvního řádu k posloupnosti

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right)$$

je posloupnost

$$\left\{ -\frac{1}{n(n+1)} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, \dots \right).$$

Diferenční posloupnosti k -tého řádu k posloupnosti $\{a_n\}$ nazýváme diferenční posloupnost $\{\Delta^k a_n\}$ diferenční posloupnosti $(k-1)$ -ního řádu $\{\Delta^{k-1} a_n\}$ k posloupnosti $\{a_n\}$.

Podilovou posloupností k k posloupnosti $\{a_n\}$, kde $a_n \neq 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$, je posloupnost $\{b_n\}$, kde $b_n = a_{n+1}/a_n$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Posloupností částečných součtů posloupnosti $\{a_n\}$ nazýváme posloupnost

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Příklad:

Posloupností částečných součtů posloupnosti

$$\{2n\}_{n=1}^{\infty} = (2, 4, 6, \dots)$$

je posloupnost

$$\{n(n+1)\}_{n=1}^{\infty} = (2, 6, 12, \dots).$$

Posloupnosti s kladnými, resp. nezápornými členy nazýváme takovou posloupnost $\{a_n\}$, že $a_n > 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$, resp. $a_n \geq 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Alternující posloupnosti nazýváme takovou posloupnost $\{a_n\}$, že $a_n = (-1)^n b_n$, popř. $a_n = (-1)^{n+1} b_n$, kde $b_n \geq 0$.

Rostoucí

Klesající

Neklesající

Nerostoucí

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n < a_{n+1}, \\ a_n > a_{n+1}, \\ a_n \leq a_{n+1}, \\ a_n \geq a_{n+1}. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} posloupnosti nazýváme takovou posloupnost \\ \{a_n\}, že pro \forall n \in \mathbb{N} platí \end{array} \right.$$

Rostoucí, klesající, neklesající a nerostoucí posloupnosti se souhrnně nazývají *monotónní posloupnosti*. Rostoucí a klesající posloupnosti se souhrnně nazývají *ryze monotónní posloupnosti*.

Konstantní posloupností nazýváme takovou posloupnost $\{a_n\}$, že $a_n = \text{konst}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *shora*, resp. *zdola ohrazená* [*shora*, resp. *zdola omezená*], právě když existuje takové číslo K , resp. k , že pro všechny indexy n platí $a_n \leq K$, resp. $a_n \geq k$.

Posloupnost a_n se nazývá *ohrazená* [*omezená*], právě když je shora i zdola ohrazená, tj. právě když existuje takové reálné číslo $K > 0$, že $|a_n| \leq K$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vybranou posloupností z posloupnosti [podposloupnosti posloupnosti] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, k níž existuje taková rostoucí posloupnost $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných celých čísel, že $b_n = a_{k_n}$.

Příklad:

Posloupnost $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ je vybranou posloupností k posloupnosti $\{n\}_{n=1}^{\infty}$.

1.8.2. Aritmetické posloupnosti

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *〈nekonečná〉 aritmetická posloupnost* [*aritmetická posloupnost prvního řádu*], právě když platí $a_n - a_{n-1} = d = \text{konst}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$ neboli právě když její diferenční posloupnost prvního řádu je konstantní. Číslo $d = \text{konst}$ se nazývá *diference aritmetické posloupnosti* $\{a_n\}$.

Aritmetickou posloupností *nultého* [*0-tého*] řádu nazýváme konstantní posloupnost.

Příklad:

Posloupnost $1, 4, 7, 10, \dots$ je aritmetickou posloupností s diferencí $d = 3$.

Pro aritmetickou posloupnost platí

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{pro } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$a_n = a_k + (n-k)d \quad \text{pro } \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-k} + a_{n+k}) \quad \text{pro } \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{U}_{n-1}.$$

Pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti platí

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d].$$

Příklady:

Součet prvních n kladných celých čísel:

$$s_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Součet prvních n kladných sudých čísel:

$$s_n = \sum_{k=1}^n 2k = n(n+1).$$

Součet prvních n kladných lichých čísel:

$$s_n = \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *aritmetická posloupnost k-tého řádu*, právě když její diferenční posloupnost k-tého řádu $\{\Delta^k a_n\}$ je konstantní.

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *aritmetická posloupnost k-tého řádu*, právě když její diferenční posloupnost k-tého řádu $\{\Delta^k a_n\}$ je konstantní.

Příklad:

$$\{a_n\} = \{2, 3, 8, 18, 36, 67, 118, \dots\},$$

$\{\Delta a_n\} = \{1, 5, 10, 18, 31, 51, \dots\}$ (diferenční posloupnost 1. řádu),

$\{\Delta^2 a_n\} = \{4, 5, 8, 13, 20, \dots\}$ (diferenční posloupnost 2. řádu),

$\{\Delta^3 a_n\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ (diferenční posloupnost 3. řádu),

$\{\Delta^4 a_n\} = \{2, 2, 2, \dots\}$ (konstantní diferenční posloupnost 4. řádu).

Posloupnost $\{a_n\}$ je aritmetickou posloupností 4. řádu .

Rekurentní vzorce pro aritmetické posloupnosti vyšších řádů

Aritmetická posloupnost druhého řádu:

Jsou-li dány členy a_1, a_2 a differenze d , resp. člen a_1 a čísla d_1, d_2 , platí

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = d \quad \text{pro } \forall n \in \mathbb{N}.$$

resp.

$$a_n = a_1 + (n-1)d_1 + (n-1)^2 d_2 \quad \text{pro } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aritmetická posloupnost třetího řádu:

Jsou-li dány členy a_1, a_2, a_3 a differenze d , resp. člen a_1 a čísla d_1, d_2, d_3 , platí

$$a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = d \quad \text{pro } \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\},$$

resp.

$$a_n = a_1 + (n-1)d_1 + (n-1)^2 d_2 + (n-1)^3 d_3 \quad \text{pro}$$

Aritmetická posloupnost m -tého řádu:

Jsou-li dány členy a_1, a_2, \dots, a_m a diference d , resp. člen a_1 a čísla d_1, d_2, \dots, d_m , platí

$$a_n - \binom{n}{1} a_{n-1} + \binom{n}{2} a_{n-2} - \dots + (-1)^m a_{n-m} = d \quad \text{pro} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus U_m,$$

resp.

$$a_n = a_1 + (n-1)d_1 + (n-1)^2 d_2 + \dots + (n-1)^m d_m \quad \text{pro} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Interpolace aritmetické posloupnosti prvního řádu

Jestliže mezi každé dva sousední členy aritmetické posloupnosti s diferencí d vložíme m členů tak, aby nově vzniklá posloupnost byla také aritmetická, říkáme, že jsme provedli *lineární interpolaci aritmetické posloupnosti prvního řádu*. Nová aritmetická posloupnost má diferenci

$$d_1 = \frac{d}{m+1}.$$

Příklady:

Součet druhých mocnin prvních n kladných celých čísel:

$$s_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Součet třetích mocnin prvních n kladných celých čísel:

$$s_n = \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

Součet čtvrtých mocnin prvních n kladných celých čísel:

$$s_n = \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Další vzorce:

$$\begin{aligned} p + (p+1) + (p+2) + \dots + (q-1) + q &= \frac{(q+p)(q+1-p)}{2} = \\ &= \frac{q^2 + q - p^2 + p}{2} \quad \text{pro} \quad \forall q \in \mathbb{N} \wedge \forall p \in U_q, \end{aligned}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} = \frac{n(4n^2-1)}{3},$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

1.8.3. Geometrické posloupnosti

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *(nekonečná) geometrická posloupnost*, právě když platí

$$a_{n+1} = a_n q \quad \text{pro } \forall n \in \mathbb{N},$$

kde číslo $q = \text{konst} \neq 0$ se nazývá *kvocient geometrické posloupnosti* $\{a_n\}$. Je tedy

$$\{a_n\} = (a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots).$$

Pro $q > 1$ je geometrická posloupnost při $a_1 > 0$, resp. $a_1 < 0$ rostoucí, resp. klesající.

Pro $0 < q < 1$ je geometrická posloupnost při $a_1 > 0$, resp. $a_1 < 0$ klesající, resp. rostoucí.

Pro $q < 0$ je geometrická posloupnost alternující (se střídavými znaménky).

Pro $q = 1$ dostaneme konstantní posloupnost, tj. posloupnost s konstantními členy.

Pro geometrickou posloupnost platí

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 q^{n-1} \quad \text{pro } \forall n \in \mathbb{N}, \\ a_{n+1} &= a_n q, \\ |a_n| &= \sqrt{(a_{n-k} a_{n+k})} \quad \text{pro } \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \wedge \forall k \in \mathbb{U}_{n-1}, \\ a_s &= a_r q^{s-r}. \end{aligned}$$

Součet prvních n členů geometrické posloupnosti $\{a_n\}$

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} \quad (q \neq 1), \\ s_n &= a_1 n \quad (q = 1). \end{aligned}$$

Součet nekonečné geometrické řady

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1 - q} \quad \text{pro } |q| < 1.$$

Interpolace geometrické posloupnosti

Jestliže mezi každé dva členy geometrické posloupnosti s kvocientem q vložíme m členů tak, aby nově vzniklá posloupnost byla také geometrická, říkáme, že jsme provedli *interpolaci geometrické posloupnosti*. Nová geometrická posloupnost má kvocient

$$q_1 = \sqrt[m+1]{q}.$$

1.8.4. Vyvolená čísla

Normalizovaná [normální] vyvolená čísla jsou všechny členy některé z geometrických posloupností (tzv. základních [teoretických] posloupností vyvolených čísel)

$$\{(10^{r/40})^{n-1}\}_{n=1}^{\infty} = \mathbf{R} k$$

($r = 2^m$ pro $m = 1, 2, 3, 4$; $k = 40/r$), vyjádřené v desítkovém zápisu na tři platné číslice. Jsou-li tyto členy vyjádřeny na pět platných číslic, mluvíme (nevhodně) o přesných vyvolených číslech. Prvním členem každé ze základních posloupností $\mathbf{R} k$ je číslo 1.

Kvocientem základní posloupnosti vyvolených čísel je číslo $\varphi = 10^{1/k}$, přičemž $k = 40/r$ je součást označení příslušné základní posloupnosti $\mathbf{R} k$ vyvolených čísel a $k - 1$ je počet členů mezi dvěma mocninami $10^n, 10^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Součin a podíl dvou vyvolených čísel, stejně jako n -tá mocnina vyvoleného čísla ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) je zřejmě opět vyvoleným číslem.

Odvozenou [vybranou] posloupnost vyvolených čísel dostaneme z některé ze základních posloupností vyvolených čísel tak, že za první člen odvozené posloupnosti volíme některý člen a_n základní posloupnosti a za kvocient odvozené posloupnosti volíme p -tou mocninu ($p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) kvocientu základní posloupnosti, takže ze základní posloupnosti bereme vždy každý p -tý člen od zvoleného člena. Odvozenou posloupnost vyvolených čísel pak označujeme $\mathbf{R} k/p (\dots, a_n, \dots)$.

Základní i odvozené posloupnosti vyvolených čísel mají velký význam při normalizování hodnot technických veličin (rozměrů strojních součástí, rychlostí, frekvencí otáčení, tlaků, tlaků, napětí aj.). Pojednává o nich ČSN 01 0201 Vyvolená čísla, 196 Písmeno R v označení posloupností vyvolených čísel pochází od jejich navrhovatele Ch. Renarda.

Příklad 1:

Kvocientem posloupnosti R 20 je číslo $\varphi = 10^{1/20} \doteq 1,122$. Z teoretických vyvolených čísel

$$10, 10 \cdot 10^{1/20}, 10 \cdot (10^{1/20})^2, 10 \cdot (10^{1/20})^3, \dots$$

odvozené posloupnosti R 20 (...; 10; ...) dostaneme příslušná normalizovaná vyvolená čísla

$$10; 11,2; 12,6; 14,1; 15,8; 17,6; \dots$$

Příklad 2:

Odvozená posloupnost R 40/6 (...; 300; ...) představuje normalizovaná vyvolená čísla 300, 425, 600, 850, ..., neboť $\varphi = 10^{6/40} \approx \sqrt{2}$. Posloupnost R 40/6 (...; 300; ...) se tedy přibližně shoduje s posloupností rozměrů světových formátů.

1.9. PROCENTOVÝ POČET, ÚROKOVÝ POČET

1.9.1. Procentový počet, promilový počet

Procentový a promilový poměr

Čísla (nebo veličiny téhož druhu při téže měřicí jednotce) a, b (v tomto pořadí) lze porovnávat buď rozdílem $a - b$ (popř. absolutní hodnotou $|a - b|$ rozdílu), nebo podílem [poměrem] a/b neboli $a : b$ (čteme: a ku b). Při vhodné volbě jednoho z čísel c, d lze rozdíl $a - b$ vyjádřit pomocí rozdílové [aritmetické] úměry

$$a - b = c - d$$

a podíl a/b pomocí \langle podílové \rangle úměry

$$a : b = c : d.$$

V praxi se často v případě podílové úměry klade $d = 100$, resp. $d = 1\,000$, takže

$$a : b = p : 100, \text{ resp. } a : b = m : 1\,000,$$

což zapisujeme ve tvaru

$$a : b = p \%, \text{ resp. } a : b = m \%_{\infty}.$$

Výraz $p \%$ (čteme: p procent), resp. $m \%_{\infty}$ (čteme: m promile) tedy značí $q = p/100$, resp. $r = m/1\,000$ a nazývá se procentový poměr [procentový podíl], resp. promilový poměr [promilový podíl] čísel a, b (v tomto pořadí). Číslo p ,

resp. m se nazývá *procentová míra* [počet procent], resp. *promilová míra* [počet promili].

Poznámka:

Určit zlomek a/b z čísla [z celku] c nebo změnit číslo c v poměru a/b (poměr je jiný název pro zlomek) znamená určit číslo ac/b .

Procentový počet <ze základu> [procentový počet že sta]

Obrácenými úlohami k úloze určit, jakým zlomkem $p/100$ (tj. kolik procent nebo setin) z čísla K_0 je číslo C , jsou úloha určit číslo C jako zlomek $p/100$ (tj. p procent nebo $p\%$) z čísla K_0 a úloha určit číslo K_0 k danému číslu C , které je daným zlomkem $p/100$ z čísla K_0 .

Platí

$$C : p = K_0 : 100,$$

odkud

$$C = \frac{K_0 p}{100} = K_0 q, \quad K_0 = \frac{100 C}{p} = \frac{C}{q}, \quad p = \frac{100 C}{K_0} = 100 q,$$

přičemž zavádime tyto názvy:

K_0 – <procentový> základ,

p – procentová míra <ze sta> [počet procent <ze sta>],

C – procentová část.

Procentový počet ze zvětšeného základu [procentový počet na sto]

Jestliže součet $K_0 + C$ nazveme *zvětšeným základem* a označíme $K^{(+)}$, platí

$$C : p = K^{(+)} : (100 + p),$$

odkud

$$C = \frac{K^{(+)} p}{100 + p}, \quad K_0 = \frac{100 K^{(+)}}{100 + p}, \quad p = \frac{100 C}{K^{(+)} - C}.$$

Procentový počet ze zmenšeného základu [procentový počet ve stu]

Jestliže rozdíl $K_0 - C$ nazveme *zmenšeným základem* a označíme $K^{(-)}$, platí

$$C : p = K^{(-)} : (100 - p),$$

odkud

$$C = \frac{K^{(-)} p}{100 - p}, \quad K_0 = \frac{100 K^{(-)}}{100 - p}, \quad p = \frac{100 C}{K^{(-)} + C}.$$

Procentová míra **〈na sto〉** poměru procentové části a zvětšeného základu

$$p^{(+)} = \frac{100C}{K^{(+)}} = \frac{100C}{K_0 + C} = \frac{100p}{100 + p},$$

kde p je procentová míra ze sta.

Procentová míra **〈ve stu〉** poměru procentové části a zmenšeného základu

$$p^{(-)} = \frac{100C}{K^{(-)}} = \frac{100C}{K_0 - C} = \frac{100p}{100 - p},$$

kde p je procentová míra ze sta.

Příklad 1:

Přičteme-li k výrobní ceně 15procentní přirážku, dostaneme velkoobchodní cenu. Přirážka tedy činí $p\% = 15\%$ z výrobní ceny a

$$p^{(+)} \% = \frac{100p}{100 + p} \% = \frac{100 \cdot 15}{100 + 15} \% \doteq 13\%$$

z velkoobchodní ceny.

Příklad 2:

Ztráta na materiálu při určité výrobě činí $p\% = 23\%$ z hmotnosti surovin. Z hlediska hotových výrobků ztrátě $p\% = 23\%$ z hmotnosti surovin odpovídá ztráta

$$p^{(-)} \% = \frac{100p}{100 - p} \% = \frac{100 \cdot 23}{100 - 23} \% \doteq 29,9\%$$

z hotových výrobků.

1.9.2. Úrokový počet

Označení:

K_0 – základní částka [jistina],

p – úroková míra,

t_r – počet roků,

t_m – počet měsíců,

t_d – počet dnů,

u – úrok.

Výpočet úroku:

$$u = \frac{K_0 p t_r}{100}, \text{ popř. } u = \frac{K_0 p t_m}{100 \cdot 12}, \text{ popř. } u = \frac{K_0 p t_d}{100 \cdot 360}.$$

Výpočet základní částky:

$$K_0 = \frac{100u}{p t_r}, \text{ popř. } K_0 = \frac{100 \cdot 12u}{p t_m}, \text{ popř. } K_0 = \frac{100 \cdot 360u}{p t_d}.$$

Výpočet úrokové míry:

$$p = \frac{100u}{K_0 t_r}, \text{ popř. } p = \frac{100 \cdot 12u}{K_0 t_m}, \text{ popř. } p = \frac{100 \cdot 360u}{K_0 t_d}.$$

Výpočet doby:

$$t_r = \frac{100u}{K_0 p}, \text{ popř. } t_m = \frac{100 \cdot 12u}{K_0 p}, \text{ popř. } t_d = \frac{100 \cdot 360u}{K_0 p}.$$

Úrokové číslo a úrokový dělitel

Při výpočtu úroku podle počtu dnů platí

$$u = \frac{N}{D},$$

kde

$$N = \frac{K_0 t_d}{100}$$

je tzv. úrokové číslo a

$$D = \frac{360}{p}$$

je tzv. úrokový dělitel.

1.9.3. Složený úrokový počet

Označení:

- K_0 je počáteční [základní] jistina, diskontovaná částka [hotovost],
- K_n – konečná [výsledná] jistina na konci n -tého úrokovacího období,
- n – počet úrokovacích období,
- p – úroková míra,
- $i = p\% = p/100$ – úrokový poměr,

$r = 1 + i$ – úrokový faktor,

$r^n = (1 + i)^n$ – úročitel,

α – splátka [pravidelná splátka, anuita],

$v = \frac{1}{1+i}$ – diskontní faktor,

$v^n = \left(\frac{1}{1+i}\right)^n$ – odúročitel.

Konečná jistina na konci n -tého roku při ročním připisování úroků:

$$K_n = K_0 r^n.$$

Při připisování úroků pololetně je relativní úroková míra $p/2$, takže

$$r = 1 + \frac{p}{200},$$

při připisování úroku čtvrtletně je relativní úroková míra $p/4$, takže

$$r = 1 + \frac{p}{400},$$

atd. Ve vzorci $K_n = K_0 r^n$ značí n po řadě počet pololetí, čtvrtletí atd.

Výpočet počáteční jistiny:

$$K_0 = \frac{K_n}{r^n}.$$

Výpočet počáteční jistiny [hotovosti] se nazývá *diskontování*.

Výpočet úrokové míry: Z úrokového faktoru

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$

dostaneme

$$p = 100(r - 1).$$

Výpočet počtu úrokovacích období:

$$n = \frac{\lg K_n - \lg K_0}{\lg r}.$$

Konečná jistina po n úrokovacích obdobích při pravidelných platbách:

$$K_n = \frac{\alpha(r^n - 1)}{r - 1}$$

pro platby na konci roku \langle při polhůtní [dekurzívni] platbě α \rangle ,

$$K_n = \frac{\alpha(r^n - 1)}{r - 1}$$

pro platby na začátku roku \langle při předlhůtní [anticipativní] platbě α \rangle .

1.9.4. Důchodový počet

Konečná jistina po n úrokovacích obdobích a při předlhůtním vkladu α :

$$K_n = \frac{\alpha(r^n - 1)}{r - 1} = \alpha s_n^i,$$

kde

$$s_n^i = \frac{r(r^n - 1)}{r - 1} = (1 + i) \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

je tzv. *předlhůtní střadatel*.

Konečná jistina po n úrokovacích obdobích a při polhůtním vkladu α :

$$K_n = \frac{\alpha(r^n - 1)}{r - 1} = \alpha s_n^{i'},$$

kde

$$s_n^{i'} = \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

je tzv. *polhůtní střadatel*.

Počáteční jistina při n úrokovacích obdobích a při předlhůtním důchodu α :

$$K_0 = \frac{\alpha(r^n - 1)}{r^{n-1}(r - 1)} = \alpha a_n^i,$$

kde

$$a_n^i = \frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r - 1)} = (1 + i) \frac{1 - v^n}{i}$$

je tzv. *předlhůtní zásobitel*.

Počáteční jistina při n úrokovacích obdobích a při polhůtním důchodu α :

$$K_0 = \frac{\alpha(r^n - 1)}{r^n(r - 1)} = \alpha a_n^{i'},$$

kde

$$a_n^{i'} = \frac{r^n - 1}{r^n(r - 1)} = \frac{1 - v^n}{i}$$

je tzv. *polhůtní zásobitel*.

Výpočet důchodu nebo splátky [anuity] α z konečné, resp. počáteční jistiny při polhůtním umořování:

$$\alpha = \frac{K_n(r - 1)}{r^n - 1},$$

resp.

$$\alpha = \frac{K_0 r^n (r - 1)}{r^n - 1} = K_0 \frac{1}{a_n^{i'}},$$

kde

$$\frac{1}{a_n^{i'}} = \frac{r^n(r - 1)}{r^n - 1} = \frac{i}{1 - v^n}$$

je tzv. *umořovatel*.

Výpočet důchodu nebo splátky [anuity] α z konečné, resp. počáteční jistiny při předlhůtním umořování:

$$\alpha = \frac{K_n(r - 1)}{r(r^n - 1)},$$

resp.

$$\alpha = \frac{K_0 r^{n-1}(r - 1)}{r^n - 1}.$$

Výpočet počtu n úrokovacích období z konečné, resp. počáteční jistiny:

$$n = \frac{\lg [K_n(r - 1) + \alpha] - \lg \alpha}{\lg r} \quad \text{při polhůtní platbě } \alpha,$$

$$n = \frac{\lg [K_n(r - 1) + \alpha r] - \lg (\alpha r)}{\lg r} \quad \text{při předlhůtní platbě } \alpha,$$

resp.

$$n = \frac{\lg \alpha - \lg (\alpha + K_0 - K_0 r)}{\lg r} \quad \text{při polhůtní platbě } \alpha,$$

$$n = \frac{\lg \alpha + \lg r - \lg (K_0 + \alpha r - K_0 r)}{\lg r} \quad \text{při předlhůtní platbě } \alpha.$$

Počáteční jistina trvalého důchodu [renty]:

$$K_0 = \frac{\alpha}{r - 1} \quad (\text{polhůtní důchod}),$$

$$K_0 = \frac{\alpha r}{r - 1} \quad (\text{předlhůtní důchod}).$$

Počáteční jistina při periodických platbách α měnových jednotek:

$$K_0 = \frac{\alpha(r^n - 1)}{r^n(r - 1)} \quad \text{pro platby na konci roku.}$$

$$K_0 = \frac{\alpha(r^n - 1)}{r^{n-1}(r - 1)} \quad \text{pro platby na začátku roku.}$$

Konečná jistina při počáteční jistině K_0 a při pravidelných vkladech, resp výběrech α měnových jednotek:

$$K_n = K_0 r^n + \frac{\alpha(r^n - 1)}{r - 1} \quad \text{při vkladech na konci roku,}$$

$$K_n = K_0 r^n + \frac{\alpha r(r^n - 1)}{r - 1} \quad \text{při vkladech na začátku roku.}$$

resp. (zbytek dluhu po zaplacení n anuit α)

$$K_n = K_0 r^n - \frac{\alpha(r^n - 1)}{r - 1} \quad \text{při výběrech na konci roku,}$$

$$K_n = K_0 r^n - \frac{\alpha r(r^n - 1)}{r - 1} \quad \text{při výběrech na začátku roku.}$$

Umořování dluhu [půjčky, výpůjčky]

Umořovací splátka [anuita], má-li být dluh umořen právě n splátkami:

$$\alpha = \frac{K_0 r^n(r - 1)}{r^n - 1} = K_0 \frac{1}{a_n^u},$$

kde K_0 je dlužná [umořovací] částka.

Umořovací sazba (procentová míra, při které se bude dlužná částka umořovat):

$$u_n = \frac{p}{r^n - 1},$$

kde p je procentová míra zúročení.

Počet n období (doba úmoru), za něž se dlužná částka umoří:

$$n = \frac{\lg(1 + p/u_n)}{\lg r}.$$

Spojité [organické] zúročení základní jistiny K_0 za n roků:

$$K_n = K_0 e^{pn \cdot 100}.$$

Obdobně pro spojité pokles platí

$$K_n = K_0 e^{-pn/100}.$$

Organický růst vyjadřuje funkce

$$w = K_0 e^{\alpha t},$$

kde α je intenzita růstu,

K_0 – počáteční hodnota.

Pro $\alpha < 0$ popisuje růstový zákon tlumené procesy (radioaktivní rozpad, ochlazování, vybíjení kondenzátoru).

1.10. MATICE

1.10.1. Základní pojmy

Definice a označení:

Matici typu (m, n) [matici typu $m \times n$] nazýváme schéma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix},$$

které označujeme $(a_{ik})_m^n$ nebo stručněji (a_{ik}) ($m, n \in \mathbb{N}$), utvořené z mn objektů a_{ik} , které nazýváme prvky matice (čteme: a jedna jedna, a jedna dvě atd.). Prvky $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$, resp. $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi}$ tvoří i -tý řádek, resp. i -tý sloupec matice \langle typu (m, n) \rangle . První index udává tedy vždy pořadové číslo řádku a druhý index pořadové číslo sloupce. Řádky a sloupce označujeme společným názvem řady. Prvky matice bývají zpravidla reálná, popř. komplexní čísla, ale mohou také záviset na nějakém parametru.

Pro matici \mathbf{A} typu (m, n) se také používá těchto označení:

$$\begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{vmatrix},$$

$$(a_{ik})_{(m,n)}, \quad [a_{ik}]_m^n, \quad \|a_{ik}\|_m^n, \quad [a_{ik}], \quad \|a_{ik}\| \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Matice \mathbf{A} s m řádky a n sloupců se při $m \neq n$ nazývá obdélníková matice typu (m, n) a někdy se značí $\mathbf{A}_{(m,n)}$, kdežto při $m = n$ se matice \mathbf{A} nazývá čtvercová matice n -tého řádu [matice řádu n , n -rozměrná matice] a někdy se značí \mathbf{A}_n .

Všechny prvky a_{ii} (tj. prvky $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$) tzv. *hlavní prvky*, resp. prvky $a_{m1}, a_{m-1,2}, \dots, a_{1m}$ čtvercové matice $\mathbf{A} = (a_{ik})$ typu (m, m) tvoří tzv. *hlavní diagonálu* $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm})$, resp. *vedlejší diagonálu* $(a_{m1}, a_{m-1,2}, \dots, a_{1m})$ matice \mathbf{A} . Součet hlavních prvků matice \mathbf{A} typu (m, m) se nazývá *stopa*

$$S(\mathbf{A}) = \sum_{r=1}^m a_{rr}$$

matrice \mathbf{A} .

Matici tvořenou jedním řádkem [tj. matici typu $(1, n)$], resp. jedním sloupcem [tj. matici typu $(m, 1)$] nazýváme *řádkovou maticí* nebo *n -rozměrným vektorem*, resp. *sloupcovou maticí* nebo *m -rozměrným transponovaným vektorem*.

Řádkovým vektorem matice \mathbf{A} typu (m, n) nazýváme každý vektor

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Sloupcovým vektorem matice \mathbf{A} typu (m, n) nazýváme každý vektor

$$\mathbf{a}_k^T = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Matici \mathbf{A} typu (m, n) s řádkovými, popř. sloupcovými vektory zapisujeme takto:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \dots, \mathbf{a}_m^T).$$

Každou matici, jejíž všechny prvky jsou rovny nule a která má m řádků a n sloupců, nazýváme *nulovou maticí typu (m, n)* a označujeme $\mathbf{0}_{(m,n)}$ nebo stručně $\mathbf{0}$. Obdobně každý n -rozměrný vektor, resp. n -rozměrný transponovaný vektor, jehož všechny prvky (tzv. *souřadnice*) jsou rovny nule, nazýváme *n-rozměrným nulovým vektorem*, resp. *n-rozměrným transponovaným nulovým vektorem* a označujeme \mathbf{o}_n , resp. \mathbf{o}_n^T , popř. jen stručně \mathbf{o} , resp. \mathbf{o}^T .

Příklady:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, \dots, 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0, 0, \dots, 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{o} = (0, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{o}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Čtvercová nulová matice n -tého řádu se značí $\mathbf{0}_n$ nebo stručně $\mathbf{0}$.

Diagonální matici řádu n nazýváme čtvercovou matici $\mathbf{D}_n = (d_{ik})$ (stručně \mathbf{D}) řádu n , právě když všechny její hlavní prvky jsou čísla různá od nuly a ostatní prvky jsou rovny nule, tj. $d_{ik} = 0$ pro $\forall i, k \in \mathbb{U}_n : i \neq k$. Platí tedy

$$\mathbf{D}_n = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11}, 0, 0, \dots, 0 \\ 0, d_{22}, 0, \dots, 0 \\ \dots \dots \dots \dots \\ 0, 0, 0, \dots, d_{nn} \end{pmatrix} = (\delta_{ik} d_{ik}),$$

kde

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ 1 & (i = k) \end{cases}$$

je tzv. Kroneckerův symbol [Kroneckerovo delta].

Násobnou [skalárni] matici $\mathbf{S}_n = (a_{ik})$ (stručně \mathbf{S}) řádu n nazýváme diagonální matici, právě když se všechny její hlavní prvky rovnají témuž číslu k ($a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = k$), tj.

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{S} = \begin{pmatrix} k, 0, 0, \dots, 0 \\ 0, k, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, k, \dots, 0 \\ \dots \dots \dots \dots \\ 0, 0, 0, \dots, k \end{pmatrix}.$$

Jednotkovou matici $\mathbf{E}_n = (e_{ik})$ (stručně \mathbf{E}) řádu n nazýváme násobnou matici, právě když všechny její hlavní prvky jsou rovny číslu 1, tj.

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1, 0, 0, \dots, 0 \\ 0, 1, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, 1, \dots, 0 \\ \dots \dots \dots \dots \\ 0, 0, 0, \dots, 1 \end{pmatrix} = (e_{ik}).$$

Horní [pravou], resp. dolní [levou] trojúhelníkovou matici (a_{ik}) nazýváme čtvercovou matici, právě když pod (resp. nad) všemi hlavními prvky a_{ii} jsou samé nuly, takže $a_{ik} = 0$ pro $\forall i, k \in \mathbb{U}_n$ takové, že $i > k$ (resp. $i < k$).

Příklady:

Matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 11, 2, 7 \\ 0, 3, 4 \\ 0, 0, 2 \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3, 0, 0 \\ 7, 4, 0 \\ 9, 1, 6 \end{pmatrix}$$

je horní, resp. dolní trojúhelníkovou maticí.

Hodností $h = h(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} typu (m, n) nazýváme maximální počet lineárně nezávislých řádkových vektorů, který je roven maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupcových vektorů matice \mathbf{A} .

Hodnost matice \mathbf{A} se rovná číslu h , právě když existuje nenulový subdeterminant matice \mathbf{A} h -tého řádu a všechny subdeterminanty řádů větších než h jsou rovny nule nebo neexistují.

Má-li čtvercová matice \mathbf{A} n -tého řádu hodnotu $h = n$ (tj. $\det \mathbf{A} \neq 0$), resp. hodnotu $h < n$ (tj. $\det \mathbf{A} = 0$), nazývá se *regulární*, resp. *singulární*.

Nulitou [defektem, degenerací] $\eta = \text{nul } \mathbf{A}$ matice \mathbf{A} typu (m, n) nazýváme rozdíl $\eta = n - h$ počtu n sloupců matice \mathbf{A} a hodnosti h matice \mathbf{A} .

Pro každou obdélníkovou matici typu (m, n) o hodnosti h platí:

$$h \leq \min \{m, n\}.$$

Jestliže $h = n = \min \{m, n\}$, resp. $h = m = \min \{m, n\}$, pak sloupcové, resp. řádkové vektory matice typu (m, n) jsou lineárně nezávislé.

Hodnost matice \mathbf{A} se nezmění (tj. z matice \mathbf{A} vytvoříme novou matici \mathbf{B} o téže hodnosti), jestliže s řádky, popř. sloupci (tj. s řadami) provedeme některou z těchto *elementárních úprav*:

1. Napišeme řady matice \mathbf{A} v jiném pořadí.
2. Násobíme některou řadu matice \mathbf{A} číslem $k \neq 0$.
3. Přidáme k matici \mathbf{A} řadu, která je lineární kombinací ostatních řad této matice.
4. Vynecháme v matici \mathbf{A} řadu, která je lineární kombinací ostatních řad této matice.
5. Přičteme k některé řadě matice \mathbf{A} lineární kombinaci ostatních řad této matice.

O matici \mathbf{B} , která má stejný počet řádků, popř. sloupců jako matice \mathbf{A} , říkáme, že je *ekvivalentní s maticí \mathbf{A}* , jestliže matice \mathbf{B} vznikla z matice \mathbf{A} některou z elementárních úprav, tj. jestliže matice \mathbf{A} , \mathbf{B} mají stejnou hodnost. Píšeme pak $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Příklad:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1, & 4, & 1, & 3 \\ 2, & -2, & -2, & 0 \\ 0, & 2, & 0, & 2 \end{pmatrix}.$$

Přičteme-li k prvnímu sloupci třetí sloupec, dostaneme

$$\begin{pmatrix} 0, & 4, & 1, & 3 \\ 0, & -2, & -2, & 0 \\ 0, & 2, & 0, & 2 \end{pmatrix}.$$

Všechny súbdeterminanty třetího řádu jsou rovny nule, neboť tři z nich mají v prvním sloupci jen nuly a čtvrtý súbdeterminant má po odečtení druhého sloupce od prvního sloupce dva sloupce stejné:

$$\begin{vmatrix} 4, & 1, & 3 \\ -2, & -2, & 0 \\ 2, & 0, & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3, & 1, & 3 \\ 0, & -2, & 0 \\ 2, & 0, & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Protože jeden ze súbdeterminantů druhého řádu, např.

$$\begin{vmatrix} -1, & 4 \\ 2, & -2 \end{vmatrix},$$

je různý od nuly, má vyšetřovaná matice hodnost $h = 2$.

K určení hodnosti matice lze použít Gaussovy eliminační metody (viz např. [194]).

1.10.2. Operace s maticemi

Rovnost matic

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}, \text{ právě když } a_{ik} = b_{ik} \text{ pro } \forall i \in U_m \wedge \forall k \in U_n,$$

tj. právě když matice \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou téhož typu a každý prvek a_{ik} matice \mathbf{A} se rovná stejnolehlému prvku b_{ik} matice \mathbf{B} .

Součet dvou matic

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ik} + b_{ik}) = (c_{ik}) = \mathbf{C} \quad \text{pro } \forall i \in U_m \wedge \forall k \in U_n,$$

tj. právě když matice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} jsou téhož typu a každý prvek c_{ik} se rovná součtu stejnolehlých prvků a_{ik} , b_{ik} matic \mathbf{A} , \mathbf{B} .

Komutativní zákon pro sčítání matic: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

Asociativní zákon pro sčítání matic: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$.

Násobení matice reálným, popř. komplexním číslem (skalárem) α

$$\alpha \mathbf{A} = (\alpha a_{ik}) = \mathbf{A}\alpha.$$

Distributivní zákon pro součin součtu skalárů a matic:

$$(\alpha + \beta) \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{A}.$$

Distributivní zákon pro součin skaláru a součtu matic:

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B}.$$

Asociativní zákon pro součin skalárů a matic:

$$\alpha(\beta \mathbf{A}) = (\alpha\beta) \mathbf{A} = \alpha\beta \mathbf{A}.$$

Násobení řádkového a sloupcového vektoru (skalární součin)

$$\mathbf{a}\mathbf{b}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Násobení matic

Součinem matic $\mathbf{A} = (a_{ik})$ typu (m, n) a matici $\mathbf{B} = (b_{ik})$ typu (n, p) (v tomto pořadí) nazýváme matici \mathbf{C} typu (m, p) , kterou označujeme \mathbf{AB} nebo $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (tečku používáme jen výjimečně) a pro jejíž prvky platí:

$$c_{ik} = \mathbf{a}_i \mathbf{b}_k^T = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \quad \text{pro } \forall i \in U_m \wedge \forall k \in U_p,$$

takže

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = (a_i b_k^T) = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) = (c_{ik}).$$

Prvek c_{ik} matice $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ tedy dostaneme jako skalární součin řádkového vektoru \mathbf{a}_i (i -tého řádku) a sloupcového vektoru \mathbf{b}_k^T (k -tého sloupce). Při $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ říkáme, že matici \mathbf{A} násobíme maticí \mathbf{B} zprava, popř. že matici \mathbf{B} násobíme maticí \mathbf{A} zleva.

Podmínka pro součin \mathbf{AB} matic \mathbf{A} a \mathbf{B} : Počet sloupců matice \mathbf{A} se rovná počtu řádků matice \mathbf{B} .

Příklad:

$$\mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (b_1, b_2, \dots, b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1, & a_1 b_2, & \dots, & a_1 b_n \\ a_2 b_1, & a_2 b_2, & \dots, & a_2 b_n \\ \dots \\ a_m b_1, & a_m b_2, & \dots, & a_m b_n \end{pmatrix},$$

Formální schéma pro násobení matic

$$n \quad p \quad p \\ m \boxed{\mathbf{A}} \cdot n \boxed{\mathbf{B}} = m \boxed{\mathbf{C} = \mathbf{AB}}$$

nebo ve tvaru součinu zlomků

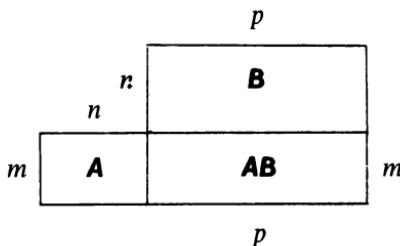
$$\frac{m}{n} \frac{n}{p} = \frac{m}{p},$$

tj. při násobení matice \mathbf{A} typu (m, n) maticí \mathbf{B} typu (n, p) zprava dostaneme matici \mathbf{C} typu (m, p) .

Příklad:

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 1, & 3, & 2 \\ 2, & 4, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2, & 3 \\ 4, & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4, & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 4, & 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15, & 11 \\ 14, & 13 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Falkovo multiplikační schéma



Prvek c_{ik} matice $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ je v průsečíku i -tého řádku matice \mathbf{A} a k -tého sloupce matice \mathbf{B} a je jejich skalárním součinem.

Příklad:

			2
		1, 0 2, 3 4, 1	
	3		
	3		
2	1, 3, 2 2, 4, 1	15, 11 14, 13	2
			2

Zkoušku správnosti výpočtu podle Falkova schématu lze provést pomocí tzv. řádkové zkoušky:

	B	b
A	AB = C	c

Součty řádků matice **B** připojíme jako sloupcový vektor **b** a součty řádků matice **C** připojíme jako sloupcový vektor **c**. Pak platí $\mathbf{Ab} = \mathbf{c}$.

Příklad:

	1, 0	1
	2, 3	5
	4, 1	5
1, 3, 2	15, 11	26
2, 4, 1	14, 13	27

← $1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2$

Obdobně lze provést tzv. sloupcovou zkoušku, při níž sečtením sloupců matice **A** dostaneme vektor **a**, kdežto sečtením sloupců matice **AB** dostaneme vektor **d**, přičemž $\mathbf{aB} = \mathbf{d}$:

	B
A	AB = C
a	d

Příklad:

	1, 0	
	2, 3	
	4, 1	
1, 3, 2	15, 11	
2, 4, 1	14, 13	
3, 7, 3	29, 24	

↑ $1 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 4 \cdot 3$

Obě zkoušky lze kombinovat.

Komutativní zákon pro součin matic obecně neplatí:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA},$$

tj. při násobení matice \mathbf{B} maticí \mathbf{A} zleva dostaneme obecně jiný výsledek než při jejím násobení maticí \mathbf{A} zprava.

Jestliže při čtvercových maticích platí $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, pak se matice \mathbf{A} , \mathbf{B} nazývají *zaměnitelné [komutující]*.

Násobení jednotkovou maticí \mathbf{E} , popř. nulovou maticí $\mathbf{0}$

Pro čtvercové matice \mathbf{A} , \mathbf{E} a $\mathbf{0}$ téhož rádu platí

$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A},$$

$$\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{0}.$$

Matice \mathbf{E} a $\mathbf{0}$ mají v maticovém počtu týž význam jako 1 a 0 při násobení na množině \mathbb{R} .

Poznámka:

Rovnost $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ nemusí nutně znamenat, že $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ nebo $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Jestliže $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, přičemž $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ a zároveň $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, pak matice \mathbf{A} , \mathbf{B} jsou singulární. Matice \mathbf{A} , \mathbf{B} se v tomto případě nazývají *dělitelé nuly*.

Násobení diagonální maticí \mathbf{D} ($d_{ii} = d_i$)

Násobení diagonální maticí \mathbf{D} n -tého řádu zprava:

$$\mathbf{AD} = (a_{ik}d_k) = \begin{pmatrix} a_{11}d_1, & a_{12}d_2, & \dots, & a_{1n}d_n \\ a_{21}d_1, & a_{22}d_2, & \dots, & a_{2n}d_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}d_1, & a_{m2}d_2, & \dots, & a_{mn}d_n \end{pmatrix}.$$

Násobení diagonální maticí \mathbf{D} m -tého řádu zleva:

$$\mathbf{DA} = (a_{ik}d_i) = \begin{pmatrix} a_{11}d_1, & a_{12}d_1, & \dots, & a_{1n}d_1 \\ a_{21}d_2, & a_{22}d_2, & \dots, & a_{2n}d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}d_m, & a_{m2}d_m, & \dots, & a_{mn}d_m \end{pmatrix}.$$

Násobení tří matic

Asociativní zákon pro součin matic:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{ABC}.$$

Předpoklady: Matice \mathbf{A} je typu (m, n) , matice \mathbf{B} typu (n, p) a matice \mathbf{C} typu (p, q) .

Pravý distributivní zákon vzhledem k součtu matic:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}.$$

Levý distributivní zákon vzhledem k součtu matic:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}.$$

Mocniny matic

Pro čtvercovou matici \mathbf{A} pro n činitelů definujeme:

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{AA} \dots \mathbf{A} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\mathbf{A}^{-n} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \dots \mathbf{A}^{-1}}_{n \text{ činitelů}} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E};$$

přitom platí

$$\mathbf{A}^m \mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{m+n} \quad (n, m \in \mathbb{Z}).$$

Zámenná matice \mathbf{B}

Zámennou maticí nazýváme čtvercovou matici \mathbf{B} , která v každém řádku a v každém sloupci má jen jeden prvek 1, ale jinak obsahuje samé nuly. Při násobení matice \mathbf{A} maticí \mathbf{B} zleva způsobuje prvek 1 v r -tém řádku a s -tém sloupci matice \mathbf{B} , že r -tý řádek matice \mathbf{BA} a s -tý řádek matice \mathbf{A} jsou stejné.

Příklad:

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 3, & 0, & 2 \\ 2, & 4, & 7, & 3 \\ 3, & 0, & 4, & 1 \\ 5, & 2, & 1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 4, & 7, & 3 \\ 3, & 0, & 4, & 1 \\ 1, & 3, & 0, & 2 \\ 5, & 2, & 1, & 1 \end{pmatrix} \leftarrow r \quad \leftarrow s$$

Při násobení matice \mathbf{A} maticí \mathbf{B} zprava způsobuje prvek 1 v r -tém řádku a s -tém sloupci matice \mathbf{B} , že s -tý sloupec matice \mathbf{AB} a r -tý sloupec matice \mathbf{A} jsou stejné.

Příklad:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 4, & 0 \\ 2, & 4, & 6, & 1 \\ 1, & 3, & 0, & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, & 4, & 0, & 1 \\ 4, & 6, & 1, & 2 \\ 3, & 0, & 3, & 1 \end{pmatrix}.$$

Dosadíme-li za prvek 1 v záměnné matici číslo p_{ik} , znásobíme tím ještě zaměněný řádek, popř. sloupec číslem p_{ik} .

Determinant součinu čtvercových matic

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.$$

Inverzní matice

Jestliže k matici \mathbf{A} typu (m, n) existuje taková matici \mathbf{B} typu (n, m) , resp. \mathbf{C} typu (n, m) , že platí $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$, resp. $\mathbf{CA} = \mathbf{E}$, kde \mathbf{E} je jednotková matici m -tého, resp. n -tého řádu, pak matici \mathbf{B} , resp. \mathbf{C} nazýváme *inverzní maticí zprava*, resp. *zleva k matici \mathbf{A}* .

Jestliže matice \mathbf{A} je čtvercovou maticí řádu n , pak inverzní matice zprava k matici \mathbf{A} se rovná inverzní matici zleva k matici \mathbf{A} . Tuto matici nazýváme *inverzní maticí k matici \mathbf{A}* a označujeme \mathbf{A}^{-1} . Platí

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E},$$

kde \mathbf{E} je jednotková matici řádu n . Matice \mathbf{A} a \mathbf{A}^{-1} jsou tedy zaměnitelné.

K čtvercové matici \mathbf{A} řádu n existuje jediná inverzní matici \mathbf{A}^{-1} řádu n , právě když matici \mathbf{A} je regulární, tj. právě když hodnost $h(\mathbf{A}) = n$. Jestliže

$$\mathbf{A} = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{pmatrix} \wedge h(\mathbf{A}) = n,$$

pak

$$\mathbf{B} = (b_{ik}) = \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{A} \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{21}, & \dots, & A_{n1} \\ A_{12}, & A_{22}, & \dots, & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n}, & A_{2n}, & \dots, & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{A} \text{adj } \mathbf{A} = \frac{1}{A} (A_{ki}),$$

kde A_{ki} ($k, i = 1, 2, \dots, n$) je algebraický doplněk prvku a_{ki} matici \mathbf{A} (viz str. 199), $A = \det \mathbf{A} \neq 0$ je determinant regulární matici \mathbf{A} a $\text{adj } \mathbf{A}$ je tzv. *adjungovaná matici* (transponovaná matici algebraických doplnků) k matici \mathbf{A} , kterou dostaneme tak, že v transponované matici \mathbf{A}^T k původní matici $\mathbf{A} = (a_{ik})$ každý prvek a_{ki} nahradíme příslušným algebraickým doplnkem.

Prvky $b_{ik} = A_{ki}/A$ (všimněte si indexů) inverzní matici $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ k matici \mathbf{A} se nazývají *redukované algebraické doplnky*.

Inverzní matici \mathbf{A}^{-1} k regulární matici \mathbf{A} je regulární maticí.

K singulární čtvercové matici řádu n (tj. $h < n$) inverzní matice neexistuje.

K matici \mathbf{A} typu (m, n) a hodnosti h existuje inverzní matice zprava nebo zleva, právě když $h = \min\{m, n\}$, přičemž

- pro $m < n$ existuje nekonečně mnoho inverzních matic zprava a neexistuje žádná inverzní matice zleva;

- pro $m > n$ existuje nekonečně mnoho inverzních matic zleva a neexistuje žádná inverzní matice zprava;

- pro $m = n$ existuje právě jedna inverzní matice k matici \mathbf{A} .

Ke každé inverzní matici \mathbf{C} zprava, resp. zleva k matici \mathbf{A} typu (m, n) ($m \neq n$) existuje taková matice \mathbf{B} typu (n, m) , že čtvercová matice \mathbf{AB} , resp. \mathbf{BA} je regulární a $\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{AB})^{-1}$, resp. $\mathbf{C} = (\mathbf{BA})^{-1}\mathbf{B}$. Této vlastnosti se používá ke konstrukci inverzní matice zprava, resp. zleva.

Pro regulární matice \mathbf{A}, \mathbf{B} platí

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A},$$

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1},$$

$$(\alpha \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{A}^{-1} \quad (\alpha \neq 0),$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1},$$

$$(\mathbf{AE})^{-1} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A}^{-1}.$$

K výpočtu inverzní matice se používá tzv. *Gaussovy metody inverze matic* [*Gaussovy metody konstrukce inverzní matice*] (viz např. [194]), která je založena na tom, že inverzní matici \mathbf{A}^{-1} k regulární čtvercové matici \mathbf{A} lze určit pomocí jen řádkových (popř. sloupcových) elementárních úprav matice \mathbf{A} , přičemž nejprve dostaneme jednotkovou matici a pak stejnými elementárními úpravami v témež pořadí přejde tato jednotková matice v inverzní matici \mathbf{A}^{-1} . Předností Gaussovy metody je malý počet algebraických operací při větším řádu matice \mathbf{A} vzhledem k počtu těchto operací při výpočtu inverzní matice pomocí algebraických doplňků prvků matice \mathbf{A} .

Příklad:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 2, & -3, & 1 \\ 1, & 2, & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 2, & -3, & 1 \\ 1, & 2, & 2 \end{vmatrix} = 13;$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -3, & 1 \\ 2, & 2 \end{vmatrix} = -8,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2, & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0, & 3 \\ 2, & 2 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1, & 3 \\ 1, & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0, & 3 \\ -3, & 1 \end{vmatrix} = 9,$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1, & 3 \\ 2, & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ 2, & -3 \end{vmatrix} = -3;$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -8, & 6, & 9 \\ -3, & -1, & 5 \\ 7, & -2, & -3 \end{pmatrix}.$$

Limita matice $\mathbf{A}(t)$

Je-li $\mathbf{A}(t)$ matice, jejíž prvky jsou funkce $a_{ik}(t)$, pak matici, jež každý prvek je limitou prvku $a_{ik}(t)$ pro $t \rightarrow t_0$, nazýváme *limitou matice $\mathbf{A}(t)$ v bodě t_0* , tj.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t) = (\lim_{t \rightarrow t_0} a_{ik}(t)).$$

Derivace matice $\mathbf{A}(t)$

Derivací matice $\mathbf{A}(t) = (a_{ik}(t))$ podle proměnné t , kde a_{ik} jsou diferencovatelné funkce, nazýváme matici

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \left(\frac{da_{ik}(t)}{dt} \right).$$

Jsou-li $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ matice téhož typu a α , β skaláry, platí

$$\frac{d}{dt} (\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) = \alpha \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \beta \frac{d\mathbf{B}}{dt}.$$

Jestliže $\mathbf{A}(t)$ je matice typu (m, n) a $\mathbf{B}(t)$ matice typu (n, p) , pak pro derivaci maticy \mathbf{AB} platí

$$\frac{d}{dt} \mathbf{AB} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{B} + \mathbf{A} \frac{d\mathbf{B}}{dt}.$$

Integrál matice

Integrálem matice $\mathbf{A}(t) = (a_{ik}(t))$, kde a_{ik} jsou integrovatelné funkce, nazýváme matici

$$\int_a^b \mathbf{A}(t) dt = \left(\int_a^b a_{ik}(t) dt \right).$$

1.10.3. Některé typy matic

Transponovaná matice \mathbf{A}^T

Transponovanou maticí $\mathbf{A}^T = (a_{ik}^T)$ typu (m, n) k matici $\mathbf{A} = (a_{ik})$ typu (n, m) nazýváme matici, kterou z matice \mathbf{A} dostaneme vzájemnou záměnou (transpozicí) řádků za sloupce. Lze také říci, že matice \mathbf{A}^T vznikne překlopením matice \mathbf{A} kolem její hlavní diagonály. Z řádkového vektoru se tedy při transpozici stane sloupcový vektor, tj.

$$\mathbf{A} = (a_{ik}) \wedge \mathbf{A}^T = (a_{ik}^T) \Rightarrow a_{ik}^T = a_{ki}.$$

Platí

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^T)^T &= \mathbf{A}, \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T, \\ (\alpha \mathbf{A})^T &= \alpha \mathbf{A}^T \quad (\alpha \text{ je skalár}), \\ (\mathbf{AB})^T &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T; \end{aligned}$$

pro regulární matici \mathbf{A} platí

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^T)^{-1} &= (\mathbf{A}^{-1})^T \quad (\text{kontragredientní matice k matici } \mathbf{A}), \\ \mathbf{A}^{-1} &= (\mathbf{A}^{-1})^T \quad \text{pro } \mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \\ \det \mathbf{A}^T &= \det \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Souměrná [symetrická] matice

Čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{ik})$ řádu n , pro kterou platí $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, tj. $a_{ik} = a_{ik}^T = a_{ki}$ pro $\forall i, k \in \mathbb{U}_n$, se nazývá souměrná [symetrická].

Příklad:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 5, & 7 \\ 5, & 2, & -6 \\ 7, & -6, & 8 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T.$$

Skoro polosouměrná matice

Čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{ik})$ řádu n , pro jejíž všechny prvky platí:

$$a_{ik} = -a_{ki} \quad \text{pro } i \neq k \wedge \exists i \in \mathbb{U}_n \quad (a_{ii} \neq 0),$$

se nazývá skoro polosouměrná matice.

Polosouměrná matice

Čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{ik})$ řádu n , pro kterou platí

$$a_{ik} = -a_{ki} \quad \text{pro } i \neq k \wedge \exists i \in \mathbb{U}_n \quad (a_{ii} \neq 0),$$

se nazývá polosouměrná [antisymetrická, polosymetrická, alternující]. Všechny hlavní prvky polosouměrné matice musí být zřejmě rovny nule.

Příklad:

Matice

$$\begin{pmatrix} 1, & 5, & -7 \\ -5, & 0, & 3 \\ 7, & -3, & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} 0, & 5, & -7 \\ -5, & 0, & 3 \\ 7, & -3, & 0 \end{pmatrix}$$

je skoro polosouměrnou, resp. polosouměrnou maticí.

Komplexně sdružená matice \mathbf{A}^*

Komplexně sdruženou [komplexně konjugovanou] maticí $\mathbf{A}^* = (a_{ik}^*)$ typu (m, n) ke komplexní matici $\mathbf{A} = (a_{ik})$ typu (m, n) nazýváme matici, která vznikne z matice \mathbf{A} , zaměníme-li v matici \mathbf{A} každý prvek a_{ik} komplexně sdruženým číslem \bar{a}_{ik} , tj.

$$\mathbf{A} = (a_{ik} \wedge \mathbf{A}^*) = (a_{ik}^*) \Rightarrow a_{ik}^* = \bar{a}_{ik} \quad \text{pro } \forall i \in \mathbb{U}_n \wedge \forall k \in \mathbb{U}_n.$$

Příklad:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + 3i, & 2 - 5i \\ 5, & 7 + 2i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 - 3i, & 2 + 5i \\ 5, & 7 - 2i \end{pmatrix}.$$

Platí

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}^*)^* &= \mathbf{A}, \\
 (\mathbf{A} + \mathbf{B})^* &= \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*, \\
 (\alpha \mathbf{A})^* &= \bar{\alpha} \mathbf{A}^* \quad (\alpha \text{ je komplexní číslo}), \\
 (\mathbf{AB})^* &= \mathbf{B}^* \mathbf{A}^*, \\
 (\mathbf{A}^*)^{-1} &= (\mathbf{A}^{-1})^* \quad (\det \mathbf{A} \neq 0), \\
 \mathbf{A}^* &= (\mathbf{A}^{-1})^* \quad (\det \mathbf{A} \neq 0, \mathbf{A} = \mathbf{A}^*), \\
 (\mathbf{A}^*)^T &= (\mathbf{A}^T)^*.
 \end{aligned}$$

Hermitovsky transponovaná matice

Hermitovsky transponovanou maticí typu (m, n) ke komplexní matici \mathbf{A} nazýváme matici $(\mathbf{A}^T)^$ typu (n, m) .*

Hermitovsky souměrná matice

Komplexní čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{ik})$ řádu n , pro kterou platí

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}^T)^*, \text{ takže } a_{ik} = \bar{a}_{ki} \quad \text{pro } \forall i, k \in \mathbb{U}_n,$$

se nazývá *hermitovsky souměrná* [*hermitovská, hermitovsky symetrická*] matic. Všechny hlavní prvky hermitovsky souměrné matice musí zřejmě být reálná čísla, kdežto prvky souměrně ležící podle hlavní diagonály jsou komplexně sdružená čísla.

Příklad:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}^T)^* = \begin{pmatrix} 2, & 1 - 2i, & 3 + 5i \\ 1 + 2i, & 3, & 2 - i \\ 3 - 5i, & 2 + i, & 5 \end{pmatrix}.$$

Hermitovsky polosouměrná matice

Komplexní čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{ik})$ řádu n , pro kterou platí

$$\mathbf{A} = -(\mathbf{A}^T)^*, \text{ takže } a_{ik} = -\bar{a}_{ki} \quad \text{pro } \forall i, k \in \mathbb{U}_n,$$

se nazývá *hermitovsky polosouměrná* [*antihermitovská, polohermitovská, hermitovsky polosymetrická*]. Všechny hlavní prvky hermitovsky polosouměrné matice musí zřejmě být rovny nule.

Příklad:

$$\mathbf{A} = -(\mathbf{A}^T)^* = \begin{pmatrix} 0, & 1 - 2i, & 3 + 5i \\ -1 - 2i, & 0, & 2 - i \\ -3 + 5i, & -2 - i, & 0 \end{pmatrix}.$$

Reálná hermitovská, resp. hermitovsky polosouměrná matice je tedy souměrnou, resp. polosouměrnou maticí.

1.10.4. Použití maticového počtu

Soustavou m lineárních algebraických rovnic s n neznámými nazýváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

nebo stručně

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = b_i \quad \text{pro } \forall i \in U_m,$$

kde a_{ik}, b_i jsou daná komplexní čísla. Soustava lineárních algebraických rovnic se nazývá *homogenní*, resp. *nehomogenní*, právě když $b_i = 0$ pro $\forall i \in U_m$, resp. $b_i \neq 0$ pro aspoň jeden index $i \in U_m$. Matici

$$\mathbf{A} = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix} \text{ typu } (m, n),$$

utvořenou z koeficientů u neznámých na levých stranách všech rovnic soustavy, nazýváme *maticí soustavy* a matici

$$(a_{ik} \mid b_i) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}, a_{22}, \dots, a_{1n}, & | & b_1 \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, & | & b_2 \\ \dots & | & \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}, & | & b_m \end{array} \right) \text{ typu } (m, n+1),$$

vzniklou připojením absolutních členů k matici soustavy, nazýváme *rozšířenou maticí soustavy*. Označíme-li

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

tzv. vektor neznámých, resp. vektor pravých stran, můžeme soustavu lineárních algebraických rovnic vyjádřit jedinou maticovou rovnici

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Hodností soustavy lineárních algebraických rovnic je hodnost matice soustavy. Řešením soustavy lineárních algebraických rovnic nazýváme takovou n -tici komplexních čísel, že po jejich dosazení za neznámé dostaneme ze všech rovnic rovnosti [identity]. Soustavu lineárních algebraických rovnic nazýváme řešitelnou, právě když existuje aspoň jedno její řešení. Řešitelná soustava lineárních rovnic se nazývá určená, resp. neurčená, právě když existuje právě jedno její řešení, resp. má aspoň dvě řešení. Dvě soustavy lineárních algebraických rovnic o témže počtu neznámých se nazývají ekvivalentní, právě když mají touž množinu všech řešení neboli týž obor pravdivosti.

Podmínky řešitelnosti soustavy lineárních rovnic

Nehomogenní soustava m lineárních algebraických rovnic o n neznámých je řešitelná, právě když matice soustavy a rozšířená matice soustavy mají stejnou hodnost h .

Při $h = n$ existuje právě jedno řešení soustavy.

Při $h < n$ existuje nekonečně mnoho řešení soustavy.

Příklad:

$$3x + 2y + 5z = 10,$$

$$6x + 4y + 10z = 30,$$

$$12x + 8y + 20z = 40.$$

Matice soustavy

$$\begin{pmatrix} 3, & 2, & 5 \\ 6, & 4, & 10 \\ 12, & 8, & 20 \end{pmatrix}$$

má hodnost $h = 1$ (viz str. 183). Rozšířená matice soustavy

$$\begin{pmatrix} 3, & 2, & 5, & 10 \\ 6, & 4, & 10, & 30 \\ 12, & 8, & 20, & 40 \end{pmatrix}$$

má hodnost $h > 1$, neboť např.

$$\left| \begin{array}{cc} 5, & 10 \\ 10, & 30 \end{array} \right| \neq 0.$$

Vyšetřovaná soustava nemá žádné řešení (rovnice si vzájemně odporují).

Homogenní soustava m lineárních algebraických rovnic o n neznámých je vždy řešitelná a má netriviální řešení (triviální řešení představuje nulový vektor), právě když hodnota matice soustavy je menší než n .

1.11. DETERMINANTY

1.11.1. Základní pojmy

Definice a označení

Determinantem matici A n -tého řádu [stručně determinantem n -tého řádu, n -řádovým determinantem] nazýváme číslo.

$$\sum_P z(P) a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n},$$

kde

$$P = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ k_1, & k_2, & \dots, & k_n \end{pmatrix}$$

je permutace množiny $U_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $z(P)$ je znaménko příslušné permutace a kde sčítáme přes všechny $n!$ součinů, přičemž $n!$ je počet všech permutací množiny U_n (viz článek 1.7.2).

Determinant matici A n -tého řádu označujeme

$$\begin{aligned} A &= \det A = \det(a_{ik}) = |\mathbf{A}| = A = |a_{ik}|_n = \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ačkoli determinant A n -tého řádu je číslo přiřazené příslušné čtvercové matici, zavádějí se často tyto názvy v souvislosti se schematickým zápisem determinantu:

Čísla a_{ik} (v počtu n^2) se nazývají *prvky determinantu A* (čteme: a jedna jedna, a jedna dvě, atd.).

Prvky $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$, resp. $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}$ tvoří tzv. *i-tý řádek*, resp. *i-tý sloupec determinantu A*.

První, resp. druhý index prvku a_{ik} udává tedy pořadové číslo řádku, resp. sloupce determinantu A .

Sloupcům a řádkům říkáme souhrnně *řady determinantu A*.

Všechny prvky a_{ii} , $i = 1, 2, \dots, n$ (tj. $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$), resp. všechny prvky $a_{i,n-i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n$ (tj. $a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \dots, a_{nn}$) tvoří tzv. *hlavní*, resp. *vedlejší diagonálu [úhlopříčku]* determinantu A .

Sčítance $z(P) a_{1k}, a_{2k} \dots a_{nk}$ se nazývají *členy determinantu A*. Člen $a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ (tj. součin prvků hlavní diagonály) se nazývá *hlavní člen determinantu A*.

Subdeterminantem [minorem] k-tého řádu matice A typu (m, n) nazýváme determinant takové matice, která vznikne z matice A po vypuštění tolika řádků a sloupců, aby z ní zbyla čtvercová matice k-tého řádu.

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 2, & 3, & 4 \\ 2, & 3, & 6, & 5, & 2 \\ 4, & 0, & 1, & 3, & 1 \\ 1, & 1, & 2, & 4, & 2 \end{pmatrix}.$$

Subdeterminantem 4. řádu matice A je

$$\left| \begin{array}{cccc} 1, & 2, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 6, & 5 \\ 4, & 0, & 1, & 3 \\ 1, & 1, & 2, & 4 \end{array} \right| \text{ nebo } \left| \begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 2, & 3, & 5, & 2 \\ 4, & 0, & 3, & 1 \\ 1, & 1, & 4, & 2 \end{array} \right| \text{ atd.}$$

Subdeterminantem 3. řádu matice A je

$$\left| \begin{array}{ccc} 1, & 2, & 2 \\ 2, & 3, & 6 \\ 4, & 0, & 1 \end{array} \right| \text{ nebo } \left| \begin{array}{ccc} 2, & 6, & 5 \\ 4, & 1, & 3 \\ 1, & 2, & 4 \end{array} \right| \text{ nebo } \left| \begin{array}{ccc} 2, & 3, & 4 \\ 0, & 3, & 1 \\ 1, & 4, & 2 \end{array} \right| \text{ atd.}$$

Subdeterminantem 2. řádu matice A je

$$\left| \begin{array}{cc} 1, & 2 \\ 2, & 3 \end{array} \right| \text{ nebo } \left| \begin{array}{cc} 3, & 5 \\ 0, & 3 \end{array} \right| \text{ nebo } \left| \begin{array}{cc} 2, & 6 \\ 1, & 2 \end{array} \right| \text{ atd.}$$

Subdeterminantem [minorem] M_{ik} [přesněji subdeterminantem řádu $n - 1$, minorem řádu $n - 1$, prvním minorem] příslušným prvkem a_{ik} matice A řádu n nazýváme determinant matice, kterou dostaneme z matice A , vynecháme-li v ní i-tý řádek a k-tý sloupec.

⟨Algebraickým⟩ doplňkem A_{ik} prvku a_{ik} matice A řádu n nazýváme součin subdeterminantu M_{ik} a čísla $(-1)^{i+k}$, tj.

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}.$$

Rozvoj determinantu podle jedné řady

Determinant A matice \mathbf{A} řádu n se rovná součtu součinů, které dostaneme, vynásobíme-li každý prvek některé řady jeho algebraickým doplňkem. Tomuto postupu při výpočtu determinantu A říkáme *rozvoj determinantu A podle prvků jedné řady*.

Rozvoj determinantu A podle prvků i -tého řádku:

$$A = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad \text{pro } \forall i \in \mathbb{U}_n.$$

Rozvoj determinantu A podle prvků k -tého sloupce:

$$A = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad \text{pro } \forall k \in \mathbb{U}_n.$$

Příklad 1:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \\ = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23} \\ a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21}, & a_{22} \\ a_{31}, & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Příklad 2:

$$\begin{vmatrix} 3, & 7, & 4, & 6 \\ 10, & 5, & 9, & 6 \\ 1, & 2, & 7, & 8 \\ 5, & 4, & 2, & 9 \end{vmatrix} = 3A_{11} + 7A_{12} + 4A_{13} + 6A_{14} = \\ = 3 \begin{vmatrix} 5, & 9, & 6 \\ 2, & 7, & 8 \\ 4, & 2, & 9 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 10, & 9, & 6 \\ 1, & 7, & 8 \\ 5, & 2, & 9 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 10, & 5, & 6 \\ 1, & 2, & 8 \\ 5, & 4, & 9 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 10, & 5, & 9 \\ 1, & 2, & 7 \\ 5, & 4, & 2 \end{vmatrix}$$

(rozvoj determinantu podle prvků prvního řádku).

Výpočet determinantu druhého řádu

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Determinant A se rovná rozdílu součinu prvků hlavní diagonály a součinu prvků vedlejší diagonály.

Příklad:

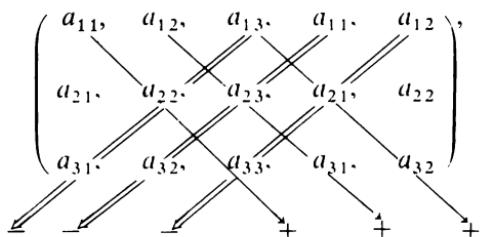
$$\begin{vmatrix} 2, & 4 \\ 6, & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 4 \cdot 6 = -10.$$

Sarrusovo pravidlo pro výpočet determinantů třetího řádu

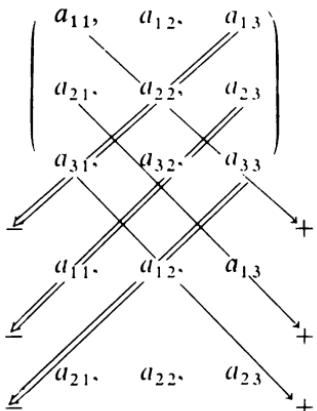
Postup při výpočtu determinantu třetího řádu

$$A = \det(a_{ik}) = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

je možno si zapamatovat tak, že k matici A daného determinantu připíšeme první dva sloupce, resp. první dva řádky (tj. první dvě řady) matice A jako čtvrtý a pátý sloupec, resp. čtvrtý a pátý řádek podle schématu



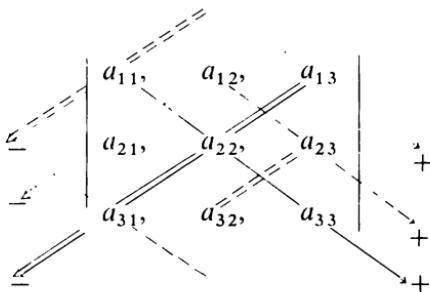
resp.



a od tří součinů prvků na jednoduchých přímých čarách odečteme tři součiny prvků na dvojitých přímých čarách (znaménka ve schématech naznačují, že součiny prvků na dvojitých čarách je nutno ještě vynásobit číslem -1).

Při dostatečné praxi není třeba vypisovat celou rozšířenou matici a k vý-

počtu determinantu podle Sarrusova pravidla postačí toto schéma determinantu:



1.11.2. Vlastnosti determinantu čtvercové matice

1. Determinant matice \mathbf{A} se rovná determinantu transponované matice \mathbf{A}^T , tj. determinant A se nezmění, zaměníme-li v matici \mathbf{A} řádky za sloupce při zachování jejich pořadí neboli překlopíme-li matici \mathbf{A} kolem hlavní diagonály.

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 2, & 7, & 13 \\ 4, & 6, & 9 \\ 16, & 3, & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & 4, & 16 \\ 7, & 6, & 3 \\ 13, & 9, & 8 \end{vmatrix}.$$

2. Jestliže v matici \mathbf{A} vzájemně zaměníme dvě rovnoběžné řady, změní determinant A znaménko.

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 2, & 7, & 13 \\ 4, & 6, & 9 \\ 16, & 3, & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4, & 6, & 9 \\ 2, & 7, & 13 \\ 16, & 3, & 8 \end{vmatrix}.$$

3. Společného nenulového činitele k všech prvků jedné řady matice \mathbf{A} lze vytknout před determinant A/k .

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 2, & 7, & 13 \\ 4, & 6, & 9 \\ 16, & 3, & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1, & 7, & 13 \\ 2, & 6, & 9 \\ 8, & 3, & 8 \end{vmatrix}.$$

Obráceně platí: Jestliže všechny prvky jedné libovolné řady matice \mathbf{A} násobíme libovolným číslem k , dostaneme matici, jejíž determinant se rovná kA .

Příklad:

$$5 \begin{vmatrix} 2, & 7, & 13 \\ 4, & 6, & 9 \\ 16, & 3, & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & 35, & 13 \\ 4, & 30, & 9 \\ 16, & 15, & 8 \end{vmatrix}.$$

4. Determinant A matice \mathbf{A} se rovná nule, právě když
- všechny prvky aspoň jedné řady jsou rovny nule;
 - jedna řada matice \mathbf{A} je lineární kombinací řad s ní rovnoběžných.

Příklad 1:

$$\begin{aligned} & \rightarrow \begin{vmatrix} 2, & 7, & 13 \\ 4, & 6, & 9 \\ 8, & 12, & 18 \end{vmatrix} = 0. \\ & \rightarrow \end{aligned}$$

Příklad 2:

$$\begin{aligned} & \rightarrow \begin{vmatrix} 2, & 7, & 13 \\ 4, & 6, & 9 \\ 16, & 32, & 53 \end{vmatrix} = 0, \\ & \rightarrow \end{aligned}$$

neboť třetí řádek je součtem dvojnásobku prvního řádku a trojnásobku druhého řádku.

5. Jestliže prvky jedné řady čtvercové matice \mathbf{A} násobíme příslušnými algebraickými doplňky prvků jiné řady matice \mathbf{A} s ní rovnoběžné, pak součet všech těchto součinů se rovná nule.

Příklad:

K dané matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 7, & 13 \\ 4, & 6, & 9 \\ 16, & 3, & 8 \end{pmatrix}$$

vypočteme algebraické doplňky prvků prvního sloupce:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 6, & 9 \\ 3, & 8 \end{vmatrix} = 21, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 7, & 13 \\ 3, & 8 \end{vmatrix} = -17, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 7, & 13 \\ 6, & 9 \end{vmatrix} = -15.$$

Podle věty 5 platí

$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 7 \cdot 21 + 6 \cdot (-17) + 3 \cdot (-15) = 0.$$

6. Determinant matice \mathbf{A} se rovná determinantu matice \mathbf{B} , která vznikne tak, že k libovolné řadě matice \mathbf{A} přičteme lineární kombinaci ostatních řad s ní rovnoběžných. Z toho speciálně plyne, že determinant matice \mathbf{A} se rovná

determinantu matice \mathbf{C} , která vznikne tak, že ke každému prvku libovolné řady matice \mathbf{A} přičteme k -násobek příslušného prvku jiné řady s ní rovnoběžné.

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 2, & 7, & 13 \\ 4, & 6, & 9 \\ 16, & 3, & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & & 7, & & 13 \\ 4, & & 6, & & 9 \\ 16 + 5 \cdot 4, & 3 + 5 \cdot 6, & 8 + 5 \cdot 9 & & \end{vmatrix}.$$

7. Determinant matice \mathbf{A} se rovná determinantu matice \mathbf{B} , která vznikne z matice \mathbf{A} tak, že se k ní od jejího rohu připojí jeden sloupec a jeden řádek, přičemž jejich společným prvkem je číslo 1, všechny ostatní prvky jedné přidané řady jsou rovny nule a ostatní prvky druhé přidané řady jsou libovolné konstanty. S takto vzniklým determinantem lze tento postup opakovat, aniž se změní jeho hodnota.

Příklad 1:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1m} \\ \dots & & \dots \\ a_{m1}, & \dots, & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1m}, & 0, & \dots, & 0 \\ \dots & & \dots & & & \\ a_{m1}, & \dots, & a_{mm}, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & \dots, & 0, & 1, & \dots, & 0 \\ \dots & & \dots & & & \\ 0, & \dots, & 0, & \underbrace{0, \dots, 1}_{n-m \text{ sloupců}} & & \end{vmatrix} \left. \right\} n-m \text{ řádků}$$

Příklad 2:

$$\begin{vmatrix} 2, & 7, & 13 \\ 4, & 6, & 9 \\ 16, & 3, & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 18, & 2, & 7, & 13 \\ 4, & 4, & 6, & 9 \\ -6, & 16, & 3, & 8 \end{vmatrix}.$$

8. *Součtové pravidlo pro determinanty:* Součet determinantů čtvercových matic \mathbf{A}_1 a \mathbf{A}_2 téhož řádu, které se liší jen v prvcích libovolné i -té řady, se rovná determinantu matice \mathbf{A} , ježíž prvky i -té řady jsou součty příslušných prvků i -tých řad matic \mathbf{A}_1 a \mathbf{A}_2 , a ostatní prvky se nezmění.

Obráceně platí: Jestliže každý z prvků i -té řady čtvercové matice \mathbf{A} lze vyjádřit jako součet dvou sčítanců, pak determinant matice \mathbf{A} se rovná součtu determinantů matic \mathbf{A}_1 a \mathbf{A}_2 , které se od matice \mathbf{A} liší jen tím, že v i -té řadě matice \mathbf{A}_1 jsou první sčítance a v i -té řadě matice \mathbf{A}_2 jsou druhé sčítance i -té řady matice \mathbf{A} .

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 2, & 7, & 13 \\ 4, & 6, & 9 \\ 16, & 3, & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2, & 7, & 13 \\ 5, & -2, & 9 \\ 16, & 3, & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & 7, & 13 \\ 9, & 4, & 18 \\ 16, & 3, & 8 \end{vmatrix}.$$

9. Pravidlo pro součin determinantů: Součin determinantů matic $\mathbf{A} = (a_{ik})$ a $\mathbf{B} = (b_{ik})$ n -tého řádu se rovná determinantu matice $\mathbf{C} = (c_{ik})$ n -tého řádu, jejíž prvky vypočteme kterýmkoli z těchto čtyř způsobů:

- a) $c_{ik} = a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + \dots + a_{in}b_{kn}$;
 b) $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$;
 c) $c_{ik} = a_{1i}b_{k1} + a_{2i}b_{k2} + \dots + a_{ni}b_{kn}$;
 d) $c_{ik} = a_{1i}b_{1k} + a_{2i}b_{2k} + \dots + a_{ni}b_{nk}$.

Příklad:

Jestliže

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11}, & b_{12}, & b_{13} \\ b_{21}, & b_{22}, & b_{23} \\ b_{31}, & b_{32}, & b_{33} \end{vmatrix}$$

pak podle d) je

$$C = AB = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31}, & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32}, & a_{11}b_{13} + a_{21}b_{23} + a_{31}b_{33} \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{32}b_{31}, & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32}, & a_{12}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{32}b_{33} \\ a_{13}b_{11} + a_{23}b_{21} + a_{33}b_{31}, & a_{13}b_{12} + a_{23}b_{22} + a_{33}b_{32}, & a_{13}b_{13} + a_{23}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{vmatrix}.$$

Vandermondův determinant

$$\begin{aligned}
 V_n &= V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left| \begin{array}{cccccc} 1, & a_1, & a_1^2, & a_1^3, & \dots, & a_1^{n-1} \\ 1, & a_2, & a_2^2, & a_2^3, & \dots, & a_2^{n-1} \\ 1, & a_3, & a_3^2, & a_3^3, & \dots, & a_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & a_n, & a_n^2, & a_n^3, & \dots, & a_n^{n-1} \end{array} \right| = \\
 &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \cdot \\
 &\quad \cdot (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \dots (a_n - a_2) \cdot \\
 &\quad \cdot (a_4 - a_3)(a_5 - a_3) \dots (a_n - a_3) \cdot \\
 &\quad \dots \cdot (a_n - a_{n-1}) = \\
 &= \prod_{r=1}^{n-1} \left[\prod_{s=r+1}^n (a_s - a_r) \right],
 \end{aligned}$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n \in C$

Jsou-li mezi komplexními čísly a_1, a_2, \dots, a_n aspoň dvě stejná, pak $V_n = 0$.

Příklad:

Při výpočtu determinantu

$$A = \begin{vmatrix} 1, & 7, & 5, & 4 \\ -4, & 4, & 12, & 8 \\ 2, & 6, & 9, & -2 \\ 3, & 1, & 7, & 3 \end{vmatrix}$$

postupujeme podle uvedených vět o determinantech takto:

1. krok: Vytkneme společného činitele 4 prvků druhého řádku.
2. krok: Druhý řádek přičteme k prvnímu řádku.
3. krok: Druhý sloupec odečteme od třetího sloupce.
4. krok: Determinant rozvineme podle prvků prvního řádku.
5. krok: U prvního determinantu odečteme třetí sloupec od druhého sloupce a u druhého determinantu přičteme první sloupec k druhému sloupci.
6. krok: U prvního determinantu vytkneme společného činitele 3 prvků třetího řádku a u druhého determinantu přičteme dvojnásobek prvního sloupce k třetímu sloupci.
7. krok: Oba determinnty rozvineme podle prvků prvního řádku.

Postupně tedy dostaneme (pořadová čísla kroků uvádíme nad rovníkem)

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cccc} 1, & 7, & 5, & 4 \\ -4, & 4, & 12, & 8 \\ 2, & 6, & 9, & -2 \\ 3, & 1, & 7, & 3 \end{array} \right| \stackrel{1}{=} 4 \left| \begin{array}{cccc} 1, & 7, & 5, & 4 \\ -1, & 1, & 3, & 2 \\ 2, & 6, & 9, & -2 \\ 3, & 1, & 7, & 3 \end{array} \right| \stackrel{2}{=} \\ & \stackrel{2}{=} 4 \left| \begin{array}{cccc} 0, & 8, & 8, & 6 \\ -1, & 1, & 3, & 2 \\ 2, & 6, & 9, & -2 \\ 3, & 1, & 7, & 3 \end{array} \right| \stackrel{3}{=} 4 \left| \begin{array}{cccc} 0, & 8, & 0, & 6 \\ -1, & 1, & 2, & 2 \\ 2, & 6, & 3, & -2 \\ 3, & 1, & 6, & 3 \end{array} \right| \stackrel{4}{=} \\ & \stackrel{4}{=} 4(-8) \left| \begin{array}{ccc} -1, & 2, & 2 \\ 2, & 3, & -2 \\ 3, & 6, & 3 \end{array} \right| + 4(-6) \left| \begin{array}{ccc} -1, & 1, & 2 \\ 2, & 6, & 3 \\ 3, & 1, & 6 \end{array} \right| \stackrel{5}{=} \\ & \stackrel{5}{=} -32 \left| \begin{array}{ccc} -1, & 0, & 2 \\ 2, & 5, & -2 \\ 3, & 3, & 3 \end{array} \right| - 24 \left| \begin{array}{ccc} -1, & 0, & 2 \\ 2, & 8, & 3 \\ 3, & 4, & 6 \end{array} \right| \stackrel{6}{=} \\ & \stackrel{6}{=} -32 \cdot 3 \left| \begin{array}{ccc} -1, & 0, & 2 \\ 2, & 5, & -2 \\ 1, & 1, & 1 \end{array} \right| - 24 \left| \begin{array}{ccc} -1, & 0, & 0 \\ 2, & 8, & 7 \\ 3, & 4, & 12 \end{array} \right| \stackrel{7}{=} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -96(-1) \left| \begin{array}{cc} 5, & -2 \\ 1, & 1 \end{array} \right| - 96 \cdot 2 \left| \begin{array}{cc} 2, & 5 \\ 1, & 1 \end{array} \right| - 24(-1) \left| \begin{array}{cc} 8, & 7 \\ 4, & 12 \end{array} \right| = \\
 &= 96(5 + 2) - 192(2 - 5) + 24(96 - 28) = 2880.
 \end{aligned}$$

1.11.3. Řešení soustavy lineárních rovnic pomocí determinantů

Determinantem matici \mathbf{D} soustavy n lineárních rovnic s n neznámými

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

nazýváme determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Cramerovo pravidlo

Jestliže $D \neq 0$, pak soustava n lineárních rovnic má právě jedno řešení $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, kde

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad \text{pro } \forall i \in U_n,$$

přičemž D_i je determinant matice D_i , která vznikne z matice D soustavy tak, že v ní i -tý sloupec nahradíme sloupcem pravých stran soustavy lineárních rovnic.

Cramerovo pravidlo se k praktickému řešení soustavy n lineárních rovnic o n neznámých s nenulovým determinantem příliš nehodí, neboť vyžaduje výpočet $n + 1$ determinantů n -tého řádu. Je proto vhodnější používat Gaussovy eliminační metody.

Příklad:

Pomocí Cramerova pravidla vypočteme

$$x - y + 2z = 7,$$

$$2x - 3y + 5z = 17,$$

$$3x - 2y - z = 12,$$

$$D = \begin{vmatrix} 1, & -1, & 2 \\ 2, & -3, & 5 \\ 3, & -2, & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & -1, & 2 \\ -1, & -3, & 5 \\ 1, & -2, & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -1, & 2 \\ -2, & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1, & 2 \\ -3, & 5 \end{vmatrix} = 5 + 1 = 6,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7, & -1, & 2 \\ 17, & -3, & 5 \\ 12, & -2, & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7, & -1, & 0 \\ 17, & -3, & -1 \\ 12, & -2, & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 \begin{vmatrix} -3, & -1 \\ -2, & -5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 17, & -1 \\ 12, & -5 \end{vmatrix} = 7(15 - 2) + 1(-85 + 12) = 18,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1, & 7, & 2 \\ 2, & 17, & 5 \\ 3, & 12, & -1 \end{vmatrix} = -12, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1, & -1, & 7 \\ 2, & -3, & 17 \\ 3, & -2, & 12 \end{vmatrix} = 6.$$

Daná soustava má právě jedno řešení

$$\left[x = \frac{18}{6} = 3, \quad y = \frac{-12}{6} = -2, \quad z = \frac{6}{6} = 1 \right].$$

tj. obor pravdivosti $P = \{[3, -2, 1]\}$.

Jestliže $D = 0$ a $D_i = 0$ pro $\forall i \in U_n$, pak soustava n lineárních rovnic o n neznámých má nekonečně mnoho řešení, neboť má nejvýše $n - 1$ nezávislých rovnic.

Jestliže $D = 0$ a aspoň pro jeden index i platí $D_i \neq 0$, pak rovnice si odpovídají a obor pravdivosti $P = \emptyset$.

2.1. ROVNICE

2.1.1. Základní pojmy

Termy

⟨Aritmetickým⟩ nebo *⟨algebraickým⟩ termem* [*⟨aritmetickým⟩* nebo *⟨algebraickým⟩ výrazem*] nazýváme takové slovo vytvořené z čísel, podstatně volných číselných proměnných a matematických operačních znaků, které má nějaký smysl a které nabude určité číselné hodnoty, jestliže za proměnné dosadíme libovolná čísla z oboru těchto proměnných (viz články 0.3.1 a 0.3.2).

Příklad 1:

Lineární term:

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

kde a_0, a_1, \dots, a_n jsou konstanty a x_1, x_2, \dots, x_n jsou číselné proměnné.

Příklad 2:

Celý racionální term [mnohočlen, polynom]:

$$T(x, y) = ax^3 + bx^2 + cxy + dy^2 + ex + fy + g,$$

kde a, b, \dots, g jsou konstanty a x, y jsou číselné proměnné.

Příklad 3:

Racionální term:

$$T(x) = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1x + b_0} \quad (m, n \in \mathbb{N}),$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ jsou konstanty a x je číselná proměnná.

Příklad 4:

Lineární kombinace termů:

$$m_1 T_1 + m_2 T_2 \quad (m_1, m_2 \in \mathbb{R}).$$

Oborem proměnných termu $T(x, y, \dots)$ nazýváme množinu $M = X \times Y \times \dots$, kde X, Y, \dots jsou obory všech proměnných x, y, \dots .

Rovnice

Predikátová formule $T_1 = T_2$, kde T_1, T_2 jsou termy, se nazývá *rovnice*. Soustava predikátových formulí $T_1 = T_2, T_3 = T_4, \dots, T_{n-1} = T_n, \dots, T_{2n-1} = T_{2n}$, kde T_1, T_2, \dots, T_{2n} jsou termy, se nazývá *soustava n rovnic*.

Definičním oborem rovnice $T_1(x, y, \dots) = T_2(x, y, \dots)$, resp. *soustavy rovnic* $T_1(x, y, \dots) = T_2(x, y, \dots), \dots, T_{2n-1}(x, y, \dots) = T_{2n}(x, y, \dots)$ nazýváme kartézský součin $O = X \times Y \times \dots$ oborů proměnných x, y, \dots dané rovnice, resp. daných n rovnic. Přitom $X = X_1 \cap X_2 \cap \dots, Y = Y_1 \cap Y_2 \cap \dots$, kde X, Y_1, \dots jsou obory všech proměnných x, y, \dots termu T_1, X_2, Y_2, \dots jsou obory všech proměnných x, y, \dots termu T_2 atd.

Rovnice bez číselných proměnných představuje buď pravdivý výrok (*pravdivou rovnost*), nebo nepravdivý výrok; např. $7 = 3 + 4$ je pravdivý výrok, ale $7 = 3 + 5$ je nepravdivý výrok.

Rovnice s aspoň jednou číselnou proměnnou představuje predikátovou formuli, která se změní buď v pravdivý výrok (*pravdivou rovnost*), nebo v nepravdivý výrok, jestliže za všechny číselné proměnné dosadíme hodnoty odpovídající definičnímu oboru dané rovnice.

Řešením [pravdivostním prvkem] rovnice $T_1(x, y, \dots) = T_2(x, y, \dots)$ s n číselnými proměnnými nazýváme každou takovou uspořádanou n -tici $[x_0, y_0, \dots]$, kde $x_0 \in X, y_0 \in Y, \dots$, že po dosazení jejich členů x_0, y_0, \dots do rovnice $T_1(x, y, \dots) = T_2(x, y, \dots)$ dostaneme pravdivý výrok. Řešení rovnice o jedné neznámé se někdy nazývá *kořen rovnice*.

Oborem pravdivosti P rovnice nazýváme množinu všech řešení neboli množinu všech pravdivostních prvků rovnice. Obor pravdivosti P rovnice je tedy podmnožinou oboru O rovnice.

Způsob zápisu oboru pravdivosti:

$$P = \{[x, y, \dots] \mid T_1(x, y, \dots) = T_2(x, y, \dots)\},$$

je-li definiční obor rovnice zřejmý;

$$P = \{[x, y, \dots] \mid x \in X \wedge y \in Y \wedge \dots \wedge T_1(x, y, \dots) = T_2(x, y, \dots)\},$$

je-li třeba uvést definiční obor rovnice.

Identita

Identitou nazýváme rovnici

$$T_1(x, y, \dots) = T_2(x, y, \dots),$$

kde obor pravdivosti P se rovná definičnímu oboru O rovnice. Například rovnice

$$T_1(x) = T_2(x)$$

s jednou proměnnou x je při $P = O$ identitou, a lze ji proto zapsat ve tvaru

$$P = \{x \mid x \in X \wedge T_1(x) = T_2(x)\} = X.$$

Příklad:

Rovnice

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

je identitou vzhledem k tělesu \mathbb{R} neboli

$$P = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge \sin(2x) = 2 \sin x \cos x\} = \mathbb{R}.$$

Definice neřešitelnosti rovnice

$$P = \emptyset.$$

Příklad:

$$3^x = -4, \quad O = \mathbb{R}, \quad P = \emptyset,$$

tj.

$$P = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 3^x = -4\} = \emptyset.$$

Ekvivalentnost rovnic

Rovnice $T_1 = T_2$, jejíž obor pravdivosti obsahuje obor pravdivosti rovnice $T_3 = T_4$ s týmž definičním oborem, se nazývá *důsledková rovnice vzhledem k rovnici* $T_3 = T_4$.

Dvě rovnice s definičními obory O_1 a O_2 se nazývají *ekvivalentní vzhledem k definičnímu oboru* $O = O_1 \cap O_2$, právě když mají týž obor pravdivosti při definičním oboru O .

Úpravou rovnice nazýváme postup, kterým dané rovnici přiřadíme jinou rovnici. Úprava, při níž rovnici s oborem pravdivosti P_1 přiřadíme rovnici s oborem pravdivosti P_2 , přičemž $P_1 \subset P_2$, resp. $P_1 = P_2$, se nazývá *důsledková*, resp. *ekvivalentní*.

2.1.2. Algebraické rovnice s jednou neznámou

Rovnici tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \\ (n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{C}; i = 0, 1, \dots, n; a_n \neq 0)$$

nazýváme *algebraickou rovnici n-tého stupně s jednou neznámou*. Čísla a_0, a_1, \dots, a_n se nazývají *koeficienty rovnice*; výrazy $a_0, a_1x, a_2x^2, a_ix^i$ se po řadě nazývají *absolutní člen*, *lineární člen*, *kvadratický člen*, *člen i-tého stupně*. Komplexní číslo, které je kořenem aspoň jedné algebraické rovnice s racionálními koeficienty se nazývá *algebraické*. Komplexní číslo α se nazývá *transcendentní*, právě když neexistuje žádná algebraická rovnice s racionálními koeficienty, která má kořen α .

2.1.2.1. Lineární rovnice s jednou neznámou

Lineární rovnici s jednou neznámou nazýváme algebraickou rovnici prvního stupně, tj. rovnici tvaru

$$ax + b = 0 \quad (a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0).$$

Obor pravdivosti této rovnice je

$$P = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}.$$

2.1.2.2. Kvadratická rovnice s jednou neznámou

Kvadratickou rovnici s jednou neznámou nazýváme algebraickou rovnici druhého stupně, tj. rovnici tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0).$$

Číslo $D = b^2 - 4ac$ se nazývá *diskriminant kvadratické rovnice*.

Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

má obor pravdivosti

$$P = \left\{ \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right\} \quad (D > 0),$$

$$P = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\} \quad (D = 0),$$

$$P = \left\{ \frac{-b + i\sqrt{|D|}}{2a}, \frac{-b - i\sqrt{|D|}}{2a} \right\} \quad (D < 0).$$

Pro $D > 0$ má tedy kvadratická rovnice právě dva navzájem různé reálné kořeny, pro $D = 0$ má právě jeden reálný dvojnásobný kořen a pro $D < 0$ má právě dva komplexně sdružené kořeny.

Zvláštní případy

a) Rye kvadratická rovnice:

$$x^2 + c = 0 \quad (c \in \mathbb{R});$$

obor pravdivosti

$$P = \{i\sqrt{|c|}, -i\sqrt{|c|}\} \quad (c > 0),$$

$$P = \{0\} \quad (c = 0),$$

$$P = \{\sqrt{|-c|}, -\sqrt{|-c|}\} \quad (c < 0).$$

b) Kvadratická rovnice bez absolutního členu:

$$ax^2 + bx = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0);$$

obor pravdivosti

$$P = \left\{ 0, -\frac{b}{a} \right\}.$$

c) Normovaný tvar kvadratické rovnice [normovaná kvadratická rovnice]:

$$x^2 + px + q = 0 \quad (p, q \in \mathbb{R});$$

diskriminant

$$D_1 = p^2 - 4q.$$

Obor pravdivosti

$$P = \left\{ -\frac{p}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{p}{2} \right)^2 - q \right]}, -\frac{p}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{p}{2} \right)^2 - q \right]} \right\} \quad (D_1 > 0),$$

$$P = \left\{ -\frac{p}{2} \right\} \quad (D_1 = 0),$$

$$P = \left\{ -\frac{p}{2} + i\sqrt{\left[q - \left(\frac{p}{2} \right)^2 \right]}, -\frac{p}{2} - i\sqrt{\left[q - \left(\frac{p}{2} \right)^2 \right]} \right\} \quad (D_1 < 0).$$

Každou kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ lze převést dělením koeficientem a na normovaný tvar

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Každou kvadratickou rovnici v normovaném tvaru $x^2 + px + q = 0$ lze substitucí $x = y - p/2$ převést na rye kvadratickou rovnici

$$y^2 - \left(\frac{p}{2} \right)^2 + q = 0.$$

Rozklad v součin kořenových činitelů

Kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), resp. $x^2 + px + q = 0$ s kořeny x_1, x_2 lze vyjádřit v ekvivalentních tvarech

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0, \quad \text{resp.} \quad (x - x_1)(x - x_2) = 0,$$

kde činitelé $x - x_1, x - x_2$ se nazývají kořenoví činitelé.

Pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) platí tzv.

Vièetovy vzorce:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Kvadratická rovnice s komplexními koeficienty

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{C}, c \neq 0);$$

obor pravdivosti

$$P = \left\{ \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right\},$$

kde \sqrt{D} je pevně zvolená odmocnina z komplexního čísla D (viz články 1.3.3 až 1.3.5).

2.1.2.3. Kubická rovnice s jednou neznámou

Kubickou rovnicí s jednou neznámou nazýváme algebraickou rovnici třetího stupně, tj. rovnici tvaru

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}, a \neq 0).$$

Každou kubickou rovnici $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ lze dělením číslem a převést na tzv. normovaný tvar

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Každou kubickou rovnici v normovaném tvaru $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ lze substitucí $x = y - A/3$ převést na tzv. redukovaný tvar

$$y^3 + py + q = 0.$$

Redukovaný tvar kubické rovnice

[kubická rovnice bez kvadratického člena]

$$x^3 + px + q = 0 \quad (p, q \in \mathbb{C});$$

diskriminant

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Obor pravdivosti

$$P = \left\{ u + v, -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}i\sqrt{3}, -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}i\sqrt{3} \right\},$$

kde

$$u = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{D}\right)}, \quad v = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{D}\right)},$$

přičemž třetí odmocniny volíme tak, aby $3uv = -p$ a \sqrt{D} je pevně zvolená druhá odmocnina z komplexního čísla D (Cardanovy vzorce).

V případě kubické rovnice s reálnými koeficienty z těchto vzorců dostáváme:

pro $p = q = 0$ jeden reálný trojnásobný kořen rovný nule;

pro $D = 0, pq \neq 0$ dva reálné kořeny $-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}, \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$, z nichž druhý je dvojnásobný;

pro $D > 0$ jeden kořen reálný a dva komplexně sdružené.

Pro $D < 0$ má kubická rovnice s reálnými koeficienty tři reálné kořeny. Tyto kořeny v reálném tvaru nelze pomocí Cardanových vzorců najít (*casus irreducibilis*). Lze je však vypočítat goniometrickým řešením:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\left(\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right)\cos\frac{\varphi}{3}, & x_2 &= -2\left(\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{\pi}{3}\right), \\ x_3 &= -2\left(\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{\pi}{3}\right), \end{aligned}$$

kde φ lze vypočítat z rovnice

$$\cos \varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}}.$$

Příklad 1:

Rovnici

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0,$$

lze substitucí $x = y - \frac{-3}{3} = y + 1$ převést na tvar

$$(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 4(y+1) - 4 = 0,$$

$$y^3 + y - 2 = 0,$$

takže

$$p = 1, \quad q = -2, \quad D = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{28}{27} > 0.$$

Pak

$$u = \sqrt[3]{\left\{-\frac{2}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3\right]}\right\}} = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{28}{27}}} \doteq 1,264,$$

$$v = \sqrt[3]{\left(1 - \sqrt{\frac{28}{27}}\right)} \doteq -0,264;$$

$$y_1 = 1,264 - 0,264 = 1, \quad \underline{x_1 = 2};$$

$$y_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1,528}{2} i \sqrt{3}, \quad \underline{x_2 = \frac{1}{2} + 0,764 i \sqrt{3}};$$

$$y_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1,528}{2} i \sqrt{3}, \quad \underline{x_3 = \frac{1}{2} - 0,764 i \sqrt{3}};$$

$$P = \{2; \frac{1}{2} + 0,764 i \sqrt{3}; \frac{1}{2} - 0,764 i \sqrt{3}\}.$$

Příklad 2:

Rovnice

$$x^3 - 21x - 20 = 0 \quad (\text{již redukovaný tvar})$$

má diskriminant

$$D = (-10)^2 + (-7)^3 = 100 - 343 < 0.$$

Použijeme goniometrického způsobu řešení:

$$\cos \varphi = \frac{10}{\sqrt{343}}, \quad \varphi = 57^\circ 19';$$

$$x_1 = 2(\sqrt{7}) \cos 19^\circ 6', \quad \underline{x_1 = 5};$$

$$x_2 = -2(\sqrt{7}) \cos (-40^\circ 54'), \quad \underline{x_2 = -4};$$

$$x_3 = -2(\sqrt{7}) \cos 79^\circ 6', \quad \underline{x_3 = -1}.$$

Zvláštní případy

a) Binomická rovnice

$$y^3 + q = 0 \quad (q \in \mathbb{R});$$

obor pravdivosti

$$P = \left\{ -\sqrt[3]{q}, -(\sqrt[3]{q}) \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} \right), -(\sqrt[3]{q}) \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} \right) \right\}.$$

b) Binomická rovnice

$$y^3 + q = 0 \quad (q \in \mathbb{C});$$

viz článek 1.3.4.

c) Rovnice

$$y^3 + py = y(y^2 + p) = 0 \quad (p \in \mathbb{R});$$

obor pravdivosti

$$P = \{0, \sqrt{(-p)}, -\sqrt{(-p)}\} \quad (p < 0),$$

$$P = \{0, i\sqrt{p}, -i\sqrt{p}\} \quad (p > 0).$$

d) Rovnice

$$y^3 + py = y(y^2 + p) = 0 \quad (p \in \mathbb{C});$$

obor pravdivosti

$$P = \{0, \sqrt{(-p)}, -\sqrt{(-p)}\},$$

kde $\sqrt{(-p)}$ je pevně zvolená druhá odmocnina z komplexního čísla p .

2.1.2.4. Algebraická rovnice n -tého stupně s jednou neznámou

Základní věta algebry

Každá algebraická rovnice n -tého stupně ($n \geq 1$) s jednou neznámou má v tělese komplexních čísel aspoň jeden kořen. Obor pravdivosti P každé algebraické rovnice s oborem $O \subseteq \mathbb{C}$ není tedy nikdy prázdnou množinou.

Rozklad mnohočlenu v součin kořenových činitelů

Mnohočlen n -tého stupně $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ s nulovým bodem [kořenem] α_1 , tj. $P_n(\alpha_1) = 0$, lze rozložit v součin $(x - \alpha_1)$ $P_{n-1}(x)$. Říkáme, že $x - \alpha_1$ je k -násobný kořenový činitel, jestliže $P(x) = (x - \alpha_1)^k \cdot P_{n-k}(x)$, kde P_{n-k} je polynom $(n - k)$ -tého stupně nad tělesem komplexních čísel a $P_{n-k}(\alpha_1) \neq 0$. Číslo k se nazývá *násobnost kořene* α_1 a α_1 se nazývá *k-násobný kořen rovnice* $P_n(x) = 0$ nebo *polynomu* P_n . Místo názvu jedno-násobný kořen používáme názvu *jednoduchý kořen*.

Každý mnohočlen $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ lze jednoznačně rozložit v součin kořenových činitelů

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_r)^{k_r} \quad (k_1 + k_2 + \dots + k_r = n),$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jsou všechny navzájem různé kořeny mnohočlenu P_n . Jestliže α_i je k -násobný kořen, pak komplexně sdružený kořen $\bar{\alpha}_i$ je také k -násobný.

Známe-li jeden kořen x_1 , lze stupeň rovnice snížit tím, že rovnici dělíme příslušným kořenovým činitelem $x - x_1$.

Viètovy vztahy

Pro všechny kořeny x_1, x_2, \dots, x_n (k -násobný kořen α_i se tedy uvádí k -krát) algebraické rovnice n -tého stupně

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

platí tzv. *Viètovy vztahy*:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = -a_{n-1},$$

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n x_i x_j = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_2 x_3 + x_2 x_4 + \dots + x_{n-1} x_n = a_{n-2},$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^n x_i x_j x_k &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_2 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_5 + \dots \\ &\quad \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -a_{n-3}, \end{aligned}$$

$$\dots$$

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n = (-1)^n a_0.$$

Máme-li algebraickou rovnici n -tého stupně v normovaném tvaru s celočíselnými koeficienty, lze pomocí Viètových vztahů zjistit, zda tato rovnice má celočíselné kořeny. Jako celočíselné kořeny přicházejí totiž v úvahu jen dělitelé absolutního členu.

Příklad:

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0.$$

Platí

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = 6 \quad (\text{absolutní člen}).$$

Dělitelé absolutního členu jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ a ± 6 . Zkusmo najdeme:

$$\underline{x_1 = 1}, \quad \underline{x_2 = -1}, \quad \underline{x_3 = -2}, \quad \underline{x_4 = 3}.$$

Při řešení algebraických rovnic lze také použít Hornerova schématu (viz str. 247).

Reciproká rovnice n -tého stupně

Reciprokou rovnici nazýváme každou rovnici tvaru

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

kde buď $a_i = a_{n-i}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) (tzv. kladně reciproká rovnice), nebo $a_i = -a_{n-i}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) (tzv. záporně reciproká rovnice).

Každá kladně reciproká rovnice lichého stupně a každá záporně reciproká rovnice sudého stupně má kořen -1 . Každá záporně reciproká rovnice má kořen 1 .

Z každé reciproké rovnice lze po odstranění možného kořenového činitele $x - 1$, popř. $x + 1$ získat kladně reciprokou rovnici sudého stupně $m = 2k$ tvaru

$$b_0x^{2k} + b_1x^{2k-1} + \dots + b_kx^k + \dots + b_0 = 0 \quad (b_0 \neq 0, k \in \mathbb{N}),$$

z níž po dělení mocninou x^k (nula totiž nemůže být kořenem) dostaneme

$$b_0\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + b_1\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + \dots + b_{k-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + b_k = 0.$$

Po substituci $y = x + 1/x$ dostaneme rovnici k -tého stupně v proměnné y , z jejichž kořenů y_i ($i = 1, 2, \dots, k$) dostaneme po řešení k kvadratických rovnic

$$x^2 - y_i x + 1 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

všechny kořeny dané reciproké rovnice.

Příklad:

$$x^6 + x^5 - 5x^4 + 5x^2 - x - 1 = 0$$

(záporně reciproká rovnice sudého stupně).

Po dělení součinem kořenových činitelů $(x+1)(x-1)$ máme

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$$

(kladně reciproká rovnice sudého stupně),

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0.$$

Protože

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2,$$

po substituci $y = x + 1/x$ dostaneme

$$y^2 + y - 6 = 0, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = -3,$$

takže

$$\begin{aligned}x^2 - 2x + 1 &= 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1; \\x^2 + 3x + 1 &= 0, \quad x_3 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_4 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

2.1.3. Transcendentní rovnice

Transcendentní rovnici nazýváme rovnici $f(x) = 0$, kde f je transcendentní funkce (viz článek 2.3.1).

V tomto článku uvedeme jen exponenciální a logaritmické rovnice. O goniometrických rovnicích se pojednává až v článku 3.4.2.

2.1.3.1. Exponenciální rovnice

Exponenciální rovnici nazýváme rovnici, kde proměnná x se vyskytuje v exponentu. Obecně lze exponenciální rovnice řešit jen graficky nebo přibližnými numerickými metodami. Jen v některých jednoduchých zvláštních případech lze tyto rovnice převést na algebraické rovnice.

Základní exponenciální rovnici

$$a^x = b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0)$$

lze řešit:

a) bez logaritmování, jestliže lze členy rovnice vyjádřit jako mocniny téhož základu:

$$c^{px} = c^q \Leftrightarrow x = \frac{q}{p},$$

neboť exponenciální funkce je prostá.

b) logaritmováním:

$$x = \log_a b, \quad \text{popř.} \quad x \lg a = \lg b \Leftrightarrow x = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

Příklad 1:

$$\sqrt[3]{a^{x+2}} = \sqrt{a^{x-5}}.$$

Řešení:

$$a^{(x+2)/3} = a^{(x-5)/2},$$

$$\frac{x+2}{3} = \frac{x-5}{2},$$

$$2x+4 = 3x-15, \quad \underline{x=19}.$$

Příklad 2:

$$2^{x+1} + 3^{x-3} = 3^{x-1} - 2^{x-2}.$$

Řešení:

$$2^x \cdot 2 + 3^x \cdot 3^{-3} = 3^x \cdot 3^{-1} - 2^x \cdot 2^{-2},$$

$$216 \cdot 2^x + 27 \cdot 2^x = 36 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^x,$$

$$243 \cdot 2^x = 32 \cdot 3^x,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{32}{243} = \frac{2^5}{3^5} = \left(\frac{2}{3}\right)^5, \quad \underline{x = 5}.$$

Příklad 3:

$$4^{3x} \cdot 5^{2x-3} = 6^x.$$

Řešení:

$$3x \lg 4 + (2x - 3) \lg 5 = x \lg 6,$$

$$x(3 \lg 4 + 2 \lg 5 - \lg 6) = 3 \lg 5,$$

$$x = \frac{3 \lg 5}{3 \lg 4 + 2 \lg 5 - \lg 6}.$$

2.1.3.2. Logaritmické rovnice

Logaritmickou rovnicí nazýváme rovnici, kde proměnná x se vyskytuje v logaritmickém výrazu (termu). Obecně lze logaritmické rovnice řešit jen graficky nebo přibližnými numerickými metodami. Jen v některých jednoduchých zvláštních případech lze tyto rovnice převést vhodnou substitucí na algebraické rovnice.

Základní logaritmická rovnice: $\log_a x = b \quad (a > 0, a \neq 1)$.

Platí-li $b = \log_a c$, pak

$$\log_a x = \log_a c \Leftrightarrow x = c,$$

jinak je

$$x = a^b.$$

Vyskytuje-li se proměnná x nebo mnohočlen P jen jako argument logaritmu, lze logaritmickou rovnici převést na algebraickou v těchto případech:

a) Rovnice obsahuje logaritmy téhož argumentu. Takové rovnice se řeší tak, že logaritmus tohoto argumentu považujeme za novou neznámou y , najdeme kořeny nové rovnice a umocněním základu logaritmu těmito kořeny dostaneme kořeny dané rovnice.

b) Logaritmická rovnice tvaru

$$c_1 \log_a P_1(x) + c_2 \log_a P_2(x) + \dots + c_n \log_a P_n(x) = 0,$$

kde P_1, P_2, \dots, P_n jsou mnohočleny v proměnné x , se na algebraickou rovnici převedou odlogaritmováním. V tomto případě je třeba se vždy přesvědčit, zda pro nalezené kořeny má původní rovnice smysl a zda jí tyto kořeny vyhovují.

Příklad 1:

$$3 \ln(2x - 7) + 8 = \sqrt{[\ln(2x - 7) + 20]}.$$

Řešení: Zavedeme substituci $y = \ln(2x - 7)$ a dostaneme kvadratickou rovnici

$$3y + 8 = \sqrt{y + 20},$$

$$9y^2 + 47y + 44 = 0$$

se dvěma kořeny $y_1 = -11/9$ a $y_2 = -4$. Ze substituce $y = \ln(2x - 7)$ pak plyne $e^y = 2x - 7$, tj. $e^{-11/9} = 2x - 7$, $e^{-4} = 2x - 7$, odkud lze vyčítat kořeny $x_1 = \frac{e^{-11/9} + 7}{2}$ a $x_2 = \frac{e^{-4} + 7}{2}$ dané rovnice, z nichž kořen x_2 dané rovnici nevyhovuje $(-4 \neq \sqrt{16})$.

Příklad 2:

$$\lg(x^2 + 1) = 2 \lg(3 - x).$$

Řešení:

$$\begin{aligned}\lg(x^2 + 1) &= \lg(3 - x)^2, \\ x^2 + 1 &= (3 - x)^2, \\ x^2 + 1 &= 9 - 6x + x^2, \\ x &= \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

2.1.4. Přibližné metody k určení kořenů rovnice

2.1.4.1. Metoda tětiv [regula falsi, lineární interpolace]

Jestliže rovnice $f(x) = 0$ má mezi hodnotami x_1 a x_2 právě jeden kořen [tj. jestliže platí $f(x_1)f(x_2) < 0$ a funkce f je spojitá a ryze monotonné na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$] a nemá v tomto intervalu inflexi, pak první approximací kořene vzhledem k bodům x_1 a x_2 je

$$x_3 = x_1 - \frac{(x_2 - x_1)f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}.$$

Další lepší aproximaci kořene získáme obdobně v tom z intervalů $\langle x_1, x_3 \rangle$, $\langle x_3, x_2 \rangle$, kde platí uvedené předpoklady.

Geometrický význam metody tětv (obr. 46)

Křivka se nahradí tětivou vedenou body P_1 a P_2 (z toho plyne název *metoda tětv*). Přitom approximace x_3 kořene je první souřadnicí průsečíku osy x s přímkou P_1P_2 .

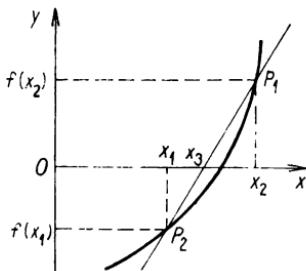
Příklad:

Najděme jeden z prvků oboru pravdivosti

$$P = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x + 7 = 0\}.$$

Řešení: Příslušná funkční rovnice je

$$f(x) = x^3 - x + 7.$$



Obr. 46. Určení kořene metodou tětv

Po ověření platnosti předpokladů metody tětv najdeme v tabulce funkčních hodnot tyto hodnoty:

$$x_1 = -2,5, \quad f(x_1) = -6,125,$$

$$x_2 = -2, \quad f(x_2) = -1;$$

$$x_3 = -2,5 + \frac{(-2 + 2,5) \cdot 6,125}{1 + 6,125} \doteq -2,07, \quad f(x_3) \approx 0,200.$$

Použijeme-li znovu metodu tětv na intervalu $\langle x_1, x_3 \rangle$, dostaneme další (lepší) approximaci kořene.

2.1.4.2. Metoda tečen [Newtonova metoda]

Jestliže v rovnici $f(x) = 0$ je f funkci, která má na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitou druhou derivaci, $f'(a)f'(b) < 0$, derivace f' a f'' jsou na intervalu

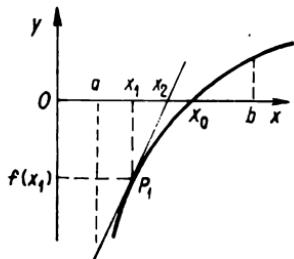
$\langle a, b \rangle$ různé od nuly a $x_1 \in \langle a, b \rangle$ je takový bod, že $f(x_1) f''(x_1) > 0$, pak první aproximaci kořene rovnice $f(x) = 0$ je bod

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Po výpočtu aproximace x_2 kořene lze metody tečen znova použít pro nalezení lepší aproximace kořene. Přitom při každém dalším kroku se počet správných číslic aproximace kořene prakticky zdvojnásobí.

Geometrický význam metody tečen (obr. 47)

Křivka se nahradí tečnou v bodě $P_1 = [x_1, f(x_1)]$ (z toho plyne název *metoda tečen*).



Obr. 47. Určení kořene metodou tečen

Příklad:

Najděme jeden z prvků oboru pravdivosti

$$P = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + 2x - 1 = 0\}.$$

Řešení: Příslušná funkční rovnice je

$$f(x) = x^3 + 2x - 1,$$

odkud

$$f'(x) = 3x^2 + 2,$$

$$f''(x) = 6x.$$

Předpoklady metody tečen jsou splněny na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Zvolme $x_1 = 0,5$.

Pak

$$f(x_1) = 0,125, \quad f'(x_1) = 2,75, \quad f''(x_1) = 3,$$

takže

$$x_2 = 0,5 - \frac{0,125}{2,75} \approx 0,5 - 0,045 = 0,455,$$

$$f(x_2) \approx 0,004.$$

2.1.4.3. Iterační metoda

Danou rovnici $f(x) = 0$ vyjádříme ve tvaru $x = \varphi(x)$. Známe-li přibližnou hodnotu x_1 kořene x_0 rovnice a je-li pro tuto hodnotu x_1 splněna podmínka $|\varphi'(x_1)| \leq m < 1$, pak

$$x_2 = \varphi(x_1)$$

je lepší approximaci. Při dalším použití této metody dostaneme ještě lepší approximaci kořene. Při $\varphi'(x) < 0$ leží dvě po sobě jdoucí approximace po různých stranách kořene, a lze tedy odhadnout dosaženou přesnost.

Při $|\varphi'(x)| > 1$ je třeba použít inverzní funkci k funkci φ .

Příklad:

Najděme jeden z prvků oboru pravdivosti

$$P = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + 2x - 6 = 0\}.$$

Řešení: Přibližná hodnota $x_1 = 1,45$ pro kořen dává $f(x_1) = -0,051\,375$.

Danou rovnici vyjádříme ve tvaru

$$x = \frac{6 - x^3}{2} = \varphi(x),$$

$$\varphi'(x) = -\frac{3x^2}{2}, \quad |\varphi'(x_1)| = |\varphi'(1,45)| = 3,153\,75 > 1.$$

Proto je třeba danou rovnici řešit pomocí inverzní funkce k funkci φ :

$$y = \frac{6 - x^3}{2}, \quad x^3 = 6 - 2y, \quad x = \sqrt[3]{(6 - 2y)} = \psi(y),$$

$$\psi'(y) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{(6 - 2y)^2}}, \quad |\psi'(1,45)| = \left| \frac{-2}{3\sqrt[3]{3,1^2}} \right| < 1.$$

Z toho plyně

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,45, \\ \underline{x}_2 &= \sqrt[3]{(6 - 2 \cdot 1,45)} \doteq 1,458\,1, \\ \underline{x}_3 &= \sqrt[3]{(6 - 2 \cdot 1,458\,1)} \doteq 1,455\,6, \\ \text{atd.} & \end{aligned}$$

2.1.4.4. Grafické řešení rovnic

Rovnice $f(x) = 0$ v normovaném tvaru se vyjádří jako funkční vztah tím, že se její levá strana položí rovna y . Z grafu funkce $y = f(x)$ dostaneme reálné kořeny rovnice $f(x) = 0$ jako první souřadnice průsečíků tohoto grafu s osou x ($y = 0$).

Někdy je vhodné rovnici $f(x) = 0$, která se má řešit, napsat ve tvaru $\varphi(x) = \psi(x)$ a sestrojit grafy funkcí $y = \varphi(x)$ a $y = \psi(x)$. První souřadnice průsečíků grafů obou funkcí jsou pak reálnými kořeny rovnice $f(x) = 0$.

Příklad 1:

Určeme obor pravdivosti

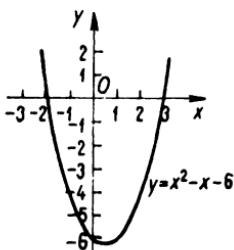
$$P = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 = 0\}.$$

Řešení: Průsečíky grafu funkce

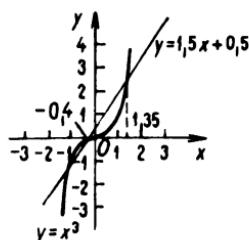
$$y = x^2 - x - 6$$

s osou x jsou (obr. 48)

$$\underline{x_1 = -2}, \underline{x_2 = 3}, \text{ takže } P = \{-2, 3\}.$$



Obr. 48. Grafické řešení rovnice
 $x^2 - x - 6 = 0$



Obr. 49. Grafické řešení rovnice
 $x^3 - 1.5x - 0.5 = 0$

Příklad 2:

Určeme obor pravdivosti

$$P = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 1.5x - 0.5 = 0\}.$$

Řešení: Danou rovnici napišeme ve tvaru

$$x^3 = 1.5x + 0.5.$$

První souřadnice průsečíků grafů funkcí

$$y = \varphi(x) = x^3,$$

$$y = \psi(x) = 1.5x + 0.5$$

jsou kořeny dané rovnice (obr. 49)

$$\underline{x_1 = -1}, \quad \underline{x_2 \doteq -0.4}, \quad \underline{x_3 \doteq 1.35},$$

takže

$$P = \{-1; -0.4; 1.35\}.$$

2.1.5. Soustavy rovnic

K jednoznačnému určení množiny všech řešení soustavy rovnic s n neznámými je třeba n vzájemně nezávislých a vzájemně si neodporujících rovnic. Způsob řešení záleží v tom, že se n rovnic s n neznámými postupně redukuje na jednu rovnici s jednou neznámou. Pomocí hodnoty jedné neznámé vypočtené z této rovnice lze postupně najít hodnoty ostatních neznámých.

Máme-li soustavu r vzájemně nezávislých rovnic s n neznámými ($r < n$), pak $n - r$ proměnných zvolíme za volné parametry (nezávisle proměnné). Za tyto proměnné lze dosadit libovolné hodnoty z oboru soustavy rovnic.

Obor pravdivosti P soustavy rovnic se rovná průniku oborů pravdivosti P_1, P_2, \dots, P_r jednotlivých rovnic:

$$P = P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_r.$$

2.1.5.1. Soustavy lineárních rovnic se dvěma neznámými

Jedna lineární rovnice se dvěma neznámými $a_1x + a_2y = b$

Ober pravdivosti P rovnice $a_1x + a_2y = b$ je množina všech uspořádaných dvojic $[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pro něž z predikátové formule $a_1x + a_2y = b$ dostaneme pravdivý výrok.

Způsob zápisu:

$$P = \{[x, y] \mid [x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \wedge a_1x + a_2y = b; a_1, a_2, b \in \mathbb{R}\},$$

popř. při zřejmém oboru rovnice stručněji

$$P = \{[x, y] \mid a_1x + a_2y = b\}.$$

Považujeme-li x za nezávisle proměnnou a y za závisle proměnnou, pak obor pravdivosti je

$$P = \left\{ [x, y] \mid x \in \mathbb{R} \wedge y = \frac{b - a_1x}{a_2} \right\},$$

který představuje zobrazení $f: x \mapsto y$, jehož grafem je přímka.

Soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2. \end{aligned}$$

Ober pravdivosti P této soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými je množina všech uspořádaných dvojic $[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pro něž z uvedených predikátových formulí dostaneme pravdivé výroky.

Způsob zápisu:

$P = \{[x, y] \mid [x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \wedge a_{11}x + a_{12}y = b_1 \wedge a_{21}x + a_{22}y = b_2\}$,
popř. při zřejmém oboru rovnice stručně

$$P = \{[x, y] \mid a_{11}x + a_{12}y = b_1 \wedge a_{21}x + a_{22}y = b_2\}.$$

Dosazovací [substituční, vylučovací] metoda

Řešíme jednu z rovnic v kterékoli z neznámých a získaný term (výraz) pro tuto neznámou dosadíme do druhé rovnice. Tím eliminujeme jednu neznámou.

Pokud po dosazení termu pro jednu neznámou do druhé rovnice dostaneme rovnost $0 = 0$, resp. nepravdivý výrok, má soustava nekonečně mnoho řešení, resp. nemá žádné řešení.

Příklad:

Určeme obor pravdivosti

$$P = \{[x, y] \mid 3x + 7y - 7 = 0 \wedge 5x + 3y + 36 = 0\}.$$

Řešení:

$$\begin{array}{rcl} 3x + 7y - 7 & = & 0, \\ 5x + 3y + 36 & = & 0. \end{array}$$

$$y = \frac{7 - 3x}{7} \quad (\text{řešení první rovnice v } y),$$

$$5x + 3 \cdot \frac{7 - 3x}{7} + 36 = 0 \quad (\text{po dosazení do druhé rovnice}),$$

$$35x + 21 - 9x + 252 = 0,$$

$$x = -10,5, \quad y = \frac{7 + 31,5}{7} = 5,5,$$

takže $P = \{[-10,5; 5,5]\}$.

Porovnávací [komparační] metoda

Obě rovnice řešíme v téže proměnné a nalezené termy (výrazy) položíme sobě rovné. Tím se jedna neznámá eliminuje. (Případ rovnosti $0 = 0$, popř. nepravdivého výroku viz u dosazovací metody.)

Příklad:

Určeme obor pravdivosti

$$P = \{[x, y] \mid 3x + 7y - 7 = 0 \wedge 5x + 3y + 36 = 0\}.$$

Řešení:

$$\begin{array}{l|l}
\begin{array}{l}
3x + 7y - 7 = 0, \\
5x + 3y + 36 = 0;
\end{array} & \begin{array}{l}
\frac{-3x + 7}{7} = \frac{-5x - 36}{3}, \\
-9x + 21 = -35x - 252,
\end{array} \\
\begin{array}{l}
7y = -3x + 7, \\
3y = -5x - 36;
\end{array} & \begin{array}{l}
x = -10,5, \quad y = 5,5, \\
\text{takže}
\end{array} \\
\begin{array}{l}
y = \frac{-3x + 7}{7}, \\
y = \frac{-5x - 36}{3};
\end{array} & P = \{[-10,5; 5,5]\}.
\end{array}$$

Sčítací [adiční, slučovací] metoda

Obě strany každé z rovnic znásobíme takovým vhodným číslem, aby u jedné z neznámých byl v obou rovnicích týž koeficient. Odečtením obou rovnic se příslušná neznámá eliminuje. (Případ rovnosti $0 = 0$, popř. nepravdivého výroku viz u dosazovací metody.)

Příklad:

Určeme obor pravdivosti

$$P = \{[x, y] \mid 3x + 7y - 7 = 0 \wedge 5x + 3y + 36 = 0\}.$$

Řešení:

$$\begin{array}{l|l}
\begin{array}{l}
3x + 7y - 7 = 0, \\
5x + 3y + 36 = 0;
\end{array} & \begin{array}{l}
.3 \\
.7
\end{array} \\
\begin{array}{l}
9x + 21y - 21 = 0, \\
35x + 21y + 252 = 0;
\end{array} & \begin{array}{l}
.(-1) \\
+ \\
\hline
26x + 273 = 0,
\end{array} \\
\begin{array}{l}
x = -10,5, \quad y = 5,5,
\end{array} &
\end{array}$$

takže $P = \{[-10,5; 5,5]\}.$

Další způsob řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých pomocí determinantů viz v článku 1.11.3.

2.1.5.2. Soustavy lineárních rovnic se třemi neznámými

Soustava dvou lineárních rovnic se třemi neznámými

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2. \end{array} \right.$$

Homogenní soustava ($b_1 = b_2 = 0$)

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0. \end{array} \right.$$

Předpokládáme, že determinant

$$\Delta = \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Soustavu upravíme na tvar

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}z, \\ a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}z. \end{array} \right.$$

Označme

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} -a_{13}z, & a_{12} \\ -a_{23}z, & a_{22} \end{vmatrix} = -z \begin{vmatrix} a_{13}, & a_{12} \\ a_{23}, & a_{22} \end{vmatrix} = z \begin{vmatrix} a_{12}, & a_{13} \\ a_{22}, & a_{23} \end{vmatrix} = z\Delta_1, \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} a_{11}, & -a_{13}z \\ a_{21}, & -a_{23}z \end{vmatrix} = -z \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{23} \end{vmatrix} = -z\Delta_2. \end{aligned}$$

Podle Cramerova pravidla (viz článek 1.11.3) platí

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{z\Delta_1}{\Delta} = \Delta_1 t, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R},$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-z\Delta_2}{\Delta} = -\Delta_2 t,$$

$$z = \Delta_3 t.$$

Obecné řešení je

$$[x, y, z] = [\Delta_1 t, -\Delta_2 t, \Delta_3 t], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pro pevně zvolené číslo $t = t_0$ dostaneme uspořádanou trojici

$$[\Delta_1 t_0, -\Delta_2 t_0, \Delta_3 t_0],$$

kterou nazýváme *partikulárním řešením*.

Příklad:

$$\begin{array}{l} 3x + 7y - 7z = 0, \\ 5x + 3y + 36z = 0. \end{array}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 36 \end{vmatrix} = 273, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 36 \end{vmatrix} = 143, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -26;$$

$$[x, y, z] = [273t, -143t, -26t], t \in \mathbb{R}.$$

Soustavu dvou lineárních rovnic o třech neznámých lze také řešit tak, že jednu neznámou přivedeme jako parametr (nezávisle proměnnou) na pravou stranu a takto vzniklou soustavu pak řešíme jako soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

Nehomogenní soustava

Nejsou-li všechny determinanty Δ_i rovny nule, pak obor pravdivosti nehomogenní soustavy tvoří součet obecného řešení homogenní soustavy a jednoho řešení nehomogenní soustavy.

Soustava tří lineárních rovnic se třemi neznámými

Postup řešení je obdobný jako u soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými.

Dosazovací [substituční, vylučovací] metoda

Příklad 1:

$$\begin{array}{l} 3x + 3y + z = 17, \\ 3x + y + 3z = 15, \\ x + 3y + 3z = 13. \end{array} \quad \begin{array}{l} (\text{I}) \\ (\text{II}) \\ (\text{III}) \end{array}$$

Řešení: Z rovnice (I) dostaneme

$$z = 17 - 3x - 3y.$$

Po dosazení do rovnic (II) a (III) máme

$$\begin{array}{l} 3x + y + 3(17 - 3x - 3y) = 15, \\ x + 3y + 3(17 - 3x - 3y) = 13; \\ \hline -6x - 8y = -36, \\ -8x - 6y = -38; \end{array}$$

$$x = \frac{22}{7}, \quad y = \frac{15}{7}, \quad z = \frac{8}{7}.$$

takže

$$P = \left\{ \left[\frac{22}{7}, \frac{15}{7}, \frac{8}{7} \right] \right\}.$$

Porovnávací [komparační] metoda

Příklad 2:

$$\begin{array}{l} 3x + 3y + z = 17, \\ 3x + y + 3z = 15, \\ \hline x + 3y + 3z = 13. \end{array}$$

Řešení:

$$\begin{array}{l} z = 17 - 3x - 3y, \\ z = \frac{15 - 3x - y}{3}, \\ z = \frac{13 - x - 3y}{3}; \\ \hline 17 - 3x - 3y = \frac{15 - 3x - y}{3}, \\ \frac{15 - 3x - y}{3} = \frac{13 - x - 3y}{3}. \end{array}$$

Výsledek viz u příkladu 1.

Sčítací [adiční, slučovací] metoda

Příklad 3:

$$\begin{array}{l} 3x + 3y + z = 17, \\ 3x + y + 3z = 15, \\ \hline x + 3y + 3z = 13. \end{array} \quad \begin{array}{ll} .3 & (I) \\ .(-1) & (II) \\ .(-1) & (III) \end{array}$$

Řešení: Po uvedeném vynásobení rovnic sečteme nejprve rovnice (I) a (II) a pak rovnice (I) a (III):

$$\begin{array}{l} 6x + 8y = 36, \\ 8x + 6y = 38. \end{array}$$

Výsledek viz u příkladu 1.

2.1.5.3. Šoustava n lineárních rovnic s n neznámými

Gaussova eliminační metoda

Soustavu n lineárních rovnic s n neznámými:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $a_{11} \neq 0$ a determinant soustavy $\Delta \neq 0$, lze řešit pomocí tzv. *Gaussovy eliminační metody*:

První rovnici soustavy (1) vynásobíme zlomkem $-a_{21}/a_{11}$ a sečteme s druhou rovnicí. Potom vynásobíme první rovnici soustavy (1) zlomkem $-a_{31}/a_{11}$ a sečteme s třetí rovnicí, atd., až se všechny členy obsahující neznámou x_1 u všech rovnic kromě první rovnice eliminují a původní soustava rovnic (1) přejde v soustavu, kde k první rovnici soustavy (1) je připojena soustava $n - 1$ rovnic s $n - 1$ neznámými:

$$\begin{aligned} a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \dots + a'_{3n}x_n &= b'_3, \\ \dots & \\ a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \dots + a'_{nn}x_n &= b'_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Postupujeme-li u soustavy (2) obdobně, dostaneme soustavu $n - 2$ rovnic o $n - 2$ neznámých, atd. Konečně ze soustavy (1) dostaneme tuto soustavu s trojúhelníkovou maticí, která je ekvivalentní se soustavou (1):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n &= b''_3, \\ \dots & \\ a^{(n-1)}_{nn}x_n &= b^{(n-1)}_n, \end{aligned} \tag{3}$$

z níž lze postupně vypočítat hodnoty všech neznámých, počínajíc výpočtem hodnoty neznámé x_n z poslední rovnice.

Příklad:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} x + 2y - 0,7z & = & 21, & .(-3) \\ 3x + 0,2y - z & = & 24, & | \\ 0,9x + 7y - 2z & = & 27; & .(-0,9) \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y - 0,7z = 21, \\ - 5,8y + 1,1z = - 39, \\ 5,2y - 1,37z = 8,1; \end{array} \right. \cdot \frac{5,2}{5,8}$$

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y - 0,7z = 21, \\ - 5,8y + 1,1z = - 39, \\ - \frac{11,13}{29}z = - \frac{779,1}{29}. \end{array} \right.$$

$z = 70$, $y = 20$, $x = 30$, takže $P = \{[30, 20, 70]\}$.

Tabulka 2.1

Výpočetní schéma

	$a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3} \ \dots \ a_{in}$	b_i	
	$\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \ \dots \ \sigma_n$	σ	$\sigma + \sum \sigma_k = \sum s_i$
E. ř. e_{21} $e_{21}a_{1k}$ e_{31} e_{n1}	$a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n}$ $a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ \dots \ a_{2n}$ $a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ \dots \ a_{3n}$ $\vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots$ $a_{n1} \ a_{n2} \ a_{n3} \ \dots \ a_{nn}$	b_1 b_2 b_3 \vdots b_n	s_1 s_2 s_3 \vdots s_n
E. ř.	0 ...		

Symboly v uvedeném výpočetním schématu mají tento význam:

a_{ik} jsou koeficienty u neznámých,

b_i – absolutní členy,

$\sigma_k = \sum_{i=1}^n a_{ik}$ ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$) – sloupcové součty,

$s_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) – řádkové součty,

$\sigma = \sum_{i=1}^n b_i$ je součet absolutních členů,

$e_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ – rozšiřovací činitel,

E.ř. – eliminovaný řádek.

Příklad:

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y - 0,7z = 21, \\ 3x + 0,2y - z = 24, \\ 0,9x + 7y - 2z = 27. \end{array} \right.$$

Tabulka 2.2

Výpočetní schéma

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i	
4,9	9,2	-3,7	72	82,4
E. ř. -3 $(-3) \cdot a_{1k}$ -0,9 $(0,9) \cdot a_{1k}$	1 3 -3 0,9 -0,9	2 0,2 -6 7 -1,8	-0,7 -1 2,1 -2 0,63	21 24 -63 27 -18,9
E. ř. $\frac{5,2}{5,8}$ $\frac{5,2}{5,8} \cdot d'_{2k}$	0 0 -5,2	-5,8 5,2 -5,2	1,1 -1,37 0,986	-39 8,1 -35
	0	-0,384	-26,9	-27,284

Cramerovo pravidlo (viz článek 1.11.3)

2.1.5.4. Soustava dvou kvadratických rovnic se dvěma neznámými

Soustavu rovnic tvaru

$$\left| \begin{array}{l} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{array} \right.$$

lze řešit dosazovací metodou, přičemž však tento postup je početně velmi nepohodlný, neboť vede na rovnici čtvrtého stupně.

Zvláštní případy

a) *Soustava jedné kvadratické a jedné lineární rovnice*

Takovou soustavu lze řešit dosazovací metodou.

Příklad:

$$\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25, \\ x - y = 4. \end{array}$$

Řešení: Po dosazení $y = x - 4$ do první rovnice dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2 + (x - 4)^2 = 25.$$

b) Soustava dvou ryze kvadratických rovnic (bez členu s xy)

Takovou soustavu lze řešit sčítací metodou.

Příklad:

$$\begin{array}{l} 9x^2 - 2y^2 = 18, \\ 5x^2 + 3y^2 = 47; \end{array} \quad \begin{array}{l} .3 \\ .2 \end{array}$$
$$\begin{array}{rcl} 37x^2 & = & 148, \\ x^2 & = & 4, \end{array}$$
$$\begin{array}{cccc} x_1 = 2, & x_2 = -2, & x_3 = -2, & x_4 = 2, \\ y_1 = 3, & y_2 = -3, & y_3 = -3, & y_4 = 3, \end{array}$$

takže

$$P = \{[2, 3], [2, -3], [-2, 3], [-2, -3]\}.$$

c) Soustava rovnic, v nichž se z kvadratických členů vyskytuje jen xy

Takovou soustavu lze řešit sčítací a dosazovací metodou.

Příklad:

$$\begin{array}{l} 5x + y + 3 = 2xy, \\ xy = 2x - y + 9; \end{array} \quad \begin{array}{l} (\text{I}) \\ (\text{II}) \end{array}$$
$$\begin{array}{l} -2xy + 5x + y + 3 = 0, \\ xy - 2x + y - 9 = 0; \end{array} \quad \begin{array}{l} . \\ .2 \end{array}$$
$$\begin{array}{l} x + 3y - 15 = 0, \\ x = 15 - 3y. \end{array}$$

Po dosazení $x = 15 - 3y$ do rovnice (II) dostaneme kvadratickou rovnici v proměnné y :

$$y(15 - 3y) = 2(15 - 3y) - y + 9,$$

$$\text{takže } P = \{[6, 3], [2, \frac{13}{3}]\}.$$

d) *Soustava dvou homogenních kvadratických rovnic*

Kvadratická funkce dvou proměnných x a y se nazývá *homogenní*, jestliže její analytické vyjádření obsahuje jen členy druhého stupně, tj. má-li tvar

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

Substituce $y = xz$ vede na kvadratickou rovnici v proměnné z .

Příklad:

$$\begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 = 39, \\ 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 43; \end{array} \quad | \quad y = xz$$

$$\begin{array}{l} x^2 - x^2z + x^2z^2 = 39, \\ 2x^2 - 3x^2z + 2x^2z^2 = 43; \end{array} \quad |$$

$$\begin{array}{l} x^2(1 - z + z^2) = 39, \\ x^2(2 - 3z + 2z^2) = 43; \end{array} \quad |$$

$$\frac{1 - z + z^2}{2 - 3z + 2z^2} = \frac{39}{43} \quad (\text{kvadratická rovnice v proměnné } z),$$

$$z_1 = \frac{7}{5}, \quad z_2 = \frac{5}{7}.$$

Po dosazení z_1 , resp. z_2 dostaneme kvadratické rovnice v proměnné x_1 , resp. x_2 .

2.1.5.5. Grafické řešení soustav rovnic se dvěma neznámými

Soustavy rovnic prvního stupně

Každou rovnici prvního stupně v proměnných x a y lze považovat za analytické vyjádření funkce (neboli za funkční rovnici), jejímž grafem je přímka. Souřadnice průsečíku S přímek udávají pak reálné řešení soustavy rovnic.

Příklad:

$$\begin{array}{l} x + 3y = 3, \\ x - 3y = 9. \end{array} \quad |$$

Řešení (obr. 50):

$$y = -\frac{1}{3}x + 1,$$

$$y = \frac{1}{3}x - 3.$$

$$x_S = x = 6, \quad y_S = y = -1, \quad \text{takže} \quad P = \{[6, -1]\}.$$

Poznámka:

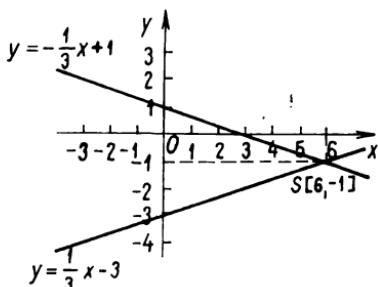
Jsou-li přímky různými rovnoběžkami, resp. vzájemně splývají, pak rovnice soustavy si odporuší, resp. nejsou vzájemně nezávislé.

Soustavy rovnic druhého stupně

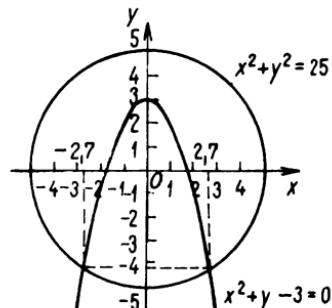
Každou rovnici druhého stupně v proměnných x a y lze považovat za analytické vyjádření funkce (funkční rovnici), jejímž grafem je kuželosečka (parabola, elipsa, hyperbola).

Je-li druhá rovnice soustavy lineární, představuje přímku, jejíž průsečíky s kuželosečkou určují řešení soustavy rovnic.

Jsou-li obě rovnice kvadratické, pak grafy příslušných funkcí jsou kuželosečkami. Souřadnice průsečíků (průsečík může být jeden nebo průsečíky mohou být dva až čtyři) udávají pak reálná řešení soustavy rovnic.



Obr. 50. Grafické řešení soustavy rovnic prvního stupně



Obr. 51. Grafické řešení soustavy rovnic druhého stupně

Příklad:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25, \quad (I) \\ x^2 + y &= 3. \quad (II) \end{aligned}$$

Řešení (obr. 51): Rovnice (I) představuje kružnici s poloměrem $r = 5$ a středem v počátku, kdežto rovnice (II) představuje parabolu s vrcholem $[0, 3]$.

Souřadnice průsečíků jsou

$$x_1 \doteq 2,7, \quad y_1 \doteq -4,2, \quad x_2 \doteq -2,7, \quad y_2 \doteq -4,2,$$

takže .

$$P = \{[2,7; -4,2], [-2,7; -4,2]\}.$$

2.2. NEROVNICE

2.2.1. Základní pojmy

Predikátové formule tvaru $T_1 \mathbf{N} T_2$, kde \mathbf{N} značí kterýkoli ze znaků $>$, \geq , $<$, \leq , \neq , vysvětlených v článku 0.1.5, se nazývají *nerovnice*.

Definiční obor, řešení a obor pravdivosti nerovnice se definují stejně jako u rovnic.

Definičním oborem nerovnice $T_1(x, y, \dots) \mathbf{N} T_2(x, y, \dots)$ nazýváme kartézský součin $O = X \times Y \times \dots$ oborů proměnných termů T_1 a T_2 .

Řešením [pravdivostním prvkem] nerovnice $T_1(x, y, \dots) \mathbf{N} T_2(x, y, \dots)$ s n číselnými proměnnými nazýváme takovou uspořádanou n -tici $[x_0, y_0, \dots] \in X \times Y \times \dots$, že po dosazení jejich členů do dané nerovnice dostaneme pravdivý výrok. Oborem pravdivosti P nerovnice nazýváme množinu všech jejích řešení.

Nerovnice bez číselných proměnných představuje buď pravdivý výrok (pravdivou nerovnost), nebo nepravdivý výrok; např. $7 < 5$ je nepravdivý výrok.

Nerovnice s aspoň jednou číselnou proměnnou představuje predikátovou formuli, která se změní buď v pravdivý výrok (pravdivou nerovnost), nebo v nepravdivý výrok, jestliže za všechny číselné proměnné dosadíme všechny členy některé uspořádané n -tice z definičního oboru dané nerovnice.

2.2.2. Řešení nerovnice

Nerovnice tvaru

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) \mathbf{N} 0, \quad (1)$$

popř. tvaru

$$\frac{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m)}{(x - a_{m+1})(x - a_{m+2}) \dots (x - a_n)} \mathbf{N} 0, \quad (2)$$

kde každá dvě z čísel a_1, a_2, \dots, a_n jsou různá a \mathbf{N} zastupuje některý ze znaků \geq , \leq , $>$, $<$, \neq , řešíme takto:

Nulové body a_1, a_2, \dots, a_n lineárních dvojčlenů uspořádáme podle velikosti a přesvědčíme se, zda je nerovnice splněna v libovolném intervalu (a_i, a_{i+1}) , kde a_i a a_{i+1} jsou dva sousední nulové body. Další intervaly, kde je nerovnice splněna, pak se určí tak, že intervaly, kde je nerovnice splněna, se střídají s intervaly, kde nerovnice splněna není.

Nerovnici (1) nulové body a_1, a_2, \dots, a_n splňují, právě když znak N zastupuje znaky \geq, \leq . Nerovnici (2) nulové body a_1, a_2, \dots, a_m splňují, právě když znak N zastupuje znaky \geq, \leq , ale nulové body $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$ tuto nerovnici nesplňují. O tom, zda určitý interval vyhovuje nebo nevyhovuje dané nerovnici, lze rozhodnout dosazením libovolného čísla $x = k$ z vnitřku tohoto intervalu do dané rovnice. Přitom říkáme, že provádíme pokus pro $x = k$. Postup výpočtu ukážeme na příkladu.

Příklad:

$$\frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(x+4)(x-5)(x+6)} \geq 0.$$

Nulové body: $-6, -4, -2, 1, 3, 5$; přitom body $-2, 1, 3$ nerovnici vyhovují, ale body $-6, -4, 5$ nerovnici nevyhovují.

Dosadíme-li $x = 0$, dostaneme

$$\frac{(-1) \cdot 2 \cdot (-3)}{4 \cdot (-5) \cdot 6} \geq 0,$$

což je nepravdivý výrok. Řešením jsou tedy intervaly

$$(-\infty, -6), \quad (-4, -2), \quad (1, 3), \quad (5, +\infty).$$

Nerovnice tvaru

$$ax^2 + bx + c \text{ N } 0 \quad (a \neq 0),$$

kde N zastupuje některý ze znaků $\geq, \leq, >, <, \neq$, řešíme takto:

Má-li levá strana různé reálné kořeny, píšeme

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

a nerovnici

$$a(x - x_1)(x - x_2) \text{ N } 0$$

řešíme jako v předchozím případě.

Má-li levá strana uvedené nerovnice dvojnásobný kořen, píšeme

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Nerovnice $a(x - x_1)^2 \geq 0$ je splněna pro všechna čísla $x \in \mathbb{R}$ v případě, že $a > 0$, a pro $x = x_1$ v případě, že $a < 0$.

Nerovnice $a(x - x_1)^2 > 0$ je splněna pro všechna čísla $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$ v případě, že $a > 0$, a není splněna pro žádné číslo $x \in \mathbb{R}$ v případě, že $a < 0$.

Nerovnice $a(x - x_1)^2 \leq 0$ je splněna pro všechna čísla $x \in \mathbb{R}$ v případě, že $a < 0$, a pro $x = x_1$ v případě, že $a > 0$.

Nerovnice $a(x - x_1)^2 < 0$ je splněna pro všechna čísla $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$ v případě, že $a < 0$, a není splněna pro žádné číslo $x \in \mathbb{R}$ v případě, že $a > 0$.

Má-li levá strana komplexně sdružené kořeny, pak rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ je buď splněna pro všechna čísla $x \in \mathbb{R}$, nebo není splněna pro žádné číslo $x \in \mathbb{R}$. O tom, který z obou případů nastává, se rozhodne dosazením $x = 0$.

2.3. REÁLNÉ FUNKCE

2.3.1. Základní pojmy

Pojem reálné funkce

Reálnou funkcí f (jedné) reálné proměnné x [stručně (reálnou) funkcí f proměnné x nebo jen funkcí] nazýváme každé zobrazení v množině \mathbb{R} všech reálných čísel (viz článek 0.4.6), tj. množinu f právě těch usporádaných dvojic $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, které lze vytvořit podle nějakého (funkčního) předpisu tak, že každému číslu $x \in \mathbb{R}$ je přiřazeno nejvýše jedno číslo $y \in \mathbb{R}$. Přitom proměnná x se nazývá *nezávisle proměnná [argument]* a proměnná y se nazývá *závisle proměnná*.

Pro určité číslo $x \in \mathbb{R}$ se číslo $y \in \mathbb{R}$, pro něž platí $[x, y] \in f$, nazývá (funkční) hodnota funkce f v čísle x a označuje se $f(x)$. Téhož symbolu $f(x)$ výjimečně používáme pro funkci f , chceme-li zdůraznit, že nezávisle proměnnou funkce f značíme x .

Množina $D = O_1(f) \subseteq \mathbb{R}$, která má tu vlastnost, že ke každému číslu $x \in D$ je přiřazeno právě jedno takové číslo y , že $[x, y] \in f$, se nazývá (definiční) obor funkce f , kdežto množina $G = O_2(f)$, která má tu vlastnost, že ke každému číslu $y \in G$ existuje takové číslo $x \in D$, že $[x, y] \in f$, se nazývá funkční obor (obor funkčních hodnot) funkce f .

Reálnou funkci f proměnné x na množině $D = O_1(f)$ (viz článek 0.4.6) značíme

$$f: D \rightarrow G,$$

kde $G \supseteq O_2(f)$. Je-li $D = O_1(f)$ a $G = O_2(f)$, píšeme

$$f: D \xrightarrow{\text{na}} G.$$

Reálnou funkci $f: D \xrightarrow{\text{na}} G$ lze uvádět v množinovém zápisu:

$$f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x), x \in D, y \in G\}$$

nebo stručně

$$f = \{[x, y] \mid y = f(x), x \in D\}.$$

Zápis $y = f(x)$ značí, že jsme pro nějakou funkci zvolili znak f , pro nezávisle proměnnou znak x a pro závisle proměnnou znak y .

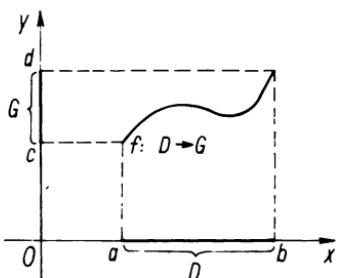
Funkční předpis je zpravidla dán v *analytickém tvaru*, tj. nějakým vzorcem pro výpočet hodnot závisle proměnné (např. $y = x^2$, $y = \sin x$ apod.). Je-li funkční předpis tvaru $y = f(x)$, říkáme, že funkce f je dána v *explicitním tvaru* [*explicitně*], a mluvíme o *explicitní funkci*. Je-li funkční předpis tvaru $F(x, y) = 0$, říkáme, že funkce f je dána v *implicitním tvaru* [*implicitně*], a mluvíme o *implicitní funkci* (viz článek 2.3.4). Funkce bývá také dána kartézským grafem, orientovaným grafem, tabulkou funkčních hodnot, graficky nebo jiným způsobem (např. jako součet funkční řady).

Rovnost, součet, součin a podíl reálných funkcí

Nechť f a g jsou dvě reálné funkce proměnné x s definičními obory D_1 a D_2 a platí $D \subseteq D_1 \cap D_2$ ($D \neq \emptyset$). Pak říkáme, že funkce f , g jsou si rovny na množině D , jestliže pro každé číslo $x \in D$ platí $f(x) = g(x)$. Dále říkáme, že funkce h , resp. k je součtem, resp. součinem funkcí f a g na množině D , jestliže pro každé číslo $x \in D$ platí $h(x) = f(x) + g(x)$, resp. $k(x) = f(x)g(x)$. Funkce l se nazývá podíl funkcí f a g na množině D , jestliže pro každé číslo $x \in D$ platí $g(x) \neq 0$ a $l(x) = f(x)/g(x)$.

Kartézský graf funkce

Kartézským grafem funkce $y = f(x)$, jejímž definičním oborem je množina D , nazýváme množinu právě těch bodů v rovině xy s kartézskou souřadnicovou soustavou $(O; x, y)$, které mají tvar $[x, f(x)]$ (obr. 52).



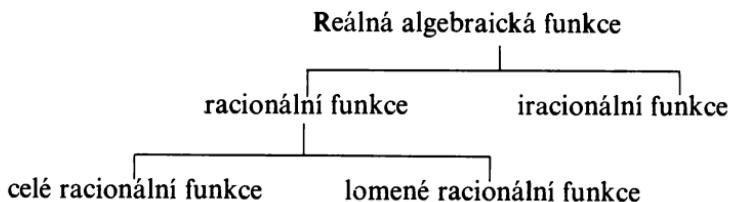
Obr. 52. Kartézský graf funkce $y = f(x)$ na intervalu (a, b) .

Algebraické funkce

Reálná funkce jedné proměnné se nazývá *algebraická*, jestliže ji lze vyjádřit vzorcem vytvořeným z konstant a z nezávisle proměnné pomocí konečného

počtu základních početních operací, za něž považujeme sčítání, odčítání, násobení, dělení a umocňování při racionálním exponentu. Funkce, která není algebraická, se nazývá *transcendentní*.

Rozdělení algebraických funkcí



Celá racionální funkce n -tého stupně (polynom [mnohočlen] n -tého stupně):

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$(n \in \mathbb{N}; a_k \in \mathbb{R}; k = 0, 1, \dots, n; a_n \neq 0)$.

Lomená racionální funkce

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$(m, n \in \mathbb{N}; a_k, b_l \in \mathbb{R}; k = 0, 1, \dots, n; l = 0, 1, \dots, m; a_n \neq 0, b_m \neq 0)$.

Jestliže $n < m$, jde o *ryze lomenou racionální funkci*.

Jestliže $n \geq m$, jde o *neryze lomenou racionální funkci*.

Jestliže $n = m = 1$, jde o *lineární lomenou racionální funkci*.

Sudé a liché funkce

Funkce $y = f(x)$ se nazývá *sudá*, resp. *lichá*, právě když definiční obor D funkce f je souměrný podle počátku souřadnicové soustavy (tj. s každým bodem $x \in D$ patří do oboru D také bod $-x$) a pro každé číslo $x \in D$ platí $f(-x) = f(x)$, resp. $f(-x) = -f(x)$.

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y , kdežto graf liché funkce je souměrný podle počátku O .

Ohraničené [omezené] funkce

Existuje-li taková konstanta K , že pro všechna čísla $x \in D_1 \subseteq D$, kde D je definiční obor funkce f , platí $f(x) \leq K$, resp. $f(x) \geq K$, resp. $|f(x)| \leq K$, pak se funkce f nazývá *shora ohraničená* [*shora omezená*], resp. *zdola ohraničená* [*zdola omezená*], resp. *ohraničená [omezená] na množině D_1* .

Monotónní a ryze monotónní funkce v bodě

Jestliže funkce $y = f(x)$ je definována na okolí $U(x_0)$ nějakého bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a platí:

- a) $f(x) < f(x_0)$ pro $\forall x \in \tilde{U}_-(x_0)$ a $f(x_0) < f(x)$ pro $\forall x \in \tilde{U}_+(x_0)$, říkáme, že funkce f je rostoucí v bodě x_0 ;
- b) $f(x) > f(x_0)$ pro $\forall x \in \tilde{U}_-(x_0)$ a $f(x_0) > f(x)$ pro $\forall x \in \tilde{U}_+(x_0)$, říkáme, že funkce f je klesající v bodě x_0 ;
- c) $f(x) \leq f(x_0)$ pro $\forall x \in \tilde{U}_-(x_0)$ a $f(x_0) \leq f(x)$ pro $\forall x \in \tilde{U}_+(x_0)$, říkáme, že funkce f je neklesající v bodě x_0 ;
- d) $f(x) \geq f(x_0)$ pro $\forall x \in \tilde{U}_-(x_0)$ a $f(x_0) \geq f(x)$ pro $\forall x \in \tilde{U}_+(x_0)$, říkáme, že funkce f je nerostoucí v bodě x_0 .

Monotónní a ryze monotónní funkce na množině

Jestliže funkce $y = f(x)$ je definována na množině D , $D_1 \subseteq D$ a pro každá dvě čísla $x_1, x_2 \in D_1$ ($x_1 < x_2$) platí nerovnost:

- a) $f(x_1) < f(x_2)$, říkáme, že funkce f je rostoucí na množině D_1 ;
- b) $f(x_1) > f(x_2)$, říkáme, že funkce f je klesající na množině D_1 ;
- c) $f(x_1) \leq f(x_2)$, říkáme, že funkce f je neklesající na množině D_1 ;
- d) $f(x_1) \geq f(x_2)$, říkáme, že funkce f je nerostoucí na množině D_1 .

Neklesající funkce a nerostoucí funkce nazýváme souhrnně *monotónními funkcemi*, kdežto rostoucí funkce a klesající funkce nazýváme souhrnně *ryze monotónními funkcemi*.

Jestliže funkce f je rostoucí, resp. klesající, resp. neklesající, resp. nerostoucí v každém bodě x intervalu I , pak je rostoucí, resp. klesající, resp. neklesající, resp. nerostoucí na intervalu I .

Konvexní a konkávní funkce v bodě

Jestliže funkce $y = f(x)$ je definována na okolí $U(x_0)$ nějakého bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, v němž existuje vlastní derivace $f'(x_0)$ (viz kapitolu 5.2), a platí:

- a) $f(x) < f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ pro $\forall x \in U(x_0)$, říkáme, že funkce f je v bodě x_0 ryze konkávní;
- b) $f(x) > f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ pro $\forall x \in U(x_0)$, říkáme, že funkce f je v bodě x_0 ryze konvexní;
- c) $f(x) \leq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ pro $\forall x \in U(x_0)$, říkáme, že funkce f je v bodě x_0 konkávní;
- d) $f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ pro $\forall x \in U(x_0)$, říkáme, že funkce f je v bodě x_0 konvexní.

Konvexní a konkávní funkce na intervalu

Jestliže funkce $y = f(x)$ je definována na intervalu I a pro každé tři body $P_1[x_1, f(x_1)]$, $P_2[x_2, f(x_2)]$, $P_3[x_3, f(x_3)]$ ($x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$) platí, že

- bod P_2 leží pod přímkou určenou body P_1 a P_3 , říkáme, že funkce f je *ryze konvexní na intervalu I* ;
- bod P_2 leží nad přímkou určenou body P_1 a P_3 , říkáme, že funkce f je *ryze konkávní na intervalu I* ;
- bod P_2 leží buď pod přímkou určenou body P_1 a P_3 , nebo na ní, říkáme, že funkce f je *konvexní na intervalu I* ;
- bod P_2 leží buď nad přímkou určenou body P_1 a P_3 , nebo na ní, říkáme, že funkce f je *konkávní na intervalu I* .

Homogenní funkce jedné proměnné

Funkce $y = f(x)$ se nazývá *homogenní funkce k-tého stupně na množině D* , právě když pro každé číslo z určitého okolí čísla $t = 1$ patří do množiny D s každým číslem x také číslo tx a platí

$$f(tx) = t^k f(x),$$

kde k se nazývá *stupeň homogenní funkce f* .

Periodická funkce

Funkci $y = f(x)$ nazýváme *periodickou funkci s periodou p* , existuje-li takové nejmenší číslo $p > 0$, že platí:

- Je-li funkce f definováná v bodě x_0 , je definována také v bodech $x_k = x_0 + kp$ pro všechna celá čísla k .
- Pro všechna čísla x z definičního oboru funkce f platí $f(x) = f(x + kp)$.

Složená funkce

Jestliže funkce $u = \varphi(x)$ je definována na oboru D_1 a funkce $y = f(u)$ na oboru D_2 a jestliže množina D je takovou podmnožinou množiny D_1 , že pro každé číslo $x \in D$ patří příslušné číslo $\varphi(x) = u$ do množiny D_2 , pak funkce $y = f(\varphi(x))$ [která se také značí $y = (f \circ \varphi)(x)$], definovaná na oboru D , se nazývá *složená funkce s vnitřní složkou $u = \varphi(x)$ a vnější složkou $y = f(u)$* .

Prostá funkce

Funkce $y = f(x)$ s definičním oborem D se nazývá *prostá*, jestliže pro každá dvě čísla $x_1, x_2 \in D$ ($x_1 \neq x_2$) platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Inverzní funkce

Jestliže funkce $y = f(x)$ je prostá na oboru D a jejím funkčním oborem je množina G , lze na množině G definovat funkci, která každému číslu $y \in G$ přiřazuje právě to číslo $x \in D$, pro které je $f(x) = y$, a která se nazývá *inverzní funkce k funkci f* a značí se f_{-1} [někdy také f^{-1} nebo \hat{f}]. Funkce f a f_{-1} se nazývají *vzájemně inverzní* a platí pro ně rovnosti

$$\begin{aligned} f_{-1}(f(x)) &= x && \text{pro } \forall x \in D, \\ f(f_{-1}(y)) &= y && \text{pro } \forall y \in G. \end{aligned}$$

Funkce $x = f_{-1}(y)$, inverzní k funkci $y = f(x)$, má za argument proměnnou y , kdežto její závisle proměnnou je x . Protože však argument obvykle označujeme písmenem x a závisle proměnnou písmenem y , budeme funkci f_{-1} často psát ve tvaru $y = f_{-1}(x)$.

Definičním oborem funkce f_{-1} , inverzní k funkci f , je funkční obor funkce f , a funkčním oborem funkce f_{-1} je definiční obor funkce f . Grafy funkcí f a f_{-1} jsou souměrné podle přímky $y = x$.

Jestliže funkce f je dána v analytickém tvaru $y = f(x)$, pak analytický tvar inverzní funkce dostaneme tak, že v analytickém tvaru funkce f všude místo x píšeme y a místo y píšeme x a v takto získaném vyjádření osamostatníme proměnnou y .

Příklad:

Funkce

$$y = \frac{x}{1+x}$$

je prostá, neboť pro každou dvojici čísel $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ($x_1 \neq x_2$) platí

$$\begin{aligned} x_1 + x_1 x_2 &\neq x_2 + x_1 x_2, \\ x_1(1 + x_2) &\neq x_2(1 + x_1), \end{aligned}$$

$$\frac{x_1}{1+x_1} \neq \frac{x_2}{1+x_2}.$$

Proto k ní existuje inverzní funkce. Jestliže ve vzorci $y = x/(1+x)$ vzájemně zaměníme proměnné x a y , pak

$$x = \frac{y}{1+y},$$

odkud dostaneme inverzní funkci

$$y = \frac{x}{1-x}$$

k dané funkci.

Hornerovo schéma

Pomocí Hornerova schématu lze rychle určit funkční hodnotu $P(x_1)$ celé racionální funkce

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \quad \text{pro } x = x_1.$$

Hornerovo schéma se sestavuje takto:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	\dots
0	$a_n x_1$	$a_n x_1^2 + a_{n-1} x_1$	$a_n x_1^3 + a_{n-1} x_1^2 + a_{n-2} x_1$	\dots
a_n	$a_n x_1 + a_{n-1}$	$a_n x_1^2 + a_{n-1} x_1 + a_{n-2}$	$a_n x_1^3 + a_{n-1} x_1^2 + a_{n-2} x_1 + a_{n-3}$	\dots
\dots	a_0	\dots	\dots	
\dots	$a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_{n-2} x_1^{n-2} + \dots + a_1 x_1$	\dots	\dots	
\dots	$a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_{n-2} x_1^{n-2} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = f(x_1)$	\dots	\dots	

První řádek obsahuje koeficienty polynomu. Je třeba pamatovat, že je-li některý z koeficientů a_k roven nule, je nutno na příslušném místě v prvním řádku Hornerova schématu napsat nulu.

1. krok: Koeficient a_n vynásobíme číslem x_1 a k součinu přičteme a_{n-1} .
 2. krok: Součet opět vynásobíme číslem x_1 a k součinu přičteme a_{n-2} .
 3. krok: Součet opět vynásobíme číslem x_1 a k součinu přičteme a_{n-3} , atd.
- Takto postupujeme až k poslednímu součtu, který je hledanou funkční hodnotou v bodě x_1 .

Příklad:

Má se vypočítat hodnota funkce

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x + 7 \quad \text{v bodě } x_1 = 2,3.$$

Pomocí Hornerova schématu dostaneme

1	2	0	-5	7	(řádek koeficientů)
0	2,3	9,89	22,747	40,818 1	
1	4,3	9,89	17,747	47,818 1	$= f(2,3)$

Je tedy $f(2,3) \doteq 47,82$.

Nulové body a póly

Nulovým bodem x_0 funkce f nazýváme takovou hodnotu nezávisle proměnné x , pro kterou $f(x_0) = 0$. *Pólem* x_0 funkce f nazýváme takovou hodnotu nezávisle proměnné x , pro kterou

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm \infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm \infty.$$

Spojitost funkce

Říkáme, že funkce $f = \{[x, f(x)] \mid x \in D, f(x) \in G\}$, ježíž definiční obor D obsahuje okolí $U(c)$ bodu c , je spojitá v bodě c , právě když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, že pro každé číslo $x \in U(c, \delta)$ je

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Říkáme, že funkce $f = \{[x, f(x)] \mid x \in D, f(x) \in G\}$, ježíž definiční obor D obsahuje levé okolí $U_-(c)$, resp. pravé okolí $U_+(c)$ bodu c , je spojitá zleva, resp. spojitá zprava v bodě c , právě když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, že pro každé číslo $x \in U_-(c, \delta)$, resp. $x \in U_+(c, \delta)$ je

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Funkce f je spojitá v bodě c , právě když má tyto tři vlastnosti:

- Funkce f je definována v bodě $x = c$ [hodnota $f(c)$ je tedy konečná], tj. $[c, f(c)] \in f$.
- Existuje limita $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = C$ (viz definici limity funkce v článku 5.1.2).
- Platí $f(c) = C$.

Funkce f je spojitá zleva, resp. spojitá zprava v bodě c , právě když má tyto tři vlastnosti:

- Funkce f je definována v bodě $x = c$, tj. $[c, f(c)] \in f$.
- Existuje $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = C_1$, resp. $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = C_2$.
- Platí $f(c) = C_1$, resp. $f(c) = C_2$.

Jsou-li funkce f a g spojité v bodě c , pak funkce $af + bg$ ($a, b \in \mathbb{R}$) a fg jsou také spojité v bodě c . Je-li $g(c) \neq 0$, pak také funkce f/g je spojitá v bodě c .

Body nespojitosti funkce

Bod, v němž funkce f není spojitá, se nazývá *bod nespojitosti funkce f* .

Jestliže v bodě c obě jednostranné limity funkce $y = f(x)$ existují, jsou konečné a jsou rovny číslu C , tj. $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = C$, ale funkce f buď není v bodě c definována, nebo $f(c) \neq C$, pak říkáme, že funkce f má v bodě c odstranitelnou nespojitost.

Bod nespojitosti c , v němž existují vzájemně různé vlastní limity funkce $y = f(x)$ zprava a zleva, tj. $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$, se nazývá *bod nespojitosti prvního druhu funkce f*. Číslo $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ se nazývá *skok funkce f v bodě c*.

Bod nespojitosti c , v němž buď neexistuje limita funkce f , nebo aspoň jedna z jednostranných limit funkce f není konečná, se nazývá *bod nespojitosti druhého druhu funkce f*.

Příklad 1:

Funkce $y = 1/x$ je v bodě $x = 0$ nespojitá. Bod $x = 0$ je pólem.

Příklad 2:

Funkce

$$y = \frac{3}{1 - e^{1/x}}$$

je v bodě $x = 0$ nespojitá. Bod $x = 0$ je bodem nespojitosti prvního druhu.

Příklad 3:

Funkce

$$y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

je v bodech $x = \pm 1$ nespojitá. V bodě $x = 1$ má tato funkce odstranitelnou nespojitosť, neboť

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{3}{2}.$$

Bod $x = -1$ je pólem.

Spojité funkce na intervalu

Funkce f se nazývá *spojitá na otevřeném intervalu (a, b)* , právě když je spojita v každém bodě intervalu (a, b) .

Funkce f se nazývá *spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$* , právě když je spojita v každém vnitřním bodě tohoto intervalu, v bodě a je spojita zprava a v bodě b je spojita zleva.

Funkce po částech spojité

Funkce, která je spojita na intervalu $\langle a, b \rangle$ s výjimkou konečně mnoha bodů, v nichž má odstranitelnou nespojitosť nebo které jsou body nespojitosť prvního druhu, se nazývá *funkce po částech spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$* .

Stejnoměrně spojité funkce

Funkce $y = f(x)$ se nazývá stejnoměrně spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, právě když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (tj. číslo δ závisí jen na čísle ε), že pro každá dvě čísla x a $x + h$ z intervalu $\langle a, b \rangle$, jejichž vzdálenost $|h| < \delta$, platí nerovnost

$$|f(x + h) - f(x)| < \varepsilon.$$

Jsou-li funkce f a g stejnoměrně spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak funkce $cf \pm dg$ ($c, d \in \mathbb{R}$) a fg jsou také stejnoměrně spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$. Jestliže v každém bodě intervalu $\langle a, b \rangle$ je $g(x) \neq 0$, pak také funkce f/g je stejnoměrně spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$.

2.3.2. Přibližné vyjádření funkcí pomocí interpolačních vzorců Lagrangeův vzorec

$$\begin{aligned} y = f(x) &= y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)\dots(x_1 - x_n)} + \\ &+ y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)\dots(x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\dots(x_2 - x_n)} + \dots \\ &\dots + y_n \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3)\dots(x_n - x_{n-1})}, \end{aligned}$$

přičemž hodnoty y_1, y_2, \dots, y_n funkce v bodech $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ jsou známé nebo jsou předem dány.

Příklad:

Jaké přibližné vyjádření polynomem minimálního stupně má funkce daná tabulkou:

x	1	4	6	9	?
y	2	5	3	6	

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot \frac{(x - 4)(x - 6)(x - 9)}{(1 - 4)(1 - 6)(1 - 9)} + 5 \cdot \frac{(x - 1)(x - 6)(x - 9)}{(4 - 1)(4 - 6)(4 - 9)} + \\ &+ 3 \cdot \frac{(x - 1)(x - 4)(x - 9)}{(6 - 1)(6 - 4)(6 - 9)} + 6 \cdot \frac{(x - 1)(x - 4)(x - 6)}{(9 - 1)(9 - 4)(9 - 6)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{60}(x^3 - 19x^2 + 114x - 216) + \\ &+ \frac{1}{6}(x^3 - 16x^2 + 69x - 54) - \\ &- \frac{1}{10}(x^3 - 14x^2 + 49x - 36) + \\ &+ \frac{1}{20}(x^3 - 11x^2 + 34x - 24), \end{aligned}$$

$$y = \underline{\frac{1}{10}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{32}{5}x - 3}.$$

Newtonův vzorec [Newtonův interpolační polynom]

$$y = y_1 + A_1(x - x_1) + A_2(x - x_1)(x - x_2) + \\ + A_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \dots \\ \dots + A_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n).$$

Přitom

$$A_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad A_2 = \frac{(y_3 - y_1) - A_1(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}, \\ A_3 = \frac{(y_4 - y_1) - A_1(x_4 - x_1) - A_2(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}$$

atd. Tento vzorec se podstatně zjednoduší, jsou-li hodnoty x ekvidistantní, tj. je-li $x_k - x_{k-1} = h$.

Položíme-li

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= \Delta y_1, \\ y_3 - y_2 &= \Delta y_2, \\ y_4 - y_3 &= \Delta y_3, \dots; \\ \Delta y_2 - \Delta y_1 &= \Delta^2 y_1, \\ \Delta y_3 - \Delta y_2 &= \Delta^2 y_2, \\ \Delta y_4 - \Delta y_3 &= \Delta^2 y_3, \dots; \\ \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 &= \Delta^3 y_1, \\ \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 &= \Delta^3 y_2, \\ \Delta^2 y_4 - \Delta^2 y_3 &= \Delta^3 y_3, \dots; \\ \dots \dots \dots \\ \Delta^{n-2} y_2 - \Delta^{n-2} y_1 &= \Delta^{n-1} y_1, \\ \Delta^{n-2} y_3 - \Delta^{n-2} y_2 &= \Delta^{n-1} y_2, \\ \Delta^{n-2} y_4 - \Delta^{n-2} y_3 &= \Delta^{n-1} y_3, \dots, \end{aligned}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} y &= y_1 + \frac{\Delta y_1(x - x_1)}{1! h} + \frac{\Delta^2 y_1(x - x_1)(x - x_2)}{2! h^2} + \\ &\quad + \frac{\Delta^3 y_1(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{3! h^3} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\Delta^{n-1} y_1(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{n-1})}{(n-1)! h^{n-1}}, \end{aligned}$$

popř. s novou proměnnou t : $x = x_1 + th$:

$$y = y_1 + \binom{t}{1} \Delta y_1 + \binom{t}{2} \Delta^2 y_1 + \binom{t}{3} \Delta^3 y_1 + \dots + \binom{t}{n} \Delta^n y_1.$$

Příklad:

Jaké přibližné vyjádření má funkce daná tabulkou

x	2	3	4	5	6
y	3	5	4	2	7

1. krok: Určíme diference:

$$\begin{array}{l|l|l} \Delta y_1 = & 5 - 3 = & 2 \\ \Delta y_2 = & 4 - 5 = & -1 \\ \Delta y_3 = & 2 - 4 = & -2 \\ \Delta y_4 = & 7 - 2 = & 5 \\ \Delta^3 y_1 = & -1 + 3 = & 2 \\ \Delta^3 y_2 = & 7 + 1 = & 8 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} \Delta^2 y_1 = -1 - 2 = -3 \\ \Delta^2 y_2 = -2 + 1 = -1 \\ \Delta^2 y_3 = 5 + 2 = 7 \\ \Delta^4 y_1 = 8 - 2 = 6 \end{array}$$

2. krok: Po dosazení do předposledního vzorce dostaneme

$$\begin{aligned} y = 3 + \frac{2(x-2)}{1! \cdot 1} + \frac{-3(x-2)(x-3)}{2! \cdot 1^2} + \\ + \frac{2(x-2)(x-3)(x-4)}{3! \cdot 1^3} + \\ + \frac{6(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{4! \cdot 1^4} = \\ = 3 + 2x - 4 - \frac{3}{2}(x^2 - 5x + 6) + \\ + \frac{1}{3}(x^3 - 9x^2 + 26x - 24) + \\ + \frac{1}{4}(x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120), \\ y = \underline{\frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{6}x^3 + \frac{53}{4}x^2 - \frac{61}{3}x + 12}. \end{aligned}$$

2.3.3. Funkce několika proměnných

Každé zobrazení množiny Ω_2 uspořádaných dvojic $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ do množiny \mathbb{R} nazýváme *reálnou funkci dvou reálných proměnných* x, y .

Způsob zápisu:

$$z = f(x, y)$$

nebo v množinovém zápisu:

$$f = \{[[x, y], z] \mid z = f(x, y), [x, y] \in \Omega_2\}.$$

Zobrazení množiny Ω_n uspořádaných n -tic $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ do množiny \mathbb{R} nazýváme *reálnou funkci n reálných proměnných* x_1, x_2, \dots, x_n .

Způsob zápisu:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

nebo v množinovém zápisu:

$$\begin{aligned}f &= \{[[x_1, x_2, \dots, x_n], y] \mid y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \Omega_n\} = \\&= \{[X, y] \mid y = f(X), [X] \in \Omega_n\}.\end{aligned}$$

Homogenní funkce n proměnných

Funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se nazývá *homogenní funkce k-tého stupně na množině Ω_n* , právě když pro každé číslo z určitého okolí čísla $t = 1$ patří do množiny Ω_n s každou n -ticí $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ také n -tice $[tx_1, tx_2, \dots, tx_n]$ a platí

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

kde k se nazývá *stupeň homogenní funkce f*.

Spojitost funkcí několika proměnných

Říkáme, že reálná funkce f n reálných proměnných, jejíž definiční obor Ω_n obsahuje okolí $K(\mathbf{c})$ bodu $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_n]$, je *spojitá v bodě c*, právě když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna čísla $\mathbf{x} \in K(\mathbf{c}, \delta)$ je

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(c_1, c_2, \dots, c_n)| < \varepsilon.$$

Funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je spojitá v bodě $[c_1, c_2, \dots, c_n]$, právě když má tyto tři vlastnosti:

- Funkce f je definována v bodě $[x_1, x_2, \dots, x_n] = [c_1, c_2, \dots, c_n]$.
- Existuje vlastní limita C funkce f v bodě $[c_1, c_2, \dots, c_n]$ (viz článek 5.1.2).
- Platí $f(c_1, c_2, \dots, c_n) = C$.

2.3.4. Implicitní funkce

Je-li dána rovnice

$$F(x, y) = 0,$$

kde F je funkce dvou proměnných na množině Ω_2 , pak říkáme, že *funkce $y = f(x)$ je na množině D řešením této rovnice*, jestliže pro každé číslo $x \in D$ je $[x, f(x)] \in \Omega_2$ a

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Funkci f , která je řešením rovnice $F(x, y) = 0$, nazýváme funkci danou v implicitním tvaru [funkci danou implicitně, implicitní funkci].

Příklad:

Na intervalu $(-a, a)$ jsou řešenimi rovnice $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ tyto funkce:

$$\begin{aligned}y_1 &= \sqrt{(a^2 - x^2)}, \\y_2 &= -\sqrt{(a^2 - x^2)}.\end{aligned}$$

Věta o implicitních funkcích: Má-li funkce $F(x, y)$ na okolí bodu $[c, d]$ spojité parciální derivace prvního řádu (viz kapitolu 5.4), přičemž

$$\frac{\partial F}{\partial y}(c, d) \neq 0,$$

pak na určitém okolí bodu c existuje jediná funkce $y = f(x)$, která je řešením rovnice $F(x, y) = 0$ a vyhovuje podmínce $d = f(c)$. Funkce f je na tomto okolí bodu c spojitá.

Obdobně definujeme řešení $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rovnice

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0.$$

Má-li funkce $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ na okolí bodu $[c_1, c_2, \dots, c_n, d]$ spojité parciální derivace prvního řádu, přičemž platí

$$\frac{\partial F}{\partial y}(c_1, c_2, \dots, c_n, d) \neq 0,$$

pak na určitém okolí bodu $[c_1, c_2, \dots, c_n]$ existuje jediná funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, která je řešením rovnice $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ a vyhovuje podmínce $d = f(c_1, c_2, \dots, c_n)$. Funkce f je na okolí bodu $[c_1, c_2, \dots, c_n]$ spojitá.

2.3.5. Kartézské grafy funkcí

2.3.5.1. Algebraické funkce

Celá racionální funkce prvního stupně [lineární funkce]

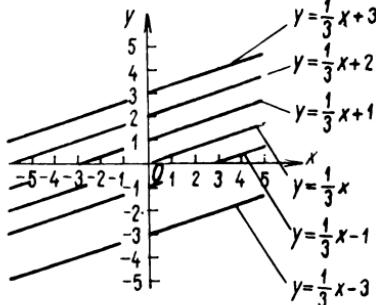
Obecný tvar funkce: $y = a_1x + a_0$.

Popis grafu: přímka.

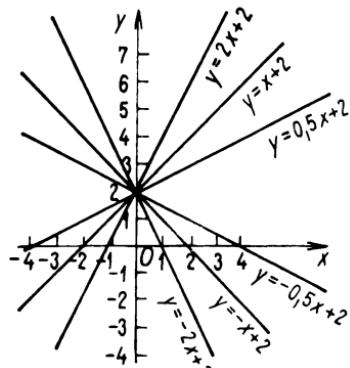
Koefficienty mají tento význam:

$a_1 = \operatorname{tg} \alpha$ – směrnice přímky, která je grafem lineární funkce
(viz článek 4.1.3);

- $a_1 > 0$ — směrnice grafu rostoucí lineární funkce;
 $a_1 < 0$ — směrnice grafu klesající lineární funkce;
 a_0 — úsek (vyťatý přímkou) na ose y ;
 $a_0 = 0$ — přímka prochází počátkem O ;
 $a_1 = 0$ — přímka je rovnoběžná s osou x .



Obr. 53. Grafy lineárních funkcí při
 $a_1 = \text{konst}$



Obr. 54. Grafy lineárních funkcí při
 $a_0 = \text{konst}$

Příklady:

V obrázcích 53 a 54 jsou grafy lineárních funkcí.

Celá racionální funkce druhého stupně [kvadratická funkce]

Obecný tvar funkce:

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Popis grafu: parabola druhého stupně [kvadratická parabola], jejíž osa je rovnoběžná s osou y .

Koeficient a_2 má tento význam:

$a_2 > 0$ — parabola je otevřená nahoru;

$a_2 < 0$ — parabola je otevřená dolů.

Vrchol paraboly

$$V = \left[\frac{-a_1}{2a_2}, -\frac{a_1^2}{4a_2} + a_0 \right].$$

Zvláštní případy:

$y = x^2 + px + q$ – normální parabola s vrcholem

$$V = \left[-\frac{p}{2}, -\left[\left(\frac{p}{2} \right)^2 - q \right] \right]$$

a osou rovnoběžnou s osou y , která je otevřená nahoru;

$$y = a_2 x^2$$

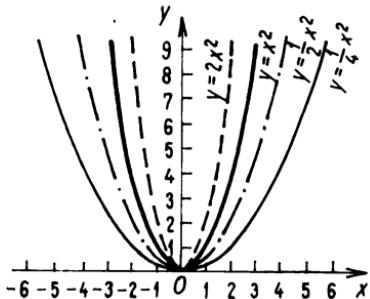
– parabola s vrcholem v počátku O (obr. 55);

$$y = x^2 + a_0$$

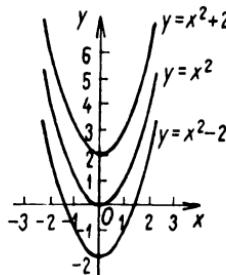
– normální parabola s vrcholem $V[0, a_0]$ (obr. 56);

$$y = (x + b)^2$$

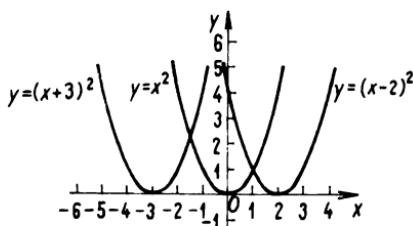
– normální parabola s vrcholem $V[-b, 0]$ (obr. 57).



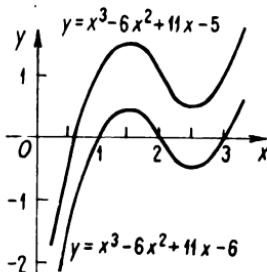
Obr. 55. Paraboly $y = a_2 x^2$ s vrcholem v počátku O



Obr. 56. Paraboly $y = x^2 + a_0$ s vrcholem $V[0, a_0]$



Obr. 57. Paraboly $y = (x + b)^2$ s vrcholem $V[-b, 0]$



Obr. 58. Kubické paraboly

Celá racionální funkce třetího stupně

Obecný tvar funkce:

$$y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Popis grafu: parabola třetího stupně [kubická parabola].

Koeficienty a_3 , a_0 mají tento význam:

$a_3 > 0$ – parabola probíhá z dolní pololoroviny roviny xy do její horní pololoroviny (obr. 58);

$a_3 < 0$ – parabola probíhá opačně než při $a_3 > 0$;

a_0 – úsek (vyťatý křivkou) na ose y .

Zvláštní případ:

$$y = x^3 \text{ – normální kubická parabola (obr. 59).}$$

Sudé mocninové [potenční] funkce

Obecný tvar funkce:

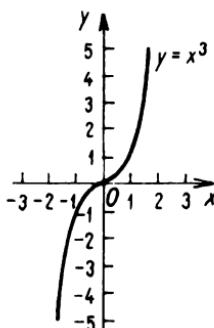
$$y = x^{2n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Popis grafu: normální parabola $(2n)$ -tého stupně s vrcholem $V[0, 0]$, která je otevřená nahoru (obr. 60).

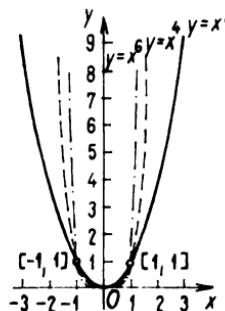
Obecný tvar funkce:

$$y = -x^{2n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Popis grafu: normální parabola $(2n)$ -tého stupně, která je otevřená dolů.



Obr. 59. Normální kubická parabola
(graf funkce $y = x^3$)



Obr. 60. Grafy funkcí $y = x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$)

Liché mocninové [potenční] funkce

Obecný tvar funkce:

$$y = x^{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Popis grafu: normální parabola $(2n + 1)$ -ního stupně, která leží v prvním a třetím kvadrantu a jejímž středem souměrnosti je počátek O (obr. 61).

Obecný tvar funkce:

$$y = -x^{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

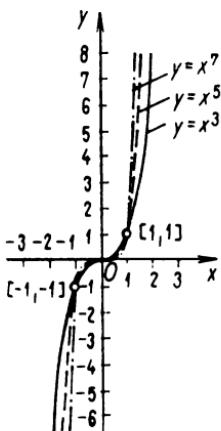
Popis grafu: normální parabola $(2n+1)$ -ního stupně, která leží v druhém a čtvrtém kvadrantu a jejímž středem souměrnosti je počátek O ; sestrojí se jako křivka osově souměrná podle osy x vzhledem ke grafu funkce $y = x^{2n+1}$.

Sudé mocninové [potenční] funkce se záporným exponentem

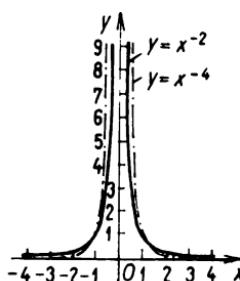
Obecný tvar funkce:

$$y = x^{-2n} \quad (x \neq 0, n \in \mathbb{N}).$$

Popis grafu: hyperbola $(2n)$ -tého stupně, která leží v prvním a druhém kvadrantu (obr. 62).



Obr. 61. Grafy funkcí $y = x^{2n+1}$
($n \in \mathbb{N}$)



Obr. 62. Grafy funkcí $y = x^{-2n}$
($n \in \mathbb{N}$)

Obecný tvar funkce:

$$y = -x^{-(2n+1)} \quad (x \neq 0, n \in \mathbb{N}).$$

Popis grafu: hyperbola $(2n)$ -tého stupně, která leží v třetím a čtvrtém kvadrantu; sestrojí se jako křivka osově souměrná podle osy x vzhledem ke grafu funkce $y = x^{-2n}$:

Liché mocninové [potenční] funkce se záporným exponentem

Obecný tvar funkce:

$$y = x^{-(2n+1)} \quad (x \neq 0, n \in \mathbb{N}_0).$$

Popis grafu: hyperbola $(2n+1)$ -ního stupně, která leží v prvním a třetím kvadrantu a jejímž středem souměrnosti je počátek O (obr. 63).

Zvláštní případ ($n = 0$):

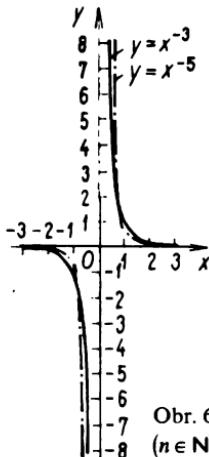
$$y = x^{-1} = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0);$$

grafem této funkce f , pro niž platí $f = f_{-1}$, je rovnoosá hyperbola (obr. 64).

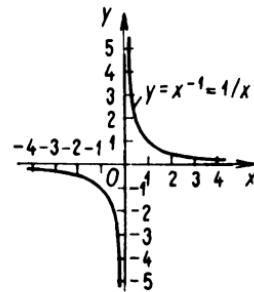
Obecný tvar funkce:

$$y = -x^{-(2n+1)} \quad (x \neq 0, n \in \mathbb{N}_0).$$

Popis grafu: hyperbola $(2n+1)$ -ního stupně, která leží v druhém a čtvrtém kvadrantu; sestrojí se jako křivka osově souměrná podle osy x vzhledem ke grafu funkce $y = x^{-(2n+1)}$.



Obr. 63. Grafy funkcí $y = x^{-(2n+1)}$
($n \in \mathbb{N}$)



Obr. 64. Rovnoosá hyperbola
(graf funkce $y = 1/x$)

Inverzní funkce

Graf inverzní funkce se sestrojí z grafu původní funkce pomocí osové souměrnosti podle osy $y = x$ (obr. 65).

Odmocniny

Obecný tvar funkce:

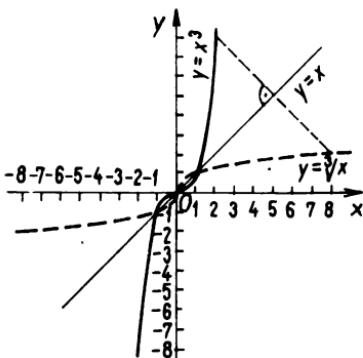
$$y = \begin{cases} \sqrt[2n-1]{x} & (x \geq 0, n \in \mathbb{N}), \\ \sqrt[2n-1]{x} = -\sqrt[2n-1]{(-x)} & (x < 0, n \in \mathbb{N}); \end{cases}$$

jde o inverzní funkci k funkci $y = x^{2n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$) (viz obr. 65).

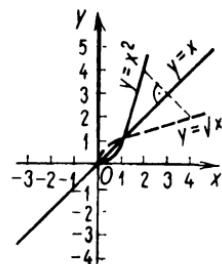
Obecný tvar funkce:

$$y = \sqrt[n]{x} \quad (x \geq 0, n \in \mathbb{N});$$

jde o inverzní funkci k funkci $y = x^{2n}$ ($x \geq 0, n \in \mathbb{N}$) (obr. 66).



Obr. 65. Grafy vzájemně inverzních funkcií $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$



Obr. 66. Grafy vzájemně inverzních funkcií $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$

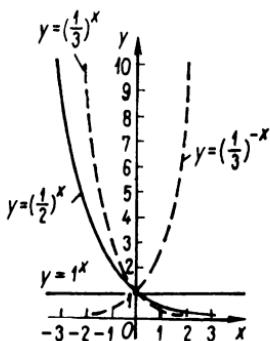
2.3.5.2. Transcendentní funkce

Exponenciální funkce

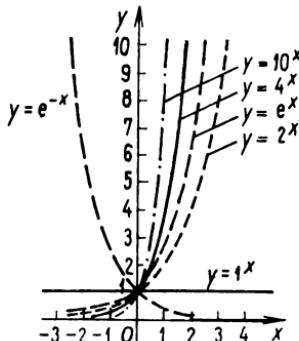
Obecný tvar funkce:

$$y = a^x \quad (a > 0).$$

Popis grafu: graf prochází bodem $[0, 1]$ (obr. 67 a 68).



Obr. 67. Grafy exponenciálních funkcií $y = 1^x$, $(1/2)^x$, $(1/3)^x$, $(1/3)^{-x}$



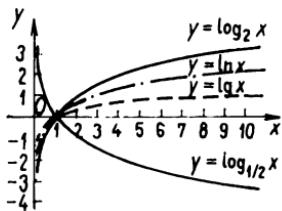
Obr. 68. Grafy exponenciálních funkcií $y = e^{-x}$, 1^x , 2^x , e^x , 4^x , 10^x

Logaritmické funkce

Obecný tvar funkce:

$$y = \log_a x \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1).$$

Popis grafu: graf prochází bodem $[1, 0]$ (obr. 69).



Obr. 69. Grafy logaritmických funkcí
 $y = \log_a x$

Logaritmická funkce je inverzní funkcí k odpovídající exponenciální funkci.

O goniometrických funkcích, cyklometrických funkcích, hyperbolických funkcích a hyperbolometrických funkcích viz v příslušných článcích. O plochách druhého stupně viz v kapitole 4.2.

2.4. VEKTOROVÝ POČET

2.4.1. Základní pojmy

Definice aritmetického vektoru jako uspořádané n -tice neboli řádkové matice, uvedená v článku 1.10.1, připouští po připojení pojmu velikosti geometrickou interpretaci, která má důležité uplatnění v technických a přírodních vědách.

Protože u mnoha geometrických a fyzikálních veličin (např. u síly, rychlosti, zrychlení, intenzity elektrického pole a posunutí bodu v geometrii) jsou podstatné velikost, směr a orientace, vytváří se jejich model (tzv. *geometrický vektor*) pomocí pojmu orientované úsečky neboli pomocí uspořádané dvojice bodů v trojrozměrném euklidovském prostoru. Na rozdíl od těchto veličin existují ještě veličiny (např. hmotnost, teplota, doba, hustota, odpor vodiče, délka úsečky, obsah plochy a objem tělesa), které mají jen velikost a nemají směr ani orientaci a které nazýváme *skalárními veličinami* nebo stručně *skaláry*. Protože však v matematice abstrahujeme od měřicích jednotek, rozumí se slovem skalár libovolné reálné číslo.

Úmluva:

V této kapitole se při vyšetřování vektorů omezíme na trojrozměrný euklidovský prostor E_3 .

Vázaným vektorem nazýváme orientovanou úsečku \overline{AB} nebo uspořádanou dvojici $[A, B]$ bodů, přičemž bod A , resp. B nazýváme *počátečním*, resp. *koncovým bodem vektoru*, který označujeme \overline{AB} (obr. 70).

Nositelkou vázaného vektoru \overline{AB} nazýváme přímku AB .

Polohovým vektorem [rádiusvektorem, průvodícím] r_B bodu B vzhledem k bodu O nazýváme vázaný vektor, který má počáteční bod v počátku O souřadnicové soustavy a koncový bod v daném bodě B .



Obr. 70. Vázaný vektor $a = \overline{AB}$

Umístěním soustavy vázaných vektorů ve společném bodě P nazýváme taková jejich rovnoběžná posunutí (translace), že počáteční body všech vázaných vektorů soustavy se ztotožní s bodem P . Vázané vektory, které dostaneme pomocí takového umístění soustavy vázaných vektorů do bodu P , se nazývají *umístěné* [*centrované, centrální*] vektory; říkáme pak, že jsme dané vázané vektory umístili [*centrovali*] do bodu P .

Dva vázané vektory se nazývají *sobě rovné* [*vzájemně ekvivalentní*], právě když se po umístění v společném bodě ztotožňují.

⟨Volným⟩ vektorem [*geometrickým vektorem*] nazýváme množinu všech vzájemně ekvivalentních vázaných vektorů.

Vektory se zpravidla označují polotučnými písmeny malé latinské, popř. gotické abecedy (např. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \dots$) nebo stejně jako orientované úsečky, neboť volný vektor jakožto množina všech vzájemně ekvivalentních vázaných vektorů je v důsledku tranzitivnosti rovnosti určen kterýmkoli z těchto vázaných vektorů.

V rukopisech lze vektory označovat buď podtrženými malými latinskými písmeny, nebo týmiž písmeny se šipkou.

Je-li vektor a určen vázaným vektorem \overline{AB} , pak vektor \overline{AB} nazýváme *umístěním vektoru a do bodu A* a píšeme $a = \overline{AB}$.

Velikostí [*délkou, absolutní hodnotou, modulem, normou*] vektoru $a = \overline{AB}$ nazýváme délku úsečky AB a značíme ji

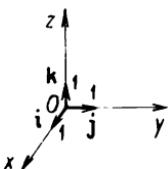
$$|a| = a, \quad |\overline{AB}| = |AB|.$$

Nulovým vektorem nazýváme vektor, jehož prvkem je orientovaná úsečka

nulové délky, tj. orientovaná úsečka, jejíž počáteční bod splývá s koncovým bodem. Nulový vektor se značí $\mathbf{0}$. Platí $|\mathbf{0}| = 0$.

Jednotkovým vektorem nazýváme každý vektor o velikosti rovné číslu 1. Jednotkové vektory označujeme $\mathbf{a}^0, \mathbf{b}^0, \dots$ (\mathbf{a}^0 čteme: \mathbf{a} na nultou).

Jednotkové vektory se společným počátečním bodem O (tj. umístěné do počátku O souřadnicové soustavy), jejichž směry a orientace jsou dány souřadnicovými osami kartézské souřadnicové soustavy $(O; x, y, z)$ se nazývají základní vektory a označují se $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (obr. 71).



Obr. 71. Základní vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

V dalším textu budeme vždy uvažovat jen *pravotočivou souřadnicovou soustavu*, která je charakterizována tím, že otočení kladné části osy x do kladné části osy y se současným posunutím ve směru osy z dává *pravotočivý šroubový pohyb*.

Vektory \mathbf{a}, \mathbf{b} se nazývají *kolineární [rovnoběžné]*, právě když po umístění v společném bodě mají společnou nositelku. Kolineární vektory \mathbf{a}, \mathbf{b} se nazývají *souhlasně kolineární [souhlasně rovnoběžné]*, právě když po umístění do bodu A leží v téže polopřímce s počátečním bodem A (píšeme $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$). Kolineární vektory \mathbf{a}, \mathbf{b} se nazývají *nesouhlasně kolineární [nesouhlasně rovnoběžné]*, právě když po umístění do bodu A leží ve vzájemně opačných polopřímkách s počátečním bodem A (píšeme $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$).

Vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ se nazývají *komplanární*, právě když po umístění v společném bodě leží v právě jedné rovině.

Kolineární vázané vektory $\overline{AB}, \overline{CD}$ s různými nositelkami jsou souhlasně kolineární, právě když jejich koncové body leží v téže polorovině s hraniční přímkou AC . Mají-li vektory $\overline{AB}, \overline{CD}$ společnou nositelku, jsou souhlasně kolineární, právě když jedna z polopřímek AB, CD je částí druhé.

Vyjádření vektoru pomocí jeho souřadnic

Jestliže \overline{AB} je umístění vektoru \mathbf{a} a počáteční, resp. koncový bod vektoru \overline{AB} má souřadnice x_1, y_1, z_1 , resp. x_2, y_2, z_2 , pak souřadnicemi vektoru \mathbf{a} vzhledem k základním vektorům $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ nazýváme čísla

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1.$$

Píšeme $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Vyjádření polohového vektoru bodu $B[x_B, y_B, z_B]$ pomocí souřadnic:

$$\mathbf{r}_B = (x_B, y_B, z_B).$$

Vyjádření základních vektorů pomocí souřadnic:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

Vyjádření velikosti vektoru $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ pomocí souřadnic:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)} = \\ = \sqrt{[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2]}.$$

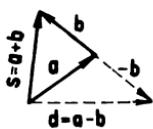
Příklad:

Vektor $\mathbf{a} = (5, 2, -6)$ má velikost

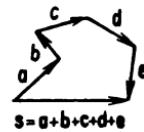
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{[5^2 + 2^2 + (-6)^2]} = \sqrt{65} \doteq 8,062.$$

Sčítání a odčítání vektorů

Jestliže \mathbf{a}, \mathbf{b} jsou dva vektory, vektor \overline{AB} je umístěním vektoru \mathbf{a} do bodu A a vektor \overline{BC} je umístěním vektoru \mathbf{b} do bodu B , pak součtem $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektorů \mathbf{a}, \mathbf{b} nazýváme vektor, jehož umístěním do bodu A je vektor \overline{AC} (obr. 72).



Obr. 72. Sčítání a odčítání vektorů



Obr. 73. Vektorový mnohoúhelník

Vektory \mathbf{a}, \mathbf{b} se nazývají *vzájemně opačné*, právě když platí $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{o}$.

Říkáme také, že \mathbf{b} je *antivektor vektoru a*, a obráceně.

Odčítání vektoru se převede na přičtení opačného vektoru (viz obr. 72):

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

Sčítání několika vektorů vede při tomto způsobu určení součtu vektorů k vektorovému mnohoúhelníku, který je uzavřen součtem vektorů (obr. 73).

Komutativní zákon pro sčítání vektorů:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

Asociativní zákon pro sčítání vektorů:

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}.$$

Pro velikosti vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} platí

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|,$$
$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geq ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||.$$

Jestliže $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ a $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, pak platí

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

Jestliže $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$, pak $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$.

Jestliže $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$, pak $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||$.

Násobení vektoru skalárem

Jestliže $c \in \mathbb{R}$ ($c \neq 0$) a \mathbf{a} je nenulový vektor, pak c -násobkem vektoru \mathbf{a} nazýváme vektor \mathbf{b} , který má velikost $|\mathbf{b}| = |c| |\mathbf{a}|$, a platí $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$ při $c > 0$ a $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$ při $c < 0$. Jestliže vektor $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ nebo skalár $c = 0$, pak c -násobkem vektoru \mathbf{a} nazýváme nulový vektor.

Komutativní zákon pro násobení vektoru skalárem:

$$c\mathbf{a} = \mathbf{a}c.$$

Asociativní zákon pro násobení vektoru skalárem:

$$c_1(c_2\mathbf{a}) = (c_1c_2)\mathbf{a}.$$

Distributivní zákon pro násobení vektoru skalárem vzhledem k sčítání vektorů:

$$c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}.$$

Distributivní zákon pro násobení vektoru skalárem vzhledem k sčítání skaláru:

$$(c_1 + c_2)\mathbf{a} = c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{a}.$$

Platí

$$\mathbf{a}^0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}.$$

Jestliže $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ a $c \in \mathbb{R}$, pak platí

$$c\mathbf{a} = (ca_x, ca_y, ca_z).$$

Vektor $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}.$$

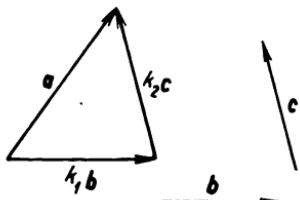
Příklad:

$$\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 7\mathbf{k};$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (-5 + 3)\mathbf{i} + (12 - 6)\mathbf{j} + (7 - 7)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}.$$

Množina všech vektorů se zavedenou rovností a definovanými operacemi sčítání a násobení skalárem tvoří vektorový prostor (viz článek 0.4.8).

Rozkladem vektoru \mathbf{a} do směrů \mathbf{b}, \mathbf{c} nazýváme součet $k_1\mathbf{b} + k_2\mathbf{c} = \mathbf{a}$ (obr. 74).



Obr. 74. Rozklad vektoru \mathbf{a} do směrů \mathbf{b}, \mathbf{c}

Lineární závislost a lineární nezávislost vektorů

Lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) nazýváme vektor

$$\mathbf{a} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_n\mathbf{a}_n,$$

kde c_i ($i = 1, \dots, n$) jsou reálná čísla, zvaná koeficienty lineární kombinace.

Při $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ mluvíme o triviální lineární kombinaci. O netriviální lineární kombinaci mluvíme, právě když aspoň jeden z koeficientů c_i ($i = 1, \dots, n$) je různý od nuly.

Vektory \mathbf{a}_i ($i = 1, \dots, n$) se nazývají lineárně závislé, právě když aspoň jedna jejich netriviální lineární kombinace je nulovým vektorem, tj. existují taková reálná čísla c_i ($i = 1, \dots, n$), z nichž aspoň jedno je různé od nuly, že

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Vektory \mathbf{a}_i ($i = 1, \dots, n$; $n \leq 3$) se nazývají lineárně nezávislé, právě když každá jejich netriviální lineární kombinace je nenulovým vektorem. Vektory \mathbf{a}_i ($i = 1, \dots, n$) jsou tedy lineárně nezávislé, právě když nejsou lineárně závislé.

Každé dva kolineární vektory \mathbf{a}, \mathbf{b} jsou lineárně závislé, tj. platí

$$\exists t \in \mathbb{R} (\mathbf{a} + t\mathbf{b}).$$

Každé tři komplanární vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou lineárně závislé, tj. platí

$$\exists s, t \in \mathbb{R} (\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}).$$

Vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou lineárně závislé, právě když

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Pro $\Delta \neq 0$ jsou vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárně nezávislé. Vektory \mathbf{a}_i ($i = 1, 2, \dots, n$; $n > 3$) jsou vždy lineárně závislé (viz úmluvu na str. 262).

Říkáme, že soustava vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ má hodnost h ($1 \leq h \leq 3$), právě když mezi vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ existuje h lineárně nezávislých vektorů, ale pro každých $h+1$ vektorů z vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ platí, že jsou již lineárně závislými vektorů.

Skalární součin [vnitřní součin] vektorů

Velikostí $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ úhlu dvou nenulových nekolineárních vektorů $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \overline{OA}$, $\mathbf{b} \uparrow\uparrow \overline{OB}$ nazýváme velikost konvexního úhlu sevřeného polopřímkami OA a OB . Jsou-li vektoru \mathbf{a}, \mathbf{b} souhlasně, resp. nesouhlasně kolineární, pak klademe $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 0$, resp. $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \pi$.

Skalárním součinem \mathbf{ab} (používáme také symbolu $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$) dvou nenulových vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b} nazýváme skalár

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}),$$

kde $|\mathbf{a}|$, resp. $|\mathbf{b}|$ je velikost vektoru \mathbf{a} , resp. \mathbf{b} .

Jestliže aspoň jeden z vektorů je nulový, definujeme $\mathbf{ab} = 0$.

Komutativní zákon pro skalární násobení vektorů:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}.$$

Pro $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$ platí $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$.

Pro $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$ platí $\mathbf{ab} = -|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$.

Pro $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ platí $\mathbf{ab} = 0$.

Platí $\mathbf{aa} = \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$,

$$ii = 1, \quad jj = 1, \quad kk = 1,$$

$$ij = ji = 0, \quad ik = ki = 0, \quad jk = kj = 0.$$

Distributivní zákon pro skalární násobení vektorů vzhledem k sčítání vektorů:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}.$$

Asociativní zákon pro násobení skalárního součinu skalárem:

$$c(\mathbf{ab}) = (ca)\mathbf{b} = \mathbf{a}(cb).$$

Pro skalární násobení vektorů asociativní zákon neplatí, tj. obecně $(\mathbf{ab})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{bc})$.

Jestliže $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ a $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, pak platí

$$\mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

$$\mathbf{aa} = \mathbf{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2,$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{[(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)]}}.$$

Kritérium kolmosti vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} :

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Kosinová věta:

$$(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \pm 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2,$$

$$|\mathbf{a} \pm \mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a}^2 \pm 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2)},$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = 4\mathbf{ab}.$$

Příklad:

$$\mathbf{a} = 16\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k};$$

$$\mathbf{ab} = 16 \cdot 3 + 4 \cdot (-9) + (-7)(-4) = 40,$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(16^2 + 4^2 + 7^2)} = \sqrt{321} \doteq 17,9,$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{(3^2 + 9^2 + 4^2)} = \sqrt{106} \doteq 10,3,$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \approx \frac{40}{17,9 \cdot 10,3} \doteq 0,2170; \quad (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \approx 77^\circ 29'.$$

Průmětem vektoru \mathbf{a} do vektoru \mathbf{s} [složkou vektoru \mathbf{a} ve směru \mathbf{s}] nazýváme vektor \mathbf{a}_s , jehož velikost je

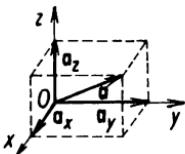
$$|\mathbf{a}_s| = \frac{|\mathbf{as}|}{|\mathbf{s}|}$$

a který je souhlasně kolineární s vektorem \mathbf{s} pro $\mathbf{as} > 0$ a nesouhlasně kolineární s vektorem \mathbf{s} pro $\mathbf{as} < 0$.

Skalár

$$a_s = |\mathbf{a}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{s}}) = \frac{\mathbf{as}}{|\mathbf{s}|}$$

se nazývá projekce vektoru \mathbf{a} do vektoru [směru] \mathbf{s} .



Obr. 75. Vektorové složky vektoru \mathbf{a}

Platí

$$|\mathbf{a}_s| = |a_s|.$$

Průmět vektoru \mathbf{a} do vektoru \mathbf{i} , resp. \mathbf{j} , resp. \mathbf{k} nazýváme složkou \mathbf{a}_x , resp. \mathbf{a}_y , resp. \mathbf{a}_z vektoru \mathbf{a} (obr. 75); platí

$$\mathbf{a}_x = a_x \mathbf{i}, \quad \mathbf{a}_y = a_y \mathbf{j}, \quad \mathbf{a}_z = a_z \mathbf{k}.$$

Projekcí vektoru \mathbf{a} do vektoru \mathbf{i} , resp. \mathbf{j} , resp. \mathbf{k} je souřadnice a_x , resp. a_y , resp. a_z vektoru \mathbf{a} ; platí

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}, \quad a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}, \quad a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}.$$

Směrové kosiny

Směrovými úhly vektoru $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ s velikostmi α, β, γ nazýváme úhly s velikostmi $\alpha = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{i}})$, $\beta = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{j}})$, $\gamma = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{k}})$, sevřené vektorem \mathbf{a} a vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Pro kosiny velikostí směrových úhlů neboli pro tzv. *směrové kosiny* platí

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|},$$

$$\cos \beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|},$$

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|}.$$

Platí

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Platí

$$\mathbf{a} = a[\mathbf{i} \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{i}}) + \mathbf{j} \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{j}}) + \mathbf{k} \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{k}})].$$

Příklad:

Směrové kosiny vektoru $\mathbf{a} = (5, 2, -6)$ (viz příklad na str. 264) jsou

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{i}}) \approx \frac{5}{8,062} \doteq 0,6202, \quad (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{i}}) \approx 51^\circ 40';$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{j}}) \approx \frac{2}{8,062} \doteq 0,2481, \quad (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{j}}) \approx 75^\circ 38';$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{k}}) \approx \frac{-6}{8,062} \doteq -0,7442, \quad (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{k}}) \approx 138^\circ 6'.$$

Vektorový součin [vnější součin vektorů]

Způsob zápisu: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (čteme: \mathbf{a} krížek \mathbf{b} , popř. \mathbf{a} vektorově \mathbf{b}) nebo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.
Definice:

Vektorovým součinem nenulových nekolineárních vektorů umístěných v témže bodě nazýváme vektor

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b},$$

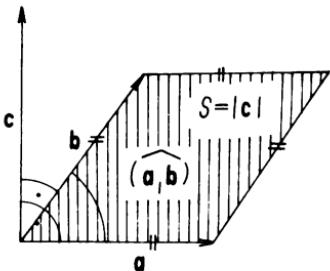
který má tyto vlastnosti (obr. 76):

1. Velikost $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$, tj. rovná se obsahu rovnoběžníku sestrojeného z vektorů \mathbf{a}, \mathbf{b} .

2. Vektor \mathbf{c} je kolmý k vektorům \mathbf{a}, \mathbf{b} .

3. Vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tvoří pravotočivou [kladně orientovanou] soustavu [tj. pozorujeme-li rovnoběžník sestrojený z vektorů \mathbf{a}, \mathbf{b} z koncového bodu vektoru \mathbf{c} , pak přechod (při menším úhlu otočení) od vektoru \mathbf{a} k vektoru \mathbf{b} se děje proti smyslu otáčení hodinových ručiček].

Jsou-li vektory \mathbf{a}, \mathbf{b} kolineární nebo je-li aspoň jeden z nich nulový, klademe $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o}$.



Obr. 76. Vektorový součin $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Komutativní zákon pro vektorové násobení neplatí, ale platí

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = (-\mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times (-\mathbf{a}).$$

Asociativní zákon pro násobení vektoru skalárem vzhledem k vektorovému násobení:

$$k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (k\mathbf{b}).$$

Distributivní zákon pro vektorové násobení vzhledem k sčítání vektorů:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c},$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

Pro $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$ a $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$ platí $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o}$.

Pro $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ platí $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$.

Pro základní vektory platí

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{o}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{o}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{o},$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j},$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

Vyjádření vektorového součinu pomocí složek:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - b_y a_z) \mathbf{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \mathbf{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \\ a_x, & a_y, & a_z \\ b_x, & b_y, & b_z \end{vmatrix}.$$

Příklad:

$$\mathbf{a} = 16\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k};$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \\ 16, & 4, & -7 \\ 3, & -9, & -4 \end{vmatrix} = -79\mathbf{i} + 43\mathbf{j} - 156\mathbf{k}.$$

Součiny se třemi a více vektory

Pro skalární součin ani pro vektorový součin neexistují zákony pro vázání tří a více vektorů. V jedné početní operaci lze vždy jen dva vektory vázat skalárně nebo vektorově.

Protože skalární součin je skalárem, je v dalších pravidlech vždy napřed nutno určit vektorový součin.

Smíšený součin tří vektorů

$$[\mathbf{abc}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x, & a_y, & a_z \\ b_x, & b_y, & b_z \\ c_x, & c_y, & c_z \end{vmatrix} = \Delta,$$

přičemž $\Delta > 0$, jestliže vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} jsou nekomplanární a tvoří pravotočivou soustavu.

Smíšený součin $[\mathbf{abc}] = \Delta = 0$, právě když aspoň jeden z vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} je nulový nebo tyto vektory jsou komplanární (tj. leží v právě jedné rovině).

Distributivní zákon pro smíšené násobení vektorů vzhledem k sčítání vektorů:

$$[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \mathbf{cd}] = [\mathbf{acd}] + [\mathbf{bcd}].$$

Asociativní zákon pro smíšené násobení vzhledem k násobení vektoru skalárem:

$$[(m\mathbf{a}) \mathbf{bc}] = m[\mathbf{abc}].$$

Platí tyto vztahy:

$$\begin{aligned} [\mathbf{abc}] &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \mathbf{a} = \mathbf{b}(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \\ &= \mathbf{c}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \mathbf{b}, \\ [\mathbf{abc}] &= -\mathbf{a}(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \mathbf{b} = -\mathbf{b}(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \\ &= -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \mathbf{c} = -\mathbf{c}(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Geometrický význam:

Absolutní hodnota smíšeného součinu tří vektorů se rovná objemu V_r rovnoběžnostěnu, jehož tři hrany vycházející z téhož vrcholu jsou určeny danými vektory, tj. $V_r = |\Delta|$. Příslušný čtyřstěn má objem $V_\epsilon = \frac{1}{6}|\Delta|$.

Příklad:

Má se určit objem V_r rovnoběžnostěnu určeného vektory

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k},$$

$$\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 7\mathbf{k},$$

$$\mathbf{c} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}.$$

Objem

$$V_r = [\mathbf{abc}] = \begin{vmatrix} 3, & 6, & -2 \\ 5, & -1, & 7 \\ 6, & -3, & 8 \end{vmatrix} = 69.$$

Dvojný vektorový součin

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &\neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} && \text{(tj. asociativní zákon neplatí),} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a} && \text{(vyjádření bez vektorového} \\ &&& \text{násobení).} \end{aligned}$$

Skalární součin dvou vektorových součinů (*Lagrangeova identita*)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ac}, & \mathbf{bc} \\ \mathbf{ad}, & \mathbf{bd} \end{vmatrix} = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})(\mathbf{bc}),$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{aa}, & \mathbf{ab} \\ \mathbf{ab}, & \mathbf{bb} \end{vmatrix} = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2.$$

Vektorový součin dvou vektorových součinů

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{c}[\mathbf{abd}] - \mathbf{d}[\mathbf{abc}] = \mathbf{b}[\mathbf{acd}] - \mathbf{a}[\mathbf{bcd}].$$

Vektorový součin s dvojným vektorovým součinem

$$\begin{aligned} [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] \times \mathbf{d} &= (\mathbf{ac})(\mathbf{b} \times \mathbf{d}) - (\mathbf{bc})(\mathbf{a} \times \mathbf{d}) = \\ &= [\mathbf{abd}]\mathbf{c} - (\mathbf{cd})(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Součin dvou smíšených součinů tří vektorů

$$[\mathbf{abc}][\mathbf{def}] = \begin{vmatrix} \mathbf{ad}, & \mathbf{ae}, & \mathbf{af} \\ \mathbf{bd}, & \mathbf{be}, & \mathbf{bf} \\ \mathbf{cd}, & \mathbf{ce}, & \mathbf{cf} \end{vmatrix};$$

$$[\mathbf{abc}]^2 = \Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}^2, \mathbf{ab}, \mathbf{ac} \\ \mathbf{ba}, \mathbf{b}^2, \mathbf{bc} \\ \mathbf{ca}, \mathbf{cb}, \mathbf{c}^2 \end{vmatrix} \geq 0$$

je tzv. *Gramův determinant* [*gramián*], který se rovná nule, právě když vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou lineárně závislé.

2.4.2. Použití vektorového počtu v geometrii

Vzdálenost dvou bodů P_1 a P_2 (obr. 77)

$$d = |\overline{P_1 P_2}| = |\mathbf{d}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|.$$

Dělení úsečky s krajními body $A[\mathbf{r}_A]$, $B[\mathbf{r}_B]$ v poměru λ (obr. 78)

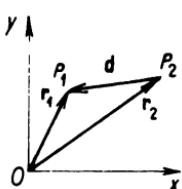
$$\mathbf{r}_D = \frac{\mathbf{r}_A - \lambda \mathbf{r}_B}{1 + \lambda};$$

dělící bod $D[\mathbf{r}_D]$ je pro $\lambda > 0$ vnitřním bodem, pro $\lambda < 0$ vnějším bodem a pro $\lambda = 1$ středem $S[\mathbf{r}_S]$ úsečky AB , tj.

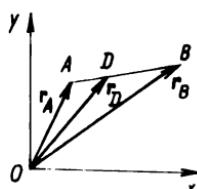
$$\mathbf{r}_S = \frac{\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B}{2}.$$

Rovnice přímky určené bodem $P_0[\mathbf{r}_0]$ a směrovým vektorem \mathbf{s} (obr. 79)

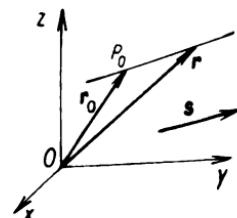
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{s} \quad \text{pro } \forall t \in \mathbb{R}.$$



Obr. 77. Vzdálenost dvou bodů



Obr. 78. Dělení úsečky v daném poměru



Obr. 79. Přímka daná bodem a směrovým vektorem

Příklad:

$$P_0[3, -4, 6], \quad \mathbf{s} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k};$$

$$\mathbf{r} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k} + t(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}).$$

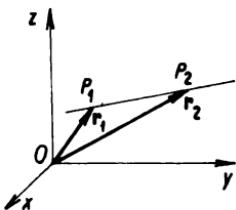
Rovnice přímky jdoucí dvěma body $P_1[\mathbf{r}_1]$ a $P_2[\mathbf{r}_2]$ (obr. 80)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad \text{pro } \forall t \in \mathbb{R}.$$

Příklad:

$$P_1[-1, 5, 7], \quad P_2[3, -4, 2];$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (-1)\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k} + t[3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k} - (-1)\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}] = \\ &= -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k} + t(4\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 5\mathbf{k}). \end{aligned}$$



Obr. 80. Přímka daná dvěma body

Odchylka dvou přímek

$$\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \arccos \frac{|\mathbf{a}\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

Nejkratší vzdálenost dvou přímek v prostoru
[vzdálenost dvou mimoběžek]

$$d = \frac{V}{S} = \left| \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\mathbf{a} \times \mathbf{b}} \right| = \left| \frac{[\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{r}]}{\mathbf{a} \times \mathbf{b}} \right| = \left| \frac{\Delta}{\mathbf{a} \times \mathbf{b}} \right|,$$

kde $V = [\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{r}] = Sd$ je objem rovnoběžněho směrovými vektory

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

mimoběžek a $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, přičemž

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$$

je polohový vektor libovolného bodu na první, resp. druhé přímce; $S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ je obsah rovnoběžníku určeného vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} a

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix}.$$

Jestliže $\Delta = 0$, pak se přímky protínají.

Příklad:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1 &= 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k} + t(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}), \\ \mathbf{g}_2 &= -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 10\mathbf{k} + \tau(-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}); \\ \Delta &= \begin{vmatrix} 2, & 4, & 3 \\ -4, & 4, & 6 \\ 4, & -6, & -8 \end{vmatrix} = 0,\end{aligned}$$

takže přímky se protínají.

Pro poslední řádek determinantu byly vzaty za základ polohové vektory bodů přímek, které dostaneme při $t = 0$ a $\tau = 0$.

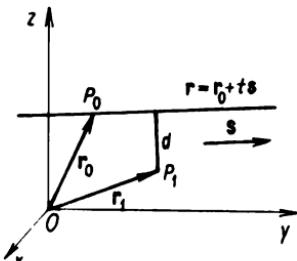
Průsečík přímek dostaneme tak, že položíme sobě rovny pravé strany rovnic daných přímek a porovnáme koeficienty u základních vektorů:

$$\begin{aligned}3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k} + t(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) &= \\ &= -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 10\mathbf{k} + \tau(-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}),\end{aligned}$$

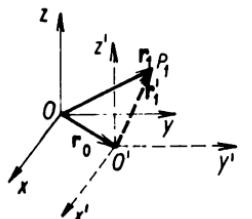
$$3 + 2t = -1 - 4\tau,$$

$$-1 + 4t = 5 + 4\tau,$$

$$2 + 3t = 10 + 6\tau.$$



Obr. 81. Vzdálenost bodu od přímky



Obr. 82. Rovnoběžné posunutí souřadnicové soustavy

Z libovolných dvou rovnic této soustavy vypočteme

$$t = \frac{1}{3}, \quad \tau = -\frac{7}{6}.$$

Tyto dvě hodnoty musí také vyhovovat třetí z rovnic, neboť v opačném případě se přímky neprotínají.

Polohový vektor průsečíku P je

$$\mathbf{r}_P = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k} + \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = \frac{11}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Vzdálenost bodu $P_1[\mathbf{r}_1]$ od přímky $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + ts$ (obr. 81)

$$d = \left| \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 + \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)s}{s^2} \mathbf{s} \right|.$$

Rovnoběžné posunutí souřadnicové soustavy (obr. 82)

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0.$$

Rovnice roviny procházející třemi body, které neleží na téže přímce (obr. 83)

$$[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_3)] = 0.$$

Tento smíšený součin lze vyjádřit ve tvaru determinantu:

$$\begin{vmatrix} x - x_1, y - y_1, z - z_1 \\ x - x_2, y - y_2, z - z_2 \\ x - x_3, y - y_3, z - z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

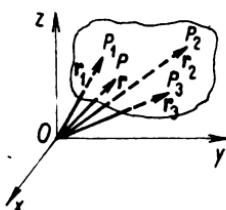
Z toho po ovroubení dostaneme determinant

$$\begin{vmatrix} x, y, z, 1 \\ x_1, y_1, z_1, 1 \\ x_2, y_2, z_2, 1 \\ x_3, y_3, z_3, 1 \end{vmatrix} = 0$$

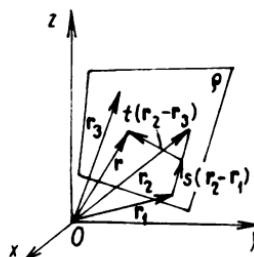
s řešením

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

kde A, B, C, D jsou algebraické doplňky prvků prvního řádku posledního determinantu.



Obr. 83. Rovina daná třemi body



Obr. 84. Rovina ρ daná parametricky třemi body

Úsekový tvar rovnice roviny (p, q a r jsou po řadě úseky roviny na osách x, y a z):

$$\begin{vmatrix} x, y, z, 1 \\ p, 0, 0, 1 \\ 0, q, 0, 1 \\ 0, 0, r, 1 \end{vmatrix} = 0$$

neboli

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$

Parametrické vyjádření roviny ϱ (obr. 84):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + s(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3),$$

kde s, t jsou parametry,

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ – polohové vektory tří různých bodů roviny, které neleží v téže přímce.

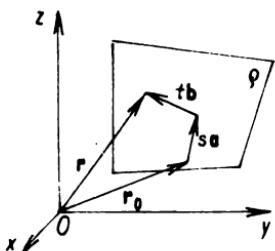
Zřejmě platí (obr. 85)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{a} + t\mathbf{b},$$

kde s, t jsou parametry,

\mathbf{r}_0 je polohový vektor daného bodu roviny,

\mathbf{a}, \mathbf{b} jsou nekolineární směrové vektory.



Obr. 85. Rovina ϱ daná parametricky bodem a dvěma směrovými vektory

Rovnice roviny určené bodem a normálovým vektorem

Rovnice roviny procházející bodem $P_0[\mathbf{r}_0]$ kolmo k normálovému vektoru \mathbf{n} má tvar

$$\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

odkud

$$\mathbf{n}\mathbf{r} = \mathbf{n}\mathbf{r}_0$$

neboli

$$\mathbf{n}\mathbf{r} + D = 0.$$

Normálový tvar rovnice roviny

$$\mathbf{n}^0 \mathbf{r} - d = 0,$$

kde $\mathbf{n}^0 = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ je jednotkový normálový vektor.

Vzdálenost počátku O souřadnicové soustavy od roviny

$$\mathbf{n}r + D = 0$$

$$d = -\frac{D}{|\mathbf{n}|}.$$

Vzdálenost bodu $P_0[\mathbf{r}_0]$ od roviny $\mathbf{n}^0 \mathbf{r} - d = 0$

$$|\delta| = |\mathbf{n}^0 \mathbf{r}_0 - d|,$$

přičemž je-li $\delta d > 0$, leží bod P_0 na téže straně od dané roviny jako počátek O , a je-li $\delta d < 0$, leží bod P_0 na opačné straně od roviny než počátek O .

Platí

$$|\delta| = |\mathbf{n}^0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)|,$$

kde \mathbf{r}_1 je polohový vektor libovolného bodu roviny $\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$,

$$|\delta| = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} \right|, \quad \text{kde } \mathbf{n} = (a, b, c).$$

Odchylka φ přímky $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{s}$ a roviny $\mathbf{n}r = \mathbf{n}r_0$

$$\varphi = \arcsin \frac{|\mathbf{n}\mathbf{s}|}{|\mathbf{n}||\mathbf{s}|}.$$

Odchylka φ dvou rovin

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|},$$

kde $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ jsou normálové vektory daných rovin.

Obsah S_n rovinného n -úhelníku

$$S_n = \frac{1}{2} |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 + \dots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{r}_1|,$$

kde $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ jsou polohové vektory vrcholů n -úhelníku.

Pro $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) platí

$$S_n = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1, & x_2 \\ y_1, & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2, & x_3 \\ y_2, & y_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_n, & x_1 \\ y_n, & y_1 \end{vmatrix} \right|.$$

Obsah S_3 rovinného trojúhelníku

$$S_3 = \frac{1}{2} |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1|,$$

kde $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ a \mathbf{r}_3 jsou polohové vektory vrcholů trojúhelníku.

Pro $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, 3$) platí

$$S_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}$$

(ve vzorci jde o absolutní hodnotu determinantu).

Objem V_4 čtyřstěnu s vrcholem v počátku

$$V_4 = \frac{1}{6} |(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \mathbf{r}_3|,$$

kde $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ jsou polohové vektory vrcholů čtyřstěnu mimo počátek.

Objem V_4 čtyřstěnu v libovolné poloze

$$V_4 = \frac{1}{6} |[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)]|,$$

$$V_4 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix}$$

(ve vzorci jde o absolutní hodnotu determinantu), kde $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) jsou polohové vektory vrcholů čtyřstěnu. Všechny čtyři vrcholy leží v téže rovině, právě když uvedený determinant se rovná nule.

Rozklad vektoru \mathbf{a} v součet složek kolineárních s vektory $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}[acd] + \mathbf{c}[bad] + \mathbf{d}[bca]}{[bcd]}.$$

2.5. KRUHOVÁ INVERZE

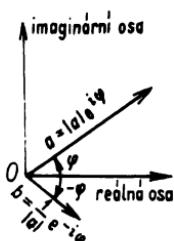
Kruhovou inverzi (obr. 86) nazýváme zobrazení na množině \mathbb{C}^* , definované přiřazením

$$a = |a| e^{i\varphi} \mapsto b = \frac{1}{|a|} e^{-i\varphi}.$$

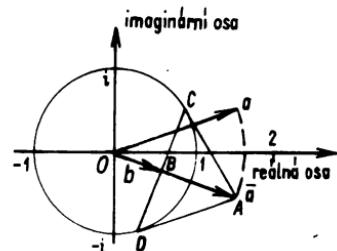
Použití: metoda frekvenčních charakteristik, přepočet odporu na vodivost [konduktanci] apod.

Bod b k bodu a se při kruhové inverzi podle uvedené rovnice sestrojí grafickým způsobem pomocí jednotkové základní kružnice inverze (obr. 87):

- ✓ 1. Sestrojí se komplexně sdružený bod $\bar{a} = |a| e^{-i\varphi}$.
- 2. Sestrojí se tečny z koncového bodu průvodiče bodu \bar{a} ke kružnici.
- 3. Spojnice dotykových bodů tečen protne průvodič bodu \bar{a} v bodě B , který je koncovým bodem průvodiče bodu b .



Obr. 86. Body komplexně sdružené při kruhové inverzi



Obr. 87. Jednotková základní kružnice inverze

Odůvodnění:

$$\triangle OBD \sim \triangle ODA, \quad \frac{|a|}{1} = \frac{1}{|b|}.$$

S ohledem na měřicí jednotku při kruhové inverzi platí:

$$r = 1 \doteq a \text{ měřicích jednotek veličiny } a \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1/a \text{ měřicí jednotky veličiny } b.$$

Například

$$\text{poloměr } r = 1 \doteq 5 \Omega \Leftrightarrow \frac{1}{5} \text{ S}$$

při přepočtu odporu na vodivost.

Inverze čar

První věta o inverzi: Z přímky procházející počátkem dostaneme při kruhové inverzi opět přímku jdoucí počátkem.

Je dána přímka

$$r(t) = ta \quad (t \in \mathbb{R}^*, a \in \mathbb{C}).$$

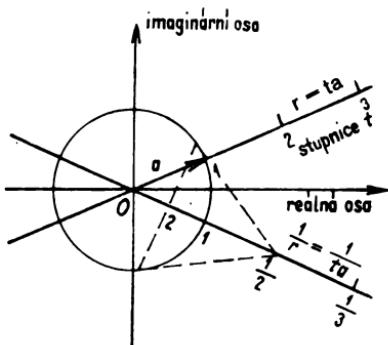
Při kruhové inverzi dostaneme přímku

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{ta} = r'.$$

Při konstrukci se postupuje takto (obr. 88):

1. K bodu a se sestrojí komplexně sdružený bod \bar{a} .
2. Nanese se stupnice s parametrem t pro

$$r' = \frac{1}{ta}.$$



Obr. 88. První věta o inverzi

Druhá věta o inverzi: Z přímky neprocházející počátkem dostaneme při kruhové inverzi kružnici procházející počátkem.

Je dána přímka

$$r(t) = r_0 + ta \quad (t \in \mathbb{R}^*, a \in \mathbb{C}).$$

Při kruhové inverzi dostaneme kružnici

$$\frac{1}{r} = r' = \frac{1}{r_0 + ta}.$$

Při konstrukci se postupuje takto (obr. 89):

1. K přímce r se sestrojí souměrně sdružená přímka \bar{r} podle reálné osy.
2. Sestrojí se normála n k přímce \bar{r} , čímž dostaneme \bar{r}_{\min} jako průsečík přímek \bar{r} a n .

3. Při kruhové inverzi s jednotkovou základní kružnicí dostaneme bod r'_{\max} .

Dotykové body T_1 a T_2 jsou průsečíky přímky \bar{r} s jednotkovou kružnicí a zároveň také body kružnice, kterou dostaneme při kruhové inverzi.

Třetí věta o kruhové inverzi: Z kružnice neprocházející počátkem dostaneme při kruhové inverzi opět kružnici neprocházející počátkem.

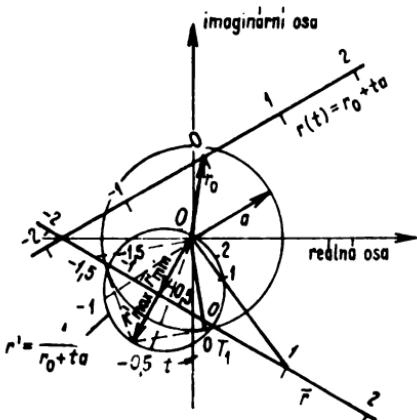
Je dána kružnice

$$r(t) = r_0 + \frac{1}{a + tb} = \frac{c + td}{a + tb}.$$

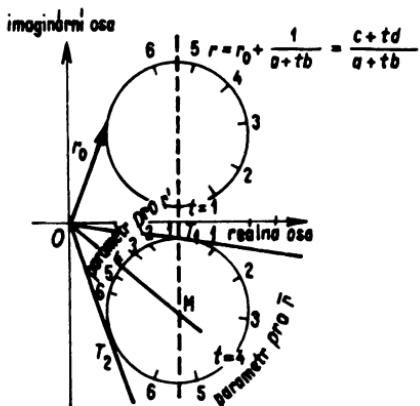
Při kruhové inverzi dostaneme kružnici

$$r' = \frac{a + tb}{c + td}$$

stejného druhu (tj. z kružnice dostaneme kružnici a z přímky přímku).



Obr. 89. Druhá věta o inverzi



Obr. 90. Třetí věta o inverzi

Při konstrukci se postupuje takto (obr. 90):

- Ke kružnici r se sestrojí souměrně sdružená (inverzní) kružnice r' podle reálné osy.
- Stupnice pro výchozí kružnici se vhodně volí tak, aby výchozí kružnice a inverzní kružnice byly souměrně sdružené (shodné). Pak parametrická stupnice pro inverzní kružnici r' je určena průsečíky spojnic bodů t inverzní kružnice s počátkem.

Při volbě jiné stupnice pro inverzní kružnici je třeba dbát, aby tečny z počátku k výchozí kružnici byly při kruhové inverzi vždy také tečnami inverzní kružnice, takže střed stále leží na přímce určené body M a O .

3. ELEMENTÁRNÍ GEOMETRIE

3.1. ZÁKLADNÍ POJMY

3.1.1. Přímka, rovina, prostor a jejich části

Základními útvary geometrie jsou bod, přímka, rovina a <trojrozměrný> prostor.

Množinu bodů na přímce, v rovině nebo v prostoru nazýváme <geometrickým> útvarem.

Uzavřenou oblast v rovině, resp. v prostoru nazýváme obrazcem, resp. tělesem.

Rovina a poloprostor

Roviny se značí malými řeckými písmeny $\varrho, \sigma, \pi, \dots$. Jsou-li A, B, C tři různé body roviny, které neleží v téže přímce, pak se tato rovina značí „rovina ABC “.

Roviny ϱ, σ v trojrozměrném prostoru, které mají společnou právě jen přímku, se nazývají různoběžné (pisce se $\varrho \not\parallel \sigma$). Roviny ϱ, σ v trojrozměrném prostoru, které nemají žádný společný bod, se nazývají <různé> rovnoběžné (pisce se $\varrho \parallel \sigma$). Roviny ϱ, σ v trojrozměrném prostoru, které jsou si rovny, se nazývají splývající rovnoběžné roviny.

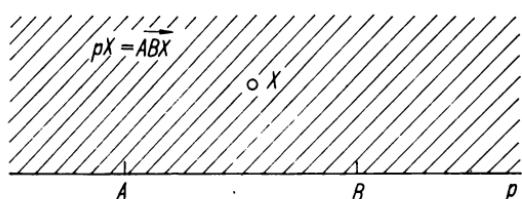
Rovina α dělí prostor ve dvě vzájemně opačné poloprostory se společnou hraniční rovinou α . Je-li X vnitřním bodem jednoho z těchto poloprostorů, tj. jestliže $X \notin \alpha$, pak se tento poloprostor značí buď „poloprostor αX “, nebo stručně $\overline{\alpha X}$.

Přímka, polorovina a polopřímka

Přímky se značí malými latinskými písmeny a, b, p, q, \dots . Jsou-li A, B dva různé body přímky, pak se tato přímka značí buď „přímka AB “, nebo stručně \overleftrightarrow{AB} , popř. $\leftrightarrow AB$.

Přímka $p = \overleftrightarrow{AB}$ dělí rovinu ve dvě vzájemně opačné poloroviny se společnou hraniční přímkou p (obr. 91). Je-li bod X vnitřním bodem jedné z těchto polorovin, tj. jestliže $X \notin p$, pak tato polorovina se značí buď „polorovina pX “, popř. „polorovina ABX “, nebo stručně \overrightarrow{pX} , popř. \overrightarrow{ABX} , popř. $\rightarrow ABX$.

Přímky p, q v rovině, které mají právě jeden společný bod, se nazývají *různoběžné přímky* nebo *různoběžky* (piše se $p \not\parallel q$). Přímky p, q v rovině, které nemají žádný společný bod, se nazývají *rovnoběžné přímky* nebo *⟨různé⟩ rovnoběžky* (piše se $p \parallel q$). Přímky p, q v rovině, které jsou si rovny, se nazývají *splývající [totožné] rovnoběžky*. Přímku různoběžnou s rovnoběžkami p, q nazýváme *příčkou rovnoběžek* p, q .



Obr. 91. Polarovina pX

Přímky p, q v trojrozměrném prostoru, které neleží v téže rovině, se nazývají *mimoběžky*. Každá přímka protínající dvě mimoběžky se nazývá *příčka mimoběžek*. Přímka kolmá k oběma mimoběžkám se nazývá *osa mimoběžek*.

Bod X dělí přímku ve dvě *vzájemně opačné polopřímky* se společným počátkem X . Je-li bod A vnitřním bodem jedné z těchto polopřímek, tj. jestliže $A \neq X$ (obr. 92), pak tato polopřímka se značí bud „polopřímka XA “, nebo stručně \overrightarrow{XA} , popř. $\rightarrow XA$. Opačná polopřímka k polopřímce XA se stručně značí \overleftarrow{XA} , popř. $\leftarrow XA$.

Pás a vrstva

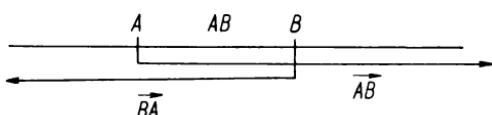
Pásem určeným přímkami p, q nazýváme průnik dvou polarovin pB a qA , jejichž hraniční přímky p, q jsou rovnoběžné a $A \in p, B \in q$.

Vrstvou určenou rovinami α, β nazýváme průnik dvou poloprostorů αB a βA , jejichž hraniční roviny α, β jsou rovnoběžné a $A \in \alpha, B \in \beta$.

Vzdálenost přímek p, q , resp. rovin α, β se nazývá *šířka pásu*, resp. *tloušťka vrstvy*.

Úsečka

Úsečkou AB nazýváme průnik dvou polopřímek AB a BA (obr. 93), který se značí bud „úsečka AB “, nebo stručně AB . Bod se považuje za nulovou úsečku.



Obr. 93. Úsečka AB

Bod ležící mezi body

Ze tří různých bodů přímky leží vždy právě jeden bod mezi ostatními dvěma body. *Bod B leží mezi body A a C*, právě když bod B je vnitřním bodem úsečky AC. Říkáme také, že *bod B odděluje body A, C*.

Lomená čára

Jsou-li A_1, A_2, \dots, A_n vzájemně různé body, pak množinu úseček $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ (resp. $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$) nazýváme *lomenou čárou* (resp. *uzavřenou lomenou čárou*) a označujeme $A_1A_2 \dots A_n$ (resp. $A_1A_2 \dots A_n A_1$). Body A_1, A_2, \dots, A_n nazýváme *vrcholy lomené čáry* $A_1A_2 \dots A_n$ a úsečky A_iA_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) nazýváme *stranami lomené čáry* $A_1A_2 \dots A_n$.

Klínový prostor

Klínovým prostorem [někdy také *klínem*] nazýváme průnik dvou poloprostorů, jejichž hraniční roviny jsou různoběžné. *Hranou klínového prostoru* nazýváme společnou hraniční přímku dvou polorovin, jejichž sjednocením je hranice klínového prostoru.

Hranolový a jehlanový prostor

n-bokým hranolovým prostorem nazýváme množinu všech bodů všech vzájemně rovnoběžných ⟨tvořících⟩ přímek procházejících všemi body ⟨řídícího⟩ n -úhelníku, přičemž tyto přímky nejsou rovnoběžné s rovinou tohoto n -úhelníku. Hranici n -bokého hranolového prostoru nazýváme *n-bokou hranolovou plochou*. *Hranou hranolového prostoru* nazýváme jeho tvořící přímku procházející vrcholem jeho řidícího mnohoúhelníku.

n-bokým jehlanovým prostorem nazýváme množinu všech bodů všech ⟨tvořících⟩ přímek procházejících bodem V (tzv. *vrcholem*) a všemi body ⟨řídícího⟩ n -úhelníku, přičemž bod V neleží v rovině n -úhelníku. Hranici n -bokého jehlanového prostoru nazýváme *n-bokou jehlanovou plochou*. *Hranou jehlanového prostoru* nazýváme jeho tvořící přímku procházející vrcholem řidícího mnohoúhelníku.

Válcový a kuželový prostor

Válcovým prostorem nazýváme množinu všech bodů všech vzájemně rovnoběžných ⟨tvořících⟩ přímek procházejících všemi body ⟨řídící⟩ jednoduché uzavřené křivky a její vnitřní oblasti, přičemž tyto přímky nejsou rovnoběžné

s rovinou tohoto geometrického útvaru. Hranici válcového prostoru nazýváme *válcovou plochou*.

Kuželovým prostorem nazýváme množinu všech bodů všech <tvořících> přímk procházejících bodem V (tzv. *vrcholem*) a všemi body <řídící> jednoduché uzavřené křivky a její vnitřní oblasti, přičemž bod V neleží v rovině tohoto geometrického útvaru. Hranici kuželového prostoru nazýváme *kuželovou plochou*.

Rovinný řez

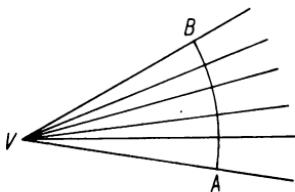
<*Rovinným*> řezem geometrického útvaru U rovinou ϱ nazýváme průnik roviny ϱ a útvaru U .

Konvexní geometrický útvar

Geometrický útvar, jehož každé dva body lze spojit úsečkou, která je částí tohoto útvaru, se nazývá *konvexní*.

3.1.2. Rovinný a prostorový úhel

<*Rovinným*> úhlem nazýváme množinu všech bodů všech polopřímek VX se společným počátkem V , kde bod X patří do daného oblouku AB kružnice se středem v bodě V (obr. 94). Takto definovaný úhel se značí „úhel



Obr. 94. Úhel AVB

AVB . Bod V se nazývá *vrchol úhlu AVB* a polopřímky VA a VB se nazývají *ramena úhlu AVB* . Množina právě těch bodů úhlu AVB , které nepatří do polopřímek VA a VB , se nazývá *vnitřek úhlu AVB* . Množina právě těch bodů roviny, které nepatří do úhlu AVB , se nazývá *vnějšek úhlu AVB* . Je-li oblouk AB podmnožinou nějaké polokružnice, pak úhel AVB se nazývá *konvexní* a značí se stručně $\angle AVB$. Je-li nějaká polokružnice vlastní podmnožinou oblouku AB , pak úhel AVB se nazývá *nekonvexní* a značí se stručně $\oslash AVB$.

Je-li oblouk AB celou kružnicí, resp. polokružnicí, resp. nulovým obloukem, pak úhel AVB se nazývá *plný*, resp. *přímý*, resp. *nulový*.

Osa úhlu

Osovou úhlu nazýváme množinu právě těch bodů úhlu, které mají od obou rámén úhlu stejnou vzdálenost.

Orientovaný úhel

Orientovaným úhlem AVB (stručně \widehat{AVB}) nazýváme uspořádanou dvojici polopřímek VA , VB se společným počátkem V , přičemž polopřímka VA , resp. VB se nazývá *počáteční*, resp. *koncové rameno* a bod V se nazývá *vrchol orientovaného úhlu AVB* . Při $VA \neq VB$ je tedy $\widehat{AVB} \neq \widehat{BVA}$.

Prostorový úhel

Prostorovým úhlem nazýváme množinu všech bodů všech polopřímek VX se společným počátkem V , kde bod X patří do daného kulového vrchlíku se středem v bodě V . Bod V se nazývá *vrchol prostorového úhlu*.

3.1.3. Míry v geometrii

3.1.3.1. Míra jako zobrazení

Mírou $\langle v \text{ geometrii} \rangle$ nazýváme takové zobrazení μ systému \mathcal{S} rovnatelných geometrických útvarů (tj. geometrických útvarů téhož druhu) do množiny \mathbb{R}_0^+ , které má tyto vlastnosti ($X, Y, E \in \mathcal{S}$):

- $X \cong Y \Rightarrow \mu(X) = \mu(Y)$.
- Nemají-li geometrické útvary X a Y žádný vnitřní bod společný, pak $\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y)$.
- Pro nějaký předem zvolený geometrický útvar $E \in \mathcal{S}$ platí $\mu(E) = 1$.

Geometrický útvar E nazýváme *měřicí jednotkou míry μ* a hodnotu $\mu(X)$ nazýváme *číselnou velikostí geometrického útvaru X při měřicí jednotce E* .

Shodnost geometrických útvarů viz v článku 3.1.4.

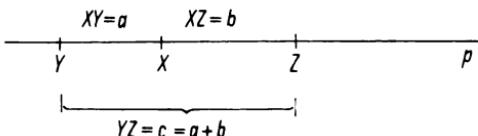
3.1.3.2. Součet úseček a součet úhlů

Grafický součet úseček

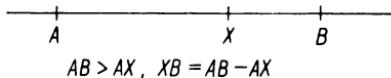
Nanese-li úsečky a, b na přímku p tak, aby pro body X, Y, Z přímky p platily vztahy $XY = a$, $XZ = b$ a bod X ležel mezi body Y, Z (obr. 95), pak úsečku $YZ = c$ nazýváme *(grafickým) součtem úseček a, b* a pišeme $YZ = XY + XZ$ neboli $c = a + b$.

Porovnávání úseček a grafický rozdíl úseček

Dvě neshodné úsečky $AB = a$, b porovnáváme tak, že úsečku b přeneseme na polopřímku AB do polohy $AX = b$ (obr. 96). Jestliže bod X leží mezi body A , B , říkáme, že úsečka a je větší než úsečka b , resp. úsečka b je menší než úsečka a , a píšeme $a > b$, resp. $b < a$. Úsečku $XB = c$ v tomto případě nazýváme *(grafickým) rozdílem úseček* a , b (v tomto pořadí) a píšeme $XB = AB - AX$ neboli $c = a - b$.



Obr. 95. *(Grafický) součet úseček a , b*



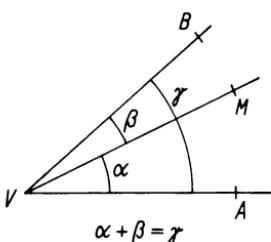
Obr. 96. *(Grafický) rozdíl úseček a , b*

Jsou-li a , b shodné úsečky, pak jejich *(grafický) rozdíl* $a - b$ považujeme za *nulovou úsečku*.

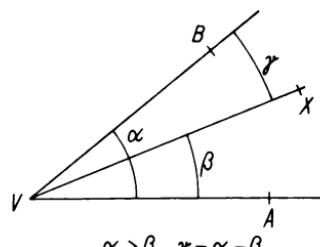
Množina všech úseček v rovině s operací *(grafické) sčítání úseček* tvoří aditivní komutativní monoid, jehož nulovým prvkem je nulová úsečka.

Grafický součet úhlů

Přeneseme-li dva konvexní úhly α , β do opačných polorovin vytaťých přímkou VM k ramenu VM , takže zaujmou nové polohy $AVM \cong \alpha$, $MVB \cong \beta$ (obr. 97), pak úhel $AVB = \gamma$, jehož částí je polopřímka VM , nazýváme *(grafickým) součtem úhlů* α , β a píšeme $\gamma = \alpha + \beta$.



Obr. 97. *(Grafický) součet úhlů α , β*



Obr. 98. *(Grafický) rozdíl úhlů α , β*

Porovnávání úhlů a grafický rozdíl úhlů

Dva neshodné konvexní úhly $AVB = \alpha$, β porovnáme tak, že úhel β přeneseme k ramenu VA do poloroviny VAB , takže zaujme novou polohu AVX

(obr. 98). Jestliže bod X je vnitřním bodem úhlu AVB , říkáme, že úhel α je větší než úhel β , resp. úhel β je menší než úhel α a píšeme $\alpha > \beta$, resp. $\beta < \alpha$. Úhel $XVB = \gamma$ v tomto případě nazýváme \langle grafickým \rangle rozdílem úhlů α, β (v tomto pořadí) a píšeme $\gamma = \alpha - \beta$.

Jsou-li α, β shodné úhly, pak jejich \langle grafický \rangle rozdíl $\alpha - \beta$ považujeme za nulový úhel.

Jsou-li dva úhly totožné, říkáme také, že jsou si *rovny*.

Množina všech úhlů v rovině s operací \langle grafické \rangle sčítání úhlů tvoří aditivní komutativní monoid, jehož nulovým prvkem je nulový úhel.

3.1.3.3. Délka [velikost] úsečky

Hodnotu míry $\mu(X)$: $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, kde \mathcal{S} je systém všech úseček a $X \in \mathcal{S}$, nazýváme *délkou* [velikostí] úsečky X . Nenulovou úsečku E , pro niž platí $\mu(E) = 1$, nazýváme *délkovou jednotkou* [jednotkou délky, jednotkovou úsečkou].

Délkou úsečky při délkové jednotce E je tedy hodnota zobrazení μ , které každé úsečce přiřazuje nezáporné číslo a má tyto vlastnosti:

- a) Shodné úsečky mají stejnou délku.
- b) Délka \langle grafického \rangle součtu dvou úseček se rovná součtu jejich délek.
- c) Zvolená nenulová úsečka má délku 1.

Délku úsečky $X = AB$ při délkové jednotce E značíme

$$|X|_E, \quad \varrho(A, B)_E \quad \text{nebo} \quad d(AB)_E,$$

popř. bez uvádění délkové jednotky, nemůže-li dojít k nedorozumění.

Často se nerozlišuje úsečka a její délka a pro oba pojmy se používá téhož označení a někdy i téhož názvu. V této příručce jde např. o názvy poloměr, průměr, výška a obvod.

Vzdálenost

Vzdáleností dvou bodů A, B [*vzdáleností bodu A od bodu B*], kterou značíme $|AB|$, $\varrho(A, B)$ nebo $d(A, B)$, nazýváme délku úsečky AB .

Vzdáleností bodu A od přímky a , kterou značíme $|Aa|$, $\varrho(A, a)$ nebo $v(A, a)$, nazýváme vzdálenost bodu A od paty kolmice vedené z bodu A k přímce a .

Vzdáleností bodu A od roviny α , kterou značíme $|A\alpha|$, $\varrho(A, \alpha)$ nebo $v(A, \alpha)$, nazýváme vzdálenost bodu A od paty kolmice vedené z bodu A k rovině α .

Vzdáleností dvou rovnoběžných přímek a, b , kterou značíme $|ab|$, $\varrho(a, b)$ nebo $v(a, b)$, nazýváme vzdálenost libovolného bodu jedné přímky od druhé přímky.

Vzdáleností dvou rovnoběžných rovin α, β , kterou značíme $|\alpha\beta|$, $\varrho(\alpha, \beta)$ nebo $v(\alpha, \beta)$, nazýváme vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé roviny.

Vzdáleností dvou mimoběžek a, b , kterou značíme $|ab|$, $\varrho(a, b)$ nebo $v(a, b)$, nazýváme vzdálenost dvou rovnoběžných rovin procházejících těmito mimo- běžkami.

Vzdáleností přímky a *od roviny* α *s ní rovnoběžné*, kterou značíme $|\alpha a|$, $\varrho(a, \alpha)$ nebo $v(a, \alpha)$, nazýváme vzdálenost libovolného bodu přímky a od roviny α .

3.1.3.4. Velikost úhlu

Velikost <neorientovaného> úhlu

Hodnotu míry $\mu(X)$: $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, kde \mathcal{S} je systém všech <neorientovaných> úhlů a $X \in \mathcal{S}$, nazýváme *velikostí úhlu* X . Nenulový úhel E , pro který platí $\mu(E) = 1$, nazýváme *úhlovou jednotkou*.

Velikostí <neorientovaného> úhlu při úhlové jednotce E je tedy hodnota zobrazení μ , které každému neorientovanému úhlu přiřazuje nezáporné číslo a má tyto vlastnosti:

- Shodné úhly mají stejnou velikost.
- Velikost úhlu $AVB \in \mathcal{S}$ se rovná součtu velikostí úhlů AVX a XVA , kde X je vnitřní bod úhlu AVB .
- Zvolený nenulový úhel má velikost 1.

Velikost <neorientovaného> úhlu X při úhlové jednotce E značíme $|X|_E$ nebo $v(X)_E$, popř. stručně $|X|$ nebo $v(X)$, nemůže-li dojít k nedorozumění, který úhel jsme zvolili za jednotkový.

Často se nerozlišíuje úhel a jeho velikost a pro oba pojmy se používá téhož označení.

Úhlové míry

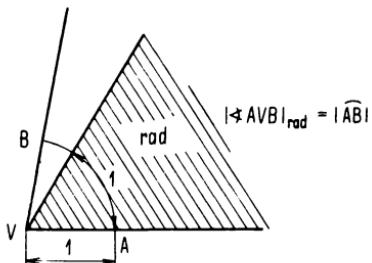
V praxi se velikost úhlu považuje za veličinu, takže se k velikosti úhlu připojuje značka úhlové jednotky. Pouze u údajů v obloukové míře se značka rad zpravidla vynechává. Úhly se zpravidla měří v stupňové, setinné nebo obloukové míře.

Hodnota $|X|_{\text{rad}}$ *obloukové [radiánové] míry úhlu* $AVB = X$ *se rovná délce kružnicového oblouku* AB , který je průnikem úhlu AVB a kružnice se středem ve vrcholu V úhlu AVB a s poloměrem rovným číslu 1. Úhlová jednotka obloukové míry se nazývá *radián* a označuje se rad, takže $\text{arc rad} = 1$ (obr. 99).

Úhlovou jednotkou stupňové [devadesátinné] míry je <úhlový> [<<devadesátinný>] stupeň (značka °), pro který platí

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}.$$

Úhlový stupeň se dělí na 60 <úhlových> minut ($1^\circ = 60'$) a úhlová minuta se dělí na 60 <úhlových> vteřin ($1' = 60''$).



Obr. 99. Radián

Úhlovou jednotkou setinné míry je grad [setinný stupeň] (značka ¢), pro který platí

$$1¢ = \frac{\pi}{200} \text{ rad}.$$

Grad se dělí na 100 setinných minut [centigradů] ($1¢ = 100^c = 100'$) a setinná minuta se dělí na 100 setinných vteřin [centicentigradů] ($1^c = 100^{cc} = 100''$).

Dílec je úhlovou jednotkou, pro kterou platí

$$1 \text{ dílec} = \frac{\pi}{3\,000} \text{ rad} = \frac{3^\circ}{50}.$$

Dělostřelecký dílec je úhlovou jednotkou, pro kterou platí

$$1 \text{ dělostřelecký dílec} = \frac{\pi}{3\,200} \text{ rad} = \frac{9^\circ}{160}.$$

Matematický dílec (značka dc) je úhlovou jednotkou, pro který platí

$$1 \text{ dc} = \frac{1}{1\,000} \text{ rad}.$$

Převodní vztahy pro velikosti úhlů

Jestliže stupňovou, resp. obloukovou míru úhlu označíme φ , resp. $\text{arc } \varphi$, platí

$$\text{arc } \varphi = \frac{\pi}{180} \varphi,$$

$$\varphi = \frac{180}{\pi} \text{arc } \varphi.$$

Dále platí $\left(1 \text{ R} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \right)$

$$4 \text{ R} = 360^\circ = 400^g = 2\pi \text{ rad};$$

$$1 \text{ rad} \approx 0,636 \, 619 \, 8 \text{ R} \approx 57,295 \, 78^\circ \approx 57^\circ 17' 45'' \approx 63,661 \, 98^g;$$

$$30^\circ = \frac{1}{6}\pi \text{ rad}, \quad 45^\circ = \frac{1}{4}\pi \text{ rad}, \quad 60^\circ = \frac{1}{3}\pi \text{ rad},$$

$$90^\circ = \frac{1}{2}\pi \text{ rad}, \quad 180^\circ = \pi \text{ rad}, \quad 270^\circ = \frac{3}{2}\pi \text{ rad},$$

$$1^\circ = 0,017 \, 453 \, 29 \text{ rad}, \quad 1' \doteq 0,000 \, 29 \text{ rad};$$

$$1^g = 0,01 \text{ R} = 0,9^\circ = \frac{\pi}{200} \text{ rad} \doteq 0,015 \, 707 \, 96 \text{ rad}, \quad 1^\circ = \frac{10^g}{9};$$

$$1 \text{ dílec} = \frac{3^\circ}{50} = 3,6',$$

$$1^\circ = \frac{50}{3} \text{ dílce} = 16,6 \text{ dílce};$$

$$1 \text{ dc} \approx \frac{1}{1 \, 571} \text{ R}, \quad 1 \text{ dc} \approx 3'26,3'', \quad 1^\circ \approx 17,45 \text{ dc}.$$

Při $|\alpha|_{dc} < 250 \text{ dc}$ s přesností na dvě platné číslice platí

$$\text{tg } |\alpha|_{dc} \approx \frac{|\alpha|_{dc}}{1 \, 000}.$$

Dílcové pravidlo

Je-li oko pozorovatele ve výšce dolního konce předmětu, pak při $|\beta|_{dc} < 250 \text{ dc}$ s přesností na dvě platné číslice platí formální vzorec

$$\beta \approx \frac{v}{d},$$

kde v (m) je výška pozorovaného předmětu,
 d (km) – vodorovná vzdálenost pozorovatele,
 β (dc) – velikost zorného úhlu.

Určujeme-li výšku v , resp. vzdálenost d , pak výsledek zvětšíme, resp. změníme o jeho 5 %.

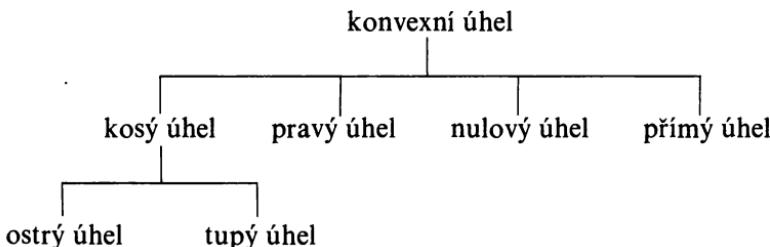
Příklad:

Je-li tyč o délce 4 m vidět pod zorným úhlem velikosti 20 dc, dostaneme podle dílcového pravidla vztah $20 \approx 4/d$, odkud vzdálenost od pozorovatele $d \approx \left(\frac{4}{20} - \frac{1}{100}\right) \text{ km} = 190 \text{ m}$.

Klasifikace úhlů podle jejich velikostí α

- *nulový úhel* ($\alpha = 0^\circ$),
- *ostrý úhel* ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$),
- *pravý úhel* ($\alpha = 90^\circ$),
- *tupý úhel* ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$),
- *kosý úhel* ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$ a $90^\circ < \alpha < 180^\circ$),
- *přímý úhel* ($\alpha = 180^\circ$),
- *konvexní [vypuklý] úhel* ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$),
- *nekonvexní úhel* ($180^\circ < \alpha \leq 360^\circ$),
- *plný úhel* ($\alpha = 360^\circ$).

Přehled názvů konvexních úhlů



Styčné, vedlejší a vrcholové úhly

Styčnými úhly nazýváme dva úhly, jejichž součet velikostí je menší než velikost plného úhlu a jejichž dvě ramena splývají a zbývající dvě ramena leží ve vzájemně opačných polovinách s hraniční přímkou obsahující společné rameno (obr. 100a).

Vedlejšími úhly nazýváme styčné úhly, jejichž nesplývající ramena jsou vzájemně opačné polopřímky. Dva shodné vedlejší úhly se nazývají *pravé* (obr. 100b).

Vrcholovými úhly nazýváme úhly, jejichž vrcholy splývají a ramena jsou vzájemně opačné polopřímky. Vrcholové úhly jsou shodné (obr. 100c).

Úhly sevřené dvěma rovnoběžkami a jejich příčkou (obr. 101)

Souhlasné úhly jsou si rovny:

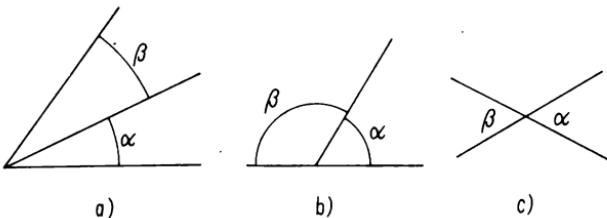
$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1, & \gamma &= \gamma_1, \\ \beta &= \beta_1, & \delta &= \delta_1.\end{aligned}$$

Střídavé úhly jsou si rovny:

$$\begin{aligned}\alpha &= \gamma_1, & \gamma &= \alpha_1, \\ \beta &= \delta_1, & \delta &= \beta_1.\end{aligned}$$

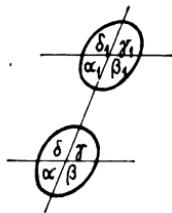
Přilehlé úhly mají součet velikostí roven 180° :

$$\begin{aligned}\alpha + \delta_1 &= 180^\circ, & \gamma + \beta_1 &= 180^\circ, \\ \beta + \gamma_1 &= 180^\circ, & \delta + \alpha_1 &= 180^\circ.\end{aligned}$$



Obr. 100. a) Styčné úhly; b) vedlejší úhly; c) vrcholové úhly

Obr. 101. Souhlasné, střídavé a přilehlé úhly



Doplňkové a výplňkové úhly

Dva úhly, jejichž grafickým součtem je pravý, resp. přímý úhel, se nazývají *doplňkové*, resp. *výplňkové*.

Rozdíl mezi vedlejšími a výplňkovými úhly je v tom, že u vedlejších úhlů záleží na jejich vzájemném umístění, kdežto u výplňkových úhlů jde jen o vztah platný pro jejich velikosti. Všechny vedlejší úhly jsou tedy výplňkové, ale výplňkové úhly nemusí být vedlejšími úhly.

Velikost orientovaného úhlu

Základní velikost orientovaného úhlu AVB je velikost neorientovaného úhlu, jehož všemi body proběhne počáteční rameno VA při otočení do polohy koncového ramena VB v kladném smyslu (obr. 102).

Velikostí orientovaného úhlu je v stupňové míře $\alpha + k \cdot 360^\circ$ a v obloukové míře $\alpha + 2k\pi$ rad, přičemž α je základní velikost orientovaného úhlu a $k \in \mathbb{Z}$.

Velikost orientovaného úhlu α , resp. \widehat{AVB} se značí $|\alpha|$, resp. $|\widehat{AVB}|$. V praxi se orientovaný úhel i jeho velikost označuje zpravidla týmž znakem, např. α, β, \dots

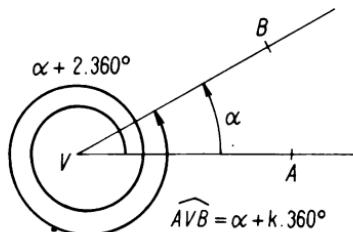
Příklad:

Orientovaný úhel o velikosti -3030° má základní velikost 210° , neboť

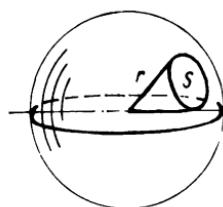
$$-3030^\circ = 210^\circ - 9 \cdot 360^\circ.$$

Velikost prostorového úhlu

Velikost ω prostorového úhlu, který vyjadřuje rozdílovost kuželet, se definuje jako poměr obsahu S kulového vrchlíku, který daný prostorový úhel vymezuje na kulové ploše se středem ve vrcholu prostorového úhlu, a druhé mocniny poloměru r této kulové plochy, tj. $\omega = S/r^2$ (obr. 103).



Obr. 102. Velikost orientovaného úhlu



Obr. 103. Velikost prostorového úhlu

Měřicí jednotkou pro určování velikosti prostorového úhlu je prostorový úhel s vrcholem ve středu kulové plochy, který na této ploše vytíná vrchlík o obsahu rovném obsahu čtverce se stranou rovnou poloměru kulové plochy. Tato jednotka se nazývá *steradián* a označuje se sr. Pro plný prostorový úhel, který se nazývá *spat* a označuje se sp, platí

$$1 \text{ sp} = 4\pi \text{ sr.}$$

Odchylka dvou přímek

Odchylkou dvou přímek nazýváme velikost nulového, ostrého nebo pravého úhlu, který má libovolně zvolený vrchol V a ramena na přímkách, které procházejí bodem V a jsou rovnoběžné s danými přímkami.

Odchylkou dvou rovin nazýváme odchylku průsečnic těchto rovin s třetí rovinou, která je k oběma daným rovinám kolmá. Rovnoběžné roviny mají odchylku rovnou nule.

Odchylkou přímky a roviny nazýváme odchylku dané přímky a průsečnice dané roviny s rovinou, která obsahuje danou přímku a je kolmá k dané rovině.

3.1.3.5. Obsah obrazce

Hodnotu míry $\mu(X)$: $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$, kde \mathcal{S} je systém všech obrazců a $X \in \mathcal{S}$, nazýváme *〈plošným〉 obsahem obrazce X*. Za obrazec E , pro který platí $\mu(E) = 1$, volíme čtverec se stranou délky 1 a nazýváme jej *plošnou jednotkou [jednotkou obsahu, obsahovou jednotkou]*.

Obsahem obrazce při obsahové jednotce E je tedy hodnota zobrazení μ , které každému obrazci přiřazuje kladné číslo a má tyto vlastnosti:

- Shodné obrazce mají stejný obsah.
- Nemají-li dva obrazce žádný vnitřní bod společný, pak obsah jejich sjednocení se rovná součtu jejich obsahů.
- Zvolený obrazec E má obsah 1.

3.1.3.6. Objem tělesa

Hodnotu míry $\mu(X)$: $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$, kde \mathcal{S} je systém všech těles a $X \in \mathcal{S}$, nazýváme *objemem tělesa X*. Za těleso E , pro které platí $\mu(E) = 1$, volíme krychli s hranou délky 1 a nazýváme ji *objemovou jednotkou [jednotkou objemu]*.

Objemem tělesa při objemové jednotce E je tedy hodnota zobrazení μ , které každému tělesu přiřazuje kladné číslo a má tyto vlastnosti:

- Shodná tělesa mají stejný objem.
- Nemají-li dvě tělesa žádný vnitřní bod společný, pak objem jejich sjednocení se rovná součtu jejich objemů.
- Zvolené těleso E má objem 1.

3.1.3.7. Pojem veličiny

Délkovou, úhlovou, plošnou a objemovou jednotku souhrnně nazýváme *měřicími jednotkami*.

Protože se ve fyzice a v technických vědách používá různých měřicích jednotek, považuje se tam hodnota $m = \mu(X)$ míry μ pro nějaký objekt X za *veličinu* neboli za formální součin číselné hodnoty $\{m\}$ a zvolené měřicí jednotky $[m]$ a zapisuje se ve tvaru

$$\{m\} [m], \quad \{m\} \cdot [m] \quad \text{nebo} \quad \{m\}_{[m]}.$$

Příklad:

Délka $d = |X| = 5$ úsečky X se při délkové jednotce centimetr zapíše jako veličina ve tvaru

$$d = \{d\} [d] = 5 \text{ cm},$$

kde $\{d\} = 5$ je číselná hodnota a $[d] = \text{cm}$ zvolená délková jednotka.

Měnitel

Jestliže nějaká veličina a má číselnou hodnotu $\{a\}_j$, resp. $\{a\}_{j'}$ při měřicí jednotce j , resp. j' , platí

$$\{a\}_{j'} = k \{a\}_j,$$

kde k je konstanta (tzv. *měnitel*), která udává velikost měřicí jednotky j při měřicí jednotce j' . V tomto případě říkáme, že měřicí jednotka j je *k-násobkem měřicí jednotky j'* .

Tabulka 3.1

Předpony a znaky SI pro tvorbu

násobných a dilých jednotek

Násobitel	Předpona	Znak
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	hektó	h
10	deka	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milí	m
10^{-6}	mikro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	piko	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

Příklad:

Pro $\{a\}_m = 500$ platí

$$\{a\}_{km} = k \{a\}_m = \frac{500}{1000} = 0,5,$$

neboť $1 \text{ m} = 10^{-3} \text{ km}$ (tj. $k = 10^{-3}$). Je tedy $a = 500 \text{ m} = 0,5 \text{ km}$.

V praxi se za délkové jednotky volí násobky a díly základní jednotky SI, zvané metr (značka m), jejichž názvy a symboly se tvoří pomocí tabulky 3.1.

Příklad:

$$1 \text{ m} = 10^{-3} \text{ km} = 10 \text{ dm} = 10^2 \text{ cm} = 10^3 \text{ mm} = 10^6 \mu\text{m},$$

kde číselné hodnoty jsou měniteli.

3.1.4. Geometrická zobrazení v rovině

Při geometrickém zobrazení v rovině je každému bodu (tzv. *vzoru*) A útvaru U přiřazen právě jeden bod (tzv. *obraz*) A' útvaru U' (U' je tzv. *obraz útvaru U* ; U je tzv. *vzor útvaru U'*). Při $A = A'$ se bod A nazývá *samodružný*. Při $U = U'$ se útvar U nazývá *samodružný [invariantní]*.

Ríkáme, že dva různé body A, B roviny tvoří při daném zobrazení *involutorní dvojici*, právě když bod B je obrazem bodu A a zároveň bod A je obrazem bodu B . Zobrazení v rovině, které není identitou a při němž každý bod roviny, který není samodružný, patří involutorní dvojici, nazýváme *involutorním zobrazením [involucí]*.

Shodnost útvarů

Jestliže se dva útvary U_1, U_2 dají přemístit tak, že se navzájem kryjí (tj. libovolný bod útvaru U_1 splývá s bodem útvaru U_2 a zároveň libovolný bod útvaru U_2 splývá s bodem útvaru U_1), nazýváme je *shodnými* a píšeme $U_1 \cong U_2$. Shodnost úseček a, b , resp. úhlů α, β však někdy nevhodně zapisujeme stručněji $a = b$, resp. $\alpha = \beta$.

Shodné zobrazení v rovině

Shodným zobrazením [shodnosti, izometrií]. v rovině nazýváme zobrazení, při němž každé úsečce je přiřazena shodná úsečka. *Přímá*, resp. *nepřímá shodnost* převádí každý orientovaný úhel v souhlasně, resp. nesouhlasně orientovaný úhel. Přímou, resp. nepřímou shodnost lze realizovat přemístěním průsvitky s obkresleným útvarem, která se ponechá lícem nahoru, resp. se obrátí na rub.

Jsou-li dva geometrické útvary U a U' shodné, pak lze najít takové shodné zobrazení, že útvar U převede v útvar U' .

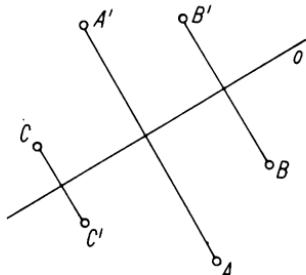
Identita

Identitou v rovině ϱ nazýváme shodné zobrazení, při němž obrazem každého bodu $A \in \varrho$ je týž bod A .

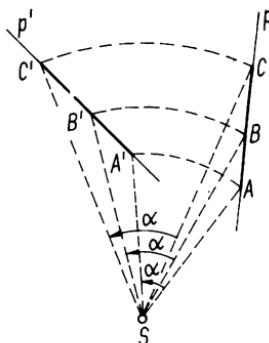
Osová souměrnost

Osovou souměrností [osovou symetrií] s osou o (tzv. *osou souměrnosti*) v rovině ϱ nazýváme shodné zobrazení, při němž obrazem každého bodu $A \in \varrho$ ($A \neq o$) je bod $A' \in \varrho$, který leží na kolmici bodem A k ose o , přičemž úsečka AA' je osou o půlena (obr. 104).

Samodružnými body osové souměrnosti jsou právě všechny body osy souměrnosti. Samodružnými přímkami osové souměrnosti jsou právě osa souměrnosti a všechny přímky kolmé k ose souměrnosti. Osová souměrnost je involucí.



Obr. 104. Osová souměrnost



Obr. 105. Otočení

Otočení [rotace]

Otočením [rotací] kolem bodu S (tzv. *středu otočení*) v rovině ϱ o orientovaný úhel α (tzv. *úhel otočení*) nazýváme shodné zobrazení, při němž obrazem každého bodu $A \in \varrho$ ($A \neq S$) je bod $A' \in \varrho$, pro který platí $SA \cong SA'$ a $\widehat{ASA'} = \alpha$ (obr. 105).

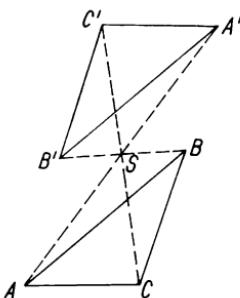
Otočení má jediný samodružný bod S . Otočení vznikne složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami.

Středová souměrnost

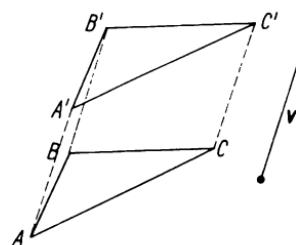
Středovou souměrností [středovou symetrií] se středem S [souměrností podle středu S] nazýváme shodné zobrazení, které jedinému bodu S přiřazuje týž bod S a každému bodu $X \neq S$ přiřazuje takový bod X' , že bod S je středem úsečky XX' (obr. 106). Bod S se nazývá *střed souměrnosti*.

Středovou souměrnost lze považovat za otočení kolem středu S při úhlu otočení s velikostí $|\alpha| = (2k + 1)\pi$ rad ($k \in \mathbb{Z}$).

Středová souměrnost má jediný samodružný bod S . Samodružnými přímkami středové souměrnosti jsou právě všechny přímky procházející středem souměrnosti. Středová souměrnost je involuci.



Obr. 106. Středová souměrnost



Obr. 107. Posunutí

Souměrně sdružené a souměrné útvary

Daný útvar a jeho obraz v souměrnosti podle osy, resp. podle středu se nazývají *souměrně sdružené útvary podle osy*, resp. *podle středu*. Jestliže pro daný útvar existuje taková osová, resp. středová souměrnost, v níž daný útvar je samodružný, říkáme, že daný útvar je *souměrný podle osy*, resp. *podle středu*, popř. říkáme, že je *osově*, resp. *středově souměrný*.

Posunutí

Posunutím o vektor v v rovině ϱ nazýváme shodné zobrazení, při němž obrazem každého bodu $A \in \varrho$ je takový bod $A' \in \varrho$, že vektor $\overrightarrow{AA'} = v$ (obr. 107).

Podobné zobrazení v rovině

Podobným zobrazením [podobností] v rovině nazýváme zobrazení, při němž každé úsečce AB je přiřazena úsečka $A'B'$ s délkou $k|AB|$, kde $k \in \mathbb{R}^+$ je tzv. *poměr podobnosti*.

Každá podobnost při $k = 1$ je shodností.

Dva útvary U a U' nazýváme *podobnými* a píšeme $U \sim U'$, je-li možno najít podobné zobrazení, které převádí útvar U v útvar U' .

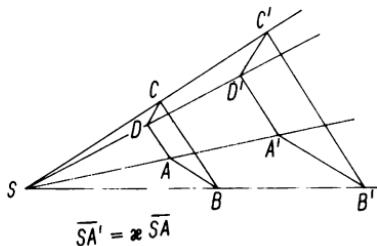
Stejnolehlosť [homotetie]

Stejnolehlostí [homotetii] se středen: S a koeficientem stejnolehlosti χ ($\chi \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$) v rovině ϱ nazýváme podobné zobrazení, při němž obrazem

každého bodu $A \in \varrho$ ($A \neq S$) je takový bod $A' \in \varrho$, že vektor $\overline{SA}' = \varkappa \cdot \overline{SA}$ (obr. 108).

Každá stejnolehlost je podobností s poměrem podobnosti $k = |\alpha|$. Stejnolehlost s koeficientem $\alpha = -1$ je středovou souměrností.

Útvar a jeho obraz ve stejnolehlosti se nazývají *stejnolehlé útvary* [útvary sdružené ve stejnolehlosti].



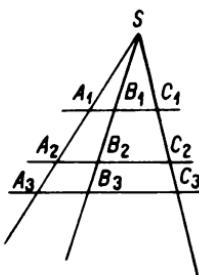
Obr. 108. Stejnolehllost

3.1.5. Použití shodnosti a podobnosti

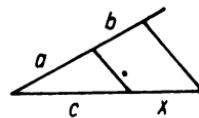
Věty o svazku přímek

První věta o svazku přímek: Jsou-li přímky svazku přímek prořízeny rovno-bežkami (obr. 109), pak délky vzniklých úseček na jedné přímce svazku jsou v témže poměru jako délky odpovídajících úseček na každé jiné přímce svazku.

Druhá věta o svazku přímek: Jsou-li přímky svazku přímek proťaty rovnoběžkami (viz obr. 109), pak délky stejnolehlých úseček na rovnoběžkách jsou v témže poměru jako délky odpovídajících úseček na kterékoli přímce svazku.



Obr. 109. Svazek přímek a rovnoběžky



Obr. 110. Čtvrtá geometrická úměrná

Úměry plynoucí z vět o svazku přímek

První věta o svazku přímek:

$$|SA_1| : |SA_2| : |SA_3| = |SB_1| : |SB_2| : |SB_3| = |SC_1| : |SC_2| : |SC_3|$$

nebo

$$|SA_1| : |A_1A_2| : |A_2A_3| = |SB_1| : |B_1B_2| : |B_2B_3| = |SC_1| : |C_1C_2| : |C_2C_3|$$

atd.

Druhá věta o svazku přímek:

$$|A_1B_1| : |A_2B_2| : |A_3B_3| = |SA_1| : |SA_2| : |SA_3|$$

nebo

$$|B_1C_1| : |B_2C_2| : |B_3C_3| = |SC_1| : |SC_2| : |SC_3|$$

atd. Z toho plyne

$$|A_1B_1| : |B_1C_1| = |A_2B_2| : |B_2C_2| = |A_3B_3| : |B_3C_3|.$$

Čtvrtá (geometrická) úměrná (obr. 110)

Čtvrtou (geometrickou) úměrnou nazýváme úsečku s délkou x , pro kterou platí

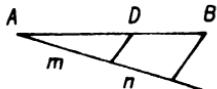
$$a : b = c : x,$$

kde a, b, c jsou délky daných úseček.

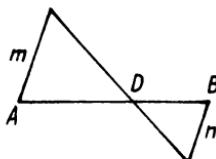
Rozdelení úsečky v daném poměru

Úsečka se má rozdělit v poměru $m:n$ (obr. 111 a 112).

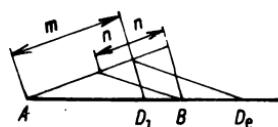
Získaný dělící bod se přesněji nazývá *vnitřní dělící bod*.



Obr. 111. Dělení úsečky v poměru $m:n$



Obr. 112. Jiná konstrukce dělícího bodu D



Obr. 113. Použití první věty o svazku přímek

Dělící poměr uspořádané trojice bodů přímky

Dělícím poměrem bodu C na přímce vzhledem k základním bodům A, B ($B \neq C$) se nazývá číslo

$$\lambda(ABC) = \varepsilon \frac{|AC|}{|BC|},$$

kde $\varepsilon = -1$, resp. $\varepsilon = 1$, jestliže bod C leží, resp. neleží mezi body A, B .

Dvojpoměr uspořádané čtveřice bodů přímky

Dvojpoměrem čtyř bodů A, B, C, D (v tomto pořadí) na přímce se nazývá číslo

$$\delta(ABCD) = \frac{\lambda(ABC)}{\lambda(ABD)} \quad [\lambda(ABD) \neq 0].$$

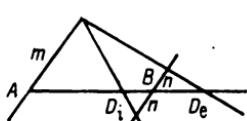
Harmonická čtveřice bodů

Harmonickou čtveřici bodů přímky nazýváme body A, B, D_i, D_e (v tomto pořadí), jejichž dvojpoměr $\lambda(ABD_i D_e) = -1$, přičemž D_i, resp. D_e se nazývá vnitřní, resp. vnější dělící bod, kdežto body A, B se nazývají základní (obr. 113 a 114). Říkáme, že body D_i, D_e jsou harmonicky sdružené vzhledem k bodům A, B.

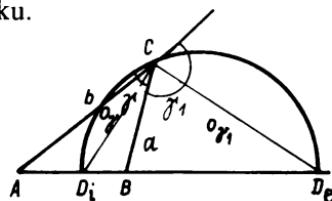
V každém trojúhelníku protiná osa vnitřního úhlu a osa příslušného vnějšího úhlu přímku obsahující protější stranu po řadě ve vnitřním a vnějším dělícím bodě z harmonické čtveřice bodů, jejimiž základními body jsou vrcholy protější strany trojúhelníku. Přitom např. platí (obr. 115)

$$|AD_i| : |BD_i| = |AD_e| : |BD_e| = |b| : |a|,$$

kde a, b jsou zbývající strany trojúhelníku.



Obr. 114. Použití druhé věty o svazku přímek



Obr. 115. Apolloniova kružnice

Kružnice sestrojená nad úsečkou D_iD_e jako průměrem je množinou vrcholů všech trojúhelníků, jejichž jedna strana (AB v obr. 115) je pevná a poměr délek zbývajících dvou stran je předem dán (tzv. *Apolloniova kružnice*).

Střední (geometrická) úměrná [geometrický průměr]

Označení:

a – délka přepony,

a₁, a₂ – délky úseků přepony.

Podle Euklidovy věty o odvěsně (obr. 116) platí

$$x^2 = aa_1 \quad \text{neboli} \quad a : x = x : a_1,$$

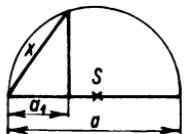
kde a₁ je délka úseku přepony přilehlého k odvěsně s délkou x.

Podle Euklidovy věty o výšce (obr. 117) platí

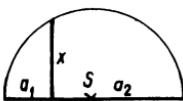
$$x^2 = a_1 a_2 \text{ nebo } a_1 : x = x : a_2,$$

kde x je délka výšky k přeponě.

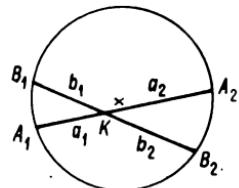
O další konstrukci viz u věty o tečně a sečně (viz obr. 121).



Obr. 116. Euklidova věta o odvěsně



Obr. 117. Euklidova věta o výšce



Obr. 118. Věta o tětivách

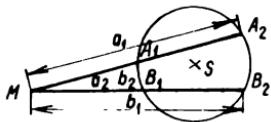
Mocnost bodu ke kružnici

Věta o tětivách (obr. 118): Jestliže se bodem K vnitřní oblasti kružnice vedou její sečny, protínající kružnici v bodech A_1, A_2 , popř. B_1, B_2 , pak součin délek $a_1 = |A_1K|$ a $a_2 = |A_2K|$ se rovná součinu délek $b_1 = |B_1K|$ a $b_2 = |B_2K|$, tj.

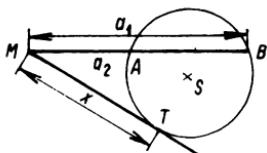
$$a_1 a_2 = b_1 b_2 \text{ nebo } a_1 : b_1 = b_2 : a_2.$$

Věta o sečnách (obr. 119): Jestliže se bodem M vnější oblasti kružnice vedou její sečny protínající kružnici v bodech A_1, A_2 , popř. B_1, B_2 , pak součin délek $a_1 = |MA_2|$ a $a_2 = |MA_1|$ se rovná součinu délek $b_1 = |MB_2|$ a $b_2 = |MB_1|$, tj.

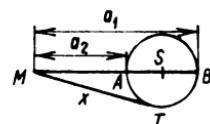
$$a_1 a_2 = b_1 b_2 \text{ nebo } a_1 : b_1 = b_2 : a_2.$$



Obr. 119. Věta o sečnách



Obr. 120. Věta o tečně a sečně



Obr. 121. Střední geometrická úměrná x

Věta o tečně a sečně (obr. 120): Jestliže se bodem M vnější oblasti kružnice vede její sečna protínající kružnici v bodech A, B a tečna dotýkající se kružnice

v bodě T , pak součin délek $a_1 = |MB|$ a $a_2 = |MA|$ se rovná druhé mocnině délky $x = |AT|$, tj.

$$a_1 a_2 = x^2 \quad \text{neboli} \quad a_1 : x = x : a_2.$$

Délka $x = |AT|$ je tedy střední geometrickou úměrnou délek $a_1 = |MB|$ a $a_2 = |MA|$ (v obr. 121 je další konstrukce střední geometrické úměrné).

Zlatý řez

Říkáme, že úsečka je rozdělena zlatým řezem, je-li rozdělena bodem na dvě části tak, že délka x větší ze vzniklých úseček je střední geometrickou úměrnou k délce a celé úsečky a délce $a - x$ menší úsečky vzniklé rozdělením, tj.

$$x^2 = a(a - x) \quad \text{neboli} \quad a : x = x : (a - x),$$

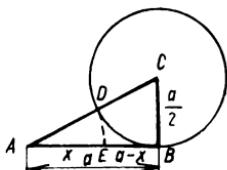
odkud

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a \approx 0,618a.$$

Konstrukce zlatého řezu (obr. 122):

V bodě B úsečky AB o délce a sestrojíme kolmou úsečku BC o délce $\frac{1}{2}a$, spojíme bod A s bodem C , sestrojíme kružnici se středem C a poloměrem o délce $\frac{1}{2}a$, která protne úsečku AC v bodě D , a naneseme úsečku AD na úsečku AB od bodu A . Bod E , který dostaneme, rozdělí úsečku AB zlatým řezem.

Použití: Strana pravidelného desetiúhelníku má stejnou délku jako větší úsečka vzniklá rozdělením poloměru kružnice opsané desetiúhelníku zlatým řezem.



Obr. 122. Zlatý řez

Věty o podobnosti mnohoúhelníků

Definice:

Trojúhelníky se nazývají *podobné*, shodují-li se v poměrech délek odpovídajících si stran.

Dva trojúhelníky jsou *podobné*, shodují-li se

- ve dvou úhlech (*věta uu*);
- v poměrech délek dvou stran a v úhlu jimi sevřeném (*věta sus*);
- v poměrech délek dvou stran a v úhlu proti větší z nich (*věta Ssu*).

Podobné trojúhelníky lze odpovídajícími výškami nebo osami úhlů nebo těžnicemi rozložit v podobné trojúhelníky. V podobných trojúhelnících jsou délky odpovídajících si výšek, os úhlů (osa úhlu je zde úsečkou) a těžnic v témže poměru jako délky odpovídajících si stran.

Obvody podobných trojúhelníků jsou ve stejném poměru jako délky odpovídajících si úseček (stran, výšek, těžnic atd.), tj.

$$o_1 : o_2 = a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = k,$$

kde k se nazývá *koeficient podobnosti* nebo *poměr podobnosti* (při $k > 1$ *poměr zvětšení* a při $0 < k < 1$ *poměr zmenšení*).

Obsahy podobných trojúhelníků jsou v témže poměru jako druhé mocniny délek odpovídajících si úseček (stran, výšek, těžnic atd.), tj.

$$S_1 : S_2 = a_1^2 : a_2^2 = b_1^2 : b_2^2 = c_1^2 : c_2^2 = k^2,$$

kde k je koeficient podobnosti.

Mnohoúhelníky jsou podobné, jsou-li délky odpovídajících si stran v témže poměru nebo shodují-li se všechny odpovídající si úhly.

Obvody podobných mnohoúhelníků jsou v témže poměru jako délky odpovídajících si úseček (stran, výšek, úhlopříček atd.), tj.

$$o_1 : o_2 = a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = \dots = k.$$

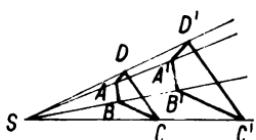
Obsahy podobných mnohoúhelníků jsou v témže poměru jako druhé mocniny délek odpovídajících si úseček (stran, výšek, úhlopříček atd.), tj.

$$S_1 : S_2 = a_1^2 : a_2^2 = b_1^2 : b_2^2 = \dots = k^2.$$

Poměr zvětšení, popř. poměr zmenšení obsahů podobných mnohoúhelníků se tedy rovná druhé mocnině koeficientu podobnosti.

Stejnolehlost mnohoúhelníků

Podobné mnohoúhelníky jsou stejnolehlé, jestliže odpovídající si strany jsou rovnoběžné a odpovídající si body leží na přímkách svazku přímek (obr. 123). Střed S svazku přímek se nazývá *střed stejnolehlosti*.



$$\overline{SA'} = \alpha \overline{SA} \quad (\alpha > 0)$$

Obr. 123. Stejnolehlost mnohoúhelníků

Věta o shodnosti mnohoúhelníků

Mnohoúhelníky jsou shodné, jsou-li jak všechny odpovídající si strany, tak všechny odpovídající si úhly shodné.

Věty o shodnosti trojúhelníků

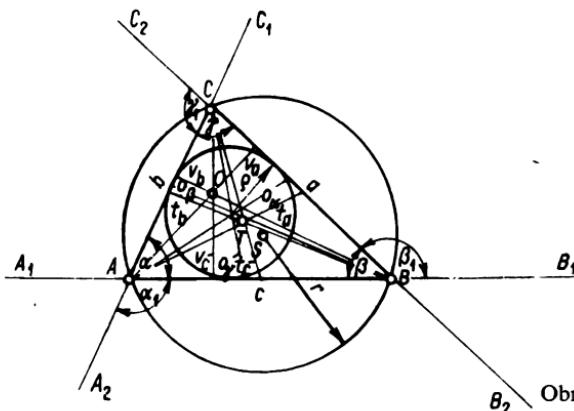
Trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se

- v jedné straně a v obou úhlech k ní přilehlých (*věta usu*);
- ve dvou stranách a v úhlu jimi určeném (*věta sus*);
- ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich (*věta Ssu*);
- ve všech třech stranách (*věta sss*).

3.2. PLANIMETRIE

3.2.1. Trojúhelník

Trojúhelníkem nazýváme n -úhelník pro $n = 3$.



Obr. 124. Prvky trojúhelníku

Označení (obr. 124):

A, B, C – vrcholy trojúhelníku ABC ,

α, β, γ – velikosti vnitřních úhlů $[\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)]$,

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – velikosti vnějších úhlů,

a – délka protější strany k vrcholu A ,

b – délka protější strany k vrcholu B ,

c – délka protější strany k vrcholu C ,

S – obsah trojúhelníku,

$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ – poloviční obvod trojúhelníku,

v_a, v_b, v_c – délky výšek [stručně výšky] po řadě k stranám a, b, c ,

t_a, t_b, t_c – délky těžnic po řadě k stranám a, b, c ,

$o_\alpha, o_\beta, o_\gamma$ – délky os po řadě vnitřních úhlů α, β, γ ,

$o_{\alpha_1}, o_{\beta_1}, o_{\gamma_1}$ – délky os po řadě vnějších úhlů $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$,

r – délka poloměru [stručně poloměr] opsané kružnice,

q – délka poloměru [stručně poloměr] vepsané kružnice,

Q_a, Q_b, Q_c – délky poloměrů [stručně poloměry] připsaných kružnic
po řadě k stranám a, b, c .

Vztahy pro velikosti úhlů trojúhelníku

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ = \pi \text{ rad},$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ = 2\pi \text{ rad};$$

$$\alpha_1 = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha, \quad \beta_1 = \alpha + \gamma = 180^\circ - \beta, \quad \gamma_1 = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma;$$

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2};$$

$$\sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma) = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

$$\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) = -(4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 1);$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \quad (\text{neplatí pro pravoúhlý trojúhelník});$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2(1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma);$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma;$$

$$\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta + \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \gamma + \operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \gamma = 1;$$

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2};$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)(\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma).$$

$$(\sin \alpha - \sin \beta + \sin \gamma)(-\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = 4 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma.$$

Sinová věta

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

Kosinová věta

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Mollweidovy vzorce

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}},$$

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

$$\frac{a+c}{b} = \frac{\cos \frac{\alpha - \gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}, \quad \frac{a-c}{b} = \frac{\sin \frac{\alpha - \gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}.$$

Tangentová věta

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}},$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}},$$

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \gamma}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \gamma}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}}.$$

Vztahy pro velikosti vnitřních úhlů

a délky stran trojúhelníku [$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$]

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \quad \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}},$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

Proti shodným stranám trojúhelníku leží shodné vnitřní úhly. Proti větší straně trojúhelníku leží větší vnitřní úhel. Proti tupému nebo pravému vnitřnímu úhlu trojúhelníku leží jeho největší strana.

Vztahy pro délky stran trojúhelníku

$$\begin{aligned} a + b &> c, & |a - b| &< c, \\ b + c &> a, & |b - c| &< a, \\ a + c &> b, & |a - c| &< b. \end{aligned}$$

Těžnice

Úsečka spojující vrchol trojúhelníku se středem protější strany se nazývá *těžnice*.

Průsečík těžnic se nazývá *těžiště T*.

Vzdálenost těžiště od středu příslušné strany se rovná třetině délky těžnice. Vzdálenost těžiště od strany trojúhelníku se tedy rovná třetině délky příslušné výšky.

Dělicí poměr těžiště vzhledem k vrcholu a středu protější strany trojúhelníku se rovná

$$\lambda = -2.$$

Platí

$$t_a = \frac{1}{2} \sqrt{[2(b^2 + c^2) - a^2]} = \frac{1}{2} \sqrt{(b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha)},$$

$$t_b = \frac{1}{2} \sqrt{[2(a^2 + c^2) - b^2]} = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + c^2 + 2ac \cos \beta)},$$

$$t_c = \frac{1}{2} \sqrt{[2(a^2 + b^2) - c^2]} = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma)}.$$

Osy vnitřních a vnějších úhlů trojúhelníku

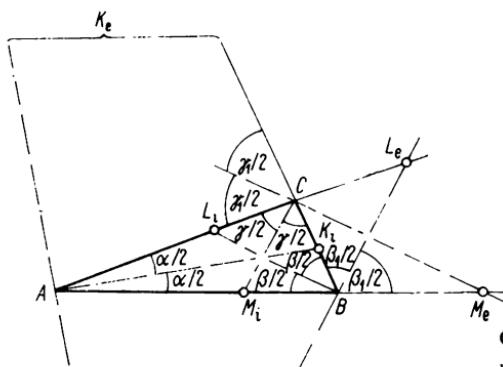
Každá z os vnitřních úhlů trojúhelníku rozděluje protější stranu v poměru délek přilehlých stran, tj. dělicí poměr každého z uvedených průsečíků vzhledem ke krajním bodům příslušné strany se v absolutní hodnotě rovná poměru délek přilehlých stran.

Každá z os vnějších úhlů trojúhelníku protíná prodloužení protější strany v bodě, jehož dělicí poměr vzhledem ke krajním bodům příslušné strany se rovná poměru délek přilehlých stran.

Platí tedy

$$\begin{aligned} |AM_i| : |BM_i| &= b : a, & |AM_e| : |BM_e| &= b : a, \\ |BK_i| : |CK_i| &= c : b, & |BK_e| : |CK_e| &= c : b, \\ |CL_i| : |AL_i| &= a : c, & |CL_e| : |AL_e| &= a : c, \end{aligned}$$

kde K_i, L_i, M_i jsou po řadě průsečíky os vnitřních úhlů trojúhelníku se stranami BC, CA, AB a K_e, L_e, M_e jsou po řadě průsečíky os vnějších úhlů trojúhelníku s prodlouženými stranami BC, CA, AB (obr. 125). Úsečky AK_i, BL_i a CM_i nazýváme *osami vnitřních úhlů trojúhelníku* (definovanými jako úsečky), úsečky AK_e, BL_e a CM_e nazýváme *osami vnějších úhlů trojúhelníku* (definovanými jako úsečky).



Obr. 125. Osy vnitřních a vnějších úhlů trojúhelníku

Pro délky os vnitřních úhlů trojúhelníku platí

$$o_\alpha = |AK_i| = \frac{1}{b+c} \sqrt{\{bc[(b+c)^2 - a^2]\}} = \frac{2bc \cos \frac{\alpha}{2}}{b+c},$$

$$o_{\beta} = |BL_i| = \frac{1}{a+c} \sqrt{\{ac[(a+c)^2 - b^2]\}} = \frac{2ac \cos \frac{\beta}{2}}{a+c},$$

$$o_{\gamma} = |CM_i| = \frac{1}{a+b} \sqrt{\{ab[(a+b)^2 - c^2]\}} = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{a+b}.$$

Výšky trojúhelníku

Úsečka spojující vrchol trojúhelníku s patou kolmice k protilehlé straně (popř. k prodloužení protilehlé strany) se nazývá *výška trojúhelníku*. Délku výšky obvykle nazýváme také *výškou*.

Průsečík výšek trojúhelníku se nazývá *ortocentrum*.

Platí

$$v_a : v_b : v_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c};$$

$$v_a = b \sin \gamma = c \sin \beta,$$

$$v_b = a \sin \gamma = c \sin \alpha,$$

$$v_c = a \sin \beta = b \sin \alpha.$$

Kružnice opsaná trojúhelníku

Středem kružnice opsané trojúhelníku je průsečík os stran.

Platí

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma};$$

$$s = 4r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \quad s = \frac{a+b+c}{2};$$

$$r = \frac{bc}{2v_a} = \frac{ac}{2v_b} = \frac{ab}{2v_c} = \frac{abc}{4S}.$$

Kružnice vepsaná trojúhelníku $\left(s = \frac{a+b+c}{2}\right)$.

Středem kružnice vepsané trojúhelníku je průsečík os vnitřních úhlů.

$$\text{Platí } \varrho = \frac{S}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

$$\varrho = (s-a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = (s-b) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = (s-c) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2},$$

$$\varrho = s \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2},$$

$$\varrho = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Vzdálenost d středu kružnice opsané trojúhelníku od středu kružnice vepsané trojúhelníku se rovná

$$d = \sqrt{(r^2 - 2r\varrho)}.$$

Kružnice připsané trojúhelníku

Středem kružnice připsané trojúhelníku vzhledem ke straně a , resp. b , resp. c je průsečík os úhlů BAC , B_1BC a C_1CB , resp. ABC , A_1AC a C_2CA , resp. ACB , A_2AB a B_2BA (viz obr. 124).

Platí

$$\varrho_a = \frac{S}{s-a}, \quad \varrho_b = \frac{S}{s-b}, \quad \varrho_c = \frac{S}{s-c};$$

$$\frac{1}{\varrho_a} = \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} - \frac{1}{v_a}, \quad \frac{1}{\varrho_b} = \frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_c} - \frac{1}{v_b}, \quad \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} - \frac{1}{v_c};$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c}, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c};$$

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = 4r + \varrho,$$

$$\varrho_a = s \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

$$\varrho_b = s \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{b \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}},$$

$$\varrho_c = s \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{c \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}.$$

$$\text{Obsah trojúhelníku } \left(s = \frac{a+b+c}{2} \right)$$

$$S = \frac{abc}{4r} = \sqrt{(\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c)},$$

$$S = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2},$$

$$S = \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]} \quad (\text{Heronův vzorec}),$$

$$S = \varrho s = \varrho_a(s-a) = \varrho_b(s-b) = \varrho_c(s-c),$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta,$$

$$S = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha} = \frac{b^2 \sin \alpha \sin \gamma}{2 \sin \beta} = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \gamma},$$

$$S = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

$$S = s^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2},$$

$$S = \varrho^2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}.$$

Jsou-li $A[x_1, y_1, z_1]$, $B[x_2, y_2, z_2]$ a $C[x_3, y_3, z_3]$ vrcholy trojúhelníku dané v kartézské souřadnicové soustavě, platí

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)], \\ S^* &= \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \\ &\quad + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)] = \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1, & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Jsou-li $A[\varrho_1, \varphi_1]$, $B[\varrho_2, \varphi_2]$ a $C[\varrho_3, \varphi_3]$ vrcholy trojúhelníku dané v polární souřadnicové soustavě, platí

$$S^* = \frac{1}{2}[\varrho_1\varrho_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \varrho_2\varrho_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + \varrho_3\varrho_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)].$$

Vyjde-li $S^* > 0$, pak obsah trojúhelníku je $S = S^*$ a smysl obíhání vrcholů trojúhelníku je kladný. Vyjde-li $S^* < 0$, pak obsah trojúhelníku je $S = -S^*$ a smysl obíhání vrcholů trojúhelníku je záporný (*kladným smyslem obíhání se rozumí opačný smysl ke smyslu otáčení hodinových ručiček*). Vyjde-li $S^* = 0$, leží body A, B, C v přímce.

Zobecněná Pythagorova věta

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 \pm 2bp && \text{pro } \alpha \gtrless 90^\circ, \\b^2 &= c^2 + a^2 \pm 2cq && \text{pro } \beta \gtrless 90^\circ, \\c^2 &= a^2 + b^2 \pm 2ar && \text{pro } \gamma \gtrless 90^\circ,\end{aligned}$$

kde p je délka průmětu strany c do strany b ,

q – délka průmětu strany a do strany c ,

r – délka průmětu strany b do strany a .

Věty o určenosti trojúhelníku

Trojúhelník je jednoznačně určen, jsou-li dány tyto jeho určovací prvky:

a) délka strany a velikostí dvou k ní přilehlých úhlů, jejichž součet velikostí je menší než 180° (*věta usu*);

b) délky dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného (*věta sus*);

c) dvě různé délky stran a velikost úhlu protilehlého k delší straně (*věta Ssu*);

d) délky tří stran, pro něž platí

$$|a - b| < c < a + b$$

(*věta sss*).

Základní úloha 1 (k větě usu):

Jsou dány délka strany a velikosti dvou k ní přilehlých úhlů, jejichž součet je menší než 180° (např. a, β, γ).

Řešení:

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma),$$

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \quad (\text{sinová věta}),$$

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} \quad (\text{sinová věta}).$$

Základní úloha 2 (k větě sus):

Jsou dány délky dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného (např. a, c, β).

Způsob řešení 1:

$$\tg \frac{\alpha - \gamma}{2} = \frac{a - c}{a + c} \cotg \frac{\beta}{2} \quad (\text{tangentová věta}),$$

odkud se určí $\frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$.

Sečtením, resp. odečtením hodnot výrazů

$$\frac{\alpha - \gamma}{2} \quad \text{a} \quad \frac{\alpha + \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

dostaneme α , resp. γ . Konečně

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \quad (\text{sinová věta}).$$

Způsob řešení 2:

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta} \quad (\text{kosinová věta}),$$

$$\sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{b} \quad (\text{sinová věta}),$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta).$$

Základní úloha 3 (k větě Ssu):

Jsou dány dvě různé délky stran a velikost úhlu protilehlého k větší straně (např. a, b, α , $a > b$).

Řešení:

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} \quad (\text{sinová věta}),$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta),$$

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} \quad (\text{sinová věta}).$$

Základní úloha 4 (k větě sss):

Jsou dány délky a, b, c tří stran, pro něž platí $|a - b| < c < a + b$.

Způsob řešení 1:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)}} \quad (\text{věta o velikosti vnitřního úhlu}),$$

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} \quad (\text{sinová věta}),$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta).$$

Způsob řešení 2:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (\text{kosinová věta}),$$

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} \quad (\text{sinová věta}),$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta).$$

3.2.1.1. Pravoúhlý trojúhelník

Označení (obr. 126):

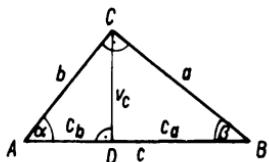
a, b – délky odvěsen,

$\gamma = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ rad – velikost úhlu proti přeponě,

c – délka přepony,

v_c – výška k přeponě,

c_a , resp. c_b – délka průmětu strany a , resp. b do přepony c
(tzv. úseky přepony).



Obr. 126. Pravoúhlý trojúhelník

Pythagorova věta

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (\gamma = 90^\circ).$$

Pythagorejská čísla

Členy každé uspořádané trojice $[a, b, c]$ celých čísel (v uvedeném pořadí), která je řešením rovnice $a^2 + b^2 = c^2$, nazýváme *pythagorejskými čísly*.

Jsou-li čísla $p, q \in \mathbb{Z}$, pak čísla

$$a = 2pq, \quad b = p^2 - q^2, \quad c = p^2 + q^2$$

jsou pythagorejskými čísly. Jsou-li čísla a, b, c (v tomto pořadí) pythagorejskými čísla, pak čísla $\lambda a, \lambda b, \lambda c$ ($\lambda \in \mathbb{Z}$) (v tomto pořadí) jsou také pythagorejskými čísla. Proto jestliže všechny členy kterékoli uspořádané trojice $[a, b, c]$ z tabulky 3.2 vynásobíme číslem $\lambda \in \mathbb{Z}$, dostaneme další uspořádanou trojici pythagorejských čísel.

Tabulka 3.2

p	q	a	b	c
2	1	4	3	5
3	1	6	8	10
4	1	8	15	17
5	1	10	24	26
3	2	12	5	13
4	2	16	12	20
5	2	20	21	29
4	3	24	7	25
5	3	30	16	34
5	4	40	9	41
:	:	:	:	:

Jsou-li délky stran trojúhelníku pythagorejskými čísly, pak tento trojúhelník je pravoúhlý.

Euklidova věta o odvěsně

$$a^2 = cc_a, \quad b^2 = cc_b.$$

Euklidova věta o výšce

$$v_c^2 = c_a c_b.$$

Obsah pravoúhlého trojúhelníku

$$S = \frac{cv_c}{2} = \frac{ab}{2}.$$

Těžiště pravoúhlého trojúhelníku

Vzdálenost těžiště T od přepony c se rovná $\frac{1}{3}v_c$.

Vzdálenost těžiště T od odvěsnny a se rovná $\frac{1}{3}b$.

Vzdálenost těžiště T od odvěsnny b se rovná $\frac{1}{3}a$.

3.2.1.2. Rovnoramenný trojúhelník

$a = b$ – délka ramen,

c – délka základny,

$\alpha = \beta, \gamma$ – velikosti vnitřních úhlů.

3.2.1.3. Rovnostranný trojúhelník (obr. 127)

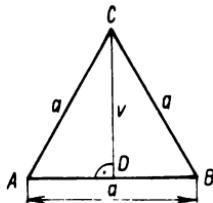
$a = b = c$ – délka stran,

$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ rad – velikost vnitřních úhlů;

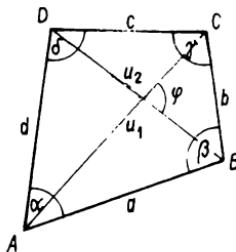
$$v = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Vzdálenost těžiště T rovnostranného trojúhelníku od kterékoli jeho strany se rovná $\frac{a}{6}\sqrt{3}$.



Obr. 127. Rovnostranný trojúhelník



Obr. 128. Čtyřúhelník

3.2.2. Čtyřúhelníky

Čtyřúhelníkem nazýváme n -úhelník pro $n = 4$.

Označení (obr. 128):

a, b, c, d – délky stran,

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – velikosti vnitřních úhlů,

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ – velikosti vnějších úhlů,

u_1, u_2 – délky úhlopříček,

φ – odchylka úhlopříček.

Součty velikostí úhlů čtyřúhelníku

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ = 2\pi \text{ rad},$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}.$$

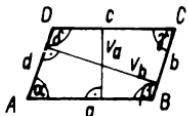
Obsah čtyřúhelníku

$$S = \frac{1}{2}u_1u_2 \sin \varphi.$$

3.2.2.1. Rovnoběžník (obr. 129)

U rovnoběžníku platí

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}, \quad \overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}, \quad a = c, \quad b = d; \\ \alpha = \gamma, \quad \beta = \delta; \\ \alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180^\circ = \pi \text{ rad.}$$



Obr. 129. Rovnoběžník

Úhlopříčky rovnoběžníku se vzájemně půlí.

Těžiště T rovnoběžníku leží v průsečíku úhlopříček.

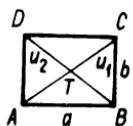
Obsah rovnoběžníku

$$S = av_a = bv_b = ad \sin \alpha,$$

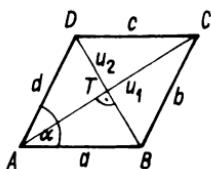
kde α je velikost úhlu sousedních stran a, d ,

v_a – výška ke straně a ,

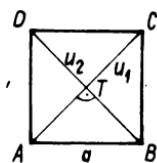
v_b – výška ke straně b .



Obr. 130. Obdélník



Obr. 131. Kosočtverec



Obr. 132. Čtverec

3.2.2.2. Obdélník (obr. 130)

U obdélníku platí

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}, \quad \overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}, \quad a = c, \quad a \neq b, \quad b = d, \quad \alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi \text{ rad.}$$

Úhlopříčky obdélníku se vzájemně půlí. Platí

$$u_1 = u_2 = \sqrt{(a^2 + b^2)}.$$

Obsah obdélníku

$$S = ab.$$

Těžiště T obdélníku leží v průsečíku úhlopříček.

3.2.2.3. Kosočtverec (obr. 131)

U kosočtverce platí

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}, \quad a = b = c = d, \\ \alpha = \gamma \neq 90^\circ = \frac{1}{2}\pi \text{ rad}, \quad \beta = \delta \neq 90^\circ = \frac{1}{2}\pi \text{ rad}, \\ \alpha + \beta = 180^\circ = \pi \text{ rad}.$$

Úhlopříčky kosočtverce jsou vzájemně kolmé, vzájemně se půlí a půlí vnitřní úhly kosočtverce.

Obsah kosočtverce

$$S = \frac{u_1 u_2}{2} = a^2 \sin \alpha.$$

Těžiště T kosočtverce leží v průsečíku úhlopříček.

3.2.2.4. Čtverec (obr. 132)

U čtverce platí

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}, \quad a = b = c = d, \\ \alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi \text{ rad}.$$

Úhlopříčky čtverce se vzájemně půlí a jsou k sobě kolmé. Platí

$$u_1 = u_2 = a\sqrt{2}.$$

Obsah čtverce

$$S = a^2 = \frac{1}{2}u_1^2.$$

Těžiště T čtverce leží v průsečíku úhlopříček.

Pravoúhelník je společný název pro obdélník a čtverec.

3.2.2.5. Lichoběžník (obr. 133)

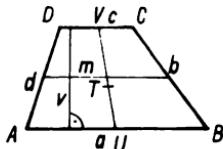
U lichoběžníku platí $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AD} \nparallel \overline{BC}$.

Obsah lichoběžníku

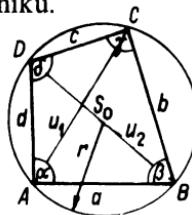
$$S = \frac{a + c}{2} v, \quad v = mv,$$

kde v je vzdálenost rovnoběžných stran lichoběžníku,

$m = (a + c)/2$ – délka střední příčky lichoběžníku.



Obr. 133. Lichoběžník



Obr. 134. Tětivový čtyřúhelník

Těžiště T lichoběžníku leží na spojnici středů U, V základen ve vzdálenosti

$$\frac{v}{3} \frac{a + 2c}{a + c}$$

od delší základny a .

3.2.2.6. Tětivový čtyřúhelník (obr. 134)

Čtyřúhelník, jemuž lze opsat kružnici, se nazývá *tětivový*.

U tětivového čtyřúhelníku platí

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ = \pi \text{ rad};$$

$$S = \sqrt{[(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)]},$$

kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$;

$$ac + bd = u_1 u_2 \quad (\text{Ptolemaiov vzorec});$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{(ac + bd)(bc + ad)}{ab + cd}}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{bc + ad}};$$

$$r = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)(bc + ad)}{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}},$$

kde r je poloměr opsané kružnice.

3.2.2.7. Tečnový čtyřúhelník (obr. 135)

Čtyřúhelník, jemuž lze vepsat kružnici, se nazývá *tečnový*.

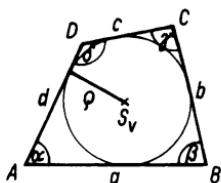
U tečnového čtyřúhelníku platí

$$a + c = b + d;$$

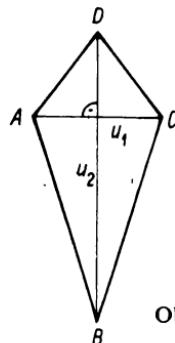
$$S = \varrho s,$$

kde ϱ je poloměr vepsané kružnice.

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c + d).$$



Obr. 135. Tečnový čtyřúhelník



Obr. 136. Deltoid

3.2.2.8. Deltoid (obr. 136)

U deltoidu platí

$$a = b, \quad c = d, \quad \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD};$$

$$S = \frac{u_1 u_2}{2}.$$

Čtverec, obdélník a rovnoramenný lichoběžník jsou speciálními případami tětivového čtyřúhelníku. Čtverec, kosočtverec a deltoid jsou speciálními případami tečnového čtyřúhelníku.

3.2.3. Mnohoúhelníky [n -úhelníky]

n-úhelníkem ($n \in \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 3\}$) [obecně *mnohoúhelníkem*] nazýváme uzavřenou rovinnou oblast, jejíž hranící je jednoduchá uzavřená lomená čára s n vrcholy, přičemž zpravidla předpokládáme, že žádné dvě sousední strany lomené čáry neleží na téže přímce.

Součet velikostí úhlů n -úhelníku

Součet velikostí vnitřních úhlů n -úhelníku se rovná

$$(2n - 4) \cdot 90^\circ = (2n - 4) \cdot \frac{1}{2}\pi \text{ rad.}$$

Součet velikostí vnějších (popř. středových) úhlů n -úhelníku se rovná

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad.}$$

Počet úhlopříček n -úhelníku

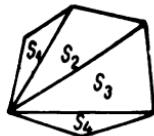
$$U_n = \frac{n(n - 3)}{2}.$$

Obsah n -úhelníku

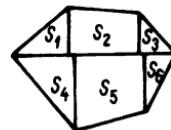
n -úhelník se rozloží buď v trojúhelníky (obr. 137) pomocí úhlopříček vyčázejících z jednoho vrcholu, nebo v pravoúhlé trojúhelníky a lichoběžníky pomocí kolmic vedených z vrcholů k vhodné úhlopříčce (obr. 138). Pak platí

$$S = \sum_{i=1}^k S_i,$$

kde S_i je obsah trojúhelníku, popř. lichoběžníku.



Obr. 137. Rozklad n -úhelníku v trojúhelníky



Obr. 138. Rozklad n -úhelníku v trojúhelníky a lichoběžníky

3.2.3.1. Pravidelné n -úhelníky

Všechny strany, stejně jako všechny úhly pravidelného n -úhelníku jsou shodné.

Označení:

a_n – délka strany pravidelného n -úhelníku,

r_n – poloměr kružnice opsané n -úhelníku,

ρ_n – poloměr kružnice vepsané n -úhelníku,

α_n – velikost vnitřního úhlu pravidelného n -úhelníku,

α'_n – velikost vnějšího (popř. středového) úhlu pravidelného n -úhelníku,

S_n – obsah pravidelného n -úhelníku.

Těžiště T pravidelného n -úhelníku leží ve středu kružnice opsané n -úhelníku.
Velikosti úhlů pravidelného n -úhelníku:

$$\alpha_n = \frac{2n - 4}{n} \cdot 90^\circ, \quad \alpha'_n = \frac{360^\circ}{n}.$$

Vztah mezi a_n , r_n a ϱ_n :

$$\varrho_n = \frac{1}{2} \sqrt{(4r_n^2 - a_n^2)}.$$

Výpočet délky a_{2n} strany pravidelného $2n$ -úhelníku pomocí délky a_n strany pravidelného n -úhelníku:

$$a_{2n} = \sqrt{[2r_n^2 - r_n \sqrt{(4r_n^2 - a_n^2)}]} = \sqrt{(2r_n^2 - 2r_n \varrho_n)}.$$

Obsah pravidelného n -úhelníku:

$$S_n = \frac{n a_n \varrho_n}{2} = \frac{n a_n \sqrt{(4r_n^2 - a_n^2)}}{4} = \frac{n r_n^2}{2} \sin \alpha'_n.$$

Jednoduché pravidelné mnohoúhelníky

Daný prvek: poloměr r_n opsané kružnice

Rovnostranný trojúhelník:

$$a_3 = r_3 \sqrt{3}, \quad \varrho_3 = \frac{1}{2} r_3, \quad S_3 = \frac{3}{4} r_3^2 \sqrt{3}.$$

Čtverec:

$$a_4 = r_4 \sqrt{2}, \quad \varrho_4 = \frac{1}{2} r_4 \sqrt{2}, \quad S_4 = 2r_4^2.$$

Pravidelný pětiúhelník:

$$a_5 = \frac{1}{2} r_5 \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}, \quad \varrho_5 = \frac{1}{4} r_5 (\sqrt{5} + 1), \\ S_5 = \frac{5}{8} r_5^2 \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}.$$

Pravidelný šestiúhelník:

$$a_6 = r_6, \quad \varrho_6 = \frac{1}{2} r_6 \sqrt{3}, \quad S_6 = \frac{3}{2} r_6^2 \sqrt{3}.$$

Pravidelný osmiúhelník:

$$a_8 = r_8 \sqrt{(2 - \sqrt{2})}, \quad \varrho_8 = \frac{1}{2} r_8 \sqrt{(2 + \sqrt{2})}, \quad S_8 = 2r_8^2 \sqrt{2}.$$

Přibližná hodnota pro délku a_9 strany pravidelného devítiúhelníku ($r = 1$):

$$a_9 \approx \frac{2\sqrt{5} + 1}{8}.$$

Pravidelný desetiúhelník:

$$a_{10} = \frac{1}{2}r_{10}(\sqrt{5} - 1), \quad \varrho_{10} = \frac{1}{4}r_{10}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})},$$
$$S_{10} = \frac{5}{4}r_{10}^2\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}.$$

Daný prvek: délka a_n strany n -úhelníku

Rovnostranný trojúhelník:

$$r_3 = \frac{1}{3}a_3\sqrt{3}, \quad \varrho_3 = \frac{1}{6}a_3\sqrt{3}, \quad S_3 = \frac{1}{4}a_3^2\sqrt{3}.$$

Čtverec:

$$r_4 = \frac{1}{2}a_4\sqrt{2}, \quad \varrho_4 = \frac{1}{2}a_4, \quad S_4 = a_4^2.$$

Pravidelný pětiúhelník:

$$r_5 = \frac{1}{10}a_5\sqrt{(50 + 10\sqrt{5})}, \quad \varrho_5 = \frac{1}{10}a_5\sqrt{(25 + 10\sqrt{5})},$$
$$S_5 = \frac{1}{4}a_5^2\sqrt{(25 + 10\sqrt{5})}.$$

Pravidelný šestiúhelník:

$$r_6 = a_6, \quad \varrho_6 = \frac{1}{2}a_6\sqrt{3}, \quad S_6 = \frac{3}{2}a_6^2\sqrt{3}.$$

Pravidelný osmiúhelník:

$$r_8 = \frac{1}{2}a_8\sqrt{(4 + 2\sqrt{2})}, \quad \varrho_8 = \frac{1}{2}a_8(\sqrt{2} + 1),$$
$$S_8 = 2a_8^2(\sqrt{2} + 1).$$

Pravidelný desetiúhelník:

$$r_{10} = \frac{1}{2}a_{10}(\sqrt{5} + 1), \quad \varrho_{10} = \frac{1}{4}a_{10}\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})},$$
$$S_{10} = \frac{5}{2}a_{10}^2\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}.$$

Konstrukce některých pravidelných mnohoúhelníků

Daný prvek: poloměr r opsané kružnice

Čtverec a pravidelný osmiúhelník (obr. 139):

Sestrojíme dva vzájemně kolmé průměry kružnice s daným poloměrem r .

Krajní body těchto průměrů jsou vrcholy čtverce.

Sestrojíme-li osy stran čtverce, pak jejich průsečíky s kružnicí opsanou čtverci jsou zároveň s vrcholy daného čtverce vrcholy pravidelného osmiúhelníku. Tímto způsobem dostáváme pravidelné 2^n -úhelníky ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$).

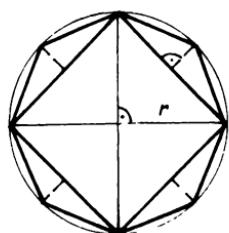
Pravidelný šestiúhelník a rovnostranný trojúhelník (obr. 140):

Úsečku délky r naneseme šestkrát za sebou jako tětu kružnice s daným poloměrem r a dostaneme pravidelný šestiúhelník.

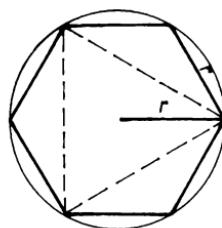
Rovnostranný trojúhelník vznikne tak, že spojíme tři nesousední vrcholy pravidelného šestiúhelníku.

Pravidelný dvanáctiúhelník:

Sestrojíme-li osy stran pravidelného šestiúhelníku, pak jejich průsečíky s kružnicí opsanou tomuto šestiúhelníku jsou zároveň s vrcholy daného šestiúhelníku vrcholy pravidelného dvanáctiúhelníku. Tímto způsobem dostaneme pravidelný 24-úhelník, 48-úhelník, ..., tj. obecně pravidelné $(3 \cdot 2^n)$ -úhelníky ($n \in \mathbb{N}$).



Obr. 139. Čtverec a pravidelný osmiúhelník

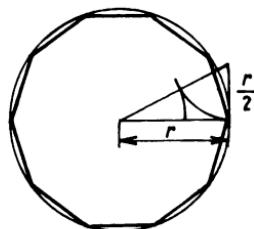


Obr. 140. Pravidelný šestiúhelník a rovnostranný trojúhelník

Pravidelný desetiúhelník a pravidelný pětiúhelník (obr. 141):

Úsečku o délce rovné poloměru r rozdělíme zlatým řezem a její větší část naneseme ke kružnici s poloměrem r desetkrát za sebou jako tětu a dostáváme pravidelný desetiúhelník.

Pravidelný pětiúhelník vznikne tak, že spojíme pět nesousedních vrcholů pravidelného desetiúhelníku. Z pravidelného desetiúhelníku postupně pomocí os stran dostaneme 20-úhelník, 40-úhelník, ..., tj. obecně $(5 \cdot 2^n)$ -úhelník ($n \in \mathbb{N}$).



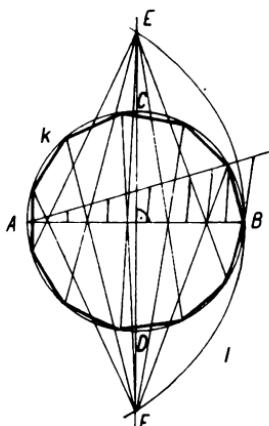
Obr. 141. Pravidelný desetiúhelník a pětiúhelník

Přibližná konstrukce libovolného pravidelného n -úhelníku (obr. 142)

Daný prvek: poloměr r opsané kružnice

Sestrojíme dva navzájem kolmé průměry AB a CD kružnice k s daným poloměrem r . Jeden z těchto průměrů (v obr. 142 je to průměr AB) rozdělíme

pak na n stejných dílů (v obrázku 142 je $n = 11$) a kolem jednoho z krajních bodů tohoto průměru (v obrázku je to bod A) opíšeme kružnici l s poloměrem $2r$, která obě prodloužení dřuhého průměru protne v bodech E a F .



Obr. 142. Přibližná konstrukce pravidelného n -úhelníku

Z bodů E a F vedeme polopřímky dělícími body prvního průměru AB , přičemž postupně vždy vynecháme jeden dělící bod, a v jejich průsečících s opsanou kružnicí k dostaneme vrcholy n -úhelníku.

3.2.4. Kružnice a kruh

*Kružnicí k se středem S_k a poloměrem r nazýváme množinu právě těch bodů, které mají stejnou vzdálenost r od pevného bodu S_k , zvaného *střed kružnice k* .*

Poloměrem kružnice podle souvislosti nazýváme jednak každou úsečku, jejímž jedním krajním bodem je střed kružnice a druhým krajním bodem je libovolný bod této kružnice, jednak délku této úsečky. Podle potřeby lze však mluvit o délce poloměru. Obdobně průměrem kružnice nazýváme jednak každou tělivu kružnice, která obsahuje střed této kružnice, jednak délku této tělivy. Podle potřeby lze též mluvit o délce průměru.

*Kruhem k se středem S_k a poloměrem r nazýváme množinu právě těch bodů, které mají od pevného bodu S_k (zvaného *střed kruhu k*) vzdálenost nejvýše rovnou číslu r .*

Obloukem kružnice nazýváme souvislou část kružnice ohraničenou dvěma jejími body.

Kruhovou výsečí nazýváme průnik kruhu a úhlu s vrcholem ve středu kruhu.

Označení:

r – poloměr,

d – průměr.

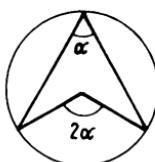
Velikost obvodového úhlu (obr. 143) se rovná polovině velikosti středového úhlu příslušného k témuž oblouku kružnice.

Thaletova věta

Obvodový úhel nad průměrem je pravý, tj. jeho velikost je $90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ rad (obr. 144).

Velikost úsekového úhlu (obr. 145) se rovná polovině velikosti středového úhlu příslušného k témuž oblouku kružnice, takže se rovná velikosti obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku kružnice.

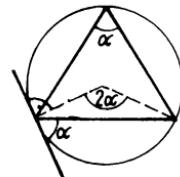
(Mocnost bodu ke kružnici viz na str. 304 a 305.)



Obr. 143. Obvodový a středový úhel



Obr. 144. Obvodový úhel nad průměrem



Obr. 145. Úsekový úhel

Délka kružnice [obvod kruhu]

$$o = 2\pi r = \pi d.$$

Délka oblouku kružnice (obr. 146)

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180} = \frac{\pi d \alpha}{360} = r \operatorname{arc} \alpha \approx 0,017\,453 r \alpha,$$

kde α je velikost příslušného středového úhlu v stupňové míře;

$$l \approx \sqrt{(t^2 + \frac{1}{3}v^2)},$$

kde t je délka příslušné tětivy,

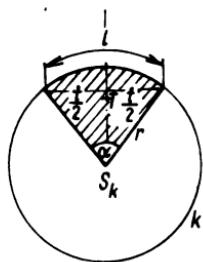
v – výška příslušné kruhové úseče.

Těžiště T kružnicového oblouku délky l leží na ose příslušného středového úhlu ve vzdálenosti rt/l od středu kružnice, na niž oblouk leží, přičemž t je délka tětivy příslušné k danému oblouku kružnice.

Obsah kruhu

$$S = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Těžiště T kruhu leží ve středu kruhu.



Obr. 146. Kruhová výseč

Obsah kruhové výseče (viz obr. 146)

$$S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{arc} \alpha = \frac{l r}{2},$$

kde l je délka příslušného oblouku kružnice,

α – velikost příslušného středového úhlu v stupňové míře.

Těžiště T kruhové výseče leží na ose souměrnosti dané kruhové výseče ve vzdálenosti $\frac{2}{3}rt/l$ od středu S_k příslušné kružnice k , přičemž l je délka pro oblouku a t délka tětivy příslušného oblouku kružnice.

3.2.5. Kruhová úseč

Kruhovou úsečí nazýváme průnik kruhu a poloroviny, jejíž hraniční přímka má od středu kruhu vzdálenost menší než jeho poloměr.

Označení (obr. 147):

t – délka tětivy AB ,

v – výška kruhové úseče,

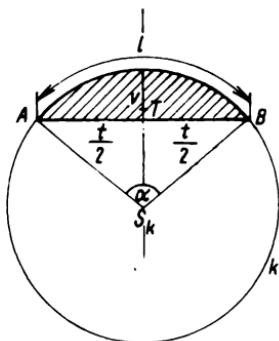
l – délka příslušného oblouku kružnice,

α – velikost příslušného středového úhlu v stupňové míře.

Platí

$$t = 2 \sqrt{(2vr - v^2)} = 2r \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$v = r - \frac{1}{2} \sqrt{(4r^2 - t^2)} = \frac{1}{2}t \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \quad \text{pro konvexní středový úhel.}$$



Obr. 147. Kruhová úseč

Obsah kruhové úseče

Obsah kruhové úseče se rovná rozdílu obsahu kruhové výseče a obsahu trojúhelníku AS_kB , tj.

$$S = \frac{1}{2}[lr - t(r - v)] = \frac{1}{2}r^2 \left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin \alpha \right).$$

Těžiště T kruhové úseče leží na ose souměrnosti dané kruhové výseče ve vzdálenosti

$$\frac{t^3}{12S} = \frac{4r \sin^3 \frac{\alpha}{2}}{3 \left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin \alpha \right)}$$

od středu S_k příslušné kružnice.

3.2.6. Mezikruží

Mezikružím nazýváme množinu právě těch bodů, které mají od pevného bodu S_k , zvaného *střed mezikruží*, vzdálenost aspoň r a nejvýše R .

Označení (obr. 148):

R , resp. r – vnější, resp. vnitřní poloměr mezikruží ($R > r$),

D , resp. d – vnější, resp. vnitřní průměr mezikruží ($D > d$),

$r_s = \frac{1}{2}(R + r)$ – poloměr střední kružnice mezikruží,

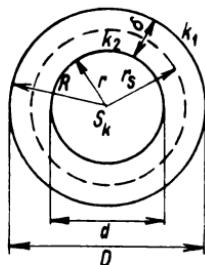
$\delta = R - r$ – šířka mezikruží.

Obsah mezikruží

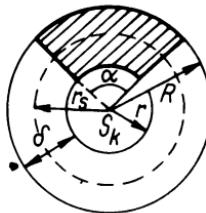
$$S = \pi(R^2 - r^2) = \frac{1}{4}\pi(D^2 - d^2) = 2\pi r_s \delta \quad (r < R).$$

Těžiště mezikruží leží ve středu S_k příslušných kružnic k_1 a k_2 .

Výsečí mezikruží nazýváme průnik mezikruží a úhlu s vrcholem ve středu mezikruží.



Obr. 148. Mezikruží



Obr. 149. Výseč mezikruží

Obsah výseče mezikruží (obr. 149)

$$S = \frac{\pi\alpha}{360} (R^2 - r^2) = r_s \delta \operatorname{arc} \alpha,$$

kde α je velikost příslušného středového úhlu v stupňové míře.

Těžiště T výseče mezikruží leží na ose souměrnosti dané výseče mezikruží ve vzdálenosti

$$\frac{4}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{180}}$$

od středu S_k příslušných kružnic k_1 a k_2 , přičemž α je velikost příslušného středového úhlu v stupňové míře.

3.2.7. Elipsa, hyperbola a parabola

3.2.7.1. Elipsa

Definici elipsy viz v článku 4.1.6.

Délka elipsy

$$o \approx \pi [1,5(a + b) - \sqrt{(ab)}],$$

$$o \approx \pi(a + b) \frac{64 - 3l^4}{64 - 16l^2}, \quad \text{kde } l = \frac{a - b}{a + b}.$$

Obsah *<uzavřené>* vnitřní oblasti elipsy

$$S = \pi ab,$$

kde a , resp. b je délka hlavní, resp. vedlejší poloosy elipsy.

Těžiště T *(uzavřené)* vnitřní oblasti elipsy leží ve středu S_e elipsy e .

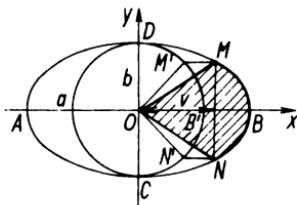
Obsah výseče OMN *<uzavřené>* vnitřní oblasti elipsy [obsah eliptické výseče] (obr. 150)

Při konvexním úhlu MON a $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{AB}$ platí

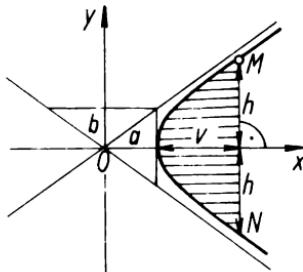
$$S = \frac{a}{b} S' = ab \arccos \frac{v}{a},$$

kde S' je obsah příslušné kruhové výseče $OM'N'$,

v – výška trojúhelníku OMN ke straně MN .



Obr. 150. Eliptická výseč



Obr. 151. Hyperbolická úseč

3.2.7.2. Hyperbola

Definici hyperboly viz v článku 4.1.7.

Obsah hyperbolické úseče (obr. 151)

$$S = (a + v)h - ab \ln \left(\frac{a + v}{a} + \frac{h}{b} \right),$$

kde a , resp. b je délka hlavní, resp. vedlejší poloosy hyperboly,

$2h$ – délka tětivy MN ,

v – výška úseče.

3.2.7.3. Parabola

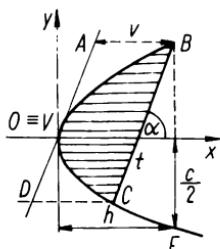
Definici paraboly viz v článku 4.1.5.

Délka oblouku BVE paraboly (obr. 152)

$$l = \frac{1}{2} \sqrt{[c^2 + (4h)^2]} + \frac{c^2}{8h} \ln \left\{ \frac{4h}{c} + \frac{1}{c} \sqrt{[(c^2 + (4h)^2)]} \right\},$$

$$l \approx c \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{h}{c} \right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{h}{c} \right)^4 \right]$$

pro malé číslo h/c . Význam znaků je zřejmý z obr. 152.



Obr. 152. Parabolická úseč

Obsah parabolické úseče

$$S = \frac{2}{3}tv \sin \alpha,$$

takže se rovná dvěma třetinám obsahu rovnoběžníku $ABCD$.

Těžiště T parabolické úseče BVE leží na ose paraboly ve vzdálenosti $3h/5$ od vrcholu V paraboly.

3.3. STEREOMETRIE

Oznámení:

V – objem,

P – obsah povrchu,

Q – obsah pláště,

S – obsah ⟨dolní⟩ podstavy,

S_1 – obsah horní podstavy,

v – výška,

u_t – délka tělesové úhlopříčky.

3.3.1. Obecné věty

Cavalieriův princip

Tělesa se stejně velkými podstavami a výškami mají týž objem, jestliže jejich řezy rovnoběžné s podstavou a vedené ve stejné vzdálenosti od podstavy mají stejný obsah.

Simpsonovo pravidlo

Jestliže těleso má právě dvě rovnoběžné podstavy a každý s nimi rovnoběžný řez, vedený ve výšce x , má takový obsah, že je hodnotou celé racionální funkce nejvýše třetího stupně v proměnné x , pak platí

$$V = \frac{1}{6}v(S + S_1 + 4S_s),$$

kde S_s je obsah středního řezu.

Guldinova pravidla

Objem V rotačního tělesa, které vznikne při rotaci rovinného (tvořícího) obrazce U kolem osy, která leží v téže rovině jako obrazec U a neprotíná obrazec U , se rovná součinu obsahu S obrazce U a délky kružnice opsané těžištěm obrazce U , tj.

$$V = 2\pi y_T S = 2\pi S_x,$$

kde S je obsah tvořícího obrazce,

y_T – vzdálenost těžiště T od osy x otáčení,

S_x – statický moment vzhledem k ose x .

Obsah Q pláště rotačního tělesa, které vznikne při rotaci rovinné rektifikace schopné (tvořící) křivky k kolem osy o , která leží v téže rovině jako křivka k a neprotíná křivku k , se rovná součinu délky křivky k a délky kružnice opsané těžištěm křivky k , tj.

$$Q = 2\pi y_T l,$$

kde l je délka tvořící křivky,

y_T – vzdálenost těžiště T od osy otáčení.

3.3.2. Mnohostěny

n -stěn ($n \in \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 4\}$) [obecně mnohostěn, polyedr] je těleso, jehož hranice je takovým sjednocením n hraničních mnohoúhelníků, že strana každého z nich je zároveň stranou jiného mnohoúhelníku, přičemž žádné dva

mnohoúhelníky neleží v téže rovině. Každý z mnohoúhelníků, jejichž sjednocením je hranice n -stěnu, se nazývá *stěna n-stěnu*. Strany stěn se nazývají *hrany n-stěnu*.

Eulerova věta o mnohostěnech

Jestliže mnohostěn je konvexní, platí

$$e + f - h = 2,$$

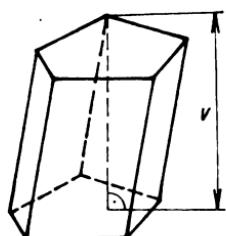
kde e je počet vrcholů,

f – počet stěn,

h – počet hran.

Kolmý a kosý hranol (obr. 153)

n-bokým hranolem [stručně *hranolem*] nazýváme $(n + 2)$ -stěn, který je průnikem *n*-bokého hranolového prostoru a vrstvy určené rovinami, které nejsou rovnoběžné s hranami tohoto hranolového prostoru. Tloušťku této vrstvy nazýváme *výškou hranolu*.



Obr. 153. Kosý hranol

Mnohoúhelníky, které jsou průniky hraničních rovin vrstvy a hranolového prostoru, se nazývají *podstavy* [*podstavné stěny*] *hranolu*. Všechny stěny hranolu, které nejsou jeho podstavami, se nazývají *boční stěny*.

Pláštěm hranolu nazýváme sjednocení všech jeho bočních stěn. *Povrchem hranolu* nazýváme sjednocení všech jeho stěn.

Strany podstavy hranolu se nazývají *podstavné hrany*, ostatní hrany se nazývají *boční hrany*.

Kolmým hranolem nazýváme hranol, jehož boční hrany jsou kolmé na rovinu podstavy. Hranol, který není kolmý, se nazývá *kosý*.

Normálovým řezem hranolu nazýváme neprázdný řez hranolu rovinou kolmou k jeho bočním hranám a protínající všechny boční hrany.

Platí

$$V = Sv = Na,$$

$$P = Q + 2S,$$

kde N je obsah normálového řezu hranolet,
 a — délka boční hrany.

Těžiště T hranolu leží ve středu úsečky spojující těžiště dolní a horní podstavy.

Rovnoběžnostěnem nazýváme čtyřboký hranol, jehož podstavou je rovnoběžník.

Kvádr (obr. 154)

Kvádrem nazýváme kolmý hranol, jehož podstavou je pravoúhelník.

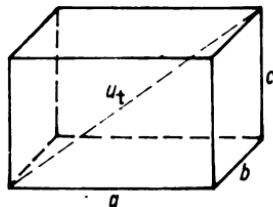
Platí

$$V = abc,$$

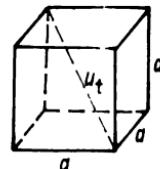
$$P = 2(ab + ac + bc),$$

$$u_t = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Těžiště T kvádru leží v průsečíku tělesových úhlopříček.



Obr. 154. Kvádr s rozměry a, b, c



Obr. 155. Krychle s hranou délky a

Krychle (obr. 155)

Krychlí [hexaedrem] nazýváme kolmý hranol, jehož všechny stěny jsou čtverce.

Platí

$$V = a^3,$$

$$P = 6a^2,$$

$$u_t = a\sqrt{3}.$$

Těžiště T krychle leží v průsečíku tělesových úhlopříček.

Trojboký kolmý hranol
seříznutý rovinou nerovnoběžnou s rovinou podstavy (obr. 156)

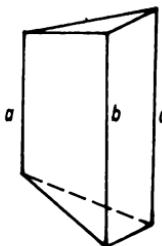
$$V = S \cdot \frac{a + b + c}{3}.$$

Trojboký kosý hranol
seříznutý rovinou nerovnoběžnou s rovinou podstavy (obr. 157)

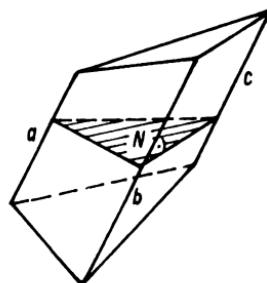
$$V = N \cdot \frac{a + b + c}{3},$$

kde N je obsah normálového řezu hranalem.

Při seříznutí trojbokého kolmého hranolu rovinou nerovnoběžnou s rovinou podstavy se obsah N normálového řezu hranalem rovná obsahu S dolní podstavy.



Obr. 156. Trojboký kolmý hranol
seříznutý rovinou nerovnoběžnou
s rovinou podstavy



Obr. 157. Trojboký kosý hranol
seříznutý rovinou nerovnoběžnou
s rovinou podstavy

n -boký kolmý hranol
seříznutý rovinou nerovnoběžnou s rovinou podstavy

$$V = Nt,$$

kde t je vzdálenost těžišť dolní a horní podstavy,

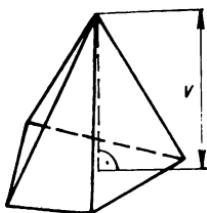
N – obsah rovinného řezu kolmého ke spojnici těžišť horní a dolní podstavy.

Jehlan (kolmý a kosý) (obr. 158)

n -bokým jehlanem [stručně **jehlanem**] nazýváme $(n+1)$ -stěn, který je průnikem n -bokého jehlanového prostoru a vrstvy, jejiž jedna hraniční rovina

má s jehlanovým prostorem společný jen vrchol jehlanového prostoru (tzv. *hlavní vrchol jehlanu*). Tloušťku této vrstvy nazýváme *vyškou jehlanu*.

Mnohoúhelník, který je řezem jehlanu tou hraniční rovinou vrstvy, která neprochází vrcholem jehlanového prostoru, nazýváme *podstavou jehlanu*. Všechny stěny jehlanu, které nejsou jeho podstavou, se nazývají *boční stěny*.



Obr. 158. Jehlan

Pláštěm jehlanu nazýváme sjednocení všech jeho bočních stěn. *Povrchem jehlanu* nazýváme sjednocení všech jeho stěn.

Kolmým jehlanem nazýváme takový jehlan, že řídicí n -úhelník má střed souměrnosti a přímka určená tímto středem a vrcholem jehlanového prostoru je kolmá na rovinu podstavy. *Jehlan*, který není kolmý, se nazývá *kosý*.

Plati

$$V = \frac{1}{3}Sv,$$

$$P = S + Q.$$

Těžiště T jehlanu leží na úsečce spojující hlavní vrchol s těžištěm podstavy a od podstavy má vzdálenost $v/4$.

Trojboký jehlan [čtyřstěn]

Jestliže $[x_1, y_1, z_1]$, $[x_2, y_2, z_2]$ a $[x_3, y_3, z_3]$ jsou vrcholy podstavy trojbokého jehlanu a hlavní vrchol leží v počátku souřadnicové soustavy, plati

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{array}{|ccc|} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{array} \right|$$

(ve vzorci jde o absolutní hodnotu determinantu).

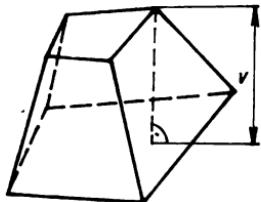
Komolý jehlan (obr. 159)

Komolým jehlanem nazýváme průnik jehlanu a vrstvy určené rovinou podstavy a rovinou s ní rovnoběžnou, která má s jehlanem společné aspoň dva body. Tloušťku této vrstvy nazýváme *výškou komolého jehlanu*.

Platí

$$V = \frac{1}{3}v[S + \sqrt{(SS_1)} + S_1],$$
$$P = S + S_1 + Q,$$

kde S , resp. S_1 je obsah dolní, resp. horní podstavy.



Obr. 159. Komolý jehlan

Těžiště T komolého jehlanu leží na úsečce spojující těžiště dolní a horní podstavy a má od dolní (tj. větší) podstavy vzdálenost

$$\frac{v}{4} \frac{S + 2\sqrt{(SS_1)} + 3S_1}{S + \sqrt{(SS_1)} + S_1}.$$

Přibližný vzorec pro objem komolého jehlanu

$$V \approx \frac{S + S_1}{2} v.$$

Vzorec dává dobré přibližné hodnoty, jestliže se obsahy S a S_1 podstav málo liší.

Pět pravidelných mnohostěnů

Označení:

a – délka hrany,

r – poloměr opsané kulové plochy,

ϱ – poloměr vepsané kulové plochy.

Pravidelným n -stěnem [obecně pravidelným mnohostěnem] nazýváme konvexní n -stěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky. V každém jeho vrcholu se sbíhá stejný počet hran, přičemž všechny vrcholy leží na téže kulové ploše. Existuje právě pět pravidelných mnohostěnů.

Pravidelný čtyřstěn [tetraedr]
(je ohraničen 4 rovnostrannými trojúhelníky) (obr. 160)

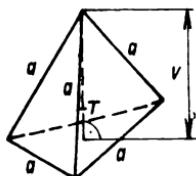
$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}$$

(výklad označení viz u trojbokého jehlanu; ve vzorci jde o absolutní hodnotu determinantu),

$$P = a^2 \sqrt{3},$$

$$r = \frac{a}{4} \sqrt{6}, \quad \varrho = \frac{a}{12} \sqrt{6}.$$

Těžiště T tetraedru leží na výšce ve vzdálenosti $v/4$ od podstavy.



Obr. 160. Pravidelný čtyřstěn

Obr. 161. Pravidelný osmstěn

Obr. 162. Pravidelný dvacetistěn

Pravidelný osmstěn [oktaedr]
(je ohraničen 8 rovnostrannými trojúhelníky) (obr. 161)

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}, \quad P = 2a^2 \sqrt{3},$$

$$r = \frac{a}{2} \sqrt{2}, \quad \varrho = \frac{a}{6} \sqrt{6}.$$

Těžiště T oktaedru leží v průsečíku úhlopříček společného základního čtverce.

Pravidelný dvacetistěn [ikosaedr]
(je ohraničen 20 rovnostrannými trojúhelníky) (obr. 162)

$$V = \frac{5a^3(3 + \sqrt{5})}{12}, \quad P = 5a^2 \sqrt{3},$$

$$r = \frac{a}{4} \sqrt{[2(5 + \sqrt{5})]}, \quad \varrho = \frac{a(\sqrt{3})(3 + \sqrt{5})}{12}.$$

Krychle [hexaedr] (je ohraničena 6 čtverci)

$$V = a^3, \quad P = 6a^2,$$

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{3}, \quad \varrho = \frac{a}{2}.$$

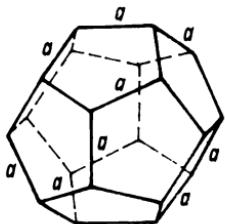
Těžiště T krychle leží v průsečíku tělesových úhlopříček.

Pravidelný dvanáctistěn [dodekaedr]

(je ohraničen 12 pravidelnými pětiúhelníky (obr. 163))

$$V = \frac{a^3(15 + 7\sqrt{5})}{4}, \quad P = 3a^2 \sqrt{[5(5 + 2\sqrt{5})]},$$

$$r = \frac{a(\sqrt{3})(1 + \sqrt{3})}{4}, \quad \varrho = \frac{a\sqrt{[10(25 + 11\sqrt{5})]}}{20}.$$



Obr. 163. Pravidelný dvanáctistěn

Prismatoid

Prismatoidem nazýváme každé těleso, které má přímé hrany a je ohraničeno rovinnými mnohoúhelníky, přičemž všechny jeho vrcholy a obě podstavy leží ve dvou rovnoběžných rovinách. Boční stěny mohou být trojúhelníky nebo lichoběžníky. (Objem prismatoidu lze vypočítat pomocí Simpsonova pravidla ze str. 335.)

Prismatoid, jehož podstavy mají týž počet hran a boční stěny jsou jen lichoběžníky, se nazývá *obelisk*. Obelisk, jehož podstavami jsou podobné mnohoúhelníky, je komolým *jehlanem*. Obelisk, jehož podstavami jsou obdélníky, se nazývá *hranolec*. Zvláštním případem prismatoidu je *klín*, což je těleso, jehož dolní podstava je mnohoúhelníkem, horní podstava se redukuje na úsečku rovnoběžnou s rovinou dolní podstavy a boční stěny jsou trojúhelníky, lichoběžníky nebo rovnoběžníky.

Hranolec (obr. 164)

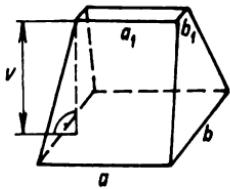
Podstavami uvažovaného hranolce jsou nepodobné obdélníky s rozměry a, b a a_1, b_1 , ležící v rovnoběžných rovinách majících vzdálenost v , přičemž protější boční stěny mají stejné odchylky od podstavy, ale neprotínají se v právě jednom bodě.

Platí

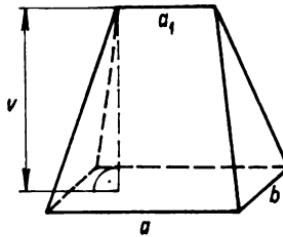
$$V = \frac{1}{6}v[(2a + a_1)b + (2a_1 + a)b_1] = \\ = \frac{1}{6}v[ab + (a + a_1)(b + b_1) + a_1b_1].$$

Vzdálenost těžiště T hranolce od dolní (tj. větší) podstavy s rozmezry a, b se rovná

$$\frac{v}{2} \frac{ab + ab_1 + a_1b + 3a_1b_1}{2ab + ab_1 + a_1b + 2a_1b_1}.$$



Obr. 164. Hranolec



Obr. 165. Klin

Klín s obdélníkovou podstavou (obr. 165)

Dolní podstavou uvažovaného klínu je obdélník s rozmezry a, b , kdežto horní podstava je redukována na úsečku délky a_1 rovnoběžnou s rovinou dolní podstavy ležící ve vzdálenosti v . Jednu dvojici protějších bočních stěn tvoří shodné rovnoramenné trojúhelníky a druhou dvojici bočních stěn tvoří shodné rovnoramenné lichoběžníky.

Platí

$$V = \frac{1}{6}bv(2a + a_1).$$

Těžiště T klínu leží na úsečce spojující střed horní hrany a střed podstavy s rozmezry a, b a má od této podstavy vzdálenost

$$\frac{v}{2} \frac{a + a_1}{2a + a_1}.$$

3.3.3. Oblá tělesa a jejich části

Označení:

r – poloměr,
 d – průměr.

Kosý a kolmý válec

Válcem (resp. *pláštěm válce*) nazýváme průnik válcového prostoru (resp. hranice válcového prostoru) a vrstvy, jejíž hraniční roviny nejsou rovnoběžné s tvořícími válcového prostoru. Tloušťku této vrstvy nazýváme *výškou válce*.

Řezy válcového prostoru hraničními rovinami vrstvy se nazývají *podstavy válce*.

Povrchem válce nazýváme sjednocení pláště válce a obou jeho podstav.

Stranou válce nazýváme část tvořící přímky na plásti válce.

Kolmým válcem nazýváme válec, jehož strany jsou kolmé na roviny jeho podstav. Válec, který není kolmý, se nazývá *kosý*.

Normálovým řezem válce nazýváme neprázdný řez válce rovinou kolmou k jeho stranám a protínající všechny strany válce.

Platí

$$V = Sv,$$

$$Q = os,$$

kde S je obsah podstavy válce,

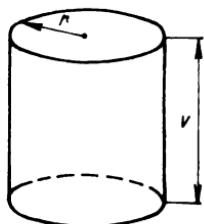
v – výška válce,

o – obvod normálového řezu válce rovinou,

s – délka strany válce.

Rotační válec [kolmý kruhový válec] (obr. 166)

Kruhovým válcem nazýváme válec, jehož podstavami jsou kruhy. Kolmý kruhový válec nazýváme *rotačním válcem*.



Obr. 166. Rotační válec

Platí

$$V = \pi r^2 v = \frac{\pi d^2}{4} v,$$

$$Q = 2\pi r v = \pi d v,$$

$$P = 2\pi r(r + v) = \pi d(\frac{1}{2}d + v),$$

kde v je výška rotačního válce.

Těžiště T rotačního válce leží na ose válce ve vzdálenosti $v/2$ od podstavy, tj. leží ve středu úsečky spojující těžiště obou podstav válce.

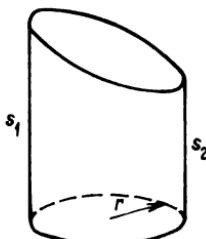
Rotační válec seříznutý rovinou nerovnoběžnou s rovinou podstavy a neprotínající podstavu (obr. 167)

$$V = \frac{\pi r^2}{2} (s_1 + s_2) = \frac{\pi d^2}{8} (s_1 + s_2),$$

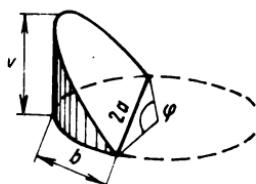
$$Q = \pi r(s_1 + s_2) = \frac{\pi d}{2} (s_1 + s_2),$$

$$P = \pi r \left\{ s_1 + s_2 + r + \sqrt{r^2 + \left(\frac{s_1 - s_2}{2} \right)^2} \right\},$$

kde s_1 , resp. s_2 je největší, resp. nejmenší z délek stran válce.



Obr. 167. Rotační válec seříznutý rovinou nerovnoběžnou s podstavou



Obr. 168. Úsek rotačního válce

Těžiště T šikmo seříznutého rotačního válce leží na ose válce a má od dolní podstavy vzdálenost

$$\frac{s_1 + s_2}{4} + \frac{1}{4} \frac{r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{s_1 + s_2},$$

kde α je odchylka roviny horní podstavy od roviny dolní podstavy.

Rotační válec se říznutý rovinou nerovnoběžnou s rovinou podstavy a protínající dolní podstavu [úsek rotačního válce, válcový klín, válcové kopyto] (obr. 168)

$$V = \frac{v}{3b} \left[a(3r^2 - a^2) + 3r^2(b - r) \frac{\varphi}{2} \right],$$

$$Q = \frac{2rv}{b} \left[(b - r) \frac{\varphi}{2} + a \right],$$

kde φ je velikost středového úhlu v obloukové míře, příslušného průsečníci s podstavou,

$2a$ – délka přímé hrany válcového klínu,

v – největší z délek stran pláště válcového klínu,

b – vzdálenost průsečíku nejdelení strany pláště válcového klínu s podstavou od přímky obsahující přímou hranu válcového klínu.

Pro $\varphi = \pi$ je $a = b = r$ a platí

$$V = \frac{2}{3}r^2v,$$

$$Q = 2rv = dv.$$

Dutý rotační válec [rotační válcová trubice] (obr. 169)

$$\begin{aligned} V &= \pi v(R^2 - r^2) = \frac{1}{4}\pi v(D^2 - d^2) = \pi av(2R - \delta) = \\ &= \pi av(2r + \delta) = 2\pi r_s \delta v, \end{aligned}$$

$$Q = 2\pi v(R + r),$$

$$P = 2\pi(R + r)(v + R - r),$$

kde R , resp. r je vnější, resp. vnitřní poloměr,

D , resp. d – vnější, resp. vnitřní průměr,

$\delta = R - r$ – tloušťka trubice,

$r_s = \frac{1}{2}(R + r)$ – střední poloměr.

Těžiště T rotační válcové trubice leží na ose trubice a má od podstavy vzdálenost $v/2$.

Kužel (obr. 170)

Kuželem (resp. *pláštěm kužele*) nazýváme průnik kuželového prostoru (resp. hranice kuželového prostoru) a vrstvy, jejíž jedna hraniční rovina má s kuželovým prostorem společný jen vrchol kuželového prostoru. Tloušťku této vrstvy nazýváme *výškou kužele*.

Řez kužele tou hraniční rovinou vrstvy, která neprochází vrcholem kuželového prostoru, nazýváme *podstavou kužele*.

Povrchem kužele nazýváme sjednocení pláště kužele a jeho podstavy.

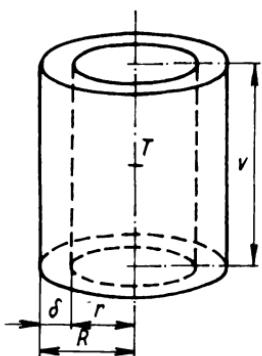
Stranou kužele nazýváme část tvořící přímky na plásti kužele.

Platí

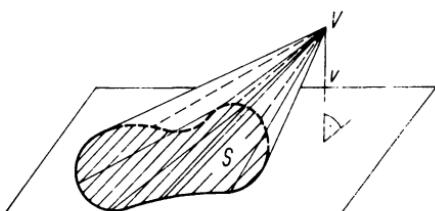
$$V = \frac{1}{3}Sv,$$

kde S je obsah podstavy kužele,

v — výška kužele.

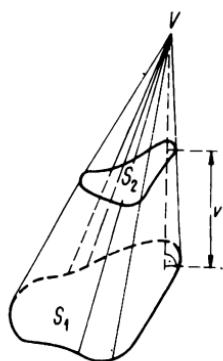


Obr. 169. Dutý rotační válec

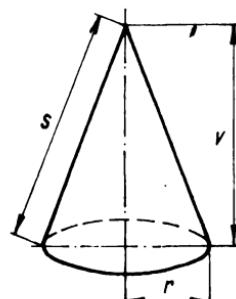


Obr. 170. Kužel

Těžiště T kužele leží na úsečce spojující vrchol kužele s těžištěm podstavy a má od podstavy vzdálenost $v/4$.



Obr. 171. Komolý kužel



Obr. 172. Rotační kužel

Komolý kužel (obr. 171)

Komolým kuželem nazýváme průnik kužele a vrstvy určené rovinou podstavy a rovinou s ní rovnoběžnou, která má s kuželem společné aspoň dva různé body. Tloušťku této vrstvy nazýváme výškou komolého kužele.

Platí

$$V = \frac{1}{3}v[S_1 + S_2 + \sqrt{(S_1 S_2)}],$$

kde S_1 , resp. S_2 je obsah dolní, resp. horní podstavy,
 v — výška komolého kužele.

Rotační kužel [kolmý kruhový kužel] (obr. 172)

Kruhovým kuželem nazýváme kužel, jehož podstavou je kruh.

Rotačním kuželem [kolmým kruhovým kuželem] nazýváme kruhový kužel, jehož vrchol leží na kolmici jdoucí středem podstavy na rovinu podstavy. Kruhový kužel, který není rotační, se nazývá *kosý*.

Platí

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{12}\pi d^2 v \approx 0,2618d^2 v,$$

$$Q = \pi r s = \frac{1}{2}\pi d s,$$

$$P = \pi r(r + s),$$

kde $s = \sqrt{(r^2 + v^2)}$ je délka strany rotačního kužele,
 v — výška rotačního kužele.

Těžiště T rotačního kužele leží na ose kužele a má od podstavy vzdálenost $v/4$.

Komolý rotační kužel (obr. 173)

$$V = \frac{1}{3}\pi v(R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{12}\pi v(D^2 + Dd + d^2),$$

$$Q = \pi s(R + r) = \frac{1}{2}\pi s(D + d),$$

$$P = \pi[R^2 + r^2 + s(R + r)] = \frac{1}{4}\pi[D^2 + d^2 + 2s(D + d)],$$

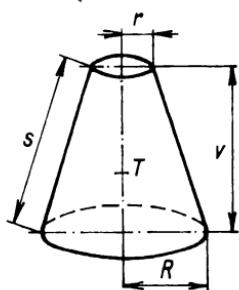
kde r , resp. R je poloměr ménší, resp. větší podstavy,

d , resp. D — průměr menší, resp. větší podstavy,

v — výška komolého rotačního kužele a

$$s = \sqrt{[v^2 + (R - r)^2]} = \frac{1}{2}\sqrt{[4v^2 + (D - d)^2]}$$

je délka strany rotačního komolého kužele.



Obr. 173. Komolý rotační kužel

Těžiště T komolého rotačního kužele leží na ose tohoto kužele a má od dolní (tj. větší) podstavy vzdálenost

$$\frac{v}{4} \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}.$$

Přibližné vzorce pro objem komolého kužele

$$V \approx \frac{1}{2}\pi v(R^2 + r^2) = \frac{1}{8}\pi v(D^2 + d^2)$$

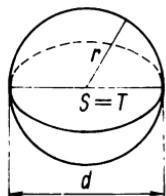
(vzorec dává dobré přibližné hodnoty, jestliže se hodnoty R a r málo liší),

$$V \approx \frac{1}{4}\pi v(R + r)^2 = \frac{1}{16}\pi v(D + d)^2,$$

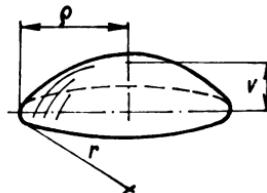
$$V \approx \pi v r_s^2 = \frac{1}{4}\pi v d_s^2,$$

kde $r_s = \frac{R + r}{2}$ je poloměr středního řezu,

$$d_s = \frac{D + d}{2} - \text{průměr středního řezu.}$$



Obr. 174. Koule



Obr. 175. Kulová úseč

Koule (obr. 174)

Koulí (resp. *povrchem koule* [*kuloi ou plochou; sférou*]) se středem S a poloměrem r nazýváme množinu právě těch bodů, jejichž vzdálenost od bodu S se rovná nejvýše číslu r (resp. právě číslu r).

Platí

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{P^3}{\pi}} \approx 4,1888 r^3, \quad V = \frac{1}{6}\pi d^3 \approx 0,5236 d^3,$$

$$P = 4\pi r^2 = \pi d^2 = \sqrt[3]{(36\pi V^2)} \approx 12,566 r^2,$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}},$$

$$d = \sqrt{\frac{P}{\pi}} = 2 \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Těžiště T koule leží ve středu koule.

Kulová úseč a kulový vrchlík (obr. 175)

Kulovou úsečí nazýváme průnik koule a poloprostoru, jehož hraniční rovina protíná kouli v kruhu; tento kruh nazýváme *podstavou úseče*.

Kulovým vrchlíkem nazýváme průnik kulové plochy a poloprostoru, jehož hraniční rovina protíná kulovou plochu v kružnici.

Platí

$$V = \frac{1}{6}\pi v(3\varrho^2 + v^2) = \frac{1}{3}\pi v^2(3r - v) = \frac{1}{6}\pi v^2(3d - 2v),$$

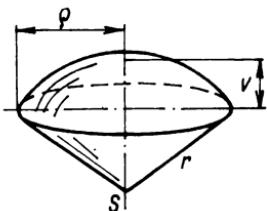
$$Q = 2\pi rv = \pi dv = \pi(\varrho^2 + v^2) \quad (\text{obsah kulového vrchlíku}),$$

$$P = \pi(2rv + \varrho^2) = \pi(v^2 + 2\varrho^2) = \pi v(4r - v),$$

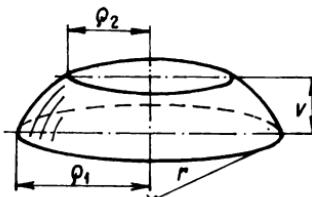
kde $\varrho = \sqrt{v(2r - v)}$ je poloměr podstavy kulové úseče,
 v – výška kulové úseče.

Těžiště T kulové úseče leží na ose souměrnosti kulové úseče a má od středu koule vzdálenost

$$\frac{3}{4} \frac{(2r - v)^2}{3r - v}.$$



Obr. 176. Kulová výseč



Obr. 177. Kulová vrstva

Kulová výseč (obr. 176)

Kulovou výsečí nazýváme průnik koule a prostorového úhlu s vrcholem ve středu koule.

Platí

$$V = \frac{2\pi r^2 v}{3} \approx 2,094 4r^2 v, \quad V = \frac{\pi d^2 v}{6} \approx 0,523 6d^2 v,$$

$$P = \pi r(2v + \varrho),$$

kde v je výška příslušné kulové úseče,

ϱ – poloměr podstavy příslušné kulové úseče.

Těžiště T kulové výseče leží na ose souměrnosti kulové výseče a má od středu koule vzdálenost

$$\frac{3}{8}(2r - v).$$

Kulová vrstva a kulový pás (obr. 177)

Kulovou vrstvou (resp. *kulovým pásem*) nazýváme průnik koule (resp. kulové plochy) se středem S a poloměrem r a vrstvy určené dvěma rovnoběžnými rovinami, jejichž vzdálenosti od středu S jsou a_1 a a_2 ($0 \leq a_1 \leq a_2 < r$).

Platí

$$V = \frac{1}{6}\pi v(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + v^2),$$

$$Q = 2\pi rv = \pi dv \quad (\text{obsah kulového pásu}),$$

$$P = \pi(2rv + \varrho_1^2 + \varrho_2^2) = \pi(dv + \varrho_1^2 + \varrho_2^2),$$

kde ϱ_1, ϱ_2 jsou poloměry kruhových podstav,

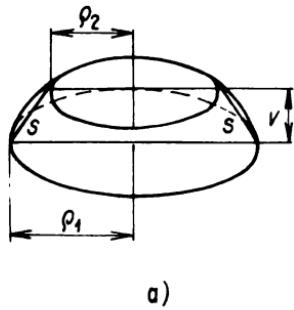
v — výška kulové vrstvy, popř. kulového pásu ($v = a_2 \pm a_1$).

Platí

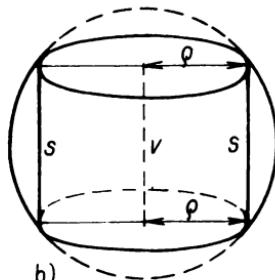
$$r^2 = \varrho_1^2 + \left(\frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2 - v^2}{2v} \right)^2 \quad (\varrho_2 < \varrho_1).$$

Jestliže $\varrho_1 = r$, pak

$$V = \pi v(r^2 - \frac{1}{3}v^2).$$



a)



b)

Obr. 178. Prstenec

Prstenec (obr. 178)

Prstencem nazýváme *(množinový) rozdíl kulové vrstvy a vepsaného rotačního komolého kužele* (popř. rotačního válce).

Jestliže V_1 je objem rotačního komolého kužele (popř. rotačního válce) vepsaného do kulové vrstvy a s délkou strany vepsaného rotačního komolého kužele (popř. rotačního válce), pak pro objem V_p prstence platí

$$V_p = V - V_1 = \frac{1}{6}\pi vs^2,$$

kde V je objem kulové vrstvy.

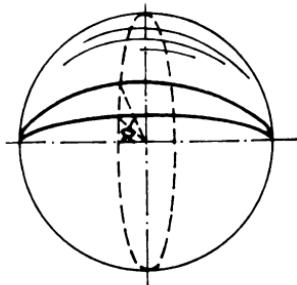
Kulový klín a sférický dvojúhelník (obr. 179)

Kulovým klínem, resp. sférickým dvojúhelníkem nazýváme průnik koule, resp. kulové plochy a klínového prostoru, jehož hrana prochází středem koule.

Platí (Q je obsah sférického dvojúhelníku)

$$P = \pi r^2 + Q,$$

kde α je odchylka hraničních rovin klínového prostoru v stupňové míře.

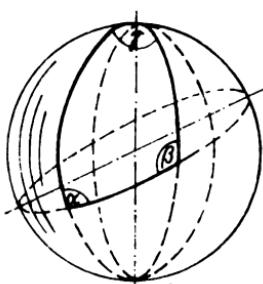


Obr. 179. Kulový klín
a sférický dvojúhelník

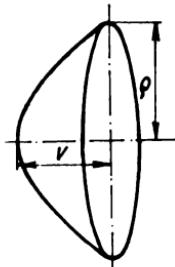
Platí

$$V = \frac{2}{3}r^3 \operatorname{arc} \alpha = \frac{\pi r^3 \alpha}{270} \approx 0,011\,636 r^3 \alpha,$$

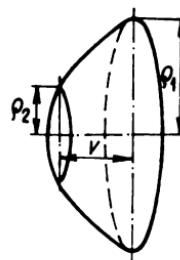
$$Q = 2r^2 \operatorname{arc} \alpha = \frac{\pi r^2 \alpha}{90} \approx 0,034\,907 r^2 \alpha$$



Obr. 180. Sférický
trojúhelník



Obr. 181. Rotační
paraboloid



Obr. 182. Vrstva rotačního
paraboloidu

Sférický trojúhelník (obr. 180)

$$S = \frac{\pi r^2 \varepsilon}{180},$$

kde $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$ je sférický exces [nadbytek] sférického trojúhelníku, přičemž α, β, γ jsou velikosti úhlů sférického trojúhelníku (v stupňové míře).

Rotační paraboloid (obr. 181)

Rotačním paraboloidem v tomto článku nazýváme těleso ohraničené plochou vzniklou při rotaci části paraboly s jejím vrcholem kolem její osy a kruhem, jehož rovina je kolmá k ose rotace paraboly a protíná osu paraboly.

Plati

$$V = \frac{1}{2}\pi \varrho^2 v \approx 1,570\,796 \varrho^2 v, \quad Q = \frac{2\pi}{3q} [\sqrt{(\varrho^2 + q^2)^3} - q^3],$$

kde ϱ je poloměr kruhové podstavy,

v — výška,

$$q = \varrho^2/(2v).$$

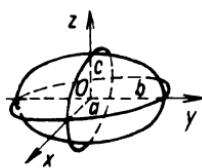
Těžiště T rotačního paraboloidu leží na jeho ose a má od vrcholu paraboloidu vzdálenost $2v/3$.

Vrstva rotačního paraboloidu [komolý rotační paraboloid] (obr. 182)

$$V = \frac{1}{2}\pi v(\varrho_1^2 + \varrho_2^2),$$

kde ϱ_1, ϱ_2 jsou poloměry kruhových podstav v rovnoběžných rovinách,

v — výška vrstvy rotačního paraboloidu.



Obr. 183. Trojosý elipsoid

Trojosý elipsoid (obr. 183)

Trojosým elipsoidem v tomto článku nazýváme těleso ohraničené plochou definovanou v odstavci 4.2.5.2.

Platí

$$V = \frac{4}{3}\pi abc,$$

$$P = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{(a^2 - c^2)}} [c^2 F(k, \varphi) + (a^2 - c^2) E(k, \varphi)],$$

kde a, b, c ($a > b > c$) jsou délky poloos elipsoidu,

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (\text{eliptický integrál prvního druhu}),$$

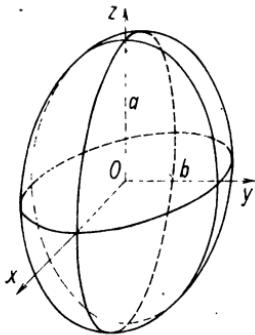
$$E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin \psi} d\psi \quad (\text{eliptický integrál druhého druhu}),$$

$$\varphi = \arccos \frac{b}{a},$$

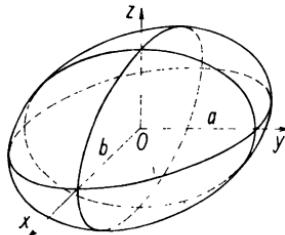
$$k = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \quad (\text{modul integrálů } F \text{ a } E).$$

Rotační protáhlý elipsoid

Rotačním protáhlým elipsoidem v tomto článku nazýváme těleso ohraničené plochou vytvořenou při rotaci elipsy s poloosami délky a, b ($a > b$) kolem hlavní osy (obr. 184).



Obr. 184. Rotační protáhlý elipsoid



Obr. 185. Rotační zploštělý elipsoid

Platí

$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2,$$

$$P = 2\pi \left(b^2 + ab \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} \right),$$

$$P \approx 2(\sqrt{2})\pi b \sqrt{(a^2 + b^2)},$$

kde $\varepsilon = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$ je číselná výstřednost elipsy.

Rotační zploštělý elipsoid

Rotačním zploštělým elipsoidem [sféroidem] v tomto článku nazýváme těleso ohraničené plochou vytvořenou při rotaci elipsy s poloosami délky a, b ($a > b$) kolem vedlejší osy (obr. 185).

Platí

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2 b,$$

$$P = 2\pi \left(a^2 + \frac{b^2}{2\varepsilon} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right),$$

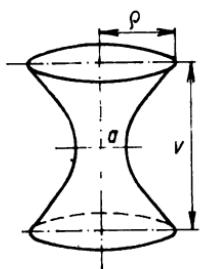
kde

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$$

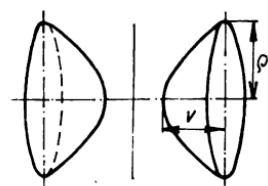
je číselná výstřednost elipsy.

Rotační jednodílný hyperboloid

Rotačním jednodílným hyperboloidem v tomto článku nazýváme těleso ohraničené plochou vytvořenou při rotaci hyperboly s poloosami délky a, b ($a > b$) kolem vedlejší osy a dvěma shodnými kruhy, jejichž roviny jsou kolmé k ose rotace hyperboly (obr. 186).



Obr. 186. Jednodílný rotační hyperboloid



Obr. 187. Dvojdílný rotační hyperboloid

Platí

$$V = \frac{1}{3}\pi v(2a^2 + \rho^2),$$

kde v je výška,

a – délka hlavní poloosy tvořící hyperboly,

ρ – poloměr shodných kruhových podstav v rovnoběžných rovinách.

Rotační dvojdílný hyperboloid

Rotačním dvojdílným hyperboloidem v tomto článku nazýváme těleso ohraničené plochou vytvořenou při rotaci hyperboly s poloosami délka a, b ($a > b$) kolem hlavní osy a dvěma shodnými kruhy, jejichž roviny jsou kolmé k ose rotace hyperboly (obr. 187).

Platí

$$V = \frac{1}{3}\pi v \left(3\varrho^2 - \frac{b^2 v^2}{a^2} \right),$$

kde a , resp. b je délka hlavní, resp. vedlejší poloosy tvořící hyperboly,

v – výška „skořepiny“,

ϱ – poloměr shodných kruhových podstav v rovnoběžných rovinách.

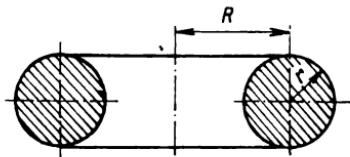
Anuloid [torus, kruhový prstenec] (obr. 188)

Anuloid vznikne při rotaci kružnice s poloměrem r kolem osy ležící v rovině této kružnice ve vzdálenosti R ($R > r$) od středu kružnice.

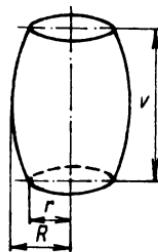
Pro těleso ohraničené anuloidem platí

$$V = 2\pi^2 r^2 R \approx 19,739 r^2 R,$$

$$P = 4\pi^2 r R \approx 39,478 r R.$$



Obr. 188. Anuloid



Obr. 189. Sud

Sud (obr. 189)

Sud s tvořící křivkou tvaru oblouku kružnice:

$$V = \frac{1}{3}\pi v(2R^2 + r^2) = \frac{1}{12}\pi v(2D^2 + d^2) \approx 0,2618v(2D^2 + d^2).$$

Sud s tvořící křivkou tvaru oblouku paraboly:

$$V = \frac{1}{15}\pi v(8R^2 + 4Rr + 3r^2) = \frac{1}{60}\pi v(8D^2 + 4Dd + 3d^2) \approx 0,05236v(8D^2 + 4Dd + 3d^2).$$

Přitom R , resp. D je poloměr, resp. průměr středního řezu sudu, kdežto r , resp. d je poloměr, resp. průměr podstavy.

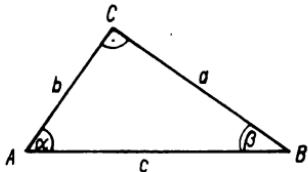
Pro jiné tvary tvořící křivky sudu dávají uvedené vzorce přibližné hodnoty.

3.4. GONIOMETRICKÉ, CYKLOMETRICKÉ, HYPERBOLICKÉ A HYPERBOLOMETRICKÉ FUNKCE

3.4.1. Goniometrické funkce

Definice goniometrických funkcí

Goniometrické funkce je společný název pro funkce *sinus* (symbol sin), *kosinus* (symbol cos), *tangens* (symbol tg), *kotangens* (symbol cotg), *sekans* (symbol sec) a *kosekans* (symbol cosec).



Obr. 190. Pravoúhlý trojúhelník

V pravoúhlém trojúhelníku s přeponou AB o délce c a s odvěsnami BC a AC o délkách a a b pro ostrý úhel CAB o velikosti α platí (obr. 190):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{délka protilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}},$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b} = \frac{\text{délka protilehlé odvěsny}}{\text{délka přilehlé odvěsny}},$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{b}{a} = \frac{\text{délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka protilehlé odvěsny}},$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{c}{b} = \frac{\text{délka přepony}}{\text{délka přilehlé odvěsny}},$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{c}{a} = \frac{\text{délka přepony}}{\text{délka protilehlé odvěsny}}.$$

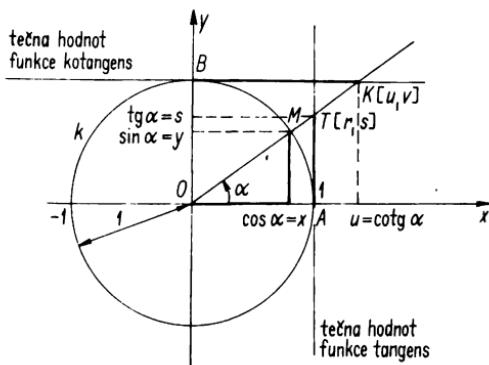
V praxi se goniometrických funkcí sekans a kosekans používá jen zřídka.

Rozšíření definic goniometrických funkcí

Definiční obor goniometrických funkcí sin a cos lze rozšířit na celou množinu \mathbb{R} všech reálných čísel. Funkční hodnoty funkcí sin a cos jsou pak definovány pomocí kartézských souřadnic průsečíku $M = [x, y]$ koncového ramena orientovaného úhlu AOM (jehož vrchol leží v počátku O a počáteční rameno splývá s kladnou částí osy x) s jednotkovou kružnicí se středem ve vrcholu O a poloměrem $r = 1$ (obr. 191):

$$\sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x,$$

kde α je velikost orientovaného úhlu AOM a x, y jsou souřadnice průsečíku M .



Obr. 191. Znázornění hodnot goniometrických funkcí pomocí jednotkové kružnice

Pomocí funkcí sin a cos definujeme ostatní funkce takto:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x} \quad \text{pro } \forall \alpha \in \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq (2k+1) \cdot \frac{1}{2}\pi; k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x}{y} \quad \text{pro } \forall \alpha \in \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\},$$

popř. také málo používanou funkci sekans:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{x} \quad \text{pro } \forall \alpha \in \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq (2k+1) \cdot \frac{1}{2}\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

a málo používanou funkci cosekans:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{y} \quad \text{pro } \forall \alpha \in \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Pomocí souřadnic průsečíků $T = [r, s]$ a $K = [u, v]$ přímky obsahující koncové rameno orientovaného úhlu AOM s velikostí α a tečen v bodech A, B jednotkové kružnice k lze funkce tg a cotg také vyjádřit takto:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= s && \text{pro } \forall \alpha \in \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq (2k+1) \cdot \frac{1}{2}\pi; k \in \mathbb{Z}\}, \\ \operatorname{cotg} \alpha &= u && \text{pro } \forall \alpha \in \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Znaménka hodnot goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech uvádí tabulka 3.3.

Tabulka 3.3
Znaménka hodnot goniometrických funkcí
v jednotlivých kvadrantech

Kvadrant	\sin	\cos	tg	cotg
I	+	+	+	+
II	+	-	-	-
III	-	-	+	+
IV	-	+	-	-

Goniometrické funkce lze také definovat pomocí množiny všech komplexních jednotek

$$J_\alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha = [x, y]$$

tak, že

$$\sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x,$$

kde α je amplituda komplexní jednotky J_α ,

x , resp. y – reálná, resp. imaginární část komplexní jednotky J_α .

V matematické analýze se velikost orientovaného úhlu zpravidla uvádí v obloukové míře a vynechává se značka rad, kdežto v geometrických a trigonometrických úlohách se z tradičních důvodů používá stupňové míry.

Goniometrické funkce jsou proto zpravidla tabelovány pro stupňovou míru, k čemuž je nutno při výpočtech přihlížet.

Vztahy mezi goniometrickými funkcemi doplňkových úhlů

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \cos(90^\circ - \alpha), \\ \cos \alpha &= \sin(90^\circ - \alpha), \\ \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{cotg}(90^\circ - \alpha), \\ \operatorname{cotg} \alpha &= \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha).\end{aligned}$$

Pomocí tabulky 3.4 lze každou goniometrickou funkci libovolného argumentu φ převést na funkci argumentu $\alpha \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$.

Tabulka 3.4

Převod goniometrických funkcí do prvního kvadrantu

Funkce s argumentem φ	$-\alpha$	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$	$360^\circ - \alpha$
$\sin \varphi$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \varphi$	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{cotg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{cotg} \varphi$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{cotg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

Periodičnost goniometrických funkcí

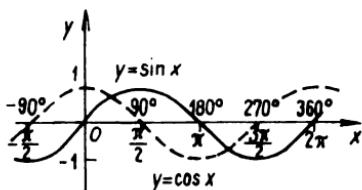
$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ), \\ \cos \alpha = \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ), \\ \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ), \\ \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) \end{array} \right\} \text{pro } \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Grafy goniometrických funkcí (obr. 192 a 193)

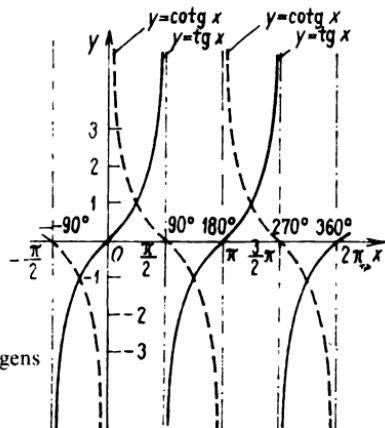
- $f_1 = \{[x, y] \mid y = \sin x, x \in \mathbb{R}, y \in \langle -1, 1 \rangle\}$ (sinusoida),
- $f_2 = \{[x, y] \mid y = \cos x, x \in \mathbb{R}, y \in \langle -1, 1 \rangle\}$ (kosinusoida),
- $f_3 = \{[x, y] \mid y = \operatorname{tg} x, x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \frac{1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, y \in \mathbb{R}\}$ (tangentoida),
- $f_4 = \{[x, y] \mid y = \operatorname{cotg} x, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, y \in \mathbb{R}\}$ (kotangentoida).

Příklady:

$$\begin{aligned}\sin(-500^\circ) &= -\sin 500^\circ = -\sin 140^\circ = -\sin 40^\circ = -\cos 50^\circ; \\ \cos 1000^\circ &= \cos 280^\circ = \cos 80^\circ = \sin 10^\circ; \\ \operatorname{tg} 1500^\circ &= \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{cotg} 30^\circ; \\ \operatorname{cotg}(-2000^\circ) &= -\operatorname{cotg} 2000^\circ = -\operatorname{cotg} 20^\circ = -\operatorname{tg} 70^\circ.\end{aligned}$$



Obr. 192. Funkce sinus a kosinus



Obr. 193. Funkce tangens a kotangens

Poznámka:

Dolní, resp. horní znaménko čísla v tabulce 3.5 platí pro hodnoty argumentu α , uvedené v prvním, resp. druhém rádku. Symbol $\pm \infty$ (resp. $\mp \infty$) znamená, že limita zleva příslušné funkce se v tabelovaném bodě rovná $+\infty$ (resp. $-\infty$) a limita zprava se rovná $-\infty$ (resp. $+\infty$).

Tabulka 3.5

Hodnoty goniometrických funkcí pro význačné úhly

Funkce s argumentem x	0	30°	45°	60°	90°
	180°	150°	135°	120°	270°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	± 1
$\cos x$	± 1	$\pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\pm \frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$	± 1	$\pm \sqrt{3}$	$\pm \infty$
$\cot x$	$\mp \infty$	$\pm \sqrt{3}$	± 1	$\pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Úmluva:

Všechny dále uvedené vzorce platí jen pro přípustné hodnoty argumentů.

Vztahy mezi goniometrickými funkcemi stejného argumentu

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \tan \alpha \cot \alpha = 1,$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Vyjádření goniometrické funkce pomocí ostatních goniometrických funkcí stejného argumentu uvádí tabulka 3.6.

Tabulka 3.6

Vyjádření goniometrické funkce pomocí jiné funkce stejného argumentu

Hledaná funkce	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$
$ \sin \alpha $	—	$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{ \operatorname{tg} \alpha }{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}}$
$ \cos \alpha $	$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	—	$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{ \operatorname{cotg} \alpha }{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}}$
$ \operatorname{tg} \alpha $	$\frac{ \sin \alpha }{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{ \cos \alpha }$	—	$\frac{1}{ \operatorname{cotg} \alpha }$
$ \operatorname{cotg} \alpha $	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{ \sin \alpha }$	$\frac{ \cos \alpha }{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{ \operatorname{tg} \alpha }$	—

Goniometrické funkce součtu a rozdílu argumentů

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha},$$

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha,$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha.$$

Goniometrické funkce dvojnásobku a poloviny argumentu

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha =$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1,$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$\left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}},$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg}(2\alpha) &= \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha} = \\ &= \frac{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{2},\end{aligned}$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \\ &= 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \\ &= 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \\ &= \frac{2}{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg}\alpha &= \frac{\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}, \\ &= \frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2};\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$= \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha},$$

$$\left|\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ &= \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha},\end{aligned}$$

$$|\sin\alpha| = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}},$$

$$|\cos\alpha| = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}},$$

$$|\operatorname{tg}\alpha| = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha &= \frac{\sin(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)} = \\ &= \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)},\end{aligned}$$

$$|\operatorname{cotg}\alpha| = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{1 - \cos(2\alpha)}},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg}\alpha &= \frac{\sin(2\alpha)}{1 - \cos(2\alpha)} = \\ &= \frac{1 + \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}.\end{aligned}$$

Goniometrické funkce dalších násobků argumentu

$$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

$$\sin(4\alpha) = 8\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\sin(5\alpha) = 16\sin\alpha\cos^4\alpha - 12\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha,$$

$$\sin(n\alpha) = n \sin \alpha \cos^{n-1} \alpha - \binom{n}{3} \sin^3 \alpha \cos^{n-3} \alpha + \binom{n}{5} \sin^5 \alpha \cos^{n-5} \alpha - \dots$$

$$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,$$

$$\cos(4\alpha) = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1,$$

$$\cos(5\alpha) = 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha,$$

$$\cos(n\alpha) = \cos^n \alpha - \binom{n}{2} \sin^2 \alpha \cos^{n-2} \alpha + \binom{n}{4} \sin^4 \alpha \cos^{n-4} \alpha - \dots,$$

$$\operatorname{tg}(3\alpha) = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\operatorname{tg}(4\alpha) = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha - 4 \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha},$$

$$\operatorname{tg}(n\alpha) = \frac{n \operatorname{tg} \alpha - \binom{n}{3} \operatorname{tg}^3 \alpha + \binom{n}{5} \operatorname{tg}^5 \alpha - \dots}{1 - \binom{n}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha + \binom{n}{4} \operatorname{tg}^4 \alpha - \binom{n}{6} \operatorname{tg}^6 \alpha + \dots},$$

$$\operatorname{cotg}(3\alpha) = \frac{\operatorname{cotg}^3 \alpha - 3 \operatorname{cotg} \alpha}{3 \operatorname{cotg}^2 \alpha - 1},$$

$$\operatorname{cotg}(4\alpha) = \frac{\operatorname{cotg}^4 \alpha - 6 \operatorname{cotg}^2 \alpha + 1}{4 \operatorname{cotg}^3 \alpha - 4 \operatorname{cotg} \alpha}.$$

$$\operatorname{cotg}(n\alpha) = \frac{\operatorname{cotg}^n \alpha - \binom{n}{2} \operatorname{cotg}^{n-2} \alpha + \binom{n}{4} \operatorname{cotg}^{n-4} \alpha - \dots}{n \operatorname{cotg}^{n-1} \alpha - \binom{n}{3} \operatorname{cotg}^{n-3} \alpha + \binom{n}{5} \operatorname{cotg}^{n-5} \alpha - \dots}.$$

Součty a rozdíly goniometrických funkcí

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \\ \operatorname{cotg} \alpha \pm \operatorname{cotg} \beta &= \frac{\sin (\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}, \\ \operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{cotg} \beta &= \pm \frac{\cos (\alpha \mp \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}, \\ \cos \alpha + \sin \alpha &= (\sqrt{2}) \sin (45^\circ + \alpha) = (\sqrt{2}) \cos (45^\circ - \alpha), \\ \cos \alpha - \sin \alpha &= (\sqrt{2}) \cos (45^\circ + \alpha) = (\sqrt{2}) \sin (45^\circ - \alpha).\end{aligned}$$

Součiny goniometrických funkcí

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)], \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)], \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)], \\ \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta}, \\ &= - \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{cotg} \beta}, \\ \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta &= \frac{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}, \\ &= - \frac{\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{cotg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg} \beta &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}, \\ &= - \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{cotg} \beta}{\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{tg} \beta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{tg} \beta &= \frac{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta}, \\ &= - \frac{\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{cotg} \beta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma &= \frac{1}{4} [\sin (\alpha + \beta - \gamma) + \sin (\beta + \gamma - \alpha) + \\ &\quad + \sin (\gamma + \alpha - \beta) - \sin (\alpha + \beta + \gamma)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma &= \frac{1}{4} [\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \\&\quad + \cos(\gamma + \alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta + \gamma)], \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma &= \frac{1}{4} [-\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \\&\quad + \cos(\gamma + \alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta + \gamma)], \\ \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma &= \frac{1}{4} [\sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \\&\quad + \sin(\gamma + \alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta + \gamma)].\end{aligned}$$

Mocniny goniometrických funkcí

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha &= \frac{1}{2}[1 - \cos(2\alpha)], \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2}[1 + \cos(2\alpha)], \\ \sin^3 \alpha &= \frac{1}{2}[3 \sin \alpha - \sin(3\alpha)], \\ \cos^3 \alpha &= \frac{1}{4}[3 \cos \alpha + \cos(3\alpha)], \\ \sin^4 \alpha &= \frac{1}{8}[\cos(4\alpha) - 4 \cos(2\alpha) + 3], \\ \cos^4 \alpha &= \frac{1}{8}[\cos(4\alpha) + 4 \cos(2\alpha) + 3]. \\ \sin^5 \alpha &= \frac{1}{16}[10 \sin \alpha - 5 \sin(3\alpha) + \sin(5\alpha)], \\ \cos^5 \alpha &= \frac{1}{16}[10 \cos \alpha + 5 \cos(3\alpha) + \cos(5\alpha)], \\ \sin^6 \alpha &= \frac{1}{32}[10 - 15 \cos(2\alpha) + 6 \cos(4\alpha) - \cos(6\alpha)], \\ \cos^6 \alpha &= \frac{1}{32}[10 + 15 \cos(2\alpha) + 6 \cos(4\alpha) + \cos(6\alpha)].\end{aligned}$$

Exponenciální funkce imaginárního argumentu (Eulerovy vzorce)

$$\begin{aligned}e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi, \\ e^{-i\varphi} &= \cos \varphi - i \sin \varphi.\end{aligned}$$

Z toho plyne

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, & \cos \varphi &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \\ \operatorname{tg} \varphi &= -\frac{i(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}, & \operatorname{ctg} \varphi &= \frac{i(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}.\end{aligned}$$

Goniometrické funkce
imaginárního a komplexního argumentu viz na str. 383.

Přibližné vzorce pro malé hodnoty argumentů

$$\begin{aligned}\sin x &\approx x \approx \operatorname{tg} x, \\ \sin(\alpha \pm \beta) &\approx \sin \alpha \pm \sin \beta, \\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &\approx \operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta, \\ \sin(n\alpha) &\approx n \sin \alpha, \\ \operatorname{tg}(n\alpha) &\approx n \operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$

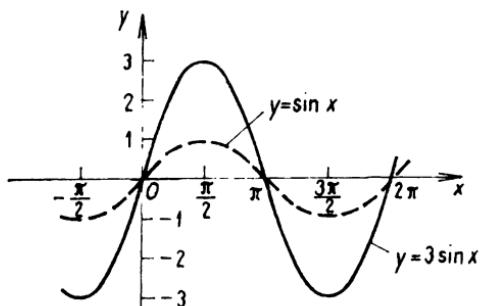
Grafické znázornění sinusoidálních [sinových] funkcí

Změna amplitudy a:

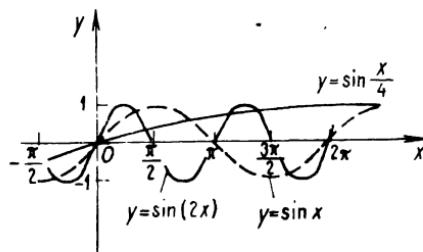
Na obr. 194 je graf funkce $y = a \sin x$ pro amplitudu $a = 3$ (tj. $y = 3 \sin x$), který se porovnává s grafem funkce $y = \sin x$.

Změna kruhové frekvence ω :

Na obr. 195 jsou grafy funkcií $y = \sin(\omega x)$ pro $\omega = 2$ a $\omega = \frac{1}{4}$ [tj. $y = \sin(2x)$, $y = \sin(\frac{1}{4}x)$], které se porovnávají s grafem funkce $y = \sin x$.

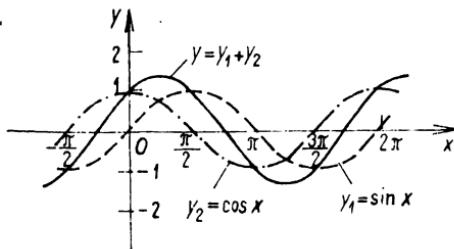


Obr. 194. Graf funkce $y = 3 \sin x$

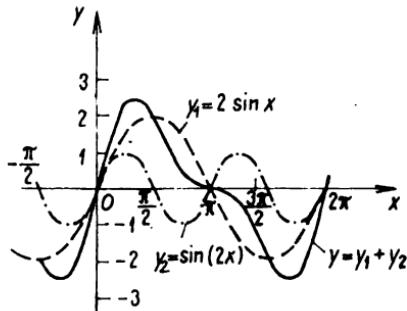


Obr. 195. Grafy funkcií $y = \sin(\omega x)$ ($\omega = \frac{1}{4}, 2$)

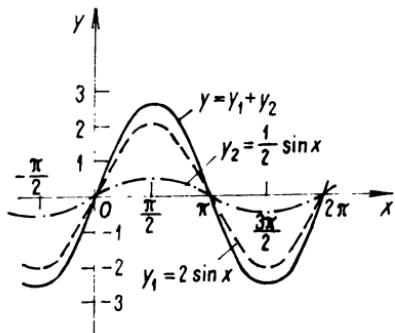
Skládání sinusoidálních funkcí je naznačeno na obr. 196 až 201



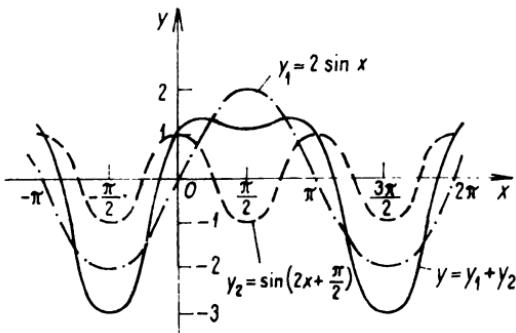
Obr. 196. Graf funkce $y = \sin x + \cos x$



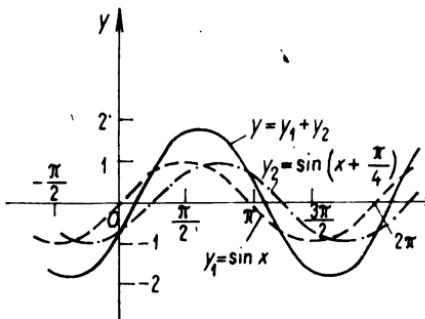
Obr. 197. Graf funkce $y = 2 \sin x + \sin(2x)$



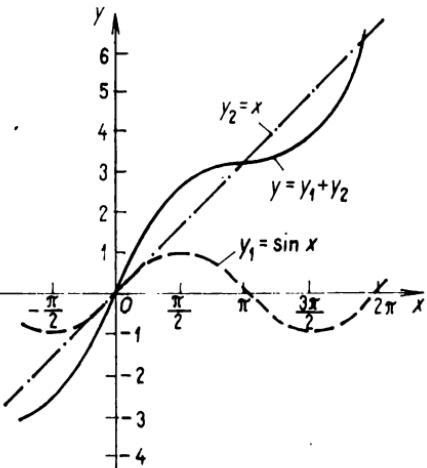
Obr. 198. Graf funkce
 $y = 2 \sin x + \frac{1}{2} \sin x$



Obr. 199. Graf funkce $y = 2 \sin x + \sin(2x + \pi/2)$



Obr. 200. Graf funkce
 $y = \sin x + \sin(x + \pi/4)$



Obr. 201. Graf funkce $y = \sin x + x$

Skládání harmonických pohybů při vzájemně kolmých směrech harmonických pohybů znázorňují obrázky 202 až 205, v nichž jsou tzv. *Lissajousovy křivky* tvaru

$$\begin{aligned} x &= a_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1), \\ y &= a_2 \sin(\omega_2 t - \varphi_2). \end{aligned}$$

V obr. 202 je Lissajousova křivka tvaru

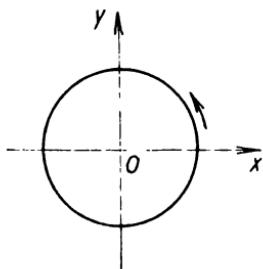
$$\begin{aligned} x &= a \sin(\omega t), \\ y &= a \sin(\omega t - \frac{1}{2}\pi), \end{aligned}$$

tj. při $\omega_1 : \omega_2 = 1 : 1$.

V obr. 203 je Lissajousova křivka tvaru

$$x = a \sin(\omega t), \\ y = a \sin(\omega t - \frac{1}{3}\pi),$$

tj. při $\omega_1 : \omega_2 = 1 : 1$.



Obr. 202. Lissajousova křivka

$$x = a \sin(\omega t), \\ y = a \sin(\omega t - \pi \cdot 2), \\ \omega_1 : \omega_2 = 1 : 1$$

V obr. 204 je Lissajousova křivka tvaru

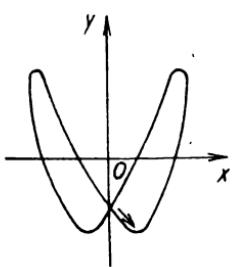
$$x = a \sin(\omega t), \\ y = a \sin(2\omega t - \frac{1}{4}\pi),$$

tj. při $\omega_1 : \omega_2 = 1 : 2$.

V obr. 205 je Lissajousova křivka tvaru

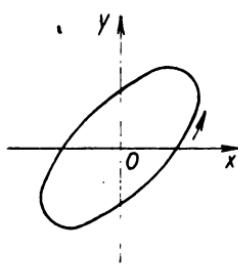
$$x = a \sin(2\omega t), \\ y = a \sin(3\omega t),$$

tj. při $\omega_1 : \omega_2 = 2 : 3$.



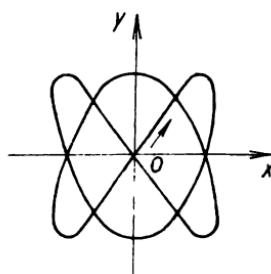
Obr. 204. Lissajousova křivka

$$x = a \sin(\omega t), \\ y = a \sin(2\omega t - \pi/4), \\ \omega_1 : \omega_2 = 1 : 2$$



Obr. 203. Lissajousova křivka

$$x = a \sin(\omega t), \\ y = a \sin(\omega t - \pi/3), \\ \omega_1 : \omega_2 = 1 : 1$$

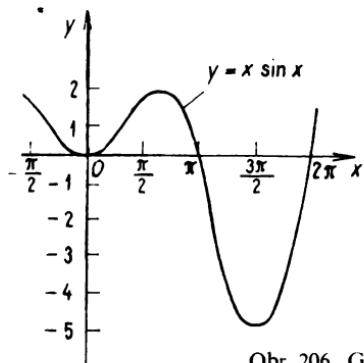


Obr. 205. Lissajousova křivka

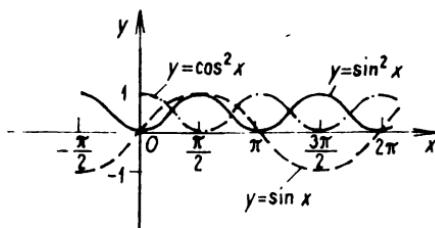
$$x = a \sin(2\omega t), \\ y = a \sin(3\omega t), \\ \omega_1 : \omega_2 = 2 : 3$$

Součiny se sinusoidálními funkcemi:

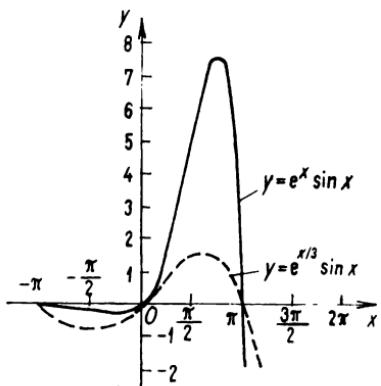
V obr. 206 je graf funkce $y = x \sin x$, v obr. 207 jsou grafy druhých mocnin funkcí sinus a kosiinus a v obrázcích 208 a 209 jsou grafy součinů exponenciální funkce a funkce sinus.



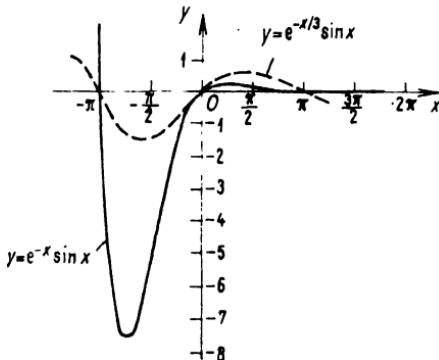
Obr. 206. Graf funkce $y = x \sin x$



Obr. 207. Grafy funkcií $y = \sin^2 x$
a $y = \cos^2 x$



Obr. 208. Grafy funkcií $y = e^x \sin x$
a $y = e^{x/3} \sin x$



Obr. 209. Grafy funkcií $y = e^{-x} \sin x$
a $y = e^{-x/3} \sin x$

Průvodičový diagram pro sinusoidální funkce
[harmonické funkce]

Sinusoidální funkce tvaru

$$f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y = a \sin(x + \varphi)\}$$

lze symbolicky vyjádřit pomocí obíhajícího průvodiče (obr. 210), přičemž

a je délka průvodiče.

$\frac{x}{t} = \omega$ – úhlová rychlosť (t je doba obiháni).

φ – fázový posun [počáteční fáze, nulový fázový úhel] vzhledem k promítací ose při $x = 0$ (popř. $t = 0$).

V elektrotechnice je

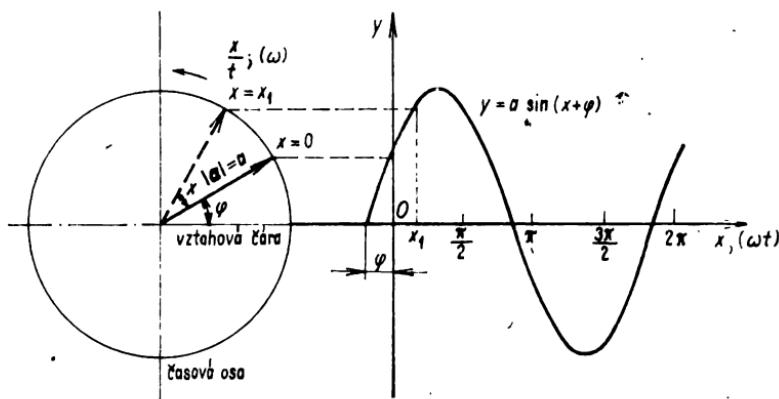
$$x = \omega t = \frac{t}{T},$$

kde ω je kruhová frekvence,

T – perioda [doba kmitu].

φ – počáteční fáze [fázová poloha, fáze].

Fyzikálně reálnou okamžitou hodnotu dostaneme jako průměr průvodiče vektoru do roviny kolmo k promítací ose.



Obr. 210. Průvodičový diagram pro funkci $y = a \sin(x + \varphi)$

Protože se u průvodičového diagramu předpokládá sinusoidální průběh s $x/t = \omega = \text{konst}$, charakterizují proměnné a a φ funkci, již vyhovuje konstantní průvodiče, které také dostaneme, jestliže časovou osu, kolmou k promítací ose necháme obihat v opačném smyslu. Třebaže tyto konstantní průvodiče lze považovat za vektory, liší se na základě své definice.

V průvodičovém diagramu lze dva průvodiče sčítat jako vektory. Součet průvodičů znázorňuje fyzikální, popř. geometrickou realitu součtu $y = y_1 + y_2$ okamžitých hodnot jako při skalárním sčítání souřadnic vektoru (obr. 211).

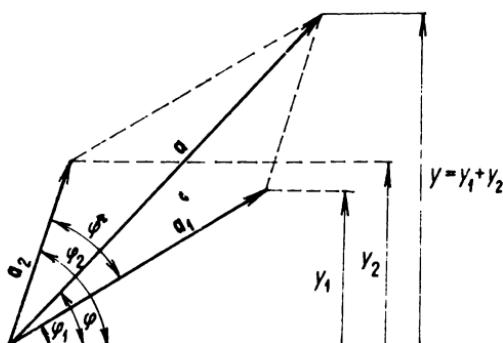
Jeho velikost a polohu vzhledem k promírací ose (tj. počáteční fázi) lze zjistit z průvodičového diagramu. Jeho úhlová rychlosť se rovná úhlové rychlosti obou průvodičů. Platí

$$\begin{aligned}y_1 &= a_1 \sin(x + \varphi_1), \\y_2 &= a_2 \sin(x + \varphi_2), \\y &= y_1 + y_2 = a \sin(x + \varphi).\end{aligned}$$

kde

$$a = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}.$$



Obr. 211. Součet průvodičů

Je třeba ocenit jednoduchost sčítání průvodičů v porovnání s analytickým řešením. Případná nepřesnost konstrukce má často podřadný význam.

3.4.2. Goniometrické rovnice

Definice:

Goniometrickými rovnicemi nazýváme rovnice, které kromě konstant obsahují neznámou x nebo výrazy s neznámou x jako argumenty jedné nebo několika goniometrických funkcí, tj. rovnice tvaru

$$f(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x, x) = 0.$$

Základní goniometrickou rovinici s neznámou x nazýváme rovnici typu $g(x) = k$, kde g je goniometrická funkce a k je reálné číslo.

Vzhledem k periodičnosti goniometrických funkcí má každá základní

goniometrická rovnice buď prázdný, nebo nekonečný obor pravdivosti. Zpravidla hledáme jen řešení z intervalu $\langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$ neboli $\langle 0 \text{ rad}, 2\pi \text{ rad} \rangle$, tj. hledáme tzv. *základní hodnoty*.

Početní způsob řešení

Pomocí goniometrických vzorců převedeme goniometrické funkce s případnými různými argumenty na funkce s týmž argumentem. Potom případné různé goniometrické funkce vyjádříme jedinou goniometrickou funkcí. Získané řešení je třeba vždy ověřit dosazením do výchozí rovnice, neboť úpravy rovnic nemusely být ekvivalentní.

Příklad 1:

Určeme množinu $\{x \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle \mid \sin(2x) = \sin x\}$.

Podle vzorce pro $\sin(2x)$ je

$$2 \sin x \cos x = \sin x,$$

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0.$$

Z poslední rovnice lze vytknout $\sin x$:

$$(\sin x)(2 \cos x - 1) = 0;$$

$\sin x = 0$ dává základní hodnoty

$$x_1 = 0^\circ, \quad x_2 = 180^\circ, \quad x_3 = 360^\circ;$$

$2 \cos x - 1 = 0$, odkud $\cos x = \frac{1}{2}$ dává základní hodnoty

$$x_4 = 60^\circ, \quad x_5 = 300^\circ.$$

Zkouška ukazuje, že všechna nalezená řešení splňují danou rovnici, takže obor pravdivosti

$$P = \{0^\circ, 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ, 360^\circ\}.$$

Příklad 2 (kvadratický typ):

Určeme množinu $\{x \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle \mid 17 \sin^2 x - 3 \cos^2 x = 2\}$.

$$17 \sin^2 x - 3(1 - \sin^2 x) = 2,$$

$$20 \sin^2 x = 5,$$

$$(\sin x)_{1,2} = \pm \frac{1}{2};$$

$(\sin x)_1 = \frac{1}{2}$ dává základní hodnoty

$$x_1 = 30^\circ, \quad x_2 = 150^\circ;$$

$(\sin x)_2 = -\frac{1}{2}$ dává základní hodnoty

$$x_3 = 210^\circ, \quad x_4 = 330^\circ.$$

Všechna uvedená řešení splňují danou rovnici, takže obor pravdivosti

$$P = \{30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ\}.$$

Příklad 3:

Určeme množinu $\{x \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle \mid 2 \sin x + \cos x = 2\}$.

Postup řešení 1:

$$\cos x = 2 - 2 \sin x;$$

po umocnění dvěma je

$$\cos^2 x = 4 - 8 \sin x + 4 \sin^2 x,$$

$$1 - \sin^2 x = 4 - 8 \sin x + 4 \sin^2 x,$$

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{4}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{16}{25}\right) - \left(\frac{15}{25}\right)} = \frac{4}{5} \pm \frac{1}{5};$$

$(\sin x)_1 = 1$ dává základní hodnotu

$$x_1 = 90^\circ;$$

$(\sin x)_2 = \frac{3}{5}$ dává základní hodnoty

$$x_2 = 36^\circ 52', \quad x_3 = 143^\circ 8'.$$

Zkouškou se zjistí, že z nalezených řešení pouze řešení x_3 nesplňuje danou rovnici, takže obor pravdivosti

$$P = \{90^\circ, 36^\circ 52'\}.$$

Postup řešení 2:

Metoda pomocného úhlu

Pro danou rovnici typu $a \sin x + b \cos x = c$ použijeme substituce $\operatorname{tg} z = -b/a$.

$$2 \sin x + \cos x = 2 \Rightarrow \sin x + \frac{1}{2} \cos x = 1.$$

Po substituci $\operatorname{tg} z = \frac{1}{2} \Rightarrow z = 26^\circ 34'$ dostaneme

$$\sin x + \operatorname{tg} z \cos x = 1,$$

$$\sin x + \frac{\sin z}{\cos z} \cos x = 1,$$

$$\sin x \cos z + \sin z \cos x = \cos z,$$

$$\sin(x+z) = \cos z = \cos 26^\circ 34' \doteq 0,8944,$$

$$(x+z)_1 = 63^\circ 26' \text{ dává } x_1 = 36^\circ 52',$$

$$(x+z)_2 = 116^\circ 34' \text{ dává } x_2 = 90^\circ.$$

Příklad 4:

Určeme množinu $\{x \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle \mid \sin(2x) = \operatorname{tg} x\}$.

$$2 \sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$2 \sin x \cos^2 x - \sin x = 0,$$

$$(2 \cos^2 x - 1) \sin x = 0;$$

$\sin x = 0$ dává základní hodnoty

$$x_1 = 0^\circ, \quad x_2 = 180^\circ, \quad x_3 = 360^\circ;$$

$$2 \cos^2 x - 1 = 0,$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2};$$

$(\cos x)_{1,2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dává základní hodnoty

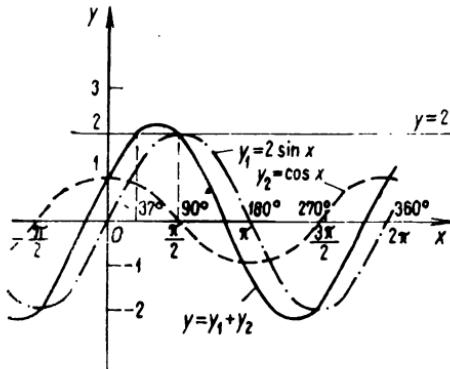
$$x_4 = 45^\circ, \quad x_5 = 135^\circ, \quad x_6 = 225^\circ, \quad x_7 = 315^\circ.$$

Všechna nalezená řešení splňují danou rovnici, takže obor pravdivosti

$$P = \{0^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 315^\circ, 360^\circ\}.$$

Grafický způsob řešení

Upravíme danou rovnici na tvar $\varphi(x) = \psi(x)$ a pro $\forall x \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$ sestrojíme grafy funkcí $y = \varphi(x)$ a $y = \psi(x)$. Řešeními (základními hodnotami) jsou první souřadnice průsečíků těchto grafů.



Obr. 212. Grafické řešení rovnice
 $2 \sin x + \cos x = 2$

Příklad 5:

Obor pravdivosti $P = \{36^\circ 52', 90^\circ\}$ příslušný k množině

$$\{x \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle \mid 2 \sin x + \cos x = 2\}$$

je zřejmý z grafického řešení na obr. 212 a z početního řešení příkladu 3.

3.4.3. Cyklometrické funkce

Cyklometrickými funkcemi nazýváme inverzní funkce ke goniometrickým funkcím. Protože goniometrické funkce jsou ryze monotónní jen na určitých intervalech, existují inverzní funkce jen na těchto intervalech. Funkce *arkussinus*

$$f_1 = \{[x, y] \mid y = \arcsin x, x \in \langle -1, 1 \rangle, y \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle\}$$

je inverzní funkcí k funkci sin na intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, funkce *arkuskosinus*

$$f_2 = \{[x, y] \mid y = \arccos x, x \in \langle -1, 1 \rangle, y \in \langle 0, \pi \rangle\}$$

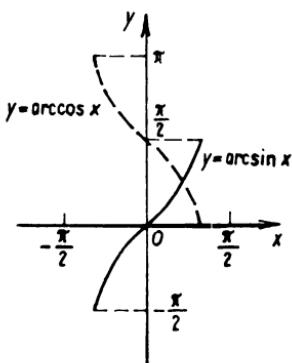
je inverzní funkcí k funkci cos na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, funkce *arkustangens*

$$f_3 = \{[x, y] \mid y = \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}, y \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)\}$$

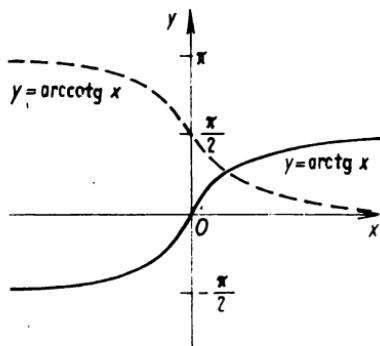
je inverzní funkcí k funkci tg na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a funkce *arkuskotangens*

$$f_4 = \{[x, y] \mid y = \operatorname{arcotg} x, x \in \mathbb{R}, y \in (0, \pi)\}$$

je inverzní funkcí k funkci cotg na intervalu $(0, \pi)$.



Obr. 213. Funkce arkussinus
a arkuskosinus



Obr. 214. Funkce arkustangens
a arkuskotangens

Grafy cyklometrických funkcí lze pomocí osové souměrnosti s osou $y = x$ sestrojit z grafů goniometrických funkcí na intervalech, kde jsou ryze monotónní a které obsahují počátek O (obr. 213 a 214).

Vyjádření cyklometrické funkce pomocí jiné cyklometrické funkce stejného argumentu

$$\arcsin x = \frac{1}{2}\pi - \arccos x \quad (|x| \leq 1),$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}} \quad (|x| < 1),$$

$$\arccos x = \frac{1}{2}\pi - \arcsin x \quad (|x| \leq 1),$$

$$= \operatorname{arccotg} \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}} \quad (|x| < 1),$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arccotg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}},$$

$$\operatorname{arccotg} x = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}},$$

$$\operatorname{arccotg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \quad (x > 0),$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \pi \quad (x < 0).$$

Cyklotrické funkce vzájemně opačných argumentů

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad (|x| \leq 1),$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x \quad (|x| \leq 1),$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,$$

$$\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x.$$

Součty a rozdíly cyklometrických funkcí

$$\arcsin x_1 + \arcsin x_2 = \arcsin [x_1 \sqrt{(1-x_2^2)} + x_2 \sqrt{(1-x_1^2)}]$$

$$(x_1 x_2 \leq 0 \text{ nebo } x_1^2 + x_2^2 \leq 1),$$

$$= \pi - \arcsin [x_1 \sqrt{(1-x_2^2)} + x_2 \sqrt{(1-x_1^2)}] \quad (x_1 > 0, x_2 > 0, x_1^2 + x_2^2 > 1),$$

$$= -\pi - \arcsin [x_1 \sqrt{(1-x_2^2)} + x_2 \sqrt{(1-x_1^2)}] \quad (x_1 < 0, x_2 < 0, x_1^2 + x_2^2 > 1),$$

$$\arcsin x_1 - \arcsin x_2 =$$

$$= \arcsin [x_1 \sqrt{(1-x_2^2)} - x_2 \sqrt{(1-x_1^2)}] \quad (x_1 x_2 \geq 0 \text{ nebo } x_1^2 + x_2^2 \leq 1),$$

$$= \pi - \arcsin [x_1 \sqrt{(1-x_2^2)} - x_2 \sqrt{(1-x_1^2)}] \quad (x_1 > 0, x_2 < 0, x_1^2 + x_2^2 > 1),$$

$$= -\pi - \arcsin [x_1 \sqrt{(1-x_2^2)} - x_2 \sqrt{(1-x_1^2)}] \quad (x_1 < 0, x_2 > 0, x_1^2 + x_2^2 > 1),$$

$$\begin{aligned}\arccos x_1 + \arccos x_2 &= \\ &= \arccos \{x_1 x_2 - [\sqrt{(1-x_1^2)}] \sqrt{(1-x_2^2)}\} \quad (x_1 + x_2 \geq 0), \\ &= 2\pi - \arccos \{x_1 x_2 - [\sqrt{(1-x_1^2)}] \sqrt{(1-x_2^2)}\} \quad (x_1 + x_2 < 0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arccos x_1 - \arccos x_2 &= \\ &= -\arccos \{x_1 x_2 + [\sqrt{(1-x_1^2)}] \sqrt{(1-x_2^2)}\} \quad (x_1 \geq x_2), \\ &= \arccos \{x_1 x_2 + [\sqrt{(1-x_1^2)}] \sqrt{(1-x_2^2)}\} \quad (x_1 < x_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 &= \\ &= \operatorname{arctg} \frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2} \quad (x_1 x_2 < 1), \\ &= \pi + \operatorname{arctg} \frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2} \quad (x_1 > 0, x_1 x_2 > 1), \\ &= -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2} \quad (x_1 < 0, x_1 x_2 > 1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2 &= \\ &= \operatorname{arctg} \frac{x_1 - x_2}{1 + x_1 x_2} \quad (x_1 x_2 > -1), \\ &= \pi + \operatorname{arctg} \frac{x_1 - x_2}{1 + x_1 x_2} \quad (x_1 > 0, x_1 x_2 < -1), \\ &= -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x_1 - x_2}{1 + x_1 x_2} \quad (x_1 < 0, x_1 x_2 < -1),\end{aligned}$$

$$\operatorname{arccotg} x_1 + \operatorname{arccotg} x_2 = \operatorname{arccotg} \frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 + x_2} \quad (x_1 > -x_2),$$

$$\operatorname{arccotg} x_1 + \operatorname{arccotg} x_2 = \operatorname{arccotg} \frac{x_1 x_2 - 1}{x_2 + x_1} + \pi \quad (x_1 < -x_2).$$

Vztahy mezi cyklometrickými funkcemi a logaritmickou funkcí

$$\operatorname{arcsin} x = -i \ln [ix + \sqrt{(1-x^2)}],$$

$$\operatorname{arccos} x = -i \ln [x + \sqrt{(x^2-1)}],$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+ix}{1-ix},$$

$$\operatorname{arccotg} x = -\frac{1}{2i} \ln \frac{ix+1}{ix-1}.$$

3.4.4. Hyperbolické funkce

Definice:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (x \neq 0).$$

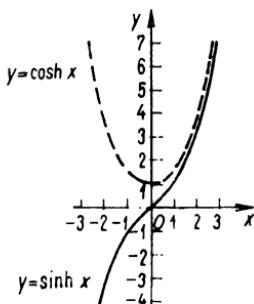
Grafy hyperbolických funkcí (obr. 215 a 216)

$$f_1 = \{[x, y] \mid y = \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}\},$$

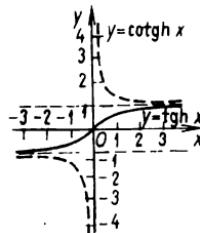
$$f_2 = \{[x, y] \mid y = \cosh x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in [1, +\infty)\},$$

$$f_3 = \{[x, y] \mid y = \operatorname{tgh} x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in (-1, 1)\},$$

$$f_4 = \{[x, y] \mid y = \operatorname{cotgh} x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\}.$$



Obr. 215. Funkce hyperbolický sinus
a hyperbolický kosinus



Obr. 216. Funkce hyperbolický tangens
a hyperbolický kotangens

Periodičnost hyperbolických funkcí ($k \in \mathbb{Z}$)

$$y = \sinh(x + 2k\pi i) = \sinh x,$$

$$y = \cosh(x + 2k\pi i) = \cosh x,$$

$$y = \operatorname{tgh}(x + k\pi i) = \operatorname{tgh} x,$$

$$y = \operatorname{cotgh}(x + k\pi i) = \operatorname{cotgh} x.$$

Hodnoty ve význačných bodech

$$\sinh 0 = 0,$$

$$\cosh 0 = 1,$$

$$\operatorname{tgh} 0 = 0.$$

Pro $x = 0$ není funkce cotgh definována; v bodě $x = 0$ se její limita zprava, resp. zleva rovná $+\infty$, resp. $-\infty$.

Hyperbolické funkce vzájemně opačných argumentů

$$\sinh(-x) = -\sinh x,$$

$$\cosh(-x) = \cosh x,$$

$$\operatorname{tgh}(-x) = -\operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{cotgh}(-x) = -\operatorname{cotg} x.$$

Vztahy mezi hyperbolickými funkcemi stejného argumentu

$$\sinh x + \cosh x = e^x,$$

$$\sinh x - \cosh x = -e^{-x};$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x};$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x};$$

$$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad \operatorname{cotgh}^2 x - 1 = \frac{1}{\sinh^2 x}.$$

Tabulka 3.7

Vyjádření hyperbolické funkce pomocí jiné hyperbolické funkce stejného argumentu

		Daná funkce		
Hledaná funkce	\sinh	\cosh	tgh	cotgh
$ \sinh x $	-	$\sqrt{(\cosh^2 x - 1)}$	$\frac{ \operatorname{tgh} x }{\sqrt{(1 - \operatorname{tgh}^2 x)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(\operatorname{cotgh}^2 x - 1)}}$
$\cosh x$	$\sqrt{(\sinh^2 x + 1)}$	-	$\frac{1}{\sqrt{(1 - \operatorname{tgh}^2 x)}}$	$\frac{ \operatorname{cotgh} x }{\sqrt{(\operatorname{cotgh}^2 x - 1)}}$
$ \operatorname{tgh} x $	$\frac{ \sinh x }{\sqrt{(\sinh^2 x + 1)}}$	$\frac{\sqrt{(\cosh^2 x - 1)}}{\cosh x}$	-	$\frac{1}{ \operatorname{cotgh} x }$
$ \operatorname{cotgh} x $	$\frac{\sqrt{(\sinh^2 x + 1)}}{ \sinh x }$	$\frac{\cosh x}{\sqrt{(\cosh^2 x - 1)}}$	$\frac{1}{ \operatorname{tgh} x }$	-

Hyperbolické funkce součtu a rozdílu dvou argumentů

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y,$$

$$\tgh(x \pm y) = \frac{\tgh x \pm \tgh y}{1 \pm \tgh x \tgh y},$$

$$\cotgh(x \pm y) = \frac{1 \pm \cotgh x \cotgh y}{\cotgh x \pm \cotgh y}.$$

Hyperbolické funkce dvojnásobku argumentu

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x,$$

$$\cosh(2x) = \sinh^2 x + \cosh^2 x,$$

$$\tgh(2x) = \frac{2 \tgh x}{1 + \tgh^2 x},$$

$$\cotgh(2x) = \frac{1 + \cotgh^2 x}{2 \cotgh x}.$$

Hyperbolické funkce dalších násobků argumentu

$$\sinh(3x) = \sinh x (4 \cosh^2 x - 1),$$

$$\sinh(4x) = \sinh x \cosh x (8 \cosh^2 x - 1)$$

$$\sinh(5x) = \sinh x (1 - 12 \cosh^2 x + 16 \cosh^4 x)$$

$$\cosh(3x) = \cosh x (14 \cosh^2 x - 3),$$

$$\cosh(4x) = 1 - 8 \cosh^2 x + 8 \cosh^4 x,$$

$$\cosh(5x) = \cosh x (5 - 20 \cosh^2 x + 16 \cosh^4 x).$$

$$\begin{aligned}\sinh(nx) &= \binom{n}{1} \cosh^{n-1} x \sinh x + \binom{n}{3} \cosh^{n-3} x \sinh^3 x + \\ &\quad + \binom{n}{5} \cosh^{n-5} x \sinh^5 x + \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cosh(nx) &= \cosh^n x + \binom{n}{2} \cosh^{n-2} x \sinh^2 x + \\ &\quad + \binom{n}{4} \cosh^{n-4} x \sinh^4 x + \dots.\end{aligned}$$

Hyperbolické funkce polovičního argumentu

$$\begin{aligned} \left| \sinh \frac{x}{2} \right| &= \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}} = \frac{|\sinh x|}{\sqrt{[2(\cosh x + 1)]}}, \\ \cosh \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}} = \frac{|\sinh x|}{\sqrt{[2(\cosh x - 1)]}}, \\ \tgh \frac{x}{2} &= \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x}, \\ \left| \tgh \frac{x}{2} \right| &= \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}, \\ \cotgh \frac{x}{2} &= \frac{\sinh x}{\cosh x - 1} = \frac{\cosh x + 1}{\sinh x}, \\ \left| \cotgh \frac{x}{2} \right| &= \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{\cosh x - 1}}. \end{aligned}$$

Mocniny hyperbolických funkcí

$$\begin{aligned} \sinh^2 x &= \frac{1}{2}[\cosh(2x) - 1], \\ \cosh^2 x &= \frac{1}{2}[\cosh(2x) + 1]. \\ \sinh^3 x &= \frac{1}{4}[-3 \sinh x + \sinh(3x)], \\ \cosh^3 x &= \frac{1}{4}[3 \cosh x + \cosh(3x)], \\ \sinh^4 x &= \frac{1}{8}[3 - 4 \cosh(2x) + \cosh(4x)], \\ \cosh^4 x &= \frac{1}{8}[3 + 4 \cosh(2x) + \cosh(4x)], \\ \sinh^5 x &= \frac{1}{16}[10 \sinh x - 5 \sinh(3x) + \sinh(5x)], \\ \cosh^5 x &= \frac{1}{16}[10 \cosh x + 5 \cosh(3x) + \cosh(5x)], \\ \sinh^6 x &= \frac{1}{32}[-10 + 15 \cosh(2x) - 6 \cosh(4x) + \cosh(6x)], \\ \cosh^6 x &= \frac{1}{32}[10 + 15 \cosh(2x) + 6 \cosh(4x) + \cosh(6x)]. \end{aligned}$$

Součty a rozdíly hyperbolických funkcí

$$\sinh x \pm \sinh y = 2 \sinh \frac{x \mp y}{2} \cosh \frac{x \mp y}{2},$$

$$\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2},$$

$$\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tgh} x \pm \operatorname{tgh} y &= \frac{\sinh(x \pm y)}{\cosh x \cosh y}, \\ \operatorname{cotgh} x + \operatorname{cotgh} y &= \frac{\sinh(x+y)}{\sinh x \sinh y}, \\ \operatorname{cotgh} x - \operatorname{cotgh} y &= \frac{\sinh(y-x)}{\sinh x \sinh y}.\end{aligned}$$

Moivrovovy vzorce

$$\begin{aligned}(\sinh x + \cosh x)^n &= \sinh(nx) + \cosh(nx), \\ (\cosh x - \sinh x)^n &= \cosh(nx) - \sinh(nx).\end{aligned}$$

Součiny hyperbolických funkcí

$$\begin{aligned}\sinh x \sinh y &= \frac{1}{2}[\cosh(x+y) - \cosh(x-y)], \\ \cosh x \cosh y &= \frac{1}{2}[\cosh(x+y) + \cosh(x-y)], \\ \sinh x \cosh y &= \frac{1}{2}[\sinh(x+y) + \sinh(x-y)], \\ \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y &= \frac{\operatorname{tgh} x + \operatorname{tgh} y}{\operatorname{cotgh} x + \operatorname{cotgh} y}.\end{aligned}$$

Vztahy mezi hyperbolickými funkcemi a exponenciální funkcí

$$\sinh x + \cosh x = e^x, \quad \sinh x - \cosh x = -e^{-x},$$

$$e^x = \frac{1 + \operatorname{tgh} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tgh} \frac{x}{2}}$$

(další vzorce viz v definicích hyperbolických funkcí na začátku článku 3.4.4).

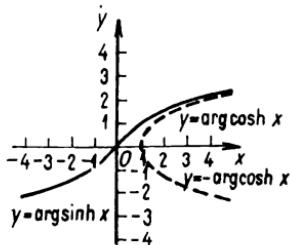
Goniometrické a hyperbolické funkce imaginárního a komplexního argumentu

$$\begin{aligned}\cosh(ix) &= \cos x, & \cosh x &= \cos(ix), \\ \sinh(ix) &= i \sin x, & \sinh x &= -i \sin(ix), \\ \operatorname{tgh}(ix) &= i \operatorname{tg} x, & \operatorname{tgh} x &= -i \operatorname{tg}(ix), \\ \operatorname{cotgh}(ix) &= -i \operatorname{cotg} x, & \operatorname{cotgh} x &= i \operatorname{cotg}(ix), \\ \sin(x \pm iy) &= \sin x \cosh y \pm i \cos x \sinh y, \\ \cos(x \pm iy) &= \cos x \cosh y \mp i \sin x \sinh y,\end{aligned}$$

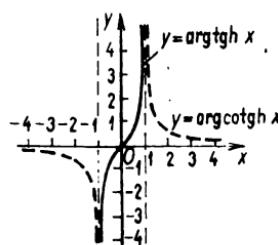
$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x \pm iy) &= \frac{\sin(2x) \pm i \sinh(2y)}{\cos(2x) + \cosh(2y)} = \frac{\sin(2x) \pm i \sinh(2y)}{2(\cos^2 x + \sinh^2 y)}, \\ \operatorname{cotg}(x \pm iy) &= \frac{\sin(2x) \mp i \sinh(2y)}{2(\sin^2 x + \sinh^2 y)} = -\frac{\sin(2x) \mp i \sinh(2y)}{\cos(2x) - \cosh(2y)}, \\ \sinh(x \pm iy) &= \sinh x \cos y \pm i \cosh x \sin y, \\ \cosh(x \pm iy) &= \cosh x \cos y \pm i \sinh x \sin y, \\ \operatorname{tgh}(x \pm iy) &= \frac{\sinh(2x) \pm i \sin(2y)}{\cosh(2x) + \cos(2y)}, \\ \operatorname{cotgh}(x \pm iy) &= \frac{\sinh(2x) \mp i \sin(2y)}{\cosh(2x) - \cos(2y)}.\end{aligned}$$

3.4.5. Hyperbolometrické funkce

Hyperbolometrickými funkcemi (reálné proměnné) $\operatorname{argsinh}$ (argument hyperbolického sinu), $\operatorname{argcosh}$ (argument hyperbolického kosinu), argtgh (argument hyperbolického tangens) a $\operatorname{argcotgh}$ (argument hyperbolického kotangens) nazýváme inverzní funkce po řadě k hyperbolickým funkcím \sinh , \cosh , tgh a cotgh .



Obr. 217. Funkce argument hyperbolického sinu a argument hyperbolického kosinu



Obr. 218. Funkce argument hyperbolického tangens a argument hyperbolického kotangens

Grafy hyperbolometrických funkcí (obr. 217 a 218)

- $$\begin{aligned}f_1 &= \{[x, y] \mid y = \operatorname{argsinh} x, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, \\ f_2 &= \{[x, y] \mid y = \operatorname{argcosh} x, \quad x \in \langle 1, +\infty \rangle, y \in \langle 0, +\infty \rangle\}, \\ f_3 &= \{[x, y] \mid y = \operatorname{argtgh} x, \quad x \in (-1, 1), y \in \mathbb{R}\}, \\ f_4 &= \{[x, y] \mid y = \operatorname{argcotgh} x, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.\end{aligned}$$

Vyjádření hyperbolometrické funkce pomocí jiné hyperbolometrické funkce

$$\begin{aligned}\operatorname{argsinh} x &= \operatorname{argcosh} \sqrt{(x^2 + 1)} \quad (x \geq 0), \\ &= -\operatorname{argcosh} \sqrt{(x^2 + 1)} \quad (x < 0), \\ &= \operatorname{argtgh} \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)}}, \\ &= \operatorname{argcotgh} \frac{\sqrt{(x^2 + 1)}}{x} \quad (x \neq 0);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{argcosh} x &= \operatorname{argsinh} \sqrt{(x^2 - 1)} \quad (x \geq 1), \\ &= \operatorname{argtgh} \frac{\sqrt{(x^2 - 1)}}{x} \quad (x \geq 1), \\ &= \operatorname{argcotg} \frac{x}{\sqrt{(x^2 - 1)}} \quad (x > 1);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{argtgh} x &= \operatorname{argsinh} \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)}} \quad (-1 < x < 1), \\ &= \operatorname{argcosh} \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}} \quad (0 \leq x < 1), \\ &= -\operatorname{argcosh} \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}} \quad (-1 < x \leq 0), \\ &= \operatorname{argcotgh} \frac{1}{x} \quad (-1 < x < 1, x \neq 0);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{argcotgh} x &= \operatorname{argsinh} \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)}} \quad (x > 1), \\ &= -\operatorname{argsinh} \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)}} \quad (x < -1), \\ &= \operatorname{argcosh} \frac{x}{\sqrt{(x^2 - 1)}} \quad (x > 1), \\ &= \operatorname{argtgh} \frac{1}{x} \quad (|x| > 1).\end{aligned}$$

Součty a rozdíly hyperbolometrických funkcí

$$\begin{aligned}\operatorname{argsinh} x \pm \operatorname{argsinh} y &= \operatorname{argsinh} [x\sqrt{(1+y^2)} \pm y\sqrt{(1+x^2)}], \\ |\operatorname{argcosh} x \pm \operatorname{argcosh} y| &= \operatorname{argcosh} \{xy \pm \sqrt{[(x^2-1)(y^2-1)]}\} \\ &\quad (x \geq 1, y \geq 1),\end{aligned}$$

$$\operatorname{artgth} x \pm \operatorname{artgth} y = \operatorname{artgth} \frac{x \pm y}{1 \pm xy} \quad (|x| < 1, |y| < 1).$$

Hyperbolometrické funkce imaginárního argumentu

$$\begin{aligned}\operatorname{argsinh}(ix) &= i \arcsin x, \\ \operatorname{argcosh}(ix) &= i \arccos x, \\ \operatorname{artgth}(ix) &= i \operatorname{arctg} x, \\ \operatorname{arcotgh}(ix) &= -i \operatorname{arccotg} x.\end{aligned}$$

Vztahy mezi hyperbolometrickými funkcemi a přirozeným logaritmem

$$\begin{aligned}\operatorname{argsinh} x &= \ln [x + \sqrt{(x^2 + 1)}], \\ \operatorname{argcosh} x &= \ln [x + \sqrt{(x^2 - 1)}] \quad (x \geq 1), \\ \operatorname{artgth} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1), \\ \operatorname{arcotgh} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad (|x| > 1).\end{aligned}$$

3.5. SFÉRICKÁ TRIGONOMETRIE

3.5.1. Základní pojmy

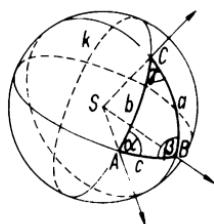
Hlavní kružnice kulové plochy [sféry] nazýváme průnik kulové plochy a roviny procházející středem kulové plochy.

Vedlejší kružnice kulové plochy [sféry] nazýváme neprázdný průnik kulové plochy a roviny neprocházející středem kulové plochy.

Sférickou vzdáleností bodů A, B kulové plochy, které neleží na téžme průměru, nazýváme délku menšího oblouku z oblouků hlavní kružnice procházející body A, B. Sférická vzdálenost protějších bodů kulové plochy se rovná polovině délky hlavní kružnice.

Sférickým dvojúhelníkem nazýváme část kulové plochy ohraničenou oblouky dvou různých hlavních kružnic.

Sférickým trojúhelníkem nazýváme část kulové plochy ohraničenou takovými oblouky (stranami sférického trojúhelníku) tří různých hlavních kružnic, které spojují tři body A, B, C kulové plochy (body A, B, C neleží na téže hlavní kružnici) a které se kromě bodů A, B, C neprotínají. Jestliže se délky všech stran sférického trojúhelníku rovnají sférickým vzdálenostem, pak tento sférický trojúhelník nazýváme Eulerovým trojúhelníkem (obr. 219).



Obr. 219. Eulerův trojúhelník ABC

Úmluva:

V dalším textu budeme uvažovat jen Eulerovy trojúhelníky při poloměru $r = 1$ kulové plochy.

Stranami sférického trojúhelníku jsou oblouky hlavních kružnic, takže při $r = 1$ jsou přímo určeny velikostmi úhlů BSC, ASC a ASB polopřímek SA, SB a SC (S je střed kulové plochy) v obloukové míře. Mluvíme proto o *velikostech stran sférického trojúhelníku*.

Polopřímky, jejichž počátkem je střed S kulové plochy a vnitřními body jsou vrcholy A, B, C sférického trojúhelníku, tvoří tzv. základní trojhran $SABC$.

Velikosti α, β, γ úhlů sférického trojúhelníku ABC se rovnají odchylkám stěn základního trojhranu $SABC$.

Označení vrcholů a velikostí stran a úhlů sférického trojúhelníku odpovídá označení u rovinného trojúhelníku. Prvky $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ se nazývají základní prvky sférického trojúhelníku.

Polární trojhran $S'A'B'C'$ má hrany kolmé k stěnám základního trojhranu $SABC$ a určuje na kulové ploše Eulerův polární trojúhelník $A'B'C'$.

Podmínky pro velikosti stran a úhlů sférického trojúhelníku

$$0 < a + b + c < 2\pi,$$

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi.$$

Platí $a > b$, resp. $a = b$, resp. $a < b$, právě když $\alpha > \beta$, resp. $\alpha = \beta$, resp. $\alpha < \beta$.

Platí $a + b > \pi$, resp. $a + b = \pi$, resp. $a + b < \pi$, právě když $\alpha + \beta > \pi$, resp. $\alpha + \beta = \pi$, resp. $\alpha + \beta < \pi$.

Obdobné vztahy platí také pro ostatní strany a úhly.

Číslo

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

se nazývá *sférický exces* [*sférický nadbytek*].

Číslo

$$d = 2\pi - (a + b + c)$$

se nazývá *sférický defekt*.

Velikosti stran a úhlů polárního trojúhelníku

Velikosti stran polárního trojúhelníku $A'B'C'$ jsou

$$a' = \pi - \alpha, \quad b' = \pi - \beta, \quad c' = \pi - \gamma$$

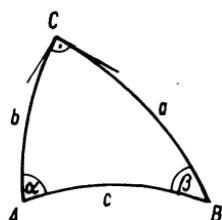
a velikosti jeho úhlů jsou

$$\alpha' = \pi - a, \quad \beta' = \pi - b, \quad \gamma' = \pi - c.$$

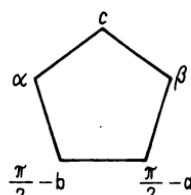
Nahradíme-li tedy v kterémkoli vzorci velikosti stran velikostmi výplníků úhlů a velikosti úhlů velikostmi výplníků stran, dostaneme nový vzorec (např. výplněk úhlu o velikosti α má velikost $a' = \pi - \alpha$ a výplněk strany o velikosti a má velikost $\alpha' = \pi - a$).

3.5.2. Pravoúhlý sférický trojúhelník

Používá se téhož označení jako u rovinného pravoúhlého trojúhelníku [tj. při $\gamma = \frac{1}{2}\pi$ znaky a, b znamenají velikosti odvesen a znak c velikost přepony (obr. 220)].



Obr. 220. Pravoúhlý sférický trojúhelník



Obr. 221. Schéma k Neprerovu pravidlu

Neperovo pravidlo pro pravoúhlý sférický trojúhelník

Jestliže velikost c přepony, velikosti α, β úhlů a velikosti $\frac{1}{2}\pi - a, \frac{1}{2}\pi - b$ doplňků stran po řadě o velikostech a, b napíšeme k vrcholům pětiúhelníku v pořadí zřejmém z obr. 221, pak kosinus libovolného prvku se rovná součinu sinů dvou protilehlých prvků nebo součinu kotangent dvou sousedních prvků.

Podle Neperova pravidla lze základní prvky pravoúhlého sférického trojúhelníku vypočítat ze dvou daných prvků pomocí vzorců

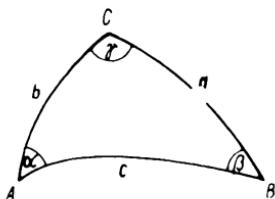
$$\begin{aligned}\sin a &= \sin \alpha \sin c, \\ \sin a &= \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} \beta, \\ \sin b &= \sin c \sin \beta, \\ \sin b &= \operatorname{tg} a \operatorname{cotg} \alpha, \\ \cos c &= \cos a \cos b, \\ \cos c &= \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta, \\ \cos \alpha &= \cos a \sin \beta, \\ \cos \alpha &= \operatorname{cotg} c \operatorname{tg} b, \\ \cos \beta &= \sin \alpha \cos b, \\ \cos \beta &= \operatorname{cotg} c \operatorname{tg} a.\end{aligned}$$

Sférický exces ε v pravoúhlém sférickém trojúhelníku

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} = \operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2}.$$

3.5.3. Kosoúhlý sférický trojúhelník (obr. 222)

Používáme téhož označení jako u rovinného kosoúhlého trojúhelníku (viz obr. 124).



Obr. 222. Kosoúhlý sférický trojúhelník

Sinová věta

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

Kosinová věta pro strany

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha, \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.\end{aligned}$$

Kosinová věta pro úhly

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a, \\ \cos \beta &= -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b, \\ \cos \gamma &= -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c.\end{aligned}$$

Věta o polovičních stranách sférického trojúhelníku

Pro $\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$ platí

$$\begin{aligned}\sin \frac{a}{2} &= \sqrt{\left(-\frac{\cos \sigma \cos (\sigma - \alpha)}{\sin \beta \sin \gamma}\right)}, \\ \cos \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}}, \\ \operatorname{tg} \frac{a}{2} &= \sqrt{\left(-\frac{\cos \sigma \cos (\sigma - \alpha)}{\cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}\right)}, \\ \cotg \frac{a}{2} &= \sqrt{\left(-\frac{\cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}{\cos \sigma \cos (\sigma - \alpha)}\right)}.\end{aligned}$$

Cyklickou záměnou dostaneme vzorce pro $b/2$ a $c/2$.

Věta o polovičních úhlech sférického trojúhelníku

Pro $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ platí

$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin b \sin c}}, \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - a)}{\sin b \sin c}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin s \sin (s - a)}}, \\ \cotg \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - a)}{\sin (s - b) \sin (s - c)}}.\end{aligned}$$

Cyklickou záměnou dostaneme vzorce pro $\beta/2$ a $\gamma/2$.

Gaussovy vzorce

$$\frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a - b}{2}}{\cos \frac{c}{2}},$$

$$\frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{a - b}{2}}{\sin \frac{c}{2}},$$

$$\frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a + b}{2}}{\cos \frac{c}{2}},$$

$$\frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{a + b}{2}}{\sin \frac{c}{2}}.$$

Cyklickou záměnou dostaneme dalších osm vzorců.

Neperovy analogie

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{a + b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{c}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}},$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{a - b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{c}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}},$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a - b}{2}}{\cos \frac{a + b}{2}},$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{a - b}{2}}{\sin \frac{a + b}{2}}.$$

Cyklickou záměnou dostaneme další vzorce.

Poloměr r kružnice opsané a poloměr ϱ kružnice vepsané sférickému trojúhelníku

Pro $\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$ a $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ platí

$$\operatorname{cotg} r = \sqrt{\left(-\frac{\cos(\sigma - \alpha) \cos(\sigma - \beta) \cos(\sigma - \gamma)}{\cos \sigma} \right)},$$

$$\operatorname{tg} \varrho = \sqrt{\frac{\sin(s - a) \sin(s - b) \sin(s - c)}{\sin s}},$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{cotg} r &= \operatorname{cotg} \frac{a}{2} \cos(\sigma - \alpha), \\ \operatorname{tg} \varrho &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sin(s - a) \end{aligned} \right\} \quad \text{(cyklickou záměnou dostaneme další vzorce).}$$

L'Huilierův vzorec

Pro $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ a sférický exces ε platí

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\left(\operatorname{tg} \frac{s-a}{2} \operatorname{tg} \frac{s-b}{2} \operatorname{tg} \frac{s-c}{2} \right)},$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \frac{s-b}{2} \operatorname{tg} \frac{s-c}{2}}{\operatorname{tg} \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{s-a}{2}}}.$$

Sférický defekt

Pro $\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$, $\sigma_1 = \sigma - \alpha$, $\sigma_2 = \sigma - \beta$ a $\sigma_3 = \sigma - \gamma$ a pro sférický defekt d platí

$$\operatorname{tg} \frac{d}{4} = \sqrt{\left[-\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \sigma \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma_1}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma_2}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma_3}{2} \right) \right]}.$$

Legendrova věta

Sférický trojúhelník o malých stranách lze nahradit rovinným trojúhelníkem, jehož velikosti úhlů jsou o třetinu sférického excesu menší než velikosti úhlů sférického trojúhelníku.

Obsah sférického trojúhelníku a sférického dvojúhelníku viz v článku 3.3.3

Řešení kosoúhlých sférických trojúhelníků

Základní úloha 1:

Jsou dány velikosti tří stran.

Způsob řešení 1:

Vypočteme velikost jednoho úhlu podle kosinové věty pro strany (např. α):

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

$$\sin \beta = \frac{\sin b \sin \alpha}{\sin a} \quad (\text{sinová věta}),$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin c \sin \alpha}{\sin a} \quad (\text{sinová věta}).$$

Způsob řešení 2:

Všechny velikosti úhlů vypočteme podle kosinové věty pro strany.

Způsob řešení 3:

Všechny velikosti úhlů vypočteme podle věty o polovičních úhlech, popř. velikost jednoho úhlu vypočteme podle věty o polovičních úhlech a velikosti ostatních úhlů vypočteme podle sinové věty jako v způsobu řešení 1.

Základní úloha 2:

Jsou dány velikosti dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného (např. b, c, α).

Způsob řešení 1:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \quad (\text{kosinová věta pro strany}),$$

$$\sin \beta = \frac{\sin b \sin \alpha}{\sin a} \quad (\text{sinová věta}),$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin c \sin \alpha}{\sin a} \quad (\text{sinová věta}).$$

Způsob řešení 2:

$$\operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\cos \frac{b - c}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{b + c}{2}} \quad (\text{Neperova analogie}),$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{\sin \frac{b - c}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{b + c}{2}} \quad (\text{Neperova analogie}).$$

Z $\frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ a $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ dostaneme oba úhly β a γ . Dále vypočteme

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{b + c}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2}}{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}} \quad (\text{Neperova analogie}).$$

Základní úloha 3:

Jsou dány velikosti dvou stran a velikost úhlu proti větší z nich (např. b, c, β ; $b > c$).

Řešení:

$$\sin \gamma = \frac{\sin c \sin \beta}{\sin b} \quad (\text{sinová věta}),$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{b+c}{2} \cos \frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}} \quad (\text{Neperova analogie}),$$

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2} \cos \frac{b+c}{2}}{\cos \frac{b-c}{2}} \quad (\text{Neperova analogie})$$

nebo úhel α vypočteme podle sinové věty.

Základní úloha 4:

Je dána velikost strany a velikosti obou k ní přilehlých úhlů (např. a, β, γ).

Způsob řešení 1:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \quad (\text{kosinová věta pro úhly}),$$

$$\sin b = \frac{\sin \beta \sin a}{\sin \alpha} \quad (\text{sinová věta}),$$

$$\sin c = \frac{\sin \gamma \sin a}{\sin \alpha} \quad (\text{sinová věta}).$$

Způsob řešení 2:

$$\operatorname{tg} \frac{b+c}{2} = \frac{\cos \frac{\beta-\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{\cos \frac{\beta+\gamma}{2}} \quad (\text{Neperova analogie}),$$

$$\operatorname{tg} \frac{b-c}{2} = \frac{\sin \frac{\beta-\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{\sin \frac{\beta+\gamma}{2}} \quad (\text{Neperova analogie}).$$

Z $\frac{1}{2}(b+c)$ a $\frac{1}{2}(b-c)$ dostaneme velikosti obou stran b a c . Dále vypočteme

$$\sin \alpha = \frac{\sin a \sin \beta}{\sin b} \quad (\text{sinová věta}).$$

Základní úloha 5:

Jsou dány tyto prvky: velikost strany, velikost přilehlého úhlu a velikost protilehlého úhlu (např. b , β , γ).

Řešení:

$$\sin c = \frac{\sin \gamma \sin b}{\sin \beta} \quad (\text{sinová věta}),$$

$$\tg \frac{a}{2} = \frac{\tg \frac{b+c}{2} \cos \frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}} \quad (\text{Neperova analogie}),$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin a \sin \beta}{\sin b} \quad (\text{sinová věta}).$$

Základní úloha 6:

Jsou dány velikosti tří úhlů.

Způsob řešení 1:

$$\cos a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} \quad (\text{kosinová věta pro úhel } a),$$

$$\sin b = \frac{\sin \beta \sin a}{\sin \alpha} \quad (\text{sinová věta}),$$

$$\sin c = \frac{\sin \gamma \sin a}{\sin \alpha} \quad (\text{sinová věta}).$$

Způsob řešení 2:

Velikost jedné strany vypočteme podle věty o polovičních stranách; dále postupuje se jako v způsobu řešení 1.

3.5.4. Matematický zeměpis

Důležité délky a délkové měřicí jednotky

Střední poloměr Země podle Hayforda z r. 1910 je $r_H = 6\,371,229$ km.

Přibližný poloměr referenční koule je $r = 6\,371,1$ km.

Délka hlavní poloosy zemského elipsoidu podle Krasovského z r. 1940 je $a = 6\,378,245$ km.

Délka zemského rovníku se podle Krasovského z r. 1940 rovná 40 075,695 km.

Délka oblouku hlavní kružnice (zemského rovníku) zemské sféry odpovídajícího jednomu stupni, resp. jedné minutě zeměpisné délky se přibližně rovná 111,3 km, resp. 1,852 km = 1 n mile (nautical mile neboli námořní míle).

1 zeměpisná míle = 4 n míle = 7,408 km.

1 námořní čárka kompasové růžice se rovná $11\frac{1}{4}^\circ$.

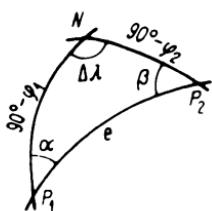
Souřadnicová soustava Země

První osou λ je rovník a druhou osou φ je nultý poledník (*greenwichský poledník*, čti: grynyčský).

Zeměpisné souřadnice

Zeměpisná délka λ se udává buď jako délka oblouku zemského rovníku mezi nultým a místním poledníkem, nebo jako odchylka roviny nultého poledníku a roviny místního poledníku, přičemž od 0° do 180° jde o kladnou odchylku (ve smyslu otáčení Země) neboli o východní zeměpisnou délku a od 0° do -180° jde o zápornou odchylku (proti smyslu otáčení Země) neboli o západní zeměpisnou délku.

Zeměpisná šířka φ je odchylka přímky, která prochází uvažovaným místem a středem zemské sféry, a roviny zemského rovníku, přičemž od 0° do 90° jde o kladnou odchylku (od rovníku k severnímu pólu) neboli o severní zeměpisnou šířku a od 0° do -90° o zápornou odchylku (od rovníku k jižnímu pólu) neboli o jižní zeměpisnou šířku.



Obr. 223. Délka ortodromy

Nejmenší vzdálenost dvou bodů na sféře

Velikost oblouku hlavní kružnice spojujícího body $P_1[\lambda_1, \varphi_1]$ a $P[\lambda_2, \varphi_2]$ (tj. délka tzv. *ortodromy*), která je jejich nejmenší vzdáleností (tzv. *ortodromická vzdálenost e*), se vypočte takto:

Jestliže ve sférickém trojúhelníku P_1P_2N (obr. 223) známe

$$|\widehat{NP_1}| = 90^\circ - \varphi_1,$$

$$|\widehat{NP_2}| = 90^\circ - \varphi_2,$$

$$|\widehat{P_1NP_2}| = \lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda$$

(viz základní úlohu 2 o sférickém trojúhelníku), pak

$$\begin{aligned} \cos e &= \cos(90^\circ - \varphi_1) \cos(90^\circ - \varphi_2) + \\ &\quad + \sin(90^\circ - \varphi_1) \sin(90^\circ - \varphi_2) \cos \Delta\lambda = \\ &= \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta\lambda \end{aligned}$$

(kosinová věta pro strany).

Výpočet azimutů ortodromy

Úhly α a β sférického trojúhelníku P_1P_2N (viz obr. 223) vypočítáme tak, že nejprve určíme velikost e oblouku P_1P_2 a pak ji dosadíme do vzorců

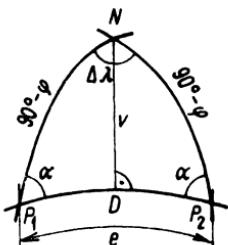
$$\sin \alpha = \frac{\sin \Delta\lambda \sin(90^\circ - \varphi_2)}{\sin e} = \frac{\sin \Delta\lambda \cos \varphi_2}{\sin e} \quad (\text{sinová věta}),$$

$$\sin \beta = \frac{\sin \Delta\lambda \cos \varphi_1}{\sin e}.$$

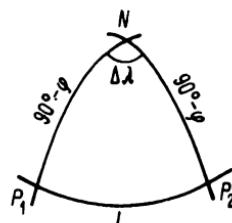
Vzdálenost dvou míst se stejnou zeměpisnou šírkou φ

Ortodromickou vzdálenost $e = |\widehat{P_1P_2}|$ (obr. 224) snadno vypočteme z pravoúhlého sférického trojúhelníku P_1DN , který vznikne tím, že v rovnoramenném sférickém trojúhelníku P_1P_2N vedeme výšku v k jeho základně P_1P_2 . Platí

$$\sin \frac{e}{2} = \cos \varphi \sin \frac{\Delta\lambda}{2} \quad (\text{Neperovo pravidlo}).$$



Obr. 224. Ortodromická vzdálenost



Obr. 225. Loxodromická vzdálenost

Loxodromickou vzdálenost (velikost oblouku na rovnoběžkové kružnici) l (obr. 225) vypočteme podle vzorce

$$l = \Delta\lambda \cos \varphi \quad (\text{°}),$$

nebo

$$l = \frac{\pi r \Delta\lambda \cos \varphi}{180^\circ} \quad (\text{km}),$$

kde

$$r \approx 6\,370 \text{ km}.$$

Poznámka:

Loxodroma je křivka na kulové ploše, která všechny poledníky [meridiány] protíná pod stejným úhlem. Je-li tento úhel různý od 90° , pak se loxodroma spirálovitě blíží k pólu. Každá rovnoběžková kružnice je loxodromou, která poledníky protíná pod pravým úhlem.

4. ANALYTICKÁ GEOMETRIE

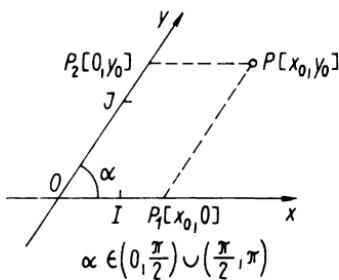
4.1. ANALYTICKÁ GEOMETRIE V ROVINĚ

4.1.1. Různé souřadnicové soustavy

Při zavádění souřadnicových soustav jde o zavedení prostého zobrazení všech bodů roviny na množinu $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Kosoúhlá souřadnicová soustava $(O; x, y)$

V rovině zvolíme různoběžky x, y ($|\angle xy| \neq \frac{1}{2}\pi$) s průsečíkem O , který nazveme *počátkem souřadnicové soustavy* (obr. 226). Prímku x , resp. y nazveme *první*, resp. *druhou osou kosoúhlé souřadnicové soustavy*. Dále zvolíme body $I \in x$, $J \in y$, $I \neq O \neq J$. Počátek O dělí každou z os na dvě polopřímky. Polopřímku OI , resp. OJ nazveme *první*, resp. *druhou kladnou poloosou kosoúhlé souřadnicové soustavy*. Polopřímku opačnou k polopřímce OI , resp. OJ nazveme *první*, resp. *druhou zápornou poloosou kosoúhlé souřadnicové soustavy*. Úsečku OI , resp. OJ považujeme za jednotkovou úsečku na ose x , resp. y .



Obr. 226. Kosoúhlá souřadnicová soustava

Polohu libovolného bodu P roviny určíme takto: Bodem P vedeme rovnoběžky s osami x a y a jejich průsečíky s osami x a y označíme po řadě P_1 a P_2 . *První souřadnice [souřadnicí x] bodu P* nazýváme číslo $x_0 = (\operatorname{sgn} \epsilon) |OP_1|$, přičemž $\operatorname{sgn} \epsilon = 1$, resp. $\operatorname{sgn} \epsilon = -1$, právě když bod P_1 leží v první kladné, resp. první záporné poloosě. *Druhou souřadnicí [souřadnicí y , pořadnicí] bodu P* nazýváme číslo $y_0 = (\operatorname{sgn} \epsilon) |OP_2|$, kde $\operatorname{sgn} \epsilon = 1$, resp. $\operatorname{sgn} \epsilon = -1$,

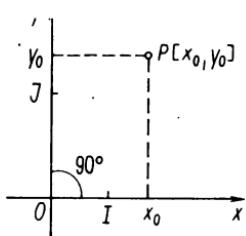
právě když bod P_2 leží v druhé kladné, resp. druhé záporné poloosě. Počátek O má souřadnice $x_0 = 0$ a $y_0 = 0$. Souřadnice x a y v kosoúhlé souřadnicové soustavě se nazývají *kosoúhlé*. Bod P se souřadnicemi x_0 a y_0 označujeme $P[x_0, y_0]$ nebo $P = [x_0, y_0]$ (obsahuje-li souřadnice desetinnou čárku, pak v uvedených symbolech místo čárky píšeme středník). Někdy je vhodné souřadnice bodu P označovat x_P a y_P .

Poznámka:

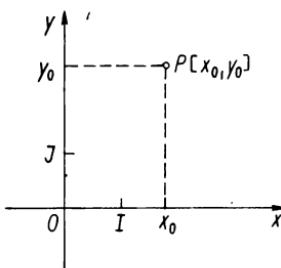
Nemůže-li dojít k nedorozumění, lze souřadnice bodu P značit stejnými písmeny jako souřadnicové osy x a y , tj. používat označení $P[x, y]$ nebo $P = [x, y]$.

Pravoúhlá [ortogonální] souřadnicová soustava $(O; x, y)$

Osy x a y volíme k sobě kolmé (obr. 227). Souřadnice x a y v pravoúhlé souřadnicové soustavě se nazývají *pravoúhlé* [ortogonální].



Obr. 227. Pravoúhlá [ortogonální] souřadnicová soustava



Obr. 228. Kartézská [ortonormální] souřadnicová soustava

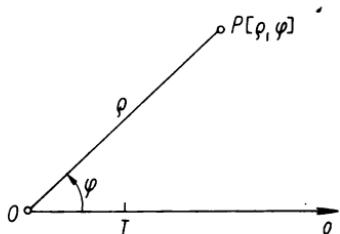
Kartézská [ortonormální] souřadnicová soustava $(O; x, y)$

Osy x a y volíme k sobě kolmé a jednotkové úsečky na osách x a y volíme shodné, tj. volíme $OI \cong OJ$ (obr. 228). Souřadnice x a y v kartézské souřadnicové soustavě se nazývají *kartézské* [ortonormální].

Polární souřadnicová soustava $(O; \varrho, \varphi)$

V rovině zvolíme polopřímku OI , přičemž bod O nazveme *pólem* a polopřímku $o = \bar{OI}$ *polární osou* (obr. 229). Polohu libovolného bodu P určíme vzdáleností bodu P od pólu O (neboli velikostí vektoru \overline{OP} , který nazýváme *průvodícem* nebo *rádiusvektorem bodu P*), kterou zpravidla značíme ϱ (popř. r).

a základní velikostí orientovaného úhlu IOP (zvaného *polární úhel*), kterou zpravidla značíme φ a nazýváme *argumentem* nebo *amplitudou*. Přitom připomeňme, že velikost φ orientovaného úhlu IOP je kladná, resp. záporná, přejde-li polární osa o v polopřímku OP otočením v kladném (tj. ve smyslu opačném ke smyslu otáčení hodinových ručiček), resp. záporném smyslu. Souřadnice ρ a φ v polární soustavě se nazývají *polární*.

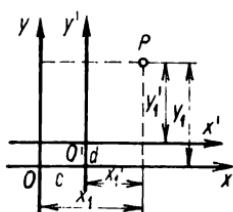


Obr. 229. Polární souřadnicová soustava

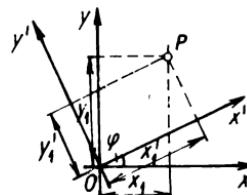
Vztahy mezi souřadnicemi bodů v různých souřadnicových soustavách

Rovnoběžné posunutí kartézské souřadnicové soustavy

Souřadnice bodu P v kartézské souřadnicové soustavě $(O; x, y)$ označíme x, y a v kartézské souřadnicové soustavě $(O'; x', y')$ takové, že $x' \uparrow\uparrow x, y' \uparrow\uparrow y$, označíme x', y' (obr. 230).



Obr. 230. Rovnoběžné posunutí



Obr. 231. Otočení kartézské souřadnicové soustavy

Pak platí

$$x' = x - c,$$

$$y' = y - d;$$

$$x = x' + c,$$

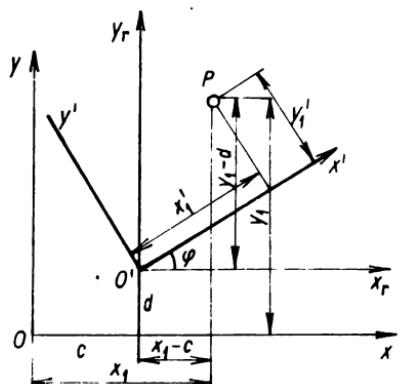
$$y = y' + d,$$

přičemž $O' = [c, d]$ v soustavě $(O; x, y)$ a $O = [-c, -d]$ v soustavě $(O'; x', y')$.

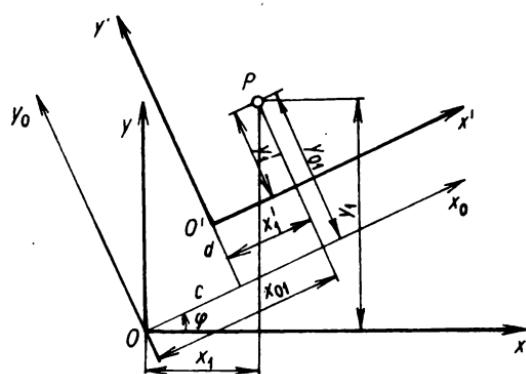
Otočení kartézské souřadnicové soustavy

Souřadnice bodu P v kartézské souřadnicové soustavě $(O; x, y)$ označíme x, y a v kartézské souřadnicové soustavě takové, že jak kladná poloosa osy x s kladnou poloosou osy x' , tak také kladná poloosa osy y s kladnou poloosou osy y' svírá orientovaný úhel o velikosti φ , označíme x', y' (obr. 231). Pak platí

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi; \\x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi.\end{aligned}$$



Obr. 232. Rovnoběžné posunutí
a otočení



Obr. 233. Otočení a rovnoběžné
posunutí

Rovnoběžné posunutí a otočení kartézské souřadnicové soustavy

Souřadnice bodu P v kartézské souřadnicové soustavě $(O; x, y)$ označíme x, y a v kartézské souřadnicové soustavě $(O'; x', y')$ takové, že jak kladná poloosa osy x s kladnou poloosou osy x' , tak také kladná poloosa osy y s kladnou poloosou osy y' svírá orientovaný úhel o velikosti φ , označíme x', y' (obr. 232). Pak platí

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi + c, \\y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi + d; \\x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi - c \cos \varphi - d \sin \varphi, \\y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi - c \sin \varphi - d \cos \varphi,\end{aligned}$$

přičemž $O' = [c, d]$ v soustavě $(O; x, y)$.

Otočení a rovnoběžné posunutí kartézské souřadnicové soustavy (obr. 233)

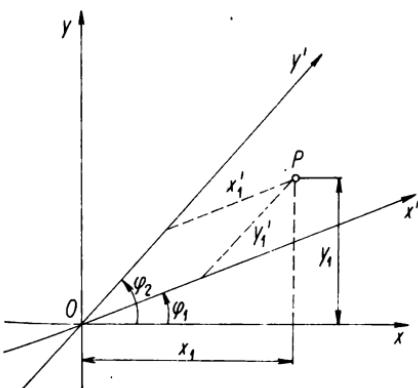
$$\begin{aligned}x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi + c \cos \varphi - d \sin \varphi, \\y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi + c \sin \varphi + d \cos \varphi, \\x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi - c, \\y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi - d,\end{aligned}$$

kde $O = [-c, -d]$ v soustavě $(O'; x', y')$.

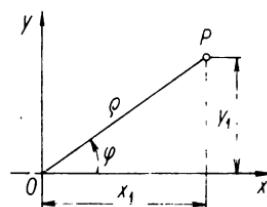
Přechod od kartézské souřadnicové soustavy $(O; x, y)$ ke kosoúhlé souřadnicové soustavě $(O; x', y')$ a od kosoúhlé souřadnicové soustavy ke kartézské souřadnicové soustavě

Souřadnice bodu P v kartézské, resp. kosoúhlé souřadnicové soustavě označíme x, y , resp. x', y' . Přitom obě souřadnicové soustavy mají společný počátek O a kladná poloosa osy x soustavy $(O; x, y)$ svírá s kladnou poloosou osy x' , resp. y' soustavy $(O; x', y')$ orientovaný úhel o velikosti φ_1 , resp. φ_2 (obr. 234). Pak platí

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \varphi_1 + y' \cos \varphi_2, \\y &= x' \sin \varphi_1 + y' \sin \varphi_2, \\x' &= \frac{-x \sin \varphi_2 + y \cos \varphi_2}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}, \\y' &= \frac{x \sin \varphi_1 - y \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}.\end{aligned}$$



Obr. 234. Přechod od kartézské souřadnicové soustavy ke kosoúhlé souřadnicové soustavě



Obr. 235. Přechod od kartézské souřadnicové soustavy k polární souřadnicové soustavě

Poznámka:

Při $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$ dostáváme vzorec pro otočení kartézské souřadnicové soustavy o orientovaný úhel velikosti φ_1 . Vzorců lze také použít pro přechod od jedné kartézské souřadnicové soustavy k jiné opačně orientované kartézské souřadnicové soustavě (např. $\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = \pi/2$, popř. $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 3\pi/2$).

Přechod od kartézské souřadnicové soustavy $(O; x, y)$ k polární souřadnicové soustavě $(O; \varrho, \varphi)$ a od polární souřadnicové soustavy ke kartézské souřadnicové soustavě

Souřadnice bodu P v kartézské, resp. polární souřadnicové soustavě označíme x, y , resp. ϱ, φ . Přitom soustava $(O; \varrho, \varphi)$ je orientována stejně jako soustava $(O; x, y)$, tj. polární osa je totožná s kladnou poloosou osy x (obr. 235). Pak platí

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi, \\ y &= \varrho \sin \varphi \end{aligned} \Rightarrow \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi;$$

$$\varrho = \sqrt{(x^2 + y^2)},$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} \quad (x > 0, y > 0),$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\pi \quad (x = 0, y > 0),$$

$$\varphi = \pi + \arctg \frac{y}{x} \quad (x < 0, \forall y \in \mathbb{R}),$$

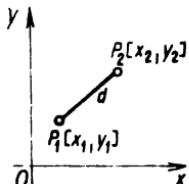
$$\varphi = \frac{3}{2}\pi \quad (x = 0, y < 0),$$

$$\varphi = 2\pi + \arctg \frac{y}{x} \quad (x > 0, y < 0).$$

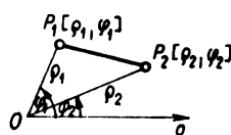
4.1.2. Body a úsečky

Vzdálenost d dvou bodů $P_1[x_1, y_1]$ a $P_2[x_2, y_2]$ (obr. 236)

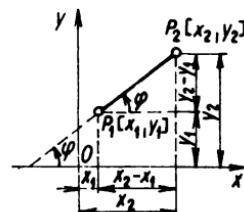
$$d = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}.$$



Obr. 236. Vzdálenost dvou bodů v kartézských souřadnicích



Obr. 237. Vzdálenost dvou bodů v polárních souřadnicích



Obr. 238. Směrnice úsečky

Vzdálenost d dvou bodů $P_1[\varrho_1, \varphi_1]$ a $P_2[\varrho_2, \varphi_2]$ (obr. 237)

$$d = \sqrt{[\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]}.$$

Souřadnice bodu $D[x_D, y_D]$ s dělicím poměrem λ vzhledem k bodům $P_1[x_1, y_1]$ a $P_2[x_2, y_2]$ ($D \neq P_2$)

$$x_D = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y_D = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}$$

(definice dělicího poměru je na str. 302).

Střed $P_0[x_0, y_0]$ úsečky P_1P_2 ($\lambda = -1$)

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Těžiště $T[x_T, y_T]$ trojúhelníku s vrcholy $P_1[x_1, y_1]$, $P_2[x_2, y_2]$ a $P_3[x_3, y_3]$

$$x_T = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_T = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Jsou-li P_1 , P_2 a P_3 hmotnými body po řadě s hmotnostmi m_1 , m_2 a m_3 , pak pro těžiště T soustavy bodů P_1 , P_2 , P_3 platí

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y_T = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

obecně pro souřadnice těžiště T n hmotných bodů s hmotnostmi po řadě m_1, m_2, \dots, m_n platí

$$x_T = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad y_T = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

Směrnice úsečky s krajními body $P_1[x_1, y_1]$ a $P_2[x_2, y_2]$ ($x_1 \neq x_2$)

$$\operatorname{tg} \varphi = k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

kde φ je orientovaný úhel sevřený kladně orientovanou osou x a přímkou P_1P_2 (měřený v kladném smyslu); výraz $\operatorname{tg} \varphi$ se nazývá *směrnice [stoupání] úsečky* (obr. 238).

Obsah trojúhelníku s vrcholy $P_1[x_1, y_1]$, $P_2[x_2, y_2]$ a $P_3[x_3, y_3]$

$$S = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| = \\ = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1, & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right|$$

(ve vzorcích jde o absolutní hodnoty determinantů).

Obsah trojúhelníku s vrcholy $P_1[\varrho_1, \varphi_1]$, $P_2[\varrho_2, \varphi_2]$ a $P_3[\varrho_3, \varphi_3]$

$$S = \frac{1}{2} |\varrho_1 \varrho_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \varrho_2 \varrho_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + \varrho_3 \varrho_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)|.$$

Obsah konvexního n -úhelníku s vrcholy

$P_1[x_1, y_1], P_2[x_2, y_2], \dots, P_n[x_n, y_n]$

$$S = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + \dots + x_n(y_1 - y_{n-1})| = \\ = \frac{1}{2} |(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \dots + (x_n - x_1)(y_n + y_1)| = \\ = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1, & x_2 \\ y_1, & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2, & x_3 \\ y_2, & y_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_n, & x_1 \\ y_n, & y_1 \end{vmatrix} \right| = \\ = \frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^n x_k(y_{k+1} - y_{k-1}) \right|$$

(v posledním výrazu klademe $y_0 = y_n$ a $y_{n+1} = y_1$).

4.1.3. Přímka

Směrnicový tvar rovnice [směrnicová rovnice] přímky, která není rovnoběžná s osou y (obr. 239)

$$y = kx + q,$$

kde $k = \operatorname{tg} \varphi$ je tzv. *směrnice přímky*, přičemž φ je orientovaný úhel, jehož vrchol je v počátku souřadnicové soustavy, první rameno tvoří první kladná poloosa a druhé rameno je rovnoběžné s danou přímkou libovolně orientovanou;

q – tzv. *úsek <vytátý přímou> na ose y* ; tj. druhá souřadnice průsečíku přímky s osou y .

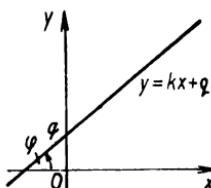
Pro $k > 0$, resp. $k < 0$ je přímka grafem rostoucí, resp. klesající funkce $y = kx + q$. Pro $k = 0$ je přímka rovnoběžná s osou x a pro $q = 0$ prochází počátkem.

Úsekový tvar rovnice [úseková rovnice] přímky, která není rovnoběžná s žádnou souřadnicovou osou ani neprochází počátkem (obr. 240)

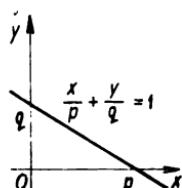
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1, \quad p \neq 0, \quad q \neq 0,$$

kde p je tzv. *úsek* *(vyťatý přímkou)* na ose x , tj. první souřadnice průsečíku přímky s osou x ,

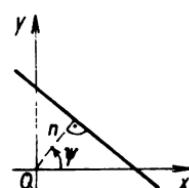
q – tzv. *úsek* *(vyťatý přímkou)* na ose y , tj. druhá souřadnice průsečíku přímky s osou y .



Obr. 239. Směrnicový tvar rovnice přímky



Obr. 240. Úsekový tvar rovnice přímky



Obr. 241. Normálový tvar rovnice přímky

Normálový tvar rovnice [normálová rovnice] přímky (obr. 241)

$$x \cos \psi + y \sin \psi - n = 0, \quad n \geq 0,$$

kde n je vzdálenost počátku O od přímky,

ψ – velikost orientovaného úhlu, jehož první rameno je první kladná poloosa a druhé rameno je polopřímka s počátečním bodem O vedená kolmo k přímce.

Obecný tvar rovnice [obecná rovnice] přímky

$$ax + by + c = 0,$$

kde a, b, c jsou konstanty, přičemž konstanty a a b nejsou zároveň rovny nule.

Převedení obecného tvaru rovnice přímky v směrnicový tvar:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad (b \neq 0), \quad k = -\frac{a}{b}, \quad q = -\frac{c}{b}.$$

Převedení obecného tvaru rovnice přímky v úsekový tvar:

$$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1 \quad (a, b, c \neq 0), \quad p = -\frac{c}{a}, \quad q = -\frac{c}{b}.$$

Převedení obecného tvaru rovnice přímky v normálový tvar:

$$\frac{a}{\varepsilon \sqrt{(a^2 + b^2)}} x + \frac{b}{\varepsilon \sqrt{(a^2 + b^2)}} y + \frac{c}{\varepsilon \sqrt{(a^2 + b^2)}} = 0,$$

kde $\varepsilon = 1$, resp. $\varepsilon = -1$, jestliže $\operatorname{sgn} c = -1$, resp. $\operatorname{sgn} c = 1$.

Zvláštní případy polohy přímky:

Rovnice přímky procházející počátkem:

$$y = kx; \quad ax + by = 0.$$

Rovnice rovnoběžky s osou x :

$$y = q; \quad by + c = 0.$$

Rovnice rovnoběžky s osou y :

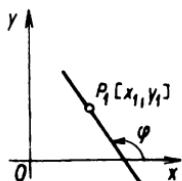
$$x = p; \quad ax + c = 0.$$

Rovnice osy x :

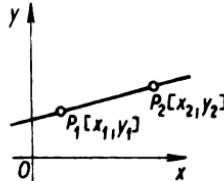
$$y = 0.$$

Rovnice osy y :

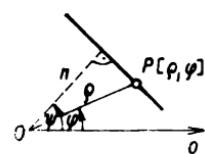
$$x = 0.$$



Obr. 242. Přímka daná bodem a směrnicí



Obr. 243. Přímka daná dvěma body



Obr. 244. Polární tvar rovnice přímky

Rovnice přímky dané bodem $P[x_1, y_1]$ a směrnicí $k = \operatorname{tg} \varphi$ (obr. 242)

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Rovnice přímky dané dvěma body $P_1[x_1, y_1]$ a $P_2[x_2, y_2]$ ($x_2 \neq x_1$) (obr. 243)

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{x_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

neboli

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

neboli ve tvaru determinantu

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Jestliže $x_1 = x_2$, pak rovnice přímky je $x = x_1$. Podmínka, aby tři body $P_1[x_1, y_1]$, $P_2[x_2, y_2]$ a $P_3[x_3, y_3]$ ležely na téže přímce, má tvar

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Polární tvar rovnice [polární rovnice] přímky jdoucí bodem $P[\rho, \varphi]$ (obr. 244)

$$\rho = \frac{n}{\cos(\psi - \varphi)},$$

kde n je vzdálenost přímky od pólu O ;

ψ – orientovaný úhel, jehož vrchol je v pólu O , první rameno tvoří polární osa a druhé rameno tvoří polopřímka s počátečním bodem O vedená kolmo k přímce.

Vzdálenost d bodu $P_1[x_1, y_1]$ od přímky s rovnicí v normálovém tvaru

$$d = |x_1 \cos \psi + y_1 \sin \psi - n| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}.$$

Průsečík $P[x_p, y_p]$ dvou přímek

Rovnice daných přímek považujeme za soustavu rovnic, jejíž řešení (prvek oboru pravdivosti) dává souřadnice průsečíku přímek. Například průsečík P přímek daných rovnicemi ($k_1 \neq k_2$)

$$\begin{aligned}y &= k_1 x + q_1, \\y &= k_2 x + q_2\end{aligned}$$

v směrnicovém tvaru má souřadnice

$$x_p = \frac{q_1 - q_2}{k_2 - k_1}, \quad y_p = \frac{q_1 k_2 - q_2 k_1}{k_2 - k_1},$$

Podobně v případě rovnic

$$\begin{aligned}a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0, \\a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0\end{aligned}$$

dostaneme

$$\begin{aligned}x_p &= \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \\y_p &= \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \right).\end{aligned}$$

Podmínka, aby se tři přímky dané rovnicemi

$$\begin{aligned}a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0, \\a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0, \\a_3 x + b_3 y + c_3 &= 0\end{aligned}$$

protínaly v právě jednom bodě:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Odchylka φ dvou přímek p_1, p_2 (obr. 245) daných rovnicemi

$$\begin{aligned}y &= k_1 x + q_1, \\y &= k_2 x + q_2\end{aligned}$$

se určí podle vzorce

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \quad (k_1 k_2 \neq -1),$$

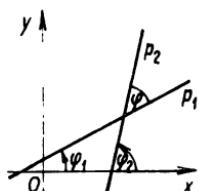
popř. rovnicemi

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 x + c_1 &= 0, \\ a_2 x + b_2 x + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

se určí podle vzorce

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2} \right| \quad (a_1 a_2 + b_1 b_2 \neq 0)$$

(φ je velikost ostrého úhlu).



Obr. 245. Odchylka dvou přímek

Podmínka rovnoběžnosti dvou přímek daných rovnicemi

$$y = k_1 x + q_1,$$

$$y = k_2 x + q_2$$

je

$$k_1 = k_2,$$

popř. rovnicemi

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

je

$$\left| \frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2} \right| = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \quad \text{neboli} \quad a_1 : a_2 = b_1 : b_2.$$

Podmínka kolmosti dvou přímek daných rovnicemi

$$y = k_1 x + q_1,$$

$$y = k_2 x + q_2$$

je

$$k_1 k_2 + 1 = 0 \quad \text{neboli} \quad k_1 = -\frac{1}{k_2},$$

popř. rovnicemi

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

je

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Rovnice svazku přímek

Jestliže $R_1 = 0, R_2 = 0$, kde

$$R_1 = a_1x + b_1y + c_1,$$

$$R_2 = a_2x + b_2y + c_2$$

jsou rovnice dvou různoběžek, pak rovnice svazku přímek se středem v průsečíku těchto různoběžek má tvar

$$\mu R_1 + \lambda R_2 = 0,$$

kde μ, λ jsou vhodná reálná čísla, která nejsou zároveň rovna nule.

Osy o_1 a o_2 různoběžek p_1 a p_2 (obr. 246)

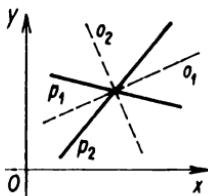
Jsou-li různoběžky dány rovnicemi v obecném tvaru

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

pak rovnice os různoběžek jsou

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)}} \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{(a_2^2 + b_2^2)}} = 0.$$



Obr. 246. Osy různoběžek

Jsou-li různoběžky dány rovnicemi v normálovém tvaru

$$x \cos \psi_1 + y \sin \psi_1 - n_1 = 0,$$

$$x \cos \psi_2 + y \sin \psi_2 - n_2 = 0,$$

pak rovnice os různoběžek jsou

$$x(\cos \psi_1 \pm \cos \psi_2) + y(\sin \psi_1 \pm \sin \psi_2) - (n_1 \pm n_2) = 0.$$

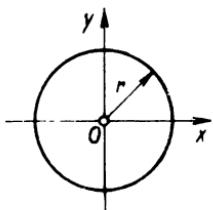
4.1.4. Kružnice

Definice kružnice, poloměru kružnice a průměru kružnice viz v článku 3.2.4.

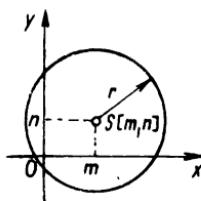
Rovnice kružnice se středem $S[0, 0]$ (obr. 247)

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

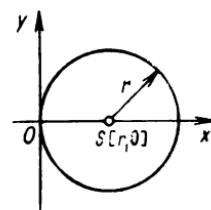
kde r je poloměr kružnice.



Obr. 247. Kružnice



Obr. 248. Kružnice v obecné poloze



Obr. 249. Vrcholová rovnice kružnice

Obecná rovnice kružnice se středem $S[m, n]$ a poloměrem r v kartézských souřadnicích (obr. 248)

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

Vrcholová rovnice kružnice (obr. 249)

$$y^2 = 2rx - x^2.$$

Obecná algebraická rovnice druhého stupně vyjadřující kružnici

Obecná rovnice druhého stupně v x a y

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

vyjadřuje kružnici, právě když

$$a_{11} = a_{22} \neq 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33} > 0,$$

takže obecná rovnice kružnice má tvar

$$a_{11}x^2 + a_{11}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Střed kružnice

$$S = \left[-\frac{a_{13}}{a_{11}}, -\frac{a_{23}}{a_{11}} \right].$$

Poloměr kružnice

$$r = \frac{1}{a_{11}} \sqrt{(a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33})}.$$

Rovnice kružnice procházející třemi body

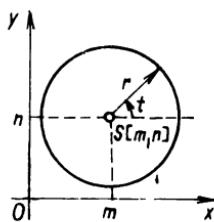
$P_1[x_1, y_1]$, $P_2[x_2, y_2]$ a $P_3[x_3, y_3]$

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2, & x, & y, & 1 \\ x_1^2 + y_1^2, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^2 + y_2^2, & x_2, & y_2, & 1 \\ x_3^2 + y_3^2, & x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

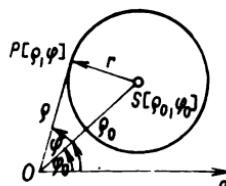
Parametrické rovnice kružnice se středem $S[m, n]$ a poloměrem r (obr. 250)

$$\begin{aligned} x &= m + r \cos t, \\ y &= n + r \sin t, \end{aligned}$$

kde $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je proměnný parametr.



Obr. 250. Kružnice v parametrickém vyjádření



Obr. 251. Kružnice v polárním vyjádření

Rovnice kružnice v polárních souřadnicích se středem $S[\varrho_0, \varphi_0]$ a poloměrem r (obr. 251)

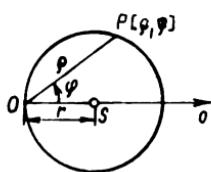
$$\varrho^2 - 2\varrho\varrho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \varrho_0^2 = r^2,$$

kde ϱ, φ jsou souřadnice obecného bodu P na kružnici.

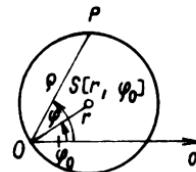
Zvláštní případy:

Pól O leží na kružnici a střed kružnice leží na polární ose (obr. 252):

$$\varrho = 2r \cos \varphi.$$



Obr. 252. Pól leží na kružnici a polární osa prochází středem kružnice



Obr. 253. Pól leží na kružnici a polární osa neprochází středem kružnice

Pól O leží na kružnici a polární osa svírá s průměrem procházejícím pólem O úhel $φ_0$ (obr. 253):

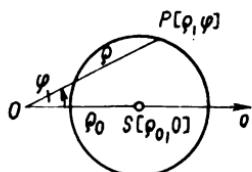
$$\varrho = 2r \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Pól O neleží na kružnici a střed $S[\varrho_0, 0]$ leží na polární ose (obr. 254):

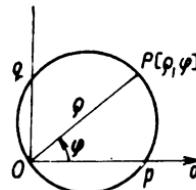
$$\varrho^2 - 2\varrho\varrho_0 \cos \varphi + \varrho_0^2 = r^2.$$

Pól O leží na kružnici a úseyky na osách x, y kartézské souřadnicové soustavy jsou po řadě p, q (obr. 255):

$$\varrho = p \cos \varphi + q \sin \varphi.$$



Obr. 254. Pól neleží na kružnici a polární osa prochází středem kružnice



Obr. 255. Pól leží na kružnici a p a q jsou úseyky na souřadnicových osách

Průsečíky přímky $y = kx + q$ a kružnice $x^2 + y^2 = r^2$

$$x_{1,2} = -\frac{qk}{1+k^2} \pm \frac{1}{1+k^2} \sqrt{[r^2(1+k^2) - q^2]},$$

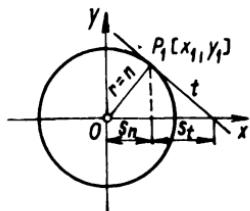
$$y_{1,2} = \frac{q}{1+k^2} \pm \frac{k}{1+k^2} \sqrt{[r^2(1+k^2) - q^2]}.$$

Odmocněnec $r^2(1 + k^2) - q^2 = D$ (diskriminant) udává:

$D > 0$ – přímka protíná kružnici právě ve dvou reálných bodech (přímka je sečnou);

$D = 0$ – přímka se dotýká kružnice právě v jednom reálném bodě (v dvojém bodě) (přímka je tečnou);

$D < 0$ – přímka kružnici neprotíná v žádném reálném bodě (přímka je vnější přímkou kružnice).



Obr. 256. Tečna a normála kružnice

Tečna a normála kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ v bodě $P_1[x_1, y_1]$ (obr. 256)

Rovnice tečny:

$$xx_1 + yy_1 = r^2;$$

směrnice

$$k_t = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Rovnice normály:

$$yx_1 - xy_1 = 0;$$

směrnice

$$k_n = \frac{y_1}{x_1}.$$

Délka úseku tečny

$$t = \left| \frac{ry_1}{x_1} \right|.$$

Délka úseku normály

$$n = r.$$

Délka subtangenty

$$s_t = \left| \frac{y_1^2}{x_1} \right|.$$

Délka subnormály

$$s_n = x_1.$$

Polára bodu $P_0[x_0, y_0]$ vzhledem ke kružnici $x^2 + y^2 = r^2$

$$xx_0 + yy_0 = r^2.$$

Polárou bodu P_0 vzhledem ke kružnici nazýváme množinu všech bodů harmonicky sdružených s bodem P_0 vzhledem k průsečíkům přímek jdoucích bodem P_0 s danou kružnicí. Bod P_0 se nazývá pól poláry vzhledem ke kružnici.

K přímce $ax + by + c = 0$ jako poláře vzhledem ke kružnici $x^2 + y^2 = r^2$ přísluší pól P_0 se souřadnicemi

$$x_0 = -\frac{ar^2}{c}, \quad y_0 = -\frac{br^2}{c}.$$

Mocnost m bodu $P_0[x_0, y_0]$ ke kružnici $x^2 + y^2 = r^2$

$$m = x_0^2 + y_0^2 - r^2.$$

Tečna a normála kružnice $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ v bodě $P_1[x_1, y_1]$

Rovnice tečny:

$$(x - m)(x_1 - m) + (y - n)(y_1 - n) = r^2;$$

směrnice

$$k_t = -\frac{x_1 - m}{y_1 - n}.$$

Rovnice normály:

$$(y - y_1)(x_1 - m) = (x - x_1)(y_1 - n);$$

směrnice

$$k_n = \frac{y_1 - n}{x_1 - m}.$$

Polára bodu $P_0[x_0, y_0]$ vzhledem ke kružnici $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$

$$(x - m)(x_0 - m) + (y - n)(y_0 - n) = r^2.$$

Mocnost m bodu $P_0[x_0, y_0]$ ke kružnici $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$

$$m = (x_0 - m)^2 + (y_0 - n)^2 - r^2.$$

Chordála dvou kružnic

Chordálou dvou kružnic nazýváme množinu právě těch bodů, které mají k oběma kružnicím stejnou mocnost.

Jestliže $R_1 = 0, R_2 = 0$, kde

$$R_1 = (x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 - r_1^2,$$
$$R_2 = (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 - r_2^2$$

jsou rovnice daných kružnic, pak rovnice chordály těchto kružnic má tvar

$$R_1 - R_2 = 0.$$

Chordála je kolmá ke spojnici středů daných dvou kružnic.

Svazek kružnic

Jestliže $R_1 = 0, R_2 = 0$, kde

$$R_1 = (x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 - r_1^2,$$
$$R_2 = (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 - r_2^2$$

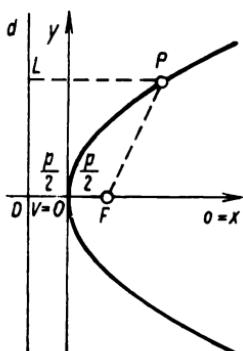
jsou rovnice dvou daných kružnic, pak rovnice svazku kružnic pro $\lambda \neq -1$ má tvar

$$R_1 + \lambda R_2 = 0.$$

4.1.5. Parabola

Definice:

Parabolou nazýváme množinu právě těch bodů roviny, které mají stejné vzdálenosti od pevného bodu F této roviny (tzv. ohniska) a od pevné přímky d této roviny (tzv. řidící přímky), přičemž přímka d neprochází bodem F .



Obr. 257. Parabola

Označení a názvy (obr. 257):

F – ohnisko paraboly,

d – řidící [určující] přímka [*direktrix*],

$o = \overline{FV}$ – osa paraboly,

V – vrchol paraboly,

$|DF| = |p|$ – poloparametr paraboly (někdy se tato vzdálenost nazývá parametr),

$2|DF|$ – parametr paraboly,

PF – ohniskový průvodič,

PL – řidící průvodič.

Kanonický [normální] tvar rovnice paraboly s osou v ose x a s vrcholem v počátku souřadnicové soustavy

$$y^2 = 2px,$$

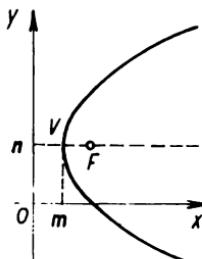
přičemž pro $p > 0$, resp. $p < 0$ je parabola otevřená doprava, resp. doleva.

Řidící přímka má rovnici

$$x = -\frac{p}{2}$$

a ohnisko

$$F = \left[\frac{p}{2}, 0 \right].$$



Obr. 258. Parabola v normální poloze

Kanonický tvar rovnice paraboly v normální poloze (osa je rovnoběžná s osou x a vrchol $V = [m, n]$) (obr. 258)

$$(y - n)^2 = 2p(x - m),$$

přičemž pro $p > 0$, resp. $p < 0$ je parabola otevřená doprava, resp. doleva.

Řidicí přímka má rovnici

$$x = m - \frac{p}{2}$$

a ohnisko

$$F = \left[m + \frac{p}{2}, n \right].$$

Obecná algebraická rovnice druhého stupně

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

vyjadřuje parabolu v normální poloze (osa paraboly je rovnoběžná s osou x), právě když

$$a_{11} = a_{12} = 0, \quad a_{13}a_{22} \neq 0,$$

takže obecná rovnice paraboly má tvar

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Řidicí přímka má rovnici

$$x = \frac{a_{23}^2 + a_{13}^2 - a_{22}a_{23}}{2a_{22}a_{13}},$$

ohnisko

$$F = \left[\frac{a_{23}^2 - a_{13}^2 - a_{22}a_{33}}{2a_{22}a_{13}}, -\frac{a_{23}}{a_{22}} \right],$$

vrchol

$$V = \left[\frac{a_{23}^2 - a_{22}a_{33}}{2a_{22}a_{13}}, -\frac{a_{23}}{a_{22}} \right]$$

a parametr

$$|2p| = \left| \frac{2a_{13}}{a_{22}} \right|.$$

Kanonický tvar rovnice paraboly s osou y a vrcholem v počátku souřadnicové soustavy

$$x^2 = 2py,$$

přičemž pro $p > 0$, resp. $p < 0$ je parabola otevřená nahoru, resp. dolů.

Řídicí přímka má rovnici

$$y = -\frac{p}{2}$$

a ohnisko

$$F = \left[0, \frac{p}{2} \right].$$

Kanonický tvar rovnice paraboly v normální poloze
(osa paraboly je rovnoběžná s osou y a vrchol $V = [m, n]$)

$$(x - m)^2 = 2p(y - n),$$

přičemž pro $p > 0$, resp. $p < 0$ je parabola otevřená nahoru, resp. dolů.

Obecná algebraická rovnice druhého stupně

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

vyjadřuje parabolu v normální poloze (osa paraboly je rovnoběžná s osou y),
právě když

$$a_{12} = a_{22} = 0, \quad a_{11}a_{23} \neq 0,$$

takže obecná rovnice paraboly má tvar

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Řídicí přímka má rovnici

$$y = \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33}}{2a_{11}a_{23}},$$

ohnisko

$$F = \left[-\frac{a_{13}}{a_{11}}, \frac{a_{13}^2 - a_{23}^2 - a_{11}a_{33}}{2a_{11}a_{23}} \right],$$

vrchol

$$V = \left[-\frac{a_{13}}{a_{11}}, \frac{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}{2a_{11}a_{23}} \right]$$

a parametr

$$|2p| = \left| \frac{2a_{23}}{a_{11}} \right|.$$

Máme-li rozhodnout, zda obecná algebraická rovnice druhého stupně

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

kde $a_{12} \neq 0$, je rovnici paraboly, provedeme nejprve otočení souřadnicové soustavy o orientovaný úhel, jehož velikost φ vypočteme ze vztahu

$$\cot(2\varphi) = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

Viz též str. 450.

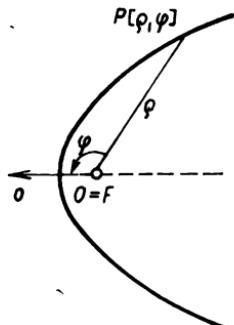
Polární rovnice paraboly

$$\rho = \frac{p}{1 + \cos \varphi}$$

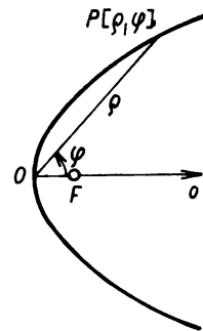
[pól je v ohnisku a polární osa prochází vrcholem (obr. 259)].

$$\rho = 2p \cos \varphi (1 - \cot^2 \varphi)$$

[pól je ve vrcholu a polární osa splývá s osou paraboly (obr. 260)].



Obr. 259. Parabola v polárním vyjádření
($O = F$)



Obr. 260. Parabola v polárním vyjádření
($O = V$)

Průsečíky přímky $y = kx + q$ s parabolou $y^2 = 2px$ ($p > 0$)

$$x_{1,2} = \frac{p - qk}{k^2} \pm \frac{1}{k^2} \sqrt{[p(p - 2qk)]},$$

$$y_{1,2} = \frac{p}{k} \pm \frac{1}{k} \sqrt{[p(p - 2qk)]}.$$

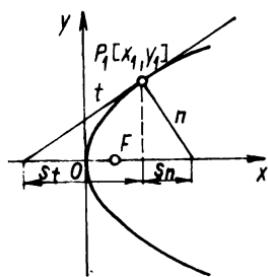
Odmocněnec $p(p - 2qk) = D$ (diskriminant) udává:

$D > 0$ – přímka protíná parabolu právě ve dvou reálných bodech (přímka je sečnou);

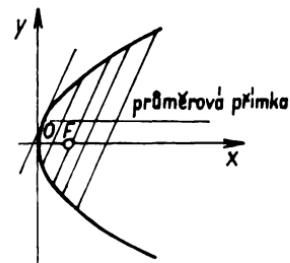
$D = 0$ – přímka se dotýká paraboly právě v jednom reálném bodě (v dvojném bódě) (přímka je tečnou);

$D < 0$ – přímka parabolu neprotíná v žádném reálném bodě (přímka je vnější přímkou paraboly).

Tečna a normála paraboly $y^2 = 2px$ v bodě $P_1[x_1, y_1]$ (obr. 261)



Obr. 261. Úsek tečny a úsek normály paraboly



Obr. 262. Průměrová přímka paraboly

Rovnice tečny:

$$yy_1 = p(x + x_1);$$

směrnice

$$k_t = \frac{p}{y_1}.$$

Rovnice normály:

$$p(y - y_1) + y_1(x - x_1) = 0;$$

směrnice

$$k_n = -\frac{y_1}{p}.$$

Délka úseku tečny

$$t = \sqrt{(y_1^2 + 4x_1^2)}.$$

Délka úseku normály

$$n = \sqrt{(y_1^2 + p^2)}.$$

Délka subtangenty

$$s_t = 2x_1.$$

Délka subnormály

$$s_n = p.$$

Polára bodu $P_0[x_0, y_0]$ vzhledem k parabole $y^2 = 2px$
 $yy_0 = p(x + x_0)$.

Polárou bodu P_0 *vzhledem k parabole* nazýváme množinu všech bodů harmonicky sdružených s bodem P_0 vzhledem k průsečíkům přímek jdoucích' bodem P_0 s danou parabolou. Bod P_0 se nazývá *pól poláry vzhledem k parabole*.

Průměrová přímka $y^2 = 2px$ (obr. 262)

$$y = \frac{p}{k},$$

kde k je směrnice přiřazených rovnoběžných tětiv, které jsou průměrem půleny.

Tečna v průsečíku průměru s parabolou je rovnoběžná s přiřazenou osnovou tětiv.

Tečna a normála paraboly $(y - n)^2 = 2p(x - m)$ v bodě $P_1[x_1, y_1]$

Rovnice tečny:

$$(y - n)(y_1 - n) = p(x + x_1 - 2m);$$

směrnice

$$k_t = \frac{p}{y_1 - n}.$$

Rovnice normály:

$$p(y - y_1) + (y_1 - n)(x - x_1) = 0;$$

směrnice

$$k_n = -\frac{y_1 - n}{p}.$$

Polára bodu $P_0[x_0, y_0]$ vzhledem k parabole $(y - n)^2 = 2p(x - m)$

$$(y - n)(y_0 - n) = p(x + x_0 - 2m).$$

Obsah S parabolické úseče

Jestliže tětiva P_1P_2 ($P_1 = [x_1, y_1]$, $P_2 = [x_2, y_2]$) není kolmá k ose paraboly $y^2 = 2px$ (obr. 263), je

$$S = \left| \frac{(y_1 - y_2)^3}{12p} \right| = \left| \frac{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)^2}{6(y_1 + y_2)} \right|.$$

Je-li tětiva P_1P_2 kolmá k ose paraboly (obr. 264), je

$$S = \frac{4}{3}x_1y_1.$$

Délka tětivy jdoucí ohniskem kolmo k ose paraboly má délku $2p$.

Poloměr křivosti R a střed křivosti $S_k[\xi, \eta]$ paraboly $y^2 = 2px$ v bodě $P_1[x_1, y_1]$ a ve vrcholu V

Pro $P_1 \neq V$ platí

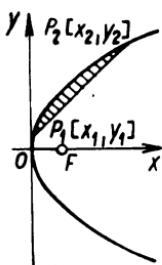
$$R = \frac{\sqrt{(y_1^2 + p^2)^3}}{p^2} = \frac{n^3}{p^2},$$

kde n je délka úseku normály (viz str. 423);

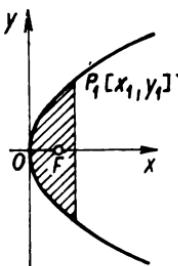
$$\xi = 3x_1 + p, \quad \eta = -\frac{y_1^3}{p^2}.$$

Pro vrchol $V[0, 0]$ platí

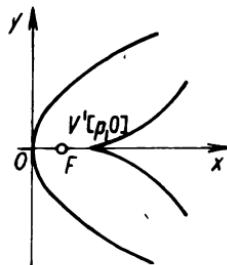
$$R = |p|, \quad \xi = p, \quad \eta = 0.$$



Obr. 263. Parabolická úseč s tětivou libovolného směru



Obr. 264. Parabolická úseč s tětivou kolmou k ose x



Obr. 265. Evoluta paraboly (Neilova evoluta neboli semikubická parabola)

Evoluta paraboly $y^2 = 2px$ (obr. 265)

$$\eta^2 = \frac{8(\xi - p)^3}{27p} \quad \text{pro } \xi \geq p$$

(tzv. *Neilova [semikubická] parabola*).

Délka oblouku OP_1 paraboly $y^2 = 2px$

$$\begin{aligned} |\widehat{OP}_1| &= \frac{p}{2} \left\{ \sqrt{\left[\frac{2x_1}{p} \left(1 + \frac{2x_1}{p} \right) \right]} + \ln \left[\sqrt{\frac{2x_1}{p}} + \sqrt{\left(1 + \frac{2x_1}{p} \right)} \right] \right\} = \\ &= \frac{y_1}{2p} \sqrt{(p^2 + y_1^2)} + \frac{p}{2} \ln \frac{y_1 + \sqrt{(p^2 + y_1^2)}}{p} = \\ &= \frac{y_1}{2p} \sqrt{(p^2 + y_1^2)} + \frac{p}{2} \operatorname{argsinh} \frac{y_1}{p}. \end{aligned}$$

Přibližná hodnota pro malý poměr x_1/y_1 :

$$|\widehat{OP}_1| \approx y_1 \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{x_1}{y_1} \right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{x_1}{y_1} \right)^4 \right].$$

Délka d ohniskového průvodiče k bodu $P_1[x_1, y_1]$

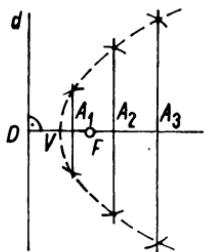
$$d = x_1 + \frac{p}{2}.$$

Konstrukce paraboly

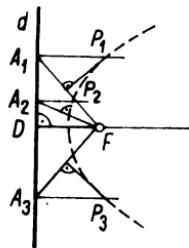
Jsou dány ohnisko a řídící přímka (obr. 266)

Bodem F (ohniskem) vedeme kolmici FD (osu paraboly) k řídicí přímce d a v libovolných bodech A_1, A_2, A_3, \dots osy paraboly sestrojíme k ní kolmice. Potom opíšeme kolem bodu F kružnice s poloměry DA_1, DA_2, DA_3, \dots , které protinou příslušné kolmice v bodech paraboly.

Střed úsečky FD je vrchol paraboly.



Obr. 266. Konstrukce paraboly (jsou dány F a d)



Obr. 267. Konstrukce paraboly (jsou dány F a d)

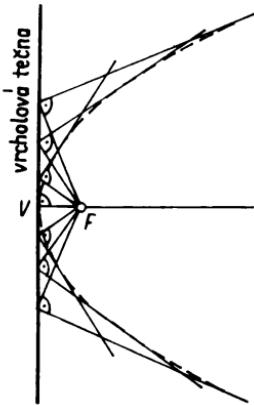
Jsou dány ohnisko a řídící přímka (obr. 267)

Libovolný bod A_1 řídící přímky d spojime s ohniskem F a sestrojíme osu úsečky A_1F , která kolmici v bodě A_1 k řídící přímce protíná v bodě P_1 paraboly.

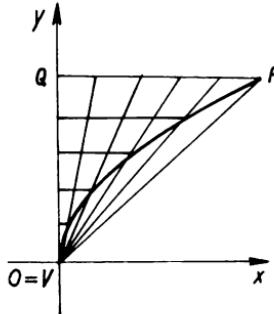
Opakujeme-li týž postup s dalšími body A_2, A_3, \dots řídící přímky, dostaneme další body paraboly.

Jsou dány ohnisko a vrcholová tečna (obr. 268)

Spojíme různé body vrcholové tečny s ohniskem F a sestrojíme k takto získaným spojnicím v jednotlivých bodech vrcholové tečny kolmice, které parabolu obalují.



Obr. 268. Konstrukce paraboly (jsou dány F a vrcholová tečna)



Obr. 269. Konstrukce paraboly (jsou dány souřadnicové osy, vrchol $V = O$ a bod paraboly)

Jsou dány souřadnicové osy, vrchol paraboly v počátku a bod P paraboly (obr. 269)

Z bodu P vejdeme kolmici PQ k ose y a rozdělíme úsečky PQ a VQ na stejný počet stejných dílů. Dělící body na úsečce PQ spojíme s vrcholem V a dělícími body na úsečce VQ vedeme rovnoběžky s osou x . Průsečíky odpovídajících rovnoběžek se spojnicemi vycházejícími z vrcholu V jsou hledané body paraboly.

Body paraboly ležící pod osou x jsou souměrně sdruženy s nalezenými body paraboly podle osy paraboly.

4.1.6. Elipsa

Definice:

*Elipsou nazýváme množinu právě těch bodů P v rovině, které mají od dvou pevných bodů F_1, F_2 (tzv. *ohnisek*) konstantní součet vzdáleností $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, přičemž je $2a > |F_1F_2| = 2e > 0$.*

Z podmínky $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ plyne vláknová [nitková] konstrukce elipsy.

Označení a názvy (obr. 270):

F_1, F_2 – ohniska,

A, B – hlavní vrcholy,

C, D – vedlejší vrcholy,

S – střed elipsy,

$|PF_1| + |PF_2| = 2a$ – konstantní součet,

PF_1, PF_2 – průvodiče,

$|AB| = 2a$ – délka hlavní osy,

a – délka hlavní poloosy,

$|CD| = 2b$ – délka vedlejší osy,

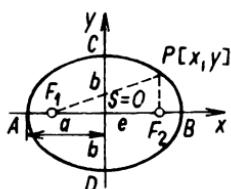
b – délka vedlejší poloosy ($b < a$),

$|F_1F_2| = 2e$,

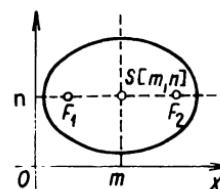
$e = \sqrt{a^2 - b^2}$ – délková [lineární] výstřednost [délková excentricita],

$\frac{e}{a} = \varepsilon$ – číselná [numerická] výstřednost [číselná excentricita],

$2p = \frac{2b^2}{a}$ – parametr (délka tětivy kolmé k hlavní ose a procházející ohniskem).



Obr. 270. Elipsa



Obr. 271. Elipsa v normální poloze

Kanonický tvar středové rovnice elipsy s hlavní osou v ose x (viz obr. 270)

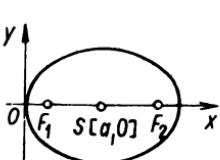
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{neboli} \quad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Kanonický tvar rovnice elipsy v normální poloze (hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou x a střed $S = [m, n]$) (obr. 271)

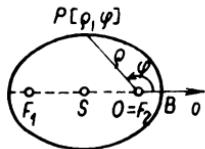
$$\left(\frac{x-m}{a}\right)^2 + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Vrcholová rovnice elipsy (obr. 272)

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$



Obr. 272. Vrcholová rovnice elipsy



Obr. 273. Elipsa v polárním vyjádření
($O = F_2$)

Obecná rovnice druhého stupně vyjadřující elipsu v normální poloze

Obecná rovnice druhého stupně v x a y

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

vyjadřuje elipsu v normální poloze (hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou x), právě když

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} a_{11} &= \operatorname{sgn} a_{22} = \operatorname{sgn} (a_{22}a_{13}^2 + a_{11}a_{23}^2 - a_{11}a_{22}a_{33}), \\ a_{12} &= 0, \quad |a_{11}| < |a_{22}|, \end{aligned}$$

takže obecná rovnice elipsy má tvar

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

přičemž délka hlavní poloosy

$$a = \sqrt{\frac{a_{22}'a_{13}^2 + a_{11}'a_{23}^2 - a_{11}'a_{22}'a_{33}}{a_{11}'a_{22}}},$$

délka vedlejší poloosy

$$b = \sqrt{\frac{a_{22}a_{13}^2 + a_{11}a_{23}^2 - a_{11}a_{22}a_{33}}{a_{11}a_{22}^2}}$$

a střed elipsy

$$S = \left[-\frac{a_{13}}{a_{11}}, -\frac{a_{23}}{a_{22}} \right].$$

Inverzní rovnice elipsy

Rovnice

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

je kanonickým tvarem středové rovnice elipsy s hlavní osou v ose y ; a , resp. b je délka hlavní, resp. vedlejší poloosy; střed elipsy je v počátku.

Rovnice

$$x^2 = 2py - \frac{p}{a} y^2$$

je vrcholovou rovnicí elipsy s hlavní osou v ose y ; a je délka hlavní poloosy.

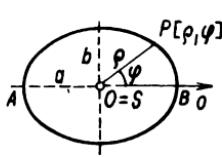
Polární rovnice elipsy

Jestliže ohnisko F_2 je pólem O a polární osou o je polopřímka F_2B (obr. 273), je

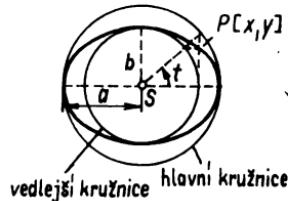
$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (\varepsilon < 1).$$

Jestliže střed elipsy je pólem O a polární osou o je polopřímka OB (obr. 274), je

$$\rho^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \quad (\varepsilon < 1).$$



Obr. 274. Elipsa v polárním vyjádření
($O = S$)



Obr. 275. Elipsa v parametrickém vyjádření

Parametrické rovnice elipsy (obr. 275)

$$\left. \begin{array}{l} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{array} \right\} \quad \text{pro } \forall t \in (0, 2\pi);$$

t je excentrická anomálie.

Průsečíky přímky $y = kx + q$ s elipsou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$x_{1,2} = -\frac{a^2kq}{b^2 + a^2k^2} \pm \frac{ab}{b^2 + a^2k^2} \sqrt{(a^2k^2 + b^2 - q^2)},$$

$$y_{1,2} = \frac{b^2q}{b^2 + a^2k^2} \pm \frac{abk}{b^2 + a^2k^2} \sqrt{(a^2k^2 + b^2 - q^2)}.$$

Odmocněnec $a^2k^2 + b^2 - q^2 = D$ (diskriminant) udává:

$D > 0$ – přímka protíná elipsu právě ve dvou reálných bodech (přímka je sečnou);

$D = 0$ – přímka se dotýká elipsy právě v jednom bodě (v dvojném bodě) (přímka je tečnou);

$D < 0$ – přímka elipsu neprotíná v žádném reálném bodě (přímka je vnější přímkou elipsy).

Délky průvodičů PF_1 a PF_2 elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ s bodem $P[x, y]$

$$\begin{aligned}|PF_1| &= a + ex, \\ |PF_2| &= a - ex,\end{aligned}$$

přičemž

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a.$$

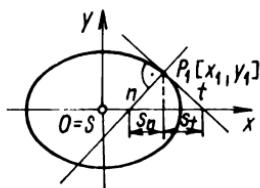
Tečna a normála elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ v bodě $P_1[x_1, y_1]$ (obr. 276)

Rovnice tečny:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1;$$

směrnice

$$k_t = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$



Obr. 276. Úsek tečny a úsek normály elipsy

Rovnice normály:

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1);$$

směrnice

$$k_n = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}.$$

Délka úseku tečny

$$t = \sqrt{\left[y_1^2 + \left(\frac{a^2}{x_1} - x_1 \right)^2 \right]}.$$

Délka úseku normály

$$n = \frac{b \sqrt{(a^4 - e^2 x_1^2)}}{a^2}.$$

Délka subtangenty

$$s_t = \left| \frac{a^2}{x_1} - x_1 \right|.$$

Délka subnormály

$$s_n = \left| \frac{b^2 x_1}{a^2} \right|.$$

Tečna a normála elipsy $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ v bodě $P_1[x_1, y_1]$

Rovnice tečny:

$$\frac{(x-m)(x_1-m)}{a^2} + \frac{(y-n)(y_1-n)}{b^2} = 1;$$

směrnice

$$k_t = -\frac{b^2(x_1 - m)}{a^2(y_1 - n)}.$$

Rovnice normály:

$$y - y_1 = \frac{a^2(y_1 - n)}{b^2(x_1 - m)} (x - x_1);$$

směrnice

$$k_n = \frac{a^2(y_1 - n)}{b^2(x_1 - m)}.$$

Polára bodu $P_0[x_0, y_0]$ vzhledem k elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Polárou bodu P_0 vzhledem k elipse nazýváme množinu všech bodů harmonicky sdružených s bodem P_0 vzhledem k průsečíkům přímek jdoucích bodem P_0 s danou elipsou. Bod P_0 se nazývá *pól poláry vzhledem k elipse*.

$$\text{Polára bodu } P_0[x_0, y_0] \text{ vzhledem k elipse } \frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x - m)(x_0 - m)}{a^2} + \frac{(y - n)(y_0 - n)}{b^2} = 1.$$

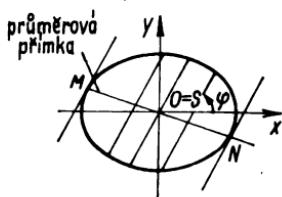
Průměrová přímka elipsy (obr. 277)

Průměrem MN elipsy nazýváme úsečku, která obsahuje střed S elipsy a jejíž krajní body M, N leží na elipse. Polovina průměru elipsy se nazývá *poloměr elipsy*. Průměrovou přímkou MN elipsy (někdy se také stručně nazývá *průměr elipsy*) nazýváme přímku, která obsahuje průměr MN elipsy.

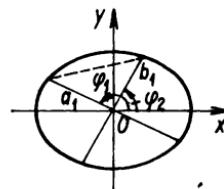
Rovnice průměrové přímky elipsy:

$$y = -\frac{b^2}{a^2 k} x,$$

kde k je směrnice příslušných rovnoběžných tětiv, které jsou průměrovou přímkou půleny.



Obr. 277. Průměrová přímka elipsy



Obr. 278. Sdružené průměry elipsy

Průměrová přímka osnovy rovnoběžných tětiv elipsy prochází dotykovými body tečen rovnoběžných s těmito tětivami. Průměrová přímka tětivy elipsy, v jejichž krajních bodech jsou vedeny tečny, prochází průsečíkem těchto tečen.

Sdruženými průměry elipsy (obr. 278) nazýváme takové dva průměry elipsy, že tečny elipsy v krajních bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné s průměrovou přímkou druhého průměru, tj. takové dva průměry elipsy, z nichž každý půlí tětivy elipsy rovnoběžné s druhým průměrem. Poloviny a_1, b_1 dvou sdružených průměrů elipsy se nazývají *sdružené poloměry elipsy*. *Sdruženými průměrovými přímkami u, v elipsy* nazýváme takové dvě průměrové přímky, které obsahují sdružené průměry.

Přímky

$$y = k_1 x \quad \text{a} \quad y = k_2 x$$

jsou sdruženými průměrovými přímkami elipsy, právě když

$$k_1 k_2 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Pro dva sdružené průměry elipsy o délkách $2a_1$ a $2b_1$ platí

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &= a^2 + b^2, \\ a_1 b_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) &= ab, \end{aligned}$$

což slovy lze vyjádřit takto: Obsah trojúhelníku vytvořeného ze dvou sdružených poloměrů elipsy a ze spojnice jejich krajních bodů na elipse je konstantní.

Rovnice elipsy dané dvěma sdruženými poloměry o délkách a_1 a b_1 má tvar

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

Poloměr křivosti R a střed křivosti $S_k[\xi, \eta]$ elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

V bodě $P_1[x_1, y_1]$ je

$$R = \frac{1}{a^4 b^4} \sqrt{(a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2)^3} = \frac{\sqrt{(a^4 - e^2 x_1^2)^3}}{a^4 b} = \frac{n^3}{p^2},$$

kde n je délka úseku normály (viz str. 432);

$$\xi = \frac{e^2 x_1^3}{a^4}, \quad \eta = -\frac{e^2 y_1^3}{b^4} = -\frac{e^2 a^2 y_1^3}{b^4}.$$

V hlavním vrcholu $A[-a, 0]$ je

$$R = \frac{b^2}{a} = p; \quad \xi = -\frac{e^2}{a}, \quad \eta = 0.$$

V hlavním vrcholu $B[a, 0]$ je

$$R = \frac{b^2}{a} = p; \quad \xi = \frac{e^2}{a}, \quad \eta = 0.$$

Ve vedlejším vrcholu $D[0, -b]$ je

$$R = \frac{a^2}{b}; \quad \xi = 0, \quad \eta = \frac{e^2}{b}.$$

Ve vedlejším vrcholu $C[0, b]$ je

$$R = \frac{a^2}{b}; \quad \xi = 0, \quad \eta = -\frac{e^2}{b}.$$

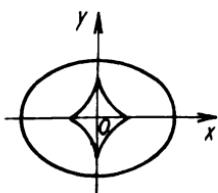
Vedlejší a hlavní kružnice elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (viz obr. 275)

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{a} \quad x^2 + y^2 = b^2$$

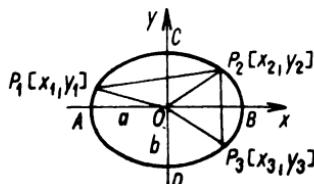
Evoluta elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (obr. 279)

$$\left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{2/3} + \left(\frac{b\eta}{e^2}\right)^{2/3} = 1 \quad \text{pro} \quad |\xi| \leq \frac{e^2}{a}$$

(tzv. *asteroida*).



Obr. 279. Evoluta elipsy



Obr. 280. Eliptická úseč a výseč

Obsah elipsy, eliptické úseče a eliptické výseče (obr. 280)

Obsah vnitřní oblasti elipsy:

$$S = \pi ab.$$

Obsah eliptické úseče P_1P_2C (viz obr. 280):

$$S = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{ab}{2} \left(\arcsin \frac{x_2}{a} - \arcsin \frac{x_1}{a} \right).$$

Obsah eliptické úseče P_2P_3B (viz obr. 280)

$$S = ab \arccos \frac{x_2}{a} - x_2 y_2.$$

Obsah eliptické výseče P_2OP_3B (viz obr. 280)

$$S = ab \arccos \frac{x_2}{a}.$$

Obsah eliptické výseče P_1OP_2C (viz obr. 280)

$$S = \frac{ab}{2} \left(\arcsin \frac{x_2}{a} - \arcsin \frac{x_1}{a} \right).$$

Délka elipsy

$$d = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{\varepsilon^6}{5} - \dots \right].$$

Přibližné vzorce:

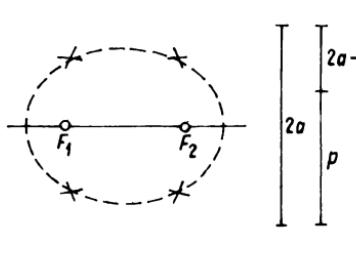
$$d \approx \pi \left[\frac{3}{2}(a + b) - \sqrt{(ab)} \right],$$

$$d \approx \frac{1}{2}\pi [a + b + \sqrt{2(a^2 + b^2)}].$$

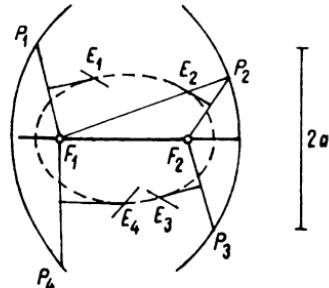
Konstrukce elipsy

Jsou dány ohniska a délka 2a hlavní osy (obr. 281)

Kolem ohnisek F_1 a F_2 opíšeme kružnice s poloměry $p < 2a$ a $2a - p$ a dostaneme průsečíky, které jsou čtyřmi souměrně sdruženými body elipsy.



Obr. 281. Konstrukce elipsy (jsou dány délka hlavní osy a ohniska)



Obr. 282. Konstrukce elipsy (jsou dány délka hlavní osy a ohniska)

Jsou dány ohniska a délka 2a hlavní osy (obr. 282)

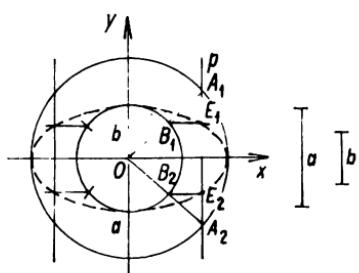
Kolem ohniska F_1 opíšeme kružnici s poloměrem $2a$ (tzv. řidící kružnice), spojime libovolný bod P_2 řidicí kružnice s druhým ohniskem F_2 a sestrojíme

osu takto vzniklé spojnice P_2F_2 . Průsečík E_2 této osy s úsečkou P_2F_1 je bodem elipsy. Stejně lze postupovat u řídicí kružnice opsané kolem ohniska F_2 .

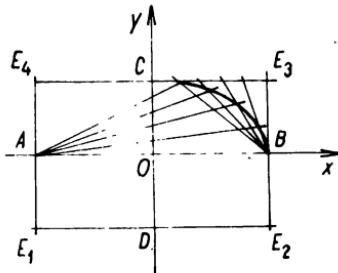
Jsou dány délky a a b poloos

1. způsob konstrukce (obr. 283)

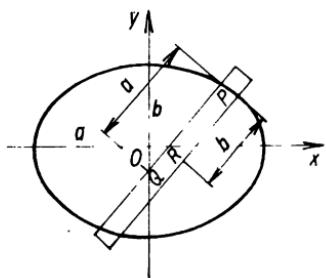
Kolem bodu O opíšeme vedlejší kružnici s poloměrem b a hlavní kružnici s poloměrem a . Potom sestrojíme k ose x libovolnou kolmici p , která protne hlavní kružnici v bodech A_1 a A_2 . Spojnice OA_1 a OA_2 protínají vedlejší kružnici v bodech B_1 a B_2 . Rovnoběžky s osou x , vedené body B_1 a B_2 , protínají kolmici p ve dvou bodech E_1 a E_2 elipsy.



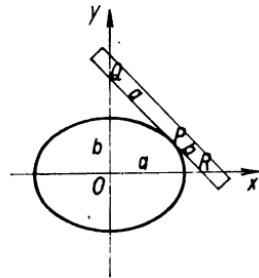
Obr. 283. Konstrukce elipsy (jsou dány délky poloos)



Obr. 284. Konstrukce elipsy (jsou dány délky poloos)



Obr. 285. Proužková konstrukce elipsy
 $(|QR| = a - b)$



Obr. 286. Proužková konstrukce elipsy
 $(|QR| = a + b)$

2. způsob konstrukce (obr. 284)

Vrcholy A, B, C, D vedeme rovnoběžky s osami souřadnic, které se vzájemně protnou v bodech E_1, E_2, E_3, E_4 . Potom rozdělíme úsečky OC a E_3C na stejný počet stejných dílů. Vedeme spojnice dělicích bodů úsečky OC a bodu A a spojnice dělicích bodů úsečky E_3C a bodu B . Průsečíky odpovídajících si

spojnic jsou hledané body elipsy. Sestrojíme body souměrné sdružené podle osy x , popř. y a dostaneme ostatní body elipsy.

3. způsob konstrukce (proužková konstrukce) (obr. 285)

Na proužek papíru s přímou hranou naneseme na sebe od bodu P obě poloosy o délkách $|PQ| = a$ a $|PR| = b$ ($|QR| = a - b$). Posunujeme-li nyní proužek papíru tak, aby se bod Q pohyboval po ose y a bod R po ose x , opisuje bod P elipsu (jde o princip elipsografu).

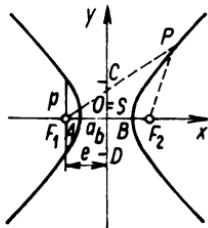
4. způsob konstrukce (obr. 286)

Na proužek papíru s přímou hranou naneseme za sebou obě poloosy o délkách $|PQ| = a$ a $|PR| = b$ ($|QR| = a + b$). Posunujeme-li nyní proužek papíru tak, aby se bod Q pohyboval po ose y a bod R po ose x , opisuje bod P elipsu.

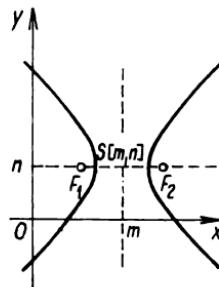
4.1.7. Hyperbola

Definice:

Hyperbolou nazýváme množinu právě těch bodů P v rovině, které mají od dvou pevných bodů F_1, F_2 (zvaných ohniska) konstantní rozdíl $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ vzdáleností, přičemž je $0 < 2a < 2e = |F_1F_2|$.



Obr. 287. Hyperbola



Obr. 288. Hyperbola v normální poloze

Označení a názvy (obr. 287):

- F_1, F_2 – ohniska,
- A, B – hlavní vrcholy,
- C, D – vedlejší vrcholy (imaginární),
- S – střed hyperboly,
- $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ (konstantní rozdíl),

PF_1, PF_2 – průvodiče,

$|SA| = |SB| = a$ – délka reálné poloosy AS , popř. SB ,

$|AB| = 2a$ – délka reálné osy AB ,

$|SC| = |SD| = b$ – délka imaginární poloosy SC , popř. SD ,

$|CD| = 2b$ – délka imaginární osy CD ,

$|F_1 F_2| = 2e$,

$e = \sqrt{a^2 + b^2}$ – délková [lineární] výstřednost [délková excentricita],

$\frac{e}{a} = \varepsilon$ – číselná [numerická] výstřednost [číselná excentricita], $\varepsilon > 1$,

$2p = \frac{2b^2}{a}$ – parametr (délka tětivy kolmé k hlavní ose a procházející ohniskem).

Kanonický tvar středové rovnice hyperboly s reálnou osou v ose x (viz obr. 287)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{neboli} \quad b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 = 0.$$

Kanonický tvar rovnice hyperboly v normální poloze (tj. reálná osa AB hyperboly je rovnoběžná s osou x a střed $S = [m, n]$) (obr. 288)

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1.$$

Vrcholová rovnice hyperboly (obr. 289)

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2$$

se středem $S = [-a, 0]$.

Obecná algebraická rovnice druhého stupně vyjadřující hyperbolu v normální poloze

Obecná rovnice druhého stupně v x a y

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

vyjadřuje hyperbolu v normální poloze (tj. reálná osa hyperboly je rovnoběžná s osou x), právě když

$$\operatorname{sgn} a_{11} \neq \operatorname{sgn} a_{22} = \operatorname{sgn} (a_{22}a_{13}^2 + a_{11}a_{23}^2 - a_{11}a_{22}a_{33}), \quad a_{12} = 0,$$

takže obecná rovnice hyperboly má tvar

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

přičemž délka reálné poloosy

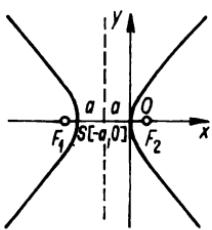
$$a = \sqrt{\frac{a_{22}a_{13}^2 + a_{11}a_{23}^2 - a_{11}a_{22}a_{33}}{a_{11}^2a_{22}}}.$$

délka imaginární poloosy

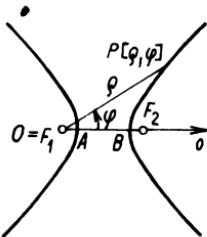
$$b = \sqrt{\left(-\frac{a_{22}a_{13}^2 + a_{11}a_{23}^2 - a_{11}a_{22}a_{33}}{a_{11}a_{22}^2} \right)}$$

a střed hyperboly

$$S = \left[-\frac{a_{13}}{a_{11}}, \frac{a_{23}}{a_{22}} \right].$$



Obr. 289. Vrcholová rovnice hyperboly



Obr. 290. Hyperbola v polárním vyjádření ($O = F_1$)

Inverzní rovnice hyperboly

Rovnice

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

je kanonickým tvarem středové rovnice hyperboly s reálnou osou v ose y a se středem v počátku.

Rovnice

$$x^2 = 2py + \frac{p}{a}y^2$$

je rovnici hyperboly s reálnou osou v ose y ; a je délka reálné poloosy, p je poloparametr, střed hyperboly $S = [0, -a]$.

Polární rovnice hyperboly

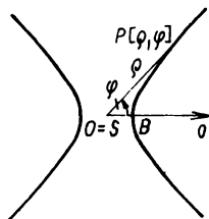
Jestliže ohnisko F_1 je pólem O a polární osou o je polopřímka $F_1 A$ (obr. 290), je

$$\varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (\varepsilon > 1),$$

přičemž těm hodnotám argumentu φ , pro které vyjde $\varrho > 0$, resp. $\varrho < 0$, přiřazujeme bod $[\varrho, \varphi]$, resp. $[-\varrho, \varphi + \pi]$.

Jestliže střed hyperboly je pólem O a polární osou o je polopřímka SB (tj. první kladná poloosa) (obr. 291), je

$$\varrho^2 = \frac{b^2}{\varepsilon^2 \cos^2 \varphi - 1} \quad (\varepsilon > 1).$$



Obr. 291. Hyperbola v polárním vyjádření ($O = S$)

Parametrické rovnice hyperboly

$$x = \frac{a}{\cos t}, \quad y = \pm b \operatorname{tg} t;$$

$$x = \pm a \cosh t, \quad y = b \sinh t.$$

Rovnice rovnoosé hyperboly

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (b = a).$$

Délky průvodiců PF_1 a PF_2 hyperboly $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ s bodem $P[x, y]$

$$|PF_1| = \varepsilon x + a,$$

$$|PF_2| = \varepsilon x - a,$$

přičemž

$$|PF_1| - |PF_2| = 2a.$$

Průsečíky přímky $y = kx + q$ s hyperbolou $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\left. \begin{array}{l} x_{1,2} = \frac{a^2 k q}{b^2 - a^2 k^2} \pm \frac{ab}{b^2 - a^2 k^2} \sqrt{(b^2 + q^2 - a^2 k^2)}, \\ y_{1,2} = \frac{b^2 q}{b^2 - a^2 k^2} \pm \frac{abk}{b^2 - a^2 k^2} \sqrt{(b^2 + q^2 - a^2 k^2)}, \end{array} \right\} b^2 - a^2 k^2 \neq 0.$$

Odmocněnec $b^2 + q^2 - a^2 k^2 = D$ (diskriminant) udává:

$D > 0$ – přímka protíná hyperbolu právě ve dvou reálných bodech (přímka je sečnou);

$D = 0$ – přímka se dotýká hyperboly právě v jednom bodě (v dvojném bodě) (přímka je tečnou);

$D < 0$ – přímka hyperbolu neprotíná v žádném reálném bodě (přímka je vnější přímkou hyperboly).

Zvláštní případy:

$$1. \quad b^2 - a^2 k^2 = 0, \quad k \neq 0, \quad q \neq 0.$$

Přímka protíná hyperbolu právě v jednom bodě $[x_0, y_0]$ a je rovnoběžná s jednou ze dvou asymptot:

$$x_0 = -\frac{q^2 + b^2}{2kq}, \quad y_0 = \frac{q^2 - b^2}{2q}.$$

$$2. \quad b^2 - a^2 k^2 = 0, \quad k \neq 0, \quad q = 0.$$

Přímka je asymptotou a její rovnice má tvar jedné z rovnic pro asymptoty:

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Tečná a normála hyperboly $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ v bodě $P_1[x_1, y_1]$ (obr. 292)

Rovnice tečny:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1;$$

směrnice

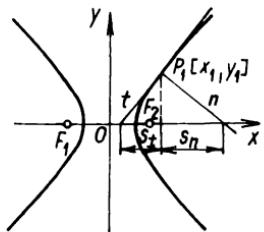
$$k_t = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Rovnice normály:

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1);$$

směrnice

$$k_n = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}.$$



Obr. 292. Úsek tečny a úsek normály hyperboly

Délka úseku tečny

$$t = \sqrt{\left[y_1^2 + \left(x_1 - \frac{a^2}{x_1} \right)^2 \right]}.$$

Délka úseku normály

$$n = \frac{b}{a^2} \sqrt{(e^2 x_1^2 - a^4)}.$$

Délka subtangenty

$$s_t = \left| x_1 - \frac{a^2}{x_1} \right|.$$

Délka subnormály

$$s_n = \left| \frac{b^2 x_1}{a^2} \right|.$$

Tečna a normála hyperboly $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ v bodě $P_1[x_1, y_1]$

Rovnice tečny:

$$\frac{(x-m)(x_1-m)}{a^2} - \frac{(y-n)(y_1-n)}{b^2} = 1;$$

směrnice

$$k_t = \frac{b^2(x_1 - m)}{a^2(y_1 - n)}.$$

Rovnice normály:

$$y - y_1 = -\frac{a^2(y_1 - n)}{b^2(x_1 - m)}(x - x_1);$$

směrnice

$$k_n = -\frac{a^2(y_1 - n)}{b^2(x_1 - m)}.$$

Asymptoty

Asymptotou hyperboly nazýváme takovou přímku p , že vzdálenost bodu M hyperboly od přímky p konverguje k nule, jestliže první souřadnice bodu M konverguje k $+\infty$, popř. $-\infty$. Asymptoty procházejí středem hyperboly a mají rovnice

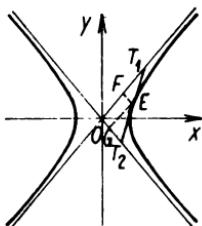
$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Část $T_1 T_2$ každé tečny mezi asymptotami je půlēna svým dotykovým bodem E (obr. 293), takže platí

$$|T_1 E| = |T_2 E|.$$

Věta o trojúhelníku s konstantním obsahem (viz obr. 293)

Obsah trojúhelníku $T_1 O T_2$ je konstantní ($S = ab$).



Obr. 293. Asymptoty hyperboly

Věta o rovnoběžníku s konstantním obsahem

Jsou-li EF a EG rovnoběžky s asymptotami (viz obr. 293), je obsah vzniklého rovnoběžníku $OGEF$ konstantní ($S = ab/2$).

Asymptotická rovnice hyperboly

Zvolíme-li asymptoty za souřadnicové osy, dostaneme pro hyperbolu (při $a \neq b$) kosoúhlou souřadnicovou soustavu, v níž má rovnice hyperboly tvar

$$x'y' = \frac{e^2}{4}.$$

Asymptoty rovnoosé hyperboly (tj. při $a = b$) jsou k sobě kolmé, takže v tomto případě je souřadnicová soustava pravoúhlá. Rovnice rovnoosé hyperboly má pak tvar

$$x'y' = \frac{a^2}{2}.$$

Každá rovnice tvaru

$$y = \frac{Ax + B}{Cx + D} \quad (AD - BC \neq 0, \quad C \neq 0)$$

vyjadřuje hyperbolu, jejíž asymptoty jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami.

Polára bodu $P_0[x_0, y_0]$ vzhledem k hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Polárou bodu P_0 vzhledem k hyperbole nazýváme množinu všech bodů harmonicky sdružených s bodem P_0 vzhledem k průsečíkům přímek jdoucích bodem P_0 s danou hyperbolou. Bod $P_0[x_0, y_0]$ se nazývá pól poláry vzhledem k hyperbole.

Průměrová přímka hyperboly

Průměrem MN hyperboly nazýváme úsečku, která obsahuje střed hyperboly a jejíž krajní body M, N leží na hyperbole (obr. 294). Přímka MN se nazývá průměrová přímka hyperboly [někdy stručně průměr hyperboly].

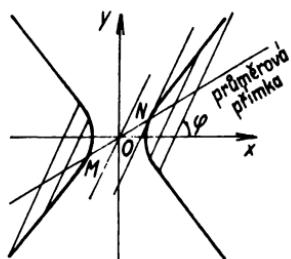
Rovnice průměrové přímky:

$$y = \frac{b^2}{a^2 k} x,$$

kde k je směrnice příslušných rovnoběžných tětv, které jsou průměrovou přímkou půleny.

Sdruženými průměry hyperboly nazýváme takové dva průměry hyperboly, že tečny hyperboly v krajních bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné

s průměrovou přímkou druhého průměru, tj. takové dva průměry hyperboly, z nichž každý půlí tětivy hyperboly rovnoběžné s druhým průměrem. Poloviny dvou sdružených průměrů hyperboly se nazývají *sdružené poloměry hyperboly*. *Sdruženými průměrovými přímky hyperboly* nazýváme takové dvě průměrové přímky, které obsahují sdružené průměry.



Obr. 294. Průměrová přímka hyperboly

Přímky

$$y = k_1 x \quad \text{a} \quad y = k_2 x$$

jsou sdruženými průměrovými přímky, právě když

$$k_1 k_2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Pro dva sdružené průměry o délkách $2a_1$ a $2b_1$ platí

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2.$$

Rovnice hyperboly dané dvěma sdruženými poloměry o délkách a_1 a b_1 má tvar

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

Poloměr křivosti R a střed křivosti $S_k[\xi, \eta]$ hyperboly $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

V bodě $P_1[x_1, y_1]$

$$R = \frac{1}{a^4 b^4} \sqrt{(b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2)^3} = \frac{\sqrt{(e^2 x_1^2 - a^4)^3}}{a^4 b} = \frac{n^3}{p^2},$$

kde n je délka úseku normály (viz str. 443);

$$\xi = \frac{e^2 x_1^3}{a^4}, \quad \eta = -\frac{e^2 y_1^3}{b^4} = \frac{-e^2 a^2 y_1^3}{b^4}.$$

Ve vrcholu $A[-a, 0]$ je

$$R = \frac{b^2}{a} = p; \quad \xi = -\frac{e^2}{a}, \quad \eta = 0.$$

Ve vrcholu $B[a, 0]$ je

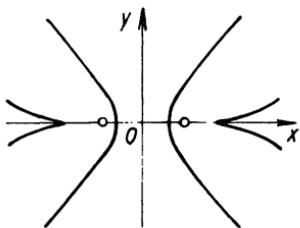
$$R = \frac{b^2}{a} = p; \quad \xi = \frac{e^2}{a}, \quad \eta = 0.$$

Hlavní kružnice hyperboly:

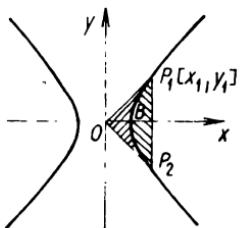
$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Evoluta hyperboly $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (obr. 295)

$$\left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{2/3} - \left(\frac{b\eta}{e^3}\right)^{2/3} = 1 \quad \text{pro} \quad |\xi| \geq \frac{e^2}{a}.$$



Obr. 295. Evoluta hyperboly



Obr. 296. Hyperbolická úseč
a hyperbolická výseč

Obsah hyperbolické úseče P_1BP_2 (obr. 296)

$$S = x_1 y_1 - ab \ln \left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} \right) = x_1 y_1 - \operatorname{argcosh} \frac{x_1}{a}.$$

Obsah hyperbolické výseče OP_2BP_1

$$S = ab \ln \left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} \right) = \operatorname{argcosh} \frac{x_1}{a}.$$

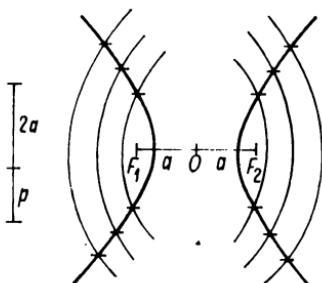
Konstrukce hyperboly

Jsou dány ohniska F_1 a F_2 a délka $2a$ hlavní osy (obr. 297)

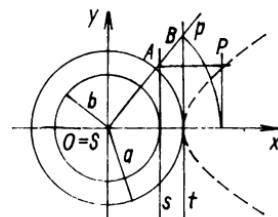
Kolem ohnisek F_1 a F_2 opíšeme kružnice s libovolným poloměrem p a s poloměrem $2a + p$. Dostaneme jako průsečíky čtyři souměrně sdružené body hyperboly. Při jiném poloměru p dostaneme další body hyperboly.

Jsou dány délky a a b poloos (obr. 298)

Kolem středu O opíšeme kružnice s poloměry a a b . K těmto „řídicím kružnicím“ vedeme tečny s a t kolmé k ose x . Libovolná přímka p , vedená středem $S = O$, protne tyto tečny v bodech A a B . Potom opíšeme kolem bodu O kružnicový oblouk s poloměrem OB a sestrojíme v jeho průsečíku s osou x kolmici k ose x . Průsečík této kolmice a rovnoběžky s osou x vedené bodem A je bod P hyperboly.



Obr. 297. Konstrukce hyperboly (jsou dány délka hlavní osy a ohniska)



Obr. 298. Konstrukce hyperboly (jsou dány délky poloos)

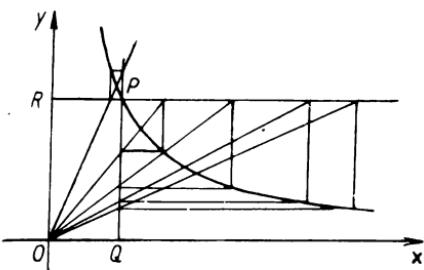
Jsou dány souřadnicové osy jako asymptoty a bod P rovnoosé hyperboly (obr. 299)

Z bodu P vedeme kolmice PQ a PR k souřadnicovým osám, prodloužíme PR za bod P a spojíme libovolné body na prodloužení s počátkem O . Průsečíky těchto spojnic s přímkou PQ vedeme rovnoběžky s osou x . Potom vedeme dělicími body na prodloužení úsečky PR rovnoběžky s osou y . Jejich průsečíky s odpovídajícími rovnoběžkami s osou x jsou body P hyperboly.

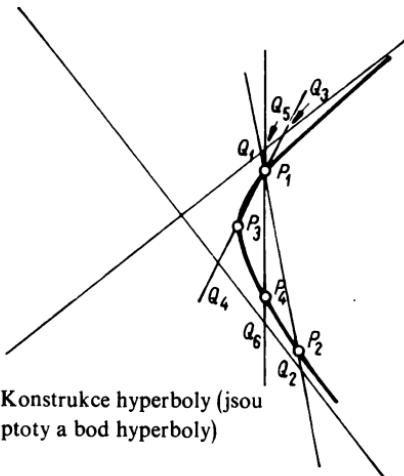
Obdobnou konstrukcí ve třetím kvadrantu dostaneme druhou větev hyperboly.

Jsou dány asymptoty a bod P_1 hyperboly (obr. 300)

Vedeme libovolnou přímku bodem P_1 , která protne asymptoty v bodech Q_1 a Q_2 , a naneseme-li na ni úsečku $Q_2P_2 \cong Q_1P_1$. Bod P_2 je dalším bodem hyperboly. Vedeme-li bodem P_1 další přímky, dostaneme další body hyperboly.



Obr. 299. Konstrukce hyperboly
(souřadnicové osy jsou asymptotami,
P je bod rovnoosé hyperboly)



Obr. 300. Konstrukce hyperboly (jsou
dány asymptoty a bod hyperboly)

4.1.8. Obecná algebraická rovnice druhého stupně v x a y

Rovnicí

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

kde koeficienty a_{ik} jsou reálná čísla, lze vyjádřit každou kuželosečku (tj. kružnice, elipsu, hyperbolu, parabolu, dvojici přímek a bod).

Invariante křivky druhého stupně:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix},$$

přičemž Δ se nazývá diskriminant kuželosečky a δ diskriminant kvadratických členů.

Poznámka:

V determinantech Δ a δ platí $a_{ik} = a_{ki}$.

Invariante jsou veličiny, které se při transformaci souřadnic nezmění.

Každá obecná rovnice druhého stupně vyjadřuje vlastní kuželosečku, jestliže číslo $\Delta \neq 0$, kdežto degenerovanou kuželosečku, jestliže číslo $\Delta = 0$.

Při $\delta \neq 0$ jsou obecnou algebraickou rovnici druhého stupně určeny elipsa nebo hyperbola, kdežto při $\delta = 0$ je jí určena parabola.

Případ 1: $\delta \neq 0$

Rovnoběžné posunutí kartézské souřadnicové soustavy

Transformační rovnice:

$$x = x' + u,$$

$$y = y' + v,$$

kde x, y jsou původní souřadnice,

x', y' jsou nové souřadnice,

$[u, v]$ je nový počátek vzhledem k původní souřadnicové soustavě:

$$u = \frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{\delta}, \quad v = \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{\delta}.$$

Určovací rovnice pro u a v jsou

$$\frac{\partial F(u, v)}{\partial u} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} = 0;$$

$[u, v]$ je střed kuželosečky.

Transformovaná rovnice má tvar

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a_{44} = 0,$$

kde

$$a_{44} = a_{13}u + a_{23}v + a_{33} = \frac{A}{\delta}.$$

Otočení kartézské souřadnicové soustavy $(O; x, y)$ o úhel α

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad (\alpha \leq 90^\circ).$$

Transformační rovnice:

$$x' = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha,$$

$$y' = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha,$$

kde ξ, η jsou nové souřadnice.

Transformovaná rovnice má tvar

$$b_{11}\xi^2 + b_{22}\eta^2 + a_{44} = 0, \tag{1}$$

kde

$$b_{11} = \frac{1}{2}\{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{[(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2]}\},$$

$$b_{22} = \frac{1}{2}\{a_{11} + a_{22} \mp \sqrt{[(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2]}\},$$

přičemž horní, resp. dolní znaménko se vezme při kladném, resp. záporném koeficientu a_{12} .

Invariant

$$b_{11} + b_{22} = a_{11} + a_{22}$$

označíme S .

Rovnice (1) vyjadřuje pro $\delta > 0$ a $\Delta \neq 0$ elipsu, a to reálnou elipsu při $b_{11} > 0$, $b_{22} > 0$, $a_{44} < 0$ a imaginární elipsu při $b_{11} > 0$, $b_{22} > 0$, $a_{44} > 0$.

Je-li $\delta > 0$, ale $\Delta = 0$, degeneruje elipsa v imaginární dvojici přímek s reálným průsečíkem v konečnu. Jestliže $\Delta = 0$, pak také $a_{44} = 0$.

Rovnice (1) vyjadřuje pro $\delta < 0$ a $\Delta \neq 0$ hyperbolu, která při $\Delta = 0$ degeneruje v reálnou dvojici protínajících se přímek.

Případ 2: $\delta = 0$

Otočení kartézské souřadnicové soustavy o úhel α

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad (\alpha \leq 90^\circ).$$

Transformační rovnice:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha,$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$

kde x, y jsou původní souřadnice,

x', y' – nové souřadnice.

Transformovaná rovnice má tvar

$$b_{11}x'^2 + 2b_{13}x' + 2b_{23}y' + a_{33} = 0,$$

kde

$$b_{11} = a_{11} + a_{22},$$

$$b_{13} = \frac{a_{13}\sqrt{a_{11} + a_{22}}}{\sqrt{(a_{11} + a_{22})}},$$

$$b_{23} = \frac{a_{23}\sqrt{a_{11} - a_{13}\sqrt{a_{22}}}}{\sqrt{(a_{11} + a_{22})}}.$$

Rovnoběžné posunutí kartézské souřadnicové soustavy $(O; x', y')$

Transformační rovnice:

$$x' = \xi - \frac{b_{13}}{b_{11}},$$

$$y' = \eta - \frac{b_{11}a_{33} - b_{13}^2}{2b_1b_{23}}.$$

Transformovaná rovnice má tvar

$$\xi^2 = -\frac{2b_{23}}{b_{11}} \eta. \quad (2)$$

Rovnice (2) vyjadřuje pro $\Delta \neq 0$ parabolu. Jestliže $\Delta = 0$, degeneruje křivka v dvojici přímek, a to

- ve dvě různé reálné rovnoběžky, jestliže

$$a_{13}^2 - a_{11}a_{33} > 0;$$

- ve dvojici splývajících rovnoběžek (tj. v dvojnou přímku), jestliže

$$a_{13}^2 - a_{11}a_{33} = 0.$$

- ve dvě imaginární rovnoběžky, jestliže

$$a_{13}^2 - a_{11}a_{33} < 0.$$

Tabulka 4.1

Shrnutí

		$\delta \neq 0$ kuželosečky se středem (středové kuželosečky)		$\delta = 0$ kuželosečky bez středu (nestředové kuželosečky)					
		$\delta > 0$	$\delta < 0$						
$\Delta \neq 0$ vlastní kuželosečky	$\Delta \cdot S < 0$ reálná elipsa	hyperbola	parabola						
	$\Delta \cdot S > 0$ imaginární elipsa								
$\Delta = 0$ nevlastní (degenerované) kuželosečky	dvojice nerovnoběžných (protinajících se) přímek			dvojice rovnoběžek					
	imaginární přímky s reálným průsečíkem v konečnu	reálné přímky	$a_{13}^2 - a_{11}a_{33}$	> 0	$= 0$	< 0			
			2 různé reálné rovnoběžky	2 splývající rovnoběžky	2 imaginární rovnoběžky				

Příklad 1:

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 18x - 12y + 15 = 0;$$

$$a_{11} = 5, \quad a_{12} = 2, \quad a_{22} = 2, \quad a_{13} = -9, \quad a_{23} = -6, \quad a_{33} = 15;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5, & 2, & -9 \\ 2, & 2, & -6 \\ -9, & -6, & 15 \end{vmatrix} \neq 0; \quad \delta = \begin{vmatrix} 5, & 2 \\ 2, & 2 \end{vmatrix} = 10 - 4 > 0.$$

Rovnice určuje elipsu.

Výpočet souřadnic u a v :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F(u, v)}{\partial x} &= 10u + 4v - 18 = 0, \\ \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} &= 4u + 4v - 12 = 0, \end{aligned} \right\}$$

$$u = 1, \quad v = 2.$$

Střed elipsy v původní souřadnicové soustavě je $S = [1, 2]$.

Výpočet a_{44} :

$$a_{44} = a_{13}u + a_{23}v + a_{33} = (-9) \cdot 1 + (-6) \cdot 2 + 15 = -6.$$

Transformovaná rovnice po rovnoběžném posunutí:

$$5x'^2 + 4x'y' + 2y'^2 - 6 = 0.$$

Výpočet úhlu otočení α :

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{4}{3}; \quad \alpha = 26^\circ 34';$$

Po dosazení do rovnice

$$b_{11} = \frac{1}{2}\{a_{11} + a_{22} + \sqrt{[(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2]}\}$$

(vzali jsme horní znaménko, neboť koeficient a_{12} je kladný), dostaneme

$$b_{11} = \frac{1}{2}\{5 + 2 + \sqrt{(5 - 2)^2 + 4 \cdot 2^2}\} = 6.$$

Podobně po dosazení je

$$b_{22} = \frac{1}{2}\{a_{11} + a_{22} - \sqrt{[(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2]}\} = \frac{1}{2}(7 - 5) = 1.$$

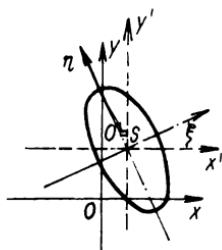
Transformovaná rovnice po otočení:

$$6\xi^2 + 1\eta^2 - 6 = 0,$$

$$\frac{\xi^2}{1} + \frac{\eta^2}{6} = 1,$$

což je rovnice elipsy s poloosami o délkách $a = \sqrt{6}$ a $b = 1$ a se středem v počátku soustavy $(S; \xi, \eta)$. Hlavní osa leží v ose η (obr. 301).

Otázka: Při jaké hodnotě absolutního členu a_{33} rovnice dojde k degeneraci elipsy?



Obr. 301. Rovnoběžné posunutí
a otočení elipsy

Podmínka zní: $\Delta = 0$ neboli $a_{44} = 0$. Z rovnice

$$a_{44} = a_{13}u + a_{23}v + a_{33} = 0$$

po dosazení dostaneme

$$-9 - 12 + a_{33} = 0;$$

$$a_{33} = 21.$$

Rovnice $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 18x - 12y + 21 = 0$ vyjadřuje tedy elipsu, která degeneruje ve svůj střed.

Příklad 2:

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 + 220x - 40y - 100 = 0;$$

$$a_{11} = 9, \quad a_{12} = -12, \quad a_{22} = 16, \quad a_{13} = 110, \quad a_{23} = -20,$$

$$a_{33} = -100;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9, & -12, & 110 \\ -12, & 16, & -20 \\ 110, & -20, & -100 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 9, & -12 \\ -12, & 16 \end{vmatrix} = 144 - 144 = 0.$$

Rovnice určuje parabolu.

Otočení souřadnicové soustavy:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{-24}{-7} = \frac{24}{7}; \quad \alpha = 36^\circ 52';$$

$$b_{11} = a_{11} + a_{22} = 25,$$

$$b_{13} = \frac{a_{13}\sqrt{a_{11} + a_{22}}}{\sqrt{(a_{11} + a_{22})}} = \frac{110\sqrt{9} + (-20)\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = 50,$$

$$b_{23} = \frac{a_{23}\sqrt{a_{11} - a_{13}\sqrt{a_{22}}}}{\sqrt{(a_{11} + a_{22})}} = \frac{-20\sqrt{9} - 110\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = -100.$$

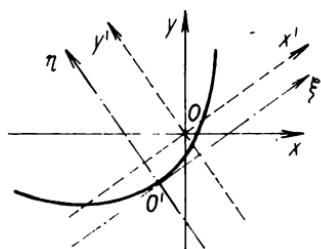
Transformovaná rovnice po otočení:

$$25x'^2 + 100x' - 200y' - 100 = 0, \\ x'^2 + 4x' - 8y' - 4 = 0.$$

Transformovaná rovnice po rovnoběžném posunutí:

$$\xi^2 = -\frac{-200}{25}\eta, \quad \xi^2 = 8\eta,$$

což je rovnice paraboly s vrcholem v počátku soustavy $(O'; \xi, \eta)$ (obr. 302) a s parametrem $2p = 8$. Osa paraboly splývá s osou η .



Obr. 302. Otočení a rovnoběžné posunutí paraboly

4.2. ANALYTICKÁ GEOMETRIE V PROSTORU

4.2.1. Různé souřadnicové soustavy

Kartézská [ortonormální] souřadnicová soustava $(O; x, y, z)$

Kartézská [ortonormální] souřadnicová soustava v prostoru se zavádí obdobně jako kartézská souřadnicová soustava v rovině, přičemž za třetí osu souřadnicové soustavy $(O; x, y, z)$ se volí přímka $OJ_3 = z$, kolmá na rovinu OJ_1J_2 (obr. 303). Polopřímku OJ_3 , resp. polopřímku k ní opačnou nazveme třetí kladnou, resp. třetí zápornou poloosou soustavy $(O; x, y, z)$.

Pravotočivá kartézská souřadnicová soustava

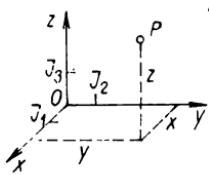
Pravotočivá soustava je charakterizována pravotočivým šroubovým pohybem, přičemž se první kladná poloosa otáčí do polohy druhé kladné poloosy a zároveň se posunuje vzhůru ve směru třetí kladné poloosy (viz obr. 303).

Souřadnice bodu P v prostoru značíme x, y, z .

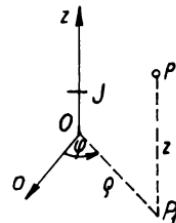
Způsob zápisu bodu: $P[x, y, z]$ nebo $P = [x, y, z]$.

Čáry v prostoru, v jejichž rovnicích se mění jen jedna souřadnice, jsou rovnoběžkami se souřadnicovými osami. Plochy, v jejichž rovnicích je jedna souřadnice konstantní (tj. roviny $x = \text{konst}$, $y = \text{konst}$ a $z = \text{konst}$) jsou rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými osami.

U kartézské souřadnicové soustavy v prostoru jde o vzájemně jednoznačné [bijektivní] zobrazení množiny všech bodů prostoru na množinu všech uspořádaných trojic $[x, y, z]$, kde $x, y, z \in \mathbb{R}$.



Obr. 303. Kartézská souřadnicová soustava



Obr. 304. Válcová [cylindrická] souřadnicová soustava

Cylindrická [válcová, semipolární] souřadnicová soustava $(O; \varrho, \varphi, z)$ (obr. 304)

Souřadnice bodu P značíme ϱ, φ, z .

Způsob zápisu bodu: $P[\varrho, \varphi, z]$ nebo $P = [\varrho, \varphi, z]$.

Cylindrická souřadnicová soustava $(O; \varrho, \varphi, z)$ se zavádí takto: V prostoru zvolíme rovinu a v ní zavedeme polární souřadnicovou soustavu $(O; \varrho, \varphi)$. Za kladnou poloosu souřadnicové osy z zvolíme polopřímku OJ , kolmou k zvolené rovině. Souřadnice ϱ, φ jsou tedy polárními souřadnicemi průmětu bodu P na rovinu xy a souřadnice z je třetí kartézskou souřadnicí bodu P .

Plochy $\varrho = \text{konst}$ jsou rotační válcové plochy se společnou osou z .

Plochy $\varphi = \text{konst}$ jsou poloroviny, jejichž hraniční přímky splývají s přímkou OJ .

Plochy $z = \text{konst}$ jsou roviny kolmé k ose z .

Vztahy mezi cylindrickými a kartézskými souřadnicemi

Souřadnice bodu v kartézské souřadnicové soustavě $(O; x, y, z)$, resp. v cylindrické souřadnicové soustavě $(O; \varrho, \varphi, z)$ značíme x, y, z , resp. ϱ, φ, z . Přitom polární osa je totožná s první kladnou poloosou soustavy $(O; x, y, z)$ a kladná poloosa osy z soustavy $(O; \varrho, \varphi, z)$ splývá s třetí kladnou poloosou soustavy $(O; x, y, z)$.

Platí

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\varrho}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\varrho} \quad \text{pro } \forall \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

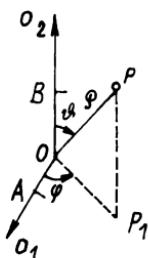
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad \text{pro } \forall \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \setminus \left\{ \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \right\}.$$

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Sférická [kulová, polární] souřadnicová soustava $(O; \varrho, \varphi, \vartheta)$ (obr. 305)

Souřadnice bodu P značíme $\varrho, \varphi, \vartheta$.

Způsob zápisu bodu: $P[\varrho, \varphi, \vartheta]$ nebo $P = [\varrho, \varphi, \vartheta]$.



Obr. 305. Kulová [sférická]
souřadnicová soustava

Sférická souřadnicová soustava $(O; \varrho, \varphi, \vartheta)$ se zavádí takto: V prostoru zvolíme rovinu a v ní polopřímku OA . Dále zvolíme polopřímku OB , kolmou k zvolené rovině. Souřadnice ϱ bodu P je vzdálenost $|OP|$ bodu P od počátku (polu) O . Souřadnice φ je velikost orientovaného úhlu, který svírá polopřímka OA a polopřímka OP_1 , kde P_1 je průmět bodu P do zvolené roviny ($0 \leq \varphi < 2\pi$). Souřadnice ϑ je velikost orientovaného úhlu, který svírá polopřímka OP s polopřímkou OB ($0 \leq \vartheta < \pi$).

Plochy $\varrho = \text{konst}$ jsou soustředné kulové plochy se středem v polu O .

Plochy $\varphi = \text{konst}$ jsou poloroviny, jejichž hraniční přímky splývají s přímkou OB .

Plochy $\vartheta = \text{konst}$ jsou rotační kuželové plochy s vrcholem v pólu O a s osou splývající s přímkou OB .

Vztahy mezi sférickými a kartézskými souřadnicemi

Souřadnice bodu v kartézské souřadnicové soustavě $(O; x, y, z)$, resp. ve sférické souřadnicové soustavě $(O; \varrho, \varphi, \vartheta)$ značíme x, y, z , resp. $\varrho, \varphi, \vartheta$. Přitom polopřímka OA splývá s kladnou částí osy x soustavy $(O; x, y, z)$ a polopřímka OB splývá s kladnou částí osy z soustavy $(O; x, y, z)$.

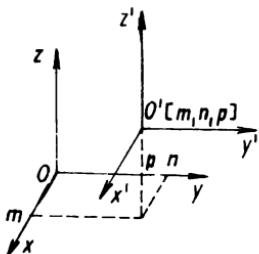
$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{pro } \forall \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

$$\cos \vartheta = \frac{z}{\varrho}, \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{z} \quad \text{pro } \forall \vartheta \in \langle 0, \pi \rangle,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{z} \quad \text{pro } \forall \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \setminus \left\{ \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \right\},$$

$$x = \varrho \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = \varrho \cos \vartheta.$$



Obr. 306. Rovnoběžné posunutí

Transformace kartézské souřadnicové soustavy

1. Rovnoběžné posunutí (obr. 306):

$$\begin{aligned} x &= x' + m, & x' &= x - m, \\ y &= y' + n, & y' &= y - n, \\ z &= z' + p; & z' &= z - p, \end{aligned}$$

kde x, y, z jsou původní souřadnice,

x', y', z' – nové souřadnice,

m, n, p – souřadnice nového počátku v původní soustavě.

2. Otočení:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3, \\y &= x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3, \\z &= x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3; \\z' &= x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1, \\y' &= x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2, \\z' &= x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3,\end{aligned}$$

kde $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ jsou velikosti úhlů, které svírá první kladná poloosa soustavy $(O; x', y', z')$ s kladnými poloosami soustavy $(O; x, y, z)$.

- $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ – velikosti úhlů, které svírá druhá kladná poloosa soustavy $(O; x', y', z')$ s kladnými poloosami soustavy $(O; x, y, z)$.
- $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ – velikosti úhlů, které svírá třetí kladná poloosa soustavy $(O; x', y', z')$ s kladnými poloosami soustavy $(O; x, y, z)$.

Vztahy mezi směrovými kosiny nových os:

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 &= 1, \\ \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 &= 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 &= 0, \\ \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3 &= 0.\end{aligned}$$

Další vzorce se dostanou cyklickou záměnou.

Platí

$$A = \begin{vmatrix} \cos \alpha_1, & \cos \beta_1, & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2, & \cos \beta_2, & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3, & \cos \beta_3, & \cos \gamma_3 \end{vmatrix} = 1.$$

4.2.2. Body a úsečky v prostoru

Vzdálenost δ dvou bodů $P_1[x_1, y_1, z_1]$ a $P_2[x_2, y_2, z_2]$

$$|P_1 P_2| = \sqrt{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]} = \delta.$$

Průmět [projekce] úsečky délky $\delta = |P_1 P_2|$ do souřadnicových os

$$\delta_x = \delta \cos \alpha, \quad \delta_y = \delta \cos \beta, \quad \delta_z = \delta \cos \gamma$$

$(\alpha, \beta, \gamma$ jsou velikosti směrových úhlů vektoru $\overrightarrow{P_1 P_2}$).

$$\begin{aligned}\delta^2 &= \delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2, \\ \delta &= \delta_x \cos \alpha + \delta_y \cos \beta + \delta_z \cos \gamma, \\ \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1,\end{aligned}$$

kde $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ jsou směrové kosiny vektoru $\overrightarrow{P_1 P_2}$.

Souřadnice bodu D s dělicím poměrem λ vzhledem k bodům P_1 a P_2

$$x_D = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y_D = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}, \quad z_D = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda},$$

přičemž $\lambda > 0$, resp. $\lambda < 0$, jestliže bod D je vnějším, resp. vnitřním dělicím bodem úsečky $P_1 P_2$.

Střed $P_0[x_0, y_0, z_0]$ úsečky $P_1 P_2$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Těžiště $T[x_T, y_T, z_T]$ trojúhelníku s vrcholy $P_1[x_1, y_1]$, $P_2[x_2, y_2]$ a $P_3[x_3, y_3]$

$$x_T = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_T = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z_T = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Pro hmotné body s hmotnostmi m_1, m_2 a m_3 ve vrcholech trojúhelníku $P_1 P_2 P_3$ platí

$$\begin{aligned}x_T &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, & y_T &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \\ z_T &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3}{m_1 + m_2 + m_3}\end{aligned}$$

a obecně pro n hmotných bodů platí

$$x_T = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad y_T = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad z_T = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

Obsah trojúhelníku $P_1P_2P_3$ v prostoru

$$S = \sqrt{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)},$$

kde

$$S_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} y_1, & z_1, & 1 \\ y_2, & z_2, & 1 \\ y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix}, \quad S_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} z_1, & x_1, & 1 \\ z_2, & x_2, & 1 \\ z_3, & x_3, & 1 \end{vmatrix},$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

Objem čtyřstěnu $P_1P_2P_3P_4$ (P_1 je hlavní vrchol)

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 - x_2, & y_1 - y_2, & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3, & y_1 - y_3, & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4, & y_1 - y_4, & z_1 - z_4 \end{vmatrix}$$

(ve vzorcích jde o absolutní hodnoty determinantů).

Jestliže všechny čtyři body leží v jedné a též rovině, pak determinant $6V = 0$.

Úhel dvou rádiusvektorů $\overline{OP}_1 = \mathbf{r}_1$ a $\overline{OP}_2 = \mathbf{r}_2$ o velikosti φ

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}, \end{aligned}$$

kde $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, resp. $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ jsou velikosti směrových úhlů rádiusvektoru \overline{OP}_1 , resp. \overline{OP}_2 .

Vektory $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ jsou vzájemně kolmé, právě když $\cos \varphi = 0$.

4.2.3. Rovina v prostoru

Obecný tvar rovnice roviny σ

$$\sigma \equiv ax + by + cz + d = 0, \text{ stručně } R = 0.$$

(koeficienty a, b, c nejsou zároveň rovny nule).

Úseky na souřadnicových osách

$$p = -\frac{d}{a}, \quad q = -\frac{d}{b}, \quad r = -\frac{d}{c}.$$

Vzdálenost počátku O od roviny

Vzdálenost počátku O od roviny $ax + by + cz + d = 0$ se rovná číslu $|\delta|$, kde

$$\delta = \frac{d}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}.$$

Směrové kosiny roviny $ax + by + cz + d = 0$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\varepsilon \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}},$$

$$\cos \beta = \frac{b}{\varepsilon \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}},$$

$$\cos \gamma = \frac{c}{\varepsilon \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}},$$

kde $\varepsilon = 1$, resp. $\varepsilon = -1$ podle toho, zda $\operatorname{sgn} d = -1$, resp. $\operatorname{sgn} d = 1$. Veličiny α, β, γ jsou velikosti směrových úhlů kolmice k z počátku O k dané rovině, tj. velikosti úhlů, které kolmice k svírá s kladnými poloosami souřadnicových os.

Rovnice souřadnicových rovin:

$z = 0$ je rovnice roviny xy ,

$y = 0$ je rovnice roviny xz ,

$x = 0$ je rovnice roviny yz .

Zvláštní případy:

$d = 0$ – rovina prochází počátkem:

$$ax + by + cz = 0;$$

$a = 0$ – rovina je rovnoběžná s osou x :

$$by + cz + d = 0;$$

$b = 0$ – rovina je rovnoběžná s osou y :

$$ax + cz + d = 0;$$

$c = 0$ – rovina je rovnoběžná s osou z :

$$ax + by + d = 0;$$

$a = b = 0$ – rovina je rovnoběžná s rovinou xy :

$$cz + d = 0;$$

$a = c = 0$ – rovina je rovnoběžná s rovinou xz :

$$by + d = 0;$$

$b = c = 0$ – rovina je rovnoběžná s rovinou yz :

$$ax + d = 0;$$

$a = d = 0$ – rovina prochází osou x :

$$by + cz = 0;$$

$b = d = 0$ – rovina prochází osou y :

$$ax + cz = 0;$$

$c = d = 0$ – rovina prochází osou z :

$$ax + by = 0.$$

Úsekový tvar rovnice roviny

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

kde p, q, r jsou tzv. úseky (vytlaté rovinou) na souřadnicových osách (viz str. 461).

Normálový tvar rovnice roviny

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - n = 0,$$

kde n je vzdálenost počátku O od roviny, tj. délka kolmice z počátku O k rovině.

Veličiny $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ jsou směrové kosiny roviny (viz str. 462).

Transformace obecného tvaru rovnice roviny v normálový tvar:

$$\frac{ax + by + cz + d}{\varepsilon \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} = 0,$$

kde $\varepsilon = 1$, resp. $\varepsilon = -1$ podle toho, zda $\operatorname{sgn} d = -1$, resp. $\operatorname{sgn} d = 1$.

Vzdálenost bodu $P_0[x_0, y_0, z_0]$ od roviny $\sigma \sim ax + by + cz + d = 0$

Vzdálenost bodu P_0 od roviny σ je číslo $|\delta|$, kde

$$\delta = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}},$$

přičemž při $\delta < 0$ leží bod P_0 na téže straně od roviny σ jako počátek O , kdežto při $\delta > 0$ leží bod P_0 na opačné straně od roviny σ než počátek O .

Plati

$$\delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - n.$$

Rovnice svazku rovin

Jsou-li

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \end{aligned}$$

rovnice dvou daných rovin, přičemž označíme

$$R_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \quad R_2 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2,$$

pak svazek rovin procházejících průsečnicí dvou daných rovin $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ má rovnici

$$\mu R_1 + \lambda R_2 = 0,$$

kde čísla $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ nejsou zároveň rovna nule.

Roviny půlící úhly dvou různoběžných rovin

Jsou-li $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ ($i = 1, 2$) rovnice dvou daných rovin v obecném tvaru, pak rovnice rovin půlících úhly dvou různoběžných rovin mají tvar

$$\frac{a_1x + b_1c + c_1x + d_1}{\varepsilon_1 \sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)}} \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\varepsilon_2 \sqrt{(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}} = 0,$$

kde $\varepsilon_1 = -\operatorname{sgn} d_1$ a $\varepsilon_2 = -\operatorname{sgn} d_2$.

Průsečík $P[x_P, y_P, z_P]$ tří rovin

Jsou-li $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) rovnice tří rovin v obecném tvaru, pak jejich průsečík má souřadnice

$$x_P = -\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y_P = -\frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z_P = -\frac{\Delta_z}{\Delta},$$

kde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1, & b_1, & c_1 \\ d_2, & b_2, & c_2 \\ d_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1, & d_1, & c_1 \\ a_2, & d_2, & c_2 \\ a_3, & d_3, & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & d_3 \end{vmatrix} \cdot$$

Podmínka: $\Delta \neq 0$.

Podmínka, že čtyři roviny procházejí právě jedním bodem

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix} = 0,$$

kde a_i, b_i, c_i, d_i jsou koeficienty rovnic $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) čtyř rovin v obecném tvaru.

Odhylka φ dvou rovin

Jsou-li $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ ($i = 1, 2$) rovnice dvou daných rovin v obecném tvaru, platí

$$\cos \varphi = \left| \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{[(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)]}} \right| \quad (0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ).$$

Dvě roviny jsou rovnoběžné, právě když

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2,$$

tj. právě když $a_2 = \lambda a_1, b_2 = \lambda b_1, c_2 = \lambda c_1$ pro vhodné číslo λ .

Dvě roviny jsou vzájemně kolmé, právě když

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0.$$

Obsahy S_{xy} , S_{yz} , S_{xz} průmětů rovinného obrazce o obsahu S do rovin xy , yz , xz

$$S_{xy} = S \cos \gamma, \quad S_{yz} = S \cos \alpha, \quad S_{xz} = S \cos \beta,$$

kde α, β, γ jsou velikosti směrových úhlů kolmice k z počátku O k rovině, v níž leží daný rovinný obrazec o obsahu S , tj. velikosti úhlů, které kolmice k svírá s kladnými poloosami souřadnicových os.

Platí

$$S^2 = S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{xz}^2,$$

$$S = S_{xy} \cos \gamma + S_{yz} \cos \alpha + S_{xz} \cos \beta.$$

4.2.4. Přímka v prostoru

Obecný tvar rovnice přímky

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, & \text{stručně } R_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, & \text{stručně } R_2 = 0. \end{cases}$$

Přímka je průsečnicí dvou rovin.

Rovnice přímky ve dvou promítacích rovinách

$$\begin{cases} y = mx + q & (\text{rovnice roviny kolmé k rovině } xy), \\ z = nx + r & (\text{rovnice roviny kolmé k rovině } xz). \end{cases}$$

Transformace obecného tvaru v právě uvedený tvar:

$$\begin{array}{llll} a_1 = -m, & b_1 = 1, & c_1 = 0, & d_1 = -q, \\ a_2 = -n, & b_2 = 0, & c_2 = 1, & d_2 = -r. \end{array}$$

Zvláštní případy:

Přímka je rovnoběžná s rovinou xy : $\begin{cases} y = mx + q, \\ z = r. \end{cases}$

Přímka je rovnoběžná s rovinou xz : $\begin{cases} z = nx + r, \\ y = q. \end{cases}$

Přímka je rovnoběžná s rovinou yz : $\begin{cases} z = oy + r, \\ x = p. \end{cases}$

Přímka je rovnoběžná s osou x : $\begin{cases} y = q, \\ z = r. \end{cases}$

Přímka je rovnoběžná s osou y : $\begin{cases} x = p, \\ z = r. \end{cases}$

Přímka je rovnoběžná s osou z : $\begin{cases} x = p, \\ y = q. \end{cases}$

Přímka prochází počátkem O : $\begin{cases} y = mx, \\ z = nx. \end{cases}$

Rovnice souřadnicových os:

Osa x : $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0; \end{cases}$

osa y : $\begin{cases} x = 0, \\ z = 0; \end{cases}$

osa z : $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

Odchylky α, β, γ přímky $\begin{cases} R_1 = 0, \\ R_2 = 0 \end{cases}$ a souřadnicových os

$$\cos \alpha = \frac{1}{N} \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix}, \quad \cos \beta = \frac{1}{N} \begin{vmatrix} c_1, & a_1 \\ c_2, & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{N} \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix},$$

$$N^2 = \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1, & a_1 \\ c_2, & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}^2.$$

Odchylky α, β, γ přímky $\begin{cases} y = mx + q, \\ z = nx + r \end{cases}$ a souřadnicových os

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{(1+m^2+n^2)}}, \quad \cos \beta = \frac{m}{\sqrt{(1+m^2+n^2)}}.$$

$$\cos \gamma = \frac{n}{\sqrt{(1+m^2+n^2)}},$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Rovnice přímky určené bodem $P_1[x_1, y_1, z_1]$ a směrovými odchylkami α, β, γ

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma}.$$

Parametrické rovnice přímky určené bodem $P_1[x_1, y_1, z_1]$ a směrovými kosiny

$$x = x_1 + t \cos \alpha,$$

$$y = y_1 + t \cos \beta,$$

$$z = z_1 + t \cos \gamma$$

(t je parametr).

Obecné parametrické rovnice přímky procházející bodem $P_1[x_1, y_1, z_1]$

$$x = x_1 + at,$$

$$y = y_1 + bt,$$

$$z = z_1 + ct,$$

kde veličiny a, b, c nemusí již splňovat podmínky pro směrové kosiny, ale stejně jako veličiny x_1, y_1, z_1 mohou být libovolnými čísly.

Rovnice přímky procházející dvěma body $P_1[x_1, y_1, z_1]$ a $P_2[x_2, y_2, z_2]$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Zvláštní případy:

1. Přímka prochází bodem $P_1[x_1, y_1, z_1]$ a počátkem O :

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}.$$

2. Přímka prochází bodem $P_1[x_1, y_1, z_1]$ a je kolmá k rovině $R = 0$:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.$$

Průsečík $P[x_p, y_p, z_p]$ přímky $\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma}$
s rovinou $R = 0$

$$x_p = x_1 - t \cos \alpha,$$

$$y_p = y_1 - t \cos \beta,$$

$$z_p = z_1 - t \cos \gamma,$$

kde

$$t = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma}.$$

Přímka

$$x = x_1 + t \cos \alpha, \quad y = y_1 + t \cos \beta, \quad z = z_1 + t \cos \gamma$$

je rovnoběžná s rovinou $ax + by + cz + d = 0$, právě když

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = 0.$$

Průsečík P přímky $\begin{cases} y = mx + q, \\ z = nx + r \end{cases}$ s rovinou $ax + by + cz + d = 0$

$$x_p = -\frac{qb + rc + d}{a + mb + nc};$$

souřadnice y_p a z_p dostaneme dosazením do výchozích rovnic.

Daná přímka je rovnoběžná s rovinou $ax + by + cz + d = 0$, právě když

$$a + mb + nc = 0.$$

Podmínka pro průsečík dvou přímek

Dané přímky

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3, \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 \end{cases}$$

se protínají právě v jednom bodě, právě když

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Průsečík $P[x_p, y_p, z_p]$ dvou přímek

$$\begin{cases} y = m_1x + q_1, \\ z = n_1x + r_1 \end{cases} \text{ a } \begin{cases} y = m_2x + q_2, \\ z = n_2x + r_2, \end{cases}$$

$$x_p = \frac{q_2 - q_1}{m_1 - m_2} = \frac{r_2 - r_1}{n_1 - n_2},$$

$$y_p = \frac{m_1q_2 - m_2q_1}{m_1 - m_2},$$

$$z_p = \frac{n_1r_2 - n_2r_1}{n_1 - n_2}$$

Podmínky, aby se dvě přímky protály:

$$\frac{q_1 - q_2}{r_1 - r_2} = \frac{m_1 - m_2}{n_1 - n_2}.$$

Odhylka φ přímky $\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma}$ a roviny $R = 0$

$$\sin \varphi = \left| \frac{a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} \right| \quad (0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ).$$

Přímka je rovnoběžná s rovinou, právě když

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = 0.$$

Přímka je kolmá k rovině, právě když

$$\frac{a}{\cos \alpha} = \frac{b}{\cos \beta} = \frac{c}{\cos \gamma}.$$

$$\begin{aligned} \text{Odchylka } \varphi \text{ přímek } & \frac{x - x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y - y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma_1} \text{ a } \frac{x - x_2}{\cos \alpha_2} = \\ & = \frac{y - y_2}{\cos \beta_2} = \frac{z - z_2}{\cos \gamma_2} \end{aligned}$$

$$\cos \varphi = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2.$$

Podmínky rovnoběžnosti přímek:

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2, \quad \cos \beta_1 = \cos \beta_2, \quad \cos \gamma_1 = \cos \gamma_2.$$

Podmínka kolmosti přímek:

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Odchylka } \varphi \text{ přímek } & \left\{ \begin{array}{l} y = m_1 x + q_1, \\ z = n_1 x + r_1 \end{array} \right. \text{ a } \left\{ \begin{array}{l} y = m_2 x + q_2, \\ z = n_2 x + r_2 \end{array} \right. \\ \cos \varphi = & \frac{1 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{[(1 + m_1^2 + n_1^2)(1 + m_2^2 + n_2^2)]}} \end{aligned}$$

Podmínky rovnoběžnosti přímek: $m_1 = m_2, n_1 = n_2$.

Podmínka kolmosti přímek: $1 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

Vzdálenost dvou mimoběžek v prostoru

Dané přímky

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y - y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma_1},$$

$$\frac{x - x_2}{\cos \alpha_2} = \frac{y - y_2}{\cos \beta_2} = \frac{z - z_2}{\cos \gamma_2}$$

mají vzdálenost

$$\delta = \sqrt{\frac{\left| \begin{array}{l} x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2 \\ \cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2 \end{array} \right|}{\left(\left| \cos \beta_1, \cos \gamma_1 \right|^2 + \left| \cos \gamma_1, \cos \alpha_1 \right|^2 + \left| \cos \alpha_1, \cos \beta_1 \right|^2 \right)}}{\sqrt{\left(\left| \cos \beta_2, \cos \gamma_2 \right|^2 + \left| \cos \gamma_2, \cos \alpha_2 \right|^2 + \left| \cos \alpha_2, \cos \beta_2 \right|^2 \right)}}$$

4.2.5. Plochy druhého stupně

4.2.5.1. Kulová plocha

Obecná rovnice kulové plochy se středem $S[m, n, p]$ a poloměrem r

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2 - r^2 = 0.$$

Středová rovnice kulové plochy

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

(střed kulové plochy je v počátku O).

Kvadratická rovnice vyjadřující kulovou plochu

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + Bx + Cy + Dz + E = 0 \quad (A \neq 0),$$

přičemž střed kulové plochy

$$S = \left[-\frac{B}{2A}, -\frac{C}{2A}, -\frac{D}{2A} \right]$$

a poloměr

$$r = \frac{1}{2A} \sqrt{(B^2 + C^2 + D^2 - 4AE)},$$

kde $B^2 + C^2 + D^2 > 4AE$.

*Rovnice tečné roviny v bodě $P_0[x_0, y_0, z_0]$ ke kulové ploše $(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2 - r^2 = 0$

$$(x - m)(x_0 - m) + (y - n)(y_0 - n) + (z - p)(z_0 - p) - r^2 = 0.$$

Nelze-li bod P_0 na kulové ploše, vyjadřuje tato rovnice polární rovinu bodu P_0 vzhledem ke kulové ploše.

Mocnost μ bodu $P_0[x_0, y_0, z_0]$ ke kulové ploše

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2 - r^2 = 0$$

$$\mu = (x_0 - m)^2 + (y_0 - n)^2 + (z_0 - p)^2 - r^2.$$

Rovnice potenční roviny dvou kulových ploch

$$(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 + (z - p_1)^2 - r_1^2 = 0,$$

$$(x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 + (z - p_2)^2 - r_2^2 = 0:$$

$$K_1 - K_2 = 0,$$

kde

$$K_1 = (x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 + (z - p_1)^2 - r_1^2,$$

$$K_2 = (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 + (z - p_2)^2 - r_2^2.$$

Potenční rovina je kolmá k spojnici středů daných dvou kulových ploch.

Potenční křivka vzhledem ke třem daným kulovým plochám

$K_1 = 0$, $K_2 = 0$ a $K_3 = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} K_1 - K_2 = 0, \\ K_1 - K_3 = 0. \end{array} \right\}$$

4.2.5.2. Elipsoid

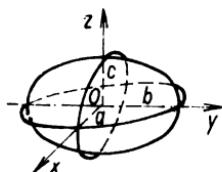
Středová rovnice *(trojosého)* elipsoidu (střed elipsoidu je v počátku O) (obr. 307):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

kde a , b , c jsou délky poloos hlavních řezů.

Maji-li dvě osy elipsoidu stejnou délku, jde o rotační elipsoid.

Maji-li všechny tři osy elipsoidu stejnou délku, jde o kulovou plochu.



Obr. 307. Trojosý elipsoid

Rovnice tečné roviny bodu $P_0[x_0, y_0, z_0]$ k elipsoidu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1:$$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

Neleží-li bod P_0 na elipsoidu, vyjadřuje tato rovnice polární rovinu bodu P_0 vzhledem k elipsoidu.

Rovnice průměrové roviny

$$\frac{x \cos \alpha}{a^2} + \frac{y \cos \beta}{b^2} + \frac{z \cos \gamma}{c^2} = 0,$$

kde α, β, γ jsou velikosti směrových úhlů příslušného průměru.

Tři sdružené průměry

$$\frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{a^2} + \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{b^2} + \frac{\cos \gamma_1 \cos \gamma_2}{c^2} = 0,$$

$$\frac{\cos \alpha_2 \cos \alpha_3}{a^2} + \frac{\cos \beta_2 \cos \beta_3}{b^2} + \frac{\cos \gamma_2 \cos \gamma_3}{c^2} = 0,$$

$$\frac{\cos \alpha_3 \cos \alpha_1}{a^2} + \frac{\cos \beta_3 \cos \beta_1}{b^2} + \frac{\cos \gamma_3 \cos \gamma_1}{c^2} = 0,$$

kde $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ jsou velikosti směrových úhlů tří sdružených průměrů.

Každá rovina protíná elipsoid v reálné nebo imaginární elipse.

Objem tělesa ohraničeného elipsoidem viz v článku 3.3.3.

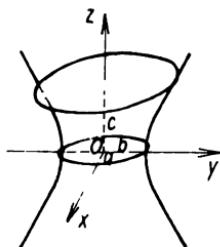
4.2.5.3. Hyperboloid

Středová rovnice jednodílného hyperboloidu (obr. 308)

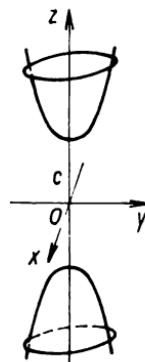
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

kde a, b jsou délky reálných poloos,

c je délka imaginární poloosy.



Obr. 308. Jednodílný hyperboloid



Obr. 309. Dvojdílný hyperboloid

Středová rovnice dvojdílného hyperboloidu (obr. 309)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

kde c je délka reálné poloosy,
 a, b jsou délky imaginárních poloos.

Rovnice asymptotické kuželové plochy pro oba hyperboloidy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Při $a = b$ je hyperboloid rotační (osou otáčení je osa z).
Veličiny a, b, c jsou délky poloos hlavních řezů.

Rovnice průměrové roviny pro oba hyperboloidy

$$\frac{x \cos \alpha}{a^2} + \frac{y \cos \beta}{b^2} - \frac{z \cos \gamma}{c^2} = 0,$$

kde α, β, γ jsou velikosti směrových úhlů příslušného průměru.

Rovnice tečné roviny bodu $P_0[x_0, y_0, z_0]$ k hyperboloidu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \varepsilon = 0:$$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} + \varepsilon = 0,$$

kde $\varepsilon = 1$, resp. $\varepsilon = -1$ platí pro dvojdílný, resp. jednodílný hyperboloid.

Neleží-li bod P_0 na hyperboloidu, vyjadřuje uvedená rovnice *polární rovinu bodu P_0 vzhledem k hyperboloidu*.

Rovnice povrchových přímek jednodílného hyperboloidu

První osnova:
$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{a} = \kappa \left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

pro $\forall \kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

druhá osnova:
$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda \left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

pro $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Každá povrchová přímka první osnovy protíná každou povrchovou přímku druhé osnovy.

Rovina protíná hyperboloid v hyperbole, resp. parabole podle toho, zda je rovnoběžná právě s dvěma obalovými přímkami, resp. právě s jednou obalovou přímkou asymptotické kuželové plochy. Není-li rovina rovnoběžná se žádnou obalovou přímkou asymptotické kuželové plochy, protíná hyperboloid v elipse.

Objem rotačního jednodílného hyperboloidu

Rotační jednodílný hyperboloid uvažovaný jako těleso definované v článku 3.3.3, které vznikne při rotaci hyperboly $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, jestliže osou otáčení je osa y a otáčí se jedna z větví hyperboly pro $-y_1 \leq y \leq y_1$, má objem

$$V = \frac{2\pi a^2 y_1 (y_1^2 + 3b^2)}{3b^2}.$$

Objem rotačního dvojdílného hyperboloidu

Rotační dvojdílný hyperboloid uvažovaný jako těleso definované v článku 3.3.3, které vznikne při rotaci hyperboly $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, jestliže osou otáčení je osa x a otáčejí se obě větve hyperboly pro $a \leq x \leq x_1$ a $-x_1 \leq x \leq -a$, má objem

$$V = \frac{2\pi b^2 (x_1 - a)^2 (x_1 + 2a)}{3a^2}.$$

4.2.5.4. Paraboloid

Středová rovnice eliptického paraboloidu (obr. 310)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0.$$

Středová rovnice hyperbolického paraboloidu (obr. 311)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0.$$

Osa paraboloidu splývá s osou z .

Vrchol paraboloidu je v počátku O .

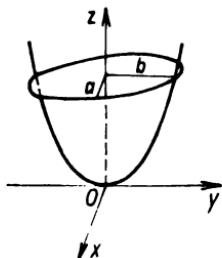
Při $a = b$ jde o rotační paraboloid s osou z jako osou otáčení.

Rovina xy je tečnou rovinou k oběma paraboloidům v počátku O .

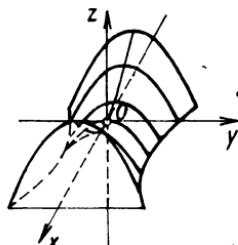
Každá rovina rovnoběžná s osou z protíná elliptický paraboloid v parabole; každá jiná rovina jej protíná v reálné nebo imaginární elipse.

Každá rovina rovnoběžná s osou z protíná hyperbolický paraboloid v parabole; každá jiná rovina jej protíná v hyperbole.

Roviny xz a yz jsou rovinami souměrnosti pro oba paraboloidy.



Obr. 310. Elliptický paraboloid



Obr. 311. Hyperbolický paraboloid

Rovnice tečné roviny bodu $P_0[x_0, y_0, z_0]$ k paraboloidu

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0:$$

$$\frac{xx_0}{a^2} \pm \frac{yy_0}{b^2} - (z + z_0) = 0.$$

Neleží-li bod P_0 na paraboloidu, vyjadřuje uvedená rovnice polární rovinu bodu P_0 vzhledem k paraboloidu.

Rovnice povrchových přímek hyperbolického paraboloidu

První osnova:
$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \kappa, \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\kappa} \cdot 2z, \end{cases}$$

tj. přímky rovnoběžné s rovinou

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0;$$

druhá osnova:
$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda, \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda} \cdot 2z, \end{cases}$$

tj. přímky rovnoběžné s rovinou

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

Uvedené rovnice platí pro $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Objem V a obsah Q pláště úseče rotačního paraboloidu uvažovaného jako těleso (viz článek 3.3.3)

Otačí-li se parabola kolem osy x a $P_1[x_1, y_1]$ je bod hrany podstavy, je

$$V = \frac{1}{2}x_1 y_1^2,$$

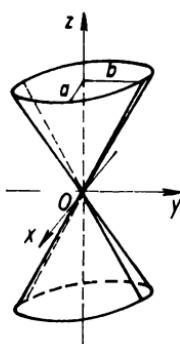
$$Q = \frac{\pi y_1}{6x_1^2} [(y_1^2 + 4x_1^2)^{3/2} - y_1^3]$$

(y_1 je poloměr podstavy a x_1 výška paraboloidu).

4.2.5.5. Kuželová plocha (obr. 312)

Vrcholová rovnice kuželové plochy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$



Obr. 312. Kuželová plocha

kde a, b jsou délky poloos elipsy, která je řídicí křivkou kuželové plochy a jejíž rovina je kolmá k ose z ;
 c je vzdálenost roviny elipsy od roviny xy .
Vrchol kuželové plochy je v počátku O .

Tečná rovina ke kuželové ploše s rovnicí $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

v bodě $P_0[x_0, y_0, z_0]$:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 0.$$

Rotační kuželová plocha

Při $a = b$ je řídicí křivka kružnicí; rotační kuželová plocha má pak rovnici

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$$

její tečná rovina má rovnici

$$\frac{xx_0 + yy_0}{a^2} - \frac{zz_0}{a^2} = 0.$$

Rovnice povrchových přímek kuželové plochy

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda} \frac{y}{b}, \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = -\lambda \frac{y}{b} \quad \text{pro } \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \end{cases}$$

přímky osnovy procházejí vrcholem kuželové plochy.

4.2.5.6. Válcová plocha

Středová rovnice eliptické válcové plochy kolmé k rovině xy (obr. 313)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

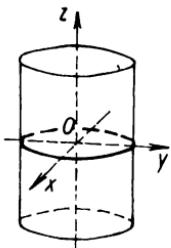
roviny xz a yz jsou rovinami souměrnosti.

Rovnice je identická s rovnicí průsečné elipsy v rovině xy .

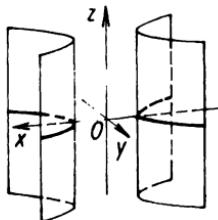
Středová rovnice hyperbolické válcové plochy kolmé k rovině xy (obr. 314)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

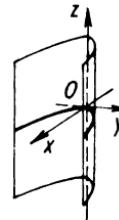
roviny xz a yz jsou rovinami souměrnosti. Řez rovinou xy je hyperbola.



Obr. 313. Kolmá eliptická válcová plocha



Obr. 314. Kolmá hyperbolická válcová plocha



Obr. 315. Kolmá parabolická válcová plocha

Vrcholová rovnice parabolické válcové plochy kolmé k rovině xy (obr. 315)

$$y^2 = 2px.$$

Rovina xz je rovinou souměrnosti. Rovina yz je tečnou rovinou, která se dotýká plochy v ose z .

Řez kolmý k rovině xy je reálnou nebo imaginární dvojicí přímek. Každá jiná rovina protíná eliptickou, resp. hyperbolickou, resp. parabolickou válcovou plochu v elipse, resp. hyperbole, resp. parabole.

Rovnice tečné roviny v bodě $P_0[x_0, y_0, z_0]$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad \text{pro eliptickou válcovou plochu,}$$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad \text{pro hyperbolickou válcovou plochu,}$$

$$yy_0 = p(x + x_0) \quad \text{pro parabolickou válcovou plochu.}$$

4.2.6. Obecná algebraická rovnice druhého stupně v proměnných x, y a z

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + \\ & + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + \\ & + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \end{aligned}$$

Ortogonalní invarianty plochy druhého stupně

Diskriminant

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44} \end{vmatrix},$$

subdeterminant A_{44} diskriminantu

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix},$$

kvadratický invariant

$$I_2 = \left| \begin{matrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{12}, & a_{22} \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} a_{22}, & a_{23} \\ a_{23}, & a_{33} \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} a_{33}, & a_{31} \\ a_{31}, & a_{11} \end{matrix} \right|,$$

lineární invariant

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Poznámka:

V determinantech platí $a_{ik} = a_{ki}$.

Obecná funkční rovnice druhého stupně vyjadřuje plochu druhého stupně (*kvadriku*). Kvadrika má jediný střed v konečnu, právě když $A_{44} \neq 0$ (tzv. *středová kvadrika*). Tětivy procházející středem se nazývají *průměry*. Množina všech středů rovnoběžných tětiv je *průměrová rovina*. Průměr příslušný k tětivám je sdružen s průměrovou rovinou.

Plocha druhého stupně degeneruje ve dvojici rovin, právě když

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{24} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{31}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{43}, & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{42}, & a_{43}, & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Pro reálné, nedegenerující plochy druhého stupně platí podmínky uvedené v tabulkách 4.2 a 4.3.

Tabulka 4.2

Případ 1: $A_{44} \neq 0$ (středové kvadriky)

	$I_1 A_{44} > 0, I_2 > 0$	$I_1 A_{44}$ a I_2 nejsou zároveň větší než 0
$A < 0$	elipsoid	dvojdílný hyperboloid
$A > 0$	imaginární elipsoid	jednodílný hyperboloid
$A = 0$	imaginární kuželová plocha	kuželová plocha

Tabulka 4.3

Případ 2: $A_{44} = 0$ (nestředové kvadriky)

	$A < 0, I_2 > 0$	$A > 0, I_2 < 0$
$A \neq 0$	eliptický paraboloid	hyperbolický paraboloid
	$I_2 > 0$	$I_2 < 0$
$A = 0$	eliptická válcová plocha	hyperbolická válcová plocha
		$I_2 = 0$
		parabolická válcová plocha

5. DIFERENCIÁLNÍ POČET

Úmluva:

V celé části 5 se uvažuje jen o posloupnostech reálných čísel a o reálných funkciích reálne proměnné. Pouhým slovem číslo, popř. bod budeme zde rozumět reálné číslo.

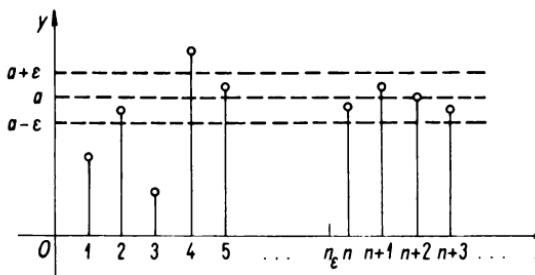
5.1. LIMITY

5.1.1. Limity posloupnosti

Definice limity posloupnosti

Říkáme, že posloupnost $\{a_k\}$ má *vlastní, konečnou* limitu a nebo že konverguje k číslu a [je konvergentní], a pišeme $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové kladné číslo n_ε , že pro všechny indexy $n > n_\varepsilon$ (tj. pro skoro všechny indexy k) platí (obr. 316)

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$



Obr. 316. K definici limity posloupnosti

Platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (a_k - a) = 0,$$

přičemž posloupnost, jejíž limitou je číslo nula, nazýváme *nulovou posloupností*.

Nemá-li posloupnost vlastní limitu, pak se nazývá *divergentní*, popř. říkáme, že *diverguje*.

Říkáme, že posloupnost $\{a_k\}$ má nevlastní limitu $+\infty$, resp. $-\infty$ [*diverguje k $+\infty$, resp. $-\infty$*], a píšeme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = +\infty, \text{ resp. } \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = -\infty,$$

právě když ke každému číslu K existuje takové číslo $n_K > 0$, že pro všechny indexy $n > n_K$ je $a_n > K$, resp. $a_n < K$.

Posloupnost, která má nevlastní limitu $+\infty$, resp. $-\infty$, se nazývá *určitě divergentní*.

Hromadný bod posloupnosti

Říkáme, že posloupnost $\{a_k\}$ má *hromadný bod* a , jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje nekonečně mnoho takových indexů n , že platí (viz též článek 0.4.9)

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Existuje-li limita posloupnosti, pak tato limita je jediným hromadným bodem této posloupnosti.

Věty o limitách posloupností

Jestliže členy posloupnosti $\{a_n\}$ jsou pro skoro všechny indexy n rovny témuž číslu a , pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Každá konvergentní posloupnost je ohraničená.

Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ má limitu a , pak každá z ní vybraná posloupnost $\{a_{k_n}\}$ má také limitu a .

Jestliže posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ mají vlastní limity $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, pak

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|;$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b;$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b;$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n;$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0);$

f) jestliže pro skoro všechny indexy je $a_n \leq b_n$, platí $a \leq b$.

Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Věta o limitě sevřené posloupnosti: Jestliže pro skoro všechny členy posloupnosti $\{c_n\}$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$, pak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c > -\infty$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d < +\infty$, přičemž může být také $c = +\infty$ nebo $d = -\infty$, platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + c_n) = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + d_n) = -\infty.$$

Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c > 0$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d < 0$, přičemž může být také $c = +\infty$ nebo $d = -\infty$, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n d_n) = +\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n d_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n c_n) = -\infty.$$

Jestliže neklesající posloupnost $\{a_n\}$ je (resp. není) shora ohraničená, pak má vlastní limitu (resp. nevlastní limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$).

Jestliže nerostoucí posloupnost $\{a_n\}$ je (resp. není) zdola ohraničená, pak má vlastní limitu (resp. nevlastní limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$).

Některé limity posloupností

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\alpha = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^\alpha \quad (a_n > 0, \alpha \in \mathbb{R});$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{b_n} = a^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad (a > 0);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_b a_n = \log_b \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (a_n > 0, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\});$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0, \text{ jestliže } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ a } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0, \text{ jestliže } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm\infty \text{ a } \{a_n\} \text{ je ohraničená}$$

posloupnost;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty, \text{ jestliže } a_n b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty \text{ a } \{b_n\}$$

je ohraničená posloupnost;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty, \quad \text{jestliže } a_n b_n < 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty \quad \text{a} \quad \{b_n\}$$

je ohraničená posloupnost;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a, \quad \text{jestliže} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \quad (a_n > 0);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a, \quad \text{jestliže} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718\,281\,828\,459\,0\dots \quad (\text{základ přirozených logaritmů [Eulerovo číslo]});$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R});$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0 \quad (|\alpha| < 1);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1 \quad (p > 0);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n!)} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n!)}}{n} = \frac{1}{e};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^\alpha x^n) = 0 \quad (x < |1|, \alpha \in \mathbb{R});$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + a^n} = \begin{cases} 1 & (|a| < 1), \\ \frac{1}{2} & (a = 1), \\ 0 & (a > 1); \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1 + a^n} = \begin{cases} 0 & (0 < a < 1), \\ \frac{1}{2} & (a = 1), \\ 1 & (a > 1); \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta}}{2} \right)^n = \sqrt{(\alpha\beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \quad (k \in \mathbb{N});$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1} \right) = \frac{1}{2} \quad (k \in \mathbb{N});$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2 + 3 - \dots - 2n}{\sqrt{(n^2 + 1)}} = -1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2 + \dots + n}{n+2} - \frac{n}{2} \right) = -\frac{1}{2};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)}{n^3} = \frac{1}{3};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2}{n^3} = \frac{4}{3};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\alpha + \frac{1}{n} \right)^2 + \left(\alpha + \frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left(\alpha + \frac{n-1}{n} \right)^2 \right] = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{3};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} - \ln n \right) =$$

$= \gamma = C = 0,577\,215\,664\,90\dots$ (Eulerova konstanta);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \sqrt{(2\pi)} \quad (\text{Stirlingův vzorec});$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 \frac{1}{2n} \right] = \frac{\pi}{2} \quad (\text{Wallisův vzorec}).$$

5.1.2. Limity funkcí

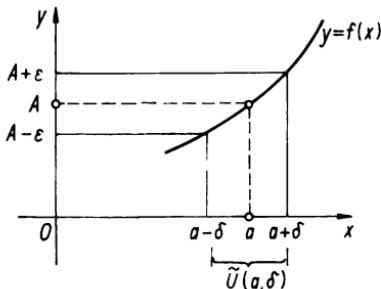
Limita funkce

Říkáme, že funkce $y = f(x)$ má v bodě $x = a$, v němž nemusí být definována, *vlastní, konečnou* limitu A , a píšeme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, právě když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechny body x , pro něž je $0 < |x - a| < \delta$, platí $|f(x) - A| < \varepsilon$, tj. že pro $\forall x \in \tilde{U}(a, \delta)$ je $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ (obr. 317).

Limitu $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nelze zaměňovat s funkční hodnotou $f(a)$.

Limita funkce zleva a zprava

Říkáme, že funkce $y = f(x)$ má v bodě a (vlastní) limitu zprava A , resp. zleva A [píšeme $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$, resp. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$], právě když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechny body x z intervalu $(a, a + \delta)$, resp. $(a - \delta, a)$ platí $|f(x) - A| < \varepsilon$.



Obr. 317. K definici limity funkce

Nevlastní limita funkce

Říkáme, že funkce $y = f(x)$ má v bodě a nevlastní limitu $+\infty$, resp. $-\infty$ [píšeme $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$, resp. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$], právě když ke každému číslu K existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechny body x , pro něž je $0 < |x - a| < \delta$, platí $f(x) > K$, resp. $f(x) < K$.

Obdobně se definují nevlastní limity funkce zprava a zleva v bodě a :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall K \exists \delta > 0 \forall x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) > K),$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall K \exists \delta > 0 \forall x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) < K),$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall K \exists \delta > 0 \forall x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) > K),$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall K \exists \delta > 0 \forall x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) < K).$$

Limita funkce v nevlastním bodě

Říkáme, že funkce $y = f(x)$ má v nevlastním bodě $+\infty$, resp. $-\infty$ (vlastní) limitu A [píšeme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$], právě když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takový bod c , že pro všechny body $x > c$, resp. $x < c$ platí $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Nevlastní limity funkce v nevlastním bodě

Říkáme, že funkce $y = f(x)$ má v nevlastním bodě $+\infty$, resp. $-\infty$ nevlastní limitu $+\infty$ [pišeme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$], právě když ke každému číslu K existuje takový bod c , že pro všechny body $x > c$, resp. $x < c$ platí $f(x) > K$.

Říkáme, že funkce $y = f(x)$ má v nevlastním bodě $+\infty$, resp. $-\infty$ nevlastní limitu $-\infty$, právě když ke každému číslu K existuje takový bod c , že pro všechny body $x > c$, resp. $x < c$ platí $f(x) < K$.

Věty o limitách funkcí

Funkce má v bodě nejvýše jednu limitu, nejvýše jednu limitu zprava a nejvýše jednu limitu zleva.

Platí

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Funkce f je spojitá v bodě a , právě když $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Funkce f je spojitá v bodě a zprava, resp. zleva, právě když $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, resp. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Limita konstantní funkce $f(x) = c$ se v každém bodě $a \in O_1(f)$ rovná c .

Platí $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ pro každý bod $a \in O_1(f)$ ($f(x) = x$).

Jestliže funkce f, g mají vlastní limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, pak

a) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$;

b) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = A + B$;

c) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = A - B$;

d) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = AB$, $\lim_{x \rightarrow a} [c f(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$;

e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ (B ≠ 0).

Jestliže $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$, pak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Věta o limitě sevřené funkce: Jestliže $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ a na neúplném okolí $\tilde{U}(a, \delta)$ platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, pak existuje limita $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$.

Jestliže $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = C > -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} k(x) = D < +\infty$, přičemž může být také $C = +\infty$, $D = -\infty$, platí

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + h(x)] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} [g(x) + k(x)] = -\infty.$$

Jestliže $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = C > 0$, $\lim_{x \rightarrow a} k(x) = D < 0$, přičemž může být také $C = +\infty$, $D = -\infty$, pak

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)h(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [g(x)k(x)] = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)k(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [g(x)h(x)] = -\infty.$$

Platí

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n \quad [f(x) \geq 0, n \in \mathbb{N}],$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \quad [f(x) \geq 0].$$

Jestliže platí $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$, $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = A$ a existuje takové číslo $\delta > 0$, že $\varphi(x) \neq b$ platí pro všechny body $x \in \tilde{U}(a, \delta)$, pak je $\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = A$.

Při výpočtech limit se často používá těchto tvrzení:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right) = A,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{y}\right) = A.$$

Některé limity funkcí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} (1+x)^{1/x} = e;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha;$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^k - \alpha^k}{x - \alpha} = k\alpha^{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}, \alpha > 0);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x^{f(x)} = \alpha^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \quad (\alpha > 0);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [\log_\beta f(x)] = \log_\beta [\lim_{x \rightarrow a} f(x)] \quad [f(x) > 0, \beta > 0, \beta \neq 1];$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0 \quad (0 < \alpha < 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty \quad (0 < \alpha < 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty \quad (\alpha > 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0 \quad (\alpha > 1);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \alpha \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{x} = \alpha \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = \lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \ln \alpha \quad (\alpha > 0);$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0, \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0);$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0, \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} [x^\beta (-\ln x)^\alpha] = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0);$$

pro $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \dots, m$; $j = 0, 1, \dots, n$; $a_m \neq 0, b_n \neq 0$) platí

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} 0 & (m < n), \\ \frac{a_m}{b_n} & (m = n), \\ +\infty & (m > n, a_m b_n > 0), \\ -\infty & (m > n, a_m b_n < 0); \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} 0 & (m < n), \\ \frac{a_m}{b_n} & (m = n), \\ +\infty & (m > n, (-1)^{m-n} a_m b_n > 0), \\ -\infty & (m > n, (-1)^{m-n} a_m b_n < 0); \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \sqrt[3]{\cos x}} = 1 \quad (\text{Maskelynovo pravidlo}).$$

Limita funkce n proměnných

Říkáme, že funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ má v bodě $[c_1, c_2, \dots, c_n]$ (vlastní, konečnou) limitu, a píšeme

$$\lim_{[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow [c_1, c_2, \dots, c_n]} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A,$$

právě když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové neúplné okolí $\tilde{K}([c_1, c_2, \dots, c_n], \delta)$, pro jehož všechny body $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ platí

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - A| < \varepsilon.$$

5.2. DIFERENČNÍ PODÍL, DERIVACE, DIFERENCIÁL

Diferenční podíl

Je-li funkce $y = f(x)$ definována na nějakém okolí $U(x_0, \delta)$, pak rozdíl $\Delta x = x - x_0$ nazývám přírůstkem [diferenci] argumentu x v bodě x_0 a rozdíl $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ nazývám přírůstkem [diferenci] funkce f [přírůstkem (závisle) proměnné y] v bodě x_0 .

Poměr přírůstků

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \sigma,$$

který se nazývá *diferenční podíl funkce f v bodě x_0* , udává směrnici sečny P_0P (obr. 318). Trojúhelník P_0AP se nazývá *sečnový trojúhelník*.

Derivace funkce v bodě

Existuje-li vlastní, resp. nevlastní limity

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \tau_0,$$

$$x_0, x_0 + \Delta x \in O_1(f), \quad y_0 = f(x_0) \in O_2(f),$$

říkáme, že funkce f má v bodě x_0 vlastní, resp. nevlastní derivaci. Tuto limitu značíme

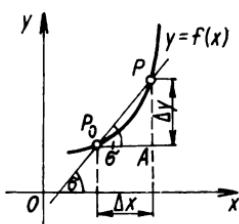
$$f'(x_0), \quad \frac{dy}{dx}(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad Df(x_0), \quad y'_{x_0} \text{ nebo } y'(x_0)$$

a nazýváme vlastní, resp. nevlastní derivací funkce f v bodě x_0 .

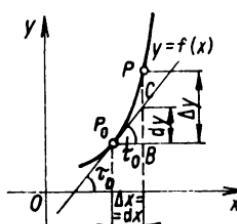
Neexistuje-li uvedená limity (vlastní ani nevlastní), říkáme, že funkce f nemá v bodě x_0 derivaci.

Místo o vlastní derivaci mluvíme také o konečné derivaci nebo zpravidla jen o derivaci.

Derivace funkce v bodě x_0 udává směrnicu $\operatorname{tg} \tau_0$ tečny křivky dané rovnici $y = f(x)$ v bodě P_0 (obr. 319). Trojúhelník P_0BC se nazývá tečnový trojúhelník.



Obr. 318. Diferenční podíl



Obr. 319. Derivace funkce

Příklad:

Je-li x doba a y dráha, pak derivace funkce $y = f(x)$ v bodě a udává okamžitou rychlosť v okamžiku a .

Existuje-li vlastní limity

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

resp.

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

v bodě x_0 , nazýváme ji *\langle vlastní, konečnou \rangle derivací funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 zprava, resp. zleva*.

Platí

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = a \Leftrightarrow f'(x_0) = a.$$

Obdobně se definiuje *nevlastní derivace funkce v bodě zprava, popř. zleva*.

Má-li funkce $y = f(x)$ v každém bodě intervalu (a, b) vlastní derivaci, resp. derivaci zprava, resp. derivaci zleva, říkáme, že funkce f má *\langle vlastní \rangle derivaci*, resp. *\langle vlastní \rangle derivaci zprava*, resp. *\langle vlastní \rangle derivaci zleva na intervalu (a, b)* . Jestliže funkce $y = f(x)$ má vlastní derivaci na intervalu (a, b) a zároveň má v bodě a vlastní derivaci zprava a v bodě b vlastní derivaci zleva, říkáme, že funkce f má *\langle vlastní \rangle derivaci na intervalu $\langle a, b \rangle$* .

Funkce na intervalu (a, b) , jejíž funkční hodnota v každém bodě $x \in (a, b)$ je $f'(x)$, se nazývá *derivace funkce f na intervalu (a, b)* a značí se

$$f', \quad \frac{df}{dx}, \quad y', \quad \frac{dy}{dx} \text{ nebo } y'_x,$$

někdy též

$$f'(x), \quad \frac{df}{dx}(x), \quad y'(x), \quad \frac{dy}{dx}(x) \text{ nebo } Df(x).$$

Funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$, která je derivací funkce f na intervalu (a, b) a jejíž funkční hodnota v bodě a , resp. b je vlastní derivací funkce f zprava, resp. zleva, se nazývá *derivace funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$* .

Jestliže funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 vlastní derivaci, resp. vlastní derivaci zprava, resp. vlastní derivaci zleva, pak funkce f je v bodě x_0 spojitá, resp. spojitá zprava, resp. spojitá zleva. Obrácená implikace však neplatí. Například spojitá funkce $f(x) = |x|$ nemá v bodě 0 derivaci, neboť $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(0) = -1$. Stejně tak neplatí uvedená věta pro nevlastní derivaci, neboť např. funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0), \\ 0 & (x = 0), \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

má derivaci $f'(0) = f'_+(0) = f'_-(0) = +\infty$, ale je v bodě $x_0 = 0$ nespojitá.

Funkce, která má na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitou derivaci, stejně jako křivka, která je jejím grafem, se nazývá *hladká [spojitě diferencovatelná] na intervalu $\langle a, b \rangle$* .

Diferenciál, diferencovatelná funkce

Říkáme, že funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 *diferenciál* nebo že je v bodě x_0 *diferencovatelná*, právě když platí

$$\Delta y = A \Delta x + \Delta x \tau(\Delta x),$$

kde A je konstanta a $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tau(\Delta x) = 0$ (obr. 320).

Funkce je v bodě $x_0 \in O_1(f)$ *diferencovatelná*, právě když má v tomto bodě derivaci. Pak platí $A = f'(x_0)$.

Výraz $f'(x_0) \Delta x = f'(x_0) dx$ proměnné $\Delta x \in (-\infty, +\infty)$ nazýváme *diferenciálem funkce f v bodě x_0* a značíme

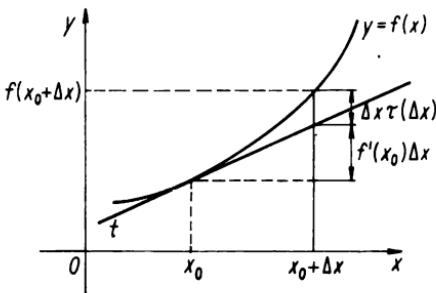
$$df(x_0), \quad (dy)_{x_0} \quad \text{nebo} \quad [df(x)]_{x_0}.$$

Protože derivací funkce $f(x) = x$ na množině \mathbb{R} je $f'(x) = 1$, lze psát $dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, přičemž dx nazýváme *diferenciálem argumentu*.

Říkáme, že funkce $y = f(x)$ je *diferencovatelná na intervalu (a, b)* , který je částí definičního oboru $O_1(f)$, právě když je v každém bodě $x \in (a, b)$ *diferencovatelná*.

Diferenciál funkce $y = f(x)$ v obecném bodě x značíme

$$dy, \quad df, \quad \text{někdy též} \quad df(x).$$



Obr. 320. Diferenciál funkce

Geometrický význam diferenciálu

Diferenciál dy funkce $y = f(x)$ se rovná přírůstku pořadnice bodu tečny t grafu funkce v daném bodě $[x_0, y_0]$ (viz obr. 320).

Derivace vyšších řádů

Existuje-li vlastní, resp. nevlastní limity

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x},$$

říkáme, že funkce f má v bodě x_0 vlastní, resp. nevlastní druhou derivaci [derivaci druhého řádu], a hodnotu $f''(x_0)$ nazýváme vlastní, resp. nevlastní druhou derivací [derivací druhého řádu] funkce f v bodě x_0 . Obdobně se definují derivace vyšších řádů v bodě x_0 , které po řadě označujeme $f'''(x_0)$, $f^{(4)}(x_0)$, $f^{(5)}(x_0)$ atd.

Jestliže funkce f' má v každém bodě definičního oboru (a, b) funkce f vlastní derivaci, pak derivaci funkce f' na intervalu (a, b) nazýváme druhou derivací [derivací druhého řádu] funkce f na intervalu (a, b) . Obdobně zavádíme derivace vyšších řádů funkce f proměnné x , přičemž používáme těchto označení:

Druhá derivace [derivace druhého řádu]:

$$f'', \quad \frac{d^2f}{dx^2}, \quad y'', \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y''_x,$$

někdy též

$$[f'(x)]', \quad f''(x), \quad D^2f(x), \quad \frac{d^2f}{dx^2}(x) \quad \text{nebo} \quad \frac{df'(x)}{dx}.$$

Třetí derivace [derivace třetího řádu]:

$$f''', \quad \frac{d^3f}{dx^3}, \quad y''', \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad y'''_x,$$

někdy též

$$[f''(x)]', \quad f'''(x), \quad D^3f(x), \quad \frac{d^3f}{dx^3}(x), \quad \frac{df''(x)}{dx}.$$

n-tá derivace [derivace n-tého řádu]:

$$f^{(n)}, \quad \frac{d^n f}{dx^n}, \quad y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad y_x^{(n)},$$

někdy též

$$[f^{(n-1)}(x)]', \quad f^{(n)}(x), \quad D^n f(x), \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n} \quad \text{nebo} \quad \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx}.$$

Difrentiály vyšších řádů

Říkáme, že funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 n -tý difrentiál [difrentiál n -tého řádu], právě když všechny derivace funkce f až do řádu $n - 2$ mají difrentiál na okolí bodu x_0 a derivace $(n - 1)$ -ního řádu funkce f má v bodě x_0 difrentiál. n -tý difrentiál funkce f v bodě x_0 značíme $d^n f(x_0)$. V obecném bodě x používáme těchto označení:

Druhý difrentiál [difrentiál druhého řádu]:

$$d^2y, \quad d(dy), \quad d(df), \quad \text{někdy též } d^2f(x).$$

Platí $d^2f(x) = f''(x) dx^2$.

Třetí difrentiál [difrentiál třetího řádu]:

$$d^3y, \quad d(d^2y), \quad \text{někdy též } d^3f(x).$$

Platí $d^3f(x) = f'''(x) dx^3$.

n -tý difrentiál [difrentiál n -tého řádu]:

$$d^n y, \quad d(d^{n-1}y), \quad \text{někdy též } d^n f(x).$$

Platí $d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n$.

5.3. PRAVIDLA PRO DERIVOVÁNÍ FUNKCÍ

Derivoval funkci daných explicitně

Úmluva:

$u, v, u_1, u_2, \dots, u_n, w$ jsou diferencovatelné funkce proměnné x .

1. $y = k = \text{konst} \Rightarrow y' = 0$.

2. $y = u_1 + u_2 + \dots + u_n \Rightarrow y' = u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n$
(pravidlo pro derivování součtu funkcí).

3. $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$
(pravidlo pro derivování součinu dvou funkcí),

$$y = uvw \Rightarrow y' = u'vw + uv'w + uvw',$$

$$y = u_1 u_2 \dots u_n \Rightarrow y' = u'_1 u_2 \dots u_n + u_1 u'_2 \dots u_n + \dots + u_1 u_2 \dots u_{n-1} u'_n,$$

popř.

$$y' = u_1 u_2 \dots u_n \left(\frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \dots + \frac{u'_n}{u_n} \right) \quad (u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, \dots, u_n \neq 0).$$

4. $y = ku \Rightarrow y' = ku'$ (k je konstanta).

$$5. \quad y = \frac{u}{v} \quad (v \neq 0) \Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

(pravidlo pro derivování podílu dvou funkcí).

6. *Derivace složené funkce:* Má-li funkce $u = g(x)$ (vnitřní složka složené funkce) vlastní derivaci v bodě x_0 a funkce $y = f(u)$ (vnější složka složené funkce) vlastní derivaci v bodě $u_0 = g(x_0)$, pak složená funkce $y = f(g(x))$ má v bodě x_0 vlastní derivaci

$$y'_{x_0} = f'(u_0) g'(x_0) = f'(g(x_0)) g'(x_0).$$

Má-li funkce $u = g(x)$ vlastní derivaci na intervalu (a, b) a funkce $y = f(u)$ vlastní derivaci na intervalu (α, β) a pro všechna čísla $x \in (a, b)$ platí $g(x) \in (\alpha, \beta)$, pak složená funkce $y = f(g(x))$ má na intervalu (a, b) derivaci

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) g'(x)$$

neboli

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

7. Obdobně jako v bodě 6 se postupuje při výpočtu derivace složené funkce s několika vnitřními složkami, např.

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) g'(h(x)) h'(x)$$

(tzv. řetězové pravidlo).

8. Jestliže $x = g(y)$ je inverzní funkcí k funkci $y = f(x)$ a existuje-li v bodě c derivace $f'(c) \neq 0$, pak v bodě $d = f(c)$ existuje $g'(d)$ a platí

$$g'(d) = \frac{1}{f'(c)}$$

neboli

$$\left(\frac{dx}{dy} \right)_d = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx} \right)_c}.$$

Příklady:

V příkladech jsou odvolávky na pravidla z této kapitoly a na vzorce z kapitoly 5.5.

$$1. \quad y = -9; \quad y' = 0 \quad (\text{pravidlo 1}).$$

$$2. \quad y = x^5 + x^2 - x^7; \quad y' = 5x^4 + 2x - 7x^6 \quad (\text{pravidla 2, 4 a vzorec 3}).$$

3. $y = (x^3 + a)(x^2 + 3b)$ (a, b jsou konstanty);
 $\begin{cases} x^3 + a = u; & u' = 3x^2; \\ x^2 + 3b = v; & v' = 2x; \end{cases}$
 $y' = 3x^2(x^2 + 3b) + (x^3 + a) \cdot 2x$ (pravidla 1, 2, 3 a vzorec 3),
 $\underline{y' = 5x^4 + 9bx^2 + 2ax}.$
4. $y = 10x^6; \quad y' = 10 \cdot 6x^5$ (pravidlo 4 a vzorec 3),
 $\underline{y' = 60x^5}.$
5. $y = \frac{x^3 + 2x}{4x^2 - 7};$
 $\begin{cases} x^3 + 2x = u; & u' = 3x^2 + 2; \\ 4x^2 - 7 = v; & v' = 8x; \end{cases}$
 $y' = \frac{(3x^2 + 2)(4x^2 - 7) - (x^3 + 2x) \cdot 8x}{(4x^2 - 7)^2}$ (pravidlo 5),
 $\underline{y' = \frac{4x^4 - 29x^2 - 14}{(4x^2 - 7)^2}}.$
6. $y = (1 - \cos^4 x)^2 = u^2 = f(u), \quad \text{kde } u = 1 - \cos^4 x;$
 $f'(u) = 2u = 2(1 - \cos^4 x),$
 $u = 1 - \cos^4 x = 1 - v^4 = g(v), \quad \text{kde } v = \cos x,$
 $g'(v) = -4v^3 = -4\cos^3 x,$
 $v = \cos x = h(x); \quad h'(x) = -\sin x \quad (\text{vzorec 8});$
 $\frac{dy}{dx} = f'(u)g'(v)h'(x) = 2(1 - \cos^4 x)(-4\cos^3 x)(-\sin x) \quad (\text{pravidlo 7});$
 $\underline{\frac{dy}{dx} = 8(1 - \cos^4 x)\sin x \cos^3 x}.$
7. $y = \arctg x; \quad \text{inverzní funkce je } x = \tg y = g(y);$
 $g'(y) = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tg^2 y \quad (\text{pravidlo 8 a vzorec 9});$
 $\underline{y' = f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{1 + \tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}}.$

Logaritmické derivování

Někdy je vhodné k určení derivace funkce $y = f(x)$ najít přirozený logaritmus této funkce a potom tento logaritmus derivovat podle x (tzv. *logaritmické derivování*).

Zvlášť vhodný je tento postup u funkcí tvaru $y = u(x)^{v(x)}$ [$u(x) > 0$]:

$$\ln y = v(x) \ln u(x),$$

$$\frac{1}{y} y' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)},$$

$$y' = y \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right],$$

$$y' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right].$$

Příklad 1:

$$(x^x)' = x^x (\ln x + 1) \quad (x > 0).$$

Příklad 2:

$$y = (\arctg x)^x \quad [x \in (0, \pi/2)];$$

$$\ln y = x \ln (\arctg x),$$

$$\frac{1}{y} y' = \ln (\arctg x) + \frac{x}{\arctg x} \frac{1}{1+x^2},$$

$$y' = (\arctg x)^x \left[\ln (\arctg x) + \frac{x}{(1+x^2) \arctg x} \right].$$

5.4. DERIVACE FUNKCÍ NĚKOLIKA PROMĚNNÝCH, TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL

Parciální derivace

Existuje-li vlastní limity

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

resp.

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

říkáme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ parciální derivaci podle x , resp. podle y . V obecném bodě $[x, y]$ používáme těchto označení:

$$f_x, z_x,$$

někdy též

$$\hat{\frac{\partial f}{\partial x}}(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x, y), \quad f'_x(x, y) \quad \text{nebo} \quad f_x(x, y),$$

resp.

$$f_y, \quad z_y,$$

někdy též

$$\hat{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y), \quad f'_y(x, y) \quad \text{nebo} \quad f_y(x, y).$$

Obdobně se definují parciální derivace vyšších řádů.

Parciální derivace druhého řádu

$$f_{xx}, \quad z_{xx}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial x},$$

$$f_{yy}, \quad z_{yy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial y},$$

$$f_{xy}, \quad z_{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial y},$$

$$f_{yx}, \quad z_{yx}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial x}.$$

Parciální derivace z_{xy} , z_{yx} se nazývají smíšené.

Za předpokladu, že obě smíšené derivace jsou spojité v bodě $[x, y]$, platí tzv. Schwarzova věta:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Obdobně se definují parciální derivace funkce n proměnných.

Totální diferenciál

Říkáme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ totální [úplný] diferenciál nebo že je v tomto bodě differencovatelná, právě když na okolí bodu $[x_0, y_0]$ platí

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + \varrho(\Delta x, \Delta y),$$

kde A, B jsou konstanty, $\varrho = \sqrt{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]}$ a $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varrho(\Delta x, \Delta y) = 0$.

Je-li funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ differencovatelná, pak má parciální derivace prvního řádu a platí

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Výraz

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y = \\ & = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dy \end{aligned}$$

nazýváme totálním diferenciálem funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.

Říkáme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ totální diferenciál n -tého řádu [n -tý diferenciál], právě když všechny parciální derivace až do řádu $n - 2$ mají totální diferenciál na okolí bodu $[x_0, y_0]$ a všechny parciální derivace $(n - 1)$ -ního řádu mají v bodě $[x_0, y_0]$ totální diferenciál. Pro $n = 2$ je

$$dz = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Obdobně definujeme totální diferenciál pro funkci $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n proměnných. Je-li f differencovatelná funkce, pak platí

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n.$$

Příklad:

$$z = y^2 e^x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y e^x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y e^x;$$

$$\begin{aligned} dz &= y^2 e^x dx + 2y e^x dy = y e^x (y dx + 2 dy), \\ d^2 z &= y^2 e^x dx^2 + 2 \cdot 2y e^x dx dy + 2e^x dy^2 = \\ &= e^x (y^2 dx^2 + 4y dx dy + 2 dy^2). \end{aligned}$$

Derivování funkcí daných implicitně

Jestliže funkce $y = f(x)$ je dána implicitně rovnicí $f(x, y) = 0$, parciální derivace f_x, f_y existují a $f_y \neq 0$, pak první derivaci funkce f vypočteme podle vzorce

$$\frac{dy}{dx} = y' = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = - \frac{f_x}{f_y}.$$

Pokud existují parciální derivace druhého řádu f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} , je druhá derivace

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' &= - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^3} = \\ &= - \frac{f_{xx} f_y^2 - 2f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{f_y^3}. \end{aligned}$$

Příklad:

$$f(x, y) = x^3 - x^2 y + y^5 = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2xy = f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5y^4 - x^2 = f_y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2y = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 20y^3 = f_{yy},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2x = f_{xy} = f_{yx};$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 - 2xy}{5y^4 - x^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(6x - 2x)(5y^4 - y^2)^2 - 2(-2x)(3x^2 - 2xy)(5y^4 - x^2) + 22y^3(3x^2 - 2xy)^2}{(5y^4 - x^2)^3}.$$

Derivování funkcí daných parametricky

Jestliže funkce f je dána parametricky rovnicemi

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad \text{pro } \forall t \in M$$

a $d\varphi/dt = \dot{\varphi}(t) \neq 0$, $d\psi/dt = \dot{\psi}(t)$ existují, pak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}.$$

Pokud existují $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\psi}$, resp. $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\psi}$, platí

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} = \frac{\ddot{\psi}(t)\dot{\varphi}(t) - \ddot{\varphi}(t)\dot{\psi}(t)}{[\dot{\psi}(t)]^3}$$

neboli

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} \frac{dt}{dx},$$

resp.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\dot{\varphi}^2\ddot{\psi} - \dot{\varphi}\dot{\psi}\ddot{\varphi} - 3\dot{\varphi}\dot{\varphi}\ddot{\psi} + 3\dot{\varphi}^2\dot{\psi}}{\dot{\varphi}^5}.$$

Příklad:

$$x = \ln t, \quad y = \frac{1}{1-t};$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{t^2}, \quad \frac{dt}{dx} = t,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(1-t)^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2}{(1-t)^3};$$

první derivace

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-t)^2} : \frac{1}{t} = \frac{t}{(1-t)^2};$$

druhá derivace

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{2}{(1-t)^3} \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \frac{1}{(1-t)^2}}{\left(\frac{1}{t}\right)^3} = \frac{2t^2 + t - t^2}{(1-t)^3} = \frac{t^2 + t}{(1-t)^3}$$

neboli

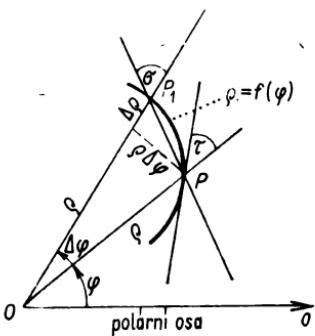
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{t}{(1-t)^2} \right] \right\} t = \frac{1+t}{(1-t)^3} t = \frac{t^2 + t}{(1-t)^3}.$$

Derivování funkcí daných polárními souřadnicemi

Diferenční podíl funkce $\varrho = f(\varphi)$, dané polárními souřadnicemi ϱ , φ , je

$$\frac{\Delta\varrho}{\Delta\varphi} = \frac{\varrho}{\operatorname{tg} \sigma} = \varrho \operatorname{cotg} \sigma,$$

kde σ je odchylka sečny PP_1 a přímky OP_1 (obr. 321).



Obr. 321. Derivace funkce dané polárními souřadnicemi

Derivace

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta\varrho}{\Delta\varphi} = \frac{\varrho}{\operatorname{tg} \tau} = \varrho \operatorname{cotg} \tau,$$

kde τ je odchylka tečny v bodě P a přímky OP .

Pro polární souřadnice

$$x = \varrho \cos \varphi, \\ y = \varrho \sin \varphi$$

z rovnic

$$dx = d\varrho \cos \varphi - \varrho \sin \varphi d\varphi, \\ dy = d\varrho \sin \varphi + \varrho \cos \varphi d\varphi$$

dostáváme

$$y' = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\frac{d\varrho}{d\varphi} \sin \varphi + \varrho \cos \varphi}{\frac{d\varrho}{d\varphi} \cos \varphi - \varrho \sin \varphi}.$$

5.5. DERIVACE ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ

Pokud nejsou uvedeny omezující podmínky, je u následujících vzorců oborem proměnné x a všech konstant množina \mathbb{R} všech reálných čísel:

1. $y = \text{konst}$ (tzv. *aditivní konstanta*) $\Rightarrow y' = 0$.
2. $y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Speciálně
 $y = x \Rightarrow y' = 1$.
3. $y = x^{-n} \Rightarrow y' = -nx^{-n-1}$ ($x \neq 0, n \in \mathbb{N}$). Speciálně

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0).$$

4. $y = x^a \Rightarrow y' = ax^{a-1}$ ($x > 0, a \in \mathbb{R}$). Speciálně
 $y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad (x > 0, n \in \mathbb{N})$.

Pro některá reálná čísla a lze obor proměnné x rozšířit; např.

$$(x^{1/3})' = \frac{1}{3}x^{-2/3} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

ale

$$y = \sqrt[2]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

5. $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a \quad (a > 0)$, Speciálně
 $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$.

$$6. \quad y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \ln a} \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1). \quad \text{Speciálně}$$

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \quad (x > 0);$$

$$y = \lg x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \lg e \approx \frac{0,4343}{x} \quad (x > 0). \quad \text{Dále}$$

$$y = \ln [x + \sqrt{(x^2 + a^2)}] \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + a^2)}};$$

$$y = \ln [x + \sqrt{(x^2 - a^2)}] \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} \quad [x > |a|, x + \sqrt{(x^2 - a^2)} > 0];$$

$$y = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} \Rightarrow y' = \frac{1}{x^2 - a^2} \quad (x > |a|, a \neq 0);$$

$$y = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} \Rightarrow y' = \frac{1}{a^2 - x^2} \quad (x > |a|, a \neq 0).$$

$$7. \quad y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x. \quad \text{Dále}$$

$$y = \ln |\sin x| \Rightarrow y' = \cotg x \quad (x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}).$$

$$8. \quad y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x. \quad \text{Dále}$$

$$y = \ln |\cos x| \Rightarrow y' = -\operatorname{tg} x \quad \left[x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right].$$

$$9. \quad y = \operatorname{tg} x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad \left[x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right]. \quad \text{Dále}$$

$$y = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \Rightarrow y' = \frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x \quad (x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}).$$

$$10. \quad y = \cotg x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cotg^2 x) \quad (x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}). \quad \text{Dále}$$

$$y = \ln \operatorname{tg} \left| \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos x} = \sec x \quad \left[x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right].$$

$$11. \quad y = \sec x \Rightarrow y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x \quad \left[x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right].$$

$$12. \quad y = \operatorname{cosec} x \Rightarrow y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\cotg x \operatorname{cosec} x \quad (x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}).$$

$$13. \quad y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \quad (|x| < 1).$$

$$14. \quad y = \arccos x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \quad (|x| < 1).$$

$$15. \quad y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$16. \quad y = \operatorname{arccotg} x \Rightarrow y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$17. \quad y = \sinh x \Rightarrow y' = \cosh x.$$

$$18. \quad y = \cosh x \Rightarrow y' = \sinh x.$$

$$19. \quad y = \operatorname{tgh} x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

$$20. \quad y = \operatorname{cotgh} x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sinh^2 x} \quad (x \neq 0).$$

$$21. \quad y = \operatorname{argsinh} x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}.$$

$$22. \quad y = \operatorname{argcosh} x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}} \quad (x > 1).$$

$$23. \quad y = \operatorname{argtgh} x \Rightarrow y' = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1).$$

$$24. \quad y = \operatorname{argcotgh} x \Rightarrow y' = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| > 1).$$

$$25. \quad y = \ln f(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad [f(x) > 0]$$

(tzv. *logaritmická derivace*).

Derivace vyšších řádů některých funkcí

V následujících vzorcích je $n \in \mathbb{N}$.

$$26. \quad y = x^a \Rightarrow y^{(n)} = a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)x^{a-n} \quad (x > 0, a \in \mathbb{R});$$

$$y = x^r \Rightarrow y^{(n)} = 0 \quad (r \in \mathbb{Z}, n > r);$$

$$y = x^n \Rightarrow y^{(n)} = n!;$$

$$y = \frac{1}{x^a} \Rightarrow y^{(n)} = (-1)^n a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) \frac{1}{x^{a+n}} \quad (x > 0, a \in \mathbb{R});$$

$$y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} (m-1)(2m-1)\dots$$

$$\dots [(n-1)m-1] \frac{1}{\sqrt[n]{x^{mn-1}}} \quad (x > 0, m \in \mathbb{N}). \quad \text{Dále}$$

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 \Rightarrow y^{(n)} = a_n n!.$$

$$27. \quad y = a^x \Rightarrow y^{(n)} = a^x (\ln a)^n \quad (a > 0). \quad \text{Speciálně}$$

$$y = e^x \Rightarrow y^{(n)} = e^x;$$

$$y = a^{kx} \Rightarrow y^{(n)} = (k \ln a)^n a^{kx} \quad (a > 0, k \in \mathbb{R});$$

$$y = e^{ax} \Rightarrow y^{(n)} = a^n e^{ax} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

$$28. \quad y = \log_a x \Rightarrow y^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n \ln a} \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1).$$

Speciálně

$$y = \ln x \Rightarrow y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \quad (x > 0).$$

$$29. \quad y = \sin x \Rightarrow y^{(n)} = \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right).$$

$$30. \quad y = \cos x \Rightarrow y^{(n)} = \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right).$$

$$31. \quad y = \sin(ax) \Rightarrow y^{(n)} = a^n \sin \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right) \quad (a \in \mathbb{R}).$$

$$32. \quad y = \cos(ax) \Rightarrow y^{(n)} = a^n \cos \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right) \quad (a \in \mathbb{R}).$$

$$33. \quad y = \sinh x \Rightarrow y^{(n)} = \begin{cases} \sinh x & (n \text{ je sudé číslo}), \\ \cosh x & (n \text{ je liché číslo}). \end{cases}$$

$$34. \quad y = \cosh x \Rightarrow y^{(n)} = \begin{cases} \cosh x & (n \text{ je sudé číslo}), \\ \sinh x & (n \text{ je liché číslo}). \end{cases}$$

$$35. \quad y = uv \Rightarrow y^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)} v'' + \dots + \binom{n}{n-1} u' v^{(n-1)} + uv^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

$(n, k \in \mathbb{N}, u^{(0)} = u, v^{(0)} = v; u, v$ jsou funkce reálné proměnné x)

(tzv. Leibnizův vzorec). (Leibnizův vzorec lze odvodit podle binomické věty, viz str. 159.)

5.6. DERIVOVÁNÍ VEKTOROVÉ FUNKCE V E_3

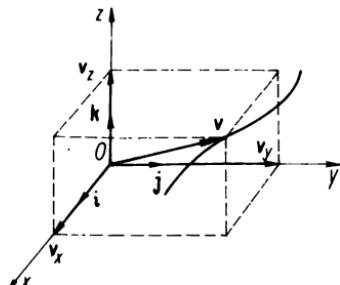
Vektorová funkce

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ nazýváme vektorovou funkci [vektorovým polem] skalární (tj. reálné) proměnné t , právě když každé hodnotě proměnné t z definičního oboru vektorové funkce \mathbf{v} je přiřazena právě jedna hodnota vektorové proměnné $\mathbf{v} \in M$, kde M je množina všech vektorů z prostoru E_3 .

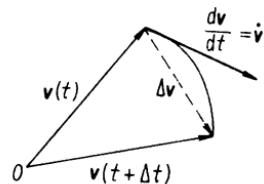
Vektorová funkce má v složkovém vyjádření tvar

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k},$$

kde $v_x = v_x(t)$, $v_y = v_y(t)$, $v_z = v_z(t)$ jsou skalární (tj. reálné) funkce skalární proměnné t , které určují závislosti souřadnic x , y , z vektoru na proměnné t (obr. 322).



Obr. 322. Složkové vyjádření vektorové funkce



Obr. 323. Derivace vektorové funkce

Limita vektorové funkce

Říkáme, že vektorová funkce $\mathbf{v}(t)$ má v bodě t_0 limitu \mathbf{v}_0 , právě když ke každému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo δ_ε , že pro všechna čísla t , pro něž platí $0 < |t - t_0| < \delta_\varepsilon$, je $|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0| < \varepsilon$, a píšeme

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0.$$

Z toho pro $\mathbf{v}_0 = (m_1, m_2, m_3)$ plynou limity

$$\lim_{t \rightarrow t_0} v_x(t) = m_1, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} v_y(t) = m_2, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} v_z(t) = m_3.$$

Říkáme, že vektorová funkce $\mathbf{v}(t)$ je spojitá v bodě t_0 , právě když $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0)$.

Derivace vektorové funkce

Existuje-li limita

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} = \\ = \dot{v}_x \mathbf{i} + \dot{v}_y \mathbf{j} + \dot{v}_z \mathbf{k},$$

říkáme, že vektorová funkce $\mathbf{v}(t)$ má v bodě t derivaci podle skalární proměnné t , a limitu $\dot{\mathbf{v}}$ nazýváme derivací funkce \mathbf{v} podle skalární proměnné t (obr. 323).

Diferenciál vektorové funkce

Říkáme, že vektorová funkce $\mathbf{v}(t)$ má v bodě t diferenciál nebo že vektorová funkce $\mathbf{v}(t)$ je differencovatelná v bodě t , právě když platí

$$\Delta \mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} \Delta t + \epsilon(\Delta t) \Delta t,$$

kde

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \epsilon(\Delta t) = 0,$$

tj. přírůstek vektoru $\Delta \mathbf{v}$ lze nahradit tzv. *diferenciálem* $d\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{v}} \Delta t = \dot{\mathbf{v}} dt$ vektorové funkce $\mathbf{v}(t)$ v bodě t .

Derivace a diferenciály vyšších řádů vektorových funkcí se zavádějí obdobně jako pro skalární funkce.

Geometrický a kinematický význam vektorové funkce

Derivace $\dot{\mathbf{v}}(t_0)$ udává směr tečny v bodě $M(t_0)$ k trajektorii (hodografu) příslušné k dané vektorové funkci $\mathbf{v}(t)$.

Považujeme-li t za časovou proměnnou, pak derivace $\dot{\mathbf{v}}(t_0)$ udává rychlosť bodu $M(t)$, pohybujícího se po trajektorii příslušné k vektorové funkci $\mathbf{v}(t)$, v okamžiku $t = t_0$.

Pravidla pro derivování vektorových funkcí

$$1. \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad \text{pro} \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 \quad (\text{konstantní vektor}).$$

$$2. \frac{d(\mathbf{v}_1 \pm \mathbf{v}_2)}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \pm \frac{d\mathbf{v}_2}{dt}.$$

$$3. \frac{d(g\mathbf{v})}{dt} = \frac{dg}{dt} \mathbf{v} + g \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

kde $g = g(t)$ je skalární funkce skalární proměnné t .

$$4. \frac{d(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{v}_2 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \mathbf{v}_1.$$

$$5. \frac{d(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3)}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \right] + \left[\mathbf{v}_1 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \mathbf{v}_3 \right] + \left[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \frac{d\mathbf{v}_3}{dt} \right].$$

$$6. \frac{d(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \times \mathbf{v}_2 - \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \times \mathbf{v}_1.$$

$$7. \frac{d(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) + \mathbf{v}_1 \times \left(\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \times \mathbf{v}_3 \right) + \\ + \mathbf{v}_1 \times \left(\mathbf{v}_2 \times \frac{d\mathbf{v}_3}{dt} \right).$$

$$8. \frac{d}{dt} \mathbf{v}(\varphi(t)) = \frac{d\mathbf{v}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt},$$

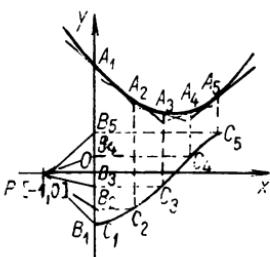
kde $\varphi = \varphi(t)$ je skalární funkce skalární proměnné t .

5.7. GRAFICKÉ DERIVOVÁNÍ

Grafickým derivováním nazýváme bodovou konstrukci grafu funkce $y' = f'(x)$ na základě grafu funkce $y = f(x)$.

Je-li dán graf funkce $y = f(x)$, sestrojíme graf její derivace takto (obr. 324):

V dostatečně mnoha bodech A_1, A_2, A_3, \dots daného grafu (tyto body volíme blíže sebe tam, kde se graf více mění) sestrojíme tečny a vedeme k nim body $P = [-1, 0]$ na ose x rovnoběžky, které protnou osu y po řadě v bodech B_1, B_2, B_3, \dots . Body B_1, B_2, B_3, \dots vedeme rovnoběžky s osou x , které protnou kolmice z bodů A_1, A_2, A_3, \dots na osu x v bodech C_1, C_2, C_3, \dots . Body C_1, C_2, C_3, \dots jsou body hledaného grafu derivace f' .



Obr. 324. Grafické derivování

5.8. EXTRÉMY FUNKCÍ

Extrémy funkcí daných explicitně

Jestliže funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 kladnou, resp. zápornou derivaci, pak je v bodě x_0 rostoucí, resp. klesající.

Jestliže funkce $y = f(x)$ má v každém vnitřním bodě intervalu I kladnou, resp. zápornou, resp. nezápornou, resp. nekladnou derivaci, pak je na intervalu I rostoucí, resp. klesající, resp. neklesající, resp. nerostoucí.

Říkáme, že funkce $y = f(x)$ na definičním oboru D má v bodě $x_0 \in D$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{absolutní maximum,} \\ \text{absolutní minimum,} \\ \text{ostré absolutní maximum,} \\ \text{ostré absolutní minimum,} \end{array} \right\} \text{ právě když pro } \forall x \in D \text{ platí } \left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq f(x_0) \\ f(x) \geq f(x_0) \\ f(x) < f(x_0) \\ f(x) > f(x_0) \end{array} \right\}.$$

Říkáme, že funkce $y = f(x)$ na definičním oboru D má v bodě $x_0 \in D$ absolutní extrém (resp. ostrý absolutní extrém), právě když má v bodě x_0 absolutní maximum nebo absolutní minimum (resp. ostré absolutní maximum nebo ostré absolutní minimum).

Říkáme, že funkce $y = f(x)$ na definičním oboru D má v bodě $x_0 \in D$ $[\tilde{U}(x_0)]$ je neúplné okolí bodu x_0]

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{lokální maximum,} \\ \text{lokální minimum,} \\ \text{ostré lokální maximum,} \\ \text{ostré lokální minimum,} \end{array} \right\} \text{ právě když pro } \forall x \in \tilde{U}(x_0) \subseteq D \text{ platí } \left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq f(x_0) \\ f(x) \geq f(x_0) \\ f(x) < f(x_0) \\ f(x) > f(x_0) \end{array} \right\}.$$

Říkáme, že funkce $y = f(x)$ na definičním oboru D má v bodě $x_0 \in D$ lokální extrém (resp. ostrý lokální extrém), právě když má v bodě x_0 lokální maximum nebo lokální minimum (resp. ostré lokální maximum nebo ostré lokální minimum).

Body x_k , v nichž $f'(x) = 0$, se nazývají stacionární body funkce f nebo nulové body derivace f' .

Má-li funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li $f'(x_0)$, platí $f'(x_0) = 0$ (nutná podmínka pro lokální extrém).

Jestliže x_0 je stacionárním bodem funkce $y = f(x)$ a existuje $f''(x_0)$, pak funkce f má v bodě x_0

- ostré lokální maximum, jestliže $f''(x_0) < 0$;
- ostré lokální minimum, jestliže $f''(x_0) > 0$.

Jestliže $f''(x_0) = 0$, pak platí:

Má-li funkce $y = f(x)$ na okolí $U(x_0)$ spojitou derivaci řádu $m \geq 3$, přičemž je

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(m-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(m)}(x_0) \neq 0,$$

pak

je-li m liché číslo, $f^{(m)}(x_0) > 0$, je funkce f v bodě x_0 rostoucí;

je-li m liché číslo, $f^{(m)}(x_0) < 0$, je funkce f v bodě x_0 klesající;

je-li m sudé číslo, $f^{(m)}(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum;

je-li m sudé číslo, $f^{(m)}(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Absolutní extrémy funkce na množině

Říkáme, že funkce $y = f(x)$ nabývá v bodě $x_0 \in A \subseteq D(f)$ *absolutního maxima*, resp. *absolutního minima* na množině A , jestliže pro všechny body $x \in A$ platí $f(x) \leq f(x_0)$, resp. $f(x) \geq f(x_0)$. Absolutní maximum a absolutní minimum funkce f na množině A souhrnně nazýváme *absolutními extrémy funkce f na množině A*. *Absolutní maximum*, resp. *absolutní minimum* funkce $y = f(x)$ na množině A značíme

$$\max_{x \in A} f(x), \text{ resp. } \min_{x \in A} f(x) \quad [\text{stručně } \max_A f(x), \text{ resp. } \min_A f(x)].$$

Supremum a infimum funkce na množině

Supremem, resp. *infimum ohraničené reálné funkce f na množině A* $\subseteq D(f)$ nazýváme supremum, resp. infimum množiny $f(A)$ (viz článek 0.4.5). Supremum, resp. infimum funkce $y = f(x)$ na množině A značíme

$$\sup_{x \in A} f(x), \text{ resp. } \inf_{x \in A} f(x) \quad [\text{stručně } \sup_A f(x), \text{ resp. } \inf_A f(x)].$$

Poznámka:

Má-li reálná funkce na množině A absolutní maximum M , resp. absolutní minimum m , pak číslo M , resp. m je supremem, resp. infimum funkce f na množině A .

Úmluva:

V dalším výkladu budeme ostré lokální maximum, resp. ostré lokální minimum stručně nazývat *maximem*, resp. *minimem* (souhrnně budeme mluvit o *extrému*).

Příklad:

Máme najít extrémy funkce $y = x^3 - 15x^2 + 48x - 3$.

$$y' = 3x^2 - 30x + 48,$$

$$y'' = 6x - 30;$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 30x + 48 = 0 \Rightarrow x_1 = 8 \wedge x_2 = 2;$$

$$f''(x_1) = 6 \cdot 8 - 30 = 18 \Rightarrow v \text{ bodě } x_1 \text{ nastává minimum},$$

$$f''(x_2) = 6 \cdot 2 - 30 = -18 \Rightarrow v \text{ bodě } x_2 \text{ nastává maximum}.$$

Příslušné extrémy: $y_1 = -67$, $y_2 = 41$.

Extrémní body:

$$E_1[8, -67] \quad (\text{minimum}),$$

$$E_2[2, 41] \quad (\text{maximum}).$$

Zjednodušený výpočet extrémů u racionálních lomených funkcí

Jestliže $f(x) = g(x)/h(x)$, pak první derivace $f'(x) = p(x)/q(x)$ je rovněž racionální lomenou funkcí, takže podmínka pro existenci extrému zní:

$$p(x) = g'(x) h(x) - g(x) h'(x) = 0, \quad q(x) \neq 0.$$

O druhu extrému se rozhodne podle znaménka druhé derivace, která pro nulové body funkce p nabývá jednoduchého tvaru

$$f''(x) = \frac{p'(x)}{q(x)}.$$

Příklad:

Máme najít extrémy funkce

$$y = \frac{2 - 3x + x^2}{2 + 3x + x^2}.$$

$$y' = \frac{(-3 + 2x)(2 + 3x + x^2) - (2 - 3x + x^2)(3 + 2x)}{(2 + 3x + x^2)^2} = \frac{6x^2 - 12}{(2 + 3x + x^2)^2} = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

V nulových bodech funkce p platí

$$y'' = \frac{12x}{(2 + 3x + x^2)^2};$$

$$y' = 0 \Rightarrow 6x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2};$$

$$f''(\sqrt{2}) = \frac{12\sqrt{2}}{(2 + 3\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2)^2} > 0 \Rightarrow v \text{ bodě } \sqrt{2} \text{ nastává minimum},$$

$$f''(-\sqrt{2}) = \frac{-12\sqrt{2}}{(2 + 3(-\sqrt{2}) + (-\sqrt{2})^2)^2} < 0 \Rightarrow v \text{ bodě } -\sqrt{2} \text{ nastává maximum}.$$

Příslušné extrémy:

$$y_1 = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}}, \quad y_2 = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}}.$$

Extrémní body:

$$E_1 \left[-\sqrt{2}, \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}} \right] \quad (\text{minimum}),$$

$$E_2 \left[\frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right] \quad (\text{maximum}).$$

Extrémy funkcí daných implicitně

Funkce $y = \varphi(x)$, daná implicitně ve tvaru $f(x, y) = 0$, má extrém v bodě x_0 , platí-li tyto podmínky:

$$\begin{aligned}f(x_0, y_0) &= 0, \\f_x &= 0, \quad f_y \neq 0.\end{aligned}$$

Maximum nastává, jestliže v příslušném bodě je $f_{xx}/f_y > 0$.

Minimum nastává, jestliže v příslušném bodě je $f_{xx}/f_y < 0$.

Příklad:

Máme najít extrémy funkce $f(x, y) = x^3 - 3a^2x + y^3 = 0$ ($a > 0$).

$$\begin{aligned}f_x &= 3x^2 - 3a^2, \quad f_y = 3y^2, \quad f_{xx} = 6x; \\f(x, y) = 0 \wedge f_x &= 0 \wedge f_y \neq 0 \Rightarrow x^3 - 3a^2x + y^3 = 0 \wedge \\&\wedge 3x^2 - 3a^2 = 0 \wedge 3y^2 \neq 0;\end{aligned}$$

oborem pravdivosti je $P = \{[a, a\sqrt[3]{2}], [-a, -a\sqrt[3]{2}]\}$.

Pro $[a, a\sqrt[3]{2}]$ platí:

$$f_{xx} = 6a \Rightarrow f_{xx}/f_y = \frac{6a}{3a^2\sqrt[3]{4}} > 0 \Rightarrow v \text{ bodě } a \text{ nastává maximum.}$$

Pro $[-a, -a\sqrt[3]{2}]$ platí:

$$f_{xx} = -6a \Rightarrow f_{xx}/f_y = \frac{-6a}{3a^2\sqrt[3]{4}} < 0 \Rightarrow v \text{ bodě } -a \text{ nastává minimum.}$$

Extrémy funkcí daných parametricky

Funkce $y = f(x)$, daná parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, má extrém pro $t = t_0$, jestliže platí tyto podmínky:

$$\dot{\psi}(t_0) = 0, \quad \dot{\varphi}(t_0) \neq 0.$$

Maximum nastává, jestliže je $\ddot{\psi}(t_0) < 0$.

Minimum nastává, jestliže je $\ddot{\psi}(t_0) > 0$.

Příklad:

Máme najít extrémy funkce $(a, b > 0)$

$$x = a \cos t = \varphi(t),$$

$$y = b \sin t = \psi(t).$$

$$\dot{\varphi}(t) = -a \sin t, \quad \dot{\psi}(t) = b \cos t, \quad \ddot{\psi}(t) = -b \sin t;$$

$$\dot{\psi}(t) = 0 \Rightarrow b \cos t = 0 \text{ s kořeny} \quad t_1 = \frac{\pi}{2}, \quad t_2 = \frac{3\pi}{2};$$

$$\dot{\varphi}(t_1) \neq 0, \quad \dot{\varphi}(t_2) \neq 0;$$

$$\ddot{\psi}(t_1) = -b \sin \frac{\pi}{2} = -b < 0 \Rightarrow v t_1 \text{ nastává maximum},$$

$$\ddot{\psi}(t_2) = b > 0 \Rightarrow v t_2 \text{ nastává minimum}.$$

Příslušné extrémy:

$$x_1 = a \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad y_1 = b \sin \frac{\pi}{2} = b;$$

$$x_2 = a \cos \frac{3\pi}{2} = 0, \quad y_2 = b \sin \frac{3\pi}{2} = -b.$$

Extrémní body:

$$E_1[0, b] \quad (\text{maximum}),$$

$$E_2[0, -b] \quad (\text{minimum}).$$

Extrémy funkce $z = f(x, y)$ (maximální a minimální body plochy)

Absolutní a ostré absolutní extrémy, stejně jako lokální a ostré lokální extrémy se u funkcí několika proměnných zavádějí obdobně jako u funkce jedné proměnné.

Funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ ostrý lokální extrém, jestliže v tomto bodě platí tyto podmínky:

$$f_x = 0, \quad f_y = 0, \quad f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0.$$

Maximum nastává pro $f_{xx} < 0$.

Minimum nastává pro $f_{xx} > 0$.

Jestliže $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$, pak říkáme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ minimax, a bod $[x_0, y_0, z_0]$ nazýváme sedlovým bodem.

Pro $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0$ nelze rozhodnout, zda je v bodě $[x_0, y_0]$ maximum nebo minimum nebo zda v něm vůbec nastává extrém.

Vázané extrémy (metoda Lagrangeových multiplikátorů)

Funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ extrém vázaný vedlejší podmínekou $\varphi(x, y) = 0$, jestliže v tomto bodě platí tyto podmínky:

$$\varphi(x, y) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)] = 0, \quad \text{kde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Druh extrému se určí takto: Jestliže druhý diferenciál

$$\begin{aligned} \Delta &= d^2(f + \lambda\varphi) = \\ &= \frac{\partial^2(f + \lambda\varphi)}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2(f + \lambda\varphi)}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2(f + \lambda\varphi)}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \end{aligned}$$

je v příslušném bodě záporný, resp. kladný, pak funkce $z = f(x, y)$ má v tomto bodě maximum, resp. minimum.

Uvedenou metodu lze analogicky použít pro n nezávisle proměnných s m vedlejšími podmínkami ($n + m$ rovnic).

Příklad:

Máme určit extrémy funkce $z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ s vedlejší podmínkou

$$\varphi(x, y) = xy - 9 = 0.$$

Řešíme soustavu rovnic

$$\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow xy - 9 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)] = 0 \Rightarrow 2x + y + \lambda y = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)] = 0 \Rightarrow x + 2y + \lambda x = 0,$$

$$x_{1,2} = \pm 3,$$

$$y_{1,2} = \pm 3, \quad \lambda = -3.$$

Extrémní body jsou $P_1[3, 3, 27]$ a $P_2[-3, -3, 27]$.

Druh extrému určíme takto:

$$\frac{\partial^2(f + \lambda\varphi)}{\partial x^2} = 2, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = x^2, \quad \frac{\partial^2(f + \lambda\varphi)}{\partial x \partial y} = 1 + \lambda,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial^2(f + \lambda\varphi)}{\partial y^2} = 2.$$

Je tedy

$$\Delta = 2x^2 - 2(1 + \lambda)xy + 2y^2.$$

Pro bod P_1 platí:

$$\Delta = 2 \cdot 9 - 2(1 - 3) \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 9 = 72 > 0 \Rightarrow \text{v bodě } [3, 3] \text{ nastává minimum.}$$

Pro bod P_2 platí:

$$\Delta = 2 \cdot 9 - 2(1 - 3) \cdot 9 + 2 \cdot 9 = 72 > 0 \Rightarrow \text{v bodě } [-3, -3] \text{ nastává minimum.}$$

5.9. INFLEXNÍ BODY

Jestliže funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 kladnou, resp. zápornou druhou derivaci, pak je v bodě x_0 ryze konvexní, resp. ryze konkávní.

Jestliže funkce $y = f(x)$ má v každém vnitřním bodě intervalu I kladnou, resp. zápornou, resp. nezápornou, resp. nekladnou druhou derivaci, pak na intervalu I je ryze konvexní, resp. ryze konkávní, resp. konkávní.

Říkáme, že funkce $y = f(x)$ na množině D má v bodě $x_0 \in D$, v němž existuje vlastní derivace $f'(x_0)$, inflexi, právě když

a) pro $\forall x \in \tilde{U}_-(x_0)$ platí $f(x) < f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ a pro $\forall x \in \tilde{U}_+(x_0)$ platí $f(x) > f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$;

b) pro $\forall x \in \tilde{U}_-(x_0)$ platí $f(x) > f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ a pro $\forall x \in \tilde{U}_+(x_0)$ platí $f(x) < f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$.

Jestliže funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 inflexi a existuje $f''(x_0)$, platí $f''(x_0) = 0$ (nutná podmínka pro inflexi v bodě x_0).

Jestliže $f''(x_0) = 0$ a existuje $f'''(x_0)$, pak funkce f má v bodě x_0 inflexi, jestliže $f'''(x_0) \neq 0$.

Nechť $f'''(x_0) = 0$. Má-li funkce $y = f(x)$ na okolí $U(x_0)$ spojitou derivaci řádu $m \geq 4$, přičemž je

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(m-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(m)}(x_0) \neq 0,$$

pak platí:

a) Je-li m liché číslo, pak funkce f má v bodě x_0 inflexi [pro rostoucí hodnoty proměnné x při $f^{(m)}(x_0) > 0$ přechází graf funkce f v bodě x_0 z polohy pod tečnou do polohy nad tečnou, kdežto při $f^{(m)}(x_0) < 0$ přechází graf funkce f z polohy nad tečnou do polohy pod tečnou].

b) Jestliže m je sudé číslo a $f^{(m)}(x_0) > 0$, pak funkce f je v bodě x_0 ryzě konvexní.

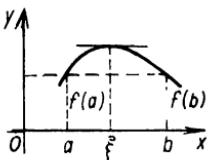
c) Jestliže m je sudé číslo a $f^{(m)}(x_0) < 0$, pak funkce f je v bodě x_0 ryzě konkávní.

5.10 VĚTY O STŘEDNÍ HODNOTĚ V DIFERENCIÁLNÍM POČTU

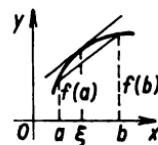
Rollova věta

Jestliže funkce $y = f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, má v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) vlastní nebo nevlastní první derivaci a platí $f(a) = f(b)$ (obr. 325), pak existuje aspoň jeden takový bod $\xi \in (a, b)$, že platí

$$f'(\xi) = 0.$$



Obr. 325. Význam Rollovy věty



Obr. 326. Význam Lagrangeovy věty

Geometrický význam Rollovy věty: Za uvedených předpokladů existuje aspoň jeden takový bod $[\xi, f(\xi)]$ grafu funkce $y = f(x)$, definované na intervalu $\langle a, b \rangle$, mezi body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$, že tečna grafu v bodě $[\xi, f(\xi)]$ je rovnoběžná s osou x .

Lagrangeova věta [první věta o přírůstku funkce]

Jestliže funkce $y = f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a má v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) vlastní nebo nevlastní první derivaci, pak existuje aspoň jeden takový bod $\xi \in (a, b)$, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

(obr. 326). Jiný zápis:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \vartheta h) \quad \text{pro } \vartheta \in (0, 1).$$

Geometrický význam Lagrangeovy věty: Za uvedených předpokladů existuje aspoň jeden takový bod $[\xi, f(\xi)]$ grafu funkce $y = f(x)$, definované na intervalu $\langle a, b \rangle$, mezi body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$, že tečna grafu v bodě $[\xi, f(\xi)]$ je rovnoběžná se spojnicí bodů $[a, f(a)], [b, f(b)]$.

Cauchyova věta

[druhá [zobecněná] věta o přírůstku funkce]

Jestliže funkce $y = f(x)$ a $y = g(x)$ jsou na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ spojité a mají v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) vlastní první derivace, přičemž pro všechna čísla $x \in (a, b)$ je $g'(x) \neq 0$, pak existuje aspoň jeden takový bod $\xi \in (a, b)$, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Pro $g(x) = x$ dostáváme Lagrangeovu větu.

5.11. NEURČITÉ VÝRAZY

5.11.1. Limita typu $0/0$ nebo ∞/∞

Říkáme, že podíl $f(x)/g(x)$ je pro $x \rightarrow a$ limitou [neurčitým výrazem] typu $0/0$, resp. ∞/∞ , jestliže platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

resp.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty$$

(místo $x \rightarrow a$ lze uvažovat $x \rightarrow a+$, $x \rightarrow a-$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$).

K určení $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)]$ v těchto případech často používáme l'Hospitalova pravidla:

Jestliže budě $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, nebo $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$ (o funkci f není třeba nic předpokládat) a existuje vlastní nebo nevlastní limita

$\lim_{x \rightarrow a} [f'(x)/g'(x)]$, pak existuje $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)]$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Jestliže $\lim [f'(x)/g'(x)]$ je opět limita typu $0/0$ nebo ∞/∞ , použijeme l'Hospitalova pravidla znovu.

Příklad:

$$\varphi(x) = \frac{\sin(2x) - 2\sin x}{2e^x - x^2 - 2x - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) \text{ je typu } \frac{0}{0}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos(2x) - 2\cos x}{2e^x - 2x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4\sin(2x) + 2\sin x}{2e^x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8\cos(2x) + 2\cos x}{2e^x} = -3.$$

5.11.2. Limita typu $0 \cdot \infty$

Jestliže limita funkce $\varphi(x) = f(x)/g(x)$ je pro $x = a$ typu $0 \cdot \infty$, platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ nebo } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

čímž dostaneme limitu typu $0/0$ nebo ∞/∞ .

Příklad:

$$\varphi(x) = (1 - \sin x) \operatorname{tg} x; \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \varphi(x) \text{ je typu } 0 \cdot \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{1 - \sin x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{-\cos x}{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \frac{1}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{\cos^3 x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{(\cos x \sin^2 x)}{\sin^2 x} = 0.$$

5.11.3. Limita typu $\infty - \infty$

Jestliže limita funkce $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ je pro $x \rightarrow a$ typu $\infty - \infty$, platí

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \frac{1}{g(x)}},$$

čímž dostaneme limitu typu 0/0.

Příklad:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) \text{ je typu } \infty - \infty.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{1 + \ln x - \frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x+x\ln x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{1+1+\ln x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5.11.4. Limity typů $0^0, \infty^0, 1^\infty$

Jestliže limita funkce $\varphi(x) = f(x)^{g(x)}$ je pro $x \rightarrow a$ typu 0^0 nebo ∞^0 nebo 1^∞ , platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln [f(x)]},$$

čímž exponent převedeme na limitu typu $0 \cdot \infty$.

Příklad:

$$\varphi(x) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}; \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \varphi(x) \text{ je typu } 1^\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} e^{\operatorname{tg} x \ln (\sin x)} \text{ má tvar } e^{\infty \cdot 0}.$$

Pro exponent platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} &= \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{\frac{1}{\sin x} \cos x}{-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \frac{1}{\cos^2 x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} (-\operatorname{cotg} x \operatorname{tg}^2 x \cos^2 x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} (-\sin x \cos x) = 0. \end{aligned}$$

Je tedy

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1.$$

Poznámka:

Někdy vede rozvoj podle rostoucích mocnin proměnné x (rozvoj v řadu) rychleji k výsledku.

Příklad:

$$\varphi(x) = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) \text{ je typu } 0/0.$$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots = x^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \dots \right),$$

$$\sin^2 x = \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^2 = x^2 \left(\frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \dots \right)^2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \dots}{\left(\frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \dots \right)^2} = \frac{1}{2}.$$

6. DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE

V diferenciální geometrii se studují křivky a plochy metodami diferenciálního počtu.

6.1. ROVINNÉ KŘIVKY

Křivkou definovanou parametricky v dvojrozměrném euklidovském prostoru E_2 nazýváme množinu právě těch bodů, jejichž kartézské souřadnice x, y jsou dány rovnicemi

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

kde φ, ψ jsou reálné funkce reálné proměnné t , definované na nějakém intervalu J , které mají spojité derivace podle t aspoň prvního řádu a pro něž vztahy

$$\dot{\varphi}(t) = 0, \quad \dot{\psi}(t) = 0$$

oba zároveň platí jen v izolovaných bodech intervalu J .

Bod $[\varphi(t_0), \psi(t_0)]$ křivky se nazývá *regulární*, jestliže aspoň jedna z derivací $\dot{\varphi}(t_0), \dot{\psi}(t_0)$ je různá od nuly a bodu $[\varphi(t_0), \psi(t_0)]$ odpovídá právě jedna hodnota parametru t . Ostatní body křivky se nazývají *singulární*.

Přísluší-li několika hodnotám parametru t jediný bod, pak takový bod se nazývá *několikanásobný*.

Rovnice $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ nazýváme *parametrickými rovnicemi křivky*.

Křivkou definovanou implicitně v dvojrozměrném euklidovském prostoru E_2 nazýváme množinu právě těch bodů, jejichž kartézské souřadnice x, y jsou dány rovnicí

$$F(x, y) = 0,$$

kde F je reálná funkce dvou reálných proměnných na množině $\Omega_2 \subseteq E_2$, která má spojité první parciální derivace a pro niž vztahy

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

všechny tři zároveň platí jen v izolovaných bodech oboru Ω_2 .

Bod $[x_0, y_0]$ křivky se nazývá *regulární*, jestliže aspoň jedna z parciálních derivací $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ je různá od nuly.

Je-li křivka definována implicitně, pak ji lze v dostatečně malém okolí každého jejího bodu vyjádřit parametricky, a obráceně, je-li definována parametricky, pak ji lze na okolí každého jejího bodu vyjádřit implicitně.

Graf spojité diferencovatelné funkce $y = f(x)$ ($x \in \langle a, b \rangle$) je křivka definovaná parametrickými rovnicemi $x = t$, $y = f(t)$ ($t \in \langle a, b \rangle$). Graf diferencovatelné funkce $y = f(x)$ ($x \in \langle a, b \rangle$) je křivka definovaná implicitně rovnicí

$$F(x, y) = y - f(x) = 0.$$

Vektorový zápis rovinné křivky:

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t) \mathbf{i} + \psi(t) \mathbf{j}.$$

Vyjádření rovinné křivky v polárních souřadnicích:

$$\varrho = f(\varphi) \quad \text{nebo} \quad F(\varrho, \varphi) = 0.$$

6.1.1. Základní prvky rovinných křivek

Diferenciál [element] oblouku křivky:

$$ds = \sqrt{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2)} dt$$

pro křivku danou parametricky;

$$ds = \sqrt{(1 + y'^2)} dx$$

pro křivku $y = f(x)$;

$$ds = \sqrt{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \right)^2 \right]} d\varphi$$

pro křivku $\varrho = f(\varphi)$.

Délka oblouku křivky dané parametricky s krajními body $P(t_1)$ a $P(t_2)$ je dána vzorcem

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\{[\dot{\varphi}(t)]^2 + [\dot{\psi}(t)]^2\}} dt.$$

Délka oblouku křivky dané rovnici $y = f(x)$ s krajními body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$ je dána vzorcem

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\{1 + [f'(x)]^2\}} dx.$$

Délka oblouku křivky dané rovnicí $\varrho = f(\varphi)$ s krajními body $[\varrho_1, \varphi_1]$ a $[\varrho_2, \varphi_2]$ je dána vzorcem

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \right)^2 \right]} d\varphi.$$

Oblouk jako parametr

Jestliže $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ jsou parametrické rovnice křivky k a $t(\tau)$ je funkce definovaná na intervalu J' , která má na intervalu J' spojitou derivaci $dt/d\tau \neq 0$, pak také $x = \varphi(t(\tau))$ a $y = \psi(t(\tau))$ jsou parametrické rovnice křivky k .

Ríkáme, že v parametrických rovnicích $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$ křivky k je parametrem oblouk, jestliže délka křivky k s krajními body $P(s_1)$ a $P(s_2)$ se rovná číslu $s_2 - s_1$. Jsou-li $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ parametrické rovnice křivky k , pak $x = \varphi(t(s))$, $y = \psi(t(s))$, kde $f(s)$ je inverzní funkce k funkci

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\{[\dot{\varphi}(\tau)]^2 + [\dot{\psi}(\tau)]^2\}} d\tau,$$

jsou parametrické rovnice též křivky k , kde parametrem je oblouk.

Příklad:

Jestliže $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ ($t \in \mathbb{R}$) jsou parametrické rovnice kružnice s poloměrem r , pak platí

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{[(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2]} dt = rt,$$

$$t(s) = \frac{s}{r}$$

a

$$x = r \cos \frac{s}{r}, \quad y = r \sin \frac{s}{r} \quad (s \in \mathbb{R})$$

jsou parametrické rovnice též kružnice, kde parametrem je oblouk.

Tečný a normálový vektor

Tečným, resp. normálovým vektorem v regulárním bodě $P[x_0, y_0]$ křivky dané parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $\left[x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0), \dot{\varphi}_0 = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=t_0}, \dot{\psi}_0 = \left(\frac{d\psi}{dt} \right)_{t=t_0} \right]$ nazýváme vektor $\mathbf{t}_0 = (\dot{\varphi}_0, \dot{\psi}_0)$,

resp.

$$\mathbf{n}_0 = (\dot{\psi}_0, -\dot{\phi}_0).$$

Je-li parametr $t = s$ obloukem, je $|\mathbf{t}_0| = |\mathbf{n}_0| = 1$.

Tečným, resp. normálovým vektorem v regulárním bodě $P[x_0, y_0]$ křivky dané implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ $\left[F_x^0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), F_y^0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right]$ nazýváme vektor

$$\mathbf{t}_0 = (-F_y^0, F_x^0),$$

resp.

$$\mathbf{n}_0 = (F_x^0, F_y^0).$$

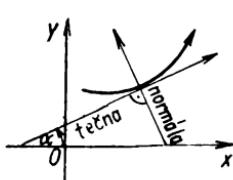
Tečným, resp. normálovým vektorem v regulárním bodě $P[x_0, y_0]$ křivky

$y = f(x)$ $\left[y'_0 = \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} \right]$ nazýváme vektor

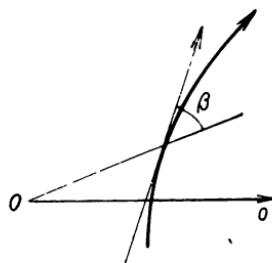
$$\mathbf{t}_0 = (1, y'_0),$$

resp.

$$\mathbf{n}_0 = (y'_0, -1).$$



Obr. 327. Tečna a normála křivky



Obr. 328. Úhel tečny a průvodiče

Pro úhel velikosti α , který svírá tečný vektor s první kladnou poloosou platí

$$\sin \alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} \quad (\text{obr. 327}).$$

Pro úhel β , který svírá tečný vektor s kladně orientovaným průvodičem, platí

$$\sin \beta = \varrho \frac{d\varphi}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{d\varrho}{ds}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\varrho}{\frac{d\varrho}{d\varphi}} \quad (\text{obr. 328}).$$

Tečna a normála

Přímka obsahující tečný vektor se nazývá *tečna*.

Rovnice tečny v regulárním bodě $P_0[x_0, y_0]$ křivky dané parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $\left[x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0), \dot{\varphi}_0 = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=t_0}, \dot{\psi}_0 = \left(\frac{d\psi}{dt} \right)_{t=t_0} \right]$:

$$(X - x_0)\dot{\psi}_0 - (Y - y_0)\dot{\varphi}_0 = 0.$$

Rovnice tečny v regulárním bodě $P_0[x_0, y_0]$ křivky dané implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ $\left[F_x^0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), F_y^0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right]$:

$$(X - x_0)F_x^0 + (Y - y_0)F_y^0 = 0.$$

Rovnice tečny v regulárním bodě $P_0[x_0, y_0]$ křivky $y = f(x)$

$$\left[y'_0 = \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} \right]$$

$$(Y - y_0) - y'_0(X - x_0) = 0.$$

Takto zavedená tečna je limitní polohou sečny, jestliže její dva průsečíky s křivkou splynou v jediný bod. Regulární bod P nazýváme *dotykovým bodem tečny ke křivce*.

Přímka obsahující normálový vektor se nazývá *normála*.

Rovnice normály v regulárním bodě $P_0[x_0, y_0]$ křivky dané parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $\left[x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0), \dot{\varphi}_0 = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=t_0}, \dot{\psi}_0 = \left(\frac{d\psi}{dt} \right)_{t=t_0} \right]$:

$$(X - x_0)\dot{\varphi}_0 + (Y - y_0)\dot{\psi}_0 = 0.$$

Rovnice normály v regulárním bodě $P_0[x_0, y_0]$ křivky dané implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ $\left[F_x^0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), F_y^0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right]$:

$$(X - x_0)F_y^0 - (Y - y_0)F_x^0 = 0.$$

Rovnice normály v regulárním bodě $P_0[x_0, y_0]$ křivky $y = f(x)$

$$\left[y'_0 = \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} \right]$$

$$(X - x_0) + \frac{1}{y'_0}(Y - y_0) = 0.$$

Tečna a normála jsou přímky navzájem kolmé.

Úseky tečny a normály

Pro křivku $y = f(x)$ (obr. 329a) a dotykový bod $P[x, y]$ platí:

Délka úseku tečny (tzv. *tangenta*), tj. vzdálenost dotykového bodu od průsečíku tečny s osou x , se rovná

$$t = \left| \frac{y}{y'} \sqrt{(1 + y'^2)} \right|.$$

Délka úseku normály (tzv. *normála*), tj. vzdálenost dotykového bodu od průsečíku normály s osou x , se rovná

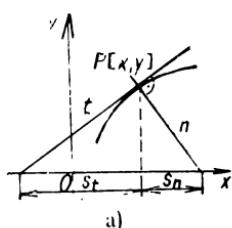
$$n = |y \sqrt{(1 + y'^2)}|.$$

Subtangenta, tj. délka průmětu úseku tečny do osy x , se rovná

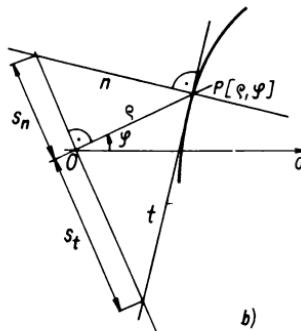
$$s_t = \left| \frac{y}{y'} \right|.$$

Subnormála, tj. délka průmětu úseku normály do osy x , se rovná

$$s_n = |yy'|.$$



Obr. 329. Úsek tečny a úsek normály křivky



Pro křivku $\rho = f(\varphi)$ (obr. 329b) a dotykový bod $P[\rho, \varphi]$ platí:

Délka úseku polární tečny, tj. vzdálenost dotykového bodu od průsečíku tečny s přímkou vedenou pólem kolmo k průvodiči dotykového bodu, se rovná

$$t = \left| \frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\varphi}} \sqrt{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 \right]} \right|.$$

Délka úseku polární normály, tj. vzdálenost dotykového bodu od průsečíku normály s přímkou vedenou pólem kolmo k průvodiči dotykového bodu, se rovná

$$n = \sqrt{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \right)^2 \right]}.$$

Polární subtangenta, tj. délka průmětu polární tečny do přímky vedené pólem kolmo k průvodiči dotykového bodu, se rovná

$$s_t = \left| \frac{\varrho^2}{\frac{d\varrho}{d\varphi}} \right|.$$

Polární subnormála, tj. délka průmětu polární normály do přímky vedené pólem kolmo k průvodiči dotykového bodu, se rovná

$$s_n = \left| \frac{d\varrho}{d\varphi} \right|.$$

Styk dvou křivek

Jestliže křivka k , resp. k' je dána parametrickými rovnicemi

$$x = \varphi_1(s), \quad y = \psi_1(s),$$

resp.

$$x = \varphi_2(s), \quad y = \psi_2(s),$$

kde parametrem je oblouk s , pak říkáme, že rovinné křivky k , k' mají ve společném bodě $s = 0$ styk [dotyk] nejméně q -tého řádu [styk [dotyk] nejméně $(q+1)$ -bodový], právě když

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0), \quad \psi_1(0) = \psi_2(0),$$

$$\left(\frac{d\varphi_1}{ds} \right)_{s=0} = \left(\frac{d\varphi_2}{ds} \right)_{s=0}, \quad \left(\frac{d\psi_1}{ds} \right)_{s=0} = \left(\frac{d\psi_2}{ds} \right)_{s=0},$$

$$\left(\frac{d^q \varphi_1}{ds^q} \right)_{s=0} = \left(\frac{d^q \varphi_2}{ds^q} \right)_{s=0}, \quad \left(\frac{d^q \psi_1}{ds^q} \right)_{s=0} = \left(\frac{d^q \psi_2}{ds^q} \right)_{s=0}.$$

Říkáme, že rovinné křivky $y = f(x)$ a $y = g(x)$ mají v bodě $P_0[x_0, y_0]$ styk [dotyk] nejméně q -tého řádu [styk [dotyk] nejméně $(q+1)$ -bodový], právě když

$$y_0 = f(x_0) = g(x_0), \quad f'(x_0) = g'(x_0), \dots, f^{(q)}(x_0) = g^{(q)}(x_0).$$

Mají-li dvě křivky k_1 a k_2 styk nejméně q -tého řádu, ale nemají-li již styk $(q+1)$ -ního řádu, říkáme, že mají *styk právě q -tého řádu*.

Oskulační kružnice, poloměr křivosti, křivost, střed křivosti

*Oskulační kružnicí [kružnicí křivosti] křivky v jejím bodě nazýváme kružnicí, která má v tomto bodě s křivkou styk nejméně druhého řádu. Její poloměr R , resp. střed S_k nazýváme *poloměrem*, resp. *středem* $\langle \text{první} \rangle$ křivosti křivky.*

Střed křivosti $S_k[\xi, \eta]$ leží na normále v dotykovém bodě křivky.
Převrácené číslo k poloměru ' τ křivosti R se nazývá $\langle \text{první} \rangle$ křivost [flexe] κ křivky: $\kappa = 1/R$.

Poloměr křivosti R , křivost κ a souřadnice středu křivosti $S_k[\xi, \eta]$ vypočteme podle těchto vzorců:

Pro křivku $y = f(x)$ v jejím bodě $P[x, y]$ pro $y'' \neq 0$ je

$$R = \left| \frac{(1 + y')^{3/2}}{y''} \right|, \quad \kappa = \left| \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \right|,$$

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Pro křivku $F(x, y) = 0$ v jejím bodě $P[x, y]$ při tečně různoběžné s osou y je

$$R = |m| \sqrt{(F_x^2 + F_y^2)}, \quad \kappa = \frac{1}{|m| \sqrt{(F_x^2 + F_y^2)}},$$

$$\xi = x - mF_x, \quad \eta = y - mF_y,$$

kde

$$m = \frac{F_x^2 + F_y^2}{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}.$$

Pro křivku $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ v jejím bodě $P(t)$ je

$$R = \left| \frac{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2)^{3/2}}{\begin{vmatrix} \dot{\varphi}, \dot{\psi} \\ \ddot{\varphi}, \ddot{\psi} \end{vmatrix}} \right|, \quad \kappa = \frac{\begin{vmatrix} \dot{\varphi}, \dot{\psi} \\ \ddot{\varphi}, \ddot{\psi} \end{vmatrix}}{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2)^{3/2}},$$

$$\xi = x - \frac{\dot{\psi}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2)}{\begin{vmatrix} \dot{\varphi}, \dot{\psi} \\ \ddot{\varphi}, \ddot{\psi} \end{vmatrix}}, \quad \eta = y + \frac{\dot{\varphi}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2)}{\begin{vmatrix} \dot{\varphi}, \dot{\psi} \\ \ddot{\varphi}, \ddot{\psi} \end{vmatrix}}.$$

Pro křivku $\varrho = f(\varphi)$ v jejím bodě $P[\varrho, \varphi]$ je

$$R = \left| \frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \right)^2 \right]^{3/2}}{\varrho^2 + 2 \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \right)^2 - \varrho \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}} \right|, \quad \kappa = \left| \frac{\varrho^2 + 2 \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \right)^2 - \varrho \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}}{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \right)^2 \right]^{3/2}} \right|,$$

$$\xi = \varrho \cos \varphi - \frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \right)^2 \right] \left[\varrho \cos \varphi + \frac{d\varrho}{d\varphi} \sin \varphi \right]}{\varrho^2 + 2 \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \right)^2 - \varrho \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}},$$

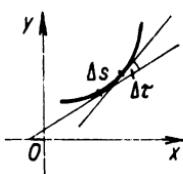
$$\eta = \varrho \sin \varphi - \frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \right)^2 \right] \left[\varrho \sin \varphi - \frac{d\varrho}{d\varphi} \cos \varphi \right]}{\varrho^2 + 2 \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \right)^2 - \varrho \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}}.$$

Pro R , popř. κ dále platí

$$R = \frac{1}{\kappa} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta\tau} = \frac{ds}{d\tau},$$

kde $\Delta\tau$ je odchylka tečny v daném bodě P a tečny v sousedním bodě P_1 (obr. 330) a Δs je délka oblouku mezi body P a P_1 . Úhel $\Delta\tau$ se nazývá *kontingenční úhel*.

Vrcholem rovinné křivky nazýváme bod, v němž má tato křivka (lokálně) extrémní hodnotu poloměru křivosti. Rozeznáváme hlavní a vedlejší vrcholy.



Obr. 330. Kontingenční úhel

Konvexnost a konkávnost křivky

Křivku nazýváme *konvexní v bodě P*, jestliže pro křivost κ křivky v tomto bodě platí $\kappa < 0$. Křivku nazýváme *konkávní v bodě P*, jestliže pro křivost κ křivky v tomto bodě platí $\kappa > 0$.

Inflexní body

Inflexním bodem křivky k nazýváme takový její bod, v němž buď konvexnost křivky se změní v konkávnost, nebo konkávnost se změní v konvexnost.

Nutnou podmínkou pro inflexní body u křivky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ je

$$\begin{vmatrix} \dot{\varphi}, & \dot{\psi} \\ \ddot{\varphi}, & \ddot{\psi} \end{vmatrix} = 0,$$

u křivky $\varrho = f(\varphi)$ je

$$\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 - \varrho \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} = 0$$

a u křivky $F(x, y) = 0$ je

$$\begin{vmatrix} F_{xx}, & F_{xy}, & F_x \\ F_{yx}, & F_{yy}, & F_y \\ F_x, & F_y, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Singulární body

Singulárním bodem křivky $F(x, y) = 0$ nazýváme bod, jehož souřadnice vyhovují zároveň rovnicím

$$F(x, y) = 0, \quad F_x = 0, \quad F_y = 0.$$

Dvojnásobným bodem křivky $F(x, y) = 0$ nazýváme její singulární bod, pro který aspoň jedna z parciálních derivací druhého řádu je různá od nuly.

Dvojnásobný bod se nazývá:

- *uzlový bod [uzel]*, jestliže $F_{xy}^2 > F_{xx}F_{yy}$;
- *hrot [bod vratu]*, jestliže $F_{xy}^2 = F_{xx}F_{yy}$;
- *izolovaný [osamocený] bod*, jestliže $F_{xy}^2 < F_{xx}F_{yy}$.

V každém uzlovém bodě má křivka právě dvě reálné různé tečny.

V každém hrotu má křivka jedinou společnou tečnu.

V izolovaných bodech neexistují reálné tečny.

Příklad 1:

Vyšetřeme singulární body křivky $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

$$F_x = 3x^2 - 3ay,$$

$$F_y = 3y^2 - 3ax,$$

$$F_{xy} = -3a, \quad F_{xx} = 6x, \quad F_{yy} = 6y;$$

$F(x, y) = 0 \wedge F_x = 0 \wedge F_y = 0 \Rightarrow$ obor pravdivosti $P = \{[0, 0]\} \Rightarrow$
 \Rightarrow křivka má jediný singulární bod $U = [0, 0];$

$F_{xy}^2 = 9a^2 \wedge F_{xx} = 0 \wedge F_{yy} = 0 \Rightarrow F_{xy}^2 > F_{xx}F_{yy} \Rightarrow$
 \Rightarrow bod $U = [0, 0]$ je uzlovým bodem.

Viz Descartesův list na str. 551.

Příklad 2:

Vyšetřeme singulární body křivky $F(x, y) = x^3 - y^2(a - x) = 0.$

$$F_x = 3x^2 + y^2,$$

$$F_y = 2xy - 2ay,$$

$$F_{xy} = 2y, \quad F_{xx} = 6x, \quad F_{yy} = 2x - 2a;$$

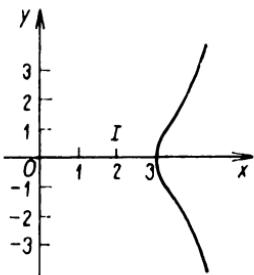
$F(x, y) = 0 \wedge F_x = 0 \wedge F_y = 0 \Rightarrow$ obor pravdivosti

$P = \{[0, 0]\} \Rightarrow$ křivka má jediný singulární bod $H = [0, 0];$

$F_{xy}^2 = 0 \wedge F_{xx} = 0 \wedge F_{yy} = -2a \Rightarrow F_{xy}^2 = F_{xx}F_{yy} \Rightarrow$

\Rightarrow bod $H = [0, 0]$ je hrotom.

Viz kisoidu na str. 551.



Obr. 331. Graf funkce z příkladu 3

Příklad 3:

Vyšetřeme singulární body křivky $F(x, y) = y^2 - x^3 + 7x^2 - 16x + 12 = 0.$

$$F_x = -3x^2 + 14x - 16,$$

$$F_y = 2y,$$

$$F_{xy} = 0, \quad F_{xx} = -6x + 14, \quad F_{yy} = 2;$$

$F(x, y) = 0 \wedge F_x = 0 \wedge F_y = 0 \Rightarrow$ obor pravdivosti

$P = \{[2, 0]\} \Rightarrow$ křivka má jediný singulární bod $I = [2, 0];$

$F_{xy}^2 = 0 \wedge F_{xx} = 2 \wedge F_{yy} = 2 \Rightarrow F_{xy}^2 < F_{xx}F_{yy} \Rightarrow$

\Rightarrow bod $I = [2, 0]$ je izolovaným bodem (obr. 331).

Asymptoty rovinných křivek

Asymptotou rovinné křivky nazýváme takovou přímku, že vzdálenost d bodu P na křivce od této přímky konverguje k nule, jestliže aspoň jedna souřadnice bodu P roste nadef všechny meze, tj.

$$\lim_{P \rightarrow \pm\infty} d = 0.$$

U křivek $y = f(x)$ rozděláváme *vertikální [nesměrnicové] asymptoty* o rovnici $x = x_0$ (tj. asymptoty rovnoběžné s osou y) a *směrnicové asymptoty* o rovnici $y = kx + q$.

Křivka $y = f(x)$ má vertikální asymptotu o rovnici $x = x_0$, právě když platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \text{ popř. } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty, \text{ popř. } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Křivka $y = f(x)$ má směrnicovou asymptotu o rovnici $y = kx + q$, existují-li vlastní limity

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx].$$

Směr asymptoty křivky $\varrho = f(\varphi)$ v polárních souřadnicích je určen úhlem φ_0 , jestliže

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \varrho = \pm\infty.$$

Pro vzdálenost p pólu od asymptoty platí

$$p = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} [\varrho \sin(\varphi_0 - \varphi)].$$

Obalová křivka [obálka]

Říkáme, že rovnici $F(x, y, p) = 0$ je určena jednoparametrická soustava rovinných křivek, jestliže každému parametru p z určitého intervalu přísluší určitá rovinná křivka o rovnici $F(x, y, p) = 0$.

Křivka, jejž rovnici $G(x, y) = 0$ dostaneme vyloučením parametru p z rovnic

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0,$$

se nazývá *diskriminantní křivka jednoparametrické soustavy křivek o rovnici*

$F(x, y, p) = 0$. Diskriminantní křivku nebo její část nazýváme *obalovou křivkou [obálkou]* jednoparametrické soustavy křivek, jestliže se v každém svém bodě dotýká některé křivky z jednoparametrické soustavy křivek a každá křivka této soustavy se dotýká diskriminantní křivky.

Tečna v každém bodě obálky je zároveň tečnou některé z křivek jednoparametrické soustavy křivek.

Evoluta

Evolutou křivky nazýváme množinu všech jejích středů křivosti.

Rovnici evoluty dostaneme vyloučením x a y z rovnice křivky a z rovnic pro souřadnice ζ , η středu křivosti, přičemž ζ , η pak predstavují souřadnice běžného bodu evoluty.

Tečny evoluty jsou zároveň normálami dané křivky.

Rozdíl dvou poloměrů křivosti se rovná délce oblouku mezi příslušnými středy křivosti. (Rovnice evoluty pro parabolu, elipsu a hyperbolu viz na str. 425, 435 a 447.)

Trajektorie

Trajektorií nějaké soustavy křivek nazýváme křivku, která protíná všechny křivky této soustavy podle nějakého zákona.

Izogonální, resp. ortogonální trajektorie soustavy křivek protíná všechny křivky této soustavy pod týmž úhlem, resp. pod pravým úhlem.

Evolventa

Při kotálení tečny evoluty po evolutě opisuje každý bod tečny křivku rovnoběžnou [ekvidistantní] s původní křivkou (vzdálenost mezi dvěma evolventami měřená na společné normále je totiž konstantní). Prvky této soustavy rovnoběžných křivek, k nimž také patří původní křivka, se nazývají *evolventy dané křivky*.

Evolventa křivky k je křivka, jejíž evolutou je křivka k .

Evolventa křivky k kolmo protíná soustavu tečen křivky k , tj. evolventa křivky k je ortogonální trajektorii tečen křivky k .

Každá normálna evolventy je tečnou její evoluty s dotykovým bodem ve středu křivosti evolventy.

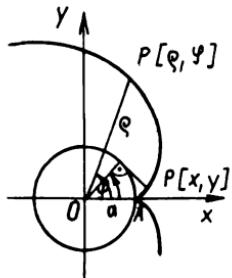
Poměr poloměrů křivosti evoluty a evolventy se rovná poměru příslušných elementů oblouků.

Evolventa kružnice

Při valení tečny po dané kružnici (obr. 332) opisuje každý bod tečny *evolventu kružnice*, danou rovnicemi

$$x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t),$$

kde a je poloměr dané kružnice,
 t – velikost úhlu odvalení.



Obr. 332. Evolventa kružnice

Rovnice evolenty kružnice v polárních souřadnicích:

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1\right)} - \arctg \sqrt{\left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1\right)}$$

(valení se začíná v bodě A).

6.1.2. Některé důležité rovinné křivky

6.1.2.1. Semikubická parabola [Neilova parabola]

$$y = ax^{2/3} \quad (x \in \mathbb{R}, a \neq 0) \quad (\text{obr. 333}).$$

6.1.2.2. Cyklické křivky [trochoidy]

Jestliže se kružnice k_1 (tzv. *hybná kružnice* [*hybná poloida*]) kotádí po kružnici k_2 (zvané *nehybná kružnice* [*nehybná poloida*]) ve vnější nebo vnitřní oblasti kružnice k_2 , pak body hybné kružnice k_1 nebo body s ní pevně spojené vytvářejí tzv. *cyklické křivky* neboli *trochoidy*.

Prostá cykloida

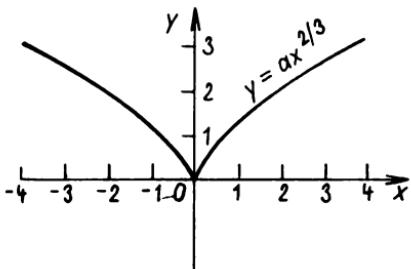
Bod kružnice, která se beze skluzu kotálí po přímce, opisuje *prostou* [*obecnou, obyčejnou*] *cykloidu* (obr. 334).

Rovnice prosté cykloidy ($t \in \mathbb{R}$):

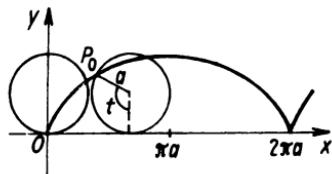
$$\begin{aligned}x &= a(t - \sin t), \\y &= a(1 - \cos t),\end{aligned}$$

kde a je poloměr kružnice,

t – velikost úhlu odvalení.



Obr. 333. Semikubická parabolá
[Neilova parabolá] $y^3 = 2x^2$



Obr. 334. Prostá cykloida

Explicitní vyjádření první, resp. druhé poloviny prvního oblouku prosté cykloidy:

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{[y(2a-y)]} \quad (y \in \langle 0, 2a \rangle),$$

resp.

$$x = a \left(2\pi - \arccos \frac{a-y}{a} \right) + \sqrt{[y(2a-y)]} \quad (y \in \langle 0, 2a \rangle).$$

Délka oblouku OP_0 :

$$s_0 = 8a \sin^2 \frac{t}{4} = 4a \left(1 - \cos \frac{t}{2} \right) \quad (t \in \langle 0, 2\pi \rangle).$$

Délka větve: $s = 8a$.

Obsah plochy ohraničené jednou větví prosté cykloidy a osou x :

$$S = 3\pi a^2.$$

Primitivní perioda: $2\pi a$.

Evolutou cykloidy je shodná cykloida posunutá o πa ve směru osy x souhlasně s její orientací a o $2a$ ve směru osy y nesouhlasně s její orientací.

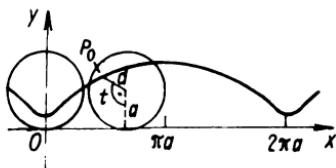
Zkrácená cykloida

Zkrácená cykloida vznikne, jestliže tvořící bod pevně spojený s kotálející se (hybnou) kružnicí leží ve vnitřní oblasti této kružnice ve vzdálenosti d ($d < a$) od středu kružnice o poloměru a (obr. 335).

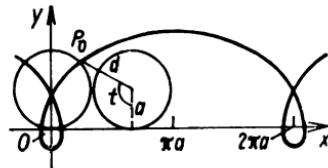
Parametrické rovnice zkrácené cykloidy ($t \in \mathbb{R}$):

$$x = at - d \sin t,$$

$$y = a - d \cos t.$$



Obr. 335. Zkrácená cykloida



Obr. 336. Prodloužená cykloida

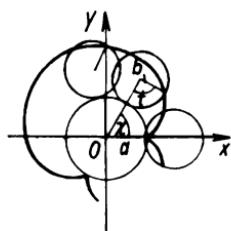
Prodloužená cykloida

Prodloužená cykloida vznikne, jestliže tvořící bod pevně spojený s kotálející se (hybnou) kružnicí leží ve vnější oblasti této kružnice ve vzdálenosti d ($d > a$) od středu kružnice o poloměru a (obr. 336).

Parametrické rovnice prodloužené cykloidy ($t \in \mathbb{R}$):

$$x = at - d \sin t,$$

$$y = a - d \cos t.$$



Obr. 337. Prostá epicykloida

Prostá epicykloida

Bod kružnice, která se beze skluzu kotálí po nehybné kružnici v její vnější oblasti, opisuje *prostou [obecnou, obyčejnou] epicykloidu* (obr. 337).

Parametrické rovnice prosté epicykloidy ($t \in \mathbb{R}$):

$$x = (a + b) \cos\left(\frac{b}{a}t\right) - b \cos\left(\frac{a+b}{a}t\right),$$

$$y = (a + b) \sin\left(\frac{b}{a}t\right) - b \sin\left(\frac{a+b}{a}t\right),$$

popř. ($\chi \in \mathbb{R}$)

$$x = (a + b) \cos \chi - b \cos\left(\frac{a+b}{b}\chi\right),$$

$$y = (a + b) \sin \chi - b \sin\left(\frac{a+b}{b}\chi\right),$$

kde a je poloměr nehybné kružnice,

b – poloměr hybné kružnice,

t – velikost úhlu odvalení,

χ – velikost úhlu otočení.

Je-li poměr $a/b = m$ celým číslem, pak prostá epicykloida je uzavřenou křivkou s m větvemi, které vzniknou při jednom oběhu hybné kružnice kolem nehybné kružnice.

Je-li poměr $a/b = p/q = m$ racionálním číslem v základním tvaru p/q , pak prostá epicykloida je uzavřenou křivkou s p větvemi, které vzniknou při q obězích hybné kružnice kolem nehybné kružnice.

Je-li poměr $a/b = m$ iracionálním číslem, pak prostá epicykloida není uzavřenou křivkou a obsahuje nekonečně mnoho větví.

Délka oblouku větve:

$$s_0 = \frac{8(a+b)}{m} \sin^2 \frac{a\chi}{4b} \quad \left(\chi \in \left\langle 0, \frac{2b\pi}{a} \right\rangle \right).$$

Délka větve:

$$s = \frac{8(a+b)}{m}.$$

Délka prosté epicykloidy pro $m \in \mathbb{Z}$:

$$l = 8(a + b).$$

Obsah plochy ohraničené jednou větví prosté epicykloidy a příslušným obloukem nehybné kružnice:

$$S = \frac{\pi b^2(3a + 2b)}{a}.$$

Zkrácená a prodloužená epicykloida [epitrochoidy]

Zkrácená, resp. prodloužená epicykloida vznikne, jestliže tvořící bod pevně spojený s hybnou kružnicí (kotálející se po nehybné kružnici o poloměru a v její vnější oblasti) leží ve vnitřní, resp. vnější oblasti této kružnice ve vzdálenosti $d < b$, resp. $d > b$ od středu hybné kružnice o poloměru b (v obr. 338 je k_1 , resp. k_2 zkrácená, resp. prodloužená epicykloidou).

Parametrické rovnice zkrácené, resp. prodloužené epicykloidy ($t \in \mathbb{R}$):

$$x = (a + b) \cos\left(\frac{b}{a}t\right) - d \cos\left(\frac{a+b}{a}t\right),$$

$$y = (a + b) \sin\left(\frac{b}{a}t\right) - d \sin\left(\frac{a+b}{a}t\right),$$

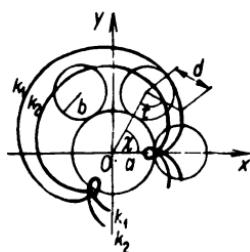
resp. ($\chi \in \mathbb{R}$)

$$x = (a + b) \cos \chi - d \cos\left(\frac{a+b}{b}\chi\right),$$

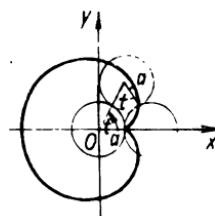
$$y = (a + b) \sin \chi - d \sin\left(\frac{a+b}{b}\chi\right).$$

Zvláštní případ:

Prostá epicykloida se pro $a = b$, tj. pro $m = 1$, nazývá *kardioda* nebo *srdcovka* (obr. 339).



Obr. 338. Prodloužená a zkrácená epicykloida



Obr. 339. Kardioda

Parametrické rovnice kardioidy ($t \in \mathbb{R}$):

$$x = a[2 \cos t - \cos(2t)],$$

$$y = a[2 \sin t - \sin(2t)],$$

popř. v ortonormální souřadnicové soustavě:

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 = 4a^2[(x - a)^2 + y^2],$$

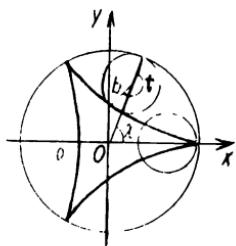
přičemž počátek je ve středu nehybné kružnice a osou x je prodloužení úsečky spojující počátek s hrotom, popř. v polární souřadnicové soustavě:

$$\varrho = 2a(1 - \cos \varphi) \quad (\varphi \in \mathbb{R}),$$

přičemž pól leží na nehybné kružnici a polární osou je prodloužení úsečky spojující pól a střed nehybné kružnice.

Prostá hypocykloida

Bod kružnice, která se bezé skluze kotáli po nehybné kružnici v její vnitřní oblasti, opisuje prostou [obecnou, obyčejnou] hypocykloidu (obr. 340).



Obr. 340. Prostá hypocykloida

Parametrické rovnice prosté hypocykloidy ($t \in \mathbb{R}$):

$$x = (a - b) \cos\left(\frac{b}{a} t\right) + b \cos\left(\frac{a - b}{a} t\right),$$

$$y = (a - b) \sin\left(\frac{b}{a} t\right) - b \sin\left(\frac{a - b}{a} t\right),$$

popř. ($\chi \in \mathbb{R}$)

$$x = (a - b) \cos \chi + b \cos\left(\frac{a - b}{b} \chi\right),$$

$$y = (a - b) \sin \chi - b \sin\left(\frac{a - b}{b} \chi\right),$$

kde a je poloměr nehybné kružnice,

b – poloměr hybné kružnice,

t – velikost úhlu odvalení,

χ – velikost úhlu otočení.

Je-li poměr $a/b = m$ celým číslem (v obr. 340 je $m = 3$), pak prostá hypocykloida je uzavřenou křivkou s m větvemi, které vzniknou při jednom oběhu hybné kružnice kolem nehybné kružnice.

Je-li poměr $a/b = p/q = m$ racionálním číslem v základním tvaru p/q , pak prostá hypocykloida je uzavřenou křivkou s p větvemi, které vzniknou při q obězích hybné kružnice kolem nehybné kružnice.

Je-li poměr $a/b = m$ iracionálním číslem, pak prostá hypocykloida není uzavřenou křivkou a obsahuje nekonečně mnoho větví.

Délka oblouku větve od bodu $t = 0$ do bodu t :

$$s_0 = \frac{8(a-b)}{m} \sin^2 \frac{a\chi}{4b} \quad \left(\chi \in \left\langle 0, \frac{2b\pi}{a} \right\rangle \right).$$

Délka větve:

$$s = \frac{8(a-b)}{m}.$$

Délka prosté hypocykloidy pro $m \in \mathbb{Z}$:

$$l = 8(a-b).$$

Obsah plochy ohraničené jednou větví prosté hypocykloidy a příslušným obloukem nehybné kružnice:

$$S = \frac{\pi b^2(3a - 2b)}{a}.$$

Zkrácená a prodloužená hypocykloida [hypotrochoidy]

Zkrácená, resp. prodloužená hypocykloida vznikne, jestliže tvořící bod pevně spojený s hybnou kružnicí (kotálející se po nehybné kružnici o poloměru a v její vnitřní oblasti) leží ve vnitřní, resp. vnější oblasti této kružnice ve vzdálenosti $d < b$, resp. $d > b$ od středu hybné kružnice o poloměru b .

Parametrické rovnice zkrácené, resp. prodloužené hypocykloidy ($t \in \mathbb{R}$):

$$x = (a-b) \cos \left(\frac{b}{a} t \right) + d \cos \left(\frac{a-b}{a} t \right),$$

$$y = (a-b) \sin \left(\frac{b}{a} t \right) - d \sin \left(\frac{a-b}{a} t \right),$$

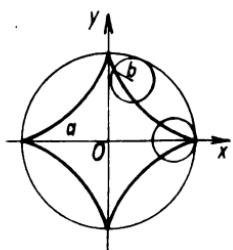
resp. ($\chi \in \mathbb{R}$)

$$x = (a - b) \cos \chi + d \cos \left(\frac{a - b}{b} \chi \right),$$

$$y = (a - b) \sin \chi - d \sin \left(\frac{a - b}{b} \chi \right).$$

Zvláštní případy:

Prostá hypocykloida se pro $m = 4$, tj. pro $b = a/4$, nazývá *asteroida* nebo *hvězdice* (obr. 341).



Obr. 341. Asteroida

Parametrické rovnice asteroidy ($\chi \in \mathbb{R}$):

$$x = b[3 \cos \chi + \cos(3\chi)],$$

$$y = b[3 \sin \chi - \sin(3\chi)],$$

popř. ($t \in \mathbb{R}$)

$$x = \frac{1}{4}a \left[3 \cos \frac{t}{4} + \cos \frac{3t}{4} \right],$$

$$y = \frac{1}{4}a \left[3 \sin \frac{t}{4} - \sin \frac{3t}{4} \right]$$

neboli

$$x = a \cos^3 \frac{t}{4} = 4b \cos^3 \chi,$$

$$y = a \sin^3 \frac{t}{4} = 4b \sin^3 \chi,$$

popř. v ortonormální souřadnicové soustavě:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

neboli

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0,$$

přičemž počátek je ve středu pevné kružnice a osou x je prodloužení úsečky spojující počátek s hrotom.

Prostá hypocykloida přechází pro $m = 2$, tj. pro $b = a/2$, v úsečku, neboť degeneruje v průměr nehybné kružnice (toho se využívá k přeměně otáčivého pohybu v pohyb sem a tam, což má technické použití při řezání ozubení).

Zkrácená a prodloužená hypocykloida přechází pro $m = 2$, tj. pro $d \neq b = a/2$, v elipsu s rovnicemi ($t \in \mathbb{R}$)

$$x = \left(\frac{a}{2} + d \right) \cos \frac{t}{2},$$

$$y = \left(\frac{a}{2} - d \right) \sin \frac{t}{2}$$

(oho se využívá k přeměně otáčivého pohybu v eliptický pohyb).

6.1.2.3. Cassiniové křivky

Cassiniovou křivkou nazýváme množinu všech takových bodů, že součin jejich vzdáleností od dvou různých pevných bodů (tzv. ohnisek) F_1 a F_2 je konstantní.

Rovnice Cassiniové křivky v ortonormální souřadnicové soustavě:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = a^4 - e^4,$$

popř. v polární souřadnicové soustavě:

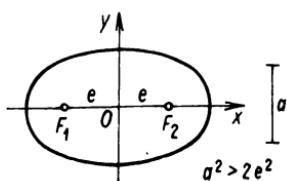
$$\varrho^2 = e^2 \cos(2\varphi) \pm \sqrt{[e^4 \cos^2(2\varphi) + a^4 - e^4]},$$

kde $e = |F_1 F_2|/2$.

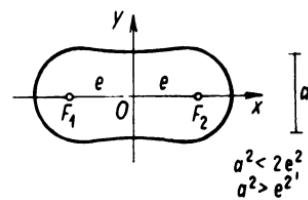
Pro $a^2 \geq 2e^2$ má Cassiniova křivka tvar podobný elipse (obr. 342).

Pro $e^2 < a^2 < 2e^2$ má Cassiniova křivka dva průhyby (obr. 343).

Pro $a^2 = e^2$ dostaneme Bernoulliovu lemniskatu (viz dále).



Obr. 342. Cassiniova křivka ($a^2 \geq 2e^2$)

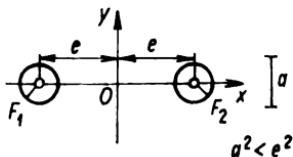


Obr. 343. Cassiniova křivka ($e^2 < a^2 < 2e^2$)

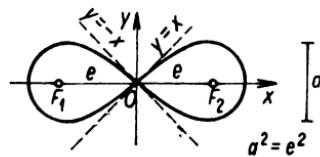
Pro $a^2 < e^2$ se křivka skládá ze dvou samostatných vejčitých částí, z nichž každá obklýpuje jedno ohnisko (obr. 344).

Bernoulliova lemniskáta

Bernoulliova lemniskáta je zvláštním případem Cassiniové křivky pro $a^2 = e^2$ (obr. 345).



Obr. 344. Cassiniova křivka ($a^2 < e^2$)



Obr. 345. Bernoulliova lemniskáta ($a^2 = e^2$)

Rovnice Bernoulliovy lemniskáty v ortonormální souřadnicové soustavě:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2),$$

popř. v polární souřadnicové soustavě:

$$\varrho = a \sqrt{[2 \cos(2\varphi)]} \quad (\varphi \notin \langle -\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi \rangle \cup \langle \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \rangle),$$

popř. v parametrickém vyjádření ($t \in \mathbb{R}$):

$$x = at(\sqrt{2}) \frac{1 + t^2}{1 + t^4},$$

$$y = at(\sqrt{2}) \frac{1 - t^2}{1 + t^4}.$$

Poloměr křivosti:

$$R = \frac{2a^2}{3\varrho} = \frac{a\sqrt{(1 + t^4)}}{3|t|}$$

pro $t \neq 0$, popř. $\varrho \neq 0$.

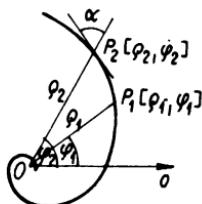
Obsah jedné smyčky:

$$S = a^2.$$

6.1.2.4. Spirály

Logaritmická spirála

Logaritmickou spirálou nazýváme křivku (obr. 346), která protíná všechny polopřímky vycházející z počátku pod konstantním úhlem velikosti α . Je tedy izogonální trajektorií svazku přímek procházejících pólem O , který je asymptotickým bodem této trajektorie. Proto se používá v technické praxi (u rotujících nožů, ozubených kol apod.) a v námořnictví v souvislosti s loxodromou, která je nevhodnější křivkou pro plavbu lodí a jejímž průmětem na stereografickou síť je právě logaritmická spirála.



Obr. 346. Logaritmická spirála

Rovnice logaritmické spirály v polární souřadnicové soustavě:

$$\varrho = a e^{k\varphi} \quad (\varphi \in \mathbb{R}, a > 0, k > 0),$$

kde

$$\cotg \alpha = k.$$

Délka oblouku P_1P_2 :

$$s = \frac{1}{k} |\varrho_2 - \varrho_1| \sqrt{(1 + k^2)} = \frac{|\varrho_2 - \varrho_1|}{\cos \alpha}.$$

Délka oblouku OP_2 :

$$\frac{1}{k} \varrho_2 \sqrt{(1 + k^2)}.$$

Obsah výseče pro tento mezní případ:

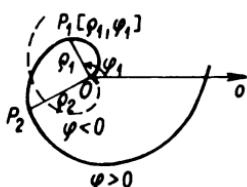
$$S = \frac{\varrho^2}{4k}.$$

Poloměr křivosti:

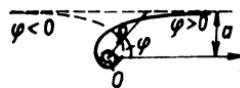
$$R = \varrho \sqrt{(1 + k^2)}.$$

Archimédova spirála

Archimédovou spirálou nazýváme křivku vytvořenou bodem, který se po polopřímce od jejího počátečního bodu v pólu O pohybuje konstantní rychlostí, zatímco se polopřímka sama otáčí kolem pólu při konstantní úhlové rychlosti (obr. 347).



Obr. 347. Archimédova spirála



Obr. 348. Hyperbolická spirála

Rovnice Archimédovy spirály v polární souřadnicové soustavě:

$$\rho = a\varphi \quad (\varphi \geq 0, a > 0).$$

Délka oblouku OP_0 :

$$\begin{aligned} s_0 &= \frac{a}{2} [\varphi \sqrt{(\varphi^2 + 1)} + \operatorname{arcsinh} \varphi] = \\ &= \frac{a}{2} \{ \varphi \sqrt{(\varphi^2 + 1)} + \ln [\varphi + \sqrt{(\varphi^2 + 1)}] \}; \end{aligned}$$

pro velká čísla φ :

$$s_0 \approx \frac{a\varphi^2}{2}.$$

Obsah výseče P_1OP_2 :

$$S = \frac{a^2}{6} (\varphi_2^3 - \varphi_1^3).$$

Poloměr křivosti:

$$R = \frac{(a^2 + \rho^2)^{3/2}}{2a^2 + \rho^2} = \frac{a(\varphi^2 + 1)^{3/2}}{\varphi^2 + 2}.$$

Hyperbolická spirála

Hyperbolickou spirálou nazýváme křivku, pro kterou je součin průvodiče a argumentu (tj. součin polárních souřadnic) konstantní (obr. 348).

Rovnice hyperbolické spirály v polární souřadnicové soustavě:

$$\varrho = \frac{a}{\varphi} \quad (\varphi > 0, a > 0).$$

Asymptota: $y = a$.

Obsah výseče P_1OP_2 :

$$S = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_2} \right).$$

Poloměr křivosti:

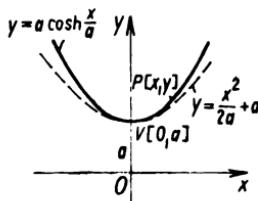
$$R = \frac{a}{\varphi} \left(\frac{\sqrt{(1 + \varphi^2)}}{\varphi} \right)^3 = \varrho \left(\frac{\varrho^2}{a^2} + 1 \right)^{3/2}.$$

6.1.2.5. Řetězovka

Každé homogenní dokonale ohebné hmotné vlákno, které je zavěšeno ve dvou bodech, má v rovnovážné poloze tvar řetězovky (obr. 349).

Rovnice řetězovky:

$$y = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a}) = a \cosh \frac{x}{a}.$$



Obr. 349. Řetězovka

Vrcholem řetězovky je bod $V[0, a]$.

Obecná řetězovka a parabola $y = a + x^2/(2a)$ mají ve vrcholu $V[0, a]$ styk třetího rádu.

Obsah plochy ohrazené řetězovkou a úsečkami na ose x a rovnoběžkách $x = 0$ a $x = x_0$:

$$S = a^2 \sinh \frac{x_0}{a} = a^2 \frac{e^{x_0/a} - e^{-x_0/a}}{2}.$$

Délka oblouku VP :

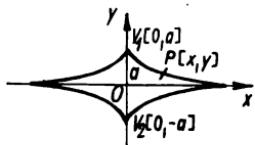
$$s = a \sinh \frac{x}{a} = a \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2}.$$

Poloměr křivosti:

$$R = \frac{y^2}{a} = a \cosh^2 \frac{x}{a}.$$

6.1.2.6. Traktrix

Hmotný bod na konci neroztažitelného přímého vlákna konstantní délky a opisuje křivku zvanou *traktrix*, jestliže se druhý krajní bod vlákna pohybuje po přímce $y = 0$ a vlákno se zároveň bezé skluzu otáčí (obr. 350). Tangenta každého bodu této křivky, tj. úsek tečny mezi bodem dotyku a jejím průsečíkem s osou x , má konstantní délku a .



Obr. 350. Traktrix

Traktrix je evolventou řetězovky, tj. při kotálení tečny po řetězovce vytváří vrchol řetězovky traktrix.

Parametrické rovnice traktrix $[t \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)]$:

$$x = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right),$$

$$y = a \sin t,$$

(parametr t je velikost úhlu, který tečna svírá s osou x), popř. v ortonormální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{arccosh} \frac{a}{y} \mp \sqrt{(a^2 - y^2)} = \\ &= a \ln \left| \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - y^2)}}{y} \right| \mp \sqrt{(a^2 - y^2)}, \quad |y| \leq a. \end{aligned}$$

Asymptota traktrix: $y = 0$.

Body $V_1[0, a]$ a $V_2[0, -a]$ jsou body vrátu [hroty].

Délka oblouku V_1P větve:

$$s = a \ln \left| \frac{a}{y} \right|.$$

Poloměr křivosti:

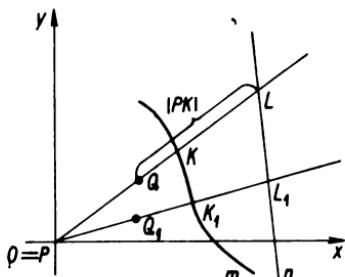
$$R = a \left| \cotg \frac{x}{y} \right|.$$

6.1.2.7. Kisoida

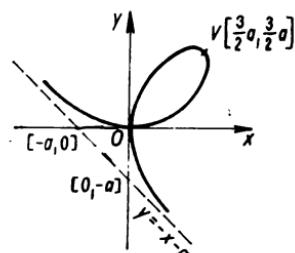
Kisoidou dvojice křivek m, n pro pól P nazýváme množinu právě těch bodů Q , pro něž platí

$$|PQ| = |PL| - |PK|,$$

kde K , resp. L je průsečík libovolné polopřímky svazku o vrcholu P s křivkou m , resp. n (obr. 351).



Obr. 351. Kisoida



Obr. 352. Descartesův list

Descartesův list

Descartesovým listem nazýváme kisoidu elipsy

$$x^2 - xy + y^2 + a(x + y) = 0, \quad a > 0,$$

a přímky $x + y + a = 0$ pro pól P (obr. 352).

Rovnice Descartesova listu v ortonormální souřadnicové soustavě:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

popř. v polární souřadnicové soustavě:

$$\varrho = \frac{3a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi} \quad (\varphi \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle \cup \langle \frac{3}{4}\pi, \pi \rangle \cup \langle \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi \rangle)$$

neboli

$$\varrho = \frac{3a}{2} \frac{\sin(2\varphi)}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi},$$

popř. v parametrickém vyjádření ($t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$):

$$x = \frac{3at}{1+t^3},$$

$$y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Asymptota Descartesova listu: $y = -x - a$.

Vrchol Descartesova listu: $V = [\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a]$.

Obsah S smyčky Descartesova listu se rovná obsahu plochy ohraničené Descartesovým listem a jeho asymptotou:

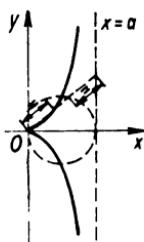
$$S = \frac{3}{2}a^2.$$

Dioklova kisoida

Dioklovou kisoidou nazýváme kisoidu kružnice

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 0$$

a přímky $x = a$ ($a > 0$) pro pól $P[0, 0]$, tj. množinu právě těch bodů, jejichž vzdálenosti d od pólu P se rovnají délka úseček, jejichž krajní body dostaneme jako průsečíky polopřímek svazku o vrcholu P s kružnicí k (se středem $S[a/2, 0]$ a průměrem a) a její tečnou $x = a$ (obr. 353).



Obr. 353. Dioklova kisoida

Rovnice Dioklovy kisoidy v ortonormální souřadnicové soustavě:

$$y^2(a - x) = x^3$$

neboli

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x} \quad [x \in \langle 0, a \rangle],$$

popř. v polární souřadnicové soustavě:

$$\varrho = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} = a \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi \quad [\varphi \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)],$$

popř. v parametrickém vyjádření ($t \in \mathbb{R}$):

$$x = \frac{at^2}{1 + t^2},$$

$$y = \frac{at^3}{1 + t^2}.$$

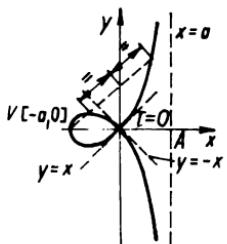
Asymptota Dioklovy kisoidy: $x = a$.

Obsah plochy ohraničené Dioklovou kisoidou a její asymptotou:

$$S = \frac{3}{4}\pi a^2.$$

6.1.2.8. Strofoida

Přímou strofoidou [stručně strofoidou] nazýváme množinu všech průsečíků každé ze svazku kružnic, které mají společnou tečnu v ose x s bodem dotyku $T[0, 0]$, s jejím průměrem ležícím na polopřímce svazku o vrcholu $V[-a, 0]$, $a > 0$ (obr. 354).



Obr. 354. Strofoida

Rovnice strofoidy v ortonormální souřadnicové soustavě:

$$(a - x)y^2 = (a + x)x^2 \quad [x \in \langle -a, a \rangle]$$

neboli

$$y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x},$$

popř. v polární souřadnicové soustavě

$$\varrho = \frac{-a \cos(2\varphi)}{\cos \varphi} \quad [\varphi \in \langle \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle \cup (\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi)],$$

popř. v parametrickém vyjádření ($t \in \mathbb{R}$):

$$x = \frac{-a(1-t^2)}{1+t^2},$$

$$y = \frac{-at(1-t^2)}{1+t^2}.$$

Vrchol strofoidy: $V = [-a, 0]$.

Asymptota strofoidy: $x = a$.

Obsah smyčky strofoidy:

$$S_1 = 2a^2 - \frac{\pi a^2}{2}.$$

Obsah plochy ohraničené strofoidou a její asymptotou:

$$S_2 = 2a^2 + \frac{\pi a^2}{2}.$$

6.1.2.9. Konchoida

Přímou konchoidou [stručně konchoidou] řídicí křivky k pro pól P nazýváme množinu právě těch bodů, které dostaneme tak, že na každou přímku p svazku přímek o vrcholu P naneseme od průsečíku přímky p a křivky k na obě strany úsečky konstantní délky b (obr. 355). Získané krajiní body těchto úseček mimo křivku k jsou body přímé konchoidy.

Nikomédova konchoida

Nikomédovou konchoidou nazýváme přímou konchoidu, jejíž řídicí křivkou je přímka $x = a > 0$ (obr. 356).

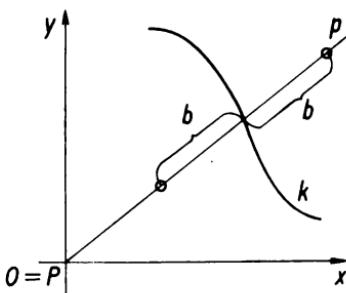
Rovnice Nikomédovy konchoidy v ortonormální souřadnicové soustavě:

$$(x-a)^2(x^2+y^2)=b^2x^2,$$

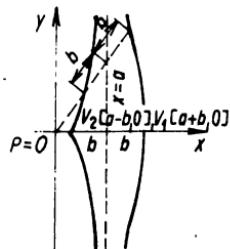
popř. v polární souřadnicové soustavě:

$$\varrho = \frac{a}{\cos \varphi} \pm b \quad (\varrho \geq 0).$$

Vrcholy Nikomédovy konchoidy jsou $V_1[a+b, 0]$ a $V_2[a-b, 0]$.



Obr. 355. Přímá konchoida



Obr. 356. Nikomédova konchoida

Asymptota Nikomédovy konchoidy: $x = a$.

Pól $P[0, 0]$ Nikomédovy konchoidy je

- pro $b < a$ izolovaným bodem (viz obr. 356),
- pro $b > a$ dvojnásobným bodem (jedna větev má v pólu uzel),
- pro $b = a$ hrotom.

Pascalova závitnice

Pascalovou závitnicí [*konchoidou kružnice*] nazýváme přímou konchoidu kružnice $(2x - a)^2 + 4y^2 = a^2$ pro pól P na řídící kružnici a parametr $b > 0$.

Rovnice Pascalovy závitnice v ortonormální souřadnicové soustavě:

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0,$$

popř. v polární souřadnicové soustavě:

$$\varrho = a \cos \varphi \pm b \quad (\varrho \geq 0),$$

popř. v parametrickém vyjádření ($t \in \mathbb{R}$):

$$x = a \cos t - b \cos(2t),$$

$$y = a \sin t - b \sin(2t).$$

Pro $b = a$ je Pascalova závitnice totožná s kardiodou o rovnici

$$\varrho = a(\cos \varphi + 1),$$

přičemž rovnici $\varrho = a(\cos \varphi - 1)$ splňuje jen bod $[0, 0]$ (hrot).

Pól (počátek O) Pascalovy závitnice je

- pro $b < a$ uzlem,
- pro $b > a$ izolovaným bodem,
- pro $b = a$ hrotom (kardioida).

6.2. PROSTOROVÉ KŘIVKY

Křivkou definovanou parametricky v trojrozměrném euklidovském prostoru E_3 nazýváme množinu právě těch bodů, jejichž kartézské souřadnice x, y, z jsou dány rovnicemi

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

kde φ, ψ, χ jsou reálné funkce reálné proměnné t , které jsou definovány na nějakém intervalu J a mají spojité derivace podle t aspoň prvního řádu, přičemž vztahy

$$\dot{\varphi}(t) = 0, \quad \dot{\psi}(t) = 0, \quad \dot{\chi}(t) = 0$$

platí všechny zároveň jen v izolovaných bodech intervalu J . Bod $P = [\varphi(t_0), \psi(t_0), \chi(t_0)]$ křivky se nazývá *regulární*, jestliže aspoň jedna z derivací $\dot{\varphi}(t_0), \dot{\psi}(t_0), \dot{\chi}(t_0)$ je různá od nuly a bodu P přísluší právě jedna hodnota parametru t . Ostatní body křivky se nazývají *singulární*. Jestliže několika hodnotám parametru t přísluší právě jeden bod, pak takový bod se nazývá *několikanásobný*.

Rovnice $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$ nazýváme *parametrickými rovnicemi křivky*.

Křivkou definovanou implicitně v trojrozměrném euklidovském prostoru E_3 nazýváme množinu právě těch bodů, jejichž kartézské souřadnice x, y, z jsou dány rovnicemi

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0,$$

kde F, G jsou reálné funkce tří reálných proměnných na množině $\Omega_3 \subseteq E_3$, které mají spojité první parciální derivace, přičemž existuje aspoň jeden bod $[x_0, y_0, z_0]$, pro který platí:

a) $F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad G(x_0, y_0, z_0) = 0;$

b) matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), & \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), & \frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

má hodnost 2.

Vektorový zápis prostorové křivky:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}.$$

Je-li křivka definována implicitně, pak ji lze na dostatečně malém okolí každého jejího bodu vyjádřit parametricky, a obráceně, je-li křivka definována parametricky, pak ji lze na okolí každého jejího bodu vyjádřit implicitně.

6.2.1. Základní prvky prostorových křivek

Diferenciál [element] oblouku prostorové křivky pro křivku danou parametricky:

$$ds = \sqrt{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}^2)} dt.$$

Délka oblouku prostorové křivky dané parametricky s krajními body $P(t_1)$ a $P(t_2)$ je dána vzorcem

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\{[\dot{\varphi}(t)]^2 + [\dot{\psi}(t)]^2 + [\dot{\chi}(t)]^2\}} dt.$$

Oblouk jako parametr

Jestliže $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ jsou parametrické rovnice křivky k a $t(\tau)$ je funkce definovaná na intervalu J' , která má na tomto intervalu spojitou derivaci $dt/d\tau \neq 0$, pak také $x = \varphi(t(\tau))$, $y = \psi(t(\tau))$, $z = \chi(t(\tau))$ jsou parametrické rovnice křivky k .

Říkáme, že v parametrických rovnicích $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $z = \chi(s)$ křivky k je parametrem oblouk, jestliže délka oblouku křivky k s krajními body $P(s_1)$ a $P(s_2)$ se rovná číslu $s_2 - s_1$. Jsou-li $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ parametrické rovnice křivky k , pak $x = \varphi(t(s))$, $y = \psi(t(s))$, $z = \chi(t(s))$, kde $t(s)$ je inverzní funkce k funkci

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{[\dot{\varphi}(\tau)]^2 + [\dot{\psi}(\tau)]^2 + [\dot{\chi}(\tau)]^2} d\tau,$$

jsou parametrické rovnice též křivky, kde parametrem je oblouk.

Příklad:

Jsou dány parametrické rovnice $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $z = t$ šroubovice.
Pak platí

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(r^2 + 1)} dt = t \sqrt{(r^2 + 1)},$$

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{(r^2 + 1)}},$$

takže

$$x = r \cos \frac{s}{\sqrt{(r^2 + 1)}}, \quad y = r \sin \frac{s}{\sqrt{(r^2 + 1)}}, \quad z = \frac{s}{\sqrt{(r^2 + 1)}}$$

jsou parametrickými rovnicemi šroubovice, kde parametrem je oblouk.

Tečný vektor

Tečným vektorem v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ křivky dané parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ $\left[x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0), z_0 = \chi(t_0) \right]$, $\dot{\varphi}_0 = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=t_0}$, $\dot{\psi}_0 = \left(\frac{d\psi}{dt} \right)_{t=t_0}$, $\dot{\chi}_0 = \left(\frac{d\chi}{dt} \right)_{t=t_0}$ nazýváme vektor $\mathbf{t}_0 = (\dot{\varphi}_0, \dot{\psi}_0, \dot{\chi}_0)$.

Je-li parametrem $t = s$ oblouk, je $|t_0| = 1$.

Tečným vektorem v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ křivky dané implicitně rovnicemi $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ $\left[F_x^0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \text{ atd.} \right]$ nazýváme vektor

$$\mathbf{t}_0 = \left(\begin{vmatrix} F_y^0 & F_z^0 \\ G_y^0 & G_z^0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z^0 & F_x^0 \\ G_z^0 & G_x^0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x^0 & F_y^0 \\ G_x^0 & G_y^0 \end{vmatrix} \right).$$

Tečným vektorem v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ křivky dané vektorovou rovnicí $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ nazýváme vektor

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{t=t_0}.$$

Tečna

Přímka obsahující tečný vektor se nazývá *tečna*.

Rovnice tečny v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ křivky dané parametricky

rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ $\left[x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0), z_0 = \chi(t_0) \right]$

$$\dot{\varphi}_0 = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=t_0}, \quad \dot{\psi}_0 = \left(\frac{d\psi}{dt} \right)_{t=t_0}, \quad \dot{\chi}_0 = \left(\frac{d\chi}{dt} \right)_{t=t_0};$$

$$\frac{X - x_0}{\dot{\varphi}_0} = \frac{Y - y_0}{\dot{\psi}_0} = \frac{Z - z_0}{\dot{\chi}_0}.$$

Rovnice tečny v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ křivky dané implicitně rovnicemi $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ $\left[F_x^0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \dots \right]$

$$\frac{X - x_0}{\begin{vmatrix} F_y^0 & F_z^0 \\ G_y^0 & G_z^0 \end{vmatrix}} = \frac{Y - y_0}{\begin{vmatrix} F_z^0 & F_x^0 \\ G_z^0 & G_x^0 \end{vmatrix}} = \frac{Z - z_0}{\begin{vmatrix} F_x^0 & F_y^0 \\ G_x^0 & G_y^0 \end{vmatrix}}.$$

Rovnice tečny v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ křivky dané vektorovou rovnicí $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ $\left[\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0), \dot{\mathbf{r}}_0 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{t=t_0} \right]$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \dot{\mathbf{r}}_0.$$

Tečna takto zavedená je lineární polohou sečny, jestliže její dva průsečíky s křivkou splynou v jediný bod. Regulární bod P nazýváme *dotykovým bodem tečny ke křivce*. Každá rovina procházející tečnou křivky v bodě P se nazývá *tečná rovina*.

Vektor hlavní normály a binormály

Vektorem hlavní normály v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ křivky dané parametricky rovnicemi $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $z = \chi(s)$, kde parametrem s je oblouk $[x_0 = \varphi(s_0), y_0 = \psi(s_0), z_0 = \chi(s_0)]$, nazýváme vektor

$$\mathbf{n}_0 = \left(\left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} \right)_{s=s_0}, \left(\frac{d^2\psi}{ds^2} \right)_{s=s_0}, \left(\frac{d^2\chi}{ds^2} \right)_{s=s_0} \right).$$

Vektorem hlavní normály v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ křivky dané vektorovou rovnicí $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ nazýváme vektor

$$\mathbf{r}''_0 = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right)_{s=s_0}.$$

Vektorem binormály v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ křivky dané parametricky rovnicemi $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $z = \chi(s)$, kde parametrem s je oblouk $[x_0 = \varphi(s_0), y_0 = \psi(s_0), z_0 = \chi(s_0)]$, nazýváme vektor

$$\mathbf{b}_0 = \left(\begin{array}{c|c} \frac{d\psi}{ds}, \frac{d\chi}{ds} & \frac{d\chi}{ds}, \frac{d\varphi}{ds} \\ \hline \frac{d^2\psi}{ds^2}, \frac{d^2\chi}{ds^2} & \frac{d^2\chi}{ds^2}, \frac{d^2\varphi}{ds^2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{d\varphi}{ds}, \frac{d\psi}{ds} \\ \hline \frac{d^2\varphi}{ds^2}, \frac{d^2\psi}{ds^2} \end{array} \right).$$

Vektorem binormály v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ křivky dané vektorovou rovnicí $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ nazýváme vektor

$$\mathbf{r}'_0 \times \mathbf{r}''_0 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right)_{s=s_0} \times \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right)_{s=s_0}.$$

Platí

$$\frac{\mathbf{b}_0}{|\mathbf{b}_0|} = \frac{\mathbf{t}_0}{|\mathbf{t}_0|} \times \frac{\mathbf{n}_0}{|\mathbf{n}_0|}, \quad \frac{\mathbf{n}_0}{|\mathbf{n}_0|} = \frac{\mathbf{b}_0}{|\mathbf{b}_0|} \times \frac{\mathbf{t}_0}{|\mathbf{t}_0|},$$

$$\frac{\mathbf{t}_0}{|\mathbf{t}_0|} = \frac{\mathbf{n}_0}{|\mathbf{n}_0|} \times \frac{\mathbf{b}_0}{|\mathbf{b}_0|}.$$

Hlavní normála a binormála

Přímka obsahující vektor hlavní normály se nazývá *hlavní normála*.

Rovnice hlavní normály v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ křivky dané parametricky rovnicemi $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $z = \chi(s)$ $[x_0 = \varphi(s_0), y_0 = \psi(s_0), z_0 = \chi(s_0)]$:

$$\frac{X - x_0}{\left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} \right)_{s=s_0}} = \frac{Y - y_0}{\left(\frac{d^2\psi}{ds^2} \right)_{s=s_0}} = \frac{Z - z_0}{\left(\frac{d^2\chi}{ds^2} \right)_{s=s_0}}.$$

Rovnice hlavní normály v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ křivky dané vektorovou rovnicí $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ $\left[\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0), \mathbf{r}''_0 = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right)_{s=s_0} \right]$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{r}''_0.$$

Přímka obsahující vektor binormály se nazývá *binormála*.

Rovnice binormály v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ křivky dané parametricky rovnicemi $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $z = \chi(s)$ [$x_0 = \varphi(s_0)$, $y_0 = \psi(s_0)$, $z_0 = \chi(s_0)$]:

$$\left| \begin{array}{c} X - x_0 \\ \frac{d\psi}{ds}, \frac{d\chi}{ds} \\ \frac{d^2\psi}{ds^2}, \frac{d^2\chi}{ds^2} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} Y - y_0 \\ \frac{d\chi}{ds}, \frac{d\varphi}{ds} \\ \frac{d^2\chi}{ds^2}, \frac{d^2\varphi}{ds^2} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} Z - z_0 \\ \frac{d\varphi}{ds}, \frac{d\psi}{ds} \\ \frac{d^2\varphi}{ds^2}, \frac{d^2\psi}{ds^2} \end{array} \right|.$$

Rovnice binormály v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ křivky dané vektorovou rovnicí $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) \left[\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0), \mathbf{r}'_0 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right)_{s=s_0}, \mathbf{r}''_0 = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right)_{s=s_0} \right]$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda(\mathbf{r}'_0 \times \mathbf{r}''_0).$$

Směrové úhly tečny, hlavní normály a binormály

Pro velikosti α, β, γ směrových úhlů tečny platí

$$\cos \alpha = \left(\frac{dx}{ds} \right)_{s=s_0}, \quad \cos \beta = \left(\frac{dy}{ds} \right)_{s=s_0}, \quad \cos \gamma = \left(\frac{dz}{ds} \right)_{s=s_0}.$$

Pro velikosti l, m, n směrových úhlů hlavní normály platí

$$\cos l = R_1 \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)_{s=s_0}, \quad \cos m = R_1 \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)_{s=s_0}, \quad \cos n = R_1 \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)_{s=s_0},$$

kde

$$R_1 = \sqrt{\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)_{s=s_0}^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)_{s=s_0}^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)_{s=s_0}^2 \right]}$$

je poloměr první křivosti.

Pro velikosti λ, μ, ν směrových úhlů binormály platí

$$\cos \lambda = R_1 \left[\left(\frac{dy}{ds} \right)_{s=s_0} \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)_{s=s_0} - \left(\frac{dz}{ds} \right)_{s=s_0} \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)_{s=s_0} \right],$$

$$\cos \mu = R_1 \left[\left(\frac{dz}{ds} \right)_{s=s_0} \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)_{s=s_0} - \left(\frac{dx}{ds} \right)_{s=s_0} \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)_{s=s_0} \right],$$

$$\cos \nu = R_1 \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)_{s=s_0} \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)_{s=s_0} - \left(\frac{dy}{ds} \right)_{s=s_0} \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)_{s=s_0} \right],$$

kde

$$R_1 = \sqrt{\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)_{s=s_0}^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)_{s=s_0}^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)_{s=s_0}^2 \right]}$$

je poloměr první křivosti.

Normálová, oskulační a rektifikační rovina

Normálovou rovinou v bodě P_0 prostorové křivky k nazýváme rovinu kolmou k tečně křivky v bodě P_0 a procházející bodem P_0 . Normálová rovina je určena bodem P_0 , vektorem hlavní normály a vektorem binormály (obr. 357).

Každá přímka procházející bodem P_0 a ležící v normálové rovině se nazývá *normála prostorové křivky v bodě P_0* .

Rovnice normálové roviny v regulárním bodě $P_0[x_0, y_0, z_0]$ ke křivce dané parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ $\begin{cases} x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0), \\ z_0 = \chi(t_0), \dot{\varphi}_0 = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=t_0}, \dot{\psi}_0 = \left(\frac{d\psi}{dt} \right)_{t=t_0}, \dot{\chi}_0 = \left(\frac{d\chi}{dt} \right)_{t=t_0} \\ (X - x_0)\dot{\varphi}_0 + (Y - y_0)\dot{\psi}_0 + (Z - z_0)\dot{\chi}_0 = 0. \end{cases}$

Rovnice normálové roviny v regulárním bodě $P_0[x_0, y_0, z_0]$ ke křivce dané implicitně rovnicemi $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ $\begin{cases} F_x^0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \dots \\ \begin{vmatrix} X - x_0, Y - y_0, Z - z_0 \\ F_x^0, F_y^0, F_z^0 \\ G_x^0, G_y^0, G_z^0 \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$

Rovnice normálové roviny v regulárním bodě $P_0[x_0, y_0, z_0]$ ke křivce dané vektorovou rovnicí $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ $\begin{cases} \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0), \dot{\mathbf{r}}_0 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{t=t_0} \\ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\dot{\mathbf{r}}_0 = 0 \end{cases}$

Oskulační rovinou v bodě P_0 prostorové křivky k nazýváme rovinu kolmou k binormále křivky v bodě P_0 a procházející bodem P_0 . Oskulační rovina je určena bodem P_0 , tečným vektorem a vektorem hlavní normály (viz obr. 357).

Takto zavedená oskulační rovina je limitní polohou rovin procházejících tečnou v bodě P_0 a bodem P_1 křivky pro $P_1 \rightarrow P_0$.

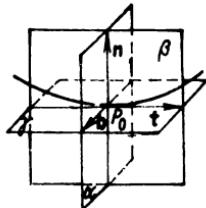
Rovnice oskulační roviny v regulárním bodě $P_0[x_0, y_0, z_0]$ ke křivce dané parametricky rovnicemi $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $z = \chi(s)$, kde parametrem s

je oblouk $[x_0 = \varphi(s_0), y_0 = \psi(s_0), z_0 = \chi(s_0)]$:

$$\left| \begin{array}{l} X - x_0, Y - y_0, Z - z_0 \\ \frac{d\varphi}{ds}, \frac{d\psi}{ds}, \frac{d\chi}{ds} \\ \frac{d^2\varphi}{ds^2}, \frac{d^2\psi}{ds^2}, \frac{d^2\chi}{ds^2} \end{array} \right| = 0.$$

Rovnice oskulační roviny v regulárním bodě $P_0[x_0, y_0, z_0]$ ke křivce dané vektorovou rovnicí $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ $\left[\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0), \mathbf{r}'_0 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right)_{s=s_0}, \mathbf{r}''_0 = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right)_{s=s_0} \right]$:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(\mathbf{r}'_0 \times \mathbf{r}''_0) = 0.$$



Obr. 357. Prostorová křivka

Rektifikační rovinou v bodě P_0 prostorové křivky k nazýváme rovinu kolmou k hlavní normále křivky v bodě P_0 a procházející bodem P_0 (viz obr. 357).

Rektifikační rovina je určena bodem P_0 , tečným vektorem a vektorem binormály.

Rovnice rektifikační roviny v regulárním bodě $P_0[x_0, y_0, z_0]$ ke křivce dané parametricky rovnicemi $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $z = \chi(s)$, kde parametrem s je oblouk $[x_0 = \varphi(s_0), y_0 = \psi(s_0), z_0 = \chi(s_0)]$:

$$(X - x_0) \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} \right)_{s=s_0} + (Y - y_0) \left(\frac{d^2\psi}{ds^2} \right)_{s=s_0} + (Z - z_0) \left(\frac{d^2\chi}{ds^2} \right)_{s=s_0} = 0.$$

Rovnice rektifikační roviny v regulárním bodě $P_0[x_0, y_0, z_0]$ ke křivce dané vektorovou rovnicí $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ $\left[\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0), \mathbf{r}''_0 = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right)_{s=s_0} \right]$:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \mathbf{r}''_0 = 0.$$

Styk dvou prostorových křivek

Jestliže křivka k , resp. k' je dána parametricky rovnicemi

$$x = \varphi_1(s), \quad y = \psi_1(s), \quad z = \chi_1(s),$$

resp.

$$x = \varphi_2(s), \quad y = \psi_2(s), \quad z = \chi_2(s),$$

kde parametrem je oblouk s , pak říkáme, že prostorové křivky k, k' mají ve společném bodě $s = 0$ styk [dotyk] nejméně q -tého řádu [styk [dotyk] nejméně $(q + 1)$ -bodový], právě když

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0), \quad \psi_1(0) = \psi_2(0), \quad \chi_1(0) = \chi_2(0).$$

$$\left(\frac{d\varphi_1}{ds} \right)_{s=0} = \left(\frac{d\varphi_2}{ds} \right)_{s=0}, \quad \left(\frac{d\psi_1}{ds} \right)_{s=0} = \left(\frac{d\psi_2}{ds} \right)_{s=0}, \quad \left(\frac{d\chi_1}{ds} \right)_{s=0} = \left(\frac{d\chi_2}{ds} \right)_{s=0},$$

$$\left(\frac{d^q \varphi_1}{ds^q}\right)_{s=0} = \left(\frac{d^q \varphi_2}{ds^q}\right)_{s=0}, \quad \left(\frac{d^q \psi_1}{ds^q}\right)_{s=0} = \left(\frac{d^q \psi_2}{ds^q}\right)_{s=0}, \quad \left(\frac{d^q \chi_1}{ds^q}\right)_{s=0} = \left(\frac{d^q \chi_2}{ds^q}\right)_{s=0}.$$

Oskulační kružnice, poloměr křivosti, křivost, střed křivosti

Oskulační kružnice [kružnice křivosti] prostorové křivky v jejím bodě nazýváme kružnicí, která má v tomto bodě s křivkou styk nejméně druhého rádu. Její poloměr R_1 , resp. střed S_k nazýváme poloměrem, resp. středem (první) křivosti prostorové křivky. Střed křivosti $S_k[\xi, \eta, \zeta]$ leží na normále v dotykovém bodě křivky.

Převrácené číslo k poloměru křivosti R_1 se nazývá *první křivost [flexe]* κ_1 , prostorové křivky: $\kappa_1 = 1/R_1$.

Pro křivku danou parametricky rovnicemi $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $z = \chi(s)$ v jejím bodě $P(s_0)$ platí $[x_0 = \varphi(s_0), y_0 = \psi(s_0), z_0 = \chi(s_0)]$:

$$\kappa_1 = \sqrt{\left[\left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} \right)^2_{s=s_0} + \left(\frac{d^2\psi}{ds^2} \right)^2_{s=s_0} + \left(\frac{d^2\chi}{ds^2} \right)^2_{s=s_0} \right]},$$

$$\zeta = x_0 + R_1 \left(\frac{d^2 \varphi}{ds^2} \right)_{s=s_0},$$

$$\eta = y_0 + R_1 \left(\frac{d^2 \psi}{ds^2} \right)_{s=s_0},$$

$$\zeta = z_0 + R_1 \left(\frac{d^2 \chi}{ds^2} \right)_{s=s_0}.$$

Pro křivku danou vektorovou rovnicí $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ v jejím bodě $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0)$ platí

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + R_1 \mathbf{n}_0.$$

Pro R_1 , popř. κ_1 dále platí

$$R_1 = \frac{1}{\kappa_1} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta\tau} = \frac{ds}{d\tau},$$

kde $\Delta\tau$ je odchylka tečny v daném bodě P a tečny v sousedním bodě P_1 a Δs je délka oblouku s krajními body P a P_1 . Úhel $\Delta\tau$ se nazývá *kontingenční úhel*.

Druhá křivost [torze]

Označíme-li Δs délku oblouku prostorové křivky s krajními body P_1 a P_2 a $\Delta\varepsilon$ velikost tzv. *úhlu torze*, který svírají binormály v bodech P_1 a P_2 , platí

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s} = \frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{1}{R_2} = \kappa_2,$$

kde číslo κ_2 se nazývá *druhá křivost [torze, kroucenost]* a číslo R_2 se nazývá *poloměr druhé křivosti [poloměr torze]*.

Křivka je ve svém bodě *pravotočivá*, resp. *levotočivá* (smysl kroucení proti smyslu, resp. ve smyslu otáčení hodinových ručiček), jestliže druhá křivost je v tomto bodě kladná, resp. záporná.

Křivka je rovinná, právě když ve všech jejích bodech platí $\kappa_2 = 0$. Prostорové křivky, pro něž platí, že první a druhá křivost jsou nenulové, se někdy v aplikacích nazývají *křivky dvojí křivosti*.

Druhá křivost v bodě $P[x_0, y_0, z_0]$, kde $x = \varphi(s_0)$, $y_0 = \psi(s_0)$, $z_0 = \chi(s_0)$:

$$\kappa_2 = \frac{\left| \begin{array}{ccc} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)_{s=s_0}, & \left(\frac{d\psi}{ds} \right)_{s=s_0}, & \left(\frac{d\chi}{ds} \right)_{s=s_0} \\ \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} \right)_{s=s_0}, & \left(\frac{d^2\psi}{ds^2} \right)_{s=s_0}, & \left(\frac{d^2\chi}{ds^2} \right)_{s=s_0} \\ \left(\frac{d^3\varphi}{ds^3} \right)_{s=s_0}, & \left(\frac{d^3\psi}{ds^3} \right)_{s=s_0}, & \left(\frac{d^3\chi}{ds^3} \right)_{s=s_0} \end{array} \right|}{\left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} \right)_{s=s_0}^2 + \left(\frac{d^2\psi}{ds^2} \right)_{s=s_0}^2 + \left(\frac{d^2\chi}{ds^2} \right)_{s=s_0}^2}.$$

Příklad:

K dané obyčejné šroubovici $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid x = r \cos t, y = r \sin t, z = \frac{v}{2\pi}t; v, t \in \mathbb{R}\}$, kde $|v|$ je výška závitu, určeme první a druhou křivost.

Parametrické rovnice dané šroubovice, kde parametrem s je oblouk, mají tvar

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= r \cos \frac{2\pi s}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}}, & \psi(s) &= r \sin \frac{2\pi s}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}}, \\ \chi(s) &= \frac{vs}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}}.\end{aligned}$$

Vypočteme

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{2\pi r}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}} \sin \frac{2\pi s}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}},$$

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{2\pi r}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}} \cos \frac{2\pi s}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}},$$

$$\frac{d\chi}{ds} = \frac{v}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}},$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{4\pi^2 r}{4\pi^2 r^2 + v^2} \cos \frac{2\pi s}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}},$$

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} = -\frac{4\pi^2 r}{4\pi^2 r^2 + v^2} \sin \frac{2\pi s}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}},$$

$$\frac{d^2\chi}{ds^2} = 0.$$

Pak první křivost

$$\kappa_1 = \frac{4\pi^2 r}{4\pi^2 r^2 + v^2}.$$

Dále vypočteme

$$\frac{d^3\varphi}{ds^3} = \frac{8\pi^3 r}{[\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}]^3} \sin \frac{2\pi s}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}},$$

$$\frac{d^3\psi}{ds^3} = -\frac{8\pi^3 r}{[\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}]^3} \cos \frac{2\pi s}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}},$$

$$\frac{d^3\chi}{ds^3} = 0.$$

Pak druhá křivost

$$\kappa_2 = \left(\frac{4\pi^2 r^2 + v^2}{4\pi^2 r} \right)^2 \cdot \begin{vmatrix} -\frac{2\pi r}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}} \sin \frac{2\pi s}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}}, & -\frac{2\pi r}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}} \cos \frac{2\pi s}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}}, & \frac{v}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}} \\ -\frac{4\pi^2 r}{[\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}]^2} \cos \frac{2\pi s}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}}, & -\frac{4\pi^2 r}{[\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}]^2} \sin \frac{2\pi s}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}}, & 0 \\ \frac{8\pi^3 r}{[\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}]^3} \sin \frac{2\pi s}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}}, & -\frac{8\pi^3 r}{[\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}]^3} \cos \frac{2\pi s}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}}, & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{4\pi^2 r^2 + v^2}{4\pi^2 r} \right)^2 \frac{v}{\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}} \frac{32\pi^5 r^2}{[\sqrt{(4\pi^2 r^2 + v^2)}]^5} = \frac{2\pi v}{4\pi^2 r^2 + v^2}.$$

6.3. PLOCHY

Plochou definovanou parametricky v trojrozměrném euklidovském prostoru E_3 nazýváme množinu právě těch bodů, jejichž kartézské souřadnice x, y, z jsou dány rovnicemi

$$x = \xi(u, v), \quad y = \eta(u, v), \quad z = \zeta(u, v),$$

kde ξ, η, ζ jsou reálné funkce dvou reálných parametrů, definované na množině Ω_2 , které mají spojité parciální derivace aspoň prvního řádu, přičemž matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \eta}{\partial u}, \frac{\partial \zeta}{\partial u} \\ \frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial \eta}{\partial v}, \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{1}$$

má hodnost 2 na určitém dvojrozměrném intervalu $J_1 \times J_2$.

Body, v nichž matice má hodnost 2, nazýváme *regulárními body plochy*. Ostatní body nazýváme *singulárními body*. Rovnice $x = \xi(u, v)$, $y = \eta(u, v)$, $z = \zeta(u, v)$ nazýváme *parametrickými rovnicemi plochy*.

Plochou definovanou implicitně v trojrozměrném euklidovském prostoru E_3 nazýváme množinu právě těch bodů, jejichž kartézské souřadnice jsou dány rovnicí

$$F(x, y, z) = 0,$$

kde F je reálná funkce tří reálných proměnných na množině $\Omega_3 \subseteq E_3$, která má spojité parciální derivace na množině Ω_3 a v žádném bodě množiny $\Omega_3^* \subseteq \Omega_3$ zároveň neplatí

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Body, ve kterých neplatí rovnosti (2), nazýváme *regulárními body*. Ostatní body nazýváme *singulárními body*.

Graf spojité diferencovatelné funkce $z = f(x, y)$ je plochou definovanou parametricky rovnicemi

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v)$$

a plochou definovanou implicitní rovnicí

$$z - f(x, y) = 0.$$

Souřadnice na ploše

Hodnoty parametrů u, v se nazývají *křivočaré souřadnice bodu $P[x, y, z]$ plochy*.

Pro konstantní parametr u a proměnný parametr v , resp. pro konstantní parametr v a proměnný parametr u dostáváme *v-čáry*, resp. *u-čáry*.

Křivky na ploše

Rovnice

$$u = \varphi(t), \quad v = \psi(t) \quad (t \in J) \quad (3)$$

definují parametricky křivku na ploše

$$x = \xi(u, v), \quad y = \eta(u, v), \quad z = \zeta(u, v) \quad (u, v \in \Omega_2),$$

jestliže funkce (3) splňují na intervalu J tyto podmínky:

a) Jsou spojité a mají spojité aspoň první derivace, které nejsou obě zároveň rovny nule.

b) Body $[\varphi(t), \psi(t)]$ leží pro všechny hodnoty parametru $t \in J$ v množině Ω_2 .

c) Prvky matice (1) nejsou pro všechny body $[\varphi(t), \psi(t)]$ všechny zároveň rovny nule.

Rovnice (3) nazýváme *parametrickými rovnicemi křivky na ploše*.

Tečná rovina a normála plochy

Tečnou rovinou plochy v jejím regulárním bodě P_0 nazýváme rovinu, kterou tvoří tečny ke všem křivkám ležícím na ploše a procházejícím dotykovým bodem P_0 .

Normálou plochy v jejím bodě P_0 nazýváme přímku, která prochází bodem P_0 kolmo k tečné rovině této plochy v bodě P_0 .

Rovnice tečné roviny v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ k ploše dané parametricky rovnicemi:

$$x = \xi(u, v), \quad y = \eta(u, v), \quad z = \zeta(u, v)$$

$$[x_0 = \xi(u_0, v_0), \quad y_0 = \eta(u_0, v_0), \quad z_0 = \zeta(u_0, v_0)]:$$

$$\begin{vmatrix} X - x_0, & Y - y_0, & Z - z_0 \\ \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)_{u=u_0, v=v_0}, & \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\right)_{u=u_0, v=v_0}, & \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right)_{u=u_0, v=v_0} \\ \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)_{u=u_0, v=v_0}, & \left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)_{u=u_0, v=v_0}, & \left(\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right)_{u=u_0, v=v_0} \end{vmatrix} = 0.$$

Rovnice tečné roviny v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ k ploše dané implicitní rovnici $F(x, y, z) = 0$:

$$(X - x_0) \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=x_0, y=y_0, z=z_0} + (Y - y_0) \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{x=x_0, y=y_0, z=z_0} + (Z - z_0) \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_{x=x_0, y=y_0, z=z_0} = 0.$$

Rovnice tečné roviny v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ k ploše dané rovnici $z = f(x, y)$:

$$Z - z_0 = (X - x_0) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x=x_0, y=y_0} + (Y - y_0) \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{x=x_0, y=y_0}.$$

Rovnice normály v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ k ploše dané parametricky rovnicemi $x = \xi(u, v)$, $y = \eta(u, v)$, $z = \zeta(u, v)$ $[x_0 = \xi(u_0, v_0)$, $y_0 = \eta(u_0, v_0)$, $z_0 = \zeta(u_0, v_0)]$:

$$\begin{aligned} & \frac{X - x_0}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial u} \right)_{u=u_0, v=v_0}, \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u} \right)_{u=u_0, v=v_0}} = \frac{Y - y_0}{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial u} \right)_{u=u_0, v=v_0}, \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right)_{u=u_0, v=v_0}} = \\ & = \frac{Z - z_0}{\left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right)_{u=u_0, v=v_0}, \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} \right)_{u=u_0, v=v_0}} \end{aligned}$$

Rovnice normály v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ k ploše dané implicitně rovnicií $F(x, y, z) = 0$:

$$\frac{X - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=x_0, y=y_0, z=z_0}} = \frac{Y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x=x_0, y=y_0, z=z_0}} = \frac{Z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{x=x_0, y=y_0, z=z_0}}.$$

7. INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

7.1. DEFINICE NEURČITÉHO INTEGRÁLU

Primitivní funkce

Funkce F se nazývá *primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b)* (připouští se $a = -\infty$, $b = +\infty$), jestliže pro $\forall x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$.

Neurčitý integrál

Zápis $\int f(x) dx$ představuje množinu všech primitivních funkcí k funkci f a nazývá se *neurčitý integrál $\langle z \rangle$ funkce f* .

$\int f(x) dx = F(x) + C$, přičemž $F'(x) = f(x)$ a C je libovolná konstanta. Funkce f se nazývá *integrand* nebo *integrovaná funkce*, x *integrační proměnná*, C *integrační konstanta* a \int *integrační znak*.

Protože integrační konstanta C může nabývat libovolného reálného čísla, přísluší danému integrandu nekonečně mnoho primitivních funkcí. Každé určité hodnotě integrační konstanty C přísluší právě jedno *parciální řešení*. Geometricky to znamená, že existuje nekonečně mnoho integrálních křivek, které vzniknou jedna z druhé rovnoběžným posunutím ve směru druhé souřadnicové osy.

Funkce f se nazývá *integrovatelná*, existuje-li k ní primitivní funkce F . Každá spojitá funkce je integrovatelná.

7.2. ZÁKLADNÍ INTEGRÁLY

Pokud u vzorců nejsou v závorkách připojeny další omezující podmínky, platí vzorce pro $\forall x \in \mathbb{R}$ a pro všechny reálné hodnoty uvedených konstant. Přitom např. místo omezení platnosti vzorce na $\forall x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ se stručně uvádí $x \neq 1$. V omezujících podmínkách je všude vyněchán obecný kvantifikátor.

$$1. \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (x > 0, n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}).$$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0),$
 $= \ln(kx) \quad (kx > 0).$
3. $\int e^x dx = e^x + C.$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C = a^x \log_a e + C \quad (a > 0, a \neq 1).$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad \left(x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z} \right).$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C \quad (x \neq n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}).$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1 \quad (|x| < 1).$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C_1.$
11. $\int \sinh x dx = \cosh x + C.$
12. $\int \cosh x dx = \sinh x + C.$
13. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C.$
14. $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cotgh} x + C \quad (x \neq 0).$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{argsinh} x + C = \ln[x + \sqrt{(x^2+1)}] + C.$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \ln|x + \sqrt{(x^2-1)}| + C, & (|x| > 1), \\ \operatorname{argcosh} x + C & (x > 1). \end{cases}$

$$17. \int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C & (|x| \neq 1), \\ \operatorname{argtgh} x + C & (|x| < 1), \\ \operatorname{argcotgh} x + C & (|x| > 1). \end{cases}$$

Ze vzorce 17 plyne

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C & (|x| \neq 1), \\ -\operatorname{argtgh} x + C & (|x| < 1), \\ -\operatorname{argcotg} x + C & (|x| > 1). \end{cases}$$

7.3. ZÁKLADNÍ INTEGRAČNÍ PRAVIDLA

Integrace součtu nebo rozdílu funkcí (f, g a h jsou integrovatelné funkce):

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx - \int h(x) dx.$$

Integrace funkce s multiplikační konstantou (f je integrovatelná funkce):

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx.$$

Substituční metoda

a) Neurčitý integrál $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ vypočteme tak, že najdeme libovolnou primitivní funkci $F(x)$ k funkci $f(x)$ a do výsledku za proměnnou x dosadíme $x = \varphi(t)$:

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Přitom předpokládáme, že funkce φ má spojitou derivaci φ' na intervalu (α, β) , funkce f je spojitá na intervalu (a, b) a $\varphi(t) \in (a, b)$ pro všechna čísla $t \in (\alpha, \beta)$.

b) Neurčitý integrál $\int f(x) dx$ vypočteme tak, že najdeme libovolnou primitivní funkci $G(t)$ k funkci $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ a do výsledku za proměnnou t dosadíme $t = \psi(x)$, kde ψ je inverzní funkce k funkci φ na intervalu (α, β) :

$$\int f(x) dx = G(\psi(x)) + C.$$

Přitom kromě předpokladů uvedených v bodě a) ještě předpokládáme existenci inverzní funkce ψ . Protože zpravidla z dané funkce $t = \psi(x)$ odvozujeme vztah $x = \varphi(t)$, je třeba také ověřit existenci a spojitost funkce φ na intervalu (α, β) .

Často se vyskytující substituce

$$ax + b = t, \quad dx = \frac{1}{a} dt \quad (a \neq 0);$$

$$\frac{x}{a} = t, \quad dx = a dt \quad (a \neq 0);$$

$$\frac{a}{x} = t, \quad dx = -\frac{a}{t^2} dt \quad (a \neq 0, x \neq 0);$$

$$a^x = t, \quad dx = \frac{dt}{t \ln a} \quad (a \neq 1, a > 0);$$

$$e^x = t, \quad dx = \frac{1}{t} dt;$$

$$\ln x = t, \quad dx = e^t dt \quad (x > 0);$$

$$a + bx^2 = t, \quad dx = \frac{dt}{2\sqrt{(bt - ab)}} \quad (x > 0 \text{ nebo } x < 0, b \neq 0);$$

$$a^2 + x^2 = t, \quad dx = \frac{dt}{2\sqrt{(t - a^2)}} \quad (x > 0 \text{ nebo } x < 0);$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = t, \quad dx = \frac{t dt}{\sqrt{(t^2 - a^2)}};$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = t, \quad dx = -\frac{t dt}{\sqrt{(a^2 - t^2)}} \quad (|x| < |a|);$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = t, \quad dx = \frac{t dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)}} \quad (|x| > a);$$

$$\sqrt{a + bx} = t, \quad dx = \frac{2t dt}{b} \quad (a + bx \geq 0, b \neq 0);$$

$$\sqrt[n]{x} = t, \quad dx = 2t dt \quad (x \geq 0);$$

$$\sqrt[n]{a + bx} = t, \quad dx = \frac{nt^{n-1} dt}{b} \quad (a + bx \geq 0, b \neq 0).$$

Substituce pro speciální integrály

$$1. \quad \int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx \quad (|x| \leq |a|).$$

Substituce

$$x = a \sin t, \quad dx = a \cos t dt$$

dává

$$\int f(a \sin t, a \cos t) a \cos t dt.$$

Po integraci dosadíme

$$t = \arcsin \frac{x}{a},$$

$$\begin{aligned} \sin t &= \frac{x}{a}, & \operatorname{tg} t &= \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \\ \cos t &= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}, & \operatorname{cotg} t &= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}. \end{aligned}$$

Příklad:

Integrál

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

vypočteme pomocí substituce $x = a \sin t, dx = a \cos t dt$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int [\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}] a \cos t dt &= a^2 \int \cos^2 t dt = \\ &= a^2 \left(\frac{1}{2} \cos t \sin t + \frac{1}{2} t \right), \end{aligned}$$

kde jsme použili vzorce 14 z článku 7.4.3. Po zpětném dosazení máme

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^2}{2} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} = \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}. \end{aligned}$$

$$2. \quad \int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx \quad (|x| \leq |a|).$$

Substituce

$$x = a \operatorname{tgh} t, \quad dx = \frac{a dt}{\cosh^2 t}$$

dává

$$\int f\left(a \operatorname{tgh} t, \frac{a}{\cosh t}\right) \frac{a dt}{\cosh^2 t}.$$

Po integraci dosadíme

$$t = \operatorname{argtgh} \frac{x}{a},$$

$$\sinh t = \frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}, \quad \operatorname{tgh} t = \frac{x}{a},$$

$$\cosh t = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}, \quad \operatorname{cotgh} t = \frac{a}{x}.$$

$$3. \int f(x, \sqrt{(a^2 + x^2)}) dx.$$

Substituce

$$x = a \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}$$

dává

$$\int f\left(a \operatorname{tg} t, \frac{a}{\cos^2 t}\right) \frac{a dt}{\cos^2 t}.$$

Po integraci dosadíme

$$t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a},$$

$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}, \quad \operatorname{tg} t = \frac{x}{a},$$

$$\cos t = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}, \quad \operatorname{cotg} t = \frac{a}{x}.$$

$$4. \int f(x, \sqrt{(a^2 + x^2)}) dx.$$

Substituce

$$x = a \sinh t, \quad dx = a \cosh t dt$$

dává

$$\int f(a \sinh t, a \cosh t) a \cosh t dt.$$

Po integraci dosadíme

$$t = \operatorname{argsinh} \frac{x}{a},$$

$$\sinh t = \frac{x}{a}, \quad \operatorname{tgh} t = \frac{x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}},$$

$$\cosh t = \frac{\sqrt{(a^2 + x^2)}}{a}, \quad \operatorname{cotgh} t = \frac{\sqrt{(a^2 + x^2)}}{x}.$$

$$5. \int f(x, \sqrt{(x^2 - a^2)}) dx \quad (|x| \geq |a|).$$

Substituce

$$x = \frac{a}{\cos t}, \quad dx = \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t}$$

dává

$$\int f\left(\frac{a}{\cos t}, a \operatorname{tg} t\right) \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t}.$$

Přitom platí

$$\sin t = \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)}}{x}, \quad \operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)}}{a},$$

$$\cos t = \frac{a}{x}, \quad \operatorname{cotg} t = \frac{a}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}.$$

$$6. \int f(x, \sqrt{(x^2 - a^2)}) dx \quad (|x| \geq |a|).$$

Substituce

$$x = a \cosh t, \quad dx = a \sinh t dt$$

dává

$$\int f(a \cosh t, a \sinh t) a \sinh t dt.$$

Přitom platí

$$\sinh t = \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)}}{a}, \quad \operatorname{tgh} t = \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)}}{x},$$

$$\cosh t = \frac{x}{a}, \quad \operatorname{cotgh} t = \frac{x}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}.$$

7. $\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x) dx \quad (R \text{ je racionální funkce}).$

Substituce

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

dává

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}, \frac{1-t^2}{2t}\right) \frac{2 dt}{1+t^2}.$$

8. $\int R(\sinh x, \cosh x, \operatorname{tgh} x, \operatorname{cotgh} x) dx \quad (R \text{ je racionální funkce}).$

Substituce

$$\operatorname{tgh} \frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2 dt}{1-t^2}$$

dává

$$\int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, \frac{1+t^2}{2t}\right) \frac{2 dt}{1-t^2}.$$

9. $\int f(e^x) dx.$

Substituce

$$e^x = t, \quad dx = \frac{dt}{t}$$

dává

$$\int f(t) dt.$$

10. $\int f(x, \sqrt[k]{(ax+b)}) dx \quad \left(x \geq -\frac{b}{a}\right).$

Substituce

$$ax + b = t^k, \quad dx = \frac{kt^{k-1} dt}{a}$$

dává

$$\int f(t) dt.$$

$$11. \quad \int f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/p}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/q}, \dots\right) dx \quad (p, q, \dots \in \mathbb{Z}).$$

Substituce

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$$

dává

$$\int f(t) dt$$

(n je nejmenší společný násobek jmenovatelů p, q, \dots ; $ad - bc \neq 0$).

$$12. \quad \int f(x, \sqrt{(ax^2 + bx + c)}) dx.$$

Používáme těchto substitucí, které integrály tohoto typu převedou na integrály racionálních funkcí:

Případ 1: $a > 0$.

Substituce:

$$\begin{aligned} \sqrt{(ax^2 + bx + c)} &= x \sqrt{a} + t, \\ x &= \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}, \quad dx = 2 \frac{-t^2 \sqrt{a} + bt - c \sqrt{a}}{(b - 2t\sqrt{a})^2} dt. \end{aligned}$$

Případ 2: $c > 0, \quad x \neq 0$.

Substituce

$$\begin{aligned} \sqrt{(ax^2 + bx + c)} &= xt + \sqrt{c}, \\ x &= \frac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}, \quad dx = \frac{2a\sqrt{c} - 2bt + 2t^2\sqrt{c}}{(a - t^2)^2} dt. \end{aligned}$$

Případ 3: Odmocněnec má reálné kořeny x_1 a x_2 .

Substituce

$$\begin{aligned} \sqrt{(ax^2 + bx + c)} &= t(x - x_1), \\ x &= \frac{t^2x_1 - ax_2}{t^2 - a}, \quad dx = \frac{2at(x_2 - x_1)}{(t^2 - a)^2} dt. \end{aligned}$$

Integrace per partes

Na otevřeném intervalu J platí

$$\int u v' \, dx = u v - \int v u' \, dx,$$

kde $u = u(x)$, $v = v(x)$ jsou funkce proměnné x , které mají na intervalu J spojité derivace.

Jiný způsob psaní:

$$\int u \, dv = u v - \int v \, du.$$

Příklad:

Má se vypočítat integrál

$$\int x^3 \ln x \, dx.$$

Pomocí substitucí

$$\begin{array}{l|l} u = \ln x, & dv = x^3 \, dx, \\ du = \frac{1}{x} \, dx, & v = \frac{x^4}{4} \end{array}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln x \, dx &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{x} \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx = \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4} \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + C. \end{aligned}$$

Integrace rozkladem v částečné [parciální] zlomky

Při rozkladu zlomku f/g , kde f, g jsou mnohočleny a f je stupně nižšího než g , v částečné [parciální] zlomky rozlišujeme tyto čtyři případy:

Případ 1

Rovnice $g(x) = 0$ má jen jednoduché reálné kořeny x_1, x_2, \dots . Pak lze f/g rozložit v částečné [parciální] zlomky takto:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3} + \dots,$$

kde

$$A = \frac{f(x_1)}{g'(x_1)}, \quad B = \frac{f(x_2)}{g'(x_2)}, \quad C = \frac{f(x_3)}{g'(x_3)}, \dots$$

Je tedy

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = A \int \frac{dx}{x - x_1} + B \int \frac{dx}{x - x_2} + C \int \frac{dx}{x - x_3} + \dots$$

Citatele A, B, C, \dots částečných zlomků lze také (a často ještě rychleji) najít metodou neurčitých součinitelů [koeficientů], které se určí porovnáním koeficientů u týchž mocnin proměnné x v čitatelích zlomků.

Příklad:

Má se vypočítat integrál

$$\int \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} dx.$$

Protože

$$x^3 - 6x^2 - 13x + 42 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = -3 \wedge x_3 = 7,$$

je

$$\begin{aligned} \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} &= \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 7} = \\ &= \frac{A(x + 3)(x - 7) + B(x - 2)(x - 7) + C(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 3)(x - 7)} = \\ &= \frac{(A + B + C)x^2 - (4A + 9B - C)x - (21A - 14B + 6C)}{(x - 2)(x + 3)(x - 7)}. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u týchž mocnin proměnné x v čitateli prvního a posledního zlomku dostaneme soustavu rovnic

$$\left. \begin{array}{rcl} A + B + C = 15, \\ 4A + 9B - C = 70, \\ 21A - 14B + 6C = 95 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 7 \wedge B = 5 \wedge C = 3,$$

popř. pomocí první z uvedených metod je

$$A = \frac{f(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{-175}{-25} \text{ atd.}$$

Z toho plyně

$$\int \frac{15x^2 - 70x - 95}{x^3 - 6x^2 - 13x + 42} dx = 7 \int \frac{dx}{x-2} + 5 \int \frac{dx}{x+3} + 3 \int \frac{dx}{x-7} = \\ = 7 \ln|x-2| + 5 \ln|x+3| + 3 \ln|x-7| + C.$$

Případ 2

Rovnice $g(x) = 0$ má jen reálné kořeny, z nichž některé jsou však několika-násobné, např. kořen x_1 je α -násobný, kořen x_2 β -násobný atd. Pak lze f/g rozložit v částečné zlomky takto:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \\ &= \frac{A_1}{(x-x_1)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{\alpha-1}} + \frac{A_3}{(x-x_1)^{\alpha-2}} + \dots + \frac{A_\alpha}{x-x_1} + \\ &+ \frac{B_1}{(x-x_2)^\beta} + \frac{B_2}{(x-x_2)^{\beta-1}} + \frac{B_3}{(x-x_2)^{\beta-2}} + \dots + \frac{B_\beta}{x-x_2} + \\ &+ \frac{C_1}{(x-x_3)^\gamma} + \frac{C_2}{(x-x_3)^{\gamma-1}} + \frac{C_3}{(x-x_3)^{\gamma-2}} + \dots + \frac{C_\gamma}{x-x_3} + \dots \end{aligned}$$

Součinitely $A_1, A_2, \dots, A_\alpha, B_1, B_2, \dots, B_\beta, C_1, C_2, \dots, C_\gamma, \dots$ vypočteme po rovnáním koeficientů u týchž mocnin proměnné x v čitatelích zlomků.

Příklad:

Má se vypočítat integrál

$$\int \frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2} dx.$$

Protože

$$(x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1 \wedge x_3 = x_4 = -1,$$

je

$$\begin{aligned} \frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2} &= \\ &= \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{x+1} = \\ &= \frac{A_1(x+1)^2 + A_2(x+1)^2(x-1) + B_1(x-1)^2 + B_2(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2(x+1)^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(A_2 + B_2)x^3 + (A_1 + A_2 + B_1 - B_2)x^2 + (2A_1 - A_2 - 2B_1 - B_2)x}{(x-1)^2(x+1)^2} + \\ + \frac{A_1 - A_2 + B_1 + B_2}{(x-1)^2(x+1)^2}.$$

Porovnáním koeficientů dostaneme soustavu rovnic

$$\left. \begin{array}{l} A_2 + B_2 = 3, \\ A_1 + A_2 + B_1 - B_2 = 10, \\ 2A_1 - A_2 - 2B_1 - B_2 = -1, \\ A_1 - A_2 + B_1 + B_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 = 3 \wedge A_2 = 4 \wedge B_1 = 2 \wedge B_2 = -1.$$

Z toho plyne

$$\begin{aligned} & \int \frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2} dx = \\ & = 3 \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 4 \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \int \frac{dx}{x+1} = \\ & = -\frac{3}{x-1} + 4 \ln|x-1| - \frac{2}{x+1} - \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

Případ 3

Rovnice $g(x) = 0$ má kromě reálných kořenů také jednoduché komplexní kořeny (vždy dva a dva komplexně sdružené). Uvedených metod rozkladu v částečné zlomky lze použít také zde, přičemž se ovšem zároveň vyskytují komplexní čitatelé. Počítání s komplexními výrazy se lze vyhnout, jestliže částečné zlomky, které vzniknou dosazením komplexně sdružených kořenů, uvedeme na společného jmenovatele. Jsou-li např. x_1 a x_2 dva komplexně sdružené kořeny, použijeme vyjádření

$$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} = \frac{Px + Q}{(x - x_1)(x - x_2)},$$

kde součinitely opět určíme porovnáním koeficientů u týchž mocnin proměnné x v čitatelích zlomků.

Integrál výrazu

$$\frac{Px + Q}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{Px + Q}{x^2 + px + q},$$

kde

$$q - \frac{p^2}{4} > 0,$$

lze vypočítat podle vzorce

$$\int \frac{Px + Q}{x^2 + px + q} dx = \frac{P}{2} \ln(x^2 + px + q) + \\ + \frac{Q - \frac{Pp}{2}}{\sqrt{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)}}.$$

Příklad:

Má se vypočítat integrál

$$\int \frac{7x^2 - 10x + 37}{x^3 - 3x^2 + 9x + 13} dx.$$

Protože

$$x^3 - 3x^2 + 9x + 13 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \wedge x_2 = 2 + 3i \wedge x_3 = 2 - 3i,$$

je

$$\begin{aligned} \frac{7x^2 - 10x + 37}{x^3 - 3x^2 + 9x + 13} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Px + Q}{x^2 - 4x + 13} = \\ &= \frac{A(x^2 - 4x + 13) + (Px + Q)(x + 1)}{x^3 - 3x^2 + 9x + 13} = \\ &= \frac{(A + P)x^2 - (4A - Q - P)x + (13A + Q)}{x^3 - 3x^2 + 9x + 13}. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů dostaneme soustavu rovnic

$$\left. \begin{aligned} A + P &= 7, \\ 4A - Q - P &= 10, \\ 13A + Q &= 37 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 3 \wedge P = 4 \wedge Q = -2.$$

Z toho plyne

$$\begin{aligned} \int \frac{7x^2 - 10x + 37}{x^3 - 3x^2 + 9x + 13} dx &= 3 \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{4x - 2}{x^2 - 4x + 13} dx = \\ &= 3 \ln|x+1| + 2 \ln(x^2 - 4x + 13) + 2 \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C. \end{aligned}$$

Případ 4

Rovnice $g(x) = 0$ má kromě reálných kořenů také několikanásobné komplexní kořeny. V tomto případě je opět nejlépe zlomky, které vzniknou dosazením komplexně sdružených kořenů, uvést na společného jmenovatele.

Například

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)^3} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \frac{A_3}{x - x_1} + \frac{P_1x + Q_1}{(x^2 + px + q)^2} + \frac{P_2x + Q_2}{x^2 + px + q},$$

kde kořen x_1 je trojnásobným reálným kořenem a komplexně sdružené kořeny jsou dvojnásobnými kořeny. Integrál

$$\int \frac{P_1x + Q_1}{(x^2 + px + q)^2} dx$$

viz vzorce 20 a 21 z článku 7.4.1.

7.4. NĚKTERÉ DŮLEŽITÉ INTEGRÁLY

Poznámka:

U neurčitých integrálů jsou pro přehlednost vynechány integrační konstanty. Obory pravdivosti jsou uváděny jen tam, kde jsou méně zřejmé.

7.4.1. Integrály racionálních funkcí

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Ve výrazu $ax + b$ je $a \neq 0$, $b \neq 0$. Ve výrazech $ax^2 + bx + c$ a $4ac - b^2 \neq 0$ je $a \neq 0$. Ve výrazu $x^2 \pm a^2$ je $a > 0$.

1. $\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)}.$
2. $\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln |ax + b|.$
3.
$$\int x(ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+2}}{a^2(n+2)} - \frac{b(ax + b)^{n+1}}{a^2(n+1)} = \\ = \frac{a(n+1)x - b}{a^2(n+1)(n+2)} (ax + b)^{n+1}.$$
4.
$$\int \frac{x dx}{ax + b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln |ax + b|.$$
5.
$$\int \frac{x dx}{(ax + b)^2} = \frac{b}{a^2(ax + b)} + \frac{1}{a^2} \ln |ax + b|.$$

6. $\int \frac{x \, dx}{(ax+b)^n} = \frac{a(1-n)x - b}{a^2(n-1)(n-2)(ax+b)^{n-1}} \quad (n \neq 1, 2).$
7. $\int x^2(ax+b)^n \, dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{(ax+b)^{n+3}}{n+3} - \frac{2b(ax+b)^{n+2}}{n+2} + \frac{b^2(ax+b)^{n+1}}{n+1} \right].$
8. $\int \frac{x^2 \, dx}{ax+b} = \frac{1}{a^3} \left[\frac{(ax+b)^2}{2} - 2b(ax+b) + b^2 \ln |ax+b| \right].$
9. $\int \frac{x^2 \, dx}{(ax+b)^2} = \frac{1}{a^3} \left(ax + b - 2b \ln |ax+b| - \frac{b^2}{ax+b} \right).$
10. $\int \frac{x^2 \, dx}{(ax+b)^3} = \frac{1}{a^3} \left(\ln |ax+b| + \frac{2b}{ax+b} - \frac{b^2}{2(ax+b)^2} \right).$
11.
$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 \, dx}{(ax+b)^n} &= \frac{1}{a^3} \left(-\frac{1}{(n-3)(ax+b)^{n-3}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2b}{(n-2)(ax+b)^{n-2}} - \frac{b^2}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} \right) \quad (n \neq 1, 2, 3). \end{aligned}$$
12. $\int \frac{dx}{x(ax+b)} = -\frac{1}{b} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right|.$
13. $\int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right|.$
14. $\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^2} = -a \left(\frac{1}{b^2(ax+b)} + \frac{1}{ab^2 x} - \frac{2}{b^3} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| \right).$
15. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$
16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{argtgh} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a-x}{a+x} \quad (|x| < a).$
17. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{argcotgh} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} \quad (|x| > a).$
18.
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} &= \\ &= \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \quad (4ac - b^2 > 0), \end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{(b^2 - 4ac)}} \operatorname{argtgh} \frac{2ax + b}{\sqrt{(b^2 - 4ac)}} \quad (4ac - b^2 < 0),$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(b^2 - 4ac)}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2ax + b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}} \right| \quad (4ac - b^2 < 0).$$

$$19. \int \frac{x \, dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

$$20. \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{2ax + b}{(n-1)(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \\ + \frac{(2n-3)2a}{(n-1)(4ac - b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} \quad (n \neq 1).$$

$$21. \int \frac{x \, dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = -\frac{bx + 2c}{(n-1)(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} - \\ - \frac{b(2n-3)}{(n-1)(4ac - b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} \quad (n \neq 1).$$

$$22. \int \frac{dx}{x(ax^2 + bx + c)} = \frac{1}{2c} \ln \left| \frac{x^2}{ax^2 + bx + c} \right| - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (c \neq 0).$$

7.4.2. Integrály iracionálních funkcí

Ve výrazech $a^2 \pm x^2$ a $x^2 - a^2$ je $a > 0$. Ve výrazech $ax^2 + bx + c$ a $4ac - b^2 \neq 0$ je $a \neq 0$.

1. $\int (ax + b)^r \, dx = \frac{1}{(r+1)a} (ax + b)^{r+1} \quad (a \neq 0, b \neq 0, r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}).$
2. $\int x(ax + b)^r \, dx = \frac{a(r+1)x - b}{a^2(r+1)(r+2)} (ax + b)^{r+1} \quad (a \neq 0, r \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}).$
3. $\int \sqrt{(a^2 - x^2)} \, dx = \frac{1}{2} \left[x \sqrt{(a^2 - x^2)} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right] \quad (|x| \leq a).$
4. $\int x \sqrt{(a^2 - x^2)} \, dx = -\frac{1}{3} \sqrt{(a^2 - x^2)^3} = -\frac{1}{3}(a^2 - x^2) \sqrt{(a^2 - x^2)} \quad (|x| \leq a).$
5. $\int \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)} \, dx}{x} = \sqrt{(a^2 - x^2)} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x} \right| \quad (|x| \leq a).$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \arcsin \frac{x}{a} \quad (|x| \leq a).$
7. $\int \frac{x dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = -\sqrt{(a^2 - x^2)} \quad (|x| \leq a).$
8. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = -\frac{x}{2} \sqrt{(a^2 - x^2)} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \quad (|x| \leq a).$
9. $\int \sqrt{(x^2 + a^2)} dx = \frac{1}{2} \left[x \sqrt{(x^2 + a^2)} + a^2 \operatorname{argsinh} \frac{x}{a} \right].$
10. $\int x \sqrt{(x^2 + a^2)} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + a^2)^3} = \frac{1}{3} (x^2 + a^2) \sqrt{(x^2 + a^2)}.$
11. $\int \frac{\sqrt{(x^2 + a^2)} dx}{x} = \sqrt{(x^2 + a^2)} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{(x^2 + a^2)}}{x} \right|.$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} = \operatorname{argsinh} \frac{x}{a} = \ln \left| \frac{x + \sqrt{(x^2 + a^2)}}{a} \right|.$
13. $\int \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} = \sqrt{(x^2 + a^2)}.$
14. $\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} &= \frac{x}{2} \sqrt{(x^2 + a^2)} - \frac{a^2}{2} \operatorname{argsinh} \frac{x}{a} = \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{(x^2 + a^2)} - \frac{a^2}{2} \ln \left| \frac{x + \sqrt{(x^2 + a^2)}}{a} \right|. \end{aligned}$
15. $\int \frac{dx}{x \sqrt{(x^2 + a^2)}} = -\frac{1}{a} \operatorname{argsinh} \frac{a}{x} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{(x^2 + a^2)}}{x} \right|.$
16. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(x^2 + a^2)}} = -\frac{\sqrt{(x^2 + a^2)}}{a^2 x}.$
17. $\begin{aligned} \int \sqrt{(x^2 - a^2)} dx &= \frac{1}{2} \left[x \sqrt{(x^2 - a^2)} \mp a^2 \operatorname{argcosh} \left| \frac{x}{a} \right| \right] = \\ &= \frac{1}{2} [x \sqrt{(x^2 - a^2)} \mp a^2 \ln (|x| + \sqrt{(x^2 - a^2)})] \quad (|x| \geq a), \end{aligned}$
kde znaménko minus, resp. plus platí pro $x > 0$, resp. $x < 0$.
18. $\int x \sqrt{(x^2 - a^2)} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 - a^2)^3} = \frac{1}{3} (x^2 - a^2) \sqrt{(x^2 - a^2)} \quad (|x| \geq a).$

19. $\int \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)} dx}{x} = \sqrt{(x^2 - a^2)} - a \arccos \frac{a}{|x|}$ ($|x| \geq a$).
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} = \operatorname{argcosh} \frac{x}{a} = \ln \left[\frac{|x| + \sqrt{(x^2 - a^2)}}{a} \right]$ ($|x| > a$).
21. $\int \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} = \sqrt{(x^2 - a^2)}$ ($|x| > a$).
22. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} = \frac{x}{2} \sqrt{(x^2 - a^2)} + \frac{a^2}{2} \operatorname{argcosh} \left| \frac{x}{a} \right| =$
 $= \frac{1}{2} \left\{ x \sqrt{(x^2 - a^2)} + a^2 \ln \left[\frac{|x| + \sqrt{(x^2 - a^2)}}{a} \right] \right\}$ ($|x| > a$).
23. $\int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2 \sqrt{[a(ax^2 + bx + c)]} + 2ax + b| \quad (a > 0).$
 $= \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{argsinh} \frac{2ax + b}{\sqrt{(4ac - b^2)}} \quad (a > 0, 4ac - b^2 > 0).$
 $= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax + b| \quad (a > 0, 4ac - b^2 = 0).$
 $= -\frac{1}{\sqrt{(-a)}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{(b^2 - 4ac)}} \quad (a < 0, 4ac - b^2 < 0).$
24. $\int \frac{x dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)}} = \frac{\sqrt{(ax^2 + bx + c)}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)}}$.

7.4.3. Integrály goniometrických funkcí

Všude se předpokládá, že $c \neq 0$; $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}$.

Integrály obsahující sinus:

- $\int \sin(cx) dx = -\frac{1}{c} \cos(cx)$.
- $\int \sin^n(cx) dx = -\frac{\sin^{n-1}(cx) \cos(cx)}{nc} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(cx) dx \quad (n > 1)$.
- $\int x \sin(cx) dx = \frac{\sin(cx)}{c^2} - \frac{x \cos(cx)}{c}$.

4. $\int x^n \sin(cx) dx = -\frac{x^n}{c} \cos(cx) + \frac{n}{c} \int x^{n-1} \cos(cx) dx.$
5. $\int \frac{\sin(cx)}{x} dx = cx - \frac{(cx)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(cx)^5}{5 \cdot 5!} - \dots$
6. $\int \frac{\sin(cx)}{x^n} dx = -\frac{1}{n-1} \frac{\sin(cx)}{x^{n-1}} + \frac{c}{n-1} \int \frac{\cos(cx)}{x^{n-1}} dx \quad (n > 1).$
7. $\int \frac{dx}{\sin(cx)} = \frac{1}{c} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{cx}{2} \right|.$
8. $\int \frac{dx}{\sin^n(cx)} = -\frac{1}{c(n-1)} \frac{\cos(cx)}{\sin^{n-1}(cx)} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2}(cx)} \quad (n > 1).$
9. $\int \frac{dx}{1 \pm \sin(cx)} = \frac{1}{c} \operatorname{tg} \left(\frac{cx}{2} \mp \frac{\pi}{4} \right).$
10. $\int \frac{x dx}{1 + \sin(cx)} = \frac{x}{c} \operatorname{tg} \left(\frac{cx}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{2}{c^2} \ln \left| \cos \left(\frac{cx}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right|.$
11. $\int \frac{x dx}{1 - \sin(cx)} = \frac{x}{c} \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{cx}{2} \right) + \frac{2}{c^2} \ln \left| \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{cx}{2} \right) \right|.$
12. $\int \frac{\sin(cx) dx}{1 \pm \sin(cx)} = \pm x + \frac{1}{c} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{cx}{2} \right).$

Integrály obsahující kosinus:

13. $\int \cos(cx) dx = \frac{1}{c} \sin(cx).$
14. $\int \cos^n(cx) dx = \frac{\cos^{n-1}(cx) \sin(cx)}{nc} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(cx) dx \quad (n \geq 2).$
15. $\int x \cos(cx) dx = \frac{\cos(cx)}{c^2} + \frac{x \sin(cx)}{c}.$
16. $\int x^n \cos(cx) dx = \frac{x^n \sin(cx)}{c} - \frac{n}{c} \int x^{n-1} \sin(cx) dx.$
17. $\int \frac{\cos(cx)}{x} dx = \ln |cx| - \frac{(cx)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(cx)^4}{4 \cdot 4!} - \dots$
18. $\int \frac{\cos(cx)}{x^n} dx = -\frac{\cos(cx)}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{c}{n-1} \int \frac{\sin(cx) dx}{x^{n-1}} \quad (n > 1).$

$$19. \int \frac{dx}{\cos(cx)} = \frac{1}{c} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{cx}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

$$20. \int \frac{dx}{\cos^n(cx)} = \frac{1}{c(n-1)} \frac{\sin(cx)}{\cos^{n-1}(cx)} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2}(cx)} \quad (n > 1).$$

$$21. \int \frac{dx}{1 + \cos(cx)} = \frac{1}{c} \operatorname{tg} \frac{cx}{2}.$$

$$22. \int \frac{dx}{1 - \cos(cx)} = -\frac{1}{c} \operatorname{cotg} \frac{cx}{2}.$$

$$23. \int \frac{x dx}{1 + \cos(cx)} = \frac{x}{c} \operatorname{tg} \frac{cx}{2} + \frac{2}{c^2} \ln \left| \cos \frac{cx}{2} \right|.$$

$$24. \int \frac{x dx}{1 - \cos(cx)} = -\frac{x}{c} \operatorname{cotg} \frac{cx}{2} + \frac{2}{c^2} \ln \left| \sin \frac{cx}{2} \right|.$$

$$25. \int \frac{\cos(cx) dx}{1 + \cos(cx)} = x - \frac{1}{c} \operatorname{tg} \frac{cx}{2}.$$

$$26. \int \frac{\cos(cx) dx}{1 - \cos(cx)} = -x - \frac{1}{c} \operatorname{cotg} \frac{cx}{2}.$$

Integrály obsahující sinus a kosinus:

$$27. \int \frac{dx}{\cos(cx) \pm \sin(cx)} = \frac{1}{c\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{cx}{2} \pm \frac{\pi}{8} \right) \right|.$$

$$28. \int \frac{dx}{[\cos(cx) \pm \sin(cx)]^2} = \frac{1}{2c} \operatorname{tg} \left(cx \mp \frac{\pi}{4} \right).$$

$$29. \int \frac{\cos(cx) dx}{\cos(cx) + \sin(cx)} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2c} \ln |\sin(cx) + \cos(cx)| \quad (\text{viz 58}).$$

$$30. \int \frac{\cos(cx) dx}{\cos(cx) - \sin(cx)} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2c} \ln |\sin(cx) - \cos(cx)| \quad (\text{viz 59}).$$

$$31. \int \frac{\sin(cx) dx}{\cos(cx) + \sin(cx)} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2c} \ln |\sin(cx) + \cos(cx)| \quad (\text{viz 60}).$$

$$32. \int \frac{\sin(cx) dx}{\cos(cx) - \sin(cx)} = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2c} \ln |\sin(cx) - \cos(cx)| \quad (\text{viz 61}).$$

$$33. \int \frac{\cos(cx) dx}{\sin(cx)[1 + \cos(cx)]} = -\frac{1}{4c} \operatorname{tg}^2 \frac{cx}{2} + \frac{1}{2c} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{cx}{2} \right|.$$

$$34. \int \frac{\cos(cx) dx}{\sin(cx)[1 - \cos(cx)]} = -\frac{1}{4c} \operatorname{cotg}^2 \frac{cx}{2} - \frac{1}{2c} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{cx}{2} \right|.$$

$$35. \int \frac{\sin(cx) dx}{\cos(cx)[1 + \sin(cx)]} = \frac{1}{4c} \operatorname{cotg}^2 \left(\frac{cx}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2c} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{cx}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

$$36. \int \frac{\sin(cx) dx}{\cos(cx)[1 - \sin(cx)]} = \frac{1}{4c} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{cx}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2c} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{cx}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

$$37. \int \sin(cx) \cos(cx) dx = \frac{1}{2c} \sin^2(cx).$$

$$38. \int \sin(c_1x) \sin(c_2x) dx = \frac{\sin((c_1 - c_2)x)}{2(c_1 - c_2)} - \frac{\sin((c_1 + c_2)x)}{2(c_1 + c_2)} \quad (|c_1| \neq |c_2|).$$

$$39. \int \cos(c_1x) \cos(c_2x) dx = \frac{\sin((c_1 - c_2)x)}{2(c_1 - c_2)} + \frac{\sin((c_1 + c_2)x)}{2(c_1 + c_2)} \quad (|c_1| \neq |c_2|).$$

$$40. \int \sin(c_1x) \cos(c_2x) dx = -\frac{\cos((c_1 + c_2)x)}{2(c_1 + c_2)} - \frac{\cos((c_1 - c_2)x)}{2(c_1 - c_2)} \quad (|c_1| \neq |c_2|).$$

$$41. \int \sin^r(cx) \cos(cx) dx = \frac{1}{c(r+1)} \sin^{r+1}(cx) \quad (r \neq -1).$$

$$42. \int \sin(cx) \cos^r(cx) dx = -\frac{1}{c(r+1)} \cos^{r+1}(cx) \quad (r \neq -1).$$

$$43. \int \sin^n(cx) \cos^m(cx) dx = \\ = -\frac{\sin^{n-1}(cx) \cos^{m+1}(cx)}{c(n+m)} + \frac{n-1}{n+m} \int \sin^{n-2}(cx) \cos^m(cx) dx = \\ = \frac{\sin^{n+1}(cx) \cos^{m-1}(cx)}{c(n+m)} + \frac{m-1}{n+m} \int \sin^n(cx) \cos^{m-2}(cx) dx \quad (m, n > 1).$$

$$44. \int \frac{dx}{\sin(cx) \cos(cx)} = \frac{1}{c} \ln |\operatorname{tg}(cx)|.$$

$$45. \int \frac{dx}{\sin(cx) \cos^n(cx)} = \frac{1}{c(n-1) \cos^{n-1}(cx)} + \int \frac{dx}{\sin(cx) \cos^{n-2}(cx)} \quad (n > 1).$$

$$46. \int \frac{dx}{\sin^n(cx) \cos(cx)} = -\frac{1}{c(n-1) \sin^{n-1}(cx)} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2}(cx) \cos(cx)} \quad (n > 1).$$

$$47. \int \frac{\sin^2(cx) dx}{\cos(cx)} = -\frac{1}{c} \sin(cx) + \frac{1}{c} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{cx}{2} \right) \right|.$$

$$48. \int \frac{\sin^2(cx) dx}{\cos^n(cx)} = \frac{\sin(cx)}{c(n-1) \cos^{n-1}(cx)} - \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2}(cx)} \quad (n > 1).$$

$$49. \int \frac{\sin^n(cx) dx}{\cos(cx)} = -\frac{\sin^{n-1}(cx)}{c(n-1)} + \int \frac{\sin^{n-2}(cx) dx}{\cos(cx)} \quad (n > 1).$$

$$\begin{aligned} 50. \int \frac{\sin^n(cx) dx}{\cos^m(cx)} &= \\ &= \frac{\sin^{n+1}(cx)}{c(m-1) \cos^{m-1}(cx)} - \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\sin^n(cx) dx}{\cos^{m-2}(cx)} \quad (m > 1), \\ &= -\frac{\sin^{n-1}(cx)}{c(n-m) \cos^{m-1}(cx)} + \frac{n-1}{n-m} \int \frac{\sin^{n-2}(cx) dx}{\cos^m(cx)} \quad (m \neq n, n > 1), \\ &= \frac{\sin^{n-1}(cx)}{c(m-1) \cos^{m-1}(cx)} - \frac{n-1}{m-1} \int \frac{\sin^{n-1}(cx) dx}{\cos^{m-2}(cx)} \quad (m > 1). \end{aligned}$$

$$51. \int \frac{\cos^2(cx) dx}{\sin(cx)} = \frac{1}{c} \left(\cos(cx) + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{cx}{2} \right| \right).$$

$$52. \int \frac{\cos^2(cx) dx}{\sin^n(cx)} = -\frac{1}{n-1} \left(\frac{\cos(cx)}{c \sin^{n-1}(cx)} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2}(cx)} \right) \quad (n > 1).$$

$$53. \int \frac{\cos^n(cx) dx}{\sin(cx)} = \frac{\cos^{n-1}(cx)}{c(n-1)} + \int \frac{\cos^{n-2}(cx) dx}{\sin(cx)} \quad (n > 1).$$

$$\begin{aligned} 54. \int \frac{\cos^n(cx) dx}{\sin^m(cx)} &= \\ &= -\frac{\cos^{n+1}(cx)}{c(m-1) \sin^{m-1}(cx)} - \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\cos^n(cx) dx}{\sin^{m-2}(cx)} \quad (m > 1), \\ &= \frac{\cos^{n-1}(cx)}{c(n-m) \sin^{m-1}(cx)} + \frac{n-1}{n-m} \int \frac{\cos^{n-2}(cx) dx}{\sin^m(cx)} \quad (m \neq n, n > 1), \\ &= -\frac{\cos^{n-1}(cx)}{c(m-1) \sin^{m-1}(cx)} - \frac{n-1}{m-1} \int \frac{\cos^{n-2}(cx) dx}{\sin^{m-2}(cx)} \quad (m > 1). \end{aligned}$$

Integrály obsahující tangens a kotangens:

$$55. \int \operatorname{tg}(cx) dx = -\frac{1}{c} \ln |\cos(cx)|.$$

$$56. \int \operatorname{tg}^n(cx) dx = \frac{1}{c(n-1)} \operatorname{tg}^{n-1}(cx) - \int \operatorname{tg}^{n-2}(cx) dx \quad (n > 1).$$

$$57. \int \frac{\operatorname{tg}^r(cx) dx}{\cos^2(cx)} = \frac{1}{c(r+1)} \operatorname{tg}^{r+1}(cx) \quad (r \neq -1).$$

$$58. \int \frac{dx}{\operatorname{tg}(cx) + 1} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2c} \ln |\sin(cx) + \cos(cx)|.$$

$$59. \int \frac{dx}{\operatorname{tg}(cx) - 1} = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2c} \ln |\sin(cx) - \cos(cx)|.$$

$$60. \int \frac{\operatorname{tg}(cx) dx}{\operatorname{tg}(cx) + 1} = \int \frac{dx}{1 + \operatorname{cotg}(cx)} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2c} \ln |\sin(cx) + \cos(cx)|.$$

$$61. \int \frac{\operatorname{tg}(cx) dx}{\operatorname{tg}(cx) - 1} = \int \frac{dx}{1 - \operatorname{cotg}(cx)} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2c} \ln |\sin(cx) - \cos(cx)|.$$

$$62. \int \operatorname{cotg}(cx) dx = \frac{1}{c} \ln |\sin(cx)|.$$

$$63. \int \operatorname{cotg}^n(cx) dx = -\frac{1}{c(n-1)} \operatorname{cotg}^{n-1}(cx) - \int \operatorname{cotg}^{n-2}(cx) dx \quad (n > 1).$$

$$64. \int \frac{\operatorname{cotg}^r(cx) dx}{\sin^2(cx)} = -\frac{1}{c(r+1)} \operatorname{cotg}^{r+1}(cx) \quad (r \neq -1).$$

$$65. \int \frac{dx}{1 + \operatorname{cotg}(cx)} = \int \frac{\operatorname{tg}(cx) dx}{\operatorname{tg}(cx) + 1}.$$

$$66. \int \frac{dx}{1 - \operatorname{cotg}(cx)} = \int \frac{\operatorname{tg}(cx) dx}{\operatorname{tg}(cx) - 1}.$$

7.4.4. Integrály hyperbolických funkcí

$$1. \int \operatorname{sinh}(cx) dx = \frac{1}{c} \operatorname{cosh}(cx).$$

2. $\int \cosh(cx) dx = \frac{1}{c} \sinh(cx).$
3. $\int \sinh^2(cx) dx = \frac{1}{4c} \sinh(2cx) - \frac{x}{2}.$
4. $\int \cosh^2(cx) dx = \frac{1}{4c} \sinh(2cx) + \frac{x}{2}.$
5. $\int \sinh^n(cx) dx =$
 $= \frac{1}{cn} \sinh^{n-1}(cx) \cosh(cx) - \frac{n-1}{n} \int \sinh^{n-2}(cx) dx \quad (n > 1).$
6. $\int \cosh^n(cx) dx =$
 $= \frac{1}{cn} \sinh(cx) \cosh^{n-1}(cx) + \frac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2}(cx) dx \quad (n > 1).$
7. $\int \frac{dx}{\sinh(cx)} = \frac{1}{c} \ln \left| \tgh \frac{cx}{2} \right| = \frac{1}{c} \ln \left| \frac{\cosh(cx) - 1}{\sinh(cx)} \right| =$
 $= \frac{1}{c} \ln \left| \frac{\sinh(cx)}{\cosh(cx) + 1} \right| = \frac{1}{2c} \ln \left| \frac{\cosh(cx) - 1}{\cosh(cx) + 1} \right|.$
8. $\int \frac{dx}{\cosh(cx)} = \frac{2}{c} \operatorname{arctg} e^{cx}.$
9. $\int \frac{dx}{\sinh^n(cx)} =$
 $= -\frac{1}{c(n-1)} \frac{\cosh(cx)}{\sinh^{n-1}(cx)} - \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sinh^{n-2}(cx)} \quad (n > 1).$
10. $\int \frac{dx}{\cosh^n(cx)} =$
 $= \frac{1}{c(n-1)} \frac{\sinh(cx)}{\cosh^{n-1}(cx)} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cosh^{n-2}(cx)} \quad (n > 1).$
11. $\int \frac{\cosh^n(cx)}{\sinh^m(cx)} dx =$

$$= \frac{1}{c(n-m)} \frac{\cosh^{n-1}(cx)}{\sinh^{m-1}(cx)} + \frac{n-1}{n-m} \int \frac{\cosh^{n-2}(cx)}{\sinh^m(cx)} dx \quad (m \neq n, n > 1),$$

$$= -\frac{1}{c(m-1)} \frac{\cosh^{n+1}(cx)}{\sinh^{m-1}(cx)} + \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\cosh^n(cx)}{\sinh^{m-2}(cx)} dx \quad (m > 1),$$

$$= -\frac{1}{c(m-1)} \frac{\cosh^{n-1}(cx)}{\sinh^{m-1}(cx)} + \frac{n-1}{m-1} \int \frac{\cosh^{n-2}(cx)}{\sinh^{m-2}(cx)} dx \quad (m > 1, n > 1).$$

12. $\int \frac{\sinh^m(cx)}{\cosh^n(cx)} dx =$

$$= \frac{1}{c(m-n)} \frac{\sinh^{m-1}(cx)}{\cosh^{n-1}(cx)} - \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\sinh^{m-2}(cx)}{\cosh^n(cx)} dx \quad (m \neq n, m > 1),$$

$$= \frac{1}{c(n-1)} \frac{\sinh^{m+1}(cx)}{\cosh^{n-1}(cx)} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\sinh^m(cx)}{\cosh^{n-2}(cx)} dx \quad (n > 1),$$

$$= -\frac{1}{c(n-1)} \frac{\sinh^{m-1}(cx)}{\cosh^{n-1}(cx)} + \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\sinh^{m-2}(cx)}{\cosh^{n-2}(cx)} dx \quad (n > 1, m > 1).$$

13. $\int x \sinh(cx) dx = \frac{1}{c} x \cosh(cx) - \frac{1}{c^2} \sinh(cx).$

14. $\int x \cosh(cx) dx = \frac{1}{c} x \sinh(cx) - \frac{1}{c^2} \cosh(cx).$

15. $\int \operatorname{tgh}(cx) dx = \frac{1}{c} \ln |\cos(cx)|.$

16. $\int \operatorname{cotgh}(cx) dx = \frac{1}{c} \ln |\sinh(cx)|.$

17. $\int \operatorname{tgh}^n(cx) dx = -\frac{1}{c(n-1)} \operatorname{tgh}^{n-1}(cx) + \int \operatorname{tgh}^{n-2}(cx) dx \quad (n > 1).$

18. $\int \operatorname{cotgh}^n(cx) dx =$

$$= -\frac{1}{c(n-1)} \operatorname{cotgh}^{n-1}(cx) + \int \operatorname{cotgh}^{n-2}(cx) dx \quad (n > 1).$$

19. $\int \sinh(bx) \sinh(cx) dx =$

$$= \frac{1}{b^2 - c^2} [b \sinh(cx) \cos(bx) - c \cosh(cx) \sinh(bx)] \quad (b^2 \neq c^2).$$

20. $\int \cosh(bx) \cosh(cx) dx =$
 $= \frac{1}{b^2 - c^2} [b \sinh(bx) \cosh(cx) - c \sinh(cx) \cosh(bx)] \quad (b^2 \neq c^2).$
21. $\int \cosh(bx) \sinh(cx) dx =$
 $= \frac{1}{b^2 - c^2} [b \sinh(bx) \sinh(cx) - c \cosh(bx) \cosh(cx)] \quad (b^2 \neq c^2).$
22. $\int \sinh(ax + b) \sin(cx + d) dx =$
 $= \frac{a}{a^2 + c^2} \cosh(ax + b) \sin(cx + d) - \frac{c}{a^2 + c^2} \sinh(ax + b) \cos(cx + d).$
23. $\int \sinh(ax + b) \cos(cx + d) dx =$
 $= \frac{a}{a^2 + c^2} \cosh(ax + b) \cos(cx + d) + \frac{c}{a^2 + c^2} \sinh(ax + b) \sin(cx + d).$
24. $\int \cosh(ax + b) \sin(cx + d) dx =$
 $= \frac{a}{a^2 + c^2} \sinh(ax + b) \sin(cx + d) - \frac{c}{a^2 + c^2} \cosh(ax + b) \cos(cx + d).$
25. $\int \cosh(ax + b) \cos(cx + d) dx =$
 $= \frac{a}{a^2 + c^2} \sinh(ax + b) \cos(cx + d) + \frac{c}{a^2 + c^2} \cosh(ax + b) \sin(cx + d).$

7.4.5. Integrály exponenciálních funkcí ($c \neq 0; n \in \mathbb{N}$)

- $\int e^{cx} dx = \frac{1}{c} e^{cx}.$
- $\int x e^{cx} dx = \frac{e^{cx}}{c^2} (cx - 1).$
- $\int x^2 e^{cx} dx = e^{cx} \left(\frac{x^2}{c} - \frac{2x}{c^2} + \frac{2}{c^3} \right).$

4. $\int x^n e^{cx} dx = \frac{1}{c} x^n e^{cx} - \frac{n}{c} \int x^{n-1} e^{cx} dx.$
5. $\int \frac{e^{cx} dx}{x} = \ln|x| + \frac{cx}{1 \cdot 1!} + \frac{(cx)^2}{2 \cdot 2!} + \dots$
6. $\int \frac{e^{cx} dx}{x^n} = \frac{1}{n-1} \left(-\frac{e^{cx}}{x^{n-1}} + c \int e^{cx} dx \right) \quad (n > 1).$
7. $\int e^{cx} \ln x dx = \frac{1}{c} \left(e^{cx} \ln x - \int \frac{e^{cx} dx}{x} \right) \quad (x > 0).$
8. $\int e^{cx} \sin(bx) dx = \frac{e^{cx}}{c^2 + b^2} [c \sin(bx) - b \cos(bx)].$
9. $\int e^{cx} \cos(bx) dx = \frac{e^{cx}}{c^2 + b^2} [c \cos(bx) + b \sin(bx)].$
10. $\int e^{cx} \sin^n x dx =$
 $= \frac{e^{cx} \sin^{n-1} x}{c^2 + n^2} (c \sin x - n \cos x) + \frac{n(n-1)}{c^2 + n^2} \int e^{cx} \sin^{n-2} x dx.$
11. $\int e^{cx} \cos^n x dx =$
 $= \frac{e^{cx} \cos^{n-1} x}{c^2 + n^2} (c \cos x + n \sin x) + \frac{n(n-1)}{c^2 + n^2} \int e^{cx} \cos^{n-2} x dx.$

7.4.6. Integrály logaritmických funkcí ($x > 0$; $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}$)

1. $\int \ln x dx = x \ln x - x.$
2. $\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x.$
3. $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx.$
4. $\int \frac{dx}{\ln x} = \ln|\ln x| + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$

$$5. \int \frac{dx}{(\ln x)^r} = -\frac{x}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{(\ln x)^{n-1}} \quad (n > 1).$$

$$6. \int x^r \ln x \, dx = x^{r+1} \left(\frac{\ln x}{r+1} - \frac{1}{(r+1)^2} \right) \quad (r \neq -1).$$

$$7. \int x^r (\ln x)^n \, dx = \frac{x^{r+1} (\ln x)^n}{r+1} - \frac{n}{r+1} \int x^r (\ln x)^{n-1} \, dx \quad (r \neq -1).$$

$$8. \int \frac{(\ln x)^r \, dx}{x} = \frac{(\ln x)^{r+1}}{r+1} \quad (r \neq -1).$$

$$9. \int \frac{x^r \, dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x^{r+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{r+1}{n-1} \int \frac{x^r \, dx}{(\ln x)^{n-1}} \quad (n > 1).$$

$$10. \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x|.$$

$$11. \int \frac{x^r \, dx}{\ln x} = \int \frac{e^{-y}}{y} dy, \text{ kde } y = -(r+1) \ln x \quad (r \neq -1).$$

$$12. \int \sin(\ln x) \, dx = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)].$$

$$13. \int \cos(\ln x) \, dx = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)].$$

$$14. \int e^{cx} \ln x \, dx = \frac{1}{c} \left(e^{cx} \ln x - \int \frac{e^{cx} \, dx}{x} \right).$$

7.4.7. Integrály cyklometrických funkcí ($c \neq 0; n \in \mathbb{N}$)

$$1. \int \arcsin \frac{x}{c} \, dx = x \arcsin \frac{x}{c} + \sqrt{c^2 - x^2}.$$

$$2. \int x \arcsin \frac{x}{c} \, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{c^2}{4} \right) \arcsin \frac{x}{c} + \frac{x}{4} \sqrt{c^2 - x^2}.$$

$$3. \int x^2 \arcsin \frac{x}{c} \, dx = \frac{x^3}{3} \arcsin \frac{x}{c} + \frac{x^2 + 2c^2}{9} \sqrt{c^2 - x^2}.$$

$$4. \int \arccos \frac{x}{c} \, dx = x \arccos \frac{x}{c} - \sqrt{c^2 - x^2}.$$

5. $\int x \arccos \frac{x}{c} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{c^2}{4} \right) \arccos \frac{x}{c} - \frac{x}{4} \sqrt{(c^2 - x^2)}.$
6. $\int x^2 \arccos \frac{x}{c} dx = \frac{x^2}{3} \arccos \frac{x}{c} - \frac{x^2 + 2c^2}{9} \sqrt{(c^2 - x^2)}.$
7. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{c} dx = x \operatorname{arctg} \frac{x}{c} - \frac{c}{2} \ln(c^2 + x^2).$
8. $\int x \operatorname{arctg} \frac{x}{c} dx = \frac{c^2 + x^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{c} - \frac{cx}{2}.$
9. $\int x^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{c} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{c} - \frac{cx^2}{6} + \frac{c^3}{6} \ln(c^2 + x^2).$
10. $\int x^n \operatorname{arctg} \frac{x}{c} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{x}{c} - \frac{c}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{c^2 + x^2}.$
11. $\int \operatorname{arccotg} \frac{x}{c} dx = x \operatorname{arccotg} \frac{x}{c} + \frac{c}{2} \ln(c^2 + x^2).$
12. $\int x \operatorname{arccotg} \frac{x}{c} dx = \frac{c^2 + x^2}{2} \operatorname{arccotg} \frac{x}{c} + \frac{cx}{2}.$
13. $\int x^2 \operatorname{arccotg} \frac{x}{c} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arccotg} \frac{x}{c} + \frac{cx^2}{6} - \frac{c^3}{6} \ln(c^2 + x^2).$
14. $\int x^n \operatorname{arccotg} \frac{x}{c} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arccotg} \frac{x}{c} + \frac{c}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{c^2 + x^2}.$

7.4.8. Integrály hyperbolometrických funkcí ($c \neq 0$)

1. $\int \operatorname{argsinh} \frac{x}{c} dx = x \operatorname{argsinh} \frac{x}{c} - \sqrt{(x^2 + c^2)}.$
2. $\int \operatorname{argcosh} \frac{x}{c} dx = x \operatorname{argcosh} \frac{x}{c} - \sqrt{(x^2 - c^2)}.$
3. $\int \operatorname{argtgh} \frac{x}{c} dx = x \operatorname{argtgh} \frac{x}{c} + \frac{c}{2} \ln |c^2 - x^2|.$
4. $\int \operatorname{argcotgh} \frac{x}{c} dx = x \operatorname{argcotgh} \frac{x}{c} + \frac{c}{2} \ln |x^2 - c^2|.$

7.5. URČITÝ INTEGRÁL

7.5.1. Základní pojmy

Newtonova definice určitého integrálu

K danému integrandu přísluší nekonečně mnoho primitivních funkcí. Jsou-li F a G libovolné dvě primitivní funkce příslušné integrandu f , platí

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

pro libovolná čísla a a b z definičního oboru integrandu.

Newtonovým určitým integrálem spojité funkce f proměnné x v mezech od a do b nazýváme přírůstek

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

který také zapisujeme ve tvaru

$$\left[F(x) \right]_a^b \text{ nebo } F(x) \Big|_a^b,$$

kde F je primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b) , přičemž $F'(a+) = f(a)$, $F'(b-) = f(b)$; interval $\langle a, b \rangle$ nazýváme *integračním oborem* a číslo a , resp. b *dolní*, resp. *horní* *(integrační)* *mezí*.

Výpočet určitého integrálu se takto převádí na určení primitivní funkce, do níž se za proměnnou dosadí postupně horní a dolní mez integrálu a výsledné hodnoty (v uvedeném pořadí) se odečtou.

Riemannova součtová definice určitého integrálu

Je-li dáno $n + 1$ čísel x_0, x_1, \dots, x_n tak, že

$$-\infty < a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b < +\infty,$$

říkáme, že je dáno *dělení* D_n intervalu $\langle a, b \rangle$. Jestliže $\{D_n\}$ je taková posloupnost dělení, že

$$\gamma(D_n) = \max_i \{x_i - x_{i-1}\} \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty$$

a existuje limita integrálních součtů:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$(x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$ nezávisle na volbě posloupnosti $\{D_n\}$ a bodů ξ_i , pak se tato

limita nazývá *Riemannův* nebo *Cauchyův–Riemannův určitý integrál* [stručně *určitý integrál* nebo jen *integrál*] funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ a značí se stejně jako Newtonův integrál symbolem $\int_a^b f(x) dx$.

Dále definujeme

$$\int_a^a f(x) dx = 0,$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (a > b).$$

Existuje-li Newtonův určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$, resp. Riemannův určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$, říkáme, že funkce f je *integrovatelná* v Newtonově, resp. v Riemannově smyslu. Je-li funkce integrovatelná v Newtonově nebo Riemannově smyslu, říkáme stručně, že je *integrovatelná*.

Každá po částech spojitá funkce (a tedy také každá spojitá funkce) na intervalu $\langle a, b \rangle$ je na tomto intervalu integrovatelná v Newtonově i Riemannově smyslu a platí, že určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$ v Newtonově smyslu se rovná určitému integrálu $\int_a^b f(x) dx$ v Riemannově smyslu.

Základní vlastnosti určitého integrálu

Pro integrovatelné funkce f a g platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (c \in \langle a, b \rangle),$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

Příklad:

$$\int_1^3 (2x + 3x^2) dx = [x^2 + x^3]_1^3 = (9 + 27) - (1 + 1) = 34.$$

7.5.2. Věty o střední hodnotě integrálního počtu

První věta o střední hodnotě integrálního počtu

Jestliže funkce f a g proměnné x jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$, funkce g je nezáporná, popř. nekladná na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak existuje takové číslo

$\xi \in \langle a, b \rangle$, že platí

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

neboli

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(a + \vartheta(b - a)) \int_a^b g(x) dx \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Speciálně pro $g(x) = 1$ je

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi)$$

neboli

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(a + \vartheta(b - a)) \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Střední hodnotou funkce $y = f(x)$ v mezích od a do b nazýváme číslo

$$f(\xi) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx.$$

Kvadratickou střední hodnotou funkce $y = f(x)$ v mezích od a do b nazýváme číslo

$$k = \sqrt{\left\{ \frac{1}{b - a} \int_a^b [f(x)]^2 dx \right\}}.$$

Druhá věta o střední hodnotě integrálního počtu

Jestliže funkce f a g proměnné x jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$, funkce g je na tomto intervalu nezáporná a nerostoucí, pak existuje takové číslo $\xi \in \langle a, b \rangle$, že platí

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx.$$

Je-li funkce g na intervalu $\langle a, b \rangle$ nezáporná a neklesající, platí

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(b) \int_\xi^b f(x) dx.$$

Určitý integrál jako funkce integrační meze

Určitý integrál spojité funkce f s proměnnou horní, resp. dolní integrační mezi je spojitá funkce této integrační meze:

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a),$$

resp.

$$\int_x^b f(x) dx = F(b) - F(x).$$

Derivace určitého integrálu podle proměnné meze

Jestliže funkce f proměnné x je spojitá, platí

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x),$$

$$\frac{d}{dx} \left[\int_x^b f(t) dt \right] = -\frac{d}{dx} \left[\int_b^x f(t) dt \right] = -f(x).$$

7.5.3. Přibližné metody pro výpočet určitých integrálů

Obdélníková metoda (obr. 358)

- $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}), \quad y_0 = f(a),$
- $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n), \quad y_n = f(b),$

kde n je počet stejně dlouhých částečných intervalů, na které je rozdělen interval $\langle a, b \rangle$.

Při pevném čísle n a ryze monotónní funkci $y = f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ je při použití obdélníkové metody absolutní hodnota chyby

$$A_1 = \frac{b-a}{n} |y_n - y_0|.$$

Lichoběžníková metoda (obr. 359)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n),$$
$$y_0 = f(a), \quad y_n = f(b),$$

kde n je počet stejně dlouhých částečných intervalů.

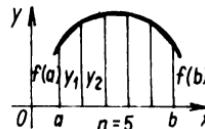
Při použití lichoběžníkové metody je absolutní hodnota chyby

$$\Delta_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2,$$

jestliže pro $x \in \langle a, b \rangle$ platí $|f''(x)| \leq M_2$.



Obr. 358. Obdélníková metoda



Obr. 359. Lichoběžníková metoda

Tečnová metoda (obr. 360)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{2(b-a)}{n} (y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1})$$

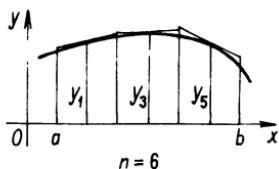
(n je kladné sudé číslo).

Při použití tečnové metody je absolutní hodnota chyby

$$\Delta_3 = \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2,$$

jestliže pro $x \in \langle a, b \rangle$ platí

$$|f''(x)| \leq M_2.$$



Obr. 360. Tečnová metoda

Simpsonova metoda [parabolická metoda]

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n),$$

kde $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) je počet stejně dlouhých částečných intervalů.

Při použití Simpsonovy metody je absolutní hodnota chyby

$$\Delta_4 = \frac{(b-a)^5}{2880} \frac{M_4}{k^4},$$

jestliže pro $x \in \langle a, b \rangle$ platí $|f^{(4)}(x)| \leq M_4$.

Příklad:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = [\sin x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2.$$

Pomocí Simpsonovy metody při $n = 2$ dostaneme

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx \approx \frac{\pi}{6} (0 + 4 \cdot 1 + 0) = \frac{2\pi}{3} \doteq 2,094.$$

Newtonová–Cotesova metoda

Jestliže funkce $y = f(x)$ je spojitá reálná funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$, platí

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{b-a}{n} (C_{0n}y_0 + C_{1n}y_1 + C_{2n}y_2 + \dots + C_{nn}y_n),$$

kde

$$C_{kn} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \int_0^n \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-n)}{t-k} dt$$
$$(n \in \mathbb{N}_0; k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Odhady zbytků viz např. v [199].

Integrace pomocí rozvoje v řadu

Je-li možno funkci, jejíž integrál máme najít, rozvinout v stejnoměrně konvergentní mocninnou řadu $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ s poloměrem konvergence r , platí

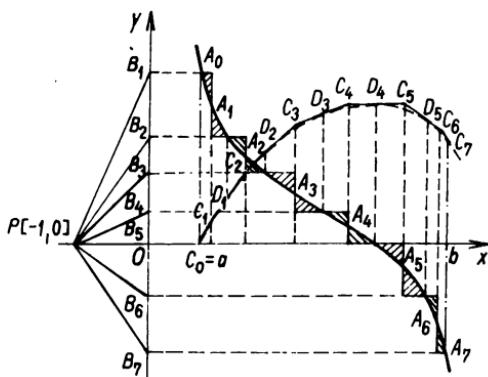
$$\int_a^b f(x) \, dx = a_0 \int_a^b dx + a_1 \int_a^b x \, dx + a_2 \int_a^b x^2 \, dx + \dots,$$

pokud

$$|a| < r, \quad |b| < r \quad (r \text{ je poloměr konvergence}).$$

7.5.4. Grafická integrace

Při konstrukci grafu primitivní funkce $F(t) = \int_a^t f(x) dx$, příslušné dané křivce $y = f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$, nahradíme křivku $y = f(x)$ stupňovou funkcí se „stupni“ rovnoběžnými s osou x (obr. 361). Body A_i zvolíme tak, aby vždy oba šrafované křivkové trojúhelníčky nad křivkou a pod ní, umístěné mezi dvěma sousedními „stupni“, měly přibližně stejný obsah. Konečně na osu y naneseme pořadnice „stupňů“ a body B_1, B_2, \dots , které takto dostaneme, spojíme s pólem $P = [-1, 0]$. K těmto spojnicím vedeme rovnoběžky, počínajíc v bodě C_0 , který je pravoúhlým průmětem bodu A_0 do osy x , tak, aby $\overline{C_0 C_1} \parallel \overline{PB_1}$, $\overline{C_1 C_2} \parallel \overline{PB_2}$, $\overline{C_2 C_3} \parallel \overline{PB_3}$, ... Lomená čára, kterou takto dostaneme, je tečnovou lomenou čarou k hledané integrální křivce, která se integrální křivky dotýká v bodech $C_0, D_1, D_2, D_3, \dots$. Integrální křivku samu nakreslíme podle křivítka.



Obr. 361. Grafická integrace

7.5.5. Nevlastní integrály

Definice

Jestliže funkce f je integrovatelná na každém konečném intervalu $\langle a, b \rangle$ a existuje vlastní limita

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx,$$

resp.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx,$$

pak tuto limitu nazýváme *konvergentním nevlastním integrálem s nekonečnými mezemí* [nevlastním integrálem vlivem intervalu] a píšeme

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx,$$

resp.

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx.$$

Jestliže uvedené limity neexistují, říkáme, že *nevlastní integrál diverguje* [*je divergentní*].

Konvergují-li integrály

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx, \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx,$$

říkáme, že *integrál*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

konverguje [*je konvergentní*], a píšeme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Neexistuje-li aspoň jeden z integrálů $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ a $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, říkáme, že *integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ diverguje* [*je divergentní*].

Jestliže funkce f je integrovatelná na každém konečném intervalu $\langle a, b \rangle$ a neohraničená na okolí bodu b , resp. na každém konečném intervalu $\langle c, b \rangle$ a neohraničená na okolí bodu a (přičemž v obou případech je $a < c < b$) a existuje vlastní limita

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx,$$

resp.

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx,$$

pak tuto limitu nazýváme *konvergentním nevlastním integrálem vlivem funkce*. Jestliže uvedené limity neexistují, říkáme, že *nevlastní integrály divergují* [*jsou divergentní*].

Příklad 1:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^n} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 \frac{dx}{x^n} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{x^{1-n}}{1-n} \right]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1-n} - \frac{t^{1-n}}{1-n} \right].$$

Protože

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{1-n}}{1-n}$$

existuje pro $1-n > 0$ neboli $n < 1$ a má hodnotu 0, je

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{1-n} \quad (n < 1).$$

Příklad 2:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^n} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1-n}}{1-n} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{b^{n-1}} - 1}{1-n}.$$

Tato limita existuje pro $n-1 > 0 \Rightarrow n > 1$. Je tedy

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1} \quad (n > 1).$$

Příklad 3:

Nevlastní integrál

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

diverguje, neboť

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} [\ln x]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0} (-\ln t) = +\infty.$$

7.5.6. Přehled některých určitých integrálů

V tomto článku všude $m, n \in \mathbb{N}$, $a, b, c, p, r \in \mathbb{R}$, $\gamma = 0,57721566490\dots$ (Eulerova konstanta),

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0),$$

příčemž

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad (x > 0),$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(n+1) = n!,$$

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad (0 < x < 1),$$

je funkce gama,

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (p > 0, q > 0)$$

je funkce beta,

$$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}},$$

resp.

$$E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi$$

je úplný eliptický integrál prvního, resp. druhého druhu ($0 < k < 1$).

Přehled některých určitých [vlastních] integrálů

$$1. \int_0^\pi \sin(px) dx = \frac{1 - \cos(p\pi)}{p} \quad (p \neq 0);$$

speciálně

$$\int_0^\pi \sin(nx) dx = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n}.$$

$$2. \int_0^\pi \cos(px) dx = \frac{\sin(p\pi)}{p} \quad (p \neq 0);$$

speciálně

$$\int_0^\pi \cos(nx) dx = 0.$$

$$3. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$4. \int_c^{c+2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi & (m = n). \end{cases}$$

5. $\int_c^{c+2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi & (m = n). \end{cases}$
6. $\int_c^{c+2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0.$
7. $\int_0^\pi \sin(mx) \sin(nx) dx = \int_0^\pi \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \frac{1}{2}\pi & (m = n). \end{cases}$
8. $\int_0^\pi \sin(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & (m - n \text{ je sudé číslo}), \\ \frac{2m}{m^2 - n^2} & (m - n \text{ je liché číslo}). \end{cases}$
9. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \frac{\pi}{2};$
speciálně
10. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}.$
11. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2m+2n)} \frac{\pi}{2}.$
12. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x \cos^{2n+1} x dx = \frac{1}{2} \frac{m! n!}{(m+n+1)!}$
13. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx = \frac{1}{2} \ln 2.$
14. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x} = 1.$
15. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2+1} dx = \frac{1}{8}\pi \ln 2.$
16. $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx = \frac{1}{8}\pi \ln 2.$
17. $\int_0^1 \frac{dx}{1 + 2x \cos a + x^2} = \frac{a}{2 \sin a} \quad (0 < a < \frac{1}{2}\pi).$

18. $\int_0^{2b} \sqrt{(2bx - x^2)} dx = \frac{\pi b^2}{2}.$
19. $\int_{-1}^1 a^x dx = \frac{a^2 - 1}{a \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1).$
20. $\int_0^\pi \frac{\cos(sx)}{1 - 2b \cos x + b^2} dx = \frac{\pi b^s}{1 - b^2} \quad (s \in \mathbb{N}_0, |b| < 1).$
21. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 x)}} dx = \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} \quad (|k| < 1).$
22. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 x)}} dx = \frac{1}{k} \arcsin k \quad (|k| < 1).$
23. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 x)}} dx = \frac{1}{k^2} (K - E) \quad (0 < k < 1)$
24. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 x)}} dx = \frac{1}{k^2} [E - (1 - k^2) K] \quad (0 < k < 1).$

Přehled některých nevlastních integrálů

25. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^a)}} = \frac{(\sqrt{\pi}) \Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}{a \Gamma\left(\frac{2+a}{2a}\right)} \quad (a \neq 0);$

speciálně

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}} = \frac{\pi}{2}.$$

26. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^a} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)} \quad (0 < a < 1);$

speciálně

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi.$$

27. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{[(x-a)(b-x)]}} = \pi.$

$$28. \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{\pi}{2} \quad (a > 0).$$

$$29. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a} \quad (a > 0).$$

$$30. \int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{(ax - x^2)}} dx = \frac{3\pi a^2}{8} \quad (a > 0).$$

$$31. \int_0^{+\infty} x^r e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(r+1)}{a^{r+1}} \quad (a > 0, r > -1);$$

speciálně

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0),$$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!.$$

$$32. \int_0^{+\infty} x^r e^{-ax^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{2a^{(r+1)/2}} \quad (a > 0, r > -1);$$

speciálně

$$\int_0^{+\infty} x^{2k} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1) \sqrt{\pi}}{2^{k+1} a^{(2k+1)/2}} \quad (a > 0, k \in \mathbb{N}_0),$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2k+1} e^{-ax^2} dx = \frac{k!}{2a^{k+1}} \quad (a > 0, k \in \mathbb{N}_0),$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \quad (a > 0) \quad (\text{Laplaceův-Gaussův integrál}).$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3} \quad (a > 0).$$

$$33. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2 + bx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{b^2/(4a^2)} \quad (a > 0).$$

$$34. \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$35. \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$36. \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x dx = \int_0^1 \ln |\ln x| dx = -\gamma.$$

$$37. \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$38. \int_0^1 \frac{\ln x}{x+1} dx = -\frac{\pi^2}{12}.$$

$$39. \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$40. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

$$41. \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^a dx = \Gamma(a+1) \quad (-1 < a < +\infty).$$

$$42. \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \begin{cases} \pi/2 & (a > 0), \\ -\pi/2 & (a < 0); \end{cases}$$

$$43. \int_0^b \frac{\cos(ax)}{x} dx = +\infty \quad (b > 0; \text{ integrál je divergentní});$$

$$44. \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx = \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$45. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos(ax)}{x} dx = \begin{cases} \pi/2 & (|a| < 1), \\ \pi/4 & (|a| = 1), \\ 0 & (|a| > 1). \end{cases}$$

$$46. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (\text{Fresnelovy integrály}).$$

$$47. \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (\text{Fresnelovy integrály}).$$

$$48. \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(bx)}{a^2 + x^2} dx = (\operatorname{sgn} b) \frac{\pi}{2} e^{-|ab|}.$$

$$49. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(ax)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} |a|.$$

$$50. \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

$$51. \int_0^{\pi} x \ln(\sin x) dx = -\frac{\pi^2 \ln 2}{2}.$$

$$52. \int_0^{\pi/2} \sin x \ln(\sin x) dx = \ln 2 - 1.$$

$$53. \int_0^{\pi/2} \ln(\tan x) dx = 0.$$

$$54. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin(bx) dx = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (a > 0).$$

$$55. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad (a > 0).$$

$$56. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} \sin(bx)}{x} dx = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \quad (a > 0).$$

$$57. \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} x \cos^{2r-1} x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(p) \Gamma(r)}{\Gamma(p+r)} = \frac{1}{2} B(p, r) \quad (p > 0, r > 0);$$

speciálne

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(p) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)} \quad (p > 0)$$

(viz též 9 až 12).

$$58. \int_0^1 x^a (1-x)^b dx = 2 \int_0^1 x^{2a+1} (1-x^2)^b dx = \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} = B(a+1, b+1).$$

$$59. \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+bx} dx = \frac{\pi}{b \sin \frac{a\pi}{b}} \quad (0 < a < b).$$

$$60. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+2x \cos a + x^2} = \frac{a}{\sin a} \quad (0 < a < \frac{1}{2}\pi).$$

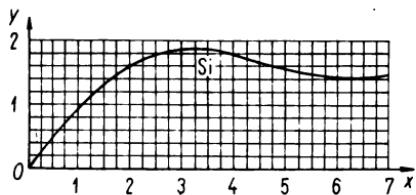
61. $\int_0^\pi \ln(a \pm b \cos x) dx = \pi \ln \frac{a + \sqrt{(a^2 - b^2)}}{2}, \quad (0 < b \leq a).$
62. $\int_0^\pi \ln(a^2 - 2ab \cos x + b^2) dx = \begin{cases} 2\pi \ln a & (0 < b \leq a), \\ 2\pi \ln b & (0 < a \leq b). \end{cases}$

7.5.7. Vyjádření některých integrálů řadami

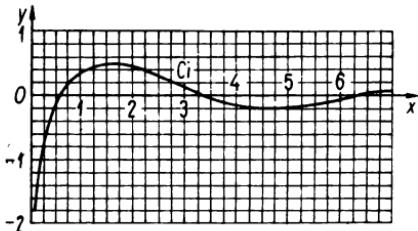
Integrální sinus [integrálsinus, sinusintegrál] (obr. 362)

$$\text{Si } x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$



Obr. 362. Integrální sinus



Obr. 363. Integrální kosinus

Integrální kosinus [integrálkosinus, kosinusintegrál] (obr. 363)

$$\text{Ci } x = - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \gamma + \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2!} +$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} - \frac{1}{6} \frac{x^6}{6!} + \dots =$$

$$= \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x > 0),$$

kde

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0,577\,215\,664\,90\dots$$

je tzv. Eulerova konstanta.

Poznámka:

Výpočet integrálů typu

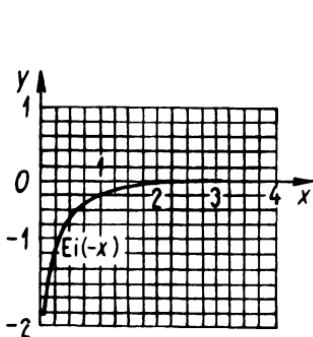
$$\int x^{-n} \cos x \, dx, \quad \int x^{-n} \sin x \, dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

lze integrací per partes převést na výpočet integrálů Si x a Ci x.

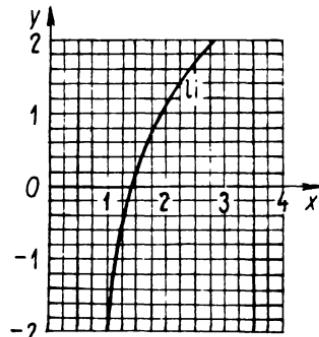
Modifikovaná integrální exponenciální funkce (obr. 364)

$$\begin{aligned} \text{Ei } x &= \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt = \gamma + \ln|x| + x + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{3!} + \dots = \\ &= \gamma + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{x^n}{n!} \quad (x < 0), \end{aligned}$$

kde γ je Eulerova konstanta.



Obr. 364. Modifikovaná integrální exponenciální funkce



Obr. 365. Integrální logaritmus

Integrální logaritmus [integrállogaritmus, logaritmusintegrál] (obr. 365)

$$\begin{aligned} \text{li } x &= \int_0^x \frac{dt}{\ln t} = \gamma + \ln|\ln x| + \ln x + \frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{2!} + \frac{1}{3} \frac{(\ln x)^3}{3!} + \dots = \\ &= \gamma + \ln|\ln x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(\ln x)^n}{n!} \quad (0 < x < 1), \end{aligned}$$

kde γ je Eulerova konstanta.

Opakovánou integrací lze integrály typu $\int e^u u^{-n} du$ ($n \in \mathbb{N}$) převést na integrály typu $\int e^u u^{-1} du$ a substitucí $u = \ln t$ na li x.

Funkce chyb [chybová funkce, error function, pravděpodobnostní integrál, integrál chyb] (obr. 366)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

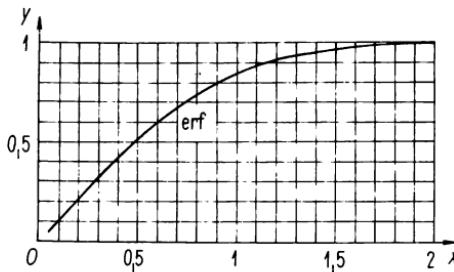
kde

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

je tzv. *Laplaceův–Gaussův integrál*. Pro velká čísla x platí asymptotický rozvoj

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2x} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \dots \right),$$

který je semidivergentní řadou (viz [201]).



Obr. 366. Funkce chyb

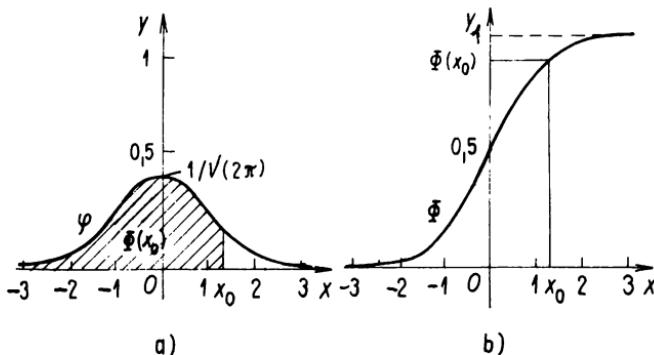
Funkce chyb erf se vyskytuje při výpočtu poruch šířících se podél linek přenosu elektrické energie.

Doplňková funkce chyb [doplňková chybová funkce, complementary error function, doplňkový pravděpodobnostní integrál, doplňkový integrál chyb]

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc} x &= 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \approx \\ &\approx \frac{e^{-x^2}}{2x} \left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2x^2)^{n-1}} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Gaussova funkce chyb [Gaussův pravděpodobnostní integrál]

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt = \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \left(x - \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{x^3}{1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 5} \frac{x^5}{2!} - \frac{1}{2^3 \cdot 7} \frac{x^7}{3!} + \dots \right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$



Obr. 367. Gaussova funkce chyb

Protože funkce Φ je podrobně tabelována, používá se při výpočtech vztahu

$$\operatorname{erf} \frac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 2 \Phi(x).$$

V obrázku 367a je graf funkce

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-x^2/2}$$

a obsah šrafováné plochy se rovná $\Phi(x_0)$. Graf funkce Φ je v obr. 367b.

7.5.8. Použití určitých integrálů

Úmluva:

Pro jednotnost značení a terminologie zavedeme v tomto článku pro uvažované veličiny tyto symboly a názvy:

$m_l = m/l$ je délková hmotnost (kg m^{-1}),

$m_s = m/S$ – obsahová hmotnost (kg m^{-2}),

$m_v = m/V$ – objemová hmotnost (kg m^{-3}),

kde m je hmotnost (kg),

l – délka (m),

S – (plošný) obsah (m^2),

V – objem (m^3).

Poznamenejme, že veličina m_l se také někdy nazývá *lineární hmotnost* a veličina m_S má v technické praxi zpravidla název *plošná hmotnost*. Poměr hmotnosti m a objemu V se ve fyzice a v technické praxi nazývá *měrná hmotnost* nebo *hustota* a označuje se ϱ . Název *objemová hmotnost* a symbol ϱ_V se v technické praxi používají pro střední hustotu nespojitě rozložené látky.

Použití určitých integrálů v geometrii

Výpočet obsahu části roviny

1. Obsah S části roviny ohraničené grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = g(x)$, spojitých na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$, přičemž v každém bodě $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ platí $0 \leq g(x) \leq f(x)$, resp. $f(x) \leq g(x) \leq 0$, a příslušnými úsečkami na přímkách $x = x_1$ a $x = x_2$ (obr. 368):

$$S = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx,$$

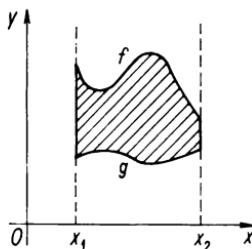
resp.

$$S = - \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx.$$

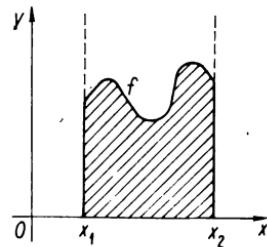
Speciálně pro $g(x) = 0$ platí:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx, \quad \text{resp.} \quad S = - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

(obr. 369).



Obr. 368. Obsah části roviny



Obr. 369. Obsah části roviny

Obsah S plochy ohraničené křivkou $y = f(x)$ a příslušnými úsečkami na přímkách $x = x_1$, $x = x_2$ a na ose x tedy je

$$S = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx,$$

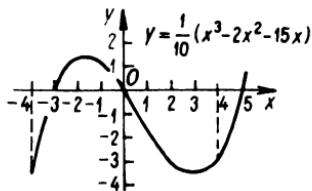
neboť v elementární geometrii se obsah plochy definuje jako kladné číslo.

Příklad:

Jaký obsah má část roviny ohraničená grafem funkce

$$y = \frac{1}{10}(x^3 - 2x^2 - 15x)$$

a příslušnými úsečkami na přímkách $x = -4$ a $x = 4$ a na ose x (obr. 370)?



Obr. 370. Graf funkce
 $y = \frac{1}{10}(x^3 - 2x^2 - 15x)$

Nulové body:

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 5,$$

přičemž pouze body x_1 , x_2 leží uvnitř integračního oboru $\langle -4, 4 \rangle$.

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^4 |f(x)| dx = \left| \int_{-4}^{-3} f(x) dx \right| + \int_{-3}^0 f(x) dx + \left| \int_0^4 f(x) dx \right| = \\ &= \left| \frac{1}{10} \int_{-4}^{-3} (x^3 - 2x^2 - 15x) dx \right| + \frac{1}{10} \int_{-3}^0 (x^3 - 2x^2 - 15x) dx + \\ &\quad + \left| \frac{1}{10} \int_0^4 (x^3 - 2x^2 - 15x) dx \right| = \\ &= \left| \frac{1}{10} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{15x^2}{2} \right]_{-4}^{-3} \right| + \frac{1}{10} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{15x^2}{2} \right]_{-3}^0 + \\ &\quad + \left| \frac{1}{10} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{15x^2}{2} \right]_0^4 \right| = \\ &= \left| \frac{1}{10} \left(-\frac{117}{4} + \frac{40}{3} \right) \right| + \frac{1}{10} \frac{117}{4} + \left| -\frac{1}{10} \frac{296}{3} \right| = \\ &= 14\frac{23}{60} \text{ plošných jednotek.} \end{aligned}$$

2. Obsah části roviny ohraničené grafem funkce dané parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ [funkce φ , ψ jsou spojité diferencovatelné, $\dot{\varphi}(t) \neq 0$, $\dot{\psi}(t) \neq 0$ ($t \in \langle t_1, t_2 \rangle$)] a příslušnými úsečkami na ose x a na přímkách $x = \varphi(t_1)$ a $x = \varphi(t_2)$:

$$S = \left| \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \dot{\varphi}(t) dt \right|.$$

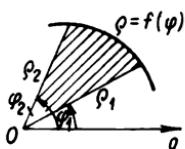
Obsah části roviny ohraničené grafem funkce dané parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ [funkce φ , ψ mají spojitou derivaci, $\varphi(t) \geq 0$, $\dot{\psi}(t) \neq 0$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$] a příslušnými úsečkami na ose y a na přímkách $y = \psi(t_1)$ a $y = \psi(t_2)$:

$$S = \left| \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \dot{\psi}(t) dt \right|.$$

3. Obsah části roviny ohraničené grafem spojité a nezáporné funkce, dané v polárních souřadnicích rovnicí $\varrho = f(\varphi)$ a průvodiči $\varrho_1 = f(\varphi_1)$ a $\varrho_2 = f(\varphi_2)$ bodů grafu dané funkce, přičemž $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \leq 2\pi$ (obr. 371):

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho^2 d\varphi$$

(Leibnizův vzorec pro rovinnou výseč).



Obr. 371. Obsah rovinné výseče

4. Obsah části roviny ohraničené grafem funkce dané parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ [funkce φ , ψ mají spojitou derivaci, $\dot{\varphi}(t) \neq 0$] a průvodiči OP_1 a OP_2 bodů P_1 , P_2 grafu:

$$S = \frac{1}{2} \left| \int_{t_1}^{t_2} (\varphi \dot{\psi} - \dot{\varphi} \psi) dt \right|$$

(Leibnizův vzorec pro rovinnou výseč).

Délka oblouku křivky [rektifikace křivky]

Jestliže množina M délek všech možných lomených čar vepsaných oblouku křivky c je ohraničená, pak délkou oblouku křivky nazýváme supremum množiny M a říkáme, že křivka c je schopná rektifikace [rektifikovatelná].

1. Délka s částí rovinné křivky, ohraničené body P_1 a P_2 (předpokládá se spojitost prvních derivací daných funkcí na integračním oboru):

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]} dx$$

pro křivku $y = f(x)$ a body $P_1[x_1, f(x_1)]$, $P_2[x_2, f(x_2)]$;

$$s = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right]} dy$$

pro křivku $x = g(y)$ a body $P_1[g(y_1), y_1]$, $P_2[g(y_2), y_2]$;

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2)} dt$$

pro křivku $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ a body $P_1[\varphi(t_1), \psi(t_1)]$, $P_2[\varphi(t_2), \psi(t_2)]$;

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \right)^2 \right]} d\varphi = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \sqrt{\left[1 + \varrho^2 \left(\frac{d\varphi}{d\varrho} \right)^2 \right]} d\varrho$$

pro křivku $\varrho = f(\varphi)$ a body $P_1[\varrho_1, \varphi_1]$, $P_2[\varrho_2, \varphi_2]$.

2. Délka s částí prostorové křivky, ohraničené body P_1 a P_2 (předpokládá se spojitost prvních derivací daných funkcí na integračním oboru):

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}^2)} dt$$

pro křivku $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ a body $P_1[\varphi(t_1), \psi(t_1), \chi(t_1)]$, $P_2[\varphi(t_2), \psi(t_2), \chi(t_2)]$.

Obsah pláště rotačního tělesa [komplanace]

Obsah Q pláště rotačního tělesa (předpokládá se spojitost prvních derivací daných funkcí na integračním oboru):

$$Q_x = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]} dx$$

při rotaci křivky $y = f(x)$ [$f(x) \geq 0$, $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$] kolem osy x ;

$$Q_y = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right]} dy$$

při rotaci křivky $x = g(y)$ [$g(y) \geq 0$, $y \in \langle y_1, y_2 \rangle$] kolem osy y ;

$$Q_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi \sqrt{(\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2)} dt$$

při rotaci křivky dané parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ [$\dot{\varphi}(t) \neq 0$, $\psi(t) \geq 0$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$] kolem osy x,

$$Q_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \varphi \sqrt{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2)} dt$$

při rotaci křivky dané parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ [$\varphi(t) \geq 0$, $\dot{\psi}(t) \neq 0$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$] kolem osy y;

$$Q_x = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho \sin \varphi \sqrt{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \right)^2 \right]} d\varphi,$$

resp.

$$Q_y = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho \cos \varphi \sqrt{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \right)^2 \right]} d\varphi$$

při rotaci křivky dané v polárních souřadnicích rovnicí $\varrho = f(\varphi)$ ($0 \leq \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \leq \pi$, resp. $-\pi/2 \leq \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \leq \pi/2$) kolem osy x, resp. y.

Objem rotačních těles [kubatura]

1. Objem V rotačního tělesa (předpokládá se spojitost prvních derivací daných funkcí na integračním oboru):

$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx$$

při rotaci křivky $y = f(x)$ [$f(x) \geq 0$, $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$] kolem osy x;

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} [g(y)]^2 dy$$

při rotaci křivky $x = g(y)$ [$g(y) \geq 0$, $y \in \langle y_1, y_2 \rangle$] kolem osy y;

$$V_x = \pi \left| \int_{t_1}^{t_2} \psi^2 \varphi dt \right|$$

při rotaci křivky dané parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ [$\psi(t) = 0$, $\dot{\varphi}(t) \neq 0$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$] kolem osy x;

$$V_y = \pi \left| \int_{t_1}^{t_2} \varphi^2 \psi dt \right|$$

při rotaci křivky dané parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ [$\varphi(t) \geq 0$, $\dot{\psi}(t) \neq 0$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$] kolem osy y;

$$V_x = \pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho^2 \sin^2 \varphi \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \cos \varphi - \varrho \sin \varphi \right) d\varphi,$$

resp.

$$V_y = \pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi \right) d\varphi$$

při rotaci křivky dané v polárních souřadnicích rovnicí $\varrho = f(\varphi)$ ($0 \leq \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \leq \pi/2$, resp. $-\pi/2 \leq \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \leq \pi/2$) kolem osy x , resp. y .

2. Objem rotačního tělesa, jehož podstavy jsou v rovinách $x = x_1$, $x = x_2$ a jehož obsah řezu rovinou kolmou k ose rotace je $S(x)$:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F ds,$$

Použití integrálního počtu v technické mechanice

Práce

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F ds,$$

kde F je velikost síly působící po úsečce s krajními body s_1 a s_2 .

Statické momenty

Úmluva:

Předpokládá se spojitost prvních derivací daných funkcí na příslušných integračních oborech.

1. Statický moment S_x , resp. S_y oblouku homogenní rovinné křivky v souřadnicové rovině xy vzhledem k ose x , resp. y (délková hmotnost $m_l = 1 \text{ kg m}^{-1}$):

$$S_x = \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{(1 + y'^2)} dx,$$

$$S_y = \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{(1 + y'^2)} dx$$

pro křivku $y = f(x)$ ($x \in \langle x_1, x_2 \rangle$);

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} \psi \sqrt{(\dot{\phi} + \dot{\psi})} dt,$$

$$S_y = \int_{t_1}^{t_2} \varphi \sqrt{(\dot{\phi} + \dot{\psi})} dt$$

pro křivku danou parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($t \in \langle t_1, t_2 \rangle$)

$$S_x = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho \sqrt{\left(\varrho^2 + \frac{d\varrho}{d\varphi}\right) \sin \varphi} d\varphi,$$

$$S_y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho \sqrt{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2\right]} \cos \varphi d\varphi$$

pro křivku danou v polárních souřadnicích rovnici $\varrho = f(\varphi)$ ($\varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$).

2. Statický moment S_{xy} , resp. S_{xz} , resp. S_{yz} oblouku homogenní prostorové křivky vzhledem k rovině xy , resp. xz , resp. yz (délková hmotnost $m_l = 1 \text{ kg m}^{-1}$):

$$S_{xy} = \int_{t_1}^{t_2} \chi \sqrt{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}^2)} dt,$$

$$S_{xz} = \int_{t_1}^{t_2} \psi \sqrt{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}^2)} dt,$$

$$S_{yz} = \int_{t_1}^{t_2} \varphi \sqrt{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}^2)} dt$$

pro křivku danou parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ ($t \in \langle t_1, t_2 \rangle$).

3. Statický moment S_x , resp. S_y homogenního rovinného obrazce ohrazeného grafem funkce $y = f(x)$ [$f(x) \geq 0$] a příslušnými úsečkami na ose x a na přímkách $x = x_1$ a $x = x_2$ vzhledem k ose x , resp. y (obsahová hmotnost $m_S = 1 \text{ kg m}^{-2}$):

$$S_x = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx,$$

$$S_y = \int_{x_1}^{x_2} xy dx.$$

4. Statický moment S_x , resp. S_y homogenního rovinného obrazce ohrazeného grafy funkcií $y = f(x)$, $y = g(x)$ [$0 \leq g(x) \leq f(x)$, $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$] a příslušnými úsečkami na přímkách $x = x_1$ a $x = x_2$ vzhledem k ose x , resp. y (obsahová hmotnost $m_S = 1 \text{ kg m}^{-2}$):

$$S_x = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx,$$

$$S_y = \int_{x_1}^{x_2} x[f(x) - g(x)] dx.$$

5. Statický moment S_{yz} homogenní rotační plochy vytvořené při rotaci grafu funkce $y = f(x)$ [$f(x) \geq 0$, $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$] kolem osy x vzhledem k rovině yz (obsahová hmotnost $m_s = 1 \text{ kg m}^{-2}$):

$$S_{yz} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (S_{xy} = S_{xz} = 0).$$

6. Statický moment S_{yz} homogenního rotačního tělesa, jehož plášť se vytvoří při rotaci grafu funkce $y = f(x)$ [$f(x) \geq 0$] kolem osy x a které má podstavy v rovinách $x = x_1$ a $x = x_2$, vzhledem k rovině yz (objemová hmotnost $m_v = 1 \text{ kg m}^{-3}$):

$$S_{yz} = \pi \int_{x_1}^{x_2} xy^2 dx \quad (S_{xy} = S_{xz} = 0).$$

Těžiště

1. Souřadnice těžiště T oblouku homogenní rovinné křivky $y = f(x)$ ($x \in \langle x_1, x_2 \rangle$):

$$x_T = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx} = \frac{S_y}{s},$$

$$y_T = \frac{\int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx} = \frac{S_x}{s},$$

kde s je délka uvažovaného oblouku (délková hmotnost $m_l = 1 \text{ kg m}^{-1}$) a S_x , S_y jsou příslušné statické momenty.

2. Souřadnice těžiště T oblouku homogenní prostorové křivky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ ($t \in \langle t_1, t_2 \rangle$):

$$x_T = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \chi \sqrt{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}^2)} dt}{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}^2)} dt} = \frac{S_{yz}}{s},$$

$$y_T = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \psi \sqrt{(\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}^2)} dt}{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}^2)} dt} = \frac{S_{xz}}{s},$$

$$z_T = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \varphi \sqrt{(\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}^2)} dt}{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}^2)} dt} = \frac{S_{xy}}{s},$$

kde s je délka uvažovaného oblouku (délková hmotnost $m_l = 1 \text{ kg m}^{-1}$) a S_{xy} , S_{xz} , S_{yz} jsou příslušné statické momenty.

3. Souřadnice těžiště T homogenního rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = f(x)$ [$f(x) = 0$] a příslušnými úsečkami na ose x a na přímkách $x = x_1$ a $x = x_2$:

$$x_T = \frac{\int_{x_1}^{x_2} xy dx}{\int_{x_1}^{x_2} y dx} = \frac{S_y}{S},$$

$$y_T = \frac{\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx}{2 \int_{x_1}^{x_2} y dx} = \frac{S_x}{S},$$

kde S je obsah uvažovaného rovinného obrazce (obsahová hmotnost $m_S = 1 \text{ kg m}^{-2}$) a S_x , S_y jsou příslušné statické momenty.

4. Souřadnice těžiště T homogenního rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = g(x)$ [$0 \leq g(x) \leq f(x)$, $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$] a příslušnými úsečkami na přímkách $x = x_1$ a $x = x_2$:

$$x_T = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x [f(x) - g(x)] dx}{\int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx} = \frac{S_y}{S},$$

$$y_T = \frac{\int_{x_1}^{x_2} \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx}{\int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx} = \frac{S_x}{S},$$

kde S má význam jako v odstavci 3 a S_x , S_y jsou příslušné statické momenty.

5. Souřadnice těžiště T homogenního rotačního tělesa, jehož plášť se vytvoří při rotaci grafu funkce $y = f(x)$ [$f(x) \geq 0$, $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$] kolem osy x :

$$x_T = \frac{\int_{x_1}^{x_2} xy^2 dx}{\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx} = \frac{S_{yz}}{V}, \quad y_T = 0, \quad z_T = 0,$$

kde V je objem uvažovaného tělesa (objemová hmotnost $m_V = 1 \text{ kg m}^{-3}$) a S_{yz} je statický moment.

Jde-li o křivky v parametrickém, popř. polárním vyjádření, pak se souřadnice těžiště uvažovaného geometrického útvaru vypočtou jako podíly příslušných statických momentů a délky příslušného oblouku, popř. obsahu příslušného rovinného obrazce, popř. obsahu pláště příslušného tělesa, popř. objemu příslušného tělesa.

Momenty setrvačnosti (nauka o pevnosti)

1. Moment setrvačnosti I_x , resp. I_y , resp. I_z oblouku homogenní rovinné křivky vzhledem k ose x , resp. k ose y , resp. k počátku (délková hmotnost $m_l = 1 \text{ kg m}^{-1}$):

$$I_x = \int_{x_1}^{x_2} y^2 \sqrt{(1 + y'^2)} dx,$$

$$I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \sqrt{(1 + y'^2)} dx,$$

$$I_z = \int_{x_1}^{x_2} (x^2 + y^2) \sqrt{(1 + y'^2)} dx$$

pro křivku $y = f(x)$ ($x \in \langle x_1, x_2 \rangle$);

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} \psi^2 \sqrt{(\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2)} dt,$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} \phi^2 \sqrt{(\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2)} dt,$$

$$I_z = \int_{t_1}^{t_2} (\phi^2 + \psi^2) \sqrt{(\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2)} dt$$

pro křivku danou parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($t \in \langle t_1, t_2 \rangle$);

$$I_x = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho^2 \sin^2 \varphi \sqrt{(\varrho^2 + \varrho'^2)} d\varphi,$$

$$I_y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho^2 \cos^2 \varphi \sqrt{(\varrho^2 + \varrho'^2)} d\varphi,$$

$$I_z = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho^2 \sqrt{(\varrho^2 + \varrho'^2)} d\varphi$$

pro křivku danou v polárních souřadnicích rovnici $\varrho = f(\varphi)$ ($\varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$).

2. Moment setrvačnosti I_x , resp. I_y , resp. I_z oblouku homogenní prostorové křivky vzhledem k ose x , resp. y , resp. z (délková hmotnost $m_l = 1 \text{ kg m}^{-1}$):

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} (\psi^2 + \chi^2) \sqrt{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}^2)} dt,$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} (\varphi^2 + \chi^2) \sqrt{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}^2)} dt,$$

$$I_z = \int_{t_1}^{t_2} (\varphi^2 + \psi^2) \sqrt{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\chi}^2)} dt$$

pro křivku danou parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ ($t \in \langle t_1, t_2 \rangle$).

3. Moment setrvačnosti I_x , resp. I_y , resp. I_z homogenního rovinného obrazce ohrazeného grafem funkce $y = f(x)$ [$f(x) \geq 0$] a příslušnými úsečkami na ose x a na přímkách $x = x_1$ a $x = x_2$ vzhledem k ose x , resp. k ose y , resp. k počátku (obsahová hmotnost $m_s = 1 \text{ kg m}^{-2}$):

$$I_x = \frac{1}{3} \int_{x_1}^{x_2} y^3 dx,$$

$$I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 y dx,$$

$$I_z = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{y^3}{3} + x^2 y \right) dx.$$

4. Moment setrvačnosti I_x , resp. I_y , resp. I_z homogenního rovinného obrazce ohrazeného grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = g(x)$ [$0 \leq g(x) \leq f(x)$, $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$]

a příslušnými úsečkami na přímkách $x = x_1$ a $x = x_2$ vzhledem k ose x , resp. k ose y , resp. k počátku (obsahová hmotnost $m_s = 1 \text{ kg m}^{-2}$):

$$I_x = \frac{1}{3} \int_{x_1}^{x_2} \{[f(x)]^3 - [g(x)]^3\} dx,$$

$$I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 [f(x) - g(x)] dx,$$

$$I_z = I_x + I_y.$$

5. Moment setrvačnosti I_x homogenní rotační plochy vytvořené při rotaci grafu funkce $y = f(x)$ $[f(x) \geq 0, x \in \langle x_1, x_2 \rangle]$ kolem osy x vzhledem k ose x (obsahová hmotnost $m_s = 1 \text{ kg m}^{-2}$):

$$I_x = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^3 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

6. Moment setrvačnosti I_x homogenního rotačního tělesa, jehož plášť se vytvoří při rotaci grafu funkce $y = f(x)$ $[f(x) \geq 0]$ kolem osy x a které má podstavy v rovinách $x = x_1$ a $x = x_2$, vzhledem k ose x (objemová hmotnost $m_v = 1 \text{ kg m}^{-3}$):

$$I_x = \frac{\pi}{2} \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^4 dx.$$

7.6. KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

7.6.1. Křivkový integrál po oblouku rovinné křivky

Jsou-li $P(x, y)$, $Q(x, y)$ spojité funkce na rovinné oblasti Ω_2 , v níž leží křivka C , daná parametricky rovnicemi $x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in \langle t_A, t_B \rangle$, pak integrály

$$\int_A^B [P(x, y) dx]_C = \int_{t_A}^{t_B} P(f(t), g(t)) f'(t) dt,$$

$$\int_A^B [Q(x, y) dy]_C = \int_{t_A}^{t_B} Q(f(t), g(t)) g'(t) dt$$

se nazývají *křivkové integrály po oblouku rovinné křivky C v mezích od A do B*. Hodnota křivkového integrálu nezávisí na volbě souřadnicové soustavy ani

na volbě parametrického vyjádření. Závisí však na integrační cestě (tj. na oblouku křivky C). Je-li \bar{C} křivka C s opačnou orientací, pak platí

$$\int_A^B [P(x, y) dx]_{\bar{C}} = - \int_A^B [P(x, y) dx]_C,$$

$$\int_A^B [Q(x, y) dy]_{\bar{C}} = - \int_A^B [Q(x, y) dy]_C.$$

Jestliže C je orientovaná křivka s počátečním bodem A a koncovým bodem B a hodnota integrálu

$$\int_A^B [P(x, y) dy + Q(x, y) dx]_C$$

závisí jen na volbě bodů A, B , a nikoli na křivce spojující body A a B , říkáme, že *integrál nezávisí na integrační cestě*.

Jsou-li $P, Q, \partial P / \partial y, \partial Q / \partial x$ spojité funkce na jednoduše souvislé rovinné oblasti Ω_2 , pak nutná a postačující podmínka, aby integrál

$$\int_A^B [P(x, y) dx + Q(x, y) dy]_C$$

nezávisel v oblasti Ω_2 na integrační cestě, je, aby na oblasti Ω_2 byla splněna podmínka

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Jsou-li P, Q spojité funkce na oblasti Ω_2 , pak nutná a postačující podmínka, aby integrál

$$\int_A^B [P(x, y) dx + Q(x, y) dy]_C$$

nezávisel v oblasti Ω_2 na integrační cestě, je, aby na oblasti Ω_2 existovala taková funkce $\varphi(x, y)$, že

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

je jejím totálním diferenciálem (tzv. *Schwarzova podmínka*).

Je-li C kladně orientovaná uzavřená křivka vzhledem k oblasti Ω_2 (tj. tak orientovaná křivka, že probíháme-li křivku souhlasně s její orientací, leží oblast vlevo), pak místo \int píšeme \oint .

Obsah rovinného obrazce

$$S = \frac{1}{2} \oint_C (x \, dy - y \, dx),$$

kde C je hraniční křivka dané oblasti.

Příklad 1:

Vypočtěme křivkový integrál

$$\int_A^B [(xy + y^2) \, dx + x \, dy]_C$$

po oblouku paraboly $y = 2x^2$ ohraničeném body $A[0, 0]$ a $B[2, 8]$.

Při explicitním tvaru křivky lze za parametr zvolit jednu z neznámých. Zvolme tedy za parametr neznámou x , takže $y = 2x^2$, $dy = 4x \, dx$. Dostaneme

$$\int_0^2 (x \cdot 2x^2 + 4x^4 + x \cdot 4x) \, dx = 44\frac{4}{15}.$$

Příklad 2:

Vypočtěme křivkový integrál z příkladu 1 po úsečce na přímce $y = 4x$, ohraničené body $A[0, 0]$ a $B[2, 8]$.

Dostaneme $dy = 4 \, dx$, takže

$$\int_A^B [(xy + y^2) \, dx + x \, dy]_C = \int_0^2 (x \cdot 4x + 16x^2 + x \cdot 4) \, dx = 91\frac{1}{3}.$$

7.6.2. Křivkový integrál po prostorové křivce

Jsou-li P, Q, R spojité funkce v prostorové oblasti Ω_3 , v níž leží křivka C , daná parametricky rovnicemi $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ ($t \in \langle t_A, t_B \rangle$), pak integrály

$$\int_A^B [P(x, y, z) \, dx]_C = \int_{t_A}^{t_B} P(f(t), g(t), h(t)) f'(t) \, dt,$$

$$\int_A^B [Q(x, y, z) \, dy]_C = \int_{t_A}^{t_B} Q(f(t), g(t), h(t)) g'(t) \, dt,$$

$$\int_A^B [R(x, y, z) \, dz]_C = \int_{t_A}^{t_B} R(f(t), g(t), h(t)) h'(t) \, dt$$

se nazývají *křivkové integrály po oblouku prostorové křivky C v mezích od A do B*.

Mají-li funkce P, Q, R spojité parciální derivace prvního řádu na jednoduše souvislé prostorové oblasti Ω_3 , pak nutná a postačující podmínka, aby integrál

$$\int_A^B [P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz]_C$$

nezávisel v oblasti Ω_3 na integrační cestě, je, aby byly zároveň splněny tyto podmínky (tzv. *Schwarzovy podmínky integrovatelnosti*):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

7.6.3. Křivkový integrál vektoru

Vektorová funkce

$$\mathbf{F} = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j},$$

popř. vektorová funkce

$$\mathbf{F} = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}$$

určuje vektorové pole.

Je-li rovnice křivky C dána ve vektorovém tvaru $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ($t \in \langle t_A, t_B \rangle$), pak křivkový integrál

$$\int_A^B (\mathbf{F} dr)_C,$$

kde $dr = i dx + j dy$, resp. $dr = i dx + j dy + k dz$, se nazývá *křivkový integrál vektoru \mathbf{F} po křivce C v mezích od A do B* .

Příklad:

Je dáno silové pole

$$\mathbf{F} = -yi + xj + \frac{1}{z+1} \mathbf{k}.$$

Jakou práci $W = \mathbf{F} dr$ je třeba vynaložit, aby se hmotný bod v silovém poli dostal podél šroubovice

$$\mathbf{r} = (a \cos t) \mathbf{i} + (a \sin t) \mathbf{j} + ct \mathbf{k}$$

z bodu $P_1[a, 0, 0]$ do bodu $P_2[a, 0, 2\pi c]$ ($c \in \mathbb{N}$)?

Z rovnice šroubovice plyne

$$\begin{aligned}x &= a \cos t, & y &= \sin t, & z &= ct, \\dx &= -a \sin t \, dt, & dy &= a \cos t \, dt, & dz &= c \, dt.\end{aligned}$$

Je tedy

$$d\mathbf{r} = [(-a \sin t) \mathbf{i} + (a \cos t) \mathbf{j} + ck] \, dt.$$

Vypočteme integrační meze:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t, \quad t = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Pro bod P_1 platí

$$t_1 = \operatorname{arctg} 0 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \wedge t_1 = \frac{0}{c} \Rightarrow t_1 = 0.$$

Pro bod P_2 platí

$$t_2 = \operatorname{arctg} 0 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \wedge t_2 = \frac{2\pi c}{c} \Rightarrow t_2 = 2\pi.$$

Křivkový integrál má tedy tvar

$$\begin{aligned}W &= \int_0^{2\pi} \left[(-a \sin t) \mathbf{i} + (a \cos t) \mathbf{j} + \frac{1}{ct+1} \mathbf{k} \right] \cdot [(-a \sin t) \mathbf{i} + (a \cos t) \mathbf{j} + ck] \, dt = \\&= \int_0^{2\pi} \left(a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + \frac{c}{ct+1} \right) dt = \\&= 2\pi a^2 + \ln(2\pi c + 1).\end{aligned}$$

7.7. MNOŽNÉ [n -ROZMĚRNÉ] INTEGRÁLY

7.7.1. Dvojné [dvojrozměrné] integrály

Nechť $z = f(x, y)$ je funkce dvou proměnných na uzavřené rovinné oblasti (dále budeme mluvit jen o oblasti) $\Omega_2 = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$. Jestliže intervaly $\langle a, b \rangle$ a $\langle c, d \rangle$ rozdělíme na podintervaly $\Delta x_i, \Delta y_j$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) a vytvoříme integrální součet

$$\sigma_{ij} = \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

kde $f(x_i, y_j)$ je funkční hodnota z v libovolném bodě $P_{ij}[x_i, y_j]$, $x_i \in \Delta x_i$, $y_j \in \Delta y_j$, pak existuje-li limity integrálních součtů:

$$\lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \sigma_{ij}$$

nezávisle na volbě podintervalů $\Delta x_i, \Delta y_j$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) a bodů $P_{ij}[x_i, y_j]$, označujeme ji

$$\iint_{\Omega_2} f(x, y) dS$$

a nazýváme *dvojným [dvojrozměrným] integrálem funkce f přes oblast Ω_2* .

Je-li Ω_2 libovolná ohraničená rovinná oblast, sestrojíme uzavřený obdélník $M \supseteq \Omega_2$ a definujeme funkci $g(x, y) = f(x, y)$ pro $[x, y] \in \Omega_2$ a $g(x, y) = 0$ pro $[x, y] \in M \setminus \Omega_2$. Dvojný integrál přes oblast Ω_2 definujeme vztahem

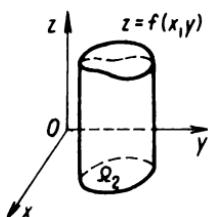
$$\iint_{\Omega_2} f(x, y) dS = \iint_M g(x, y) dS.$$

Funkce $f(x, y)$, pro niž existuje dvojný integrál

$$\iint_{\Omega_2} f(x, y) dS,$$

se nazývá *integrovatelná*. Každá spojitá funkce f na oblasti Ω_2 je na této oblasti integrovatelná.

Geometricky dvojný integrál z nezáporné funkce f vyjadřuje objem tělesa ohraničeného rovinnou oblastí Ω_2 v souřadnicové rovině xy , příslušnými úsečkami na rovnoběžkách s osou z , procházejícími body hranice oblasti Ω_2 , a částí plochy $z = f(x, y)$, příslušnou oblasti Ω_2 (obr. 372).



Obr. 372. Význam dvojného integrálu

Jestliže plocha $z = f(x, y)$ protíná souřadnicovou rovinu xy v oblasti Ω_2 , pak je nutno při určování objemu rozdělit oblast Ω_2 na takové podoblasti, aby na nich bylo buď $f(x, y) \geq 0$, nebo $f(x, y) \leq 0$. Hledaný objem je pak součtem absolutních hodnot příslušných dílčích dvojných integrálů.

Pro $z = f(x, y) = 1$ dává hodnota dvojněho integrálu

$$S = \iint_{\Omega_2} dS$$

obsah oblasti Ω_2 .

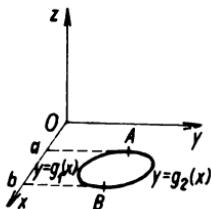
Výpočet dvojněho integrálu (převedení dvojněho integrálu na dvojnásobný integrál)

Jestliže f je integrovatelná funkce na oblasti Ω_2 , jejíž hranice je tvořena grafy funkcí $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$ [$g_1(x) \leq g_2(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$] a příslušnými úsečkami na přímkách $x = a$, $x = b$ (obr. 373), pak platí

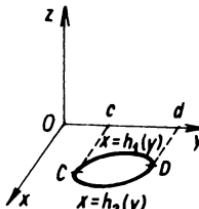
$$\iint_{\Omega_2} f(x, y) dS = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

Podobně, má-li oblast Ω_2 hranici tvořenou grafy funkcí $x = h_1(y)$, $x = h_2(y)$ [$h_1(y) \leq h_2(y)$, $y \in \langle c, d \rangle$] a příslušnými úsečkami na přímkách $y = c$, $y = d$ (obr. 374), pak platí

$$\iint_{\Omega_2} f(x, y) dS = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$



Obr. 373. Výpočet dvojněho integrálu smezemi $y_i = g_i(x)$ ($i = 1, 2$)



Obr. 374. Výpočet dvojněho integrálu smezemi $x_i = h_i(y)$ ($i = 1, 2$)

Má-li oblast Ω_2 hranici tvořenou grafy funkcií $\varrho = g_1(\varphi)$, $\varrho = g_2(\varphi)$ [$0 \leq g_1(\varphi) \leq g_2(\varphi)$, $\varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$] (obr. 375), lze výpočet dvojněho integrálu

$$\iint_{\Omega_2} f(x, y) dS$$

převést na výpočet dvojnásobného integrálu

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) \varrho d\varrho \right] d\varphi.$$

Příklad:

Vypočteme objem koule $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$.

Stačí určit objem osminy koule v prvním oktantu pro $x \geq 0, y \geq 0$ a $z \geq 0$, neboť koule je souměrné těleso (obr. 376). Platí

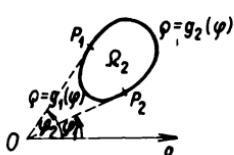
$$\frac{V}{8} = \iint_{\Omega_2} f(x, y) dS,$$

kde

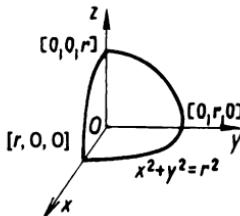
$$z = f(x, y) = \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)}.$$

Vypočteme integrační meze:

Proměnná x probíhá od 0 do $\sqrt{(r^2 - y^2)}$, což plyne z rovnice koule pro $z = 0$, tj. z rovnice kruhu $x^2 + y^2 \leq r^2$ v souřadnicové rovině xy .



Obr. 375. Výpočet dvojněho integrálu s polárnímimezemi $\rho_i = g_i(\varphi)$ ($i = 1, 2$)



Obr. 376. Výpočet objemu osminy koule

Proměnná y probíhá od 0 do r .

Je tedy

$$\frac{V}{8} = \int_0^r \left[\int_0^{\sqrt{(r^2 - y^2)}} \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)} dx \right] dy.$$

Zavedeme substituci

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{(r^2 - y^2)} \sin \varphi, \\ dx &= \sqrt{(r^2 - y^2)} \cos \varphi d\varphi \end{aligned}$$

a dostaneme nové integrační meze:

Pro $x = 0$ je $\varphi = 0$ a pro $x = \sqrt{(r^2 - y^2)}$ je $\varphi = \pi/2$. Po substituci máme

$$\begin{aligned} \frac{V}{8} &= \int_0^r \left\{ \int_0^{\pi/2} \sqrt{[r^2 - (r^2 - y^2) \sin^2 \varphi - y^2]} \sqrt{(r^2 - y^2)} \cos \varphi d\varphi \right\} dy = \\ &= \int_0^r \left\{ \int_0^{\pi/2} \sqrt{[(r^2 - y^2)(1 - \sin^2 \varphi)]} \sqrt{(r^2 - y^2)} \cos \varphi d\varphi \right\} dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^r \left[\int_0^{\pi/2} (r^2 - y^2) \cos^2 \varphi \, d\varphi \right] dy = \\
&= \int_0^r \left\{ (r^2 - y^2) \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right] \right\}_{0}^{\pi/2} dy = \\
&= \int_0^r (r^2 - y^2) \frac{\pi}{4} dy = \frac{\pi}{4} \left[r^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^r = \frac{\pi r^3}{6}.
\end{aligned}$$

Objem koule tedy je

$$\underline{V = \frac{4}{3}\pi r^3}.$$

Použití dvojných integrálů

O významu integračních mezí viz na str. 637.

1. Obsah S rovinného obrazce (uzavřené rovinné oblasti) Ω_2 v souřadnicové rovině xy :

Obecně platí:

$$S = \iint_{\Omega_2} dS,$$

v kartézských souřadnicích

$$S = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \right) dy$$

a v polárních souřadnicích

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} \rho d\rho \right) d\varphi.$$

2. Obsah S_0 části plochy o rovnici $z = f(x, y)$, jejíž průměr do souřadnicové roviny xy má obsah S :

Obecně platí (γ je odchylka tečné roviny k plošnému elementu a souřadnicové rovině xy)

$$S_0 = \iint_{\Omega_2} \frac{dS}{\cos \gamma},$$

v kartézských souřadnicích

$$S_0 = \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \sqrt{(f_x^2 + f_y^2 + 1)} dy \right] dx$$

a v polárních souřadnicích

$$S_0 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} \sqrt{(f_\varphi^2 + \varrho^2 f_\varrho^2 + \varrho^2)} d\varrho \right] d\varphi.$$

3. Statický moment rovinné oblasti Ω_2 vzhledem k ose x, popř. y:

$$S_x = \iint_{\Omega_2} y dS,$$

$$S_y = \iint_{\Omega_2} x dS,$$

v kartézských souřadnicích

$$S_x = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} y dy \right) dx,$$

$$S_y = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} x dy \right) dx$$

a v polárních souřadnicích

$$S_x = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} \varrho^2 d\varrho \right) \sin \varphi d\varphi,$$

$$S_y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} \varrho^2 d\varrho \right) \cos \varphi d\varphi.$$

4. Moment setrvačnosti rovinné oblasti Ω_2 vzhledem k ose x, popř. y:

Obecně platí

$$I_x = \iint_{\Omega_2} y^2 dS,$$

$$I_y = \iint_{\Omega_2} x^2 dS,$$

v kartézských souřadnicích

$$I_x = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} y^2 dy \right) dx,$$

$$I_y = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} x^2 dy \right) dx$$

a v polárních souřadnicích

$$I_x = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} \varrho^3 d\varrho \right) \sin^2 \varphi d\varphi,$$

$$I_y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} \varrho^3 d\varrho \right) \cos^2 \varphi d\varphi.$$

5. Moment setrvačnosti rovinné oblasti Ω_2 vzhledem k počátku:

Obecně platí

$$I_p = \iint_{\Omega_2} r^2 d\Omega_2,$$

v kartézských [ortonormálních] souřadnicích

$$I_p = \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} (x^2 + y^2) dy \right] dx$$

a v polárních souřadnicích

$$I_p = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} \varrho^3 d\varrho \right) d\varphi.$$

6. Moment setrvačnosti I_q rovinného obrazce Ω_2 vzhledem k ose q , procházející těžištěm $O[0, 0]$ obrazce Ω_2 a svírající s osou x úhel velikosti α , se rovná

$$I_q = I_x \cos^2 \alpha - 2D_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha,$$

kde I_x , resp. I_y je moment setrvačnosti rovinného obrazce Ω_2 vzhledem k ose x , resp. y a D_{xy} je deviační moment.

7. Steinerova věta pro rovinný obrazec: Moment setrvačnosti rovinného obrazce Ω_2 s obsahem S (obsahová hmotnost $m_S = 1 \text{ kg m}^{-2}$) vzhledem k ose p se rovná

$$I_p = I_q + d^2 S,$$

kde I_q je moment setrvačnosti rovinného obrazce Ω_2 vzhledem k ose q , rovnoběžné s osou p a procházející těžištěm $O[0, 0]$ obrazce Ω_2 ; d – vzdálenost os p a q .

8. Deviační [odstředivý] moment rovinného obrazce Ω_2 vzhledem k osám x a y :

$$D_{xy} = \iint_{\Omega_2} xy dS.$$

9. Objem V tělesa ohraničeného plochou $z = f(x, y) \geq 0$, rovinným obrazcem Ω_2 v souřadnicové rovině xy a příslušnými úsečkami na rovnoběžkách v hraničních bodech obrazce Ω_2 s osou z :

Obecně platí

$$V = \iint_{\Omega_3} z \, dS,$$

v kartézských [ortonormálních] souřadnicích

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} z \, dy \right) dz$$

a v polárních souřadnicích

$$V = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} z \varrho \, d\varrho \right) d\varphi.$$

7.7.2. Trojná [trojrozměrná] integrály

Trojný [trojrozměrný] integrál se definuje obdobně jako dvojný integrál s tím rozdílem, že v něm vystupují funkce tří proměnných $u = f(x, y, z)$ (x, y, z jsou souřadnice kartézské [ortonormální] souřadnicové soustavy), popř. $u = f(\varrho, \varphi, z)$ (ϱ, φ, z jsou souřadnice válcové [cylindrické, semipolární] souřadnicové soustavy), popř. $u = f(\varrho, \varphi, \vartheta)$ ($\varrho, \varphi, \vartheta$ jsou souřadnice kulové [sférické, polární] souřadnicové soustavy) a regulární uzavřená prostorová oblast Ω_3 .

Funkce f , pro niž existuje trojný integrál, se nazývá integrovatelná. Každá spojitá funkce f na oblasti Ω_3 je na této oblasti integrovatelná.

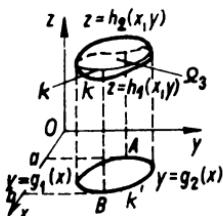
Výpočet trojnáho integrálu (převedení trojnáho integrálu na trojnásobný integrál)

V kartézských souřadnicích platí

$$\iiint_{\Omega_3} f(x, y, z) \, dV = \int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right] dy \right\} dx$$

za předpokladu, že trojrozměrná oblast Ω_3 je množinou právě těch bodů $[x, y, z] \in E_3$, že $x \in \langle a, b \rangle$, pro každý pevně zvolený bod $x \in \langle a, b \rangle$ platí $g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)$ (g_1 a g_2 jsou spojité funkce) a pro každou pevně zvolenou

„přípustnou“ uspořádanou dvojici $[x, y]$ platí $h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)$ (h_1 a h_2 jsou spojité funkce dvou proměnných) (obr. 377).



Obr. 377. Výpočet trojněho integrálu

Ve válcových souřadnicích platí

$$\iiint_{\Omega_3} f(\varrho, \varphi, z) dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} \left[\int_{h_1(\varphi, \varphi)}^{h_2(\varphi, \varphi)} f(\varrho, \varphi, z) \varrho dz \right] d\varrho \right\} d\varphi$$

za předpokladu, že trojrozměrná oblast Ω_3 je množinou právě těch bodů $[\varrho, \varphi, z] \in E_3$, že $\varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$, pro každou pevně zvolenou hodnotu $\varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ platí $g_1(\varphi) \leq \varrho \leq g_2(\varphi)$ (g_1 a g_2 jsou spojité funkce) a pro každou pevně zvolenou „přípustnou“ uspořádanou dvojici $[\varrho, \varphi]$ platí $h_1(\varrho, \varphi) = z = h_2(\varrho, \varphi)$ (h_1 a h_2 jsou spojité funkce dvou proměnných).

V kulových souřadnicích platí

$$\iiint_{\Omega_3} f(\varrho, \varphi, \vartheta) dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} \left[\int_{h_1(\vartheta, \varphi)}^{h_2(\vartheta, \varphi)} f(\varrho, \varphi, \vartheta) \varrho^2 d\varrho \right] \sin \vartheta d\vartheta \right\} d\varphi$$

za předpokladu, že trojrozměrná oblast Ω_3 je množinou právě těch bodů $[\varrho, \varphi, \vartheta] \in E_3$, že $\varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$, pro každou pevně zvolenou hodnotu $\varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ platí $g_1(\varphi) \leq \vartheta \leq g_2(\varphi)$ (g_1 a g_2 jsou spojité funkce) a pro každou pevně zvolenou „přípustnou“ uspořádanou dvojici $[\vartheta, \varphi]$ platí $h_1(\vartheta, \varphi) \leq \varrho \leq h_2(\vartheta, \varphi)$ (h_1 a h_2 jsou spojité funkce dvou proměnných).

Příklad:

Na tělese Ω_3 , znázorněném v obr. 377, ukážeme, jaký geometrický význam mají v tomto případě integrační meze trojnásobného integrálu.

Integrační mez $h_1(x, y)$, resp. $h_2(x, y)$ trojnásobného integrálu představuje dolní hraniční plochu $z = h_1(x, y)$, resp. horní hraniční plochu $z = h_2(x, y)$ trojrozměrné uzavřené oblasti Ω_3 , přičemž tyto plochy mají společnou hraniční křivku k . Průměrem těchto ploch do roviny xy je uzavřená oblast Ω_2 , jejíž hraniční křivka k' je průměrem křivky k .

Integrační mez $g_1(x)$, resp. $g_2(x)$ představuje dolní část $y = g_1(x)$, resp. horní část $y = g_2(x)$ křivky k' .

Integrační meze a, b jsou krajní body úsečky, která je průmětem každé z křivek $y = g_1(x)$ a $y = g_2(x)$ do osy x .

Použití trojnáho a trojnásobného integrálu

O významu integračních mezí viz na str. 637.

1. Objem tělesa V :

Obecně platí

$$V = \iiint_{\Omega_3} dV,$$

v kartézských souřadnicích

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} dz \right) dy \right] dx,$$

ve válcových souřadnicích

$$V = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} \left(\int_{h_1(\varrho,\varphi)}^{h_2(\varrho,\varphi)} \varrho dz \right) d\varrho \right] d\varphi$$

a v kulových souřadnicích

$$V = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} \left(\int_{h_1(\vartheta,\varphi)}^{h_2(\vartheta,\varphi)} \varrho^2 d\varrho \right) \sin \vartheta d\vartheta \right] d\varphi.$$

2. Statický moment S_{xy} , resp. S_{xz} , resp. S_{yz} homogenního tělesa vzhledem k rovině xy , resp. xz , resp. yz (objemová hmotnost $m_V = 1 \text{ kg m}^{-3}$):

Obecně platí

$$S_{xy} = \iiint_{\Omega_3} z dV,$$

$$S_{xz} = \iiint_{\Omega_3} y dV,$$

$$S_{yz} = \iiint_{\Omega_3} x dV$$

a v kartézských souřadnicích

$$S_{xy} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} z \, dz \right) dy \right] dx,$$

$$S_{xz} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} y \, dz \right) dy \right] dx,$$

$$S_{yz} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} x \, dz \right) dy \right] dx.$$

3. Těžiště T homogenního tělesa s objemem V :

Obecně platí

$$x_T = \frac{\iiint_{\Omega_3} x \, dV}{V}, \quad y_T = \frac{\iiint_{\Omega_3} y \, dV}{V}, \quad z_T = \frac{\iiint_{\Omega_3} z \, dV}{V}$$

a v kartézských souřadnicích

$$x_T = \frac{1}{V} \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} x \, dz \right) dy \right] dx,$$

$$y_T = \frac{1}{V} \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} y \, dz \right) dy \right] dx,$$

$$z_T = \frac{1}{V} \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} z \, dz \right) dy \right] dx.$$

4. Moment setrvačnosti I_x , resp. I_y , resp. I_z homogenního tělesa Ω_3 vzhledem k ose x , resp. y , resp. z (objemová hmotnost $m_V = 1 \text{ kg m}^{-3}$):

Obecně platí

$$I_x = \iiint_{\Omega_3} (y^2 + z^2) \, dV,$$

$$I_y = \iiint_{\Omega_3} (x^2 + z^2) \, dV,$$

$$I_z = \iiint_{\Omega_3} (x^2 + y^2) \, dV$$

a v kartézských souřadnicích

$$I_x = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} (y^2 + z^2) dz \right] dy \right\} dx,$$

$$I_y = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} (x^2 + z^2) dz \right] dy \right\} dx,$$

$$I_z = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} (x^2 + y^2) dz \right] dy \right\} dx.$$

5. Moment setrvačnosti homogenního tělesa Ω_3 vzhledem k ose otáčení (objemová hmotnost $m_V = 1 \text{ kg m}^{-3}$):

$$I = \iiint_{\Omega_3} r^2 dV,$$

kde r je vzdálenost bodu $[x, y, z]$ od osy otáčení.

6. Moment setrvačnosti I_q tělesa Ω_3 vzhledem k ose q , procházející těžištěm $O[0, 0, 0]$ tělesa Ω_3 a svírající se souřadnicovými osami úhly s velikostmi α, β, γ , se rovná

$$I_q = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - \\ - 2D_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2D_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2D_{yz} \cos \beta \cos \gamma,$$

kde I_x , resp. I_y , resp. I_z je moment setrvačnosti tělesa Ω_3 vzhledem k ose x , resp. y , resp. z a D_{xy} , resp. D_{xz} , resp. D_{yz} je deviační moment tělesa Ω_3 vzhledem k osám x a y , resp. x a z , resp. y a z .

7. Steinerova věta pro těleso: Moment setrvačnosti I_p tělesa Ω_3 s objemem V (objemová hmotnost $m_V = 1 \text{ kg m}^{-3}$) vzhledem k ose p se rovná

$$I_p = I_q + d^2 V,$$

kde I_q je moment setrvačnosti tělesa Ω_3 vzhledem k ose q , rovnoběžné s osou p a procházející těžištěm $O[0, 0, 0]$ tělesa Ω_3 ;

d – vzdálenost os p a q .

8. Deviační [odstředivý] moment D_{xy} , resp. D_{xz} , resp. D_{yz} homogenního tělesa Ω_3 vzhledem k osám x a y , resp. x a z , resp. y a z (objemová hmotnost $m_V = 1 \text{ kg m}^{-3}$):

$$D_{xy} = \iiint_{\Omega_3} xy dV,$$

$$D_{xz} = \iiint_{\Omega_3} xz \, dV,$$

$$D_{yz} = \iiint_{\Omega_3} yz \, dV.$$

Příklad:

Vypočtěme objem tělesa

$$\Omega_3 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq 0 \wedge 0 \leq z \leq 2x^2y\}.$$

Vypočteme integrační meze:

Proměnná z probíhá od 0 do $2x^2y$.

Proměnná y probíhá od 0 do $\sqrt{4x - x^2}$, neboť

$$(x - 2)^2 + y^2 \leq 4,$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 \leq 4,$$

$$0 \leq y \leq \sqrt{4x - x^2}.$$

Proměnná x probíhá od 0 do 4, což plyne z analytického vyjádření kruhu.

Je tedy

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{4x-x^2}} \left(\int_0^{2x^2y} dz \right) dy \right] dx = \\ &= \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{4x-x^2}} 2x^2y \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^4 [x^2y^2]_0^{\sqrt{4x-x^2}} \, dx = \int_0^4 (4x^3 - x^4) \, dx = \\ &= \left[x^4 - \frac{x^5}{5} \right]_0^4 = 51,2 \quad (\text{objemové jednotky}). \end{aligned}$$

8. DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

8.1. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Základní pojmy

Obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu v implicitním tvaru nazýváme rovnici tvaru

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

kde $n \in \mathbf{N}$ a $F: \Omega_{n+2} \rightarrow \mathbf{R}$, $\Omega_{n+2} \subset \mathbf{R}^{n+2}$. Přitom levá strana rovnice závisí v každém případě na proměnné $y^{(n)}$.

Obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu v explicitním tvaru [obyčejnou diferenciální rovnici rozřešenou vzhledem k derivaci největšího řádu] nazýváme rovnici tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2)$$

kde $n \in \mathbf{N}$ a $f: \Omega_{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$, $\Omega_{n+1} \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

Jsou-li splněny předpoklady plynoucí z věty o implicitních funkcích, lze rovnici (1) převést na rovnici (2).

Řešením [integrálem, partikulárním řešením, partikulárním integrálem] rovnice (1), resp. (2) na intervalu $J \subset \mathbf{R}$ nazýváme každou funkci $\varphi: J \rightarrow \mathbf{R}$, která má na intervalu J derivace až do n -tého řádu včetně a která po dosazení do rovnice (1), resp. (2) tuto rovnici splňuje. Řešení nemusí být dáno v explicitním tvaru $y = \varphi(x)$, ale může být dáno i implicitně rovnici $h(x, y) = 0$.

Řešení rovnice (1), resp. (2) na intervalu J , které závisí na n podstatných konstantách (tj. takových konstantách, že žádnou z nich nelze vyjádřit pomocí zbývajících konstant), se nazývá obecné řešení [obecný integrál] rovnice (1), resp. (2). Obecné řešení nemusí být dáno v explicitním tvaru $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$, ale může být dáno i implicitně rovnici $h(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$. Volbou určitých hodnot za parametry C_1, \dots, C_n ve vyjádření obecného řešení dostaneme řešení partikulární. Jestliže $[a, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}] \in J \times \mathbf{R}^n$ a $y = \varphi(x)$ je takové řešení diferenciální rovnice (1), resp. (2) na intervalu J , že platí

$$\varphi(a) = b_0, \quad \varphi'(a) = b_1, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(a) = b_{n-1}, \quad (3)$$

pak říkáme, že řešení $y = \varphi(x)$ je dáno počátečními podmínkami (3).

Počáteční úlohou [Cauchyovou úlohou] pro obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu nazýváme úlohu najít řešení rovnice (1), resp. (2), dané počáteční podmínkou (3). Taková počáteční úloha nemusí mít žádné řešení, může mít právě jedno řešení nebo několik řešení.

Věta o existenci řešení: Jestliže v diferenciální rovnici (2) je $f: \Omega_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou funkci na okolí bodu $[a, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}] \in \Omega_{n+1}$, pak existuje řešení této rovnice na intervalu J , které splňuje počáteční podmíinku (3).

Věta o jednoznačnosti řešení: Jestliže v diferenciální rovnici (2) jsou funkce $f: \Omega_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $\partial f / \partial y, \partial f / \partial y', \dots, \partial f / \partial y^{(n-1)}$ spojité na okolí bodu $[a, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}] \in \Omega_{n+1}$, pak existuje právě jedno řešení této rovnice na intervalu J , které splňuje počáteční podmíinku (3).

Singulárním řešením diferenciální rovnice (1), resp. (2) nazýváme takové řešení, v jehož každém bodě je porušena jednoznačnost.

Příklad 1:

Rovnice $x + yy' = 0$ je obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu v implicitním tvaru ($n = 1$, $\Omega_3 = \mathbb{R}^3$). Rovnicí $x^2 + y^2 = C^2$ je dáno její obecné řešení v implicitním tvaru.

Příklad 2:

Rovnice $y' = -x/y$ je obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu rozřešenou vzhledem k derivaci ($n = 1$, $\Omega_2 = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$). Rovnicí $y = \pm \sqrt{(C^2 - x^2)}$ je dáno její obecné řešení v explicitním tvaru.

8.2. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

8.2.1. Geometrický význam

Jestliže $\Omega_3 \subset \mathbb{R}^3$ a $F: \Omega_3 \rightarrow \mathbb{R}$, resp. $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ a $f: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$, pak rovnici

$$F(x, y, y') = 0, \quad (4)$$

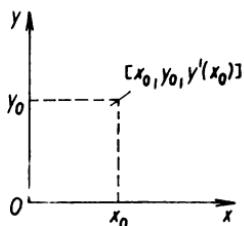
resp. rovnici

$$y' = f(x, y) \quad (5)$$

je bodům $[x, y]$ definiční oblasti funkce F , resp. f přiřazen směrový element y' (obr. 378). Říkáme, že na Ω_2 je definováno *směrové pole*. Grafickým znázorněním obecného řešení rovnice (4), resp. (5) je jednoparametrická soustava křivek; každé partikulární řešení odpovídá určité křivce (tzv. *integrální křivce*)

této soustavy. Přitom platí, že směrnice tečny integrální křivky v bodě $[x, y]$ je dána rovnicí (4), resp. (5).

Singulárním řešením je obalová křivka (existuje-li) jednoparametrické soustavy integrálních křivek.



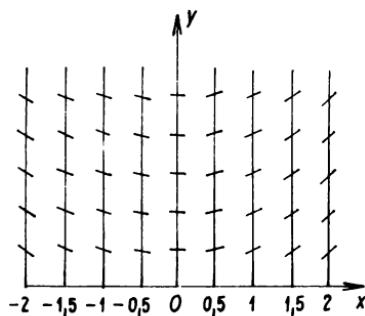
Obr. 378. Směrový element ze svazku křivek

Čáry spojující všechny body se stejným směrem se nazývají *izoklíny* ($y' = \text{konst}$). Z jejich znalosti lze přibližně určit integrální křivky.

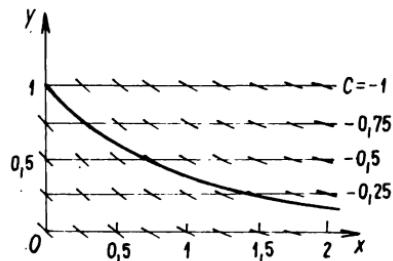
Příklad 1:

$$y' = \frac{1}{2}x \quad ([x, y] \in (-2, 2) \times \mathbb{R}^+).$$

Rovnice izoklíny: $y' = \frac{1}{2}x = C \Rightarrow x = 2c$ (rovnoběžky s osou y) (obr. 379).



Obr. 379. Izoklíny rovnice $y' = \frac{1}{2}x$



Obr. 380. Izoklíny rovnice $y' = -y$

Příklad 2:

$$y' = -y \quad ([x, y] \in \mathbb{R}^2).$$

Rovnice izoklíny: $y' = -y = C \Rightarrow y = -C$ (rovnoběžky s osou x) (obr. 380).

Je-li dána jednoparametrická soustava křivek $F(x, y, C) = 0$, resp. $y = f(x, C)$, pak eliminací konstanty C z rovnic

$$F(x, y, C) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0,$$

popř. z rovnic

$$y = f(x, C) \quad \text{a} \quad y' = f'_x(x, C)$$

lze při splnění předpokladů plynoucích z věty o implicitních funkcích najít diferenciální rovnici této soustavy.

Křivka, která každou křivku soustavy protíná v právě jednom bodě, se nazývá *trajektorie této soustavy*. Trajektorie, která každou křivku soustavy protíná pod shodným, resp. pod pravým úhlem se nazývá *izogonální*, resp. *ortogonální trajektorie*. Diferenciální rovnici izogonální trajektorie protínající křivky soustavy pod úhlem velikosti $\varphi \neq \pi/2$ dostaneme eliminací konstanty C z rovnic (opět při splnění předpokladů z věty o implicitních funkcích)

$$F(x, y, C) = 0,$$

$$\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial y} \right) \operatorname{tg} \varphi \right] y' = \operatorname{tg} \varphi - \frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial y},$$

resp. z rovnic

$$y = f(x, C),$$

$$[1 - f'(x, C) \operatorname{tg} \varphi] y' = f'(x, C) + \operatorname{tg} \varphi.$$

Diferenciální rovnici ortogonální trajektorie dostaneme eliminací konstanty C z rovnic

$$F(x, y, C) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x} y' = 0,$$

resp. z rovnic

$$y = f(x, C),$$

$$1 + f'_x(x, C) y' = 0.$$

Příklad 1:

Je dána soustava křivek

$$4x^2 + 5y + C = 0.$$

Konstantu C eliminujeme derivováním, takže diferenciální rovnice dané soustavy je

$$8x + 5y' = 0.$$

Diferenciální rovnice soustavy ortogonálních trajektorií je

$$5 - 8xy' = 0.$$

Diferenciální rovnice soustavy izogonálních trajektorií, kde úhel protínání má velikost $\varphi = 30^\circ$, je

$$\left(1 + \frac{8x}{5} \frac{\sqrt{3}}{3}\right)y' = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{8x}{5}$$

neboli

$$(15 + 8x\sqrt{3})y' = -24x + 5\sqrt{3}.$$

Příklad 2:

Je dána soustava křivek

$$y = Cx^2.$$

Diferenciální rovnici soustavy vypočteme z rovnic

$$y = Cx^2,$$

$$y' = 2Cx;$$

dostaneme (pro $x \neq 0$)

$$y' = 2 \cdot \frac{y}{x}.$$

Diferenciální rovnici soustavy ortogonálních trajektorií vypočteme z rovnic

$$y = Cx^2 \quad \text{a} \quad 1 + 2Cxy' = 0.$$

Pro $x \neq 0$ dostaneme

$$2 \cdot \frac{y}{x} y' = -1.$$

8.2.2. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Jestliže funkce φ , resp. ψ [$\psi(y) \neq 0$] je spojitá na otevřeném intervalu J_1 , resp. J_2 , pak rovnice

$$\psi(y) y' = \varphi(x) \quad \text{neboli} \quad y' = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}$$

se nazývá *diferenciální rovnice se separovanými proměnnými*. Na množině $J_1 \times J_2$ je její obecné řešení tvaru

$$\int \psi(y) dy = \int \varphi(x) dx.$$

Každým bodem množiny $J_1 \times J_2$ prochází aspoň jedna integrální křivka. Jestliže funkce ψ' je na intervalu J_2 spojitá, pak každým bodem množiny $J_1 \times J_2$ prochází právě jedna integrální křivka. Na hranici množiny $J_1 \times J_2$ je třeba rovnici vyšetřit zvlášť.

Příklad 1:

$$yy' = x e^{x+y} \quad \text{neboli} \quad y' = \frac{x e^x}{y e^{-y}}$$

je rovnice se separovanými proměnnými: $\varphi(x) = x e^x$, $J_1 = \mathbb{R}$, $\psi(y) = y e^{-y}$, $J_2 = \mathbb{R}^-$, popř. $J_2 = \mathbb{R}^+$. Na množině $J_1 \times J_2$ je její obecné řešení tvaru

$$\int y e^{-y} dy = \int x e^x dx$$

neboli (integrací per partes)

$$-y e^{-y} + \int e^{-y} dy = x e^x - \int e^x dx$$

neboli

$$-e^{-y}(y+1) = e^x(x-1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Každým bodem množiny $J_1 \times J_2$ prochází právě jedna integrální křivka.

Příklad 2:

$$y'(2x-7) + y(2x^2 - 3x - 14) = 0 \quad \text{neboli} \quad y' = -y \frac{2x^2 - 3x - 14}{2x-7}$$

je rovnice se separovanými proměnnými:

$$\varphi(x) = -\frac{2x^2 - 3x - 14}{2x-7} = -(x+2),$$

$J_1 = (-\infty, \frac{7}{2})$, resp. $J_1 = (\frac{7}{2}, +\infty)$; $\psi(y) = 1/y$, $J_2 = \mathbb{R}^-$, resp. $J_2 = \mathbb{R}^+$.

Na množině $J_1 \times J_2$ je její obecné řešení tvaru

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int (x+2) dx$$

neboli

$$\ln |y| = -\frac{x^2}{2} - 2x + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R})$$

neboli

$$|y| = \exp\left(-\frac{x^2}{2} - 2x + C_1\right) = C_2 \exp\left(-\frac{x^2}{2} - 2x\right), \quad C_2 = e^{C_1} \quad (C_2 > 0)$$

neboli

$$y = C_3 \exp\left(-\frac{x^2}{2} - 2x\right), \quad C_3 = C_2 \quad (y > 0), \quad C_3 = -C_2 \quad (y < 0).$$

Protože funkce

$$y = 0 \quad (x \in J_1)$$

je také řešením dané rovnice, je funkce $y = C \exp\left(-\frac{x^2}{2} - 2x\right)$ ($C \in \mathbb{R}$) jejím obecným řešením.

Každým bodem množiny $J_1 \times \mathbb{R}$ prochází právě jedna integrální křivka.

8.2.3. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Jestliže funkce a [$a(x) \neq 0$], b , c jsou spojité funkce na intervalu J , pak rovnice

$$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$$

se nazývá *lineární diferenciální rovnice prvního řádu*. Diferenciální rovnice

$$y' + p(x)y + q(x) = 0,$$

kde p, q jsou spojité funkce na intervalu J , se nazývá *lineární diferenciální rovnice prvního řádu v normovaném tvaru*.

Homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Homogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu nazýváme rovnici $y' + p(x)y = 0$. Je to rovnice se separovanými proměnnými: $\varphi(x) = -p(x)$, $J_1 = J$, $\psi(x) = 1/y$, $J_2 = \mathbb{R}^-$, popř. \mathbb{R}^+ . Na množině $J \times \mathbb{R}^-$, popř. $J \times \mathbb{R}^+$ je její obecné řešení tvaru

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int p(x) dx$$

neboli

$$|y| = C_1 e^{-P(x)}, \quad \text{kde } P'(x) = p(x) \quad (C_1 > 0).$$

Protože $y = 0$ dané rovnici také vyhovuje, je na množině $J \times \mathbb{R}$ funkce $y = C e^{-P(x)}$, $P'(x) = p(x)$ ($C \in \mathbb{R}$), jejím obecným řešením. Každým bodem množiny $J \times \mathbb{R}$ prochází právě jedna integrální křivka, která je definovaná pro všechna čísla $x \in J$.

Nehomogení lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Nehomogení lineární diferenciální rovnici prvního řádu nazýváme rovnici

$$y' + p(x)y + q(x) = 0.$$

1. způsob řešení (řešení pomocí substituce):

Zvolíme libovolné nenulové řešení u rovnice $u' = p(x)u$ ($x \in J$). Pak

$$y' + \frac{u'(x)}{u(x)}y + q(x) = 0$$

neboli

$$u(x)y' + u'(x)y + u(x)q(x) = 0$$

neboli

$$(uy)' + uq = 0.$$

Na množině $J \times \mathbb{R}$ je tedy funkce

$$y = -\frac{1}{u(x)} \int u(x)q(x) dx$$

obecným řešením dané rovnice. Každým bodem množiny $J \times \mathbb{R}$ prochází právě jedna integrální křivka, definovaná pro všechna čísla $x \in J$.

Příklad:

$$y' \sin x + y = \cos x \quad [J = (0, \pi)]$$

neboli

$$y' + \frac{1}{\sin x}y = \cot g x.$$

Partikulárním řešením rovnice $u' = u/\sin x$ je např. funkce $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Položíme-li $u'/u = 1/\sin x$, dostaneme

$$y' + \frac{u'}{u}y = \cot g x$$

neboli

$$uy' + u'y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{cotg} x = 1 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$$

neboli

$$(uy)' = 1 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}.$$

Odtud

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{cotg} \frac{x}{2} \int \left(1 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \right) dx = \operatorname{cotg} \frac{x}{2} \left(x - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C \right) = \\ &= (x + C) \operatorname{cotg} \frac{x}{2} - 1 \quad (C \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Každým bodem množiny $(0, \pi) \times \mathbb{R}$ prochází právě jedna integrální křivka, definovaná pro všechna čísla $x \in (0, \pi)$.

2. způsob řešení (metoda variace konstant):

Nejprve najdeme obecné řešení $y = C e^{-P(x)}$, $P'(x) = p(x)$ ($C \in \mathbb{R}$) příslušné homogenní lineární diferenciální rovnice

$$y' + p(x)y = 0.$$

Konstantu C nahradíme neznámou funkcí z a výraz

$$y = z(x) e^{-P(x)}$$

dosadíme do nehomogenní rovnice:

$$z' e^{-P(x)} - z p(x) e^{-P(x)} + z p(x) e^{-P(x)} + q(x) = 0$$

neboli

$$z' = -q(x) e^{P(x)}.$$

Odtud vypočteme pomocnou funkci:

$$z = - \int q(x) e^{P(x)} dx ;$$

pak

$$y = -e^{-P(x)} \int q(x) e^{P(x)} dx .$$

Příklad:

$$y' \sin x + y = \cos x \quad [J = (0, \pi)]$$

neboli

$$y' + \frac{1}{\sin x} y = \cot g x.$$

Obecné řešení rovnice

$$y' + \frac{1}{\sin x} y = 0 \quad [x \in (0, \pi)]$$

je

$$y = C \cot g \frac{x}{2}.$$

Položíme

$$y = z(x) \cot g \frac{x}{2}$$

a po dosazení máme

$$z' \cot g \frac{x}{2} \sin x - z \frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \sin x + z \cot g \frac{x}{2} = \cos x$$

neboli

$$z' = \cot g x \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$$

neboli

$$z = \int \left(1 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \right) dx = x - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Odtud

$$y = (x + C) \cot g \frac{x}{2} - 1 \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Každým bodem množiny $(0, \pi) \times \mathbb{R}$ prochází právě jedna integrální křivka, definovaná pro všechna čísla $x \in (0, \pi)$.

3. způsob řešení (řešení při známém partikulárním řešení y_p):

Najdeme obecné řešení y_h příslušné homogenní lineární diferenciální rovnice. Obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice pak je $y =$

$= y_p + y_h$. Známe-li dvě partikulární řešení y_{p1}, y_{p2} nehomogenní rovnice, pak obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice je

$$y = y_{p1} + C(y_{p2} - y_{p1}).$$

8.2.4. Homogenní diferenciální rovnice prvního řádu

Jestliže $f(x, y)$ je homogenní funkce nultého stupně, tj. platí-li $f(tx, ty) = f(x, y)$ pro všechna čísla t z nějakého okolí bodu $t = 1$, pak diferenciální rovnici

$$y' = f(x, y)$$

nazýváme *homogenní diferenciální rovnici nultého stupně*. Jestliže funkce z je na intervalu J řešením diferenciální rovnice $z' = [f(1, z) - z]/x$ se separovanými proměnnými, pak funkce $y(x) = x z(x)$ je řešením dané homogenní rovnice na témže intervalu J . Při vyšetřování musíme vyloučit body $x = 0$.

Příklad:

$$y' = 3 - 2 \cdot \frac{y}{x} \quad (x \in \mathbb{R}^-, \text{ popř. } \mathbb{R}^+, \quad y \in \mathbb{R}).$$

Funkce $f(x, y) = 3 - 2y/x$ je na intervalu \mathbb{R}^- , popř. \mathbb{R}^+ homogenní rovnici nultého stupně. Dostaneme $f(1, z) - z = 3 - 2z - z = 3 - 3z$. Řešíme lineární rovnici

$$z' = 3 \frac{1-z}{x},$$

což je rovnice se separovanými proměnnými, kde $\varphi(x) = 3/x$, $J_1 = \mathbb{R}^-$, popř. \mathbb{R}^+ , $\psi(z) = 1/(1-z)$, $J_2 = (-\infty, 1)$, popř. $(1, +\infty)$. Na množině $J_1 \times J_2$ je její obecné řešení tvaru

$$\int \frac{dz}{1-z} = 3 \int \frac{dx}{x}$$

neboli

$$-\ln|1-z| = 3 \ln|x| + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R})$$

neboli

$$-\ln|x^3(1-z)| = C_1$$

neboli

$$|x^3(1-z)| = e^{C_1} = C_2 \quad (C_2 > 0).$$

Protože funkce $z = 1$ je také řešením rovnice $z' = 3(1 - z)/x$, je na množině $J_1 \times \mathbb{R}$ jejím obecným řešením funkce

$$z = 1 - \frac{C}{x^3} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Každým bodem množiny $J_1 \times \mathbb{R}$ prochází právě jedna integrální křivka, definovaná pro všechna čísla $x \in J_1$.

Dosadime-li za z do vztahu $y = xz$, dostaneme na množině $J_1 \times \mathbb{R}$ obecné řešení rovnice $y' = 3 - 2y/x$ ve tvaru

$$y = x - \frac{C}{x^2} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Každým bodem množiny $J_1 \times \mathbb{R}$ prochází právě jedna integrální křivka, definovaná pro všechna čísla $x \in J_1$.

8.2.5. Exaktní diferenciální rovnice prvního řádu

Exaktní diferenciální rovnici prvního řádu nazýváme rovnici

$$\varphi(x, y) dx + \psi(x, y) dy = 0,$$

kde levá strana rovnice je v oblasti Ω_2 totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x, y)$ (tzv. *kmenové funkce*). Na oblasti Ω_2 je pak $F(x, y) = C$ obecným řešením dané rovnice.

Nutnou a postačující podmínkou, aby na oblasti Ω_2 byla rovnice tvaru

$$\varphi(x, y) dx + \psi(x, y) dy = 0$$

exaktní rovnici, je

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Funkci $F(x, y)$ pak najdeme ze vzorce

$$F(x, y) = \int \varphi(x, y) dx + \int \left[\psi(x, y) - \int \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} dx \right] dy = C, \quad (6)$$

popř.

$$F(x, y) = \int \psi(x, y) dy + \int \left[\varphi(x, y) - \int \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} dy \right] dx = C.$$

Přitom všechny integrační konstanty jsou zahrnuty do konstanty C . V bodech $[x_0, y_0] \in \Omega_2$, kde $\psi(x_0, y_0) \neq 0$, je zaručena existence řešení y jako argumentu

funkce x . Jestliže $\psi(x_0, y_0) = 0$, ale $\varphi(x_0, y_0) \neq 0$, můžeme najít x jakožto funkci argumentu y . Body $[x_0, y_0]$, kde $\varphi(x_0, y_0) = \psi(x_0, y_0) = 0$, se nazývají *singulární body rovnice*.

Příklad:

$$(3x^2 + 8ax + 2by^2 + 3y)dx + (4bxy + 3x + 5)dy = 0.$$

Protože

$$\frac{\partial(3x^2 + 8ax + 2by^2 + 3y)}{\partial y} = 4by + 3,$$

$$\frac{\partial(4bxy + 3x + 5)}{\partial x} = 4by + 3,$$

je levá strana rovnice na celé rovině totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x, y)$. Použijeme vzorce (6) k určení obecného řešení:

$$F(x, y) =$$

$$= \int (3x^2 + 8ax + 2by^2 + 3y)dx +$$

$$+ \int \left[4bxy + 3x + 5 - \int (4by + 3)dx \right] dy =$$

$$= x^3 + 4ax^2 + 2bxy^2 + 3xy + \int \left[4bxy + 3x + 5 - (4bxy + 3x) \right] dy =$$

$$= x^3 + 4ax^2 + 2bxy^2 + 3xy + 5y = C.$$

Singulární body najdeme řešením soustavy rovnic

$$3x^2 + 8ax + 2by^2 + 3y = 0,$$

$$4bxy + 3x + 5 = 0.$$

8.2.6. Integrující faktor [Eulerův multiplikátor]

Výraz $\mu(x, y)$ nazýváme *integrujícím [integračním] faktorem [Eulerovým multiplikátorem]* diferenciální rovnice (která není exaktní)

$$\varphi(x, y)dx + \psi(x, y)dy = 0,$$

jestliže levá strana této rovnice po vynásobení integrujícím faktorem $\mu(x, y)$ bude na oblasti Ω_2 totálním diferenciálem nějaké (kmenové) funkce $F(x, y)$, tj. jestliže bude

$$\frac{\partial[\mu(x, y)\varphi(x, y)]}{\partial y} = \frac{\partial[\mu(x, y)\psi(x, y)]}{\partial x}.$$

Ve speciálních případech lze řešení zpravidla jednodušit tím, že integrující faktor $\mu(x, y)$ hledáme jako funkci buď jen argumentu x , nebo jen argumentu y , popř. jako funkci argumentu $x^2 + y^2$, x/y apod.

Speciální integrující faktory

Integrující faktor závisí jen na argumentu x :

$$\mu = \exp \left[- \int \frac{1}{\psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx \right].$$

Integrující faktor závisí jen na argumentu y :

$$\mu = \exp \left[\int \frac{1}{\varphi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dy \right].$$

Integrující faktor závisí jen na součinu xy :

$$\mu = \exp \left[\int \frac{1}{x\varphi - y\psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dz \right], \quad z = xy.$$

Integrující faktor závisí jen na podílu x/y :

$$\mu = \exp \left[\int \frac{x^2}{x\varphi + y\psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dz \right], \quad z = \frac{y}{x}.$$

Integrující faktor závisí jen na součtu $x^2 + y^2$:

$$\mu = \exp \left[\int \frac{1}{2(y\varphi - x\psi)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dz \right], \quad z = x^2 + y^2.$$

Příklad (srov. příklad v článku 8.2.4):

$$(3x - 2y) dx - x dy = 0.$$

Protože

$$\frac{\partial(3x - 2y)}{\partial y} = -2, \quad \frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1,$$

není rovnice exaktní.

Předpoklad: Integrující faktor závisí jen na argumentu x :

$$\mu = \exp \left[- \int \frac{1}{-x} (-1 + 2) dx \right] = \exp \left(\int \frac{dx}{x} \right) = e^{\ln|x|} = x.$$

Násobíme-li výchozí rovnici integrujícím faktorem $\mu(x, y) = x$, dostaneme diferenciální rovnici

$$(3x^2 - 2xy) dx - x^2 dy = 0,$$

jejíž levá strana již je totálním diferenciálem kmenové funkce.

Řešení:

$$x^3 - x^2 y = C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Singulární body najdeme řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2xy &= 0, \\ -x^2 &= 0, \end{aligned}$$

tj. $x = 0$.

8.2.7. Bernoulliova (diferenciální) rovnice

Jestliže φ, ψ ($\psi \neq 0$) jsou spojité funkce na intervalu J , pak rovnici

$$y' + \varphi(x) y = \psi(x) y^\gamma \quad (\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$$

nazýváme *Bernoulliovou (diferenciální) rovnici*. Rovnici vyšetřujeme na množině $H = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Jestliže $\gamma > 0$, pak také funkce $y = 0$ je řešením Bernoulliovovy rovnice. Jestliže γ je liché číslo, pak řešením Bernoulliovovy rovnice je také funkce $-y$. Jestliže γ je sudé číslo, pak řešení Bernoulliovovy rovnice, na množině $H^* = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ najdeme jako řešení rovnice

$$y' + \varphi(x) y = -\psi(x) y^\gamma.$$

Každým bodem množiny $J \times H$ prochází právě jedna integrální křivka.

Jestliže na intervalu $J_1 \subseteq J$ je $z > 0$ řešením lineární rovnice

$$z' + (1 - \gamma) \varphi(x) z = (1 - \gamma) \psi(x),$$

pak $y = z^{1/(1-\gamma)}$ je řešením Bernoulliovovy rovnice

$$y' + \varphi(x) y = \psi(x) y^\gamma$$

na témže intervalu J .

Příklad:

$$y' + \frac{y}{x} - x^2 y^3 = 0 \quad (J = \mathbb{R}^-, \text{ popř. } \mathbb{R}^+, \quad y \in \mathbb{R}).$$

Řešíme lineární rovnici

$$z' - \frac{2}{x} z = -2x^2.$$

Obecným řešením této rovnice na intervalu J je funkce

$$z = x^2(C - 2x).$$

Podmínce $z > 0$ vyhovují řešení $z = x^2(C - 2x)$, kde $C > 0$ na intervalu $(0, C/2)$, a řešení $z = x^2(C - 2x)$, kde $C < 0$ na intervalu $(-\infty, C/2)$.

Na množině $J \times H$ je obecné řešení dané Bernoulliové rovnice tvaru

$$x^2 y^2(C - 2x) = 1.$$

Jestliže $C > 0$, pak funkce y je obecným řešením rovnice na intervalu $(0, C/2)$, a jestliže $C < 0$, je funkce y obecným řešením na intervalu $(-\infty, C/2)$.

Na množině $J \times H^*$ je obecné řešení dané rovnice také tvaru

$$x^2 y^2(C - 2x) = 1.$$

Funkce $y = 0$ je řešením dané rovnice na intervalu J .

8.2.8. Riccatiova (diferenciální) rovnice

Jestliže φ, ψ, ω $[\varphi(x) \neq 0, \omega \neq 0]$ jsou spojité funkce na intervalu J , pak rovnici

$$y' = \varphi(x) y^2 + \psi(x) y + \omega(x)$$

nazýváme Riccatiovou (diferenciální) rovnicí. Každým bodem množiny $J \times \mathbb{R}$ prochází právě jedno řešení této rovnice. Tato řešení však nelze obecně najít pomocí kvadratur (tj. její řešení nelze převést jen na výpočet integrálů). Jestliže však známe partikulární řešení y_1 , pak lze najít obecné řešení.

Jestliže je na intervalu $J_1 \subseteq J$ funkce $z \neq 0$ řešením rovnice

$$z' = -[\psi(x) + 2\varphi(x) y_1] z - \varphi(x),$$

pak na tomto intervalu je funkce

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

řešením dané Riccatiové rovnice.

Příklad:

Rovnice

$$y' = y^2 - \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2} \quad (J = \mathbb{R}^-, \text{ popř. } \mathbb{R}^+, \quad y \in \mathbb{R})$$

má partikulární integrál $y = 1/x$. Řešme lineární rovnici

$$z' = \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\right)z - 1 = -\frac{z}{x} - 1.$$

Její obecné řešení je

$$z = -\frac{x}{2} + \frac{C}{x} \quad (x \in J, \quad C \in \mathbb{R}).$$

Pro $C \leq 0$ je $z(x) \neq 0$ na celém intervalu J . Pro $C > 0$ je $z(x) = 0$ v bodě $x = \sqrt{(2C)}$, popř. $x = -\sqrt{(2C)}$. Obecné řešení Riccatiové rovnice je pak

$$y = \frac{1}{x} + \frac{2x}{2C - x^2}.$$

Jestliže $C \leq 0$, je jeho definičním oborem celý interval J , a jestliže $C > 0$, jsou definičními obory dva intervaly $(-\infty, -\sqrt{(2C)})$ a $(-\sqrt{(2C)}, 0)$, popř. dva intervaly $(0, \sqrt{(2C)})$ a $(\sqrt{(2C)}, +\infty)$.

8.2.9. Clairautova (diferenciální) rovnice

Jestliže φ je spojitá diferencovatelná funkce na intervalu J , která není lineární [tj. $\varphi(t)$ není tvaru $at + b$], pak rovnici

$$y = xy' + \varphi(y')$$

nazýváme *Clairautovou (diferenciální) rovnici na množině $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R} \times J$, popř. $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times J$* . Jejím obecným řešením je funkce

$$y = kx + \varphi(k) \quad (k \in J, \quad x \neq 0).$$

Singulárním řešením je funkce y , splňující vztah

$$x + \varphi'(y') = 0.$$

Příklad:

$$y = xy' - 2y'^2 + y' \quad (J = \mathbb{R}, \quad x \neq 0).$$

Pak $\varphi(t) = -2t^2 + t$, $\varphi'(t) = -4t + 1$. Řešením je soustava přímek

$$y = kx - 2k^2 + k$$

a křivka splňující vztah

$$x + 1 - 4y = 0$$

neboli

$$y' = \frac{x+1}{4}.$$

Po dosazení nalezené derivace y' do původní rovnice dostaneme singulární integrál

$$y = x \frac{x+1}{4} - 2 \left(\frac{x+1}{4} \right)^2 + \frac{x+1}{4} = \frac{x^2 + 2x + 1}{8}.$$

8.3. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE DRUHÉHO ŘÁDU

Diferenciální rovnice druhého řádu určují pro každý bod $[x, y] \in \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ směr a křivost elementu oblouku. Určení diferenciální rovnice dvouparametrické soustavy křivek $F(x, y, C_1, C_2) = 0$ se provádí obdobně jako u jednoparametrické soustavy (viz článek 8.2.1.).

Příklad:

Určeme diferenciální rovnici všech parabol s vrcholem na ose y .

Rovnici paraboly

$$(y - d)^2 = 2px$$

dvakrát derivujeme:

$$2(y - d)y' = 2p,$$

$$(y - d)y'' + y'^2 = 0.$$

Z prvních dvou rovnic dostaneme

$$(y - d)^2 = 2(y - d)y'x,$$

$$(y - d) = 2y'x$$

a dosadíme do třetí

$$2xy'y'' + y'^2 = 0,$$

$$2xy'' + y' = 0.$$

8.3.1. Zvláštní případy

Diferenciální rovnice bez x a y' (φ je spojitá funkce na intervalu J)

$$y'' = \varphi(y).$$

Je-li k nulový bod funkce φ , pak $y = k$ je řešením dané rovnice. Vynásobme rovnici výrazem $2y'$. Pak

$$2y'y'' = 2\varphi(y)y'$$

neboli

$$(y'^2)' = 2\varphi(y)y'.$$

Integrací dostaneme

$$y'^2 = 2 \int \varphi(y) y' dx = 2 \int \varphi(y) dy.$$

Řešení vyhovující rovnicím

$$y' = \sqrt{\left[2 \int \varphi(y) dy \right]} \quad \text{a} \quad y' = -\sqrt{\left[2 \int \varphi(y) dy \right]}$$

bude vyhovovat dané rovnici. Podmínkami $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $[x_0, y_0, y'_0] \in \mathbb{R} \times J \times \mathbb{R}$ je dáno aspoň jedno řešení. Má-li φ spojitou derivaci, pak uvedenými podmínkami je dáno právě jedno řešení.

Příklad:

$$y'' = -\frac{1}{y^3} \quad (y \neq 0).$$

Zřejmě počátečními podmínkami $y(x_0) = y_0 \neq 0$, $y'(x_0) = y'_0$ je určeno právě jedno řešení. Je-li $y_0 > 0$, je $y(x) > 0$; je-li $y_0 < 0$, je $y(x) < 0$. Je-li y řešením dané rovnice, je také $-y$ řešením dané rovnice. Stačí tedy rovnici vyšetřovat na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Rovnici násobíme výrazem $2y'$. Dostaneme

$$2y'y'' = -2 \frac{y}{y^3}$$

neboli

$$(y'^2)' = \left(\frac{1}{y^2} \right)'$$

neboli

$$y'^2 = \frac{1}{y^2} + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Nyní musíme rozlišit tři případy:

1. $C = 0$ (pak $|y'_0| = 1/y_0$),
2. $C > 0$ (pak $|y'_0| > 1/y_0$),
3. $C < 0$ (pak $|y'_0| < 1/y_0$).

V prvním případě řešíme rovnici

$$y'^2 = \frac{1}{y^2}$$

neboli

$$y' = \frac{1}{y}, \quad \text{popř.} \quad y' = -\frac{1}{y} \quad (y > 0).$$

Obecné řešení rovnice $y' = 1/y$ je tvaru

$$y = \sqrt{[2(x + D)]} \quad (D \in \mathbb{R}, x > -D).$$

Obecné řešení rovnice $y' = -1/y$ je tvaru

$$y = \sqrt{[-2(x + D)]} \quad (D \in \mathbb{R}, x < -D).$$

V druhém případě řešíme rovnici

$$y'^2 = \frac{1}{y^2} + C \quad (C > 0, y > 0)$$

neboli

$$y' = \sqrt{\left(\frac{1}{y^2} + C\right)}, \quad \text{popř.} \quad y' = -\sqrt{\left(\frac{1}{y^2} + C\right)}.$$

Tyto rovnice upravíme na tvar

$$\frac{yy'}{\sqrt{(1 + Cy^2)}} = 1, \quad \text{popř.} \quad \frac{yy'}{\sqrt{(1 + Cy^2)}} = -1,$$

neboli

$$\frac{Kyy'}{\sqrt{(K^2 + y^2)}} = 1, \quad \text{popř.} \quad \frac{Kyy'}{\sqrt{(K^2 + y^2)}} = -1 \quad \left(K^2 = \frac{1}{C} > 0\right).$$

Obecné řešení rovnice $\frac{Kyy'}{\sqrt{(K^2 + y^2)}} = 1$ je tvaru

$$y = \sqrt{\frac{(x + D)^2 - K^4}{K^2}} = \sqrt{\left[C(x + D)^2 - \frac{1}{C}\right]} \quad \left(x + D > \frac{1}{C} > 0\right);$$

obecné řešení rovnice $\frac{Kyy'}{\sqrt{(K^2 + y^2)}} = -1$ je tvaru

$$y = \sqrt{\frac{(x+D)^2 - K^4}{K^2}} = \sqrt{\left[C(x+D)^2 - \frac{1}{C} \right]} \quad \left(x+D < -\frac{1}{C} < 0 \right).$$

Ve třetím případě řešíme rovnici

$$y'^2 = \frac{1}{y^2} + C \quad \left(C < 0, \frac{1}{\sqrt{|C|}} > y > 0 \right)$$

neboli

$$y' = \sqrt{\left(\frac{1}{y^2} + C \right)}, \quad \text{popř. } y' = -\sqrt{\left(\frac{1}{y^2} + C \right)}.$$

Tyto rovnice upravíme na tvar

$$\frac{yy'}{\sqrt{(1 + |C| y^2)}} = 1, \quad \text{popř. } \frac{yy'}{\sqrt{(1 + |C| y^2)}} = -1,$$

neboli

$$\frac{Kyy'}{\sqrt{(K^2 - y^2)}} = 1, \quad \text{popř. } \frac{Kyy'}{\sqrt{(K^2 - y^2)}} = -1 \quad \left(K^2 = \frac{1}{|C|} > 0 \right).$$

Obecné řešení rovnice $\frac{Kyy'}{\sqrt{(K^2 - y^2)}} = 1$ je tvaru

$$y = \sqrt{\frac{K^4 - (x+D)^2}{K^2}} = \sqrt{\left[C(x+D)^2 - \frac{1}{C} \right]} \quad \left(-\frac{1}{C} > x+D > 0 \right);$$

obecné řešení rovnice

$$\frac{Kyy'}{\sqrt{(K^2 - y^2)}} = -1$$

je tvaru

$$y = \sqrt{\frac{K^4 - (x+D)^2}{K^2}} = \sqrt{\left[C(x+D)^2 - \frac{1}{C} \right]} \quad \left(0 > x+D > \frac{1}{C} \right).$$

Diferenciální rovnice bez x a y [φ je spojitá funkce na intervalu J , $\varphi(x) \neq 0$]

$$y'' = \varphi(y').$$

Substitucí $y' = p$, $y'' = p'$ převedeme danou rovnici na rovnici prvního rádu $p' = \varphi(p)$ se separovanými proměnnými. V množině $\mathbb{R} \times J$ má obecné řešení tvar

$$\int \frac{1}{\varphi(p)} dp = x.$$

Předpokládejme, že tuto rovnici lze rozložit vzhledem k p :

$$p = f(x, C);$$

pak

$$y = \int f(x, C) dx.$$

Každým bodem $[x_0, y_0, y'_0] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times J$ prochází aspoň jedno řešení. Je-li φ' spojitá funkce, pak každým bodem $[x_0, y_0, y'_0] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times J$ prochází právě jedno řešení.

Příklad:

$$y'' = 2y'^2 \quad (J = \mathbb{R}).$$

Počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ je určeno právě jedno řešení. Zřejmě $y = k$ je řešení. Ostatní řešení splňují buď $y' > 0$, nebo $y' < 0$.

Substitucí $y' = p$ převedeme danou rovnici na rovnici

$$p' = 2p^2.$$

Separací proměnných dostaneme na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ obecné řešení tvaru

$$-\frac{1}{p} = 2(x - C)$$

neboli

$$p = -\frac{1}{2(x - C)} \quad (C \in \mathbb{R}, x < C);$$

na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ obecné řešení tvaru

$$-\frac{1}{p} = 2(x - C)$$

neboli

$$p = -\frac{1}{2(x - C)} \quad (C \in \mathbb{R}, x > C).$$

Po integrování máme

$$y = - \int \frac{1}{2(x - C)} dx = -\frac{1}{2} \ln |x - C| + D =$$

$$= \ln \frac{D}{\sqrt{|x - C|}} \quad (C \in \mathbb{R}, D > 0, x < C),$$

popř.

$$y = \ln \frac{D}{\sqrt{(x - C)}} \quad (C \in \mathbb{R}, D > 0, x > C).$$

Diferenciální rovnice bez y (φ je spojitá funkce na množině $\Omega_2 \subseteq R^2$):

$$y'' = \varphi(x, y').$$

Substitucí $y' = p$ dostaneme rovnici

$$p' = \varphi(x, p).$$

Jestliže $p = p(x, C)$ je obecné řešení této rovnice, pak

$$y = \int p(x, C) dx.$$

Každým bodem $[x_0, y'_0, y_0] \in \Omega_2 \times \mathbb{R}$ prochází aspoň jedno řešení. Spojitost funkce $\partial\varphi/\partial y'$ zaručuje jednoznačnost řešení.

Příklad:

$$xy' + y' - 1 = 0 \quad (x \neq 0)$$

neboli

$$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{1}{x} = 0.$$

Funkce

$$\varphi(u, v) = -\frac{v - 1}{u}$$

je spojité diferencovatelná pro $u \neq 0$. Substitucí $y' = p$ převedeme danou rovnici na lineární rovnici prvního řádu tvaru

$$p' + \frac{p}{x} - \frac{1}{x} = 0.$$

Obecným řešením homogenní rovnice

$$p' + \frac{p}{x} = 0$$

je funkce

$$p = \frac{C}{x}.$$

Metodou variace konstant dostaneme obecné řešení nehomogenní rovnice

$$p = \frac{C}{x} + 1.$$

Obecné řešení původní rovnice je

$$y = \int \left(\frac{C}{x} + 1 \right) dx = C \ln |x| + x + D \quad (x \neq 0).$$

Diferenciální rovnice bez x (φ je spojitá funkce na množině $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^2$):

$$y'' = \varphi(y, y').$$

Každým bodem $[x_0, y_0, y'_0] \in \mathbb{R} \times \Omega_2$ prochází aspoň jedno řešení. Spojitost funkcí $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial y'$ zaručuje jednoznačnost. Nejprve najdeme obecné řešení $p = p(y, C)$ rovnice

$$\frac{dp}{dy} = \varphi(y, p) \frac{1}{p}.$$

Obecné řešení dané rovnice najdeme ze vztahu

$$y' = p(y, C).$$

Příklad:

$$y'' = y'^2 \frac{1}{y} \quad (y \neq 0).$$

Každým bodem $[x_0, y_0, y'_0] \in \mathbb{R}^3$ ($y_0 \neq 0$) bude procházet právě jedno řešení. Nejprve řešíme rovnici

$$\frac{dp}{dy} = p^2 \frac{1}{y} \frac{1}{p} = \frac{p}{y}.$$

Obecné řešení této rovnice na množině $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ je tvaru

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y}$$

neboli

$$p = Cy \quad (y \neq 0, C \in \mathbb{R}).$$

Obecné řešení dané rovnice dostaneme ze vztahu

$$y' = Cy$$

neboli

$$y = D e^{Cx} \quad (x \in \mathbb{R}, D \neq 0).$$

8.3.2. Homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0).$$

Každým bodem $[x_0, y_0, y'_0] \in \mathbb{R}^3$ prochází právě jedno řešení. Najdeme řešení

$$r_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

charakteristické rovnice

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Případ 1:

$$r_1 \neq r_2 \quad (r_1, r_2 \in \mathbb{R}):$$

Pak řešení diferenciální rovnice je

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}).$$

Případ 2:

$$r_1 = r_2 = r \quad (r \in \mathbb{R}):$$

Pak řešení diferenciální rovnice je

$$y = e^{rx} (C_1 x + C_2) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}).$$

Případ 3:

$$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}):$$

Pak řešení diferenciální rovnice je

$$y = e^{\alpha x} [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] = C e^{\alpha x} \sin(\beta x + \varphi) \\ (C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \text{ popř. } C, \varphi \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}).$$

Příklad 1:

$$2y'' - 8y' + 6y = 0.$$

Charakteristická rovnice je

$$2r^2 - 8r + 6 = 0, \\ r^2 - 4r + 3 = 0; \quad r_1 = 3, \quad r_2 = 1 \quad (\text{případ 1}).$$

Obecné řešení

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x.$$

Příklad 2:

$$3y'' + 18y' + 27y = 0.$$

Charakteristická rovnice je

$$3r^2 + 18r + 27 = 0; \quad r_{1,2} = -3 \quad (\text{případ 2}).$$

Obecné řešení

$$y = e^{-3x} (C_1 x + C_2).$$

Příklad 3:

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Charakteristická rovnice je

$$r^2 + 2r + 5 = 0; \quad r_{1,2} = -1 \pm 2i \quad (\text{případ 3}).$$

Obecné řešení

$$y = e^{-x} [C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)].$$

8.3.3. Homogenní lineární diferenciální rovnice druhého rádu s proměnnými koeficienty

$$y'' \varphi(x) + y' \psi(x) + y \omega(x) = 0,$$

kde φ [$\varphi(x) \neq 0$], ψ a ω jsou spojité funkce na nějakém intervalu J . Každým bodem $[x_0, y_0, y'_0] \in J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ prochází právě jedno řešení.

K řešení dané rovnice je třeba najít partikulární integrál y_1 . Pak můžeme na intervalu, kde $y \neq 0$, zavést substituci

$$y = y_1 z.$$

Daná rovnice přejde v rovnici

$$y_1 z'' \varphi(x) + [2y'_1 \varphi(x) + y_1 \psi(x)] z' = 0.$$

Zavedením další substituce $z' = u$ vznikne diferenciální rovnice prvního řádu (snížení řádu):

$$y'_1 u' \varphi(x) + [2y'_1 \varphi(x) + y_1 \psi(x)] u = 0.$$

Příklad:

$$x^2 (\ln|x| - 1) y'' - xy' + y = 0$$

$$[J = (-\infty, -e), \text{ popř. } (-e, 0), \text{ popř. } (0, e), \text{ popř. } (e, +\infty)].$$

Každým bodem $J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ prochází právě jedno řešení.

Partikulární integrál: $y_1 = x$.

Substituce:

$$y = y_1 z = xz,$$

$$y' = xz' + z,$$

$$y'' = xz'' + 2z'.$$

Po dosazení dostaneme

$$x^3(\ln|x| - 1) z'' + x^2(2 \ln|x| - 3) z' = 0.$$

Po substituci $z' = u$, $z'' = u'$ dostaneme diferenciální rovnici prvního řádu (snížení řádu):

$$xu'(\ln|x| - 1) = u(3 - 2 \ln|x|).$$

Po separaci proměnných je na množině $J_1 \times J_2$, kde J_1 je $(-\infty, -e)$, popř. $(-e, 0)$, popř. $(0, e)$, popř. $(e, +\infty)$ a J_2 je \mathbb{R}^- , popř. \mathbb{R}^+ , obecné řešení

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{3 - 2 \ln|x|}{x(\ln|x| - 1)} dx.$$

V integrálu na pravé straně rovnice zavedeme substituci

$$\ln|x| = v.$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{3 - 2 \ln|x|}{x(\ln|x| - 1)} dx &= 3 \int \frac{dv}{v-1} - 2 \int \frac{v dv}{v-1} = \\ &= 3 \ln|v-1| - 2 \int \left(1 + \frac{1}{v-1}\right) dv = \\ &= 3 \ln|v-1| - 2v - 2 \ln|v-1| + \ln|C_1| = \\ &= \ln|C_1| \frac{\ln|x| - 1}{x^2} \quad (C_1 \neq 0). \end{aligned}$$

Pak obecné řešení je

$$u = C_1 \frac{\ln|x| - 1}{x^2} \quad (C_1 > 0, |x| > e),$$

popř.

$$u = C_1 \frac{\ln|x| - 1}{x^2} \quad (C_1 < 0, 0 < |x| < e).$$

Odtud

$$z = \int C_1 \frac{\ln|x| - 1}{x^2} dx.$$

Integrováním dostaneme

$$z = C_2 - \frac{C_1}{x} \ln|x|,$$

odkud pro $x \in J$ plyne

$$y = C_2 x - C_1 \ln|x|.$$

8.3.4. Eulerova diferenciální rovnice druhého řádu bez pravé strany [homogenní Eulerova diferenciální rovnice]

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0,$$

kde a ($a \neq 0$), b, c jsou konstanty a $x \in \mathbb{R}^-$, popř. $x \in \mathbb{R}^+$. Každým bodem $[x_0, y_0, y'_0] \in \mathbb{R}^3$ ($x_0 \neq 0$) prochází právě jedno řešení.

Najdeme řešení charakteristické rovnice:

$$ar(r-1) + br + c = 0,$$

$$ar^2 + (b-a)r + c = 0;$$

$$r_{1,2} = \frac{a-b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{a-b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)}.$$

Případ 1: $r_1 \neq r_2$ ($r_1, r_2 \in \mathbb{R}$):

Pak řešení diferenciální rovnice je

$$y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \neq 0).$$

Případ 2: $r_1 = r_2 = r$ ($r \in \mathbb{R}$):

Pak řešení diferenciální rovnice je

$$y = x^r (C_1 \ln |x| + C_2) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \neq 0).$$

Případ 3: $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

Pak řešení diferenciální rovnice je

$$y = x^{\alpha} [\cos(\beta \ln |x|) + C_2 \sin(\beta \ln |x|)] \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \neq 0).$$

Příklad 1:

$$x^2 y'' + 5xy' - 12y = 0.$$

Charakteristická rovnice:

$$r(r-1) + 5r - 12 = 0,$$

$$r^2 + 4r - 12 = 0; \quad r_1 = 2, \quad r_2 = -6$$

(případ 1).

Řešení diferenciální rovnice je

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^{-6} = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x^6}.$$

Příklad 2:

$$4x^2 y'' - 16xy' + 25y = 0.$$

Charakteristická rovnice:

$$4r(r-1) - 16r + 25 = 0,$$

$$4r^2 - 20r + 25 = 0; \quad r_1 = r_2 = \frac{5}{2}$$

(případ 2).

Řešení diferenciální rovnice je

$$\begin{aligned} y &= x^{5/2} (C_1 \ln |x| + C_2) = (\sqrt{x^5}) (C_1 \ln |x| + C_2) = \\ &= x^2 (\sqrt{x}) (C_1 \ln |x| + C_2). \end{aligned}$$

Příklad 3:

$$x^2 y'' - 7xy' + 20y = 0.$$

Charakteristická rovnice:

$$r(r-1) - 7r + 20 = 0,$$

$$r^2 - 8r + 20 = 0; \quad r_{1,2} = 4 \pm 2i$$

(případ 3).

Řešení diferenciální rovnice je

$$y = x^4 [C_1 \cos(2 \ln |x|) + C_2 \sin(2 \ln |x|)]$$

8.3.5. Nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu

$$y'' \varphi_1(x) + y' \varphi_2(x) + y \varphi_3(x) = \varphi_4(x),$$

kde φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) jsou spojité funkce na nějakém intervalu J , $\varphi_1(x) \neq 0$ a funkce φ_4 není identicky rovna nule. Po dělení funkcí φ_1 dostáváme normovaný tvar uvedené rovnice

$$y'' + y' \varphi(x) + y \psi(x) = \omega(x) \quad (\omega \neq 0).$$

Každým bodem $[x_0, y_0, y'_0] \in J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ prochází právě jedno řešení.

Postup řešení: Jsou-li y_1 a y_2 taková dvě partikulární řešení homogenní rovnice

$$y'' + y' \varphi(x) + y \psi(x) = 0,$$

že

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ y'_1, & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

v každém bodě $x \in J$, pak obecné řešení této rovnice je tvaru

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice najdeme metodou variace konstant:

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2;$$

pak

$$y' = C'_1(x) y_1 + C_1(x) y'_1 + C'_2(x) y_2 + C_2(x) y'_2.$$

Položíme

$$C'_1(x) y_1 + C'_2(x) y_2 = 0.$$

Pak

$$y'' = C'_1(x) y'_1 + C_1(x) y''_1 + C'_2(x) y'_2 + C_2(x) y''_2$$

a po dosazení do rovnic máme

$$\begin{aligned} & C'_1(x) y'_1 + C_1(x) y''_1 + C'_2(x) y'_2 + C_2(x) y''_2 + \\ & + C_1(x) y'_1 \varphi(x) + C_2(x) y'_2 \varphi(x) + C_1(x) y_1 \psi(x) + C_2(x) y_2 \psi(x) = \\ & = C'_1(x) y'_1 + C'_2(x) y'_2 = \omega(x). \end{aligned}$$

Získali jsme tedy pro funkce C_1 a C_2 soustavu dvou rovnic

$$C'_1(x) y_1 + C'_2(x) y_2 = 0,$$

$$C'_1(x) y'_1 + C'_2(x) y'_2 = \omega(x).$$

Protože determinant soustavy je pro každé číslo $x \in J$ různý od nuly, lze z této soustavy vypočítat funkce C'_1 a C'_2 a integrací najít funkce C_1 a C_2 .

Obecné řešení nehomogenní rovnice pak je

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x).$$

Příklad:

$$x^2 y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = x^4 \quad (x \neq 0).$$

Dělíme-li danou rovnici mocninou x^2 , dostaneme normovaný tvar nehomogenní diferenciální rovnice druhého řádu:

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{x^2 + 2}{x^2} y = x^2.$$

Nejprve řešíme homogenní diferenciální rovnici

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{x^2 + 2}{x^2} y = 0.$$

Tato rovnice má partikulární integrál $y_1 = x \sin x$. Postupujeme podle článku 8.3.3.

Položíme-li $y = y_1 z = zx \sin x$ [$x \in (2\pi, (2k+1)\pi)$, popř. $x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$; $k \in \mathbf{Z}$] dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} z''x \sin x + (2 \sin x + x \cos x + 2 \sin x)z' &= \\ &= z'' \sin x + z' \cos x = 0. \end{aligned}$$

Položíme-li $z' = u$, dostaneme rovnici $u' \sin x + u \cos x = 0$. Její obecné řešení je

$$u = \frac{C}{\sin x} \quad (x \neq 2k\pi; k \in \mathbf{Z}, C \in \mathbf{R}).$$

Pak

$$z = C \int \frac{dx}{\sin x} = C \cot g x + D \quad (x \neq 2k\pi; k \in \mathbf{Z}, C, D \in \mathbf{R}).$$

Odtud hledaný obecný integrál homogenní diferenciální rovnice tedy je

$$y = (C \cot g x + D)x \sin x = x(D \sin x + C \cos x) \quad (C, D \in \mathbf{R}).$$

Tato funkce je spojitá ve všech bodech x , kde daná rovnice má smysl.

Obecný integrál nehomogenní diferenciální rovnice najdeme nyní pomocí metody variace konstant. Dosadíme-li za C a D po řadě funkce $C(x)$ a $D(x)$, máme

$$y = x[C(x) \cos x + D(x) \sin x].$$

Dosadíme-li tuto funkci do nehomogenní diferenciální rovnice a klademe-li

$$C'(x) \cos x + D'(x) \sin x = 0,$$

pak

$$y' = C(x) \cos x + D(x) \sin x + x[-C(x) \sin x + D(x) \cos x],$$

$$\begin{aligned} y'' &= [-C(x) \sin x + D(x) \cos x] \cdot 2 + \\ &\quad + x[-C'(x) \sin x + D'(x) \cos x - C(x) \cos x - D(x) \sin x], \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} &2[-C(x) \sin x + D(x) \cos x] + \\ &+ x[-C'(x) \sin x + D'(x) \cos x - C(x) \cos x - D(x) \sin x] - \\ &- \frac{2}{x}[C(x) \cos x + D(x) \sin x] - 2[-C(x) \sin x + D(x) \cos x] + \\ &+ \frac{x^2 + 2}{x}[C(x) \cos x + D(x) \sin x] = \\ &= x[-C'(x) \sin x + D'(x) \cos x] = x^2. \end{aligned}$$

Dohromady s dodatečnou podmínkou platí tedy soustava rovnic

$$-C'(x) \sin x + D'(x) \cos x = x,$$

$$C'(x) \cos x + D'(x) \sin x = 0.$$

Její determinant soustavy je

$$\begin{vmatrix} -\sin x, & \cos x \\ \cos x, & \sin x \end{vmatrix} = -1.$$

Soustava má tedy řešení

$$C'(x) = \begin{vmatrix} x, & \cos x \\ 0, & \sin x \end{vmatrix} = -x \sin x,$$

$$D'(x) = \begin{vmatrix} -\sin x, & x \\ \cos x, & 0 \end{vmatrix} = x \cos x,$$

odkud

$$C(x) = \int x \sin x = x \cos x - \sin x,$$

$$D(x) = - \int x \cos x = x \sin x + \cos x.$$

Obecný integrál nehomogenní diferenciální rovnice na množině $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je

$$\begin{aligned}y &= x[C \cos x + D \sin x] + \\&\quad + x[-\sin x \cos x + x \cos^2 x + x \sin^2 x + \cos x \sin x] = \\&= Cx \cos x + Dx \sin x + x^2.\end{aligned}$$

8.3.6. Nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$ay'' + by' + cy = s(x) \quad (x \in J),$$

kde a ($a \neq 0$), b , c jsou konstanty a s je spojitá funkce na intervalu J .

Nejprve řešíme homogenní diferenciální rovnici pro $s(x) \equiv 0$, jak je uvedeno v článku 8.3.2. Potom hledáme partikulární řešení nehomogenní diferenciální rovnice (tj. s pravou stranou) metodou variace konstant. V jednotlivých případech lze najít partikulární integrál rovnice s pravou stranou rychleji:

Nechť $p + qi$ není kořenem charakteristické rovnice. Nechť funkce s má tvar

$$s(x) = e^{px}[P(x) \cos(qx) + Q(x) \sin(qx)],$$

kde P a Q jsou po řadě mnohočleny m -tého a n -tého stupně. Pak partikulární integrál rovnice

$$ay'' + by' + cy = s(x)$$

má tvar

$$y_p(x) = e^{px}[R(x) \cos(qx) + S(x) \sin(qx)],$$

kde R, S jsou mnohočleny stupně $\max\{m, n\}$.

Je-li $p + qi$ jednoduchým kořenem charakteristické rovnice, pak partikulární integrál má tvar

$$y_p(x) \propto e^{px}[R(x) \cos(qx) + S(x) \sin(qx)],$$

kde R, S jsou opět mnohočleny stupně $\max\{m, n\}$.

Je-li p dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice a funkce s je tvaru

$$s(x) = P(x) e^{px},$$

kde P je mnohočlen m -tého stupně, pak partikulární integrál rovnice $ay'' + by' + cy = s(x)$ má tvar

$$y_p = x^2 R(x) e^{px},$$

kde R je mnohočlen m -tého stupně. Je-li funkce s součtem funkcí s_i tvaru $e^{px} [P(x) \cos(qx) + Q(x) \sin(qx)]$, pak partikulární řešení rovnice

$$ay'' + by' + cy = s(x)$$

je součtem partikulárních řešení rovnic

$$ay'' + by' + cy = s_i(x).$$

Řešení nehomogenní diferenciální rovnice se pak rovná součtu obecného řešení příslušné homogenní diferenciální rovnice a partikulárního řešení nehomogenní rovnice.

Příklad 1:

$$y'' - 2y' - 8y = 3 \sin x.$$

Řešení příslušné homogenní diferenciální rovnice:

$$y'' - 2y' - 8y = 0.$$

Charakteristická rovnice:

$$r^2 - 2r - 8 = 0; \quad r_1 = 4, \quad r_2 = -2.$$

Řešení homogenní diferenciální rovnice tedy je

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}.$$

Protože $s(x) = 3 \sin x$, hledáme partikulární integrál ve tvaru

$$y = A \sin x + B \cos x,$$

$$y' = A \cos x - B \sin x,$$

$$y'' = -A \sin x - B \cos x.$$

Po dosazení do výchozí rovnice máme

$$\begin{aligned} -A \sin x - B \cos x - 2A \cos x + 2B \sin x - 8A \sin x - 8B \cos x &= \\ &= 3 \sin x. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$-9A + 2B = 3,$$

$$-9B - 2A = 0,$$

odkud

$$A = -\frac{27}{85}, \quad B = \frac{6}{85}.$$

Obecné řešení dané diferenciální rovnice tedy je

$$y = C_1 e^{4x} + \frac{C_2}{e^{2x}} - \frac{27}{85} \sin x + \frac{6}{85} \cos x.$$

Příklad 2 (případ rezonance):

$$y'' + y' - 2y = \frac{1}{2}e^x.$$

Charakteristická rovnice příslušné homogenní diferenciální rovnice:

$$r^2 + r - 2 = 0; \quad r_1 = 1, \quad r_2 = -2.$$

Obecné řešení homogenní diferenciální rovnice je

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Protože $s(x) = \frac{1}{2}e^x$, hledáme řešení ve tvaru

$$y = Ax e^x,$$

$$y' = A e^x + Ax e^x,$$

$$y'' = 2A e^x + Ax e^x.$$

Po dosazení do výchozí rovnice máme

$$2A e^x + Ax e^x + A e^x + Ax e^x - 2Ax e^x = 3A e^x = \frac{1}{2}e^x.$$

Odtud $A = \frac{1}{6}$, a obecné řešení dané rovnice tedy je

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6} e^x.$$

8.3.7. Eulerova diferenciální rovnice druhého řádu s pravou stranou [úplná Eulerova diferenciální rovnice]

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = \varphi(x),$$

kde a ($a \neq 0$), b , c jsou konstanty a $\varphi(x)$ je spojitá funkce na intervalu J ($0 \notin J$).

Nejprve řešíme homogenní Eulerovu diferenciální rovnici

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0,$$

jak je uvedeno v článku 8.3.4. Potom hledáme partikulární řešení nehomogenní rovnice metodou variace konstant. V jednotlivých případech lze najít partikulární integrál rovnice s pravou stranou rychleji tímto postupem:

a) Pravá strana rovnice je polynom n -tého stupně. Hledáme řešení ve tvaru

$$y = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots + K.$$

b) Pravá strana rovnice je funkce obsahující výraz e^{nx} . Hledáme řešení ve tvaru

$$y = A e^{nx},$$

kde e^{nx} je výraz vyskytující se na pravé straně.

c) Pravá strana je funkce $\sin(mx)$ nebo $\cos(mx)$ nebo lineární kombinace obou těchto funkcí. Řešení hledáme ve tvaru

$$y = A \sin(mx) + B \cos(mx).$$

d) Pravá strana je funkce $\sinh(mx)$ nebo $\cosh(mx)$ nebo lineární kombinace obou těchto funkcí. Řešení hledáme ve tvaru

$$y = A \sinh(mx) + B \cosh(mx).$$

e) Pravá strana je algebraickým součtem předchozích jednotlivě uvedených funkcí. Řešení je pak rovněž algebraickým součtem příslušných tvarů řešení. Řešení diferenciální rovnice s pravou stranou je pak součtem obecného řešení rovnice bez pravé strany a nalezeného partikulárního řešení rovnice s pravou stranou.

Příklad:

$$x^2y'' - 2xy' - 10y = 2x^2 - 3x + 10.$$

Řešení příslušné homogenní diferenciální rovnice:

$$x^2y'' - 2xy' - 10y = 0.$$

Charakteristická rovnice:

$$r(r-1) - 2r - 10 = 0,$$

$$r^2 - 3r - 10 = 0; \quad r_1 = 5, \quad r_2 = -2.$$

Homogenní diferenciální rovnice má tedy obecný integrál

$$y = C_1 x^5 + C_2 x^{-2}.$$

Partikulární integrál se určí takto:

Vzhledem k tvaru pravé strany hledáme řešení ve tvaru

$$\begin{aligned}y &= Ax^2 + Bx + C, \\y' &= 2Ax + B, \\y'' &= 2A.\end{aligned}$$

Po dosazení do výchozí rovnice je

$$x^2 \cdot 2A - 2x(2Ax + B) - 10(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 3x + 10$$

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$\begin{aligned}x^2(2A - 4A - 10A) &= 2x^2, \\x(-2B - 10B) &= -3x, \\-10C &= 10.\end{aligned}$$

Je tedy

$$A = -\frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = -1.$$

Partikulární integrál je

$$y_1 = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x - 1.$$

Diferenciální rovnice s pravou stranou má tedy obecné řešení

$$y = C_1 x^5 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x - 1.$$

8.4. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE TŘETÍHO ŘÁDU

8.4.1. Homogenní lineární diferenciální rovnice třetího řádu s konstantními koeficienty

$$y''' + ay'' + by' + cy = 0,$$

kde a, b, c jsou konstanty.

Najdeme řešení charakteristické rovnice

$$r^3 + ar^2 + br + c = 0.$$

Případ 1: $r_1 \neq r_2 \neq r_3, \quad r_3 \neq r_1 \quad (r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R})$:

Pak řešení diferenciální rovnice je

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x}.$$

Případ 2: $r_1 = r_2 = r, \quad r_3 \neq r \quad (r, r_3 \in \mathbb{R})$:

Pak řešení diferenciální rovnice je

$$y = (C_1 x + C_2) e^{rx} + C_3 e^{r_3 x}.$$

Případ 3: $r_1 = r_2 = r_3 = r \quad (r \in \mathbb{R})$:

Pak řešení diferenciální rovnice je

$$y = (C_1 x^2 + C_2 x + C_3) e^{rx}.$$

Případ 4: $r_1 \in \mathbb{R}, \quad r_{2,3} = \alpha \pm i\beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$:

Pak řešení diferenciální rovnice je

$$y = C_1 e^{\alpha x} + [C_2 \cos(\beta x) + C_3 \sin(\beta x)] e^{\alpha x}.$$

Tuto metodu lze snadno zobecnit pro homogenní diferenciální rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty.

Má-li homogenní lineární diferenciální rovnice n -tého řádu n nezávislých řešení y_1, y_2, \dots, y_n (tj. determinant

$$\begin{vmatrix} y_1, & \dots, & y_n \\ y'_1, & \dots, & y'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}, & \dots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

je různý od nuly), pak obecné řešení má tvar

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n.$$

8.4.2. Nehomogenní lineární diferenciální rovnice třetího řádu s konstantními koeficienty

$$y''' + ay'' + by' + cy = \varphi(x),$$

kde a, b, c jsou konstanty a $\varphi(x)$ je spojitá funkce na intervalu J .

Tato diferenciální rovnice se obdobně jako nehomogenní diferenciální rovnice druhého řádu (viz str. 677) vyšetřuje tak, že se nejprve řeší příslušná homogenní diferenciální rovnice a pak se bud' pomocí vhodné substituce, nebo metodou variace konstant hledá partikulární integrál. Součet obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení nehomogenní rovnice dává obecné řešení dané diferenciální rovnice.

Této metody lze také obdobně použít při řešení diferenciálních rovnic vyššího řádu.

8.5. INTEGROVÁNÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC POMOCÍ MOCNINNÝCH ŘAD

Je-li $f(x, y)$ analytická funkce na oboru $x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$, $y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$, pak na určitém okolí bodu x_0 existuje analytické řešení

$$y(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$$

rovnice

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Koefficienty rozvoje řešení y určíme porovnáním koefficientů u stejných mocnin. Každý částečný součet řady pro $y(x)$ lze považovat za přibližné řešení úlohy. Poloměr konvergence mocninné řady určíme známými metodami teorie mocninných řad.

Příklad:

$$y' = y^2 + x^3, \quad y_0 = y(0) = -1.$$

Položíme

$$y = -1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i;$$

pak

$$y' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}.$$

Po dosazení do výchozí rovnice máme

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} = \left(-1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \right)^2 + x^3.$$

Porovnáním koefficientů máme

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_1 &= 1, \\ 2a_2 &= -2a_1, & a_2 &= -1, \\ 3a_3 &= a_1^2 - 2a_2, & a_3 &= \frac{1}{3}(1 + 2) = 1, \\ 4a_4 &= 1 - 2a_3 + 2a_1 a_2, & a_4 &= \frac{1}{4}(1 - 2 - 2) = -\frac{3}{4}, \quad \text{atd.} \end{aligned}$$

Přibližné řešení:

$$y \approx -1 + x - x^2 + x^3 - \frac{3}{4}x^4.$$

Besselova (diferenciální) rovnice

Homogenní lineární diferenciální rovnice

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2) y = 0 \quad (x \neq 0)$$

se nazývá *Besselova (diferenciální) rovnice*. Konstanta p se nazývá *index Besselovy (diferenciální) rovnice*. Řešením jsou tzv. *Besselovy funkce*, které lze vytvořit kombinováním elementárních funkcí jen pro index

$$p = \frac{2n+1}{2} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

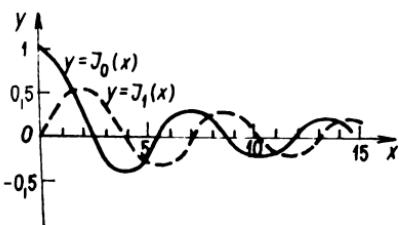
Obecné řešení pro $p \notin \mathbb{Z}$:

$$y = C J_p(x) + D Y_p(x),$$

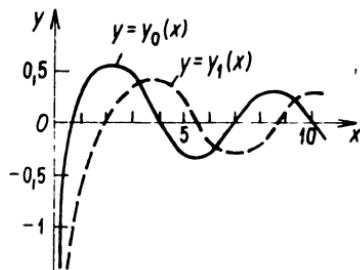
kde

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

(obr. 381).



Obr. 381. Besselovy funkce prvního druhu



Obr. 382. Besselovy funkce druhého druhu [Weberovy funkce]

Obecné řešení pro $p \in \mathbb{Z}$:

$$y = C J_p(x) + D Y_p(x),$$

kde

$$Y_p(x) = \lim_{\substack{m \rightarrow p \\ m \neq p}} \frac{J_m(x) \cos(m\pi) - J_{-m}(x)}{\sin(m\pi)}$$

(obr. 382).

Přitom Γ je tzv. *funkce gama*, definovaná buď vztahem

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0),$$

nebo vztahem

$$\Gamma(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p! p^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\dots(x+p-1)} \quad (p \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}).$$

Funkce gama splňuje tyto vztahy:

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x),$$

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)},$$

$$\Gamma(x) \Gamma(x + \tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \Gamma(2x);$$

pro $x \in \mathbb{N}$ platí

$$\Gamma(x) = (x-1)!.$$

Funkce J_p a Y_p jsou pro $p \in \mathbb{N}$ tabelovány (viz např. [206]).

Mezi Besselovými funkcemi s různými indexy platí vztahy

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x),$$

$$\frac{dJ_p(x)}{dx} = -\frac{p}{x} J_p(x) + J_{p-1}(x).$$

8.6. PARCIÁLNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

8.6.1. Základní pojmy

Parciální diferenciální rovnici n -tého řádu v m proměnných x_1, x_2, \dots, x_m nazýváme rovnici tvaru

$$F\left(x_1, \dots, x_m, y, \frac{\partial y}{x_1}, \dots, \frac{\partial y}{x_m}, \frac{\partial^2 y}{x_1^2}, \dots, \frac{\partial^n y}{x_m^n}\right) = 0, \quad (1)$$

kde $m \in \mathbb{N}$ a $F: \Omega_{mn+m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega_{mn+m+1} \subseteq \mathbb{R}^{mn+m+1}$). Přitom levá strana rovnice závisí v každém případě aspoň na jedné n -té derivaci hledané funkce.

Řešením [integrálem, integrální plochou, integrální varietou] rovnice (1) na určité oblasti $\Omega_m \subseteq \mathbb{R}^m$ nazýváme každou funkci $\varphi: \Omega_m \rightarrow \mathbb{R}$, která má všechny požadované parciální derivace na oblasti Ω_m a která po dosazení do rovnice (1) tuto rovnici splňuje. Řešení nemusí být dáno v explicitním tvaru

$y = \varphi(x_1, \dots, x_m)$, ale může být dáno i implicitně rovnici $u(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$.

U parciálních diferenciálních rovnic nelze mluvit o obecném řešení. U některých jednoduchých rovnic lze uvést obecný integrál, který závisí na jedné nebo několika libovolných funkčích.

8.6.2. Jednoduché parciální diferenciální rovnice

V následujícím přehledu symboly w, w_1, w_2 značí libovolné funkce, které mají dostatečný počet derivací.

Rovnice	Řešení
$z_x = 0$	$z = w(y)$
$z_y = 0$	$z = w(x)$
$z_{xx} = 0$	$z = x w_1(y) + w_2(y)$
$z_{yy} = 0$	$z = y w_1(x) + w_2(x)$
$z_{xy} = 0$	$z = w_1(x) + w_2(y)$
$z_x - z_y = 0$	$z = w(x + y)$
$z_{xy} = f(x, y)$	$z = \iint f(x, y) dx dy + w_1(x) + w_2(y)$
$z_{xx} - z_{yy} = 0$	$z = w_1(x + y) + w_2(x - y)$
$z_x + z_y = 0$	$z = w(x - y)$
$z_{xx} - \frac{z_{yy}}{t^2} = 0$	$z = w_1(x + ty) + w_2(x - ty)$ $(t^2 \neq 0 \text{ je reálná konstanta})$
$az_x + bz_y = 0$	$z = w(ay - bx)$
$z_{xx} + z_{yy} = 0$	$z = w_1(x + iy) + w_2(x - iy)$
$z_x g_y - z_y g_x = 0$	$z = w(g(x, y))$ $(g \text{ je daná funkce proměnných } x, y)$
$xz_x - yz_y = 0$	$z = w(xy)$
$yz_x - xz_y = 0$	$z = w(x^2 + y^2)$

8.6.3. Lineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu ve dvou proměnných

Lineární parciální diferenciální rovnici prvního řádu ve dvou proměnných nazýváme rovnici

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z), \quad (2)$$

kde P, Q, R jsou spojité funkce proměnných x, y, z na nějaké oblasti Ω_3 .
Najdeme-li řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{R}{P} \quad (3)$$

ve tvaru

$$u(x, y, z) = C_1, \\ v(x, y, z) = C_2,$$

pak obecné řešení rovnice (2) je tvaru

$$w(u, v) = 0,$$

kde w je libovolná diferencovatelná funkce dvou proměnných. K tomu, aby-chom mohli funkci w jednoznačně určit, je třeba znát tzv. *okrajovou podmínu*.

Poznámka:

Místo soustavy (3) můžeme řešit soustavu

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P}{R}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{R}{Q},$$

popř. soustavu

$$\frac{dx}{dz} = \frac{P}{R}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{Q}{R}.$$

O řešení takové soustavy viz např. [147]. V následujícím příkladu ukážeme jednoduchý případ.

Příklad:

$$2xy \frac{\partial z}{\partial x} + 4y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y.$$

Pak soustavě

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{2}$$

vyhovují řešení

$$y = C_1 x^2,$$
$$z = \frac{x^2}{4} + C_2,$$

neboli

$$\frac{y}{x^2} = C_1, \quad (4)$$
$$z - \frac{x^2}{4} = C_2.$$

Obecné řešení dané rovnice je

$$w\left(\frac{y}{x^2}, z - \frac{x^2}{4}\right) = 0,$$

kde w je libovolná diferencovatelná funkce dvou proměnných.

Požadujeme-li, aby hledané řešení splňovalo podmínu $z(x, 4) = \frac{5}{4}x^2$, pak z rovnic (4) dostaneme

$$C_1 = \frac{4}{x^2},$$

$$C_2 = \frac{5}{4}x^2 - \frac{x^2}{4} = x^2.$$

Odtud $C_1 C_2 = 4$, a tedy

$$\frac{y}{x^2} \left(z - \frac{x^2}{4} \right) = 4$$

neboli

$$z = \frac{4x^2}{y} + \frac{x^2}{4} = x^2 \left(\frac{4}{y} + \frac{1}{4} \right).$$

9. NEKONEČNÉ ŘADY, FOURIEROVY ŘADY, FOURIERŮV INTEGRÁL, LAPLACEOVA TRANSFORMACE

9.1. ŘADY

9.1.1. Základní pojmy

Definice:

Je-li $\{a_k\}$ číselná posloupnost, pak *nekonečnou číselnou řadou* (stručně *číselnou řadou nebo řadou*) nazýváme výraz

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_k,$$

který často stručněji značíme $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nebo $\sum a_k$. Sčítanec a_k se nazývá *k-tý člen řady*. Výraz $s_n = \sum_{i=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ se nazývá *n-tý částečný součet řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$. Posloupnost

$$\{s_k\} = (s_1, s_2, s_3, \dots) = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots)$$

se nazývá *posloupnost částečných součtů řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$.

Příklady:

$$\{a_k\} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots),$$

$$\begin{aligned} \{s_k\} &= (1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \dots) = \\ &= (1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}, \dots), \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots.$$

9.1.2. Kritéria konvergencie řad

Konvergentní a divergentní řady

Říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je *konvergentní* [*konverguje*], jestliže existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ posloupnosti částečných součtů $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ a má konečnou hodnotu s , která se nazývá *součet konvergentní řady*.

Řada $\{a_k\}$ se nazývá *určitě divergentní*, resp. *neurčitě divergentní*, jestliže posloupnost $\{s_n\}$ jejích částečných součtů má nevlastní limitu, resp. neexistuje její vlastní ani nevlastní limity.

Říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je *absolutně konvergentní* [*konverguje absolutně*], jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje.

Říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je *neabsolutně [relativně] konvergentní* [*konverguje neabsolutně [relativně]*], jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, ale řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverguje.

Říkáme, že řada je *nepodmíněně*, resp. *podmíněně konvergentní* [*konverguje nepodmíněně, resp. podmíněně*], jestliže součet řady nezávisí, resp. závisí na přerovnání členů řady.

Absolutně, resp. neabsolutně konvergentní řada je nepodmíněně, resp. podmíněně konvergentní.

Vynecháme-li v dané řadě $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ prvních n členů a_1, a_2, \dots, a_n , dostaneme řadu

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k},$$

kterou nazýváme *zbytkem řady* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ po n -tému členu. Je-li daná řada konvergentní a má-li součet s , pak zbytek této řady po n -tému členu je také konvergentní řada a její součet R_n se rovná rozdílu součtu s a částečného součtu s_n :

$$R_n = s - s_n.$$

Pro konvergentní řady platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

Základní kritérium konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (s_{k+p} - s_k) = 0 \quad \text{pro } \forall p \in \mathbb{N}.$$

Toto kritérium je nutné a postačující.

Nutnou, ale nikoli postačující podmínkou konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0.$$

Řady s kladnými členy

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se nazývá řada s nezápornými členy, resp. řada s kladnými členy, jestliže pro všechny indexy k platí $a_k \geq 0$, resp. $a_k > 0$.

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ s nezápornými nebo kladnými členy se nazývá majorantní [majoranta], resp. minorantní [minoranta] k řadě $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, jestliže pro skoro všechny indexy k platí $a_k \geq b_k$, resp. $a_k \leq b_k$.

Postačující, ale nikoli nutnou podmínu konvergence, popř. divergence obsahují tato kritéria:

Podilové [d'Alembertovo] kritérium: Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je řada s kladnými členy, platí $0 < q < 1$ a pro skoro všechny indexy k platí

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q, \quad \text{resp.} \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1,$$

pak řada je konvergentní, resp. divergentní.

Limitní podilové [limitní d'Alembertovo] kritérium: Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je řada s kladnými členy, existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{k+1}/a_k) = q$, pak při $q < 1$, resp. $q > 1$ je řada konvergentní, resp. divergentní. Jestliže $q = 1$, pak o konvergenci řady nelze podle tohoto kritéria rozhodnout.

Odmocninové [Cauchyovo] kritérium: Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je řada s kladnými členy, platí $0 < q < 1$ a pro skoro všechny indexy k je

$$\sqrt[k]{a_k} \leq q, \quad \text{resp.} \quad \sqrt[k]{a_k} \geq 1,$$

pak řada je konvergentní, resp. divergentní.

Limitní odmocninové [limitní Cauchyovo] kritérium: Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je řada s kladnými členy, existuje $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = q$, pak při $q < 1$, resp. $q > 1$ řada konverguje, resp. diverguje. Jestliže $q = 1$, pak o konvergenci řady nelze podle tohoto kritéria rozhodnout.

Porovnávací kritérium: Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ s kladnými členy konverguje, jestliže k ní existuje konvergentní majoranta. Jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje, pak je divergentní každá její majoranta.

Alternující řady

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$, kde $a_k \geq 0$, se nazývá *alternující*.

Alternující řada konverguje, jestliže příslušná řada absolutních hodnot konverguje.

Leibnizovo kritérium pro alternující řady: Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$, kde $a_k \geq 0$, je alternující řada, posloupnost $\{a_k\}$ je nerostoucí a $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, pak řada je konvergentní.

Operace s řadami

Konvergentní řady lze člen po členu sčítat nebo odčítat, tj. jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$, pak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = A + B, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) = A - B.$$

Jestliže řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$ jsou absolutně konvergentní, pak konverguje absolutně také řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, kde

$$c_k = a_k b_1 + a_{k-1} b_2 + \dots + a_1 b_k,$$

a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = AB.$$

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ se nazývá *cauchyovský součin daných řad*.

9.1.3. Některé nekonečné konvergentní číselné řady

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e \quad \left(a_k = \frac{1}{(k-1)!} \right);$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2 \quad \left(a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right);$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2 \quad \left(a_k = \frac{1}{2^{k-1}} \right);$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad \left(a_k = \frac{1}{k^2} \right);$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12} \quad \left(a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right);$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \quad \left(a_k = \frac{1}{(2k-1)^2} \right);$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = 1 \quad \left(a_k = \frac{1}{k(k+1)} \right);$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots = \frac{1}{2} \quad \left(a_k = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \right);$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots = \frac{1}{4} \quad \left(a_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \right).$$

Další nekonečné řady pro číslo π dostaneme z rozvojů **eyklometrických** funkcí v řady (viz str. 704):

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (\text{Leibnizova řada}),$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} \right) - \dots \quad (\text{Eulerova řada}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \\ &= 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \dots \right) - \\ &\quad - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \dots \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8},$$

$$\frac{\pi}{4} = 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{10} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{515}.$$

9.1.4. Mocninné řady

Posloupnosti funkcí [funkční posloupnosti] na množině J nazýváme zobrazení množiny \mathbb{N} všech kladných celých čísel do množiny L_J všech konečných reálných, popř. komplexních funkcí definovaných na množině J . Posloupnost funkcí zapisujeme

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}, \{f_k\}, (f_1, f_2, \dots) \text{ nebo } f_1, f_2, \dots.$$

Pro určité číslo $x_0 \in J$ dostaneme z posloupnosti $\{f_k\}$ číselnou posloupnost $\{f_k(x_0)\}$. Je-li posloupnost $\{f_k(x_0)\}$ konvergentní, říkáme, že funkční posloupnost $\{f_k\}$ konverguje v bodě x_0 . Jestliže pro každé číslo $x \in M \subseteq J$ existuje vlastní limita $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$, říkáme, že funkční posloupnost $\{f_k\}$ konverguje na množině M k funkci f .

Jestliže $\{f_k\}$ je funkční posloupnost na množině J , pak výraz

$$f_1 + f_2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum f_k$$

nazýváme řadou funkcí [funkční řadou]. Funkci f_k nazýváme k -tým členem řady a funkci $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$ n -tým částečným součtem řady. Posloupnost $\{s_n\}$ nazýváme posloupností částečných součtů funkční řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$.

Pro určité číslo $x_0 \in J$ dostaneme z řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ číselnou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$. Je-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ konvergentní, říkáme, že funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje v bodě x_0 , který pak nazýváme bodem konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Jestliže pro každé číslo $x \in M \subseteq J$ je řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergentní, říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje na množině M ; množinu M všech bodů konvergence dané funkční řady nazýváme oborem konvergence této řady. Každému bodu x z oboru konvergence dané funkční řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ je pomocí této řady přiřazeno číslo $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, takže na oboru konvergence je funkční řadou $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ definována funkce s , která se nazývá součet funkční řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$.

Říkáme, že funkční posloupnost $\{f_k\}$ konverguje stejnoměrně [je stejnoměrně konvergentní] k funkci f na intervalu M , právě když k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo k_0 , že pro všechny indexy $k > k_0$ a pro všechny body $x \in M$ platí $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Říkáme, že funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ stejnoměrně konverguje [je stejnoměrně konvergentní] k funkci s na intervalu M , právě když posloupnost $\{s_n\}$ jejich částečných součtů stejnoměrně konverguje k funkci s na intervalu M .

Mocninnou [potenční] řadou v jedné reálné proměnné se středem v bodě x_0 nazýváme funkční řadu tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k,$$

kde a_0, a_1, a_2, \dots jsou reálné konstanty. Pro $x_0 = 0$ dostaneme mocninnou řadu se středem v bodě 0 tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Abelova věta o konvergenci mocninné řady

Konverguje-li mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ v bodě $x_1 \neq 0$, konverguje absolutně v každém bodě x , pro něž platí $|x| < x_1$. Diverguje-li mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ v bodě x_1 , diverguje v každém bodě x , pro něž platí $|x| > x_1$.

Věta o konvergenčním intervalu

Ke každé mocninné řadě $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ existuje takové číslo (tzv. *poloměr konvergence*) $r \geq 0$ (připouštíme i $r = +\infty$), že pro všechna čísla x , pro něž $|x| < r$ (tzv. *interval konvergence* [*konvergenční interval*]), je mocninná řada absolutně konvergentní a pro všechna čísla x , pro něž $|x| > r$, je divergentní. V bodech x , pro něž $|x| = r$, nelze obecně rozhodnout, zda mocninná řada je konvergentní nebo divergentní. Je-li $r = 0$, pak mocninná řada je konvergentní jen v bodě $x = 0$. Jestliže $r = +\infty$, pak mocninná řada je konvergentní na množině \mathbb{R} .

Cauchyova–Hadamardova věta

Pro poloměr konvergence r mocninné řady platí

$$r = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

popř.

$$r = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|},$$

přičemž pro $\mu = 0$ klademe $r = +\infty$ a pro $\mu = +\infty$ klademe $r = 0$. Symbol

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup \sqrt[k]{|a_k|}$$

značí tzv. *limes superior* [horní limitu] posloupnosti $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$, což je největší hromadný bod posloupnosti

$$|a_1|, \sqrt{|a_2|}, \sqrt[3]{|a_3|}, \dots, \sqrt[k]{|a_k|}, \dots$$

Podobně symbol

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

značí limes superior posloupnosti

$$\left| \frac{a_2}{a_1} \right|, \left| \frac{a_3}{a_2} \right|, \dots, \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \dots$$

Existuje-li limita

$$\mu = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|, \quad \text{resp.} \quad \mu = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|},$$

pak pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\mu},$$

přičemž při $\mu = 0$, resp. $\mu = +\infty$ je $r = +\infty$, resp. $r = 0$.

Vlastnosti mocninné řady

Mocninná řada konvergentní na intervalu $J = (-r, r)$, kde r je její konvergenční poloměr, má tyto vlastnosti:

1. Konverguje stejnouměrně na každém uzavřeném intervalu $I \subseteq J$.
2. Součet s mocninné řady je spojitou funkci na intervalu J .
3. Na každém intervalu $I \subseteq J$ je diferencovatelná a integrovatelná člen po členu, přičemž řady takto vzniklé mají stejný konvergenční poloměr jako původní řady.

Příklad:

$$\arctg x = \int_0^x \frac{dz}{1+z^2}.$$

Mocninná řada

$$1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots$$

konverguje pro každé číslo z , pro něž platí $|z| < 1$, stejnoučně k součtu $\frac{1}{1+z^2}$. Integrací řady člen po členu dostaneme

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (|x| < 1).$$

Tato řada konverguje kromě toho ještě pro $x = \pm 1$ podle Leibnizova kritéria konvergence pro alternující řady (viz str. 695).

Rozvoj funkce v mocninnou řadu

Taylorův vzorec: Jestliže reálná funkce f reálné proměnné x na intervalu $\langle a, x \rangle$ pro $x > a$, resp. na intervalu $\langle x, a \rangle$ pro $x < a$ má spojité derivace až do n -tého řádu včetně a na intervalu (a, x) , resp. na intervalu (x, a) má spojitou derivaci $(n+1)$ -ního řádu, pak vzorec

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1},$$

kde zbytek R_{n+1} lze uvést na některý z těchto tvarů:

$$R_{n+1} = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a)) \quad (0 < \vartheta < 1)$$

(*Lagrangeův tvar*),

$$R_{n+1} = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} (1-\eta)^n f^{(n+1)}(a + \eta(x-a)) \quad (0 < \eta < 1)$$

(*Cauchyův tvar*), popř. na *integrální tvar*

$$R_{n+1} = \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt,$$

se nazývá *Taylorův vzorec*.

Poznámka:

Píšeme-li $x = a + h$, dostaneme tento tvar Taylorova vzorce:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_{n+1},$$

kde

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a+9h)}{(n+1)!}h^{n+1} \quad (0 < 9 < 1),$$

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a+\eta h)}{n!}(1-\eta)^n h^{n+1} \quad (0 < \eta < 1),$$

$$R_{n+1} = \int_a^{a+h} f^{(n+1)}(t) \frac{(a+h-t)^n}{n!} dt.$$

Taylorova řada: Jestliže funkce f na intervalu $\langle a, x \rangle$ pro $x > a$, resp. na intervalu $\langle x, a \rangle$ pro $x < a$ má derivace všech řádů, pak mocninná řada

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

v bodě x konverguje a její součet se rovná $f(x)$, právě když

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0,$$

kde $R_{n+1}(x)$ je některý z uvedených zbytků.

Maclaurinův vzorec: Jestliže v Taylorově vzoreci položíme $a = 0$, pak vzorec

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1},$$

kde zbytek

$$R_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(9x) \quad (0 < 9 < 1)$$

(Lagrangeův tvar), popř.

$$R_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n!}(1-\eta)^n f^{(n+1)}(\eta x) \quad (0 < \eta < 1)$$

(Cauchyův tvar), se nazývá Maclaurinův vzorec.

Maclaurinova řada: Jestliže funkce f má na intervalu $\langle 0, x \rangle$, resp. $\langle -x, 0 \rangle$ spojité derivace všech řadů, pak mocninná řada

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

v bodě x konverguje a její součet se rovná $f(x)$, právě když

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0,$$

kde $R_{n+1}(x)$ je některý z uvedených zbytků.

Přehled rozvojů v řady, zejména mocninné

Binomická řada

$$(1+x)^r = 1 + \binom{r}{1} x + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \dots \quad (r \in \mathbb{R}),$$

kde

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!},$$

je konvergentní pro všechna čísla $|x| < 1$. Pro $|x| = 1$ je třeba konvergenci řady vyšetřovat zvlášť. Pro $|x| > 1$ řada diverguje. Pro $r = n \in \mathbb{N}$ je $\binom{r}{n}$ binomickým koeficientem, který se pro $n > r$ rovná nule, a vzorec tedy přechází ve vzorec binomické věty (viz str. 159).

Výraz

$$(a+x)^n = a^n \left(1 + \frac{x}{a}\right)^n$$

lze rozvinout pomocí uvedené řady, jestliže proměnnou x nahradíme zlomkem x/a . Konverguje pro $|x/a| < 1$.

Příklady:

$$(1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \pm \dots \quad (|x| \leq 1),$$

$$(1 \pm x)^{1/3} = 1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6}x^2 \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12}x^4 \pm \dots \quad (|x| \leq 1),$$

$$(1 \pm x)^{1/4} = 1 \pm \frac{1}{4}x - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8}x^2 \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}x^4 \pm \dots \quad (|x| \leq 1),$$

$$(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \dots \quad (|x| < 1),$$

$$(1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \dots \quad (|x| < 1),$$

$$(1 \pm x)^{-1/3} = 1 \mp \frac{1}{3}x + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6}x^2 \mp \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12}x^4 \mp \dots \quad (|x| < 1),$$

$$(1 \pm x)^{-1/4} = 1 \mp \frac{1}{4}x + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8}x^2 \mp \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12}x^3 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}x^4 \mp \dots \quad (|x| < 1),$$

$$(1 \pm x)^{-2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \dots \quad (|x| < 1).$$

Rady pro exponenciální funkci:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (|x| < +\infty),$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 a}{3!} + \dots \quad (|x| < +\infty, a > 0).$$

Rady pro logaritmickou funkci:

$$\ln x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots \quad (0 < x \leq 2),$$

$$\ln x = \frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \dots \quad (x > \frac{1}{2}),$$

$$\ln x = 2 \left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \dots \right) \quad (x > 0),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (-1 < x \leq 1),$$

$$\ln(1-x) = - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right) \quad (-1 \leq x < 1),$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \operatorname{argtgh} x = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right) \quad (|x| < 1),$$

$$\ln \frac{x+1}{x-1} = 2 \operatorname{argcotgh} x = 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots \right) \quad (|x| > 1).$$

Rady pro goniometrické funkce:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (|x| < +\infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (|x| < +\infty),$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \dots \quad (|x| < \pi/2),$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3} x - \frac{1}{45} x^3 - \frac{2}{945} x^5 - \dots \quad (0 < |x| < \pi).$$

Rady pro cyklometrické funkce:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \quad (|x| < 1),$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} - \dots \quad (|x| < 1),$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (|x| \leq 1),$$

$$\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \dots \quad (|x| \leq 1).$$

Rady pro hyperbolické funkce:

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (|x| < +\infty),$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (|x| < +\infty),$$

$$\operatorname{tgh} x = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{12} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + \dots \quad (|x| < \pi/2),$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \dots \quad (0 < |x| < \pi).$$

Rady pro hyperbolometrické funkce:

$$\operatorname{argsinh} x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \quad (|x| < 1),$$

$$\operatorname{argcosh} x = \pm \left[\ln(2x) - \frac{1}{2 \cdot 2x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6x^6} - \dots \right] \quad (x > 1),$$

$$\operatorname{argtgh} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \quad (|x| < 1),$$

$$\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots \quad (|x| > 1).$$

9.1.5. Přibližné vzorce pro počítání s malými čísly

Pro malá čísla ε (v absolutní hodnotě) dostaneme z mocninných řad přibližné vzorce, kterých se v praxi často používá.

Platí

$$(1 \pm \varepsilon)^n \approx 1 \pm n\varepsilon \quad (\varepsilon \in \mathbb{R}, |\varepsilon| \ll 1);$$

$$(a \pm \varepsilon)^n \approx a^n \left(1 \pm n \frac{\varepsilon}{a}\right) \quad (\varepsilon \ll a).$$

Speciálně

$$(1 \pm \varepsilon)^2 \approx 1 \pm 2\varepsilon, \quad (a \pm \varepsilon)^2 \approx a^2 \left(1 \pm \frac{2\varepsilon}{a}\right),$$

$$(1 \pm \varepsilon)^3 \approx 1 \pm 3\varepsilon, \quad (a \pm \varepsilon)^3 \approx a^3 \left(1 \pm \frac{3\varepsilon}{a}\right),$$

$$\sqrt{(1 \pm \varepsilon)} \approx 1 \pm \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sqrt{(a \pm \varepsilon)} \approx (\sqrt{a}) \left(1 \pm \frac{\varepsilon}{2a}\right),$$

$$\frac{1}{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \mp \varepsilon, \quad \frac{1}{a \pm \varepsilon} \approx \frac{1}{a} \left(1 \mp \frac{\varepsilon}{a}\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1 \pm \varepsilon)}} \approx 1 \mp \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{(a \pm \varepsilon)}} \approx \frac{1}{\sqrt{a}} \left(1 \mp \frac{\varepsilon}{2a}\right),$$

$$\sqrt[q]{(1 \pm \varepsilon)^p} \approx 1 \pm \frac{p}{q} \varepsilon,$$

$$\frac{1}{\sqrt[q]{(1 \pm \varepsilon)^p}} \approx 1 \mp \frac{p}{q} \varepsilon,$$

$$e^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon,$$

$$\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon,$$

$$a^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon \ln a,$$

$$\begin{aligned}
\ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} &\approx 2\varepsilon, & \ln [\varepsilon + \sqrt{(\varepsilon^2 + 1)}] &\approx \varepsilon, \\
\sin \varepsilon &\approx \varepsilon, & \operatorname{tg} \varepsilon &\approx \varepsilon, \\
\cos \varepsilon &\approx 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}, & \operatorname{cotg} \varepsilon &\approx \frac{1}{\varepsilon}, \\
\arcsin \varepsilon &\approx \varepsilon, & \operatorname{arctg} \varepsilon &\approx \varepsilon, \\
\sinh \varepsilon &\approx \varepsilon, & \operatorname{tgh} \varepsilon &\approx \varepsilon, \\
\cosh \varepsilon &\approx 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}, & \operatorname{cotgh} \varepsilon &\approx \frac{1}{\varepsilon}, \\
\operatorname{argsinh} \varepsilon &\approx \varepsilon, & \operatorname{argtgh} \varepsilon &\approx \varepsilon.
\end{aligned}$$

Obecně platí

$$f(\varepsilon) \approx f(0) + f'(0)\varepsilon.$$

9.2. ZÁKLADNÍ POJMY K FOURIEROVÝM ŘADÁM

Nechť f je periodická funkce s periodou T_0 [tj. $f(x) = f(x + kT_0)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$ a $\forall k \in \mathbb{Z}$] a nechť f a f' jsou po částech spojité funkce na intervalu $\langle 0, T_0 \rangle$.

Trigonometrickou Fourierovou řadou [*Fourierovým rozvojem*] funkce f nazýváme řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 x) + b_k \sin(k\omega_0 x)],$$

kde

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(x) \cos(k\omega_0 x) dx,$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(x) \sin(k\omega_0 x) dx$$

jsou tzv. *Fourierovy koeficienty* [*Fourierovy konstanty*] funkce f vzhledem k trigonometrickému systému

$$1, \cos(\omega_0 x), \sin(\omega_0 x), \cos(2\omega_0 x), \sin(2\omega_0 x), \dots,$$

$a_0/2$ je střední hodnota funkce f (váha) a

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0.$$

Speciálně pro periodu $T_0 = 2\pi$ dostaneme řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)],$$

kde

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

V každém bodě x_0 , v němž je funkce f spojitá, konverguje Fourierova řada funkce f k hodnotě $f(x_0)$, a v každém bodě x_0 , v němž není funkce f spojitá, k hodnotě

$$\frac{1}{2} [\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)].$$

Spektrální tvar Fourierovy řady je

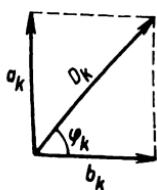
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin(k\omega_0 x + \varphi_k),$$

kde

$$D_k = \sqrt{(a_k^2 + b_k^2)},$$

$$\varphi_k = \arctg \frac{a_k}{b_k}$$

(obr. 383).



Obr. 383: K spektrálnímu vyjádření Fourierovy řady

Komplexní tvar Fourierovy řady je

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 x} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ik\omega_0 x} + c_{-k} e^{-ik\omega_0 x}),$$

kde

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(x) e^{-ik\omega_0 x} dx, \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Speciálně pro periodu $T_0 = 2\pi$ platí

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}),$$

kde

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Platí vztahy

$$a_k = c_k + c_{-k}$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Případy souměrnosti pro Fourierovy řady

Případ 1 (obr. 384):

Sudá funkce

$$f(x) = f(-x)$$

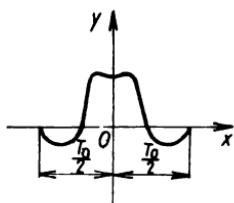
má graf souměrný podle osy y . Platí $b_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}$), a Fourierova řada sudé funkce tedy neobsahuje členy s funkcí sinus.

Případ 2 (obr. 385):

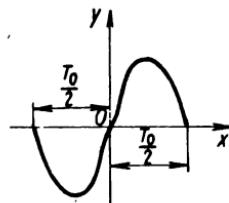
Lichá funkce

$$f(x) = -f(-x)$$

má graf středově souměrný vzhledem k počátku. Platí $a_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}_0$), a Fourierova řada liché funkce tedy obsahuje jen členy s funkcí sinus.



Obr. 384. Sudá funkce



Obr. 385. Lichá funkce

Případ 3 (obr. 386):

Funkce, jejíž graf se skládá z částí (polovin příslušných poloviční periodě) téhož tvaru, které zaujmají touž polohu vzhledem k ose x :

$$f(x) = f\left(x + \frac{T_0}{2}\right).$$

Platí

$$a_{2k+1} = 0, \quad b_{2k+1} = 0,$$

a Fourierova řada této funkce tedy obsahuje jen takové členy s funkcemi sinus a kosinus, jejichž koeficienty a_k, b_k mají sudé indexy.

Případ 4 (obr. 387):

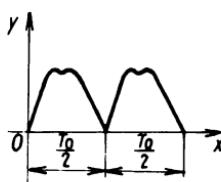
Funkce, ježíž graf se skládá z částí (polovln příslušných poloviční periodě) téhož tvaru, které však zaujímají různou polohu vzhledem k ose x :

$$f(x) = -f\left(x + \frac{T_0}{2}\right).$$

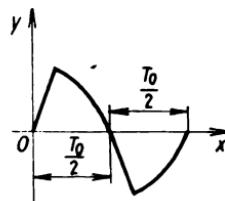
Platí

$$a_{2k} = 0, \quad b_{2k} = 0,$$

a Fourierova řada této funkce tedy obsahuje jen takové členy s funkcemi sinus a kosinus, jejichž koeficienty a_k, b_k mají liché indexy.



Obr. 386. Polovlny ve stejně poloze k ose x



Obr. 387. Polovlny v různé poloze k ose x

9.3. VÝPOČET FOURIEROVY ŘADY; PŘÍKLADY

Rozvoj funkce

$$f(x) = v e^{-x} \quad [x \in (0, 2\pi)],$$

$$T_0 = 2\pi,$$

popisující harmonický vyrovnávací proces (přechodný jev), máme rozvinout ve Fourierovu řadu:

1. způsob řešení (výpočet Fourierových koeficientů v trigonometrickém tvaru):

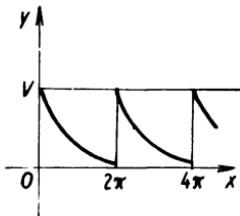
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v e^{-x} \cos(kx) dx = \frac{v}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-x} \cos(kx) dx \quad (k \in \mathbb{N})$$

(obr. 388). Integrováním per partes vypočteme

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{-x} \cos(kx) dx &= \frac{e^{-x}}{k} \sin(kx) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin(kx) dx = \\ &= \left[\frac{e^{-x}}{k} \sin(kx) - \frac{e^{-x}}{k^2} \cos(kx) \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} e^{-x} \cos(kx) dx,\end{aligned}$$

a po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \int_0^{2\pi} e^{-x} \cos(kx) dx &= \left[\frac{e^{-x}}{k} \sin(kx) - \frac{e^{-x}}{k^2} \cos(kx) \right]_0^{2\pi} \\ \int_0^{2\pi} e^{-x} \cos(kx) dx &= \frac{k^2}{1 + k^2} \left[\frac{e^{-x}}{k} \sin(kx) - \frac{e^{-x}}{k^2} \cos(kx) \right]_0^{2\pi}.\end{aligned}$$



Obr. 388. Přechodný jev

Odtud

$$a_k = \frac{v(1 - e^{-2\pi})}{\pi(1 + k^2)}.$$

Podobným způsobem dostaneme

$$b_k = \frac{vk(1 - e^{-2\pi})}{\pi(1 + k^2)}.$$

Z toho plyne

$$a_0 = \frac{v(1 - e^{-2\pi})}{\pi}, \quad a_1 = \frac{v(1 - e^{-2\pi})}{2\pi}, \quad a_2 = \frac{v(1 - e^{-2\pi})}{5\pi}, \quad \dots$$

$$b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{v(1 - e^{-2\pi})}{2\pi}, \quad b_2 = \frac{2v(1 - e^{-2\pi})}{5\pi}, \quad \dots$$

Hledaná Fourierova řada má tedy tvar

$$f(x) = \frac{v(1 - e^{-2\pi})}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k^2} \sin(kx) \right] = \\ = \frac{v(1 - e^{-2\pi})}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{5} \cos(2x) + \dots + \frac{1}{2} \sin x + \frac{2}{5} \sin(2x) + \dots \right].$$

2. způsob řešení (výpočet Fourierových koeficientů v komplexním tvaru):

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v e^{-x} e^{-ikx} dx = \frac{v}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-(1+ik)x} dx \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Integrováním ihned dostaneme

$$c_k = \frac{-v e^{-(1+ki)x}}{2\pi(1+ki)} \Big|_0^{2\pi} = \frac{-v}{2\pi(1+ki)} (e^{-2\pi} \underbrace{e^{-2\pi ki}}_1 - 1) = \frac{v(1 - e^{-2\pi})}{2\pi(1+ki)}.$$

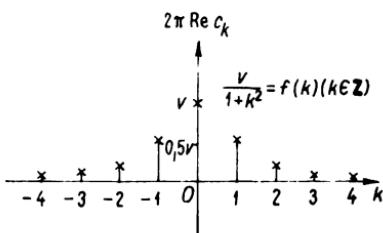
Z c_k vypočteme koeficienty a_k a b_k :

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{v(1 - e^{-2\pi})}{2\pi} \left(\frac{1}{1+ki} + \frac{1}{1-ki} \right) =$$

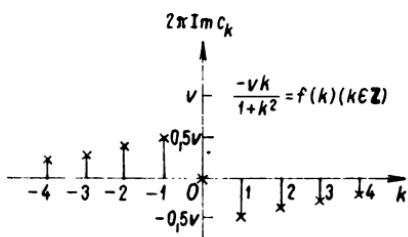
$$= \frac{v(1 - e^{-2\pi})}{2\pi} \frac{1-ki+1+ki}{1+k^2} = \frac{v(1 - e^{-2\pi})}{\pi(1+k^2)},$$

$$b_k = (c_k - c_{-k}) i = \frac{vi(1 - e^{-2\pi})}{2\pi} \left(\frac{1}{1+ki} - \frac{1}{1-ki} \right) =$$

$$= \frac{vi(1 - e^{-2\pi})}{2\pi} \frac{1-ki-1-ki}{1+k^2} = \frac{vk(1 - e^{-2k})}{\pi(1+k^2)}.$$



Obr. 389. Čárové spektrum funkce $v e^{-x}$
(reálná část)



Obr. 390. Čárové spektrum funkce $v e^{-x}$
(imaginární část)

Při obou způsobech výpočtu dostaneme ovšem tytéž výrazy pro Fourierovy koeficienty. Zřejmě při výpočtu těchto koeficientů v komplexním tvaru dostáváme podstatně jednodušší integrály, takže druhý způsob výpočtu je početně méně namáhavý, a to zejména tehdy, jestliže f je exponenciální funkci.

Čárové spektrum funkce f dostaneme ve tvaru

$$\begin{aligned} 2\pi c_k &= \frac{v(1 - e^{-2\pi})}{1 + ki} = \frac{v(1 - e^{-2\pi})(1 - ki)}{1 + k^2} = \\ &= \frac{v(1 - e^{-2\pi})}{1 + k^2} - i \frac{vk(1 - e^{-2\pi})}{1 + k^2} \approx \frac{v}{1 + k^2} - i \frac{vk}{1 + k^2}, \end{aligned}$$

neboť $e^{-2\pi} \ll 1$ (obr. 389 a 390).

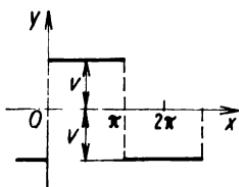
Speciální Fourierovy řady

1. Pravoúhelníková křivka (obr. 391):

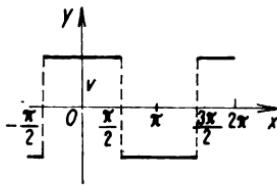
$$f(x) = \frac{4v}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin (3x) + \frac{1}{5} \sin (5x) + \dots \right].$$

2. Pravoúhelníková křivka (obr. 392):

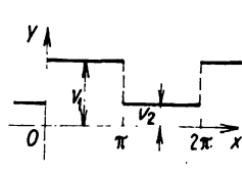
$$f(x) = \frac{4v}{\pi} \left[\cos x - \frac{1}{3} \cos (3x) + \frac{1}{5} \cos (5x) - \dots \right].$$



Obr. 391. Ke křivce 1



Obr. 392. Ke křivce 2



Obr. 393. Ke křivce 3 pro
 $v_2 \neq 0$

3. Pravoúhelníková křivka (posunutá ve směru osy y) (obr. 393):

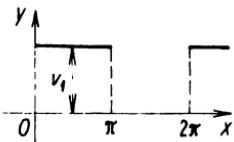
$$f(x) = \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{2(v_1 + v_2)}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin (3x) + \frac{1}{5} \sin (5x) + \dots \right].$$

Pro $v_2 = 0$ dostaneme pravoúhelníkový impuls (obr. 394).

4. Pravoúhelníková křivka [posunutá ve směru osy y (obr. 395)]:

$$f(x) = \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{2(v_1 - v_2)}{\pi} [\cos x - \frac{1}{3} \cos(3x) + \frac{1}{5} \cos(5x) - \dots].$$

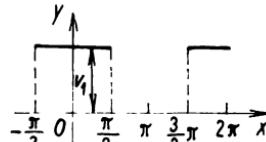
Pro $v_2 = 0$ dostaneme pravoúhelníkový impuls (obr. 396).



Obr. 394. Ke křivce 3 pro
 $v_2 = 0$



Obr. 395. Ke křivce 4 pro
 $v_2 \neq 0$



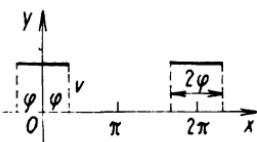
Obr. 396. Ke křivce 4 pro
 $v_2 = 0$

5. Pravoúhelníkový impuls (obr. 397):

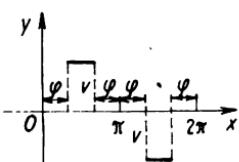
$$f(x) = \frac{2v}{\pi} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin \varphi}{1} \cos x + \frac{\sin(2\varphi)}{2} \cos(2x) + \frac{\sin(3\varphi)}{3} \cos(3x) + \dots \right).$$

6. Pravoúhelníkový impuls (obr. 398):

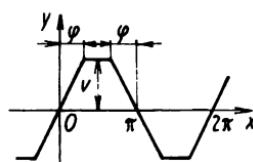
$$f(x) = \frac{4v}{\pi} \left(\frac{\cos \varphi}{1} \sin x + \frac{\cos(3\varphi)}{1} \sin(3x) + \frac{\cos(5\varphi)}{5} \sin(5x) + \dots \right).$$



Obr. 397. Ke křivce 5



Obr. 398. Ke křivce 6



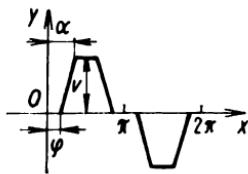
Obr. 399. Ke křivce 7

7. Lichoběžníková křivka (rovnoramenný lichoběžník) (obr. 399):

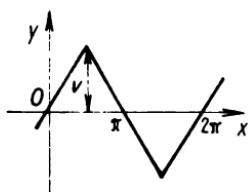
$$f(x) = \frac{4v}{\pi\varphi} \left[\frac{1}{1^2} \sin \varphi \sin x + \frac{1}{3^2} \sin(3\varphi) \sin(3x) + \frac{1}{5^2} \sin(5\varphi) \sin(5x) + \dots \right].$$

8. Lichoběžníkový impuls (rovnoramenný lichoběžník) (obr. 400):

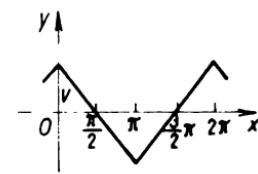
$$f(x) = \frac{4v}{\pi(\alpha - \varphi)} \left[\frac{\sin \alpha - \sin \varphi}{1^2} \sin x + \frac{\sin(3\alpha) - \sin(3\varphi)}{3^2} \sin(3x) + \frac{\sin(5\alpha) - \sin(5\varphi)}{5^2} \sin(5x) + \dots \right].$$



Obr. 400. Ke křivce 8



Obr. 401. Ke křivce 9



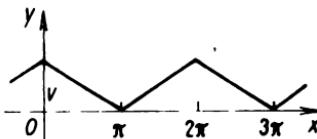
Obr. 402. Ke křivce 10

9. Trojúhelníková křivka (rovnoramenný trojúhelník) (obr. 401):

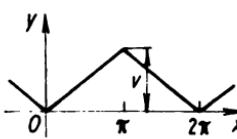
$$f(x) = \frac{8v}{\pi^2} \left[\frac{1}{1^2} \sin x - \frac{1}{3^2} \sin(3x) + \frac{1}{5^2} \sin(5x) - \dots \right].$$

10. Trojúhelníková křivka (rovnoramenný trojúhelník) (obr. 402):

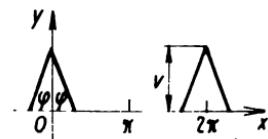
$$f(x) = \frac{8v}{\pi^2} \left[\frac{1}{1^2} \cos x + \frac{1}{3^2} \cos(3x) + \frac{1}{5^2} \cos(5x) + \dots \right].$$



Obr. 403. Ke křivce 11



Obr. 404. Ke křivce 12



Obr. 405. Ke křivce 13

11. Trojúhelníková křivka (rovnoramenný trojúhelník) (obr. 403):

$$f(x) = \frac{v}{2} + \frac{4v}{\pi^2} \left[\frac{1}{1^2} \cos x + \frac{1}{3^2} \cos(3x) + \frac{1}{5^2} \cos(5x) + \dots \right].$$

12. Trojúhelníková křivka (rovnoramenný trojúhelník) (obr. 404):

$$f(x) = \frac{v}{2} - \frac{4v}{\pi^2} \left[\frac{1}{1^2} \cos x + \frac{1}{3^2} \cos(3x) + \frac{1}{5^2} \cos(5x) + \dots \right].$$

13. Trojúhelníkový impuls (rovnoramenný trojúhelník) (obr. 405):

$$f(x) = \frac{v\varphi}{2} + \frac{2v}{\pi\varphi} \left[\frac{1 - \cos \varphi}{1^2} \cos x + \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2^2} \cos(2x) + \frac{1 - \cos(3\varphi)}{3^2} \cos(3x) + \dots \right].$$

14. Pilovitá křivka (rostoucí) (obr. 406):

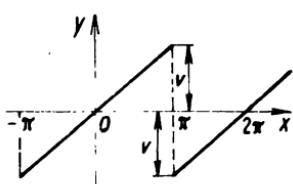
$$f(x) = \frac{2v}{\pi} \left[\sin x - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \dots \right].$$

15. Pilovitá křivka (rostoucí) (obr. 407):

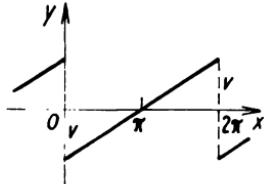
$$f(x) = -\frac{2v}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \dots \right].$$

16. Pilovitá křivka (rostoucí) (obr. 408):

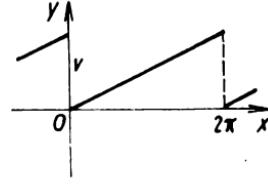
$$f(x) = \frac{v}{2} - \frac{v}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \dots \right].$$



Obr. 406. Ke křivce 14



Obr. 407. Ke křivce 15



Obr. 408. Ke křivce 16

17. Pilovitá křivka (klesající) (obr. 409):

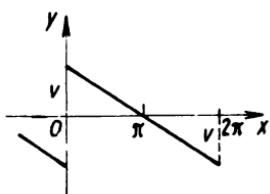
$$f(x) = \frac{2v}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \dots \right].$$

18. Pilovitá křivka (klesající) (obr. 410):

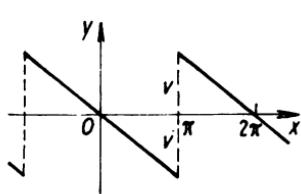
$$f(x) = \frac{2v}{\pi} \left[-\sin x + \frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{1}{3} \sin(3x) + \dots \right].$$

19. Pilovitá křivka (klesající) (obr. 411):

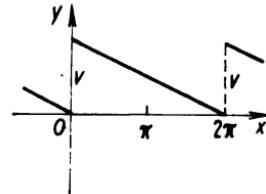
$$f(x) = \frac{v}{2} + \frac{v}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{2} \sin (2x) + \frac{1}{3} \sin (3x) + \dots \right].$$



Obr. 409. Ke křivce 17



Obr. 410. Ke křivce 18



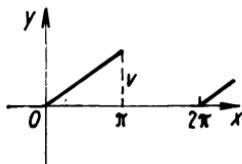
Obr. 411. Ke křivce 19

20. Pilovitý impuls (rostoucí) (obr. 412):

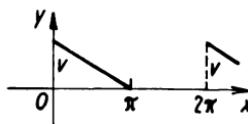
$$f(x) = \frac{v}{4} + \frac{v}{\pi} \left[\sin x - \frac{1}{2} \sin (2x) + \frac{1}{3} \sin (3x) - \dots \right] - \frac{2v}{\pi^2} \left[\cos x - \frac{1}{3^2} \cos (3x) + \frac{1}{5^2} \cos (5x) - \dots \right].$$

21. Pilovitý impuls (klesající) (obr. 413):

$$f(x) = \frac{v}{4} + \frac{v}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{2} \sin (2x) + \frac{1}{3} \sin (3x) + \dots \right] + \frac{2v}{\pi^2} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos (3x) + \frac{1}{5^2} \cos (5x) + \dots \right].$$



Obr. 412. Ke křivce 20



Obr. 413. Ke křivce 21

22. Stejnosměrná sinusová křivka (dvojčestně stejně usměrněná) (obr. 414):

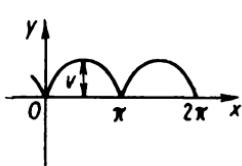
$$f(x) = \frac{4v}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1 \cdot 3} \cos (2x) - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos (4x) - \frac{1}{5 \cdot 7} \cos (6x) - \dots \right].$$

23. Stejnosměrná kosinová křivka (dvojcestně stejně usměrněná) (obr. 415):

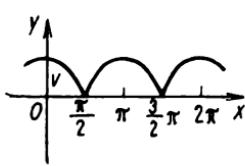
$$f(x) = \frac{4v}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos(2x) - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos(4x) + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos(6x) - \dots \right].$$

24. Sinusový impuls (jednocestně stejně usměrněný) (obr. 416):

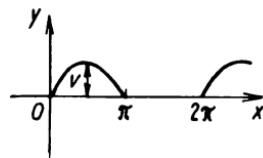
$$f(x) = \frac{v}{\pi} + \frac{v}{2} \sin x - \frac{2v}{\pi} \left[\frac{1}{1 \cdot 3} \cos(2x) + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos(4x) + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos(6x) + \dots \right].$$



Obr. 414. Ke křivce 22



Obr. 415. Ke křivce 23



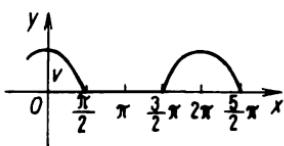
Obr. 416. Ke křivce 24

25. Kosinusový impuls (jednocestně stejně usměrněný) (obr. 417):

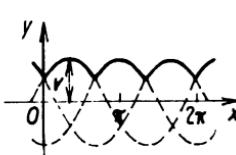
$$f(x) = \frac{v}{\pi} + \frac{v}{2} \cos x + \frac{2v}{\pi} \left[\frac{1}{1 \cdot 3} \cos(2x) - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos(4x) + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos(6x) - \dots \right].$$

26. Stejnosměrný trojfázový <střídací> proud (obr. 418):

$$f(x) = \frac{3v\sqrt{3}}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} \cos(3x) - \frac{1}{5 \cdot 7} \cos(6x) - \frac{1}{8 \cdot 10} \cos(9x) - \dots \right].$$



Obr. 417. Ke křivce 25



Obr. 418. Ke křivce 26



Obr. 419. Ke křivce 27

27. Parabolické oblouky [parabola o rovnici $y = \frac{v}{\pi^2} x^2$ pro $x \in (-\pi, \pi)$] (obr. 419):

$$f(x) = \frac{v}{3} - \frac{4v}{\pi^2} \left[\cos x - \frac{1}{2^2} \cos(2x) + \frac{1}{3^2} \cos(3x) - \dots \right].$$

28. Parabolické oblouky [parabola o rovnici $y = \frac{v}{\pi^2}(x - \pi)^2$ pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (obr. 420)]:

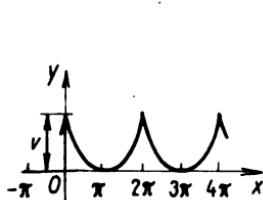
$$f(x) = \frac{v}{3} + \frac{4v}{\pi^2} \left[\cos x + \frac{1}{2^2} \cos(2x) + \frac{1}{3^2} \cos(3x) + \dots \right].$$

29. Parabolické oblouky [parabola o rovnici $y = x^2$ pro $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ (obr. 421)]:

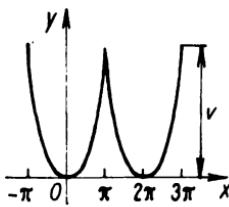
$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left[\cos x - \frac{1}{2^2} \cos(2x) + \frac{1}{3^2} \cos(3x) - \dots \right].$$

30. Parabolické oblouky [parabola o rovnici $y = \frac{4v}{\pi^2}x(\pi - x)$ pro $x \in \langle 0, \pi \rangle$ a $y = \frac{4v}{\pi^2}(x^2 - 3\pi x + 2\pi^2)$ pro $x \in \langle \pi, 2\pi \rangle$ (obr. 422)]:

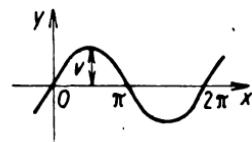
$$f(x) = \frac{32v}{\pi^3} \left[\sin x + \frac{1}{3^3} \sin(3x) + \frac{1}{5^3} \sin(5x) + \dots \right].$$



Obr. 420. Ke křivce 28



Obr. 421. Ke křivce 29



Obr. 422. Ke křivce 30

31. Přechodný jev:

$$f(x) = v e^{-x} \text{ (viz str. 709).}$$

9.4. FOURIERŮV INTEGRÁL, FOURIEROVA TRANSFORMACE

Funkci F , která je i se svou derivací F' po částech spojitá a absolutně integrovatelná na množině \mathbb{R} (tj. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$), lze jednoznačně vyjádřit Fourierovým integrálem

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \cos[(x-t)y] dt \right] dy$$

nebo v komplexním tvaru

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{i(x-t)y} dt \right] dy.$$

V každém bodě x_0 , v němž je funkce F spojitá, se Fourierův integrál funkce F rovná hodnotě $F(x_0)$, kdežto v každém bodě x_0 , v němž není funkce F spojitá, se Fourierův integrál funkce F rovná hodnotě $\frac{1}{2} [\lim_{x \rightarrow x_0+} F(x) + \lim_{x \rightarrow x_0-} F(x)]$.

Fourierovým obrazem funkce (tak zvaného *vzoru* nebo *předmětu*) $F(t)$ ($\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)| dt < +\infty$) nazýváme funkci

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-iyt} dt.$$

Zobrazení, které funkci (vzoru) F přiřazuje její Fourierův obraz se nazývá *Fourierova transformace*.

Inverzní vzorec pro Fourierovu transformaci

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{iyt} dy.$$

Příklad (srov. str. 709):

$$F(t) = \begin{cases} v e^{-t} & [t \in \langle 0, +\infty \rangle], \\ 0 & [t \in (-\infty, 0)]. \end{cases}$$

Fourierův obraz funkce F je

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-iyt} dt = v \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-iyt} dt = v \int_0^{+\infty} e^{-(1+iy)t} dt.$$

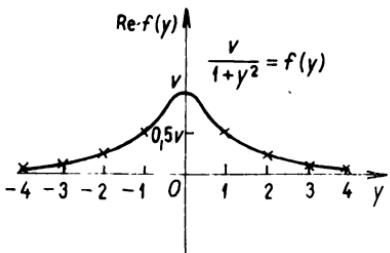
Integrováním dostaneme

$$f(y) = v \frac{-1}{1+iy} e^{-(1+iy)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{v}{1+iy} = \frac{v}{1+y^2} - i \frac{vy}{1+y^2}.$$

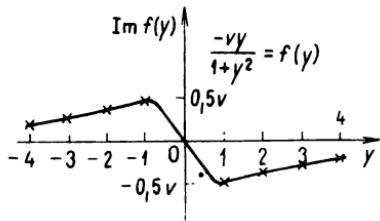
Fourierův integrál je

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{i(x-t)y} dt \right] dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \frac{v}{1+iy} dy = \frac{v}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-iy}{1+y^2} e^{ixy} dy. \end{aligned}$$

Grafické znázornění funkce f dává spojité spektrum (obr. 423 a 424).



Obr. 423. Spojité spektrum funkce $v e^{-t}$ (reálná část)



Obr. 424. Spojité spektrum funkce $v e^{-t}$ (imaginární část)

9.5. LAPLACEOVA TRANSFORMACE

Přířazení

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}f$$

$$(p \in \mathbb{C}, \quad p = x + iy, \quad x > \sigma \geq -\infty)$$

se nazývá *Laplaceova transformace*, přičemž funkce F se nazývá *obraz funkce f* v *Laplaceové transformaci* [*Laplaceův obraz funkce f*] a funkce f proměnné $t \in (0, +\infty)$ se nazývá *vzor* [*originál, předmět*] *Laplaceova obrazu F* . Integrál $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ se nazývá *Laplaceův integrál funkce f* .

Kritéria pro existenci Laplaceovy transformace F na oboru $t > 0$

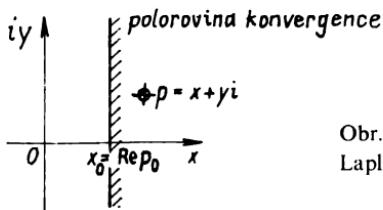
1. $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$ (funkce f je po částech spojitá);
2. $\int_0^{T_2} |f(t)| dt = \lim_{T_1 \rightarrow 0} \int_{T_1}^{T_2} |f(t)| dt$;
3. $T_2 > T_1$; pro aspoň jedno číslo $p_0 \in \mathbb{C}$ je

$$\lim_{T_2 \rightarrow +\infty} \left| \int_{T_1}^{T_2} e^{-p_0 t} f(t) dt \right| = 0.$$

Funkce, které splňují podmínky 1 až 3 se nazývají *L-funkce* [*funkce třídy L*].

4. Jestliže Laplaceův integrál $\mathcal{L}\{f(t)\}$ konverguje pro číslo p_0 , pak také konverguje pro všechna čísla p z poloroviny $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0 = x_0$. Jestliže $x_0 = \alpha$ je taková konstanta, že pro všechna čísla p z poloroviny $\operatorname{Re} p > \alpha$, resp. $\operatorname{Re} p < \alpha$ Laplaceův integrál konverguje, resp. diverguje, pak se kon-

stanta α nazývá úsečka konvergence Laplaceova integrálu [úsečka konvergence předmětu f] (obr. 425). Jestliže $\alpha < +\infty$, pak funkci f nazýváme *laplaceovský transformovatelnou*.



Obr. 425. Polorovina konvergence Laplaceova integrálu

Funkce, jejichž Laplaceovy integrály konvergují absolutně, tj.

$$\int_0^{+\infty} |f(t) e^{-pt}| dt < +\infty \quad \text{pro } \operatorname{Re} p = x > \alpha,$$

se nazývají L_a -funkce. L_a -funkce jsou zároveň L-funkcemi.

Laplaceova transformace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L} f(t) = F(p).$$

Inverzní [zpětná] Laplaceova transformace:

$$\mathcal{L}_{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}_{-1} F(p) = f(t).$$

Je-li f laplaceovský transformovatelná funkce, pak

$$\mathcal{L}_{-1}\{\mathcal{L}\{F(p)\}\} = F(p), \quad \mathcal{L}_{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}\} = f(t).$$

Základní věty o Laplaceové transformaci

Věta o lineárnosti Laplaceovy transformace:

$$\mathcal{L}\{a f_1(t) + b f_2(t)\} = a F_1(p) + b F_2(p),$$

popř.

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=1}^n c_i f_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n c_i F_i(p),$$

kde a, b, c_i jsou komplexní konstanty a $f_i(t)$ jsou laplaceovský transformovatelné funkce.

Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ úsečky konvergence po řadě předmětů $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$, pak úsečka konvergence předmětu $\sum_{i=1}^n c_i f_i(t)$ se rovná

$$\max \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}.$$

Inverzní transformace:

$$\mathcal{L}_{-1}\{a F_1(p) + b F_2(p)\} = a \mathcal{L}_{-1}\{F_1(p)\} + b \mathcal{L}_{-1}\{F_2(p)\}.$$

Věta o obrazu funkce násobené exponenciální funkci [věta o posunu obrazu, věta o tlumení]:

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(p + a),$$

kde $a \in \mathbb{C}$ a f je laplaceovský transformovatelná funkce. Je-li α úsečka konvergence předmětu f , pak úsečka konvergence předmětu $e^{-at} f$ se rovná $\alpha - \operatorname{Re} a$.

Inverzní transformace:

$$\mathcal{L}_{-1}\{F(p + a)\} = e^{-at} f(t).$$

Věta o změně měřítka [věta o podobnosti]:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

nebo

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\gamma} f\left(\frac{1}{\gamma} t\right)\right\} = F(p\gamma),$$

kde $a, \gamma > 0$ jsou reálné konstanty a f je laplaceovský transformovatelná funkce. Je-li α úsečka konvergence předmětu $f(t)$, pak úsečka konvergence předmětu $f(at)$ se rovná $a\alpha$ a úsečka konvergence předmětu $\frac{1}{\gamma} f\left(\frac{1}{\gamma} t\right)$ se rovná $\frac{1}{\gamma} \alpha$.

Inverzní transformace:

$$\mathcal{L}_{-1}\left\{F\left(\frac{p}{a}\right)\right\} = a f(at),$$

$$\mathcal{L}_{-1}\{F(\gamma p)\} = \frac{1}{\gamma} f\left(\frac{t}{\gamma}\right) \quad (\gamma > 0).$$

Věta o translaci předmětu:

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = e^{-pt_0} F(p),$$

kde

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & [t \in \langle 0, t_0 \rangle], \\ f(t - t_0) & [t \in \langle t_0, +\infty \rangle], \end{cases}$$

nebo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t - t_0)\} &= e^{-pt_0} F(p) \quad [t \in (t_0, +\infty)], \\ \mathcal{L}\{f(t + a)\} &= e^{ap} \left[F(p) - \int_0^a f(t) e^{-pt} dt \right],\end{aligned}$$

kde $t_0, a > 0$ jsou reálné konstanty a f je laplaceovský transformovatelná funkce.

Inverzní transformace:

$$\mathcal{L}_{-1}\{e^{-pt_0} F(p)\} = \begin{cases} 0 & [t \in (0, t_0)], \\ f(t - t_0) & (t > t_0). \end{cases}$$

Věta o obrazu derivace:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= p^n F(p) - p^{n-1} f(0+) - p^{n-2} \dot{f}(0+) - p^{n-3} \ddot{f}(0+) - \dots \\ &\quad \dots - f^{(n-1)}(0+),\end{aligned}$$

kde $f^{(n)}$ je laplaceovský transformovatelná funkce, $f^{(k)}(0+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Je tedy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} &= p F(p) - f(0+), \\ \mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} &= p^2 F(p) - p f(0+) - \dot{f}(0+),\end{aligned}$$

atd.

Inverzní transformace:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{-1}\{p F(p) - f(0+)\} &= \frac{df(t)}{dt}, \\ \mathcal{L}_{-1}\{p^2 F(p) - p f(0+) - \dot{f}(0+)\} &= \frac{d^2f(t)}{dt},\end{aligned}$$

atd.

Věta o derivaci obrazu:

$$\frac{d^n F(p)}{dp^n} = \frac{d^n}{dp^n} \mathcal{L}\{f(t)\} = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\},$$

kde f je laplaceovský integrovatelná funkce. Je tedy

$$\begin{aligned}F'(p) &= -\mathcal{L}\{t f(t)\}, \\ F''(p) &= -\mathcal{L}\{t^2 f(t)\},\end{aligned}$$

atd.

Inverzní transformace:

$$\mathcal{L}_{-1} \left\{ \frac{d^n F(p)}{dp^n} \right\} = (-1)^n t^n f(t).$$

Věta o obrazu integrálu:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{p} F(p),$$

kde f je laplaceovský transformovatelná funkce.

Inverzní transformace:

$$\mathcal{L}_{-1} \left\{ \frac{1}{p} F(p) \right\} = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Věta o integrálu obrazu:

$$\int_p^{+\infty} F(\sigma) d\sigma = \mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} \quad (\sigma \in \mathbf{C}),$$

kde f je laplaceovský transformovatelná funkce.

Konvoluce

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

Komutativní zákon pro konvoluci:

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t).$$

Asociativní zákon pro konvoluci:

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)].$$

Věta o obrazu konvoluce:

$$\begin{aligned} F_1(p) F_2(p) &= \mathcal{L}\{f_1(t)\} \mathcal{L}\{f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \\ &= \mathcal{L} \left\{ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right\}, \end{aligned}$$

kde f_1, f_2 jsou funkce, jejichž Laplaceovy integrály konvergují absolutně pro $\operatorname{Re} p > \alpha$.

Inverzní transformace:

$$\mathcal{L}_{-1} \{F_1(p) F_2(p)\} = \mathcal{L}_{-1} \{F_1(p)\} * \mathcal{L}_{-1} \{F_2(p)\}.$$

Věty o limitách

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p F(p),$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p F(p),$$

kde f je laplaceovský transformovatelná funkce.

9.6. POUŽITÍ LAPLACEOVY TRANSFORMACE K ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Schematický početní postup:



Provedeme-li Laplaceovu transformaci na diferenciální rovnici s přihlédnutím k počátečním podmínkám, převedeme ji na algebraickou rovnici. Tuto algebraickou rovnici rozřešíme a k řešení najdeme inverzní transformací řešení původní diferenciální rovnice. Podmírkou je, že pravá strana rovnice musí mít Laplaceův obraz.

Příklad 1:

Řešme diferenciální rovnici

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = t$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$.

Podle věty o obrazu derivace dostaneme

$$p^2 \mathcal{L}\{y\} - p y(0) - \dot{y}(0) + 5p \mathcal{L}\{y\} - 5 y(0) + 4 \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t\}.$$

Přihlédneme-li k počátečním podmínkám, dostaneme

$$p^2 \mathcal{L}\{y\} + 5p \mathcal{L}\{y\} + 4 \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t\}.$$

Podle korespondence 3 z tabulky v kapitole 9.7 dostaneme

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{p^2} \frac{1}{p^2 + 5p + 4} = \frac{1}{p^2} \frac{1}{p+1} \frac{1}{p+4}.$$

Rozklad v součet částečných zlomků dává

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2} \frac{1}{p+1} \frac{1}{p+4} &= \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p+4}, \\ \frac{1}{p^2(p+1)(p+4)} &= \frac{A(p+1)(p+4) + Bp(p+1)(p+4)}{p^2(p+1)(p+4)} + \\ &\quad + \frac{Cp^2(p+4) + Dp^2(p+1)}{p^2(p+1)(p+4)}. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{5}{16}, \quad C = \frac{1}{3}, \quad D = -\frac{1}{48}.$$

Z toho plyně

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}_{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} \frac{1}{p+1} \frac{1}{p+4} \right\} = \frac{1}{4} \mathcal{L}_{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} \right\} - \frac{5}{16} \mathcal{L}_{-1} \left\{ \frac{1}{p} \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{3} \mathcal{L}_{-1} \left\{ \frac{1}{p+1} \right\} - \frac{1}{48} \mathcal{L}_{-1} \left\{ \frac{1}{p+4} \right\} \end{aligned}$$

a podle korespondencí 3, 1 a 5 z tabulky v kapitole 9.7 plyně

$$y = \frac{t}{4} - \frac{5}{16} + \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{48} e^{-4t}.$$

Příklad 2:

Řešme diferenciální rovnici

$$\ddot{y} - 4y = 2 \sinh t$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$.

Podle věty o obrazu derivace dostaneme

$$p^2 \mathcal{L}\{y\} - p y(0) - \dot{y}(0) - 4 \mathcal{L}\{y\} = 2 \mathcal{L}\{\sinh t\}.$$

Přihlédneme-li k počátečním podmínkám, dostaneme

$$p^2 \mathcal{L}\{y\} - 4 \mathcal{L}\{y\} = 2 \mathcal{L}\{\sinh t\},$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{p^2 - 4} \mathcal{L}\{\sinh t\}.$$

1. způsob řešení:

Podle korespondence 9 z tabulky v kapitole 9.7 platí

$$\frac{2}{p^2 - 4} = \mathcal{L}\{\sinh(2t)\},$$

odkud

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\sinh(2t)\} \mathcal{L}\{\sinh t\}.$$

Podle věty o obrazu konvoluce je

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\sinh(2t) * \sinh t\},$$

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}_{-1}\{\mathcal{L}\{\sinh(2t) * \sinh t\}\} = \sinh(2t) * \sinh t = \\ &= \int_0^t \sinh(t - \tau) \sinh(2\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Dvojím integrováním per partes postupně dostáváme

$$\begin{aligned} y &= \left[\frac{1}{2} \sinh(t - \tau) \cos(2\tau) \right]_{\tau=0}^t + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \cosh(t - \tau) \cosh(2\tau) d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} \sinh t + \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cosh(t - \tau) \sinh(2\tau) \right]_{\tau=0}^t + \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_0^t \sinh(2\tau) \sinh(t - \tau) d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} \sinh t + \frac{1}{4} \sinh(2t) + \frac{1}{4} y, \\ \underline{y} &= -\frac{2}{3} \sinh t + \frac{1}{3} \sinh(2t). \end{aligned}$$

2. způsob řešení:

Podle korespondence 9 z tabulky v kapitole 9.7 platí

$$\mathcal{L}\{\sinh t\} = \frac{1}{p^2 - 1},$$

odkud

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{p^2 - 4} \frac{1}{p^2 - 1}.$$

Rozklad v součet částečných zlomků dává

$$\frac{2}{(p^2 - 4)(p^2 - 1)} = \frac{A}{p^2 - 4} + \frac{B}{p^2 - 1}.$$

[Rozklad v činitele $(p - 2)(p + 2)(p - 1)(p + 1)$ není účelný, neboť $a/(p^2 - a^2)$ je obraz Laplaceovy transformace.]

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$A = \frac{2}{3}, \quad B = -\frac{2}{3}.$$

Z toho plyne

$$y = \mathcal{L}_{-1} \left\{ \frac{2}{p^2 - 4} \frac{1}{p^2 - 1} \right\},$$

$$y = \frac{1}{3} \mathcal{L}_{-1} \left\{ \frac{2}{p^2 - 4} \right\} - \frac{2}{3} \mathcal{L}_{-1} \left\{ \frac{1}{p^2 - 1} \right\},$$

$$y = \frac{1}{3} \sinh(2t) - \frac{2}{3} \sinh t$$

(jako dříve) podle korespondence 9 z tabulky v kapitole 9.7.

Příklad 3:

Řešme diferenciální rovnici $\ddot{y} = b$ rovnoměrně zrychleného pohybu při $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = v_0$.

Podle věty o obrazu derivace je

$$p^2 \mathcal{L}\{y\} - p y(0) - \dot{y}(0) = \mathcal{L}\{b\}.$$

Přihlédneme-li k počátečním podmínkám, dostaneme

$$p^2 \mathcal{L}\{y\} - p y_0 - v_0 = \frac{b}{p},$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{b}{p^3} + \frac{y_0}{p} + \frac{v_0}{p^2}.$$

Použijeme-li věty o obrazu konvoluce na rovnici

$$\frac{b}{p^3} = \frac{b}{p^2} \frac{1}{p} = \mathcal{L}\{bt\} \mathcal{L}\{1\}$$

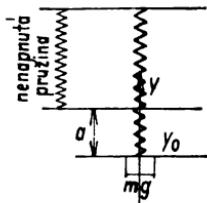
(dostali jsme ji podle korespondencí 1 a 3 z tabulky v kapitole 9.7), pak máme

$$y = \mathcal{L}_{-1}\{\mathcal{L}\{bt\} \mathcal{L}\{1\}\} + \mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{y_0}{p}\right\} + \mathcal{L}_{-1}\left\{\frac{v_0}{p^2}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}_{-1}\{\mathcal{L}\{bt * 1\}\} + y_0 + v_0 t = \int_0^t b\tau \, d\tau + y_0 + v_0 t,$$

$$\underline{y = \frac{b}{2}t^2 + v_0 t + y_0}$$

Z tohoto příkladu je vidět, že metoda řešení diferenciálních rovnic pomocí Laplaceovy transformace je výhodná jen u některých typů rovnic.



Obr. 426. Harmonické kmitání

Příklad 4:

Řešme diferenciální rovnici harmonického kmitání (obr. 426)

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg + k(a - y)$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v_0$ (k je konstanta pružiny).

Pro $-mg = ka$ je

$$m\ddot{y} = -ky, \quad \ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0,$$

$$p^2 \mathcal{L}\{y\} - p y(0) - \dot{y}(0) + \frac{k}{m} \mathcal{L}\{y\} = 0.$$

Přihlédneme-li k počátečním podmínkám, dostaneme

$$p^2 \mathcal{L}\{y\} - v_0 + \frac{k}{m} \mathcal{L}\{y\} = 0,$$

$$\left(p^2 + \frac{k}{m}\right) \mathcal{L}\{y\} = v_0,$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{v_0}{p^2 + \frac{k}{m}}.$$

Zpětná transformace:

$$y = v_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2 + \frac{k}{m}} \right\} = v_0 \left(\sqrt{\frac{m}{k}} \right) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{p^2 + \frac{k}{m}} \right\},$$

$$\underline{y = v_0 \left(\sqrt{\frac{m}{k}} \right) \sin \left(t \sqrt{\frac{k}{m}} \right)}$$

podle korespondence 17 z tabulky v kapitole 9.7.

9.7. TABULKA KORESPONDENCÍ NĚKTERÝCH RACIONÁLNÍCH LAPLACEOVÝCH INTEGRÁLŮ

Vzor f	Obraz $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. h	$\frac{h}{p}$
2. $\sigma(t)$ (pružinová konstanta)	$\frac{1}{p}$ $(p > 0)$
3. t	$\frac{1}{p^2}$
4. $\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^n + 1}$ $(n \in \mathbb{Z})$
5. $e^{\pm at}$	$\frac{1}{p \mp a}$ $(\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a)$
6. a^t	$\frac{1}{p - \ln a }$
7. $(a + e^{-t})^n$	$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{a^{n-k}}{p + k}$
8. $-a e^{-at}$	$\frac{p}{p + a}$
9. $\sinh(at)$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
10. $\cosh(at)$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
11. $\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$	$\frac{1}{p(p - a)}$

Vzor f	Obraz $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
12. $t e^{\pm at}$	$\frac{1}{(p \mp a)^2}$
13. $\frac{e^{bt} - e^{at}}{b - a}$	$\frac{1}{(p - a)(p - b)}$
14. $\frac{b e^{bt} - a e^{at}}{b - a}$	$\frac{p}{(p - a)(p - b)}$
15. $e^{-bt} \sin(at)$	$\frac{a}{(p + b)^2 + a^2}$
16. $e^{-bt} \cos(at)$	$\frac{p + b}{(p + b)^2 + a^2}$
17. $\sin(at)$	$\frac{a}{p^2 + a^2} \quad (a \neq 0)$
18. $\cos(at)$	$\frac{p}{p^2 + a^2} \quad (a \neq 0)$
19. $\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \cos \varphi + \frac{p}{p^2 + \omega^2} \sin \varphi$
20. $1 - 2 \sin(at)$	$\frac{(p - a)^2}{p(p^2 + a^2)} \quad (a \neq 0)$
21. $\cos^2(at)$	$\frac{p^2 + 2a^2}{p(p^2 + 4a^2)} \quad (a \neq 0)$
22. $\cosh^2(at)$	$\frac{p^2 - 2a^2}{p(p^2 - 4a^2)} \quad (a \neq 0)$
23. $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{p^n} \quad (n > 0)$

Rozsáhlé tabulky vzorů a příslušných obrazů jsou ve speciální literatuře (např. v [155], [157] a [159]).

10. POČET PRAVDĚPODOBНОСТИ, МАТЕМАТИЧКА STATISTIKA, TEORIE CHYB A VYROVNÁVACÍ POČET

10.1. POČET PRAVDĚPODOBНОСТИ

Jevy

Náhodné jevy mohou nastat za určitých podmínek, ale jejich výskyt není jistý.

Deterministické jevy nastanou za určitých podmínek s naprostou jistotou (*jistý jev*).

Zákonitosti počtu pravděpodobnosti mají hromadný charakter, tj. platí jen pro dostatečně velký počet pokusů.

O jednou možné jevy jde tehdy, jestliže za určitých podmínek jeden z těchto jevů s jistotou nastane.

O neslučitelné [*po dvou disjunktní*] jevy jde tehdy, jestliže jeden jev ostatní s jistotou vylučuje.

E_1 je částečný jev jevu E_2 , právě když jev E_1 vždy následuje po jevu E_2 :

$$E_1 \subseteq E_2, \quad \text{popř.} \quad E_2 \supseteq E_1 \quad (\text{čteme: } E_1 \text{ je částečný jev jevu } E_2).$$

Ekvivalentní jevy se buď zároveň vyskytují, nebo nevyskytují:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow E_1 \subseteq E_2 \wedge E_2 \subseteq E_1.$$

Logická disjunkce jevů E_1 a E_2 je jev E_3 , při němž aspoň jeden z jevů E_1 nebo E_2 nastane:

$$E_3 = E_1 \cup E_2 \quad (\text{čteme: } E_3 \text{ se rovná } E_1 \text{ sjednoceno s } E_2).$$

Logická konjunkce jevů E_1 a E_2 je jev E_3 , při němž jevy E_1 a E_2 zároveň nastanou:

$$E_3 = E_1 \cap E_2 \quad (\text{čteme: } E_3 \text{ se rovná } E_1 \text{ průnik s } E_2).$$

Logický rozdíl jevů E_1 a E_2 je jev E_3 , při němž jev E_1 nastane, ale jev E_2 nenastane:

$$E_3 = E_1 \setminus E_2.$$

Nemožné jevy \emptyset nenastanou nikdy, *jisté jevy* nastanou vždy.

O opačné jevy E_1 a \bar{E}_1 jde tehdy, jestliže výskyt jednoho z nich podmiňuje nevýskyt druhého.

Definice

Každému jevu E , tj. každému možnému výsledku pokusu, je přiřazeno číslo $P = P(E)$, zvané *pravděpodobnost jevu E*, pro něž platí

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

Pro jistý jev je

$$P(E) = 1.$$

Pro nemožný jev je

$$P(E) = 0.$$

Elementární definice pravděpodobnosti

$$P(E) = \frac{m}{n} \quad (m, n \in \mathbb{N}),$$

tj. při pokusu je pro jev E z n možných výskytů m výskytů příznivých.

Příklad:

Pravděpodobnost, že při vrhání kostkou padne číslo 6, je $P = 1/6$.

Statistická definice pravděpodobnosti

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{n},$$

tj. při n -násobném provedení pokusu se jev E vyskytuje p -krát.

Pravděpodobnost $P(E)$, že jev E nenastane (tj. nastane jev \bar{E}), je

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E).$$

Částečný jev $E_1 \subseteq E_2$

$$P(E_1) \leq P(E_2).$$

Součtová věta počtu pravděpodobnosti

[pravděpodobnost „buď, nebo“]

Pravděpodobnost, že jeden z neslučitelných jevů E_1, E_2, \dots, E_k nastane, je

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_k).$$

Příklad:

Pravděpodobnost, že při vrhu kostkou padne číslo 3 nebo 6, je

$$P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Speciálně platí

$$\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) - \mathbf{P}(E_1 \cap E_2),$$

kde jevy E_1, E_2 se vzájemně nemusí vylučovat.

Podmíněná pravděpodobnost

Pravděpodobnost jevu E_2 za předpokladu, že jev E_1 již nastal, se nazývá podmíněná pravděpodobnost $\mathbf{P}(E_2/E_1)$ jevu E_2 a platí

$$\mathbf{P}(E_2/E_1) = \frac{\mathbf{P}(E_1 \cap E_2)}{\mathbf{P}(E_1)}.$$

Jsou-li jevy E_1 a E_2 vzájemně nezávislé, pak čísla $\mathbf{P}(E_1)$ a $\mathbf{P}(E_2)$ nazýváme nepodmíněné pravděpodobnosti.

Věta o násobení pravděpodobností

[pravděpodobnost „a zároveň“]

Pravděpodobnost, že zároveň nastanou vzájemně nezávislé jevy E_1, E_2, \dots, E_k , je

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_k) = \mathbf{P}(E_1) \mathbf{P}(E_2) \dots \mathbf{P}(E_k).$$

Pro vzájemně závislé jevy E_1 a E_2 s podmíněnými pravděpodobnostmi $\mathbf{P}(E_1/E_2)$ a $\mathbf{P}(E_2/E_1)$ platí

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1) \mathbf{P}(E_2/E_1) = \mathbf{P}(E_2) \mathbf{P}(E_1/E_2).$$

Příklad:

Vytáhneme-li z karetní hry o 32 kartách jednu kartu, pak pravděpodobnost, že je to král, je $\mathbf{P}(E_1) = 4/32 = 1/8$. Je-li vytažená karta král a vytáhneme-li nyní další kartu, pak pravděpodobnost, že je to opět král, je $\mathbf{P}(E_2/E_1) = 3/31$. Vytáhneme-li z uvedené karetní hry dvě karty, pak pravděpodobnost, že vytáhneme dva krále, je

$$P = \mathbf{P}(E_1) \mathbf{P}(E_2/E_1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{31} \doteq 0,012.$$

Pro nezávislé jevy E_1, E_2 platí

$$\mathbf{P}(E_2/E_1) = \mathbf{P}(E_2), \quad \text{popř.} \quad \mathbf{P}(E_1/E_2) = \mathbf{P}(E_1).$$

Pro k nezávislých jevů E_1, E_2, \dots, E_k pravděpodobnost, že zároveň nastanou, je

$$P = \mathbf{P}(E_1) \mathbf{P}(E_2) \dots \mathbf{P}(E_k),$$

pravděpodobnost, že žádný z nich nenastane, je

$$P = [1 - P(E_1)] [1 - P(E_2)] \dots [1 - P(E_k)],$$

a pravděpodobnost, že aspoň jeden z nich nastane, je

$$P = 1 - [1 - P(E_1)] [1 - P(E_2)] \dots [1 - P(E_k)].$$

Vzorec pro celkovou pravděpodobnost

Pravděpodobnost, že jev E nastane zároveň s právě jedním z k neslučitelných jevů E_1, E_2, \dots, E_k , je

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E_1) P(E/E_1) + P(E_2) P(E/E_2) + \dots + P(E_k) P(E/E_k) = \\ &= \sum_{i=1}^k P(E_i) P(E/E_i). \end{aligned}$$

Bayesův vzorec [vzorec pro pravděpodobnost hypotéz]

Nechť E je jev, který nastane právě s jedním z k neslučitelných jevů E_1, E_2, \dots, E_k . Pravděpodobnost jevu E_i za předpokladu, že jev E již nastal, je

$$P(E_i/E) = \frac{P(E_i) P(E/E_i)}{\sum_{j=1}^k P(E_j) (P(E/E_j))}.$$

Výsledky nezávislých pokusů

Dva pokusy se nazývají *vzájemně nezávislé*, jestliže výsledek jednoho z nich nemá vliv na výsledek druhého pokusu. Provedeme-li n nezávislých pokusů, přičemž při každém pokusu nastane právě jeden z k neslučitelných jevů E_1, E_2, \dots, E_k s pravděpodobnostmi po řadě $P_1 = P(E_1), P_2 = P(E_2), \dots, P_k = P(E_k)$, a označíme-li $P_n(m_1, m_2, \dots, m_k)$ pravděpodobnost, že při n pokusech jev E_1 nastane m_1 -krát, jev E_2 m_2 -krát, ..., jev E_k m_k -krát ($m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$), pak platí

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} P_1^{m_1} P_2^{m_2} \dots P_k^{m_k}.$$

Speciálně pro $k = 2$ dostaneme tzv. *Bernoulliovo schéma*:

Jestliže

$$P_1 = P, \quad P_2 = 1 - P = Q, \quad m_1 = m, \quad m_2 = n - m,$$

pak

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} P^m Q^{n-m}.$$

Vlastnosti koeficientů $P_n(m)$

$$\sum_{m=0}^n P_n(m) = 1,$$

kde $P_n(m)$ je koeficient u x^m v rozvoji polynomu $(Q + Px)^n$ podle mocnin proměnné x (*binomický zákon rozložení pravděpodobnosti*). Přitom

$$P_n(m) < P_n(m+1) \quad \text{pro } m < nP - Q,$$

$$P_n(m) > P_n(m+1) \quad \text{pro } m > nP - Q,$$

$$P_n(m) = P_n(m+1) \quad \text{pro } m = nP - Q.$$

Maximum koeficientu $P(m)$ je při $\mu = \bar{m}_0 m_0 = nP - Q$, přičemž

$$\bar{m}_0 = \begin{cases} m_0, \\ \text{nejmenší celé číslo, které obsahuje } m_0, \end{cases} \quad \text{je-li } m_0 \begin{cases} \text{celým číslem,} \\ \text{necelým číslem.} \end{cases}$$

Náhodné veličiny

Náhodné veličiny [*náhodné proměnné*] ξ jsou proměnné, jejichž hodnoty při konstantních podmínkách závisí na náhodě, přičemž každá z těchto hodnot vystupuje s určitou pravděpodobností. Náhodné veličiny mohou být diskrétní (x_k), popř. spojité. Odpovídá jim diskrétní, popř. spojitá *distribuční funkce*

$$F(x) = P(\xi < x).$$

Vlastnosti distribuční funkce F

Distribuční funkce F je monotónní neklesající funkce, tj. z $x_1 < x_2$ plyne $F(x_1) \leq F(x_2)$.

Funkce F má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti a je spojitá zleva. Platí

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1.$$

Diskrétní distribuční funkce [stupňové funkce]

Náhodná veličina, která může nabývat jen konečně mnoha hodnot x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), určuje diskrétní distribuční funkci. Hodnotami proměnné ξ jsou body nespojitosti a příslušnými pravděpodobnostmi jsou hodnoty distribuční funkce v bodech nespojitosti.

Rozložení pravděpodobnosti v případě, že náhodná veličina ξ nabývá hodnoty x_i (obr. 427), je

$$p(x_i) = P(\xi = x_i) \quad (i \in \mathbb{N}),$$

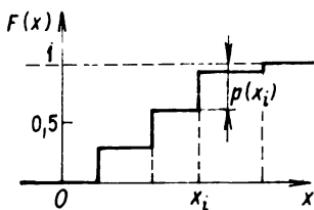
příčemž

$$\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1,$$

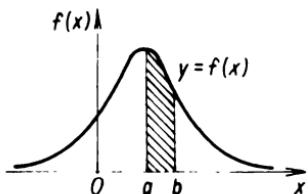
a

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \sum_{x_i < x} \mathbf{P}(\xi = x_i) = \sum_{x_i < x} p(x_i).$$

Tato funkce udává pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty menší než x .



Obr. 427. Diskrétní distribuční funkce



Obr. 428. Spojitá distribuční funkce
[znázornění pravděpodobnosti
 $\mathbf{P}(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a)$
šrafovánou plochou]

Spojité distribuční funkce

Spojité náhodné veličině ξ odpovídá spojité distribuční funkce (obr. 428)

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \mathbf{P}(-\infty < \xi < x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz,$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

přičemž $f[f(x) \geq 0]$ se nazývá *hustota pravděpodobnosti*. Platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1,$$

$$\mathbf{P}(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Momenty

$$m(\xi - x)^k = \sum_{i=1}^n x_i^k p(x_i)$$

pro diskrétní náhodnou veličinu ξ (tzv. *moment k-tého řádu*),

$$m(\xi - c)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - c)^k f(x) dx$$

pro spojitu náhodnou veličinu ξ .

Pro $c = 0$ se momenty $m(\xi)$ nazývají *počáteční*. Pro $c = \mu$ se momenty $m(\xi - \mu)^k$ nazývají *centrální*.

Očekávaná hodnota

Očekávaná hodnota μ je počáteční moment prvního řádu, popř. *vážený aritmetický průměr*:

$$\mu = E\xi = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$$

pro diskrétní náhodnou proměnnou ξ ,

$$\mu = E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

pro spojitu náhodnou proměnnou ξ .

Rozptyl [variace]

Rozptyl σ^2 je centrální moment druhého řádu, přičemž σ se nazývá *směrodatná odchylka* [*střední kvadratická odchylka*]:

$$\sigma^2 = D^2\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p(x_i)$$

pro diskrétní náhodnou veličinu ξ ,

$$\sigma^2 = D^2\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

pro spojitu náhodnou veličinu ξ .

Početní pravidla (C je konstanta; ξ, η jsou různé náhodné veličiny)

$$\mu(C) = C, \quad \sigma^2(C) = 0,$$

$$\mu(\xi + \eta) = \mu(\xi) + \mu(\eta), \quad \sigma^2(\xi + \eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta),$$

$$\mu(\xi\eta) = \mu(\xi)\mu(\eta),$$

$$\begin{aligned}\mu(C\xi) &= C\mu(\xi), \\ \mu(\xi + C) &= \mu(\xi) + C,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2(C\xi) &= C^2\sigma^2(\xi), \\ \sigma^2(\xi + C) &= \sigma^2(\xi).\end{aligned}$$

Variační koeficient

$$v = \frac{\sigma}{\mu}.$$

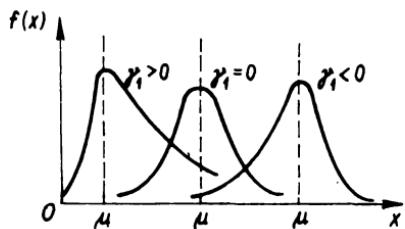
Šikmost (obr. 429)

$$\gamma_1 = \frac{m(\xi - \mu)^3}{\sigma^3}.$$

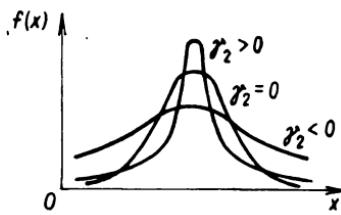
Exces (obr. 430)

$$\gamma_2 = \frac{m(\xi - \mu)^4}{4} - 3.$$

Šikmost je mírou pro souměrnost a exces je mírou pro strmost křivky.



Obr. 429. Druhy šiknosti γ_1 (pro $\gamma_1 = 0$ jde o symetrické rozložení)



Obr. 430. Druhy excesu γ_2 při symetrickém rozdělení s týmž průměrem (pro $\gamma_2 = 0$ jde o normální rozložení)

Binomické rozložení (s vracením tažených prvků) (obr. 431)

$$P(x_i) = \binom{n}{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i},$$

kde $p + q = 1$, přičemž

p je pravděpodobnost výskytu jevu E_1 ,

$q = 1 - p$ – pravděpodobnost výskytu jevu E_2 ,

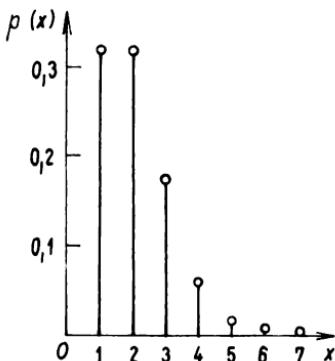
n – počet zkoušek,

$x_i = 1, 2, \dots, n$ ($i \in \mathbb{N}$).

Dále platí

$$\mu = np, \quad \sigma^2 = npq,$$

$$\gamma_1 = \frac{q-p}{\sigma}, \quad \gamma_2 = \frac{1-6pq}{\sigma^2}.$$



Obr. 431. Binomické rozložení

Distribuční funkce

$$F(x) = \sum_{x_i < x} \binom{n}{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}.$$

Hypergeometrické rozložení

Na rozdíl od binomického rozložení se jednotky základního souboru (ty jsou u binomického rozložení libovolně velké), který je zde konečný, opět do základního souboru nevracejí. Platí

$$p(x_i) = \frac{\binom{Np}{x_i} \binom{Nq}{n-x_i}}{\binom{N}{n}},$$

kde $p + q = 1$ a N je základní soubor. Význam dalších znaků je u binomického rozložení. Dále platí

$$\mu = np, \quad \sigma^2 = npq \frac{N-n}{N-1}.$$

Distribuční funkce

$$F(x) = \sum_{x_i < x} \frac{\binom{Np}{x_i} \binom{Nq}{n - x_i}}{\binom{N}{n}}.$$

Poissonovo rozložení (obr. 432)

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}.$$

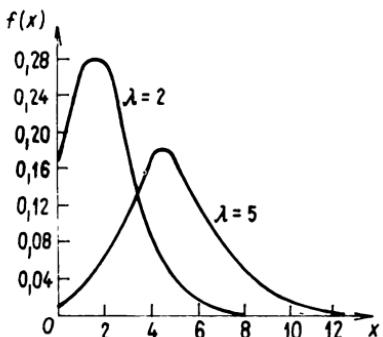
Platí

$$\mu = \lambda, \quad \sigma^2 = \lambda,$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu}}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\mu}.$$

Distribuční funkce

$$F(x) = \int_0^x \frac{\lambda^z}{z!} e^{-\lambda} dz.$$



Obr. 432. Poissonovo rozložení

Poissonova rozložení lze prakticky použít jen při malých hodnotách pravděpodobnosti p ($p < 1/2$). Při velkých hodnotách pravděpodobnosti p se počítá s $q = 1 - p$.

Normální rozložení [Gaussovo–Laplaceovo rozložení]

Hustota pravděpodobnosti

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

(tzv. *Gaussova křivka*), kde μ (střední hodnota) a σ^2 (rozptyl) jsou parametry. Přitom v bodě μ nabývá Gaussova křivka maxima a v bodech $\mu \pm \sigma$ nastává inflexe.

Distribuční funkce

$$F(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dz,$$

přičemž

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x; \mu, \sigma^2) dx = 1.$$

Tabulka 10.1

Přibližné hodnoty pro konstrukci Gaussovy křivky

x	$\mu \pm \frac{1}{2}\sigma$	$\mu \pm \sigma$	$\sigma \pm \frac{3}{2}\sigma$	$\mu \pm 2\sigma$	$\mu \pm 3\sigma$
y	$\frac{7}{8} y_{\max}$	$\frac{5}{8} y_{\max}$	$\frac{2,5}{8} y_{\max}$	$\frac{1}{8} y_{\max}$	$\frac{1}{80} y_{\max}$

Tabulka 10.2

Tabulka normálního rozložení

x	$f(x; 0, 1)$	$F(x; 0, 1)$	x	$f(x; 0, 1)$	$F(x; 0, 1)$
0,0	0,398 9	0,500 0	1,9	0,065 6	0,971 3
0,1	0,397 0	0,539 8	2,0	0,054 0	0,977 2
0,2	0,391 0	0,579 3	2,1	0,044 0	0,982 1
0,3	0,381 4	0,617 9	2,2	0,035 5	0,986 1
0,4	0,368 3	0,655 4	2,3	0,028 3	0,989 3
0,5	0,352 1	0,691 5	2,4	0,022 4	0,991 8
0,6	0,333 2	0,725 7	2,5	0,017 5	0,993 8
0,7	0,312 3	0,758 0	2,6	0,013 6	0,995 3
0,8	0,289 7	0,788 1	2,7	0,010 4	0,996 5
0,9	0,266 1	0,815 9	2,8	0,007 9	0,997 4
1,0	0,242 0	0,841 3	2,9	0,006 0	0,998 1
1,1	0,217 9	0,864 3	3,0	0,004 4	0,998 65
1,2	0,194 2	0,884 9	3,2	0,002 4	0,999 31
1,3	0,171 4	0,903 2	3,4	0,001 2	0,999 66
1,4	0,149 7	0,919 2	3,6	0,000 61	0,999 84
1,5	0,129 5	0,933 2	3,8	0,000 29	0,999 93
1,6	0,110 9	0,945 2	4,0	0,000 134	0,999 968
1,7	0,094 0	0,955 4	4,5	0,000 016	0,999 997
1,8	0,079 0	0,964 1	5,0	0,000 002	0,999 999 97

Normované normální rozložení ($\sigma = 1$, $\mu = 0$) (obr. 433)

Hustota pravděpodobnosti

$$\varphi(x) = f(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-x^2/2}$$

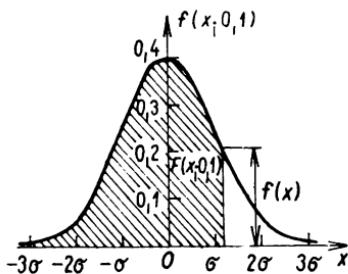
Distribuční funkce

$$\Phi(x) = F(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Každé normální rozložení $f(x, \mu, \sigma^2)$ lze transformaci (tzv. *normalizací*)

$$x_{\text{norm}} = \frac{x_{\text{nenorm}} - \mu}{\sigma}$$

uvést na normovaný tvar.



Obr. 433. Normované normální rozložení ($\sigma = 1$, $\mu = 0$)

10.2. MATEMATICKÁ STATISTIKA

10.2.1. Sumační znak

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \quad (m, n \in \mathbb{N}, m < n).$$

Gaussův sumační symbol:

$$\sum_{i=1}^n a_i = [a] = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Platí

$$\sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i,$$

$$\sum_{i=1}^n c a_i = c \sum_{i=1}^n a_i$$

(c je konstanta),

$$\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i,$$

$$\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=k}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=k}^m a_i$$

($k < m < n$)

$$\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=k}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=m+1}^{k-1} a_i$$

($m < k < n$),

$$\sum_{i=m}^n c = (n - m + 1)c$$

(c je konstanta, $m < n$),

$$\frac{d}{dx} \sum_{i=1}^n f_i(x) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx} f_i(x),$$

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{k=c}^{n+c-m} a_{k-c+m}$$

(transformace indexů),

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ik} \quad (\text{dvojný součet je součet řádků a sloupců}).$$

10.2.2. Multiplikační znak

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m a_{m+1} \dots a_n \quad (m, n \in \mathbb{N}, m < n),$$

takže

$$n! = \prod_{x=1}^n x.$$

Platí

$$\prod_{i=1}^n a_i b_i = \prod_{i=1}^n a_i \prod_{i=1}^n b_i$$

(platí také pro dělení),

$$\prod_{i=1}^n c a_i = c^n \prod_{i=1}^n a_i,$$

$$\prod_{i=1}^m a_i \prod_{i=m+1}^n a_i = \prod_{i=1}^n a_i$$

($m < n$),

$$\prod_{i=1}^m a_i \prod_{i=k}^n a_i = \prod_{i=1}^n a_i \prod_{i=k}^m a_i \quad (k < m < n),$$

$$\prod_{i=1}^m a_i \prod_{i=k}^n a_i = \prod_{i=1}^n a_i \left/ \prod_{i=m+1}^{k-1} a_i \right. \quad (m < k < n),$$

$$\prod_{i=m}^n c = c^{n-m+1} \quad (c \text{ je konstanta, } m < n).$$

10.2.3. Střední hodnoty

Aritmetický průměr

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

[Je to vážený aritmetický průměr pro $h_i = h$ ($i = 1, 2, \dots, n$).]

Vážený aritmetický průměr:

$$\bar{x}' = \frac{x_1 h_1 + x_2 h_2 + \dots + x_n h_n}{h_1 + h_2 + \dots + h_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i h_i}{\sum_{i=1}^n h_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i h_i}{N},$$

kde h_i je četnost (váha) i -tého pozorování (viz str. 755),

N – počet všech pozorování,

x_i – hodnota i -tého pozorování.

Není-li možno zjistit jednotlivé hodnoty pozorování, ale jen jejich dílčí soubory (třídy), pak místo jednotlivých hodnot x_i bereme pro i -tu třídu třídní střední hodnotu m_i znaku a třídní četnost h_i .

Vlastnost aritmetického průměru jako těžiště:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) h_i = 0,$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - c) h_i = \bar{x} - c,$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n c x_i h_i = c \bar{x}, \quad \text{ale} \quad \frac{\sum_{i=1}^n x_i \frac{h_i}{c}}{\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{c}} = \bar{x} \quad (c \neq 0).$$

Minimálnost součtu čtverců odchylek od aritmetického průměru \bar{x} [kvadratická minimálnost aritmetického průměru]:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 h_i < \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 h_i \quad \text{pro } \bar{x} \neq a.$$

Pro aritmetický průměr n tříd (dílčích souborů, podsouborů) platí

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 N_1 + \bar{x}_2 N_2 + \dots + \bar{x}_n N_n}{N_1 + N_2 + \dots + N_n},$$

kde N_i je četnost i -té třídy.

Geometrický průměr

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{(x_1 x_2 \dots x_n)} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \quad (x_i > 0),$$

$$\lg \bar{x}_G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lg x_i \quad (x_i > 0).$$

Vážený geometrický průměr

$$\bar{x}'_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i^{h_i}}, \quad \text{kde } N = \sum_{i=1}^n h_i.$$

Průměrné tempo [průměrný koeficient] růstu

$$\bar{W} = \left(\sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}} \right) \cdot 100 \%$$

Kvadratický průměr

$$\bar{x}_K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Vážený kvadratický průměr

$$\bar{x}'_K = \sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^2 h_i \right)}, \quad \text{kde } N = \sum_{i=1}^n h_i.$$

Harmonický průměr

$$\bar{x}_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}.$$

Vážený harmonický průměr

$$\bar{x}'_H = \frac{N}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} h_i}, \quad \text{kde } N = \sum_{i=1}^n h_i.$$

Cauchyova věta:

Pro $x_i \neq x_k$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) platí

$$x_{\max} > \bar{x}_K > \bar{x} > \bar{x}_G > \bar{x}_H > x_{\min}.$$

Medián [prostřední hodnota znaku, střední hodnota polohy] \tilde{x}

Po uspořádání pozorovaných hodnot a_i v rostoucí posloupnosti je *mediánem* prostřední hodnota, jejíž index při lichém rozsahu n výběru je

$$\frac{n+1}{2} \Rightarrow \tilde{x} = x_{(n+1)/2};$$

při sudém rozsahu n výběru mají prostřední hodnoty indexy

$$\frac{n}{2} \text{ a } \frac{n}{2} + 1$$

a mediánem je aritmetický průměr obou prostředních hodnot:

$$\tilde{x} = \frac{x_{n/2} + x_{n/2+1}}{2}.$$

Minimálnost součtu odchylek od mediánu \tilde{x} [lineární minimálnost mediánu]:

$$\sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}| h_i < \sum_{i=1}^n |x_i - a| h_i \quad \text{pro } \tilde{x} \neq a.$$

Modus

Modus \hat{x} je nejčetnější hodnotou znaku v daném souboru, tj. modus je pozorovanou hodnotou s třídní četností $h_{i\max}$.

10.2.4. Míry rozptýlení

Mírou rozptýlení [mírou variace] nazýváme číslo charakterizující stupeň proměnlivosti pozorovaných hodnot v daném souboru.

Rozpětí, výběrové rozpětí

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Střední odchylka

$$d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n |x_i - T| h_i,$$

kde $N = \sum_{i=1}^n h_i$ a T je vhodná hodnota (\bar{x} nebo \tilde{x}). Pro soubor vytvořený z několika tříd (podsuborů) místo jednotlivých hodnot x_i znaku bereme pro i -tou třídu třídní hodnotu m_i znaku.

Směrodatná odchylka

$$s = \sqrt{\left[\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 h_i \right]}, \quad \text{kde } N = \sum_{i=1}^n h_i.$$

Pro $h_i = 1$ je

$$s = \sqrt{\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]} = \sqrt{\left[\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i \right) \right]}.$$

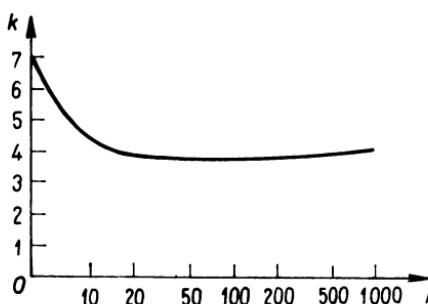
Pro soubor vytvořený z několika tříd místo x_i bereme opět m_i .

Variační koeficient [koeficient variace]

$$v_{\bar{x}} = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%.$$

Problém odlehlých hodnot

Odlehlými hodnotami ve výběru nazýváme takové hodnoty pozorované ve výběru, jichž je malý počet a které jsou tak vzdáleny od ostatních hodnot, že bud pocházejí z jiného základního souboru, nebo výběrový postup byl chybný.



Obr. 434. Diagram pro součinitele k

Předpokládejme, že ve výběru o $n + 1$ měřených hodnotách je jedna (označme ji x_{n+1}) nápadně velká, základní soubor má normální rozložení a \bar{x} , resp. s je aritmetický průměr, resp. výběrová směrodatná odchylka bez odlehlé hodnoty. Odlehlá hodnota se vypustí, je-li

$$x_{n+1} > \bar{x} + ks,$$

přičemž hodnotu součinitele k lze určit z diagramu na obr. 434. V praxi postačí pro rozsah N výběru z intervalu $\langle 10, 1\,000 \rangle$ vzít $k = 4$.

Při velkých výběrových hodnotách x_i je vhodné zavést předběžný odhad aritmetického průměru D a položit $z_i = x_i - D$. Pak dostaneme

$$\bar{x} = D + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = D + \bar{z},$$

$$s = \sqrt{\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]} = \sqrt{\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \right]}.$$

10.2.5. Metoda nejmenších čtverců

Základem je časová řada [dynamická řada], v níž empirické hodnoty jsou přiřazeny nějakému časovému okamžiku. Zjistitelný vývojový směr se nazývá základní směr [vývojový směr, trend]. Metoda nejmenších čtverců dává approximační funkci, při níž součet čtverců odchylek funkčních hodnot y_i od statistických údajů s_i je nejmenší.

Gaussova podmínka minimálnosti:

$$S = \sum_{i=1}^n (s_i - y_i)^2 \rightarrow \min .$$

Pomocí substituce

$$y_i = f(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m$$

dostaneme

$$S = \sum_{i=1}^n (s_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \dots - a_m x_i^m)^2 \rightarrow \min .$$

Koeficienty a_k se vypočtou pomocí parciální derivace normálních rovnic a anulováním.

V praxi zpravidla stačí omezit se na lineární a kvadratickou (progresivní, popř. degresivní) závislost (viz též vyrovnávací počet na str. 756 a 757).

Lineární závislost:

$$\sum_{i=1}^n s_i = a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$\sum_{i=1}^n s_i x_i = a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Kvadratická závislost (při týchž sčítacích mezích):

$$\sum s_i = a_0 n + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2,$$

$$\sum s_i x_i = a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3,$$

$$\sum s_i x_i^2 = a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4.$$

Výpočet koeficientů a_k se zjednoduší, volíme-li časové úseky x_i tak, že

$$\sum_{i=1}^n x_i^{2k-1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Při týchž sčítacích mezích dostaneme:

Lineární závislost:

$$\sum s_i = a_0 n,$$

$$\sum s_i x_i = a_1 \sum x_i^2.$$

Kvadratická závislost:

$$\sum s_i = a_0 n + a_2 \sum x_i,$$

$$\sum s_i x_i = a_1 \sum x_i^2,$$

$$\sum s_i x_i^2 = a_0 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^4.$$

Uvedená podmínka bude splněna, jestliže polovina hodnot x_i je kladná, popř. záporná (prostřední člen má časovou hodnotu nula).

Stupeň absolutní kompatibility [stupeň absolutní slučitelnosti]:

$$v_{\text{ak}} = \sqrt{\frac{\sum (s_i - y_i)^2}{n}}.$$

Stupeň relativní kompatibility [stupeň relativní slučitelnosti]:

$$v_{\text{rk}} = \frac{v_{\text{ak}}}{\frac{\sum s_i}{n}} \cdot 100 \%$$

10.2.6. Lineární regrese, lineární korelace

Úkolem je vyšetřit závislost řad měření se dvěma znaky (korelační vztah mezi hodnotami x_i a y_i). Regresní rovnice je analytickým vyjádřením vztahu mezi proměnnými. Získaná přímka optimálně prokládá soustavu bodů (*regresní přímka* [*vztahová přímka*]).

Substituce:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 x,$$

kde a_1 je regresní koeficient.

Lineární regresní rovnice (při stejných sčítacích mezích jako dříve):

$$\tilde{y} = \bar{y} + \frac{\sum x_i y_i - \bar{y} \sum x_i}{\sum x_i^2 - \bar{x} \sum x_i} (x - \bar{x}),$$

přičemž

$$s = \sqrt{\left[\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2 \right]}.$$

Stupeň závislosti (přesnost lineárního vztahu) vyjadřuje *korelační koeficient* [*koeficient korelace*]

$$r_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left[\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2 \right]}}, \quad r_{xy} \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Pomocí *kovariance*

$$s_{xy} = \text{cov}(x, y) = \frac{1}{n-1} \left(\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n} \right)$$

dostaneme

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}, \quad a_1 = r_{xy} \frac{s_y}{s_x},$$

$$r_{xy} = a_1 \frac{s_x}{s_y}.$$

Míra variability

$$B_{xy} = r_{xy}^2.$$

10.3. TEORIE CHYB

Označení a názvy:

X – skutečná hodnota,

x_i – naměřená hodnota,

$\varepsilon_i = X - x_i$ – nevyhnutelná skutečná chyba,

Δx ($x_i - \Delta x \leq X \leq x_i + \Delta x$) – absolutní chyba,

$-\Delta x$ – oprava,

$$\delta = \left| \frac{\Delta x}{X} \right| \approx \left| \frac{\Delta x}{x_i} \right| - \text{relativní chyba},$$

$100\delta \%$ – procentuální relativní chyba.

Počáteční chyba

Chybu výpočtu, která vznikne vlivem nepřesnosti vstupních údajů, nazýváme počáteční chybou.

Jsou-li $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ chyby po řadě veličin x_1, x_2, \dots, x_n , pak veličina $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ má počáteční chybu

$$\Delta y \approx \sum_{v=1}^n \Delta x_v \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_v} = dy.$$

Největší absolutní počáteční chyba

$$\Delta y_{\max} \leqq \sum_{v=1}^n \left| \Delta x_v \frac{\partial f}{\partial x_v} \right|.$$

Pro $y = f(x)$ je

$$\Delta y_{\max} = f'(x) \Delta x.$$

Největší relativní počáteční chyba

$$\delta_{\max} = \left| \frac{\Delta y_{\max}}{y} \right| \leqq \sum_{v=1}^n \Delta x_v \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial x_v}}{f} \right|.$$

Zvláštní případy:

a) $y = x_1 + x_2 + \dots + x_n$:

$$\Delta y \leqq \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n,$$

$$\delta \leqq \left| \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| \frac{\Delta x_2}{x_2} \right| + \dots + \left| \frac{\Delta x_n}{x_n} \right|.$$

b) $y = x_1 - x_2$:

$$\Delta y \leq \Delta x_1 + \Delta x_2,$$

$$\delta \leq \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{x_1 - x_2} \quad (x_1 \neq x_2).$$

c) $y = Cx_1 x_2 \dots x_n$:

$$\Delta y \leq |C| [|\Delta x_1 x_2 \dots x_n| + |x_1 \Delta x_2 x_3 \dots x_n| + \dots + |x_1 x_2 \dots x_{n-1} \Delta x_n|],$$

$$\delta \leq |C| \left[\left| \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| \frac{\Delta x_2}{x_2} \right| + \dots + \left| \frac{\Delta x_n}{x_n} \right| \right].$$

d) $y = \frac{x_1}{x_2}$ ($x_2 \neq 0$):

$$\Delta y \leq \frac{|x_2| \Delta x_1 + |x_1| \Delta x_2}{x_2^2},$$

$$\delta \leq \left| \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| \frac{\Delta x_2}{x_2} \right| \quad (x_1 \neq 0).$$

e) $y = x^n$ ($x > 0$):

$$\Delta y \leq \Delta x |nx^{n-1}|.$$

$$\delta \leq \left| n \frac{\Delta x}{x} \right|.$$

f) $y = C \log_a x$ ($x > 0$):

$$\Delta y \leq \left| \frac{C}{\ln a} \right| \left| \frac{\Delta x}{x} \right|,$$

$$\delta \leq \left| \frac{1}{\ln a} \right| \left| \frac{\Delta x}{x \log_a x} \right|.$$

10.4. VYROVNÁVACÍ POČET

Pozorování o stejné přesnosti

Označení a názvy:

X – skutečná hodnota,

x_i – naměřená hodnota,

$[x] = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ – Gaussův sumační symbol.

Zdánlivá hodnota [střední hodnota]:

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n}.$$

Zdánlivá chyba:

$$v_i = \bar{x} - x_i \Rightarrow [v] = 0 \quad (\text{zkouška}).$$

Skutečná chyba:

$$\varepsilon_i = X - x_i.$$

Střední chyba jednotlivé hodnoty [míra rozptylení]:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \approx \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}},$$

přičemž symbol $[ab] = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$.

Střední chyba aritmetického průměru: \bar{x} :

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n^2}} \approx \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}.$$

Výsledek souboru měření pak je $\bar{x} \pm m_{\bar{x}}$.

Podmínka pro vyrovnaní:

$$[vv] \rightarrow \min.$$

Gaussův zákon o přenášení chyb pro střední chyby

Při několika souborech měření s výsledky $x_i \pm m_{\bar{x}_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) má funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ střední chybu

$$m_y = \pm \sqrt{\left[\sum_{v=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial x_v} \right)^2 m_{\bar{x}_v}^2 \right]}.$$

Příklad:

Určeme tloušťku stěny dutého válce s vnějším průměrem D a vnitřním průměrem d .

Tlušťka stěny

$$t = \frac{1}{2}(D - d),$$

odkud

$$\frac{\partial t}{\partial D} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial t}{\partial d} = -\frac{1}{2}.$$

K určení průměrů bylo provedeno pět měření podle tabulky 10.3.

Tabulka 10.3

D	v_i	$v_i v_i$	d	v_i	$v_i v_i$
9,98	-0,01	0,000 1	9,51	+0,01	0,000 1
9,97	-0,02	0,000 4	9,47	-0,03	0,000 9
10,01	+0,02	0,000 4	9,50	$\pm 0,00$	0,000 0
9,98	-0,01	0,000 1	9,49	-0,01	0,000 1
10,02	+0,03	0,000 9	9,52	+0,02	0,000 4
49,96	+0,01	0,001 9	47,49	-0,01	0,001 5

Vypočteme

$$\bar{D} = \frac{49,96}{5} \doteq 9,99,$$

$$\bar{d} = \frac{47,49}{5} \doteq 9,50,$$

$$m = \sqrt{\frac{0,001 9}{4}} \doteq 0,02,$$

$$m = \sqrt{\frac{0,001 5}{4}} \doteq 0,02,$$

$$m_{\bar{D}} \approx 0,01,$$

$$m_{\bar{d}} \approx 0,01.$$

Pro tloušťku stěny pak podle Gaussova zákona o přenášení chyb dostaneme

$$\bar{t} = \frac{1}{2}(\bar{D} - \bar{d}) = \frac{0,49}{2} = 0,245,$$

$$m_t = \sqrt{\left(\frac{1}{4}m_{\bar{D}}^2 + \frac{1}{4}m_{\bar{d}}^2\right)} = \sqrt{(0,25 \cdot 0,000 1 + 0,25 \cdot 0,000 1)} = \\ = \frac{0,01}{\sqrt{2}} \doteq 0,007 07 \doteq 0,007.$$

Pozorování o nestejně přesnosti

Při sdružování výsledků z několika dílčích souborů o různých přesnostech je třeba tyto výsledky opatřit příslušnými vahami h_i . Nejjednodušší je vzít vážený aritmetický průměr:

$$\bar{x} = \frac{[hx]}{[h]} = \frac{h_1 x_1 + h_2 x_2 + \dots + h_n x_n}{h_1 + h_2 + \dots + h_n},$$

$$h_1 : h_2 = m_2^2 : m_1^2,$$

kde h_i je váha i -tého souboru,

x_i – střední hodnota i -tého souboru,

m_i – střední chyba i -tého souboru.

Zdánlivá chyba střední hodnoty x_i :

$$v_i = \bar{x} - x_i, \quad [hv] = 0.$$

Střední chyba váhové jednotky:

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[hvv]}{n-1}}.$$

Střední chyba váženého aritmetického průměru:

$$m_x = \frac{m_0}{\sqrt{[h]}} = \pm \sqrt{\frac{[hvv]}{[h](n-1)}}.$$

Měření o různých přesnostech se na stejnou přesnost normují tak, že se naměřená hodnota x_i vynásobí číslem $\sqrt{h_i}$.

Podmínka pro vyrovnaní:

$$[hvv] \rightarrow \min.$$

Zprostředkující pozorování

a) Lineární závislost

Bylo naměřeno n dvojic $[x_i, y_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) hodnot o stejné přesnosti ($n > 2$), které mají splňovat lineární rovnici $y = a_0 + a_1 x$ tzv. *vyrovnávací přímky*.

Substituce: $a_0 + a_1 x_i - y_i = v_i, \quad [vv] \rightarrow \min.$

Koeficienty a_0, a_1 se určí z tzv. *normálních rovnic*:

$$na_0 + a_1[x] = [y],$$

$$a_0[x] + a_1[xx] = [yx].$$

Střední chyba jednotlivé hodnoty:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}.$$

Mají-li $(r+1)$ -tice $[y_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ri}]$ ($i = 1, 2, \dots, n; n > r+1$) být řešenými nějaké lineární rovnice, pak koeficienty a_i lineární rovnice $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_r x_r$ je třeba určit z těchto normálních rovnic:

$$na_0 + a_1[x_1] + a_2[x_2] + \dots + a_r[x_r] = [y],$$

$$a_0[x_i] + a_1[x_1 x_i] + a_2[x_2 x_i] + \dots + a_r[x_r x_i] = [yx_i] \\ (i = 1, 2, \dots, r).$$

Příklad:

Bыло naměřeno $n = 5$ dvojic čísel:

$$[4; 3], [7; 4,5], [8; 5], [9; 6,1], [10; 6,4].$$

Máme určit příslušnou vyrovnávací přímku.

Vypočteme

$$[x] = 4 + 7 + 8 + 9 + 10 = 38,$$

$$[y] = 3 + 4,5 + 5 + 6,1 + 6,4 = 25,$$

$$[xx] = 16 + 49 + 64 + 81 + 100 = 310,$$

$$[yx] = 12 + 31,5 + 40 + 54,9 + 64 = 202,4.$$

Normální rovnice mají tvar

$$5a_0 + 38a_1 = 25,$$

$$38a_0 + 310a_1 = 202,4,$$

odkud

$$a_0 = \frac{25 \cdot 310 - 38 \cdot 202,4}{5 \cdot 310 - 38 \cdot 38} \doteq 0,555,$$

$$a_1 = \frac{5 \cdot 202,4 - 25 \cdot 38}{5 \cdot 310 - 38 \cdot 38} \doteq 0,585.$$

Vyrovnávací přímka má tedy rovnici

$$y = 0,555 + 0,585x.$$

Při nestejně přesnosti jednotlivých hodnot, tj. má-li $(r+1)$ -tice $[y_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ri}]$ váhu h_i , určí se koeficienty a_j z těchto normálních rovnic:

$$a_0[h] + a_1[hx_1] + \dots + a_r[hx_r] = [hy],$$

$$a_0[hx_i] + a_1[hx_1x_i] + \dots + a_r[hx_rx_i] = [hyx_i]$$

$$(i = 1, 2, \dots, r).$$

b) *Nelineární závislost*

Naměřené dvojice $[x_i, y_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) hodnot mají splňovat celou racionální funkci

$$y = a_0 + a_1x + \dots + a_rx^r \quad (r+1 < n).$$

Úloha se řeší pomocí normálních rovnic z odstavce a) s tím, že místo x_i -pišeme x^i .

Příklad:

Je-li vyrovnávací křivkou parabola, dostaneme tyto normální rovnice:

$$\begin{aligned}na_0 + a_1[x] + a_2[x^2] &= [y], \\a_0[x] + a_1[xx] + a_2[x^2x] &= [yx], \\a_0[x^2] + a_1[xx^2] + a_2[x^2x^2] &= [yx^2].\end{aligned}$$

Závislá pozorování

V jednom souboru měření byly zjištěny hodnoty x'_1, x'_2, \dots, x'_r o stejné přesnosti. Tyto hodnoty mají přesně splňovat t lineárních podmínkových rovnic

$$[a_i x] = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{ir} x_r = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, t).$$

Opravy v_n ($n = 1, 2, \dots, r$) pro naměřené hodnoty se vypočtou z korelatů k_j ($j = 1, 2, \dots, t$):

$$v_n = \sum_{i=1}^t a_{in} k_i \quad (n = 1, 2, \dots, r).$$

Korelaty se počítají z normálních rovnic:

$$\begin{aligned}[a_i a_1] k_1 + [a_i a_2] k_2 + \dots + [a_i a_t] k_t &= w_i \quad (i = 1, 2, \dots, t), \\w_i &= c_i - [a_i x'].\end{aligned}$$

Jestliže hodnoty x'_1, x'_2, \dots, x'_r byly zjištěny při různých přesnostech, tj. byla-li hodnota x_n určena s váhou h_n , pak pro v_n a k_i máme tyto určovací rovnice:

Opravy:

$$v_n = \sum_{i=1}^t \frac{a_{in} k_i}{h_n} \quad (n = 1, 2, \dots, r).$$

Normální rovnice pro korelaty:

$$\begin{aligned}\left[\frac{a_i a_1}{h} \right] k_1 + \left[\frac{a_i a_2}{h} \right] k_2 + \dots + \left[\frac{a_i a_t}{h} \right] k_t &= w_i, \\(i = 1, 2, \dots, t), \\w_i &= c_i - [a_i x'].\end{aligned}$$

Příklad:

Hodnoty $x'_1 = -1,2$ a $x'_2 = 1,9$ mají přesně splňovat rovnice

$$\begin{aligned}3x_1 + 4x_2 &= 5, \\-7x_1 + 2x_2 &= 11.\end{aligned}$$

Pak platí

$$w_1 = 5 - 3x'_1 - 4x'_2 = 5 + 3,6 - 7,6 = 1,$$

$$w_2 = 11 + 7x'_1 - 2x'_2 = 11 - 8,4 - 3,8 = -1,2,$$

$$[a_1a_1] = a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 25,$$

$$[a_1a_2] = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 3 \cdot (-7) + 4 \cdot 2 = -13,$$

$$[a_2a_1] = a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} = (-7) \cdot 3 + 4 \cdot 2 = -13,$$

$$[a_2a_2] = a_{21}a_{21} + a_{22}a_{22} = (-7) \cdot (-7) + 2 \cdot 2 = 53.$$

Normální rovnice mají tvar

$$25k_1 - 13k_2 = 1,$$

$$-13k_1 + 53k_2 = -1,2,$$

odkud dostaneme

$$k_1 \doteq 0,032, \quad k_2 \doteq -0,015.$$

Nyní lze vypočítat opravy. Platí

$$v_1 = a_{11}k_1 + a_{21}k_2 = 3 \cdot 0,032 + (-7) \cdot (-0,015) \doteq 0,2,$$

$$v_2 = a_{12}k_1 + a_{22}k_2 = 4 \cdot 0,032 + 2 \cdot (-0,015) \doteq 0,1.$$

Přičteme-li tyto opravy k výsledkům x'_1 , x'_2 měření, dostaneme konečné hodnoty $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$, které přesně splňují podmínkové rovnice.

11. LINEÁRNÍ OPTIMALIZACE [LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ]

11.1. ZÁKLADNÍ POJMY

Optimalizací rozumíme metody, s jejichž pomocí lze optimalizovat určitý záměr při racionálním využití daných možností. Zadání úlohy vede k maximalizační nebo minimalizační úloze, která zpravidla obsahuje mnoho proměnných.

Lineární programování je matematická metoda pro určení optimálního řešení matematického modelu vytvořeného z lineárních rovnic nebo nerovnic, přičemž optimalizovaná účelová funkce je také lineární. *Matematický model* je matematickou formulací zadání úlohy.

Řešení optimalizačního problému představuje splnění optimalizačního kritéria pro danou úlohu.

Lineární programování má hlavní použití při řešení ekonomických nebo technicko-ekonomických problémů, z nichž jen poměrně jednoduché problémy (jen s několika proměnnými) je efektivní řešit ručními výpočty. Složité problémy vyžadují zpracování na počítačích s dostí značnými požadavky na kapacitu paměti počítače.

Metoda určení extrémní hodnoty pomocí diferenciálního počtu selhává, neboť při derivování proměnné z lineárních rovnic zmizí.

Kanonickým tvarem lineární optimalizace nazýváme maximalizační úlohu, při níž omezující podmínky mají jen nezáporné absolutní členy.

Algoritmus řešení použitého matematického modelu je souhrnem všech pokynů pro výpočet. Z mnoha metod pojednáme jen o grafické metodě a o simplexovém algoritmu [simplexové metodě].

Sestavení matematického modelu

Učelová funkce:

$$\begin{aligned}z(x_1, \dots, x_n) &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \dots + c_n x_n = \\&= \sum_{k=1}^n c_k x_k \rightarrow \text{optimum} ;\end{aligned}$$

v maticovém vyjádření má tvar

$$\mathbf{c}\mathbf{x} \rightarrow \text{optimum},$$

kde

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$$

je řádkový vektor \mathbf{a}

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

sloupcový vektor.

Vlastní omezení (při maximalizační, resp. minimalizační úloze platí znak \leq , resp. \geq):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2,$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m,$$

popř.

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

neboli v maticovém tvaru

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b},$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

je matice koeficientů a

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

je sloupcový vektor absolutních členů.

Podmínky nezápornosti:

$$x_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Omezující podmínky a podmínky nezápornosti určují definiční obor účelové funkce.

Podmínu $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, popř. $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ lze pomocí ekvivalence $\mathbf{a} \geq \mathbf{b} \Leftrightarrow -\mathbf{a} \leq -\mathbf{b}$ vždy splnit.

Množinu všech přípustných řešení tvoří všechny vektory \mathbf{x} , pro které platí omezující podmínky a podmínky nezápornosti.

Řešení \mathbf{x}_0 , pro které účelová funkce je optimem, se nazývá *optimální řešení*.

11.2. GRAFICKÁ METODA ŘEŠENÍ

Této metody lze použít pro řešení úloh se dvěma proměnnými.

V kartézské souřadnicové soustavě s osami x_1 a x_2 nejprve určíme množinu všech uspořádaných dvojic $[x_1, x_2]$, na níž jsou splněny omezující podmínky a podmínky nezápornosti tím, že se rovnice

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2,$$

atd.

přímek vyjádří graficky. Jsou-li omezující podmínky dány nerovnicemi, rozděluje každá z těchto přímek rovinu na „přípustnou“ polorovinu, jejíž body příslušnou podmínu splňují, a na polorovinu, jejíž body příslušnou podmínu nesplňují. Přípustná řešení leží v množině, která je průnikem „přípustných“ polorovin.

Optimální řešení se najde pomocí grafického znázornění účelové funkce $z(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 = c$ (c je libovolná konstanta) a rovnoběžného posunutí této funkce:

$$c \rightarrow c_{\max} \Rightarrow \text{optimum} = \text{maximum}.$$

Optimální řešení je buď právě jedno, jestliže přímka prochází jedním vrcholem přípustné oblasti (tzv. *vrcholové řešení*), nebo existuje nekonečně mnoho optimálních řešení, jestliže graficky znázorněná účelová funkce probíhá rovnoběžně s nějakou z uvedených přímek z omezujících podmínek.

Při minimalizaci je třeba přímku posunout ve směru $c \rightarrow c_{\min}$.

Příklad:

Máme určit optimální řešení úlohy s účelovou funkcí

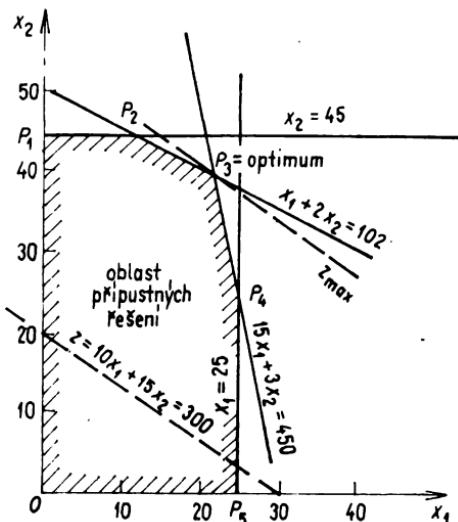
$$z(x_1, x_2) = 10x_1 + 15x_2 \rightarrow \max$$

Omezující podmínky (obr. 435):

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\leq 102, \\15x_1 + 3x_2 &\leq 450, \\x_1 &\leq 25, \\x_2 &\leq 45.\end{aligned}$$

Podmínky nezápornosti:

$$\begin{aligned}x_1 &\geq 0, \\x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$



Obr. 435. Určení oblasti $OP_1P_2P_3P_4P_5$ přípustných řešení

Řešení:

$$\begin{aligned}x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 &\Rightarrow \text{jde o první kvadrant}, \\x_1 = 25 &\Rightarrow \text{přímka je rovnoběžná s osou } x_2 \} \Rightarrow \text{vymezení} \\x_2 = 45 &\Rightarrow \text{přímka je rovnoběžná s osou } x_1 \} \Rightarrow \text{obdélníku}, \\x_1 + 2x_2 = 102 \wedge 15x_1 + 3x_2 = 450 &\quad (\text{dvě přímky}).\end{aligned}$$

Oblast přípustných řešení: šestiúhelník $OP_1P_2P_3P_4P_5$. Pro $c = 300 \Rightarrow z(x_1, x_2) = 10x_1 + 15x_2 = 300$ (přímka) — prochází množinou přípustných řešení; hodnotu lze ještě zvětšit.

Rovnoběžné posunutí přímky z tak, že prochází bodem $P_3 \Rightarrow$ optimum = maximum:

$$P_3 = [22, 40].$$

Hodnota účelové funkce optimálního řešení:

$$z_{\max} = 10 \cdot 22 + 15 \cdot 40 = 820.$$

11.3. SIMPLEXOVÁ METODA

Simplexovou metodou nazýváme iterační metodu postupného zlepšování řešení, které lze použít pro dvě i více proměnných. Lze ji zjednodušit pro řešení dopravního problému (minimalizace celkových přepravních nákladů).

Základním řešením nazýváme každé řešení splňující omezující podmínky, které má nejvíše tolik nenulových proměnných (tzv. základních proměnných), kolik existuje vzájemně nezávislých omezujících podmínek, přičemž sloupcové vektory matice A , které přísluší nenulovým proměnným, jsou lineárně nezávislé. Množina všech základních proměnných se nazývá *báze*. Proměnné, které nepatří do báze, se nazývají *nezákladní [nebazické] proměnné*.

Podmínky nezápornosti se při této metodě automaticky respektují a ne-rozhodují při volbě počtu základních proměnných.

Každé základní řešení odpovídá jednomu vrcholu přípustné oblasti při grafické metodě (viz kapitolu 11.2).

Postup řešení

1. Převedení úlohy na kanonický tvar

Omezující podmínky dané nerovnicemi $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ se zavedením tzv. přidatných [fiktivních, doplňkových] proměnných změní v rovnice

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + u_1 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + u_2 &= b_2, \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + u_m &= b_m. \end{aligned}$$

Přidatné proměnné podávají v základních řešeních informaci o ještě nevyužitých rezervách.

Účelová funkce nabývá tvaru

$$\begin{aligned} z(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) &= \\ &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_m \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Účelové funkce $z \rightarrow \min$ se násobením číslem -1 převedou na účelové funkce $z \rightarrow \max$.

Omezující podmínky dané rovnicemi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se převedou na kanonický tvar zavedením umělých proměnných, přičemž se účelová funkce (v případě maximalizace) změní takto:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - N(u_1 + u_2 + u_3 + \dots),$$

kde $N \gg c_1, c_2, \dots$

Omezující podmínky dané jako nerovnice $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ se zavedením přídatných proměnných změní v rovnice:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - u_1 = b_1,$$

atd.

Máme-li dostat kanonický tvar, musí přídatné proměnné být kladné, což dosáhneme tím, že každý řádek odečteme od řádku s největším absolutním členem b_i . Rozdíly a řádek s největším absolutním členem b_i , doplněný o umělou proměnnou, tvoří soustavu rovnic v kanonickém tvaru.

2. Nalezení výchozího základního řešení

Položme všechny proměnné $x_k = 0$, všechny $u_l \neq 0 \Rightarrow$ všechny u_l patří do báze prvního základního řešení.

Základní vyjádření prvního základního řešení:

$$u_1 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n,$$

$$u_2 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \dots - a_{2n}x_n,$$

.....

$$u_m = b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \dots - a_{mn}x_n.$$

První základní řešení lze vyjádřit takto:

$$z_1 = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots$$

Základní řešení:

$$[x_1, x_2, \dots, x_m, u_1, u_2, \dots, u_m] = [0, 0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_m].$$

3. Ověření, zda základní řešení je optimální (test optima)

Kritérium:

U optimalizačních úloh lze výsledek tak dlouho zlepšovat, dokud se v základním vyjádření účelové funkce vyskytují koeficienty $c_i > 0$ (pro případ maximalizace).

4. Vybrání některé dosavadní nezákladní proměnné k výměně za základní proměnnou

Zavedeme takovou nezákladní proměnnou z účelové funkce z_1 , která má největší koeficient c_i , neboť tato proměnná způsobuje největší zvětšení hodnoty.

5. Vybrání jedné z dosavadních základních proměnných, která má být vyměněna

Vytvoříme všechny podíly b_i/a_{ij} pro $a_{ij} > 0$, přičemž x_j je nová základní proměnná, kterou je nutno zavést. Nejmenší z těchto podílů určuje tu základní proměnnou určenou k výměně, která patří k stejné rovnici (u_l).

6. Výměna proměnných

Transformací odpovídající rovnice ze základního vyjádření prvního základního řešení dostaneme jednu rovnici pro novou základní proměnnou:

$$x_j = \frac{b_j}{a_{ij}} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}} x_1 - \dots - u_l,$$

jejiž pravá strana se dosadí do ostatních rovnic pro x_j .

7. Druhé základní řešení

$$u_1 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1j} \left(\frac{b_j}{a_{ij}} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}} x_1 - \dots - u_l \right) - \dots - a_{1n}x_n,$$

$$u_2 = b_2 - a_{21}x_1 - \dots,$$

.....

$$u_{j-1} = \dots,$$

$$u_{j+1} = \dots,$$

.....

$$x_j = \frac{b_j}{a_{ij}} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}} x_1 - \dots - u_l.$$

Vlevo je nová báze, v níž vzhledem k první bázi jsou členy x_i a u_l vyměněny.

Metoda potom pokračuje dále, jak je popsáno v bodě 2, a to tak dlouho, dokud všechny koeficienty základního vyjádření účelové funkce p -tého základního řešení nejsou rovny nule. Pak je dosaženo optima.

Příklad:

Úlohu, kterou jsme v kapitole 11.2 řešili graficky, budeme nyní řešit simplexovou metodou:

$$z(x_1, x_2) = 10x_1 + 15x_2 \rightarrow \max.$$

Omezující podmínky:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\leq 102, \\15x_1 + 3x_2 &\leq 450, \\x_1 &\leq 25, \\x_2 &\leq 45.\end{aligned}$$

Podmínky nezápornosti:

$$\begin{aligned}x_1 &\geq 0, \\x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Poznámka:

Simplexová metoda je již při dvou proměnných značně náročnější než grafická metoda.

1. Kanonický tvar úlohy:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + u_1 &= 102, \\15x_1 + 3x_2 + u_2 &= 450, \\x_1 + u_3 &= 25, \\x_2 + u_4 &= 45; \\z(x_1, x_2) &= 10x_1 + 15x_2.\end{aligned}$$

2. Výchozí základní řešení:

Základní vyjádření:

$$\begin{aligned}u_1 &= 102 - x_1 - 2x_2, \\u_2 &= 450 - 15x_1 - 3x_2, \\u_3 &= 25 - x_1, \\u_4 &= 45 - x_2.\end{aligned}$$

Základní řešení:

$$[0, 0, 102, 450, 25, 45]$$

(tomuto řešení odpovídá bod P_0 grafického řešení).

Základní vyjádření účelové funkce:

$$z_1 = 10x_1 + 15x_2.$$

Hodnota účelové funkce:

$$z_1 = 10 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 0 \cdot 102 + 0 \cdot 450 + 0 \cdot 25 + 0 \cdot 45 = 0.$$

3. *Test optima:*

Řešení není optimální, neboť v základním vyjádření je $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

4. Nová základní proměnná je x_2 , neboť má v základním vyjádření největší koeficient.

5. Dosavadní základní proměnná určená k výměně

$$\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{102}{2} = 51, \quad \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{450}{3} = 150, \quad \frac{b_4}{a_{42}} = \frac{45}{1} = 45$$

(nejmenší hodnota); je tedy třeba vyloučit proměnnou u_4 .

6. Výměna proměnné

$$x_2 = 45 - u_4.$$

7. Druhé základní řešení

$$u_1 = 102 - x_1 - 2(45 - u_4) = 12 - x_1 + 2u_4,$$

$$u_2 = 450 - 15x_1 - 3(45 - u_4) = 315 - 15x_1 + 3u_4,$$

$$u_3 = 25 - x_1 = 25 - x_1,$$

$$x_2 = 45 - u_4 = 45 - u_4.$$

Základní řešení: $[0, 45, 12, 315, 25, 0] \Rightarrow$ bod P_1 .

Základní vyjádření: $z_2 = 10x_1 + 15(45 - u_4) = 10x_1 - 15u_4 + 675$.

Hodnota účelové funkce: $z_2 = 10 \cdot 0 + 15 \cdot 45 = 675$.

8. Řešení není optimální, neboť koeficient u proměnné x_1 je kladný, takže je třeba vyměnit x_1 .

9. $\frac{b'_1}{a'_{11}} = \frac{12}{1} = 12$ (nejmenší hodnota) \Rightarrow vypustit u_1 ,

$$\frac{b'_2}{a'_{21}} = \frac{315}{15} = 21,$$

$$\frac{b'_3}{a'_{31}} = \frac{25}{1} = 25.$$

10. Třetí základní řešení

$$x_1 = 12 - u_1 + 2u_4 = 12 - u_1 + 2u_4,$$

$$x_2 = 45 - u_4 = 45 - u_4,$$

$$u_2 = 315 - 15(12 - u_1 + 2u_4) + 3u_4 = 135 + 15u_1 - 27u_4,$$

$$u_3 = 25 - (12 - u_1 + 2u_4) = 13 + u_1 - 2u_4.$$

Základní řešení: $[12, 45, 0, 135, 13, 0] \Rightarrow$ bod P_2 .

Základní vyjádření:

$$z'_3 = 10(12 - u_1 + 2u_4) + 15(45 - u_4) = -10u_1 + 5u_4 + 795.$$

Hodnota účelové funkce: $z_3 = 10 \cdot 12 + 15 \cdot 45 = 795$.

11. Řešení není optimální, neboť koeficient u proměnné u_4 je kladný, takže je třeba vyměnit u_4 .

12. $\left(\frac{b''_1}{a''_{16}} = \frac{12}{-2} = -6, \text{ odpadá kvůli } a''_{16} < 0 \right),$

$$\frac{b''_2}{a''_{26}} = \frac{45}{1} = 45,$$

$$\frac{b''_3}{a''_{36}} = \frac{135}{27} = 5 \Rightarrow \text{vypustit } u_2,$$

$$\frac{b''_4}{a''_{46}} = \frac{13}{2} = 6,5.$$

13. Čtvrté základní řešení

$$x_1 = 12 - u_1 + 2\left(5 + \frac{15}{27}u_1 - \frac{1}{27}u_2\right) = 22 + \frac{1}{9}u_1 - \frac{2}{27}u_2,$$

$$x_2 = 45 - \left(5 + \frac{15}{27}u_1 - \frac{1}{27}u_2\right) = 40 - \frac{5}{9}u_1 + \frac{1}{27}u_2,$$

$$u_3 = 13 + u_1 - 2\left(5 + \frac{15}{27}u_1 - \frac{1}{27}u_2\right) = 3 - \frac{1}{9}u_1 + \frac{2}{27}u_2,$$

$$u_4 = 5 + \frac{15}{27}u_1 - \frac{1}{27}u_2 = 5 + \frac{5}{9}u_1 - \frac{1}{27}u_2.$$

Základní řešení: $[22, 40, 0, 0, 3, 5] \Rightarrow$ bod P_3 .

Základní vyjádření:

$$\begin{aligned} z'_4 &= 10(22 + \frac{1}{9}u_1 - \frac{2}{27}u_2) + 15(40 - \frac{5}{9}u_1 + \frac{1}{27}u_2) = \\ &= 820 - \frac{65}{9}u_1 - \frac{5}{27}u_2. \end{aligned}$$

Hodnota účelové funkce:

$$\underline{z_4} = 10 \cdot 22 + 15 \cdot 40 = \underline{820}.$$

11.4. SIMPLEXOVÁ TABULKA

Simplexová tabulka 11.1 přehledně uvádí početní postup z kapitoly 11.3.

Tabulka 11.1

Proměnné a přídatné proměnné		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
Základní proměnné	0	10	15	0	0	0	0	
I	u_1	102	1	2	1	0	0	0
	u_2	450	15	3	0	1	0	0
	u_3	25	1	0	0	0	1	0
	u_4	45	0	1	0	0	0	1
II		-675	10	0	0	0	0	-15
	u_1	12	1	0	1	0	0	-2
	u_2	315	15	0	0	1	0	-3
	u_3	25	1	0	0	0	1	0
	$\rightarrow x_2$	45	0	1	0	0	0	1
III		-795	0	0	-10	0	0	+5
	$\rightarrow x_1$	12	1	0	1	0	0	-2
	u_2	135	0	0	-15	1	0	27
	u_3	13	0	0	-1	0	1	2
	x_2	45	0	1	0	0	0	1
IV		-820	0	0	$\frac{-65}{9}$	$\frac{-5}{27}$	0	0
	x_1	22	1	0	$\frac{-3}{27}$	$\frac{2}{27}$	0	0
	$\rightarrow u_4$	5	0	0	$\frac{-15}{27}$	$\frac{1}{27}$	0	1
	u_3	3	0	0	$\frac{3}{27}$	$\frac{-2}{27}$	1	0
	x_2	40	0	1	$\frac{15}{27}$	$\frac{-1}{27}$	0	0

Vysvětlení k tabulce

V záhlaví jsou všechny proměnné (původní i přídatné).

1. sloupec: základní proměnné příslušné báze.
2. sloupec: hodnota základní proměnné.
3. až 8. sloupec: koeficienty u proměnných a přídatných proměnných v základním vyjádření.
9. sloupec: podíly absolutního člena a koeficientu u proměnné určené k výměně.

První základní řešení

1. řádek: účelová funkce; je určen největší koeficient 15; je třeba vyměnit x_2 ,
2. až 5. řádek: kanonický tvar.

Nejmenší podíl 45 určuje výměnu proměnné u_4 .

Hlavní prvek (koeficient u proměnné x_2 v rovnici pro u_4) **[1]** je označen rámečkem (zarámečkován).

Druhé základní řešení

5. řádek: dělíme 5. řádek části I hlavním prvkem 1.

1. řádek: odečteme 15-násobek 5. řádku od 1. řádku v části I, aby ve sloupci proměnné x_2 určené k výměně byl koeficient 0.

2. řádek: odečteme 2-násobek 5. řádku od druhého řádku v části I.

3. řádek: odečteme 3-násobek 5. řádku od 3. řádku v části I.

4. řádek: odečteme nulový násobek 5. řádku od 4. řádku v části I, tj. 4. řádek zůstává beze změny.

Nejmenší podíl 12 určuje výměnu proměnné u_1 za proměnnou x_1 , u níž je největší koeficient v účelové funkci.

Hlavní prvek je **[1]**.

Třetí základní řešení

2. řádek: dělíme 2. řádek v části II hlavním prvkem 1.

1. řádek: odečteme 10-násobek 2. řádku od 1. řádku v části II a dostaneme základní vyjádření třetího základního řešení.

3. řádek: odečteme 15-násobek 2. řádku od 3. řádku v části II.

Uvedeným způsobem pokračujeme tak dlouho, až 1. řádek (základní vyjádření) již neobsahuje žádné koeficienty větší než nula.

Zvláštní případy

Vyskytují-li se v řádku účelové funkce z pro nezákladní proměnné částečně nuly nebo samé nuly, pak je další výměna možná, címž dostaneme jiné optimální řešení se stejnou hodnotou účelové funkce.

Úloha je degenerovaná, jestliže nějaká základní proměnná nabude nulové hodnoty.

12.1. ZÁKLADNÍ POJMY

Vhodným aparátem pro popis vztahů mezi výroky je jako logický počet vytvořená *Boolova algebra*, pomocí níž lze matematicky odůvodnit pravdivost nebo nepravdivost složených výroků. Její převedení na spínačovou algebru se zakládá na tom, že v číslicové technice bezpaměťových členů jsou možné jen stavы „zapnuto“ (znak I) a „vypnuto“ (znak 0), tj.

$$x = I, \text{ právě když } x \neq 0,$$

$$x = 0, \text{ právě když } x \neq I.$$

Proměnná x je dvouhodnotová a nazývá se *boolovská proměnná*.

k-místným logickým členem [*k-místnou boolovskou funkcí*] F je každé uspořádané k -tici $[x_1, x_2, \dots, x_k]$ výroků (hodnot argumentů) jednoznačně přiřazen výrok $F(x_1, x_2, \dots, x_k)$ (hodnota funkce).

Boolovské funkce jsou dvouhodnotové, neboť oborem hodnot je množina obsahující jen dva prvky, které označíme 0 a I. Každou z nich lze přehledně vyjádřit pomocí tzv. *pravdivostní tabulky*, která se v řídicí technice nazývá *tabulka stavů*.

Označení (pro logicky ekvivalentní výrokové formule se v této části používá rovnítka):

Pravdivostní ohodnocení výroků: pravda – nepravda, ano – ne, zapnuto – vypnuto, platí – neplatí.

Znaky pro pravdivostní ohodnocení: I – 0, 1 – 0, P – N.

Vstupní proměnné: x_v .

Počet vstupních proměnných: k .

Hodnota boolovské funkce: y , popř. $F(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

Stálé spojení: I.

Stálé přerušení: 0.

Dosazení znaků I a 0 za vstupní proměnné: f_n (n viz dále).

Při k proměnných existuje nejvýše 2^k kombinací.

Boolovská funkce: F_n^k , kde k je počet vstupních proměnných a n stavový index řádku v pravdivostní tabulce (viz tabulku 12.3).

Počet n všech boolovských funkcí při k vstupních proměnných je

$$n = 2^{2^k};$$

např. pro $k = 2$ dostaneme 16 možností (viz tabulku 12.3).

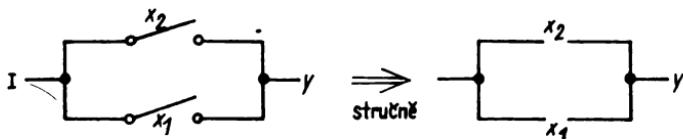
Elementární logické operace

Struktura elementárních logických operací je úplná, neboť z jejich operací lze vyjádřit všechny dvouhodnotové funkce.

Disjunkce [logické sčítání, logické nebo, někdy alternativa] (viz tabulku 12.1)

Způsob zápisu: $y = x_1 \vee x_2$ (čteme: x_1 nebo x_2) (další používané znaky: $+$, \cup , vel).

Obvodová technika: paralelní řazení členů (obr. 436).



Obr. 436. Schéma disjunkce $y = x_1 \vee x_2$ (paralelní řazení členů)

Konjunkce [logické násobení, logické a] (viz tabulku 12.1)

Způsob zápisu: $y = x_1 \wedge x_2$ [čteme: x_1 a (zároveň) x_2 , popř. x_1 i x_2] (jiné používané znaky: \cdot , \cap , $\&$, popř. bez znaku).

Tabulka 12.1

Pravidlostní tabulky
pro disjunkci a konjunkci

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Poznámka:

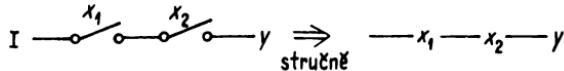
Bez uvedení znaku tedy vždy uvažujeme, že jde o konjunkci. V dalším textu budeme znak konjunkce zpravidla vynechávat.

Obvodová technika: sériové řazení členů (obr. 437).

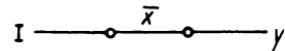
Negace [logický zápor, inverze] (viz tabulku 12.2)

Způsob zápisu: $y = \bar{x}$ (čteme: není pravda, že x ; x neplatí) (jiné používané znaky: \neg , \sim , $'$, non).

Obvodová technika: klidový [normální] kontakt (obr. 438).



Obr. 437. Schéma konjunkce $y = x_1 x_2$
(sériové řazení členů)



Obr. 438. Schéma negace $y = \bar{x}$

Tabulka 12.2

Pravdivostní
tabulka pro negaci

x	\bar{x}
0	1
1	0

12.2. ZÁKLADNÍ LOGICKÉ ZÁKONY A PRAVIDLA

Úmluva:

Při určování pravdivostní hodnoty složených výroků se při odstranění závorek dává přednost konjunkci před disjunkcí.

Komutativní zákony:

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1, \quad x_1 x_2 = x_2 x_1.$$

Asociativní zákony:

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee x_2 \vee x_3,$$

$$x_1(x_2 x_3) = (x_1 x_2) x_3 = x_1 x_2 x_3.$$

Distributivní zákony:

$$x_1(x_2 \vee x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3,$$

$$x_1 \vee x_2 x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3).$$

Poznámka:

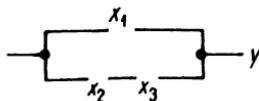
Pro poslední vztah neexistuje žádný odpovídající vztah v obyčejné algebře.

Příklad:

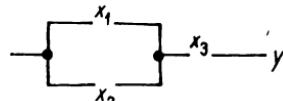
$$y = x_1 \vee x_2 \wedge x_3 = x_1 \vee (x_2 x_3) \quad (\text{správně}) \quad (\text{obr. 439}),$$

kdežto

$$y = x_1 \vee x_2 \wedge x_3 = (x_1 \vee x_2) x_3 \quad (\text{nesprávně}) \quad (\text{obr. 440}).$$



Obr. 439. Schéma formule
 $y = x_1 \vee (x_2 x_3)$



Obr. 440. Schéma formule
 $y = (x_1 \vee x_2) x_3$

Přehled logických zákonů a pravidel

$$0 \vee 0 = 0$$

$$0 \wedge 0 = 0 \wedge I = \\ = I \wedge 0 = 0$$

$$\bar{0} = I$$

$$0 \vee I = I \vee 0 = I \vee I = I$$

$$I \wedge I = I$$

$$\bar{I} = 0$$

$$x \vee 0 = x$$

$$x \wedge 0 = 0$$

$$\bar{x} = x$$

$$x \vee I = I$$

$$x \wedge I = x$$

$$(\bar{x}) = \bar{x}$$

$$x \vee x \vee x \vee \dots \vee x = x \\ (\text{idempotentnost})$$

$$xxx\dots x = x$$

$$(\bar{\bar{x}}) = \bar{\bar{x}} = x$$

$$x \vee \bar{x} = I \quad (\text{zákon o vyloučeném třetím})$$

$$x\bar{x} = 0 \quad (\text{zákon sporu})$$

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$$

$$x_1 x_2 = x_2 x_1$$

(komutativní zákony)

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = \\ = x_1 \vee x_2 \vee x_3$$

(asociativní zákony)

$$x_1 \vee x_2 x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3) \\ (\text{distributivní zákony})$$

$$\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \bar{x}_2$$

(de Morganova pravidla)

$$\overline{x_1 x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$$

$$\overline{x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_k} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_k$$

$$\overline{x_1 x_2 \dots x_k} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_k$$

$$x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) = x_1$$

$$(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1$$

(pravidla o zestručnění)

$$\begin{array}{l|l}
 x_1 \vee x_1 x_2 = x_1(I \vee x_2) = x_1 & | \quad x_1(x_1 \vee x_2) = x_1 \\
 (zákony absorpcie) & \\
 x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 = x_1 \vee x_2 & | \quad x_1(\bar{x}_1 \vee x_2) = x_1 x_2 \\
 x_1 x_2 \vee x_1 x_3 = x_1(x_2 \vee x_3) & | \quad (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3) = x_1 \vee x_2 x_3 \\
 (odstranění závorek) & \\
 \hline
 (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_3) = x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 & | \quad (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3) = \\
 x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3 = x_1 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3 & | \quad = x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3 \\
 F(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1 \wedge F(1, x_2, \dots, x_k) \vee \bar{x}_1 \wedge F(0, x_2, \dots, x_k) & \\
 (rozklad funkce F podle proměnné x_1).
 \end{array}$$

Pro $x_i^{\sigma_i}$ ($\sigma_i \in \{0, 1\}$) a $x^0 = \bar{x}$, $x^1 = x$ (tj. pro $\sigma_i = 0$ je proměnná x_i negována, kdežto pro $\sigma_i = 1$ není proměnná x_i negována) lze rozklad podle proměnných x_1, x_2, \dots, x_h obecně vyjádřit takto:

$$\begin{aligned}
 F(x_1, x_2, \dots, x_h, \dots, x_k) &= \\
 &= \bigvee_{[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_h]} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_h^{\sigma_h} F(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_h, x_{h+1}, \dots, x_k).
 \end{aligned}$$

12.3. DALŠÍ BOOLOVSKÉ FUNKCE SE DVĚMA PROMĚNNÝMI (LEXIKOGRAFICKÉ USPOŘÁDÁNÍ)

Z šestnácti možností (operací) uvedených v tabulce 12.3 je šest triviálních (0, 3, 5, 10, 12, 15).

Pro technickou praxi jsou důležité zejména tyto logické operace:

Negace disjunkce [negace logického sčítání, funkce [operace, člen] NOR, Peirceova operace, funkce ani] (viz tabulku 12.4)

$$y = \overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2.$$

Negace konjunkce [negace logického násobení, funkce [operace, člen] NAND, Shefferova operace] (viz tabulku 12.4)

$$y = x_1 | x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2.$$

Tabulka 12.3

x_1	I I 0 0	F_n^2	Název
x_2	I 0 I 0		
n			
0	0 0 0 0	$F_0^2 = 0$	konstanta [přerušení]
1	0 0 0 I	$F_1^2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \bar{x}_2$	NOR [Peirceova operace]
2	0 0 I 0	$F_2^2 = x_1 \leftrightarrow x_2 = \bar{x}_1 x_2$	nepřímá inhibice
3	0 0 I I	$F_3^2 = \bar{x}_1$	negace
4	0 I 0 0	$F_4^2 = x_1 \leftrightarrow x_2 = x_1 \bar{x}_2$	přímá inhibice
5	0 I 0 I	$F_5^2 = \bar{x}_2$	negace
6	0 I I 0	$F_6^2 = x_1 \Rightarrow x_2 = x_1 \oplus x_2 = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$	antivalence
7	0 I I I	$F_7^2 = x_1 x_2 = \overline{x_1 x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$	NAND [Shefferova operace]
8	I 0 0 0	$F_8^2 = x_1 x_2 = x_1 \wedge x_2$	konjunkce
9	I 0 0 I	$F_9^2 = x_1 \Leftrightarrow x_2 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$	ekvivalence
10	I 0 I 0	$F_{10}^2 = x_2$	identita
11	I 0 I I	$F_{11}^2 = x_1 \Rightarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$	implikace
12	I I 0 0	$F_{12}^2 = x_1$	identita
13	I I 0 I	$F_{13}^2 = x_1 \vee \bar{x}_2$	negace nepřímé inhibice
14	I I I 0	$F_{14}^2 = x_1 \vee x_2$	disjunkce
15	I I I I	$F_{15}^2 = I$	konstanta [skrat]

Tabulka 12.4

Pravdivostní tabulky
pro negaci disjunkce
a negaci konjunkce

x_1	x_2	$\overline{x_1 \vee x_2}$	$\overline{x_1 x_2}$
0	0	I	I
0	I	0	I
I	0	0	I
I	I	0	0

Poznámka:

Pomocí funkcií NOR a NAND lze rovněž vyjádřit všechny booleovské funkce (tyto funkce tedy tvoří úplnou logickou soustavu).

Implikace [přímá implikace] (viz tabulku 12.5)

$$y = x_1 \Rightarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$$

(jiné používané znaky: \rightarrow , \supset).

Nepřímá implikace (viz tabulku 12.5)

$$y = x_1 \Leftarrow x_2 = x_2 \Rightarrow x_1$$

(jiné používané znaky: \leftarrow , \subset).

Tabulka 12.5

*Pravdivostní tabulky pro přímou
a nepřímou implikaci a pro přímou
a nepřímou inhibici*

x_1	x_2	$x_1 \Rightarrow x_2$	$x_1 \Leftarrow x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$
0	0	I	I	0	0
0	I	I	0	0	I
I	0	0	I	I	0
I	I	I	I	0	0

Inhibice [přímá inhibice, nonimplikace, negace implikace] (viz tabulku 12.5)

$$y = x_1 \leftrightarrow x_2 = \overline{x_1 \Rightarrow x_2}.$$

Tabulka 12.6

*Pravdivostní
tabulky pro ekvivalenci
a antivalenci*

x_1	x_2	$x_1 \Leftrightarrow x_2$	$x_1 \succcurlyeq x_2$
0	0	I	0
0	I	0	I
I	0	0	I
I	I	I	0

Nepřímá inhibice (viz tabulku 12.5)

$$y = x_1 \leftrightarrow x_2 = \overline{x_1 \Leftarrow x_2}.$$

Ekvivalence (viz tabulku 12.6)

$$y = x_1 \Leftrightarrow x_2 = (x_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2)$$

(jiné používané znaky: \leftrightarrow , \equiv).

Nonekvivalence [antivalence, alternativa, operace vylučovací nebo, negace ekvivalence, logické sčítání modulo 2] (viz tabulku 12.6)

$$y = x_1 \succcurlyeq x_2 = (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2)$$

(jiné používané znaky: \oplus , \leftrightarrow , $\not\equiv$).

12.4. NORMÁLNÍ TVARY

Úplný konjunktivní normální tvar (zkratkou ÚKNT) [elementární konjunkce]

$$K_n^k = \bigwedge_{v=1}^k x_v$$

(čteme: součet všech konjunkcí pro $v = 1$ až $v = k$). Počet všech možných úplných konjunktivních normálních tvarů je 2^k .

Výraz K_n^k se nazývá úplný konjunktivní normální tvar (zkratkou ÚKNT), obsahuje-li konjunktivní vazbu všech k vstupních proměnných (negovaných nebo nenegovaných), přičemž počet ohodnocení je dán k -tou mocninou čísla 2.

Příklad:

$$K_{38}^6 = \bigwedge_{v=1}^6 x_v = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \bar{x}_6$$

s ohodnocením I00II0 dává $n = 38$.

Úplný disjunktivní normální tvar (zkratkou ÚDNT) [elementární disjunkce]

$$D_n^k = \bigvee_{v=1}^k x_v$$

(čteme: součet všech disjunkcí pro $v = 1$ až $v = k$). Počet všech možných úplných disjunktivních normálních tvarů je 2^k .

Výraz D_n^k se nazývá úplný disjunktivní normální tvar (zkratkou ÚDNT), obsahuje-li disjunktivní vazbu všech k vstupních proměnných (negovaných nebo nenegovaných), přičemž počet ohodnocení je dán k -tou mocninou čísla 2.

Příklad:

$$D_{11}^4 = \bigvee_{v=1}^4 x_v = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4$$

s ohodnocením IOII dává $n = 11$.

Disjunktivní normální tvar, konjunktivní normální tvar

Každé disjunktivní spojení konjunkcí (základních výrazů) se nazývá disjunktivní normální tvar, např. $y = x_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_3 x_4 \vee x_2$. Obdobně definujeme konjunktivní normální tvar, např. $y = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)$.

Výrokové termy, které nelze rozložit v složené termy, se nazývají elementární výrokové termy dané výrokové funkce.

Kanonický disjunktivní normální tvar představuje sériově paralelní obvod.

Kanonický konjunktivní normální tvar představuje paralelní sériový obvod.

Každé disjunktivní spojení úplných konjunktivních normálních tvarů nazýváme kanonickým disjunktivním normálním tvarom:

$$y^k = \bigvee_n K_n^k$$

(je přednostně používán). Obdobně definujeme kanonický konjunktivní normální tvar

$$\bar{y}^k = \bigwedge_n D_n^k.$$

Počet všech možných kanonických disjunktivních normálních tvarů je

$$n = 2^{2k},$$

kde k je počet vstupních proměnných.

Příklad:

Tři vstupní proměnné x_1, x_2, x_3 jsou s výchozí proměnnou y podle technické úlohy spojeny dále uvedeným způsobem. Vypočteme logickou funkci v minimálním tvaru.

Tabulka 12.7 uvádí 2^k možnosti odezvy (k je počet vstupních proměnných).

Pro $y = I$ platí kanonický disjunktivní normální tvar:

$$y = \bigvee_n K_n \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4, 5),$$

$$y = K_0 \vee K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5 =$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 = \\
&= \bar{x}_1 \bar{x}_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) \vee \bar{x}_1 x_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) \vee x_1 \bar{x}_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) = \\
&= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = \bar{x}_1 (\bar{x}_2 \vee x_2) \vee x_1 \bar{x}_2 = \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_2 = \\
&= \underline{\bar{x}_1} \vee \underline{\bar{x}_2}.
\end{aligned}$$

Protože jen ve dvou rádcích tabulky 12.7 je $y = 0$, je lépe zvolit pro kanonický konjunktivní normální tvar ohodnocení 0 a výsledek pak negovat:

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= K_6 \vee K_7 = \\
&= x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) = x_1 x_2,
\end{aligned}$$

odkud

$$y = \overline{x_1 x_2} = \underline{\bar{x}_1} \vee \underline{\bar{x}_2},$$

což je týž výsledek jako dříve.

Tabulka 12.7

n	x_1	x_2	x_3	K_n
0	0	0	0	I
1	0	0	I	I
2	0	I	0	I
3	0	I	I	I
4	I	0	0	I
5	I	0	I	I
6	I	I	0	0
7	I	I	I	0

12.5. KARNAUGHOVY MAPY

Každé pole Karnaughovy mapy (tabulka 12.8) představuje konjunkci vstupních proměnných, uvedených na jejím levém a horním okraji. Karnaughovy mapy se v rovině sestavují až do pěti vstupních proměnných (to odpovídá 32 polím). Při větším počtu proměnných nejsou Karnaughovy mapy operativní.

Od sloupce k sloupci a od řádku k řádku se pokaždě mění jen jedna proměnná (tzv. *Grayův kód*). To platí také pro okraje Karnaughovy mapy, např. mezi prvním a čtvrtým sloupcem, popř. řádkem se vždy mění jen jedna proměnná.

Příklad:

$$K_{13}^4 = x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \doteq \text{IIOI} \quad (\text{viz tabulku 12.8}).$$

Do průsečíků řádků a sloupců zaneseme k příslušným elementárním konjunkcím K_n výchozích proměnných žádanou výchozí hodnotu I nebo 0. Pole jsou spojena spojkou „nebo“.

Tabulka 12.8

	$\bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_3 x_4$	$x_3 x_4$	$x_3 \bar{x}_4$
$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	0000 K_0	000I K_1	00II K_3	00I0 K_2
$\bar{x}_1 x_2$	0I00 K_4	0IOI K_5	0III K_7	0III0 K_6
$x_1 x_2$	IIO0 K_{12}	II0I K_{13}	III0 K_{15}	III0 K_{14}
$x_1 \bar{x}_2$	I000 K_8	I00I K_9	I0II K_{11}	I0I0 K_{10}

Pravdivostní ohodnocení dostaneme tak, že vytvoříme pokud možno velké dvojbloky, čtyřbloky nebo osmibloky s $K_n = I$ (popř. $K_n = 0$), které se mohou také rozšířit přes okraje. Ohodnotíme-li bloky, přičemž zmizí všechny ty vstupní proměnné, jejichž hodnota se uvnitř bloků mění, pak dostaneme primitive součásti (implikanty) logické funkce.

Příklad:

Ze čtyř pump mají současně pracovat nejvýše dvě. Máme zabránit tomu, aby více než dvě pumpy byly současně zapojeny (činnost blokovacího [za-bezpečovacího] zařízení $K_n = I$).

Tabulka 12.9

n	x_1	x_2	x_3	x_4	K_n	n	x_1	x_2	x_3	x_4	K_n
0	0	0	0	0	0	8	I	0	0	0	0
1	0	0	0	I	0	9	I	0	0	I	I
2	0	0	I	0	0	10	I	0	I	0	I
3	0	0	I	I	I	11	I	0	I	I	I
4	0	I	0	0	0	12	I	I	0	0	I
5	0	I	0	I	I	13	I	I	0	I	I
6	0	I	I	0	I	14	I	I	I	0	I
7	0	I	I	I	I	15	I	I	I	I	I

Práce jedné pumpy: $x = I$.

Počet všech možných logických členů: $n = 2^k = 2^4 = 16$ (viz tabulku 12.9).

Řádky 7, 11, 13, 14 a 15 lze vypustit, neboť tyto kombinace proměnných nemohou podle zadání úlohy nastat. Přihlédneme-li k nim, usnadní to často výpočet (viz tabulku 12.10).

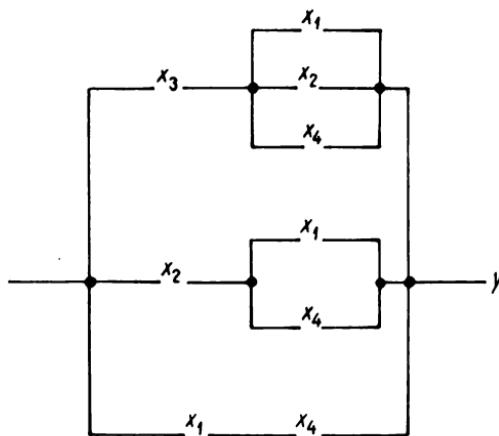
Tabulka 12.10

	$\bar{x}_3\bar{x}_4$	\bar{x}_3x_4	x_3x_4	$x_3\bar{x}_4$
$\bar{x}_1\bar{x}_2$	0	0	I	0
\bar{x}_1x_2	0	I	I	I
x_1x_2	I	I	I	I
$x_1\bar{x}_2$	0 čtyřblok	I totéž	I totéž	I totéž

(3. sloupec) (3. řádek) (střed) (střed dole) (střed vpravo) (vpravo dole)

$$y = x_3x_4 \vee x_1x_2 \vee x_2x_4 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3 = \\ = \underline{[x_3(x_1 \vee x_2 \vee x_4)]} \vee \underline{[x_2(x_1 \vee x_4)]} \vee \underline{x_1x_4}$$

(obr. 441).



Obr. 441. Schéma řešení příkladu o 4 pumpách

13.1. ZÁKLADNÍ POJMY

Vzhledem k zvláštnímu způsobu vyjádření je následujícím vzorcům věnována samostatná část.

Lineárnost

Přenosový člen pro signály (regulovaná soustava, zesilovač, měřicí zařízení) se nazývá *lineární* (obr. 442), jestliže

$$x_e(t) = K(t) x_v(t),$$

kde $x_v(t)$ je vstupní veličina,

$x_e(t)$ – výstupní veličina,

$K(t)$ – přenosová funkce.

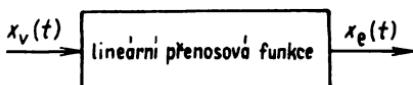
Přitom platí

$$n x_e(t) = n K(t) x_v(t),$$

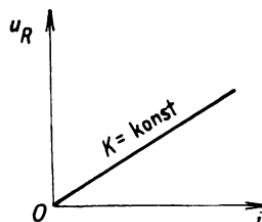
$$\left. \begin{aligned} x_{e_1}(t) &= K_1(t) x_{v_1}(t), \\ x_{e_2}(t) &= K_2(t) x_{v_2}(t), \end{aligned} \right\} x_{e_1} + x_{e_2} = K_1(t) x_{v_1}(t) + K_2(t) x_{v_2}(t)$$

$$\left. \begin{aligned} x_{e_1}(t) &= K_1(t) x_{v_1}(t), \\ x_{e_2}(t) &= K_2(t) x_{v_2}(t), \end{aligned} \right\}$$

(zákon o superpozici).



Obr. 442. Lineární přenosová funkce



Obr. 443. Závislost napětí u na proudu i při konstantním odporu R

Působení žádaných vlivů $x_{v_i}(t)$ a poruchových veličin $z_i(t)$ se sčítají nezávisle na sobě. Funkce $K(t) = K$ (K je konstanta) vyjadřuje *statickou lineárnost*, přičemž grafické znázornění vztahu mezi vstupními a výstupními veličinami se nazývá *statická charakteristika* (obr. 443).

Chování lineárních členů popisuje nehomogenní lineární diferenciální rovnice (omezíme se na technicky důležité diferenciální rovnice s konstantními koeficienty), popř. rovnice dopravního zpoždění:

$$a_n \frac{d^n x_e}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_e}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx_e}{dt} + x_e = \\ = b_0 x_v + b_1 \frac{dx_v}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m x_v}{dt^m} + c_0 z + c_1 \frac{dz}{dt} - \dots$$

V praxi je $m < n$, tj. x_e plyne z x_v podle daných podmínek.

Členy s autoregulací x_e jsou různé od 0, kdežto členy bez autoregulace x_e jsou rovny 0. Řešení diferenciální rovnice (viz str. 680 a 685) se skládá ze stacionárního řešení (partikulární řešení úplné Eulerovy diferenciální rovnice)

$$x_{e_p}(t)$$

a z astatického řešení (obecné řešení homogenní diferenciální rovnice)

$$x_{e_s}(t),$$

takže

$$x_e(t) = x_{e_p}(t) - x_{e_s}(t).$$

V charakteristické rovnici (viz str. 673), odvozené z diferenciální rovnice, se v regulační technice obvykle píše p místo r , přičemž p vyjadřuje chování astatického členu taktó:

při $p < 0$ jde o „klesající“ křivku,

při $p > 0$ jde o křivku „neohraničeně rostoucí“,

při $p = \delta + i\omega$ jde při $\delta < 0$ o oscilující křivku s klesající amplitudou a při $\delta > 0$ o oscilující křivku s rostoucí amplitudou.

13.2. TESTOVACÍ [ZKUŠEBNÍ] FUNKCE

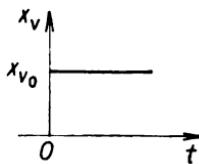
Při určování charakteristických hodnot členu (velikost a průběh) se berou za základ standardizované vstupní signály a počáteční podmínky, s jejichž pomocí lze určit všechny údaje pro popis chování při libovolném vstupním signálu.

Jednotková skoková funkce (obr. 444)

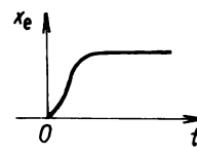
$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0), \\ 1 & (t \geq 0). \end{cases}$$

Přechodová charakteristika [odezva na skokovou funkci] (obr. 445)

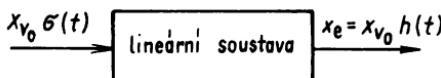
$$x_v(t) = x_{v_0} \sigma(t) \Rightarrow x_e(t).$$



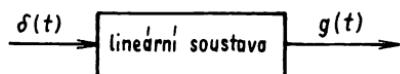
Obr. 444. Jednotková skoková funkce



Obr. 445. Odezva na skokovou funkci



Obr. 446. Přechodová funkce



Obr. 447. Impulsová funkce a její odezva

Přechodová funkce (obr. 446)

$$h(t) = \frac{x_e(t)}{x_{v_0}},$$

kde $x_e(t)$ je skoková odezva,

$$h(t) = \frac{G(p)}{p},$$

kde $G(p)$ je přenosová funkce,

p — diferenciální operátor,

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) d\omega,$$

přičemž $G(i\omega) = P(\omega) + iQ(\omega)$ je frekvenční přenos.

Impulsová funkce [Diracova funkce delta]

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\sigma(t) - \sigma(t - \Delta t)] = \begin{cases} 0 & (t < 0), \\ \frac{1}{\Delta t} & (0 \leq t \leq \Delta t), \\ 0 & (t > \Delta t), \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} \frac{dt}{\Delta t} = 1.$$

Poznámka:

V klasickém matematickém významu není Diracova funkce delta funkcií (viz teorii distribucí).

Spektrum impulsu delta (obr. 447)

$$f(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} d\omega = 1$$

(viz str. 707),

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1,$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-pt_0} \quad (t_0 > 0),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0).$$

Impulsová přechodová funkce [odezva na impulsovou funkci]

$$[x_e(t) =] g(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t) - h(t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{dh(t)}{dt} \quad (t > 0),$$

$$\begin{aligned} x_e(t) &= x_v(t) * g(t) = \int_0^t x_v(\tau) g(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^t x_v(\tau) h(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Duhamelův vzorec

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = G(p),$$

kde $G(p)$ je přenosová funkce.

13.3. SYMBOLICKÁ VYJÁDŘENÍ

Z možných časových funkcí pojednáme pro zjednodušení jen o některých z nich:

$$x_v(t) = x_{v_0} e^{pt},$$

kde $p = \delta + i\omega$ je diferenciální operátor (*Heavisideův operátor*). Je tedy

$$\frac{dx}{dt} = px, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = p^2 x, \quad \dots,$$

$$\int x dt = \frac{1}{p} x, \quad \iint x^2 (dt)^2 = \frac{1}{p^2} x, \quad \dots$$

Převedení diferenciální rovnice do podoblasti Laplaceovy transformace člen po členu dává pří

$$\mathcal{L}\{x_e(t)\} = X_e(p), \quad \mathcal{L}\{x_v(t)\} = X_v(p)$$

a při nulových počátečních podmínkách vztah

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + 1) X_e(p) = \\ = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + 1) X_v(p).$$

Obrazová přenosová funkce

$$G(p) = \frac{X_e(p)}{X_v(p)} = \frac{\mathcal{L}\{x_e(t)\}}{\mathcal{L}\{x_v(t)\}}.$$

Póly přenosové funkce jsou kořeny charakteristické rovnice diferenciální rovnice. Pro stabilní soustavy leží všechny v levé pololorovině Gaussovy roviny.

Pomocí symbolické metody lze často diferenciální rovnici dané soustavy vhodně odvodit tak, že místo $dx/dt = px, \dots$ položíme $x dt = x/p, \dots$

Příklad:

Je dán elektrický obvod podle obrázku 448. Určeme přenosovou funkci a diferenciální rovnici daného schématu.

Pro

$$u_c = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{pC} i$$

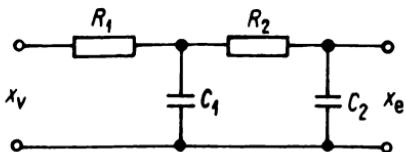
dostaneme

$$\frac{X_e(p)}{X_v(p)} = G(p) = \\ = \frac{\frac{1}{pC_1} \left(R_2 + \frac{1}{pC_2} \right)}{R_2 + \frac{1}{pC_1} + \frac{1}{pC_2}} - \frac{\frac{1}{pC_2}}{R_2 + \frac{1}{pC_2}} = \\ = R_1 + \frac{\frac{1}{pC_1} \left(R_2 + \frac{1}{pC_2} \right)}{R_2 + \frac{1}{pC_1} + \frac{1}{pC_2}} - \frac{1}{p^2 \tau_1 \tau_2 + p \tau_{21} + p \tau_1 + p \tau_2 + 1},$$

kde $\tau_1 = C_1 R_1$, $\tau_2 = C_2 R_2$, $\tau_{21} = C_2 R_1$.

Diferenciální rovnice zní:

$$C_1 C_2 R_1 R_2 \frac{d^2 x_e}{dt^2} + (C_2 R_1 + C_1 R_1 + C_2 R_2) \frac{dx_e}{dt} + x_e = x_v.$$



Obr. 448. Schéma elektrického obvodu

K témuž výsledku dojdeme podle Kirchhoffových zákonů:

$$\begin{aligned} x_v &= i_1 \left(R_1 + \frac{1}{pC_1} \right) - \frac{i_2}{pC_1}, \\ 0 &= i_1 \left(\frac{-1}{pC_1} \right) + i_2 \left(R_2 + \frac{1}{pC_2} + \frac{1}{pC_1} \right). \end{aligned}$$

Frekvenční přenos [frekvenční [kmitočtová] charakteristika]

Při sinusovém vstupním signálu $x_v = x_{v_0} \cos(\omega t)$ po doplnění imaginární části dostaneme

$$\begin{aligned} x_v &= x_{v_0} [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] = x_{v_0} e^{i\omega t}, \\ x_e &= x_{e_0} e^{i\omega t + \varphi}. \end{aligned}$$

Reálné, popř. imaginární části jsou si rovny.

**Komplexní frekvenční přenos
[frekvenční [kmitočtová] charakteristika]**

$$G(i\omega) = \frac{x_{e_0}}{x_{v_0}} e^{i\varphi} = P(\omega) + i Q(\omega),$$

přičemž

$$P(\omega) = P(-\omega), \quad Q(\omega) = -Q(-\omega).$$

Lze jej snadno vypočítat z přenosové funkce pro $p = i\omega$.

Obecně platí

$$x_v = x_{v_0} \cos(\omega t) = \operatorname{Re} x_{v_0} e^{i\omega t},$$
$$x_e = \operatorname{Re} G(i\omega) x_v = \operatorname{Re} x_{v_0} |G(i\omega)| e^{i(\omega t + \varphi)} =$$
$$= x_{v_0} |G(i\omega)| \cos(\omega t + \varphi),$$

kde

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} G(i\omega)}{\operatorname{Re} G(i\omega)}$$

je fázový posuv výchozí proměnné x_e vzhledem k vstupní proměnné x_v . Výraz $|G(i\omega)|$ znamená poměr amplitud veličin x_e a x_v (v stacionárním stavu). Koncové body průvodičů (tzv. fázory) hodnot funkce $G(i\omega)$ pro $\omega \in \langle 0, +\infty \rangle$ jako parametr tvoří fázovou křivku frekvenční charakteristiky v komplexní rovině.

Z frekvenční charakteristiky se odvodí Bodův diagram:

$$\lg G(i\omega) = \lg |G(i\omega)| e^{i\varphi} = \lg |G(i\omega)| + iM_{10}\varphi.$$

Přitom se vyjadřuje:

- amplitudová charakteristika $\lg |G(i\omega)| = f(\lg \omega)$,
- fázová charakteristika $\varphi = f(\lg \omega)$.

Poznámka:

Poměr amplitud se často udává při měření jednotce decibel (dB) ve tvaru

$$20 \lg \frac{|G(i\omega_1)|}{|G(i\omega_2)|}.$$

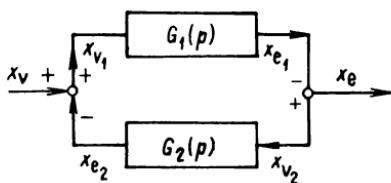
13.4. ŘAZENÍ ŘÍDICÍCH [REGULAČNÍCH] ČLENŮ

Sériové řazení členů:

$$G_{ers}(p) = G_1(p) G_2(p) \dots G_n(p).$$

Paralelní řazení členů (obr. 449):

$$G_{ers}(p) = G_1(p) + G_2(p).$$



Obr. 449. Paralelní zapojení

Antiparalelní řazení členů:

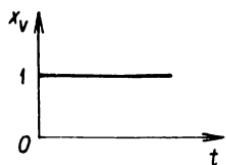
$$G_{\text{ers}}(p) = \frac{G_1(p)}{1 + G_1(p) G_2(p)}.$$

13.5. CHARAKTERISTICKÉ HODNOTY NĚKTERÝCH PŘENOSOVÝCH ČLENŮ

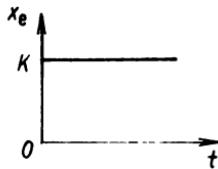
Člen P [proporcionálně působící člen] bez zpoždění [člen s auto-regulací]

$$x_e = Kx_v, \quad W(p) = K$$

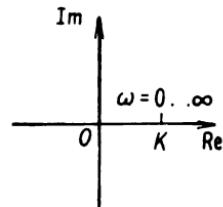
(obr. 450 až 452).



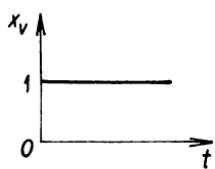
Obr. 450. Člen P bez zpoždění



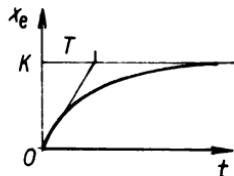
Obr. 451. Člen P bez zpoždění



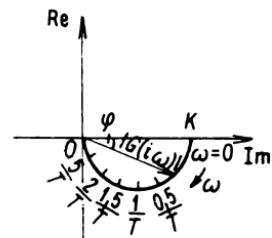
Obr. 452. Člen P bez zpoždění



Obr. 453. Člen P se zpožděním prvního řádu



Obr. 454. Člen P se zpožděním prvního řádu



Obr. 455. Člen P se zpožděním prvního řádu

Člen P [proporcionálně působící člen] se zpožděním prvního řádu

$$T \frac{dx_e}{dt} + x_e = Kx_v, \quad W(p) = \frac{K}{pT + 1}$$

(obr. 453 až 455).

Člen P [proporcionalně působící člen] se zpožděním druhého řádu, popř. se zpožděním prvního řádu a respektováním hmotnosti

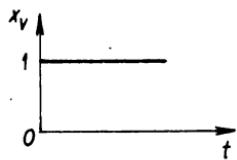
$$T_1 T_2 \frac{d^2 x_e}{dt^2} + (T_1 + T_2 + T_{21}) \frac{dx_e}{dt} + x_e = K x_v =$$

$$= T^2 \frac{d^2 x_e}{dt^2} + 2DT + \frac{dx_e}{dt} + x_e,$$

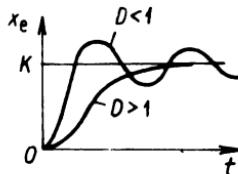
$$W(p) = \frac{K}{p^2 T_1 T_2 + p(T_1 + T_2 + T_{21}) p + 1} = \frac{K}{p^2 T^2 + 2DpT + 1}$$

(obr. 456 a 458).

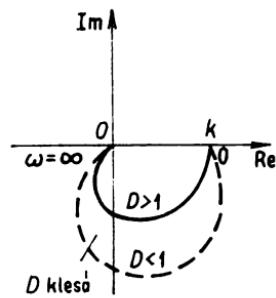
Pro $D < 1$ nastává rezonanční převýšení (kmitavý člen).



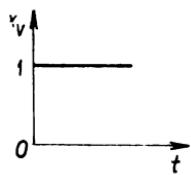
Obr. 456. Člen P se zpožděním druhého řádu



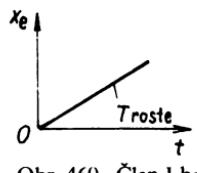
Obr. 457. Člen P se zpožděním druhého řádu



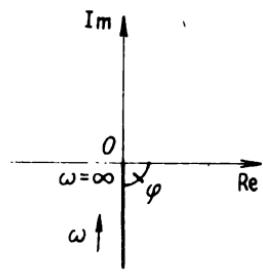
Obr. 458. Člen P se zpožděním druhého řádu



Obr. 459. Člen I bez zpoždění



Obr. 460. Člen I bez zpoždění



Obr. 461. Člen I bez zpoždění

Člen I [integrálně působící člen] bez zpoždění [člen bez auto-regulace]

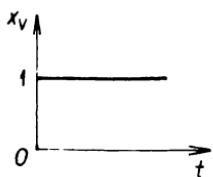
$$T \frac{dx_e}{dt} = K x_v, \quad W(p) = \frac{K}{pT}$$

(obr. 459 až 461).

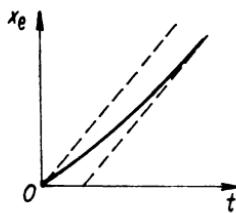
Člen I [integrálně působící člen] se zpožděním prvního řádu

$$T_1 T_2 \frac{d^2 x_e}{dt^2} + T_1 \frac{dx_e}{dt} = K x_v, \quad W(p) = \frac{K}{p^2 T_1 T_2 + p T_1}$$

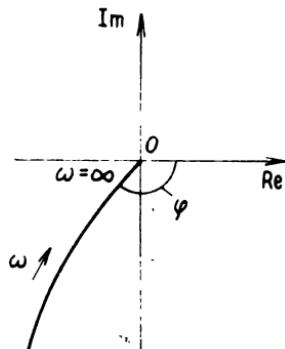
(obr. 462 až 464).



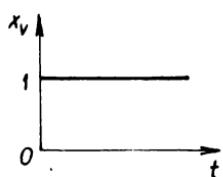
Obr. 462. Člen I se zpožděním prvního řádu



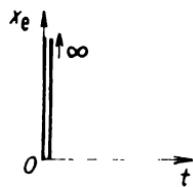
Obr. 463. Člen I se zpožděním prvního řádu



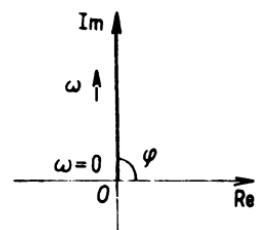
Obr. 464. Člen I se zpožděním prvního řádu



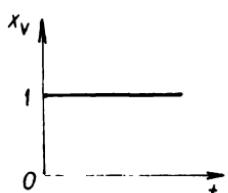
Obr. 465. Člen D realizovatelný jen s členem P



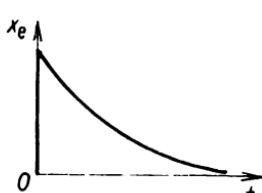
Obr. 466. Člen D realizovatelný jen s členem P



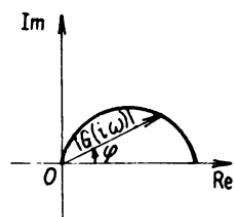
Obr. 467. Člen D realizovatelný jen s členem P



Obr. 468. Člen D se zpožděním prvního řádu



Obr. 469. Člen D se zpožděním prvního řádu



Obr. 470. Člen D se zpožděním prvního řádu

Člen D [derivačně působící člen] realizovatelný jen s členem P

$$x_e = KT \frac{dx_v}{dt}, \quad W(p) = pT$$

(obr. 465 až 467).

Člen D [derivačně působící člen] se zpožděním prvního řádu [poddajná zpětná vazba]

$$T \frac{dx_e}{dt} + x_e = KT \frac{dx_v}{dt}, \quad W(p) = \frac{KpT}{pT + 1}$$

(obr. 468 až 470).

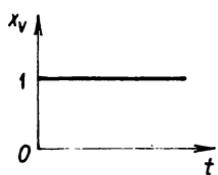
Člen s dopravním zpožděním

$$a_n \frac{d^n x_e}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_e}{dt^{n-1}} + \dots + x_e = K x_v (t - T_d)$$

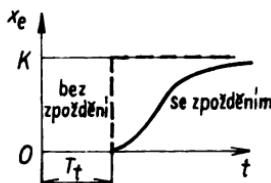
(člen s autoregulací a dopravním zpožděním),

$$W(p) = e^{-pT_d} \quad \text{pro} \quad x_e = K x_v (t - T_d)$$

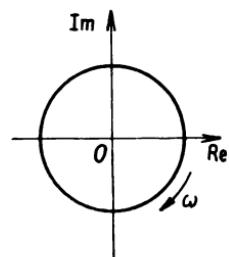
(obr. 471 až 473).



Obr. 471. Člen s dopravním zpožděním



Obr. 472. Člen s dopravním zpožděním



Obr. 473. Člen s dopravním zpožděním

14. DODATKY

14.1. ŘECKÁ ABECEDA

Písmena řecké abecedy					Odpovídající písmena latinské abecedy
stojatá velká	ležatá velká	stojatá malá	ležatá malá	název	
A	A	α	α	alfa	a
B	B	β	β	beta	b
Γ	Γ	γ	γ	gama	g
Δ	Δ	δ	δ	delta	d
Ε	Ε	ε	ε	epsilon	e
Ζ	Ζ	ζ	ζ	dzéta	dz
Η	Η	η	η	éta	é
Θ	Θ	θ, θ	θ, θ	théta	th
Ι	I	ι	ι	íota	i
Κ	K	κ	κ	kappa	k
Λ	Λ	λ	λ	lambda	l
Μ	M	μ	μ	mí	m
Ν	N	ν	ν	ný	n
Ξ	Ξ	ξ	ξ	xí (ksi)	x
Ο	O	ο	ο	omikron	o
Π	Π	π	π	pí	p
Ρ	P	ϙ	ϙ	ró	r
Σ	Σ	σ	σ	sigma	s
Τ	T	τ	τ	tau	t
Υ	Υ	υ	υ	ypsilon	y
Φ	Φ	φ	φ	fi	f
Χ	X	χ	χ	chi	ch
Ψ	Ψ	ψ	ψ	psi	ps
Ω	Ω	ω	ω	ómega	ó

Poloha písmen malé abecedy v řádku:

αβγδεζηγικλμνξοπϙστυφχψω

14.2. NĚMECKÁ ABECEDA [GOTICKÉ PÍSMO]

Písmena		Písmena	
velká	malá	velká	malá
A	a	N	n
B	b	O	o
C	c	P	p
D	d	Q	q
E	e	R	r
F	f	S	s
G	g	T	t
H	h	U	u
I	i	V	v
J	j	W	w
K	k	X	x
L	l	Y	y
M	m	Z	z

14.3. ČASTO POUŽÍVANÉ KONSTANTY A JEJICH DEKADICKÉ LOGARITMY

(Tato tabulka je z knihy [28].)

Zápis konstanty	n	$\lg n$
π	3,141 6	0,497 15
2π	6,283 2	0,798 18
3π	9,424 8	0,974 27
4π	12,566	1,099 21
$\pi/2$	1,570 8	0,196 12
$\pi/3$	1,047 2	0,020 03
$2\pi/3$	2,094 4	0,321 06
$4\pi/3$	4,188 8	0,622 09
$\pi/4$	0,785 40	0,895 09 - 1
$\pi/6$	0,523 60	0,719 00 - 1
π^2	9,869 6	0,994 30
$4\pi^2$	39,478	1,596 36
$\pi^2/4$	2,467 4	0,392 24
π^3	31,006	1,491 45
$\pi/360$	8,726 6 . 10^{-3}	0,940 85 - 3
$2\pi/360 = \pi/180$	1,745 3 . 10^{-2}	0,241 88 - 2
$\text{arc } 1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \text{ rad}$	2,908 9 . 10^{-4}	0,463 73 - 4
$\text{arc } 1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} \text{ rad}$	4,848 1 . 10^{-6}	0,685 57 - 6
$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi}$	57,296	1,758 12
$1 \text{ rad} = \frac{360 \cdot 60'}{2\pi}$	3 437,7	3,536 27
$1 \text{ rad} = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60''}{2\pi}$	2,062 6 . 10^5	5,314 43
$1/\pi$	0,318 31	0,502 85 - 1
$1/(2\pi)$	0,159 15	0,201 82 - 1
$1/(4\pi)$	7,957 7 . 10^{-2}	0,900 79 - 2
$3/(4\pi)$	0,238 73	0,377 91 - 1
$1/\pi^2$	0,101 32	0,005 70 - 1
$1/(4\pi^2)$	2,533 0 . 10^{-2}	0,403 64 - 2
$\sqrt{\pi}$	1,772 5	0,248 57
$2\sqrt{\pi}$	3,544 91	0,549 60
$\sqrt{(2\pi)}$	2,506 6	0,399 09
$\sqrt{(\pi/2)}$	1,253 3	0,098 06
$1/\sqrt{\pi}$	0,564 19	0,751 43 - 1

Zápis konstanty	<i>n</i>	lg <i>n</i>
$C = 2/\sqrt{\pi}$	1,128 4	0,052 46
$1/C = \sqrt{\pi}/2$	0,886 23	0,947 54 - 1
$C_1 = \sqrt{(40/\pi)}$	3,568 2	0,552 46
$\sqrt[4]{(2/\pi)}$	0,797 88	0,901 94 - 1
$\pi\sqrt{2}$	4,442 9	0,647 66
$\pi\sqrt{3}$	5,441 4	0,735 71
$\pi\sqrt[4]{2}$	2,221 4	0,346 63
$\pi\sqrt[4]{3}$	1,813 8	0,258 59
$\sqrt[3]{\pi}$	1,464 6	0,165 72
e	2,718 3	0,434 29
e^2	7,389 1	0,868 59
$M = \lg e$	0,434 29	0,637 78 - 1
$m = 1/M = \ln 10$	2,302 6	0,362 22
$1/e$	0,367 88	0,565 71 - 1
$1/e^2$	0,135 34	0,131 41 - 1
e^π	23,141	1,364 38
\sqrt{e}	1,648 7	0,217 15
g	9,806 65	0,991 52
g^2	96,170	1,983 04
$1/g$	0,101 97	0,008 48 - 1
$1/(2g)$	5,098 6 . 10 ⁻²	0,707 45 - 2
$1/g^2$	1,039 8 . 10 ⁻²	0,016 96 - 2
\sqrt{g}	3,131 6	0,495 76
$\sqrt{(2g)}$	4,428 7	0,646 28
$\pi\sqrt{g}$	9,838 1	0,992 91
$1/\sqrt{g}$	0,319 33	0,504 24 - 1
π/\sqrt{g}	1,003 2	0,001 39
$2\pi/\sqrt{g}$	2,006 4	0,302 42
$\sqrt{2}$	1,414 2	0,150 51
$\sqrt{3}$	1,732 1	0,238 56
$1/\sqrt{2}$	0,707 11	0,849 49 - 1
$1/\sqrt{3}$	0,577 35	0,761 44 - 1

15. LITERATURA

15.1. LITERATURA Z NĚMECKÉHO ORIGINÁLU

1. *Algebra und Geometrie für Ingenieure.* 8. Aufl. Zürich – Frankfurt/Main – Thun, Verlag Harri Deutsch.
2. *Analysis für Ingenieure.* 11. Aufl. Zürich – Frankfurt/Main – Thun, Verlag Harri Deutsch.
3. *Ausgewählte Kapitel der Mathematik für Ingenieure und Ökonomen.* 8. Aufl. Zürich - Frankfurt/Main – Thun, Verlag Harri Deutsch 1974.
4. *Bär, D.: Einführung in die Schaltalgebra.* 2. Aufl. Berlin, VEB Verlag Technik 1966.
5. *Baule, B.: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs.* Band I – VIII. Leipzig, S. Hirzel Verlag:
Band I: *Differential- und Integralrechnung.* 16. Aufl. 1970;
Band II: *Ausgleichs- und Näherungsrechnung.* 8. Aufl. 1966;
Band III: *Analytische Geometrie.* 8. Aufl. 1968;
Band IV: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* 9. Aufl. 1970;
Band V: *Variationsrechnung.* 7. Aufl. 1968;
Band VI: *Partielle Differentialgleichungen.* 8. Aufl. 1970;
Band VII: *Differentialgeometrie.* 6. Aufl. 1965;
Band VIII: *Aufgabensammlung.* 2. Aufl. 1966.
6. *Bräuning:* Gewöhnliche Differentialgleichungen. 4. Aufl. Zürich – Frankfurt/Main – Thun, Verlag Harri Deutsch 1975.
7. *Brónstein, I. N. – Semendajew, K. A.: Taschenbuch der Mathematik.* 15. Aufl. Zürich – Frankfurt/Main – Thun, Verlag Harri Deutsch 1975 (překlad z ruštiny).
Bronštejn, I. N. – Semendajev, K. A.: Príručka matematiky pre inženierov a pre študujúcich. 3. vyd. Bratislava, SVTL 1964 (překlad z ruštiny).
8. *Dietrich, G. – Stahl, H.: Grundzüge der Matrizenrechnung.* 9. Aufl. Thun – Frankfurt/Main, Verlag Harri Deutsch 1975.
9. *Doetsch, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation.* 3. Aufl. München, R. Oldenbourg Verlag 1967.
10. *Dreszer:* Mathematik-Handbuch für Technik und Naturwissenschaft. Thun – Frankfurt/Main, Verlag Harri Deutsch 1975.
11. *Fucke, R. – Kirch, K. – Nickel, H.: Darstellende Geometrie.* 8. Aufl. Zürich – Frankfurt/Main – Thun, Verlag Harri Deutsch 1975.
12. *Gnedenko, B. W. – Chintschin, A. J.: Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung.* 9. Aufl. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1973 (překlad z ruštiny).
Gněděnko, B. V. – Činčin, A. J.: Elementární úvod do teorie pravděpodobnosti. Praha, SNTL 1954 (překlad z ruštiny).
13. *Göldner, K.: Mathematische Grundlagen für Regelungstechniker.* 2. Aufl. Zürich – Frankfurt/Main – Thun, Verlag Harri Deutsch 1969.

14. Görke, L.: Mengen – Relationen – Funktionen. 4. Aufl. Zürich – Frankfurt/Main – Thun, Verlag Harri Deutsch 1974.
15. Greuel, O.: Mathematische Ergänzungen und Aufgaben für Elektrotechniker. 6. Aufl. München, Carl Hanser Verlag 1972.
16. Hess, A.: Analytische Geometrie. 11. Aufl. Berlin, Springer-Verlag 1965.
17. Heymann: Trigonometrie der Ebene. Leipzig, VEB Fachbuchverlag 1959.
18. Holtmann, F.: Mathematik. Band I und II. Leipzig, VEB Fachbuchverlag 1969.
19. Hütte: Des Ingenieurs Taschenbuch. Band I. Berlin, Verlag Wilhelm Ernst und Sohn 1955.
20. Isaacson, E. – Keller, B.: Analyse numerischer Verfahren. Zürich – Frankfurt/Main – Thun, Verlag Harri Deutsch 1973.
21. Joos, G. – Richter, E. W.: Höhere Mathematik für den Praktiker. 11. Aufl. Leipzig, Verlag Ambrosius Barth 1969.
22. Kleine Enzyklopädie Mathematik. Neuaufl. Zürich – Frankfurt/Main – Thun: Verlag Harri Deutsch 1972.
23. Krekó – Béla: Lehrbuch der linearen Optimierung. Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften 1964.
24. Lehr- und Übungsbuch Mathematik. Zürich – Frankfurt/Main – Thun, Verlag Harri Deutsch: Band I. Aritmetik, Algebra und elementare Funktionslehre. 13. Aufl.;
Band II. Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie der Ebene. 14. Aufl.;
Band III. Analytische Geometrie, Vektorrechnung und Infinitesimalrechnung. 13. Aufl.
25. Moderner Vorkurs der Elementarmathematik. 2. Aufl. Zürich – Frankfurt/Main – Thun, Verlag Harri Deutsch 1973.
26. Lehrbriefe für das Fernstudium, Technische Hochschule Dresden. Höhere Mathematik. Berlin, VEB Verlag Technik.
27. Maibaum, G.: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zürich – Frankfurt/Main – Thun, Verlag Harri Deutsch 1972.
28. v. Mangoldt, H. – Knopp, K.: Einführung in die höhere Mathematik. Leipzig – Stuttgart, S. Hirzel Verlag:
Band I: Zahlen, Funktionen, Grenzwerte, Analytische Geometrie, Algebra, Mengenlehre. 14. Aufl. 1971;
Band II: Differentialrechnung. Unendliche Reihen, Elemente der Differentialgeometrie und Funktionentheorie. 13. Aufl. 1968;
Band III: Integralrechnung und ihre Anwendungen, Funktionentheorie, Differentialgleichungen. 13. Aufl. 1967;
Band IV: Mengenlehre, Lebesguesches Mass und Integral, Topologische Räume, Vektorräume, Funktionalanalysis, Integralgleichungen 1973.
29. Metz, J. – Merbeth, G.: Schaltalgebra. Zürich – Frankfurt/Main – Thun, Verlag Harri Deutsch 1970.
30. Müller, F.: Fünfstellige Logarithmen und andere mathematische Tafeln. Für sexagesimalgeteilten Aligrad. 15. Aufl. Zürich – Frankfurt/Main – Thun, Verlag Harri Deutsch 1970.
Müller, F.: Pětimistné logaritmy a jiné matematické tabulky. Praha, SNTL 1956 (překlad z němčiny).
31. Naas, J. – Schmid, H. L.: Mathematisches Wörterbuch. Nachdruck der 3. Aufl. Berlin, Akademie-Verlag; Leipzig – Stuttgart, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1972.
32. Rint, C.: Handbuch für Hochfrequenz- und Elektro-Techniker. Berlin, Verlag für Radio-Foto-Kino-Technik GmbH.

33. Richter, K.-J.: Methoden der Optimierung. Band I: *Lineare Optimierung*. 4. Aufl. Leipzig, VEB Fachbuchverlag 1971.
34. Ringler, F. O. Mathematische Formelsammlung. 8. Aufl. Berlin, Walter de Gruyter und Co. 1968.
35. Rumpf, K. H. - Pulvers, M.: Transistor-Elektronik. 5. Aufl. Berlin, VEB Verlag Technik 1973.
36. Scheffers, G.: Lehrbuch der Mathematik. 15. Aufl. Berlin, Walter de Gruyter und Co. 1962.
37. Speiser, A. P.: Digitale Rechenanlage. Neudruck der 2. Aufl. Berlin – Göttingen – Heidelberg, Springer-Verlag 1967.
38. Storm, R.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle*. 5. Aufl. Leipzig, VEB Fachbuchverlag 1974.
39. Thompson, S. P.: Höhere Mathematik – und doch verständlich! Eine leichtverständliche Einführung in die Differential- und Integralrechnung. 10. Aufl. Zürich – Frankfurt/Main – Thun, Verlag Harri Deutsch 1972.
40. Weyh, U.: Elemente der Schaltungsalgebra. 7. Aufl. München, R. Oldenbourg 1972.
41. Willers, F. A. Elementarmathematik. 13. Aufl. Dresden, Verlag Steinkopff 1968.
42. Zürmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. 5. Aufl. Berlin, Springer-Verlag 1965.

15.2. LITERATURA PŘIPOJENÁ PŘI ČESKÉM PŘEKLADU

15.2.1. Matematická logika a množiny

43. Alexandrov, P. S.: Úvod do obecné teorie množin a funkcí. Praha, NČSAV 1954 (překlad z ruštiny).
44. Bečvář, J. – Bičení, L. – Ježek, J. – Kepka, T. – Němec, P.: Seznamujeme se s množinami. Praha, SNTL 1981.
45. Blažek, J. – Kušová, B.: Množiny a přirozená čísla. Praha, SPN 1977.
46. Grzegorczyk, A.: Populární logika. Praha, SPNL 1957 (překlad z polštiny).
47. Horský, Z.: Matematika pro vysoké školy technické. Sešit I: *Množiny a matematické struktury*. Praha, SNTL 1979.
48. Hruška, K.: Základy moderní matematiky. Díly I, II. 3. vyd. Praha, SPN 1975.
49. Hruška, K. – Dlouhý, Z. – Rohliček, J.: Úvod do studia matematiky. Praha, SPN 1963.
50. Kemeny, J. G. – Snell, J. L. – Thompson, G. L.: Úvod do finitní matematiky. Praha, SNTL 1971 (překlad z angličtiny).
51. Kolmogorov, A. N. – Fomin, S. V.: Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy. Praha, SNTL 1975 (překlad z ruštiny).
52. Kosmák, L.: Množinová algebra. Bratislava, Alfa 1978.
53. Šedivý, J.: O modernizaci školské matematiky. 2., rozšířené vydání. Praha, SPN 1973.
54. Šrejder, J. A.: Binární relace. Praha, SNTL 1978 (překlad z ruštiny).
55. Tarski, A.: Úvod do logiky a metodologie deduktivních věd. 2. vyd. Praha, Academia 1969 (překlad 3. anglického vydání).
56. Vilenkin, N. J.: Vyprávění o množinách. Praha, SPN 1973 (překlad z ruštiny).

15.2.2. Algebra (rovnice, matice, determinanty)

57. *Bican, L.*: Lineární algebra. Praha, SNTL 1979.
58. *Borůvka, O.*: Základy teorie matic. Praha, Academia 1971.
59. *Bydžovský, B.*: Úvod do teorie determinantů a matic a jich užití. Praha, JČMF 1947.
60. *Čech, E.*: Čísla a početní výkony. Praha, SNTL 1954.
61. *Čulík, K.* – *Doležal, V.* – *Fiedler, V.*: Kombinatorická analýza v praxi. Praha, SNTL 1967.
62. *Dantzig, G. B.*: Lineárne programovanie a jeho rozvoj. Bratislava, SVTL 1963 (překlad z angličtiny).
63. *Fiedler, M.*: Speciální matice a jejich použití v numerické matematice. Praha, SNTL 1981.
64. *Frazer, R. A.* – *Duncan, W. J.* – *Collar, A. R.*: Základy maticového počtu, jeho aplikace v dynamice a v diferenciálních rovnicích. Praha, SNTL 1958 (překlad z angličtiny).
65. *Gantmacher, F. R.*: Teorija matric. Moskva, Gostechnoizdat 1953.
66. *Garaj, J.*: Základy vektorového počtu. 3. vyd. Bratislava, SVTL 1968.
67. *Gelfand, J. M.*: Lineární algebra. Praha, NČSAV 1953 (překlad z ruštiny).
68. *Horský, Z.*: Matematika pro vysoké školy technické. Sešit II: Vektorové prostory. Praha, SNTL 1980.
69. *Chudý, J.*: Determinanty a matice. 2. vyd. Praha, SNTL 1974.
70. *Ilkovič, D.*: Vektorový počet. 2. vyd. Praha, Přírodovědecké nakladatelství 1950.
71. *Jarník, J.* – *Sísler, M.*: Jak řešit rovnice a jejich soustavy. 2. vyd. Praha, SNTL 1969.
72. *Kolek, L.*: Základy algebry pro techniky. Praha, SNTL 1969.
73. *Kořínek, V.*: Základy algebry. 2. vyd. Praha, NČSAV 1956.
74. *Kuroš, A.*: Kapitoly z obecné algebry. 2. vyd. Academia, Praha 1977 (překlad z ruštiny).
75. *Mac Lane, S.* – *Birkhoff, G.*: Algebra. Bratislava, Alfa 1973 (překlad z angličtiny).
76. *Pachová, Zs.* – *Frey, T.*: Vektorová a tenzorová analýza. Praha, SNTL 1964 (překlad z maďarštiny).
77. *Schmidtmayer, J.*: Maticový počet a jeho použití v technice. 2. vyd. Praha, SNTL 1974.
78. *Schwarz, Š.*: O rovnicích. 2. vyd. Praha, JČMF 1947.
79. *Schwarz, Š.*: Základy náuky o řešení rovnic. Praha, NČSAV 1958.
80. *Ter-Manuelianc, A.*: Metody operační analýzy I. Praha, SNTL 1967.
81. *Vyšín, J.*: Základy vektorové algebry. Praha, SPN 1966.

15.2.3. Analytická geometrie

82. *Bydžovský, B.*: Úvod do analytické geometrie. 3. vyd. Praha, NČSAV 1956.
83. *Čech, E.*: Základy analytické geometrie. Díly I (1951) a II (1952). Praha, Přírodovědecké vydavatelství.
84. *Klapka, J.*: Analytická geometrie. Praha, SNTL 1960.
85. *Kraemer, E.*: Analytická geometrie lineárních útvarů. Praha, NČSAV 1954.
86. *Mastný, E.*: Úvod do analytické geometrie lineárních útvarů a kuželoseček. Praha, NČSAV 1953.
87. *Peschl, E.*: Analytická geometrie a lineární algebra. Praha, SNTL 1971.
88. *Privalov, I. I.*: Analitičeskaja geometrija. 22. izd. Moskva, Gostechizdat 1957.
89. *Šindelář, K.*: Analytická geometrie pro začátečníky. Praha, SNTL 1956.
90. *Vančura, Z.*: Analytická metoda v geometrii. Díly I (1957), II (1958). Praha, SNTL.

15.2.4. Matematická analýza

91. Čech, E.: Elementární funkce. Praha, JČMF 1947.
92. Danilov, V. L. a kol.: Přehled matematické analýzy I. Praha, SNTL 1968 (překlad z ruštiny).
93. Fichtengolc, G. M.: Kurs differenciálnego i integral'nogo isčislenija. Časti I, II, III. Moskva – Leningrad, Gostechizdat 1951.
94. Gillman, L. – McDowell, R. H.: Matematická analýza. Praha, SNTL 1980.
95. Grebenča, M. K. – Novoselov, S. L.: Učebnice matematické analýzy. Díly I, II. Praha, NČSAV 1955.
96. Havlíček, K.: Diferenciální počet pro začátečníky. 2. vyd. Praha, SNTL 1962.
97. Havlíček, K.: Integrální počet pro začátečníky. 2. vyd. Praha, SNTL 1963.
98. Horský, Z.: Matematika pro vysoké školy technické. Sešit II: Diferenciální počet. Praha, SNTL 1981.
99. Horský, Z.: Učebnice matematiky pro posluchače VŠE I. 5., upravené vydání. Praha – Bratislava, SNTL/Alfa 1981.
100. Hruša, K.: Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu. 3. vyd. Praha, NČSAV 1959.
101. Jarník, V.: Diferenciální počet I. 6. vyd. Praha, Academia 1974.
102. Jarník, V.: Diferenciální počet II. 3. vyd. Praha, Academia 1976.
103. Jarník, V.: Integrální počet I. 5. vyd. Praha, Academia 1974.
104. Jarník, V.: Integrální počet II. 2. vyd. Praha, Academia 1976.
105. Kluvánek, I. – Mišík, L. – Švec, M.: Matematika pre štúdium technických vied. Díly I (2. vyd., 1964), II (1961). Bratislava, SVTL.
106. Kníchal, V. – Bašta, A. – Pišl, M. – Rektorys, K.: Matematika I. Praha – Bratislava, SNTL – SVTL 1965.
107. Kníchal, V. – Bašta, A. – Pišl, M. – Rektorys, K.: Matematika II. Praha – Bratislava, SNTL – SVTL 1966.
108. Lusternik, L. A. a kolektiv: Přehled matematické analýzy II. Praha, SNTL 1969 (překlad z ruštiny).
109. Rychnorovský, R.: Úvod do vyšší matematiky. Třetí, rozšířené vydání. Praha, SZN 1968.
110. Smirnov, V. I.: Učebnice vyšší matematiky. Díly I (1954), II (1956). Praha, NČSAV (překlad z ruštiny).
111. Šílov, G. E. – Gurevič, B. L.: Integrál, míra a derivace. Díl I. Praha, SNTL 1968 (překlad z ruštiny).
112. Šílov, G. E. – Fan Dyk Tin: Integrál, míra a derivace. Díl II. Praha, SNTL 1971 (překlad z ruštiny).
113. Šindelář, K.: Diferenciální počet funkcí více proměnných. Praha, SNTL 1972.
114. Škrášek, J. – Tichý, Z.: Základy aplikované matematiky I. Matematická logika, množiny, základy algebry, analytická geometrie, diferenciální počet, numerické a grafické metody. Praha, SNTL 1983.
115. Škrášek, J. – Tichý, Z.: Základy aplikované matematiky II. Integrální počet, nekonečné řady, diferenciální geometrie, obyčejné a parciální diferenciální rovnice, funkce komplexní proměnné, Laplaceova transformace, diferenční rovnice. Praha, SNTL (v tisku).
116. Škrášek, J. – Tichý, Z.: Základy aplikované matematiky III. Počet pravděpodobnosti, matematická statistika, stochastické procesy, teorie informace, variační počet, integrální rovnice, lineární a nelineární programování, úvod do dějin matematiky. Praha, SNTL (v tisku).
117. Vlasov, A. K.: Učebnice vyšší matematiky. Díl I, část 1 (1957), část 2 (1958); díl II, část 1 (1958), část 2 (1959). Praha, SNTL (upravený překlad z ruštiny).

15.2.5. Nekonečné řady

118. Hardy, G. H. – Rogosinski, W. W.: Fourierovy řady. Praha – Bratislava, SNTL – Alfa 1971.
119. Kufner, A. – Kadlec, J.: Fourierovy řady. Praha, Academia 1969.
120. Romanovskij, P. I.: Fourierovy řady. Teorie pole. Analytické funkce. Praha, SNTL 1964 (překlad z ruštiny).
121. Šalát, T.: Nekonečné řady. Praha, Academia 1974.
122. Vyšín, J.: O nekonečných řadách. Praha, JČMF 1948.
123. Zygmund, A.: Trigonometrical Series. Warszawa – Lwów, Kultura narodowa 1936; 2. ed., Volumes I, II. New York, Cambridge University Press 1959.

15.2.6. Diferenciální geometrie křivek a ploch

124. Budinský, B. – Kepr, B.: Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi. Praha, SNTL 1970.
125. Dvořák, J. – Švec, A.: Technické křivky. Praha, SNTL 1962.
126. Finikov, S. P.: Differencial'naja geometrija. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta 1961
127. Kohout, V.: Diferenciální geometrie. Praha, SNTL 1971.

15.2.7. Obyčejné a parciální diferenciální rovnice

128. Borůvka, O.: Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1967.
129. Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. 2. Auflage. Berlin – Göttlingen – Heidelberg, Springer-Verlag 1955.
130. Fučík, S. – Kufner, A.: Nelineární diferenciální rovnice. Praha, SNTL 1978.
131. Jarník, V.: Diferenciální rovnice v komplexním oboru. Praha, Academia 1975.
132. Kamke, E.: Differentialgleichungen. Bände I, II; 5. Auflage. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft 1962, 1964.
133. Kamke, E.: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Bände I, II; 4. und 6. Auflage. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft 1959.
134. Kneschke, A.: Differentialgleichungen und Randwertprobleme. Bände I, II, III; 2. Auflage. Berlin, VEB Verlag Technik 1960.
135. Kurzweil, J.: Obyčejné diferenciální rovnice. Úvod do teorie obyčejných diferenciálních rovnic v reálném oboru. Praha, SNTL 1978.
136. Legras, J.: Praktické metody pro řešení parciálních diferenciálních rovnic. Praha, SNTL 1960 (překlad z francouzštiny).
137. Michlin, S. G. – Smolickij, Ch. L.: Približné metody riešenia diferenciálnych a integrálnych rovnic. Bratislava – Praha, SNTL – Alfa 1973.
138. Mika, S. – Kufner, A.: Matematika pro vysoké školy technické. Sešit XIX: Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice. Praha, SNTL 1981.
139. Nagy, J.: Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Praha, SNTL 1978.
140. Nagy, J.: Matematika pro vysoké školy technické. Sešit IX: Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Praha, SNTL 1978.

141. Nagy, J.: Matematika pro vysoké školy technické. Sešit XV: *Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic*. Praha, SNTL 1980.
142. Nagy, J.: Matematika pro vysoké školy technické. Sešit XVI: *Stabilita řešení obyčejných diferenciálních rovnic*. Praha, SNTL 1980.
143. Panov, D. J.: Příručka k numerickému řešení parciálních diferenciálních rovnic. Praha, SNTL 1958.
144. Petrovskij, I. G.: Parciální diferenciální rovnice. Praha, Přírodovědecké vydavatelství 1952 (překlad z ruštiny).
145. Rychnovský, R.: Obyčejné diferenciální rovnice a jejich řešení. 2. vyd. Praha, SNTL 1972.
146. Rychnovský, R. – Výborná, J.: Parciální diferenciální rovnice a jejich některá řešení. Praha, SNTL 1963.
147. Stěpanov, V. V.: Kurs diferenciálních rovnic. 2. vyd. Praha, Přírodovědecké vydavatelství 1952.

15.2.8. Funkce komplexní proměnné

148. Černý, I.: Základy analýzy v komplexním oboru. Praha, Academia 1967.
149. Fuks, B. A. – Šabat, B. V.: Funkce komplexní proměnné. 2. vyd. Praha, NČSAV 1961.
150. Jevgrafov, M. A.: Funkce komplexní proměnné. Praha, SNTL 1981 (překlad z ruštiny).
151. Jevgrafov, M. A. – Bežanov, K. A. – Fedorjuk, M. V. – Šabunin, M. I.: Sbírka úloh z teorie funkcí komplexní proměnné. Praha, SNTL 1976 (překlad z ruštiny).
152. Privalov, I. I.: Analytická funkce. Praha, NČSAV 1955 (překlad z ruštiny).
153. Šulista, M.: Matematika pro vysoké školy technické. Sešit XIII: *Základy analýzy r komplexním oboru*. Praha, SNTL 1981.

15.2.9. Laplaceova transformace

154. Čížek, V.: Diskrétní Fourierova transformace a její použití. Praha, SNTL 1981.
155. Ditkin, V. A. – Kuzněcov, P. I.: Příručka operátorového počtu. Praha, NČSAV 1954 (překlad z ruštiny).
156. Kontorovič, M. I.: Operátorový počet a přechodné jevy v elektrických sítích. Praha, SNTL 1953 (překlad z ruštiny).
157. Pirko, Z. – Veit, J.: Laplaceova transformace. Praha, SNTL 1970.
158. Šalamon, M.: Matematika pro regulaci a automatisaci. Praha, SNTL 1957.
159. Veit, J.: Matematika pro vysoké školy technické. Sešit XIV: *Integrální transformace*. Praha, SNTL 1979.
160. Vich, R.: Transformace a některá jejich použití. Praha, SNTL 1980.

15.2.10. Numerické a grafické metody

161. Collatz, L.: Funkcionální analýza a numerická matematika. Praha, SNTL 1970.
162. Děmidovič, B. P. – Maron, J. A.: Základy numerické matematiky. Praha, SNTL 1966 (překlad z ruštiny).
163. Faddějev, D. K. – Faddějevová, V. N.: Numerické metody lineární algebry. Praha, SNTL 1964 (překlad z ruštiny).

164. *Gass, S. I.*: Lineárne programovanie. *Metoda a aplikácie*. Bratislava, SVTL 1965 (překlad z angličtiny).
165. *Habr, J.*: Lineární programování. 2. vyd. Praha, SNTL 1960.
166. *Hruša, K.*: Počítání s neúplnými čísly. Praha, JČMF 1949.
167. *Nekvinda, M. – Šrubař, J. – Vild, J.*: Úvod do numerické matematiky. Praha, SNTL 1976.
168. *Ralston, A.*: Základy numerické matematiky. Praha, Academia 1973 (překlad z angličtiny).
169. *Slavíček, O. a kol.*: Základní numerické metody. Praha, 1964.
170. *Vlach, M.*: Základní numerické metody. Praha, SNTL 1971.

15.2.11. Počet pravděpodobnosti a matematická statistika

171. *Anděl, J.*: Matematická statistika. Praha – Bratislava, SNTL – Alfa 1978.
172. *Cramer, H.*: Mathematical Methods of Statistics. Princeton, Princeton University Press 1946.
- Kramer, G.*: Matematiceskiejje metody statistiki. Moskva, IIL 1948.
173. *Dupač, V. – Hájek, J.*: Pravděpodobnost ve vědě a technice. Praha, NČSAV 1962.
174. *Fabián, V.*: Základní statistické metody. Praha, NČSAV 1963.
175. *Feller, W.*: An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol. 1 (1957), 2 (1966). New York, Wiley.
Feller, V.: Vvedenije v teoriju verojatnostej i jejo primenenija. Tomy 1 (2. izd., 1964), 2 (1967). Moskva, Mir.
176. *Hald, A.*: Statistical Theory with Engineering Applications. New York – London, Wiley 1952.
- Chal'd, A.*: Matematičeskaja statistika s techničeskimi priloženijami. Moskva, IIL 1955.
177. *Jakovlev, K. P.*: Matematické zpracování výsledků měření. Praha, SNTL 1958 (překlad z ruštiny).
178. *Janko, J.*: Jak vytváří statistika obrazy světa a života. Díly I (1947), II (1948). 2. vyd. Praha, JČMF.
179. *Kladivo, B.*: Měřícké chyby a jejich vyrovnaní (podle metody nejmenších čtverců). Praha, Přírodovědecké nakladatelství 1950.
180. *Likeš, J. – Laga, J.*: Základní statistické tabulky. Praha, SNTL 1978.
181. *Likeš, J. – Machek, J.*: Matematika pro vysoké školy technické. Sešit VIII: Základy počtu pravděpodobnosti. Praha, SNTL 1982.
182. *Reisenaur, R.*: Metody matematické statistiky a jejich aplikace v technice. 2. vyd. Praha, SNTL 1970.
183. *Rényi, A.*: Teorie pravděpodobnosti. Praha, Academia 1972.
184. *Tutubalin, V. N.*: Teorie pravděpodobnosti. Praha, SNTL 1978.
185. *Van der Waerden, B.*: Mathematische Statistik. Berlin, Springer 1957.
Van der Varden, B. L.: Matematičeskaja statistika. Moskva, IIL 1960.

15.2.12. Příručky, sbírky příkladů a přehledy vzorců

186. *Angot, A.*: Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry. 2. vyd. Praha, SNTL 1972.
187. *Dubbel, H.*: Inženýrská příručka pro stavbu strojů. Praha, SNTL 1961 (překlad z němčiny).
188. *Eliaš, J. – Horváth, J. – Kajan, J.*: Zbierka úloh z vyšší matematiky. Časti 1 (3. vyd., 1971), 2 (3. vyd., 1972), 3 (2. vyd., 1971). Bratislava, Alfa.

189. *Eliaš, J. – Horváth, J. – Kajan, J. – Šulka, J.*: Zbierka úloh z vyšej matematiky. Časť 4; 2. vyd. Bratislava, Alfa 1970.
190. *Frank, L. a kol.*: Technický průvodce. Matematika. Sv. 1. Praha, SNTL 1973.
191. *Hlaváček, A. – Dolanský, P.*: Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky pro přípravu pracujících ke studiu na vysokých školách. Druhé, změněné vydání. Díly I, II. Praha, SPN 1971.
192. *Hořejšová, M.*: Řešené příklady z matematiky pro VŠE. Praha, SNTL 1980.
193. *Hruška, K. – Kracmer, E. – Sedláček, J. – Vyšín, J. – Zelinka, R.*: Přehled elementární matematiky. 4., znovu revidované vydání. Praha, SNTL 1965.
194. *Jirásek, F. – Kriegelstein, E. – Tichý, Z.*: Sbírka řešených příkladů z matematiky. Logika a množiny, lineární a vektorová algebra, analytická geometrie, posloupnosti a řady, diferenciální počet funkcí jedné proměnné. Druhé, nezměněné vydání. Praha, SNTL 1981.
195. *Kohlmann, Č.*: Matematika ve sdělovací technice. 2., zcela přepracované a doplněné vydání. Praha, SNTL 1960.
196. *Koniček, O. – Tichý, Z. – Veselka, J.*: Strojnická příručka. Díly I (1956), II (1957). Praha SNTL (upravený překlad z ruštiny).
197. *Medek, V. – Mišák, L. – Šalát, T.*: Prehľad stredoškolskej matematiky. Bratislava, SVTL 1963.
198. *Minorskij, V. P.*: Sbírka úloh z vyšší matematiky. 2. vyd. Praha, SNTL 1964 (překlad z ruštiny).
199. *Oborové encyklopédie SNTL. Aplikovaná matematika I, II.* Praha, SNTL 1977, 1978.
200. *Panov, D. J.*: Logaritmické pravítko v praxi. Praha, SZN 1971.
201. *Rektorys, K. a spolupracovníci*: Přehled užité matematiky. Čtvrté, nezměněné vydání. Praha, SNTL 1981.
202. *Schleicher, F.*: Příručka pro stavební inženýry. Díl I. Praha, SNTL 1960 (překlad z němčiny).
203. *Šalát, T. a kol.*: Malá encyklopédie matematiky. Bratislava, Obzor 1967.
204. *Vygodskij, M. J.*: Príručka elementárnej matematiky. 2. vyd. Bratislava, SVTL 1963 (překlad z ruštiny).

15.2.13. Tabulky konstant a funkcí

205. *Gradštejn, I. S. – Ryžik, I. M.*: Tablicy integralov, summ, rjadov i proizvedenij. Izd. 4. Moskva, Fizmatgiz 1962.
206. *Jahnke, E. – Emde, F.*: Tablicy funkcií s formulami i krivymi. 3. izd. Moskva, Fizmatgiz 1959 (překlad anglického vydání: New York, Dover Publication 1945).
207. *Mikulčák, J. – Krkavec, J. s kol.*: Matematické, fyzikální, chemické tabulky pro SVVŠ. Praha, SPN 1966.
208. *Smoljanskij, M. I.*: Tabulky neurčitých integralov. Bratislava, SVTL 1965 (překlad z ruštiny).

VĚCNÝ REJSTŘÍK

A

- Abeceda predikátová 65
- výroková 61
- algoritmus Euklidův 127
- řešení matematického modelu 760
- alternativa 773, 779
- amplituda komplexního čísla 135
- analogie Neperovy 391
- anomálie excentrická 430
- antecedent implikace 63
- antivalence 777, 779
- antivektor vektoru 264
- anuloid 356
- argument funkce 241
 - hyperbolického kosinu 384
 - - kotangens 384
 - - sinu 384
 - - tangens 384
- komplexního čísla 135
- arkuskosinus 376
- arkuskotangens 376
- arkussinuš 376
- arkustangens 376
- asteroida 435, 544
- asymptota křivky 535
 - -, nesměrnicová 535
 - -, směrnicová 535
 - -, vertikální 535
- axióm 91
 - monotonie 98
 - - pro násobení 98
 - symetričnosti 98
 - totožnosti 98
 - tranzitivnosti 98
 - trichotomie 97

- axiómy G_1 až G_4 92
 - metrického prostoru 98
 - rovnosti 91
 - Peanovy 103
 - R_0 až R_3 91
 - U_0 až U_2 97, 98
 - uspořádání 97
- azimut ortodromy 397

B

- Báze (množina základních proměnných) 764
- bijekce 86
- binormální křivky 560
- bod derivace, nulový 512
 - funkce, nulový 248
 - -, stacionární 512
 - inflexní 518
 - invariantní 298
 - křivky, dvojnásobný 533
 - -, inflexní 533
 - -, izolovaný 533
 - -, několikanásobný 524, 556
 - -, osamocený 533
 - -, regulární 524, 525, 556
 - -, singulární 524, 533, 556
 - -, uzlový 533
 - lineárního prostoru 97
 - metrického prostoru 98
 - mezi body 285
 - mnohočlenu, nulový 217
 - množiny, hraniční 100
 - -, hromadný 102
 - -, izolovaný 100
 - -, vnější 99
 - -, vnitřní 100

- bod nespojitosti 248
- druhého druhu 249
- - prvního druhu 249
- plochy, regulární 567
- -, singulární 567
- posloupnosti, hromadný 483
- s dělícím poměrem 460
- samodružný 298
- sedlový 516
- singulární (diferenciální rovnice) 660
- vratu 533

C

- Casus irreducibilis 215
- centicentigrad 291
- centigrad 291
- centrování soustavy vázaných vektorů 262
- complementary error function 618
- cykloida obecná 537, 538
 - obyčejná 537, 538
 - prodloužená 539
 - prostá 537, 538
 - zkrácená 539

Č

- Čára lomená 285
 - -, uzavřená 285
- část čísla, celá 115
- -, zlomková 115
- komplexního čísla, imaginární 130
 - -, reálná 130
 - množiny 69
 - -, vlastní 70
- člen algebraické rovnice, absolutní 212
 - -, *i*-tého stupně 212
 - determinantu, hlavní 199
 - s autoregulací 784
- činitel kořenový 214, 217
- čísla nesoudělná 125
 - po dvou nesoudělná 125

- čísla pythagorejská 317
 - soudělná 125
 - vyvolená 171
 - -, normalizovaná 171
 - -, přesná 171
- číslice 114–116
 - *i*-tého řádu 115
 - největšího řádu 115
- platná 145
 - správná 115
- číslo binomické 157
 - celé, kladné 105
 - -, nezáporné 103
 - -, záporné 105
 - Eulerovo 485
 - imaginární 130
 - kardinální 89
 - kombinaciční 157, 158
 - komplexně sdružené 130
 - komplexní 129
 - -, algebrické 212
 - -, transcendentní 212
 - - v exponenciálním tvaru 138
 - - v goniometrickém tvaru 134
 - - v kartézském tvaru 132
 - neperiodické 120
 - neryze periodické 120
 - neúplné 143
 - opačné 104
 - periodické 120
 - přibližné 143
 - pirozené 103
 - ryze imaginární 130
 - - periodické 120
 - složené 123
 - úrokové 175
 - zaokrouhlené 144
 - čtverec 321, 325, 326
 - čtverečice bodů, harmonická 303
 - čtvrtá úměrná 150, 302
 - čtyřstěn pravidelný 341
 - čtyřúhelník 319
 - tečnový 323
 - tětivový 322

D

- Defekt matice 183
 - sférický 388, 392
- definice pravděpodobnosti, elementární 733
 - -, statistická 733
- degenerace matice 183
- dělení mnohočlenu mnohočlenem 113, 114
 - se zbytkem 121
 - úsečky v poměru 273
- dělitel 105, 121
 - nesamozřejmý 122
 - nevlastní 122
 - nuly 95, 188
 - samozřejmý 122
 - společný 125
 - -, nevlastní 125
 - -, samozřejmý 125
 - úrokový 175
 - vlastní 122
- dělitelnost v množině všech celých čísel 121
- délka úsečky 289
 - elipsy 436
 - oblouku křivky 622, 623
 - vektoru 262
 - zejnepisná 396
- deltoid 323
- derivace elementárních funkcí 505
 - funkce dané parametricky 503
 - - - polárními souřadnicemi 504
 - -, konečná 492
 - -, logaritmická 507
 - - na intervalu 493
 - -, nevlastní 492
 - -, n -tá 495
 - -, parciální 499, 500
 - - v bodě 492
 - -, vlastní 492
 - - zleva, nevlastní 493
 - - zprava, nevlastní 493
 - implicitní funkce 502
 - matice 192

- derivace množiny 102
 - složené funkce 497
 - smíšené 500
 - určitého integrálu 604
 - vektorové funkce 509
 - vyšších řádů 495
- derivování grafické 511
 - logaritmické 498, 499
- desetiúhelník pravidelný 325–327
- determinant Gramův 273
 - matice n -tého řádu 198
 - - soustavy 207
- devítiúhelník pravidelný 325
- diagonála determinantu, hlavní 199
 - -, vedlejší 199
 - matice, hlavní 181
 - -, vedlejší 181
- diagram průvodícový 370, 371
- diference argumentu 491
 - aritmetické posloupnosti 167
 - funkce 491
 - množin, symetrická 72
 - diferenciál argumentu 494
 - funkce 494
 - -, n -tý 496
 - -, totální 501
 - -, úplný 501
 - oblouku prostorové křivky 557
 - - rovinné křivky 525
 - vektorové funkce 510
 - diferenciály vyšších řádů 496
- dilec 291
 - dělostřelecký 291
 - matematický 291
- direktrix 419
- disjunkce 62, 773
 - jevů, logická 732
- diskontování 176
- diskriminant kubické rovnice 215
 - kuželosečky 449
 - kvadratické rovnice 212, 213
 - kvadratických členů kuželosečky 449
- dodekaedr 342

doplňek množiny v množině 72
– prvku matic, algebraický 199
– – –, redukovaný algebraický 190
dvacetistěn pravidelný 341
dvanáctistěn pravidelný 342
dvanáctiúhelník pravidelný 327
dvojice bodů, involutorní 298
– neuspořádaná 76
– uspořádaná 76
dvojpoměr čtyř bodů 303
dvojúhelník sférický 352, 386
důkaz matematickou indukcí 103

E

Ekvivalence 62, 82, 777, 779
element oblouku křivky 525
– – prostorové křivky 557
elipsa 332, 333, 427–438
elipsoid protáhlý, rotační 354
– trojosý 353, 354, 472
– zploštělý, rotační 355
epicykloida obecná 539–541
– obyčejná 539–541
– prodloužená 541
– prostá 539–541
– zkrácená 541
epitrochoidy 541
error function 618
evoluta cykloidy 538
– elipsy 435
– hyperboly 447
– křivky 536
– paraboly 425
evolventa kružnice 537
– křivky 536
excentricita elipsy, číselná 428
– –, délková 428
– hyperboly, číselná 439
– –, délková 439
exces 739
– sférický 388, 389
existence neutrálního prvku 92
– symetrického prvku 92
exponent 111

extrém funkce, absolutní 512, 513
– –, lokální 512
– –, ostrý lokální 512
– –, vázaný 517
extrémy funkce 511–518
– – dané parametricky 515
– implicitní funkce 515

F

Faktor diskontní 176
– integrující 660, 661
– úrokový 176
faktoriál čísla n 156
flexe křivky 531, 564
forma výroková 66
formule predikátová 66
– –, atomární 66
– –, otevřená 67
– –, uzavřená 67
– výroková 61
– výrokové, ekvivalentní 63
– –, – (vzorce) 775, 776
funkce 87, 241
– algebraická 242, 243
– Besselovy 687
– beta 610
– boolovská, k -místná 772
– cyklometrické 376
– delta, Diracova 786
– diferencovatelná 494, 501
– distribuční 736, 737, 743
– dvou proměnných, reálná 252
– explicitní 242
– exponenciální 260
– –, modifikovaná integrální 617
– gama 610, 687, 688
– goniometrické 357
– harmonické 370, 371
– hladká 493
– homogenní 245, 253
– hyperbolické 379
– hyperbolometrické 384
– chyb 618
– –, doplňková 618
– implicitní 242, 254

- funkce impulsová 786
- integrovatelná 574, 602, 636
- inverzní 246, 259
- klesající 244, 512
- kmenová 659
- komplexní 88, 89
- konkávní 244, 245, 518
- konvexní 244, 245, 518
- kvadratická 255, 256
- -, homogenní 237
- laplaceovsky transformovatelná 721
- lichá 243
- lineární 254, 255
- logaritmická 261
- mocninová 257–259
- monotónní 244
- *n* reálných proměnných, reálná 252
- NAND 776, 777
- neklesající 244
- nerostoucí 244
- NOR 776, 777
- ohraničená 243
- - shora 243
- - zdola 243
- periodická 245
- po částech spojitá na intervalu 249
- potenční 257–259
- primitivní 571
- prostá 88, 245
- přechodová 786
- přenosová 784
- racionální 243
- -, celá 243, 254–257
- -, lineární lomená 243
- -, lomená 243
- -, neryze lomená 243
- -, ryze lomená 243
- reálná 88
- reálné proměnné, reálná 241
- -, vektorová 508
- rostoucí 244, 512
- ryze monotónní 244
- - konkávní 244, 245, 518
- - konvexní 244, 245, 518

- funkce s odstranitelnou nespojitostí 248
- sinusoidální (grafické znázornění) 367
- skalární proměnné, vektorová 508, 509
- skoková, jednotková 785
- složená 245
- spojitá v bodě 248, 253, 488
- - na intervalu 249
- - zleva 248, 488
- - zprava 248, 488
- spojitě diferencovatelná 493
- stupňová 736
- sudá 243
- testovací 785–787
- transcendentní 243, 260, 261
- třídy L 720
- účelová 760, 764, 765
- funktor disjunkce 60
- ekvivalence 60
- implikace 60
- konjunkce 60
- negace 60
- výrokotvorný 60

G

- Generalizátor 65
- grad 291
- graf funkce, kartézský 242, 254–261
- gramián 273
- grupa 94
- Abelova 92
- komutativní 92
- -, aditivní 92
- -, multiplikativní 93
- lineárně uspořádaná 97
- okruhu, aditivní 95
- tělesa. multiplikativní 96
- úplně uspořádaná 97
- uspořádaná 97
- grupoid 93
- asociativní 94
- multiplikativní 93
- okruhu, multiplikativní 95

H

- Hexaedr 337, 342
- hmotnost délková 620
 - lineární 620
 - měrná 620
 - objemová 620
 - obsahová 620
 - plošná 620
- hodnota matice 183
 - soustavy vektorů 267
- hodnota argumentu komplexního čísla, hlavní 135
 - číselná 296
 - funkce 87, 241
 - kvadratická střední 603
 - střední 603
 - očekávaná 738
 - komplexního čísla, absolutní 131
 - polohy, střední 747
 - proměnné 60
 - přibližná 143
 - přibližného čísla, střední 144
 - přípustná 143
 - přirozeného logaritmu komplexního čísla, hlavní 155
 - reálného čísla, absolutní 110
 - střední 745, 754
 - vektoru, absolutní 262
 - zaokrouhlená 145
 - zdánlivá 754
 - znaku, prostřední 747
 - zobrazení 84
- hodnoty výběru, odlehlé 748
 - základní u goniometrické rovnice 373
- homotetie 300
- hranice množiny 100
- hranol 336
 - kolmý 336
 - kosý 336
 - n -boký 336
- hranolec 342, 343
- hrot křivky 533

- hustota pravděpodobnosti 737
 - normálního rozložení 741, 743
 - normovaného normálního rozložení 743
- hvězdice 544
- hyperbola 258, 259, 333, 438–449
 - rovnoosá 259, 441
- hyperboloid dvojdílný 474
 - rotační 356, 475
 - jednodílný 473
 - rotační 355, 475
- hypocykloid obecná 542
 - obyčejná 542
 - prodloužená 543
 - prostá 542
 - zkrácená 543
- hypotrochoidy 543

CH

- Charakteristika logaritmu 153
- chordála dvou kružnic 418
- chyba absolutní 144, 752
 - aritmetického průměru, střední 754
 - jednotlivé hodnoty, střední 754, 756
 - počáteční 752
 - poměrná 144
 - prostá 144
 - relativní 144, 752
 - skutečná 752, 753
 - střední hodnoty, zdánlivá 756
 - váhové jednotky, střední 756
 - váženého aritmetického průměru, střední 756
 - zdánlivá 754

I

- Identita 81, 210
 - Lagrangeova 272
 - v rovině 298
- ikosaedr 341

- implikace 62, 777, 778
 - oboustranná 62
 - nepřímá 777, 778
 - přímá 778
- incidente prvku k množině 69
- index Besselovy rovnice 687
 - členu posloupnosti 165
- infimum funkce 513
 - množiny 83
- inflexe funkce 518
- inhibice 778
 - nepřímá 777, 779
 - přímá 777, 778
- injekce 85
- inkluze neostrá 70
 - ostrá 70
- integrace rozkladem v částečné zlomky 580
 - per partes 550
- integrál diferenciální rovnice, partikulární 648
 - dvojnásobný 637
 - dvojný 636
 - dvojrozměrný 636
 - eliptický druhého druhu 354
 - -, úplný 610
 - -, prvního druhu 354
 - -, úplný 610
 - Fourierův 718
 - chyb 618
 - křivkový 631–634
 - Laplaceův 720
 - Laplaceův–Gaussův 618
 - matice 193
 - neurčitý 571
 - nevlastní vlivem funkce 608
 - - intervalu 608
 - nezávislý na integrační cestě 632
 - parciální diferenciální rovnice 688
 - pravdivostní 618
 - trojnásobný 642, 643
 - trojný 642
 - trojrozměrný 642, 643
 - určitý, Cauchyův–Riemannův 601, 602
 - integrál určitý, Newtonův 601
 - -, Riemannův 601, 602
 - vektoru, křivkový 634
 - integrály Fresnelovy 614
 - základní 571–573
 - integrand 574
 - interpolace lineární 222, 223
 - interval neohraničený 129
 - ohrazený 129
 - otevřený 129
 - polootevřený 129
 - polouzavřený 129
 - uzavřený 129
 - invariant kvadratický 480
 - lineární 480
 - invariante plochy druhého stupně, ortogonální 480
 - inverze kruhová 279–282
 - křivek 280
 - relace 79
 - v permutaci 162
 - ve výrokovém počtu 774
 - involute 298
 - izometrie 298

J

- Jazyk 59
- jednotka 93, 115
 - délková 289
 - imaginární 130
 - *i*-tého řádu 115
 - měřicí 296
 - míry, měřicí 287
 - objemová 296
 - obsahu 296
 - plošná 296
 - úhlová 290
 - základní 115
- jehlan kolmý 339
 - komolý 339, 340, 342
 - kosý 339
 - *n*-boký 338
 - trojboký 339

jev částečný 732, 733
– deterministický 732
– jistý 732, 733
– náhodný 732
– nemožný 732, 733
– přechodový 718
jevy ekvivalentní 732
– jednou možné 732
– neslučitelné 732
– po dvou disjunktní 732
– vzájemně opačné 732
jmenovatel 105, 108

K

Kalkul predikátový 65
kardioida 541
kisoida Dioklova 552
kisoidy 551–553
klín 285, 342
– kulový 352
– s obdélníkovou podstavou 343
– válcový 346
kód Grayův 781
koeficient binomický 156
– korelační 751
– polynomický 161
– růstu, průměrný 746
– stejnolehlosti 300
– variační 739, 748
koeficienty algebraické rovnice
212
– Bernoulliova schéma 735, 736
– Fourierovy 706
– lineární kombinace 266
– normálních rovnic 756
kolmost dvou přímek 411
– – vektorů 268
kombinace 164
– lineární netriviální 266
– – triviální 266
– s opakováním 165
– termů, lineární 209
– vektorů, lineární 266
komplanace 623, 624
komplement množiny v množině 72

kompozice 80
– prvků vzhledem k binární operaci 91
komposit 80
kongruence 122
konchoida kružnice 555
– Nikomédova 554
– přímá 554
konchoidy 554, 555
konjunkce 62, 773
– jevů, logická 732
konsekvent implikace 63
konstanta 60
– aditivní 505
– Eulerova 609, 616, 617
– integrační 574
konstanty Fourierovy 706
konstrukce elipsy 436–438
– –, nitková 428
– –, vláknová 428
– hyperboly 448
– paraboly 426, 427
kontinuum 101
kontradikce predikátového počtu 67
– výrokového počtu 63
konvoluce 724
kopyto válcové 346
koreláty 758
kořen mnohočlenu 217
– –, k -násobný 217
– rovnice 210
kosekans 357, 358
kosinus 357, 358
– integrální 616
kosinusoida 360
kosiny vektoru, směrové 269
kosočtverec 320
kotangens 357, 358
kotangentoida 360
koule 349
– otevřená 99
kovariance 751
kritéria dělitelnosti 122, 123
kritérium konvergence alternující řady, Leibnizovo 695

- kritérium konvergence řady,
 d'Alembertovo 694
 - -, Cauchyovo 694
 - -, limitní d'Alembertovo
 694
 - -, Cauchyovo 694
 - -, odmocninové 694
 - -, podílové 694
 - -, odmocninové 694
 - -, podílové 694
 - -, porovnávací 694
 kroucenost křivky 565
 kruh 328–330
 kružnice 328, 329
 – Apolloniova 303
 – elipsy, hlavní 435
 –, vedlejší 435
 – hybná 537
 – křivosti křivky 531, 564
 – kulové plochy, hlavní (vedlejší) 386
 – nehybná 537
 – opsaná trojúhelníku 312
 – oskulační 531, 564
 – připsaná trojúhelníku 313
 – vepsaná trojúhelníku 312
 krychle 337, 342
 křivka daná implicitně 524, 556
 – parametricky 524, 556
 – diskriminantní 535
 – dvojí křivosti 565
 – ekvivalentní 586
 – Gaussova 742
 – integrální 649
 – konkávní 532
 – konvexní 532
 – obalová 535, 536
 – potenční 472
 – prostorová 556, 568
 – rektifikovatelná 622
 – schopná rektifikace 622
 křivky Cassiniový 545, 546
 – cyklické 537–545
 – Lissajousovy 368, 369
 křivost křivky, první 531, 564
 – druhá 565
 kubatura 624, 625
 kužel 346
 – komolý 347
 – kosý 348
 – kruhový 348
 – -, kolmý 348
 – rotační 348
 – -, komolý 348, 349
 kvádr 337
 kvadrika 480
 – středová 480
 kvantifikátor existenční 65
 – malý 65
 – obecný 65
 – velký 65
 kvantor existenční 65
 – malý 65
 – obecný 65
 – velký 65
 kvazigrupa 94
 kvaziuspořádání 82
 kvocient geometrické posloupnosti
 170
- L**
- Lemniskáta Bernoulliova 547
 L-funkce 720
 lichoběžník 322
 limes superior posloupnosti 691
 limita funkce 486–491
 – konečná 486
 – – n proměnných 491
 – – nevlastní 487
 – – v nevlastním bodě 486, 487
 – – vlastní 486
 – – zleva 487
 – – zprava 487
 – matice 192
 – posloupnosti, horní 699
 – – konečná 482
 – – nevlastní 483
 – – vlastní 482
 – typu $0,0$ 520
 – – x, x 520
 – – $0, x$ 521
 – – $x, -x$ 522

limita typu 0^0 522
 – – ∞^0 522
 – – 1^∞ 522
 – vektorové funkce 509
 lincárnost statistická 784
 list Descartesův 551
 logaritmování 151
 logaritmus 151
 – desítkový 152
 – integrální 616
 – komplexního čísla, přirozený 155
 – přirozený 152
 loxodroma 398
 lupa 94

M

Mantisa logaritmu 153
 mapa Karnaughova 781
 maximum absolutní 512, 513
 – –, ostré 512
 – lokální 512
 – –, ostré 512, 513
 matici adjungovaná 190
 – alternující 194
 – antihermitovská 195
 – antisymetrická 194
 – čtvercová 180
 – diagonální 182
 – ekvivalentní 183
 – hermitovská 195
 – hermitovsky polosouměrná 195
 – – souměrná 195
 – – transponovaná 195
 – inverzní 190
 – jednotková 182
 – komplexně sdružená 194
 – komutující 188
 – násobná 182
 – nulová 181
 – obdélníková 180
 – polohermitovská 195
 – polosouměrná 194
 – řádková 181
 – řádu n 181

matice skoro polosouměrná 194
 – sloupcová 181
 – souměrná 193
 – soustavy 196
 – –, rozšířená 196
 – symetrická 193
 – transponovaná 193
 – trojúhelníková 182
 – typu (m, n) 180
 – zaměnitelné 188
 – zámenná 189
 medián 747
 měnitel 297
 menšenec 104
 menšitel 104
 metaabeceda 59
 metajazyk 59
 metoda adiční 229, 232
 – dosazovací 228, 231
 – eliminační, Gaussova 233
 – integrování per partes 580
 – – rozkladem v částečné zlomky 580
 – –, substituční 573
 – iterační 225
 – komparační 228, 232
 – konstrukce inverzní matici, Gaussova 191
 – Lagrangeových multiplikátorů 517
 – lichoběžníková pro výpočet určitých integrálů 604
 – Newtonova 223, 224
 – Newtonova–Cotesova pro výpočet určitých integrálů 606
 – obdélníková pro výpočet určitých integrálů 604
 – parabolická pro výpočet určitých integrálů 604
 – pomocného úhlu 374
 – porovnávací 228, 232
 – sčítací 229, 232
 – simplexová 764, 766
 – Simpsonova pro výpočet určitých integrálů 605
 – slučovací 229, 232

- metoda substituční 228, 231
 - tečen 223, 224
 - tečnová pro výpočet určitých integrálů 605
 - tětiv 222, 223
 - variace konstant 656
 - vylučovací 228, 231
- metody k určení kořenů rovnic, přibližné 222–226
- metrika euklidovská 99
- mezikruží 331
- mile námořní 396
 - zeměpisná 396
- mimoběžky 284
- minimax 516
- minimum absolutní 512, 513
 - -, ostré 512
 - lokální 512
 - -, ostré 512, 513
- minor matice 199
- míra devadesátná 291
 - oblouková 290
 - procentová 173
 - radiánová 290
 - rozptýlení 747, 754
 - setinná 291
 - stupňová 291
 - v geometrii 287
 - variability 751
 - variace 747
- mnohočlen 209
 - n -tého stupně 217
- mnohostěn 335
 - pravidelný 340
- mnohoúhelník 323, 324
 - pravidelný 324–328
 - řídicí 285
 - vektorový 264
- množina číselná 77
 - - (rozdelení) 90
 - definovaná vlastností 68
 - dobře uspořádaná 82
 - faktorová 91
 - konečná 89
 - lineárně uspořádaná 82
 - mohutnosti kontinua 89
- množina nejvýše spočetná 89
 - nekonečná 89
 - nosná 78
 - obojetná 100
 - ostře uspořádaná 82
 - otevřená 100
 - potenční 71
 - prázdná 70
 - souvislá 100
 - spočetná 89
 - úplně uspořádaná 82
 - uspořádaná 82
 - uzavřená 100
 - všech celých čísel 104
 - - kladných celých čísel 105
 - - komplexních čísel 129
 - - přirozených čísel 103
 - - racionálních čísel 105
 - - reálných čísel 106
 - základní 72
- množiny disjunktní 72
 - ekvipotentní 89
 - ekvivalentní 89
 - identické 70
 - konjunktní 72
 - po dvou disjunktní 72
 - sobě rovné 70
 - splývající 70
 - stejně mohutnosti 89
- mocněnec 111
- mocnina matice 189
 - komplexního čísla, n -tá 136, 139
 - množiny, n -tá kartézská 77
 - obecná 113
 - s celočíselným exponentem 111
 - s kladným celým exponentem 111
 - s racionálním exponentem 113
 - s reálným exponentem 113
- mocnitel 111
- mocnost bodu ke kružnici 304, 417
 - - ke kulové ploše 471
- model matematický 760
- modul nad okruhem 96

modul soustavy dekadických logaritmů
– – přirozených logaritmů 153
– vektoru 262
modus 747
– ponens 64
mohutnost kontinua 89
moment deviační 641, 646
– *k*-tého řádu 738
– – –, centrální 738
– – –, počáteční 738
– odstředivý 641, 646
momenty setrvačnosti 629–631,
640, 641, 645, 646
– statické 625–627, 640, 644,
645
monoid 94
multiplikátor Eulerův 660, 661

N

Nadbytek sférický 388
nadmožina množiny 69
náhodná proměnná 736
nakrytí množiny na množinu 85
nasobek čísla 121
– společný 126
– – –, nejmenší 126
– vektoru 265
násobení relací 80
násobnost kořene mnohočlenu 217
nautical mile 396
negace 774
– uzavřených výrokových formulí
68
– výrokové formule 62
nepřesnost 143
nerovnice 239
– s jednou proměnnou 239, 240
nerovnost 91, 128
– množin 70
– trojúhelníková 98, 110, 131
nespojitost funkce 248
– – druhého druhu 249
– – odstranitelná 248
– – prvního druhu 249

nezávisle proměnná 241
nonekvivalence 779
nonimplikace 778
norma vektoru 262
normálna elipsy 431
– hyperboly 442–444
– křivky 528, 529, 562
– – –, hlavní 560
– paraboly 423
– plochy 568
nosič relace 78
nositelka vázaného vektoru 262
n-stěn 335
– pravidelný 340
n-úhelník 323, 324
– konvexní 406
– pravidelný 324–328
nula 93, 105
nulita matice 183
numerus 151

O

Obálka 535, 536
obdélník 320, 321
obelisk 342
objem čtyřstěnu 279, 461
– dvojdilného hyperboloidu 475
– jednodilného hyperboloidu 475
– rotačního tělesa 624, 625
– rovnoběžnostěnu 272, 274
– tělesa 296
oblast 101
– jednoduše souvislá 101
– kružnice, vnější 101
– – –, vnitřní 101
– ohraničená 101
– uzavřená 101
oblouk jako parametr 526, 557
– paraboly 334
obor funkce, definiční 87, 241
– funkční 87, 241
– integrační 601
– integrity 95
– – – s jednotkou 95
– konvergence řady funkcí 697

- obor nerovnice, definiční 239
 - pravdivosti nerovnice 239
 - - predikátové formule 67
 - - rovnice 210
 - predikátové formule, definiční 67
 - proměnné, definiční 60
 - proměnných termu 209
 - relace, definiční 78
 - -, druhý 78
 - -, první 78
 - rovnice, definiční 210
 - soustavy rovnic, definiční 210
 - zobrazení, definiční 84
 - obraz číselný, z -adický 114
 - funkce v Laplaceové transformaci 720
 - - ve Fourierově transformaci 719
 - relace 78
 - zobrazení 84
 - obrazec 283
 - obsah eliptické úseče 435, 436
 - - výseče 436
 - hyperbolické úseče 447
 - - výseče 447
 - n -úhelníku 278, 406
 - obrazce 296, 620–622, 639
 - parabolické úseče 424
 - pláště rotačního tělesa 623, 624
 - pravidelného n -úhelníku 325
 - trojúhelníku 279, 314, 406, 461
 - vnitřní oblasti elipsy 333, 435
 - odchylka dvou přímek 274, 295, 410, 411
 - kvadratická, střední 738
 - směrodatná 738, 748
 - střední 748
 - odmocnina 111, 134, 259, 260
 - odúročitel 176
 - ohodnocení výrokové formule, pravdivostní 62
 - okolí bodu (různé druhy okolí) 99
 - okruh 94
 - asociativní 95
 - bez dělitelů nuly, asociativní 95
 - komutativní 95
 - lineárně uspořádaný 98
 - s dělením, asociativní 96
 - s jednotkou 95
 - úplně uspořádaný 98
 - uspořádaný 98
 - oktaedr 341
 - operace binární 87, 91
 - n -árni 86
 - Peirceova 776, 777
 - Shefferova 776, 777
 - operátor Heavisideův 787
 - originál Laplaceova obrazu 720
 - ortodroma 396
 - osa mimoběžek 284
 - reálná, rozšířená 129
 - úhlu 287
 - osmistěn pravidelný 341
 - osmiúhelník pravidelný 325, 326
 - otočení 299
 - kartézské soustavy 402, 403, 450, 451
- P**
- Parabola 255–258, 418–427
 - Neilova 425, 537
 - semikubická 425, 537
 - paraboloid eliptický 475
 - hyperbolický 476
 - rotační 353, 476
 - -, komolý 353
 - parametr paraboly 419
 - parcializace zobrazení 86
 - partikularizátor 65
 - pás 284
 - kulový 351
 - perioda funkce 245
 - periodického čísla 120

- permutace 160
 - množiny 162
 - -, hlavní 162
 - -, identická 162
 - -, inverzní 162
 - -, základní 162
 - s opakováním 160
 - základní 161
- pětiúhelník pravidelný 325–327
- plocha hranolová 285
 - integrální 688
 - jehlanová 285
 - kulová 386, 471
 - kuželová 286, 474, 477
 - -, rotační 478
 - válcová 286
 - -, hyperbolická 479
 - -, parabolická 479
- počet predikátový 65
 - procentový na sto 173
 - - ve stu 173
 - - ze sta 173
 - - ze zmenšeného základu 173
 - - ze zvětšeného základu 173
- podíl částečný 121
 - diferenční 491
 - neúplný 121
- podmínka implikace, nutná 63
 - -, postačující 63
 - minimálnosti, Gaussova 749
 - okrajová 690
 - Schwarzova pro nezávislost integrálu na integrační cestě 632
- podmínky integrovatelnosti, Schwarzovy 634
 - počáteční 648
- podmnožina množiny 69
 - -, vlastní 70
- podobnost 300
- podposloupnost posloupnosti 167
- podstrovo slova 59
- pól poláry 417, 424, 433, 445
- polára bodu 417, 424, 433, 445
- pole 96
 - směrové 649
 - vektorové 508
- pologrupa 94
- poloida hybná 537
 - nehybná 537
- poloměr druhé křivosti 565
 - první křivosti 531, 564
 - torze 565
- poloměry elipsy, sdružené 434
 - hyperboly, sdružené 446
- poloparametr paraboly 419
- polyedr 335
- polynom 209
 - interpolační, Newtonův 251
 - n -tého stupně 243
- poměr 172
 - bodu, dělící 302
 - procentový 172
 - promilový 172
- pořadnice 399
- posloupnost alternující 166
 - aritmetická 167
 - - k -tého řádu 168
 - částečných součtů posloupnosti 166
 - diferenční k -tého řádu 166
 - divergentní 483
 - funkci 89
 - -, konvergentní 697
 - geometrická 170
 - klesající 166
 - konečná 89, 165
 - konstantní 167
 - konvergentní 482
 - monotonné 167
 - neklesající 166
 - nekonečná 89, 165
 - nerostoucí 166
 - nulová 482
 - ohrazená 167
 - - shora 167
 - - zdola 167
 - podílová 166
 - reálných čísel, konečná 89, 165
 - - -, nekonečná 89, 165
 - rostoucí 166
 - ryze monotonné 167

- posloupnost určitě divergentní
 - 483
 - vybraná z posloupnosti 167
 - vyvolených čísel, odvozená 171
 - -, základní 171
- posunutí kartézské soustavy, rovnoběžné 276, 401–403, 450, 451
- pravděpodobnost jevu 733
 - nepodmíněná 734
 - podmíněná 734
- pravidla de Morganova pro výrokový počet 775
 - Guldinova 335
 - pro derivování funkci 496, 497
 - - - vektorových funkcí 510, 511
 - pro integrování 573
 - pro přibližné výpočty 147–149
- pravidlo Cramerovo 207
 - dílcové 292
 - l'Hospitalovo 520
 - Maskelynovo 491
 - Neperovo 389, 397
 - odloučení 64
 - pro zaokrouhlení 145
 - řetězové 497
 - Sarrusovo pro výpočet determinantu 201
 - Simpsonovo 335
- pravoúhelník 321
- predikát 66
 - primitivní 66
- premisa implikace 63
- princip Cavalierův 335
 - matematické indukce 103
 - sporu 60
 - vyloučení třetího 60
- prismatoid 342
- prodloužení zobrazení 86
- projekce vektoru do vektoru 268
- proměnná 60
 - číselná 60
 - integrační 574
 - jmenná 60
 - náhodná 736
 - názvová 60
 - podstatně volná ve slově 66

- proměnná vázaná ve slově 66
 - volná ve slově 66
 - výroková 60
- prostor euklidovský, *n*-rozměrný 99
 - hranolový 285
 - jehlanový 285
 - klínový 285
 - kuželový 286
 - lincární 96
 - -, komplexní 97
 - -, reálný 97
 - metrický 98
 - válcový 285
 - vektorový 96, 266
- prstenec 351
 - kruhový 356
- průměr aritmetický 745
 - -, vážený 738, 745
 - elipsy 433
 - geometrický 303, 746
 - -, vážený 746
 - harmonický 147, 746
 - -, vážený 747
 - hyperboly 445
 - kvadratický 746
 - -, vážený 746
 - středové kvadriky 480
- průměry elipsy, sdružené 434
 - hyperboly, sdružené 445, 446
- průmět vektoru do vektoru 268
- průnik množin 71
 - systému množin 71
- průvodíč 400, 419, 428, 439
- prvek invertovatelný 95
 - inverzní 93
 - jednotkový 93
 - kladný 97
 - maximální 82
 - minimální 82
 - množiny 69
 - nejmenší 82
 - největší 82
 - neutrální 92
 - nulový 93

prvek okruhu, regulární 95
 – –, singulární 95
 – opačný 93
 – převrácený 93
 – symetrický 92
 – záporný 97
 prvky neporovnatelné 82
 – porovnatelné 82
 – sférického trojúhelníku, základní 387
 prvočinitel 123
 prvočíslo 123
 předmět Fourierova obrazu 719
 předperioda periodického čísla 120
 předpoklad implikace 63
 převod na jinou čiselnou soustavu 118
 příčka mimoběžek 284
 přímka elipsy, průměrová 433
 – hyperboly, průměrová 445
 – paraboly, průměrová 424
 – regresní 751
 – vyrovnávací 756, 757
 – vztahová 751
 přírůstek argumentu 491
 – funkce 491
 přiřazení 78

R

Racionalizování jmenovatele 112
 radián 290
 rádiusvektor 262, 400
 regula falsi 222, 223
 rektifikace křivky 622
 relace 77
 – acyklická 82
 – antisymetrická 81
 – areflexívni 81
 – asymetrická 81
 – atranzitivní 81
 – binární 77
 – cyklická 82
 – ekvivalence 82
 – identická 81

relace inverzní 79
 – mezi množinami, binární 77
 – na množině, binární 79
 – neostrého uspořádání 82
 – ostrého uspořádání 82
 – reflexívni 81
 – složená 80
 – symetrická 81
 – tolerance 82
 – tranzitivní 81
 – univerzální 81
 – úplná 81
 – v množině, binární 78
 – z množiny do množiny, binární 77
 restrikce zobrazení 86
 rotace 299
 rovina Gaussova 134
 – komplexních čísel 134
 – normálová 562
 – oskulační 562
 – potenční 472
 – průměrová 474, 480
 – rektifikační 562
 – tečná 471, 474, 476, 478, 479, 568
 rovnice 210
 – algebraická n -tého stupně 211, 212, 220
 – binomická 137
 – diferenciální, Bernoulliova 662
 – –, Besselova 687
 – – bez pravé strany, Eulerova 675
 – –, Clairautova 664
 – –, exaktní 659
 – –, homogenní Eulerova 675
 – –, – lineární 654, 672, 673, 684, 685
 – –, lineární 654
 – –, – parciální 690
 – –, nehomogenní lineární 655, 677, 680, 684
 – – n -tého řádu, obyčejná 648
 – – –, parciální 688

- rovnice diferenciální, Riccatiova
 - - s pravou stranou, Eulerova 682, 683
 - -, úplná Eulerova 682, 683
 - druhého stupně, obecná algebraická 420, 449
 - dusledková 211
 - ekvivalentní 211
 - elipsy 428, 429, 430
 - exponenciální 220
 - goniometrická 372
 - -, základní 372
 - homogenní 237
 - hyperboly 439, 440, 441
 - jednodilného hyperboloidu 473
 - kladp reciproká 219
 - kružnice 413–415
 - křivky, parametrické 524
 - kubická 214–217
 - kulové plochy 471
 - kuželové plochy 477
 - kvadratická 212–214
 - lineární 212, 227
 - logaritmická 220
 - normální 756 759
 - normálky kružnice 416, 417
 - os různoběžek 412
 - paraboly 419, 422
 - přímky 273, 274, 406–409
467, 468, 476
 - reciproká 219
 - regresní, lineární 751
 - roviny 276, 277, 463
 - svazku přímek 412
 - tečny kružnice 416, 417
 - transcendentní 220
 - záporné reciproká 219
 - rovnoběžky 284, 452
 - rovnoběžník 320
 - rovnoběžnost dvou přímek 411, 412
 - rovnoběžnostěn 337
 - rovnost 81, 91
 - matice 184
 - množin 70
- rozdíl jevů, logický 732
- množin 72
- -, symetrický 72
- úhlu, grafický 289
- úseček, grafický 288
- rozklad mnohočlenu v součin kořenových činitelů 217
- množiny 91
- složeného čísla v prvočinitele 124
- vektoru 266, 279
- rozložení binomické 739
- Gaussovo–Laplaceovo 741
- hypergeometrické 740
- normální 741
- -, normované 743
- Poissonovo 741
- rozptí 747
- výběrové 747
- rozptyl 738
- rozšiřování zlomků 108
- rozvoj determinantu podle prvků řady 200
 - Fourierův 706
 - π -adickej 114
- různoběžky 284

Ř

- Řád číslice 115
- přirozeného čísla 115
- řada absolutně divergentní 693
 - binomická 702
 - časová 749
 - číselná 692
 - dynamická 749
 - Fourierova 707–712
 - -, trigonometrická 706
 - funkci 697
 - - stejnomořně konvergentní 698
 - konvergentní 692
 - Maclaurinova 702
 - matice 180
 - mocninná 698, 699
 - neabsolutně konvergentní 693
 - nepodmíněně konvergentní 693

řada neurčitě divergentní 693
– podmíněně konvergentní 693
– potenční 698, 699
– relativně konvergentní 693
– Taylorova 701
– určitě divergentní 693
řádek matice 180
řady Fourierovy, speciální
 712–718
řešení diferenciální rovnice, obecné
 648
– – –, partikulární 648
– – –, singulární 649
– nerovnice 239, 240
– optimalizačního problému
 760
– – –, vrcholové 762
– optimální 762, 765
– parciální diferenciální rovnice
 688
– rovnice 210
– – –, grafické 225, 226
– soustavy rovnic, partikulární 230
– základní při simplexové metodě
 764, 767
řetězec 82
řetězovka 549
řez hranolu, normálový 336
– rovinný 286
– válce, normálový 344
– zlatý 305

S

Sekans 357, 358
semigrupa 94
sféra 349, 386
sféroid 355
shodnost 298
– nepřímá 298
– přímá 298
schéma Bernoulliovo 735
– Hornerovo 247
– multiplikační, Falkovo 186
signum permutace 162
– reálného čísla 110

sinus 357, 358
– integrální 616
sinusoida 360
sjednocení množin 71
– systému množin 71
skalár 97, 261, 267
skládání relací 80
skok funkce 249
sloupec matice 180
slova slučitelná 66
slovo prázdné 59
– složené 59
– ve slově 59
složka vektoru ve směru 268
směrnice přímky 406
– úsečky 405
smysl obíhání, kladný 314
součet řady 692
– – funkci 697
– –, *n*-tý částečný 697
– úhlů, grafický 288
– úseček, grafický 287
součin matic 185
– množin, kartézský 76
– relací 80
– vektorový 269, 270
– –, dvojný 272
– –, smíšený 271, 272
– vektorů, skalární 267
– –, vnější 269, 270
– –, vnitřní 267
souměrnost osová 299
– středová 299, 300
souřadnice kartézské 400
– kosoúhlé 400
– křivočaré 568
– ortogonální 400
– ortonormální 400
 polární 401
– pravoúhlé 400
– vektoru 181, 263
– zeměpisné 396
soustava číselná, nepolyadicá
 119
– –, římská 119
– –, polyadicá 114

- soustava číselná, z -adická 114
 - kladně orientovaná 270
 - kvadratických rovnic 235
 - lineárních algebraických rovnic 196, 227–231, 233, 237, 238
 - – – –, neurčená 197
 - – – –, řešitelná 197
 - – – –, určená 197
 - pravotočivá 270, 456
 - rovnice 210, 227
 - souřadnicová, cylindrická 456
 - –, kartézská 400, 455
 - –, kosoúhlá 399, 400
 - –, kulová 457
 - –, ortogonální 400
 - –, ortonormální 400, 455
 - –, polární 400, 457
 - –, pravotočivá 263
 - –, pravoúhlá 400
 - –, semipolární 456
 - –, sférická 457
 - –, válcová 456
 - Země, souřadnicová 396
- soustavy lineárních algebraických rovnic, ekvivalentní 197
- spat 295
- spirála Archimédova 548
 - hyperbolická 548
- srdcovka 541
- stejnolehlost 300
- steradián 295
- stopa matice 181
- stoupání úsečky 405
- strofoida přímá 553
- struktura algebraická 91
- střadatel polhůtní 177
 - předlhůtní 177
- střed křivosti 531, 564
- střední úměrná 150, 303
- stupeň absolutní slučitelnosti 750
 - relativní slučitelnosti 750
 - úhlový 291
- styk dvou křivek 530, 564
- subdeterminant matice 199
- subnormální elipsy 432
 - hyperboly 443
 - kružnice 417
 - křivky 529
 - –, polární 530
 - paraboly 423
- subtangenta elipsy 432
 - hyperboly 443
 - kružnice 416
 - křivky 529
 - –, polární 530
 - paraboly 423
- sud 356
- supremum funkce 513
 - množiny 83
- surjekce 85
- svazek kružnic 418
 - přímek 301, 464
- symbol Kroneckerův 282
- sumační, Gaussův 743, 753
- systém množin 69
 - množin, disjunktní 72

Š

- Šestiúhelník pravidelný 325, 326
- šíkmst 739
- šířka zeměpisná 396

T

- Tabulka korespondencí Laplaceových integrálů 730, 731
 - neurčitých integrálů 585–600
 - normálního rozložení 742
 - pravdivostní 62, 772
 - určitých integrálů 609–616
- tangens 357, 358
- tangenta křivky 529
- tangentoida 360
- tautologie predikátového počtu 67
 - výrokového počtu 63
- tečna elipsy 431, 432
 - hyperboly 442, 443
 - křivky 528, 558
 - paraboly 423, 424, 427

- těleso 96, 283
 - komplexních čísel 90, 96
 - komutativní 96
 - racionálních čísel 90, 96
 - reálných čísel 90, 96
 - skalárů 97
- tempo růstu, průměrné 746
- tercium non datur 64
- term algebraický 209
 - aritmetický 209
 - lineární 209
 - racionální 209
 - -, celý 209
 - výrokový, základní 780
- test optima 765, 768
- tetraedr 341
- těžiště jako aritmetický průměr 745
 - oblouku křivky 627, 628
 - obrazce 628
 - tělesa 629, 645
 - trojúhelníku 310, 405, 460
- tolerance 82
- torus 356
- torze křivky 565
- totožnost 81
- trajektorie izogonální 536, 651
 - ortogonální 536, 651
- traktrix 550
- transformace Fourierova 719
 - kartézské soustavy 458
 - Laplaceova 720
- transpozice permutace 161
- trend 749
- trochoidy 537–545
- trojhran základní 387
- trojúhelník 307–317
 - Eulerův 387
 - Pascalův 158
 - polární, Eulerův 387
 - pravoúhlý 317, 318
 - rovnoramenný 318
 - rovnostranný 319, 325, 326
 - sečnový 491
- trojúhelník sférický 353, 387
 - -, kosoúhlý 389
 - -, - (řešení) 392–394
 - -, pravoúhlý 388
 - tečnový 492
- trubice válcová, rotační 346
- třetí úměrná 150
- třída zbytková 122
- tvar normální, úplný disjunktivní 779; 780
 - -, - konjunktivní 779
- tvrzení implikace 63

U

- Úhel dvou rádiusvektorů 461
- kontingenční 532
- konvexní 286, 293
- nekonvexní 286, 293
- nulový 286, 293
- obvodový 329
- orientovaný 287
- ostrý 293
- plný 286, 293
- polární 401
- pravý 293
- prostorový 287
- přímý 286, 293
- rovinový 286
- tupý 293
- úsekový 329
- vypuklý 293
- úhly doplňkové 294
 - přilehlé 294
 - souhlasné 294
 - střídavé 294
 - styčné 293
 - vedlejší 293, 294
- vektoru, směrové 269
- vrcholové 293
- výplňkové 294
- úloha Cauchyova 648
 - počáteční 648
- úměra 149, 150
 - aritmetická 172
 - harmonická, spojitá 151

- úměra podílová 172
 - postupná 151
 - rozdílová 172
 - spojitá 150
- umístění soustavy vázaných vektorů 262
 - vektoru do bodu 262
- umořovatel 177
- univerzum 72
- úprava rovnice 211
 - -, důsledková 211
 - -, ekvivalentní 211
- úpravy determinantu 202–205
 - matice, elementární 183
- úročitel 176
- úrok 175
- úseč eliptická 435, 436
 - hyperbolická 333, 447
 - kruhová 330, 331
 - kulová 350
 - parabolická 334
- úsečka 284
- jednotková 289
- nulová 288
- úsek množiny všech přirozených čísel 104
 - - - kladných celých čísel 105
 - na druhé ose 406, 407
 - na první ose 407
 - normální elipsy 432
 - - hyperboly 443
 - - kružnice 416
 - - křivky 529
 - - paraboly 423
 - polární normály 530
 - - tečny 529
 - rotačního válce 346
 - tečny hyperboly 443
 - - kružnice 416
 - - křivky 529
 - - paraboly 423
- úseky přímky na osách 461, 463
- usměřňování zlomku 112
- uspořádání lexicografické 776, 777
 - lineární, neostré 82
 - -, ostré 82

- uspořádání na množině všech reálných čísel 128
 - neostré 82
 - ostré 82
 - úplné, neostré 82
 - -, ostré 82
- útvar geometrický 283
 - invariantní 298
 - samodružný 298
- útvary shodné 298
- uzávěr množiny 102
- uzel křivky 533

V

- Válec 344
 - kolmý 344
 - kosý 344
 - kruhový 344
 - -, kolmý 344
 - rotační 344
 - -, dutý 346
- variace 163, 738
 - s opakováním 164
- varieta integrální 688
- vektor 97
 - aritmetický 261
 - binormální 560
 - centrální 262
 - centrovaný 262
 - geometrický 261, 262
 - hlavní normální 559
 - jednotkový 263
 - neznámých 197
 - normálový 526, 527
 - n -rozměrný 181
 - nulový 181, 262
 - polohový 262
 - pravých stran 197
 - řádkový 181
 - sloupcový 181
 - tečný 526, 527, 558
 - transponovaný 181
 - umístěný 262
 - vázaný 262
 - volný 262

- vektory ekvivalentní 262
- komplanární 263
- lineárně nezávislé 266
- - závislé 266
- nesouhlasně rovnoběžné 263
- rovnoběžné 263
- souhlasně rovnoběžné 263
- vzájemně opačné 264
- základní 263
- veličina 296
- náhodná 736
- velikost geometrického útvaru 287
 - orientovaného úhlu 294, 295
 - prostorového úhlu 295
 - strany sférického trojúhelníku 387, 388
 - úhlu 290
 - úsečky 289
 - vektoru 262
- věta algebry, základní 217
 - binomická 159
 - Cauchyova o průměrech 747
 - - o přírůstku funkce 520
 - Cauchyova–Hadamardova 698
 - Fermatova, malá 123
 - kosinová 308
 - - pro strany 390
 - - pro úhly 390
 - - pro vektory 268
 - Lagrangeova 519
 - Legendrova 392
 - Moivrova 136
 - o implicitních funkcích 254
 - o konvergenci mocninné řady, Abelova 698
 - o konvergenčním intervalu 698
 - o limitě sevřené funkce 488
 - - - posloupnosti 484
 - o mnohostěnech, Eulerova 336
 - o násobení pravděpodobností 734
 - o odvěsně, Euklidova 303, 318
 - o přírůstku funkce, druhá 520
 - - -, první 519
 - - -, zobecněná 520
 - o sečnách 304
 - o shodnosti mnohoúhelníků 307
- věta o tečně a sečně 304
 - σ tětivách 304
 - o výšce, Euklidova 304, 318
 - Pythagorova 317
 - -, zobecněná 315
 - Rollova 519
 - Schwarzova 500
 - sinová 308
 - - pro sférický trojúhelník 389
 - součtová počtu pravděpodobnosti 733
 - Steinerova pro rovinný obrazec 641
 - - pro těleso 646
 - tangentová 309
 - Thaletova 329
 - Wilsonova 123
- věty o inverzi 280, 281
- o Laplaceově transformaci, základní 721–725
- o limitách funkcí 488
 - - - posloupnosti 483
- o množinách 73–75
- o podobnosti mnohoúhelníků 305
- o prvočíslech 123
- o sférickém trojúhelníku 390
- o shodnosti trojúhelníků 307
- o střední hodnotě diferenciálního počtu 519
 - - - integrálního počtu 602, 603
- o svazku přímek 301
- o určenosti trojúhelníku 315
- vložení 85
- vnějšek množiny 100
- úhlu 286
- vnitřek množiny 100
- úhlu 286
- vrchlík kulový 350
- vrstva 284
 - kulová 351
 - rotačního paraboloidu 353
- výraz algebraický 209
 - aritmetický 209
 - neurčitý 520
- výrok 60
 - atomární 60, 66

- výseč eliptická 333, 436
 - hyperbolická 447
 - kruhová 328, 330
 - kulová 350
 - mezikruží 332
 - vnitřní oblasti elipsy 333
- výstřednost elipsy, číselná 428
 - –, délková 428
 - hyperboly, číselná 439
 - –, délková 439
- vzdálenost bodu od přímky 275, 289
 - – od roviny 278, 289, 463, 473
 - dvou bodů 98, 273, 289, 404, 405, 459
 - – – kulové plochy, sférická 386, 396
 - – mimoběžek 274, 290, 470
 - – rovnoběžek 289
 - – rovnoběžných rovin 290
 - loxodromická 398
 - ortodromická 396, 397
 - roviny od počátku 278, 462
- vzor Fourierova obrazu 719
 - Laplaceova obrazu 720
 - prvku v zobrazení, úplný 84
 - relace 78
 - zobrazení, úplný 84
- vzorce Cardanovy 215
 - de Morganovy pro množiny 75
 - Eulerovy 366
 - Gaussovy 391
 - interpolační 250–252
 - Moivrový 383
 - Mollweidovy 309
 - pro cyklotrické funkce 377, 378
 - pro goniometrické funkce 360–367
 - pro hyperbolické funkce 379–384
 - pro hyperbolometrické funkce 385, 386
 - pro limity funkcí 489–491
 - – – posloupnosti 484
 - pro logaritmování 153
 - pro logické operace 775, 776
 - pro množinové vztahy 72–75

- vzorce pro počítání s malými čísly 705, 706
 - pro rozvoje v řady 702–705
 - pro strany trojúhelníku 309, 310
 - pro úhly trojúhelníku 308, 309
 - Vièetovy 214, 218
 - vzorec Bayesův 735
 - Duhamelův 787
 - Heronův 314
 - Lagrangeův 250
 - Leibnizův 508
 - – pro rovinnou výseč 622
 - l'Huilierův 392
 - Newtonuv 251
 - pro celkovou pravděpodobnost 735
 - pro pravděpodobnost hypotéz 735
 - Ptolemaiov 322
 - Taylorův 700, 701
- ## Z
- Základ číselné soustavy 114
 - logaritmu 151
 - mocniny 111
 - odmocniny 111
 - zákon asociativní 92
 - distributivní, levý 94
 - –, pravý 94
 - identity 64
 - kompozice, vnější 96
 - –, vnitřní 91
 - komutativní 92
 - o přenášení chyb, Gaussův 754, 755
 - o superpozici 784
 - o vyloučeném třetím 64, 775
 - rozložení pravděpodobnosti, binomický 736
 - simplifikace 64
 - sporu 64, 775
 - transpozice 64
 - zákony absorpcie 776
 - de Morganovy pro predikátový počet 68
 - – – pro výrokový počet 64
 - distributivní 94

- zákony idempotence 64
 - množinového počtu 72–75
 - pro násobení vektoru skalárem 265
 - pro sčítání na množině vektorů 264, 265
 - pro skalární násobení na množině vektorů 267
 - pro smíšené násobení na množině vektorů 271
 - pro vektorové násobení 270
- zaokrouhlení nahoru a dolů 146
- zaokrouhlování na jednotky k -tého řádu 145
- zápis z -adický 114
 - -, neperiodický 120
 - -, neryze periodický 120
 - -, periodický 120
 - -, ryze periodický 120
- zásobitel polhůtní 177
 - předlhůtní 177
- závěr implikace 63
- závisle proměnná 241
- závislost kvadratická 750
 - lineární 750, 756
 - nelineární 757
- závitnice Pascalova 555
- závora množiny, dolní 83
 - -, horní 83
- zbytek Maclaurinova vzorce
 - (Cauchyuv tvar) 701
 - - - (Lagrangeuv tvar) 701
 - při dělení 121
 - řady 693
- zbytek Taylorova vzorce
 - (Cauchyuv tvar) 700, 701
 - - - (integrální tvar) 700, 701
 - - - (Lagrangeuv tvar) 700, 701
- zlomek složený 109
 - z -adický, nekonečný 115
- zlomky 108, 109
 - částečné 580
 - parciální 580
- znak multiplikační 744
 - sumační 743
- znaky dělitelnosti 122, 123
- znaménko permutace 162
- zobrazení bijektivní 86
 - identické 86
 - injektivní 85
 - inverzní 86
 - involutorní 598
 - jednojednoznačné 86
 - jednoznačné 87
 - metrického prostoru, spojité 99
 - mnohoznačné 87
 - množiny do množiny 84
 - na množině 86
 - parciální 86
 - podobné 300
 - prosté 85
 - shodné 298
 - složené 86
 - surjektivní 85
 - v množině 86
 - vzájemně jednoznačné 86
 - z množiny do množiny 83
 - - - na množinu 85
- zúžení zobrazení 86

MATEMATICKÉ VZORCE

Dr. Ing. Hans-Jochen Bartsch

Podle německého originálu Taschenbuch mathematischer Formeln, 17. Auflage,
vydaného nakladatelstvím VEB Fachbuchverlag, Leipzig, roku 1979
přeložil, upravil a doplnil Ing. Zdeněk Tichý

DT 51 (083)

Vydalo SNTL — Nakladatelství technické literatury, n. p.,

Spálená 51, 113 02 Praha 1, v roce 1983 jako svou 9299. publikaci

Redakce teoretické literatury

Odpovědný redaktor Vladimír Doležal, promovaný matematik

Vazbu a přebal navrhl Jiří Ledr

Grafická úprava a technická redakce Jana Doubětová

Výtiskla Polygrafia, n. p., Praha 2, Svobodova 1

832 stran, 473 obrázků, 32 tabulek

Typové číslo L11-E1-IV-51f 11839. Vydání první

Náklad 30 200 výtisků. 56,00 AA, 59,44 VA

03/2

Cena brožovaného výtisku 51,— Kčs

Cena vázaného výtisku 55,— Kčs

505.21, 856

Publikace je určena žákům středních škol, posluchačům vysokých škol technických a těm, kteří ve své praxi nebo při studiu používají základních oborů matematiky.

04-019-83 b. Kčs 51,—

04-020-83 v. Kčs 55,—

04 - 020 - 83
03/2 Kčs 55,-