FRANTIŠEK VEJSADA — FRANTIŠEK TALAFOUS

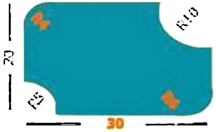
SBÍRKA ÚLOH Z MATEMATIKY

PRO GYMNASIA

PRAHA

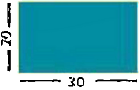
STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

1970



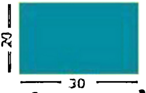
Vypočítejte plochu vybarvené oblasti.

1985



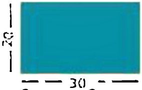
Vypočítejte plochu obdélníka.

2000



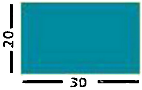
Vypočítejte plochu obdélníka vynásobením jeho délky a šířky.

2010



Jaká je plocha obdélníka?
1. 4000, 2. 600, 3. 9000000.

2015



Jaká je plocha obdélníka?
1. Lucie Bílá,
2. 600, 3. AGILE.

2018

Vybarvěte obdélník barvou, která se vám nejvíce líbí.

Poznámka: Sbírka obsahuje celkem 3 900 číslovaných příkladů s mnoha obměnami, sestavených v jednotlivých kapitolách podle obtížnosti. Mezi nimi je 250 podrobně řešených úloh a mnoho dalších opatřených návodem k řešení. Obtížnější úlohy jsou označeny hvězdičkou, úlohy vhodné pro větev přírodovědnou postranní čárou. Na konci knihy jsou uvedeny výsledky.

Zpracovali František Vejsada a František Talafous
Recenzovali dr. Jana Jurečková, doc. dr. inž. Bohdan Klimeš, Ladislav Mikulka, Oldřich Odvárko, Alena Šarounová, doc. dr. Miloslav Zedek

Druhé nezměněné vydání

Schváleno výnosem ministerstva školství ze dne 21. února 1968, č. j. 7074/68-II/1 jako pomocná kniha pro střední všeobecně vzdělávací školy v 1. vydání

I. MNOHOČLENY, LINEÁRNÍ ROVNICE

1. OPAKOVÁNÍ O MNOHOČLENECH ZE ZÁKLADNÍ DEVÍTILETÉ ŠKOLY

1. Ve městě jsou domy s různým počtem bytových jednotek. Je-li v městě t domů s jedním bytem, p domů s dvěma byty, k s třemi byty, m se čtyřmi byty, v s pěti byty, s se šesti byty a dva domy s osmi byty, kolik je ve městě bytových jednotek?

2. Traktorista oral v katastru farmy A x dní po 10 hodinách a y dní po 9 hodinách a v katastru farmy B z dní po 8 hodinách a v dní po 11 hodinách. Kolik hodin mu zbývá ještě odpracovat, jestliže plán orby činí celkem m hodin?

3. Bednička s cukrem váží r kp, prázdná t kp. Kolik cukru je v n takových bedničkách? Jestliže se účtuje c Kčs za 1 kp cukru a d Kčs za dovoz všech n bedniček, na jakou částku zněl účet?

4. Malíř bílí místnost o délce a metrů, šířce b metrů a výšce c metrů. Jakou plochu vybílí, má-li místnost dvoje dveře o rozměrech x metrů a y metrů a jedno okno o rozměrech r metrů a s metrů?

5. Šířka obdélníka je $(3m + 2n)$ cm, délka o $(m - n)$ cm větší. Jak velký je obvod obdélníka?

6. Jak velký obvod má trojúhelník, má-li jedna jeho strana délku $(m + n)$ cm, druhá strana je o $(n - 5)$ cm kratší než prvá a třetí strana o $(2m + 5)$ cm delší než druhá?

7. Zpaměti: Uspořádejte sestupně tyto mnohočleny v proměnné c:
a) $3c^4 + 2c^2 - 4c^3 + 1 - c$;
b) $c^2 - 7c^4 + 4c - 15 + 5c^5 - 7c^3$;
c) $ac^6 - bc - c^4 + mc^2 - n$;
d) $pc^4 + qc - mc^2 + nc^3 + v + 1$.

8. Proveďte a výsledný mnohočlen v proměnné x uspořádejte sestupně nebo vzestupně:
a) $5x^3 - 3x^2 + 4x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$;
b) $2x - [3x^2 + (4x^3 - 2x + 1)]$;
c) $x^4 - \{3x^2y^2 - [2x^4 - (x^3y - y^4)]\}$;
d) $2x^3 - [2x^2 - (2x + 1)] - [x + (3x^3 - x)]$;
e) $15x^2 - \{-4x^2 + [5x - 8x^2 - (2x^2 - x) + 9x^2] - 3x - 1\}$.

9. Určete výrazy: a) $A + B - C$, b) $A - B + C$, c) $B - C - A$, je-li $A = 5a^4 - 8a^3b + 2a^2b^2 - 4ab^3 - b^4$,

$B = a^4 + 3a^3b - 5a^2b^2 - 6ab^3 - 2b^4,$
$C = -4a^4 + 5a^3b - 7a^2b^2 + 10ab^3 - 5b^4.$

10. Zpaměti: Jakou hodnotu má výraz $x^3 - 3x^2 + x + 1$ pro
a) $x = 1$, b) $x = -1$, c) $x = 2$, d) $x = -2$?

11. Jakou hodnotu má výraz $a^4 - a^2b + ab^2 - 1$ pro
a) $a = 1$, $b = 2$, b) $a = 2$, $b = 1$, c) $a = 1$, $b = -1$,
d) $a = -1$, $b = 1$?

12. K mnohočlenu $2n^3 - 3n^2 + 2n - 1$ stanovte mnohočlen opačný. Jaké hodnoty mají tyto mnohočleny pro a) $n = 3$, b) $n = -4$?

13. Jakou hodnotu má výraz $5abc - \{2a^2b - [3abc - (4ab^2 - a^2b)]\}$ pro $a = -2$, $b = -2$, $c = -4$?

14. Jakou hodnotu má výraz
$3x^2y - \{xyz - (2xyz - x^2z) - 4x^2z + [3x^2y - (4xyz - 5x^2z)]\}$
pro $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$?

15. Jakou hodnotu má výraz
$pqr - \{3p^2q - [4pqr + (2pq^2 - 3p^2q)]\}$ pro $p = 1$, $q = 1$, $r = -2$?

16. Přesvědčte se, že hodnota výrazu $x^2 + x + 11$ pro $x = 1, 2, 3, \ldots, 9$ je prvočíslo.

17. Zpaměti: Přesvědčte se, že hodnota výrazu $x^2 + x + 5$ pro $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ je prvočíslo.

18. Proveďte:
a) $(x + y)x - (x - y)y - (x + y)y - (x - y)x$;
b) $a^2(b^2 - c^2) - b^2(c^2 + 1) + c^2(a^2 + b^2) + b^2(1 - a^2)$;
c) $4(x - y + z) - 2(x + y - z) - 3(-x - y - z)$;
d) $p(p + q - r) - q(p - q - r) + r(p - q + r)$;
e) $x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 - xy - y^2) - x(x^2 + 2y^2)$;
f) $ab(c + d) - ac(b + d) + ad(b - c) + bc(a + d) - bd(a - c) +$
$+ cd(a - b)$;
g) $4a(5b - 2a) - 4(7a^2 - 3ab) - 2a(3a - 3b)$;
h) $1{,}4x(0{,}5x - 0{,}3y) - 5(0{,}4y^2 - 4xy) + 0{,}2y(8y - 5x)$;
i) $r^3(r^2 + 3) + r^2(r^3 + r^2) - r^3(r + 1)$;
j) $x^3(x + y^3) - (xy)^3 + (2x^2)^3$;
k) $(a^2b^3)^2 + (2a^2)^2y^2 - (a^2y)^2 - a^4(b^6 + 1)$.

19. Proveďte:
a) $(a + 2m)(2a - m) - (a - 2m)(2a + m)$;
b) $(2y + 1)(2y + 3) + (2y + 3)(2y + 5) - 8(y + 1)(y + 2)$;
c) $(p^2 - pq + q^2)(p + q)$;
d) $(1{,}44p^2 + 0{,}6pq + 0{,}25q^2)(1{,}2p - 0{,}5q)$;
e) $(v^3 - v^2 + v - 1)(v + 1)$;
f) $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b)$;

g) $(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)(a + b)$;
h) $(x + 1)(x + 2)(1 - x) + x(x + 5)(x - 3)$;
i) $(2a - b)[a(4a + b) + b(a + b)]$;
j) $(2a^2 + 2a + 1)[(a + 1)(a - 1) + a(a + 2)]$;
k) $(u + v - t)(u + v) + (u + t - v)(u + t) + (v + t - u)(v + t)$;
l) $(m^2 + n^2 + r^2 - mn - mr - nr)(m + n + r)$.

20. Napište výraz ABC jako mnohočlen v proměnné x, je-li $A = x + 1$, $B = x^2 - 1$, $C = x^3 + 1$ a uspořádejte ho sestupně.

21. Jakou hodnotu má výraz $(x + 1)(x + 2) + (x + 3)(x + 4)$ pro $x = -0{,}4$?

22. Jakou hodnotu má výraz $(x + 2)(x - 3) + (x + 6)(x - 5) - 2(x^2 - 7x + 13)$ pro $x = 5{,}6$?

23. Oč se zvětší objem kvádru o rozměrech 1, 2, 3, zvětší-li se každý jeho rozměr o kladné číslo z? Správnost výsledku si ověřte třeba pro číslo $z = 4$.

24. Oč se zmenší obsah obdélníka o rozměrech a, b, zmenší-li se oba jeho rozměry o kladné číslo z? Ověřte si správnost výsledku třeba pro $a = 10$, $b = 8$, $z = 3$.

25. Dělte a proveďte zkoušku:
a) $(6x^2 - 11x - 10):(3x + 2)$, $x \neq -\dfrac{2}{3}$;
b) $(a^3 - b^3):(a - b)$, $a \neq b$;
c) $(c^3 + c^2 - 11c - 15):(c + 3)$, $c \neq -3$;
d) $(9y^4 + 26y^2 + 25):(3y^2 - 2y + 5)$, $3y^2 - 2y + 5 \neq 0$;
e) $(x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 7x - 2):(x^2 - 3x + 2)$, $x^2 - 3x + 2 \neq 0$.

26. Uspořádejte vhodným způsobem oba mnohočleny a potom dělte:
$$(11p^3 - 32 + 19p^2 + 3p^4 - 28p):(-4 + 3p),\ p \neq \frac{4}{3}\,.$$

27. Proveďte zpaměti:
a) $(p + a)^2$; b) $(m - n)^2$; c) $(2 + a)^2$; d) $(3 - b)^2$;
e) $(a - 4)^2$; f) $(3a - b)^2$; g) $(5u + v)^2$; h) $(a^2 - b)^2$; i) $(c^3 - 1)^2$;
j) $(x^2 + y^2)^2$; k) $(z^3 - u^3)^2$.

28. Proveďte:
a) $(1{,}2x^2y - 0{,}5x^3y^2)^2$; b) $(-2{,}5m^2n^3 - 0{,}2m^3n^2)^2$;
c) $(a^m + b^n)^2$, n, m jsou přirozená čísla; d) $(5x^3 - 2y^n)^2$, n je přirozené číslo.

29. Dokažte, že platí
$a^2 + b^2 = \dfrac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2}$. Užijte tohoto vztahu k výpočtu hodnot a) $55^2 + 45^2$; b) $125^2 + 75^2$; c) $309^2 + 291^2$; d) $0{,}64^2 + 0{,}36^2$.

30. Dokažte platnost vztahu $(10a + 5)^2 = 100a(a + 1) + 25$. Užijte jej při výpočtu hodnot 25^2, 35^2, 45^2, 55^2, 65^2, 75^2, 85^2.

31. Proveďte:
$(6x^2 - 5)^2 - (4x^2 - 7)^2 - 2x^2(2x - 3)(2x + 3)$.

32. Dokažte, že pro všechna čísla a, b, x, y platí:
$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = (bx - ay)^2$.

33. Přičteme-li k součinu dvou po sobě následujících celých čísel větší z nich, dostaneme druhou mocninu toho většího čísla. Dokažte to.

34. Dosadíme-li do výrazů $x = ab$, $y = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$, $z = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ za a, b libovolná lichá čísla, dostaneme tři celá čísla x, y, z, o nichž platí $z^2 = x^2 + y^2$. Dokažte si platnost tohoto vztahu. Zkuste zjistit x, y, z pro některá určitá čísla.

35. Proveďte:
a) $(a + b + c)^2$; b) $(a - b - c)^2$; c) $(3x^2 + 2xy - 3y^2)^2$;
d) $(1 + x^n - x^{2n})^2$, n přirozené číslo; e) $(a + b + c + d)^2$;
f) $(2m + 3k + 4p - 5q)^2$.

36. Proveďte:
a) $(3m + 3)^3$; b) $(4x^2 + 7)^3$; c) $(5a^2 + 3a)^3$; d) $(x^4 + x^2)^3$;
e) $(5a^2 - 6a^4)^3$; f) $(3x^2y - 5xy^3)^3$.

37. Proveďte:
a) $(2x - 1)^3 - (x - 2)^3$;
b) $(3x + y)^3 - (9x^2 + 6xy + y^2)(3x - y)$;
c) $(a + 2)^3 - 3(a + 2)^2(a + 1) + 3(a + 2)(a + 1)^2 - (a + 1)^3$.
(Návod: Dosaďte za $a + 2 = y$, za $a + 1 = x$.)

38. Proveďte:
a) $(a^2 - 1)^3 - (a^2 - 1)(a^2 + 1)^2 + 2a^2(a^2 - 2) + a^4(a^4 + 2)$;
b) $(2x - 1)^3 . (2x + 1)^3$;
c) $(a^2 - ab + b^2)^3 . (a + b)^3$.

***39.** Dokažte správnost vztahů:
a) $6(x + 1)^2 + 2(x - 1)(x^2 + x + 1) - 2(x + 1)^3 = 6x + 2$;
b) $5x(x - 3)^2 - 5(x - 1)^3 + 15(x^2 - 4) = 30x - 55$;
c) $(x + y)^3 + (x - y)^3 + 3(x + y)^2(x - y) + 3(x + y)(x - y)^2 =$
$= 8x^3$;
d) $(2ax - 3by)^3 + (3ax - 2by)^3 - 35(a^3x^3 - b^3y^3) +$
$+ 100abxy(ax - by) = 10abxy(ax - by)$.

***40.** Proveďte:
a) $(x - 1)^6$; b) $(a^2 + 2)^6$; c) $(2x - 1)^6$.

41. Dětská stavebnice se skládá z krychle o hraně a cm, ze tří kvádrů o rozměrech a cm, b cm, b cm, z dalších tří kvádrů o rozměrech a cm, a cm,

b cm a z krychle o hraně b cm. Jak velký je její objem? Lze tuto stavebnici složit do krychlové krabice o hraně $(a + b)$? Načrtněte si obrázek. Jakou velikost má barevný papír, jímž jsou všechny části stavebnice polepeny?

***42.** Proveďte:

a) $(a + b)^2 - (a - b)^2 + (ab + 1)^2 - (ab - 1)^2$;
b) $[(p + 1)^2 - (p - 1)^2]^2$;
c) $[(2x^2 - 3y^3)^2 + (3x^2 + 2y^3)^2]^2$.

43. Dokažte, že platí:
a) $(a - b + c)^2 = (b - a - c)^2$;
b) $(a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (-a + b + c)^2 =$
$= 3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + ac + bc)$.

44. Který výraz je nutno přičíst k výrazu $(x + y)^2 + z^2$, aby vznikl výraz $(x + y - z)^2$?

45. O kolik se zvětší hodnota výrazu $(a + b + 1)^2$, zvětší-li se číslo a o 1?

46. Dokažte, že součin $(5r + 3a - 4b)(5r - 3a + 4b)$ je čtverec, je-li $r^2 = a^2 + b^2$.

47. Určete výraz $x^2 - y^2 - z^2$, je-li $x = m + n - p$, $y = m - p$, $z = m - n$.

48. Dokažte, že pro všechna čísla a, b platí:
$(a^2 + ab + b^2)^2 + (a^2 - ab + b^2)^2 + (a^2 + ab - b^2)^2 +$
$+ (a^2 - ab - b^2)^2 = 4(a^4 + a^2b^2 + b^4)$.

***49.** Zjednodušte:
$$\frac{1}{4}\{(a + b - c - 1)^2 + (a - b + c - 1)^2 + (-a + b + c - 1)^2 + (a + b + c + 1)^2\}.$$

50. Pro která čísla x, y je hodnota výrazu $(4x - 3y)^2 + (5x + 10)^2$ rovna nule?

2. ROZKLAD MNOHOČLENŮ V SOUČIN

51. Rozložte v součin činitelů výrazy:

a) $2mp - 2mq$;
b) $2aby - 10acy + 8bcy$;
c) $7u^3vx + 14u^2v^2x^2 - 21ux^4$;
d) $p^3q^2r + pq^3r^2 + pq^2r$;
e) $x^3y^2 + x^2y^3 + x^2y^2$;
f) $x(a + b)^2 + x^2(a + b)$;
g) $3v^2(v - r)^3 + 6v^3(v - r)^2$;
h) $ax^5 - 2a^2x^4 + a^3x^3$;
i) $8b^2 - 18c^2$;
j) $9a^2 - (a - b)^2$;
k) $9p^4(a - b) - 25q^2(a - b)$;
l) $9x^2 - 6xy + y^2 - z^2$;

m) $m^2 - n^2 - p^2 + 2np$;

n) $(a - b)x^4 + (b - a)x^2$;

o) $100x^2 - 4(7x - 2y)^2$;

p) $(u + 3v)^2 - 9(v - q)^2$;

r) $9(2a - x)^2 - 4(3a - x)^2$;

s) $(4p + 3q)^2 - 16(p - q)^2$;

t) $48(a + b)^2 - 12(a - b)^2$;

u) $(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2$;

v) $a(p - q + 1)(ax^2 + b) + b(p - q + 1)(bx^2 - a) +$
$+ 2abx^2(p - q + 1)$.

52. a) $2a^5 - 2a$;

b) $2a^4 - 32$;

c) $(r + s)^4 - r^4$;

d) $ac + nad + bc + nbd$;

e) $a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc$;

f) $xz - yz - x^2 + 2xy - y^2$;

g) $m^3 - m^2n - mn^2 + n^3$;

h) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$;

i) $p^2y^2 - 4p^2 - y^2 + 4$;

j) $2k^4 - k^3 + k - 2$;

k) $a^2y - aby + a^3y - ab^2y$;

l) $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$;

m) $y^4 - 2y^3 + 2y^2 - 2y + 1$
[návod: $y^4 + 2y^2 + 1 = (y^2 + 1)^2$];

n) $2h^2 + h - 1$
[návod: $2h^2 = h^2 + h^2$];

o) $2a^5 + 6a^4 + 6a^3 + 2a^2$;

p) $27r^4 - r$;

q) $2a^2x^4 + 16a^2x$;

r) $(a + b)^3 - (a - b)^3$;

s) $x^4 + x^3 + x + 1$;

t) $m^5 + m^3 - m^2 - 1$;

u) $y^3 - 3y^2 + 4$
[návod: $4 = 3 + 1$].

***53.** a) $a^3 + 3a^2 + 4a + 2$
[návod: $a^3 + 3a^2 + 4a + 2 = (a^3 + 2a^2 + 2a) + (a^2 + 2a + 2)$];

b) $2b^4 + b^3 + 4b^2 + b + 2$
[návod: $2b^4 + b^3 + 4b^2 + b + 2 = (b^3 + b) + (2b^4 + 4b^2 + 2)$].

54. Rozložte v součin trojčlen $x^2 + 10x + 24$.

Řešení A

$$x^2 + 10x + 24 = x^2 + 4x + 6x + 24 = x(x + 4) + 6(x + 4) =$$
$$= (x + 4)(x + 6).$$

Řešení B

Předpokládejme, že lze provést rozklad uvedeného trojčlenu takto: $x^2 + 10x + 24 = (x + a)(x + b)$, kde a, b jsou celá čísla. Jelikož $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$, je zřejmé, že hledáme taková dvě celá čísla a, b, aby platilo $a + b = 10$, $ab = 24$.

Přihlédneme-li k součinu těchto čísel, pak tu připadají v úvahu jen tyto dvojice: $(24; 1)$, $(12; 2)$, $(8; 3)$, $(6; 4)$, $(-24; -1)$, $(-12; -2)$, $(-8; -3)$, $(-6; -4)$. Součet 10 však má jedině dvojice $(6; 4)$. Je tedy $a = 6$, $b = 4$. Závěr: $x^2 + 10x + 24 = (x + 6)(x + 4)$.

55. Rozložte kvadratické trojčleny v součin lineárních dvojčlenů:

a) $x^2 - 10x + 24$; b) $x^2 + 3x - 10$; c) $x^2 + x - 6$;
d) $x^2 - x - 6$; e) $x^2 - x - 110$; f) $x^2 + 18x + 81$;
g) $x^2 + 24x + 143$; h) $x^2 + 2x - 143$; i) $x^2 - 2x - 143$;
j) $x^2 + 17x + 72$; k) $x^2 - x - 72$; l) $x^2 + 27x + 72$;
m) $x^2 - 21x - 72$; n) $x^2 - 8x - 48$; o) $x^2 + 15x + 36$.

Abyste se přesvědčili, že rozklad je správný, proveďte násobení dvojčlenů, které rozklad obsahuje.

56. Rozložte v součin trojčleny:

a) $x^3 + x^2 - 42x$; b) $x^4 - 9x^3 - 10x^2$; c) $x^5 + x^4 - 56x^3$;
d) $x^4 + 2x^2 - 3$; e) $x^4 + 11x^2 + 24$; f) $y^4 - 13y^2 + 40$;
g) $a^5 + 3a^3 - 4a$; h) $4x^2 - 8x + 3$
[návod: $4x^2 - 8x + 3 = (2x)^2 - 4 . (2x) + 3$];
i) $9a^2 - 9a + 2$; j) $4b^2 - 14b + 10$.

57. a) $3a^2 + 5a - 2$
[návod: $5a = 6a - a$];
b) $2y^2 + 3y + 1$
[návod: $3y = 2y + y$];
c) $6x^4 - 13x^2 + 6$
[návod: $-13x^2 = -4x^2 - 9x^2$];
d) $4a^2 - 3a - 1$; e) $2y^4 + y^2 - 1$; f) $6p^2 + p - 1$;
g) $6a^2 - 7a - 5$; h) $10x^2 - 13x - 3$.

***58.** a) $x^2 + (a - 3)x + 2(1 - a)$;
b) $x^2 - (a + 2)x + (1 + a)$.

$\boxed{\textbf{59.}}$ Rozložte v součin činitelů výraz

$$V = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3.$$

Řešení

Rozložme nejprve v součin výraz $U = (x - y)^3 + (y - z)^3$.

$$U = (x - y + y - z) . [(x - y)^2 - (x - y)(y - z) + (y - z)^2] =$$
$$= (x - z)(x^2 - 2xy + y^2 - xy + y^2 + xz - yz + y^2 - 2yz + z^2) =$$
$$= (x - z)(x^2 + 3y^2 + z^2 - 3xy + xz - 3yz).$$

Potom

$$V = U + (z - x)^3 = U - (x - z)^3 = U - (x - z)(x - z)^2 =$$
$$= (x - z)(x^2 + 3y^2 + z^2 - 3xy + xz - 3yz - x^2 + 2xz - z^2) =$$
$$= (x - z)(3y^2 - 3xy + 3xz - 3yz) =$$
$$= 3(x - z) . [y(y - x) - z(y - x)] = 3(x - z)(y - x)(y - z) =$$
$$= 3(x - y)(y - z)(z - x).$$

Závěr: $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$.

***60.** Rozložte v součin činitelů výraz:

a) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$;

b) $(x^2 + y^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 - (y^2 + z^2)^3$;
c) $[(a^2 + b^2)(p^2 + q^2) + 4abpq]^2 - 4[pq(a^2 + b^2) + ab(p^2 + q^2)]^2$.
[Návod: Užijte k rozkladu vzorce $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.]

61. Dokažte, že pro všechna čísla a, b, c platí:
$bc(c - b) + ac(a - c) + ab(b - a) = (a - b)(b - c)(c - a)$.

***62.** Rozložte v součin činitelů výraz
$V = a^3(b - c)^3 + b^3(c - a)^3 + c^3(a - b)^3$.

***63.** Dokažte, že pro všechna čísla a, b, c, x, y, z platí:
$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (ax + by + cz)^2 =$
$= (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$.

$\boxed{\textbf{64.}}$ Platí-li o číslech a, b, c vztah $a + b + c = 0$, platí též vztah $a^3 + b^3 + c^3 =$
$= 3abc$. Dokažte to.

Řešení

$(a + b + c)^3 = [(a + b) + c]^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 +$
$+ 3c(a + b)^2 + 3c^2(a + b) + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) +$
$+ 3c(a + b)^2 + 3c^2(a + b) =$
$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(ab + ac + bc + c^2) = a^3 + b^3 + c^3 +$
$+ 3(a + b)[a(b + c) + c(b + c)] = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b +$
$+ c)(c + a)$. Jelikož platí vztah $a + b + c = 0$, je $a + b = -c$,
$a + c = -b$, $b + c = -a$.
Zřejmě platí též $0 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, odkud je
$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc\,.$$
Závěr: Je-li $a + b + c = 0$, platí o číslech a, b, c vztah $a^3 + b^3 + c^3 =$
$= 3abc$.

65. Dokažte, že pro všechna čísla a, b, c je hodnota výrazu
$V = a^2 + b^2 + c^2 - 2(a + b + c) + 3$ nezáporné číslo.
[Návod: Upravte výraz V na tvar: $V = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2$.]

***66.** Je dán výraz $V = (x + y)^2(x - y) + (y + z)^2(y - z) + (z + x)^2(z - x)$.
Rozložte ho v součin a zdůvodněte, že výraz $V \neq 0$ tehdy, jsou-li čísla
x, y, z navzájem různá.

67. Najděte všechny dělitele výrazů:
a) $6a$; b) $5pq$; c) $2a^2b$; d) $x^2 - xy$; e) $a^3 + 2a^2 + a$; f) $81x^4 - 16y^4$.

68. Určete největší společný dělitel výrazů:
a) $2a^5b^3x^2$; $8a^4b^4x^2y^2$; b) $a^2 + 2a + 1$; $a^2 - 1$;
c) $a^3b + 3a^2b$; $a^2b - 9b$; d) $p^4 - 1$; $p^3 - p^2 + p - 1$;
e) $m^2 - n^2$; $(m - n)^2$; $m^2 - mn$; f) $a^2 + 3a$; $a^2 - 9$; $(a^2 - 5a)(a + 3)$;
g) $(b + 5)^2$; $b^2 - 25$; $b^2 + 5b - 3bx - 15x$;
h) $a^3 + 2a^2b - ab^2 - 2b^3$; $a^3 - 2a^2b - ab^2 + 2b^3$;
i) $8a^3 - 1$; $6a - 3$; $2a^2 + a - 1$;

j) $u^3 + v^3$; $u^4 + u^2v^2 + v^4$
[návod: $u^2v^2 = 2u^2v^2 - u^2v^2$];
k) $q^3 + 1$; $q^4 + q^2 + 1$; $q^4 \quad q^3 + q - 1$
[návod: $q^2 = 2q^2 - q^2$];
l) $x^2 - 4x + 3$; $x^2 - 2x - 3$;
m) $a^2 - a - 2$; $a^2 - 4$; $a^2 - 5a + 6$;
n) $y^2 - 11y + 28$; $y^2 - 2y - 8$; $y^2 - 3y - 4$.
Úlohy a) – g) řešte zpaměti.

69. Určete nejmenší společný násobek výrazů [a)—d) zpaměti]:
a) $a^5b^3x^4$; $a^5b^4x^5$;
b) $abx + ab$; $ax^2 - a$; $bx - b$;
c) $y^2 - y$; $y^3 + y^2$; $(y - 1)^2$; $(y^2 - 1)^2$;
d) $p^2 - 2pq$; $p^2 - q^2$; $px + qx$;
e) $ac + ad + bd + bc$; $ac - ad - bc + bd$; $ac - ad + bc - bd$;
*f) $r^2 - 4rs - 12s^2$; $r^2 - rs - 6s^2$;
g) $4 - x^2$; $8 - x^3$;
h) $a + 1$; $a^3 + 1$; $a^4 - 1$;
i) $x^2 + 3x + 2$; $x^2 - 2x - 3$;
j) $x^2 - 10x + 16$; $x^3 - 10x^2 + 16x$; $x^2 - 5x - 24$.

70. Určete největší společný dělitel a nejmenší společný násobek výrazů:
a) $x^2 - y^2$; $x^4 - y^4$; $x^6 - y^6$;
b) $x^3 + x^2 + x + 1$; $x^2 - 1$;
c) $a(2a + 3b) - 3b(2a + 3b)$; $4a^2 + 12ab + 9b^2$;
d) $2x^3 - 2xy^2 + x^2 + xy$; $4x^4 + 4xy^3$;
e) $a^3 + 4a^2b + 4ab^2$; $a^3 - 4ab^2$; $3a^3 + 6a^2b$;
f) $4x^3y^2 - 8x^2y^3$; $2x^3y - 8x^2y^2 + 8xy^3$; $2x^4y - 16xy^4$;
g) $m + 1$; $m^2 - 1$; $m^2 - 2m + 1$;
h) $3x^2 + 3x$; $5x^2 - 5x$; $10x^2 + 10x$;
i) $x^5 + x^3$; $x^5 + x$; $x^5 - x$;
j) $x^3 + y^3$; $x^3 - x^2y + xy^2$; $x^3 + x^2y$;
k) $ac + bc + ad + bd$; $ae + be + af + bf$; $ce + de + cf + df$;
l) $x^2 + 4x - 45$; $2x^2 - 9x - 5$;
m) $x^2 - 4$; $x^2 + x - 2$; $x^2 + 3x + 2$.

71. Určete největší společný dělitel a nejmenší společný násobek mnohočlenů $M = (x^2 - y^2)(x^3 - x^2 - x - 2)$, $N = (x - y)(x^4 - 3x^2 - 4)$.

***72.** Napište dva mnohočleny třetího stupně v proměnné z, je-li jejich největší společný dělitel $D = z^2 + 2z - 3$ a nejmenší společný násobek $n = z^4 - 10z^2 + 9$.

73. Určete dvojím způsobem podíl následujících výrazů (pomocí rozkladu dělence v součin i dělením mnohočlenu mnohočlenem):
a) $(m^2 - 2m - 15) : (m - 5)$, $m \neq 5$;

b) $(z^2 + 7z + 12) : (z + 4)$, $z \neq -4$;

c) $(2x^2 + 5x - 12) : (2x - 3)$, $x \neq \dfrac{3}{2}$;

d) $(xy - 7x + 2y - 14) : (x + 2)$, $x \neq -2$;

e) $(15 - 9a + 5a^2 - 3a^3) : (5 - 3a)$, $a \neq \dfrac{5}{3}$;

f) $(6n^2 + 5n - 6) : (2n + 3)$, $n \neq -\dfrac{3}{2}$.

74. Rozkladem dělence i dělitele v součin určete podíl výrazů:

a) $(9a^4 - 13a^2 + 4) : (3a^2 + 5a + 2)$, $a \neq -1$, $a \neq -\dfrac{2}{3}$;

b) $(m^5 - m^4n + m^3n^2 - m^2n^3) : (m^3 + mn^2)$, $m \neq 0$.

***75.** Určete u tak, aby podíl těchto výrazů měl nulový zbytek:

a) $(a^3 + u) : (a + 4)$, $a \neq -4$;

b) $(x^3 + 9x^2 + 19x + u) : (x - 3)$, $x \neq 3$;

c) $(z^3 + 9z^2 + 18z + u) : (z - 4)$, $z \neq 4$.

76. Dělte výrazy $x^4 - 1$, $x^5 - 1$, $x^6 - 1$ výrazem $(x - 1)$, $x \neq 1$. Ze srovnání vzniklých podílů usuďte, jaký podíl dostanete, provedete-li dělení $(x^n - 1) : (x - 1)$, kde n je libovolné přirozené číslo.

77. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí:
$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x^2 + x + 1)$.
[Návod: Proveďte naznačené násobení na pravé straně uvedené rovnice.]

78. Dokažte, že platí:
$x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - x^{n-4} + \ldots + 1)$, je-li n číslo liché. Dokažte též pro $n = 3$ a $n = 5$.

79. Dokažte, že výraz $x^5 - 10x^4 + 10x - 1$ je dělitelný výrazem $(x - 1)$.

80. Dokažte, že výraz $x^n - ax^{n-1} + ax - 1$ je dělitelný výrazem $(x - 1)$, pro všechna přirozená čísla $n > 1$.

3. ZLOMKY

81. Rotor elektromotoru se otočí za t vteřin n-krát. Kolikrát se otočí za hodinu?

***82.** Vlak dlouhý x metrů jede po mostě dlouhém y metrů rychlostí c metrů za minutu. Kolik minut uplyne mezi okamžikem, kdy vjede lokomotiva na most, a okamžikem, kdy poslední vagón most opustí? Načrtněte si obrázek.

***83.** Ze dvou druhů zboží byla vyrobena směs. Prvého druhu bylo vzato h kg, druhého k kg. Jakou cenu měl 1 kg směsi, jestliže 1 kg zboží prvého druhu stál x Kčs, kdežto 1 kg zboží druhého byl o y Kčs levnější?

***84.** Traktorista oral v katastru jedné farmy x dní po deseti hodinách a y dní po osmi hodinách. Jestliže zoral takto m hektarů polí, kolik hektarů zoral průměrně za jednu hodinu? Proveďte též pro $m = 50, x = 6, y = 5$.

85. Dvě ozubená kola zapadají do sebe. Prvé kolo má y zubů, druhé $(y + 30)$ zubů. Kolikrát se otočí prvé kolo, otočí-li se druhé n-krát?
Proveďte též pro $n = 42, y = 35$.

86. Určete hodnotu zlomku $\frac{x + y}{x - y}$ pro a) $x = 4\frac{3}{4}, y = 5\frac{5}{8}$; b) $x = 3\frac{5}{6}$, $y = \frac{3}{8}$.

87. Určete hodnotu zlomku $\frac{a^2 - 4}{a + 2}$ pro a) $a = 0{,}6$; b) $a = 0{,}5$;
c) $a = -4$.

88. Určete hodnotu zlomku $\frac{a^2 - 4}{c(a + 2) - (a + 2)}$ pro $a = 3, c = -\frac{3}{4}$.

89. Pro která čísla x mají smysl zlomky:

a) $\frac{1 - x}{x}$; b) $\frac{1}{1 - x}$; c) $\frac{x + y}{x - y}$; d) $\frac{2}{x^2 - 2x}$; e) $\frac{2x + 1}{x^2 + 4x + 4}$;

f) $\frac{x}{x^2 + 5x + 6}$; g) $\frac{2x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$; h) $\frac{x^2 + 1}{x^2 + (m - n)x - mn}$.

90. Odůvodněte správnost úprav (zpaměti):

a) $\frac{a - 2}{b - 4} = \frac{2 - a}{4 - b} = -\frac{a - 2}{4 - b} = -\frac{2 - a}{b - 4}, b \neq 4$;

b) $\frac{a}{(x - a)(x - b)} = \frac{a}{(a - x)(b - x)} = -\frac{a}{(a - x)(x - b)} =$

$= \frac{-a}{(x - a)(b - x)}, \ x \neq a, x \neq b$.

91. Rozšiřte zlomky $\frac{a + b}{ab}, \frac{a - b}{ab}, \frac{a^2 + ab + b^2}{ab}$ číslem $(a - b)$.

Pro která čísla a, b budou mít zlomky smysl?

92. Rozšiřte zlomky $\frac{1}{p}, \frac{1}{p + 1}, \frac{1}{p - 1}, \frac{p^2 - p + 1}{p + 1}, \frac{(p + 1)^2}{p}$,

$\frac{(p^2+1)(p-1)}{p+1}$ číslem $(p+1)$. Pro která čísla p budou mít zlomky smysl?

93. Napište výrazy x, x^2-1, x^2+1 jako zlomky se jmenovatelem (x^2+1). Pro která čísla x mají tyto zlomky smysl?

94. Které číslo je nutno dosadit za x, má-li mít zlomek $\frac{x}{20}$ hodnotu $\frac{3}{4}$? Je tu možno využít pravidla o rozšiřování zlomků?

95. Srovnejte sestupně podle velikosti zlomky $\frac{n}{2}, \frac{2n}{5}, \frac{3n}{8}, \frac{7n}{10}, \frac{19n}{20}$, je-li

a) $n > 0$; b) $n < 0$.

96. Srovnejte vzestupně podle velikosti zlomky $\frac{1}{r}, \frac{3}{2r}, \frac{4}{3r}, \frac{5}{6r}, \frac{1}{5r}$, je-li

a) $r > 0$; b) $r < 0$.

97. Je dán zlomek $z = \frac{a^3-2a^2-a+2}{a^3+2a^2-a-2}$. a) Rozhodněte, pro která čísla a má zlomek smysl. b) Pro která čísla a má zlomek z hodnotu rovnou nule? c) Zdůvodněte, že zlomek z má hodnotu kladnou pro všechna čísla $a > 2$.

Řešení

a) $a^3+2a^2-a-2 = a^2(a+2)-(a+2) = (a+2)(a^2-1) =$
$= (a+2)(a+1)(a-1)$.

Z rozkladu je patrno, že zlomek z má smysl pro všechna čísla $a \neq -2$, $a \neq -1$, $a \neq 1$.

$$z = \frac{a^3-2a^2-a+2}{(a+2)(a+1)(a-1)} = \frac{a^2(a-2)-(a-2)}{(a+2)(a+1)(a-1)} =$$
$$= \frac{(a-2)(a^2-1)}{(a+2)(a^2-1)} = \frac{a-2}{a+2}.$$

b) Zlomek má hodnotu rovnou nule, jestliže při nenulovém jmenovateli je jeho čitatel rovný nule. Tato podmínka je v našem případě splněna jen pro číslo $a = 2$.

c) Pro všechna čísla $a > 2$ má čitatel i jmenovatel zlomku z hodnotu kladnou.

Závěr: Zlomek z má smysl pro všechny hodnoty $a \neq -2$, $a \neq -1$ $a \neq 1$; po zkrácení má tvar $z = \frac{a-2}{a+2}$. Nulové hodnoty nabývá jen pro číslo $a = 2$; pro čísla $a > 2$ má hodnotu kladnou.

98. Zkraťte následující zlomky za předpokladu, že jejich jmenovatele nemají nulovou hodnotu [a) — c) zpaměti]:

a) $\dfrac{72abx}{84aby}$; b) $\dfrac{a^2 - ab}{ab - b^2}$; c) $\dfrac{y + 1}{n + ny}$; d) $\dfrac{x^2 - 1}{xs - s}$; e) $\dfrac{p^2 - 2pq + q^2}{p^2 - q^2}$;

f) $\dfrac{4a^2 - 1}{4a^2 - 4a + 1}$; g) $\dfrac{9z^2 - 12z + 4}{3z - 2}$; h) $\dfrac{16 - 8a + a^2}{ab - 4b}$;

i) $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{a^2 + 2ac + c^2 - b^2}$; j) $\dfrac{p^2 - 4}{pq + 2q - p - 2}$;

k) $\dfrac{ab + 2b - ac - 2c}{ab - 2b - ac + 2c}$; l) $\dfrac{xy - y - x^2 + x}{xy + y - x^2 - x}$; m) $\dfrac{3uv + 9v - 2u - 6}{3uv - 2u - 9v + 6}$;

n) $\dfrac{a^2 + 2a - 15}{3a + 15}$; o) $\dfrac{r^2 - 4}{r^2 + 5r + 6}$; p) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6}$;

q) $\dfrac{a^2 - a - 20}{a^2 + a - 30}$; *r) $\dfrac{3x^2 + x - 10}{4x^2 + x - 14}$; s) $\dfrac{a^3 - 1}{a^2 - 1}$; t) $\dfrac{x^3 + x^2y + xy^2}{x^3y - y^4}$.

99. Dokažte správnost vztahu:

a) $\dfrac{ac + bx + ax + bc}{ay + 2bx + 2ax + by} = \dfrac{x + c}{2x + y}, \; a + b \neq 0, \; 2x + y \neq 0;$

b) $\dfrac{x - xy + z - zy}{1 - 3y + 3y^2 - y^3} = \dfrac{x + z}{(1 - y)^2}, \; y \neq 1 .$

***100.** Dokažte, že platí

$$\frac{3a^3 + ab^2 - 6a^2b - 2b^3}{9a^5 - ab^4 - 18a^4b + 2b^5} = \frac{1}{3a^2 - b^2}, \quad \begin{array}{l} a - 2b \neq 0, \\ 3a^2 + b^2 \neq 0, \\ 3a^2 - b^2 \neq 0. \end{array}$$

101. Uveďte zlomek $\dfrac{a + 1}{(a + 1)^2}$ na zlomek o jmenovateli $(a^2 - 1)$.

102. Uveďte zlomek $\dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$ na zlomek o jmenovateli $(x + 1)^3$.

***103.** Je dán zlomek $z = \dfrac{x^2 + 2ax + a^2 - 16}{ax - 4x + a^2 - 16}$.

Vyšetřete, kdy tento zlomek nemá smysl a potom zlomek zkraťte.

104. Proveďte:

a) $\dfrac{3a + 2}{2} - \dfrac{a + 6}{2} + 5$;

b) $\dfrac{d-1}{2}+\dfrac{3d-1}{4}-\dfrac{5d-1}{6}$;

c) $\dfrac{(x+y)^2}{6}+\dfrac{(x-y)^2}{12}-\dfrac{x^2+y^2}{4}$.

105. Proveďte a potom udejte podmínky, za kterých mají dané výrazy smysl.

a) $\dfrac{2m-n}{m-n}+\dfrac{m}{n-m}$; b) $\dfrac{x-y}{xy}-\dfrac{z-y}{yz}+\dfrac{x+z}{xz}$;

c) $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1-a}{a^2}+\dfrac{1-a^2}{a^3}-\dfrac{1-a^3}{a^4}+\dfrac{1-a^4}{a^5}$;

d) $\dfrac{u^2+1}{u+1}-u$; e) $\dfrac{4mn}{m-n}+(m-n)$; f) $1-\dfrac{2p}{q}+\dfrac{p^2}{q^2}-\dfrac{(q-p)^2}{q^2}$;

g) $\dfrac{2p+q}{p^2+pq}+\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+q}$; h) $\dfrac{a-2b}{a+b}-\dfrac{2a-b}{b-a}-\dfrac{2a^2}{a^2-b^2}$;

i) $\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}-\dfrac{x(4-x)}{1-x^2}$;

j) $\dfrac{2p-3q}{2p+3q}-\dfrac{2p+3q}{2p-3q}+\dfrac{2(4p^2+9q^2)}{4p^2-9q^2}$;

k) $\dfrac{7v-1}{2v^2+6v}+\dfrac{5-3v}{v^2-9}$; l) $\dfrac{4}{3m-3n}-\dfrac{3m-4n}{2m^2-4mn+2n^2}$;

m) $\dfrac{2a-1}{2a}-\dfrac{2a}{2a-1}-\dfrac{1}{2a-4a^2}$.

106. Proveďte: $\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{a-1}{a+1}-\dfrac{4a}{a^2-1}-1$. Pro které hodnoty čísla a nemá tento výraz smysl? Jakou hodnotu má pro $a=0$?

107. Proveďte: $a+1+\dfrac{a-1}{a^2-a+1}$. Ukažte, že výraz má smysl pro všechna čísla a.

[Návod: $a^2-a+1=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$.]

108. Proveďte: $\dfrac{1}{x^2-2x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+2x+1}$. Jakou hodnotu má tento výraz pro a) $x=2$; b) $x=-2$?
Pro které hodnoty x nemá výraz smysl?

109. Proveďte: $\dfrac{1}{x^2 - 3x - 10} + \dfrac{1}{x^2 + x - 2} - \dfrac{2}{x^2 - 6x + 5}$.

Udejte všechna čísla x, pro která nemá výraz smysl.

110. Oč je větší výraz $x + \dfrac{1}{x}$ než výraz $\dfrac{x+1}{x}$ pro $x \geqq 1$? Ověřte si výsledek pro $x = 1, x = \dfrac{3}{2}, x = 3$.

***111.** Dokažte, že platí:

$$\frac{1}{a(a-c)(a-b)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc}\,, \text{ jestliže}$$

$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, a \neq b, b \neq c, c \neq a$.

***112.** Dokažte, že platí:

a) $\dfrac{1}{(a-b)(b-c)} - \dfrac{1}{(b-c)(a-c)} - \dfrac{1}{(c-a)(b-a)} = 0$,

jestliže $a \neq b, b \neq c, c \neq a$;

b) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{1}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$,

$a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a$;

c) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$,

$a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a$;

d) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1$,

$a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a$.

113. Trať kanoistického závodu je dlouhá d km a závodníci ji musí projet jednou po proudu a podruhé proti proudu. Je-li rychlost kánoe v klidné vodě v_1 km/h a rychlost proudu v_2 km/h, za jakou dobu projede závodník trati oběma směry? Byl by závodník dřív či později u cíle, kdyby jel stejně dlouhý závod se stejným výkonem v klidné vodě? Jaký by byl časový rozdíl?

Řešení

Rychlost kánoe po proudu je $(v_1 + v_2)$ km/h, proti proudu $(v_1 - v_2)$ km/h, přičemž se předpokládá, že $v_1 > v_2$, aby úloha měla řešení.

Dráhu d projede závodník po proudu za dobu $t_1 = \dfrac{d}{v_1 + v_2}$, proti proudu za dobu $t_2 = \dfrac{d}{v_1 - v_2}$ (t_1, t_2 v hodinách).

Dráhu d v obou směrech projede tedy za dobu $t = \dfrac{d}{v_1 + v_2} + \dfrac{d}{v_1 - v_2} =$
$$= \frac{d(v_1 - v_2 + v_1 + v_2)}{v_1^2 - v_2^2} = \frac{2dv_1}{v_1^2 - v_2^2}.$$

Je zřejmé, že v klidné vodě by projel závodník dráhu d oběma směry za dobu $t' = \dfrac{2d}{v_1}$.

Srovnáme-li zlomky $\dfrac{2dv_1}{v_1^2 - v_2^2}$, $\dfrac{2d}{v_1} = \dfrac{2dv_1}{v_1^2}$, pozorujeme, že mají stejného čitatele; větší je ten, který má menšího jmenovatele.

Platí tedy nerovnost $\dfrac{2dv_1}{v_1^2 - v_2^2} > \dfrac{2dv_1}{v_1^2}$, která ukazuje, že by závodník byl dříve u cíle, kdyby projížděl tratí d v obou směrech v klidné vodě.

Zbývá ještě určit časový rozdíl. Tento rozdíl udává výraz
$$t_3 = t - t' = \frac{2dv_1}{v_1^2 - v_2^2} - \frac{2dv_1}{v_1^2} = \frac{2dv_1(v_1^2 - v_1^2 + v_2^2)}{v_1^2(v_1^2 - v_2^2)} =$$
$$= \frac{2dv_1v_2^2}{v_1^2(v_1^2 - v_2^2)} = \frac{2dv_2^2}{v_1(v_1^2 - v_2^2)}.$$

Závěr: Závodník projede tratí d oběma směry za dobu $t = \dfrac{2dv_1}{v_1^2 - v_2^2}$ h.
Kdyby projížděl tuto trať v obou směrech v klidné vodě,
potřeboval by k tomu čas $t' = \dfrac{2d}{v_1}$ h, přičemž $t' < t$.
Časový rozdíl je $t_3 = \dfrac{2dv_2}{v_1(v_1^2 - v_2^2)}$ h.

114. V prvém pavilónu továrny pracuje n dělníků, v druhém m dělníků a ve třetím s dělníků. Čtvrtina dělníků z prvého pavilónu, třetina z druhého a polovina z třetího jsou ženy. Kolik pracuje v továrně žen a kolik mužů?

115. Do prvého patra, které je ve výši a metrů, má být vedeno n schodů. O kolik by se musila zmenšit výška každého schodu, kdyby počet schodů vzrostl o tři?

116. Na stavbu vodní přehrady vyjelo n brigádníků, z nichž každý se zavázal, že odpracuje t hodin. Jeden brigádník však po cestě onemocněl a musil se vrátit; ostatní převzali jeho závazek na sebe. Na kolik hodin zvýšil každý ze zbývajících brigádníků svůj závazek?

117. Jestliže čísla x, y, z jsou navzájem různá, potom platí:

a) $\dfrac{xy}{(z-x)(z-y)} + \dfrac{xz}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{yz}{(x-y)(x-z)} = 1;$

b) $\dfrac{x+y}{(y-z)(z-x)} + \dfrac{y+z}{(z-x)(x-y)} + \dfrac{x+z}{(x-y)(y-z)} = 0.$ Dokažte to.

118. Dokažte, že hodnota výrazu $V = \dfrac{(a-1)^2}{(a-b)\,(a-c)} + \dfrac{(b-1)^2}{(b-a)\,(b-c)} + \dfrac{(c-1)^2}{(c-a)\,(c-b)}$ je kladné číslo, ať za a, b dosazujeme libovolná čísla, pro něž má výraz V smysl. Jaké vztahy musí platit o číslech a, b, c, aby výraz V měl smysl?

119. Zjednodušte výraz $V = \dfrac{2b(a-1)}{(a-2)(b^2-1)} - \dfrac{a+b}{ab+a-2b-2} - \dfrac{a-b}{ab-a-2b+2}$ a ukažte, že je roven nule. Pro která čísla a, b má daný výraz smysl?

120. Za předpokladu, že uvedené výrazy mají smysl, proveďte:

a) $\dfrac{6x^3b^3}{25y^4}\cdot\left(-\dfrac{15y}{b^2}\right);$ b) $\dfrac{9x}{a^3}\cdot\left(-\dfrac{y}{32b^2}\right)\left(-\dfrac{4a}{27xy}\right)\cdot 24a^2b^3;$

c) $\dfrac{2v^2+8v+8}{v-2}\cdot\dfrac{(v-2)^2}{4(v+2)};$ d) $\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\cdot\dfrac{a^2}{a-b};$

e) $\left(\dfrac{m+1}{m+2}-\dfrac{m-1}{m-2}\right)\cdot\dfrac{m^2-4}{2m};$ f) $\left(\dfrac{1}{z+1}-\dfrac{2z}{z^2-1}\right)\left(\dfrac{1}{z}-1\right);$

g) $\left(\dfrac{3}{1+s}-1\right)\left(\dfrac{3}{2-s}-1\right);$ h) $\left(a-\dfrac{a}{a+1}\right)\left(1-\dfrac{1}{a^2}\right);$

i) $\left(y+1+\dfrac{1}{2y-1}\right)\left(y-1+\dfrac{1}{2y+1}\right);$

j) $\left(\dfrac{p-1}{p-2}-\dfrac{p}{p-1}\right)\left(p-\dfrac{p}{p+1}\right)(p^2-1);$

k) $\left[\dfrac{3}{(x-3)^3}+\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x^2-9}\right]\cdot\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+9};$

l) $\left(\frac{x^2}{x-y} - x\right)\left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{y}{x}\right)$.

121. Proveďte a uveďte podmínky, při kterých mají uvedené výrazy smysl:

a) $\frac{4a^2b}{9pq^2} : \frac{2ab^2}{3p^2q}$;

b) $\left(\frac{18a^2}{b^3} \cdot \frac{c}{2a^3}\right) : \left(-\frac{3a}{b^2c}\right)$;

c) $\frac{a^2 + ax}{x - x^2} : \frac{x^2 + ax}{a - ax}$;

d) $\left(1 + \frac{m}{1-m}\right) : \frac{1+m}{1-m}$;

e) $\left(\frac{2x^2 - 4x + 2}{x^2 + 1} : \frac{6x - 6}{x^4 - 1}\right) : \frac{x+1}{3}$;

f) $\left(p + q - \frac{4pq}{p+q}\right) : \frac{1}{p^2 - q^2}$;

g) $\left(v + \frac{u - v}{1 + uv}\right) : \left[1 - \frac{v(u-v)}{1+uv}\right]$;

*h) $\frac{r^4 - s^4}{r^2s^2} : \left[\left(1 + \frac{s^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2r}{s} + \frac{r^2}{s^2}\right)\right]$;

i) $\left(1 + \frac{a^3}{b^3}\right) : \left(1 + \frac{a}{b}\right)$; j) $(c^3 - d^3) : \left(c + \frac{d^2}{c+d}\right)$.

***122.** Proveďte:

$$6a + \left(\frac{a}{a-2} - \frac{a}{a+2}\right) : \frac{4a}{a^4 - 2a^3 + 8a - 16}.$$

Pro která čísla a má daný výraz smysl?

123. Upravte a rozhodněte, v kterých případech nemají uvedené výrazy smysl:

a) $\frac{m - \frac{4}{m}}{m+2}$;

b) $\frac{5+p}{5 - \frac{p^2}{5}}$;

c) $\frac{\frac{a+b}{a-b} - 1}{\frac{a+b}{a-b} + 1}$;

d) $\frac{\frac{x}{4} - \frac{x-1}{5}}{\frac{x+1}{6} - \frac{x-1}{10}}$;

e) $\frac{\frac{r+s}{r-s} - \frac{r-s}{r+s}}{1 - \frac{r^2+s^2}{r^2-s^2}}$;

f) $\frac{2 - \frac{k^2 + z^2}{kz}}{\frac{k}{z^2} - \frac{2}{z} + \frac{1}{k}}$;

g) $\dfrac{\dfrac{a^2}{b^2} - \dfrac{a}{b}}{\dfrac{a^2 + b^2}{ab} - 2} : \dfrac{a^2}{b}$; h) $\dfrac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{b^2}{a^2}}{1 - \dfrac{b}{a}} \cdot (a^2 - ab + b^2)$;

*i) $\dfrac{\dfrac{a^4 - b^4}{a^2b^2}}{\left(1 + \dfrac{b^2}{a^2}\right)\left(1 - \dfrac{2a}{b} + \dfrac{a^2}{b^2}\right)}$; *j) $\dfrac{\dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{x^2}{y} + x + y}{\dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{y^2}{x^2}}$.

124. Proveďte za předpokladu, že uvedené výrazy mají smysl:

a) $\left(\dfrac{2x}{3a}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{9a}{x}\right)^2$; b) $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^3 : \left(-\dfrac{b}{a}\right)^6$;

c) $\dfrac{(a^4)^2 \,.\, (b^2)^3}{(a^2)^4 \,.\, a^2} \cdot \left(\dfrac{a}{b^3}\right)^2$; d) $2\left[\left(-\dfrac{x}{y}\right)^2 \cdot \dfrac{y}{x}\right]^3 : \left(\dfrac{y}{x}\right)^4$;

e) $\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{a^2}{2x}\right)^2 \cdot \dfrac{3x^2}{(a^2)^3}$; f) $\left[\left(\dfrac{r}{s}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{s}{r}\right)^3 \cdot \dfrac{r^2}{s^2} \cdot \left(-\dfrac{2r}{s}\right)\right]^2$;

g) $\dfrac{\left(\dfrac{u}{v}\right)^2 - 1}{\left(\dfrac{1}{v}\right)^2}$; h) $\dfrac{\left(\dfrac{b}{c}\right)^3 - 1}{\left(\dfrac{1}{c}\right)^3} + (-b)^3$;

i) $\left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - \dfrac{x}{y^2}\right] : \left(\dfrac{x-1}{y}\right)^2$; j) $\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 + 2\right] \cdot \left(\dfrac{ab}{2}\right)^2$.

125. Proveďte: $\left[\left(\dfrac{n+2}{n-2}\right)^3 : \dfrac{n^3 + 4n^2 + 4n}{3n^2 - 12n + 12}\right] \cdot \dfrac{n}{3}$.

Pro která čísla n nemá výraz smysl?

126. Jsou dány výrazy:

$$U = \frac{\dfrac{1}{p-3} - \dfrac{1}{p+3}}{\dfrac{1}{p-3} + \dfrac{1}{p+3}} - \frac{p+3}{p}, \quad V = \frac{\dfrac{1}{p^2-9} - \dfrac{1}{p^2+9}}{\dfrac{1}{p^2-9} + \dfrac{1}{p^2+9}} - \frac{p^2+9}{p^2}.$$

Rozhodněte, pro která čísla p nemají výrazy U, V smysl a přesvědčte se, že $U = V$.

127. Jeden stroj utká v metrů látky za t_1 hodin, druhý stroj utká totéž množství látky za t_2 hodin. Kolik metrů látky utkají oba stroje za t hodin?

***128.** Auto jede z místa A do místa B nejprve d km do kopce rychlostí v_1 km/h, potom u km s kopce rychlostí v_2 km/h. Jakou průměrnou rychlostí jede na celé trati?

***129.** V továrně pracovalo x dělníků. Jednoho dne však přešlo do zemědělství y dělníků. O kolik procent musí zvýšit zbývající dělníci svůj denní výkon, chtějí-li dodržet výrobní plán?

***130.** Z dané zásoby a litrů 70% kyseliny bylo vzato b litrů a nahrazeno stejným množstvím vody. Kolikaprocentní kyselina vznikla? Též pro $a = 10$, $b = 2$.

***131.** Sukno bylo prodáváno v partiovém obchodě se ztrátou $2\frac{1}{2}$ % z výrobní ceny. Kdyby se prodávalo se ziskem $5\frac{1}{4}$ % z výrobní ceny, získalo by se o n Kčs více, než činila výrobní cena. Jaká byla prodejní cena sukna?

132. Dokažte, že součet čísel $(1 + q)$ a $\left(1 + \frac{1}{q}\right)$ se rovná jejich součinu $(q \neq 0)$.

133. Dokažte, že rozdíl čísel $\left(2 + p + \frac{1}{p}\right)$ a $(1 + p)$ se rovná jejich podílu $(p \neq 0, p \neq -1)$.

134. Je-li $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$, je $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{c}{d} = \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \frac{a}{b}$. Dokažte.

$\left[\text{Návod: } \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{c}{d}\right)^2.\right]$

***135.** Určete dva zlomky, jejichž rozdíl se rovná jejich součinu.

136. Ukažte, že platí vztahy:

a) $(a^2 - 1)\left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} - 1\right) = 3 - a^2,\ a \neq 1,\ a \neq -1;$

b) $\left(\frac{1}{1-a} - 1\right) : \left(a - \frac{1-2a^2}{1-a} + 1\right) = \frac{1}{a},\ a \neq 1,\ a \neq 0;$

c) $1 - \dfrac{a}{1 - \dfrac{a}{a+1}} = 1 - a - a^2, a \neq -1.$

***137.** Ukažte, že pro přípustné hodnoty čísel x a y platí vztahy:

a) $\left(\frac{5y}{y+x} + \frac{5x}{y-x} + \frac{10xy}{y^2-x^2}\right)\left(\frac{y}{y+x} + \frac{x}{y-x} - \frac{2xy}{y^2-x^2}\right) = 5;$

b) $\left(\frac{x-y}{x^2+xy} - \frac{x}{y^2+xy}\right) : \left(\frac{y^2}{x^3-xy^2} + \frac{1}{x+y}\right) = \frac{y-x}{y}.$

***138.** Ukažte, že pro přípustné hodnoty čísel a, b platí vztahy:

a) $$\left[\frac{a+b}{2(a-b)} - \frac{a-b}{2(a+b)} - \frac{2b^2}{b^2-a^2}\right]\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \frac{2}{a};$$

b) $$\left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\cdot\frac{1}{a^2+2ab+b^2} + \frac{2}{(a+b)^3}\cdot\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right] : \frac{a-b}{a^3b^3} = \frac{ab}{a-b}.$$

***139.** Ukažte, že platí vztah:

$$\left[\left(\frac{r}{s} - \frac{s}{r}\right) : (r+s) + r\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r}\right)\right] : \frac{1+r}{s} = \frac{r-s}{r}.$$

Které podmínky musí být splněny, aby tento výraz měl smysl?

140. Je dán zlomek $\frac{a}{b}$ v základním tvaru. Dokažte, že také zlomek $\frac{b-a}{b}$ je v základním tvaru, jsou-li čísla a, b přirozená a $b > a$.

Řešení

Předpokládejme, že zlomek $\frac{b-a}{b}$ není v základním tvaru.

Potom je $b - a = kp$, $b = kq$, kde čísla k, p, q jsou přirozená, přičemž $k \neq 1$.

Z uvedených rovnic však plyne vztah $kq - a = kp$, odkud je $a = k(q-p)$.

Zlomek $\frac{a}{b}$ je možno psát ve tvaru $\frac{k(q-p)}{kq}$ a lze ho krátit číslem $k \neq 1$.

Tím jsme ovšem došli ke sporu, neboť zlomek $\frac{a}{b}$ byl dán v základním tvaru. Je tedy předpoklad, že zlomek $\frac{b-a}{b}$ není v základním tvaru, nesprávný a platí opak.

Závěr: Je-li $\frac{a}{b}$ zlomek v základním tvaru, je i zlomek $\frac{b-a}{b}$ v základním tvaru.

141. Je-li zlomek $\frac{a}{b}$ v základním tvaru, jsou i zlomky $\frac{a+b}{a}$, $\frac{a+b}{b}$ v základních tvarech. Dokažte to.

***142.** Dokažte, že součet dvou zlomků v základním tvaru, jejichž jmenovatelé jsou dvě různá čísla, není nikdy celé číslo.

[Návod: Má platit $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = m$, kde m je celé číslo. Odtud plyne, že součet $(ad + cb)$ musí být dělitelný číslem b i d. Je tedy $d = k_1 b$, $b = k_2 d$, $k_1 . k_2 = 1$, $b = d$ proti předpokladu.]

***143.** Je dán výraz $V = \left[\frac{4x}{x^2+4}\left(\frac{2}{x^2-2x} + \frac{x}{2x-4}\right) - \frac{4}{x^2-4}\right] : \frac{x}{x-2}$.

a) Pro která čísla x ztrácí výraz V smysl?

b) Upravte jej a najděte všechna celá čísla x, pro která je výraz V roven celému číslu.

***144.** Je dán výraz $V = \left[\frac{a+b}{2a-2b} - \frac{a-b}{2a+2b} + \frac{2b^2}{a^2-b^2}\right] : \frac{4b}{(a^2+b^2)(a-b)}$.

a) Výraz V zjednodušte a udejte, pro která čísla a, b nemá smysl.

b) Určete všechny dvojice čísel a, b, pro která je $V = 10$.

***145.** Je dán výraz $V = \left[\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right] : \left[\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right]$.

a) Udejte, pro která čísla a, b nemá výraz V smysl, a potom ho zjednodušte.

b) Určete, pro která čísla a, b je $V = 0$, $V > 0$, $V < 0$.

146. Zjednodušte:

a) $\dfrac{a}{1+\dfrac{1}{1+a}}$;

b) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{a}}}}$;

c) $\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a}}}}$;

d) $\dfrac{b-a}{1+\dfrac{1}{b-a+\dfrac{1}{b-a+\dfrac{1}{b-a}}}}$;

e) $\dfrac{a+b}{1-\dfrac{1}{a+b-\dfrac{1}{a+b-\dfrac{1}{a+b}}}}$.

4. LINEÁRNÍ ROVNICE O JEDNÉ NEZNÁMÉ

147. Řešte početně i graficky rovnici:

a) $x - 4 = 0$; b) $3x - 1 = x + 1$; c) $-2x + 5 = x - 1$;

d) $\dfrac{2x+9}{3} = \dfrac{2}{3}x - 1$; e) $\dfrac{x}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}(x+2)$.

148. Řešte:
$$x - 3[x - 5(x - 4)] = 10(x - 3).$$
149. $x - 4[x - 2(x + 6)] = 5x + 3.$

150. $3x - 2[x - 3(x + 1)] + 4[x + 2(x + 1)] = 19x + 14.$

151. $10x - \{6x - 2[3x - 4(1 - x)] - (9x + 8)\} = 27.$

152. $(5x - 4)^2 - (5 - 3x)^2 = (3 - 4x)^2.$

153. $(6y - 1)^2 - (3y + 3)^2 - 2(y^2 - 1) = (5y - 2)^2.$

154. $(2z - 3)^2 + (3z - 4)^2 + (4z - 5)^2 = 29z^2 - 26.$

155. $(z - 3)(z + 2) - (z + 2)(z - 4) = 7.$

156. $(4u - 1)(9u + 10) = (2u - 3)(18u - 1) + 16.$

157. $(2x - 5)(8x - 1) - (4x - 3)^2 = 12(x - 1) - 7.$

158. $(3v - 1)^2 - 5(2v + 1)^2 + 2(6v - 3)(v + 1) = (v - 1)^2 + 3(2v - 1).$

159. $(p + 1)^3 - (p - 1)^3 = 6(p + 2)(p - 1) + 9(p + 1) - 9(p - 1).$

160. $\dfrac{7y - 1}{3} + \dfrac{5 + 3y}{2} = 5y - 6.$

161. $\dfrac{t + 5}{3} - \dfrac{t}{2} = \dfrac{t - 2}{3} - \dfrac{t - 3}{2}.$

162. $v + \dfrac{3 - 7v}{5} = \dfrac{v + 3}{5} - \dfrac{2v - 1}{3}.$

163. $\dfrac{6 + 25x}{15} - (x - 1) = \dfrac{2x}{3} + \dfrac{7}{5}.$

164. $2s - \dfrac{5s - 3}{4} = \dfrac{3s - 5}{4}.$

165. $\dfrac{3 + 2y}{2} - \dfrac{7}{6} = 5y - \dfrac{12y - 1}{3}.$

166. $\dfrac{5x + 1}{6} - \dfrac{7x - 3}{8} = 1 - \dfrac{3x - 1}{4}.$

167. $\dfrac{3 - x}{2} - \left(\dfrac{7 - x}{3} - \dfrac{x + 3}{4}\right) + \dfrac{7 - x}{6} - \dfrac{9 + 7x}{8} + x = 0.$

168. $\dfrac{9(2x - 9)}{13} + \dfrac{x - 4}{5} = \dfrac{7}{5}(3x - 2) - (3x - 5).$

169. $\dfrac{3(p + 1)}{2} - \left(\dfrac{p + 1}{4} + 1\right) = \dfrac{5p + 1}{7} - \left(\dfrac{3p - 1}{2} - 3\right).$

170. $\dfrac{5n+1}{4} + \dfrac{n-1}{6} + \dfrac{5n-11}{8} + \dfrac{4n-1}{9} = 2(n+1)\,.$

171. $\dfrac{9x}{8} - \left(\dfrac{x-2}{6} + \dfrac{5x-4}{12}\right) - \left(x - \dfrac{3x+2}{3} - \dfrac{3x}{4}\right) = 6 + \dfrac{2x+1}{3}\,.$

172. $\dfrac{9n-0{,}7}{4} - \dfrac{5n-1{,}5}{7} = \dfrac{7n-1{,}1}{3} - \dfrac{5(0{,}4-2n)}{6}\,.$

173. $\dfrac{2(2-3y)}{0{,}01} - 2{,}5 = \dfrac{0{,}02-2y}{0{,}02} - 7{,}5\,.$

174. $1 - \left(a - \dfrac{1+a}{3}\right) : 3 = \left(2a - \dfrac{10-7a}{3}\right) : 2\,.$

175. $x - \dfrac{1 - \dfrac{3x}{2}}{4} - \dfrac{2 - \dfrac{x}{4}}{3} = 2\,.$

176. $x + 2 - \dfrac{2x - \dfrac{4-3x}{5}}{15} = \dfrac{7x - \dfrac{x-3}{2}}{5}\,.$

177. Která dvě po sobě jdoucí přirozená čísla mají tu vlastnost, že rozdíl jejich druhých mocnin se rovná 15?

178. Boty stály třikrát tolik co přezůvky. Kdyby byly boty levnější o 42 Kčs, byly by dvakrát dražší než přezůvky. Kolik Kčs stály boty a kolik přezůvky?

Řešení

Označme x cenu přezůvek v korunách; potom je cena bot $3x$ a platí rovnice $3x - 42 = 2x$, která vede k řešení $x = 42$.

Závěr: Přezůvky stály 42 Kčs a boty 126 Kčs.

Zkouška správnosti: Řešení je správné, neboť vyhovuje podmínkám úlohy.

179. Prodavač v pouličním stánku prodal od rána 600 pohledů po 60 haléřích. Kolik jich musí ještě prodat do večera, aby měl denní tržbu 300 Kčs? Vyhovuje řešení sestavené rovnice úloze?

180. Prémie člena brigády socialistické práce a dělníka činily dohromady za celý rok 6 720 Kčs. Prémie člena brigády za 9 měsíců činily tolik jako prémie dělníka za celý rok. Jak velké byly prémie dělníka a jak velké člena brigády?

181. 15 kusů zboží stálo před zlevněním právě tolik jako 25 kusů téhož zboží po zlevnění. Přitom je cena jednoho kusu po zlevnění o 0,80 Kčs nižší než před snížením ceny. Kolik stál jeden kus zboží před zlevněním a kolik po zlevnění?

182. Brigády na sklizeň brambor se zúčastnilo 48 osob, mezi nimi byli muži, ženy a žáci deváté třídy ZDŠ. Žen bylo o 4 více než mužů, žáků o 6 méně než polovina dospělých. Kolik bylo mužů, kolik žen a kolik žáků?

183. Na schůzi mládežníků se dostavilo třikrát tolik chlapců co děvčat. Když 8 chlapců a 8 dívek předčasně ze schůze odešlo, zbývalo pětkrát tolik chlapců co děvčat. Kolik chlapců a kolik děvčat se dostavilo do schůze?

184. Žáci jedné třídy měli zaplatit účet za poškození učebny. Rozpis činil 70 haléřů na žáka. Avšak 3 nepřítomní žáci neplatili, a tak musil být udělán nový rozpis, v němž připadlo na každého žáka 75 haléřů. Kolik žáků bylo ve třídě?

185. Ve třídě jsou dívky a 30 chlapců. Chlapců prospívá 28, dívky všechny. Kolik je dívek, jestliže všech prospívajících žáků je 95 %?

186. Posadí-li se ve třídě 7 žáků do lavice, zbude pro poslední lavici jen jeden žák. Posadí-li se do každé lavice šest žáků, nedostane se na jednoho žáka místo. Kolik je všech žáků?

187. Úředník měl měsíční plat 1 200 Kčs. Během roku (po zvýšené kvalifikaci) mu byl plat zvýšen o 10 %, takže obdržel za rok celkem 15 360 Kčs. Kterým měsícem počínaje mu byl vyplácen vyšší plat?

*188. Na základní devítileté škole je v 1.—5. ročníku 49 % všeho žactva, v 6. ročníku 14 %, v 7. ročníku 13 %, v 8. ročníku o 3 méně než v ročníku sedmém a v 9. ročníku o 5 méně než v osmém. Kolik žáků má škola?

189. V hledišti divadla bylo 60 žárovek dvojího druhu. Svícení každou menší z nich stálo za večer 32 haléřů, větší 80 haléřů. Kolik žárovek každého druhu tam bylo, stálo-li osvětlení toho večera 36 Kčs?

190. Žáci jedné školy vybrali 130 Kčs za 55 lístků do kina a do divadla. Pokladník školy však zapomněl, kolik měl koupit lístků do kina po 1 Kčs a kolik do divadla po 3,50 Kčs. Spočítáte mu to?

191. Jakou zásobu uhlí měla škola, jestliže spotřebovala v měsíci lednu $\frac{1}{4}$ celé zásoby a ještě 0,5 tuny, v měsíci únoru $\frac{1}{6}$ celkové zásoby a ještě 2 tuny a na měsíc březen zbylo 4,5 tuny uhlí?

192. V rovnoramenném trojúhelníku je velikost úhlu při hlavním vrcholu o 20° menší než dvojnásobná velikost úhlu při základně. Jak velké jsou úhly tohoto trojúhelníka?

193. Ze čtverce se má vystřihnout rám o šířce 3 cm, obsah rámu je 276 cm^2. Určete délku strany zbytku.

194. Zvětší-li se délka strany čtverce o 2 cm, zvětší se jeho obsah o 100 cm^2. Určete délku strany tohoto čtverce.

195. Obdélník má délku o 20 cm větší než šířku. Zmenší-li se délka o 5 cm a zvětší-li se šířka o 10 cm, zvětší se obsah obdélníka o 300 cm^2. Jak velké jsou rozměry obdélníka?

196. V rovnoramenném trojúhelníku je délka ramena o 8 cm větší než délka základny. Určete délku základny, je-li obvod trojúhelníka 31 cm.

197. Trojúhelník má obvod 35 cm. Jedna jeho strana má velikost čtyřikrát větší než druhá strana a o jeden cm větší než třetí strana trojúhelníka. Určete velikost těchto stran.

198. V trojúhelníku *ABC* je velikost úhlu β třetinou velikosti úhlu α a o 20° větší než velikost úhlu γ. Určete velikosti úhlů trojúhelníka.

***199.** Za kolik minut po sedmé hodině svírají hodinové ručičky poprvé přímý úhel?

***200.** Přední kolo vozu má obvod 2,1 m, zadní 3,5 m. Jak dlouhá je dráha, na níž učiní zadní kolo o 2 000 otoček méně než kolo přední?

$\boxed{\textbf{201.}}$ Z místa A do místa B je $25\frac{1}{3}$ km. V 6 hodin ráno vyšel chodec S z místa A směrem do místa B. V 7 hodin 10 minut vyšel chodec Z z místa B směrem do místa A. Setkali se v 9 hodin. Kolik ušel průměrně za hodinu každý z obou chodců, jestliže chodec Z ušel za hodinu o 2 km méně než chodec S?

Řešení

Označme místo setkání obou chodců P. Jestliže rychlost chůze chodce Z je x km/h, pak rychlost chůze chodce S je $(x + 2)$km/h. Chodec S projde vzdálenost AP za 3 hodiny a urazí přitom $3(x + 2)$ km, kdežto chodec Z projde vzdálenost BP za $1\frac{5}{6}$ hodiny a urazí přitom $1\frac{5}{6} \cdot x$ km. Platí rovnice

$3(x + 2) + 1\frac{5}{6}x = 25\frac{1}{3}$, která vede k řešení $x = 4$.

Závěr: Chodec *Z* ušel za hodinu průměrně 4 km, chodec *S* průměrně 6 km.

Zkouška správnosti: Chodec Z ušel za 1 h 50 min $4 \cdot \frac{11}{6}$ km $= 7\frac{1}{3}$ km.

Chodec *S* ušel za 3 h 18 km.

Celkem tedy urazili celou dráhu z A do B, tj. $25\frac{1}{3}$ km.

202. Ze dvou míst A a B, vzdálených 24 km, vyrazí současně proti sobě chodec rychlostí 4 km/h a cyklista rychlostí 12 km/h. Za kolik hodin od okamžiku, kdy vyrazili, a v jaké vzdálenosti od místa A se setkají?

203. Loď vyjela v 6 hodin ráno a jela rychlostí 16 mořských mil za hodinu. V 8 hodin 30 minut byl za ní poslán rychlý člun, který jel rychlostí 24 mil/h. Za kolik hodin dohoní člun loď?

204. Nákladní auto jelo průměrnou rychlostí 20 km/h a vyjelo z Prahy směrem k Liberci. Současně s ním vyjel autobus, který jel průměrnou rychlostí 30 km/h a který přijel do Liberce o 2 hodiny dříve než nákladní auto. Jaká je vzdálenost mezi Prahou a Libercem?

205. Pumpou A se naplní nádrž za 12 minut, pumpou B za 24 minut. Za jakou dobu se naplní nádrž, pracuje-li 3 minuty jen pumpa A a potom obě pumpy současně?

206. Terén měl být upravován tak, aby bylo denně zpracováno 420 m jeho délky. Kdyby se k tomu použilo jen lidských sil, připadla by na dělníka a den úprava terénu o délce 6 metrů. Ke zdolání části úkolu bylo použito tří stejně výkonných mechanických strojů. Potom mohlo být použito o 22 dělníků méně, přičemž připadla na dělníka a den úprava terénu o délce 5 metrů. Určete denní výkon jednoho stroje.

Řešení

Uvažujme takto:
Jestliže jeden stroj zpracoval denně terén v délce x metrů, potom tři stroje zpracovaly denně terén v délce $3x$ metrů, takže dělníkům patřila na den úprava terénu v délce $(420 - 3x)$ metrů.

Číslo $\frac{420 - 3x}{5}$ udává počet dělníků, kteří pracovali na úpravě terénu po zavedení strojů, číslo $\frac{420}{6}$ počet dělníků, kteří by byli museli zpracovávat terén beze strojů, takže je zřejmý vztah:

$$\frac{420 - 3x}{5} + 22 = \frac{420}{6}.$$

Rovnici vyhovuje kořen $x = 60$.
Závěr: Jeden stroj zpracoval denně terén v délce 60 metrů.
Zkouška správnosti:
Bez mechanizace by pracovalo 70 dělníků, při použití strojů 48 dělníků. Ti upravili 48.5 m $= 240$ m a stroje 180 m terénu. Celkem tedy 420 m terénu denně.

207. Na školním pokusném pozemku vypěstovali žáci ovocné stromky. 25 % jich dala škola místnímu družstvu, $\frac{1}{3}$ z nich dostal pionýrský dům v okresním městě a zbývajících 250 stromků vysadila škola ve své školní zahradě. Kolik stromků vypěstovali žáci té školy?

208. V továrně pracuje ve třech odděleních 1 200 dělníků. V prvním oddělení je jich dvakrát tolik co v druhém a ve třetím o 400 více než v prvním. Kolik dělníků je v každém oddělení?

209. Nádoba na 30 litrů se má naplnit vodou 60 °C teplou. Kolik litrů vody 80 °C teplé a kolik litrů vody 20 °C teplé musíme smíchat?

210. Smísí-li se 5 kg kávy dražší a 10 kg kávy lacinější, má směs cenu 220 Kčs za 1 kg. Kolik stojí 1 kg kávy dražší a 1 kg kávy lacinější, liší-li se jejich ceny o 30 Kčs?

211. Kolik gramů kyslíku je v 11 gramech kysličníku uhličitého CO_2? (Poměrná atomová hmotnost kyslíku je 16, uhlíku 12.)

212. Jakou hustotu má kov, jestliže nádobu z něho udělanou vyvážíme na vzduchu závažím 8,16 kg a ve vodě závažím 5,36 kg?

5. LINEÁRNÍ ROVNICE S NEZNÁMOU VE JMENOVATELI

213. Řešte rovnici $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{3x-10}{x^2-5x+6}$.

Řešení

Nejprve upravme danou rovnici na tvar

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} = \frac{3x-10}{(x-2)(x-3)}.$$

Za předpokladu, že vyloučíme z řešení čísla $x = 2$, $x = 3$, je daná rovnice ekvivalentní s rovnicí

$$x - 3 - (x - 2) = 3x - 10,$$

které vyhovuje kořen $x = 3$.

Avšak číslo $x = 3$ nemůže být kořenem dané rovnice, neboť pro $x = 3$ nemají zlomky $\dfrac{1}{x-3}$ a $\dfrac{3x-10}{x^2-5x+6}$ smysl.

Závěr: Daná rovnice nemá řešení.

214. Řešte rovnici $\dfrac{x^2}{x+1} - x = \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2x^2}{x^2+x}$.

Řešení

Vyloučíme-li z řešení čísla $x = 0$, $x = -1$, je daná rovnice ekvivalentní s rovnicí

$$x^2 - x^2 - x = x - 2x\,,$$

které vyhovuje každé číslo x.
Závěr: Dané rovnici vyhovují všechna čísla $x \neq 0$, $x \neq -1$.

215. Řešte rovnici $\dfrac{3x-3}{2x^2-2} - \dfrac{5(x-1)}{12(x-1)^2} = \dfrac{2x+2}{3x^2+6x+3}$.

Řešení

Upravme danou rovnici na tvar

$$\frac{3(x-1)}{2(x^2-1)} - \frac{5(x-1)}{12(x-1)^2} = \frac{2(x+1)}{3(x+1)^2}.$$

Jestliže vyloučíme z řešení čísla $x = 1$, $x = -1$, obdržíme po krácení zlomků rovnici $\dfrac{3}{2(x+1)} - \dfrac{5}{12(x-1)} = \dfrac{2}{3(x+1)}$, která je ekvivalentní s rovnicí $18(x-1) - 5(x+1) = 8(x-1)$ za předpokladu, že $x \neq 1$, $x \neq -1$.
Této rovnici i dané rovnici vyhovuje kořen $x = 3$.

Zkouška: $\dfrac{3x-3}{2x^2-2} - \dfrac{5(x-1)}{12(x-1)^2} = \dfrac{6}{16} - \dfrac{10}{48} = \dfrac{18}{48} - \dfrac{10}{48} = \dfrac{8}{48} = \dfrac{1}{6}$;

$$\frac{2x+2}{3x^2+6x+3} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}.$$

Závěr: Dané rovnici vyhovuje kořen $x = 3$.
O správnosti řešení se přesvědčíme ve všech případech dosazením řešení do původní rovnice.

216. Řešte:

$$\frac{1}{x-2} - \frac{2}{3(x-2)} = \frac{1}{3}.$$

217. $\dfrac{6}{x-5} + 1 = \dfrac{2x-4}{x-5}$.

218. $1 + \dfrac{x}{1-2x} = \dfrac{x+3}{2x+1}$.

219. $\dfrac{2z+3}{z+12} = \dfrac{2z+9}{z+22}$.

220. $\dfrac{1,1 - 0,1x}{1,2x - 0,2} = \dfrac{1,01 - 0,01x}{0,12x - 1,82}$.

221. $\dfrac{5}{x + 1} - 7 = \dfrac{10 - 7x}{x - 1}$.

222. $\dfrac{(x + 1)^3}{x^3} - \dfrac{(x + 1)^2}{x^2} = \dfrac{1}{x}$.

223. $\dfrac{3}{v + 1} = \dfrac{2}{v + 3} + \dfrac{1}{v - 2}$.

224. $\dfrac{2}{y - 3} - \dfrac{1}{y + 2} = \dfrac{1}{y + 6}$.

225. $\dfrac{1}{m - 3} - \dfrac{1}{m + 2} = \dfrac{5}{m^2 + 6}$.

226. $\dfrac{x}{x^2 - x - 12} + 2 + \dfrac{11 + 3x}{x + 3} = \dfrac{5x}{x - 4}$.

*227. $\dfrac{r + 2}{r - 2} - 1 = \dfrac{3r^2 + r + 9}{3(r^2 - 4)} - \dfrac{r - 2}{r + 2}$.

228. $\dfrac{2x + 19}{5x^2 - 5} - \dfrac{3x}{1 - x} = 3 + \dfrac{17}{x^2 - 1}$.

229. $\dfrac{3x}{x - 2} + \dfrac{1}{2 - x} + 1 = \dfrac{3x + 3}{x - 2} + \dfrac{4}{2 - x}$.

230. $\dfrac{1}{x^2 + x} + \dfrac{1}{x^2 - x} + \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 1} = 1$.

231. $\dfrac{2}{1 - x^2} - \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{1}{1 - x}$.

232. $\dfrac{(2 - x)^3 + (x - 1)^3}{(2 - x)^2 + (1 - x)^2} = \dfrac{3}{2}$.

233. $\dfrac{5}{2y - 3} + \dfrac{3y + 8}{4y - 6} = 1\dfrac{1}{6} - \dfrac{6y - 2}{10y - 15}$.

*234. $\dfrac{3}{(2x + 5)^2} + \dfrac{4}{(2x + 1)^2} = \dfrac{7}{4x^2 + 12x + 5}$.

*235. $\dfrac{3}{1 - z^2} = \dfrac{2}{(1 + z)^2} - \dfrac{5}{(1 - z)^2}$.

236. $\dfrac{x-\dfrac{2}{3}}{\dfrac{3}{2}-x}+\dfrac{8}{3}=0\,.$

237. $\dfrac{\dfrac{y}{3}+\dfrac{3}{4}}{\dfrac{y}{3}-\dfrac{3}{4}}=\dfrac{y+3}{y-4}\,.$

238. $\dfrac{\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{12}}{\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{6}}=\dfrac{\dfrac{x}{21}-\dfrac{1}{4}}{\dfrac{x}{28}-\dfrac{1}{6}}\,.$

239. $\dfrac{\dfrac{z}{2}-2}{z-1}+\dfrac{\dfrac{z}{2}+2}{z+1}=1\,.$

240. $\dfrac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{2}{3}+x}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}}{x+\dfrac{2}{3}}\,.$

241. $\dfrac{\dfrac{2y}{3}-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{3y}{2}-1}+\dfrac{\dfrac{5y}{3}-\dfrac{4}{3}}{y-\dfrac{2}{3}}=2\,.$

*242. $\dfrac{96}{x^2-16}=\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{4}{x}}-\dfrac{3-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{4}{x}-1}-5\,.$

*243. $\dfrac{\dfrac{1}{(3-2x)^2}-\dfrac{1}{(3+2x)^2}}{4}=\dfrac{\dfrac{1}{3+2x}}{\dfrac{3-2x}{3}}\,.$

244. Které číslo je nutno přičíst k čitateli a jmenovateli zlomku $\dfrac{2}{3}$, aby se změnil na zlomek $\dfrac{3}{2}$?

245. Cyklista jede rychlostí 20 km/h. O kolik km/h musí zvýšit svou rychlost, aby projel dráhu 84 km za 3 hodiny?

246. Z místa A vyjel autobus směrem do místa B v 6 hodin ráno. V 8 hodin 40 minut vyjelo z místa A auto týmž směrem. Obě vozidla dorazila do místa B současně. Jakou rychlostí jela, je-li vzdálenost obou míst 160 km a rychlost auta dvakrát větší než rychlost autobusu?

247. Výmlat obilí z pozemku patřícímu JZD se prováděl třemi stroji rozdílné výkonnosti a trval celkem dva dny. Kdyby se výmlat prováděl jen strojem nejmenší výkonnosti, trval by devět dní, kdyby se prováděl jen strojem s největší výkonností, trval by čtyři a půl dne. Jak dlouho by prováděl výmlat třetí stroj?

*248. Nádrž se naplní otvorem A za 15 minut. Otvorem B může voda odtékat. Otevřeme-li oba otvory současně, vyprázdní se plná nádrž za 1 hodinu. Za kolik minut by se vyprázdnila plná nádrž otvorem B? (Otvor A uzavřeme.)

249. Údržbář se zavázal, že provede opravné práce v závodě za 24 dny. Z technických důvodů bylo však nutno tuto dobu zkrátit, a proto si přibral pomocníka. Vykonali spolu všechny opravy za 13 a $\frac{1}{3}$ dne. Jak dlouho by trvala tato práce pomocníkovi?

250. Šest dlaždičů mělo vydláždit 1728 m^2 příjezdní silnice. Jeden z nich však onemocněl. Zbývajících pět si vypočítalo, že zvýší-li každý z nich svůj denní výkon o 4,8 m^2, budou hotovi za tutéž dobu, jaká byla na dláždění plánována. Jaký byl denní výkon každého z nich a kolik dní trvala práce?

6. LINEÁRNÍ ROVNICE S PARAMETREM

251. Určete všechna přirozená čísla x, která splní rovnici $2ax = (a + 2)x + 12$, kde parametr a je libovolné přirozené číslo.

Řešení

Upravujeme danou rovnici takto:

$2ax = ax + 2x + 12, \; ax - 2x = 12, \; x(a - 2) = 12$.

Dále zkoumejme dva případy:

a) Je-li $a - 2 = 0$, má daná rovnice tvar $4x = 4x + 12$, a nemá tedy žádné řešení.

b) Je-li $a - 2 \neq 0$, má daná rovnice řešení $x = \frac{12}{a - 2}$, které je funkcí parametru a. Podle textu úlohy hledáme jen přirozená čísla x, která za předpokladu, že číslo a je přirozené, danou rovnici splňují. Je tedy zřejmé, že číslo $(a - 2)$ musí být dělitelem čísla 12. Mohou nastat jen tyto možnosti:

a) $a - 2 = 1; \; a = 3, \; x = 12;$ d) $a - 2 = 4; \; a = 6, \; x = 3;$
b) $a - 2 = 2; \; a = 4, \; x = 6;$ e) $a - 2 = 6; \; a = 8, \; x = 2;$
c) $a - 2 = 3; \; a = 5, \; x = 4;$ f) $a - 2 = 12; \; a = 14, \; x = 1$.

Závěr: Dané rovnici vyhovují řešení $x = 12, 6, 4, 3, 2, 1$ náležející po řadě parametrům $a = 3, 4, 5, 6, 8, 14$.

252. Určete všechna čísla x, která splňují rovnici $\frac{x - a}{2 - a} = \frac{x + a}{2 + a}$, kde parametr a je libovolné číslo.

Řešení

Pro $a = 2$, $a = -2$ nemá daná rovnice řešení. Za předpokladu, že $a \neq 2$, $a \neq -2$, upravujeme danou rovnici takto: $(x - a)(2 + a) = (x + a)(2 - a)$, $2x - 2a + ax - a^2 = 2x + 2a - ax - a^2$, $2ax = 4a$, $ax = 2a$. Dále zkoumejme dva případy:

a) Je-li $a = 0$, má daná rovnice tvar $x : 2 = x : 2$ a vyhovují jí všechna čísla x.

b) Je-li $a \neq 0$, $a \neq 2$, $a \neq -2$, má daná rovnice jedno řešení $x = 2$ nezávislé na parametru a.

Závěr: Rovnice nemá řešení pro $a = 2$, $a = -2$, má nekonečně mnoho řešení pro $a = 0$ a jedno řešení $x = 2$ pro $a \neq 0$, $a \neq 2$, $a \neq -2$.

253. Určete všechna přirozená čísla x, která splňují rovnici

a) $\dfrac{a}{1 + x} = \dfrac{6}{x}$; b) $a(x - 1) = x + a$;

c) $\dfrac{a(x - 1)}{x + 1} = 5$, kde a je přirozené číslo.

254. V oboru přirozených čísel určete všechny kořeny rovnice $\dfrac{ax - 6}{ax + 6a} = \dfrac{1}{a}$, které jsou větší než čtyři, je-li parametr a přirozené číslo.

255. Určete všechna celá čísla x, která vyhovují rovnici

a) $x(a + 2) + a(x + 1) = 2 - a$; b) $\dfrac{4x - 1}{x - 2} - a = 2$, je-li parametr a číslo celé.

256. Najděte všechna čísla $x > 0$, která splňují rovnici $\dfrac{2x}{2x - a} = a + 1$, kde parametr a je reálné číslo.

257. Určete všechna čísla a, pro která má rovnice $\dfrac{a(x - 2)}{x + 2} = 8$ řešení v oboru celých čísel záporných.

258. Řešte a proveďte diskusi řešení rovnice $m(x - 1) = x + m$, je-li x neznámá a parametr m libovolné číslo.

259. $y + 6a - (y + 1) = 4(y + a) - 2(y - a)$ (neznámá je y).

260. $\dfrac{3}{m - 2} = 5 - y$ (neznámá je y).

261. $(x + 3)(x - c) = x^2 + 3c - 18$ (neznámá je x).

262. $\dfrac{y}{2m} + \dfrac{2y}{3m} - \dfrac{3y}{4m} = \dfrac{5(1 - 2y)}{24}$ (neznámá je y).

263. $\dfrac{z-b}{1-b} = \dfrac{z+b}{1+b}$ (neznámá je z).

264. $x + 1 - \dfrac{2x + a + 1}{a} = \dfrac{a - x}{a}$ (neznámá je x).

265. $1 - pq + \dfrac{2(1-q)}{p} = 0$ (neznámá je q).

266. $x(y - 6) + y(x + 4) = 12$ (neznámá je a) x; b) y).

267. $x(1 - y) + y(1 - x) - 2y = 0$ (neznámá je a) x; b) y).

268. $a^2z + b^2 = a^2 - b^2z$ (neznámá je z).

269. $\dfrac{y}{m} + \dfrac{y}{n} = \dfrac{m+n}{mn}$ (neznámá je y).

270. $\dfrac{V-1}{p} - \dfrac{V+1}{q} = 1$ (neznámá je V).

271. $\dfrac{x-p}{p} - \dfrac{x-q}{q} = p - q$ (neznámá je x).

272. $(y - a)^2 - (y - b)^2 = a^2 - b^2$ (neznámá je y).

273. $\dfrac{3}{x-a} - \dfrac{2}{x+a} = \dfrac{3x - 7a}{x^2 - a^2}$ (neznámá je x).

274. $\dfrac{y}{3a+y} - \dfrac{y}{y-3a} = \dfrac{a^2}{9a^2 - y^2}$ (neznámá je y).

275. $\dfrac{z+b}{2} - \dfrac{2}{z+b} = \dfrac{z-b}{2}$ (neznámá je z).

276. $\dfrac{1+v}{1-v} = \dfrac{p}{q}$ (neznámá je v).

277. $\dfrac{a+b}{x} + \dfrac{a}{b} + 1 = 0$ (neznámá je x).

278. $\dfrac{x+m}{x-n} + \dfrac{x+n}{x-m} = 2$ (neznámá je x).

$\boxed{279.}$ Řešte a proveďte diskusi řešení rovnice

$$\frac{x(p-1) - p(1-p)}{x + px - p(p+1)} = \frac{p^3 - 1}{p^3 + 1},$$ je-li parametr p libovolné číslo.

Řešení

A. Rovnice nebude mít řešení, jestliže $p^3 + 1 = 0$, nebo $x + px - p(p+1) = x(1+p) - p(p+1) = (p+1)(x-p) = 0$, tedy pro $p = -1$ a $x = p$.

B. Je-li $p \neq -1$ a $x \neq p$, upravujeme danou rovnici takto:

$$(p^3+1)(xp - x - p + p^2) = (p^3 - 1)(p+1)(x-p),$$

$$(p+1)(p^2 - p + 1)(p-1)(x+p) = (p-1)(p^2 + p + 1) \cdot (p+1)(x-p),$$

$$(p+1)(p-1)[(x+p)(p^2 - p + 1) - (x-p)(p^2+p+1)] = 0,$$

$$2p(p+1)(p-1)(p^2 + 1 - x) = 0.$$

Zkoumejme dále tyto případy:

a) Je-li $p - 1 = 0$, má daná rovnice tvar $\dfrac{0}{2x-2} = \dfrac{0}{2}$ a splňují ji všechna čísla $x \neq 1$.

b) Je-li $p = 0$, má daná rovnice tvar $\dfrac{-x}{x} = \dfrac{-1}{1}$ a splňují ji všechna čísla $x \neq 0$.

c) Jestliže $p \neq 0$, $p \neq 1$, $p \neq -1$, je $p^2 + 1 - x = 0$ a dané rovnici vyhovuje jediné řešení $x = p^2 + 1$. Jeho správnost lze potvrdit zkouškou.

Platí: $\mathrm{L} = \dfrac{(p^2+1)(p-1) - p(1-p)}{(p^2+1)(p+1) - p(p+1)} = \dfrac{(p-1)(p^2+p+1)}{(p+1)(p^2-p+1)} =$

$= \dfrac{p^3-1}{p^3+1}$; $\quad \mathrm{P} = \dfrac{p^3-1}{p^3+1}$; $\quad \mathrm{L} = \mathrm{P}$.

Zbývá ještě uvážit, zda existuje řešení $x = p^2 + 1$ dané rovnice pro $x = p$, které bylo vyloučeno. Nechť tedy $p^2 + 1 = p$, odkud $p^2 - p + 1 = 0$. Tuto rovnici nemůže splnit žádné číslo $p < 0$, neboť její levá strana je pro takové hodnoty vždy kladná. Upravíme-li uvažovanou rovnici na tvar $p^2 - 2p + 1 = -p$, pak je zřejmé, že tuto rovnici nemůže splňovat žádné číslo $p \geqq 0$, neboť pro tyto hodnoty je levá strana rovnice nezáporná a pravá záporná. Je tedy patrno, že číslo p není kořenem dané rovnice.

Závěr: Je-li $p \neq 0$, $p \neq 1$, $p \neq -1$, má daná rovnice jediné řešení $x = p^2 + 1$. Je-li $p = -1$, nemá daná rovnice řešení, je-li $p = 1$, má nekonečný počet řešení a vyhovují jí všechna reálná čísla $x \neq 1$. Konečně, je-li $p = 0$, má daná rovnice nekonečně mnoho řešení, přičemž jí vyhovují všechna čísla $x \neq 0$.

280. Řešte rovnici

$\dfrac{2x + p^2}{p+3} + \dfrac{2x - p^2}{p-3} = \dfrac{(p^2+4)x}{p^2-9}$ a proveďte diskusi jejího řešení, je-li

x neznámá a parametr p libovolné číslo. Pro které číslo p má rovnice kořen $x = -6$?

281. Řešte rovnici

$$\frac{p(x-3)}{9p^2 - 12p + 4} + \frac{p(x+3)}{9p^2 + 12p + 4} + \frac{4}{9p^2 - 4} = 0$$ a proveďte diskusi řešení, je-li x neznámá a parametr p libovolné číslo.

282. Řešte rovnici $\dfrac{3px - 6x}{px - 2x - 1} - \dfrac{5px - 10x}{px - 2x + 1} + 2 = 0$ a proveďte diskusi řešení, je-li x neznámá a parametr p libovolné číslo. Stanovte dále hodnotu čísla p tak, aby rovnice měla kořen $x = \dfrac{1}{8}$.

283. V oboru reálných čísel řešte a proveďte diskusi:

a) $\dfrac{6b}{2+b} + \dfrac{4b^2}{(2+b)^3} - 3x = \dfrac{bx}{2}\left[1 - \dfrac{b(4+b)}{(2+b)^2}\right]$ (neznámá je x);

b) $\dfrac{x-a-b}{c} + \dfrac{x-b-c}{a} + \dfrac{x-c-a}{b} = 3$ (neznámá je x).

284. $\dfrac{px+q}{ax-a} - \dfrac{px-q}{bx-b} = \dfrac{p}{a} - \dfrac{q}{b}$ (neznámá je x).

285. Číslo a rozdělte na dva sčítance tak, aby rozdíl jejich druhých mocnin dával opět číslo a. Určete oba sčítance.

286. Ze dvou míst A a B vyšli současně proti sobě dva chodci. Prvý by došel z místa A do B za n hodin, druhý by došel z B do A za m hodin. Za kolik hodin se potkají? Má úloha vždy řešení? Řešte též pro $n = 5$ h 24 min, $m = 6$ h 45 min.

287. Rozdíl délky a šířky obdélníka je 5 cm. Délka je n-krát větší než šířka, přičemž n je přirozené číslo. Jak velké jsou rozměry obdélníka?

288. Brigáda měla zpracovat podle plánu denně 20 m^3 dříví. Jestliže překročí denně plán o y metrů krychlových, pak skončí stanovený úkol o pět dní dříve. Kolik m^3 měla brigáda zpracovat? (Též pro $y = 4$ m^3.)

***289.** Lístek na koncert stál pro dospělého n Kčs, pro děti 1 Kčs. Jestliže přišlo na koncert celkem 320 osob a na vstupném bylo vybráno 520 Kčs, kolik bylo na koncertu dospělých? Pro která přirozená čísla n má tato úloha řešení? Určete ze zkušenosti, které číslo n nejpravděpodobněji vyhovuje úloze?

***290.** Pavel chce jít na procházku. Má na ni vyměřen čas t. Spolužák Jiří mu však nabídl, že ho sveze kousek cesty motocyklem (rychlost motocyklu v) a zpáteční cestu že může vykonat pěšky. Jak dlouho a jak daleko může jet Pavel motocyklem, chce-li se včas vrátit domů, je-li rychlost jeho chůze c?

291. Které číslo je nutno přičíst k číslům p a q, aby rozdíl druhých mocnin takto vzniklých součtů byl v^2?

292. Tělesa T_1 a T_2 se pohybují po téže dráze týmž směrem. Jejich pohyb začal v místě M u tělesa T_2 o n sekund později než u tělesa T_1. Jejich rychlosti v_1, v_2 jsou v poměru $p : q$. Kdy se dostihnou?

293. Družstevní pole má být zoráno dvěma traktory o různých výkonech. Prvním by bylo zoráno za a hodin, druhým o tři hodiny dříve. Za jak dlouho bude zoráno oběma traktory současně?

***294.** Na jedné hromadě je a tun uhlí, na druhé b tun uhlí. Každodenně se každá hromada zvětší o d tun uhlí. Za kolik dní bude na prvé hromadě n-krát více uhlí než na hromadě druhé?

7. SOUSTAVY DVOU LINEÁRNÍCH ROVNIC O DVOU NEZNÁMÝCH

295. Řešte početně i graficky soustavu rovnic: $3x - 2y = 4$ a
$x + 3y = 5$.

Řešení početní

a) *metodou substituční (dosazovací)*

$x = 5 - 3y$, $3(5 - 3y) - 2y = 4$, $15 - 9y - 2y = 4$, $y = 1$, $x = 2$;

b) *metodou komparační (srovnávací)*

$x = 5 - 3y$,

$x = \dfrac{4 + 2y}{3}$; $5 - 3y = \dfrac{4 + 2y}{3}$, $15 - 9y = 4 + 2y$, $y = 1$, $x = 2$

[z rovnosti levých stran rovnic plyne rovnost jejich pravých stran].

c) *metodou adiční (sčítací)*

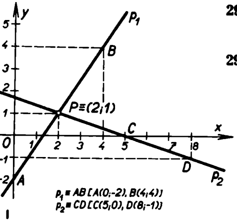
Daná soustava je ekvivalentní se soustavou $-3x + 2y = -4$,
$3x + 9y = 15$.

Sečtením obou rovnic obdržíme $11y = 11$, odkud $y = 1$, $x = 2$.
Zkouška: $6 - 2 = 4$; $2 + 3 = 5$.

Řešení grafické

Rovnice soustavy lze psát ve tvaru $y = \dfrac{3}{2}x - 2$, $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$.

To jsou lineární funkce, jejichž grafy znázorňují přímky p_1 a p_2. Souřadnice x, y jejich společného bodu P udávají řešení dané soustavy.
Závěr: Daná soustava má jediné řešení $x = 2$, $y = 1$ (obr. 1).



Obr. I

296. Řešte početně i graficky:

$$5x - 6y = 3, \ 7x - 7y = 5\,.$$

297. Řešte početně i graficky soustavy:

a) $x - y = 5\,,$
$x - 2y = 2;$

b) $3x + y = 9\,,$
$x + 2y = -2;$

c) $x + y = 6\,,$
$x - y = 2;$

d) $2x - y = 2\,,$
$2x - y = 10\,.$

298. Ukažte početně i graficky, že následující soustavy nemají řešení:

a) $x + y = 1\,,$ $\quad \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} = 2;$

b) $x - y = 4\,,$ $\quad 2x - 2y = 5;$

c) $x + y = 3\,,$ $\quad y = \dfrac{7 - 2x}{2}\,.$

299. Zdůvodněte, že tyto soustavy mají nekonečně mnoho řešení:

a) $x - y = 5,$ $\quad 3x = 15 + 3y;$

b) $x + y = 3,$ $\quad \dfrac{x}{2} + 0{,}5y = 1{,}5;$

c) $x = 4 - y,$ $\quad y = 4 - x\,.$

300. a) $3(p + 5) - 2(p + q) = 7,$
$5(p - q) + 6(p - 3) + 4 = 0;$

b) $(x + 4)(y - 2) - (x - 5)(y + 4) = 0,$
$(x + 6)(y - 1) - (x - 1)(y + 2) = 0.$

301. $p^2 + q^2 = (p + 1)^2 + (q + 1)^2,$
$p^2 + q^2 = (p - 1)^2 + (q - 1)^2.$

302. a) $2v + 3t = 8,$ $\quad 4 - v = \dfrac{3}{2}\,t\,;$

b) $\dfrac{z}{2} + \dfrac{u}{3} = 1,$ $\quad \dfrac{z}{3} + \dfrac{u}{4} = 1;$

c) $\dfrac{t + 2}{3} + \dfrac{r - 1}{5} = 2,$ $\quad t + \dfrac{3r}{5} = 4\,.$

303. a) $\dfrac{3x - 2y}{5} + \dfrac{2x - 3y}{3} = 1,$ $\quad \dfrac{2x - 6y}{3} + \dfrac{4x - 3y}{2} = 1;$

b) $\dfrac{2x - 3y}{3} - \dfrac{x - 2y + 3}{4} = 3,$ $\quad \dfrac{3(x + 1)}{4} + \dfrac{4x - 2y - 3}{3} = 6 + y\,.$

304. a) $0{,}2x + 4{,}5 = \dfrac{11y}{20}$,

$6(2 - x) + 0{,}3y = 4(1 - x) + 1$;

*b) $\dfrac{0{,}2x + 0{,}1y}{2} - \dfrac{4x - y}{10} = \dfrac{3x + 0{,}5y}{30} + \dfrac{x - y}{5}$,

$\dfrac{3x + 2y - 1}{8} = 3 - \dfrac{0{,}8x - 5y}{41}$.

305. a) $\dfrac{x + 1}{y + 1} = \dfrac{3}{4}$,

$\dfrac{y + 1}{x + y} = \dfrac{4}{5}$;

b) $(x + y + 1) : (x - y + 1) = 3 : 2$,

$(x + y + 1) : (1 + y - x) = 3 : 1$;

c) $(x + 3) : (x + 1) = (y + 8) : (y + 5)$,

$(2x - 3) : (10x - 12) = (y + 1) : (5y + 7)$.

***306.** $\dfrac{x - 24}{24} + \dfrac{y^2}{26} = 25^2$,

$x : 120 = (650 + y) : 130$.

***307.** Zaveďte nové neznámé a řešte:

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5$,

$\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1$;

b) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{8}{y} = 3$,

$\dfrac{15}{x} - \dfrac{4}{y} = 4$;

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{3}{2}$,

$x : y = 1 : 6$.

***308.** a) $\dfrac{10}{x + 5} + \dfrac{1}{y + 2} = 1$,

$\dfrac{25}{x + 5} - \dfrac{2}{y + 2} = 1$;

b) $\dfrac{4}{x + 2y} - \dfrac{1}{x - 2y} = 1$,

$\dfrac{20}{x + 2y} + \dfrac{3}{x - 2y} = 1$.

309. Určete dvě čísla, jejichž rozdíl i podíl se rovná čtyřem.

310. Zlomek nabude hodnoty $\frac{1}{3}$, zmenšíme-li čitatele o tři a zvětšíme-li současně jmenovatele o dva. Jestliže však čitatele zvětšíme o 1 a jmenovatele zmenšíme o 1, nabude zlomek hodnoty $\frac{3}{4}$. Který je to zlomek?

311. Obec A dodala jednoho dne do mlékárny dvakrát tolik mléka co obec B. Jestliže z obou obcí bylo toho dne dodáno 1 027 l mléka, kolik litrů dodala obec A a kolik obec B? Řešte a) úsudkem, b) pomocí rovnice o jedné neznámé, c) pomocí soustavy rovnic.

312. Dvěma traktory, a to K 700 z NDR a Š 180 se zorá denně 15,2 ha polí. Aby bylo zoráno 110 ha polí, je třeba, aby se traktorem K 700 pracovalo 7 dní a traktorem Š 180 7,5 dne. Jakou denní normu má každý traktor?

313. Divadlo uspořádalo pro školu dvě představení; odpolední, na které bylo vstupné 3 Kčs, a večerní, na které bylo vstupné 5 Kčs na osobu. Jestliže se obou představení zúčastnilo celkem 800 žáků, přičemž na vstupném bylo vybráno 3 400 Kčs, kolik žáků se zúčastnilo odpoledního a kolik večerního představení? Řešte také pomocí rovnice o jedné neznámé.

314. Žáci na lesní brigádě byli rozděleni do dvou skupin; skupina A měla o dva žáky více než skupina B. Kdyby počet žáků skupiny B se o jednu třetinu zvětšil a skupina A měla o sedm žáků více, měly by obě skupiny stejný počet žáků. Kolik žáků bylo v každé skupině?

315. Dva vklady, z nichž jeden je úrokován 2 % (základní) a druhý 3 % (s výpovědní lhůtou), vynesly za rok 86 Kčs úroku. Kdyby se zaměnily jejich úrokové míry, vynesly by za rok 84 Kčs úroku. Jak jsou tyto vklady velké?

316. Otec je o osm let starší, než je trojnásobné stáří synovo. Za 20 let bude otec dvakrát tak stár jako syn. Kolik let je otci a kolik synovi?

317. Číslo 1 086 rozložte na tři sčítance tak, aby první sčítanec byl o 267 větší než druhý a třetí sčítanec se rovnal součtu prvních dvou.

318. Vsuneme-li mezi cifry dvoumístného čísla cifru 7, dostaneme jeho jedenáctinásobek. Postavíme-li před ně jedničku, dostaneme pětinásobek. Které je to číslo?

319. Dvojzvratná páka 3 dm dlouhá je v rovnováze, zatížíme-li ji na jednom konci břemenem 6 N a na druhém konci silou 9 N. Jak daleko od obou konců je podepřena?

320. Dva povozy vyjely současně ze dvou míst 3 km vzdálených. Jedou-li proti sobě, setkají se za 15 minut. Jedou-li za sebou, dohoní jeden povoz druhý za 1 hodinu. Jaká je rychlost každého z nich?

321. Bazén o objemu 990 hl se naplní vodou, přitéká-li voda kohoutkem 8 hodin a současně druhým kohoutkem 6 hodin. Prvním přívodem nateče za hodinu o 10 hl vody více než druhým. Kolik hektolitrů nateče každým z nich za hodinu?

322. Hmotnost dvou těles o celkovém objemu 36 dm^3 je 86 kg. Jaká je hmotnost každého z nich, jsou-li jejich hustoty 2,5 g/cm^3 a 2,3 g/cm^3?

323. Kolik kilogramů mědi a zinku je ve 124 kg mosazi, jsou-li známy hustoty mědi a zinku (Cu má hustotu 8,9 g/cm^3, Zn 7,1 g/cm^3) a hustota mosazi 8,3 g/cm^3?

324. Kolik kilogramů železa a kolik kilogramů síry obsahuje 100 kg sirníku železnatého (FeS), jsou-li poměrné atomové hmotnosti Fe-56, S-32?

325. Dva dělníci dostali za úkolovou práci dohromady 330 Kčs. Jak se o ně rozdělili, jestliže
a) dělník A odpracoval o jednu osminu méně hodin než druhý,
b) oba pracovali stejně, ale dělník A má již zálohu 56 Kčs?

326. Dvoučlenná parta má dokončit dílo za 18 dní. Po patnácti dnech však jeden z obou dělníků onemocněl a druhý dokončil dílo za sedm a půl dne. Za jakou dobu by vykonal dílo každý z nich sám?

***327.** Po silnici jede pomalu povoz s dlouhým kmenem. Od předního k zadnímu konci potřebujeme šestnáct kroků, od zadního k přednímu (při stálé rychlosti naší i povozu) 112 kroků. Kolik kroků délky měl vlastně kmen?

***328.** Po okruhu dlouhém 2 550 m jezdí dva motocykly takovými rychlostmi, že se potkávají každou minutu, jezdí-li proti sobě a dohánějí se každých pět minut, jezdí-li týmž směrem. Určete jejich rychlosti.

***329.** Proud 4,5 A protéká dvěma paralelními větvemi o odporech 60 Ω a 90 Ω. Určete proud v jednotlivých větvích. (Návod: Výsledný proud 4,5 A je roven součtu proudů v obou větvích. Proud v každé větvi je nepřímo úměrný odporu.)

330. V pravoúhlém trojúhelníku je velikost jednoho ostrého úhlu rovna dvěma třetinám velikosti úhlu druhého. Vypočtěte velikosti obou úhlů. (Zkuste výpočet též úsudkem.)

***331.** Zvětší-li se výška kvádru o čtvercové podstavě o 1 dm a délka hrany podstavy také o 1 dm, zvětší se povrch kvádru o 78 dm^2. Zvětší-li se výška o 2 dm a zmenší-li se současně délka hrany podstavy o 1 dm, zmenší se povrch kvádru o 18 dm^2. Jak velké jsou rozměry kvádru?

332. Rovnoramenný lichoběžník má obsah $P = 1\,050\ cm^2$, výšku $v = 30$ cm a délku ramena $b = 34$ cm. Vypočtěte velikost základen.

***333.** Rovnoramenný lichoběžník má obsah $P = 1\,080\ cm^2$, výšku $v = 30$ cm a poloměr kružnice opsané $r = 32,5$ cm. Určete velikost základen. (Návod: Nechť S je střed opsané kružnice, M bod půlící střední příčku, N bod půlící rameno $d = AD$ a D_0 pata kolmice z vrcholu D na AB. Potom trojúhelník MNS je podobný trojúhelníku D_0DA.)

334. Jsou-li x, y neznámé a parametr p libovolné číslo, řešte soustavy a proveďte diskusi jejich řešení:

a) $x - y = 2$, $px + y = 4$; b) $3x - 6y = 1$, $5x - py = 2$; c) $2x - y = 8$, $px + y = 10$;

d) $x + 2py = 3$, $3x - 2y = 1$; e) $3x + 2py = 1$, $(3p - 1)x - py = 1$.

335. Jsou-li x, y neznámé, řešte a proveďte diskusi řešení:

a) $bx = ay$, $x + y = a^2 - b^2$; b) $x + y = a^2 - b^2$, $x - y = (a - b)^2$; c) $mx + ny = k$, $y = 0$;

d) $ax + by = c$,
$y = \dfrac{c - ax}{b}$. Parametry a, b, c, m, n jsou libovolná čísla.

336. Řešte a proveďte diskusi řešení soustavy

$$px - y + 2 = 0,$$
$$x + y - q = 0,$$

kde x, y jsou neznámé a parametry p, q libovolná čísla.

Řešení

Sečteme-li obě rovnice soustavy, dostaneme rovnici
$px + x + 2 - q = 0$, která po upravení má tvar $x(p + 1) = q - 2$.
Dále je nutno zkoumat případy:

a) Je-li $p + 1 = 0$, $q - 2 = 0$, má soustava tvar

$$-x - y + 2 = 0,$$
$$x + y - 2 = 0$$

a vyhovují jí všechny dvojice čísel $x, y = 2 - x$, kde x je číslo libovolné.

b) Je-li $p + 1 = 0$, $q - 2 \neq 0$, má soustava tvar

$$-x - y + 2 = 0,$$
$$x + y - q = 0, \; q \neq 2$$

a není řešitelná.

c) Je-li $p \neq -1$ a q libovolné, má soustava jedno řešení (x, y), přičemž

$$x = \frac{q - 2}{p + 1}, y = px + 2 = \frac{pq - 2p}{p + 1} + 2 = \frac{pq + 2}{p + 1}.$$

Zkouška:

$$L_1 = \frac{pq - 2p}{p+1} - \frac{pq+2}{p+1} + 2 = \frac{pq - 2p - pq - 2 + 2p + 2}{p+1} =$$

$$= \frac{0}{p+1} = 0,$$

$$P_1 = 0;$$

$$L_2 = \frac{q-2}{p+1} + \frac{pq+2}{p+1} - \frac{q(p+1)}{p+1} = \frac{q - 2 + pq + 2 - pq - q}{p+1} =$$

$$= \frac{0}{p+1} = 0,$$

$$P_2 = 0.$$

Závěr: Je-li $p = -1$, $q = 2$, má soustava nekonečně mnoho řešení a vyhovují jí všechny dvojice čísel x, $2 - x$, kde x je číslo libovolné; je-li $p = -1, q \neq 2$, není soustava řešitelná. Je-li $p \neq -1$, q libovolné, má soustava jediné řešení $x = \dfrac{q-2}{p+1}$, $y = \dfrac{pq+2}{p+1}$.

337. Jsou-li x, y neznámé a parametr p libovolné číslo, řešte a proveďte diskusi řešení soustavy:

a) $px + y = 1$,
$x + py = 1$;

b) $2x + py = 3p + 1$,
$y = \dfrac{5 - px}{2}$;

c) $(p^2 + 1)x - p(p + 1)y + (p^2 + 1) = 0$,
$(p^2 + 1)x - (p + 1)y - (p^2 + 1) = 0$.

338. Ukažte, že soustava

$$px - 2y = 3,$$
$$3x + py = 4,$$

kde x, y jsou neznámé a parametr p libovolné číslo, má pro každou hodnotu parametru jedno řešení.

***339.** Řešte soustavu

$$\frac{1}{x+1} + a(y - 2) = 1, \qquad \frac{a}{x+1} + y - 1 = 2a,$$

jsou-li x, y neznámé a parametr a libovolné číslo. Proveďte diskusi řešení.

[Návod: Zaveďte novou neznámou $z = \dfrac{1}{x+1}$.]

340. Rozdíl délek základen lichoběžníka měří q cm, jeho střední příčka p cm. Jak velké jsou jeho základny? Jak je nutno volit čísla p a q, aby úloha měla řešení?

***341.** Dvě JZD dodala stejná množství mléka, ale první z nich utržilo za ně o a Kčs více než družstvo druhé. Stalo se to tím, že první družstvo mělo předpis dodávek menší než druhé v poměru $b : c$. Za každý litr mléka dodaný nad předpis doplácí výkupna k normální ceně d Kčs. Na kolik litrů mléka zněly oba předpisy dodávek?
Též pro $a = 2\,500$ Kčs, $b : c = 5 : 6$, $d = 0{,}50$ Kčs.

***342.** V trojúhelníku, jehož obvod je 30 cm, má největší strana délku o d cm větší než prostřední strana a tato délku o d cm větší než nejkratší strana. Určete délky stran trojúhelníka a podmínku řešitelnosti úlohy.

343. Za n Kčs bylo koupeno a metrů plátna a b metrů vlněné látky, za týž obnos u metrů plátna a v metrů této látky. Kolik stál metr plátna a kolik metr látky?

344. Řešte soustavu

$$a_1x + b_1y = c_1\,,$$
$$a_2x + b_2y = c_2\,,$$

jsou-li x, y neznámé a parametry $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ libovolná čísla. Proveďte diskusi řešení soustavy vzhledem k daným parametrům.

345. Těleso ze slitiny dvou kovů vyvážíme na vzduchu závažím p kg a po ponoření do vody závažím o q kg menším. Těleso vyrobené z prvního kovu slitiny, které vyvážíme na vzduchu závažím p kg, vyvážíme ve vodě závažím o m_1 kg menším; těleso vyrobené z druhého kovu slitiny, které vyvážíme na vzduchu týmž závažím p kg, vyvážíme ve vodě závažím o m_2 kg menším. Kolik kg každého kovu je obsaženo v tělese ze slitiny?

Řešení

Nechť slitina obou kovů obsahuje x kg prvého kovu a y kg druhého kovu. Zřejmě platí rovnice

$x + y = p$, přičemž je $x > 0, y > 0, p > 0$.

Platí však také rovnice

$$\frac{m_1}{p}x + \frac{m_2}{p}y = q, x > 0,\ y > 0,\ p > 0,\ q > 0,\ m_1 > 0, m_2 > 0,$$

neboť $p = m_1s_1, p = m_2s_2$, kde s_1, s_2 jsou po řadě hustoty obou kovů.

x kg prvého kovu zaujímá objem $\frac{x}{s_1} = \frac{m_1x}{p}$ a y kg druhého kovu zaujímá objem $\frac{y}{s_2} = \frac{m_2y}{p}$.

Zbývá řešit soustavu

$$x + y = p\,,$$
$$\frac{m_1x}{p} + \frac{m_2y}{p} = q\,,$$

které vyhovuje jedno řešení $x = \frac{p(q - m_2)}{m_1 - m_2}$, $y = \frac{p(m_1 - q)}{m_1 - m_2}$ za předpokladu, že $m_1 \neq m_2$. Aby toto řešení vyhovovalo též úloze, musí být splněny ještě tyto podmínky: a) je-li $m_1 > m_2$, musí být $m_2 < q < m_1$; b) je-li $m_1 < m_2$, musí být $m_2 > q > m_1$. V případě, že $m_1 = m_2$, $q \neq m_1$, $q \neq m_2$, nemá úloha řešení. V případě, že $m_1 = m_2$, $q = m_1 = m_2$, má úloha nekonečně mnoho řešení a vyhovují jí všechny dvojice čísel $x, p - x$, kde $0 < x < p$.

Závěr: Je-li $m_1 = m_2$, $q \neq m_1$, $q \neq m_2$, nemá úloha řešení.
Je-li $m_1 = m_2$, $q = m_1 = m_2$, má úloha nekonečně mnoho řešení a vyhovují jí všechny dvojice čísel $x, p - x$, kde $0 < x < p$.

Je-li $m_1 \neq m_2$, má úloha jedno řešení $x = \frac{p(q - m_2)}{m_1 - m_2}$,

$$y = \frac{p(m_1 - q)}{m_1 - m_2}, \text{ přičemž } \frac{p(q - m_2)}{m_1 - m_2} > 0, \frac{p(m - q)}{m_1 - m_2} > 0 .$$

346. Mosazný předmět vyvážíme na vzduchu závažím 1,494 kg, ve vodě závažím 1,314 kg. Kolik kilogramů obsahuje mědi a kolik kilogramů zinku? (Cu má hustotu 8,9 g/cm³, Zn 7,1 g/cm³.)

347. Je-li s hustota slitiny, s_1 a s_2 hustoty součástí, určete poměr hmotností součástí ve slitině.

348. Natočím-li do vany jedním kohoutkem 42 litrů a druhým 30 litrů vody, bude směs 25 °C teplá. Pustím-li však prvním kohoutkem 18 litrů, druhým 54 litrů, bude směs 21 °C teplá. Jak teplá voda teče z jednotlivých kohoutků?

8. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC O TŘECH A VÍCE NEZNÁMÝCH

349. Řešte soustavu a proveďte zkoušku správnosti:

a) $x + y = 37$, $x + z = 25$, $y + z = 22$;

b) $x + y = 13$, $x - z = 5$, $y - z = 2$;

c) $2x + 3y = 12$, $3x + 2z = 11$, $3y + 4z = 10$;

d) $2x + 3y = 11$, $3x + 2z = 13$, $3y + 4z = 29$.

350. a) $x + y - z = 17,$
$x + z - y = 13,$
$y + z - x = 7;$

b) $x - y - z = 5,$
$y - x - z = 1,$
$z - x - y = -15.$

351. a) $5x + 5y + z = 2,$
$3x - 4y - 3z = 1,$
$-2x + y + z = -1;$

b) $x + 2y + 5z = 1,$
$3x + 4y + 7z = 2,$
$6x + 8y + 9z = 4.$

352. a) $7x + 6y + 7z = 100,$
$x - 3y + z = 0,$
$3x + y - 2z = 0;$

b) $3x + 2y + 3z = 110,$
$5x - y - 4z = 0,$
$2x - 3y + z = 0.$

***353.** a) $4x + 3y - 2z = 40,$
$6x - 5y + 3z = 50,$
$3x + 2y + 5z = 220;$

b) $0{,}2x + 0{,}3y + 0{,}4z = 29,$
$0{,}3x + 0{,}4y + 0{,}5z = 38,$
$0{,}4x + 0{,}5y + 0{,}7z = 51.$

354. $\dfrac{x+1}{y+1} = 2, \quad \dfrac{y+2}{z+1} = 4, \quad \dfrac{z+3}{x+1} = \dfrac{1}{2}.$

355. $\dfrac{3x+y}{z+1} = 2, \quad \dfrac{3y+z}{x+1} = 2, \quad \dfrac{3z+x}{y+1} = 2.$

356. $\dfrac{x+y}{y-z} = 10, \quad \dfrac{x+z}{x-y} = 9, \quad \dfrac{y+z}{x+5} = 1.$

357. $\dfrac{6}{x} + \dfrac{4}{y} + \dfrac{5}{z} = 4, \quad \dfrac{3}{x} + \dfrac{8}{y} + \dfrac{5}{z} = 4, \quad \dfrac{9}{x} + \dfrac{12}{y} - \dfrac{10}{z} = 4.$

[Návod: Zaveďte nové neznámé; za $\dfrac{1}{x} = u$, za $\dfrac{1}{y} = v$, za $\dfrac{1}{z} = t$.]

358. $\dfrac{7}{2x-3y} - \dfrac{2}{10z-3y} + \dfrac{3}{3y-8z} = 8,$

$\dfrac{2}{2x-3y} - \dfrac{3}{10z-3y} + \dfrac{1}{3y-8z} = 0,$

$\dfrac{5}{2x-3y} - \dfrac{4}{10z-3y} + \dfrac{7}{3y-8z} = 8.$

[Návod: Dosaďte za $\dfrac{1}{2x-3y} = u$, za $\dfrac{1}{10z-3y} = v$, za $\dfrac{1}{3y-8z} = t$.]

359. Zdůvodněte, proč nemají řešení soustavy:

a) $x + y - z = 5,$
$2x + 2y - 2z = 7,$
$x - 3y + 5z = 15;$

b) $x + y + z = 5,$
$3x - 2y + z = 3,$
$4x - y + 2z = 10.$

360. Řešte soustavy

a) $x+y=4,\ y+z=8,\ z+u=12,\ u+x=8;$

b) $x+y+z=14,\ y+z+u=22,\ z+u+x=20,$
$u+x+y=16.$

361. a) $$\begin{aligned} x+y+z+u&=10,\\ x+y-z-u&=-4,\\ x-y-z+u&=0,\\ -x+y+z+u&=8; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x+y-z+u&=11,\\ x-y+z+u&=3,\\ x-u&=4,\\ y+z&=8; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x+2y+3z+4u&=10,\\ 2x+y-z+3u&=5,\\ 3x+4y-z-u&=5,\\ -x-2y+3z+u&=1; \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x+y-2z+u&=1,\\ 2x+2y-z-u&=2,\\ 3x+y+z+u&=14,\\ x-y+z-u&=0. \end{aligned}$$

362. Tři čísla jsou v poměru 2 : 3 : 4. Jejich součet je 999. Určete je. Řešte též rovnicí o jedné neznámé, za níž zvolte konstantu úměrnosti

363. Součet tří čísel je 100. Dělíme-li druhé z nich prvním, dostaneme podíl 5 a zbytek 1. Týž výsledek dostaneme dělením třetího čísla druhým. Která jsou to čísla?

364. Tři čísla mají tyto vlastnosti:
Zmenšíme-li první i druhé o tři, pak takto vzniklá čísla jsou v poměru 1 : 2. Zmenšíme-li první a třetí o čtyři, jsou nová čísla v poměru 1 : 3. Zvětšíme-li druhé i třetí o pět, dostaneme čísla, jejichž poměr je 3 : 4. Která jsou to čísla?

365. Trojciferné číslo N má ciferný součet 15. Napíšeme-li uspořádání číslic tohoto čísla v opačném sledu, dostaneme číslo M, které je o 99 menší než číslo N. Dělíme-li číslo R číslem S, kde R je zapsáno prostřední číslicí čísla N, a S součtem krajních číslic čísla N, dostaneme podíl 1 a zbytek také 1. Určete číslo N.

***366.** Průvodčí v autobusu prodává jízdenky po 1 Kčs, 2 Kčs a po 0,50 Kčs. Celkem prodal 880 jízdenek za 860,— Kčs. Počet jízdenek po 2 Kčs ku počtu jízdenek à 0,50 Kčs je v poměru 1 : 3. Kolik kterých jízdenek prodal?

***367.** Nádrž se plní třemi přívody, a to A, B, C. Přívody A a C se naplní za jednu hodinu (jsou-li otevřeny současně), přívody A a B za 45 minut, přívody B a C za 1 hodinu 30 minut. Jak dlouho by se nádrž naplnila každým přívodem zvlášť?

368. Úsečku velikosti a cm rozdělte na tři díly tak, aby poměr jejich velikostí byl 1 : 2 : 3. Řešte též úsudkem zpaměti.

369. Určete velikosti stran trojúhelníka, jestliže součty velikostí dvou stran jsou po řadě 38 cm, 46 cm a 42 cm.

***370.** Řešte soustavu

$y + z = a ,$
$x + z = b ,$
$x + y = c ,$ jsou-li x, y, z neznámé a parametry a, b, c libovolná čísla. Proveďte diskusi řešení vzhledem k číslům a, b, c.

***371.** Jsou-li x, y, z neznámé a parametr p libovolné číslo, řešte soustavu a proveďte diskusi jejího řešení.

a) $x + y + z = 6 ,$
$x + py = 9 ,$
$y = z - 1 ;$

b) $x + y + z = 3 ,$
$x + p(y + z) = 5 ,$
$y - z = 0 ;$

c) $x + y + pz = p ,$
$x + pz = 0 ,$
$y + pz = 1 ;$

d) $x + py = 1 ,$
$y + pz = 0 ,$
$z + px = p .$

372. Řešte soustavu:

$px + y - z = 1 ,$
$x + py - z = 1,$
$-x + y + pz = 1,$ jsou-li x, y, z neznámé a parametr p libovolné číslo. Proveďte diskusi řešení této soustavy vzhledem k číslu p.

Řešení

Odečteme-li od rovnice druhé rovnici prvou, obdržíme $x(1 - p) + y(p - 1) = 0$ a po upravení rovnici $(p - 1) . (y - x) = 0 .$ Dále zkoumáme tyto případy:

a) Je-li $p - 1 = 0$, má soustava tvar
$x + y - z = 1 ,$
$x + y - z = 1,$
$-x + y + z = 1$ a vyhovuje jí nekonečně mnoho trojic čísel x, 1, x, kde x je libovolné číslo.

b) Je-li $p - 1 \neq 0$, je $y = x$. Dosadíme-li za tento vztah do rovnice třetí, obdržíme $pz = 1$ a prošetřujeme opět dva případy:

α) Je-li $p = 0$, má soustava tvar $y - z = 1 ,$
$x - z = 1 ,$
$-x + y = 1$

a nevyhovuje jí žádné řešení, neboť rovnice jsou ve sporu.

β) Jestliže $p \neq 0$, je $z = \dfrac{1}{p}$, $x = y = \dfrac{1}{p}$, ovšem za předpokladu, že $p + 1 \neq 0 .$

Správnost řešení ukazuje zkouška.

Platí: $1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{p} = 1$;

$$\frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{p} = 1,$$

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + 1 = 1.$$

Zbývá vyšetřit ještě případ, jestliže $p + 1 = 0$.

Tehdy má soustava tvar

$-x + y - z = 1$,

$x - y - z = 1$,

$-x + y - z = 1$ a vyhovuje jí nekonečně mnoho trojic čísel x, x, -1, kde x je libovolné číslo.

Závěr: Je-li $p = 0$, nemá soustava řešení. Je-li $p = 1$, má soustava nekonečný počet řešení a vyhovují jí všechny trojice čísel x, 1, x, kde x je libovolné číslo. Je-li $p = -1$, má soustava také nekonečný počet řešení a vyhovují jí všechny trojice čísel x, x, -1, kde x je libovolné číslo. Je-li $p \neq 0$, $p \neq 1$, $p \neq -1$, má soustava jediné řešení a vyhovuje jí trojice čísel $x = y = z = \frac{1}{p}$.

***373.** Řešte a proveďte diskusi řešení soustavy, jsou-li x, y, z neznámé a parametr p libovolné číslo.

a) $px + y + z = 1$,
$x + py + z = p$,
$x + y + pz = p^2$;

b) $x - py + p^2 z = 1$,
$-p^3 x + y - pz = 1$,
$p^2 x - p^3 y + z = 1$.

374. Do bazénu vedly tři přítokové roury. Byla-li voda přiváděna rourou A 6 hodin, rourou B 4 hodiny a rourou C p hodin, bylo v bazénu 390 m^3 vody. Byla-li voda do bazénu přiváděna rourou A pět hodin, rourou B dvě hodiny a rourou C p hodin, bylo v bazénu 305 m^3 vody. Byla-li voda do bazénu přiváděna rourou A 3 hodiny, rourou B 2 hodiny a rourou C p hodin, bylo v bazénu 255 m^3 vody. Kolik vody nateklo každou rourou za 1 hodinu?

375. Opravář má v zásobě tři druhy matic. Z celkového počtu připadá čtvrtina na matice střední velikosti, $\frac{7}{15}$ na matice největší a zbytek na matice nejmenší. Kolik matic každého druhu má opravář pro běžnou potřebu, je-li a) malých matic o p více než matic střední velikosti, b) malých matic p-krát tolik jako matic střední velikosti?

*376. V oboru reálných čísel řešte soustavu
$(a + 1)x + y + z = a + 1\,,$
$x + (a + 1)y + z = a + 3\,,$
$x + y + (a + 1)z = -2a - 4,$ jsou-li x, y, z neznámé a a parametr. Proveďte diskusi vzhledem k číslu a.

9. OPAKOVÁNÍ

377. Určete hodnotu výrazu:
a) $5abc - \{2a^2b - [3abc - (4ab^2 - a^2b)]\}$ pro $a = -2,\ b = -1, c=3;$
b) $abc - \{3a^2b - [4abc + (2ab^2 - 3a^2b)]\}$ pro $a = -\frac{1}{2},\ b = -\frac{2}{3},$
$c = -4\,.$

378. Jsou dány mnohočleny
$A = 5a^4 - 8a^3b + 2a^2b^2 - 4ab^3 - b^4\,,$
$B = a^4 + 3a^3b - 5a^2b^2 - 6ab^3 - 2b^4\,,$
$C = -4a^4 + 5a^3b - 7a^2b^2 + 10ab^3 - 5b^4\,.$
Určete výraz a) $A + B - C$, b) $-A + B + C$, c) $A - B + C\,.$

379. Ukažte, že platí
a) $(a - 2)(a - 3) + (a + 6)(a - 5) - 2(a^2 - 7a + 13) = 10a - 50;$
b) $[9x - 1 - 5(3x - 1) - 2(- 3x + 2)](x^2 - 3) = 0\,.$

380. Proveďte:
a) $(x^2 + y - x^3y^2)^2 + (x^2y + x^3y^2)^2 - 2(x^2y + x^3y^2)(x^2y - x^3y^2);$
b) $(1 + x)^2 + (1 + x)^3 - x^2(x + 4);$
c) $(x^2 + x + 1)^2 - (x^2 - x + 1)^2;$
*d) $(m - 1)(m + 2)^4 - (m + 1)(m - 2)^4.$

381. Rozložte v součin trojčleny:
a) $2x^2 - 6x - 20;$ b) $a^2x^2 - a^2x - 90a^2;$ c) $4x^2 + 6x - 4;$
d) $n^2x^2 - 5nx - 14;$ e) $xy^3 - 7xy^2 + 12xy;$ f) $6y^2 + 16y - 6.$

382. Rozložte v součin výraz
a) $a^3 - 2a^2 - 4a + 8;$ b) $a^2x - abx + a^3x - ab^2x;$
c) $5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4.$

383. Rozložte v součin výraz
$[pq(z^2 + v^2) + zv(p^2 + q^2)]^2 - [pq(z^2 - v^2) + zv(p^2 - q^2)]^2.$

384. Dokažte, že platí:
$y(x - 2)^2 + 8xy + x(y - 2)^2 - 2(x + y)^2 = (x + y)(x - 2)(y - 2)\,.$

*385. Rozložte v součin výraz
$V = a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a)$ a ukažte, že pro čísla a, b, c navzájem různá je $V \neq 0\,.$

386. Najděte největší společný dělitel a nejmenší společný násobek mnohočlenů $M = 2a^3 - 7a^2 + 7a - 2$, $N = 4a^3 - 8a^2 - a + 2$.

387. Po zvýšení počtu zaměstnanců o p procent měla továrna n zaměstnanců. Jaký byl stav zaměstnanců před zvýšením a kolik zaměstnanců bylo nově přijato? Též pro $n = 720, p = 20$.

388. Horník narubal v prvé polovině ledna t tun uhlí, přičemž odpracoval s směn. V druhé polovině ledna odpracoval také s směn, ale zlepšil svůj výkon o p procent. Kolik tun uhlí narubal průměrně za jednu směnu a) v prvé polovině ledna, b) v druhé polovině ledna, c) za celý leden?

389. Proveďte:

$$(1 + x^2 - 2x) + \frac{1 - x^4}{1 + x^2 + 2x}.$$

***390.** $$\frac{5}{12 - 2a} - \frac{a + 6}{7a + 6}\left(\frac{a + 3}{a + 6} - \frac{a - 2}{a - 6}\right).$$

391. $$x^2y^2\left[\frac{1}{(x + y)^2}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) + \frac{2}{(x + y)^3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right].$$

***392.** $$\frac{(a^2 + 2a)^2 - (2a + 4)^2}{(a^2 - 2a)^2 - (2a - 4)^2} : \left[2 : \frac{a^2 + a - 6}{a^2 + 5a + 6}\right].$$

393. $$\frac{x^2 + y^2 + 2xy - z^2}{z^2 - x^2 - y^2 + 2xy} : \frac{x^2 + z^2 + 2xz - y^2}{y^2 - x^2 - z^2 + 2xz}.$$

***394.** Je dán zlomek $z = \dfrac{[x(p + q) + pq + 1]^2 - [x(pq + 1) + p + q]^2}{(p + q)^2 - (pq + 1)^2}$,

kde p, q jsou daná čísla.
a) Určete, pro která čísla p, q nemá zlomek smysl.
b) Určete všechna čísla x, pro která je $z = 0$.
[Návod: K úpravě zlomku použijte substituce $p + q = a$, $pq + 1 = b$.]

395. Proveďte:

a) $$\frac{x + \dfrac{1}{y}}{x + \dfrac{z}{yz + 1}} - \frac{1}{y(xyz + x + z)};$$

b) $$\frac{3xyz}{yz + xz + xy} - \frac{\dfrac{x - 1}{x} + \dfrac{y - 1}{y} + \dfrac{z - 1}{z}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}}.$$

396. Řešte rovnici

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 4x = (x + 4)(x + 7) + 14\frac{1}{4}.$$

397. Za traktorem, který jede rychlostí 12 km/h, bylo vysláno o tři a půl hodiny později osobní auto, které ho má dostihnout za 45 minut. Jakou rychlostí jelo?

398. Délka obdélníka je třikrát větší než jeho šířka. Zvětší-li se šířka o čtyři metry a délka o pět metrů, pak se jeho obsah zvětší o 105 m². Určete rozměry obdélníka.

399. Řešte rovnici

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{x + 1}{x} - \dfrac{x}{x + 1}$;

b) $\dfrac{1}{x - 5} + \dfrac{x + 4}{x + 1} = \dfrac{6}{x^2 - 4x - 5} + 1$.

***400.** Žák měl řešit rovnici $\dfrac{x + 2}{7x + 23} = \dfrac{x - 2}{7(x + 1)}$. Opsal ji však s chybami. V čitateli na levé straně rovnice napsal chybně druhý člen a ve jmenovateli na pravé straně rovnice místo znamení plus napsal minus. Když chybně opsanou rovnici správně vyřešil, obdržel kořen rovnice dané. Jaký tvar měla rovnice, kterou si napsal žák?

401. Nádržka se naplní jedním čerpadlem za 9 hodin, druhým za 6 hodin. Má se zřídit pomocné třetí čerpadlo, aby se nádržka všemi třemi čerpadly naplnila za dvě hoainy. Za jakou dobu by se nádržka naplnila jen třetím čerpadlem?

402. Určete všechna přirozená čísla x, která splňují rovnici

a) $n(x - 3) = 7 - x$; b) $\dfrac{2n - 3}{x} + 1 = n$, je-li parametr n přirozené číslo.

403. Řešte a proveďte diskusi řešení rovnice:

a) $\dfrac{5 - px}{3}p - 1 = 2p - 3x$; b) $x + \dfrac{5 + x}{p} = 1 + \dfrac{8}{p}$;

c) $2x - p = \dfrac{2x - 1}{p}$; d) $1 - \dfrac{2}{x - p} = \dfrac{p^2 + x^2}{(x - p)^2}$,

je-li parametr p libovolné číslo.

404. Která čísla x vyhovují rovnici

a) $\dfrac{p+x}{px} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{p}{p+x}$, je-li parametr p libovolné číslo;

b) $\dfrac{a-bm}{mx} - \dfrac{c-bn}{nx} = 1$, jsou-li parametry a, b, c, m, n libovolná čísla?

405. Za osmdesát výrobků dvojí jakosti se utržilo celkem 175 Kčs. Jestliže výrobek prvé jakosti se prodával po n Kčs za kus (n přirozené číslo) a výrobek druhé jakosti po dvou korunách za kus, kolik kusů prvé jakosti bylo prodáno?

406. Za jak dlouho vyloží tři dělníci vagón uhlí, jestliže prvý by jej sám vyložil za a hodin, druhý za b hodin a třetí za c hodin. Co musí platit o číslech a, b, c, aby a) úloha měla řešení, b) sestavená rovnice měla řešení?

407. Řešte početně i graficky soustavu

a) $2x - 5y = 1$,
$x + 3y = 6$;

b) $x + y = 4$,
$3x - 2y = 2$.

408. Řešte soustavu

$$\frac{2x+1}{2} = \frac{5-2y}{5}, \quad \frac{2x-3y}{2} = 1 - \frac{3x-4y}{3}.$$

409. Základna rovnoramenného trojúhelníka má délku o 4 cm kratší než rameno. Jeho obvod je 29 cm. Určete velikosti jeho stran.

410. Rovnoběžné strany lichoběžníka mají velikosti v poměru 5 : 6. Výška lichoběžníka je 18 cm, obsah 693 cm². Určete velikosti rovnoběžných stran lichoběžníka.

411. Vnější úhel trojúhelníka má velikost 123°20′. Rozdíl velikostí dvou jeho protilehlých vnitřních úhlů je 10°54′. Určete velikosti jeho vnitřních úhlů.

***412.** Doly A, B měly stejný plán těžby a vytěžily dohromady 134 tun nad plán. Zásluhu o to měl však pouze důl A, který překročil plán o dvě procenta, kdežto důl B zůstal o jedno procento pod plánem. Kolik tun měly oba doly plánováno a kolik skutečně vytěžily?

413. Řešte a proveďte diskusi řešení soustavy

a) $ax - y = -3$,
$5x + 3y = 30$;

b) $4x + 3y = 12$,
$2x + ay = 5$,

je-li parametr a libovolné číslo a x, y neznámé.

***414.** Řešte a proveďte diskusi řešení soustavy
$x + y = s$, $ax + 2y = 0$,
jsou-li x, y neznámé a parametry s, a libovolná čísla.

415. Řešte:

a) $2x + 3y - z = 18$, $3x - 2y + z = 8$, $x + 2y + z = 24$;

b) $2x + 9y + 12z = 5$, $4x + 6y + 8z = 2$, $6x + 3y + 8z = 2$.

416. a) $x + y = xy$, $2(x + z) = xz$, $3(y + z) = yz$;

b) $x + y = 2xy$, $x + z = 4xz$, $y + z = 8yz$.

417. Tři dělníci A, B, C mají splnit určitý úkol. Dělníci A a B by jej dokončili za 12 dní, B spolu s C za 20 dní, A spolu s C za 15 dní. Jak dlouho by pracoval na úkolu každý z nich, kdyby pracoval sám? Jak dlouho by trvalo splnění úkolu, kdyby pracovali všichni tři společně?

418. Objem kvádru je 900 cm^3, jeho povrch je 600 cm^2 a obsah jedné stěny je 60 cm^2. Určete velikost hran kvádru.

419. Která tři čísla mají tu vlastnost, že součet převrácených čísel prvního a druhého je $\frac{7}{12}$, prvního a třetího $\frac{11}{24}$ a druhého a třetího $\frac{3}{8}$?

***420.** Řešte soustavu

$$ax + y + z = 4,$$
$$x + by + z = 3,$$
$$x + 2by + z = 4,$$

jsou-li parametry a, b libovolná čísla a x, y, z neznámé. Proveďte diskusi řešení soustavy vzhledem k číslům a, b.

421. Řešte soustavu

$$x + 2y - z + u = 9,$$
$$x - y + 2z - u = 2,$$
$$-x + y + z - 2u = -5,$$
$$2x - y - z + u = 2.$$

422. Velikosti vnitřních úhlů konvexního čtyřúhelníka jsou v poměru $m : n : p : q$. Jak jsou velké? Řešte též zpaměti pro poměr $1 : 2 : 3 : 4$.

423. Strany tečnového čtyřúhelníka jsou a, b, c, d. Jak jsou velké, je-li délka strany a o 2 cm větší než délka strany b, délka strany c o 4 cm větší než délka strany b a poměr $b : d = \frac{1}{3}$?

(Poznámka: Tečnovému čtyřúhelníku lze vždy kružnici vepsat. Dokažte, že součty délek protilehlých stran má tento čtyřúhelník stejné.)

II. KVADRATICKÉ ROVNICE, ROVNICE RECIPROKÉ A BINOMICKÉ

I. NEÚPLNÁ KVADRATICKÁ ROVNICE

1. Zpaměti: Jaký tvar má kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ pro a) $c = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0$; b) $a \neq 0,\ c \neq 0,\ b = 0$; c) $a \neq 0,\ b = 0,\ c = 0$?

2. Řešte zpaměti rovnice bez absolutního členu:
a) $x^2 - x = 0$; b) $x^2 - 5x = 0$;
c) $2x^2 + 6x = 0$; d) $5x^2 + 12x = 0$.

3. a) $2x^2 = 4x$; b) $3x^2 = 8x$;
c) $6x^2 = -15x$; d) $3{,}5x^2 = 7x$.

4. a) $x^2 + ax = 0$; b) $y^2 - by = 0$;
c) $ay^2 - 2a^2y = 0,\ a \neq 0$; d) $ax^2 - abx = 0,\ a \neq 0$.
Provádějte vždy (i v dalších úlohách) zkoušky správnosti řešení.

5. Řešte rovnice:

a) $x^2 + \frac{2}{3}bx = 0$; b) $x^2 + \frac{3}{5}ax = 0$;

c) $3x^2 - \frac{6}{7}px = 0$; d) $x^2 - 0{,}6rx = 0$.

6. a) $0{,}4x^2 + 0{,}12rx = 0$;
b) $5ax^2 + 7bx = 0,\ a \neq 0$;
c) $2abx^2 = 5a^2b^2x,\ a \neq 0,\ b \neq 0$;
d) $0{,}7a^2b^2x^2 = 0{,}21\,\frac{ax}{b};\ b \neq 0,\ a \neq 0$.

7. a) $\frac{p}{q}x^2 - \frac{p}{q}x = 0,\ q \neq 0$;

b) $\frac{p}{q}x^2 - \frac{q}{p}x = 0,\ q \neq 0, p \neq 0$;

c) $x^2 - \frac{p}{q}x = 0,\ q \neq 0$; d) $\frac{p}{q}x^2 - px = 0,\ q \neq 0$.

8. Která kvadratická rovnice má:
a) jeden kořen rovný nule;
b) oba kořeny rovné nule;
c) kořeny opačného znamení? Uveďte příklad.

9. Řešte rovnice:

a) $\dfrac{x+a}{2x-a} = \dfrac{2x-b}{x+b}$, b) $\left(a + \dfrac{ax}{b}\right)^2 = a^2,\ b \neq 0\,.$

(Neznámá je x.)

*10. Po kolika vteřinách je velikost dráhy tělesa při pohybu rovnoměrně zrychleném rovna číselně násobku n jeho konečné rychlosti (n je číslo přirozené)?

[Návod: Dráha pohybu rovnoměrně zrychleného je $s = \dfrac{1}{2}at^2$,

rychlost $v = at$, kde a je zrychlení, t je čas.]

11. Řešte zpaměti ryze kvadratické rovnice:
a) $x^2 = 64$; b) $x^2 = 144$;
c) $x^2 = 169$; d) $x^2 - 1\,024 = 0\,.$

12. a) $\dfrac{9}{5}x^2 = 5$; b) $\dfrac{3}{4}x^2 - 6 = 21$;

c) $\dfrac{5}{4}x^2 - 3\,380 = 0$; d) $0{,}09x^2 = 0{,}006\,084.$

13. Řešte rovnice a proveďte vždy zkoušku správnosti řešení:
a) $79 - 7x^2 = 16$; b) $8x^2 - 0{,}75 = 0{,}53$;
c) $\dfrac{2}{3}x = \dfrac{1\,050}{7x}$; d) $\dfrac{15}{2}x = \dfrac{810}{3x}\,.$

14. a) $x^2 = 2$; b) $4x^2 = 5$;
c) $3x^2 = 1$; d) $2x^2 = 1\,.$

15. a) $x^2 - 125 = 0$; b) $\dfrac{x^2}{3} = 25$;

c) $\dfrac{x^2}{3} - 200 = 333 + \dfrac{1}{3}$; d) $7{,}7x^2 + 3{,}11 = 3{,}7x^2 + 4{,}32\,.$

16. a) $\dfrac{5x}{4} = \dfrac{4}{5x}$; b) $\dfrac{x-3}{6} = 72 : (x+3)$;

c) $\dfrac{x-13}{13} = \dfrac{13}{(x+13)}$; d) $\dfrac{5}{x-9} = \dfrac{3}{x-9} + \dfrac{2(x+9)}{225}\,.$

$\boxed{17.}$ Řešte rovnici: $(x + m)^2 = (x + n)^2$.

Řešení

Protože $\sqrt{x^2} = |x|$, dostaneme odmocněním $|x + m| = |x + n|$. Rozlišujme 4 případy: a) $x + m > 0$; $x + n > 0$; b) $x + m > 0$, $x + n < 0$;

c) $x + m < 0$, $x + n > 0$; d) $x + m < 0$, $x + n < 0$.

a) $|x + m| = x + m$, $|x + n| = x + n$, $\quad x + m = x + n$, $m = n$

Je-li $m = n$, platí daná rovnice pro každé x.

b) $|x + m| = x + m$, $|x + n| = -x - n$, $\quad x + m = -x - n$, $x = -\dfrac{m + n}{2}$;

c) $-x - m = x + n$, $\quad x = -\dfrac{m + n}{2}$;

d) $-x - m = -x - n$, $m = n$ pro každé x.

Závěr: Daná rovnice je splněna pro každé x, je-li $m = n$;

je-li $m \neq n$, je $x = -\dfrac{m + n}{2}$.

Zkouška správnosti řešení: a) pro $m = n$ je správnost řešení patrna ihned:

$(x + m)^2 = (x + m)^2$; b) $\left(-\dfrac{m + n}{2} + m\right)^2 = \left(-\dfrac{m + n}{2} + n\right)^2$;

c) $\left(\dfrac{-m}{2} - \dfrac{n}{2} + m\right)^2 = \left(-\dfrac{m}{2} - \dfrac{n}{2} + n\right)^2$; d) $\left(\dfrac{m - n}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{m - n}{2}\right)^2$.

18. Řešte rovnice (uveďte podmínky pro a, b, aby rovnice měla řešení):
a) $x^2 = a$; b) $x^2 = a^2b^2$; c) $ax^2 = b$, $a \neq 0$;
d) $ax^2 - b^2 = 0$, $a \neq 0$.

19. Řešte rovnice:

a) $\dfrac{a}{b}x^2 - \dfrac{c}{d} = 0$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$; b) $nx^2 - 1 = 0$; $n \neq 0$;

c) $ax^2 - \dfrac{1}{a} = 0$; $a \neq 0$; d) $ax^2 - \dfrac{b}{a} = 0$; $a \neq 0$.

20. Řešte rovnice
1. po roznásobení jako rovnice ryze kvadratické;
2. užitím vlastnosti součinu dvou činitelů, jejichž součin je roven nule:

a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$; b) $(2x - 5)(2x + 5) = 0$;

c) $\left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{4}\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{5}{4}\right) = 0$; d) $\left(\frac{5}{3}x + \frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{3}x - \frac{5}{6}\right) = 0$.

21. Řešte rovnice v oboru čísel reálných:
a) $(x^2 - 16)(x^2 - 25) = 0$; b) $(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$;
c) $(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$; d) $(2x^2 - 5)(x^2 + 4) = 0$.

22. Řešte rovnice:

a) $x^2 - p^2 + 2p - 1 = 0$; b) $\frac{a + b}{a - b}x^2 - a^2 = -b^2$, $a \neq \pm b$;

c) $(x + a)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
d) $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$, $|a| \neq |b|$;

e) $\frac{ax + b}{a + bx} = \frac{cx + d}{c + dx}$; $a \neq -b$, $c \neq -d$;

f) $\frac{x}{x + a} + \frac{x}{x - a} = 2\frac{2}{3}$.

23. Součin nějakého čísla s jeho polovinou je 18. Určete toto číslo.

24. Součin poloviny nějakého čísla a jeho jedné třetiny je roven 6. Určete toto číslo.

25. Stanovte, pro která x platí vztahy:
a) $x^2 = 0$; b) $5x^2 = 0$; c) $ax^2 = 0$.

26. Dvě čísla jsou v poměru 3 : 4. Rozdíl jejich druhých mocnin je 784. Určete tato čísla.

27. Délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníka jsou v poměru 5 : 12. Jestliže
a) přepona měří 221 cm, jak velké jsou odvěsny;
b) jeho obsah je 540 cm², jak velké jsou odvěsny?

***28.** Základna trojúhelníka má velikost 15 cm, výška k ní příslušná 20 cm. Rovnoběžkou se základnou je odříznut trojúhelník, jehož obsah je čtvrtina obsahu původního trojúhelníka. Určete výšku odříznutého trojúhelníka. [Z podobnosti trojúhelníků: $a_1 : v_1 = 15 : 20$.] (Řešte též úsudkem.)

29. Jak dlouho padá volně kámen z výšky 78,4 m (bez ohledu na odpor vzduchu)? (Dráha volného pádu: $s = \frac{1}{2}gt^2$, $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.)

30. Jak dlouho letí těleso svisle vzhůru, vystoupí-li do výše a) 180 m; b) s, a nehledíme-li k odporu vzduchu? ($g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.)

31. Obsah mezikruží je 100 cm², poloměr vnější kružnice je roven dvojnásobku poloměru kružnice vnitřní. Určete vnitřní poloměr.

***32.** V kružnici jsou vedeny dvě tětivy dlouhé 30 cm a 34 cm. Kratší z nich má od středu dvakrát větší vzdálenost než delší tětiva. Určete poloměr kružnice.

***33.** Určete rychlost družice Země hmoty m pohybující se:

a) ve výšce h nad povrchem Země;
b) těsně nad povrchem Země;
c) ve výšce 200 km nad povrchem Země.

Řešení

a) Při pohybu po kružnici o poloměru $R + h$ (R je poloměr Země) musí být odstředivá síla $F_0 = m \dfrac{v^2}{R+h}$ v rovnováze se silou dostředivou, kterou je gravitační síla $F = \varkappa \dfrac{mM}{(R+h)^2}$. Platí tedy $\dfrac{mv^2}{R+h} = \varkappa \dfrac{mM}{(R+h)^2}$ a odtud $v = \sqrt{\dfrac{\varkappa M}{R+h}}$. ($M$ je hmota Země.) Z fyziky je známo, že je přibližně $\dfrac{\varkappa M}{R^2} \doteq g \doteq 10\ \mathrm{m/s^2}$, takže $v = R\sqrt{\dfrac{g}{R+h}}$.

Závěr: a) Družice se pohybuje ve výšce h po kruhové dráze rychlostí $v = R\sqrt{\dfrac{g}{R+h}}$; b) 7,9 km/s; c) 7,884 km/s.

34. O kolik metrů musí být zmenšena vzdálenost elektrické lampy, která visí 1,2 m nad pracovištěm soustružníka, má-li mít bod pod lampou dvakrát větší osvětlení $\left[E = \dfrac{I}{d^2}\right]$?

35. Ze dvou koulí má jedna dvakrát větší obsah povrchu než druhá. Určete poloměr menší z nich, má-li větší poloměr 15 cm.

36. Na lavici fotometru ve vzdálenosti 4 m od sebe jsou umístěny dvě žárovky se svítivostmi 100 cd a 60 cd. Ve kterém místě je třeba mezi nimi umístit stínítko, aby byly obě jeho strany stejně osvětleny?

***37.** Při zkoušení tvrdosti kovů se vtlačuje ocelová kulička o průměru D (v milimetrech) silou F (v kilopondech) do zkoušeného materiálu. Tím v místě tlaku vznikne v materiálu kulový vrchlík, jehož průměr je d milimetrů.

a) Spočtěte z D a d výšku kulového vrchlíku h, jeho povrch P i tvrdost materiálu $H_B = \frac{F}{P}$.

b) Jaký je průměr vrchlíku ve zkoumaném materiálu při $D = 10$ mm, $F = 3\,000$ kp, je-li $H_B = 96{,}2$ kp . mm^{-2}?

*38. Jakou silou musíme působit, aby při stejné tvrdosti materiálu jako v předchozí úloze průměr d byl poloviční? Určete tvrdost materiálu pro $D = 10$ mm, $F = 3\,000$ kp a $d = 6$ mm. Jak velká je hloubka vtisknutého důlku?

39. Ocelová kulička průměru $D = 2{,}5$ mm byla vtlačena silou $F = 31{,}2$ kp do mědi, jejíž tvrdost byla měřena. Měřením pod mikroskopem byl zjištěn průměr vytlačeného důlku $d = 0{,}975$ mm. Určete tvrdost zkoumaného vzorku mědi. (Brinellův způsob podle př. 37.)

40. Určete tři po sobě následující čísla v posloupnosti přirozených čísel $1, 2, \ldots, n$ tak, aby čtverec prostředního z nich byl o jednu větší než součin obou zbývajících.

2. ÚPLNÁ KVADRATICKÁ ROVNICE

41. Zpaměti: Jak zní kvadratická rovnice a) v obecném tvaru; b) ve tvaru normovaném?

42. Jak dostaneme z obecného tvaru kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ tvar normovaný?

43. Jaký tvar má rovnice $x^2 + px + q = 0$ pro: a) $p = 0$; b) $q = 0$?

44. Uveďte na tvar normovaný:

a) $3x^2 - 4x + 6 = 0$; b) $2x^2 - 9x + 4 = 0$;

c) $5x^2 - 12x + 64 = 0$; d) $\frac{2}{3}x^2 - 4x - 3 = 0$.

45. Uveďte na tvar normovaný:

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + 5 = 0$; b) $2\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{2}{3} = 0$;

c) $0{,}4x^2 + 0{,}5x - 0{,}6 = 0$; d) $3{,}5x^2 + 0{,}75x + 2 = 0$;

e) $0{,}1x^2 - 0{,}01x + 0{,}2 = 0$; f) $\frac{3}{5}x^2 - 0{,}75x - 3 = 0$.

46. Uveďte na tvar normovaný:

a) $ax^2 - 4x + a = 0$; b) $\frac{a}{b} x^2 + \frac{c}{d} x + 1 = 0$;

c) $(a^2 - b^2)x^2 + (a + b)x + a - b = 0$;

d) $(a - p)^2x^2 - rx + s = 0$;

e) $(a^2 - 1)x^2 - 5x + 3 = 0$;

f) $\frac{a - b}{a} x^2 - \frac{a}{a - b} x + 1 = 0$. Kdy to bude možné?

47. Řešte rovnici $x^2 - 6x - 7 = 0$ jako rovnici ryze kvadratickou (doplněním na čtverec).

Řešení

Danou rovnici upravíme na tvar $x^2 - 6x = 7$ a její levou stranu napíšeme ve tvaru $(x - 3)^2$. Tato mocnina však je o 9 větší, než je v původní rovnici, a proto na levé straně této rovnice musíme stejně velké číslo odečíst. Tím dostaneme formálně změněný tvar dané kvadratické rovnice.

$(x - 3)^2 - 9 = 7$. Odtud $(x - 3)^2 = 16$ a $|x - 3| = 4$. Z toho dostaneme $x_1 = 7$, $x_2 = -1$.

Zkouška správnosti:

Vypočtené kořeny dosadíme do původní rovnice, čímž dostaneme

a) $49 - 42 - 7 = 0$; b) $1 + 6 - 7 = 0$.

48. Řešte doplněním na čtverec:

a) $x^2 + 2x = 3$; b) $x^2 - 2x = 8$; c) $x^2 + 6x = 91$;

d) $x^2 - 6x + 4 = 0$.

49. a) $x^2 - 6x = 16$; b) $x^2 - 10x = 24$; c) $x^2 + 12x = 64$;

d) $x^2 - 14x - 15 = 0$.

50. Doplňte tak, aby na levé straně rovnice vznikla druhá mocnina dvojčlenu:

a) $x^2 - 8x + \ldots = 20 + \ldots$;

b) $x^2 - 11x + \ldots = -30 + \ldots$;

c) $x^2 - 7x + \ldots = -12 + \ldots$;

d) $x^2 - 4x - 45 + \ldots = 0 + \ldots$.

Řešte:

51. a) $x^2 + 14x + 24 = 0$; b) $x^2 + x + 1 = 0$; c) $x^2 - 0{,}8x = 15{,}84$.

52. a) $3x^2 + 6x - 9 = 0$; b) $5x^2 - 20x = 5$; c) $3x^2 + 2x - 8 = 0$;

d) $5x^2 - 15x + 8 = 0$.

53. a) $100x^2 - 20x - 63 = 0$; b) $3x^2 - 5x - 2 = 0$;

c) $4x^2 + x - 3 = 0$; d) $5x^2 - 8x + 5 = 0$.

54. a) $x^2 - \frac{2}{3}x = 8\frac{8}{9}$; b) $x^2 - \frac{4}{5}x = 3{,}84$; c) $x^2 + 0{,}9x - 0{,}36 = 0$;
d) $x^2 + 0{,}66x + 0{,}36 = 0$.
Proveďte vždy zkoušku správnosti řešení.

55. Pro která x je trojčlen $4x^2 + 4x + 1$ roven a) nule, b) 4, c) -5?

56. Doplněním na čtverec řešte:
a) $2x^2 + ax - a^2 = 0$; b) $a^2x^2 + ax - 1 = 0$, $a \neq 0$;
c) $x^2 + ax - a^2 = 0$; *d) $x(a + b) = (x^2 + 1)\sqrt{ab}$.

57. Stanovte, zda jsou ekvivalentní rovnice:
a) $x - 7 = 3 - x$ a $(x - 7)x = (3 - x)x$;
b) $x + 2 = 3$ a $(x + 2)^2 = 3(x + 2)$;
c) $3x - 1 = 5x + 2$ a $(x - 2)(3x - 1) = (5x + 2)(x - 2)$;
d) $x + 2 = 5$ a $(x - 4)(x + 2) = 5(x - 4)$;
e) $(3 - x)(x - 1) = (x + 1)(x - 1)$ a $3 - x = x + 1$;
f) $x^2 + 5x + 8 = 0$ a $x^2 + 5x + 6 = -2$;
g) $\frac{x + 1}{x - 1} = \frac{3 - x}{x - 1}$ a $x + 1 = 3 - x$.

58. Rovnici $x^2 - 1 = x - 1$ násobte výrazem $\frac{1}{x - 1}$. Tím dostanete rovnici $x + 1 = 1$. Jsou tyto rovnice ekvivalentní?

59. Ve kterém případě při násobení obou stran dané rovnice dostaneme rovnice neekvivalentní?

60. Jak je možno najít snadno celočíselné řešení kvadratické rovnice (např. $x^2 + 5x + 6 = 0$) z vlastností kořenů této rovnice?
Jaké jsou kořeny rovnice $x^2 + px + q = 0$ pro a) q kladné, b) q záporné, c) q rovné nule?

61. Řešte rovnice (pomocí známých vlastností koeficientů a kořenů kvadratické rovnice $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$):
a) $x^2 - 7x + 6 = 0$; b) $x^2 + 5x + 4 = 0$;
c) $x^2 - x - 12 = 0$; d) $x^2 + 4x - 12 = 0$.

62. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$; b) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
c) $x^2 - 9x + 18 = 0$; d) $x^2 + 9x + 18 = 0$.

63. a) $x^2 - 7x + 12 = 0$; b) $x^2 - 19x - 20 = 0$;
c) $x^2 - 10x + 24 = 0$; d) $x^2 + 11x + 24 = 0$.

64. Sestavte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou:
a) 2, 3; b) 3, 5; c) 3, -2; d) -5, 2.

65. a) $-2, -4$; b) $-1, \frac{-3}{4}$; c) $\frac{1}{2}, 3$; d) $-5, \frac{1}{2}$.

66. a) $3, 0$; b) $0, -2$; c) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$; d) $-0{,}1, 0{,}3$; e) $0, \frac{1}{2}$.

67. a) $a, \frac{1}{a}$; b) $2a, 3a$; c) $a, -2a$; d) $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}$.

68. Podle návodu k úloze č. 61 rozložte na součin dvou činitelů trojčleny:
a) $x^2 - 4x + 3$; b) $x^2 - 2x - 35$; c) $x^2 - 10x + 9$;
d) $x^2 - 4x - 60$.

69. a) $x^2 + 4x - 45$; b) $x^2 - 13x + 42$; *c) $x^2 - 2ax + a^2 - 1$;
d) levé strany rovnic v příkladech č. 61, 62, 63.

***70.** a) $3x^2 - ax - 10a^2$; b) $m^2 - m - 56$; c) $a^2 - 17a + 72$;
d) $y^2 - ay - 6a^2$; e) $y^2 + ay - 2a^2$.

***71.** a) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2$; b) $4x^2 - 2ax - 12a^2$;
c) $x^2 - 6bx - (4a^2 - 9b^2)$.

72. Aniž řešíte rovnici, určete její druhý kořen, je-li jeden známý:
a) $x^2 - 7x + 10 = 0,\ x_1 = 2$;
b) $x^2 + 7x - 2340 = 0,\ x_1 = 45$;
c) $x^2 + 0{,}9x - 0{,}36 = 0,\ x_1 = 0{,}3$;
d) $x^2 - 6x + 7 = 0,\ x_1 = 3 + \sqrt{2}$.

73. a) $3x^2 + 10x - 32 = 0,\ x_1 = 2$;
b) $5x^2 - 18x - 8 = 0,\ x_1 = 4$;
c) $a^2x^2 - abx + \frac{b^2}{4} = 0,\ x_1 = \frac{b}{2a},\ a \neq 0$;
d) $x^2 + ax - b(x + a) = 0,\ x_1 = b$.

74. Pro která p má daná rovnice kořen x_1:
a) $x^2 - px + 10 = 0,\ x_1 = 2$;
b) $x^2 - px + 6 = 0,\ x_1 = 6$;
c) $x^2 + px + 15 = 0,\ x_1 = 5$;
d) $x^2 + px + 36 = 0,\ x_1 = x_2$?

75. a) $x^2 + px - 24 = 0,\ x_1 = -3$;
b) $x^2 + px + a^2 - b^2 = 0,\ x_1 = a + b \neq 0$;
c) $px^2 - 15x - 7 = 0,\ x_1 = 7$;
d) $px^2 + 12x - 3 = 0,\ x_1 = 0{,}2$.

76. Určete absolutní člen q rovnice, je-li dán její jeden kořen:
a) $x^2 + 7x + q = 0,\ x_1 = 5$;
b) $x^2 + 2{,}3x + q = 0,\ x_1 = 1{,}5$;

c) $x^2 - 4ax + q = 0,\ x_1 = 2a + 1$;
d) $x^2 - 4x \quad + q = 0,\ x_1 = x_2$;
e) $x^2 + 12x \ + q = 0,\ x_1 = x_2$.

77. Dokažte, že rovnice $ax^2 + bx + a = 0$ má kořeny, jejichž součin se rovná jedné ($a \neq 0$).

78. Může mít kvadratická rovnice s celistvými koeficienty jeden kořen tvaru $x_1 = c$, druhý tvaru $x_2 = \sqrt{d}$, kde c, d jsou čísla nezáporná a d není čtverec čísla?

79. Jeden kořen kvadratické rovnice s racionálními koeficienty je a) $1 + \sqrt{2}$; b) $2 - \sqrt{3}$; c) $\sqrt{3} - 1$. Určete druhý kořen.

$\boxed{\textbf{80.}}$ Pro která m bude mít rovnice $9x^2 - 18mx - 8m + 16 = 0$ jeden kořen dvakrát větší než druhý?

Řešení

Podle Viètovy věty platí v normovaném tvaru kvadratické rovnice, tj. $x^2 + px + q = 0$: $x_1 + x_2 = -p,\ x_1x_2 = q$. Pro nás tedy
$$x_1 + x_2 = \frac{18m}{9} = 2m,\ x_1x_2 = \frac{16 - 8m}{9}.$$
Kořen x_1 je roven dvojnásobku druhého kořene, tj. $x_1 = 2x_2$. Proto $3x_2 = 2m,\quad x_1x_2 = 2x_2^2 = \dfrac{16 - 8m}{9} = 2\left(\dfrac{2m}{3}\right)^2$. Odtud $4m^2 = 8 - 4m$, $m^2 + m - 2 = 0,\ m_1 = -2,\ m_2 = 1$. Rovnice $9x^2 + 36x + 32 = 0$ má kořeny, pro něž zřejmě platí $x_1x_2 = \dfrac{32}{9},\ x_1 + x_2 = -4$, tj. $x_1 = -\dfrac{8}{3}$, $x_2 = -\dfrac{4}{3}$. Rovnice $9x^2 - 18x + 8 = 0$, tj. $x^2 - 2x + \dfrac{8}{9} = 0$, má kořeny $x'_1 = \dfrac{4}{3}\ x'_2 = \dfrac{2}{3}$. Obě dvojice splňují tedy požadavek úlohy, a to pro $m_1 = -2,\ m_2 = 1$.

$\boxed{\textbf{81.}}$ Sestavte kvadratickou rovnici v normovaném tvaru, jejíž kořeny jsou $\dfrac{r}{n}, \dfrac{s}{n}$, kde r, s jsou kořeny rovnice $x^2 + px + q = 0,\ n \neq 0$.

Řešení

Hledaná rovnice nechť má tvar $x^2 + p'x + q' = 0$, kde o p' a q' platí: $-p' = r' + s',\ q' = r's'$, když $r' = \dfrac{r}{n},\ s' = \dfrac{s}{n}$. Potom $-p' =$

$= \frac{r}{n} + \frac{s}{n} = \frac{r+s}{n}$, $q' = \frac{rs}{n^2}$. Protože v původní rovnici platilo $-p = r + s$, $q = rs$, je $p' = \frac{p}{n}$, $q' = \frac{q}{n^2}$. Hledaná rovnice má tedy tvar
$x^2 + \frac{p}{n}x + \frac{q}{n^2} = 0$.

Zkouška správnosti: Podle Viètovy věty platí ve výsledné rovnici

$$r' + s' = -\frac{p}{n} = -\left(-\frac{r+s}{n}\right) = \frac{r}{n} + \frac{s}{n}, \; r's' = \frac{q}{n^2} = \frac{rs}{n^2} = \frac{r}{n}\cdot\frac{s}{n}.$$

Řešení je tedy správné.

82. Pro která m mají rovnice $2x^2 - (3m + 2)x + 12 = 0$, $4x^2 - (9m - 2)x + 36 = 0$ společný kořen?

Řešení

Mají-li obě rovnice společný kořen $x = a$, platí: $2a^2 - (3m + 2)a + 12 = 0$, $4a^2 - (9m - 2)a + 36 = 0$. Společným řešením dostaneme $a = \frac{4}{m-2}$ pro $m \neq 2$. Dosadíme-li do prvé rovnice, dostaneme:

$$2\frac{16}{(m-2)^2} - \frac{(3m+2)4}{m-2} + 12 = 0, \text{ odtud } -8m + 24 = 0,\ m = 3.$$

Zkouška správnosti:

Pro $m = 3$ zní obě rovnice $2x^2 - 11x + 12 = 0$,
$4x^2 - 25x + 36 = 0$.

První z nich má kořeny $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{3}{2}$, druhá $x_1' = 4$, $x_2' = \frac{9}{4}$.

Závěr: Obě rovnice mají společný kořen ($x = 4$) pro $m = 3$.

83. Aniž řešíte rovnici $x^2 - 2x - 15 = 0$, vyjádřete:
a) součet druhých mocnin;
b) rozdíl druhých mocnin jejich kořenů.

84. Jsou-li r, s kořeny rovnice $x^2 + px + q = 0$, sestavte rovnici, jejíž kořeny jsou ke kořenům r, s:
a) čísla opačná;
b) čísla o n menší;
c) čísla převrácená ($r \neq 0$, $s \neq 0$);
d) n- násobky;
e) $r + \frac{1}{r}$, $s + \frac{1}{s}$.

85. Dokažte, že součet převrácených čísel velikostí kořenů rovnice
$x^2 + px + q = 0$ je roven $\frac{-p}{q}$.

86. Dokažte: Pokud má rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ kořeny, pak
a) je-li $c = -b$, je součet převrácených čísel kořenů roven 1;
b) je-li $c = b$, je součet převrácených čísel velikostí kořenů roven -1;
c) je-li $c = a$, jsou oba kořeny navzájem převrácená čísla;
d) je-li $c = -a$, je jeden kořen převrácené číslo druhého s opačným znaménkem.
Dokažte, že platí věty k a) b) c) d) obrácené.

87. Dokažte, že kořeny rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ jsou převrácená čísla kořenů rovnice
$cx^2 + bx + a = 0$ $(a \neq 0, c \neq 0)$.

88. Jaké musí být p a q v rovnici $x^2 + px + q = 0$, aby její kořeny byly také p, q?

89. Dokažte, že kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nemůže mít více než dva kořeny.

90. Je-li diskriminant kvadratické rovnice roven nule, pak levá strana této rovnice je čtverec. Dokažte.

91. Má-li kvadratická rovnice s racionálními koeficienty kořen iracionální $a + \sqrt{b}$, pak druhý kořen musí být též iracionální, a to $a - \sqrt{b}$. Dokažte.

92. Doplněním na čtverec odvoďte vzorce pro řešení normovaného tvaru kvadratické rovnice.
$$\left(x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,.\right)$$
Z něho pak odvoďte vzorec pro řešení obecného tvaru kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, je-li $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$, kde a, b, c jsou reálná čísla, $a \neq 0$.

93. Pro které hodnoty q má rovnice $x^2 - 2x + q = 0$:
a) dvě řešení reálná různá; b) jediné řešení; c) nemá řešení v množině reálných čísel?

Řešení

a) Je-li diskriminant (ve vzorci pro řešení kvadratické rovnice) kladný, má rovnice dvě řešení reálná různá. Pro nás tedy platí $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 - q >$

> 0, $q < 1$. b) Je-li diskriminant roven nule, tj. $1 = q$, má rovnice dvě stejná řešení. c) Je-li diskriminant záporný, nemá kvadratická rovnice v oboru reálných čísel řešení. V našem případě tedy $1 - q < 0$, $q > 1$. O správnosti tvrzení se můžeme přesvědčit řešením dané kvadratické rovnice, když za q volíme hodnoty podle požadavku jednotlivých případů a), b), c). Proveďte sami.

94. Podle hodnoty diskriminantu rozhodněte, která z daných rovnic má dva kořeny reálné různé, která dva reálné splývající a která nemá v oboru reálných čísel řešení:

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$; b) $x^2 - 10x + 25 = 0$;
c) $x^2 + 6x + 9 = 0$; d) $x^2 - x - 6 = 0$;
e) $x^2 - 2x - 3 = 0$; f) $x^2 - 4x + 3 = 0$;
g) $x^2 - 14x + 49 = 0$; h) $x^2 + x + 1 = 0$.

95. Rozhodněte, která rovnice má kořeny různé, která má kořen jediný (dvojnásobný):

a) $x^2 = 2x + 4$; b) $2x^2 - 9x + 7 = 0$;
c) $2x^2 + 3x - 2 = 0$; d) $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

96. Aniž řešíte rovnice, určete, která z nich má kořeny iracionální, tj. diskriminant je číslo nezáporné, ale není roven druhé mocnině čísla:

a) $x^2 - 4x + 4 = 0$; b) $x^2 + 2x - 4 = 0$;
c) $5x^2 + 2x - 1 = 0$; d) $2x^2 - 9x + 17 = 0$.

97. Udejte podmínku, za které rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde a, b, c jsou čísla racionální, má kořeny iracionální ($a \neq 0$).

98. Řešte pomocí vzorce všechny úlohy 94, 95.

99. Řešte rovnice a proveďte vždy zkoušku správnosti řešení:

a) $x^2 + 4x - 96 = 0$; b) $x^2 - 6x - 216 = 0$;
c) $x^2 + 22x = 504$; d) $x^2 + 27x + 126 = 0$.

100. a) $x^2 - 24x + 140 = 0$; b) $x^2 + 15x = 216$;
c) $x^2 - 17x + 72 = 0$; d) $x^2 + 43x + 42 = 0$.

101. a) $x^2 + 0{,}9x - 0{,}36 = 0$; b) $3x^2 - 5x = 78$;
c) $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

102. a) $5x^2 - 18x - 8 = 0$; b) $10x^2 + 9x - 9 = 0$;
c) $4x^2 + 17x = 15$; d) $64x^2 - 16x - 35 = 0$.

103. a) $35x^2 - 74x + 35 = 0$; b) $9x^2 - 12x + 9 = 0$;
c) $100x^2 - 20x - 63 = 0$; d) $64x^2 - 16x - 3 = 0$.

104. a) $\frac{3}{2}x^2 + 12x - \frac{99}{2} = 0$; b) $\frac{x^2}{5} - 2x : 3 = \frac{x + 5}{6}$;

c) $\dfrac{x(x-7)}{3} - 1 = \dfrac{11x}{10} - \dfrac{x-4}{3}$;

d) $\dfrac{5(x-1)}{4} = \dfrac{x}{6} + \dfrac{6}{x}$.

105. a) $\dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{1}{2}x = -\dfrac{3}{2}$; b) $\dfrac{x^2}{3} - 0{,}2x - 0{,}09 = 0$;

c) $\dfrac{5}{6}x^2 - \dfrac{20}{3}x - 12{,}5 = 0$; d) $\dfrac{5}{4}x^2 + \dfrac{45}{2}x - 50 = 0$.

106. Řešte rovnice a proveďte vždy zkoušku správnosti řešení:
a) $(x+3)(x+4) + (x-2)(x-1) = 30$;
b) $(2x+1)(x-3) + (2x-1)(x+2) = 4x - 1$;
c) $(x-3)^2 + (x-4)^2 = (x-2)^2$;
d) $(x-5)^2 + (2+x)^2 = (3+x)^2$;
e) $(4y-3)^2 - (6y+4)^2 = 29$;
f) $(5z-24)^2 - (3z-11)^2 = 21$;
g) $(6z-5)^2 - (5z-2)^2 = 37$;
*h) $x(x-\sqrt{3}) - \sqrt{3}(x-1) - (5+\sqrt{3}) = 0$.

107. Řešte pro přípustné hodnoty x (i ve všech dalších cvičeních):

a) $x - \dfrac{5}{x} = \dfrac{11}{4}$; b) $\dfrac{4x+5}{x} - \dfrac{12}{x-2} = 1$;

c) $\dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{x-1}{x-5} = 4$; d) $\dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{x-6}{x+6} = 2\dfrac{1}{5}$.

108. a) $\dfrac{5-3x}{3-5x} + \dfrac{3-5x}{5-3x} = \dfrac{5}{2}$;

b) $\dfrac{5}{x-2} + \dfrac{3}{x-3} - \dfrac{7}{x-1} = 0$;

c) $\dfrac{1}{x+4} - \dfrac{4}{x-4} + \dfrac{x^2-20}{x^2-16} = 0$;

d) $\dfrac{2}{1-x} - \dfrac{7}{x+1} = \dfrac{3}{x}$.

109. a) $\dfrac{3x}{x+6} - \dfrac{4}{x-1} = 4$; b) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{9}{4x}$;

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x+3} + \dfrac{4}{x-3} = 0$; d) $\dfrac{5}{3-2x} + \dfrac{4}{x-2} = \dfrac{5}{x+1}$.

110. Řešte kvadratickou rovnici

$$\frac{a+b}{2a-ax+2-x}+\frac{1}{a+1}=\frac{b+1}{2x-x^2}.$$

Řešení

Rovnici upravíme na

$$\frac{a+b}{2(a+1)-x(a+1)}+\frac{1}{a+1}=\frac{b+1}{x(2-x)}$$

$$\frac{a+b}{(a+1)(2-x)}+\frac{1}{a+1}=\frac{b+1}{(2-x)\,.\,x}.$$

Daná rovnice má tedy smysl je pro $x \neq 0$, $x \neq 2$, $a \neq -1$. Za těchto předpokladů se zbavíme zlomků tím, že celou rovnici vynásobíme výrazem
$(a+1)(2-x)x \neq 0$. Dostaneme tím rovnici
$x^2-(a+b+2)x+(a+1)(b+1)=0$. Odtud řešením, tj. dosazením do vzorce např. $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$, dostaneme $x_1 = a+1$, $x_2=b+1$.

Zkouška:

Dosadíme výsledky do původní rovnice.

$$\mathrm{L}=\frac{a+b}{2a+2-a^2-a-a-1}+\frac{1}{a+1}=\frac{a+b}{1-a^2}+\frac{1}{a+1}=$$

$$=\frac{b+1}{1-a^2},$$

$$\mathrm{P}=\frac{b+1}{2a+2-a^2-2a-1}=\frac{b+1}{1-a^2}.$$

L = P. Řešení je tedy správné. Zkoušku pro druhý kořen bychom provedli zcela analogicky.

Závěr: Daná rovnice má dvě řešení:

$x_1=a+1$, $x_2=b+1$.

111. Řešte (neznámá je x):

a) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x-2}{x}=\dfrac{4}{x(x-2)}$;

b) $\dfrac{x+a}{x}+\dfrac{x}{x+a}=\dfrac{a^2}{x(x+a)}$;

c) $\dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{x-3}{x+3} = 2a$;

d) $\dfrac{2x}{x+b} + \dfrac{x}{x-b} = \dfrac{b^2}{4x^2 - 4b^2}$.

112. a) $\dfrac{2x}{x-b} + 12x^2 : (b^2 - x^2) = \dfrac{b-x}{x+b}$;

b) $\dfrac{a-x}{x-b} - \dfrac{x-b}{a-x} = \dfrac{4\,ab}{a^2 - b^2}$, $|a| \neq |b|$;

c) $x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$;

d) $a + x = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{x}$, $a \neq 0$.

113. Odůvodněte vzorec $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$ pro kořeny rovnice $ax^2 + {}$ $+ 2bx + c = 0$ a užijte ho pro řešení rovnic:

a) $3x^2 - 10x + 3 = 0$; b) $3x^2 + 22x + 7 = 0$;
c) $35x^2 - 74x + 35 = 0$; d) $35x^2 + 4x - 63 = 0$;
e) $x^2 + 12ax - 28a^2 = 0$; f) $x^2 - 14ax + 49a^2 = 0$.

Proveďte zkoušky správnosti.

114. Řešte rovnice a proveďte zkoušku správnosti řešení (uveďte podmínky řešitelnosti):

a) $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{a^2 + 4}{2a}$; b) $x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4a^2 - b^2}{2ab}$;

c) $\dfrac{1}{x+a} + \dfrac{1}{x-a} = \dfrac{3}{4a}$;

*d) $\dfrac{ax+b}{ax-b} - \dfrac{ax-b}{ax+b} = \dfrac{4\,ab}{a^2 - b^2}$.

***115.** a) $1 - \dfrac{2b}{x-a} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ax + x^2}$;

b) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a+x} + \dfrac{1}{a+2x} = 0$;

c) $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{m+n+x}$; d) $\dfrac{2a+m}{a+x} - \dfrac{2a-m}{a-x} = \dfrac{2a}{m}$.

***116.** Pro přípustné hodnoty řešte rovnice:

a) $\dfrac{x}{x-a} - \dfrac{2a}{x+a} = \dfrac{8a^2}{x^2-a^2}$;

b) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{ax-bx} + \dfrac{b}{a^2x-abx} = \dfrac{2}{a-b}$;

c) $\dfrac{1}{cx+ux} - \dfrac{1}{ac+au} = \dfrac{a-x}{2ax^2}$;

d) $\dfrac{1}{ax-cx^2} - \dfrac{1}{a-c} = \dfrac{d(x-1)}{a^2-acx-ac+c^2x}$;

e) $\dfrac{(x-3a)x}{a^2-b^2} + 1 - \dfrac{b}{a-b} = \dfrac{x}{b-a}$;

f) $\dfrac{2}{k+2x} - \dfrac{2}{k-2x} - \dfrac{4x^2-4k-k^2}{4x^2-k^2} = 0$.

117. Pro která reálná čísla a mají dané rovnice kořeny:
a) shodné;
b) různé.
$(5a-1)x^2 - (5a+2)x + 3a - 2 = 0$;
$x^2 + 3x + 3 + a(x^2 + x) = 0$;
$4x^2 - (a-4)x + 1 = 0$;
$2ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$.

118. Zpaměti: Pro které hodnoty b má rovnice $x + \dfrac{1}{x} = b$ reálné kořeny?

3. ROVNICE S NEZNÁMOU V ODMOCNĚNCI

119. Určete, zda jsou ekvivalentní tyto rovnice:

a) $x - 3 = 6 - 2x$;
$\sqrt{x-3} = \sqrt{6-2x}$;

b) $8 - x = 2x - 1$;
$8 - x + \sqrt{1-x} = 2x - 1 + \sqrt{1-x}$;

c) $x = 1 + 3x$;
[illegible]

d) $x + 5 = 1$;
$\sqrt{x+2} = \sqrt{3}$.

120. Která z následujících rovnic má řešení (která nemá):

a) $\sqrt{x+2} = 3$; b) $\sqrt{x+2} = -3$; c) $-\sqrt{x+3} = 3$;
d) $-\sqrt{x+3} = -3$; e) $\sqrt{2x+1} = 5$; f) $\sqrt{2x+1} = -5$;
g) $-\sqrt{3x+2} = 6$; h) $-\sqrt{3x+2} = -6$.

121. Vyložte, proč nemohou mít řešení rovnice:

a) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} = 0$; b) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 0$;

c) $\sqrt{x-7} - \sqrt{5-x} = 3$; d) $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{6x+7} = -4$.

122. Řešte rovnice a proveďte zkoušku správnosti řešení:

a) $\sqrt{x} = 2$; b) $\sqrt{x} - 3 = 0$; c) $\sqrt{x-3} = 5$;

d) $\sqrt{2x-7} = 5$; e) $3\sqrt{4x+1} = 21$;

f) $4\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2x+6} = 1\frac{1}{2}$; g) $n\sqrt{x-m} = p$.

123. a) $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x-3}$; b) $\sqrt{4x+4} = \sqrt{5x-4}$;

c) $\sqrt{x^2-39} = x-3$; d) $2\sqrt{3z+6} = 3\sqrt{2z-4}$;

e) $\sqrt{3z-17} = \sqrt{133-2z}$.

124. a) $x-4 = \sqrt{2x}$; b) $x+4 = \sqrt{2x}$; c) $3\sqrt{x+5} = x+5$;

d) $3\sqrt{x+5} = -(x+5)$.

125. a) $3\sqrt{x+5} = x-5$; b) $3\sqrt{x+5} = 5-x$;

c) $x+1 = \sqrt{5x+1}$; d) $x^2 + \sqrt{x^2-9} = 21$.

126. a) $x = 306 + \sqrt{x}$; b) $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 6 = 0$;

(dosaďte za $\sqrt{x} = y$) (dosaďte za $\sqrt[3]{x} = y$)

c) $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} - 3 = 0$; d) $\sqrt{x-3} + 6 = 5\sqrt[4]{x-3}$;

(dosaďte za $\sqrt[4]{x-3} = y$)

*e) $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2+5x+1} = 2$.

127. a) $\sqrt{x^2+15} = x+1$; b) $\sqrt{xy} = 36$,

$x - y = 30$;

c) $\sqrt{x^2+8} - x^2 - 8 = -12$;

*d) $\sqrt{4x^2-14x+1} = 2x-5$; *e) $\sqrt{25x^2-28x-8} = 5x-4$.

128. Řešte:

a) $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = \sqrt{10}$; b) $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = 4$;

c) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x^2-7} = 0$; *d) $\sqrt{4x^2-20x+25} = x-1$.

129. a) $\sqrt{2x-5} - \sqrt{2x+2} = 1$; b) $\sqrt{2x-5} + \sqrt{2x+2} = 1$;
c) $-\sqrt{2x-5} + \sqrt{2x+2} = 1$; d) $-\sqrt{2x-5} - \sqrt{2x+2} = 1$.

130. a) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2} = 7$; b) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = \dfrac{15}{\sqrt{x+4}}$;
c) $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} = 9$; d) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 4$.

131. a) $\sqrt{2x} + 1 = \sqrt{13+2x}$; b) $\sqrt{x+27} = 2 + \sqrt{x-5}$;
c) $\sqrt{9+x} - \sqrt{x-7} = 2$; d) $\sqrt{x+9} - \sqrt{x+2} = 1$;
e) $\sqrt{x+\dfrac{3}{2}} + \sqrt{x-\dfrac{1}{2}} = 2$; f) $\sqrt{2x+9} - \sqrt{2x-7} = 2$.

132. a) $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) = x+1$; b) $(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+7) = x -$
$- 2\sqrt{x} - 3$;
c) $x + 7 + 5\sqrt{x+1} = 0$; d) $(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}-7) = 3$.

133. a) $\sqrt{x-a} = b$; b) $\sqrt{a-x} = a+b$;
c) $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{2a}$; d) $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{2x}$.

134. a) $\sqrt{x^2+8ax-9a^2} = a - x$; b) $\sqrt{x^2+8ax+16a^2} = 2x - 5a$;
$a \neq 0$;
*c) $\sqrt{x+1} + \dfrac{kx}{\sqrt{x+1}} = 1$, $k > 0$;
*d) $\sqrt{a^2+bx} + \sqrt{a^2-bx} = \sqrt{2abx}$; $a > 0$, $b > 0$;
e) $\sqrt{a^2-x} + \sqrt{b^2+x} = a+b$.
(V úlohách 133 a 134 je neznámá x.)

4. SLOVNÍ ÚLOHY NA KVADRATICKOU ROVNICI

135. Velikosti stran obdélníka jsou v poměru 4 : 9. Zvětšíme-li menší rozměr tohoto obdélníka o 25 % jeho velikosti a současně zmenšíme větší rozměr o 4 cm, zvětší se jeho obsah o 204 cm². Jaké rozměry má obdélník?

Řešení

Hledané rozměry obdélníka nechť jsou a, b. Potom $a : b = 4 : 9$, $9a = 4b$, $b = \dfrac{9a}{4}$. Nový obdélník bude mít rozměry $a' = a + a\dfrac{25}{100} =$

$= \frac{5a}{4}$, $b' = b - 4 = \frac{9a}{4} - 4 = \frac{9a - 16}{4}$. Obsah nového obdélníka bude: $P = a'b' = \frac{5a}{4} \cdot \frac{9a - 16}{4}$. Tento obsah je roven obsahu původního obdélníka zvětšeného o 204 cm², tj. $\frac{9a^2}{4} + 204 = \frac{5a}{4} \cdot \frac{9a - 16}{4}$. Po roznásobení a úpravě dostaneme $9a^2 - 80a - 3\,264 = 0$, a z toho $a_1 = 24$; a_2 je záporné, tedy nevyhovuje. $b = \frac{9}{4} \,.\, 24 = 54$.

Zkouška správnosti: Menší rozměr druhého obdélníka bude 24 cm + + 6 cm = 30 cm, větší rozměr 50 cm. Jeho obsah tedy je 1 500 cm².
Obsah původního obdélníka je 24 cm . 54 cm = 1 296 cm², což je o 204 cm² méně než obsah druhého obdélníka.
Závěr: Rozměry původního obdélníka jsou 24 cm, 54 cm.

136. U dvojciferného čísla je druhá číslice zleva o dvě menší než první. Násobíme-li toto číslo jeho ciferným součtem, dostaneme 1 204. Určete to číslo.

137. Odvěsna pravoúhlého trojúhelníka je rovna 75 % druhé odvěsny. Určete obvod tohoto trojúhelníka, je-li jeho obsah 48 cm².

138. Zvětšíte-li délku strany čtverce o 1, zdvojnásobí se jeho obsah. Určete stranu tohoto čtverce.

139. Zvětšením strany čtverce se zvětšil jeho obsah o 10,25 %. O kolik procent byla zvětšena jeho strana?

140. Obsah lichoběžníka je 210 cm². Rozdíl obou základen je 6 cm, výška je o 2 cm větší než kratší základna. Určete velikost základen i výšky.

141. V rovnoramenném lichoběžníku, jehož obsah je 180 cm², je střední příčka o 3 cm delší než výška. Určete výšku i velikost základen, jejichž velikosti jsou vyjádřeny celými čísly.

142. Jeden ze dvou mnohoúhelníků má dvakrát tolik stran než druhý a o 135 úhlopříček více. Kolik stran má každý z nich?

143. Zvětšíme-li poloměr kruhu o 3 cm, zvětší se jeho obsah devětkrát. O kolik procent byl poloměr zvětšen?

144. Zmenšíme-li obvod kruhu o jeho čtvrtinu, zmenší se jeho obsah o 43,75 %. Vypočtěte velikost poloměru.

145. Ve škole bylo přespolních žáků o 8 více než domácích. Domácích žáků je právě tolik procent celého počtu žáků, kolik bylo všech žáků. Určete počet žáků.

146. Ze dvou sil působících v jednom bodě ve směrech k sobě kolmých je jedna o n větší než druhá. a) Jak jsou velké, je-li jejich výslednice k? (Řešte pro: $n = 14$ kp, $k = 26$ kp.) b) Jak velké by byly obě síly, kdyby výslednice byla 26 kp a $n = 0$?

147. Cena tkaniny (tisku) byla snížena o tolik procent, kolik korun stál jeden metr před snížením cen. O kolik procent byla tato cena snížena, jestliže se metr pak prodával po 16 Kčs?

148. Výdělek učně se zvýšil o tolik procent, kolik set korun učeň vydělal původně měsíčně. O kolik procent tedy se jeho výdělek zvýšil, když pak vydělal 636 Kčs?

***149.** Po dvojím snížení cen o stejné procento klesla cena fotografického aparátu z 300 Kčs na 192 Kčs. O kolik procent byla vždy cena snížena?

***150.** Počet obyvatelstva města vzrostl za dva roky z 20 000 na 22 050 obyvatel. Určete roční procento přírůstku obyvatelstva tohoto města za předpokladu rovnoměrného růstu počtu obyvatelstva.

151. Obdélníková parcela o stranách a, b má být zvětšena o f m^2 tak, že na všech stranách se její velikost zvětší o stejnou délku. Jak široký bude přidaný pás? Řešte též pro $a = 200$ m, $b = 120$ m, $f = 1$ ha.

152. Dvě silnice se protínají v pravém úhlu. Po jedné z nich jede nákladní auto průměrnou rychlostí c_1 (40 km/h), po druhé silnici osobní auto rychlostí c_2 (80 km/h). Za jakou dobu budou od sebe vzdálena m (asi 50 km)?

153. Přístroje na letišti L ohlásily nepřátelské bombardovací letadlo v místě A ležícím 120 km severně od L. Letadlo letělo rychlostí 420 km/h v kursu (směru) přesně východním. Šedesát šest vteřin poté vyletěla z L stíhačka rychlostí 1 300 km/h v kursu SSV a brzy bombardovací letadlo dostihla a zneškodnila na místě B. Obě letadla neměnila až do setkání kurs ani rychlost. Vypočtěte dobu letu stíhačky i vzdálenost AB, LB.

***154.** V sudě bylo 20 litrů čistého lihu. Část toho lihu odlili a sud doplnili vodou. Potom odlili totéž množství směsi jako poprvé a opět doplnili vodou. Tím vznikl v sudě 25procentní líh. Jaké množství lihu odlili poprvé?

155. Jakou dobu letí k vrcholu své dráhy těleso vržené svisle vzhůru rychlostí 40 m/s, dosáhne-li výše 80 m?

156. Za jakou dobu dospěje koule vystřelená svisle vzhůru rychlostí $c =$ $= 800$ m/s (nehledě k odporu vzduchu) do výšky a) 14 km, b) 40 km, c) největší výšky?

157. Součet druhých mocnin tří po sobě následujících lichých čísel je 155. Určete je.

*158. Kámen hozený do šachty rychlostí 20 m/s bylo nahoře slyšet dopadnout za 8 s. Jak je šachta hluboká? (Rychlost zvuku je 340 m/s.) [Návod: dráha vrhu dolů $x = ct + 0{,}5\,g\,t^2$, kde c je rychlost vrhu, t doba pohybu tělesa.]

159. Žáci pracovali na školní brigádě v úkolu. Za sklizeň 10 ha lnu měli dostat odměnu 4 800 Kčs. Do jejich skupiny byli přiřazeni další tři žáci, a tak dostal každý žák odměnu o 80 Kčs menší, než by mu bylo připadlo původně. Kolik žáků bylo ve skupině?

160. Jeden ze dvou bratrů vystačí na cestě s určitou částkou peněz o devět dní déle než druhý. Když cestují spolu, stačí jim peníze na dvacet dní. Kolik dní by mohl cestovat každý sám?

161. Vzdálenost mezi dvěma stanicemi na železnici je 140 km. Rychlík ujede tuto trať o 90 minut dříve než osobní vlak. Určete rychlost obou vlaků, víte-li, že osobní vlak ujede za hodinu o 30 km méně než rychlík.

162. Pro svoz a tun obilí od mlátiček do skladů bylo podle odhadu třeba zajistit určitý počet nákladních automobilů. Dva z nich však byly odvolány na jinou práci, a proto každý vůz musel odvézt o 1 tunu obilí více, než bylo předpokládáno. Kolik bylo vozů?

163. Součet čísla a jeho převráceného čísla je n. Určete toto číslo. Řešte též pro a) $n = 41 : 20$, b) $n = 14$. Při které hodnotě n bude toto číslo i převrácené číslo stejné? (Z diskriminantu.)

164. Dvě tělesa A, B se pohybují rovnoměrně. Rychlost tělesa A je o 2 m/s větší než rychlost tělesa B. Těleso A potřebuje na dráhu 12 m o 3 sekundy méně než těleso B. Určete rychlost obou těles.

165. Těleso A se pohybuje rovnoměrně rychlostí o 2 m/s větší než těleso B. Obě tělesa potřebují k proběhnutí dráhy 4 m různé časy, jejichž součet je 3 s. Určete rychlosti obou těles.

166. Sadař koupil za 720 Kčs stromky. Kdyby byl každý stromek o 2 Kčs lacinější, byl by sadař za tytéž peníze dostal o 5 kusů více. Kolik stromků koupil?

167. Z letiště vylétla současně dvě letadla do téhož místa vzdáleného 1 600 km. Rychlost jednoho z nich je však o 80 km/h větší než druhého, a proto toto letadlo přiletělo na určené místo o hodinu dříve. Určete rychlost obou letadel.

168. Dvě města jsou vzdálena 100 km. Z jednoho vyjíždějí současně dvě auta do druhého, přičemž první auto má rychlost o 10 km za hodinu větší než druhé, a přijede tedy do druhého města o 50 minut dříve než druhý vůz. Určete rychlost obou vozidel.

169. Turista má vykonat cestu 45 km. Kdyby urazil za hodinu o 0,5 km

méně, došel by do cíle o 1 hodinu později. Určete rychlost turistovy chůze.

170. Povoz má ujet dráhu 108 km. Ujede-li za hodinu o 3 km více, je u cíle o půl hodiny dříve. Kolik kilometrů ujede za hodinu?

171. Na dráze 240 m vykonalo přední kolo vozu o 20 otoček více než kolo zadní. Obvod zadního kola je o 1 m větší než obvod předního kola. Určete velikost obvodů obou kol.

172. Jeden dělník potřebuje na opracování určitého detailu o 7 minut méně než druhý dělník. Kolik součástek každý z nich tedy opracuje za 4 hodiny, jestliže první jich za tuto dobu opracuje o 28 více?

173. Několika stejnými jeřáby vyložili 96 vagónů zboží. Kdyby bylo takových jeřábů o 2 více, připadlo by na vykládku pro každý jeřáb o osm vagónů méně. Kolik bylo jeřábů?

174. Trolejbus má trať dlouhou 15 km. Zvětší-li se jeho rychlost o 3 km za hodinu, spotřebuje na jednu jízdu tam i zpět o půl hodiny méně času. Kolik času potřebuje trolejbus na jednu jízdu (tam i zpět) a jaká je jeho rychlost?

175. Státní statek měl do určité lhůty osít 200 ha polí. Denně však osel o 5 ha více, než bylo plánováno, a proto ukončil setí polí dva dny před plánem. Za kolik dní byl tedy statek s prací hotov?

***176.** Žák uložil nastřádané peníze a po roce mu záložna připsala 15 Kčs úroků. Přidal k nim dalších 85 Kčs a po dalším roce měl na vkladní knížce i s úroky 420 Kčs. Jak velká částka byla uložena původně a kolikaprocentní byl úrok?

177. Družstvo si připravilo 210 tun siláže na zimu. Protože však mimo plán přikoupilo 10 kusů dobytka, zmenšilo dávku siláže o půl tuny na kus. Kolik tun siláže plánovali v družstvu pro kus původně?

***178.** Brigáda lesních dělníků měla za určitý počet dní zpracovat 216 m^3 polenového dříví. První tři dny pracovala podle plánu, ale potom zpracovala každý den o 8 m^3 dřeva více. Tak už den před plánovaným termínem bylo zpracováno 232 m^3 polen. Kolik m^3 polen měla brigáda zpracovat denně podle plánů?

179. Směs 8 kg kapaliny o hustotě ϱ_1 se 6 kg kapaliny o hustotě ϱ_2 dá kapalinu o hustotě 0,7 g/cm^3. Určete hustoty obou kapalin, má-li první hustotu o 0,2 g/cm^3 větší než druhá.

180. Parník potřeboval na cestu 48 km proti proudu a 48 km zpět, dohromady pět hodin. Jakou rychlostí by jel parník v klidné vodě, byla-li rychlost proudu 4 km za hodinu?

181. Dva dělníci pracující spolu mohli vykonat určitou práci za t h, přičemž první sám by ji vykonal o 4 h dříve než druhý. Za jak dlouho by ji vykonal každý sám?

***182.** Traktor zorá za n h (8 h) o p ha (3,5 ha) více než kůň. Kolik ha zorá za n h (8 h) kůň, zorá-li traktor 1 ha o t h (14 h) dříve než kůň?

***183.** Dva výfuky dopravují obilí od mlátičky. Výkon prvního je o n tun za hodinu vyšší než druhého. Kolik tun obilí dopraví každý z nich, jestliže první potřebuje pro dopravu p tun zrna o t hodin méně než druhý?

***184.** Dvě tělesa se pohybují po obvodu kruhové dráhy. První těleso proběhne dráhu o d sekund dříve než druhé. Pohybují-li se ve stejném směru, setkají se každých t sekund. Jakou část kruhové dráhy proběhne každé těleso?

***185.** V hledišti bylo celkem a sedadel v několika řadách. V každé řadě byl stejný počet míst. Když přidali v každé řadě b míst a počet řad zmenšili o c, vzrostl počet míst o 10 % původního počtu míst. Kolik sedadel bylo v každé řadě?

186. Dva světelné zdroje svítivosti $I_1 = 50$ cd a $I_2 = 75$ cd jsou nad horizontální rovinou ve výši $v_1 = 3$ m (zdroj S_1), $v_2 = 2$ m (zdroj S_2). Vzdálenost pat obou stožárů je 5 m. Kde na této spojnici způsobují oba zdroje stejné osvětlení?

***187.** Potřebuje-li žárovka napětí 110 V a proud 0,2 A, kolik takových žárovek zapojených vedle sebe lze zapnout do zdroje o výkonnosti 5 k a vnitřním odporu $R_1 = 0{,}2\,\Omega$?

***188.** Mezi Zemí a Měsícem určete bod, v němž je vlivem přitažlivosti stav bez tíže. (Hmotnost Měsíce m, hmotnost Země M, poměr $\frac{M}{m} = 81{,}5$, vzdálenost středů obou těles $d = 384\,000$ km.)

189. Najděte chybu v „důkazu", že libovolné číslo je rovno jinému libovolnému číslu: ta čísla ať jsou x, y; $x \neq y$. Sledujte:

a) $-xy = -xy$; b) $x^2 - x^2 - xy = y^2 - y^2 - xy$;

c) $x^2 - x(x + y) = y^2 - y(x + y)$;

d) přičteme-li na obou stranách rovnosti $\left(\frac{x + y}{2}\right)^2$, dostaneme

e) $\left(x - \frac{x + y}{2}\right)^2 = \left(y - \frac{x + y}{2}\right)^2$, z toho

f) $x - \frac{x + y}{2} = y - \frac{x + y}{2}$, a tedy $x \overset{?}{=} y$.

5. SOUSTAVY ROVNICE KVADRATICKÉ A LINEÁRNÍ

190. Řešte soustavu rovnic: $3x - 2y - 8 = 0\,,$
$x^2 + xy + 3y + 1 = 0\,.$

Řešení

Předpokládejme, že existuje takové x a y, které vyhovuje oběma rovnicím. K řešení použijeme metody dosazovací. Z lineární rovnice vyjádříme jednu neznámou jako funkci druhé, dosadíme do kvadratické rovnice a pokračujeme ekvivalentními úpravami. Tedy:

$$y = \frac{3x - 8}{2}\,,$$

$$x^2 + (3 + x)\frac{3x - 8}{2} + 1 = 0\,,$$

$$2x^2 + 3x^2 - 8x + 9x - 24 + 2 = 0,$$

$$5x^2 + x - 22 = 0.$$

Řešení této rovnice je $x_1 = 2$, $x_2 = -2{,}2$, $y_1 = -1$, $y_2 = -7{,}3$. Obě dvojice řešení vyhovují oběma daným rovnicím.

Řešte:

191. a) $x + y = 5\,,\quad xy = 6;$ b) $x - y = 2\,,\quad xy = 48;$ c) $x - y = 7\,,\quad xy = 30;$ d) $x - y = \dfrac{5}{6}\,,\quad xy = 1\,.$

192. a) $x^2 + y^2 = 125\,,\quad x^2 - y^2 = 25;$ b) $x + y^2 = 5\,,\quad 2x - y^2 = 1;$ c) $x^2 = 40 - y^2\,,\quad x = 3y\,.$

193. a) $x^2 + y^2 = 74\,,\quad 3x - 2y = 1;$ b) $x^2 - y^2 = 640\,,\quad x : y = 7 : 3;$ c) $5x^2 + y = 3xy\,,\quad 2x - y = 0\,.$

194. a) $2x^2 - 3y^2 = 24,\quad 2x = 3y;$ b) $x(x + y) = 25,\quad 2x + 3y = 10;$ c) $5x^2 + y = 3xy,\quad y = 0\,.$

195. a) $y : x = 1 : x\,,\quad x : 8 = y : 1;$ b) $(x - 2) : (y - 3) = 1,\quad (x - 2) : 1 = 1 : (y - 3);$
c) $x - xy + y^2 = 7,\quad 3x - 2y = 0;$ d) $x^2 - xy + y^2 = 7,\quad 2x - 3y = 0.$

Řešte (a, b jsou vždy parametry):

196. a) $x - y = a,\quad xy = b;$ b) $x + y = 2a,\quad xy = b;$ c) $x + y = 2a,\quad xy = a^2\,.$

197. a) $x + y \quad a,\quad xy = -2a^2;$ b) $x + y = a + 2b,\quad xy = ab + b^2;$ c) $x^2 + y^2 = 5a^2,\quad x + y = 3a.$

198. a) $x + yx + y = 7$, $x - xy + y = 1$; b) $2x - xy + 2y = 4$, $2x + xy + 2y = 6$;

c) $x + y = 12$, $(x - 1)(y - 1) = 24$.

199. a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$, $xy = 9$; b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$, $xy = 4$; c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$, $\sqrt{xy} = 6$.

200. a) $x^2 + y^2 = 25$, $xy = 12$; b) $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 - y = 5$; c) $x^2 + y = 6$, $x^2y = 3$.

201. a) $xy = 4$, $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 16$; *b) $(x + 2y)^2 - 2(x + y)^2 = -7$, $(x + 2y)^2 + 2(x + y)^2 = 9$.

202. a) $x^2 + y^2 = 2a^2$, $xy = a^2$; b) $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$, $x + y = a - b$, $a \neq b$;

c) $\dfrac{x - y}{a + 1} = a$, $(a \neq -1)$, $x - y^2 = 0$.

203. a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -1$, $12xy = 1$; b) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -\dfrac{4}{5}$, $x - y = 4$; c) $x : y = b : 1$, $xy = a$.

204. a) $\dfrac{x + y}{y} = a$, $1 + \dfrac{xy}{a + 1} = a^2$, $(a \neq -1)$; b) $\dfrac{x}{a - b} - \dfrac{a + b}{y} = 0$, $x - y = 0$, $(a \neq b)$.

205. Stanovte, které soustavy rovnic nemají řešení nebo které mají řešení nekonečně mnoho (i v úloze 206, 207, 208):

a) $4x^2 - 9y^2 = 0$, $\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 0$; b) $y^2 = x^2 - 6x$, $x + y = 3$; c) $x = 4y$, $x^2 + 2x + 1 = 0$.

206. a) $x^2 - 6x + 9 = y^2$, $x + y = 3$; b) $x^2 + 2xy + y^2 = 3x + 5y$, $x + y = 3$;

c) $4x^2 + 1 = 2xy - y$, $2x - y = 1$.

207. a) $4x(x - 1) = y^2$, $2x + y - 1 = 0$; b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$, $xy + 2 = 0$;

c) $x^2 + y^2 = -3$, $x - y = 1$.

208. a) $x^2 + y^2 = 1$, $3x + y = m$; b) $x + y = xy = a$; c) $x^2 + y^2 = -a^2$, $x - y = b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Počítejte rovněž přímo pomocí jedné neznámé (př. 209—215).

209. Číslo 100 rozdělte ve dva sčítance tak, aby součet jejich druhých mocnin byl 5 018.

210. Součet druhých mocnin dvou čísel je 676, jejich poměr je 5 : 12. Která jsou to čísla?

211. Dvojciferné číslo je rovno dvojnásobku součinu svých číslic. Které je to číslo, když součet cifer je 9?

212. Dvě dvojciferná čísla se liší jen pořadím číslic. Jejich součin je 1 300, rozdíl 27. Která jsou to čísla?

213. Zvětšíme-li čitatele o 6 a zmenšíme-li jmenovatele o 2, zvětší se hodnota zlomku šestkrát. Zvětšíme-li však čitatele o 1 a zmenšíme-li jmenovatele o 1, nabude zlomek hodnoty rovné převrácenému číslu hodnoty původního zlomku. Určete tento zlomek.
[Návod: čitatel x, jmenovatel y. Užijte rozkladu $x^2 - y^2$.]

214. Součet dvou zlomků je $\frac{20}{21}$, součet jejich převrácených čísel je 5. Která jsou to čísla?

215. Součin dvou čísel je 2, součet jejich převrácených čísel je $\frac{33}{20}$. Která jsou to čísla?

216. Jsou-li a, b čísla kladná, nazýváme výraz $p = \frac{1}{2}(a + b)$ jejich aritmetickým průměrem, výraz $q = \sqrt{ab}$ geometrickým průměrem a výraz $h = \frac{2ab}{a + b}$ harmonickým průměrem.

Řešte tyto úlohy o průměrech:
a) Je dáno p, q; najděte a, b, h.
b) Je dáno p, h; najděte a, b, q.
c) Je dáno q, h; najděte a, b, p.
d) Vyzkoušejte předchozí výsledky pro $a = 8$, $b = 50$.
e) Dokažte, že $p \geqq q \geqq h$. Kdy platí rovnost?

217. Obvod obdélníka je 82 m, jeho úhlopříčka je 29 m dlouhá. Jak velké jsou jeho strany?

218. V pravoúhlém trojúhelníku je přepona 30 cm, výška na přeponu má velikost 12 cm. Jakou velikost mají úseky na přeponě? Jakou odvěsny?

219. Strany obdélníka jsou v poměru 7 : 3. Zvětší-li se šířka o 3 cm a zmenší-li se délka o 7 cm, vznikne obdélník o obsahu 63 cm². Určete jeho rozměry.

220. Jedna hrana kvádru měří 12 cm, tělesová úhlopříčka má velikost 13 cm a objem je 144 cm^3. Určete velikost zbývajících hran.

221. Kouli o poloměru 25 cm je vepsán válec, jehož plášť má velikost 1200π cm^2. Určete rozměry válce.

222. Komolý rotační kužel má výšku 5 cm, objem 140π cm^3 a poloměr dolní podstavy o 6 cm větší než poloměr podstavy horní. Určete velikost těchto poloměrů.

223. Určete taková tři pythagorejská čísla, aby jejich součet byl roven 24 a součin dvou menších čísel 48. (Viz př. 34., kap. I.)

***224.** Dva vklady, jejichž součet je 10 000 Kčs, úrokují se různě, a to tak, že jeden vklad vynese 300 Kčs úroků ročně, druhý 240 Kčs ročně. Úroková míra u druhé částky je o jedno procento vyšší než u částky první. Na kolik procent jsou tyto částky uloženy?

225. Na dráze 0,6 km učinilo přední kolo vozu o 100 obrátek více než zadní kolo, protože má obvod o 1 m menší než zadní kolo. Jaké jsou obvody obou kol?

***226.** Ze dvou míst vzdálených od sebe 57 km jdou proti sobě dva turisté a potkají se za 6 hodin. Kolik kilometrů ujde každý z nich za hodinu, jestliže jeden potřebuje na 9 km o 12 minut méně než druhý?

227. Dvě party dělníků vyrobily stejná množství součástek. Práce jim trvala při střídavých směnách 49 dní. Kdyby obě party pracovaly společně, vyrobily by ono množství úhrnem za 24 dny. Za kolik dní práce by splnila celý úkol každá parta zvlášť?

228. Jednou rourou nateče pětina nádrže o 20 minut dříve než druhou. Obě roury společně naplní nádrž za 2 hodiny. Za jakou dobu se naplní nádrž každou rourou zvlášť?

229. Dva spotřebiče zapojené za sebou kladou elektrickému proudu odpor 500 Ω, při zapojení vedle sebe odpor 120 Ω. Jak velký je odpor každého spotřebiče?

$$\left(\text{Zákon Kirchhoffův } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.\right)$$

230. Osobní auto ujede 1 kilometr o padesát vteřin dříve než nákladní a za 2 hodiny urazí o 100 km delší dráhu. Jaké jsou rychlosti obou vozidel?

231. Dva vlaky vyjíždějí současně po tratích, jejichž směry jsou navzájem kolmé. Průměrná rychlost prvního vlaku je o 3 km za hodinu větší než druhého. Po půlhodině jsou vlaky od sebe vzdáleny 43,5 km. Jaké jsou rychlosti obou vlaků?

232. Určete vzdálenost předmětu a jeho obrazu od dutého zrcadla, jestliže jejich vzájemná vzdálenost je 80 cm a ohnisková vzdálenost zrcadla je $f = 30$ cm. [Návod: Užijte zrcadlové rovnice $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$, kde a je vzdálenost předmětu, b je vzdálenost obrazu od zrcadla, f je ohnisková vzdálenost zrcadla.]

233. V jaké vzdálenosti od dutého zrcadla je světelný zdroj, je-li jeho obraz o 60 cm zrcadlu blíže než světelný zdroj a je-li poloměr křivosti zrcadla 80 cm? $\left[\text{Jako v úloze předchozí. Zde však } f = \frac{r}{2}.\right]$

234. Duté kulové zrcadlo má ohniskovou vzdálenost $f = 20$ cm. Jak daleko je předmět i jeho obraz od zrcadla, jestliže jsou od sebe vzdáleny 75 cm?

6. ROVNICE KVADRATICKÁ S ŘEŠENÍM V OBORU ČÍSEL KOMPLEXNÍCH

235. Určete kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty tvaru $x^2 + px + q = 0$, jejíž jeden kořen je $x_1 = 2 - 3i$.

Řešení

Podle Viètovy věty platí v normovaném tvaru kvadratické rovnice $x^2 + px + q = 0$: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, kde x_1, x_2 jsou kořeny dané rovnice. Protože koeficienty p a q mají být čísla reálná, musí být kořeny x_1, x_2 čísla komplexně sdružená. (Součet a součin dvou čísel komplexně sdružených je číslo reálné.) Je-li jeden kořen $2-3i$, je druhý kořen $2 + 3i$ a kvadratický trojčlen pak zní: $[x - (2 - 3i)]\,[x - (2 + 3i)] = x^2 - 4x + 13$.

Zkouška správnosti: Kořeny příslušné kvadratické rovnice $x^2 - 4x + 13 = 0$ jsou $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$, což splňuje předpoklad úlohy.

Závěr: Hledaná kvadratická rovnice zní $x^2 - 4x + 13 = 0$.

236. Sestavte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou: a) $(2 + i\sqrt{3}, 2 - i\sqrt{3})$; b) $x_1 = 2i$, $x_2 = -2i$; c) $x_1 = 3 - 2i$, $x_2 = 3 + 2i$; d) $a \pm ib$; e) $1 \pm 2i$; f) $2 \pm 3i$.

237. Sestavte kvadratické rovnice s reálnými koeficienty, jsou-li jejich kořeny: a) $x_1 = 3 - 5i$, $x_2 = 3 + 5i$; b) $x_1 = \sqrt{2} - i$, $x_2 = \sqrt{2} + i$; c) $x_1 =$

$= \sqrt{3} + i\sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{3} - i\sqrt{2};$ d) $x_1 = \frac{3}{2} + i\sqrt{5},\ x_2 = \frac{3}{2} - i\sqrt{5};$

e) $x_1 = \frac{-1 + 4i\sqrt{5}}{3},\ x_2 = \frac{-1 - 4i\sqrt{5}}{3};$ f) $x_1 = 2 - 3i,\ x_2 = 3 - 2i.$

238. Řešte zpaměti: a) $x^2 = a$; b) $x^2 = -a$ (a je číslo reálné); c) $x^2 + 4 = 0$; d) $x^2 = -5$; e) $x^2 = -\sqrt[3]{2}$.

239. Řešte rovnice: a) $x^2 - 2x + 2 = 0$; b) $x^2 - 3x + 7 = 0$; c) $x^2 - 4x + 5 = 0$; d) $2x^2 - 8x + 9 = 0$; e) $3x^2 - 3x + 5 = 0$; f) $x^2 - 2x + 3 = 0$; g) $4x^2 - x + 1 = 0$.

240. a) $x^2 + 4x + 5 = 0$; b) $x^2 - 6x + 13 = 0$; c) $x^2 + 6x + 18 = 0$; d) $4x^2 - 4x + 17 = 0$; e) $36x^2 - 48x + 25 = 0$.

241. Řešte rovnice: a) $\frac{x+4}{2} + \frac{2x+7}{x-6} = \frac{x+10}{4}$;

b) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-11} = \frac{1}{x-8}$; c) $\frac{2+3x}{7x+2} = \frac{1-x}{x+2}$;

d) $\frac{1}{x-6} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x-4}$.

242. Dokažte, že rovnice $(a^2 + b^2 + c^2)x^2 + 2(a + b + c)x + 3 = 0$ nemůže mít reálné kořeny, pokud $a \neq b \neq c$ (a, b, c reálná, aspoň dvě vzájemně různá).

243. Proveďte úplnou diskusi kvadratické rovnice: $(m - 1)x^2 - (m - 2)x + 2m - 1 = 0$, kde m je číslo reálné.

Řešení

Kořeny dané rovnice jsou: $x_{1,2} = \frac{m - 2 \pm \sqrt{-7m^2 + 8m}}{2(m-1)}$.

1. Tyto kořeny budou reálné jen tehdy, pokud diskriminant bude nezáporný a $m \neq 1$, tj. $m(8 - 7m) \geqq 0$, což nastává pro $0 < m \leqq \frac{8}{7}$. Musí tedy být $0 < m < 1, 1 < m \leqq \frac{8}{7}$.

2. Oba kořeny budou téhož znamení, bude-li q v normovaném tvaru kvadratické rovnice kladné, tj. $x^2 - \frac{m-2}{m-1}x + \frac{2m-1}{m-1} = 0$, $\frac{2m-1}{m-1} > 0$, což je splněno pro $m > 1$ a pro $m < \frac{1}{2}$. Vzhledem

k podmínce 1 jsou oba kořeny téhož znamení pro $1 < m \leqq \frac{8}{7}$ a pro $0 < m < \frac{1}{2}$.

3. Jsou-li oba kořeny téhož znamení, mohou být oba kladné nebo oba záporné. Který případ nastane, vyšetříme podle jakosti koeficientu při lineárním členu normovaného tvaru. Je-li $-p$ kladné, tj. $\frac{m-2}{m-1} > 0$, což nastává pro a) $m > 2$, b) $m < 1$, jsou oba kořeny kladné. Vzhledem k podmínce 2 to nastává jen v intervalu $0 < m < \frac{1}{2}$. Oba kořeny jsou záporné, je-li $-p$ záporné, tj. $\frac{m-2}{m-1} < 0$, což nastává vzhledem k 2 v intervalu $1 < m \leqq \frac{8}{7}$. Bude-li koeficient $m = 0$, má rovnice tvar $x^2 - 2x + 1 = 0$ a řešení $x = 1$, což je jeden kořen dvojnásobný. Pro $m = 1$ původní rovnice se změní na rovnici lineární a její řešení je $x = -1$. Pro $m = \frac{8}{7}$ má rovnice kořen dvojnásobný, a to $x = -3$. Konečně pro $m = \frac{1}{2}$ má rovnice kořeny $x_1 = 0, x_2 = 3$.

Závěr: Rovnice $(m-1)x^2 - (m-2)x + 2m - 1 = 0$ má dvě řešení reálná různá pro $1 < m \leq \frac{8}{7}$ a pro $0 < m < 1$, komplexně sdružené kořeny pro $m > \frac{8}{7}$ a pro $m < 0$. Pro $m = 0$ má kořen $x = 1$, pro $m = \frac{1}{2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, pro $\frac{1}{2} < m < 1$ má jedno řešení kladné, druhé záporné, pro $1 < m < \frac{8}{7}$ má oba kořeny záporné a pro $0 < m < \frac{1}{2}$ oba kořeny kladné.

244. Proveďte diskusi řešení rovnic vzhledem k parametru a:
a) $x^2 + 6x + a = 0$; b) $x^2 + 4ax + 36 = 0$; c) $x^2 + (a-4)x - 2a + 13 = 0$.

245. Proveďte diskusi vzhledem k parametru m:
a) $(m-2)x^2 - (3m-6)x + 6m = 0$; b) $x^2 - 2(2m-3)x + 4m - 3 = 0$; c) $mx^2 + (2m-1)x + m = 0$; d) $(5m+1)x^2 + (7m+3)x + 3m = 0$.

246. Proveďte úplnou diskusi řešení kvadratické rovnice:
a) $x^2 + 2(m-4)x + m^2 + 6m = 0$;
b) $(3+m)x^2 - 3(6-m)x + 5 - 18m = 0$;
c) $(m-2)x^2 - (3m+6)x + 6m = 0$;
d) $x^2 + 2(m-1)x + 3m^2 + 5 = 0$.

247. Řešte rovnici

$x^2 = a + bi,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a, b$ reálná.

Řešení

V oboru čísel reálných nemůže mít tato rovnice řešení, neboť čtverec žádného reálného čísla nemůže být číslo komplexní. Předpokládejme tedy, že řešení je číslo komplexní $x = x_1 + ix_2$. Platí tedy $(x_1 + ix_2)^2 = a + bi$, $x_1^2 + 2x_1x_2i - x_2^2 = a + bi$. Dvě komplexní čísla jsou si rovna, jsou-li si rovny části reálné i imaginární. A proto $x_1^2 - x_2^2 = a$, $2x_1x_2 = b$. Jejich řešením dostáváme

$$x_1 = \frac{b}{2x_2},\ x_2 = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \text{ kde } x_1, x_2 \text{ jsou čísla reálná.}$$

Podle toho řešme rovnici $x^2 = 3 + 4i$.

Její řešení nechť je číslo $x_1 + ix_2$. Potom $x_2 = \pm\sqrt{\dfrac{-3 + \sqrt{25}}{2}}$, tj. $x_2 = \pm 1$, $x_1 = \dfrac{b}{2x_2}$, $x_1 = \dfrac{4}{\pm 2} = \pm 2$. Řešení dané rovnice je tedy $x = x_1 + ix_2 = \pm 2 + i(\pm 1)$.

Zkouška správnosti řešení: $(\pm 2 \pm i)^2 = 3 + 4i$.

Závěr: Řešení rovnice $x^2 = 3 + 3i$ jsou $x_{1,2} = \mp(2 + i)$.

248. Řešte rovnice:

a) $x^2 = 4 + 3i$; b) $x^2 = 15 + 8i$; c) $x^2 = -5 + 12i$.

249. Řešte rovnici s komplexními koeficienty:

$x^2 - ix + 2 = 0.$

Řešení

Nechť $x = x_1 + ix_2$, tedy $(x_1 + ix_2)^2 - i(x_1 + ix_2) + 2 = 0$, $x_1^2 - x_2^2 + x_2 + 2 = 0$, $2x_1x_2 - x_1 = 0$. Z toho $x_1(2x_2 - 1) = 0$. Rozlišme dva případy:

1. $x_1 = 0$, potom $-(+x_2)^2 + x_2 + 2 = 0$, $(x_2)_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$;

2. $2x_2 - 1 = 0$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_1^2 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} + 2 = 0$.

Z toho plyne, že $x_1^2 = -2\frac{1}{4}$, a to nelze splnit, neboť x_1, x_2 jsou čísla reálná. Z podmínky 1 vyplývá $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$, nebo $x_1 = 0$ a $x_2 = -1$. Řešení dané rovnice tedy je $x = 2i$, $x = -i$. Zkoušku správnosti proveďte sami dosazením do původní rovnice.

250. Řešte rovnici $x^2 - 3x + (3 + \mathrm{i}) = 0$.

Řešení

$(x_1 + x_2\mathrm{i})^2 - 3(x_1 + x_2\mathrm{i}) + 3 + \mathrm{i} = 0$. Jejím řešením jako v úloze 249 dostaneme $x_2^2 = 1$, $x_2 = 1$, $x_2' = -1$, $x_1 = 1$, $x_1' = 2$. Kořeny dané rovnice jsou tedy $x = 1 + \mathrm{i}$, $x = 2 - \mathrm{i}$.
Dosazením těchto kořenů do původní rovnice dostaneme identitu.

Závěr: $1 + \mathrm{i}$, $2 - \mathrm{i}$ jsou řešením rovnice $x^2 - 3x + 3 + \mathrm{i} = 0$.

***251.** Řešte kvadratickou rovnici s komplexními koeficienty:
a) $x^2 - (5 - 3\mathrm{i})x + 4 - 7\mathrm{i} = 0$;
b) $x^2 - (5 - 5\mathrm{i})x - 13\mathrm{i} = 0$;
c) $x^2 - (4 - \mathrm{i})x + 9 - 7\mathrm{i} = 0$.

***252.** Řešte rovnice: a) $x^2 + 6\mathrm{i}x \pm 15 = 0$; b) $2x^2 - (5 - \mathrm{i})x + 6 = 0$;
c) $(7 + \mathrm{i})x^2 - 5\mathrm{i}x - 1 = 0$; d) $x^2 - (4 - 6\mathrm{i})x + 10 - 20\mathrm{i} = 0$;
e) $(1 + \mathrm{i})x^2 - (2 + \mathrm{i})x + 3 + \mathrm{i} = 0$.

253. Sestavte rovnici třetího stupně s reálnými koeficienty, jejíž dva kořeny jsou dány. $x_1 = 2, x_2 = \mathrm{i}$. [Návod: $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$, kde $x_{2,3} = \pm\,\mathrm{i}$. Proč?]

254. Určete rovnici čtvrtého stupně s reálnými koeficienty, jsou-li dány její kořeny: a) $x_1 = 1 - \mathrm{i}$, $x_2 = 3 + \mathrm{i}$;
b) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1 - \mathrm{i}$; c) $x_1 = 1 + \mathrm{i}$, $x_2 = 2 - \mathrm{i}$.

255. Jeden kořen rovnice je dán. Určete ostatní kořeny:
a) $x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 3 = 0$, $x_1 = \mathrm{i}$;
b) $3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$, $x_1 = 1 + \mathrm{i}$;
c) $x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10 = 0$, $x_1 = 1 - \mathrm{i}$;
d) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$, $x_1 = \mathrm{i}$.

***256.** Rovnice $x^4 + mx^2 + nx + 7 = 0$ má jeden kořen $x_1 = 2 - \mathrm{i}\sqrt{3}$. Určete ostatní kořeny i m a n. [Návod: $x^4 + mx^2 + nx + 7 = (x^2 - 4x + 7)(x^2 + ax + b)$.]

7. RECIPROKÉ A BINOMICKÉ ROVNICE

257. Definujte reciprokou rovnici pátého stupně. Řešte reciprokou rovnici sudého stupně:

$$a_0x^{2k} + a_1x^{2k-1} + a_2x^{2k-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0\,.$$

Řešení

Celou rovnici dělíme x^k a spojíme první člen s posledním, druhý s předposledním atd. Tím dostaneme

$$a_0\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + a_1\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + \ldots + a_{k-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_0 = 0\,.$$

Za výraz $x + \frac{1}{x}$ zvolíme novou proměnnou y. Potom $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2$, $y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, a tedy $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Podobně $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = y^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$, z toho $x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = y^3 - 3y$, atd. Nová rovnice vyjádřená v y není už vždy reciproká a je stupně dvakrát nižšího.

258. Řešte rovnici: $5x^4 - 26x^3 + 10x^2 - 26x + 5 = 0\,.$

Řešení

Je to rovnice reciproká čtvrtého stupně. Podle úlohy 1 dělíme celou rovnici x^2 a potom nahradíme $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, $x + \frac{1}{x} = y$.

$$5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 26\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 = 0,\ 5(y^2 - 2) - 26y + 10 = 0\,,$$

$$5y^2 - 26y = 0,\ y(5y - 26) = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = \frac{26}{5}\,.$$

Vypočtené hodnoty y dosadíme do výrazu $x + \frac{1}{x} = y$ a určíme příslušná x. $x_{1,2} = \pm \mathrm{i}$, $x_3 = 5$, $x_4 = \frac{1}{5}$. Kořeny $x_{1,2}$ a $x_{3,4}$ jsou čísla převrácená, a jak plyne z dosazení do původní rovnice, dané rovnici vyhovují.

259. Sestavte nejjednodušší reciprokou rovnici s reálnými koeficienty, jejíž jeden kořen je $x_1 = 2 + \mathrm{i}\,.$

Řešení

Daná rovnice musí mít i kořen komplexně sdružený, tj. $x_2 = 2 - \mathrm{i}$, i kořeny k x_1 a x_2 reciproké, tj. $x_{3,4} = \frac{1}{2 \pm \mathrm{i}} = \frac{2 \pm \mathrm{i}}{5}\,.$

Hledaná rovnice má tedy tvar

$$(x - 2 - \mathrm{i})(x - 2 + \mathrm{i})\left(x - \frac{2 - \mathrm{i}}{5}\right)\left(x - \frac{2 + \mathrm{i}}{5}\right) = 0\,,$$

$$(x^2 - 4x + 5)(25x^2 - 20x + 5)\frac{1}{25} = 0\,,$$

$$5x^4 - 24x^3 + 42x^2 - 24x + 5 = 0\,.$$

Zkoušku správnosti řešení proveďte sami tím, že vyšetříte, zda všechny čtyři kořeny dané rovnici vyhovují.

260. Sestavte nejjednodušší reciprokou rovnici, jestliže jeden její kořen je:

a) $x_1 = \dfrac{3 + 4i}{5}$; b) $x_1 = \dfrac{2 - 3i}{4}$; c) $x_1 = \dfrac{1 - 5i}{3}$;

d) $x_1 = i$, $x_2 = 1 - i$; e) $x_1 = 2 - i$, $x_2 = 1 + i$.

261. Řešte reciproké rovnice:

a) $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$;
b) $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$;
c) $8x^4 - 54x^3 + 101x^2 - 54x + 8 = 0$;
d) $2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 2 = 0$;
e) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$.

$\boxed{\textbf{262.}}$ Řešte reciprokou rovnici pátého stupně:
$4x^5 + 12x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 12x + 4 = 0$.

Řešení

Sečteme souměrně položené členy rovnice, a to první s posledním, druhý s předposledním atd. Z takto vzniklých dvojčlenů vytkneme před závorku společného činitele.

$4(x^5 + 1) + 12x(x^3 + 1) + 11x^2(x + 1) = 0$,

$(x + 1)[4(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + 12x(x^2 - x + 1) + 11x^2] = 0$.

Z toho $x_1 = -1$. Rovnice $4x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 8x + 4 = 0$ je reciproká čtvrtého stupně. Její řešení provádíme podle řešení úlohy 258.

$4\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 8\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 3 = 0$, $x_{2,3} = \dfrac{1}{4}(1 \pm i\sqrt{15})$, $x_4 = -2$, $x_5 = -\dfrac{1}{2}$.

Závěr: Rovnice $4x^5 + 12x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 12x + 4 = 0$ má kořeny $x_1 = -1$, $x_{2,3} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}$, $x_4 = -2$, $x_5 = -\dfrac{1}{2}$. Všechny kořeny vyhovují dané rovnici, jak vyplývá z dosazení. Jsou kořeny $x_{2,3}$ a x_4 a x_5 reciproké? Přesvědčte se o tom.

263. Řešte reciproké rovnice:

a) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$; e) $x^3 + \dfrac{13}{3}x^2 + \dfrac{13}{3}x + 1 = 0$;
b) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$; f) $3x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0$;
c) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$; g) $15(x^3 - 1) - 49x(x - 1) = 0$.
d) $7x^3 + 57x^2 + 57x + 7 = 0$;

264. Řešte reciproké rovnice pátého stupně:
a) $2x^5 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 - x + 2 = 0$;
b) $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0$;
c) $8(x^5 + 1) - 6x(x^3 + 1) - 83x^2(x + 1) = 0$;
d) $6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 = 0$;
e) $12x^5 + 16x^4 - 37x^3 - 37x^2 + 16x + 12 = 0$.

265. Řešte reciproké rovnice:
a) $6x^6 + 23x^5 - 2x^4 - 54x^3 - 2x^2 + 23x + 6 = 0$;
b) $12x^6 + 28x^5 - 21x^4 - 74x^3 - 21x^2 + 28x + 12 = 0$;
c) $10x^6 + 47x^5 - 46x^4 - 166x^3 - 46x^2 + 47x + 10 = 0$;
d) $6x^6 - 35x^5 + 56x^4 - 56x^2 + 35x - 6 = 0$;
e) $6x^6 - 5x^5 - 44x^4 + 44x^2 + 5x - 6 = 0$. [Návod k d), e): Dělte nejprve výrazem $x^2 - 1$.]

266. Jako rovnice reciproké řešte:
a) $3x^3 + 26x^2 + 52x + 24 = 0$;
b) $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 6x + 9 = 0$;
c) $x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 24x - 32 = 0$;
d) $\log(x^3 + 1) - \log 7 - \log x = \log (x + 1) - \log 6$. [Návod k b):
$\left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{3}{x}\right) - 2 = 0$.]

267. Řešte binomickou rovnici: $x^5 + 1 = 0$.

Řešení

Tento dvojčlen rozložíme podle vzorce $a^n + b^n$ pro n liché. $x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = 0$. Z toho $x_1 = -1$ a podle řešení úlohy 262 dostaneme $x_{2,3} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})$, $x_{4,5} = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}})$. Kořeny $x_{1,2,3,4,5}$ vyhovují dané rovnici. Přesvědčte se dosazením.

268. Řešte binomickou rovnici šestého stupně: $x^6 - 1 = 0$.

Řešení

Výraz $x^6 - 1$ rozložíme na $(x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$. Je-li tento součin roven nule, potom $x_1 - 1 = 0$, nebo $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Řešením této reciproké rovnice dostáváme kořeny $x_2 = -1$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $x_{5,6} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Řešení rovnice $x^6 - 1 = 0$ jsme mohli provést i rozkladem $(x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0$, z čehož plyne, že $x^3 - 1 = 0$, $x^3 + 1 = 0$. Kořeny těchto rovnic můžeme zjistit z dalšího rozkladu $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Řešení je pochopitelně v obou případech stejné. Ověřte to.

269. Řešte rovnici:
a) $x^4 + 1 = 0$; b) $x^4 - 1 = 0$; c) $x^5 - 1 = 0$.

270. Co možno soudit o kořenech binomické rovnice lichého stupně typu $x^n \pm 1 = 0$ (která má jeden kořen reálný)?

271. Řešte binomické rovnice:
a) $x^4 - 3 = 0$; b) $8x^3 - 1 = 0$; c) $8x^3 + 1 = 0$;
d) $32x^5 - 1 = 0$; e) $x^4 + 64 = 0$.
[Návod k a): Položte $x = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{1}$, kde $\sqrt[4]{1}$ jsou kořeny rovnice $x^4 - 1 = 0$.]

272. Řešte binomické rovnice:
a) $16x^4 + 81 = 0$;
b) $27x^3 - 125 = 0$;
c) $81x^4 - 25 = 0$.

273. Jako binomickou rovnici řešte rovnice:
a) $x^3 + 6x^2 = -12x + 117$; b) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$;
c) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = 15$; d) $(x - 4)^5 = 64$;
e) $(2x - 1)^5 - (x + 2)^5 = 0$.
[Návod: pro a): Doplňte na třetí mocninu dvojčlenu.
pro b): Rozložte na součin.
pro c): Levou stranu rozložte na čtvrtou mocninu dvojčlenu.]

274. Řešte binomické rovnice pomocí komplexních čísel v goniometrickém tvaru:
a) $x^6 - 1 = 0$; b) $x^2 - 1 = 0$; c) $x^3 - 1 = 0$; d) $x^4 - 1 = 0$;
e) $x^5 - 1 = 0$; f) $x^7 - 1 = 0$.

Řešení a):

Komplexní číslo ve tvaru goniometrickém má tvar $x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde r je modul, φ amplituda daného komplexního čísla. Komplexní číslo, jehož modul je 1, je komplexní jednotka a má tvar $x = 1(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Řešení rovnice $x^6 - 1 = 0$ tedy zní $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^6 = 1$. Levou stranu této rovnice upravíme podle Moivreovy věty na $\cos 6\varphi + i\sin 6\varphi$. Číslo 1 na pravé straně rovnice je též číslo komplexní, jehož obraz v rovině komplexních čísel má složky $\cos(0 + 2k\pi) = 1$, $\sin(0 + 2k\pi) = 0$.

Platí tedy

$\cos 6\varphi + i\sin 6\varphi = \cos(0 + 2k\pi) + i\sin(0 + 2k\pi)$, a tedy

$\cos 6\varphi = \cos 2k\pi$, $6\varphi = 2k\pi$, $\varphi = \dfrac{k\,.\,\pi}{3}$. Řešení rovnice $x^6 - 1 = 0$ má tedy tvar $x_k = \cos\dfrac{k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{k\pi}{3}$, kde $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$. Dané rovnici vyhovují tedy hodnoty:

$x_0 = \cos 0° + \mathrm{i}\sin 0° = 1$;

$x_1 = \cos 60° + \mathrm{i}\sin 60° = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$;

$x_2 = \cos 120° + \mathrm{i}\sin 120° = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$;

$x_3 = \cos 180° + \mathrm{i}\sin 180° = -1$;

$x_4 = \cos 240° + \mathrm{i}\sin 240° = \dfrac{-1}{2} - \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$;

$x_5 = \cos 300° + \mathrm{i}\sin 300° = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Obrazy těchto komplexních čísel tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníka, vepsaného do kružnice o poloměru 1 se středem v počátku pravoúhlé soustavy souřadnic (rovnice pro dělení kruhu).

275. Řešte binomické rovnice pomocí komplexních čísel v goniometrickém tvaru:
a) $x^3 + 1 = 0$; b) $x^4 + 1 = 0$; c) $x^5 + 1 = 0$; d) $x^6 + 1 = 0$.
Řešte tak i úlohy 271 a 272.

276. Řešte binomické rovnice:
a) $x^2 - \mathrm{i} = 0$; b) $x^3 - \mathrm{i} = 0$; c) $x^3 + \mathrm{i} = 0$; d) $x^5 + \mathrm{i} = 0$;
e) $x^9 + \mathrm{i} = 0$; f) $x^7 - \mathrm{i} = 0$.
[Návod: $x^n = 0 + \mathrm{i}$, $x_k = \cos\dfrac{90° + k\,.\,360°}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{90° + k\,.\,360°}{n}$,
$k = 0,1,2,\ldots,(n-1)$.]

8. OPAKOVÁNÍ

277. Řešte rovnice:

a) $x + \dfrac{5}{x} = \dfrac{13}{4}$; b) $\dfrac{4x+5}{x} - \dfrac{12}{x-2} = 1$;

c) $2x - \dfrac{9}{x-7} = 14{,}5$; d) $\dfrac{x-3}{x-5} + \dfrac{x-2}{x+4} = \dfrac{1}{2}$.

Nazapomínejte na zkoušky správnosti řešení.

278. Řešte rovnice:

a) $x^2 + 0{,}9x - 0{,}36 = 0$; b) $x^2 - 0{,}1x - 0{,}01 = 0$; c) $0{,}6x^2 + x + 0{,}02 = 0$; d) $1{,}1x^2 + 1{,}2x - 1{,}3 = 0$; e) $2{,}1x^2 - 1{,}25x + 4{,}19 = 0$.

279. Pro která x platí:

a) $\dfrac{10}{x-2} = \dfrac{21}{x} - \dfrac{4}{x-3}$; b) $\dfrac{7}{2x-3} + \dfrac{5}{x-1} = 12$;

c) $(x-4):12 + (2x-22):(x-6) = (16-x):4$; d) $\dfrac{2x-3}{x-2} + \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{3x+11}{x+1}$; e) $\dfrac{3x+1}{x-3} - \dfrac{5x-14}{x-4} = \dfrac{1-2x}{x-2}$;

f) $\dfrac{2}{x^2-4} - \dfrac{1}{x(x-2)} + \dfrac{x-4}{x(x+2)} = 0$.

***280.** Řešte rovnice:

a) $(x+a)(x-b) + (x+b)(x-a) = 2a^2 - 2ab$;
b) $(a+x)(a+2x) - (a-x)(a-2x) = (a+3x)^2 - a^2 - 9b^2$;

c) $2x - (a+b) = \dfrac{2b^2}{2x-a}$; d) $\dfrac{1}{x} - \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{1}{x-(a+b)}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$.

281. Které číslo má tu vlastnost, že zvětší-li se o a, zmenší se číslo k němu převrácené též o a?

282. Zvětšením strany čtverce se zvětšil jeho obsah o 21 %. O kolik procent byla zvětšena strana?

283. Na ramenech pravého úhlu se pohybují rovnoměrně dvě tělesa vycházející současně z jeho vrcholu. První má rychlost 10 cm/s, druhé rychlost o 30 % větší. Za jakou dobu budou obě tělesa od sebe vzdálena 10 m?

***284.** Řešte a proveďte diskusi pro hodnoty parametrů a, b:

a) $x^2 - 2(a+1)x + 4a = 0$; b) $(a^2 - b^2)x^2 - 2ax + 1 = 0$;

c) $\dfrac{x-a}{x-b} + \dfrac{x-b}{x-a} + 2 = 0$; d) $\dfrac{x}{x-a} - \dfrac{2a}{x+a} = \dfrac{8a^2}{x^2-a^2}$;

e) $\dfrac{x-a}{x-b} - \dfrac{x-b}{x-a} + \dfrac{4ab}{a^2-b^2} = 0$.

285. Sestavte rovnici, jejíž kořeny jsou převrácená čísla kořenů rovnice:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$; b) $3x^2 - 8x + 4 = 0$; c) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$.

***286.** Sestavte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny mají součet -1 a součet převrácených čísel jejich kořenů je roven 0,5.

287. Aniž dané rovnice řešíte, určete zpaměti znamení jejich kořenů: a) $x^2 - 4x + 4 = 0$; b) $x^2 + 2x + 1 = 0$; c) $x^2 - 6x + 5 = 0$; d) $x^2 - 10x + 16 = 0$; e) $x^2 + 4x - 5 = 0$; f) $4x^2 - 5x - 1 = 0$.

288. Napište kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou $2x_1$, $3x_2$, kde x_1, x_2 jsou kořeny rovnice $x^2 - 5x + 6 = 0$.

289. Určete p v kvadratické rovnici $x^2 + px + 28 = 0$ tak, aby součet druhých mocnin jejich kořenů byl 65. Potom tuto rovnici řešte.

***290.** Určete hodnotu reálného čísla p tak, aby rovnice $\sqrt{x^2 + 2p^2} = 2px - 1$ měla kořen $x = 1$. Pro toto číslo pak řešte tuto rovnici.

291. Kořeny x_1, x_2 rovnice $x^2 + px + 12 = 0$ vyhovují podmínce $x_1 - x_2 = 1$. Určete koeficient p.

***292.** Jsou-li x_1, x_2 kořeny kvadratické rovnice $x^2 + px + q = 0$, najděte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou $x_1 + x_2$, $x_1 . x_2$.

***293.** Pro která r má daná rovnice dvojnásobný kořen: a) $x^2 - 4x + r = 0$; b) $x^2 + 12x + r = 0$; c) $x^2 + rx + 36 = 0$; d) $2x^2 + (r - 9)x + r^2 + 3r + 4 = 0$; e) $2(r + 2)x^2 - 24x + r + 3 = 0$. Úlohy a)—c) řešte zpaměti.

***294.** Pro která r má daná rovnice kořeny reálné, pro která imaginární: a) $x^2 + rx + 10 = 0$; b) $x^2 + 10x + r = 0$?

295. V rovnici $(k^2 - 5k + 3)x^2 + (3k - 1)x + 2 = 0$ určete hodnotu parametru k tak, aby jeden kořen této rovnice byl dvojnásobkem druhého.

296. Pro kterou hodnotu parametru a má daná rovnice $x^2 - \frac{15}{4}x + a^2 = 0$ jeden kořen, který je druhou mocninou druhého kořene?

297. Určete všechna čísla a, pro něž rovnice $x^2 + ax + 1 = 0$, $x^2 + x + a = 0$ mají jeden kořen společný.

298. Stanovte hodnotu a, jestliže součet čtverců kořenů rovnice $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ je 1,75.

299. V rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ jsou koeficienty a, b, c čísla reálná, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac > 0$.

a) Jaká je nutná a postačující podmínka pro to, aby kořeny x_1, x_2 této rovnice byly v intervalu mezi čísly p, q $(p < q)$? b) Jaká je nutná a postačující podmínka pro to, aby jeden kořen této rovnice ležel v intervalu (p, q) a druhý ne?

300. Ve kterém intervalu leží číslo a, mají-li oba kořeny x_1, x_2 rovnice a) $x^2 -$

$-2ax + a^2 - 1 = 0$ být v intervalu $(2, 4)$; b) $4x^2 - 2x + a = 0$ v intervalu $(-1,1)$; c) $(2a + 3)x^2 + (a + 1)x + 4 = 0$ v intervalu $(-2,0)$?

301. Pro která a je rozdíl kořenů rovnice $2x^2 - (a + 1)x + a + 3 = 0$ roven 1?

302. Pro která k bude jeden kořen rovnice $x^2 - 7x + 2k = 0$ dvakrát větší než kořen rovnice $x^2 - 5x + k = 0$?

***303.** Pro která čísla a mají rovnice $(1 - 2a)x^2 - 6ax - 1 = 0$, $ax^2 - x + 1 = 0$ společný kořen?

304. Pro která čísla m platí dané nerovnosti při každé hodnotě proměnné x: a) $x^2 + 2x + m > 10$; b) $mx^2 + 12x - 5 < 0$; c) $x^2 + 2(m + 1)x + 9m - 5 > 0$; d) $(5 - m)x^2 - 2(1 - m)x + 2(1 - m) < 0$; e) $(4 - m)x^2 - 3x + m + 4 > 0$?

305. Dokažte, že trojčlen $x^2 + 5x + 16$ pro žádné celé číslo x není dělitelný číslem 169. [Návod: $4(x^2 + 5x + 16) = (2x + 5)^2 + 39$.]

306. Sestavte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou:

a) $x_1 = 3 - \frac{i}{2}$, $x_2 = 3 + \frac{i}{2}$; b) $x_1 = 2 - i$, $x_2 = 3 - 2i$;

c) $x_1 = \dfrac{-1 + 4i\sqrt{5}}{3}$, $x_2 = \dfrac{-1 - 4i\sqrt{5}}{3}$; d) $x_1 = \dfrac{2 - i}{1 + i}$, $x_2 = 1 + i$.

307. Sestavte kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty tak, aby jeden kořen byl: a) $3 - 4i$; b) $-5i$; c) $p + qi$; d) $2(\cos 30° - i \sin 30°)$; e) $\cos 240° + i \sin 240°$.

308. Najděte reálná čísla x, y z rovnice:

$$(x + y)^2 . i - \frac{6}{i} = x - y + 5i(x + y) - 1 .$$

309. Pro která reálná čísla b má daná rovnice imaginární kořeny: a) $x^2 + bx + 4 = 0$; b) $x^2 + 4bx + 64 = 0$; c) $x^2 - 5bx + 25 = 0$?

310. Najděte všechny kořeny rovnice $4x^4 - 24x^3 + 57x^2 + 18x - 45 = 0$, je-li jeden její kořen $3 + i\sqrt{6}$.

311. Sestavte rovnici s reálnými koeficienty, jejíž kořeny jsou:

a) $x_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $x_2 = 1 + i\sqrt{3}$; b) $x_1 = 2 + \frac{i}{2}\sqrt{3}$, $x_2 = 2 - \frac{i}{2}\sqrt{3}$;

c) $x_1 = \sqrt{2} - \frac{i}{2}$, $x_2 = \sqrt{2} + \frac{i}{2}$; d) $x_1 = 1 - \frac{i}{3}$, $x_2 = 1 + \frac{i}{3}$.

312. Řešte rovnici:

a) $x^2 - 2x + 4 = 0$; b) $x^2 - 4x + \frac{19}{4} = 0$;

c) $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + \frac{9}{4} = 0$; d) $x^2 - 2x + \frac{10}{9} =$.

313. Řešte rovnici:

a) $x^2 + 3 + 4i = 0$; b) $x^2 + 6i - 8 = 0$; c) $x^2 - 16 + 30i = 0$;
d) $x^2 + 8i - 15 = 0$; e) $x^2 - 9 + 40i = 0$.

314. Pro která x je splněna rovnice:

a) $x^2 - \frac{5}{6}xi - 1 = 0$; b) $x^2 + 2xi - \frac{3}{4} = 0$;

c) $x^2 - xi + 6 = 0$; d) $x^2 - \frac{3}{2}xi + 1 = 0$?

315. Určete hodnotu x, která vyhovuje rovnici:

a) $x^2 - (4 + i)x + 6 + 2i = 0$; b) $x^2 + (i - 4)x + 5 + i = 0$;
c) $x^2 - (3 + 2i)x + 5 + i = 0$; d) $x^2 + (2i - 4)x + 7 - 4i = 0$;
e) $x^2 + (4i - 3)x - 1 - 5i = 0$.

316. Normální jízda plně obsazené kabiny lanovky stojí 72 Kčs. Kolik osob měla skupinka turistů, kteří si vyžádali zvláštní jízdu, přičemž každý z nich zaplatil o 4 Kčs více proto, že do úplného obsazení kabiny chyběly tři osoby?

317. Čitatel zlomku je o tři menší než jmenovatel. Sečteme-li tento zlomek s jeho převráceným číslem, dostaneme $\frac{149}{70}$. Který je to zlomek?

318. Žák násobil dvě čísla, z nichž jedno bylo o 94 větší než druhé, ale zmýlil se a zmenšil cifru na místě desítek o 4. Při dělení výsledku chybného součinu větším z obou činitelů dostal podíl 52 a zbytek 107. Která čísla násobil?

319. Jeden závod vozil z hromady uhlí na dole od 1. září denně a tun uhlí, druhý od 10. září b tun uhlí denně. Večer 25. září byla na té hromadě polovina původního množství uhlí. Kdy bylo odvezeno uhlí, jestliže každý závod ho odveze stejné množství?

***320.** Dva traktory různé výkonnosti začaly s orbou 14 ha pole v 7 h a skončily práci současně. Kdyby první z nich zoral o 0,1 ha/h více a druhý začal práci o hodinu dříve, pak by práce byla skončila o 1 h 12 min dříve. Kdyby druhý traktor za hodinu zoral o 0,1 ha více a první začal práci o hodinu dříve, byla by práce skončena o 1 h 4 min dříve. Kdy tedy skončily oba traktory práci?

321. Dva vodiče, jejichž ohmické odpory se liší o 3 Ω, mají při spojení vedle sebe odpor 2 Ω. Jaký je odpor každého z nich?

322. Dva spotřebiče spojené za sebou mají odpor 32 Ω, při spojení vedle sebe 6 Ω. Jaký je ohmický odpor každého z nich?

323. Železný kvádr, jehož hmotnost je 1 000 kg, má být vyválcován na 11 m dlouhou tyč s obdélníkovým průřezem. Jaké rozměry má profil, jestliže jeho strany se liší o 8 cm?

324. Jsou-li koeficienty rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ čísla celá, přičemž je b číslo liché, nemůže mít rovnice dvojnásobný kořen. Dokažte. ($a \neq 0$)

325. Určete všechna čísla a, pro něž rovnice
$x^2 + ax + 1 = 0$ a $x^2 + x + a = 0$ mají stejný kořen.
[Návod: Odečtěte obě rovnice.]

326. Pro která x je splněna rovnice:
a) $6x^3 + 13x^2 - 26x - 48 = 0$; b) $6x^6 - 35x^5 + 56x^4 - 56x^2 + 35x - 6 = 0$; c) $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$; d) $6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6 = 0$.

327. Řešte:
a) $16x^8 + 255x^4 - 16 = 0$; b) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$; c) $x^6 = 1$;
d) $x^4 - 25x^2 + 1 = 0$.

328. Najděte hodnoty parametru a, pro něž nejsou ekvivalentní rovnice:

a) $\dfrac{a^2 + 2x}{x - a} = \dfrac{x - a}{x + a}$, $(a^2 + 2x)(a + x) = (x - a)^2$;

b) $\dfrac{a + x}{ax^2} = \dfrac{1}{x(a - 1)} + \dfrac{1}{a(a - 1)}$, $(a + x)(a - 1) = ax + x^2$;

c) $\dfrac{ax^2}{x - 1} - 2a = a^2 + 1$, $ax^2 - 2a(x - 1) = (a^2 + 1)(x - 1)$.

329. Stanovte ty hodnoty parametrů a, b, pro něž jsou ekvivalentní rovnice:

a) $\dfrac{(x - a)^2 + x(x - a) + x^2}{(x - a)^2 - x(x - a) + x^2} = \dfrac{19}{7}$, $6(x - a)^2 - 13x(x - a) + 6x^2 = 0$; b) $\dfrac{x + 2a - b}{x + 2b - a} \cdot \dfrac{x + a}{x + b} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{2x + 2a - b}{2x + 2b - a}$,

$b(x + a)(x + 2a - b)(2x + 2b - a) = a(2x + 2a - b)(x + b) \cdot (x + 2b - a)$; c) $\dfrac{3a - x}{3b - x} \cdot \dfrac{3x - b}{3x - a} = \dfrac{9a - b}{9b - a} \cdot \dfrac{8x + 3a - 3b}{8x - 3a + 3b}$,

$(3a - x) \cdot (3x - b)(9b - a)(8x - 3a + 3b) = (3b - x)(3x - a) \cdot (9a - b)(8x + 3a - 3b)$.

330. Najděte množinu reálných čísel x, která vyhovují rovnici:

a) $\sqrt{x} + \sqrt{61 - x} = 11$; b) $\sqrt{x + 6} + \sqrt{19 - x} = 7$;

c) $\sqrt{4x + 1} - \sqrt{2x - 8} = \sqrt{x - 3}$; d) $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{7x + 3} =$
$= \sqrt{15x + 4}$; e) $\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 4} = 2$,

f) $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1$.

331. Pro která reálná x jsou splněny rovnice:

a) $|x^2 - x| = 2$; b) $|x^2 - 4| = 5$; c) $|x^2 - 3| = 1$;

d) $|9x^2 - 1| = 2$; e) $\left|\dfrac{x^2}{x - 2}\right| = 1 - 2x$; f) $\left|\dfrac{2x - 3}{x^2}\right| = 1$;

g) $|2x| - \left|\dfrac{1}{x}\right| = 1$; h) $\left|\dfrac{x + 1}{x^2 + 1}\right| = 1$?

332. Pro která reálná čísla x jsou splněny rovnice:

a) $\left|2x - \dfrac{1}{x}\right| = 1$; b) $\left|\dfrac{-x + 1}{x^2 + 1}\right| = 1$;

c) $\dfrac{x^2}{x - 2} = |1 - 2x|$; d) $\dfrac{|2x| - 3}{x^2} = 1$?

333. Dokažte:

$$\left(\frac{|ax| + x}{2}\right)^2 + \left(\frac{|ax| - x}{2}\right)^2 = x^2 \cdot \frac{a^2 + 1}{2}\,. \quad [a \text{ je číslo reálné.}]$$

334. Řešte algebraicky i goniometricky:

a) $x^4 - 81 = 0$; b) $x^6 - 64 = 0$; c) $x^8 - 256 = 0$.

335. Která x vyhovují rovnicím:

a) $6x^6 - 35x^5 + 68x^4 - 70x^3 + 68x^2 - 35x + 6 = 0$;
b) $x^6 + 15x^2(x^2 + 1) + 1 = 7(x^2 + 1)$;
c) $8 + 8x^4 + 14x^3 - 69x^2 + 14x = 0$;
d) $x^4 + 3x^3 - \dfrac{19}{4}x^2 + 3x + 1 = 0$.

336. Řešte rovnici:

a) $2 \cdot 2^{2 \log x}(2^{2 \log x} + 7) - 9 \cdot 2^{\log x}(2^{2 \log x} + 1) = -2$;

b) $\dfrac{x^{19 \log^2 x + 101}}{10^5 x^{91 \log x}} = 10^4 x^{10(\log^2 x + 1)}$.

337. Řešte graficky rovnice:

a) $\dfrac{4x}{5} - \dfrac{7{,}5}{x} = 5$; b) $\dfrac{x}{4} + \dfrac{25}{x} = 3$; c) $\dfrac{2x+2}{7x-2} = \dfrac{x-4}{x+4}$;

d) $\dfrac{10}{x-2} = \dfrac{21}{x} - \dfrac{4}{x-3}$; e) $\sqrt{x} + 6 = x$; f) $y^2 = x^2$.

338. Které celočíselné hodnoty x, y vyhovují rovnicím:

a) $5x^2 + 2y^2 = 133$, $2x + 3y = 16$; b) $3x^2 - 2y = 23$, $4x + 5y = 22$; c) $3x^2 - 7y^2 = 35$, $3x + 5y = 41$; d) $x^2 + y^2 = 89$, $xy = 40$; e) $x^2 - 3xy + y^2 = 44$, $xy = 20$; f) $4x^2 + 5y^2 = 389$, $7x^2 - 3y^2 = 105$.

339. Která x a y vyhovují soustavě rovnic:

a) $5x^2 + 3y^2 = 17$, $4x^2 - 6y^2 = -20$; b) $x^2 + y^2 = 40$, $x = 3y$; c) $2x^2 - 3y^2 = 6$, $3x^2 - 2y^2 = 19$; d) $x^2 + y^2 = 130$, $xy = -12$; e) $x^2 + y^2 - xy = 19$, $2x + 3y = 0$; f) $x^2 + y^2 + x + y = 18$, $x^2 - y^2 + x - y = 6$; g) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4}$, $x + y = 6$.

340. Smísíme-li a litrů lihu prvního druhu a b litrů druhého druhu, dostaneme líh k procentní. Smísíme-li b litrů prvního druhu a a litrů druhého druhu, dostaneme líh t procentní. Kolikaprocentní je líh prvého druhu a kolikaprocentní je líh druhého druhu?

III. ČÍSLA REÁLNÁ

1. ČÍSLA RACIONÁLNÍ A IRACIONÁLNÍ

1. Počítejte zpaměti:

a) Teploměr ukazoval ráno 2 °C, v poledne stoupl o 5 °C, večer klesl o 10 °C. Kolik stupňů ukazoval večer?

b) Hladina řeky byla prvý den v týdnu 6 cm nad normálem, druhý den klesla o 8 cm, třetí den klesla o 2 cm a čtvrtý den stoupla o 3 cm. Jak vysoko stála vodní hladina čtvrtý den vzhledem k normálu? Znázorněte též na číselné ose.

c) Olovo se taví při 332 °C, rtuť mrzne při teplotě o 371 °C nižší. Při kolika °C mrzne rtuť?

d) Od založení Říma až do roku 1966 uplynulo 2 719 let. Kdy byl Řím založen?

2. Praha má zeměpisnou délku 14°25′57″ východní délky od Greenwiche. Lisabon leží od Prahy o 23°36′57″ na západ. Jaká je zeměpisná délka Lisabonu?

3. Jaký je rozdíl zeměpisných šířek Prahy (50°5′19″ s. š.) a Rio de Janeira (22°55′ j. š.)?

4. Znázorněte na číselné ose obrazy racionálních čísel -3; 5; -7; 2; -4; 4 a vypočítejte zpaměti, oč je větší a) číslo 5 než číslo -3, b) číslo 2 než číslo -7, c) číslo 4 než číslo -4.

5. Znázorněte na číselné ose obrazy racionálních čísel $5\frac{1}{2}$; $-7\frac{1}{2}$; $-2\frac{2}{5}$; $1\frac{1}{5}$; $-6\frac{1}{2}$; $4\frac{3}{5}$ a vypočítejte zpaměti, oč je menší

a) číslo $-7\frac{1}{2}$ než číslo $5\frac{1}{2}$; b) číslo $-2\frac{2}{5}$ než číslo $1\frac{1}{5}$; c) číslo $-6\frac{1}{2}$ než číslo $4\frac{3}{5}$.

6. Které číslo je o $4\frac{1}{4}$ menší než číslo $2\frac{3}{4}$? Znázorněte na číselné ose.

7. Určete aritmetický průměr čísel (-2) a 3 a zaznamenejte jeho obraz na číselné ose. Jakou polohu má tento obraz na úsečce, jejímiž koncovými body jsou obrazy daných čísel?

8. Znázorněte na číselné ose obrazy čísel $-5\frac{1}{4}$ a $6\frac{1}{2}$ a vyznačte na ní obrazy všech celých čísel, která leží mezi nimi. Stanovte aritmetický průměr těchto celých čísel.

9. Které z čísel $(-2)^2$, $-(2)^2$, $-(3)^2$ je největší a které nejmenší? Znázorněte na číselné ose.

10. Je-li m libovolné přirozené číslo, kolik přirozených čísel leží mezi číslem $(m - 1)$ a $(m + 6)$?

11. Ukažte na ose číselné, že platí:

a) $4 + (-5) + \frac{3}{2} = 4 + \frac{3}{2} + (-5)$;

b) $(5 - 3) + 4\frac{1}{2} = (5 + 4\frac{1}{2}) - 3$.

Které zákony tu ověřujete?

12. Převeďte na zlomky desetinné:

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{8}, \frac{3}{25}, \frac{3}{2^2 . 5}, \frac{21}{2 . 5^2}, \frac{17}{2^3 . 5},$

$\frac{31}{2^3 . 5^2}, 1\frac{3}{5}, \frac{\frac{2}{5}}{16}$;

b) $\frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{5}{33}, \frac{3}{11}, \frac{17}{90}, \frac{233}{990}, \frac{43}{165}.$

Které z nich se dají psát ve tvaru ukončeného desetinného čísla, které jsou ryze a které neryze periodické?

13. Dokažte, že zlomek, jehož jmenovatel je 5^n, kde n je libovolné přirozené číslo, lze psát ve tvaru ukončeného desetinného čísla.

14. Dokažte, že zlomek, jehož jmenovatel je 2^n, kde n je libovolné přirozené číslo, lze psát ve tvaru ukončeného desetinného čísla.

15. Dokažte, že zlomek, jehož jmenovatel je $2^n . 5^m$, kde n, m jsou libovolná čísla přirozená, lze psát ve tvaru ukončeného desetinného čísla.

16. Napište ve tvaru desetinných čísel zlomky $\frac{1}{5}$ a $\frac{2}{3}$, výsledky sečtěte a porovnejte s desetinným zápisem součtu zlomků:

a) $\frac{2}{5} + \frac{5}{12}$; b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$; c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

17. Převeďte na zlomky obyčejné tato desetinná čísla:
0,12; 0,75; 3,8; 23,45; 1,05.

18. Převeďte ryze periodický desetinný zlomek $0,\overline{324}$ na zlomek obyčejný.

Řešení

$0,\overline{324} = 0,324\,324\,324\ldots\ldots\ldots$ (1)

Násobíme-li obě strany rovnice (1) číslem 10^3, dostaneme rovnici

$1\,000 \,.\, 0,\overline{324} = 324,324324\ldots\ldots\ldots$ (2)

Odečteme-li od rovnice (2) rovnici (1), dospějeme k rovnici

$$999 \,.\, 0,\overline{324} = 324, \text{ odkud je } 0,\overline{324} = \frac{324}{999} = \frac{12}{37}\,.$$

Správnost výsledku snadno ověříme obrácením postupu:

$$\frac{12}{37} = 12 : 37 = 0,\overline{324}\,.$$

Závěr: $0,\overline{324} = \dfrac{12}{37}$.

19. Převeďte neryze periodický desetinný zlomek $0,2\overline{37}$ na zlomek obyčejný.

Řešení

$0,2\overline{37} = 0,237\,37\,37\ldots\ldots\ldots$ (1)

Znásobíme-li obě strany rovnice (1) nejprve číslem 10^3 a potom číslem 10^1, dostaneme rovnice

$1000 \,.\, 0,2\overline{37} = 237,373737\ldots\ldots\ldots\ldots$ (2)

$10 \,.\, 0,2\overline{37} = 2,373737\ldots\ldots\ldots\ldots$ (3)

Odečteme-li dále od rovnice (2) rovnici (3), dospějeme k rovnici

$$990 \,.\, 0,2\overline{37} = 235, \quad \text{odkud je} \quad 0,2\overline{37} = \frac{235}{990} = \frac{47}{198}\,.$$

Výsledek je správný, neboť $\dfrac{47}{198} = 47 : 198 = 0,2\overline{37}$.

Závěr: $0,2\overline{37} = \dfrac{47}{198}$.

20. Převeďte na obyčejné zlomky:
a) $0,\overline{27}$; b) $0,\overline{6}$; c) $2,\overline{345}$; d) $0,\overline{1234}$; e) $0,7\overline{2}$; f) $0,1\overline{36}$;
g) $0,7\overline{27}$; h) $3,39\overline{85}$.

21. Proveďte:

a) $0,\overline{4} + 0,\overline{12}$; $0,\overline{7} + 0,\overline{35}$; $0,\overline{47} + 0,\overline{023}$;

b) $0,\overline{47} + 0,0\overline{23}$; $0,5\overline{354} + 0,\overline{85}$; $2,\overline{35} - 1,\overline{231}$; $1,\overline{25} - 0,\overline{773}$.

***22.** Proveďte:

a) $1,\overline{2} \,.\, 1,\overline{18}$; b) $0,\overline{32} \,.\, 1,\overline{3}$.

***23.** Řešte rovnici:

a) $0,\overline{25}x + 0,\overline{31}x = 1,\overline{13}$;

b) $2,\overline{64}x - 3,\overline{48} = 1,\overline{48}x$.

24. O kolik procent je číslo 0,28 menší než číslo $0,\overline{28}$?

25. Určete druhé mocniny čísel 73, 86, 59, 92, 99, 29. K výpočtu užijte vzorce $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ nebo vzorce $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. [Návod: Např. $29^2 = (20 + 9)^2$ nebo $29^2 = (30 - 1)^2$.]

26. Vyhledejte v tabulkách druhých mocnin:

a) $3,4^2$; 62^2; 870^2; $0,26^2$; $0,048^2$;

b) $6,28^2$; $38,9^2$; 952^2; $4\,380^2$; $0,733^2$;

c) $2,452^2$; $29,84^2$; $0,358\,8^2$; $0,045\,79^2$.

27. Z tabulek vyhledejte druhé mocniny čísel 36, 73, 24, 87, 92 a pomocí výsledků vypočítejte: 364^2, 736^2, 247^2, 875^2, 925^2.

28. Jako mocninu trojčlenu určete: a) 111^2; b) 109^2.

29. Proveďte a) zpaměti: 3^4, 4^4, 5^4, $\left(\frac{2}{3}\right)^4$; b) písemně: 45^4, $6,1^4$, $0,24^4$.

30. Vyhledejte v tabulkách třetích mocnin:

a) 17^3; $2,8^3$; 52^3; $0,43^3$; $0,74^3$;

b) 231^3; $3,16^3$; $74,2^3$; 855^3; $49,6^3$;

c) $112,2^3$; $2,356^3$; $132,6^3$.

31. Rozhodněte, kterými číslicemi mohou být zakončeny a) druhé mocniny, b) třetí mocniny přirozených čísel.

32. Stanovte hodnoty těchto výrazů:

a) $54,8^2 - 9$; $2,37^2 + 0,016$; $0,324^2 + \frac{7}{8}$;

b) $9,24^2 + 1,3^2$; $2,64^2 - 1,58^2$;

c) $0,32^2 + 1,3^2 + 11,1^2$; $0,23^2 + 0,634^2 - \frac{9}{20}$;

d) $1,5^3 - 0,25^2$; $12,1^3 + 3,4^2 - \frac{2}{5}$.

33. Jak zjistíte výhodně hodnoty výrazů:

a) $1{,}6^2 - 0{,}7^2$; b) $24{,}8^2 - 21{,}2^2$; c) $7{,}36^2 - 6{,}26^2$;
d) $0{,}3^2 . 0{,}05^2$; e) $1{,}2^2 . 0{,}8^2$; f) $5{,}64^2 : 0{,}6^2$;
g) $1{,}3^2 . 0{,}3^2 - 0{,}38^2$.

34. Proveďte:

a) $\left(4\frac{2}{3} + 2\frac{1}{6}\right) \cdot \frac{1}{5} - (3{,}5^2 - 2{,}3^2) . 3{,}25$;

b) $(9{,}25^2 - 6{,}15^2)^2 - (8{,}35^2 - 6{,}65^2)^2$;

c) $\dfrac{15{,}65^2 - 9{,}35^2 + 2^5 + 10{,}5}{25{,}74^2 - 14{,}26^2 - 2^8 - 2^5 : 10}$.

35. Dokažte, že $\sqrt{3}$ je iracionální číslo. Stanovte dále její přibližnou hodnotu na 3 desetinná místa a) aproximováním, b) odmocňováním a zkontrolujte výsledek pomocí tabulek.

Řešení

1. $\sqrt{3}$ není číslo přirozené, jelikož neexistuje takové přirozené číslo, jehož druhá mocnina by se rovnala číslu 3.

2. $\sqrt{3}$ není zlomkem tvaru $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou přirozená čísla navzájem nesoudělná a $q \neq 1$. Důkaz tohoto tvrzení provedeme nepřímo takto: Předpokládejme, že $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, kde zlomek $\frac{p}{q}$ má uvedené vlastnosti, a je tedy v základním tvaru.
   Potom platí vztah $\frac{p^2}{q^2} = 3$,
   přičemž zlomek $\frac{p^2}{q^2} = \frac{p \cdot p}{q \cdot q}$ je také v základním tvaru (jak se dá snadno dokázat), neboť čísla p^2, q^2 jsou nesoudělná a $q^2 \neq 1$.

Vzniklý spor (zlomek v základním tvaru s jmenovatelem různým od 1 se nemůže rovnat číslu 3) ukazuje, že předpoklad nebyl správný, z čehož plyne, že $\sqrt{3}$ není zlomkem tvaru $\frac{p}{q}$.

Závěr: $\sqrt{3}$ není číslem přirozeným, není zlomkem, není tedy číslem racionálním.

a) Určeme dále přibližnou hodnotu $\sqrt{3}$ na 3 desetinná místa aproximováním.
   Postupně platí:
   $1 < \sqrt{3} < 2$, neboť $1 < 3 < 4$;

$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, neboť $2{,}89 < 3 < 3{,}24$;
$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$, neboť $2{,}992\,9 < 3 < 3{,}027\,6$;
$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$, neboť $2{,}999\,824 < 3 < 3{,}003\,289$;
$1{,}732\,0 < \sqrt{3} < 1{,}732\,1$, neboť $2{,}999\,824\,00 < 3 < 3{,}000\,170\,41$.
Závěr: $\sqrt{3} \doteq 1{,}732$.

b) Určeme $\sqrt{3}$ na 3 desetinná místa odmocňováním.

$\sqrt{3} = 1{,}732\,0\ldots$
200 : 27 . 7
1100 : 343 . 3
7100 : 3462 . 2
17 600 : 3464

Závěr: $\sqrt{3} \doteq 1{,}732$.

Přesnější hodnota uváděná v matemat. tabulkách:
$\sqrt{3} = 1{,}732\,050\,81$.

36. Dokažte, že $\sqrt{5}$ je číslo iracionální.

37. Dokažte, že $(\sqrt{2} - 1)$ je číslo iracionální.

38. Dokažte, že číslo $5\sqrt{2}$ je číslo iracionální.

39. Jestliže přirozené číslo m není druhou mocninou žádného přirozeného čísla, potom $\sqrt{m}$ je číslo iracionální. Dokažte to.

40. Znázorněte na číselné ose obrazy čísel $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.
[Návod: $\sqrt{2}$ je délka úhlopříčky čtverce, jehož strana je 1, $\sqrt{3}$ je délka dvojnásobné výšky rovnostranného trojúhelníka, jehož strana je 1, $\sqrt{5}$ je velikost přepony pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny jsou 1 a 2.]

41. Uspořádejte podle velikosti čísla: $1{,}414$; $1{,}\overline{414}$; $1{,}41\overline{4}$; $1{,}41\overline{4}$; $\sqrt{2}$.

42. $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Vypočítejte hodnoty těchto funkcí na 5 desetinných míst a zkontrolujte si výsledky s hodnotami, které jsou uvedeny v tabulkách.

43. Proveďte:

a) $\sqrt{64} + \sqrt{36}$; b) $\sqrt{64 + 36}$; c) $\sqrt{64} + 36$; d) $64 + \sqrt{36}$.

44. Určete:

a) $\sqrt{10}$; b) $\sqrt{50}$; c) $\sqrt{1\,000}$; d) $\sqrt{6{,}98}$; e) $\sqrt{77{,}52}$; f) $\sqrt{761{,}2}$;
g) $\sqrt{9\,868}$; h) $\sqrt{0{,}135\,0}$; i) $\sqrt{0{,}035\,30}$; j) $\sqrt{3{,}803}$; k) $\sqrt{22{,}85}$.

45. Určete z tabulek:

a) $\sqrt[3]{5}$; b) $\sqrt[3]{10}$; c) $\sqrt[3]{50}$; d) $\sqrt[3]{100}$; e) $\sqrt[3]{500}$; f) $\sqrt[3]{6{,}582}$; g) $\sqrt[3]{34{,}99}$;

h) $\sqrt[3]{495{,}3}$; i) $\sqrt[3]{6\,582}$; j) $\sqrt[3]{34\,990}$; k) $\sqrt[3]{0{,}006\,053}$; l) $\sqrt[3]{0{,}049\,52}$;

m) $\sqrt[3]{0{,}540\,1}$.

46. Obdélník má rozměry 15,2 cm a 9,5 cm. Udejte velikost strany čtverce stejného obsahu.

47. Čtvercová síň je vyložena 4 900 čtvercovými dlaždicemi, z nichž každá má obsah 225 cm². Udejte rozměry síně.

48. Je dána krychle, jejíž hrana má délku 6 cm. Určete délku hrany krychle, která má povrch pětkrát větší.

49. Určete délku hrany krychle, jejíž objem je a) dvakrát, b) pětkrát tak velký jako objem krychle o hraně délky 6 cm.

50. Jsou dány dva čtverce, jejichž obsahy jsou 29,4 cm² a 48,5 cm². O kolik cm je délka strany druhého čtverce větší než délka strany čtverce prvého?

51. Určete délku strany čtverce, jehož obsah je roven součtu obsahů dvou čtverců, jejichž délky stran jsou $a = 6{,}25$ dm, $b = 7{,}43$ dm.

52. Určete tloušťku bukového trámu ($\varrho = 0{,}7$ g/cm³) čtvercového průřezu, délky 4 m, jehož hmotnost je 175 kg. (Objem $V = a^2 \,.\, v$, kde a je strana čtvercového průřezu a v délka trámu.)

53. Vyhledejte z některých přesnějších tabulek hodnoty čísel π a $\frac{1}{\pi}$ a zaokrouhlete je na 7 desetinných míst.

54. Který z výrazů se nejvíce blíží číslu π:

a) $\sqrt{4 + \left(3 - \frac{1}{3}\right)^2}$; b) $\frac{3}{5}(3 + \sqrt{5})$; c) $0{,}26\sqrt{146}$?

55. U malých transformátorů se počítá s proudovým zatížením měděných vodičů 2 A/mm² (tj. proud 2 A na každý čtverečný milimetr průřezu měděného vodiče). Jaký průměr ($\emptyset$) drátu s kruhovým průřezem musíme volit při proudu a) 1 A, b) 0,5 A, c) 2 A?

56. Objem rovnostranného válce je 74π cm³. Určete velikost jeho poloměru. (Objem $V = 2\pi r^3$; $v \doteq 2r$.)

57. Určete velikost poloměru koule, jejíž povrch je
a) $21{,}81\pi$ cm², b) 54,85 cm². (Povrch $S = 4\pi r^2$.)

58. Určete velikost hrany krychle, která má stejný objem jako koule o poloměru r. $\left(\text{Objem koule } V = \dfrac{4}{3}\pi r^3.\right)$

59. Určete velikost poloměru koule, jejíž objem se rovná 1 m^3.

60. Určete uspořádanou dvojici čísel $[x, y]$, která řeší soustavu
$5x + 4y = 14$, $97y - 99x = 28$.
Je $x \doteq \sqrt{2}$, $y \doteq \sqrt{3}$? Mohou tvořit řešení této soustavy čísla iracionální?

2. NEROVNOSTI

61. Jaké geometrické útvary vyplňují na číselné ose obrazy čísel x, pro něž platí: a) $x \geqq 5$, b) $x > 3$, c) $x < 1$, d) $x \leqq -2$, e) $-5 < x < 4$, f) $-8 \leqq x < 6$, g) $0 \leqq x \leqq 2{,}5$?

62. Jaké útvary vyplňují na číselné ose obrazy čísel $x \neq 2$?

63. Na číselné ose vyznačte obrazy všech přirozených čísel x, pro něž platí: $\dfrac{1}{2} < x \leqq 5$.

64. Jak umístíte na číselné ose, na které není ještě zvolen počátek, obrazy čísel x a y, víte-li, že platí $x < y$? Jaký geometrický útvar vyplní obrazy všech čísel y při pevně zvoleném obrazu čísla x?

65. Za a, b, c volte libovolná určitá čísla a ověřte si tak správnost pouček: a) Je-li $a < b$, je $a + c < b + c$, b) je-li $a < b$, je $-a > -b$. Využijte též číselné osy.

66. Platí-li $0 < a < 1$, co platí o čísle $\dfrac{1}{a}$?

Platí-li $-1 < \dfrac{1}{a} < 0$, co platí o čísle a?

67. Co [illegible] i o znamení čísel a, b, jestliže platí:

a) $a + b > 0$, b) $ab > 0$, c) $\dfrac{a}{b} < 0$, d) $\dfrac{a}{b} > 0$?

68. Za kterých podmínek platí, že součet $a + b$ je a) menší než jeden sčítanec, b) menší než kterýkoli sčítanec? Kdy je součin ab menší než kterýkoli činitel?

69. Určete, které z těchto nerovností jsou ekvivalentní:

a) [illegible]$x + 3 > 3p + 2$; b) $px > 4$, $p > 0$;

c) $2x - 3p + 1 > 0$; d) $x > \dfrac{4 + p}{p} - 1$; $p > 0$;

e) $\dfrac{3}{2}p - x < \dfrac{1}{2}$; f) $3p - 2x > 2$; g) $p^2x < 4p$.

70. Číslem c násobte obě strany nerovnosti:

a) $\dfrac{1}{2} > -1$, $c = 6$; b) $-\dfrac{1}{2} > -1$, $c = -6$;

c) $a^2 > b$, $b < 0$, $c = b$; d) $x^3 < x^2$, $c = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.

71. Zvolte na číselné ose s počátkem P obrazy dvou libovolných kladných čísel a, b, přičemž $a > b$. Jakou polohu na číselné ose má obraz čísla $\dfrac{a + b}{2}$ vzhledem k číslům a, b? Jaký vztah platí mezi čísly a, b, $\dfrac{a + b}{2}$?

72. Pro která čísla b je $\dfrac{a + b}{2} > a$?

73. Pro která čísla a je $\dfrac{a - b}{2} > b$?

74. Pro která čísla a má zlomek $\dfrac{3a - 2}{4}$ hodnotu větší než 1?

75. Pro která přirozená čísla a má zlomek $\dfrac{5a - 4}{3}$ hodnotu menší než 1?

Vyznačte obrazy všech čísel a udané vlastnosti na číselné ose.

76. Jaký vztah platí mezi součiny ac, bd, jestliže čísla a, b, c, d jsou a) kladná, b) záporná a v obou případech je $a < b$, $c < d$?

77. Mezi vzdálenostmi a, b předmětu a obrazu od čočky nebo kulového zrcadla platí vztah $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{f}$, kde f je velikost ohniskové dálky přístroje. Určete nerovnost pro b, jestliže platí: a) $a > 2f$; b) $f < a < 2f$, $a > 0$; c) $0 < a < f$.

78. Je dán pravý zlomek $\dfrac{a}{b}$, přičemž je $a > 0$, $b > 0$. Přičteme-li k čitateli i jmenovateli tohoto zlomku totéž číslo $c > 0$, zůstává zlomek pravý. Dokažte to.

79. Jsou-li a, b reálná čísla a $a < b$, potom platí $a < \dfrac{a + b}{2} < b$. Dokažte.

80. Jsou-li a, b, c, d kladná čísla a platí-li nerovnost $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$, pak platí také nerovnost $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a + c}{b + d} < \dfrac{c}{d}$. Dokažte.

81. Jsou-li a, b reálná čísla, dokažte, že platí:

a) $a^2 + \frac{1}{a^2} \geqq 2$; $a \neq 0$; b) $\frac{4a+3}{1+a^2} \leqq 4$;

c) $a^2 + b^2 \geqq 2ab$; d) $a^2 + b^2 \geqq ab$.

82. Je-li $p > 0$, $q > 0$, dokažte, že platí:

a) $(p + q)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \geqq 4$;

b) $\frac{p^2 + q^2}{2} \geqq \left(\frac{p+q}{2}\right)^2$.

83. a) Platí-li mezi reálnými čísly m, n, p, q nerovnost $mp + nq > mq + np$, pak je $m > n$, $p > q$ nebo $m < n$, $p < q$.

b) Je-li $m > n$, $p > q$ nebo $m < n$, $p < q$, přičemž m, n, p, q jsou reálná čísla, pak platí nerovnost $mp + nq > mq + np$. Dokažte to.

Řešení

a) Upravujme postupně nerovnost $mp + nq > mq + np$ takto:

$mp + nq - mq - np > 0$,
$m(p - q) - n(p - q) > 0$,
$(p - q)(m - n) > 0$. .... (1)

Nerovnost (1) je ekvivalentní s nerovností $mp + nq > mq + np$ a je splněna tehdy, je-li $p - q > 0$, $m - n > 0$ nebo $p - q < 0$, $m - n < 0$, tedy pro $p > q$, $m > n$ nebo $p < q$, $m < n$.

b) Je-li $p > q$, $m > n$, je $p - q > 0$, $m - n > 0$ a součin $(p - q) \cdot (m - n) > 0$; z této nerovnosti ekvivalentními úpravami plyne nerovnost $mp + nq > mq + np$.

Je-li $p < q$, $m < n$, je $p - q < 0$, $m - n < 0$ a součin $(p - q) \cdot (m - n) > 0$. Z této nerovnosti plyne nerovnost $mp + nq > mq + np$.

Závěr: Obě věty jsou platné. Věta b) je obrácená k větě a).

84. Dokažte, že pro všechna reálná čísla p, q platí:
$p^4 + q^4 \geqq (p^2 + q^2) \cdot pq$.

Řešení

Upravujme postupně danou nerovnost takto:

$p^4 + q^4 \geqq (p^2 + q^2)pq$, ... (1)
$p^4 + q^4 - pq(p^2 + q^2) \geqq 0$,
$p^4 + q^4 - p^3q - pq^3 \geqq 0$,
$p^3(p - q) - q^3(p - q) \geqq 0$,

$$(p - q)(p^3 - q^3) \geqq 0\,,$$
$$(p - q)(p - q)(p^2 + pq + q^2) \geqq 0\,,$$
$$(p - q)^2\left[\left(p + \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}q^2\right] \geqq 0\,. \qquad (2)$$

Nerovnosti (2) a (1) jsou ekvivalentní, nerovnost (2) je však splněna pro všechna reálná čísla p, q, neboť $(p - q)^2 \geqq 0$, $\left(p + \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}q^2 \geqq 0$.

Stačí tedy postup obrátit, tj. vyjít z nerovnosti (2) a dospět ekvivalentními úpravami k nerovnosti (1), aby daný vztah byl dokázán.

Závěr: Jsou-li p, q reálná čísla, platí mezi nimi vztah
$$p^4 + q^4 \geqq (p^2 + q^2)pq\,.$$

85. Dokažte, že pro reálná čísla a, b, c platí vztah:
a) $a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + ac + bc$;
[Návod: Obě strany nerovnosti násobte dvěma, potom nerovnost anulujte a upravte na součet druhých mocnin.]
b) $a^2 + b^2 + c^2 \geqq 2(ab + ac + bc) - 3$;
c) $(a + b + 2c)^2 \geqq 4(ab + ac + bc)$.

86. Dokažte, že pro reálná čísla a, b, c, d platí vztah
$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geqq 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)\,.$$

87. Je-li $p > 0$, $q > 0$, dokažte, že platí:
a) $(p + q)(pq + 1) \geqq 4pq$;
[Návod: Danou nerovnost upravte na tvar $q(p - 1)^2 + p(q - 1)^2 \geqq 0$.]
b) $\dfrac{p^3 + q^3}{2} \geqq \left(\dfrac{p + q}{2}\right)^3$.

88. Dokažte, že pro všechna čísla $a > 0$ platí:
$$a^3 + 1 \geqq a + a^2\,.$$

89. Jsou-li čísla a, b přirozená a platí-li $\dfrac{a^2}{b^2} < 2$, pak platí také $\left(\dfrac{a + 2b}{a + b}\right)^2 > 2$.
Dokažte.

***90.** Je-li $a > 0$, $b > 0$, potom $a^{10} + b^{10} \leqq \dfrac{a^{11}}{b} + \dfrac{b^{11}}{a}$. Dokažte.
[Návod: Nerovnost upravte na tvar $(a - b)(a^{11} - b^{11}) \geqq 0$ a sledujte případy $a = b$, $a > b$, $a < b$.]

***91.** Dokažte, že pro každou trojici kladných čísel a, b, c platí vztah
$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqq 9\,.$$
Kdy nastane rovnost?

92. V praxi se často používá tzv. průměrných hodnot vytvořených z několika hodnot naměřených nebo pozorovaných. Tak např. aritmetický průměr čísel p, q je $\frac{p+q}{2}$, geometrický průměr $\sqrt{pq}$, harmonický průměr

$$\frac{pq}{\frac{p+q}{2}}.$$

Dokažte, že geometrický průměr čísel p, q je větší než průměr harmonický a menší než průměr aritmetický ($p > 0$, $q > 0$, $p \neq q$).

93. Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku, jehož odvěsny mají délky a, b, přepona délku c a výška na přeponu délku v, platí:

a) $\frac{a+b}{\sqrt{2}} \leqq c$; b) $v \leqq \frac{c}{2}$; c) $4v^2 < c^2 + 2ab$.

***94.** Obdélník má délky stran $AB = CD = a$, $BC = DA = b$ a délku úhlopříček $AC = BD = 2r$, kde r je poloměr kružnice obdélníku opsané. Průsečík úhlopříček je S. Veďte kolmici AP z vrcholu A na úhlopříčku BD a její patu označte P, dále kolmici PQ na úhlopříčku AC a její patu označte Q. Vypočítejte velikost úseček AP, AQ, PQ a zdůvodněte nerovnosti:

a) $AP \leqq AS = r$; b) $AD > AP$; c) $PQ < AP$

d) $a + b \leqq 2r\sqrt{2}$; e) $2AP^2 < 2r^2 + ab$.

95. Řešte nerovnosti a příslušnou množinu čísel zobrazte na číselné ose:

a) $4x - 3 > 5 - 2x$; b) $2 + 5x < 2x - 6$;

c) $\frac{3}{4}x - 5 > 0$; d) $\frac{2x-3}{12} + \frac{3-x}{16} > 0$;

e) $4 - \frac{2}{5}x < 0$; f) $\frac{1-2x}{3} + \frac{2x-5}{2} < \frac{7}{6}$;

g) $\frac{2}{3}(x-4) - 1 > 0$; h) $\frac{2}{3}(x-1) - 3 < 0$;

i) $\frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{3} > \frac{x}{2} - \frac{x-5}{3}$;

j) $\frac{5+x}{2} - 3x > \frac{1-5x}{3}$; k) $x - \frac{5x-3}{8} < \frac{3x+5}{8}$.

96. Řešte:

a) $2(5 + 3v) < 8 + 6v$; b) $\frac{x+3}{2} \geqq \frac{3}{4}$;

c) $\frac{2n-1}{3} < \frac{n+6}{2}$; d) $\frac{5(p-1)}{6} - 1 > \frac{2(p+1)}{3}$;

e) $2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4}$;

f) $\frac{3x-1}{5} - \frac{13-x}{2} > \frac{7x}{3} - \frac{11(x+3)}{6}$.

97. Určete všechna přirozená čísla, která vyhovují nerovnosti:

a) $\frac{2+27x}{6} < \frac{5}{2} + \frac{12x+1}{3}$;

b) $\frac{4x}{3} \leqq \frac{2}{3} + x$; c) $3(x+2) + \frac{x-2}{2} > 0$;

d) $(3x-5)^2 + (4x-3)^2 > (5x-4)^2$;

e) $\frac{7-x}{2} > \frac{2x-3}{4} - \frac{1-2x}{5}$.

98. Určete všechna celá čísla záporná splňující nerovnosti:

a) $6y + 1 > 2(y-5) - 1$; b) $\frac{1}{2}(1+2y) \leqq \frac{3}{2}y + 1$;

c) $\frac{y}{2} + 4 > \frac{10-y}{2} + 1$; d) $4(y+2) + 3(y+1) - 7y > 0$;

e) $\frac{3}{2}x - \frac{2x+6}{3} > \frac{4x-2}{5}$; f) $2(z-7) > \frac{2z-105}{5}$.

99. Určete všechna reálná čísla x, pro která mají tyto výrazy hodnoty kladné:

a) $5(x+1) + 2(x+2) - 3(x-3)$;

b) $\frac{2x+1}{2} - \frac{3x-1}{3}$; c) $7(x-2) - 7x$.

100. Určete všechna reálná čísla y, pro která mají tyto výrazy hodnoty záporné:

a) $\frac{2y+4}{4} + 3(y+2)$; b) $3y - 2(y+1) + 3(1-y)$.

101. Určete všechna reálná čísla v, pro která mají tyto zlomky hodnotu kladnou:

a) $\frac{3}{8+v}$; b) $\frac{2-v}{12}$; c) $\frac{-4}{2v-1}$.

102. Řešte nerovnosti a proveďte diskusi řešení vzhledem k parametru m:

a) $m(x-1) > x-2$; b) $x+m > 2mx - m^2$;

c) $(x+m)^2 < x^2+1$; d) $(x+2m)^2 > x^2+4$;

e) $\dfrac{mx+1}{3} + \dfrac{4m-x}{2} < \dfrac{m}{6}$;

f) $\dfrac{x}{m} + \dfrac{1+3x}{2} > \dfrac{x+2}{4m}$, $m \neq 0$;

g) $\dfrac{2x}{2-m} - \dfrac{m(x+1)}{2-m} < 1$, $m \neq 2$.

103. Řešte soustavy nerovností:

a) $2x+8 > 3x-4$, $\dfrac{5x+7}{7} < \dfrac{2x+7}{3}$;

b) $3x-8 < 2(2x-5)$, $5x+2 > 9(1-x)$.

104. a) $(2x+1)^2 \leqq 4x^2+3$, $x-1 < 3x+1$;

b) $2(x^2-1) + (3x+3)^2 > (6x-1)^2 - (5x-2)^2$, $5x+2 < 0$.

105. a) $5(x+1) + 6(x+2) > 9(x+3)$,
$7x - 3(2x+3) > 2(x-18)$;

b) $(x-3)(x-4) < (x+1)(x+2)$,
$x(x+1) + x(x+2) > (2x-1)(x+3)$.

106. $\dfrac{7-x}{2} - 3 < \dfrac{3+4x}{5} - 4$,

$\dfrac{5}{3}x + 5(4-x) < 2(4-x)$.

107. $\dfrac{3x+5}{7} + \dfrac{10-3x}{5} > \dfrac{2x+7}{3} - 8$,

$\dfrac{7x}{3} - \dfrac{11(x+3)}{6} > \dfrac{3x-1}{5} - \dfrac{13-x}{2}$.

108. $x+2 > 2x+3 > 3x+5$.

109. $\dfrac{3x-4}{2} + x < \dfrac{5x-1}{3} < 3-2x$.

110. Určete všechna čísla celá splňující soustavu nerovností:

a) $1 - \dfrac{3x-88}{7} > 5x$,

$$4x + 5 - \frac{1}{6}(25x + 29{,}5) < 0;$$

b) $\dfrac{2x - 11}{4} + \dfrac{19 - 2x}{2} < 2x$,

$$\frac{2x + 15}{9} > \frac{1}{5}(x - 1) + \frac{x}{3}.$$

111. Určete všechna reálná čísla x, pro která platí:

a) $\dfrac{x - 5}{x - 1} > 0$; b) $\dfrac{x - 5}{x - 1} < 0$; c) $\dfrac{3 - 2x}{2x - 5} > 0$;

d) $\dfrac{3 - 2x}{2x - 5} < 0$; e) $\dfrac{3x - 7}{3 - 2x} > 0$; f) $\dfrac{3x - 7}{3 - 2x} < 0$;

g) $\dfrac{x - \sqrt{3}}{2x + \sqrt{2}} > 0$; h) $\dfrac{x - \sqrt{3}}{2x + \sqrt{2}} < 0$.

112. Určete všechna reálná čísla a, pro která platí:

a) $\dfrac{3a + 7}{2 - 6a} > 0$; b) $\dfrac{5 - 2a}{8 + 5a} > 0$; c) $\dfrac{15 - 4a}{7 + 3a} < 0$.

113. Určete všechna reálná čísla x splňující nerovnost $x^2 + x - 6 \geqq 0$.
Řešte v oboru reálných čísel:

114. $3x^2 - 3x + 4 > 2x^2 + 2x - 2$.

115. $3x^2 - 19x + 6 < 0$.
[Návod: $-19x = -x - 18x$.]

116. $2x^2 + 3x - 5 \leqq 0$.
[Návod: $3x = 5x - 2x$.]

117. $3x^2 - 2x - 1 > 0$.

118. $6x^2 - 7x + 2 > 0$.

119. $3x^2 - 7x - 6 > 0$.

120. $(x - 3)(x - 7) < 5(x - 3)$.

121. Dokažte, že nerovnost $x^2 + 2x + 5 < 0$ nemá v oboru reálných čísel řešení.

[Návod: Upravte levou stranu nerovnosti na součet druhých mocnin.]

122. Dokažte, že nerovnost $4x^2 - 12x + 9 > 0$ splňují všechna reálná čísla $x \neq \dfrac{3}{2}$.

123. Určete všechna reálná čísla x, která vyhovují nerovnosti

$$\frac{5-x}{2x-2}+\frac{1+4x}{2x+2}<1\,.$$

Řešení

Upravujme danou nerovnost postupně takto:

$$\frac{5-x}{2x-2}+\frac{1+4x}{2x+2}<1\,, \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

$$\frac{(5-x)(x+1)+(1+4x)(x-1)}{2(x-1)(x+1)}<1\,,$$

$$\frac{5x-x^2+5-x+x+4x^2-1-4x}{2(x-1)(x+1)}<1\,,$$

$$\frac{3x^2+x+4}{2(x-1)(x+1)}<1\,, \qquad \frac{3x^2+x+4}{2(x-1)(x+1)}-1<0\,,$$

$$\frac{3x^2+x+4-2x^2+2}{2(x-1)(x+1)}<0\,, \qquad \frac{x^2+x+6}{2(x-1)(x+1)}<0\,,$$

$$\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+5\frac{3}{4}}{2(x-1)(x+1)}<0\,. \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Jelikož výraz $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+5\frac{3}{4}$ je kladný pro všechna reálná čísla x, musí být výraz $(x-1)(x+1)$ záporný, aby nerovnost (2) byla splněna. Snadno lze zjistit, že nerovnost (2), a tedy také nerovnost (1), splňují jen čísla $-1<x<1$. (Nerovnosti $x-1>0$, $x+1<0$ nelze současně splnit; nerovnosti $x-1<0$, $x+1>0$ lze splnit pro čísla $-1<x<1$.)

Závěr: Danou nerovnost splňují čísla $-1<x<1$.

124. Určete všechna reálná čísla x, pro která má zlomek $\dfrac{x^2-4}{x-3}$ hodnotu kladnou.

125. Řešte v oboru reálných čísel nerovnost $\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}>0$.

126. $3-\dfrac{2x-17}{x-5}>\dfrac{x-5}{x-2}$.

127. $\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 5x - 6} < 0$.

*128. Určete všechna reálná čísla x, pro která je splněna nerovnost

$$\frac{12x^2 - 36x + 27}{8x^2 - 18} > \frac{3}{2}.$$

129. Určete všechna reálná čísla x, pro která platí:

$$\frac{2(x - 1)}{x^2 - 1} \geqq 1,\ x \neq 1,\ x \neq -1.$$

*130. Určete všechna reálná čísla x, pro něž platí:

$$\frac{1 + x^2}{(1 - x)^2} \geqq 2,\ x \neq 1.$$

[Návod: Upravte nerovnost nejprve na tvar $x^2 - 4x + 1 \leqq 0$, potom na tvar $(x - 2)^2 - (\sqrt{3})^2 \leqq 0$ a proveďte rozklad levé strany nerovnosti podle vzorce $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.]

131. Určete všechna reálná čísla x, pro která mají smysl odmocniny:

a) $\sqrt{x^2 - 3x - 4}$; b) $\sqrt{\dfrac{-2}{x^2 - 5x + 6}}$.

132. Čitatel i jmenovatel zlomku jsou čísla celá, přičemž jmenovatel je o 2 větší než čitatel. Zvětšíme-li čitatele i jmenovatele tohoto zlomku o číslo 1, nabude zlomek hodnoty, která je větší než $\frac{1}{2}$. Zmenšíme-li jeho čitatele i jmenovatele o číslo 1, nabude hodnoty menší než $\frac{2}{5}$. Určete tento zlomek.

133. Délky stran trojúhelníka jsou vyjádřeny přirozenými čísly. Jedna má velikost 8 cm, součet velikostí zbývajících dvou je 32 cm. Určete je.

*134. Kolik litrů vody musíme přilít do 10 litrů 90%—92% lihu, abychom dostali líh 40%—42%?

*135. 10 litrů vody 13 °C teplé smísíme se $12\frac{1}{2}$ litru vody teplejší tak, aby směs měla teplotu větší než 25 °C a menší než 30 °C. Jakou teplotu musí mít teplejší voda?

136. Délky stran trojúhelníka jsou vyjádřeny přirozenými čísly. Jak jsou velké, měří-li jedna z nich 3 cm a rozdíl zbývajících dvou 1 cm?

137. Kdyby traktorista zoral denně o 2 ha více než plánoval, zoral by za 5 dní více než 80 ha. Kdyby zoral denně o 2 ha méně než plánoval, zoral by za 6 dní nejvýše 84 ha. Jaký byl denní plán orby?

138. V rovnici $2 - p = \dfrac{2p}{x - 1}$ je x neznámá a p parametr. Řešte ji a proveďte úplnou diskusi řešení vzhledem k parametru p.

Řešení

Vyloučíme-li z řešení kořen $x = 1$, můžeme danou rovnici upravovat takto:

$(2 - p)(x - 1) = 2p$,

$2x - px - 2 + p = 2p$,

$x(2 - p) = 2 + p$.

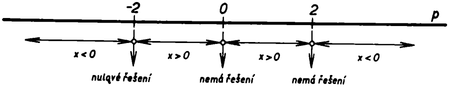
a) Je-li $p = 2$, má rovnice tvar $0 = \dfrac{4}{x - 1}$ a nelze ji splnit pro žádné číslo x.

b) Je-li $p \neq 2$, má rovnice jediné řešení $x = \dfrac{2 + p}{2 - p}$. Toto řešení je kladné pro $-2 < p < 2$, $p \neq 0$, neboť pro toto řešení musí být splněny nerovnosti $2 + p > 0$, $2 - p > 0$ nebo $2 + p < 0$, $2 - p < 0$, přičemž nerovnosti $2 + p < 0$, $2 - p < 0$ nelze současně splnit.

Řešení je záporné, je-li $p > 2$ nebo $p < -2$, neboť pro toto řešení musí být splněny nerovnosti $2 + p > 0$, $2 - p < 0$ nebo $2 + p < 0$, $2 - p > 0$.

Řešení rovné nule má rovnice pro $p = -2$.

Závěr: Je-li $p = 0$ nebo $p = 2$, nemá rovnice řešení; pro $p \neq 0$, $p \neq 2$ má rovnice jediné řešení $x = \dfrac{2 + p}{2 - p}$. Toto řešení je kladné, je-li $-2 < p < 2$, záporné pro $p > 2$ nebo $p < -2$ a nulové pro $p = -2$. Záznam na číselné ose (obr. 2):



Obr. 2

139. Proveďte úplnou diskusi řešení rovnic, je-li x neznámá, a parametr:

a) $\dfrac{x + a}{5} - \dfrac{x - 5}{a} = 2$; b) $\dfrac{a}{3 + x} = \dfrac{2}{x}$;

c) $a - 4 + \dfrac{2}{x - 1} = 0;$ d) $\dfrac{(a - 1)x}{a} = 1 - a;$

e) $\dfrac{a}{a - 2} = \dfrac{x}{x + 2};$ f) $\dfrac{x}{x - 1} = \dfrac{x - a}{x};$

g) $\dfrac{x}{3x - a} = \dfrac{a + x}{3x - 1}.$

140. Pro která čísla t mají následující rovnice jedno řešení kladné:

a) $4x = 3t - 15;$ b) $2x - 1 = 4 + 5t;$

c) $\dfrac{t}{4} = \dfrac{3}{x};$ d) $4 - t = \dfrac{2}{x - 1}.$

$\boxed{\textbf{141.}}$ Proveďte úplnou diskusi řešení soustavy

$y = 1 + 2x,$
$px + y = 2,$

jsou-li x, y neznámé a p parametr.

Řešení

Odečteme-li od druhé rovnice soustavy rovnici prvou, dostaneme rovnici $px = 1 - 2x$, odkud

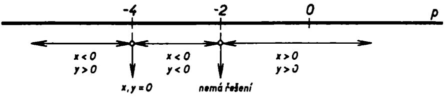
$x(p + 2) = 1.$

a) Je-li $p = -2$, má soustava tvar $y = 1 + 2x$, $-2x + y = 2$. Rovnice jsou ve sporu a soustava nemá řešení.

b) Je-li $p \neq -2$, je $x = \dfrac{1}{p + 2}$, $y = 1 + \dfrac{2}{p + 2} = \dfrac{p + 4}{p + 2}$ a soustava má jedno řešení. Toto řešení tvoří dvojice kladných čísel ($x > 0$, $y > 0$), je-li $p + 2 > 0$, $p + 4 > 0$, tedy $p > -2$. Řešení tvoří dvojice záporných čísel ($x < 0$, $y < 0$), je-li $p + 2 < 0$, $p + 4 > 0$, tedy $-4 < p < -2$. Řešení $x > 0, y < 0$ soustava nemá, jelikož nerovnosti $p + 2 > 0$, $p + 4 < 0$ nelze současně splnit. Řešení $x < 0, y > 0$ má soustava tehdy, je-li $p + 2 < 0, p + 4 < 0$, tedy pro $p < -4$. Řešení $(x = 0, y)$ soustava nemá. Řešení $(x, y = 0)$ má soustava pro $p = -4$. Nulová řešení $(x = 0, y = 0)$ soustava nemá.

Závěr: Soustava nemá řešení pro $p = -2$. Je-li $p \neq -2$, má soustava jedno řešení $x = \dfrac{1}{p + 2}$, $y = \dfrac{p + 4}{p + 2}$, které tvoří dvojice kladných čísel ($x > 0$, $y > 0$) pro $p > -2$, dvojice záporných čísel ($x < 0$, $y < 0$)

pro $-4 < p < -2$. Řešení $x < 0$, $y > 0$ má soustava pro $p < -4$, řešení $x, y = 0$ pro $p = -4$.
Záznam na číselné ose (obr. 3):



Obr. 3

142. Proveďte úplnou diskusi řešení soustav

a) $ax + y = 7;$ $\quad$ b) $3x + y = 10,$

$3x - 2y = 7,$ $\quad$ $x - 3y = a,$

jsou-li x, y neznámé a a parametr.

143. Určete všechna reálná čísla a, pro která má soustava

a) $5x - ay = 21,$ $\quad$ b) $3x + 7y = a,$

$3x - 6y = 2;$ $\quad$ $2x + 5y = 20$

řešení $x > 0$, $y > 0$.

144. Určete všechna reálná čísla k, pro která má soustava

a) $3x - y = 10,$ $\quad$ b) $3x - 2y = 5,$ $\quad$ c) $3x - 6y = 1,$

$x - 3y = k;$ $\quad$ $kx + 2y = 2;$ $\quad$ $5x - ky = 2$

řešení $x < 0$, $y < 0$.

145. V oboru reálných čísel proveďte úplnou diskusi řešení rovnice $x^2 - 2(p + 1)x + 2(p + 5) = 0$, je-li x neznámá a p parametr.

Řešení

a) Rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel, je-li její diskriminant $D = (p + 1)^2 - 2(p + 5) = p^2 + 2p + 1 - 2p - 10 = p^2 - 9 = (p + 3)(p - 3) < 0$. To nastane tehdy, je-li $-3 < p < 3$.

b) Rovnice má jeden dvojnásobný kořen, je-li její diskriminant $D = 0$, což nastane tehdy, je-li $p = 3$ nebo $p = -3$.

c) Rovnice má dva reálné kořeny různé, je-li její diskriminant $D > 0$, což nastane tehdy, je-li $p > 3$ nebo $p < -3$.

1. Tyto dva kořeny jsou kladné, jsou-li splněny podmínky $D > 0$, $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 . x_2 > 0$, kde x_1, x_2 jsou kořeny naší rovnice. Zřejmě musí platit též nerovnosti $(p + 3)(p - 3) > 0$, $p + 1 > 0$, $p + 5 > 0$, neboť $x_1 + x_2 = 2(p + 1)$ a $x_1 . x_2 = 2(p + 5)$. Jelikož uvedené tři nerovnosti musí platit současně, lze je splnit jen pro čísla $p > 3$.
2. Tyto dva kořeny jsou záporné, jsou-li splněny podmínky $D > 0$,

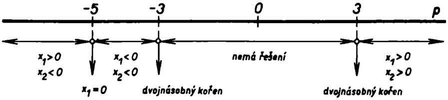
$x_1 + x_2 < 0$, $x_1 . x_2 > 0$, tedy i nerovnosti $(p+3)(p-3) > 0$, $p + 1 < 0$, $p + 5 > 0$. To nastane jen pro čísla $-5 < p < -3$.

3. Tyto dva kořeny mají rozdílná znamení, platí-li $D > 0$, $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 . x_2 < 0$ nebo $D > 0$, $x_1 + x_2 < 0$, $x_1x_2 < 0$, tedy i nerovnosti $(p+3)(p-3) > 0, p + 1 > 0, p + 5 < 0$ nebo $(p+3)(p-3) > > 0$, $p + 1 < 0$, $p + 5 < 0$. První trojici nerovností však nelze současně splnit, druhou pro všechna čísla $p < -5$. Nutno ještě podotknout, že dva reálné kořeny opačné daná rovnice nemá pro žádnou hodnotu p. (Pro $p = -1$ by přešla v rovnici ryze kvadratickou, která však nemá řešení v oboru reálných čísel.)

d) Rovnice má jeden kořen nulový, druhý nenulový, je-li $p + 5 = 0$, tedy pro $p = -5$. V tom případě přejde daná rovnice v kvadratickou rovnici bez absolutního členu a má tvar $x^2 + 8x = 0$.

Závěr: Je-li $-3 < p < 3$, nemá daná rovnice v oboru reálných čísel řešení. Je-li $p = -3$ nebo $p = 3$, má jeden kořen dvojnásobný. Je-li $p > 3$, má rovnice dva reálné kořeny různé kladné, pro $-5 < p < -3$ má oba kořeny záporné, pro $p < -5$, má dva reálné kořeny rozdílných znamení. Je-li $p = -5$, má rovnice jeden nulový a jeden nenulový kořen.

Záznam na číselné ose (obr. 4):



Obr. 4

***146.** V oboru reálných čísel proveďte úplnou diskusi řešení rovnice $(p-1)x^2 - (p-2)x + (2p-1) = 0$, je-li x neznámá a p parametr.

147. Pro která čísla a má rovnice $x^2 - 2(a+2)x + 4(a+5) = 0$ dva reálné kořeny různé a kladné?

148. Pro která čísla n má rovnice $x^2 - 2(n-4)x + (10-3n) = 0$ dva reálné kořeny různé a záporné?

149. Určete, pro která čísla m má rovnice $x^2 + 2(m+4)x + m^2 + 6m = 0$ jeden kořen kladný a jeden kořen záporný.

***150.** Dvě nádoby mající objemy a, b litrů obsahují právě c, d litrů kapaliny. Do prvé přitéká e litrů kapaliny za minutu, do druhé f litrů kapaliny za minutu. Za jakou dobu bude v obou nádobách stejné množství kapaliny? V jakém vztahu jsou udaná čísla, má-li mít úloha řešení?

151. Obvod obdélníka měří $2s$ cm. Zvětšíme-li jeden jeho rozměr o e cm a druhý o f cm, zvětší se jeho obsah o d cm^2. Jak velké jsou rozměry obdélníka? Jaké vztahy musí platit mezi udanými čísly, má-li mít úloha řešení?

152. Smísíme-li a litrů vody s b litry vody, přičemž jsou jejich teploty různé, dostaneme směs o teplotě t °C. Smísíme-li b litrů první vody s a litry druhé vody, dostaneme směs o teplotě u °C. Jaké jsou teploty obou smíšených kapalin? Určete vztah mezi čísly a, b, t, u, aby úloha byla řešitelná.

153. Z místa A vyjelo auto rychlostí c_1 km/h; o jednu hodinu později vyjelo za ním jiné auto rychlostí c_2 km/h. Kdy dohoní druhé auto auto první? Proveďte diskusi.

***154.** Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a. Vepište mu čtverec $MNPQ$, jehož obsah je P. Jaký vztah musí platit mezi čísly a, P, aby úloha byla řešitelná?
[Návod: $MN = \sqrt{P}$. Vrchol M rozděluje stranu AB na úseky x a $(a - x)$; platí vztah $x^2 + (a - x)^2 = P$.]

***155.** Obdélníkový plech má rozměry a, b, přičemž $a > b$. Má se z něho vystřihnout obdélník, který má poloviční obsah, aby vznikl na všech stranách rámeček stejně široký.
Vypočítejte šířku rámečku a zjistěte podmínky řešitelnosti úlohy.

3. ABSOLUTNÍ HODNOTA REÁLNÉHO ČÍSLA

156. $|a|$ definujeme takto: je-li $a \geqq 0$, je $|a| = a$, je-li $a < 0$, je $|a| = -a$. Definujte $|a - b|$, $|a + b|$, $|ab|$.

157. Platí-li $|x| < a$, platí též $-a < x < a$. Dokažte to.

158. Proveďte: a) $\dfrac{|-10|}{|-5|} - \dfrac{6}{|-2|} + \dfrac{12}{-|-3|}$;
b) $|(-2)^3| - |(-2)^2| - |-2|^2$;
c) $|6|^2 - |(-2)^2|^2 - 8|2|^2$.

159. Jakou hodnotu má výraz $|5 - x|$ pro $x = 5$, $x < 5$, $x > 5$?

160. Znázorněte na číselné ose čísla n a $|n|$, je-li a) $n < 0$, b) $n > 0$. Jakou hodnotu má součet $n + |n|$?

161. Počítejte zpaměti:

a) Pro která čísla x nabude výraz $|12x|$ hodnoty rovné šesti?
b) Pro která čísla y nabude výraz $|y + 1|$ hodnoty rovné dvěma?
c) Pro která čísla z nabude výraz $|2z - 1|$ hodnoty rovné pěti?

162. Dokažte, že platí $|ab| = |a| \cdot |b|$, kde a, b jsou reálná čísla.

163. Dokažte, že platí: $|x^2y| + |xy^2| = |x| \cdot |y| \cdot (|x| + |y|)$, kde x, y jsou reálná čísla.

164. Dokažte, že platí: $|xy| + |xz| \geqq |x(y + z)|$, jsou-li x, y, z reálná čísla.

165. Řešte v oboru reálných čísel nerovnost $|x - 2| \leqq 5$.

Řešení

Uvažujme dva případy:

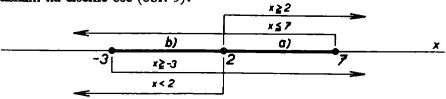
a) Je-li $x - 2 \geqq 0$, tedy $x \geqq 2$, je $|x - 2| = x - 2$ a naše nerovnost má tvar $x - 2 \leqq 5$, odkud $x \leqq 7$. Přihlédneme-li k předpokladu, splňují nerovnost všechna čísla $2 \leqq x \leqq 7$.

b) Je-li $x - 2 < 0$, tedy $x < 2$, je $|x - 2| = 2 - x$ a naše nerovnost má tvar $2 - x \leqq 5$, odkud $x \geqq -3$. Vzhledem k předpokladu splňují nerovnost všechna čísla $-3 \leqq x < 2$.

Shrneme-li oba případy, je zřejmé, že danou nerovnost splňují všechna čísla $-3 \leqq x \leqq 7$.

Závěr: Danou nerovnost splňují všechna reálná čísla $-3 \leqq x \leqq 7$.

Záznam na číselné ose (obr. 5):



Obr. 5

166. Řešte v oboru reálných čísel nerovnosti:

a) $|x + 2| < 8$; b) $|x - 1| + x < 2$;
c) $|x - 4| \leqq 3$; d) $|x - 3| > 5$.

167. a) $x > |x + 1|$; b) $x < |x + 1|$;
c) $2x > |x + 1|$; d) $1 \leqq |x - 3| \leqq 5$.

168. Určete všechna přirozená čísla x, která vyhovují nerovnosti:

a) $\dfrac{x}{2} - 1 < |x| < \dfrac{x}{2} + 2$; b) $|x + 3| < |x - 1|$.

169. Určete všechna reálná čísla x vyhovující nerovnostem:

a) $\dfrac{|3-5x|}{x-1} > 5$; b) $\dfrac{|2x-2|}{2-x} < 1$; c) $\dfrac{x-3}{|3x-2|} < 3$.

170. Určete všechna přirozená čísla x splňující soustavu nerovností:
$|x-2| < 5$, $|x+4| > 9$.

***171.** Řešte v oboru reálných čísel nerovnosti:

a) $|2x-3| \geqq |3x-2|$; b) $|x| + |x-1| > 2$;
c) $|x| + |x-5| < 7$; d) $|2x+1| - |3-x| < x$;
e) $|7-x| > |1-x| + 3|x|$.

172. Řešte nerovnosti:

a) $|x^2-1| \leqq \dfrac{1}{2}(x+1)$; b) $|x^2-1| > 2x+1$;
c) $|x^2-2x| > x^2 - |2x|$.

173. Určete všechna celá čísla x znázorňující nerovnost
$\dfrac{|x|-1}{x^2-1} \geqq \dfrac{1}{2}$.

$\boxed{174.}$ Řešte početně i graficky rovnici $2|x| = x + 3$.

Řešení početní

Uvažujme dva případy:

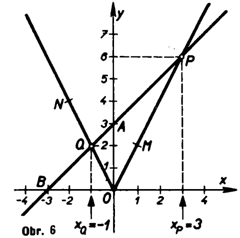
a) Je-li $x > 0$, je $|x| = x$ a řešíme rovnici $2x = x + 3$, jejíž kořen $x = 3$. Kořen je kladný, vyhovuje předpokladu a zřejmě danou rovnici splňuje.

b) Je-li $x < 0$, je $|x| = -x$ a řešíme rovnici $-2x = x + 3$, jejíž kořen $x = -1$. Kořen je záporný, vyhovuje předpokladu a danou rovnici splňuje.

Závěr: Daná rovnice má dva kořeny: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

Řešení grafické (obr. 6)

Grafem funkce $y = 2|x|$ je lomená čára, která se skládá ze dvou polopřímek, z nichž jedna leží v prvém a druhá v druhém kvadrantu. Obě polopřímky mají počáteční bod v počátku soustavy souřadnic a jsou určeny např. body $M \equiv (1; 2)$, $N \equiv (-2; 4)$.



Obr. 6

[Funkce má pro $x > 0$ tvar $y = 2x$, pro $x < 0$ tvar $y = -2x$.]
Grafem funkce $y = x + 3$ je přímka, kterou určují např. body $A \equiv$ $\equiv (0; 3)$, $B \equiv (-3; 0)$.
Grafy obou funkcí se protnou v bodech P a Q, jejichž souřadnice x řeší úlohu.

175. Řešte početně i graficky rovnice:

a) $|x| = \frac{1}{2}x + 2$; b) $|x - 2| = \frac{x}{2}$; c) $|x| - x = 1$;

d) $x - |x| = 1$; e) $|x| = x + 2$; f) $|x - 2| - |x| = 0$.

176. Řešte početně i graficky rovnici $|x + 1| - |x - 1| - x = 0$.

177. Řešte jen početně rovnice:
a) $|x + 1| + |x - 1| = 4$; b) $|1 - x| + |x| = -1$;
c) $|x + 1| - |x - 1| = 2$.

***178.** a) $|x + 1| + 3|x - 1| = 2|x| + x$;
b) $|x + 1| + 3|x - 1| = 2|x| + 3 - x$;
c) $|x + 1| - |x| + 3|x - 1| = 2|x - 2| + x + 2$.

***179.** Řešte rovnici $\left|\frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9x + 20}\right| = 10$.
[Návod: Rozložte v součin trojčleny v čitateli a jmenovateli zlomku.]

180. Řešte soustavu rovnic
$$|x - 1| + |y - 5| = 1,$$
$$|x - 1| + 5 = y.$$

Řešení

Odečteme-li od prvé rovnice rovnici druhou, dostaneme rovnici $|y - 5| - 5 = 1 - y$.
Dále uvažujme dva případy:

a) Je-li $y - 5 \geqq 0$, je $|y - 5| = y - 5$ a řešíme rovnici $y - 10 =$ $= 1 - y$, odkud $y = \frac{11}{2}$.

Z druhé rovnice soustavy plyne vztah $|x - 1| = y - 5$. Proto $|x - 1| = \frac{1}{2}$, tj. rovnice, které vyhovují čísla $x = \frac{1}{2}$ a $x = \frac{3}{2}$.

b) Je-li $y - 5 < 0$, je $|y - 5| = 5 - y$ a řešíme rovnici $5 - y - 5 =$ $= 1 - y$, kterou však nesplňuje žádné číslo y.

Závěr: Soustava má dvě řešení: a) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{11}{2}$;

b) $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{11}{2}$.

***181.** Řešte soustavu a) $|x + y| = 3\,,\ x - y = 1;$
b) $x - |y + 1| = 1\,,\ x + y = 3;$
c) $|x| + |y| = 4\,,\ |x| + |x - 2| = y + 5;$
d) $|x| + |y| = 1,\ 2|x| + y = 2\,.$

182. Ukažte, že soustava $|x| + |y| = a\,,$
$x + y = b$
nemá pro $b > a > 0$ řešení.

183. Řešte rovnici: $\dfrac{1}{|x - 1|} = |x + 1|\,.$

Řešení

Protože $|a| = a$ pro $a > 0$, $|a| = -a$ pro $a < 0$, musíme uvážit čtyři případy:

a) $x - 1 > 0$, $x + 1 > 0$. V tom případě daná rovnice zní $\dfrac{1}{x - 1} = x + 1$ a její řešení je $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Případ a) ale vyžaduje $x > 1$, vyhovuje tedy jen kořen $x = \sqrt{2}$.

b) $x - 1 < 0$, $x + 1 > 0$. Nyní má daná rovnice tvar $\dfrac{-1}{x - 1} = x + 1$. Odtud $x = 0$. $x = 0$ leží v intervalu $-1 < x < 1$, tedy $x = 0$ musí dané rovnici vyhovovat.

c) $x - 1 < 0$, $x + 1 < 0$. Daná rovnice pak zní $\dfrac{-1}{x - 1} = -(x + 1)$,

z toho $x = \pm\sqrt{2}$. x musí však být v intervalu $(-\infty, -1)$, vyhovuje proto jen kořen $x = -\sqrt{2}$.

d) $x - 1 > 0$, $x + 1 < 0$ nelze splnit žádným x.

Zkouška správnosti: Vypočtené hodnoty dosadíme do původní rovnice a dostaneme $L = \sqrt{2} + 1$, $P = \sqrt{2} + 1$.

Závěr: Daná rovnice má řešení $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}\,.$

***184.** Řešte rovnice: a) $|x^2 - x| = x;$ b) $|x^2 - x| = |x|;$
c) $|x^2 - 2x + 1| = |x - 1|;$
d) $|x^2 - 2x + 3| = |x - 4|\,.$

***185.** Řešte rovnice: a) $|x^2 + 2x + 2| = |x|;$ b) $|x^2 - 2x + 2| = 5;$
c) $|x^2 - 2| = |3 - x|;$ d) $|x - 2x^2| = |x - 4|\,.$

***186.** Která x splňují rovnici:
a) $|x(x - 3)| = 1 + |x|;$ b) $|x^2 - 16| + |x^2 - 9| = 7;$
c) $|x^2 - 3x \quad 4| + |x - 2| = x + 1;$

d) $\dfrac{1}{|x-2|} + |x-1| = 1$; e) $\dfrac{1}{|x-3|} - \dfrac{1}{|x-2|} = 2$;

f) $\dfrac{3}{|x^2 - 3x - 4|} = \dfrac{1}{|x-4|} + 1$.

***187.** Řešte rovnice:

a) $x^2 + 2|x-1| - 6 = 0$; b) $x - |y+1| = 1,\ x^2 + y = 10$.

***188.** Dokažte:

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2, \text{ je-li } x \text{ reálné číslo.}$$

***189.** Určete reálné číslo p tak, aby rovnice $\sqrt{x^2 - 5p^2} = px - 1$ měla kořen $x = 3$. Pro toto p pak rovnici řešte.

***190.** Řešte rovnice:

a) $x + \sqrt{px - 2p + 1} = 1$; b) $\sqrt{x^3 - p} = x - p$, kde p je parametr.

Proveďte diskusi řešení vzhledem k parametru p.

4. NEÚPLNÁ ČÍSLA

191. Zaokrouhlete na desetiny, setiny, tisíciny a desetitisíciny čísla:

a) $\sqrt{2} = 1{,}414\,21\ldots\ldots$
b) $\sqrt{3} = 1{,}732\,05\ldots\ldots$
c) $\sqrt{5} = 2{,}236\,068\ldots\ldots$

192. Zaokrouhlete uvedená čísla tak, aby jejich číslice měly stejný řád, potom je sečtěte a součet zaokrouhlete v případě a) na celky, b) na celky, c) na desítky, d) na desetiny.

a)	b)	c)	d)
3,632 5 ...	14,96...	44,96...	0,235 7 ...
7,962.....	18,3....	121,.....	1,23......
15,6.......	1,579..	17,2....	0,125.....
4,973.....	21,37...	1,357..	0,432.....

193. Zaokrouhlete uvedená čísla tak, aby jejich číslice měly stejný řád, potom naznačené úkony proveďte a výsledek zaokrouhlete na desetiny:

a)	b)	c)	d)
15,26...	723,...	49,75...	452,...
−7,841..	−255,2..	+63,8....	+264,1..
		−17,965..	−127,63.

194. Ludolfovo číslo $\pi = 3{,}141\,59\ldots$ se při počítání úloh zaokrouhluje na hodnotu 3,14 nebo $\frac{22}{7}$. Jaké prosté chyby se v obou případech dopouštíme a která ze zaokrouhlených hodnot je přesnější? Určete relativní chyby čísla π v obou případech. (V procentech.)

195. 28 žákům jedné třídy byla zaslána odměna za brigádnickou výpomoc 352,80 Kčs. Kolik bude vyplácet pokladník každému žáku v celých korunách, jestliže bylo rozhodnuto drobné mince připadající na každého žáka věnovat do třídní pokladny? Kolik dostane pokladna?

196. Při měření rozměrů obdélníkové podlahy místnosti byly naměřeny tyto hodnoty v decimetrech:

délka:	50,8;	50,3;	50,2;	50,6;	50,8;	50,4;
šířka:	30,6;	30,9;	30,2;	30,6;	30,5;	30,8.

Určete na tři platné cifry a) střední aproximace obou rozměrů podlahy a jejich prosté chyby, b) relativní chyby obou rozměrů a relativní chyby v procentech.

197. Opakovaným vážením předmětu byly zjištěny tyto hmotnosti v g: 25,8; 25,3; 25,2; 25,6; 25,6.
Určete na tři platné cifry střední aproximaci číselné hodnoty hmotnosti předmětu, její chybu absolutní i relativní.

198. Střední aproximace neúplného čísla je 87,3, prostá chyba 0,2. Určete dolní a horní mez.

199. Dolní mez neúplného čísla je 26,56, horní mez 26,62. Určete jeho střední aproximaci a jeho prostou i poměrnou chybu.

200. Střední aproximace neúplného čísla je 15,4, poměrná chyba dvouprocentní. Určete horní a dolní mez.

201. Kdo váží přesněji, lékárník, který se dopustil při vážení 2 g léku chyby 0,03 g, nebo Uhelné sklady, které dodaly 7 q uhlí s přesností na 10,5 kg?

202. Ze zásilky 10 000 kusů skleněných ozdob se při určitém způsobu balení rozbilo cestou 63 kusů. Při jiném způsobu balení se u další zásilky rozbilo z 3 850 kusů stejných ozdob pouze 21 kusů. Který způsob balení byl vhodnější? (Určete poměrnou chybu ztrát v procentech.)

203. Jaké relativní přesnosti (v procentech) můžeme dosáhnout při vážení na mincíři, vážíme-li těleso s hmotností 12 kg a musíme počítat s prostou chybou $\frac{1}{2}$ kg?

204. Jsou-li $A = 94{,}53$, $B = 73{,}52$ zaokrouhlená čísla, určete $A + B$ a $A - B$. (Též pro $A = 624{,}2$; $B = 72{,}5$.)

205. Utvořte součet $A + B$ a rozdíl $A - B$, je-li
a) $A = 14{,}20 \pm 0{,}08$, $\quad B = 12{,}40 \pm 0{,}06$;
b) $A = 148 \pm 0{,}8$, $\quad B = 98{,}2 \pm 0{,}4$.

206. Sečtěte a odečtěte po řadě neúplná čísla a, b, jsou-li dány jejich dolní a horní meze a_1, a_2, b_1, b_2:
a) $a_1 = 15{,}4$; $\quad a_2 = 15{,}8$; $\quad b_1 = 26{,}3$; $\quad b_2 = 26{,}6$;
b) $a_1 = 235$; $\quad a_2 = 238$; $\quad b_1 = 172$; $\quad b_2 = 174$.

207. Jsou dána zaokrouhlená čísla $a = 6{,}2$ a $b = 3{,}8$. Určete čísla $c = ab$ a $d = \dfrac{a}{b}$.

208. Určete čísla $c = ab$, $d = \dfrac{a}{b}$, je-li $a = 23{,}5 \pm 0{,}1$ a $b = 37{,}3 \pm 0{,}2$.

209. Určete součin $\pi \,.\, \sqrt{2}$, je-li $\sqrt{2} = 1{,}414\,2 \pm 0{,}000\,05$ a $\pi = 3{,}141\,6 \pm$ $\pm\, 0{,}000\,05$.

210. Je-li $a = 102{,}8 \pm 0{,}2$, $b = 7{,}76 \pm 0{,}02$, určete číslo $x = \dfrac{a}{b}$. Určete dále relativní chybu čísla x v procentech.

211. Průměr kruhu D nebyl změřen přesně. Byla zjištěna jeho střední aproximace d a prostá chyba α. Jakou prostou a jakou poměrnou chybu má a) obvod, b) obsah tohoto kruhu?

Řešení

Zřejmě platí nerovnosti

$$d + \alpha \geqq D \geqq d - \alpha\,, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

přičemž obě meze jsou kladná čísla, neboť α je číslo vzhledem k d velmi malé.

a) Znásobíme-li obě strany nerovností (1) číslem π, dostaneme nerovnost

$$\pi(d + \alpha) \geqq \pi D \geqq \pi(d - \alpha)\,,$$

kde πD znamená obvod o uvažovaného kruhu.

Prostá chyba obvodu o je $\beta = \dfrac{\pi(d + \alpha) - \pi(d - \alpha)}{2} = \pi\alpha$, takže obvod o lze zapsat číslem $\pi d \pm \pi\alpha$.

Relativní chyba obvodu o je $\dfrac{\pi\alpha}{\pi d} = \dfrac{\alpha}{d}$, tedy právě taková, jakou má průměr D.

b) Umocníme-li obě strany nerovností (1) dvěma a potom znásobíme číslem $\dfrac{\pi}{4}$, dostaneme nerovnosti

$$\frac{\pi}{4}(d + \alpha)^2 \geqq \frac{\pi D^2}{4} \geqq \frac{\pi}{4}(d - \alpha)^2\,,$$

kde $\frac{\pi D^2}{4}$ znamená obsah P uvažovaného kruhu.

Prostá chyba obsahu P je $\gamma = \frac{\frac{\pi}{4}(d^2 + 2\alpha d + \alpha^2 - d^2 + 2\alpha d - \alpha^2)}{2} =$ $= \frac{\pi\alpha \,.\, d}{2}$, takže obsah P lze zapsat číslem $\frac{\pi d^2}{4} \pm \frac{\pi\alpha d}{2}$. Relativní chyba obsahu P je $\frac{\pi \,.\, \alpha \,.\, d}{2} : \frac{\pi d^2}{4} = \frac{2\alpha}{d}$. Je patrno, že relativní chyba obsahu P vzhledem k relativní chybě průměru D se zvětšila, jelikož tu jde o násobení neúplných čísel $D \,.\, D = D^2$, při němž se relativní chyby sčítají.

Závěr: Prostá chyba obvodu uvažovaného kruhu je $\pi\alpha$, poměrná chyba $\frac{\alpha}{d}$.

Prostá chyba obsahu tohoto kruhu je $\frac{1}{2}\,\pi\alpha d$ a poměrná chyba $\frac{2\alpha}{d}$.

212. Jak velký je obsah čtverce, jehož strana má délku $a = 2{,}5$ cm, je-li a číslo zaokrouhlené? Jaká je relativní chyba obsahu?

213. Jak velký je objem krychle, jejíž hrana má délku $a = 2{,}5$ cm, je-li číslo a zaokrouhlené?

214. U kolikáté mocniny čísla $a = 1{,}2 \pm 0{,}1$ bude poměrná chyba 50% ?

215. Změřte rozměry krabičky na zápalky s přesností udanou na milimetry a vypočítejte její objem.

216. Auto spotřebuje průměrně (10 ± 2) litry benzínu na 100 km. Kolik spotřebuje celkem na jízdu z Prahy do Bratislavy a zpět, je-li vzdálenost obou míst (400 ± 20) km?

217. Určete poměrnou chybu čísla $x = abcd$, je-li $a = 15{,}2 \pm 0{,}1$; $b = 2{,}6 \pm 0{,}1$; $c = 3{,}8 \pm 0{,}1$; $d = 1{,}4 \pm 0{,}1$.

218. Jaká je hmotnost bukového trámu čtvercového průřezu šířky $a = (25 \pm 0{,}5)$ cm a délky $d = (4 \pm 0{,}01)$ m, je-li hustota bukového dřeva $\varrho = (0{,}7 \pm 0{,}1)$ g/cm³?
[Návod: Objem trámu $V = a^2 \,.\, d$.]

219. Jaká je hmotnost olověné koule o průměru $d = (10 \pm 0{,}1)$ cm, je-li hustota olova $\varrho = 11{,}3$ g/cm³, přičemž ϱ je zaokrouhlené číslo.
[Návod: objem koule $V = \frac{4}{3}\,\pi r^3$, kde r je poloměr koule.]

220. Cyklista jede rychlostí (15 ± 5) km/h. Kolik km ujede za minutu a kolik za vteřinu? (Měnitel 60 je číslo úplné.)

221. Je-li jeden rozměr obdélníka $a = (26 \pm 0{,}5)$ cm a obsah $P = (760 \pm 5)$ cm², jak velký je jeho druhý rozměr?

222. Jaká část a) obsahu podlahy, b) objemu třídy připadá ve třídě na jednoho žáka, je-li plánovaný počet žáků 30 ± 2?
(Obsah podlahy $P = (48 \pm 9{,}6)$ m², objem třídy $V = (204 \pm 92)$ m³.)

223. Určete velikost poloměru kruhu, který vznikne svinutím drátu dlouhého $(1 \pm 0{,}01)$ m.

224. Železný předmět má hmotnost $(184 \pm 0{,}5)$ g. Jeho objem je $(23{,}6 \pm 0{,}1)$ cm³. Jaká je hustota železa?

225. Pryž na gumování má tvar kvádru, jehož rozměry jsou 4,1 cm, 2,6 cm a 1,0 cm (zaokrouhleno na milimetry) a váží 15 g (zaokrouhleno na celé gramy). Určete hustotu pryže.

226. Silážní jáma školního statku má tvar válce, jehož výška $v = 5$ m a průměr dna 3 m. Jestliže silážní hmota v jámě dosahovala určitého dne do výše $v_1 = (1{,}10 \pm 0{,}05)$ m, určete zhruba, kolik centů silážní hmoty je v jámě, počítá-li se, že 1 m³ siláže váží $(7 \pm 0{,}3)$ q.

227. Vypočítejte obsah plochy omezené elipsou o poloosách $a = 5{,}4$ cm, $b = 3{,}6$ cm, jsou-li čísla a, b zaokrouhlená.
[Obsah elipsy $P = \pi ab$.]

228. Dodávkový vůz Uhelných skladů obsahuje 5 stejných přihrad. Naplněn uhlím (váha vozu se nepočítá) váží $(36 \pm 1{,}8)$ q. Kolik uhlí obsahuje jedna přihrada, liší-li se jejich váhy nejvýše o 5 %?

5. ČÍSELNÉ SOUSTAVY

Zpaměti:

229. Vyjádřete desetinný rozvoj čísla: a) $312\,803_{10}$; b) $470{,}5_{10}$; c) $4\,209{,}04_{10}$; d) $0{,}7281_{10}$.

$\boxed{\textbf{230.}}$ Které číslo v desítkové soustavě je vyjádřeno ve dvojkové soustavě číslem $1110\,1101_2$?

Řešení

Jako v úloze 229 rozvineme dané číslo z dvojkové soustavy ve tvaru mnohočlenu. $1110\,1101_2 =$
$= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$
$= 128 + 64 + 32 + 8 + 4 + 1 = 237_{10}$.

Závěr: $1110\,1101_2 = 237_{10}$.

231. Které číslo v desítkové soustavě je vyjádřeno číslem 210 212 v soustavě trojkové?

Řešení

Dané číslo v trojkové soustavě vyjádříme jako mnohočlen o základu 3.
Tedy $210\,212_3 =$
$= 2 . 3^5 + 1 . 3^4 + 0 . 3^3 + 2 . 3^2 + 1 . 3^1 + 2 . 3^0 =$
$= 2 . 243 + 81 + 2 . 9 + 3 + 2 = 590$.
Závěr: $210\,212_3 = 590_{10}$.

Pro snazší a rychlejší výpočet mocnin číselného rozvoje v soustavě dvojkové, trojkové, pětkové a osmičkové užijte tabulky:

$2^0 = 1$	$2^8 = 256$	$3^0 = 1$	$3^7 = 2\,187$	$5^0 = 1$	$8^0 = 1$
$2^1 = 2$	$2^9 = 512$	$3^1 = 3$	$3^8 = 6\,561$	$5^1 = 5$	$8^1 = 8$
$2^2 = 4$	$2^{10} = 1024$	$3^2 = 9$	$3^9 = 19\,663$	$5^2 = 25$	$8^2 = 64$
$2^3 = 8$	$2^{11} = 2048$	$3^3 = 27$	$3^{10} = 59\,049$	$5^3 = 125$	$8^3 = 512$
$2^4 = 16$	$2^{12} = 4096$	$3^4 = 81$		$5^4 = 625$	$8^4 = 4\,096$
$2^5 = 32$	$2^{13} = 8192$	$3^5 = 243$		$5^5 = 3\,125$	$8^5 = 32\,768$
$2^6 = 64$	$2^{14} = 16384$	$3^6 = 729$		$5^6 = 15\,625$	$8^6 = 262\,144$
$2^7 = 128$				$5^7 = 78\,125$	$8^7 = 2\,097\,152$

232. Které číslo v desítkové soustavě je vyjádřeno v trojkové soustavě číslem:
a) 210_3; b) $2\,012_3$; c) $12\,012_3$; d) $21\,201_3$; e) $1\,122\,012_3$?

233. Číslo vyjádřené v soustavě osmičkové vyjádřete číslem v soustavě desítkové:
a) 125_8; b) $31\,412_8$; c) $20\,544_8$; d) $6\,453\,716_8$;
e) $12\,562_8$; f) $24\,713_8$.

234. Kolik číslic a které můžeme použít v soustavě:
a) osmičkové;
b) pětkové;
c) dvojkové?

235. Vyjádřete v desítkové soustavě čísla daná v soustavě pětkové:
a) 10_5; b) 12_5; c) 31_5; d) $4\,231_5$;
e) $34\,123_5$; f) $231\,420_5$; g) $23\,042_5$.

236. Číslo ze soustavy trojkové přepište do soustavy desítkové:
a) $21\,022_3$; b) $11\,222_3$; c) $221\,201_3$.

237. Ze soustavy dvojkové převeďte do soustavy desítkové:
a) $1\,101_2$; b) $10\,111_2$; c) $110\,111_2$; d) $1\,111\,101_2$;
e) $1\,001\,110\,100_2$; f) $11\,001\,110\,011_2$.

238. Ze soustavy dvanáctkové převeďte do soustavy desítkové čísla:
a) $3\,e\,7\,t\,4_{12}$; b) $673\,3\,et_{12}$; c) $t3\,e\,14_{12}$;
d) $1t5\,e\,12_{12}$, přičemž e je 10 a t 11.

Řešení

a) $3e\,7t\,4 = 3\,.\,12^4 + 10\,.\,12^3 + 7\,.\,12^2 + 11\,.\,12^1 + 4\,.\,12^0 =$
$= 20\,736\,.\,3 + 10\,.\,1\,738 + 1\,008 + 132 + 4 =$
$= 80\,632_{10}$.

239. Přeměňte na číslo v soustavě desítkové: a) $11\,111_2$;
b) $11\,000\,000\,000_2$; c) $1\,111\,011_2$; d) $111\,111\,111_2$;
e) $101\,011_2$; f) $1\,110\,111_2$; g) $111\,011\,011\,011\,001_2$.

***240.** Číslo zapsané v desítkové soustavě zápisem 79 je v jiné soustavě zapsáno číslem a) 142; b) 304; c) 117. Ve které?

241. Přeměňte číslo 460 ze soustavy desítkové na číslo v soustavě dvojkové.

Řešení

Nejprve najdeme z tabulky na str. 135 mocninu čísla 2, nejbližší číslu 460. ($2^8 = 256$.) Zbytek je $460 - 256 = 204$. Z téže tabulky zjistíme nyní velikost mocniny 2 nejbližší číslu 204, tj. $2^7 = 128$. Obdobně dále $204 - 128 = 76$; $2^6 = 64$; $76 - 64 = 12$; $2^3 = 8$; $12 - 8 = 4$; $4 = 2^2$ a zbytek je 0. Proto číslo $460_{10} = 1\,.\,2^8 + 1\,.\,2^7 + 1\,.\,2^6 + 1\,.\,2^3 + 1\,.\,2^2$; $460_{10} = 111\,001\,100_2$.

242. Vyjádřete ve dvojkové soustavě čísla ze soustavy desítkové:
a) 1_{10}; b) 2_{10}; c) 5_{10}; d) 18_{10}; e) 21_{10}; f) 695_{10}.

243. Vyjádřete v soustavě dvojkové: a) 511_{10}; b) $1\,536_{10}$;
c) $4\,114_{10}$; d) $23\,921_{10}$; e) $1\,239_{10}$; f) $10\,263_{10}$.

244. Daná čísla v soustavě desítkové vyjádřete v soustavě trojkové:
a) 827_{10}; b) $1\,647_{10}$; c) $21\,781_{10}$; d) $60\,000_{10}$.

245. Přeměňte na desetinný rozvoj čísla: a) $73,24_8$; b) $221,12_8$;
c) $110,1101_2$.

Řešení

a) $73,24_8 = 7\,.\,8^1 + 3\,.\,8^0 + 2\,.\,8^{-1} + 4\,.\,8^{-2} =$

$$= 56 + 3 + \frac{2}{8} + \frac{4}{8^2} = 59 + \frac{20}{64} = 59,3125_{10}.$$

246. Přeměňte na čísla v soustavě desítkové: a) $0,110_2$; b) $110,11_2$; c) $111,011\,1_2$; d) $10\,001,11_2$; e) $11\,001,111\,1_2$.

247. Daná čísla přeměňte na čísla v soustavě desítkové: a) $21,201_5$; b) $112,56_8$; c) $t5,0e_{12}$; d) $32t,ee8_{12}$. (Viz př. 238.)

248. Daná čísla v soustavě pětkové vyjádřete čísly v soustavě dvojkové: a) 10_5; b) 12_5; c) 31_5; d) 124_5.

249. Vyjádřete v soustavě osmičkové čísla: a) $0,375_{10}$; b) $\left(\frac{3}{8}\right)_{10}$.

Řešení

Postup si objasníme na obecném příkladě. Nechť zápis desetinného čísla v soustavě o základu z je ve tvaru $A = a_{-1} . z^{-1} + a_{-2} . z^{-2} + a_{-3} . z^{-3} + \ldots$, kde a_{-k} jsou čísla, jejichž velikosti jsou $0, 1, 2, \ldots, z-1$. Zápis toho čísla A v soustavě číselné o základu c nechť zní

$$A = b_{-1} . c^{-1} + b_{-2} . c^{-2} + b_{-3} . c^{-3} + \ldots, \qquad (1)$$

kde b_i jsou čísla, jejichž velikosti jsou $0, 1, 2, \ldots, c-1$. Násobíme-li rovnost (1) číslem $c \neq 0$, dostaneme $A . c = b_{-1} + b_{-2}c^{-1} + b_{-3}c^{-2} + b_{-4}c^{-3} + \ldots$, přičemž b_{-1} je koeficient minus prvního řádu hledaného rozvoje, $b_{-2}c^{-1} + b_{-3} . c^{-2} + b_{-4}c^{-3} + \ldots = B_1$ desetinná část čísla Ac. Násobme číslo B_1 znovu číslem c, a tak dostaneme $B_1 . c = b_{-2} + b_{-3}c^{-1} + b_{-4}c^{-2} + \ldots$, kde b_{-2} je koeficient minus druhého řádu. Násobením desetinného zbytku čísla B_1c číslem c dostaneme b_{-3}, atd.

V naší úloze tedy bude:

a) $0,375_{10} = b_{-1} . 8^{-1} + b_{-2} . 8^{-2} + b_{-3} . 8^{-3} + \ldots,$
$0,375 . 8 = b_{-1} + b_{-2}8^{-1} + b_{-3}8^{-2} + \ldots$, a proto
$3,000 = b_{-1} + b_{-2}8^{-1} + b_{-3}8^{-2} + \ldots .$
b_i jsou čísla celá kladná, je tedy $b_{-1} = 3$, desetinný zbytek $B_1 = b_{-2}8^{-1} + b_{-3}8^{-2} + \ldots$. Dále $B_1 . 8 = b_{-2} + b_{-3}8^{-1} + \ldots = 0,0$, a tak $b_{-2} = 0$, zbytek rovněž nula. Platí tedy $0,375_{10} = 0,3_8$.

b) $\left(\frac{3}{8}\right)_{10} = X_8$.

Sledujte a vysvětlujte úpravy: $\frac{3}{8} . 8 = 3 + 0,0$; $0,0 . 8 = 0,0$.

Je proto $\left(\frac{3}{8}\right)_{10} = 0,3_8$.

Vyjádřete podle toho v soustavě a) dvanáctkové, b) dvojkové čísla $0,375_{10}$; $0,736_{10}$; $0,3_{10}$.

250. Vyjádřete v soustavě dvojkové: a) $0,021\,875_{10}$; b) $\left(\frac{7}{8}\right)_{10}$; c) $\left(\frac{17}{6}\right)_{10}$.

$\boxed{251.}$ Sečtěte v soustavě dvojkové: $7{,}125_{10} + 13{,}625_{10}$.

Řešení

Obě čísla vyjádříme v soustavě dvojkové. Součet obou cifer napsaných pod sebou je pak buď číslo sudé ($0 + 0 = 0$, nebo $1 + 1 = 10$), nebo liché ($1 + 0 = 0 + 1 = 1$).
$7{,}125_{10} = 111{,}001_2$, $13{,}625_{10} = 1\,101{,}101_2$. Zápis obou čísel pod sebe provádíme jako u čísel desetinných.

$$\begin{array}{r} 111{,}001 \\ 1\,101{,}101 \\ \hline \end{array}$$

Sečítání provádíme od posledního sloupce: $1 + 1 = 10$, píšeme 0 a zapamatujeme si 1. Tuto 1 přičteme k dalšímu sloupci, takže dostaneme: $1 + 0 + 0 = 1$, píšeme 1. Ve sloupci třetím od konce je $1 + 0 = 1$, píšeme 1. Ve čtvrtém sloupci $1 + 1 = 10$, píšeme 0, zapamatujeme si 1. Tuto 1 přičítáme ve sloupci pátém, takže v něm máme $1 + 0 + 1 = 10$, píšeme 0 a zapamatujeme si jedničku, kterou připočítáme ve sloupci šestém. Zde tedy je: $1 + 1 + 1 = 11$, píšeme 1 a zbývající jedničku sečítáme s ciframi sloupce sedmého, tj. $1 + 1 = 10$, píšeme 10. Celkový výpočet tedy zní:

$$\begin{array}{r} 111{,}001_2 \\ 1\,101{,}101_2 \\ \hline 10\,100{,}110_2 \end{array}$$

Zkoušku správnosti provedeme porovnáním výsledku v soustavě dvojkové a v soustavě desítkové.
$10\,100{,}110_2 \stackrel{?}{=} 20{,}750_{10}$.

$2^4 + 2^2 + 2^{-1} + 2^{-2} \stackrel{?}{=} 20{,}75$; $16 + 4 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = 20{,}75$. Výpočet je tedy správný.

252. Sečtěte v dvojkové soustavě: a) $101\,110_2 + 1\,110\,011_2$; b) $100{,}101_2 + 101{,}11_2$; c) $11\,011{,}01_2 + 1\,001{,}01_2$; d) $100\,011{,}011_2 + 1\,011{,}001_2$. Výsledky ověřte v desítkové soustavě.

253. Sečtěte v dvojkové soustavě: a) $101_2 + 11_2$; b) $1\,001_2 + 101_2$; c) $1\,011_2 + 1\,101_2$; d) $1\,010\,101_2 + 100\,110_2$; e) $100\,100\,111_2 + 11\,001\,010_2$.

254. Sečtěte v dvojkové soustavě: a) $9_{10} + 15_{10}$; b) $11_{10} + 13_{10}$; c) $453_{10} + 116_{10}$; d) $295_{10} + 202_{10}$; e) $628_{10} + 1\,023_{10}$.

$\boxed{255.}$ O kolik je v dvojkové soustavě $1\,023_{10}$ větší než 628_{10}?

Řešení

Odčítání v soustavě dvojkové provádíme tím, že k danému číslu menšitele přičteme číslici 0 nebo 1 tak, abychom dostali číslice menšence v příslušném sloupci.

$1\,023_{10} = 1\,111\,111\,111_2$,
$628_{10} = 1\,001\,110\,100_2$.

Postup odčítání je patrný ze zápisu: Začínáme posledním sloupcem a v každém sloupci sečítáme na cifru menšence.

$$\begin{array}{r} 1\,111\,111\,111 \\ -\ 1\,001\,110\,100 \\ \hline 110\,001\,011 \end{array}$$

Závěr: Číslo $1\,023_{10}$ je větší než 628_{10} o $110\,001\,011_2$. Ověřte zkouškou.

256. V úloze: $1\,110{,}101_2 - 111{,}010_2$ počítáme takto: $0 + ? = 1$, odpověď $0 + 1 = 1$, píšeme 1. Ve sloupci druhém: $1 + ? = 10$, odpověď $1 + 1 = 10$, píšeme 1. Ve sloupci třetím: $1 + ? = 1$, odpověď $1 + 0 = 1$, píšeme 0. Ve sloupci čtvrtém: $1 + 1 = 10$, píšeme 1, ve sloupci pátém $1 + 1 + ? = 11$, píšeme 1. Ve sloupci šestém $1 + 1 + ? = 11$, tj. $1 + 1 + 1 = 11$, píšeme 1. Celkový výpočet tedy zní:

$$\begin{array}{r} 1\,110{,}101 \\ -\ \ 111{,}010 \\ \hline 111{,}011 \end{array}$$

Zkouška správnosti v desítkové soustavě:

$$\begin{array}{rl} 1\,110{,}101_2 = & \left(14\frac{5}{8}\right)_{10}, \\ -\ 111{,}010_2 = & \left(7\frac{1}{4}\right)_{10}, \\ \hline 111{,}011_2 = & \left(7\frac{3}{8}\right)_{10}, \end{array}$$

$\left(14\frac{5}{8}\right)_{10} - \left(7\frac{1}{4}\right)_{10} = \left(7\frac{3}{8}\right)_{10}$. Výpočet je tedy správný.

257. Odečtěte v soustavě dvojkové: a) $1\,010_2 - 111_2$; b) $110\,110_2 - 11\,010_2$; c) $100\,110\,011_2 - 11\,001\,101_2$; d) $101\,010\,101_2 - 10\,101\,010_2$.

258. Odečtěte v soustavě dvojkové: a) $100{,}00_2 - 1{,}11_2$; b) $111{,}11_2 - 10{,}10_2$; c) $111{,}100\,11_2 - 10{,}111_2$; d) $11\,011{,}01_2 - 1\,010{,}01_2$; e) $10\,101{,}110_2 - 1\,001{,}001_2$; f) $10{,}111_2 - 111{,}100\,11_2$.

259. Proveďte v soustavě dvojkové: a) $24_{10} - 11_{10}$; b) $497_{10} - 202_{10}$; c) $1\,023_{10} - 395_{10}$; d) $307_{10} - 102_{10}$; e) $341_{10} - 171_{10}$; f) $569_{10} - 116_{10}$.

260. Proveďte v soustavě dvojkové:

a) $\left(7\frac{3}{4}\right)_{10} - 2{,}5_{10}$; b) $\left(52\frac{3}{4}\right)_{10} - \left(41\frac{1}{2}\right)_{10}$; c) $21{,}750_{10} - 9{,}125_{10}$;

d) $569{,}2_{10} - 453{,}2_{10}$.

261. V soustavě dvojkové určete součin $29_{10} \,.\, 38_{10}$.

Řešení

Násobení provedeme tak, jak je obvyklé v soustavě desítkové. Musíme ovšem dbát na spoje platné v dvojkové soustavě: $0 \,.\, 0 = 0$, $0 \,.\, 1 = 1 \,.\, 0 = 0$, $1 \,.\, 1 = 1$.

$$\begin{array}{r} 11\,101\,.\,100\,110 \\ 11101 \\ 111010 \\ \hline 10001001110 \end{array}$$

Zkouška: $29 \,.\, 38 = 1\,102$,
$2^{10} + 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 1\,024 + 64 + 8 + {}$
$+ 4 + 2 = 1\,102$.

Závěr: Součin čísel $(29 \,.\, 38)_{10}$ je ve dvojkové soustavě $10\,001\,001\,110$.

262. V soustavě dvojkové proveďte: a) $11\,111_2 \,.\, 10_2$; b) $10{,}1_2^2$; c) 11_2^2; d) $1\,110\,101_2 \,.\, 110\,010_2$; e) $11{,}1_2^2$; f) $11{,}1_2^3$.

263. Proveďte v soustavě dvojkové: $(381 \,.\, 13)_{10}$.

6. DĚLITELNOST PŘIROZENÝCH ČÍSEL

264. Najděte největší prvočíslo, kterým je dělitelné číslo a) 2 652; b) 4 812.

265. Kolika způsoby lze rozepsat číslo 60 jako součin dvou nesoudělných přirozených čísel?

266. Obsah obdélníka je $P = 196\ \text{cm}^2$. Jak velké jsou jeho rozměry, jsou-li vyjádřeny přirozenými čísly? Vyšetřete všechny možnosti a vyberte z nich rozměry toho obdélníka, jehož obvod je nejmenší.

267. Kolika způsoby lze rozepsat číslo 21 jako součet tří prvočísel?

268. Pro která přirozená čísla n jsou zlomky a) $\dfrac{210}{2n - 1}$; b) $\dfrac{270}{2n - 1}$ rovny zase přirozeným číslům?

269. Platí-li mezi přirozenými čísly a, b, c vztah $a = b + c$ a jsou-li dvě z těchto čísel dělitelná přirozeným číslem k, je i třetí číslo dělitelné číslem k. Dokažte to. [Poznámka: Věta platí i tehdy, jsou-li čísla a, b, c, k celá a $k \neq 0$.]

270. Kolika způsoby lze rozepsat číslo 60 jako součet dvou nesoudělných přirozených čísel? [Návod: Označíme-li hledaná nesoudělná čísla x, y, pak platí vztah $x + y = 60$. Z rovnice plyne, že i číslo x je nesoudělné s číslem 60.]

271. Jsou-li čísla x, y, z, u přirozená a výrazy $(x - z)$, $(y - u)$ dělitelné přirozeným číslem t, je i výraz $(xy - zu)$ dělitelný číslem t. Dokažte.
Lze rozšířit platnost této věty i pro libovolná čísla celá?
[Návod: $xy - zu = xy - yz + yz - zu$.] Ověřte na několika příkladech.

***272.** Dokažte, že platí vztah $n = \dfrac{ab}{D}$, kde a, b jsou libovolná přirozená čísla, D jejich největší společný dělitel a n nejmenší jejich společný násobek.

*273. Nejmenší společný násobek čísla 2 190 a trojciferného čísla x je 13 140. Určete číslo x.

274. Přední kolo vozu má obvod 25 dm, zadní 3,2 m. Po kolika otočkách předního kola zaujmou obě kola totéž vzájemné postavení?

275. V místnosti jsou dvoje hodiny, jejichž doby kyvů jsou 0,8 a 1,2 vteřin. Po jaké době splyne vždy tikot hodin?

276. Na jednom místě v Praze se sjíždějí vozy pěti pouličních tratí elektrické dráhy v intervalech 5, 6, 5, 8, 10minutových. Setkají-li se v uvedeném místě náhodně vozy všech tratí, pak se to opět stane za 2 hodiny, bude-li doprava pravidelná. Zdůvodněte to.

277. Určete dvě čísla, jejichž největší společný dělitel $D = 6$ a nejmenší společný násobek $n = 72$.

278. Určete dvě čísla, jejichž nejmenší společný násobek n je o 7 větší než jejich největší společný dělitel D.

279. Dokažte, že číslo $20\,193^7 + 3\,027^7$ je dělitelné číslem 540.
[Návod: Je-li n číslo liché, platí vztah $a^n + b^n =$
$= (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \ldots + b^{n-1})$.]

280. Je-li n přirozené číslo liché, potom zlomek $\dfrac{3^n + 1}{7^n + 1}$ lze krátit čtyřmi. Dokažte.

$\boxed{281.}$ Určete všechny dvojice přirozených čísel x, y, pro něž platí vztah
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}.$$

Řešení

Upravujme postupně danou rovnici takto:
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{y},$$
$$\frac{1}{x} = \frac{y - 2}{2y},$$
$$x = \frac{2y}{y - 2} = \frac{2y - 4 + 4}{y - 2} = \frac{2(y - 2) + 4}{y - 2} = 2 + \frac{4}{y - 2}.$$
x bude číslem přirozeným tehdy, bude-li splněna také některá z rovnic:

$y - 2 = 1$; $y - 2 = 2$; $y - 2 = 4$. Jiné možnosti nejsou. Pro $y = 3$ je $x = 6$, pro $y = 4$ je $x = 4$ a pro $y = 6$ je $x = 3$.

Závěr: Danému vztahu vyhovují 3 dvojice přirozených čísel. Jsou to dvojice: $x = 6, y = 3$; $x = 4, y = 4$; $x = 3, y = 6$.

282. Určete všechny dvojice přirozených čísel x, y, pro něž platí vztah

a) $2x + 3y = 25$; b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$.

283. Je dáno prvočíslo p. Určete všechny dvojice přirozených čísel x, y, které vyhovují vztahu

$$\frac{1}{p + x} + \frac{1}{p + y} + 2 = \frac{1 + 2p}{p}.$$

284. Žák A má zaplatit žáku B částku 44 Kčs, má však jen tříkoruny a pětikoruny. Kolikerým způsobem může uvedený obnos vyplatit, nemá-li žák B žádné peníze na vracení?

285. Určete nejmenší počet tříkorunových a pětikorunových státovek, kterými lze rozměnit částku 64 Kčs.

286. V závodě s 25 zaměstnanci se vyplatilo v jednom měsíci na rodinných příspěvcích na nezaopatřené děti celkem 1 270 Kčs. Příspěvek na jedno dítě obnášel 70 Kčs a na dvě děti 170 Kčs. Kolik je v závodě zaměstnanců, kteří příspěvky nepobírají, kolik zaměstnanců pobírá příspěvek na jedno dítě a kolik zaměstnanců pobírá příspěvek na dvě děti? (Zaměstnanci s třemi a více nezaopatřenými dětmi v závodě nejsou.)

287. Určete všechny dvojice přirozených čísel x, y, pro které platí vztah:

a) $x^2 - y^2 = 15$;

[Návod: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 15 . 1 = 5 . 3$.]

b) $x^2 - y^2 = 22$; c) $y(2x + y) = 65$.

[Návod: Řešte substitucí $y = z - x$.]

288. Velikost stran pravoúhlého trojúhelníka je dána přirozenými čísly. Má-li jedna odvěsna délku 5 cm, jakou délku má druhá odvěsna a přepona?

289. Určete všechny trojice přirozených čísel x, y, z, které vyhovují soustavě rovnic

$$x + y + z = 6,$$
$$x + 4y - 2z = 3.$$

290. Ve skladu mají nádoby pětilitrové, šestilitrové a osmilitrové. Kolikerým způsobem lze stočit do patnácti nádob hektolitr oleje?

*291. Kolika způsoby lze v naší měně rozměnit padesátihaléř na základě pětihaléřů, desetihaléřů a dvacetipětihaléřů?
[Návod: Označte počet pětihaléřů x, počet desetihaléřů y a počet dvacetipětihaléřů z. Potom platí $5x + 10y + 25z = 50$. Tuto rovnici řešte v oboru nezáporných čísel celých za předpokladu, že $z \leqq 2$.]

292. Kterými ciframi jsou zakončeny dekadické zápisy všech mocnin n^2, kde n je přirozené číslo?

293. Kterými ciframi jsou zakončeny dekadické zápisy mocnin 7^n, kde n je přirozené číslo? Roztřiďte tyto mocniny vzhledem k zakončení jejich dekadického zápisu stejnou cifrou.
[Návod: Sledujte dekadické zápisy mocnin 7^{4k-3}, 7^{4k-2}, 7^{4k-1}, 7^{4k}, kde k je libovolné přirozené číslo.]

294. Trojciferné číslo, jehož číslice v dekadickém zápisu jsou po řadě a, b, c, lze napsat ve tvaru $a \,.\, 10^2 + b \,.\, 10 + c$.

a) Zapište v tomto tvaru n-ciferné číslo, jsou-li jeho číslice zprava doleva $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$. Jakých hodnot může nabývat každá z uvedených číslic?

b) Zapište v tomto tvaru n-ciferné číslo, jehož první číslice je x, druhá y a ostatní jsou rovny nule.

295. Je-li přirozené číslo zakončeno cifrou 5, pak jeho druhá mocnina je zakončena dvojčíslím 25. Dokažte to.
[Návod: Uvažované číslo označte $10a + 5$, kde a je nezáporné číslo celé.]

296. Číslo x je přirozené číslo pěticiferné a číslo y přirozené číslo trojciferné, tvořené ze tří posledních cifer čísla x. Je-li číslo x násobkem čísla 5^3, je i číslo y násobkem čísla 5^3 a obráceně. Dokažte to.

Řešení

Čísla x, y je možno napsat ve tvaru $x = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e$, $y = a + 10b + 10^2c$, kde a, b, c, d, e jsou nezáporná čísla celá menší než 10, přičemž $c \neq 0$, $e \neq 0$.

a) Je-li číslo x násobkem čísla 5^3, pak platí vztah $x = a + 10b + 100c + 1\,000d + 10\,000e = k \,.\, 5^3$, kde k je vhodné přirozené číslo. Z tohoto vztahu je $y = a + 10b + 100c = k \,.\, 5^3 - 1\,000d - 10\,000e = 5^3(k - 8d - 80e)$. Činitel $k - 8d - 80e \neq 0$, neboť kdyby nastal opak, bylo by $k = 8d + 80e = 8(d + 10e)$ a $x = k \,.\, 5^3 = 1\,000(d + 10e)$, $e \neq 0$, odkud je patrno, že $c = 0$ proti předpokladu. Číslo y je tedy také násobkem čísla 5^3.

b) Je-li číslo y násobkem čísla 5^3, pak platí vztah $y = a + 10b + 10^2c = r \,.\, 5^3$, kde r je přirozené číslo. Z tohoto vztahu je $x = r \,.\, 5^3 +$

$+ 10^3d + 10^4e = 5^3(r + 8d + 80e)$, odkud je patrno, že také číslo x je násobkem čísla 5^3.

Závěr: Obě věty platí.

297. Trojciferné přirozené číslo M je dělitelné číslem 18 a lze je napsat jako součet čísla dvojciferného a jeho padesátinásobku. Určete všechna čísla M této vlastnosti.

298. Které dvojciferné přirozené číslo se po vzájemné výměně cifer zvětší o a) 37; b) 36?

299. Dokažte, že jedno ze dvou po sobě jdoucích přirozených čísel sudých je dělitelno dvěma a druhé čtyřmi.

Řešení

Označme jedno z obou čísel $a = 2k$ a druhé $b = 2k + 2 = 2(k + 1)$, kde k je libovolné přirozené číslo.

Uvažujme dva případy:

a) Je-li k číslo liché, je číslo $(k + 1)$ sudé, číslo a je dělitelné dvěma a číslo b je dělitelné čtyřmi.

b) Je-li k číslo sudé, je číslo $(k + 1)$ liché, číslo a je dělitelné čtyřmi a číslo b je dělitelné dvěma.

Závěr: Poučka je správná.

300. Dokažte, že jedno ze tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelné třemi.

Řešení

Čísla uvedené vlastnosti označme a, $a + 1$, $a + 2$ a uvažme, že ze tří čísel $3k - 2$, $3k - 1$, $3k$, kde k je libovolné přirozené číslo, je jen číslo $3k$ dělitelné třemi.

a) Je-li $a = 3k$, je první z čísel dělitelné třemi a tvrzení je správné.

b) Je-li $a = 3k - 1$, je $a + 1 = 3k$ a druhé z čísel je dělitelné třemi.

c) Je-li $a = 3k - 2$, je $a + 2 = 3k$ a třetí z čísel je dělitelné třemi.

Je tedy vždy jedno z čísel a, $a + 1$, $a + 2$ dělitelné třemi.

Závěr: Tvrzení je správné.

301. a) Dokažte, že součet dvou dvojciferných čísel přirozených, která se liší jen pořadím cifer, je dělitelný jedenácti.

b) Dokažte, že rozdíl dvou dvojciferných přirozených čísel, která se liší jen pořadím cifer, je dělitelný devíti.

c) Dokažte, že rozdíl přirozeného čísla trojciferného a čísla, které vznikne z tohoto záměnou krajních cifer, je dělitelný 99.

302. Kterým číslem je dělitelné každé čtyřciferné přirozené číslo, jehož číslice na místě jednotek je rovna číslici na místě stovek a číslice na místě desítek se rovná číslici na místě tisícovek?

303. Tři mocniny čísla 2, jejichž exponenty jsou tři po sobě jdoucí přirozená čísla, mají součet dělitelný sedmi. Dokažte.

304. Dokažte, že číslo $M = 10^x + 2$, kde x je číslo přirozené, je dělitelné šesti.

305. Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný třemi.

306. a) Dokažte, že číslo utvořené z rozdílu třetí mocniny přirozeného čísla n a tohoto čísla je dělitelné šesti.

b) Je-li číslo n liché, je uvažovaný rozdíl dělitelný číslem 24. Dokažte.

307. Je-li přirozené číslo x liché, je výraz $V = x^3 + 3x^2 - x - 3$ dělitelný číslem 48. Dokažte to. [Návod: Rozložte výraz V na součin jednoduchých činitelů.]

308. Dokažte, že výraz $V = 5x^3 + 15x^2 + 10x$ je dělitelný číslem 30 pro každé přirozené číslo x.

309. Dokažte, že výraz $M = n^5 - 5n^3 + 4n$ je dělitelný číslem 120 pro každé přirozené číslo n.

***310.** Dokažte, že číslo $N = ab$, kde $a = (n + 1)^2$, $b = n^4 - 3n^3 + 2n^2$, je dělitelné číslem 48 pro každé přirozené číslo $n > 2$.

311. Je-li n číslo přirozené, je číslo $N = n^3 + 2n$ dělitelné třemi. Dokažte.

312. Je-li n číslo přirozené, je číslo $N = n^3 + 11n$ dělitelné šesti. Dokažte to.

313. Dokažte, že výraz $U = 10^{x+y} + 5 \cdot 10^x + 5 \cdot 10^y + 25$ je dělitelný číslem 225, jsou-li čísla x, y přirozená.

***314.** Dokažte, že aspoň jedno z přirozených čísel p, q, $p + q$, $p - q$ je dělitelné třemi. [Návod: Uvažujte dva případy: a) aspoň jedno z čísel p, q je dělitelné třemi; b) ani číslo p, ani číslo q není dělitelné třemi.]

***315.** Dokažte, že číslo $M = a^{n+4} - a^n$ je dělitelné číslem 120 pro všechna přirozená čísla a a přirozená čísla $n > 2$. [Návod: $M = (a - 1) \cdot a \cdot (a + 1)(a^2 + 1) \cdot a^{n-1}$.]

***316.** Je-li n číslo sudé, potom číslo $N = 3^n + 63$ je dělitelné číslem 72. Dokažte. [Návod: $3^n + 63 = 3^n - 3^2 + 72$.]

***317.** Dokažte, že číslo $N = 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ je dělitelné číslem 7 pro všechna přirozená čísla n. [Návod: N lze postupně upravit na tvar $7 \cdot 2^n + 3(9^n - 2^n)$.]

318. Má-li být $P = 2^p - 1$ prvočíslo, je nutno, aby i číslo p bylo prvočíslo. Dokažte.

Řešení

Předpokládejme, že číslo p není prvočíslo. Potom jde o dva případy. Buď $p = 1$ a P není prvočíslo, nebo $p = q \cdot n$, kde q a n jsou přirozená čísla, přičemž $q > 1$ a $n > 1$. V tom případě je výraz $P = 2^{qn} - 1 = 2^{qn} - 1^n = (2^q - 1) \cdot [2^{q(n-1)} + 2^{q(n-2)} + \ldots + 1]$.
Zřejmě je tedy P dělitelné číslem $2^q - 1 \neq 1$ a není prvočíslem.

Závěr: Není-li číslo p prvočíslo, není ani číslo P prvočíslo. Aby tedy číslo P prvočíslo bylo, musí i číslo p být prvočíslo.

***319.** Každé prvočíslo p s výjimkou čísel $p = 2$, $p = 3$, lze napsat ve tvaru $(6n + 1)$ nebo $(6n - 1)$, kde n je vhodné přirozené číslo. Dokažte to. Jak by zněla věta obrácená? Uveďte některé příklady určitých čísel, na nichž je vidět, že obrácená věta neplatí. [Návod: Uvažujte čísla $p - 1$, p, $p + 1$, kde p je prvočíslo.]

320. Zmenší-li se druhá mocnina prvočísla p ($p \neq 2$, $p \neq 3$) o jednu, dostaneme číslo, které je dělitelné číslem 24. Dokažte. [Návod: Využijte výsledku předchozí úlohy.]

7. OPAKOVÁNÍ

321. Které desetinné číslo periodické nutno přičíst k číslu 0,5, abychom dostali číslo $0,\overline{6}$?

322. Dokažte, že platí: $0,5\overline{3} \cdot 0,8\overline{3} = 0,\overline{4}$.

323. Jsou dána čísla $\sqrt{5}$; $2,\overline{23}$; $2,2\overline{3}$. Uspořádejte je podle velikosti.

324. Vypočítejte $\sqrt{15}$ na tři desetinná místa a porovnejte výsledek s hodnotou uvedenou v tabulkách.

325. Určete na 5 desetinných míst hodnotu výrazu $2 - \sqrt{3}$ a porovnejte ji s hodnotou tg 15° uvedenou v matematických tabulkách.

326. Oč se liší velikost výrazu $v = 0,\overline{3} - \frac{1}{100} - \frac{1}{200}$ od čísla $\frac{1}{\pi}$, jsou-li čísla v a $\frac{1}{\pi}$ zaokrouhlena na 4 desetinná místa? (Užijte tabulek.)

327. Řešte v oboru reálných čísel nerovnosti:

a) $\frac{x}{2} + \frac{x-2}{3} < \frac{x-3}{2} + \frac{x+5}{3}$; b) $\frac{3-2x}{5} + 8 > \frac{5x+2}{2} - x$.

328. Řešte v oboru reálných čísel soustavu nerovností:

a) $(5x + 5)^2 + (12x - 2)^2 > 169x^2,\ 3x + 5 < 0;$

b) $2 - \dfrac{3 - 7x}{10} + \dfrac{x + 1}{2} > 3 - \dfrac{7 - 3x}{5},$

$7(3x - 6) + 4(17 - x) > 11 - 5(x - 3).$

329. Dokažte, že pro všechna reálná čísla x platí nerovnost

a) $\dfrac{6x + 8}{x^2 + 1} \leqq 9;$ b) $(4x^2 + x - 2)^2 \geqq 4x(2x - 1)^2 - 8x.$

330. Dokažte, že platí

a) $\dfrac{2a}{1 + a^2} \leqq 1$, kde a je libovolné reálné číslo;

b) $1 + \dfrac{a}{4} = \sqrt[4]{1 + a};\quad a \geqq 0.$

331. Řešte v oboru reálných čísel nerovnosti a proveďte diskusi řešení vzhledem k parametru p:

a) $(p - x)^2 < 1 + x^2;$ b) $p^2 + x > p(2x - 1).$

332. Pro která reálná čísla x je zlomek

a) $\dfrac{x - 2}{x + 1}$; b) $\dfrac{2x - 1}{2 - x}$ kladný?

333. Řešte v oboru reálných čísel nerovnosti:

a) $x^2 - 3x - 4 > 0;$ b) $x^2 - 2x + 1 > 0;$ c) $x^2 - 4x - 5 < 0.$

334. Určete všechna reálná čísla m, pro něž platí: $m^2 \geqq m$.

335. Určete všechna celá čísla p, pro něž platí: $p^3 \geqq p$.

336. Pro která reálná čísla a má smysl $\sqrt{5a^2 - 8a - 4}$?
[Návod: $-8a = -10a + 2a$.]

337. Určete všechna reálná čísla x splňující nerovnost

$\dfrac{x + 2}{x - 5} > 1 - \dfrac{3}{x - 2}.$

338. Délka přepony pravoúhlého trojúhelníka je větší než 10 cm. Určete délku jeho větší odvěsny, která je o 2 cm větší než délka odvěsny kratší.

339. Proveďte úplnou diskusi řešení rovnice
$(a - 4)(x - 1) + 5 = 0$, je-li x neznámá a a parametr.

340. Pro která čísla p má soustava

$$4x + y = 12\,,$$
$$x - 2y = p$$

řešení $x > 0, y > 0$?

341. Pro která čísla p má rovnice $x^2 - 2x + (p - 3) = 0$ oba kořeny různé a kladné?

***342.** Největší strana trojúhelníka ABC je $c = AB$, výška k ní příslušná je v. Vepište mu obdélník, jehož obvod je $2s$, přičemž jedna jeho strana leží v AB. Proveďte diskusi vzhledem k číslu s.

343. Určete délku úhlopříčky čtverce, jehož strana má délku $a = (6 \pm 0{,}1)$ cm. $(\sqrt{2} = 1{,}41 \pm 0{,}005.)$

344. Poloměr podstavy rotačního válce má velikost $r = (25{,}4 \pm 0{,}2)$ cm, výška $v = (38{,}2 \pm 0{,}2)$ cm. Jak velký je objem válce? [Objem válce $V = \pi r^2 v$.]

345. Jak velký je poloměr kruhu, jehož obsah $P = (1 \pm 0{,}01)\ \mathrm{m}^2$?

346. Zvuk se šíří průměrnou rychlostí (340 ± 5) m/s. Výstřel nepřátelského děla je slyšet na pozorovatelně A za 18,3 s, na pozorovatelně B za 27,5 s po záblesku. Jak daleko je nepřátelské dělo od pozorovatelen A a B?

347. Průměr kulového plynojemu byl odhadnut na $(23 \pm 0{,}5)$ m. Vypočtěte hmotnost svítiplynu v něm obsaženého, je-li jeho hustota $1{,}25\ \ldots\ \mathrm{kg/m}^3$.

$$\left[\text{Objem koule } V = \frac{4}{3}\pi r^3, \text{ kde } r \text{ je poloměr koule.}\right]$$

348. Řešte v oboru reálných čísel nerovnosti:

a) $x + 1 < |x - 3|$; b) $|2x + 1| + 1 > |2x| + 2x$.

349. a) $|4x - 5| > 6x - 5$; b) $|x| + |2 - x| < 2$.

***350.** Určete všechna reálná čísla x vyhovující nerovnosti:

$|2x^2 + 5x| > 3$.

[Návod: $2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$, $2x^2 + 5x + 3 = (x + 1)(2x + 3)$.]

351. Řešte rovnici $|2x + 1| + |2x - 1| = 3$.

352. $|2x + 1| - |2x + 1| = 2x$.

353. $|2x + 1| - |3 - x| - x = 0$.

***354.** $|x + 1| - |x| + 3|x - 1| - 2|x - 2| = x + 2$.

***355.** Řešte graficky rovnici

$3|x - 1| - 2|x| + |x + 1| = x$.

356. Řešte soustavu $|x - y| = 1$,
$$x + y = 5 .$$

357. Určete všechna přirozená čísla x, která splňují soustavu
$$|x - 1| < 2 , \quad |x^2 - 2x| < \frac{1}{2} .$$

358. Určete všechna celá čísla y, která splňují soustavu
$$(y + 2)^2 - 16 < 0 , \quad (y - 3)^2 - 16 < 0 .$$

359. Řešte rovnici $x^2 + 2|x - 1| - 6 = 0$.

360. Řešte rovnici $\dfrac{1}{|x| + 1} + \dfrac{1}{x - 1} = 1$.

361. V soustavě desítkové napište číslo:
a) $11\,011_2$; b) $1\,001\,000_2$; c) $10\,010\,110_2$; d) $4\,444_5$; e) $21\,212_3$;
f) $71\,206_8$; g) $20\ \mathrm{elt}_{12}$.

362. Vyjádřete v soustavě dvojkové:
a) 141_{10}; b) $1\,480_{10}$; c) $7\,843_{10}$.

***363.** Vyjádřete v soustavě dvojkové číslo:
a) $25{,}6_8$; b) $43{,}2_5$; c) $0{,}211_3$.

364. Sečtěte ve dvojkové soustavě:
a) $11\,110{,}01_2 + 1\,001{,}11_2$; b) $101\,110\,011{,}11_2 + 1\,011\,011{,}01$;
c) $13\mathrm{e}0\mathrm{t}_{12} + 37{,}8_{10}$.

365. Odečtěte v soustavě dvojkové:

a)	b)	c)
$10\,100\,001$	$101\,110{,}100$	$111\,110\,001$
$-1\,110\,011$;	$-1\,011{,}001$;	$100\,100\,111$.

366. Ve dvojkové soustavě spočtěte objem kvádru o rozměrech:
a) $5_{10}\mathrm{j}$, $b = 7_{10}\mathrm{j}$, $c = 150_{10}\mathrm{j}$; b) $a = 25_{10}\mathrm{j}$, $b = 40_{10}\mathrm{j}$, $c = 30_{10}\mathrm{j}$;
c) $a = 12{,}5_{10}\mathrm{j}$, $b = 12{,}5_{10}\mathrm{j}$, $c = 200_{10}\mathrm{j}$.

367. Určete všechna prvočísla, kterými je dělitelné číslo 21 648.

368. Dvě ozubená kola s 24 a 40 zuby zasahují do sebe. Kolikrát se musí otočit první kolo a kolikrát druhé, aby určitý zub prvního kola přešel opět do téže mezery kola druhého?

369. Kruhovou dráhu stadiónu objede jeden cyklista za 8 minut, druhý za 10 minut a třetí za 12 minut. Vyjedou-li všichni současně z téhož místa startu a jedou-li stále svou rychlostí, za jak dlouho projedou znovu současně místem startu? Kolikrát objede každý z nich stadión?

370. Určete dvě čísla, jejichž největší společný dělitel $D = 2$ a nejmenší společný násobek $n = 12$.

371. Dokažte, že číslo $N = 171^5 + 921^5$ je dělitelné číslem 84.

372. Určete všechny dvojice přirozených čísel x, y, pro které platí vztah $5x - 7y = 9$.

***373.** Určete všechny dvojice přirozených čísel x, y, které vyhovují rovnici $5x + 7y^2 = 800$.

374. Rozměry kvádru jsou udány přirozenými čísly a a b v centimetrech. Číslo určující jeho povrch (v cm^2) se rovná číslu, které udává jeho objem (v cm^3). Určete velikost čísel a a b.

375. Tři druhy plechovek se součástkami byly dopraveny v bedně. Plechovky měly hmotnosti 2 kg, 3 kg, 5 kg a objemy po řadě 1 dm^3, 4 dm^3 a 6 dm^3. Celková hmotnost zásilky bez bedny byla 81 kg, celkový objem plechovek 93 dm^3. Jestliže počet nejtěžších plechovek byl největší, kolik plechovek každého druhu bylo v zásilce?

376. Najděte všechny trojice přirozených čísel, jejichž součet se rovná jejich součinu.
[Návod: Označíte-li největší z uvažovaných čísel z, pak platí $xyz \leqq 3z$.]

377. Najděte trojciferné přirozené číslo, jehož dekadický zápis má tu vlastnost, že součet druhých mocnin jeho cifer je 118 a součet jeho cifer se rovná číslu vytvořenému z posledních dvou cifer uvažovaného trojciferného čísla.

378. a) Dokažte, že součet dvou po sobě jdoucích lichých přirozených čísel je dělitelný čtyřmi.
b) Dokažte, že součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel sudých je dělitelný šesti.

379. Dokažte, že čtverec lichého čísla zmenšený o 1 je dělitelný osmi.

380. Dokažte, že výraz $M = 10^x + 5$ je dělitelný číslem 15 pro každé přirozené číslo x.

381. Číslo $P = p^2 - 1$, kde p je přirozené číslo větší než 1, je prvočíslem jen pro $p = 2$. Dokažte. [Návod: Výraz rozložte v součin a uvědomte si definici prvočísla.]

382. Dokažte, že výraz $N = 5n^4 + 10n^3 - 5n^2 - 10n$ je dělitelný číslem 120 pro každé přirozené číslo n.

383. Dokažte, že výraz $V = \dfrac{10^{x+y} + 2 . 10^x + 2 . 10^y + 4}{36}$ je pro všechna přirozená čísla x, y číslo celé.

384. Dokažte, že číslo $x = 17^{19} + 19^{17}$ je dělitelné číslem 36. [Návod: $x = (17^{19} - 17^{17}) + (17^{17} + 19^{17})$; výrazy v závorkách rozložte v součin.]

IV. MOCNINY A ODMOCNINY

1. MOCNINY S CELOČÍSELNÝM EXPONENTEM

1. Definujte mocninu a^n, je-li a libovolné reálné číslo a n číslo přirozené. Na základě této definice dokažte, že platí a) $a^{2n} \geqq 0$, b) $a^{2n+1} \geqq 0$, je-li $a \geqq 0$, $a^{2n+1} < 0$, je-li $a < 0$.

2. Porovnejte hodnoty: $(-1)^{2k}$; $(-1)^{2k-1}$; $(-1)^{2k+3}$; $(-1)^k$; $(-1)^{k+1}$; $(-1)^{2k+2}$, je-li k libovolné přirozené číslo.

3. Uspořádejte sestupně podle velikosti čísla:
$2^2, (-2)^3, -(-2)^2, -(-2)^3, -(-2^4)$.

4. Proveďte: a) $(-2)^3 . (-1)^3 . (-4)^2$; b) $-(-3)^2 . (-1)^3 . (-2)^3 . (-4)$.

5. Proveďte: a) $2a^3 - 3(-a)^5 + (-a)^3 + 2(-a)^5 - a^5$;
b) $(-b)^7 + 2(-b)^8 - 3(-b)^7 + (-b)^9 - b^8 - 2b^7 + b^9$;
c) $(-x)^2 . (-x)^4 + x^9 : x^3 + 3(x^2)^3 - 5(-x)^6; x \neq 0$.

6. Proveďte a určete podmínky, při kterých mají tyto výrazy smysl:

a) $\dfrac{(x+y)^3 (x+y)^4}{(x+y)^5} : (x+y)^2$; b) $\dfrac{a^3 . b^3 . a^4 . b^5}{ab^4 . a^4 . b^2} \cdot \dfrac{1}{a^2 . b^2}$;

c) $\dfrac{3a^2b^3}{4c^5} \cdot \dfrac{2c^3b^2}{9a^4} \cdot \dfrac{6a^3c^3}{b^4}$; d) $\dfrac{x^2y^3z^4}{m^5} \cdot \dfrac{m^4z}{2x^3y^2} : \dfrac{z^4}{4m^2x}$;

e) $\dfrac{(-v)^3 . (-v)^5}{v^2} \cdot \dfrac{v^5}{(-v)^2}$; f) $\dfrac{m^3(-m)^4}{m(-m)^5} : \dfrac{(-m)^6}{m^2(-m)^3}$.

7. a) $(x-y)^3 . (y-x)^4$; b) $\dfrac{(r-s)^2 . (s-r)^2}{r^2 . s^3} \cdot \dfrac{r^6 . s^3}{r-s}$.

8. a) $\dfrac{a^6 . (a^3)^2}{(a^3)^4}$; b) $\left(\dfrac{-2c}{d}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{-2d}{c}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{c}{2}\right)^4$;

c) $\left[16a^4 \cdot \left(\dfrac{1}{a^2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{a}{2}\right)^4\right]^3$; d) $\left(\dfrac{a^2x^3}{a^3x^2}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{a}{x}\right)^5$;

e) $\dfrac{[3(z^2)^3 . y^2]^2}{(3zy)^4}$; f) $\dfrac{2^5(2b^3x^3)^2}{2 . (2b . x^2)^3}$;

g) $\dfrac{(2p^2q^3)^4 . (3q^2r)^3 . (25r^2p^3)^2}{(6p^3r)^3 . (2 . 5 . p . q^4)^4}$; h) $\dfrac{(2u^3v^2)^4}{12} : \dfrac{(2u^2v^5 . 3u^4v^2)^2}{(3u^2v^4)^3}$.

9. $\dfrac{a^3b}{3c^2}\cdot\dfrac{9bc^3}{7a^4}\cdot\dfrac{14c^3}{3ab}:\dfrac{2bc^3}{a^3}.$

10. $\left[\left(\dfrac{2a}{3b^3}\right)^3\cdot\dfrac{9b^4}{4c^3}\cdot\left(\dfrac{5c^2}{3a}\right)^2\right]:\dfrac{25c}{3a}.$

11. $\left[\dfrac{2a^2}{(5b)^2}\cdot\dfrac{15b}{4c}\cdot\dfrac{5bc}{3a}\right]^3:\left[\left(\dfrac{5a}{4b}\right)^2:\dfrac{5a}{8b^2}\right]^2.$

12. Za předpokladu, že n je číslo přirozené, proveďte:

a) $\dfrac{2^n\,.\,2^{n+1}\,.\,2^{n+2}}{2^2\,.\,2^3}$; b) $\dfrac{(-3)^{2n}\,.\,(-3)^{2n+1}\,.\,(-2)^{2n-1}}{-3}$;

c) $(-a)^{2n+3}:a^{2n}$; $a\neq 0$; d) $\dfrac{a^n\,.\,b^n\,.\,a^n\,.\,b^n}{ab}$; $ab\neq 0$;

e) $(a-b-c)^{2n}\,.\,(b+c-a)^{2n+1}\,.\,(b+c-a)$.

13. Za předpokladu, že k je číslo přirozené, proveďte:

a) $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^k\cdot\left(\dfrac{c^2}{d^3}\right)^k\cdot\left(\dfrac{b^2d^3}{ac^2}\right)^k$; b) $\left[\dfrac{(x-5)^2}{x-2}\right]^k\cdot\left[\dfrac{x^2-4}{x-5}\right]^k$;

c) $\dfrac{\left(1-\dfrac{a-b}{a}\right)^k}{\left(1+\dfrac{a-b}{b}\right)^k}$; d) $\dfrac{x^{2k}-2x^k+1}{x^3}:\dfrac{x^2}{(x^k-1)^3}.$

14. $\dfrac{(a-b)^{x+y+1}\,.\,(a+b)^{x+y+1}}{(a^2-b^2)^{x+y}}$ (x, y jsou čísla přirozená).

15. Proveďte za předpokladu, že n je číslo přirozené:

a) $\dfrac{a^{n+1}\,.\,b}{a\,.\,b^{n+1}}+\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$; b) $x^{n+2}\,.\left(\dfrac{1}{y}\right)^{n+2}-\dfrac{x^2}{y^2}\left(\dfrac{x}{y}\right)^n.$

*16. $\dfrac{(x+y)^{2a+1}}{(u-v)^{2a-1}}\cdot\dfrac{(u-v)^{2a+1}}{(x^2-y^2)^{2a+1}}\cdot\dfrac{(x-y)^{2a+2}}{(u-v)^2}$ (a je číslo přirozené).

*17. $\left[\dfrac{a^2-b^2}{(x-y)^n}\right]^m\cdot\dfrac{[(x^2-y^2)^m]^n}{(a+b)^m}\cdot\left[\dfrac{a-b}{(x+y)^n}\right]^m$ (m, n jsou čísla přirozená).

*18. $\dfrac{a^{2x+3y}\,.\,b^{4x-5y}}{a^{5x-y}\,.\,b^{3x+y}}:\dfrac{a^{4x+5y}\,.\,b^{2x-4y}}{a^{8x+2y}\,.\,b^{x+2y}}$,

x, y jsou čísla přirozená, $x>2y$.

19. Je-li k libovolné přirozené číslo, dokažte, že platí:
$3 \,.\, 2^{k+3} - 2 \,.\, 2^{k+2} + 2^{k+4} = 2^{k+5}$, přičemž k je přirozené číslo.

Řešení

Upravujme postupně výraz $A = 3 \,.\, 2^{k+3} - 2 \,.\, 2^{k+2} + 2^{k+4}$ takto:
$3 \,.\, 2^{k+3} - 2 \,.\, 2^{k+2} + 2^{k+4} = 3 \,.\, 2^3 \,.\, 2^k - 2 \,.\, 2^2 \,.\, 2^k + 2^4 \,.\, 2^k =$
$= 24 \,.\, 2^k - 8 \,.\, 2^k + 16 \,.\, 2^k = 32 \,.\, 2^k = 2^5 \,.\, 2^k = 2^{k+5}$.

Závěr: Daný vztah platí.

20. Dokažte, že platí:
a) $5 \,.\, 3^{x+2} - 3 \,.\, 3^{x+1} = 36 \,.\, 3^x$ (x je číslo přirozené);
b) $(x^{2n} - x^n y^n + y^{2n})(x^n + y^n) = x^{3n} + y^{3n}$ (n je číslo přirozené).

21. Rozložte v součin (exponenty všech mocnin jsou čísla přirozená):
a) $x \,.\, a^{2m} + ya^{2m}$; b) $a^{x+1} + a$; c) $4^{x+1} - 4^x$; d) $4^x - 1$;
e) $a^{2m+1} - a$; f) $p^{n+2} - p^n q^2$; g) $x^{r+3} - x^r y^3$;
h) $x^{3n+3} \,.\, y^3 - x^3 y^{3n+3}$; i) $y^n \,.\, x^{n+4} - x^n y^{n+4}$;
j) $a^{3h} + a^{2h} - a^h - 1$. [Návod: $a^{3h} = a^{2h} \,.\, a^h$.]

22. Definujte mocninu a^n, je-li $n = 0$ a mocninu a^{-n}, je-li n číslo přirozené. Z jakého důvodu nejsou tyto mocniny definovány pro číslo $a = 0$?

23. Počítejte zpaměti:
a) 2^{-3}; b) 3^{-4}; c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$; e) $(0{,}2)^{-3}$;
f) $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-4}$; g) $(2^{-3})^2$; h) $3^{-3} \,.\, 3^2$; i) $\dfrac{2^{-3} \,.\, 2^{-4}}{2^{-5}}$;
j) $\dfrac{4^0 \,.\, 5^{-2}}{5^2 \,.\, 3^0}$; k) $\dfrac{5^{-2} \,.\, 5^{-3} \,.\, 5^{-4} \,.\, 5^9}{2^{-5}}$.

24. Napište jako desetinná čísla:
a) 10^{-2}; b) $3 \,.\, 10^{-3}$; c) $17 \,.\, 10^{-5}$; d) $6 \,.\, 10^{-6}$;
e) $125 \,.\, 10^{-3}$; f) $2{,}25 \,.\, 10^{-4}$; g) $0{,}7 \,.\, 10^{-1}$.

25. Napište desetinnými čísly velikost koeficientu roztažnosti:
a) $12 \,.\, 10^{-6}$ (železa); b) $1{,}6 \,.\, 10^{-5}$ (mědi); c) $3 \,.\, 10^{-5}$ (zinku);
d) $8{,}1 \,.\, 10^{-6}$ (skla).

26. Klidová hmotnost neutronu je $1{,}67 \,.\, 10^{-24}$ g, hmotnost elektronu $9{,}1 \,.\, 10^{-28}$ g. Určete poměr obou hmotností.

27. Elektron má hmotnost $9{,}1 \,.\, 10^{-28}$. Vodíkové jádro má hmotnost asi 1 840krát větší. Určete ji.

28. Průměr atomového jádra je řádově 10^{-13} až 10^{-12} cm. Převeďte na milimetry. Napište výsledek ve tvaru desetinného čísla.

29. Jakou hmotnost má mezon, je-li jeho hmotnost 80krát větší než hmotnost elektronu?

30. Proveďte a udejte, za jakých podmínek mají tyto výrazy smysl:

a) $3 \cdot \left(\frac{a}{v}\right)^{-2} \cdot \frac{a}{b}$; b) $\left(\frac{c}{d}\right)^{-3} \cdot \frac{d}{c}$; c) $\frac{1}{x} : \left(\frac{b}{x}\right)^{-1}$;

d) $\frac{a-b}{(a+b)^{-1}}$; e) $\frac{(a-b)^{-2}}{a+b}$; f) $\frac{1}{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{-2}}$;

g) $\frac{1}{x^{-2}} + \frac{2}{x^{-1}} + 3 : x^0$.

31. Dokažte, že platí:

a) $(3x^2)^{-3} : (2x^{-1})^3 = \left(\frac{1}{6x}\right)^3$, jestliže $x \neq 0$;

b) $(ax^2 + bx) \,.\, x^{-2} = \frac{ax+b}{x}$, pro $x \neq 0$;

c) $(a - b^{-1})^2 = \frac{a^2b^2 - 2ab + 1}{b^2}$, je-li $b \neq 0$.

32. Proveďte a uveďte podmínky, za kterých mají tyto výrazy smysl:

a) $\left(\frac{a^{-3}b^2}{c^{-3}d}\right)^{-2}$; b) $\left(\frac{3x^{-2}y^{-3}}{5z^{-4}}\right)^{-5}$; c) $\left(\frac{x^0z^{-3}}{y^{-3}}\right)^{-4}$;

d) $\left(\frac{a^2b^{-4}}{c^{-3} \,.\, d^{-2}}\right)^{-3} : \left(\frac{a^3b^{-3}}{c^{-2}d^{-2}}\right)^{-2}$; e) $\left[\frac{1}{(x+y)^{-3}}\right]^{-2} . \,(x+y)^{-3}$.

33. $\left(\frac{a^{-3} \,.\, b^{-7} \,.\, c^0}{a^{-5} \,.\, b^{-11} \,.\, c^{13}}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{a^2 \,.\, b^{-3} \,.\, c^{-4}}{a^4 \,.\, b^7 \,.\, c^0}\right)^{-2}$.

34. $\left(a + \frac{1}{b}\right)^{-2} \cdot \left(b - \frac{1}{a}\right)^{-3} \cdot \left(ab - \frac{1}{ab}\right)^2$.

35. $[(-x)^{-2n} : (-x)^{-2n-1}]^{-2} \,.\, [(-x)^{2n+1} \,.\, (-x)^{-2n+1}]^{-3}$; n je číslo přirozené.

36. $(x^{-m-1})^{m-1} \,.\, (x^m)^m \,.\, x^{-1}$; m je číslo celé.

***37.** $\left(\frac{a^x + a^{-x}}{b^y + b^{-y}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a^x - a^{-x}}{b^y - b^{-y}}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^{2x} - 1}{b^{2y} - 1}\right)^{-2} : \left(\frac{a^{2x} + 1}{b^{2y} + 1}\right)^{-1}$; x, y jsou čísla celá.

2. ODMOCNINY

38. Jak definujeme $\sqrt[n]{a}$, je-li $a \geqq 0$ a n číslo přirozené? Bylo by možno definovat tuto odmocninu pro $a < 0$ a n liché? (Je platný vztah $\sqrt[2k-1]{a} = -\sqrt[2k-1]{-a}$, kde $a < 0$ a k přirozené číslo?)

39. Jak velká je přepona pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají délky $a = 261$ cm a $b = 380$ cm?

40. V kružnici o poloměru 78 mm je vedena tětiva délky 125 mm. Jakou vzdálenost má od středu kružnice?

41. Je dán čtverec, jehož strana má délku 5 cm, a obdélník o rozměrech 6 cm, 4 cm. Který z nich má delší úhlopříčku?

42. Kvádr má rozměry $a = 12{,}8$ cm, $b = 21{,}5$ cm, $c = 36{,}4$ cm. Jak dlouhé jsou jeho úhlopříčky stěnové a jakou délku má úhlopříčka tělesová?

[Návod: Tělesová úhlopříčka kvádru $u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.]

43. Určete výpočtem i z tabulek hodnoty: $\sqrt{9\,604}$; $\sqrt{153{,}76}$; $\sqrt{1\,345\,600}$; $\sqrt{2\,745{,}76}$; $\sqrt{1\,794{,}369\,6}$; $\sqrt{11}$.

44. Proveďte:

a) $\sqrt{5} + 3\sqrt{3} - (2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - \sqrt{3})$;

b) $5(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - 4(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 3(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$;

c) $\frac{2}{3}\sqrt{6} + \frac{1}{6}\sqrt{5} - \frac{3}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{5}) - \frac{1}{12}(11\sqrt{5} - \sqrt{6})$;

d) $8\sqrt{a} + 5\sqrt{x} - 7\sqrt{a} + 4\sqrt{a} - 6\sqrt{x} - 3\sqrt{a} + \sqrt{x}$; $a \geqq 0$, $x \geqq 0$;

e) $4(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - 2(\sqrt{a} - \sqrt{b}) - 6(3\sqrt{a} + \sqrt{b}) + 16\sqrt{a}$; $a \geqq 0$, $b \geqq 0$;

f) $a(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{a}(a - b) - a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$;

g) $2\sqrt{a} - [3\sqrt[3]{a} - (5\sqrt{a} - 2\sqrt[3]{a}) + \sqrt[3]{a}] - \sqrt{a} - 6(\sqrt{a} - \sqrt[3]{a})$, $a \geqq 0$.

45. Proveďte:

a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$; b) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{30}$; c) $\sqrt[3]{50} \cdot \sqrt[3]{20}$; d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{2}$;

e) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{3}$; f) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$; g) $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{2b} \cdot \sqrt{ab}$, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$; h) $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{3b} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{ab}$, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$;

i) $\sqrt[5]{4m^2 \cdot n} \cdot \sqrt[5]{2mn^2} \cdot \sqrt[5]{4m^2n^2}$.

46. Odmocněte částečně:

a) $\sqrt{12}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{72}$; $\sqrt{240}$; $\sqrt{315}$; b) $\sqrt[3]{48}$; $\sqrt[3]{250}$; $\sqrt{128}$; c) $\sqrt{9a^3b}$; $\sqrt{4a^5b^3}$; $a \geqq 0$, $b \geqq 0$;

d) $\sqrt{27a^9b^{11}c^{21}}$, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$; $\sqrt[3]{8a^7b^8}$; $\sqrt[3]{ab^{10}}$.

47. Nejprve odmocněte částečně a potom proveďte:

a) $5\sqrt{63} - 2\sqrt{175}$; b) $2\sqrt[3]{16} + 12\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250}$;

c) $12\sqrt{12} + 12\sqrt{18} - 2\sqrt{27} - \sqrt{32}$; d) $3\sqrt{12} - 6\sqrt[3]{3} + 6\sqrt[3]{24} - 13\sqrt{3}$;

e) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{48} + 2\sqrt{108}$.

48. Rozhodněte, které z čísel je větší: a) $5\sqrt{3}$ nebo $2\sqrt{19}$;

b) $9\sqrt{3}$ nebo $11\sqrt{2}$?

49. Dokažte, že součin dvou odmocnin tvaru $u\sqrt{m}$, $v\sqrt{n}$, kde u, v jsou čísla racionální, $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ čísla iracionální, která nelze částečně odmocnit, přičemž $m \neq n$, není nikdy racionální číslo.
[Návod: Ukažte, že $\sqrt{mn}$ je číslo iracionální.]

50. Zjednodušte výraz $2x\sqrt{x} - 3\sqrt{x^2} + \dfrac{5}{x}\sqrt{x^5}$ a udejte podmínky, za jakých má smysl.
[Poznámka: $\sqrt{x^2} = |x|$; jelikož $x > 0$, aby daný výraz měl smysl, je $|x| = x$.]

51. Zjednodušte výrazy: a) $x\sqrt{a} - y\sqrt{a^3} + z\sqrt{a^3}$; b) $\sqrt{a} + \sqrt{a^2} + \sqrt{a^3} + \sqrt{a^4} + \sqrt{a^5} + \sqrt{a^6} + \sqrt{a^7}$;

c) $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^5} + \sqrt[3]{a^6} + \sqrt[3]{a^7}$;

*d) $\sqrt[n-1]{a^n} - x\sqrt[n-1]{a} - (a - x)\sqrt[n-1]{x}$;

*e) $2xy\sqrt{x^{n+2}} - x^2y\sqrt{x^n} + 3y\sqrt{x^{n+4}} - x^3y\sqrt{x^{n-2}}$ a udejte podmínky, za kterých mají smysl.

52. Za předpokladu, že odmocniny v následujících výrazech jsou definovány, proveďte:

a) $(\sqrt{a^2b} + \sqrt{ab^2})\sqrt{ab}$; b) $(\sqrt{a^2b} + \sqrt{ab^2})(\sqrt{a^2b} - \sqrt{ab^2})$;

c) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})\sqrt{a^3b^3}$; d) $\sqrt{u}(\sqrt{u} + \sqrt{v}) + \sqrt{v}(\sqrt{u} - \sqrt{v})$;

e) $(\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2})(\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n})$;

f) $(\sqrt[3]{3m} + \sqrt[3]{2v})(\sqrt[3]{9m^2} - \sqrt[3]{6mv} + \sqrt[3]{4v^2})$.

53. Dokažte, že platí
$$\sqrt{(r-1)(r^2-1)} + \sqrt{9r^2+9r^3} + \sqrt{4+4r} = (4r+1)\sqrt{r+1}\,.$$
Jaké omezení tu platí pro číslo r?

54. Upravte výraz $\sqrt[n]{a^{3n}b^{n+3}} + \sqrt[n]{b^3}$, je-li n číslo přirozené, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$. Jakou hodnotu má tento výraz pro $n = 3$, $b = 2$, $a = 1$?

55. Vyjádřete jako odmocninu výraz:

a) $3\sqrt{2}$; $2\sqrt{3}$; $5\sqrt{5}$; $4\sqrt{\dfrac{1}{8}}$; b) $2\sqrt[3]{2}$; $3\sqrt[3]{2}$; $4\sqrt[3]{\dfrac{1}{128}}$;

c) $x^2y\sqrt{y}$; $y \geqq 0$;

d) $4(x+y)\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$; $y \geqq 0$, $x > y$;

e) $n(x-1)\sqrt{\dfrac{x^2-1}{n^3(x-1)^3}}$; $n > 0$, $x > 1$.

56. Proveďte:

a) $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$; b) $\sqrt[3]{0{,}008}$; c) $\sqrt{1\dfrac{7}{9}}$; d) $\sqrt{180}:\sqrt{5}$;

e) $\sqrt{48}:\sqrt{3}$; f) $\sqrt[3]{\dfrac{x^3y^6z^{12}}{64a^9}}$; g) $\sqrt[5]{a^4b^2}:\sqrt[5]{a^2b^2}$;

h) $\sqrt[3]{\dfrac{a^2b}{3c}}:\sqrt[3]{\dfrac{ab}{c}}$; i) $\dfrac{\sqrt{3ab^3}\,.\,\sqrt{15ab}}{\sqrt{5}}$, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$;

j) $\sqrt[3]{\dfrac{5ab}{3c^2}}:\sqrt[3]{\dfrac{9cd^2}{25a^2b}}$.

57. Proveďte:

a) $(6 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{6} - 7\sqrt{15}):\sqrt{3}$;

b) $(\sqrt{15} - \sqrt{10} + \sqrt{5} - 5):\sqrt{5}$;

c) $(3 + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{6}):(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

[Návod: Dělence upravte na tvar $\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$.]

58. $(\sqrt[3]{a^4b} + \sqrt[3]{ab^4} - \sqrt[3]{a^2b^2}):\sqrt[3]{ab}$.

59. $\dfrac{r}{s}\sqrt[n]{\dfrac{s^{n-1}}{r^{n-1}}}:\sqrt[n]{\left(\dfrac{r}{s}\right)^2}$; $r > 0$, $s > 0$, n číslo přirozené.

60. Proveďte:

a) $(\sqrt{7})^3$; $(\sqrt[4]{2})^5$; $(\sqrt[5]{4})^7$; $(\sqrt{2}+1)^2$; $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$; $(1+\sqrt{2})^3$;

b) $(\sqrt[3]{2x^2})^2$; $(\sqrt[4]{3x^3})^5$, $x \geqq 0$; $(\sqrt{n})^3$, $n \geqq 0$;

c) $(\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2$, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$; $(1-\sqrt{a})^3$, $a \geqq 0$.

61. a) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$; b) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$; c) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\,.\,\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

d) $\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2$, $b \geqq 0$, $a^2 \geqq b$;

e) $\left(x+\sqrt{x^2-\sqrt{x}}\right)\left(x-\sqrt{x^2-\sqrt{x}}\right)$, $x \geqq 1$.

62. Vyjádřete jedinou odmocninou:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$; b) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; c) $\sqrt{5\sqrt{5}}$; d) $\sqrt{s\sqrt{s}}$; $s \geqq 0$;

e) $\sqrt[5]{s\sqrt[3]{s}}$; f) $\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}}$; g) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}}$; $y \neq 0$;

h) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}}{ab}}$; $a > 0, b > 0$; i) $\sqrt{a^4\,.\,\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}$; $a \geqq 0$;

j) $\sqrt{\dfrac{1}{m^2}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{m}\cdot\sqrt{m}}}$; $m > 0$.

63. Proveďte:

a) $\sqrt{2}\,.\,\sqrt[3]{2}$; b) $\dfrac{\sqrt{3}\,.\,\sqrt[3]{3}\,.\,\sqrt[4]{3}}{\sqrt[12]{3}}$; c) $\dfrac{\sqrt{5}\,.\,\sqrt[3]{5^2}\,.\,\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[12]{5^{11}}}$; d) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{2^2}}}{\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2^3}}}$.

64. Zjednodušte a udejte podmínky, za jakých má tento výraz smysl:

a) $\dfrac{\sqrt{x}\,.\,\sqrt[3]{x}\,.\,\sqrt[4]{x^3}\,.\,\sqrt[6]{x^5}}{x\sqrt[12]{x^5}}$; b) $\dfrac{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}$;

c) $\left(\sqrt[12]{\dfrac{a^4x^2}{c}}:\sqrt[8]{\dfrac{a^3x^5}{c^6}}\right):\sqrt[6]{\dfrac{c^5}{ax^3}}$;

d) $\sqrt[5]{x^4\,.\,\sqrt[3]{x^2}}\,.\,\sqrt{x\sqrt[4]{x^3}}:\sqrt[24]{x^{41}}$.

65. Upravte tak, aby jmenovatel zlomků neobsahoval iracionální číslo:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; b) $\frac{4}{\sqrt[3]{4}}$; c) $\frac{2}{\sqrt[4]{10}}$; d) $\frac{3}{\sqrt[5]{3}}$; e) $\frac{3}{\sqrt[3]{12^2}}$; f) $\frac{2a}{\sqrt[3]{a}}$; $a \neq 0$.

66. a) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$; b) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$; c) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; d) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

e) $\frac{6}{\sqrt{15}-\sqrt{12}}$; f) $\frac{3-\sqrt{15}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$; g) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$; h) $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;
$a \geqq 0,\ b > 0$ nebo $a > 0,\ b \geqq 0$;

i) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; $a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ a \neq b$;

j) $\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$; $a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ a > b$;

k) $\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$; $x \geqq 2$.

67. Zjednodušte:

a) $1 + \frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$; b) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

*c) $\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; *d) $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - \frac{3+\sqrt{x}}{1-x}$;

*e) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}$;

[Návod: Jmenovatele zlomku rozložte na součin $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+1)$.]

*f) $\frac{1+\sqrt{18}-\sqrt{12}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$. [Návod: Násobte čitatele i jmenovatele zlomku výrazem $\sqrt{6}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.]

68. Proveďte a rozhodněte, pro která čísla a má smysl výraz

$$x = \left[\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)+1-a}{(1-\sqrt{a})\sqrt[4]{a^3}}\right]^{-2} : \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{9-a^2}}.$$

Řešení

a) Upravujme postupně výraz x takto:

$$x = \left[\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)+1-a}{(1-\sqrt{a})\sqrt[4]{a^3}}\right]^{-2} : \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{9-a^2}} =$$

$$= \left[\frac{a-\sqrt{a}+1-a}{(1-\sqrt{a})\sqrt[4]{a^3}}\right]^{-2} \cdot \frac{\sqrt{9-a^2}}{a\,.\sqrt{a}} = \left[\frac{1-\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})\sqrt[4]{a^3}}\right]^{-2} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sqrt{9-a^2}}{a\sqrt{a}} = \left[\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\right]^{-2} \cdot \frac{\sqrt{9-a^2}}{a\,.\sqrt{a}} = (\sqrt[4]{a^3})^2 \cdot \frac{\sqrt{9-a^2}}{a\sqrt{a}} =$$

$$= a\sqrt{a} \cdot \frac{\sqrt{9-a^2}}{a\sqrt{a}} = \sqrt{9-a^2}\,;$$

b) aby výraz x měl smysl, je především nutno, aby bylo číslo $a > 0$, neboť pro $a < 0$ by neměla $\sqrt{a}$ smysl a pro $a = 0$ by neměl smysl dělenec výrazu x.

Dále je nutno, aby číslo $a \neq 1$, neboť pro $a = 1$ má jmenovatel dělence výrazu x hodnotu rovnou nule. Jelikož však $\sqrt{9-a^2}$ je ve jmenovateli dělitele výrazu x a musí být definována v oboru reálných čísel, je nutno, aby $(9 - a^2) > 0$, což nastane pro $-3 < a < 3$. Shrneme-li všechny podmínky, musí platit $0 < a < 3$, $a \neq 1$.

Závěr: Upravený výraz $x = \sqrt{9-a^2}$, přičemž je nutno, aby $0 < a < 3, a \neq 1$.

69. Proveďte a rozhodněte, pro která čísla x má smysl výraz

$$\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{-2} - \left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^{-2}.$$

Řešení

a) Upravujme daný výraz postupně takto:

$$\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{-2} - \left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^{-2} =$$

$$= \left[\frac{1+2\sqrt{x}+x-1-x}{(1+\sqrt{x})\sqrt{1+x}}\right]^{-2} - \left[\frac{1-2\sqrt{x}+x-1-x}{(1-\sqrt{x})\sqrt{1+x}}\right]^{-2} =$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})\sqrt{1+x}}\right]^{-2} - \left[\frac{-2\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})\sqrt{1+x}}\right]^{-2} =$$

$$= \left[\frac{(1+\sqrt{x})\sqrt{1+x}}{2\sqrt{x}}\right]^2 - \left[\frac{(1-\sqrt{x})\sqrt{1+x}}{-2\sqrt{x}}\right]^2 =$$

$$= \frac{(1+\sqrt{x})^2(1+x)}{4x} - \frac{(1-\sqrt{x})^2(1+x)}{4x} =$$

$$= \frac{1+x}{4x}(1 + 2\sqrt{x} + x - 1 + 2\sqrt{x} - x) = \frac{1+x}{4x}\cdot 4\sqrt{x} = \frac{(1+x)\sqrt{x}}{x}.$$

b) Aby daný výraz měl smysl, musí pro číslo x platit tyto podmínky: a) $x > 0$; b) $x \neq 1$; c) $x > -1$.

Závěr: Upravený výraz má tvar $\dfrac{(1+x)\sqrt{x}}{x}$, přičemž pro číslo x musí platit vztah $x > 0$, $x \neq 1$.

70. Upravte výraz:

a) $\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x^2}} + 4\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt{x}} - 2x\sqrt[3]{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} + 3x\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}$; $x > 0$;

b) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{\dfrac{a^2\cdot\sqrt[4]{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6a}}{3\cdot\sqrt[8]{a^5}}}$; $a > 0$;

c) $\sqrt[6]{a^3b(7+4\sqrt{3})}\cdot\sqrt[3]{a(\sqrt{3ab}-2\sqrt{ab})}$; $a \geqq 0$, $b \geqq 0$;

d) $\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{y^{-1}}} : \sqrt[3]{y^2\cdot\sqrt{x^3}} + \sqrt[6]{y} : y$; $x > 0$, $y > 0$.

***71.** a) $\left(\sqrt{x} + \dfrac{y-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) : \left(\dfrac{x}{\sqrt{xy}+y} + \dfrac{y}{\sqrt{xy}} - \dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}\right)$;

$x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$;

b) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) : (a-b) + \dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

$a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$.

72. Dokažte, že platí vztahy:

a) $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a+r}{2}} + \sqrt{\dfrac{a-r}{2}}$;

b) $\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a+r}{2}} - \sqrt{\dfrac{a-r}{2}}$,

kde $r = \sqrt{a^2 - b}$, jsou-li a, b přirozená čísla, přičemž $a^2 \geqq b$.

73. Zjednodušte výrazy a) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$; b) $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$ podle vzorců úlohy 72.

74. Použijte výsledku úlohy 73a k úpravě výrazu $x = \dfrac{4}{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}$.

75. Dokažte, že platí vztah $a^2 + b^2 = c^2$, je-li

$$a = \frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1),\ b = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},\ \ c = 2r\,.$$

76. Dokažte, že platí vztah

$$(\sqrt{n + p} + \sqrt{p})(\sqrt{n + p} - \sqrt{p}) = n;\ n + p \geqq 0,\ p \geqq 0\,.$$

Vztahu je možno užít k rozkladu racionálního čísla v součin, který má činitele iracionální. Zkuste např. pro $n = 3$, $p = 4$.

77. Dokažte, že výraz $v = (x + 2) + \sqrt{(x - 2)^2}$ má hodnotu $v = 2x$, je-li $x \geqq 2$, a hodnotu $v = 4$, je-li $x < 2$.

78. Jsou-li čísla a, b nezáporná, dokažte, že platí vztah

$$\sqrt{a^2 + b^2} - 2\sqrt{\frac{ab}{2}} \geqq 0\,.$$

79. Určete všechna kladná čísla x, která splňují nerovnost

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}{x} \leqq 1.$$ Pro které číslo x nastane rovnost?

80. Určete všechna reálná čísla x, která splňují nerovnost

$$\frac{\sqrt{1 + x^2}}{1 - x} \geqq \sqrt{2}.$$

3. MOCNINY S RACIONÁLNÍM A IRACIONÁLNÍM EXPONENTEM

81. Jak definujeme mocninu $a^{\frac{m}{n}}$, je-li n číslo přirozené a m číslo celé? Platí tato definice pro všechna reálná čísla a? Rozhodněte, kdy platí pro čísla $a \geqq 0$, kdy pro čísla $a > 0$.

82. Zpaměti:

Podle definice nahraďte mocniny odmocninami a obráceně:

a) $25^{\frac{1}{2}}$; b) $8^{\frac{1}{3}}$; c) $5 \,.\, 16^{\frac{1}{4}}$; d) $-2 \,.\, 27^{\frac{1}{3}}$; e) $8^{\frac{2}{3}}$;

f) $2^{-2} \,.\, 64^{\frac{1}{2}}$; g) $3^{-2} \,.\, 81^{1,5}$; h) $64^{\frac{3}{4}}$; i) $100^{-\frac{1}{2}}$; j) $81^{-\frac{3}{4}}$;

k) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$; l) $64^{-\frac{2}{3}}$; m) $\sqrt[3]{2^4}$; n) $\sqrt[4]{3^6}$; o) $\sqrt[5]{5^7}$; p) $\sqrt[15]{12^{30}}$;

q) $\sqrt[12]{7^8}$.

83. Určete na dvě desetinná místa přibližnou hodnotu mocniny $2^{1,875}$.

Řešení

$1{,}875 = 1 + 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

Je tedy $2^{1,875} = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{8}} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$.

Vyhledáme-li hodnoty odmocnin v tabulkách, přičemž

$\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}:2} = \sqrt{2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\sqrt{2}}$, $2^{\frac{1}{8}} = \sqrt{\sqrt[4]{2}}$, dostaneme:

$\sqrt{2} \doteq 1{,}414$, $\sqrt[4]{2} \doteq 1{,}189$, $\sqrt[8]{2} \doteq 1{,}090$.

Mocnina $2^{1,875} \doteq 2 \cdot 1{,}414 \cdot 1{,}189 \cdot 1{,}090 \doteq 3{,}66$.

Závěr: $2^{1,875} \doteq 3{,}66$.

84. Určete na dvě desetinná místa přibližnou hodnotu mocniny
a) $3^{1,75}$; b) $2^{2,25}$.

85. Proveďte a výsledek uveďte desetinným číslem zaokrouhleným na dvě desetinná místa:

a) $\left[\left(2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}\right) : 2^{-\frac{4}{5}}\right]^{\frac{20}{19}}$; b) $\dfrac{3^{\frac{5}{12}} \cdot 7^{\frac{5}{6}} \cdot 7^{-\frac{1}{2}}}{3^{-\frac{3}{4}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}}$.

86. Proveďte a uveďte podmínky, za kterých mají smysl výrazy:

a) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{3}{2}}$; b) $z^{\frac{1}{3}} \cdot z^{-\frac{3}{4}} \cdot z^{\frac{2}{5}}$; c) $(x-y)^{\frac{2}{3}} \cdot (y-x)^{\frac{3}{4}}$;

d) $p^{\frac{3}{4}} : p^{\frac{3}{8}}$; e) $u^{-\frac{3}{5}} : u^{-\frac{3}{4}}$; f) $(a^2)^{\frac{1}{3}}$; g) $\left(q^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{5}}$; h) $\left(-a^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

87. a) $\left(a^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{9}} \cdot \left(a^{\frac{13}{12}}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(a^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{6}}$; b) $3 \cdot a^{\frac{7}{10}} \cdot a^{\frac{2}{5}} \cdot 2a^{\frac{15}{14}} : a^{\frac{9}{28}}$;

c) $\left(a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} : \left(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$; d) $\left(ab^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(b^{-1} \cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

88. a) $\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)^2 - \left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)^2$; b) $\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right) - \left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)^2$;

c) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{1}{2}} + 1} + \dfrac{a-1}{a^{\frac{1}{2}} - 1}$.

89. Dokažte, že platí:

a) $$\frac{1 - a^{-\frac{1}{2}}}{1 + a^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}}{a - 1} = \frac{2}{1 - a}, \quad a > 0,\ a \neq 1\,;$$

b) $$\frac{a - b}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} - \frac{a + b}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = 2(ab)^{\frac{1}{3}}; \quad a \neq b,\ a \neq -b,\ a \geqq 0,\ b \geqq 0\,.$$

90. Proveďte: $\left(1 + \dfrac{x^{-n} + y^{-n}}{x^{-n} - y^{-n}}\right)^{-2}$, je-li $x = 4$, $y = \dfrac{3}{4}$, $n = \dfrac{1}{2}$.

***91.** Proveďte:

a) $$\left[\left(a^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} . (a - x) - \frac{a + x}{a^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}}\right] . 2^{-1} . (ax)^{-\frac{1}{3}}\,;$$

b) $$\left[x(1 - x)^{-\frac{2}{3}} + \frac{x^2}{(1 - x)^{\frac{5}{3}}}\right] : (1 - x)^{\frac{1}{3}} . (1 - 2x + x^2)^{-1};$$

c) $$\left[\frac{(a - 1)^{-1}}{a^{-3}} - (1 - a)^{-1}\right] \cdot \frac{a^0 + a(a - 2)}{a^2 - a + 1} : \left[\frac{1}{(a + 1)^{-2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$\boxed{92.}$ Upravte výraz $x = \dfrac{\sqrt{a} . \sqrt[3]{a^2} . \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[12]{a^{11}}}$ převodem odmocnin na mocniny s racionálními exponenty.

Řešení

$$\frac{\sqrt{a} . \sqrt[3]{a^2} . \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[12]{a^{11}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} . a^{\frac{2}{3}} . a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{11}{12}}} = \frac{a^{\frac{6}{12}} . a^{\frac{8}{12}} . a^{\frac{9}{12}}}{a^{\frac{11}{12}}} = \frac{a^{\frac{23}{12}}}{a^{\frac{11}{12}}} = a^{\frac{12}{12}} = a\,.$$

Výraz x má smysl jen pro čísla $a > 0$.

Závěr: Daný výraz má hodnotu $x = a$, je-li $a > 0$.

93. Převodem na mocniny s racionálním exponentem proveďte:

a) $\dfrac{\sqrt{a} . \sqrt[3]{a} . \sqrt[4]{a^3} . \sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[12]{a^5}}$; b) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5} . \sqrt{b} . \sqrt[3]{b^{-1}}}{\sqrt[6]{ab}}$.

94. a) Dokažte, že pro všechna čísla $a > 0$ platí vztah

$$\frac{\sqrt{a^{1-x}} \cdot \sqrt[3]{a^{1+x}}}{\sqrt[6]{a^{5x-1}}} = a^{1-x}, \text{ kde } x \text{ je libovolné racionální číslo.}$$

b) Je-li číslo $a > 0$, dokažte užitím mocnin s racionálními exponenty vztah $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a}} = \sqrt{a}$.

95. Pro která čísla a je definována mocnina a^n, kde n je číslo iracionální?

96. Proveďte:

a) $a^{1+\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}}$; b) $(ab)^{\sqrt[3]{2}} \cdot \dfrac{a^{2\sqrt[3]{2}}}{b^{\sqrt[3]{2}}}$;

c) $\dfrac{x^{\sqrt{2}-1} \cdot x^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{x^{\sqrt{3}-1}}$; d) $\left(a^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Uveďte, za kterých podmínek mají tyto výrazy smysl.

97. Určete na tři desetinná místa hodnotu výrazu:

a) $(10^{\sin 45°})^{\cos 45°}$; b) $(10^{\sin 60°})^{\mathrm{tg}\, 60°}$.

[Návod: $\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.]

98. Upravte $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\sqrt{3}+1} \cdot \left(\dfrac{y}{x}\right)^{\sqrt{3}-1}$. Jaký předpoklad musíme učinit o číslech x a y, má-li mít tento výraz smysl?

99. Proveďte:

a) $\dfrac{2^e \cdot 3^{\sqrt{2}-1}}{3^e \cdot 3^{-2}}$; b) $\left(\dfrac{3^{e+1} \cdot 2^{e-2}}{2^{e+1} \cdot 3^{e-2}}\right)^n$; c) $\left(\dfrac{a^{\sqrt{2}} \cdot b^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}} \cdot b^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{5}}$;

d) $\left(\dfrac{e^{x-\sqrt{2}}}{e^{x+\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{3}} \cdot e^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

100. a) $\dfrac{(a-b) \cdot (a+b)^{2\pi}}{a^2 - b^2}$; b) $\left(\dfrac{(ab)^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot (a^{\sin 60°})^2}{b^{\cos 60°} \cdot b^{\sin 30°}}\right)^{-1}$;

c) $\dfrac{(x^{\sqrt{3}-\sqrt{2}})^2 \cdot y^{1-\sqrt{3}}}{xy}$

4. OPAKOVÁNÍ

101. Proveďte:

a) $0{,}5a^m b^n c^3 : \left(-\frac{2}{3}a^2bc\right)$; $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$;

b) $1{,}5x^{m+1}y^{n-1} : 3x^{m-1}y^{n-2}$; $x \neq 0,\ y \neq 0$.

102. a) $\dfrac{2a^2b^3c \,.\, a^m b^n c^2 \,.\, 6x^{m+1} \,.\, x^2}{3x^2y^3 \,.\, x^m y^n b^{n-2}}$; $x \neq 0,\ y \neq 0,\ b \neq 0$;

b) $\dfrac{5a^n b^{n+3} c^{n+2}}{6x^{n-4}y^{n-2}z^{n-3}} : \dfrac{3a^{n-1}b^{n+1}}{2x^n y^n z^{n+1}}$; $a \neq 0,\ b \neq 0,\ x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$.

103. a) $\dfrac{3a^{-4}b^{-3}}{5c^3d^{-4}} \cdot \dfrac{15c^{-3}d^{-2}}{4a^{-3}b^{-6}} \cdot \dfrac{2b^{-3} \,.\, d^{-2}}{3c^{-6} \,.\, a^{-1}}$; $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0$;

b) $\dfrac{9a^{-3} \,.\, b^{-2}}{16cd^{-3}} \cdot \left(\dfrac{48c^{-3}d^{-4}}{27a^{-5}b^{-3}}\right)^{-1} : \dfrac{2^{-5}}{3^{-2}} \cdot \dfrac{a^{-1}b^{-2}}{d^2c^{-1}}$; $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0$.

104. $\left[\dfrac{a^{4-2n} \,.\, b^{3-2m}}{c^{3-n}d^{4-2n}} : \dfrac{c^{3-n}d^{4-m}}{a^{4-n}b^{3-3m}}\right]^{-1} : \dfrac{a^{1-2n}b^{3-m}}{c^{1-2n}d^{1-3m}}$; $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$, $d \neq 0$; n, m celá čísla.

***105.** Dokažte, že pro každé reálné číslo $x = \dfrac{1}{a-1}$, $a \neq 0$, $a \neq 1$ má výraz

$$v = \frac{1 + (a+x)^{-1}}{1 - (a+x)^{-1}} \cdot \left[1 - \frac{1 - (a^2 + x^2)}{2ax}\right] \text{ hodnotu } \frac{a^3}{2} \,.\, (a-1)^{-1}.$$

106. Proveďte: a) $\left(\frac{4}{5}\right)^0 - \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} + \left(-\frac{10}{7}\right)^{-3} - (-2)^{-4}$;

b) $\left(\frac{4}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{9}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{16}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{25}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{9}{20} \cdot a^{\frac{1}{2}}$; $a > 0$;

c) $5^{\frac{4}{5}} \,.\, 125 \,.\, 25^{-0{,}4} \,.\, 5^{\frac{1}{2}}$; d) $7 \,.\, 3^{\frac{2}{3}} + 6 \,.\, 81^{\frac{1}{8}} - 8 \,.\, 9^{\frac{1}{4}} - 5 \,.\, 27^{\frac{2}{9}}$;

e) $\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{7}{12}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{12}}\right)$; $a \neq 0$.

107. $\left\{1 - \left[x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]^2\right\}^{-1} \,.\, (1+x^2)^{-1}\left[x^0(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$.

108. $\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$. Jakou hodnotu má tento výraz pro

$a=\dfrac{1}{16}$, $b=\dfrac{1}{81}$?

109. Proveďte a udejte, pro která reálná čísla x má smysl výraz

$$y=\left[\frac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right]^{-1}-\left(\frac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}.$$

110. Zjednodušte výrazy:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\,.\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[12]{a^{-1}}}$; $a>0$; b) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt[8]{a^3}}$; $a>0$;

upravte:

c) $\dfrac{(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$; d) $\dfrac{(1+\sqrt{2})^2-(1-\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$;

e) $\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{10}+\sqrt{5}}+\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}-\dfrac{6\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

111. $\sqrt[3]{\sqrt{12}-2}\,.\sqrt[3]{\sqrt{12}+2}+\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\,.\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$.

***112.** $\left(\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)^3+\left(\dfrac{3}{2+\sqrt{3}}+3\sqrt{3}\right)^4$.

113. $\dfrac{23}{3-\sqrt[3]{4}}$. [Návod: $3-\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{4}$; dále využijte vzorce
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.]

114. $x=\sqrt{14+6\sqrt{5}}-\sqrt{14-6\sqrt{5}}$.
[Návod: Utvořte x^2 a po úpravě určete x.]

115. Upravte výraz

a) $v=\left[a\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\dfrac{b}{1-\sqrt{\dfrac{b}{a}}}\right]:\dfrac{b+\sqrt{ab}}{b\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)}$; $a>0$, $b>0$, $a\neq b$;

b) $\sqrt[5]{a^{-3} . \sqrt{a^3}} . \sqrt{a^{-3} . b^2 . \sqrt{ab}}$; $a > 0,\ b > 0$;

c) $\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}} . b^{-1}} . a^{\frac{5}{6}} . b^{\frac{1}{2}} \sqrt{a^{-1} . b^{\frac{2}{3}}}$; $a > 0,\ b > 0$;

d) $8a^{-\frac{1}{3}} . \sqrt{y^{-\frac{1}{3}} . q \sqrt{y^{\frac{4}{3}}}} . \sqrt{a \sqrt[3]{y}}$; $a > 0,\ y > 0$.

116. Dokažte, že výraz $v = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-2)^2}$ má hodnotu $v = 2(x-1)$ pro $x \geqq 2$, hodnotu $v = 2$ pro $0 \leqq x < 2$ a hodnotu $v = 2(1-x)$ pro $x < 0$.

117. Dokažte, že pro všechna reálná čísla $x > 0$ platí

$$\frac{\sqrt[4]{x+1} - 1}{x} \leqq \frac{1}{4}.$$

118. Určete všechna reálná čísla a, která splňují nerovnost

a) $\sqrt{a} > \sqrt{1-a}$; b) $\sqrt[6]{a^2 - 1} < \sqrt[3]{a^2}$.

119. Je-li p libovolné reálné číslo, dokažte, že výraz

$$\frac{1}{1 + \sqrt{p^2+1} + p} + \frac{1}{1 + \sqrt{p^2+1} - p}$$

má hodnotu nezávislou na čísle p.

120. a) Určete všechna reálná čísla x, která splňují nerovnost

$$\frac{6x - 5\sqrt{x} + 1}{1 - \sqrt{x}} \leqq 0.$$

[Návod: Položte $\sqrt{x} = y$; potom $6y^2 - 5y + 1 = (3y-1)(2y-1)$.]

b) Upravte výraz:

$\dfrac{a+x}{a + \sqrt{a - x^2}} + \dfrac{a-x}{a - \sqrt{a - x^2}}$ a stanovte jeho hodnotu pro $a = 1$ a $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

V. MNOŽINY

1. Čísla udávající výšky žáků vaší třídy (v cm) jsou prvky množiny $\mathbf{N}$. Jsou správné zápisy $160 \in \mathbf{N}$, $167 \in \mathbf{N}$, $180 \in \mathbf{N}$, $182 \notin \mathbf{N}$, $165 \notin \mathbf{N}$?

2. Předměty, kterým se ve vaší třídě vyučuje podle rozvrhu v úterý, jsou prvky množiny $\mathbf{Q}$. Zapište značkou, zda matematika, dějepis, chemie a ruský jazyk je či není prvkem množiny $\mathbf{Q}$.

3. Čísla udávající počty osob ve vagónech určitého osobního vlaku jsou prvky množiny $\mathbf{H}$. Může být množina $\mathbf{H}$ též prázdná? Jakými čísly jsou vyjádřeny prvky této množiny?

4. Rozhodněte o číslech a) 0,66; b) $\frac{17}{26}$; c) $\frac{0,5}{0,8}$; d) $\frac{2\pi}{9}$, zda patří nebo nepatří do intervalu $I = \langle \frac{2}{3}, \infty)$.

5. Rozhodněte, zda jsou správné zápisy množin:
a) $\{\mathbf{M}; \mathbf{CH}; \mathbf{D}; \mathbf{Z}; \mathbf{F}\} = \{\mathbf{Z}; \mathbf{M}; \mathbf{D}; \mathbf{F}; \mathbf{CH}\}$;
b) $\{\mathbf{D}; \mathbf{M}; \mathbf{F}; \mathbf{Z}; \mathbf{L}\} = \{\mathbf{M}; \mathbf{Z}; \mathbf{D}; \mathbf{N}; \mathbf{L}\}$.
Písmena jsou značky vyučovaného předmětu.

6. Rozhodněte, která z uvedených množin je konečná:
a) Množina všech prvočísel; b) množina všech přirozených čísel x, která splňují nerovnost $x < 100$; c) množina všech přirozených čísel x, která splňují nerovnost $x < 1$; d) množina všech reálných čísel x, která splňují nerovnosti $-1 \leqq x \leqq 1$.

7. Určete množinu všech uspořádaných dvojic přirozených čísel, které splňují rovnici a) $x = 5 - \frac{y}{2}$, b) $x = \frac{y}{3} - 1$ a rozhodněte, zda je tato množina konečná.

8. Označme $\mathbf{M}$ množinu všech dvojciferných přirozených čísel dělitelných šesti a $\mathbf{N}$ množinu všech dělitelů čísla 210, kteří jsou různí od čísla 1 a čísla 210. Určete, která z množin má větší počet prvků, a vypište všechny prvky, které mají obě množiny stejné.

9. Vypište prvky množiny $\mathbf{P}$ všech uspořádaných a) dvojic, b) trojic přirozených čísel, jejichž součet je 9.

10. Podle komutativního zákona zapište součin abc všemi možnými způsoby. Tvoří tyto zápisy množinu?

11. Jsou dány množiny $\mathbf{U} \equiv \{1; 2; 3; 4\}$ a $\mathbf{V} \equiv \{5; 6; 7\}$. Utvořte mno-

žinu **M** všech uspořádaných dvojic čísel tak, aby prvé číslo ve dvojici tvořil prvek z množiny **U** a druhé číslo ve dvojici prvek z množiny **V**. Každá z těchto uspořádaných dvojic určuje v soustavě pravoúhlých souřadnic bod, jehož souřadnice udávají čísla dvojice. Sestrojte tyto body na základě prvků množiny **M** a sledujte množinu **N** všech různých pravoúhelníků, jejichž všechny vrcholy jsou v těchto bodech. Kolik prvků má množina **N**?

12. Z písmen A, B, C, D lze tvořit dvojice spojováním těchto písmen po dvou. Přihlédněme při tomto tvoření k pořadí písmen v každé dvojici, takže např. AB a BA jsou dvě různé dvojice.
a) Vypište prvky množiny **M** všech takto vzniklých dvojic.
b) Jsou-li písmeny A, B, C, D označeny po řadě různé body na přímce p, utvořte množinu **Q** všech různých polopřímek, které mají uvedené body za počáteční. Který ze zápisu **Q** = **M**, **Q** ≠ **M** je správný?

13. Jsou-li x, y souřadnice libovolného bodu X v soustavě pravoúhlých souřadnic Pxy, potom množina **M** všech bodů X, o jejichž souřadnicích platí: a) $x > 0$; b) $y \leqq 0$; c) $x = y$; d) $x \leqq y$; e) $y - x = 2$; f) $y - x < 2$; g) $y - 2x \geqq 3$ jsou buď vnitřními body poloroviny, nebo body poloroviny, nebo body přímky. Ověřte to.

14. Je dán obdélník $ABCD$. Označte E střed jeho strany BC a vypište prvky množiny **M** všech různých trojúhelníků, které mají vrcholy v bodech A, B, C, D, E. Přihlédnete-li ke shodnosti těchto trojúhelníků, můžete vytvořit čtyři různé podmnožiny množiny **M**. Vypište jejich prvky.

15. Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Určete prvky množiny **L** všech různých trojúhelníků, jejichž vrcholy jsou v bodech A, B, C, D, E. Roztřiďte dále tyto trojúhelníky tak, aby vznikly dvě skupiny trojúhelníků navzájem shodných; těmi jsou určeny dvě množiny **K** a **R**. Zapište jejich prvky a vztahy mezi množinami **K**, **L** a množinami **R**, **L**.

16. Je-li **M** množina všech rovnoramenných trojúhelníků a **N** množina všech trojúhelníků rovnostranných, rozhodněte, který ze zápisů **M** ⊂ **N**, **N** ⊂ **M**, **N** = **M** je správný.

17. **P** je množina všech dělitelů čísla 12 a **Q** je množina všech dělitelů čísla 48. Zdůvodněte správnost zápisu **P** ⊂ **Q**.

18. $\mathbf{M}_1$ je množina všech kvádrů, $\mathbf{M}_2$ množina všech kvádrů, které mají dvě stěny čtvercové a $\mathbf{M}_3$ množina všech krychlí. Zapište vztahy mezi těmito množinami.

19. Je-li n přirozené číslo větší než 3, pak hodnoty výrazu $V = n + 2$

určují množinu **M** všech přirozených čísel větších než číslo 2 a hodnoty výrazu $U = \dfrac{n^2 - 9}{n - 3}$ množinu **N**.

a) Je správný zápis $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$?

b) Určete množinu čísel n, pro něž platí $\mathbf{M} = \mathbf{N}$.

20. Určete, ve kterých případech je správný zápis $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, je-li:
a) **A** množina všech prvočísel a **B** množina všech čísel lichých;
b) **A** množina všech hodnot výrazu $V = 2^n$, **B** je množina všech hodnot výrazu $U = 2n$, kde n je číslo přirozené; c) **A** je množina všech hodnot výrazu $Q = 2n$, **B** je množina všech hodnot výrazu $N = 2n - 1$, kde n je číslo přirozené. Stanovte množinu čísel n, pro která platí $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

21. Je dána množina **M** všech reálných čísel x, která splňují nerovnosti $0 \leqq x \leqq 1$ a množina **N** všech reálných čísel y, která splňují nerovnosti $0 \leqq y < 1$. Která z obou množin je částí množiny druhé?

22. **P** je množina všech dvojciferných přirozených čísel dělitelných číslem 12 a **Q** množina všech dvojciferných přirozených čísel dělitelných číslem 18. Vypište prvky množiny **R**, která je sjednocením množiny **P** a **Q** a prvky množiny **S**, která je průnikem obou množin.

23. „Bramborové“ brigády se účastnilo **M** žáků jedné třídy, „lesní“ brigády **N** žáků téže třídy. Určete sjednocení a průnik obou těchto množin. Proveďte i pro údaje z vaší třídy.

24. **A** je množina všech přímek, které procházejí bodem $M \equiv (2;\, 3)$ a **B** množina všech přímek rovnoběžných s osou x. Určete množinu $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$.

25. Určete průnik a sjednocení množin z úlohy 16 a 20.

26. **M** je množina všech reálných čísel x, která splňují nerovnosti $-2 < x < 5$, **N** je množina všech reálných čísel y, která splňují nerovnost $|y| < 4$. Určete množinu $\mathbf{R} = \mathbf{M} \cup \mathbf{N}$ a množinu $\mathbf{S} = \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$.

27. **A** je množina všech přirozených čísel dělitelných dvěma, **B** množina všech přirozených čísel dělitelných třemi, **C** množina všech přirozených čísel dělitelných šesti a **D** množina všech přirozených čísel dělitelných čtyřmi. Kontrolujte správnost zápisů:

$\mathbf{A} \subset \mathbf{C}$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{D}$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{C}$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{B}$, $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, $\mathbf{A} = \mathbf{A} \cup \mathbf{D}$, $\mathbf{C} = \mathbf{C} \cup \mathbf{D}$, $\emptyset = \emptyset \cap \mathbf{B}$.

28. Určete výsledný interval a znázorněte:
a) $\langle 2{,}5) \cup (4{,}7\rangle$; b) $(-2{,}3) \cup \langle 3{,}6)$; c) $\langle -1{,}2) \cap (2{,}3\rangle$;
d) $[(-\infty, 3) \cup \langle 3{,}5)] \cap (2{,}5)$.

[Návod: Používejte číselné osy.]

29. Znázorněte a určete výsledný interval:

a) $(2,3) \cup (1,5)$; b) $(-1,2) \cap (2,3)$; c) $(3,7) \cup \langle 7,8)$;
d) $\langle -10, -2\rangle \cap \langle -2,0)$; e) $(-1; 1,4\rangle \cap \langle \sqrt{2},3)$;
f) $(a, a+2) \cap (a-1, a+1)$, kde a je číslo kladné.

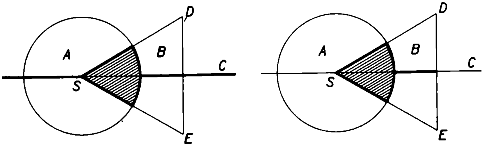
30. Jsou dány tři kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$, $k_3 \equiv (S_3; r_3)$ tak, že $r_1 > r_2 > r_3$ a $S_3 \equiv T$, kde T je bod, ve kterém se kružnice k_1, k_2 dotýkají vně. Označte po řadě $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ množiny všech vnitřních bodů kružnic k_1, k_2, k_3 a vyznačte šrafováním body množiny:

a) $\mathbf{A} = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$, b) $\mathbf{B} = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_3$, c) $\mathbf{C} = \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3$,
d) $\mathbf{D} = \mathbf{M}_1 \cup (\mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3)$, e) $\mathbf{E} = \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$, f) $\mathbf{F} = \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_3$,
g) $\mathbf{G} = \mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_3$, h) $\mathbf{H} = (\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_3) \cup (\mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_3)$.

31. Jsou dány množiny $\mathbf{A} = (1,2,3,4,5,6)$, $\mathbf{B} = (2,4,6,8,10)$, $\mathbf{C} = (5,6,7,8,9)$. Napište množinu a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$; b) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}$; c) $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$; d) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$. Které z těchto čtyř množin jsou stejné a proč?

32. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$, její libovolná sečna p a úsečka SR, kde R je pata kolmice vedené z bodu S na přímku p. Označte $\mathbf{M}$ množinu všech vnitřních bodů kružnice k, $\mathbf{N}$ množinu všech bodů přímky p a $\mathbf{P}$ množinu všech bodů úsečky SR. Určete množiny: a) $\mathbf{A} = \mathbf{M} \cup \mathbf{N}$, b) $\mathbf{B} = \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$, c) $\mathbf{C} = \mathbf{M} \cap \mathbf{P}$, d) $\mathbf{D} = \mathbf{N} \cap \mathbf{P}$, e) $\mathbf{E} = \mathbf{M} \cup (\mathbf{P} \cap \mathbf{N})$. Narýsujte.

33. Nakreslete kružnici $k \equiv (S; r)$. Množinu všech bodů uvnitř kružnice označte $\mathbf{A}$. Nakreslete rovnostranný trojúhelník ESD, jehož jeden vrchol je ve středu dané kružnice a délky stran jsou rovny velikosti jejího průměru. Množinu vnitřních bodů toho trojúhelníka označte $\mathbf{B}$. Dále sestrojte osu úhlu ESD a množinu bodů této přímky označte $\mathbf{C}$. Nakreslete samostatné obrázky pro:
a) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}$; b) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$; c) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$; d) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) \cap \mathbf{B}$.
(Obr. 7.)



Obr.7

34. Pro která x je interval: a) $\langle 2x, x+3\rangle$ částí intervalu $(2,7)$; b) $(x, 5)$ částí intervalu $(-1, x+1\rangle$; c) $(x, x+3)$ částí intervalu $\langle 5,8\rangle$; d) $\langle x, 2x-1\rangle$ částí intervalu $\langle -2,5\rangle$; e) $\langle 3x, 2x+1\rangle$ je částí intervalu $(3,6)$?

35. $\mathbf{M}$ je množina všech reálných čísel x splňujících nerovnost $a < x < b$, $\mathbf{N}$ množina všech reálných čísel y splňujících nerovnost $1 < y < 8$ a $\mathbf{Q}$ množina všech reálných čísel z splňujících nerovnost $1 < z < 5$. Určete reálná čísla a, b, platí-li $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = \mathbf{Q}$.

36. V soustavě pravoúhlých souřadnic Pxy vyznačte šrafováním ty body X množiny $\mathbf{M}$, jejichž souřadnice x, y splňují nerovnosti $1 \leqq x \leqq 3$, $-1 \leqq y \leqq 5$; který geometrický útvar body X vyplňují?

***37.** Je dán trojúhelník ABC, jehož úhel $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, $\sphericalangle CBA = \beta$. Vyšetřete množinu $\mathbf{M}$ všech bodů X tohoto trojúhelníka, pro něž platí $AX \geqq BX \geqq CX$.
Pomocí velikosti stran a úhlů trojúhelníka ABC vyjádřete podmínky pro to, aby: a) množinou všech bodů X byl pětiúhelník; b) množinou bodů X byl právě jeden bod; c) množina bodů X byla prázdná.
[Návod: Množinou bodů X, pro něž platí $AX \geqq BX$, je polorovina o_3B, kde o_3 je osa úsečky AB.]

$\boxed{\textbf{38.}}$ $\mathbf{M}$ je množina všech diváků určitého divadelního představení, $\mathbf{N}$ množina všech prodaných vstupenek na toto představení (v předprodeji i u pokladny). Popište, kdy jde o zobrazení množiny $\mathbf{M}$ do množiny $\mathbf{N}$, kdy přejde toto zobrazení v zobrazení množiny $\mathbf{M}$ na množinu $\mathbf{N}$ a kdy ve vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\mathbf{M}$ na množinu $\mathbf{N}$. Uveďte příklady.

Řešení

a) O zobrazení množiny $\mathbf{M}$ do množiny $\mathbf{N}$ jde tehdy, je-li každému diváku uvedeného představení přiřazena právě jedna vstupenka. Není tedy např. na závadu, jestliže si někdo koupil v předprodeji vstupenku a pak na představení z určitých důvodů nepřišel, aniž by jinému vstupenku předal; není totiž divákem, takže se zmenšil jen předpokládaný počet prvků množiny $\mathbf{M}$, nikoli však konstantní počet množiny $\mathbf{N}$. Nebude to však zobrazení, jestliže mezi diváky bude divák, který nemá vstupenku („černý") nebo budou-li jednomu diváku přiřazeny např. dva lístky. (Přítel, pro kterého divák $A \in \mathbf{M}$ vstupenku koupil, se do divadla nedostavil.)

b) Jde o vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\mathbf{M}$ na množinu $\mathbf{N}$, je-li diváků právě tolik, co prodaných vstupenek a různí diváci vlastní různé vstupenky.

c) Jde o zobrazení množiny $\mathbf{M}$ na množinu $\mathbf{N}$, nikoli však vzájemně jednoznačné, je-li např. dvěma divákům přiřazena tatáž vstupenka (matka s dítětem na jednom sedadle).

39. **A** je množina všech občanů ČSSR, **B** množina všech dat od r. 1870. Přiřaďte každému občanu množiny **A** datum jeho narození. Uveďte příklad, kdy: a) přiřazení nebude zobrazením; b) bude zobrazením množiny **A** do množiny **B**; c) bude zobrazením množiny **A** na množinu **B**; d) půjde o vzájemně jednoznačné zobrazení množiny **A** na množinu **B**.

40. **A** je množina všech předsedů třídních výborů vaší školy, **B** množina všech učitelů na vaší škole vyučujících. Proveďte zobrazení množiny **A** do množiny **B** tak, že každému předsedovi přiřadíte jeho třídního učitele.

41. Množinu **N** tvoří příjmení všech žáků vaší třídy, množinu **V** jejich jména. Zobrazte množinu **N** na množinu **V**. (V případě, že jde o dva žáky téhož příjmení, připište k příjmení označení podle stáří.)

42. Jsou dány množiny $\mathbf{M} = \{1{,}2;\ 3;\ 4\}$ a $\mathbf{N} = \{x;\ y;\ z\}$. Uveďte alespoň jeden příklad na zobrazení množiny a) **M** do množiny **N**; b) množiny **N** do množiny **M**; c) množiny **M** na množinu **N**. Přiřazení naznačte šipkami.

43. V rovině narýsujte dvě různé úsečky $a \equiv AB$; $b \equiv CD$: a) rovnoběžné; b) různoběžné neprotínající se; c) různoběžné protínající se v bodě D. Sestrojte zobrazení (prosté) a na b.

44. Každému reálnému číslu x je přiřazena právě jedna hodnota mnohočlenu $M = x^2 + x + 1$. Je toto přiřazení zobrazením? Napište několik vzorů a jejich obrazů.

45. a) Každému bodu X v prostoru je přiřazen právě jeden kótovaný průmět X_1 na průmětně π a každému kótovanému průmětu X_1 na průmětně π právě jeden bod X v prostoru. O jaké zobrazení tu jde? b) Jaké zobrazení představuje pravoúhlé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny a jaké kosoúhlé promítání na jednu průmětnu?

46. Kolik je všech zobrazení množiny (a, b, c, d) do množiny $(1{,}2)$?

VI. FUNKCE

1. POJEM FUNKCE A FUNKCE LINEÁRNÍ

1. Vyslovte definici funkce a definičního oboru funkce. Zjistěte pak, zda v následujících předpisech jde o funkci:

a) $y = x + 1$; b) $y = \frac{2}{x+1}$; c) $y^2 = ax, a > 0$; d) $y^2 + x^2 = 25$;
e) $y = x^3 - 9$; f) $y = \sqrt{x^3 - 8}$; g) $y = 2x^2 - 3x + 5$; h) $y = a \cdot b^x$, kde $1 \leqq a \leqq 5$, $b = 2$; i) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + x^3$; j) $y^2 = \sqrt{x} - 2$.

Do které množiny oboru funkce z úlohy a), —j) patří číslo 0?

2. Rozhodněte, který z předpisů značí jedinou funkci:

a) $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ pro } x \in \langle 1,3) \\ x - 1 \text{ pro } x \in \langle -2,1); \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2 + x \text{ pro } x \in (0,2) \\ 3x - 1 \text{ pro } x \in (-3,0); \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} \text{ pro } x \in \langle -3,-2\rangle \\ 2x \text{ pro } x \in (0,2\rangle; \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} \text{ pro } x \in \langle -3,-2\rangle \\ 2x \text{ pro } x \in \langle -2,1); \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} \text{ pro } x \in (-3,-2\rangle \\ 2x \text{ pro } x \in (-2,1\rangle; \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \text{ pro } x \in \langle -2,1\rangle \\ x^2 \text{ pro } x \in \langle 0,3\rangle. \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{3.}}$ Určete definiční obor funkce $y = \frac{3x - 1}{x\sqrt{2 - x - x^2}}$.

Řešení

Tato funkce je definována pro všechny hodnoty proměnné $x \neq 0$, pro které je výraz pod odmocnítkem kladný. Proč? Platí tedy: $2 - x - x^2 > 0$, $(x + 2)(1 - x) > 0$. Tato nerovnost je splněna pro $-2 < x < 1$. Načrtněte.

Závěr: Funkce $y = \frac{3x - 1}{x\sqrt{2 - x - x^2}}$ je definována pro x z intervalu $(-2,1)$, kromě nuly.

4. Určete množinu čísel, na níž jsou definovány funkce:

a) $y = x$; b) $y = 3x$; c) $y = 3 - x$; d) $y = a$ (a je číslo reálné);

e) $y = \frac{1}{x}$; f) $y = \sqrt{x}$; g) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; h) $y = x^2$; i) $y = \sqrt{x^2}$;

j) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$; k) $y = \sqrt{x^2 - 1}$; l) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Určete, kterých hodnot nabývá daná funkce pro všechny hodnoty proměnné x z definičního oboru (obor funkčních hodnot funkce).

5. Určete definiční obor funkcí:

a) $y = \sqrt[4]{x^2}$; b) $y = \sqrt[3]{x}$; c) $y = \sqrt[3]{x^2}$; d) $y = \sqrt{5 - 2x}$; e) $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$; f) $y = \frac{2x}{-2 + 3x - x^2}$; g) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$;

h) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$; i) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$; j) $y = \sqrt{6x - (x^2 + 11)}$.

6. Určete definiční obor a obor funkčních hodnot funkce:

a) $y = 3 - x^2$; b) $y = (3x - 2)^2 - 4$; c) $y = |x|$; d) $y = x - |x|$;

e) $y = \sqrt{1 - |x|}$; f) $y = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$; g) $y = \frac{2x - 3}{x^3 - 4x^2}$;

h) $y = \frac{1}{1 - \sqrt{1 + 2x}}$; i) $y = \sqrt{x - 1} + 2\sqrt{1 - x} + \sqrt{x^2 + 1}$;

j) $y = \sqrt{\frac{x - 2}{x + 2}} + \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$; k) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$.

7. Jakou funkcí času je dráha tělesa, které se pohybuje rovnoměrně tak, že za jednu vteřinu urazí dráhu a) 10 cm, b) 1 m, c) a km?

8. Vyjádřete závislost velikosti úhlu (ve stupních), o který se otočí a) velká, b) malá hodinová ručička na době t (min).

9. Na trati dlouhé 5 km je celkové převýšení 55 m. Vyjádřete vzorcem závislost výšky místa na trati na jeho vzdálenosti od výchozího bodu, je-li stoupání trati konstantní.

10. Pro převod teploty t_C ze stupnice Celsiovy na teplotu ve stupnici Fahrenheitově platí vztah $t_F = \frac{9}{5} t_C + 32$. Jakou funkcí teploty v Celsiově stupnici je teplota změřená ve stupnici Fahrenheitově?

11. Při složeném úrokování závisí konečná velikost vkladu a_n na počtu úro-

kovacích období n a na procentové míře p vztahem $a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, kde a_0 je velikost počátečního vkladu.
a) Jaká je to funkce? b) Určete a_0 jako funkci ostatních veličin.

12. Část louky tvaru pravoúhlého trojúhelníka, jehož velikosti odvěsen jsou a, b, má být zastavěna budovou s obdélníkovým půdorysem tak, aby jeden roh měla ve vrcholu trojúhelníka, protější roh aby ležel na přeponě daného trojúhelníka. Jakou funkcí jednoho rozměru budovy bude druhý rozměr?

13. Do koule o daném poloměru r je vepsán rotační válec. Vyjádřete objem V válce jako funkci jeho výšky v. Pro která v je V definováno?

14. Do koule o poloměru r je vepsán rotační kužel. Vyjádřete jeho plášť Q jako funkci jeho strany s. Ve kterém intervalu proměnné s je Q definováno?

15. Kouli o daném poloměru r je opsán rotační kužel. Poloměr jeho podstavy je x, jeho výška v, objem V. a) Vyjádřete hodnoty v, V jako funkce proměnné x a rozhodněte, pro která x jsou tyto funkce definovány. b) Vyjádřete V jako funkci v a proveďte podrobnou diskusi.

16. Vyjádřete délku matematického kyvadla jako funkci jeho doby kmitu. $\left[\text{Návod: } T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.\right]$

***17.** Jakého tlaku b_n vzduchu dosáhneme v pneumatice, jejíž objem je V, po n tazích hustilky objemu v?
[Návod: $(V + v)\, b = Vb_1; (V + 2v)\, b = Vb_2, \ldots, (V + n \cdot v)\, b = V \cdot b_n$.]

***18.** Jaká je závislost tlaku b pod recipientem vývěvy, jehož objem je R, na počtu zdvihů pístu, pod nímž se vytvoří v krajní poloze objem V? [Návod: $Rb = (R + V)\, b_1$, $Rb_1 = (R + V)\, b_2, \ldots$.]

19. Zpaměti:
Ve kterém kvadrantu leží obraz bodů, jejichž souřadnice jsou:
a) (a,a); b) (a,b); c) $(-a,b)$; d) $(a,-b)$; e) $(-a,-b)$, (a,b jsou libovolná čísla reálná)?

20. V pravoúhlé soustavě souřadnic jsou dány body: $A \equiv (2,3)$, $B \equiv (-2,3)$, $C \equiv (2,-3)$, $D \equiv (-2,-3)$, $E \equiv (-1,3)$, $F \equiv (-1,0)$, $G \equiv (2,0)$. Které z těchto bodů jsou souměrně položeny podle osy x,y, podle počátku?

21. Stanovte, jaký útvar vyplní body, jejichž souřadnice splňují podmínky:
a) $x = 2, y > -2$; e) $-1 \leqq x \leqq 2, y \leqq -2$;
b) $y \geqq -1, x = 3$; f) $-2 \leqq y \leqq 1, x > 2$;

c) $y \geqq 3, x < 2$; g) $0 \leqq x \leqq 4, y = 0$.
d) $0 \leqq x = 1, 0 \leqq y \leqq 2$; Znázorněte.

22. Sestavte tabulku hodnot proměnné x a sestrojte graf funkcí:

a) $y = x$; $y = 3$; $y = \frac{1}{2}x$; $y = -\frac{1}{2}x$; $x \in \langle -1, 5 \rangle$

b) $y = x + 3$; $y = x - 3$; $y = x + 0{,}6$; $y = -x + 2$
(x je číslo celé, kladné menší než 10);

c) $y = 2x - 0{,}5$; $y = \frac{2}{3}x + 4$; $y = \frac{1}{2}x - 0{,}5$; $y = -2x + 4$.

23. Uveďte na tvar $y = kx + q$ a sestrojte graf funkcí:

a) $2x + 3y - 6 = 0$;
b) $3x - 2y - 6 = 0$;
c) $4x - 5y = 20$;
d) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 1$;
e) $10x + 14y = 35$;
f) $14x - 12y = 21$;
$x \in \langle -5{,}10 \rangle$.

24. Narýsujte graf funkce, která je určena předpisem ceníku osobní dopravy ČSD do vzdálenosti 20 km.

25. Pro které hodnoty proměnné x nabývají funkce z úlohy 23 hodnoty nula? Co znamenají tyto nulové hodnoty geometricky?

26. Ze stanic A, B, vzdálených od sebe 30 km, vyjíždějí současně proti sobě dva autobusy, oba stejnou rovnoměrnou rychlostí 45 km/h. V místě C, vzdáleném od A 12 km, mají oba autobusy 10minutovou zastávku. Rozhodněte podle grafu, kdy a kde se autobusy potkávají.

27. Z obou konečných stanic vyjíždějí trolejbusy v 10minutových intervalech. Doba jízdy je 40 minut. Kolik trolejových vozů potká na trati každý vůz? Řešte graficky. (Vozy nevyjíždějí z konečných stanic současně.)

28. Použijte grafu předchozí úlohy a zjistěte, kolik trolejových vozů potká chodec, který ujde celou trať za 2 hodiny, a kolik vozů jej předjede.

29. Znázorněte graficky následující lineární funkce. Všimněte si, které přímky jsou rovnoběžné, popřípadě splývají. Protínají se některé z nich na osách souřadnic? Které z těchto funkcí mají graf procházející počátkem?

a) $2x + 3y = 0$; b) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 0$; c) $x + 1{,}5y = 0$;

d) $\frac{2x}{3} + y = 4$; e) $3x + 4y = 16$; f) $y - 2x = 3$;

g) $3y + 8 = 2x$; h) $3x = 12$; i) $3x = -12$;

j) $y = \frac{1}{2}x - 3$; k) $x - 2y = 6$; l) $y - 2x = 6$;
m) $x + 3 = 0$; n) $y - 6 = 0$.

***30.** Dokažte, že funkce
a) $F(x) = 6^x$ vyhovuje rovnici $F(x + 2) - 7F(x + 1) + 6F(x) = 0$;
b) $G(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^y$ vyhovuje rovnici $2G(y + 2) + 5G(y + 1) - 3G(y) = 0$.

***31.** Pro tlak nasycených vodních par platí empirický vzorec $p = a \cdot b^{\frac{T}{c+T}}$, kde a, b, c jsou kladné konstanty, T absolutní teplota. Vyjádřete T jako funkci p.

32. Sestrojte graf funkce
$y = |x + 1| - |x - 1|$.

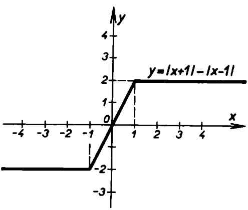
Řešení

Tato funkce je lineární nebo konstantní a je tedy definována na množině všech čísel reálných. Definiční obor této funkce rozdělíme tak, aby platilo a) $x + 1 > 0$, $x - 1 > 0$; b) $x + 1 \geqq 0$, $x - 1 \leqq 0$; c) $x + 1 < 0$, $x - 1 < 0$. V případě a) je $x \in (1, \infty)$, v případě b) $x \in \langle -1, 1 \rangle$, v případě c) $x \in (-\infty, -1)$. Potom pro a) platí $y = |x + 1| - |x - 1| = x + 1 - (x - 1) = 2$ (neboť $|a| = a$ pro $a > 0$).

b) $y = x + 1 - (-x + 1) = x + 1 + x - 1 = 2x$, neboť $|a| = -a$ pro $a < 0$.

c) $y = -(x + 1) - (-x + 1) = -x - 1 + x - 1 = -2$.

Graf funkce $y = |x + 1| - |x - 1|$ se skládá tedy ze tří částí (obr. 8):
a) $y = 2$ pro $x \in (1, \infty)$,
b) $y = 2x$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$,
c) $y = -2$ pro $x \in (-\infty, -1)$.



Obr. 8

33. Zobrazte průběh funkce
a) $y = |x - 1|$;
b) $y = |2x - 1|$;
c) $y = 3 - |2 - x|$; d) $y = 2|x + 1| - 3|x - 1|$;
e) $y = |x - 3| - 2|x + 1| + 2|x| - (x - 1)$.

34. Zobrazte množinu bodů $\mathbf{A} \equiv (x,y)$, o jejichž souřadnicích platí: $|x - y| \leqq 1$, $|x + y| \leqq 1$, $|x| + |y| \leqq 1$. [Návod: Uvažte všechny možnosti: $x - y \gtreqless 0$, $x + y \gtreqless 0$, $x \gtreqless 0$, $y \gtreqless 0$.]

35. Určete koeficienty lineární funkce $y = ax + b$ tak, aby:

a) pro $x = 2$ bylo $y = 3$ a pro $x = 4$ bylo $y = 7$;
b) pro $x = -1$ bylo $y = 1$ a pro $x = 1$ bylo $y = 3$;
c) pro $x = 0$ bylo $y = 0$ a pro $x = 3$ bylo $y = 3$;
d) pro $x = -1$ bylo $y = 3$ a pro $x = 0$ bylo $y = 0$;
e) sestrojte graf těchto funkcí a odečtěte z něho funkční hodnoty y příslušné hodnotám proměnné x pro a) $x = -2$, b) $x = 1{,}5$, c) $x = -2{,}5$ apod., udejte hodnoty proměnné x příslušné funkčním hodnotám, d) $y = 0$, e) $y = -1$, f) $y = -1{,}5$.

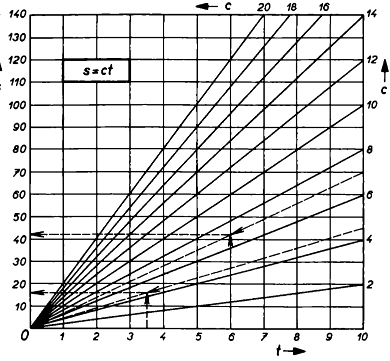
36. Sestrojte průsečíkový nomogram závislosti dráhy na čase pro rovnoměrný pohyb. Rozměry nomogramu nechť jsou 10 cm . 10 cm, obor proměnných $s \in \langle 0{,}140 \rangle$ m, $t \in \langle 0{,}10 \rangle$ s, $c \in \langle 0{,}14 \rangle$ m/s.

Řešení

Závislost dráhy na čase pro tento pohyb rovnoměrný je vyjádřena vztahem $s = c\,.\,t$, jestliže čas začínáme počítat od okamžiku, kdy pohyb začal, tj. $s = 0$. Grafem té závislosti jsou přímky procházející počátkem. Souřadnice druhého bodu grafu pro různé hodnoty rychlosti c jsou vypočteny pro $t = 10$ v tabulce:

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
s	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140

Viz obr. 9.



Obr. 9

Má-li obrázek rozměry 10 cm . 10 cm, má stupnice pro proměnnou t délku 10 cm. Časovému intervalu 1 s odpovídá tedy úsečka dlouhá 1 cm. Svislá stupnice pro závisle proměnnou s má rozsah od 0 do 140 metrů. 140 m odpovídá na nomogramu deseti centimetrům, jednomu metru pak 0,07 cm. (Výška grafu bude proto 9,8 cm a nikoliv 10 cm.)

Velikost dráhy pro $t = 3{,}5$ s a různé rychlosti můžeme odečíst na průsečíku přímky vedené bodem $t = 3{,}5$ s rovnoběžně s osou souřadnic s s příslušným grafem pro danou rychlost. Pro hodnoty rychlosti, které nejsou vyrýsovány, je třeba souřadnice průsečíku přímky $t = 3{,}5$ s s grafem odhadnout. V našem případě pro $t = 3{,}5$ s a $c = 4{,}5$ m . s^{-1} je dráha 15,75 m, pro $t = 3{,}5$ s a $c = 1$ m . s^{-1} je dráha $s = 3{,}5$ m, pro $t = 6$ s, $c = 7$ m . s^{-1} je $s = 42$ m atd. Takovéto obrazy závislosti mezi třemi veličinami se nazývají průsečíkové nomogramy. Pro snazší jejich rýsování i spolehlivější odčítání souřadnic průsečíků se užívá předtištěných stupnic a grafických papírů. Pro sestrojení dalších nomogramů použijte milimetrového (grafického) papíru.

37. Sestrojte tabulku hodnot obsahu a z ní průsečíkový nomogram pro obsah obdélníka o rozměrech a, b, pro $a \leqq 20$ m, $b \leqq 50$ m. Nomogram má mít rozměry 10 cm . 5 cm.
Z nomogramu určete pak: 25 . 10; 37 . 8; 45 . 11, atd.
[Návod: Vodorovná stupnice: $50d \ldots 10$ cm, $1d \ldots 2$ mm;
svislá stupnice
pro P: $1000d \ldots 10$ cm, $1d \ldots \frac{1}{100}$ mm,
a je parametr.]

38. Sestavte tabulku hodnot pro objem válce a podle ní pak sestrojte průsečíkový nomogram. (Volte rovnoměrné dělení stupnic pro πv, V a r užijte jako parametr.)

39. Sestrojte průsečíkový nomogram závislosti řezné rychlosti v na soustruhu pro průměr obráběné součástky d, při počtu otoček vřetena n za minutu. Volte pro $d \in (0{,}200)$ milimetrů, pro $0 < v \leqq 50$ m min^{-1}, přičemž n je parametr a nabývá hodnot 80, 160, 300, 500, 800, 1 200, 1 600.

40. Sestrojte průsečíkový nomogram pro výpočet částky m, která je rovna p % z daného základu z. ($0 < p \leqq 10$, $0 < z \leqq 5\,000$.)

41. Určete průsečíkový nomogram pro stanovení hektolitrové (měrné) váhy zrní a semen, je-li $G \in \langle 200{,}300 \rangle$ kp pro $V = 100$ l. (Volte 1 cm . . . 20 kp, 1 cm . . . 5 l.)

42. Definujte funkci prostou, rostoucí, nerostoucí, klesající, neklesající v intervalu (a, b).

***43.** Je dána funkce $y = \dfrac{2}{x}$. Určete obor této funkce a dokažte, že je to funkce a) lichá, b) funkce klesající.

Řešení

a) Je-li funkce $y = f(x)$ lichá, platí pro ni $f(-x) = -f(x)$. V naší úloze má tedy platit: $y = \dfrac{2}{-x} = -\dfrac{2}{x}$. To je jistě správné pro všechna x definičního oboru. [$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.]

Funkce $y = \dfrac{1}{x}$ je tedy funkce lichá.

b) Funkce $y = \dfrac{1}{x}$ je definována a) v intervalu $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Budeme proto při vyšetřování rozlišovat dva případy:

1. $x \in (-\infty, 0)$,
2. $x \in (0, \infty)$.

1. Je-li $y = f(x)$ klesající v intervalu (x_1, x_2), kde $x_2 > x_1$, pak v celém tomto intervalu musí být $f(x_1) > f(x_2)$. Pro nás tedy $\dfrac{2}{x_1} > \dfrac{2}{x_2}$, pro $x_2 > x_1 > 0$. Proto z $\dfrac{2}{x_1} > \dfrac{2}{x_2}$ vyplývá
$2 . (x_2 - x_1) > 0$, neboť $x_1x_2 > 0$ a násobením nerovnosti kladným číslem se nerovnost nemění. Výsledek $x_2 \;\; x_1 > 0$ souhlasí s předpokladem. Také obráceně z podmínky $x_2 > x_1$ lze dospět k tvrzení.

2. Nechť je $0 > x_2 > x_1$. Potom je opět $x_1x_2 > 0$ a nerovnost $\dfrac{2}{x_1} > \dfrac{2}{x_2}$ násobena číslem $x_1x_2 > 0$ dá zase $2(x_2 - x_1) > 0$, tj. $x_2 > x_1$ což je opět předpoklad. I zde platí věta obrácená. Dokažte sami.

Závěr: Pro všechna $x \neq 0$ je daná funkce $y = \dfrac{2}{x}$ klesající.

44. Která z daných funkcí je rostoucí, která klesající:

a) $y = 2x + 1$; b) $y = -2x$; c) $y = 3$; d) $y = \dfrac{-2}{x}$;
e) $y = 2\sqrt{x}$; f) $y = x^3 - 1$; g) $y = -x^2$;
h) $y = 4 . 10^x$. Dokažte. Načrtněte jejich graf.

45. Z grafu zjistěte, ve kterém intervalu jsou funkce z předešlé úlohy prosté.

***46.** Která z funkcí úlohy **44** je lichá, která sudá? Jakou vlastnost má graf funkce sudé a jakou funkce liché? [Všimněte si grafu b) a g).]

47. Dokažte, že funkce a) $y = -ax + b$ je pro $a < 0$ rostoucí, pro $a > 0$ klesající v celém definičním oboru.

b) $y = \sqrt{1 - x^2}$ je rostoucí v intervalu $\langle -1, 0 \rangle$ a klesající v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

***48.** Rozdělte definiční obor daných funkcí na takové intervaly, v nichž je daná funkce rostoucí, klesající, nerostoucí ani neklesající:

a) $y = 3 - x$; b) $y = x^2$; c) $y = 4x^2 - 9$; d) $y = -9 + 12x - 4x^2$; e) $y = |x|$; f) $y = |x| - 1$; g) $y = |x| + |x + 1|$; h) $y = |x + 1| - |x - 1|$.

***49.** Která z daných funkcí je sudá:

a) $f(x) = 2^x$; b) $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$; c) $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$; d) $f(x) = \sin x$; e) $f(x) = x - \sin x$; f) $f(x) = \cos x$.

2. FUNKCE KVADRATICKÁ, LOMENÁ, INVERZNÍ

50. Na jednom obrázku, tj. v jedné pevně zvolené pravoúhlé soustavě souřadnic, sestrojte graf funkce:

a) $y = x^2$; b) $y = \frac{1}{2}x^2$; c) $y = 2x^2$; d) $y = 3x^2$; e) $y = -x^2$; f) $y = -\frac{1}{2}x^2$; g) $y = -2x^2$; h) $y = -3x^2$.

51. Sestrojte na jednom obrázku graf funkce:
a) $y = x^2$; b) $y = x^2 + 2$. Jak se liší graf obou funkcí? Pro kterou hodnotu x má funkce $y = x^2 + 2$ nejmenší hodnotu? Pro která x je hodnota této funkce rovna nule? Pro která x je tato funkce záporná?

52. a) Sestrojte na jednom obrázku graf funkce:
α) $y = 1{,}5x^2$; β) $y = 1{,}5x^2 - 6$; γ) $y = -1{,}5x^2 + 6$.
b) Určete z grafu, pro které hodnoty proměnné x je y rovno nule, jedné, -1, 3.
c) Pro která x mají tyto funkce nejmenší hodnotu?

53. Z grafu funkcí $y = 2x^2 + 3$, $y = -3x^2 - 2$, $y = -4x^2 + 3$ najděte hodnoty x, případně y, pro něž: a) $y = 2$ (nebo -2); b) $x = 1$ (nebo -1). Nalezené hodnoty ověřte výpočtem.

54. Sestrojte graf funkce $y = 0{,}5x^2$. a) Z něho pak určete funkční hodnoty y: $x = 0{,}5$; $x = 2{,}5$; $x = 3{,}5$; $x = -1{,}5$; $x = -3$. Určete hodnoty proměnné x pro $y = 1$; $y = 3$; $y = 3{,}5$; $y = -1$; $y = -2$.

55. Z grafu funkce $y = \sqrt{x}$ určete hodnoty $\sqrt{1{,}5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2{,}5}$, $\sqrt{2{,}8}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3{,}5}$. Srovnejte výsledky s hodnotami v tabulkách.

56. Načrtněte graf funkce $y = ax^2$ a z něho pak (opět od ruky) graf funkce $y = ax^2 + c$, kde a, c jsou daná čísla reálná. (Kladná, záporná nebo nula.)

57. Co znamenají geometricky nulové body kvadratické funkce?

58. Načrtněte graf funkce $y = ax^2$ a) pro a větší než jedna; b) pro a menší než jedna, ale kladná; c) pro a rovno jedné; d) pro a záporná.

59. Sestrojte graf funkce:
a) $y = 2x^2 + 2$, b) $y = -x^2 - 3$, c) $y = ax^2 + c$ (a, c jsou čísla reálná téhož znamení) a ukažte, že pro $y = 0$ kvadratické rovnice nemají reálné řešení.

60. V kvadratické funkci $y = x^2 + ax + b$ určete koeficienty a, b tak, aby:
a) $y = 1$ pro $x = 0$, $y = 3$ pro $x = 1$;
b) $y = 1$ pro $x = -1$, $y = 5$ pro $x = 1$;
c) $y = 2$ pro $x = 0$, $y = 4$ pro $x = 2$.

61. V kvadratické funkci $y = ax^2 + bx + c$ určete koeficienty a, b, c tak, aby:
a) $y = 1$ pro $x = 0$, $y = 3$ pro $x = 1$, $y = 6$ pro $x = 2$;
b) $y = 17$ pro $x = 1$, $y = 39$ pro $x = 2$, $y = 11$ pro $x = -2$.

$\boxed{\textbf{62.}}$ Sestrojte graf funkce $y = x^2 - 5x + 2$.

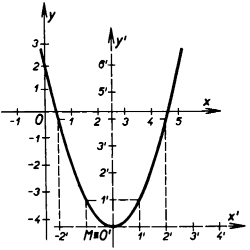
Řešení

Daná funkce je definována pro všechna čísla reálná. Vyjádříme ji v ekvivalentním tvaru:

$$y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 2 - \frac{25}{4} =$$
$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}, \text{ čili}$$
$$y + \frac{17}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2.$$

Posuneme-li nyní počátek soustavy souřadnic do bodu

$$M \equiv \left(\frac{5}{2}, -\frac{17}{4}\right),$$



Obr. 10

dostaneme rovnici $y' = x'^2$. Její graf je už známý z úlohy 50 a 51. Je to parabola s vrcholem v novém počátku
$M \equiv \left(\frac{5}{2}, -\frac{17}{4}\right)$ a osou rovnoběžnou s osou y. (Obr. 10)

Výsledek zobrazení ověřte grafem z tabulky hodnot původní funkce.

63. Co nejjednodušeji sestrojte graf funkce: a) $y = x^2 + 3x + 1$; b) $y = x^2 - x - 2$; c) $y = x^2 - 2x - 3$; d) $y = 2x^2 - x + 5$; e) $y = -x^2 + 2x - 6$; f) $y = -3x^2 + 5x - 1$. [Návod: Narýsujte přesně graf funkce $y = x^2$ na milimetrový papír, vystřihněte a okopírujte na tvrdší papír. Funkce typu a), b), c), e) lze potom snadno narýsovat. Při správné orientaci stačí okopírování.] Jak zjednodušíte úlohy typu d), f) pro grafické zobrazení?

64. Do téhož obrázku sestrojte graf funkce $y = ax^3$ pro $a = 2, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}$.
Jaký vliv má znamení koeficientu této liché funkce na průběh grafu té funkce?

65. Sestrojte graf funkce a) $y = |x - 2|^2$; b) $y = -|x^2 - 2|$; c) $y = x \,.\, |x|$.

66. Sestrojte graf funkce a) $y = x^{2n}$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots, 5$;
b) $y = x^{2n+1}$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

$\boxed{\textbf{67.}}$ Pletivo dlouhé 8 m má ohradit obdélníkový záhon, jehož jednu stranu tvoří zeď. Jak by měl být záhon dlouhý, aby jeho obsah byl co největší?

Řešení

Obsah hledaného obdélníka označme y, jeden rozměr obdélníka ať je x metrů, druhý je pak $\frac{8 - x}{2}$ metrů. Potom pro obsah platí:

$y = x\,\frac{8 - x}{2} = 4x - \frac{x^2}{2}$. Tuto rovnici přepíšeme ve tvaru

$y = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 8$, tj. $y - 8 = -\frac{1}{2}(x - 4)^2$.

Její graf je parabola s vrcholem $V \equiv (4, 8)$ a osou rovnoběžnou s osou $-y$. (Přesvědčte se o tom tabulkou hodnot.) Maximum dané funkce $y = 4x - \frac{x^2}{2}$ nastává tedy pro $x = 4$ a má velikost 8. Druhý rozměr hledaného obdélníka je $\frac{8 - 4}{2}$ m $= 2$ m. Záhon bude tedy dlouhý 4 m a široký 2 m.

***68.** Objem 1 cm^3 rtuti při teplotě t °C ($t \geqq 0$ °C) se dá určit podle vztahu

$V_t = 3 \cdot 10^{-8} \cdot t^2 + 2 \cdot 10^{-4} \cdot t + 1$. Jak vysoko musí vystoupit teplota, aby se objem rtuti zvětšil na 1,001 cm^3?

69. Do kužele o poloměru podstavy r a výšky v vepište válec. Určete objem válce jako funkci jeho výšky v_1. Pro které hodnoty v_1 je tato funkce definována?

70. Ze všech pravoúhlých trojúhelníků daného obsahu určete ten, jehož délka přepony je minimální.

***71.** Danou úsečku a rozdělte na dvě části tak, aby součet obsahů rovnostranných trojúhelníků sestrojených nad oběma úsečkami byl minimální.

72. Do rotačního kužele vepište rotační válec, jehož plášť je největší.

73. Řešte graficky: a) $x^2 - 7x + 10 = 0$; b) $x^2 - 3x - 4 = 0$;
c) $x^2 - 5x - 14 = 0$; d) $x^2 - 13x + 42 = 0$;
e) $x^2 - 5x + 2 = 0$. [Návod: Danou rovnici $x^2 - 5x + 2 = 0$ upravte na $x^2 = 5x - 2$. Položte $y = x^2$, $y = 5x - 2$ a zobrazte obě funkce. Souřadnice průsečíků obou grafů vyhovují dané rovnici. Proč?]

74. Řešte graficky: a) $x^2 - x - 42 = 0$; b) $4x^2 - 4x - 15 = 0$;
c) $2x^2 - 3x + 8 = 0$; d) $-2x^2 + x - 1 = 0$;
e) $-3x^2 + 2x + 1 = 0$.

75. Pro které hodnoty proměnné x je hodnota funkce $y = \dfrac{x^2}{2}$ menší než hodnota funkce $y = 2x$? (Řešte graficky.)

76. Podobně jako v úloze 73 řešte graficky:
a) $x^3 = 8(x - 1)$; b) $x^3 - 3x + 1 = 0$; c) $x^3 - 4x - 1 = 0$;
d) $x^4 - 4x + 1 = 0$.
Řešte i tak, že najdete souřadnice průsečíků grafů příslušné funkce s osou x.

77. Řešte graficky:
a) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$; c) $x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0$;
b) $x^3 - 7x^2 - 8x - 12 = 0$; d) $x^3 - 2{,}5x^2 - 4{,}5x + 9 = 0$.
[Návod: pro a) $x(x^2 + 2x - 5) = 6$, $y = x^2 + 2x - 5$, $xy = 6$.]

78. Sestavte tabulku hodnot funkcí a sestrojte graf funkcí:

a) $y = \dfrac{1}{x}$; b) $y = \dfrac{2}{x}$; c) $y = -\dfrac{2}{x}$; d) $y = -\dfrac{3{,}5}{x}$;

e) $y = \dfrac{1}{2x}$; f) $y = -\dfrac{2}{3x}$; g) $y = \dfrac{a}{x}$.

(a je číslo reálné. Rozlišujte $a > 0$, $a < 0$.)

79. Sestrojte graf funkce $y = \frac{1}{|x|}$. Z grafu pak určete hodnoty y pro $x = -\frac{1}{2}$, $x = 2{,}3$, $x = -5$.

80. Vzduch ve válci má objem 4 dm³ při tlaku 760 torr. Sestrojte tabulku pro tlak jako funkci objemu tohoto vzduchu při stálé teplotě. [Ze zákona Boyleova: Součin objemu a tlaku plynu je při stálé teplotě konstantní.]
a) Propočtěte tabulku pro 0,5 dm³, 1 dm³, 1,5 dm³, . . ., 4 dm³.
b) Napište vzorec. (Nepřímá úměrnost.)
c) Narýsujte graf, v němž 1 dm³ je vyjádřen úsečkou 2 cm, 100 torr úsečkou 1 cm.

81. Čtverec o obsahu 2,25 m² má být přeměněn v obdélník o stejném obsahu. Vyjádřete jednu stranu obdélníka jako funkci druhé a určete oba rozměry, je-li jeden z nich vyjádřen celistvým počtem metrů.

82. Obdélníková parcela o rozměrech $a = 24$ m, $b = 15$ m má být vyměněna za stavební místo stejné výměry (také obdélníkového tvaru), a to s jedním rozměrem a) 5 m, b) 30 m, c) 90 m. Určete druhý rozměr. Znázorněte graficky.

83. Pumpou čerpající 3,5 litru vody za vteřinu se vyčerpá stavební jáma za 10 hodin. Jak dlouho bude vodu čerpat pumpa, která vyčerpá za vteřinu 7 (10,5; 6; 25) litrů vody?

84. Ze dvou ozubených do sebe zapadajících kol má jedno 42, druhé 119 zubů. Kolikrát se otočí první, když druhé udělá 12 (30, 270) otoček?

85. Převodník u jízdního kola má 28 (36) zubů. Převodové kolečko na zadním kole má 8 (10) zubů. Kolikrát se otočí zadní kolo, šlápneme-li oběma nohama 112krát (180krát)? Kolik metrů tím ujedeme, má-li zadní kolo obvod 175 (190) cm?

86. Jedno rameno páky je 80 cm (q cm) dlouhé a je zatíženo břemenem 20 kp (Q kp). Jakou silou je možno udržet toto břemeno v rovnováze, má-li rameno síly délku 10 cm (p cm, 20 cm, 50 cm, 800 cm, 120 cm, 400 cm)?

87. V uzavřeném elektrickém obvodu se zdrojem, jehož vnitřní odpor je zanedbatelný, a s odporem 8 Ω teče proud 4,2 A. Jak se změní proud, zmenšíme-li odpor o 1 Ω? (Proud je nepřímo úměrný odporu.)

$\boxed{\textbf{88.}}$ Sestrojte graf racionální lomené funkce $y = \frac{x-1}{x-2}$.

Řešení

Tato funkce je definována na množině $x \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ a nabývá hodnot $y \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Provedeme-li naznačené dělení, dostaneme:

$y - 1 = \dfrac{1}{x-2}$, kde $x \neq 2$. Položme $y' = y - 1$, $x' = x - 2$ a pak daná funkce má tvar $y' = \dfrac{1}{x'}$. Její graf (jak plyne z tabulky hodnot) je rovnoosá hyperbola s větvemi v prvním a třetím kvadrantu. Její asymptoty tvoří osy souřadnic x', y'. V původní soustavě souřadnic má tedy střed hyperboly souřadnice $0' \equiv (2,1)$.

89. Sestrojte graf funkce $y = \dfrac{x+1}{|x-1|}$.

Řešení

Definiční obor této funkce jsou všechna čísla reálná kromě 1. Rozlišujeme tedy dva případy: a) $x > 1$, potom $|x - 1| = x - 1$; b) $x < 1$, pak $|x - 1| = -(x - 1)$. Graf funkce v případě a) je hyperbola rovnoosá, jejíž větev leží v prvním a třetím kvadrantu a střed $O' \equiv (1,1)$. V případě b), tj. pro $x < 1$, platí

$y = \dfrac{x+1}{-(x-1)} = -1 + \dfrac{2}{-x+1} = -1 - \dfrac{2}{x-1}$, neboli $y + 1 = -$ $- \dfrac{2}{x-1}$. Střed této hyperboly je v bodě $O'' \equiv (1, -1)$. Její graf $y' = -\dfrac{2}{x'}$, kde $x' = x - 1$, $y' = y + 1$. Větve této rovnoosé hyperboly se středem O'' leží ve druhém a čtvrtém kvadrantu.

Závěr: Graf celé funkce $y = \dfrac{x+1}{|x-1|}$ se skládá tedy ze dvou částí. Jednu část tvoří větev rovnoosé hyperboly v prvním kvadrantu (pro $x > 1$), druhou část větev rovnoosé hyperboly ve druhém kvadrantu se středem v bodě $O'' \equiv (1, -1)$.

90. Sestrojte graf funkce: a) $y = \dfrac{1}{x+3}$; b) $y = \dfrac{1}{x-2}$; c) $y = \dfrac{x+1}{x-2}$;

d) $y = \dfrac{x-2}{x+1}$; e) $y = \dfrac{x-3}{x-2}$; f) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$; g) $y = \dfrac{x-5}{2x}$.

91. Sestrojte graf funkce: a) $y = \dfrac{2x-3}{3x-1}$; b) $y = \dfrac{6x-7}{4x-2}$; c) $y = \dfrac{6x-4}{6-9x}$.

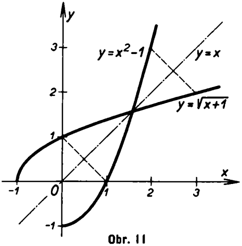
92. Sestrojte graf funkce: a) $y = \dfrac{1}{|x+1|}$; b) $y = \dfrac{x-1}{|x+1|}$;

c) $y = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$; d) $y = \dfrac{|x-1|}{x+1}$.

93. Definujte inverzní funkci. Určete inverzní funkci k funkci $y = x^2 - 1$.

Řešení

Definiční obor dané funkce $y = x^2 - 1$ jsou čísla z intervalu $(-\infty, \infty)$. Pro vytvoření inverzní funkce musíme však tento interval zúžit tak, aby v něm daná funkce byla prostá. Takový interval pro naši funkci je např. $x \in \langle 0, \infty)$. Pro x z tohoto intervalu nabývá pak funkce $y = x^2 - 1$ hodnot $y \in \langle -1, \infty)$. Inverzní funkci k funkci dané vyjádříme takto:
1. Zaměníme nezávisle proměnnou x za závisle proměnnou y a také y za x, tj. $x = y^2 - 1$.
2. Tuto závislost vyjádříme ve tvaru $y = f(x)$, tj. pro náš případ $y = \sqrt{x + 1}$. Tato funkce inverzní vůči funkci dané je definována na množině $x \in \langle -1, \infty)$ a pro všechna x tohoto definičního oboru nabývá hodnoty $y \in \langle 0, \infty)$.
3. Z tabulky hodnot sestrojíme graf původní i inverzní funkce. Grafy obou funkcí jsou zřejmě souměrné podle osy prvního a třetího kvadrantu. (To vyplývá i z toho, že jsme zaměnili proměnné x a y.) Definiční obor původní funkce je proto týž jako funkční obor funkce inverzní a také obor funkčních hodnot inverzní funkce je týž jako definiční obor funkce původní. (Obr. 11.)



Obr. 11

94. K daným funkcím určete funkce inverzní, najděte jejich definiční a funkční obor a nakreslete jejich grafy:

a) $y = 2x + 3$; b) $y = x^3$; c) $y = 2^x - 1$; d) $y = \sqrt{x}$, $x \geqq 0$;

e) $y = \dfrac{1}{x}$; f) $y = x^2 + 1$; g) $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

3. OPAKOVÁNÍ

95. Do koule o daném poloměru r je vepsán rotační válec. a) Vyjádřete jeho objem V jako funkci jeho výšky x. Pro která x je objem V definován?

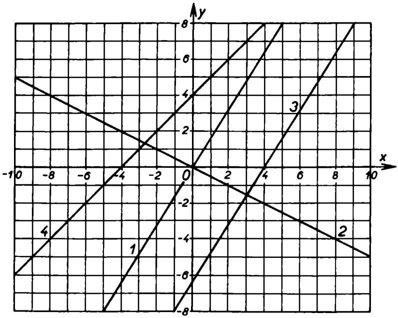
b) Určete množinu čísel, jichž nabývá objem válce pro všechna x z definičního oboru.

96. Vlak se rozjíždí pohybem rovnoměrně zrychleným podle vztahu $s = at^2 + bt + c$. Určete závislost dráhy s na čase t, víte-li, že za 4 s urazí dráhu 50 m, za 10 s dráhu 305 m.

97. Který mnohočlen třetího stupně má pro $x = -1, 0, 1, 2$ hodnotu $y = 9, 2, 1, 12$? [Návod: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.]

98. Vlak vyjel ze stanice A a pohyboval se rovnoměrně zrychleně. Po 2 km dosáhl rychlosti 40 km/h. Touto rychlostí jel pak rovnoměrně. Sestrojte graf dráhy s jako funkci času t. (Sestavte nejprve příslušnou funkci. Uvažte, kde bude vlak za dobu t při rovnoměrném pohybu.) Ověřte si výpočtem údaje grafu též pro některé další hodnoty t. Například pro $t = 2{,}5$ h, $t = 4{,}5$ h.

99. Vyjádřete vzorcem funkce, jejichž grafy jsou na obr. 12.



Obr. 12

100. Následující lineární rovnice vyjádřete ve tvaru funkce $y = kx + q$, sestrojte graf a určete několik dvojic x, y, které vyhovují dané funkci:

a) $5x - 8y = 4x - 9y + 3$;

c) $\dfrac{x+y}{5} - \dfrac{x-y}{4} = \dfrac{x-1}{10}$.

b) $(x - y)\,5 = 4(x - y) + 2$;

101. Bronz se skládá z mědi, zinku a olova. Na 17 dílů mědi připadá 1 díl

olova a dva díly zinku. Kolik kilogramů mědi, zinku a olova je v 4 q bronzu?

102. Pro které a bude graf funkce $y = ax + 1$ rovnoběžný s grafem funkce $y = -2x + 3$?

103. Kolo o průměru d se otočilo na dráze 60 metrů n-krát. Vyjádřete závislost počtu obrátek kola na jeho průměru a zobrazte to graficky.

104. Vodorovný trám určitého průřezu, na jednom konci upevněný, na druhém konci zatížený, unese při délce 4 m na volném konci 200 kg. Únosnost je nepřímo úměrná délce trámu. Jak by musel být trám nejvýše dlouhý, aby unesl a) 500 kg, b) 400 kg, c) 100 kg, d) 25 kg?

105. Určete funkci vyjadřující závislost velikosti úhlu v obloukové míře na velikosti úhlu x měřeného ve stupních. Jak velký je úhel v míře stupňové, je-li jeho velikost v míře obloukové rovna 1?

106. Dokažte, že mají nekonečně mnoho řešení soustavy rovnic:

a) $x - y = 5$, $3x = 15 + 3y$; b) $x + y = 3$, $\frac{x}{2} + 0{,}5\,y = 1{,}5$; c) $x = 4 - y$, $y = 4 - x$.

Početně i graficky.

107. Dokažte početně i graficky, že nemají řešení rovnice:

a) $x + y = 1$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 2$; b) $x - y = 4$, $2x - 2y = 5$; c) $x + y = 3$, $y = \frac{7 - 2x}{2}$.

108. Sestavte tabulku hodnot a sestrojte graf funkce:

a) $y = |x| - x$; b) $y = -|x - 2|$; c) $y = |2x - 1| + |x - 2| - x$.

Udejte interval, v němž je daná funkce rostoucí nebo klesající, popřípadě konstantní.

109. Sestrojte průsečíkový nomogram pro funkci $z = x + y$, když volíte z za parametr. (Např. pro $z = 0, 1, 2, \ldots, 10$.)

Určete pak z něho hodnoty z pro: a) $x = 2$, $y = 3$;
b) $x = 1{,}7$, $y = 2{,}5$;
c) $x = 4{,}8$, $y = 6{,}3$.

110. Podle předchozí úlohy sestrojte průsečíkový nomogram pro výpočet nákladů na drobné opravy, je-li celkový náklad na opravu dán výrazem $z = 2{,}24x + 1{,}15y$, kde x je cena materiálu, y odměna za práci se všemi přirážkami. Z tohoto nomogramu určete pak cenu opravy pro

a) $x = 3{,}10$ Kčs a $y = 28{,}50$ Kčs; b) $x = 2{,}09$ Kčs a $y = 14{,}80$ Kčs.

111. Zpaměti: Jak zní kvadratická funkce, jejíž graf je parabola s osou v ose

$+y$ a vrcholem v počátku? Jak zní rovnice této paraboly, je-li její vrchol posunut: a) o 2 jednotky ve směru osy y;
b) o tři jednotky ve směru osy $-y$;
c) o jednu jednotku ve směru osy x, o čtyři jednotky ve směru osy $-x$.

Jak bude znít rovnice paraboly v případě c), jestliže osa paraboly je rovnoběžná s osou $-y$?

112. Zpaměti: Určete: $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

113. V podstřeší, jehož nárys má tvar rovnoramenného trojúhelníka o délce základny b a výšce velikosti v, se má stavět obytná místnost ve tvaru kvádru. Vyjádřete obsah čelné stěny jako funkci proměnné výšky místnosti. Sestrojte graf té funkce.

114. Která kvadratická funkce má tu vlastnost, že $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$? Sestrojte její graf.

115. Řešte graficky:
a) $x^2 - 4x + 3 = 0$; b) $x^2 - x - 2 = 0$;
c) $x^2 - 2x - 3 = 0$.

116. a) $x^2 + x - 2 = 0$; b) $4x^2 - 4x - 15 = 0$;
c) $2x^2 + x - 6 = 0$; d) $2x^2 - 5y - 3 = 0$.

117. Řešte graficky:
a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; b) $x^2 + x - 1 = 0$;
c) $4x^2 - 7x + 3 = 0$; d) $xy = 10$, $x + y = 7$.

118. Určete početně i graficky extrémní hodnoty funkcí:
a) $y = 2x^2 - 4x + 5$; b) $y = -x^2 + 3x - 1$;
c) $y = 0{,}3x^2 - 0{,}9x + 8$; d) $y = 3x^2 - 8x + 7$.

119. Sestrojte graf funkce:
a) $y = x + \frac{1}{x}$; b) $2y = \pm\sqrt{100 - x^2}$;
c) $y = \pm x\sqrt{100 - x^2}$; d) $y = \pm\sqrt{-x - 2}$.

***120.** Z plechové desky tvaru kruhu o poloměru velikosti r je vyříznuta kruhová výseč se středovým úhlem φ a svinuta do tvaru nálevky. Při které velikosti úhlu φ je objem nálevky největší?

***121.** Obvod kruhové výseče je 100 m. Při kterém poloměru je její obsah největší?

122. Zdánlivý odpor oscilačního obvodu, v němž jsou spojeny v sérii cívka s indukčností L a odporem R (i s přívodními dráty) s kondenzátorem s kapacitou C, je dán výrazem:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}, \text{ kde } \omega = 2\pi f \text{ je úhlová frekvence oscilací.}$$

Určete, jakou frekvenci musí mít oscilace, aby odpor oscilačního obvodu byl nejmenší.

123. Které z těchto předpisů znamenají tutéž funkci:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x}$, $g(x) = 1$;

b) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$, $g(x) = x + 1$;

c) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{2x^2 + x - 3}$, $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$.

124. Lomená racionální funkce $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ má tu vlastnost, že $f_1 = 3$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$. Určete ji a sestrojte její graf.

125. Sestrojte graf funkce: a) $y = \dfrac{x - 5}{2x}$; b) $y = \dfrac{2x - 3}{x - 2}$;

c) $y = \dfrac{3x - 1}{2x - 5}$; d) $y = \dfrac{x}{3x - 1}$.

***126.** Poměr intenzity záření dopadajícího I_1 a záření odraženého I_2 při kolmém dopadu na rozhraní dvou prostředí se označuje $R = \dfrac{I_2}{I_1}$. Při průhledných prostředích (vzduch, sklo) a pro relativní index lomu n platí $R = \left(\dfrac{n - 1}{n + 1}\right)^2$. Sestrojte graf této funkce pro $1 < n < 3$.

***127.** Funkce $y = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$ určuje závislost mezi indexem lomu n dané látky a její tloušťkou ϱ, která je veličině y přímo úměrná. Sestrojte pokud možno přesně graf této funkce v intervalu $1 < n < 2{,}5$.

***128.** Sestrojte graf funkce a) $y = \dfrac{2}{x + |x| - 2}$, $x \neq 1$;

b) $y = -\sqrt{2(x - |x - 2|)}$.

129. Určete hodnotu parametru p tak, aby funkce $y = x^2 - 4|x - 1| - p$ nabývala hodnoty 1 pro tři různé hodnoty proměnné x.

*130. Určete parametr p tak, aby funkce $y = \dfrac{6x - 6}{x^2 - 2x + p}$ byla definována pro všechna reálná čísla x a aby nabyla své největší hodnoty pro $x = 2$. Dokažte, že graf této funkce je souměrný podle středu $S \equiv (1,0)$.

*131. Ukažte, že graf funkce $y = \dfrac{1}{2}\left(|1 + \sqrt{4 - x^2}| + |1 - \sqrt{4 - x^2}|\right)$ v intervalu $-2 \leqq x \leqq 2$ se skládá ze 2 úseček a kruhového oblouku.

132. Určete vertikální osy souměrnosti grafů funkcí:

a) $y = ax^2 + bx + c$; b) $y = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(1 - x)^2}$;

c) $y = \sqrt{a + x} + \sqrt{b - x}$.

133. Určete střed souměrnosti grafů funkcí: a) $y = ax + b$;

b) $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$; c) $y = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{1}{x - 3}$;

d) $y = 1 + \sqrt[3]{x - 2}$.

134. Řešte graficky: a) $x^3 - 3x + 2 = 0$; b) $x^3 + \dfrac{1}{2}x - 0{,}5 = 0$;

c) $x^3 - 10x + 2 = 0$; d) $x^3 - \dfrac{2}{3}x - 0{,}7 = 0$;

e) $x^3 + x^2 - 4x - 6 = 0$; f) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

VII. LOGARITMUS

1. FUNKCE EXPONENCIÁLNÍ, DEFINICE LOGARITMU, FUNKCE LOGARITMICKÁ

1. Určete hodnoty funkce $y = 2^x$, je-li $x = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$ a zobrazte její graf.

2. Určete hodnoty funkce $y = 2^x$ pro celá čísla $x = 0$ až 8 a sestrojte její graf tak, že souřadnice x budete vynášet v centimetrech a souřadnice y v milimetrech.

3. Sestrojte grafy funkcí $y = 2^x$ a $y = 3^x$ a určete z nich
a) hodnoty obou funkcí pro $x = 1, 5$;
b) čísla x, pro něž dané funkce mají hodnotu $y = 8$.

4. Sestrojte graf funkce $y = 10^x$ v centimetrovém měřítku a určete odměřením hodnoty této funkce, je-li

a) $x = \pm \dfrac{1}{2}$, b) $x = \pm \dfrac{1}{3}$, c) $x = \pm \dfrac{1}{4}$, d) $x = \pm \dfrac{1}{6}$.

5. Sestrojte grafy funkcí $y = \left(\dfrac{5}{2}\right)^x$ a $y = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x$. V jakém jsou vzájemném vztahu? Pro která čísla x nabývají obě funkce stejných hodnot?

6. Načrtněte si grafy funkce $y = a^x$ pro $a = 1; 2; 3; \ldots, a = \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{4}; \ldots$ a sledujte jejich průběh, roste-li kladné číslo a.

7. Pro která kladná čísla a jsou funkce $y = a^x$, $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ rostoucí, pro která klesající a pro která konstantní?

8. Sestrojte grafy funkcí $y = 2^{x+1}$, $y = 2^{x-1}$ a srovnejte je s grafem funkce $y = 2^x$. V jakém jsou vzájemném vztahu?

9. V téže soustavě pravoúhlých souřadnic sestrojte grafy funkcí tvaru $y = k \cdot 2^x$, kde $k = 1; 2; \dfrac{1}{2}$. Porovnejte je.

10. Sestrojte grafy funkcí $y = 2^x$ a $y = 2^{-x}$ a z nich grafy funkcí $y = 2^x \pm \pm 2^{-x}$.

11. Pro která čísla a je funkce $y = \left(\dfrac{2a-1}{3}\right)^x$ rostoucí?

12. Pro která čísla a je funkce $y = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^x$ klesající?

13. Na základě přibližných náčrtků grafů funkcí rozhodněte, které z čísel je větší nebo menší než 1:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$; b) $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{7}{8}}$; d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{5}{6}}$.

14. Jaký vztah je mezi čísly m a n, jestliže platí:

a) $\left(\frac{4}{5}\right)^m < \left(\frac{4}{5}\right)^n$; b) $\left(\frac{3}{2}\right)^m < \left(\frac{3}{2}\right)^n$;

c) $(0{,}5)^m > (0{,}5)^n$; d) $\left(\frac{5}{2}\right)^m > \left(\frac{5}{2}\right)^n$.

15. Pro která kladná čísla a je platný vztah:

a) $a^{\frac{3}{5}} < a^{\frac{5}{4}}$; b) $a^{\frac{2}{3}} > a^{\frac{5}{3}}$; c) $a^{-\frac{3}{4}} > a^{\frac{6}{5}}$?

16. Pomocí logaritmů proveďte zápis rovnice:

a) $5^2 = 25$; b) $2^4 = 16$; c) $5^3 = 125$; d) $3^{-2} = \frac{1}{9}$;

e) $2^5 = 32$; f) $2^{-1} = \frac{1}{2}$; g) $9^{\frac{1}{2}} = 3$; h) $27^{\frac{1}{3}} = 3$;

i) $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

17. Ověřte si ekvivalentním zápisem správnost rovnice:

a) $\log_2 4 = 2$; b) $\log_2 8 = 3$; c) $\log_5 25 = 2$;

d) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$; e) $\log_{10} 1\,000 = 3$; f) $\log_2 \frac{1}{2} = -1$.

18. Počítejte zpaměti:

a) Určete logaritmus 100 při základu 10.
b) Určete logaritmus 625 při základu 5.
c) Určete číslo, jehož logaritmus při základu 7 je 2.
d) Určete číslo, jehož logaritmus při základu 5 je roven 3.
e) Při kterém základu je logaritmus 16 roven 4?
f) Při kterém základu je logaritmus 16 roven 2?

19. Určete:

a) $\log_7 49$; b) $\log_2 \frac{1}{4}$; c) $\log_{10} 0{,}1$; d) $\log_{10} 0{,}01$; e) $\log_{\frac{1}{2}} 4$.

20. Stanovte číslo x, platí-li:

a) $\log_2 x = 4$; b) $\log_{10} x = -1$; c) $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$;

d) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$; e) $\log_5 x = 0$; f) $\log_6 x = 1$;

g) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$; h) $\log_{0,1} x = -1$.

21. Pro který základ z platí:

a) $\log_z 216 = 3$; b) $\log_z \frac{1}{27} = 3$; c) $\log_z \frac{1}{64} = -3$;

d) $\log_z \sqrt{8} = \frac{3}{4}$; e) $\log_z 10 = 6$; f) $\log_z 3 = 3$;

g) $\log_z \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; h) $\log_z n = n$?

22. Která celá čísla tvoří horní a dolní aproximaci logaritmu:

a) $\log_2 6$; b) $\log_{10} 30$; c) $\log_{10} 0,5$; d) $\log_2 \frac{1}{25}$?

23. Určete logaritmy těchto čísel při základu 2: 2; 8; 32; 64; 256; 512; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{1\,024}$ a těchto čísel při základu 10:
10; 100; 1 000; 1 000 000; 1; 0,1; 0,001.

24. Určete:

a) $\log_2 \sqrt{2}$; b) $\log_2 \sqrt[4]{8}$; c) $\log_2 \sqrt{2}$; d) $\log_2 \sqrt[8]{2}$;

e) $\log_{10} \sqrt{10}$; f) $\log_{10} \sqrt[4]{10}$; g) $\log_{10} \sqrt[8]{1\,000}$; h) $\log_{10} \sqrt[8]{10\,000}$.

25. Určete hodnotu výrazu x:

a) $x = \log_3 243 + \log_4 \frac{1}{256} + \log_{0,2} 0,04$;

b) $x = \left(\log_5 \frac{1}{25} - \log_{\frac{1}{3}} 729\right)^3$;

c) $x = \log_{0,2} 0,0016 + 3 \log_8 0,125$;

d) $x = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} 0,25 - \log_{0,25} 16}$;

e) $x = 3^2 - \log_3 27$;

f) $\log_2 \log_2 16$.

26. Jaký tvar má inverzní funkce k funkci $y = 2^x$ a v jakém vztahu jsou grafy obou funkcí?

27. Sestrojte grafy funkcí $y = a^x$ a $x = a^y$, je-li $a = 1$, a určete souřadnice jejich společného bodu.

28. Sestrojte grafy funkcí $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x + 1$ a grafy funkcí, které jsou k těmto funkcím inverzní.

29. Sestrojte pomocí grafu funkce $y = 10^x$ graf funkce $y = \log x$ a určete z něho $\log \frac{1}{2}$, $\log 2$ a $\log 5$. Z grafu určete také čísla, pro něž platí: a) $\log x = \frac{1}{2}$, b) $\log x = -\frac{1}{2}$.

30. Sestrojte grafy funkcí $y = 2^{-x}$ a $x = 2^{-y}$ a určete přibližně souřadnice jejich průsečíku M.

31. K funkci $y = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} + 1$ určete funkci inverzní.

Řešení

Upravujeme danou funkci takto:

$$y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} + 1 = \frac{10^x - 10^{-x} + 10^x + 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} = \frac{2 \cdot 10^x}{10^x + \dfrac{1}{10^x}} =$$

$= \dfrac{2 \cdot 10^{2x}}{10^{2x} + 1}$. $M \equiv (-\infty, \infty)$, $N \equiv (0, \infty)$. Funkce k této funkci inverzní v tomto oboru má tvar $x = \dfrac{2 \cdot 10^{2y}}{10^{2y} + 1}$, který lze upravovat takto:

$$x \cdot 10^{2y} + x = 2 \cdot 10^{2y},$$

$$10^{2y}(2 - x) = x,$$

$$10^{2y} = \frac{x}{2 - x},$$

$$\log \frac{x}{2 - x} = 2y,$$

$$y = \frac{1}{2} \log \frac{x}{2 - x}, \text{ přičemž } 0 < x < 2.$$

Závěr: Funkce $y = \frac{1}{2} \log \frac{x}{2 - x}$, $0 < x < 2$, je k dané funkci inverzní.

32. Je dána funkce $y = 10^{x+1}$. Stanovte k ní funkci inverzní.

33. Určete inverzní funkci k funkci $y = 1 + \log(x + 2)$.

34. Která inverzní funkce patří k funkci $y = \dfrac{2^x}{1 + 2^x}$?

35. Narýsujte do téže soustavy pravoúhlých souřadnic grafy funkcí $y = \log_2 x$, $y = \log_4 x$ a porovnejte je. Jaký je „modul“ $\left(\text{poměr } \dfrac{\log_2 x}{\log_4 x}\right)$ pro každé x obou logaritmických soustav?
Která čísla mají v obou logaritmických soustavách logaritmus rovný číslu 1? [Návod: Narýsujte rovnoběžku s osou x ve vzdálenosti 1.]

36. Dokažte, že platí vztah $\log_b n = \dfrac{\log_a n}{\log_a b}$, je-li $a > 0$, $b > 0$, $n > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

Řešení

Nechť je $\log_b n = x$, $\log_a n = y$, $\log_a b = z$; potom platí vztahy: $b^x = n$, $a^y = n$, $a^z = b$. Prvé dvě rovnice mají pravé strany stejné, z čehož plyne vztah $b^x = a^y$, přičemž $b = a^z$. Je tedy $(a^z)^x = a^y$, $zx = y$, $x = \dfrac{y}{z}$ a $\log_b n = \dfrac{\log_a n}{\log_a b}$.

Závěr: Daný vztah platí.

37. Porovnejte grafy funkcí $y = \log_2 x$ a $y = \log x$ a stanovte modul obou soustav. [Návod: Využijte úlohy 36.]

38. Určete modul logaritmické soustavy Napierovy a Briggsovy.
[Návod: Základem logaritmické soustavy Napierovy je iracionální číslo $e = 2{,}71\,828\ldots$, jehož logaritmus má v logaritmické soustavě dekadické přibližnou hodnotu 0,434 29. Soustava Briggsova má za základ číslo 10.

39. Dokažte, že platí vztah
$\dfrac{\log_a m}{\log_a n} = \dfrac{\log_b m}{\log_b n}$, kde $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $n > 0$, $n \neq 1$, $m > 0$, $m \neq 1$.

40. Dokažte, že platí: $\log_a b \,.\, \log_b a = 1$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Na základě platnosti tohoto vztahu určete:

a) $\log_2 5$, je-li $\log_5 2 = a$; b) $\log_3 8$, je-li $\log_8 3 = \dfrac{1}{b}$;

c) $\log_5 72$, je-li $\log_{72} 5 = -m$; d) $\log_2 10$, je-li $\log 2 = 0{,}301\,03$.

41. Dokažte, že platí vztah
$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$, kde $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$.

42. Dokažte, že platí: $\log_a b \,.\, \log_b c \,.\, \log_c a = 1$, je-li $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$.

*43. Dokažte, že platí:

$$\log_{ab} x = \frac{\log_a x \,.\, \log_b x}{\log_a x + \log_b x}, a > 0, b > 0, x > 0, a \neq 1, b \neq 1 \,.$$

[Návod: Pište $\log_a x = m$, $\log_b x = n$, $\log_{ab} x = p$ a hledejte vztah mezi m, n, p.]

*44. Dokažte, že platí: $\log_{ab} x = \dfrac{\log_a x}{1 + \log_a b}$ za obvyklých předpokladů.

45. Určete obor, ve kterém je definována funkce $y = \log_z x$, $z > 0$, $z \neq 1$, je-li

$$x = \frac{u^4 - 13u^2 + 18}{18} - 1 \,.$$

Řešení

Jelikož jen čísla kladná mají logaritmy, musí platit nerovnost

$$\frac{u^4 - 13\,u^2 + 18}{18} + 1 > 0 \,.$$

Tuto nerovnost postupně upravujeme takto:

$u^4 - 13u^2 + 36 > 0$,

$(u^2 - 4)(u^2 - 9) > 0$,

$(u - 2)(u + 2)(u - 3)(u + 3) > 0$.

Tento součin má kladnou hodnotu tehdy, má-li:

a) všechny činitele kladné;

b) všechny činitele záporné;

c) dva činitele kladné a dva záporné.

Z úvahy plyne, že musí být $u > 3$ nebo $u < -3$ nebo $-2 < u < 2$.

Závěr: Daná funkce je definována pro všechny hodnoty u, které splňují některou z těchto nerovností $u > 3$, $u < -3$, $-2 < u < 2$.

46. Určete obory, ve kterých jsou definovány funkce:

a) $y = \log_z (2x + 3)$; b) $y = \log_z \dfrac{x + 3}{x - 5}$;

c) $y = \log_z \sqrt{x - 4}$; d) $y = \log_z \sqrt{1 - x^2}$;

e) $y = \log_z \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$.

*47. Je dáno číslo $n = \dfrac{z + 1}{z - 1}$, kde $z = \dfrac{x^4 - 25x^2 + 72}{72}$.

Určete všechna čísla x, pro která existuje logaritmus čísla n.

2. VLASTNOSTI LOGARITMŮ, LOGARITMUS DEKADICKÝ

48. Proveďte, je-li číslo $a > 0$, $z > 0$, $z \neq 1$:

a) $\log_z az$; b) $\log_z az^2$; c) $\log_z \frac{a}{z}$; d) $\log_z \frac{a}{z^2}$; e) $\log_z z\sqrt{a}$;

f) $\log_z \sqrt{az}$; g) $\log_z \sqrt{\frac{a}{z}}$.

49. Proveďte, je-li $a > 0$, $b > 0$, $z > 0$, $z \neq 1$:

a) $\log_z a^2b$; b) $\log_z \frac{a^2}{b}$; c) $\log_z a\sqrt{b}$; d) $\log_z \sqrt{a^3} \, . \sqrt[5]{b^4}$;

e) $\log_z \frac{\sqrt[3]{a}}{b^2}$; f) $\log_z \frac{az^2}{b}$; g) $\log_z \frac{z^2}{ab^2}$; h) $\log_z \frac{z^2}{a\sqrt{b}}$;

i) $\log_z \sqrt{abz}$; j) $\log_z \sqrt[3]{\frac{b^2}{z}}$.

50. Proveďte za předpokladu, že logaritmujete kladná čísla a $z > 0$, $z \neq 1$.

a) $\log_z abc$; b) $\log_z 5cd$; c) $\log_z 3(x + y)$; d) $\log_z (a^2 - b^2)$;

e) $\log_z 2(x^2 - y^2)$; f) $\log_z \frac{2ab}{c}$; g) $\log_z \frac{2(a + b)}{3(a - b)}$;

h) $\log_z \frac{s(s - a)(s - b)(s - c)}{4abc}$; i) $\log_z 12a^2b^3c^5$; j) $\log_z \frac{2m^2}{3(m^2 - 1)}$;

k) $\log_z \frac{z^3 \operatorname{tg} \alpha}{abc}$; l) $\log_z \frac{10(a^2 - b^2)}{3c^2d^4}$; m) $\log_z 3a\sqrt[3]{3b^2}$;

n) $\log_z \sqrt[4]{\frac{a^3}{b}}$; o) $\log_z \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$;

p) $\log_z 3a\sqrt[5]{a^3(a + b)^2}$; q) $\log_z 15r^2\sqrt[4]{2r^2(p - q)^3}$;

r) $\log_z \frac{3m^2n}{4\sqrt{5m \, . \, n}}$; s) $\log_z \frac{6a\sqrt{2c(a - b)}}{5(a - b)^2}$; t) $\log_z \left(\sqrt[5]{\frac{a}{2b}}\right)^3$;

u) $\log_z \left(\frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{3b}}\right)^3$.

51. a) $\log_z (9a^2 - 4b^2)$; b) $\log_z (25a^2b^4 - 16c^2)$; c) $\log_z (a^3 - b^3)$;
d) $\log_z (27a^3 - 8c^3)$; e) $\log_z (a^2 + 6a + 9)$;
f) $\log_z (25m^2 - 60mn + 36n^2)$.
[Návod: Výrazy, které máte logaritmovat, nejprve rozložte v součin.]

52. Určete $\log_z x$, je-li:

a) $x = \dfrac{a^2 . \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}}{b^3 . \sqrt[3]{c}}$; b) $x = a^{-2} . b^{-3}$; c) $x = 3a^{-2} . \sqrt{b}$;

d) $x = 3\, m^{-1} . n^{-2} . p$; e) $x = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}}$; f) $x = \sqrt[3]{a^{-3}} . \sqrt[4]{\dfrac{1}{b^2}}$;

g) $x = \dfrac{1}{4} \sqrt{a \sqrt{b}}$; h) $x = \dfrac{3}{7} \sqrt[3]{a \sqrt{a}}$; i) $x = \sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}}$;

j) $x = \sqrt[n]{a^m}$; k) $x = \sqrt[n+1]{a^n . \sqrt[m]{b^{-1}}}$; l) $x = (\sqrt{a})^{\sqrt{a}}$;

m) $x = a^{\sqrt[3]{0,5}}$; n) $x = m . n^{2\pi}$; o) $x = \dfrac{m^{\sqrt{3}}}{n^{\sqrt{2}}}$.

Ve všech případech uveďte, za kterých podmínek můžete určit $\log_z x$, je-li $z > 0, z \neq 1$.

53. Logaritmováním kterého výrazu x vzniklo:

a) $\log_z x = \log_z a + \log_z b + \log_z c$;

b) $\log_z x = \log_z a + \log_z b - \log_z c$;

c) $\log_z x = 3 \log_z a + 2 \log_z b + 1$;

d) $\log_z x = 3 \log_z a + (n + 3) \log_z b - 3$;

e) $\log_z x = a \log_z b + b \log_z a - \log_z b - \log_z a$;

f) $\log_z x = \dfrac{1}{2} \log_z a - \dfrac{n}{m} \log_z b$;

g) $\log_z x = \dfrac{3}{4} \log_z a + \dfrac{5}{6} \log_z b - \dfrac{1}{2} \log_z c$?

54. a) $\log_z x = \dfrac{2}{3} (\log_z a + \log_z b) + \dfrac{1}{2} \log_z ab - 4 - \log_z 5$;

b) $\log_z x = 2 \log_z (a - 2) + 3 \log_z (a + 2) - 2 \log_z (a^2 - 4)$;

c) $\log_z x = \log_z (a - b) + \dfrac{1}{3} (2 \log_z a + 3 \log_z b)$;

d) $\log_z x = \log_z a + n \log_z (a + b) - \dfrac{1}{n} \log_z (a - b)$;

e) $\log_z x = \log_z b - \dfrac{1}{m} \log_z (b - c) + m \log_z (b + c)$.

***55.** a) $\log_z x = \dfrac{1}{4} \log_z a + \log_z \log_z b$;

b) $\log_z x = y(\log_z a + \log_z \log_z b)$;

c) $\log_z x = y \log_z a + \frac{1}{4} \log_z \log_z b$;

d) $\log_z x = n \log_z n + \log_z \log_z n$.

56. Platí: Je-li $\log_z a = \log_z b$, $a > 0$, $b > 0$, $z > 0$, $z \neq 1$, je $a = b$.
Na základě platnosti uvedeného vztahu dokažte:

$$\frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt[12]{a^5},\ a > 0.$$

Řešení

Logaritmujeme-li výraz $x = \frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a\sqrt{a}}}$ v soustavě o základu z, dostaneme:

$$\log_z x = \frac{1}{3}\log_z a + \frac{5}{6}\log_z a - \frac{1}{2}\log_z a - \frac{1}{4}\log_z a = \frac{4}{12}\log_z a +$$
$$+ \frac{10}{12}\log_z a - \frac{6}{12}\log_z a - \frac{3}{12}\log_z a = \frac{5}{12}\log_z a = \log_z a^{\frac{5}{12}} =$$
$$= \log_z \sqrt[12]{a^5}.$$

Je tedy $\log_z \frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a\sqrt{a}}} = \log_z \sqrt[12]{a^5}$, odkud je $\frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt[12]{a^5},\ a > 0$.

Závěr: Daný vztah platí.

57. Dokažte, že platí:

a) $\frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt[12]{a};\ a > 0;$

b) $\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{ab}} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}},\ a > 0, b > 0;$

c) $\frac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}} = \sqrt[72]{a^{31}},\ a > 0.$

[Návod: využijte postupu, který je uveden v úloze 56.]

58. Platí-li vztah $x = \frac{1}{y}$, je $\log_z x = -\log_z y$, odkud $x = -y$. Kde je chyba?

59. Platí-li vztah $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$, je $\log_z \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \log_z \left(\frac{1}{2}\right)^3$, odkud

$2 \log_z \frac{1}{2} > 3 \log_z \frac{1}{2}$ a $2 > 3$. Kde je chyba?

60. Platí-li vztah $2 \log_z \frac{1}{2} > \log_z \frac{1}{2}$, což se dá psát ve tvaru

$\log_z \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \log_z \frac{1}{2}$, je $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$. Kde je chyba?

61. Určete:
a) log 10; b) log 100; c) log 1 000; d) log 1 000 000; e) log 1 000 000 000;
f) log 0, 1; g) log 0, 01; h) log 0, 001; i) log 0, 000 001; j) log (−10);
k) log 1.

62. Vyhledejte z tabulek hodnotu log 2 a stanovte hodnoty:
a) log 20; b) log 2 000; c) log 0,2; d) log 0, 002; e) log (−2).

63. Co můžeme říci o číslech, jejichž logaritmy mají:
a) stejnou charakteristiku;
b) stejnou mantisu?

64. Určete ze čtyřmístných tabulek logaritmy čísel:
a) 40, 85; 4, 132; 0, 735 2; c) 2, 356; 15, 94; 3 528;
b) 74, 64; 128, 5; 0, 392 5; d) 88, 64; 328, 6; 0, 359 6;
e) 3 590; 0, 008 793; 0, 000 006 954;
f) 326, 586; 7 396 524, 5; 0, 012 345 678 9;
g) 10, 325; 106, 56; 0, 110 45.

65. Určete z pětimístných tabulek logaritmy čísel:
a) 50 234; b) 0, 170 06; c) 269, 65; d) 4, 998 7;
e) 0, 007 249 7; f) 113 700; g) 24, 317.

66. Víte-li, že log 3 = 0,477 12, určete čísla, jejichž logaritmy mají hodnoty:
a) 1, 47712; b) 3, 477 12; c) 0, 477 12 − 1; d) 0, 477 12 − 3;
e) −0, 522 88; f) −1, 522 88; g) −2, 522 88.

67. Z čtyřmístných logaritmických tabulek vyhledejte čísla k těmto logaritmům:

a) 0, 6191; b) 0, 7226; c) 1, 9823; d) 3, 3927;
e) 6, 4409; f) 0, 5900; g) 1, 9928; h) 2, 0338;
i) 5, 6582; j) 0, 4985 − 2; k) 2, 9452; l) 0, 8640 − 1.

68. Z pětimístných tabulek vyhledejte čísla k těmto logaritmům:

a) $0,98\,722$; b) $2,28\,870$; c) $0,59\,384 - 1$;
d) $3,77\,122$; e) $0,73\,276$; f) $1,95\,097$;
g) $0,89\,799$; h) $3,86\,336$; i) $0,75\,300 - 1$;
j) $0,64\,401 - 1$; k) $0,53\,080 - 3$.

69. Vyhledejte čísla k těmto pětimístným logaritmům:

a) $-0,31\,562$; b) $-1,46\,208$; c) $-2,30\,567$.

70. Z pětimístných logaritmických tabulek určete

a) $\log \log 2$; b) $\log \log 3$.

71. Z pětimístných logaritmických tabulek určete

a) $\log \pi$; b) $\log \dfrac{1}{\pi}$.

72. Z pětimístných logaritmických tabulek určete log e, kde e je základ přirozených logaritmů.

73. Určete přirozený logaritmus čísla 10.
[Návod: Využijte vztahu $\log_e 10 \cdot \log_{10} e = 1$.]

74. Určete přirozený logaritmus čísla 2.

$$\left[\text{Návod: Využijte vztahu } \log_e 2 = \frac{\log 2}{\log e}.\right]$$

75. Existují iracionální čísla, jejichž dekadické logaritmy jsou racionální? Uveďte některá z nich.

76. Dokažte, že log 3 je číslo iracionální.

[Návod: Předpokládejte, že log 3 je racionální číslo $\dfrac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená čísla a snažte se dospět ke sporu.]

77. Jak se změní dekadický logaritmus čísla a a) zvětší-li se toto číslo n krát, b) zmenší-li se toto číslo n krát?
V obou případech je $a > 0$, $n > 1$.

3. UŽITÍ LOGARITMŮ K VÝPOČTŮM

78. Víte-li, že $\log 2 = 0,30\,103$ a $\log 3 = 0,47\,712$, vypočítejte log 4, log 8, log 16, log 6 a log 12. Výsledky srovnejte s hodnotami uvedenými v tabulkách.

79. Víte-li, že $\log 2 = 0{,}30\,103$, vypočítejte $\log 5$.
[Návod: $5 = 10 : 2$.]

80. Víte-li, že $\log 5 = 0{,}69\,897$, vypočítejte $\log \frac{1}{2}$, $\log \frac{1}{4}$, $\log 500$, $\log 25$ a $\log 1{,}25$.

81. Užitím tabulek pětimístných logaritmů vypočítejte:

a) $2{,}64 \cdot 38{,}9$; b) $1\,256 \cdot 27{,}3$; c) $44{,}53 \cdot 0{,}053\,6$;
d) $2{,}356\,8 \cdot 19{,}64 \cdot 256{,}12$;
e) $0{,}025\,3 \cdot 0{,}159\,42 \cdot 0{,}003\,56$; f) $726 : 15{,}8$;
g) $796{,}8 : 0{,}328$; h) $8{,}96 : 25\,432$;
i) $1{,}955\,4 : 465$; j) $1 : 28{,}356$.

82. Užitím tabulek pětimístných logaritmů vypočítejte:

a) $39{,}15 \cdot 14{,}69 + 0{,}596 \cdot 326{,}81$;
b) $6{,}864 \cdot 29{,}165 - 17{,}9 \cdot 5{,}280\,1$;
c) $7\,468 \cdot 972{,}5 - 23{,}65 : 0{,}94$.

83. Užitím tabulek pětimístných logaritmů vypočítejte:

a) $\dfrac{23{,}15 \cdot 9{,}24}{13{,}9}$; b) $\dfrac{2{,}724 \cdot 8{,}362}{0{,}054 \cdot 3{,}71}$; c) $\dfrac{0{,}695\,8 \cdot \pi}{28{,}3 \cdot 0{,}459\,82}$;

d) $(37{,}4 \cdot 0{,}038)^4$; e) $\left(\dfrac{43{,}8 \cdot 15{,}48}{29{,}455}\right)^2$; f) $\sqrt[3]{97{,}34}$;

g) $2{,}45\sqrt{0{,}082\,82}$; h) $\dfrac{\sqrt{1\,125 \cdot 1\,188}}{45{,}3}$; i) $\dfrac{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{135}}{\sqrt{73\,567}}$;

j) $\sqrt{\dfrac{25{,}4 \cdot 7{,}28^3}{148{,}53}}$; k) $\dfrac{55{,}431}{\sqrt{2{,}96} \cdot \sqrt[3]{0{,}796}}$; l) $\sqrt[3]{\dfrac{17{,}2^2 \cdot 16{,}421}{8{,}4^4}}$.

84. Užitím tabulek čtyřmístných logaritmů vypočítejte:

a) $\dfrac{4{,}695\,0 \cdot 7{,}82}{12{,}35 \cdot 0{,}598}$; b) $\dfrac{4{,}985 \cdot 0{,}981\,4 \cdot 44{,}15}{83{,}5 \cdot 14{,}95 \cdot 0{,}957}$; c) $\left(\dfrac{0{,}35}{1{,}25}\right)^2$;

d) $\left(\dfrac{17{,}950 \cdot 42{,}28}{832{,}50}\right)^3$; e) $\dfrac{3{,}38^2 \cdot 64{,}5^3}{798}$; f) $\sqrt[3]{\dfrac{425}{127{,}4}}$;

g) $\sqrt{4{,}28 \cdot 7{,}25^3}$; h) $17{,}960\sqrt{0{,}198}$; i) $\dfrac{0{,}956 \cdot \sqrt{2}}{4{,}38^2}$;

j) $\dfrac{28{,}4}{\sqrt{0{,}596}}$.

85. Užitím tabulek pětimístných logaritmů vypočítejte:

a) $\sqrt{2\sqrt{2}}$; b) $\sqrt{24{,}32^2 - 18{,}48^2}$; c) $\sqrt{3{,}718^3 - 3{,}572^2}$;

d) $\sqrt[4]{124^4 + 312^4}$; e) $\sqrt[3]{6{,}43^3 - 24\sqrt{5}}$; f) $\sqrt{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}}$;

g) $\sqrt[5]{\dfrac{47{,}65 + 7{,}8 \,.\, \sqrt[3]{656{,}8^2}}{568{,}47}}$.

86. Užitím tabulek čtyřmístných logaritmů vypočítejte:

a) $\sqrt{3 \,.\, \sqrt[3]{3 \,.\, \sqrt[4]{3}}}$; b) $\sqrt[3]{17{,}9^2 - 8{,}24^3}$;

c) $\sqrt{15{,}3^2 - \dfrac{23{,}5^2}{\pi}}$; d) $\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$.

Užitím pětimístných nebo čtyřmístných logaritmů počítejte příklady 10 až 44. Výsledky zaokrouhlete.

87. Vypočtěte geometrický průměr čísel $a = 13{,}5$ a $b = 8{,}64$. Určete tento průměr také konstruktivně, jsou-li a, b délky úseček.

88. Vypočtěte x z úměry $a : b = c : x$ (čtvrtá měř. úměrná), je-li $a = 15{,}9$, $b = 24{,}5$, $c = 8{,}85$. Zjistěte také x konstruktivně, jsou-li a, b, c délky úseček.

89. Jaká je rozloha obdélníkové zahrady dlouhé 33,5 m a široké 12,8 m?

90. Jak velký je obsah trojúhelníka, jehož základna má délku 23,9 cm a výšku 18,8 cm?

91. Jak velká je přepona pravoúhlého trojúhelníka, jehož jedna odvěsna má délku 15,9 cm a druhá 24,7 cm?

92. Jak velká je výška v pravoúhlého trojúhelníka, vytíná-li na přeponě úseky délek $c_1 = 15{,}9$ cm a $c_2 = 22{,}4$ cm? Jak velký je jeho obsah P a jak dlouhé jsou jeho odvěsny? Řešte také konstruktivně.

93. Vypočtěte obsah P trojúhelníka, jehož strany mají délky $a = 83{,}5$ cm, $b = 68{,}4$ cm, $c = 78{,}6$ cm. Užijte Heronova vzorce

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ kde } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Vypočtěte též výšky v_a, v_b, v_c.

94. Určete obsah pravidelného šestiúhelníka, který je vepsán do kružnice o poloměru 5 cm.

95. Ke kružnici o poloměru $r = 8{,}65$ cm vedeme z daného bodu M tečnu délky $t = 18{,}2$ cm. Jakou vzdálenost má bod M od středu kružnice?

96. Vypočtěte:
a) délku kružnice;
b) obsah kruhu o poloměru $r = 15{,}2$ cm.

97. Vypočtěte průměr rovníku, který je o 43,6 km delší než průměr poledníkové kružnice, víte-li, že zemský kvadrant měří 9 982,5 km.

98. Jakou rychlostí se pohybuje při otáčení zeměkoule ($r = 6\,370$ km) bod na jejím povrchu
a) na rovníku,
b) v severní šířce Prahy (severní šířka $\varphi = 50°$)?

99. Vypočtěte obsah P mezikruží o poloměrech $r_1 = 13{,}9$ cm a $r_2 = 6{,}3$ cm.

100. Stanovte hmotnost plechu tvaru mezikruží o poloměrech $r_1 = 12{,}6$ dm, $r_2 = 5{,}8$ dm, má-li 1 dm^2 plechu hmotnost 0,19 kg.

101. Jaká je hmotnost železné krychle ($\varrho = 7{,}7$ g/cm^3) o hraně $a = 8{,}55$ cm?

102. Jakou hmotnost má vzduch ve vaší učebně, je-li jeho hustota 1,293 kg/m^3?

103. Určete hranu pravidelného čtyřstěnu, jehož povrch je $P = 88{,}4$ cm^2.

104. Litrová nádoba má tvar rovnostranného válce (tj. průměr podstavy je roven tělesové výšce). Určete rozměry nádoby.

105. Jaký by byl průměr drátu trolejového vedení s kruhovým průřezem, kterým má procházet proud 625 A, počítá-li se se zatížením 2 A na 1 mm^2?

106. Jaká je hmotnost (v tunách) měděného trolejového vedení na elektrifikované dvoukolejové trati z Prahy do Košic (685 km, nepočítáme-li více vedení ve stanicích), je-li průměr troleje 13,82 mm?

107. Jaká je hmotnost železného plynového potrubí 30 km dlouhého, jehož podstavou je mezikruží ($r_1 = 22$ cm, $r_2 = 21{,}5$ cm), je-li hustota litiny $\varrho = 7{,}45$ g/cm^3?

108. Určete objem V rotačního kužele, je-li poloměr podstavy $r = 5{,}98$ cm a výška tělesa $v = 12{,}5$ cm.

$$\left(V = \frac{1}{3}\,\pi r^2 v.\right)$$

109. Jaké množství plechu (v tunách) 5 mm silného bylo třeba na pokrytí kostry kulového plynojemu o průměru 10 m? (Hustota plechu $\varrho = 7{,}5$ g/cm^3.)

110. Určete povrch a objem Země, považujete-li ji za kouli o poloměru $r = 6\,371$ km.

111. Vypočítejte objem Země, kterou pokládáte za zploštělý rotační elipsoid o poloosách $a = 6\,378$ km a $b = 6\,356$ km.

$\left(\text{Objem takového tělesa se počítá podle vzorce } V = \frac{4}{3}\pi a^2 b\,.\right)$

112. Těleso vyvážíme na vzduchu závažím 12, 96 g a ve vodě závažím 11,22 g. Určete hustotu látky, z níž je vyrobeno.

113. Jakou dráhu proběhne těleso padající volným pádem ve vzduchoprázdném prostoru za 1,2 s?

114. Z jaké výše padá těleso ve vzduchoprázdnu po dobu $t = 0{,}8$ s?

115. Za jakou dobu urazí světlo ($c = 299\,000$ km/s) dráhu ze Slunce na Zemi ($s = 149\,504\,201$ km)?

116. Rameno síly dvojzvratné páky je dlouhé 45,8 cm, rameno břemena 27,6 cm. Jaké břemeno udržíme v rovnováze silou 12,5 kp?

117. Auto s hmotností 960 kg ujede dráhu dlouhou 1,5 km (podle mapy) o stoupání 6 $^0/_0$ (tj. stoupnutí šesti dílků na vodorovném úseku 100 dílků) za 3 minuty.

a) Jakou práci (v J) musí celkem motor vykonat?

b) Jaký musí být motor? (Výkon v kW.)

118. Jakou tlakovou silou působí těleso s hmotností 25 kg na nakloněnou rovinu výšky 3,75 m a délky ve vodorovném směru 3,75 m?

119. Jakou silou

a) ve směru vodorovném,

b) ve směru roviny udržíme v rovnováze těleso s hmotností 12,5 kg na nakloněné rovině výšky 60 cm a délky ve vodorovném směru 1,25 m?

120. Jak se liší délky kolejnice při teplotách

$t_1 = -10$ °C a $t_2 = 30$ °C, je-li při $t_0 = 0$ °C její délka $l_0 = 25$ m?

[$\alpha = 12 \,.\, 10^{-6}\,\text{deg}^{-1}$, $l_t = l_0\,(1 + \alpha t)$.]

121. Závislost rychlosti šíření zvuku na teplotě je udána vzorcem

$$c = 331\sqrt{1 + 0{,}004t}\ \text{ms}^{-1}\,.$$

Jakou rychlostí se šíří zvuk při těchto teplotách: a) 0 °C; b) 15 °C; c) 25 °C?

4. VÝPOČTY POMOCÍ LOGARITMICKÉHO PRAVÍTKA

122. Vypočítejte:

a) $1{,}68 \cdot 3{,}85$; b) $2{,}62 \cdot 3{,}15$; c) $0{,}144 \cdot 52{,}5$;
d) $24{,}6 \cdot 3{,}28$; e) $8{,}2 \cdot 3{,}94$; f) $425 \cdot 52$;
g) $7\,250 \cdot 282$; h) $2{,}74^2$ jako součin; i) $5{,}25^2$ jako součin;
j) $2{,}26 \cdot 3{,}32 \cdot 4{,}35$; k) $2\pi \cdot 4{,}85$; l) $\pi \cdot 2{,}2^2$.

123. Vypočítejte:

a) $8 : 4$; b) $9{,}2 : 3{,}4$; c) $5{,}45 : 1{,}74$; d) $4{,}25 : 7{,}05$;
e) $39{,}8 : 72{,}5$; f) $0{,}356 : 4{,}54$; g) $7{,}25 : 0{,}328$; h) $7{,}45 : \pi$;
i) $0{,}356 : 0{,}735$; j) $\pi : 2$; k) $5\,480 : 0{,}842$.

124. Vypočítejte:

a) $\dfrac{8{,}3 \cdot 1{,}86}{3{,}7}$; b) $\dfrac{7{,}64 \cdot 3{,}22}{5{,}25}$; c) $\dfrac{86{,}5 \cdot 28{,}4}{5{,}35}$;

d) $\dfrac{384 \cdot 5{,}5}{8{,}2}$; e) $\dfrac{52{,}5 \cdot 0{,}64}{32{,}4}$; f) $\dfrac{3{,}56 \cdot 44{,}2}{2{,}64 \cdot 0{,}735}$.

125. Vypočítejte:

a) $1{,}92^2$; b) $5{,}25^2$; c) $7{,}23^2$; d) $22{,}1^2$; e) $48{,}5^2$;
f) 358^2; g) $0{,}58^2$; h) $\sqrt{4{,}25}$; i) $\sqrt{42{,}5}$; j) $\sqrt{425}$;
k) $\sqrt{0{,}425}$; l) $\sqrt{85}$; m) $\sqrt{12{,}6}$; n) $\sqrt{0{,}38}$; o) $\sqrt{0{,}0756}$.

126. a) $(2{,}35 \cdot 3{,}25)^2$; b) $(0{,}46 \cdot 2{,}08)^2$; c) $(6{,}3 \cdot 3{,}8)^2$;

d) $2{,}8^2 \cdot 3{,}1^2$; e) $\left(\dfrac{8{,}33}{3{,}58}\right)^2$; f) $\left(\dfrac{0{,}84}{1{,}23}\right)^2$;

g) $\dfrac{13{,}2^2 \cdot 6{,}4^2}{0{,}76^2}$; h) $\sqrt{2{,}7 \cdot 6{,}4}$; i) $\sqrt{62{,}5 \cdot 0{,}37}$;

j) $\sqrt{\dfrac{39{,}2}{21{,}4}}$.

Při řešení příkladů 127 až 146 užijte logaritmického pravítka.

127. Cyklista jede průměrnou rychlostí 15,8 km/h; kolik ujede za $2\frac{1}{4}$ hodiny?

128. Jakou hmotnost má fůra hlíny objemu 1,35 m³, je-li hustota hlíny 1,6 g/cm³?

129. Jakou práci vykonal motor jeřábu, vyzdvihl-li břemeno 85 kg do výše 18,5 m?

130. Kolik m³ hlíny je nutno odkopat na základy stavby 25,6 m dlouhé a 10,5 m široké, je-li hloubka výkopu 1,4 m?

131. Ve třídě o 28 žácích jsou 3 žáci s vyznamenáním, 2 propadající a 1 je neklasifikován. Vyjádřete v procentech.

132. Jak dlouhá je strana čtvercového náměstí v Č. Budějovicích, je-li jeho obsah 1 ha 78 a 28 m^2?

133. Vypočtěte délku úhlopříčky stránky vašeho sešitu, jehož šířku a délku zjistíte odměřením.

134. Jakou postupnou rychlostí se pohybuje bod na obvodu kola o poloměru $r = 18$ cm, jehož frekvence otáčení je 95/min?

135. Jakou řeznou rychlostí je na soustruhu opracováván hřídel $\varnothing\ d = 85$ mm při frekvenci otáčení 325/min?

136. Sestavte tabulku obsahů kruhů pro poloměry $r = 1$; 1,5; 2; 2,5; atd. až po 10 cm.

137. Jakou hmotnost má ocelová tyč ($\varrho = 7{,}8$ g/cm^3) délky 8,5 m, má-li obdélníkový průřez s rozměry 14 mm a 22 mm?

138. Na dvojzvratné páce je rameno síly 68,4 cm, rameno břemena 15,5 cm a břemeno má hmotnost $m = 65{,}4$ kg. Jakou silou je udržíme v rovnováze?

139. Jaký výkon lze získat využitím vodopádu výšky $h = 75$ m při průtoku 300 m^3 vody za sekundu?

140. Sestavte tabulku drah volného pádu pro dobu t od 0 do 10 s.

141. Jak vysoká je věž, padá-li z ní kámen 2,7 s?

142. Jak dlouho by padal kámen z výše 61,5 m, kdybychom mohli zanedbat odpor vzduchu?

143. Jaké kinetické energie nabude cihla ($m = 4{,}5$ kg), padá-li z výše 24 m? ($W_k = mgh$.)

144. Jaká je doba T kmitu matematického kyvadla délky $l = 0{,}84$ m, platí-li vzorec $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$?

145. Jaké osvětlení vyvolá žárovka se svítivostí $I = 60$ cd na rovinné ploše vzdálené $r = 1{,}5$ m v místě paty kolmice $\left(E = \dfrac{I}{r^2}\right)$?

146. Sestavte tabulku trvalého proudového zatížení měděných drátů s průměry $d = 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3$; atd., . . ., 1; 1,2; 1,5; 2 mm elektrickým proudem, je-li povolená proudová hustota 2 A/mm^2.

$$\left(\text{Výsledný vzorec: } I = \frac{\pi J}{4} \cdot d^2.\right)$$

147. Příklady 89, 90, 91, 99 z předešlého článku řešte pomocí logaritmického pravítka.

5. ROVNICE EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÉ

148. Řešte rovnice:

a) $2^x = 64$; b) $4^x = \frac{1}{64}$; c) $10^x = 0{,}01$; d) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = \frac{1}{343}$;

e) $(0{,}1)^x = 0{,}000\,1$; f) $4^{3x-2} = 256$.

149. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{81}{256}$; b) $2^{-x} = \frac{1}{8}$; c) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^3$;

d) $(-2)^x = 64$; e) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^8$; f) $\left(1 - \frac{5}{9}\right)^{\frac{2}{3-2x}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{x-5}}$;

g) $\sqrt[x+2]{27} = \sqrt[x+1]{9}$; h) $\sqrt[8]{2^{2x-3}} = \sqrt[7]{(0{,}5)^{3-x}}$.

150. a) $2^{3x+1} \cdot 2^{2x+3} = 2^{5x+1} \cdot 2^{x+2}$; b) $2^{3x} \cdot 4^{3x-3} = 8^{2x+1}$;

c) $\sqrt[x]{3^{x+3m}} \cdot \sqrt[x]{3^{x-3m}} = 27$; d) $(0{,}25)^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$;

e) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$;

f) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$;

g) $4 \cdot 3^{x+1} - 72 = 3^{x+2} + 3^{x-1}$.

151. a) $2^x = 100$; b) $2^{-x} = 1{,}8$; c) $4^{x+4} = 1\,000$; d) $x^x = x$;

e) $3^{5x} = 5^{3x}$; f) $10^{5-3x} = 2^{7-2x}$;

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x = \frac{1}{96}$;

h) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}$;

i) $4^x + 3^{x+4} = 4^{x+3} - 3^{x+2}$.

152. a) $\left(\frac{5}{12}\right)^{\frac{1}{x}-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}+2}$; b) $a^{x-1} + b \cdot a^{x+1} = a \cdot b^{x-2} + a^3 \cdot b^{x-1}$.

153. $4\sqrt{2^{5-7x}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4^{3-5x}}$.

154. $3 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x+2} = 405 \cdot 2^{x-1}$.

155. a) $5^{x^2-5x+10} = 625$; b) $10^{x^2+2x+4} = 1\,000^{3x-2}$;

c) $5^{x^2 - \frac{11}{2}x + 3} = \sqrt{5}$.

156. $\frac{64}{25} \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{3}{x-1}} = \left(\frac{125}{512}\right)^{3-x}$

$\boxed{\textbf{157.}}$ Řešte rovnici $3(9^{2x} + 1) = 9^{x+2} + 9^{x-1}$.

Řešení

Danou rovnici upravujme postupně takto:

$$3 \cdot 9^{2x} + 3 = 9^2 \cdot 9^x + \frac{9^x}{9},$$

$$27 \cdot 9^{2x} + 27 = 729 \cdot 9^x + 9^x,$$

$$27 \cdot 9^{2x} - 730 \cdot 9^x + 27 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Jestliže $9^x = y$, je $9^{2x} = y^2$ a rovnice (1) má tvar

$27y^2 - 730y + 27 = 0$; kořeny této rovnice jsou $y_1 = 27$, $y_2 = \frac{1}{27}$.

Uvažujme dále dva případy:

a) $9^x = 27$, odkud $x = \frac{3}{2}$, b) $9^x = \frac{1}{27}$, odkud $x = -\frac{3}{2}$.

Zkouška:

a) Je-li $x = \frac{3}{2}$, pak je levá strana dané rovnice $L = 3 \cdot (9^3 + 1) =$ $= 3 \cdot (3^6 + 1) = 3^7 + 3$ a pravá strana dané rovnice $P = 9^{\frac{7}{2}} + 9^{\frac{1}{2}} =$ $= 3^7 + 3$. Je tedy $L = P$.

b) Je-li $x = \frac{3}{2}$, je $L = 3 \cdot (9^{-3} + 1) = 3 \cdot (3^{-6} + 1) = 3^{-5} + 3$ a

$P = 9^{\frac{1}{2}} + 9^{-\frac{5}{2}} = 3 + 3^{-5}$. Také tu je $L = P$.

Závěr: Daná rovnice má dvě řešení: $x_1 = \frac{3}{2}$ a $x_2 = -\frac{3}{2}$.

158. $16^{x-1} + 4(4^x - 384) = 0$.

159. $\sqrt[x]{81} - 8\left(\sqrt[2x]{81} - 2\right) = 1$.

160. $2^x \cdot 2^{3(x-1)} + 2^{1-x} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x = 1$.

161. $x^x - x^{-x} = 3\,(1 + x^{-x})$.

162. a) $\log x^3 - \log x^4 + \log x^5 = 8$; b) $\log x^3 + \frac{1}{2}\log x^2 + 7\log x^4 +$ $+ 64 = 0$;

c) $3\log x + \log x^4 - \log \sqrt[3]{x} = 5$;

d) $\frac{3}{5}\log \sqrt[3]{x^4} - \frac{5}{2}\log\frac{1}{x} = 11$;

e) $\frac{1}{2}\log\frac{x^7}{100} + \log\frac{100}{x^2} - \log x = 0$.

163. a) $\dfrac{2 + \log x}{\log x} - \dfrac{1}{2 - \log x} = 1$; b) $\log \dfrac{1 + x}{1 - x} = 2$.

164. a) $\log(4x + 6) - \log(2x - 1) = 1$;
b) $\log(x + 3) - \log 5 = \log(x - 3) - \log 2$;
c) $\log(x + 1) + \log(x - 1) - \log x = \log(x + 2)$;
d) $2 + \log 5x = \log(6x + 7) + \log 25$;
e) $\log(2x + 9) - 2\log x + \log(x - 4) = 2 - \log 50$.

165. a) $\log(x^2 - 1) - \log(x + 1) = 2$;
b) $\log \dfrac{2(3x - 1)}{x - 2} = 1$; c) $\dfrac{\log x}{1 - \log 2} = 2$;
d) $\dfrac{\log(x^2 + 7)}{\log(x + 7)} = 2$.

166. a) $2 \cdot \log 3x^2 + 3\log 4x^3 = 4\log 2x^2 + 4\log 6x$;
b) $\dfrac{\log \frac{5}{3}(x - 2)}{\log(x - 2)} = 2$.

167. a) $\log \sqrt{x + 4} - \log \sqrt{x - 4} = \log 12 - \log 4$;
b) $\log \sqrt{x + 1} + \log \sqrt{x - 1} = 2 - \log 2$.

168. a) $\log \left(\dfrac{a}{b}\right)^3 + \log \dfrac{bx^2}{a} = \log \dfrac{ax}{b^2} - \log \dfrac{b^2}{a}$; $a > 0, b > 0$; neznámá je x;
b) $\log a^2x + \log \dfrac{x}{ab^2} = \log \dfrac{a^2}{b} - \log \dfrac{bx^2}{a^3}$; $a > 0, b > 0$; neznámá je x.

$\boxed{\textbf{169.}}$ Řešte rovnici $\dfrac{\log 2x}{\log(4x - 15)} = 2$.

Řešení

Jelikož logaritmy mají jen čísla kladná a $\log 1 = 0$, může dané rovnici vyhovovat jen ten kořen x, pro který platí: $2x > 0$, $4x - 15 > 0$, $4x - 15 \neq 1$. Kořen dané rovnice musí být tedy větší než $\dfrac{15}{4}$ a různý od čísla 4.

Z dané rovnice plyne:
$\log 2x = 2\log(4x - 15)$,
$\log 2x = \log(4x - 15)^2$,

$2x = (4x - 15)^2$,

$2x = 16x^2 - 120x + 225$,

$16x^2 - 122x + 225 = 0$. .... (1)

Rovnice (1) má kořeny $x_1 = 4\frac{1}{2}$, $x_2 = 3\frac{1}{8}$, z nichž však jen kořen x_1 může být podle předpokladu kořenem dané rovnice.

Zkouška: $P = 2$; $L = \dfrac{\log 9}{\log(18-15)} = \dfrac{\log 9}{\log 3} = \dfrac{2\log 3}{\log 3} = 2$, $P = L$.

Závěr: Daná rovnice má jediný kořen $x = 4\frac{1}{2}$.

170. Řešte:

$$\log x - \frac{3}{\log x} = 2.$$

171. $\log(2x + 10) = 2\log(x + 1)$.

172. $\log\sqrt{3x - 2} + \log\sqrt{4x - 7} = \log 13$.

173. $1 + \log x^3 = \dfrac{10}{\log x}$.

174. $\log(x + 1) + \log(x - 1) - \log(x - 2) = \log 8$.

175. $n\log^2 x - (n^2 + 1)\log x + n = 0$; n je přirozené číslo.

176. a) $x^{\log x} = \sqrt[4]{10}$; b) $3^{\log 10x} = 81$; c) $3^{2\log x} = 729$;
d) $8^{2-\log x} = 0{,}125$; e) $15^{2\log x} = 3\,375$.

177. Určete všechna přirozená čísla x splňující rovnici $x^{3+4\log x} = 10 \,.\, x^6$.

178. Určete všechna racionální čísla x splňující rovnici $x^{\log x} + 10x^{-\log x} = 11$.

179. Určete všechna přirozená čísla x splňující rovnici $3 \,.\, 4^{\log x} - 25 \,.\, 2^{\log x} + 8 = 0$.

180. Určete všechna racionální čísla x splňující rovnici $x^{2\log x - 1} = 100x^2$.

181. Určete všechna přirozená čísla x splňující rovnici

$$x^{\log x} - 1 = 10\left(1 - \frac{1}{x^{\log x}}\right).$$

$\boxed{\textbf{182.}}$ Řešte soustavu: $xy = 400$, $x^{\log y} = 16$.

Řešení

Logaritmujeme-li obě strany každé z obou rovnic, dostaneme:

$\log x + \log y = \log 400 = 2 + 2\log 2$,

$\log y \,.\, \log x = \log 16 = 4\log 2$; $x > 0$, $y > 0$.

Po zavedení substituce $\log x = u$, $\log y = v$ má soustava tvar

$u + v = 2 + 2\log 2$,
$u \,.\, v = 4\log 2$

a řešení: a) $u = 2$, $v = 2\log 2 = \log 4$,
b) $u = 2\log 2 = \log 4$, $v = 2$.

Platí tedy: I. $\log x = 2$; $x = 100$; $\log y = \log 4$; $y = 4$; II. $\log x = \log 4$; $x = 4$; $\log x = 2$; $y = 100$.

Zkouška:

I. Je-li $x = 100$, $y = 4$, je $L_1 = 100 \,.\, 4$, $P_1 = 400$, takže $L_1 = P_1$; $L_2 = 100^{\log 4} = 16$, jelikož $\log L_2 = \log 4 \,.\, \log 100 = 2\log 4 = \log 4^2 = \log 16$, $P_2 = 16$, takže $L_2 = P_2$.

II. Je-li $x = 4$, $y = 100$, je $L_1 = 4 \,.\, 100$, $P_1 = 400$, takže $L_1 = P_1$; $L_2 = 4^{\log 100} = 4^2 = 16$, $P_2 = 16$, takže $L_2 = P_2$.

Závěr: Daná soustava má dvě řešení:
a) $x = 100, y = 4$;
b) $x = 4$, $y = 100$.

183. Řešte soustavu: $\log x + \log y = 5$,
$\log x - \log y = 3$.

184. $x^{y+1} = 125$,
$$\left(\frac{1}{x}\right)^{y-1} = \frac{1}{5}.$$

185. $\sqrt[4]{a^x} \,.\, \sqrt{a^y} = a^3\sqrt{a}$,
$\sqrt{a^{x-2}} \,.\, \sqrt[3]{a^{y+1}} = a^4 \,.\, \sqrt[3]{a}$; $a > 0$. Neznámé jsou x, y.

186. Určete všechny racionální kořeny soustavy rovnic:
$3^{\log x} + 2^{\log y} = 11$,
$3^{\log x} \,.\, 2^{\log y} = 18$.
[Návod: $3^{\log x} = u$, $2^{\log y} = v$.]

187. $\log x + \log y = 2$,
$2^{\log x} \,.\, 3^{\log y} = \sqrt{54}$.

188. $\log x + \log y = 5$,
$$\frac{2\log x}{\log y} - \frac{3\log y}{\log x} = 1.$$

***189.** $\sqrt[x-1]{8^{x+4}} = 2^{y+2}$,

$\sqrt[x+1]{9^{x+6}} = 3^{y-2}$.

$\boxed{\textbf{190.}}$ Pro která čísla x je splněna rovnice

$$\log_x 2 \,.\, \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2\,;\; x > 0,\; x \neq 1,\; x \neq \frac{1}{2},\; x \neq \frac{1}{4}\,?$$

Řešení

Jelikož platí vztah $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$, je možno danou rovnici upravit takto:

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{\log_2 4x},$$

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 2 + \log_2 x} = \frac{1}{\log_2 4 + \log_2 x},$$

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{1 + \log_2 x} = \frac{1}{2 + \log_2 x}.$$

Další úprava vede k rovnici

$2 + \log_2 x = \log_2 x + \log_2^2 x$,

odkud $\log_2^2 x = 2$

$\log_2 x = \pm \sqrt{2}$

$x_1 = 2^{\sqrt{2}}$, $x_2 = 2^{-\sqrt{2}}$.

Zkouška:

I. Je-li $x = 2^{\sqrt{2}}$, je $L = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1} = \dfrac{1}{2 + \sqrt{2}}$,

$P = \dfrac{1}{2 + \sqrt{2}}$, takže $L = P$.

II. Je-li $x = 2^{-\sqrt{2}}$, je $L = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{1 - \sqrt{2}} = \dfrac{1}{2 - \sqrt{2}}$,

$P = \dfrac{1}{2 - \sqrt{2}}$, takže $L = P$.

Závěr: Rovnici vyhovuje číslo $x_1 = 2^{\sqrt{2}}$ a číslo $x_2 = 2^{-\sqrt{2}}$.

***191.** Určete, která čísla x splňují rovnici

a) $\log_x 16 + \log_{2x} 4x^2 = 4$; b) $\log_{2x} 8 + \log_{2x} 36 = 3$;

c) $\log_{\frac{x^2}{2}} 2 + \log_4 x = 1$.

*192. Řešte soustavu rovnic:

a) $3^x \cdot 2^y = 576,$ $\quad$ b) $\log_2 (x + y) - \log_3 (x - y) = 1,$

$\log_2 (y - x) = 2;$ $\quad$ $x^2 - y^2 = 2.$

[Návod: Z druhé rovnice plyne: $x + y = \dfrac{2}{x - y}$.]

6. OPAKOVÁNÍ

193. Určete definiční obor funkcí $y = \log x^2$ a $y = 2 \log x$. Pro které hodnoty x platí $\log x^2 = 2 \log x$?

194. Dokažte, že platí vztah $1 - \left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)^2 = \dfrac{1}{y_1^2}$, je-li $y_1 = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$ a $y_2 = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$.

195. Najděte definiční obor funkce a funkci k ní inverzní:

a) $y = \dfrac{1}{\log (x - 2)}$;

b) $y^2 - 1 + \log_2 (x - 1) = 0$.

[Návod: Nejprve vyjádřete tuto funkci ve tvaru $y = f(x)$.]

196. Dokažte, že platí: $\log_z m + \log_z \dfrac{1}{m} = 0$; $m > 0$, $z > 0$, $z \neq 1$.

197. V logaritmické soustavě desítkové určete logaritmus výrazu x,

je-li a) $x = \dfrac{\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{b}}}{4\sqrt{cd}}$; $\quad$ b) $x = \dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt{b}}}{\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{ab}{2} \cdot \sqrt[3]{c^{-1}}}}$,

jsou-li a, b, c, d čísla kladná.

198. Logaritmováním kterého výrazu vzniklo:

a) $3 \log a + (5 - n) \log b - \log c - \log d$;

b) $\log a - \log 2 + \dfrac{2}{3} \log b - 2 \log c - 2 \log 3 + \dfrac{3}{2} \log d$?

199. Kolikamístné je číslo 2^{100}?

200. Dokažte, že platí $(3 \cdot \sqrt{3})^{\sqrt{3}} = (\sqrt{3})^{3\sqrt{3}}$; které desetinné číslo udává hodnotu těchto výrazů?

201. Je-li číslo $a > 0$, určete číslo x tak, aby se číslo a rovnalo svému logaritmu při základu x.

202. Nad místností, jejíž šířka je 3,2 m, je kruhová klenba 1,2 m vysoká. Jak velký je její poloměr? (K výpočtu užijte logaritmické pravítko.)

203. Kouli lze těsně vložit do krabice krychlového tvaru. O kolik procent je objem krabice větší než objem koule?

***204.** Dokažte, že platí:

$\log \log \log 10^{10^{np}} = \log n + \log p \,;\, n > 0 \,,\, p > 0 \,.$

[Návod: $\log 10^{10^{np}} = 10^{np}$.]

***205.** Dokažte, že $\log_z \dfrac{a+b}{3} = \dfrac{1}{2} (\log_z a + \log_z b)$, je-li $a^2 + b^2 = 7\,ab$,

$a > 0, b > 0, z > 0, z \neq 1$.

$\left[\text{Návod: } a^2 + b^2 + 2\,ab = 9\,ab \,;\, \left(\dfrac{a+b}{3}\right)^2 = ab \,.\right]$

***206.** Zvětší-li se číslo x o číslo h, zvětší se jeho dekadický logaritmus o $\log\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)$. Dokažte to.

***207.** Zvětší-li se dekadický logaritmus čísla x o číslo m, zvětší se číslo x o $x(10m - 1)$. Dokažte.

208. Řešte rovnici $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\dfrac{27}{8}\right)^{x-1} = \dfrac{2}{3}$.

209. $\log(x + 13) - \log(x - 3) = 1 - \log 2$.

210. $6^{x+1} + 6^{1-x} = 13$.

211. $9^{x-1} + 7 = 4(3^{x-1} + 1)$.

212. Určete všechna přirozená čísla x, která splňují rovnici $\log x^{2 \log \sqrt{x}} + \log x^{-2} = 3$.

***213.** Určete všechna racionální čísla x, která splňují rovnici

$4^x - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

***214.** Řešte rovnice:

a) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$;

b) $\log_2 (x - 1)^2 - \log_{0,5} (x - 1) = 9$.

215. Při kterém základě z je $\log_z 216$ o 3 větší než $\log_z 64$? Úlohu zobecněte.

***216.** Určete čísla x, která splňují rovnici

$$\log_x 8 - \log_{2x} 8 = \frac{3}{2}.$$

***217.** Řešte soustavy rovnic:

a) $2^{\frac{x-y}{2}} : 2^{\frac{x-y}{4}} = 8,$
$3^{\log(2y-x)} = 1;$

b) $2\log_y x - 3\log_x y = 1,$
$xy = 100\,000.$

$$\left[\text{Návod: } \log_x y = \frac{1}{\log_y x}.\right]$$

***218.** Řešte soustavu $\log_x \log_2 \log_x y = 0,$
$\log_y 9 = 1.$

***219.** $\log_5 x + y = 7,$
$x^y = 5^{12}.$

***220.** Pro která čísla x je splněna nerovnost:
$\log_2 x + \log_x 2 + 2 \leqq 0,\ x > 0,\ x \neq 1$?

***221.** $\log_a x + \log_a (x+1) < \log_a (2x+6);\ a > 0, a \neq 1.$

***222.** Která čísla x splňují nerovnost
$x^{\log_3 x + 1} > 9x,\ x > 0$?

***223.** Dokažte bez užití tabulek, že platí:

$$\log_2 \pi + \log_4 \pi < \frac{5}{2}.$$

[Návod: $\log_2 \pi = 2 \log_4 \pi$.]

VIII. VEKTORY A KOMPLEXNÍ ČÍSLA

I. VEKTORY

1. Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ se středem S v počátku soustavy souřadnic Sxy. Dokažte, že: a) $\mathbf{BC} = \mathbf{FE}$; b) $\mathbf{BA} = \mathbf{DE}$; c) vektory $\mathbf{SA}$ a $\mathbf{SD}$, $\mathbf{CD}$ a $\mathbf{FA}$ jsou opačné. Která jsou další umístění téhož vektoru $\mathbf{AB}$?

2. Posuňte obrazec z úlohy 1 o: a) $\mathbf{v}$ do polohy A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1; b) $-\mathbf{v}$ do polohy $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ ve směru osy prvního a třetího kvadrantu. Co platí o umístění a velikosti vektorů: α) $\mathbf{AA}_1$, $\mathbf{BB}_1$, $\mathbf{CC}_1$: β) $\mathbf{AA}_2$, $\mathbf{BB}_2$, $\mathbf{CC}_2$; γ) $\mathbf{C_1C_2}$, $\mathbf{D_1D_2}$, $\mathbf{F_1F_2}$? Jaké jsou vektory $\mathbf{CD}$ a $\mathbf{FA}$, $\mathbf{CC}_2$ a $\mathbf{BF}_2$, $\mathbf{BB}_1$ a $\mathbf{DD}_2$, $\mathbf{CC}_1$ a $\mathbf{BF}_2$?

3. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, $AB = 2CD$. Strana AB je rovnoběžná se stranou CD. a) Co platí o velikostech vektorů $\mathbf{AD}$, $\mathbf{BC}$. b) Platí $\mathbf{AD} = \mathbf{BC}$?

4. V soustavě souřadnic Pxy zvolte libovolný nenulový vektor $\mathbf{PM}$, kde $M \equiv (a_1, a_2)$. Které souřadnice má vektor, který je k vektoru $\mathbf{PM}$ souměrně sdružený podle: a) osy x; b) osy y; c) počátku; d) osy prvního a třetího kvadrantu.

5. V soustavě souřadnic Pxy jsou dány vektory $\mathbf{PM}$ a $\mathbf{PN}$. Sestrojte vektor $\mathbf{PM} + \mathbf{PN}$ i $\mathbf{PM} - \mathbf{PN}$.

6. Cyklista jede za bezvětří rychlostí 40 km/h, což je největší rychlost, kterou může vyvinout. Jaká je jeho rychlost, jede-li: a) proti větru; b) po větru, jehož rychlost je 1 m/s?

7. Z úlohy 1 a 2 sestrojte výsledný vektor: a) $\mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CD}$; b) $\mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CD} + \mathbf{DE} + \mathbf{EF} + \mathbf{FA}$; c) $\mathbf{AD} + \mathbf{DE} + \mathbf{EF} + \mathbf{FA}$; d) $\mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{B_1A_1} + \mathbf{C_2B_2}$.

8. Je dán kosočtverec o středu S. Dokažte, že platí: a) $\mathbf{AB} + \mathbf{DC} + \mathbf{BD} = \mathbf{AC}$; b) $\mathbf{AD} + \mathbf{DC} - \mathbf{AC} = \mathbf{0}$; c) $\mathbf{AB} + \mathbf{BS} + \mathbf{SC} = \mathbf{AD} - \mathbf{CD}$.

9. Helikoptéra letí za bezvětří směrem jižním rychlostí $v = 60$ km/h. Jakou rychlostí a kterým směrem by letěla při západním větru, jehož rychlost je 5 m/s?

10. Na těleso T působí v jednom bodě dvě stejně velké síly 50 N. Určete graficky velikost výsledného vektoru $\mathbf{R}$, svírají-li obě dané síly úhel 60°. [Jeden z obou uvažovaných vektorů umístěte do kladné poloosy x soustavy Pxy. Jaký úhel svírá výsledný vektor s osou x? (Směrový úhel.)]

11. Loď se plaví po řece ve směru kolmém na tok vody rychlostí 16,5 km/h. Jakou rychlost má vodní proud, je-li rychlost lodi v klidné vodě 18 km/h?

12. Na těleso T působí v jednom bodě tři stejně velké síly, jejichž vektory ležící v jedné rovině svírají mezi sebou úhly 120°. Dokažte, že výslednice všech tří sil je nulový vektor.

13. Letadlo letí za bezvětří rychlostí 800 km/h. Jaká je jeho cestovní rychlost při kursu severním (letí k severu), je-li rychlost větru 15 m/s směrem západním? Jaký úhel svírá přitom osa letounu se směrem jih-sever?

***14.** Na dvou ocelových stejně dlouhých lanech je zavěšeno těleso váhy 8 000 kp. Jaký musí být průřez lan, má-li každé délku 5 m, jsou-li závěsy ve stejné výšce, je-li vzdálenost závěsů 6 m a dovolené namáhání v tahu 40 kp/mm²?

15. Velikosti tří vektorů $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{AB}$ jsou délky stran trojúhelníka ABC. Pomocí $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ vyjádřete vektory $\boldsymbol{AM}$, $\boldsymbol{BN}$, $\boldsymbol{CP}$, kde M, N, P jsou středy stran BC, AC, AB.

16. Vyjádřete těžnice trojúhelníka z úlohy 15 pomocí vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

17. Ze středu S šestiúhelníka z úlohy 1 působí ve směrech $\boldsymbol{PA}, \boldsymbol{PB}, \ldots, \boldsymbol{PF}$ stejně velké síly. Určete velikost jejich výslednice.

18. V soustavě souřadnic Pxy sestrojte vektory:
$\boldsymbol{PK}$, $\boldsymbol{PQ}$, $\boldsymbol{PR}$, $\boldsymbol{PM}$, $\boldsymbol{PN}$, $\boldsymbol{PU}$, $\boldsymbol{PZ}$, je-li $K \equiv (-2, 5)$, $Q \equiv (6, 0)$, $R \equiv (2, -5)$, $M \equiv (\sqrt{2}, 3)$, $N \equiv (-3\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $U \equiv (-6, 0)$, $Z \equiv (4, \sqrt{5})$. Které z nich jsou opačné? [Návod: $\sqrt{2}$ je velikost úhlopříčky čtverce, jehož strana má délku 1; $\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$.]

19. Je dán vektor v základní poloze: a) $\boldsymbol{PA}_1$; b) $\boldsymbol{PA}_2$, kde $A_1 \equiv (2, 3)$, $A_2 \equiv (3,1)$. Který je koncový bod tohoto vektoru při takovém umístění, při němž jeho počáteční bod je: a) $B_1 \equiv (-3, -1)$; b) $B_2 \equiv (2, 3)$?

20. Je dán vektor $\boldsymbol{PA}$ v základní poloze: a) $A_1 \equiv (2,3)$; b) $A_2 \equiv (3,1)$. Který je počáteční bod tohoto vektoru při takovém umístění, při němž jeho koncovým bodem je bod B : a) $B_1 \equiv (3, -1)$, b) $B_2 \equiv (2,3)$.

21. V soustavě souřadnic Pxy zvolte libovolný nenulový vektor $\boldsymbol{PM}$ a jeho souřadnice označme a_1, a_2. Které souřadnice má vektor, který je k vektoru $\boldsymbol{PM}$ souměrně sdružený podle: a) osy $x = 3$; b) osy $y = a$; c) osy druhého a čtvrtého kvadrantu?

22. Vektor $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{PA}$ v soustavě souřadnic Pxy $[A \equiv (a_1, a_2)]$ má velikost 1. Který vztah platí mezi čísly a_1, a_2? Uveďte aspoň dvě hodnoty a_1, a_2, které vyhovují této podmínce.

23. Pomocí vektorů znázorněte:
a) $(2,3) + (-1, 2)$; b) $(-4, 2) + (3, -2)$; c) $(3, -2) + (2, -1)$;
d) $(2,3) - (-2, +1)$.

24. V soustavě souřadnic Pxy jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{PA}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{PB}$. Koncové body vektorů $\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}$ tvoří rovnoběžník. Stanovte středy úseček omezených dvěma sousedními vrcholy toho rovnoběžníka. Kterou větu lze vyčíst z výsledku?

25. V soustavě souřadnic Pxy jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{PA}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{PB}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{CP}$. Koncové body vektorů $\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}$ tvoří vrcholy šestiúhelníka, jehož každé dvě protější strany jsou rovnoběžné. Stanovte středy úseček omezených vždy středy protilehlých stran. Co znamená výsledek geometricky?

26. Ověřte graficky, že v soustavě souřadnic Pxy jsou nenulové vektory $\boldsymbol{PQ} \equiv (a_1, a_2)$ a $\boldsymbol{PM} \equiv (-a_2, a_1)$ k sobě kolmé.

27. V soustavě souřadnic Pxy určete velikosti a směrové úhly vektorů $\boldsymbol{PA} = (-2,2)$, $\boldsymbol{PB} = (-3, -3)$, $\boldsymbol{PC} = (3,3\sqrt{3})$. Které směrové úhly mají vektory k těmto vektorům opačné? [Směrový úhel vektoru $\boldsymbol{PA}$ je orientovaný úhel, jehož základní rameno leží v kladné poloose x a druhé rameno v polopřímce PA.]

28. Dokažte, že směrový úhel nenulového vektoru $\boldsymbol{PN} \equiv (ka_1, ka_2)$ nezávisí na čísle k.

29. Ověřte správnost identity $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = 2(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2)$.

$\boxed{\textbf{30.}}$ Stanovte velikost vektoru $\boldsymbol{a} = 3\,\boldsymbol{m} - 4\boldsymbol{n}$, víte-li, že $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ jsou navzájem kolmé.

Řešení

$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2} = \sqrt{(3\boldsymbol{m} - 4\boldsymbol{n})^2} = \sqrt{9\boldsymbol{m}^2 - 24\boldsymbol{m} \,.\, \boldsymbol{n} + 16\boldsymbol{n}^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$, neboť $\boldsymbol{m} \,.\, \boldsymbol{n} = 0$.

31. Spočtěte délku úhlopříček rovnoběžníka sestrojeného nad vektory $\boldsymbol{a} = 5\,\boldsymbol{p} + 2\,\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p} - 3\,\boldsymbol{q}$, je-li známo, že $|\boldsymbol{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{q}| = 3\,\sphericalangle(\boldsymbol{pq}) = $ $= \dfrac{\pi}{4}$.

32. Určete velikost úhlu mezi vektory $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{p} + 2\boldsymbol{q}$ a $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p} + 5\boldsymbol{q}$, kde $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ jsou jednotkové vzájemně kolmé vektory.

33. Určete velikost úhlu jednotkových vektorů $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$, jestliže je známo, že vektory $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{s} + 2\,\boldsymbol{t}$ a $\boldsymbol{q} = 5\,\boldsymbol{s} - 4\,\boldsymbol{t}$ jsou navzájem kolmé.

34. V soustavě souřadnic Pxy jsou dána tři komplexní čísla a, b, c, jejichž obrazy tvoří trojúhelník. Najděte bod, který leží na spojnici kteréhokoli vrcholu toho trojúhelníka se středem protější strany a dělí tuto úsečku v poměru 2 : 1. (Větší úsek při vrcholu.) Která věta je tím dokázána?

$\boxed{\textbf{35.}}$ Určete vektor $\boldsymbol{x}$ z rovnice $2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}$, jestliže $\boldsymbol{a} \equiv (-1,2)$, $\boldsymbol{b} \equiv$ $\equiv (0, -2)$.

Řešení

$\boldsymbol{x}$ určíme z dané rovnice: $\boldsymbol{x} = -\frac{1}{2}(3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$. Tento vztah rozepíšeme pro jednotlivé složky vektoru $\boldsymbol{x}$.

$x_1 = -\frac{1}{2}[3(-1) + 0] = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}[(-2) + 3 \,.\, 2] = -\frac{1}{2} \cdot 4 =$
$= -2$.

$\boldsymbol{x} \equiv \left(\frac{3}{2}, -2\right)$.

Zkouška správnosti: $2\left(\frac{3}{2}, -2\right) + 3(-1,2) \stackrel{?}{=} -(0, -2)$,

$2 \cdot \frac{3}{2} + 3(-1) = 0, \ 0 = 0$;

$2(-2) + 3 \,.\, 2 = 2, \ 2 = 2$.

Závěr: Vektor $\boldsymbol{x} \equiv \left(\frac{3}{2}, -2\right)$ vyhovuje dané rovnici.

36. Vypočtěte vektor $\boldsymbol{x}$ z rovnice: a) $3\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{b}$; b) $2\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, v nichž $\boldsymbol{a} \equiv (3, -1)$, $\boldsymbol{b} \equiv (0,2)$; c) $3\boldsymbol{x} + 5\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{r}$, kde $\boldsymbol{r} \equiv (1, -2)$, $\boldsymbol{v} \equiv (2, 4)$. Zobrazte jednotlivé vektory.

37. Vypočtěte x, y z rovnice: a) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{a} \equiv (8 + x, y)$, $\boldsymbol{b} \equiv (4, 2)$; b) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{a} \equiv (1, -1)$, $\boldsymbol{b} \equiv (x + 2, y - 3)$.

38. Určete složku a vektoru $\boldsymbol{v} \equiv \left(\frac{3}{5}, a\right)$ tak, aby vektor $\boldsymbol{v}$ byl jednotkový.

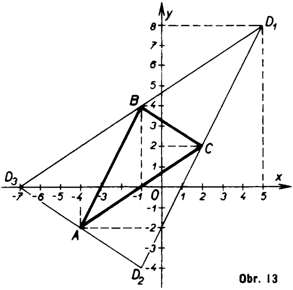
39. Jsou dány vektory $\boldsymbol{x} \equiv (3,4)$, $\boldsymbol{y} \equiv (-2, 7)$. Vypočtěte a zobrazte:

a) $\frac{1}{2}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{y}$; b) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$; c) $\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y}$; d) $3\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y}$; e) $4\boldsymbol{y} - 3\boldsymbol{x}$.

40. Početně určete velikost stran trojúhelníka daného vrcholy $A \equiv (-4, -2)$, $B \equiv (-1, 4)$, $C \equiv (2,2)$ a najděte souřadnice čtvrtého bodu D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl rovnoběžník.

Řešení

Obrazy bodů A, B, C neleží v přímce, neboť $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} \neq k(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A})$. Neexistuje k takové, aby platilo $-1 + 4 = k(2 + 4)$, z čehož $k = \frac{1}{2}$, a současně pro druhou složku $6 = 4k$, z čehož $k = \frac{3}{2}$. Proto lze najít bod D_1 tak, aby $ABCD_1$ byl rovnoběžník. Orientované úsečky AC, BD_1 jsou umístěním téhož vektoru, a proto platí: a) $\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{B}$, z toho $\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}$, tj. ve složkách $d_1 = 2 - 1 + 4 = 5$, $d_2 = 2 + 4 + 2 = 8$. $D_1 \equiv (5, 8)$. Úloze vyhovují ještě další dva body D_2, D_3, pro jejichž souřadnice dostáváme analogicky: b) $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{D}_2$, $\boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$; $d_{1(2)} = 2 - 4 + 1 = -1$, $d_{2(2)} = 2 - 2 - 4 = -4$. $\boldsymbol{D}_2 = (-1, -4)$. c) $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}_3 - \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{D}_3 = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}$, $d_{1(3)} = -7$, $d_{2(3)} = 0$. $D_3 = (-7, 0)$.



Obr. 13

Závěr: Dané úloze vyhovují tři body: $D_1 \equiv (5, 8)$, $D_2 \equiv (-1, -4)$, $D_3 \equiv (-7,0)$. (Obr. 13.)

Zkouška správnosti pro bod $D_1 \equiv (5,8)$. Velikost stran BD, AC je rovna velikosti příslušných vektorů.

$\sqrt{(5 + 1)^2 + (8 - 4)^2} = \sqrt{(2 + 4)^2 + (2 + 2)^2}$, tj. $1 = 1$.
Mimo to je $\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}$, tj. strany DB a CA jsou rovnoběžné a stejně velké. Bod D_1 je tedy vrcholem rovnoběžníka. Pro body D_2, D_3 proveďte zkoušku správnosti sami.

41. Najděte souřadnice čtvrtého bodu, který s danými třemi tvoří rovnoběžník: a) $A \equiv (5, 1)$, $B \equiv (4, 2)$, $C \equiv (-1, -4)$; b) $A \equiv (3,2)$, $B \equiv (7, 4)$, $C \equiv (5, 6)$; c) $M \equiv (-1, 2)$, $N \equiv (-3, 4)$, $P \equiv (-3, -3)$; d) $P \equiv (-5, 3)$, $Q \equiv (1, -1)$, $R \equiv (-1, -6)$. Ověřte náčrtem.

42. Určete velikost stran a úhlopříček v daném čtyřúhelníku a udejte, o jaký čtyřúhelník jde. a) $A \equiv (8, -4)$, $B \equiv (5, -6)$, $C \equiv (1, -4)$, $D \equiv (4, 2)$; b) $A \equiv (-2, -3)$, $B \equiv (-5, -7)$, $C \equiv (-1, -10)$, $D \equiv (2, -6)$; c) $A \equiv (7, 5)$, $B \equiv (-6, 2)$, $C \equiv (3, -1)$, $D = (6, 1)$. Narýsujte.

43. Souřadnice dvou sousedních vrcholů rovnoběžníka $ABCD$ jsou $A \equiv \left(-\dfrac{9}{2}, 7\right)$, $B \equiv (2, 6)$. Průsečík úhlopříček tohoto rovnoběžníka je $S \equiv \left(3, \dfrac{3}{2}\right)$. Určete souřadnice zbývajících vrcholů.

44. Určete velikost stran a těžnic trojúhelníka ABC, kde $A \equiv (1,3)$, $B \equiv (3, -1)$, $C \equiv (5, 5)$. Jaké souřadnice má těžiště?

45. Stanovte délky stran trojúhelníka a z nich i z velikosti odchylek příslušných vektorů určete, o jaký trojúhelník jde: a) $A \equiv (4, 7)$, $B \equiv (5, 6)$, $C \equiv (8, 10)$; b) $A \equiv (-2, 10)$, $B \equiv (-1, 6)$, $C \equiv (2, 11)$; c) $A \equiv (-16, -4)$, $B \equiv (-6, 8)$, $C \equiv (-10, -9)$; d) $A \equiv (3, -2)$, $B \equiv (7, 15)$, $C \equiv (13, 10)$.

***46.** Určete souřadnice bodu D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl lichoběžník, jehož základny jsou AB a CD, přičemž $CD = 2\,AB$. $A \equiv (1, 2)$, $B \equiv (4, 6)$, $C \equiv (4, 9)$.

***47.** Odvoďte vzorec pro obsah trojúhelníka ABC, jsou-li body A, B, C koncové body vektorů $\boldsymbol{a} \equiv (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{b} \equiv (x_2, y_2)$, $\boldsymbol{c} \equiv (x_3, y_3)$.

$$\left[\text{Návod: } P = \frac{1}{2}\,\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}\,.\right]$$

48. Určete obsah trojúhelníka, jehož vrcholy jsou: a) $A \equiv (2, 0)$, $B \equiv (5,3)$, $C \equiv (2, 6)$; b) $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (7,1)$, $C \equiv (2, 6)$; c) $A \equiv (2, 5)$, $B \equiv (-4, 2)$, $C \equiv (9, -3)$; d) $O \equiv (0, 0)$, $M \equiv (-1, -2)$, $N \equiv (1, -3)$.

49. Jaký je obsah čtyřúhelníka $ABCD$, v němž $A \equiv (3, 1)$, $B \equiv (4, 6)$, $C \equiv (6, 3)$, $D \equiv (5, -2)$.

50. Určete souřadnice třetího vrcholu trojúhelníka, jsou-li dány jeho dva vrcholy $A \equiv (4, 3)$, $B \equiv (6, -3)$ a jeho obsah $P = 21$ j², přičemž a) bod C leží na ose x; b) velikost strany $AC = 7$.

51. Dva vrcholy trojúhelníka ABC jsou: $A \equiv (1,2)$, $B \equiv (4, 4)$. Na ose x najděte bod C tak, aby obsah trojúhelníka ABC byl 5 j².

52. Určete velikost složky a vektoru $\boldsymbol{v} \equiv (4,2a)$ tak, aby vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{u} \equiv (3, -1)$ byly ortogonální.

53. Určete vnitřní úhly v trojúhelníku PQR, je-li $P \equiv (5\sqrt{3}, 5)$, $Q \equiv (-\sqrt{3}, -1)$, $R \equiv (0, 0)$.

Řešení

Úhel dvou vektorů $\boldsymbol{u} = PQ$, $\boldsymbol{v} = PR$ vypočteme ze skalárního součinu vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$;

$\cos\alpha = \dfrac{\boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|}$. Souřadnice vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ určíme ze vztahů $\boldsymbol{u} = Q - P$, $\boldsymbol{v} = R - P$, tj. $\boldsymbol{u} = (-6\sqrt{3}, -6)$, $\boldsymbol{v} = (-5\sqrt{3}, -5)$.

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,.\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{30\,.\,3 + 30}{\sqrt{36\,.\,3 + 36}\,.\sqrt{100}} = 1\,.$$

Úhel vektorů $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{z} = Q - R \equiv (-\sqrt{3}, -1)$ je dán vztahem

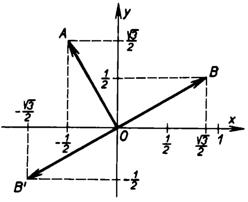
$$\cos\beta = \frac{\boldsymbol{v}\,.\,\boldsymbol{z}}{|\boldsymbol{v}|\,.\,|\boldsymbol{z}|} = \frac{15 + 5}{\sqrt{25\,.\,3 + 25}\,.\,\sqrt{4}} = 1\,.$$

Úhel vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{z}$ je dán $\cos\gamma = \dfrac{\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{z}}{|\boldsymbol{u}|\,.\,|\boldsymbol{z}|} = \dfrac{6\,.\,3 + 6}{12\,.\,2} = 1\,.$

To znamená, že vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{z}$ svírají nulové úhly, jsou tedy rovnoběžné. Všecky tři body leží v přímce. Jak velký úhel svírají vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, jestliže $\dfrac{\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|} = 0$? Jak zní tedy podmínka pro kolmost dvou vektorů?

54. K jednotkovému vektoru $\boldsymbol{a} \equiv \left(\dfrac{-1}{2},\ a_2\right)$, $a_2 > 0$, stanovte jednotkový vektor ortogonální.

Řešení (obr. 14)



Obr. 14

Daný vektor $\boldsymbol{a}$ musí být jednotkový ($|\boldsymbol{a}| = 1$), tj. $1 = \sqrt{\dfrac{1}{4} + a_2^2}$. Odtud $a_2 = \sqrt{\dfrac{3}{4}}$, $(a_2 > 0)$. Nyní hledáme k vektoru $\boldsymbol{a} \equiv \left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ vektor kolmý $\boldsymbol{b} \equiv (b_1, b_2)$.

Patrně i tento vektor musí být jednotkový, tj. $\sqrt{b_1^2 + b_2^2} = 1$.

To je jedna podmínka pro velikost složek b_1, b_2. Aby oba vektory byly ortogonální, musí být jejich skalární součin roven nule.

Potom $\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (b_1, b_2) = 0$, a to je druhá podmínka pro velikost složek b_1, b_2. Řešením obou rovnic $b_1^2 + b_2^2 = 1$, $-\dfrac{1}{2}b_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot b_2 = 0$ dostaneme $b_1 = \dfrac{\pm\sqrt{3}}{2}$, $b_2 = \pm\dfrac{1}{2}$.

Závěr: K vektoru $\boldsymbol{a} \equiv \left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ existují dva ortogonální vektory:

$$\boldsymbol{b} \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right),\ \boldsymbol{b}' \equiv \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right).$$

55. Určete početně aspoň jeden vektor kolmý k danému vektoru a nakreslete: a) $\boldsymbol{a} \equiv (5, 3)$; b) $\boldsymbol{a} \equiv (-2, 1)$; c) $\boldsymbol{a} \equiv (3, 0)$; d) $\boldsymbol{a} \equiv (3,4)$.

56. Najděte vektor $\boldsymbol{v}$ kolmý k vektoru danému a narýsujte:
a) $\boldsymbol{u} \equiv (6, 1)$; b) $\boldsymbol{r} \equiv (-1, -3)$; c) $\boldsymbol{a} \equiv (5, -3)$; d) $\boldsymbol{b} \equiv (-2, -1)$;
e) $\boldsymbol{c} \equiv (-3, 0)$; f) $\boldsymbol{s} \equiv (3, 4)$.

57. Působiště síly $\boldsymbol{F}$(konstantní velikosti i směru $\boldsymbol{F} \equiv (6, -2)N$) se pohybuje po dráze dané vektorem $\boldsymbol{h} \equiv (2,3)$ m. Určete velikost práce A, kterou vykoná daná síla po dané dráze.

58. Vypočtěte velikost síly $\boldsymbol{F}$ a dráhy $\boldsymbol{s}$ z předchozí úlohy. Jaký je úhel vektorů $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{h}$?

2. KOMPLEXNÍ ČÍSLA

59. Přepište komplexní čísla $(2; 5)$, $(3; -4)$, $(-\sqrt{2}; \sqrt{3})$, $(0{,}6; 0)$, $\left(0; -\frac{1}{1{,}5}\right)$ do algebraického tvaru a potom tato čísla znázorněte v soustavě souřadnic.

60. Jako uspořádané dvojice čísel zapište komplexní čísla $a = -3{,}5 + 2\mathrm{i}$, $b = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}$, $c = \sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}$, $d = 5\mathrm{i}$, $e = -\mathrm{i}$, $m = 2$, $n = 0{,}5 - 1{,}2\mathrm{i}$ a potom je znázorněte v soustavě souřadnic.

61. Jsou dána komplexní čísla a) $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$, $b = a_1 - a_2\mathrm{i}$;
b) $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$, $b = -a_1 + a_2\mathrm{i}$; c) $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$, $b = -a_1 - a_2\mathrm{i}$;
d) $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$, $b = a_2 + a_1\mathrm{i}$; e) $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$, $b = -a_2 - a_1\mathrm{i}$.
Vypište podmínky, které platí o číslech a_1, a_2, je-li $a = b$.

62. Komplexní čísla a, b, c jsou znázorněna vektory, jejichž umístění mají počáteční bod v počátku P a koncové body ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka ABC, kde $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (a; 0)$, $C \equiv (?; ?)$.
Napište algebraický tvar komplexního čísla t, jehož obraz tvoří vektor $\boldsymbol{PT}$, kde T je těžiště trojúhelníka ABC.

Řešení

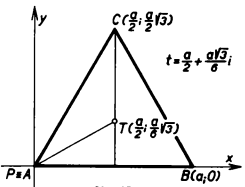
a) Je-li číslo $a = 0$, nemá úloha smysl.

b) Je-li $a > 0$, potom strana AB trojúhelníka ABC leží v kladné poloose x tak, že $A \equiv P$.

Umístíme-li vrchol C do prvého kvadrantu, má C souřadnice $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$, těžiště T trojúhelníka ABC souřadnice $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{6}\sqrt{3}\right)$ a číslo t algebraický tvar $\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{i}$.

c) Je-li $a < 0$, leží strana AB v záporné poloose x a vrchol $A \equiv P$. Umístíme-li vrchol C trojúhelníka ABC do druhého kvadrantu, má číslo t tvar $\frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{i}$, umístíme-li vrchol C do třetího kvadrantu, má číslo t tvar $\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{i}$.

Závěr: Jestliže číslo $a \neq 0$, vyhovují úloze všechna čísla $t = \frac{a}{2} \pm \frac{a\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{i}$, přičemž a může být číslo kladné i záporné. (Obr. 15.)



Obr. 15

63. Komplexní čísla a, b, c, d, e, f jsou znázorněna vektory, jejichž umístění mají počáteční bod v počátku P a koncové body ve vrcholech pravidelného šestiúhelníka, který má střed v bodě P a jeden vrchol v bodě $A \equiv (6; 0)$; napište čísla a, b, c, d, e, f v algebraickém tvaru.

64. Komplexní čísla a, b, c, d jsou znázorněna vektory, jejichž umístění mají počáteční bod v počátku P a koncové body ve vrcholech čtverce $ABCD$, kde $A \equiv (a_1; a_2)$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Napište algebraické tvary těchto čísel.

65. Určete absolutní hodnoty čísel $a = -5$, $b = -2\mathrm{i}$, $c = 3 + 4\,\mathrm{i}$,

$d \equiv (1{,}2; -0{,}5)$, $e = \frac{1}{2} - \mathrm{i}$, $f = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$, $g \equiv (-\sqrt{2}; \sqrt{3})$,

$h = 1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $k \equiv (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})\,\mathrm{i}$.

Která z nich jsou komplexní jednotky?

66. Dokažte, že čísla

a) $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\,\mathrm{i}$; b) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$; c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}$;

d) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\,\mathrm{i}$ jsou komplexní jednotky.

67. Dokažte, že $|a| = 2$, je-li $a = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

68. Pro která reálná čísla x jsou čísla

a) $x + \frac{\sqrt{5}}{3}i$; b) $\frac{3}{4} - xi$; c) $3x + 4xi$; d) $x + xi$ komplexními jednotkami?

69. Určete početně i graficky součet $(a + b)$, je-li a) $a = 5 + 2i$, $b = 2 + 4i$; b) $a = -3 + 4i$, $b = -3 - 4i$; c) $a = 1 - 5i$, $b = -1 + 5i$. Ověřte si na těchto příkladech platnost vztahu $a + b = b + a$.

70. Ověřte si početně i graficky, že platí vztah $(a + b) + c = (a + c) + b$, je-li $a = 4 + i$, $b = -2 + 5i$, $c = 5 - 2i$.

71. Na základě sčítání vektorů zobrazujících komplexní čísla a, b dokažte, že platí: $|a + b| \leqq |a| + |b|$.

$\boxed{\textbf{72.}}$ Je možné, aby součet dvou komplexních čísel byl a) reálný; b) ryze imaginární? Kdy to nastane?

Řešení

Je-li $a = a_1 + a_2i$, $b = b_1 + b_2i$, potom jejich součet $x = a + b = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i$.

a) Aby součet x byl reálný, musí platit vztah $a_2 + b_2 = 0$, odkud $b_2 = -a_2$.

Čísla a, b mají tvar $a = a_1 + a_2i$, $b = b_1 - a_2i$, přičemž a_1, a_2, b_1 jsou libovolná reálná čísla.

b) Aby součet x byl ryze imaginární, musí platit vztah $a_1 + b_1 = 0$, odkud $b_1 = -a_1$.

Čísla a, b mají tvar $a = a_1 + a_2i$, $b = -a_1 + b_2i$, přičemž a_1, a_2, b_2 jsou libovolná čísla reálná s vyloučením případu $a_2 = b_2 = 0$.

Závěr: Součet dvou komplexních čísel může být reálný i ryze imaginární.

73. Za kterých podmínek je součet dvou komplexních čísel imaginární?

74. Určete početně i graficky rozdíly $(a - b)$ a $(b - a)$, je-li:
a) $a = 2 + 7i$, $b = -3 + i$; b) $a = -1 - 3i$, $b = 5 + i$.
V jakém vztahu jsou čísla $(a - b)$ a $(b - a)$?

75. Může být rozdíl dvou komplexních čísel a) reálný; b) ryze imaginární; c) imaginární?
Kdy to nastane?

76. Proveďte:

a) $(-1 - \mathrm{i}) + (-2 - 3\mathrm{i}) + (5 + 2\mathrm{i}) + (-2 + 2\mathrm{i})$;

b) $(-1 + \mathrm{i}) + (-3 + 2\mathrm{i}) - (-1 - \mathrm{i}) - (5 + 2\mathrm{i}) + (8 - 2\mathrm{i})$;

c) $(1 + 2\mathrm{i}) + (2 + 3\mathrm{i}) + (3 + 4\mathrm{i}) - (5 - 6\mathrm{i}) - (1 - 15\mathrm{i})$;

d) $(a + b\mathrm{i}) + (b + a\mathrm{i}) - (b - a\mathrm{i}) - (a - b\mathrm{i})$; a, b jsou reálná čísla.

77. Proveďte:

a) $3(5 + 2\mathrm{i}) + 2(5 - \mathrm{i}) - 4(1 - 3\mathrm{i}) + 5(-1 - \mathrm{i})$;

b) $2(1 + \mathrm{i}) - 6(-2 - 3\mathrm{i}) + 5(3 + 4\mathrm{i})$;

c) $a(1 - 2\mathrm{i}) - b(2 + \mathrm{i}) + a - b(2\mathrm{i} - 1) - (a + 3\mathrm{i})$, kde a, b jsou libovolná reálná čísla.

78. Napište algebraické a goniometrické tvary komplexních čísel, která jsou znázorněna vektory, jejichž umístění v soustavě souřadnic Pxy mají počáteční bod v bodě P a koncové body ve vrcholech pravidelného osmiúhelníka, který má střed v bodě P a jeden vrchol v bodě $A \equiv (5; 0)$.

Určete nejprve jejich absolutní hodnoty a argumenty ve stupních i v obloukové míře.

$\boxed{\mathbf{79.}}$ Jakou absolutní hodnotu a jaký argument má komplexní číslo $a = 1 + \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$, kde $0 \leqq \alpha \leqq \pi$?

Řešení

Jelikož $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$, lze komplexní číslo a psát ve tvaru $a = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} + 2\mathrm{i}\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = 2\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Výraz $\cos\dfrac{\alpha}{2} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\alpha}{2}$ je však goniometrický tvar komplexní jednotky, jejíž absolutní hodnota je rovna číslu 1.

V důsledku toho je $|a| = \left|2\cos\dfrac{\alpha}{2}\right| = 2\cos\dfrac{\alpha}{2}$, neboť úhel $\dfrac{\alpha}{2}$ vyhovuje vztahu $0 \leqq \dfrac{\alpha}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ a je tedy číslem nezáporným; argument φ komplexního čísla a je $\dfrac{\alpha}{2}$.

Závěr:

Číslo a má absolutní hodnotu $|a| = 2\cos\dfrac{\alpha}{2}$ a argument $\varphi = \dfrac{\alpha}{2}$.

***80.** Jakou absolutní hodnotu a jaký argument má komplexní číslo $x = (\cos \alpha + \cos \beta) + i(\sin \alpha + \sin \beta)$, je-li $0 \leqq \alpha < 2\pi$, $0 \leqq \beta < 2\pi$?

81. Uveďte na goniometrický tvar komplexní číslo $a = 3 - 4i$.

Řešení

Předepíšeme-li komplexnímu číslu $a = 3 - 4i$ goniometrický tvar $|a|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kde $0 \leqq \varphi < 2\pi$, je $|a| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ a platí rovnice $5 \cos \varphi = 3$; $5 \sin \varphi = -4$, a $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{4}{3}$.

Poslední rovnici vyhovují dva úhly, jejichž velikosti jsou:

a) $126°52'$,

b) $306°52'$, z nichž však jen úhel $306°52'$ je argumentem čísla a.

$(\cos \varphi > 0,\ \sin \varphi < 0.)$

Je tedy $a = 5(\cos 306°52' + i \sin 306°52')$.

Závěr: Číslo $a = 3 - 4i$ má goniometrický tvar $a = 5(\cos 306°52' + i \sin 306°52')$.

82. Uveďte na goniometrický tvar čísla:

a) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$; b) $15 - 36i$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$; d) 1; e) $-3{,}5$; f) $-3i$; g) $-3 + 4i$. Zkontrolujte si správnost převodu na obrazech těchto čísel v soustavě souřadnic.

83. Uveďte na goniometrický tvar číslo $a = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} i$.

84. Napište algebraické tvary těchto komplexních čísel:

a) $5(\cos 315° + i \sin 315°)$; b) $2(\cos 210° + i \sin 210°)$;

c) $10(\cos 65° + i \sin 65°)$; d) $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$;

e) $7(\cos 180° + i \sin 180°)$; f) $\cos 0° + i \sin 0°$;

g) $2{,}5\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$; h) $3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$;

i) $4(\cos 235°30' + i \sin 235°30')$.

85. Určete číslo $c = ab$, je-li $a = 2(\cos 30° + i \sin 30°)$, $b = 3(\cos 135° + i \sin 135°)$.
Sestrojte vektor ***PC*** zobrazující číslo C na základě vektorů ***PA***, ***PB*** zobrazujících čísla a a b.

86. Nejprve vyjádřete čísla a, b v goniometrických tvarech a potom je násobte:

a) $a = 2 + 3i$, $\quad b = 4 - i$; $\quad$ b) $a = 2$, $\quad b = 5 + 3i$.

87. V soustavě souřadnic Pxy zvolte dva libovolné vektory, z nichž jeden zobrazuje komplexní jednotku s, druhý komplexní číslo $a = 0$ a sestrojte vektor zobrazující komplexní číslo $b = as$.
Sestrojte dále vektor zobrazující číslo b, je-li:

a) $s = \cos 60° + i \sin 60°$, $\quad a = 2(\cos 135° + i \sin 135°)$;

b) $s = i$, $\quad a = 3(\cos 240° + i \sin 240°)$;

c) $s = -1$, $\quad a = 3 + 4i$;

d) $s = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$, $\quad a = 2 - 3i$;

e) $s = \cos 30° + i \sin 30°$, $\quad a = 4(\cos 150° - i \sin 150°)$.

88. V soustavě souřadnic Pxy zvolte vektory, které zobrazují dvě libovolné komplexní jednotky ${}^1S$ a ${}^2S$ a sestrojte vektor zobrazující komplexní jednotku ${}^3S = {}^1S \cdot {}^2S$.
Sestrojte dále ${}^3S$, je-li a) ${}^1S = \cos 30° + i \sin 30°$,
${}^2S = \cos 45° + i \sin 45°$; $\quad$ b) ${}^1S = \cos 135° + i \sin 135°$,
${}^2S = \cos 210° + i \sin 210°$; $\quad$ c) ${}^1S = i$, ${}^2S = -1$;

d) ${}^1S = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$, ${}^2S = -i$.

89. Proveďte:

a) $(2 - 3i)i$; $\quad$ b) $(2 + 3i)(3 - 4i)$; $\quad$ c) $(1 + i)(1 - i)$;

d) $(-1 - i)(1 - i)$; $\quad$ e) $(3 - 2i)^2$; $\quad$ f) $(1 + i)(2 + i) + (1 + i)(1 + 2i)$;

g) $(2 + 3i)(1 - 4i) - (2 - 3i)(1 + 4i)$;

h) $(1 + i)^2 - (1 - i)^2$; $\quad$ i) $(1 + i)(1 - i)(1 + 3i)$;

j) $(1 - i)^3$; $\quad$ k) $i(i - 1)(i - 2)(i - 3)$;

l) $(-1 + i\sqrt{3})^3$; $\quad$ m) $(1 - i)^4$; $\quad$ n) $(1 + i)^6$.

90. Vypočítejte:

a) i^3; b) i^4; c) i^5; d) i^6; e) i^7; f) i^8; g) $i^9 - i^{11} + i^{12}$;

h) $ai^5 - bi^7 + (a - b)i^9 - (a + b)i^3$; a, b jsou reálná čísla. Jakých hodnot může nabývat i^n, je-li n libovolné přirozené číslo? Dokažte, že platí: $i^n = i^{n+4}$.

91. Přesvědčte se, že platí:

$$\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^3 = \left(\frac{i - \sqrt{3}}{2}\right)^3 = (-i)^3.$$

92. V oboru komplexních čísel rozložte v činitele:

a) $a^4 - 16$; b) $a^3 + 4a^2 + a + 4, a > 0$;

c) $6a^4 + 5a^2 + 1$ [návod: $5a^2 = 3a^2 + 2a^2$];

d) $a^2 + 10a + 9$; $a > 0$;

e) $a^5 + 4a^4 + a + 4$; $a > 0$;

f) $a^3b + 9a^2b + ab + 9b$; $a > 0$.

***93.** Určete hodnotu výrazu a) $(1 + i)^8$; b) $(1 - i)^{10}$.

$\left[\text{Návod: } 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);\ 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right);\ (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.\right]$

***94.** Určete:

a) $(1 - i\sqrt{3})^{12}$; b) $(\sqrt{3} + i)^{20}$.

$\left[\text{Návod: } 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right);\ \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right).\right]$

95. Pro která komplexní čísla platí vztah

a) $\bar{a} = ia$; b) $\bar{a} = -ia$, jsou-li $a, \bar{a}$ čísla komplexně sdružená?

***96.** Může být součin dvou komplexních čísel: a) reálný;
b) ryze imaginární;
c) imaginární?

Kdy to nastane?

97. Určete všechna komplexní čísla x, která se rovnají své druhé mocnině.

98. Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla $a = \dfrac{1 - ix}{1 + ix}$ a stanovte podmínky pro číslo x tak, aby číslo a bylo imaginární.

Řešení

$$a = \frac{1 - ix}{1 + ix} = \frac{(1 - ix)^2}{1 - i^2x^2} = \frac{1 - 2ix + i^2x^2}{1 + x^2} = \frac{1 - x^2 - 2ix}{1 + x^2} =$$

$= \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} - \dfrac{2x}{1 + x^2}i$. Číslo a by bylo reálné pro $x = 0$, číslo a by bylo ryze imaginární pro $x = 1$ a nebo pro $x = -1$.

Závěr: Reálná část komplexního čísla a je $a_1 = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$, imaginární část komplexního čísla a je $a_2 = -\dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Číslo a je imaginární pro všechny hodnoty $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$.

99. Upravte:

a) $\dfrac{25}{3+4i}$; b) $\dfrac{i}{1+i}$; c) $\dfrac{1+i}{i}$; d) $\dfrac{1+i}{1-i}$;

e) $\dfrac{1+i}{1+2i}$; f) $\dfrac{3-2i}{3+2i}$; g) $\dfrac{-1-2i}{-1-3i}$;

h) $\dfrac{a+i}{1-ai}$; a je reálné číslo; i) $\dfrac{2-a}{1-i\sqrt{1-a}}$, $a \leqq 1$;

j) $\dfrac{5+i\sqrt{5}}{5-i\sqrt{5}}$.

100. a) $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}$; b) $\dfrac{1}{(1+i)^2}+\dfrac{1}{(1-i)^2}$;

c) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$; d) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2-\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2$.

101. Upravte výraz $\dfrac{x}{(x+y)(\bar{x}+\bar{y})}$, jsou-li x, $\bar{x}$ a y, $\bar{y}$ čísla komplexně sdružená, $x = 3 + 4i$, $y = 5 + i$.

102. Z rovnice $30p + 20pi - 50qi = 0$, kde p, q jsou komplexní čísla, $q \neq 0, p \neq 0$, vypočítejte podíl $\dfrac{p}{q}$.

103. Proveďte: a) $\dfrac{1+i+2i^2-3i^3+i^4+i^5+i^6}{1-5i}$;

b) $\dfrac{i-3i^3+5i^5-7i^7+9i^9}{25i^{11}}$.

104. Proveďte:

a) $\dfrac{(1+i)^3}{2(1-i)}$; b) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}$;

c) $\dfrac{(a-b)i-(a+b)}{(a+b)i-(a-b)}-\dfrac{(a-b)i+(a+b)}{(a+b)i+(a-b)}$; a, b jsou reálná čísla, která se současně nerovnají nule.

105. Ukažte, že podíl $\dfrac{k-i}{1+ki}$, kde k je reálné číslo, nezávisí na čísle k.

106. Řešte rovnici $(5+2i)y = 3 - 7i + ay$, kde y je neznámá a a je libovolné komplexní číslo.
Jakou hodnotu má y, je-li $a = 2 - 5i$?

107. Určete reálnou a imaginární část komplexních čísel

$$a = \left(\frac{1 + 2i}{1 - 2i}\right)^2 - \left(\frac{1 - 2i}{1 + 2i}\right)^2, \qquad b = [i(i + 1)(i + 2)(i + 3)]^2,$$

$$c = \frac{(i\sqrt{3} - 1)^3 + (i + 2)(i - 2) + (1 + 2i)^2 - 4}{1 + i}.$$

108. Proveďte: a) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2 + i} + i}$; b) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{1 + ai} + 1}$; a je reálné číslo.

***109.** Je možné, aby podíl dvou komplexních čísel byl a) reálný, b) ryze imaginární? Kdy to nastane?

110. Jsou-li a, b komplexní čísla a $b \neq 0$, dokažte, že platí: $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

111. Proveďte:

a) $\left|\dfrac{3 + 2i}{3 - 2i}\right|$; b) $\dfrac{|1 + i|}{i}$; c) $\dfrac{|1 + i|}{1 - i}$; d) $\left|\dfrac{i^{10} - i}{2i + 1}\right|$;

e) $\left|\dfrac{1 + i}{1 - i} + \dfrac{1 - i}{1 + i}\right|$.

112. Dokažte, že platí: $\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} = \cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)$.

Na základě tohoto vztahu dokažte, že platí též vztah

$$\frac{|a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{|b|(\cos\beta + i\sin\beta)} = \left|\frac{a}{b}\right|(\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)).$$

113. V soustavě souřadnic Pxy zvolte umístění dvou vektorů zobrazujících nenulová komplexní čísla a, b a sestrojte vektor zobrazující číslo $c = \dfrac{a}{b}$.

114. V soustavě souřadnic Pxy je dáno umístění nenulového vektoru, který zobrazuje komplexní číslo a. Sestrojte vektor zobrazující číslo $\dfrac{1}{a}$.

115. Najděte všechna komplexní čísla, pro něž platí vztah $\bar{a} = \dfrac{1}{a}$, jsou-li $a, \bar{a}$ čísla komplexně sdružená.

116. Určete všechna komplexní čísla x, která se rovnají své převrácené hodnotě.

$\boxed{\textbf{117.}}$ Mezi komplexními čísly x, které vyhovují nerovnosti $|25i - x| \leqq 15$, určete to, jehož argument goniometrického tvaru je nejmenší.

Řešení

$|a - b|$ udává v soustavě souřadnic Pxy vzdálenost $\overline{AB}$, kde A a B jsou koncové body vektorů zobrazujících komplexní čísla a a b. V našem případě je $a = 25\mathrm{i}$, $b = x$, takže koncové body všech vektorů zobrazujících číslo x leží na a uvnitř kružnice k, která má střed $S \equiv (0; 25)$ a poloměr $r = 15$.

Jelikož goniometrický tvar čísla x má mít nejmenší argument, musí se vektor zobrazující hledané číslo x kružnice k dotýkat, přičemž jeho dotykový bod musí ležet v prvém kvadrantu. Z nákresu se snadno zjistí, že vektor zobrazující hledané číslo x má souřadnice $(12; 16)$, takže hledané číslo $x = 12 + 16\mathrm{i}$.

Závěr: Hledané číslo $x = 12 + 16\mathrm{i}$.

118. V soustavě souřadnic Pxy jsou dány vektory, jejichž umístění $\boldsymbol{PA}$, $\boldsymbol{PB}$, $\boldsymbol{PC}$ zobrazují komplexní čísla $a = 2 - \mathrm{i}$, $b = 5 - 2\mathrm{i}$, $c = 10 + 3\mathrm{i}$. Určete komplexní číslo x tak, aby jeho obraz měl koncový bod v bodě X, který má od bodů A, B, C stejnou vzdálenost.

***119.** Dokažte, že platí:
$|z + 1|^2 + \mathrm{i}|z + \mathrm{i}|^2 - (\mathrm{i} + 1) . |z|^2 - (1 + \mathrm{i}) = 2z$, je-li z libovolné komplexní číslo.

$\boxed{\textbf{120.}}$ Určete všechna komplexní čísla x, která vyhovují rovnici $x^2 + |x| = 0$.

Řešení

Nechť kořen x naší rovnice má tvar $x_1 + x_2\mathrm{i}$, kde x_1, x_2 jsou reálná čísla.

Jelikož kořen rovnice musí rovnici splňovat, platí:

$$(x_1 + x_2\mathrm{i})^2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0\,,$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2\mathrm{i} - x_2^2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0\,.$$

Z rovnosti dvou komplexních čísel plynou vztahy

$$2\,x_1x_2 = 0\,, \qquad (1)$$

$$x_1^2 - x_2^2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0\,. \qquad (2)$$

Vztah (1) je splněn tehdy, je-li a) $x_1 = 0$; potom ze vztahu (2) je

$-x_2^2 + \sqrt{x_2^2} = 0$, $\sqrt{x_2^2} = |x_2|$, odkud $x_2 = 0$, $x_2 = 1$, $x_2 = -1$;

b) $x_2 = 0$; potom ze vztahu (2) je $x_1^2 + |x_1| = 0$, které rovnici vyhovuje jen pro číslo $x_1 = 0$.

Zkouška správnosti: Všechny tři nalezené hodnoty splňují danou rovnici.

Závěr: Dané rovnici vyhovují komplexní čísla $x = 0$, $x = \mathrm{i}$, $x = -1$.

Poznámka:

Kořenu rovnice je možno předepsat též tvar

$$|r|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\,, \quad \text{kde } 0 \leqq \varphi < 2\pi\,.$$

*121. Určete komplexní číslo x, které vyhovuje současně vztahům

$$\left|\frac{x-4}{x-8}\right| = 1\,, \quad \left|\frac{x-12}{x-8\mathrm{i}}\right| = \frac{5}{3}\,.$$

122. Je-li $z = z_1 + z_2\mathrm{i}$, potom platí:

a) $|z_1| + |z_2| \geqq |z|$; b) $|z_1| + |z_2| \leqq |z| \,.\, \sqrt{2}$. Dokažte to.

Poznámka: Příklady na řešení kvadratické rovnice v oboru komplexních čísel najdete na str. 87 v kapitole Kvadratické rovnice.

3. OPAKOVÁNÍ

123. Je dáno komplexní číslo $a \equiv (5\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$. Napište ho v algebraickém i goniometrickém tvaru.

124. Napište algebraické a goniometrické tvary komplexních čísel, která jsou znázorněna vektory, jejichž umístění v soustavě Pxy mají počáteční body v bodě P a koncové body ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka, jehož střed je v počátku P a jeden vrchol v bodě $A \equiv (a, 0)$, $a > 0$.

125. Komplexní čísla a, b, c, d jsou znázorněna vektory, jejichž umístění mají počáteční bod v počátku P a koncové body ve vrcholech kosočtverce $ABCD$ [$A \equiv (0; 0)$, $B \equiv (4; 0)$, $\sphericalangle BAD = 45°$]. Napište algebraické tvary těchto čísel.

126. Jakou absolutní hodnotu a jaký argument má komplexní číslo $x = a - b$, je-li $a = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$, $b = \cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta$? ($0 \leqq \alpha < 2\pi$, $0 \leqq \beta < 2\pi$.)

127. Jsou dána komplexní čísla $a = -2 + 5\mathrm{i}$, $b = 1 + 2\mathrm{i}$. Určete čísla $x = a + b$, $y = a - b$, $z = ab$, $u = \dfrac{a}{b}$ výpočtem i graficky.

128. Jsou-li b, $\bar{b}$, a c, $\bar{c}$ čísla komplexně sdružená, určete číslo $x = [(b + c)\,.\,(\bar{b} - \bar{c})]^2$, kde $b = 3 + 2\mathrm{i}$, $c = -2 + 3\mathrm{i}$.

129. Na základě Moivreovy věty odvoďte vzorce

a) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;

b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

130. Na základě poučky $(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha$ potvrďte, že platí:

a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; b) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

c) $\cos 3\alpha = \cos\alpha\,(4\cos^2\alpha - 3)$; d) $\sin 3\alpha = \sin\alpha\,(4\cos^2\alpha - 1)$.

131. Existuje komplexní číslo, které se rovná své třetí mocnině?

132. V soustavě Pxy určete souřadnice vrcholu G rovnostranného trojúhelníka ABC, je-li $A \equiv (0{,}0)$, $B \equiv (5{,}1)$.
[Návod: Vektor $\boldsymbol{PC}$ vznikne z vektoru $\boldsymbol{PB}$ otočením okolo počátku o úhel 60° v obou smyslech.]

133. Proveďte: a) $\dfrac{1}{\mathrm{i}} + \dfrac{1}{\mathrm{i}+1} + \dfrac{1}{\mathrm{i}+2}$;

b) $\dfrac{(1+\mathrm{i})^3 + (1-\mathrm{i})^2 + (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2\mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^5 + \mathrm{i}^6 + \mathrm{i}^7}$.

134. Řešte rovnici $(2 + 3\mathrm{i})x + \mathrm{i} = 0$.

135. Řešte rovnici $(3 + 4\mathrm{i})x - (2 + 2\mathrm{i})x = 3 - 5\mathrm{i} + ax$, kde x je neznámá a a komplexní číslo. Pro které číslo a nemá rovnice řešení?
Řešte tuto rovnici též pro $a = -2 - 3\mathrm{i}$.

136. Přesvědčte se, že platí:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{1+\mathrm{i}} + \mathrm{i}} - \frac{1}{\dfrac{1}{1-\mathrm{i}} - \mathrm{i}} = -2\mathrm{i}.$$

137. Proveďte:

$$\frac{\left|\dfrac{3-4\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}\right| + \left|\dfrac{3+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right|}{|1+2\mathrm{i}|}.$$

138. Která komplexní čísla y vyhovují rovnici $2y^2 + |y| = 0$?

139. Dokažte, že v soustavě Pxy obrazy všech komplexních čísel x, pro něž platí vztah

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = 1, \text{ leží v ose } y.$$

140. Co vyplňují v soustavě Pxy obrazy všech komplexních čísel x, pro něž platí vztah

a) $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| \leqq 1$; b) $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| \geqq 1$?

IX. MATEMATICKÁ INDUKCE

1. Počet úhlopříček vypuklého n-úhelníka se vypočítá podle vzorce $P_n = \frac{n(n-3)}{2}$, kde n je přirozené číslo větší než 3. Dokažte jeho správnost matematickou indukcí.

2. n různými přímkami, které leží v rovině a procházejí týmž bodem, je rovina rozdělena na $2n$ částí. Dokažte to.

3. n bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v téže přímce, lze spojit $\frac{n(n-1)}{2}$ přímkami. Dokažte to.

4. Dokažte, že platí:
$|a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots \ldots \ldots a_n| = |a_1| \,.\, |a_2| \,.\, |a_3| \ldots |a_n|$.

$\boxed{5.}$ Dokažte matematickou indukcí, že číslo $Q_n = 5^{n+1} + 6^{2n-1}$ je dělitelné číslem 31 pro každé přirozené číslo n.

Řešení

I. krok: Pro $n = 1$ je tvrzení správné, neboť po dosazení je $Q_1 = 5^2 + 6 = 31$.

II. krok: Za předpokladu, že číslo Q_n je dělitelné číslem 31, dokážeme, že i číslo Q_{n+1} je dělitelné číslem 31.
Upravme Q_{n+1} takto:
$Q_{n+1} = 5^{n+2} + 6^{2n+1} = 5 \,.\, 5^{n+1} + 36 \,.\, 6^{2n-1} =$
$= 5 \,.\, 5^{n+1} + 5 \,.\, 6^{2n-1} + 31 \,.\, 6^{2n-1} = 5 \,.\, (5^{n+1} + 6^{2n-1}) +$
$+ 31 \,.\, 6^{2n-1} = 5Q_n + 31 \,.\, 6^{2n-1}$; výsledek ukazuje, že za uvedeného předpokladu je číslo Q_{n+1} dělitelné číslem 31.

Závěr: Jelikož podle I. kroku je číslo Q_n dělitelné číslem 31 pro $n = 1$, je podle II. kroku dělitelné též číslem 31 pro $n = 2$.
Jelikož je toto číslo dělitelné číslem 31 pro $n = 2$, je podle II. kroku dělitelné číslem 31 i pro $n = 3$ atd.;
je tedy číslo $Q_n = 5^{n+1} + 6^{2n-1}$ dělitelné číslem 31 pro každé přirozené číslo n.

6. Dokažte matematickou indukcí, že součin $(n + 1)(n + 2)$ je dělitelný dvěma pro každé přirozené číslo n.

7. Dokažte matematickou indukcí, že součin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný šesti.

8. Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.

9. Dokažte matematickou indukcí, že číslo $V_n = n^3 + 11n$ je dělitelné šesti pro každé přirozené číslo n.

10. Je-li $a > 1$ a n přirozené číslo, je $a^n > 1$. Dokažte to.

11. Je-li $a > 0$, $b > 0$, $a > b$ a n přirozené číslo, je $a^n > b^n$. Dokažte to.

12. Dokažte, že je $2^n > n$ pro každé přirozené číslo n.

13. Nerovnost $2^n > 2n + 1$ platí pro všechna přirozená čísla n větší než 2. Dokažte to.

14. Nerovnost $2^n > n^2$ platí pro všechna přirozená čísla n větší než 4. Dokažte to. [Návod: Sečtěte nerovnosti $2^n > n^2$ a $2^n > 2n + 1$.]

15. Je-li $x > -1$, $x \neq 0$ a n přirozené číslo větší než 1, dokažte, že platí $(1 + x)^n > 1 + nx$.

[Návod: Ukažte nejprve, že nerovnost platí pro $n = 2$, $x \neq 0$ a potom pro $n' = n + 1$ tak, že obě strany dané nerovnosti znásobíte kladným číslem $(1 + x)$.]

$\boxed{\textbf{16.}}$ Dokažte matematickou indukcí, že pro všechna přirozená čísla n platí vzorec $2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2(2^n - 1)$.

Řešení

I. krok: Pro $n = 1$ je vzorec správný, neboť $2^1 = 2(2^1 - 1)$.

II. krok: Dokážeme, že vzorec je správný též pro přirozené číslo $n' = n + 1$. Za tím účelem postupujme takto:

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n'} = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2(2^n - 1) + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n - 2 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 2 = 2(2^{n+1} - 1) = 2(2^{n'} - 1).$$

Výsledek správnost vzorce pro přirozené číslo $n' = n + 1$ potvrzuje.

Závěr: Uvedený vzorec platí pro všechna přirozená čísla n.

17. Dokažte matematickou indukcí, že platí:

a) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n + 1)(n + 2) = \dfrac{n}{4}(n + 1)(n + 2)(n + 3)$;

b) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{4}{3 \cdot 5} + \dfrac{9}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{n^2}{(2n - 1)(2n + 1)} = \dfrac{n(n + 1)}{2(2n + 1)}$.

18. Matematickou indukcí dokažte tyto vzorce:

a) $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$;

b) $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$;

c) $\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$;

d) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

***19.** Matematickou indukcí dokažte vzorce:

a) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \ldots + (-1)^{n-1} . n^2 =$
$= (-1)^{n-1} . \frac{n(n+1)}{2}$;

b) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \ldots + \frac{n}{x^n} = \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{x^n(x-1)^2}$; $x \neq 0$, $x \neq 1$.

***20.** Dokažte matematickou indukcí platnost vzorce

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots + \sin^n x = \frac{\sin x(\sin^n x - 1)}{\sin x - 1},$$

$x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

X. POSLOUPNOSTI

1. POJEM POSLOUPNOSTI, POSLOUPNOST OHRANIČENÁ, NULOVÁ, LIMITY POSLOUPNOSTÍ

1. Zobrazte na číselné ose první tři členy posloupnosti:

a) $\{n(2-n)\}$; b) $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n + (-1)^{n+1}\right\}$.

Určete člen šestý a sedmý.

2. V soustavě pravoúhlých souřadnic zobrazte prvé čtyři členy posloupnosti:

a) $\left\{\frac{12-n}{n^2}\right\}$; b) $\{n + (-1)^{n+1}\}$.

Určete člen desátý.

3. Přesvědčte se, že prvých šestnáct členů posloupnosti $\{n^2 - n + 17\}$ tvoří prvočísla. Ukažte, že sedmnáctý člen posloupnosti není prvočíslo.

4. Přesvědčte se, že posloupnosti $\{2^{2n-2}\}$ a $\{n^2\}$ mají prvé dva členy stejné. V jakém poměru jsou čtvrté členy obou posloupností?

5. Přesvědčte se, že posloupnosti $\{3-n\}$ a $\{3^n - n^3\}$ mají tři prvé členy stejné. O kolik se liší čtvrté členy obou posloupností?

6. Stanovte n-tý člen posloupností:

a) $\frac{1}{1\,.\,3}$; $\frac{1}{2\,.\,4}$; $\frac{1}{3\,.\,5}$; ..... f) $\frac{1}{1\,.\,2}$; $\frac{1}{2\,.\,3}$; $\frac{1}{3\,.\,4}$; .....

b) $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{7}{9}$; ..... g) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; ...

c) 1 ; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{4}$; ..... h) $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{9}{7}$; $\frac{16}{9}$; .....

d) 0 ; 3 ; 8 ; 15 ; 24 ; ..... i) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{16}$; .....

e) 1 ; − 1 ; 1 ; − 1 ; .....

7. V posloupnosti $\{nx + y\}$ je $a_1 = 13, a_2 = 18$.
Určete čísla x a y.

8. V posloupnosti $\{n^2x + ny + z\}$ je $a_1 = 15, a_2 = 26, a_3 = 41$.
Určete čísla x, y, z.

9. Dokažte, že posloupnost $\left\{\frac{2n+1}{n+2}\right\}$ je posloupnost rostoucí.

10. Dokažte, že posloupnost $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$ je posloupnost klesající.

11. Pro která čísla x je posloupnost $\left\{\frac{nx}{n+1}\right\}$ rostoucí, pro která klesající?

12. Pro která čísla x je posloupnost $\{kx^n\}$ rostoucí, pro která klesající, je-li k libovolné reálné číslo různé od nuly?

13. Napište prvých pět členů posloupnosti dané rekurentním vzorcem $a_{n+1} = 2a_n - 3a_{n-1}$, je-li $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ a zobrazte je v soustavě pravoúhlých souřadnic.

14. Napište prvých šest členů posloupnosti dané rekurentním vzorcem $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} - 2$, je-li $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ a zobrazte je na číselné ose.

15. Posloupnost je dána rekurentním vzorcem $a_{n+1} = a_n - a_{n-1} + d$, přičemž $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 10$. Určete číslo d a člen a_5.

16. Posloupnost je dána rekurentním vzorcem $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$, přičemž hodnotu členu a_1 udává kořen rovnice $\frac{x^4 + x^3}{(x+2)(x-1)} = x^2 + 2$.
Napište prvé čtyři její členy.

17. Posloupnost je dána rekurentním vzorcem $a_{n+1} = (n+1)a_n - na_{n-1}$, přičemž hodnoty členů a_1, a_2 udávají kořeny rovnice $\frac{x+3}{x-2} - \frac{x-2}{x+3} = \frac{5}{6}$. Určete hodnotu čísla a_3 za předpokladu, že $a_1 < a_2$.

18. Napište prvních pět členů posloupnosti dané rekurentním vzorcem $a_{n+1} = \frac{1}{n}a_n$, jestliže hodnotu členu a_1 udává přirozené číslo vyhovující nerovnosti $\frac{3x-2}{4} - \frac{1-2x}{5} < 5 - \frac{x+1}{2}$. Kolikaznačná je úloha?

19. Určete posloupnost $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$ rekurentním vzorcem.

Řešení

Posloupnost $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$ je dána n-tým členem, který je funkcí indexu n. Její členy jsou: $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{6}$; $a_3 = \frac{1}{12}; \ldots;$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}; \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdots .$$

Abychom zjistili vztah mezi členem a_{n+1} a členem a_n této posloupnosti, upravme a_{n+1} takto:

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} = \frac{n}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{n+2} =$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{n}{n+2} = a_n \cdot \frac{n}{n+2}.$$

Rekurentní vzorec, který udává vztah mezi členem a_{n+1} a členem a_n dané posloupnosti, má tvar $a_{n+1} = \dfrac{n}{n+2} a_n$.

Tímto vzorcem však daná posloupnost není ještě určena. Je třeba znát hodnotu jednoho členu posloupnosti, nejlépe členu a_1. V našem případě je $a_1 = \dfrac{1}{2}$.

Závěr: Posloupnost $\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$ je určena rekurentním vzorcem $a_{n+1} =$ $= \dfrac{n}{n+2} a_n$ a prvním členem posloupnosti $a_1 = \dfrac{1}{2}$.

20. Určete posloupnost $\{n(n+1)\}$ rekurentním vzorcem a prvním členem.

21. Určete posloupnost $\{\log x^n\}$, $x > 0$ rekurentním vzorcem a prvním členem.

22. Určete rekurentně posloupnosti:

a) $\{n^0\}$; b) $\{3^n\}$; c) $\{2n+1\}$; d) $\{-1\}$; e) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$; f) $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$.

23. Posloupnost je dána rekurentním vzorcem $a_{n+1} = 2 - a_n$, přičemž $a_1 = 0$. Sledujte jednotlivé členy této posloupnosti a určete její n-tý člen jako funkci indexu n.

24. Posloupnost je dána rekurentním vzorcem $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(3a_n - a_{n-1})$, přičemž $a_1 = 2$, $a_2 = 1$. Určete a_n jako funkci indexu n.

25. Je-li dán rekurentní vzorec posloupnosti $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, určete a_n jako funkci indexu n.

26. Je-li a) $a_{n+1} = a_n + 2$; $a_1 = 3$, b) $a_{n+1} = \dfrac{n+2}{n} \cdot \dfrac{1}{a_n}$; $a_1 = 2$, určete a_n jako funkci indexu n.

27. Vyhovují-li členy posloupnosti rekurentnímu vzorci $a_{n+1} = n \,.\, a_n$, vyhovují také vzorci $a_{n+1} = (n+1)a_n - (n-1)\, a_{n-1}$.

Dokažte. Ověřte si toto tvrzení také na členech a_3, a_4, a_5, je-li $a_1 = a_2 = 1$. [Návod: Z prvního vzorce plyne vztah $a_n' = (n-1)a_{n-1}$; utvořte $a_{n+1} - a_n$.]

28. Vyhovují-li členy posloupnosti rekurentnímu vzorci $a_{n+1} = (n+1)a_n + (-1)^{n+1}$, vyhovují též vzorci $a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1})$. Dokažte.
[Návod: Z prvního vzorce plyne vztah $a_n = na_{n-1} + (-1)^n$; utvořte $a_{n+1} + a_n$.]

29. Posloupnost je dána vzorcem $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$. Dokažte, že člen $a_{n+3} = -a_n$ a $a_{n+6} = a_n$.
[Návod: Z rekurentního vzorce určete a_{n+2} a a_{n+3} a sečtěte.]

30. Ověřte si na číselné ose, že posloupnost a) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, b) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ je ohraničená.
[Poznámka: Posloupnost $\{a_n\}$ je ohraničená, existuje-li kladné číslo K, které splňuje nerovnost $K > |a_n|$ pro všechny indexy n.]

31. Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ohraničené, je i posloupnost $\{a_n + b_n\}$ ohraničená. Dokažte to.

Řešení

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená, existuje kladné číslo K, které splňuje nerovnost $K > |a_n|$ pro všechny indexy n. Je-li posloupnost $\{b_n\}$ ohraničená, existuje kladné číslo H, které splňuje nerovnost $H > |b_n|$ pro všechny indexy n.
Nerovnosti $K > |a_n|$, $H > |b_n|$ jsou souhlasné, mají kladné členy a můžeme je sečíst.
Platí: $K + H > |a_n| + |b_n| \geqq |a_n + b_n|$ pro všechny indexy n.

Závěr: Existuje tedy kladné číslo $K + H > |a_n + b_n|$, z čehož plyne, že posloupnost $\{a_n + b_n\}$ je ohraničená.

32. Ověřte si na číselné ose, že posloupnost $\left\{\frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n}\right\} = \left\{2 + \frac{1}{n(n+1)}\right\}$ je ohraničená.

33. Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ ohraničené, je i posloupnost $\{a_n \,.\, b_n\}$ ohraničená. Dokažte.

34. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená a c libovolné číslo, je i posloupnost $\{ca_n\}$ ohraničená. Dokažte.

35. Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ohraničené a c, d libovolná čísla, je i posloupnost $\{ca_n + db_n\}$ ohraničená. Dokažte.

36. Dokažte, že posloupnost a) $\left\{\dfrac{2n}{n+1} + \dfrac{n+1}{3n}\right\}$, b) $\left\{3 + \dfrac{1}{2n}\right\}$ je ohraničená.

37. Která z posloupností $\{3n + 5\}$, $\{2 - 3n\}$, $\left\{\dfrac{1}{2 - 3n}\right\}$ je ohraničená?

38. Dokažte, že posloupnost $\{q^n\}$ je ohraničená pro každé číslo q, o kterém platí vztah $|q| = 1$.

39. Dokažte, že posloupnost $\left\{\dfrac{n^2}{n^2 + 2n + 1}\right\}$ je ohraničená.

40. Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ nulové, je i posloupnost $\{a_n + b_n\}$ nulová. Dokažte.

41. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ nulová a $\{b_n\}$ ohraničená, je posloupnost $\{a_n b_n\}$ nulová. Dokažte to. Je také posloupnost $\{ca_n\}$ nulová, kde c je libovolné číslo?

42. Dokažte, že jsou nulové posloupnosti:

a) $\left\{\dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{3n}\right\}$; b) $\left\{\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\right\}$; c) $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$; d) $\left\{\dfrac{n+1}{n^2}\right\}$; e) $\{0\}$;

f) $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$; g) $\left\{\dfrac{1 + (-1)^{n+1}}{n}\right\}$; h) $\left\{-\dfrac{2}{n}\right\}$; i) $\left\{\dfrac{1}{2n-1}\right\}$;

j) $\left\{\dfrac{2}{1 - 3n}\right\}$.

43. Od kterého členu počínaje jsou všechny členy posloupnosti

a) $\left\{\dfrac{1}{2 + 3n}\right\}$, b) $\left\{\left|\dfrac{1}{1 - 2n}\right|\right\}$ menší než $\dfrac{1}{1000}$?

44. Dokažte, že posloupnost $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ má limitu rovnou číslu 1.

45. Je-li $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, dokažte, že platí:

a) $\lim (a_n + b_n) = a + b$; b) $\lim (a_n - b_n) = a - b$;

c) $\lim a_n b_n = ab$; d) $\lim ca_n = ca$; c je libovolné číslo;

e) $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, $b \neq 0$.

46. Určete limitu posloupnosti $\{ra_n + sb_n\}$, je-li $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ a r, s jsou libovolná čísla.

47. Určete limitu posloupnosti $\{a_n^r\}$, je-li $\lim a_n = a \neq 0$ a r číslo celé.

$\boxed{\textbf{48.}}$ Určete limitu posloupnosti $\left\{\dfrac{3n+8}{n+2}\right\}$.

Řešení

Můžeme postupovat takto:

A. $$\lim \frac{3n+8}{n+2} = \lim \frac{(3n+6)+2}{n+2} = \lim \frac{3(n+2)+2}{n+2} =$$
$$= \lim \left(3 + \frac{2}{n+2}\right) = \lim 3 + 2 \lim \frac{1}{n+2} = 3 + 2 \, . \, 0 = 3 \, .$$

B. $$\lim \frac{3n+8}{n+2} = \lim \frac{3 + \frac{8}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{\lim \left(3 + \frac{8}{n}\right)}{\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{\lim 3 + 8 \lim \frac{1}{n}}{\lim 1 + 2 \lim \frac{1}{n}} =$$
$$= \frac{3 + 8 \, . \, 0}{1 + 2 \, . \, 0} = 3 \, .$$

Závěr: $\lim \dfrac{3n+8}{n+2} = 3$.

49. Jakou limitu mají posloupnosti:

a) $\left\{\dfrac{2n+1}{n+2}\right\}$; b) $\left\{\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right\}$; c) $\left\{\dfrac{2n}{n^{-2}+1}\right\}$; d) $\{2^n\}$;

e) $\{(-1)^n\}$; f) $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$; g) $\left\{\dfrac{2n^2+3n-1}{3n^2-2n+1}\right\}$.

50. Určete limitu posloupnosti

a) $\left\{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^r\right\}$, kde r je číslo celé;

b) $\left\{\dfrac{an+b}{cn+d}\right\}$, jsou-li a, b, c, d libovolná čísla, přičemž $c \neq 0$;

*c) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, n je číslo přirozené.

2. ARITMETICKÉ A GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI

51. Určete prvých pět členů posloupnosti $\{1 + 3n\}$, $\left\{\dfrac{a+n}{2}\right\}$, $\{2 + bn\}$ a dokažte, že jsou aritmetické. Stanovte jejich diference a rekurentní vzorce.

52. Napište prvé čtyři členy posloupnosti $\left\{\frac{a + 1 - 2n}{b}\right\}$, $b \neq 0$ a dokažte, že je aritmetická. Určete její diferenci a rekurentní vzorec. Pro která čísla b je tato posloupnost rostoucí?

53. Určete, za kterých podmínek je posloupnost $\left\{\frac{a + bn}{c}\right\}$, $c \neq 0$ posloupností rostoucí, za kterých klesající a kdy se stane posloupností, v níž všechny členy jsou si rovny.

54. Sledujte posloupnost $a_1 = \frac{n-1}{n}$, $a_2 = \frac{n-2}{n}$, $a_3 = \frac{n-3}{n}$ atd. Jak velká je její diference, n-tý člen a součet prvých n-členů?

55. Ukažte, že součet prvých n-členů posloupnosti $\{2n - 1\}$ je $S_n = n^2$. Z toho plyne, že druhou mocninu každého přirozeného čísla lze nahradit součtem lichých, po sobě jdoucích přirozených čísel, z nichž nejmenší je 1. Na základě toho rozepište čísla 16, 49, 100. Čím je udán počet sčítanců takového součtu?

56. Oč je součet prvých 100 přirozených čísel sudých větší než součet prvých 100 přirozených čísel lichých?

57. Který člen posloupnosti přirozených čísel se rovná součtu všech členů předcházejících?

58. Upravte výraz: $\frac{n^4 + n}{1 + 2 + 3 + \ldots + n}$.

59. Určete součet všech navzájem různých přirozených čísel vyhovujících nerovnosti:

$$2\left(\frac{15x}{2} + 3\right) - \frac{42 - 9x}{2} < 6 \,.\, (3x + 1)\,.$$

60. V aritmetické posloupnosti je prvý člen $a_1 = 1$ a diference $d = 3$. Určete člen a_n a ukažte, že je funkcí počtu členů n. Načrtněte graf této funkce v soustavě pravoúhlých souřadnic.

61. V aritmetické posloupnosti je prvý člen $a_1 = 1$ a diference $d = 2$. Určete součet prvých n-členů S_n a ukažte, že je funkcí počtu členů n. Načrtněte graf této funkce v soustavě pravoúhlých souřadnic.

62. Součet prvých n členů aritmetické posloupnosti je $n + n^2$. Stanovte její diferenci a r—tý člen.
[Návod: $a_1 = 1 + 1^2$, $a_1 + a_2 = 2 + 2^2$, $a_1 + a_2 + a_3 = 3 + 3^2$, atd.; odtud lze zjistit velikost jednotlivých členů posloupnosti a diferenci.]

63. Součet prvých n-členů aritmetické posloupnosti je $4n^2 - 3n$. Určete diferenci a n-tý člen.

64. V aritmetické posloupnosti je prvý člen $a_1 = 3$, diference $d = 2$. Kolik členů dává součet $S_n = 120$?

65. Doplňte zbývající čísla v tabulce:

a_1	d	n	a_n	S_n
1	$\frac{2}{3}$	100		
0			5	27,5
-6	$\frac{3}{4}$		$15 + \frac{3}{4}$	
	2		-10	-360

66. V aritmetické posloupnosti je člen $a_4 = a$, $a_7 = b$. Vypočítejte diferenci d, členy a_1, a_{10} a součet prvých deseti členů S_{10}. Proveďte též pro $a = 3{,}4$; $b = 5{,}8$.

67. Kolik trojciferných čísel je dělitelno sedmi?

68. Kolik trojciferných čísel je zakončených číslicí 6?

69. Mezi kořeny rovnice $x^2 + x - 12 = 0$ vložte třináct čísel tak, aby s těmito kořeny tvořila prvních 15 členů aritmetické posloupnosti. Vypište členy této posloupnosti.

70. Mezi čísla $\frac{a-b}{2}$ a $\frac{a+b}{2}$ vložte tři čísla tak, aby s danými čísly tvořila prvých 5 členů aritmetické posloupnosti. Vypište členy této posloupnosti.

71. Mezi čísla 1 a 25 vložte tolik čísel, aby s danými čísly tvořila aritmetickou posloupnost o součtu 117. Určete čísla vložená a jejich počet.

72. V které aritmetické posloupnosti platí:
$a_1 + a_5 = 16$, $\qquad a_3 + a_4 = 19$?

73. V které aritmetické posloupnosti platí:
$a_1 + a_7 = 22$, $\qquad a_3 \,.\, a_4 = 88$?

$\boxed{\textbf{74.}}$ V které aritmetické posloupnosti je $S_5 = S_6 = 60$?

Řešení

Zřejmě tu platí vztahy

$$S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = 60 \ldots\ldots\ldots (1),$$

$$S_6 = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = 60 \ldots\ldots\ldots (2).$$

Jelikož $a_5 = a_1 + 4d$, $a_6 = a_1 + 5d$, dospějeme po jednoduché úpravě vztahů (1) a (2) k soustavě rovnic

$a_1 + 2d = 12$,

$2a_1 + 5d = 20$,

odkud $a_1 = 20$, $d = -4$.

Závěr: V posloupnosti 20, 16, 12, 8, 4, 0, ... je $S_5 = S_6$.

75. Číslo 55 rozložte v součet takových čísel, aby každé následující bylo o 4 větší než předcházející a poslední bylo 19. Která jsou to čísla a kolik je jich?

76. Součin tří po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti se rovná jejich součtu. Určete tyto členy, víte-li, že diference posloupnosti je $\frac{13}{3}$.

[Návod: Za neznámou volte prostřední člen.]

***77.** Najděte tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, víte-li, že jejich součet je $3x$ a jejich součin $x^3 - 4$, přičemž $x > 0$. Pro která čísla x jsou tyto členy racionální?

78. Součet prvých devíti členů aritmetické posloupnosti je 108. Určete je, víte-li, že jsou to čísla přirozená.

[Návod: Snažte se dospět k rovnici $a_1 = 12 - 4d$, v níž d musí být číslem celým a $a_1 < 24$, neboť $a_1 + a_9 = 24$.]

79. V aritmetické posloupnosti, jejíž první člen $a_1 = 30$ a diference $d = -3$, určete člen, který se rovná $\frac{1}{8}$ součtu všech členů předcházejících.

80. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Delší odvěsna má délku 24 cm. Jak velké jsou jeho strany a úhly?

81. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou dlouhé, je-li jeho obsah 6 dm^2?

82. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou velké, měří-li poloměr kružnice trojúhelníku vepsané 7 cm?

83. Existuje vypuklý n-úhelník, jehož nejmenší vnitřní úhel má velikost 126° a jehož každý následující vnitřní úhel má velikost o 4° větší než úhel předcházející?

Řešení

Předpokládejme, že takový n-úhelník existuje. Velikosti jeho vnitřních úhlů tvoří aritmetickou posloupnost, jejíž prvý člen $a_1 = 126$, diference

$d = 4$ a součet prvých n členů $S_n = (n - 2) \, . \, 180$. (Údaje jsou ve stupních, n znamená počet vrcholů hledaného n-úhelníka.)

Dosadíme-li uvedené hodnoty do rovnice $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, kde $a_n = a_1 + (n - 1)d$, dospějeme k rovnici

$(n - 2) \, . \, 180 = \frac{126 + 126 + 4(n - 1)}{2} \cdot n$, která po upravení má tvar

$n^2 - 28n + 180 = 0$ a kořeny $n_1 = 10$, $n_2 = 18$.

Úloze vyhovuje jen řešení $n_1 = 10$. (Desetiúhelník, jehož vnitřní úhly mají velikosti 126°, 130°, 134°, 138°, 142°, 146°, 150°, 154°, 158°, 162°, je tedy vypuklý.)

Řešení $n_2 = 18$ úloze nevyhovuje. (Osmnáctiúhelník, jehož nejmenší vnitřní úhel má velikost 126° a největší $126° + 17 \, . \, 4° = 194°$, není tedy vypuklý.)

Závěr: n-úhelník požadované vlastnosti existuje. Je to vypuklý desetiúhelník.

84. Rozměry kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou velké, měří-li jejich součet 24 cm a objem kvádru 312 cm^3?

85. Na střeše tvaru lichoběžníka jsou srovnány tašky do řad tak, že při hřebenu je 85 tašek a v každé následující řadě o jednu tašku více než v řadě předcházející. Kolika taškami je pokryta střecha, má-li řada při okapu 100 tašek?

86. Železné roury se skládají do vrstev tak, že roury každé vrstvy horní zapadají do mezer vrstvy dolní. Do kolika vrstev se složí 102 roury, má-li nejhořejší vrstva tři roury? Kolik rour má vrstva nejspodnější?

87. Kolikrát uhodí palička hodinového stroje v časovém intervalu od 0 hodin do 12 hodin, tluče-li vedle počtu celých hodin také všechny čtvrtě? (První čtvrt značí jedním úderem, druhou dvěma atd.)

88. Teploty Země přibývá do hloubky o 1 °C na 33 m. Jaká je teplota na dně dolu 1015 m hlubokého, je-li v hloubce 25 m teplota 9 °C?

89. Volně padající těleso proběhne za první sekundu dráhu $\frac{g}{2}$ m a za každou následující sekundu dráhu o g m větší než za sekundu předcházející. Jakou dráhu vykoná za t sekund (bez odporu vzduchu)?

90. Těleso, které se pohybuje rovnoměrně zpomaleně, proběhne za první sekundu dráhu $c - \frac{a}{2}$ a za každou následující sekundu dráhu o a kratší než za sekundu předcházející. Jakou dráhu proběhne za t sekund?

91. Po kružnici se pohybují dva hmotné body M_1 a M_2, které se začaly pohybovat současně proti sobě z téhož bodu A. Bod M_1 proběhne za první minutu oblouk přináležející středovému úhlu $\alpha_1 = \frac{R}{30} = 3°$ a pak zvyšuje svoji rychlost tak, že vykazuje za každou následující minutu přírůstek oblouku příslušný středovému úhlu $\beta_1 = \frac{R}{90} = 1°$ vzhledem k minutě předcházející.
Bod M_2 proběhne za první minutu oblouk příslušný středovému úhlu $\alpha_2 = \frac{R}{60} = 1\frac{1°}{2}$ a za každou následující minutu zvětšuje proběhnutý oblouk o přírůstek patřící středovému úhlu $\beta_2 = \frac{R}{15} = 6°$ vzhledem k minutě předcházející. Za jakou dobu se body M_1 a M_2 poprvé setkají?

92. Na přímočaré dráze vyrazila současně z místa M dvě vozidla týmž směrem. Vozidlo A jelo rychlostí 20 m/s, vozidlo B ujelo za první sekundu 12 m a za každou následující sekundu o 2 m více než za předcházející sekundu. Za jakou dobu dohonilo vozidlo B vozidlo A?

93. Jsou-li a, b libovolná reálná čísla, dokažte, že výrazy $(a - b)^2$, $a^2 + b^2$, $(a + b)^2$ tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

94. Je-li součet prvých n- členů aritmetické posloupnosti $S_n = 0$, je $a_n = -a_1$. Dokažte.

95. Jsou-li a_{k-1}, a_k, a_{k+1} tři po sobě jdoucí racionální členy aritmetické posloupnosti, je $a_k^2 - a_{k-1} \cdot a_{k+1}$ druhou mocninou dvojčlenu. Dokažte to.

96. Jsou-li a_{k-1}, a_k, a_{k+1} tři po sobě jdoucí racionální členy aritmetické posloupnosti, má rovnice $a_{k-1}x^2 + 2a_kx + a_{k+1} = 0$, $a_{k-1} \neq 0$ racionální kořeny. Dokažte to.

97. Dokažte, že v posloupnosti přirozených čísel má každé číslo tvaru $2k + 1$ hodnotu rovnou k-tému dílu součtu všech čísel předcházejících. Ukažte správnost tohoto tvrzení též na některých příkladech ($k = 5$, 7, 10).

98. Jestliže čísla x, y, z tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, tvoří i čísla $x^2 + xy + y^2$, $x^2 + xz + z^2$, $y^2 + yz + z^2$ tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Dokažte. [Návod: $x = y - d$, $z = y + d$.]

$\boxed{\textbf{99.}}$ Jestliže výrazy $\frac{1}{b + c}$, $\frac{1}{c + a}$, $\frac{1}{a + b}$, v nichž čísla a, b, c nabývají přípustných hodnot, tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, pak také čísla a^2, b^2, c^2 tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Dokažte.

Řešení

Jelikož mezi třemi po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti a_k, a_{k+1}, a_{k+2} platí vztah $a_{k+1} = \dfrac{a_k + a_{k+2}}{2}$, jsou vázána čísla a, b, c vztahem

$$\frac{1}{a+c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}\right).$$

Tento vztah upravujme takto:

$$\frac{1}{a+c} = \frac{a+2b+c}{2(a+b)(b+c)},$$

$$2(a+b)(b+c) = (a+c)(a+c+2b),$$

$$2(a+b)(b+c) = (a+c)^2 + 2b(a+c),$$

$$2ab + 2b^2 + 2ac + 2bc = a^2 + 2ac + c^2 + 2ab + 2bc,$$

$$2b^2 = a^2 + c^2,$$

$$b^2 = \frac{a^2+c^2}{2}.$$

Poslední rovnice ukazuje, že čísla a^2, b^2, c^2 tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

Závěr: Tvoří-li výrazy $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{a+c}$, $\dfrac{1}{a+b}$ tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, pak tuto vlastnost mají i čísla a^2, b^2, c^2.

100. Stanovte prvých pět členů posloupností $\{3^{n-2}\}$, $\left\{\dfrac{5c^{n+2}}{2}\right\}$, $\left\{\dfrac{x^{n-1}}{y^{n+3}}\right\}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ a ukažte, že jsou geometrické. Určete jejich kvocienty a rekurentní vzorce.

101. Napište prvé čtyři členy posloupnosti $\left\{\dfrac{2}{x^n}\right\}$, $x > 0$; pro která čísla x je posloupnost rostoucí, pro která klesající a pro která jsou všechny členy posloupnosti sobě rovny? Dokažte dále, že posloupnost je geometrická.

102. V geometrické posloupnosti je prvý člen $a_1 = 1$ a kvocient $q = 2$. Určete člen a_n a ukažte, že je funkcí počtu členů n. Znázorněte graf této funkce v soustavě pravoúhlých souřadnic.

103. Jak velký je součet prvých pěti členů posloupnosti $\left\{\dfrac{3^{n-1}}{2^{n-8}}\right\}$?

104. Jak velký je součet prvých n členů posloupnosti $\left\{\dfrac{2^n-1}{2^n}\right\}$?

[Návod: $\dfrac{2^n-1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$; $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.]

105. V geometrické posloupnosti je $a_1 = 81$, $a_2 = 54$. Určete součet všech těch členů posloupnosti, jež jsou čísla celá.

106. Doplňte zbývající čísla v tabulce:

a_1	q	n	a_n	S_n	a_1	q	n	a_n	S_n
1	3	10			$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{128}$	$\frac{127}{128}$
	$\frac{1}{2}$	8	2		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6561}$	
2		7	1458						
	3		567	847					
						-2	19	262 144	
						-3	4	121,5	

107. Je dána posloupnost $a_1 = a^{10}$, $a_2 = a^9 b$, $a_3 = a^8 b^2$ atd. Určete její kvocient, n-tý člen a součet prvých n členů.

108. V geometrické posloupnosti je $a_2 = a$, $a_5 = b$. Určete jedenáctý člen.

109. Jsou-li a, b reálná čísla a $a + b \neq 0$, $a - b \neq 0$, dokažte, že výrazy $(a - b)^2$, $\dfrac{a - b}{a + b}$, $\dfrac{1}{(a + b)^2}$ tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.

110. Jestliže v rovnici $ax^2 + 2bx + c = 0$ tvoří nenulová čísla a, b, c tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti, má rovnice dvojnásobný kořen. Dokažte.

$\left[\text{Návod: } a = \dfrac{b}{q},\ c = bq.\right]$

111. V geometrické posloupnosti je kvocient $q = 2$, n-tý člen $a_n = 5\frac{1}{3}$ a součet prvých n členů $S_n = 10\frac{1}{2}$. Určete počet členů.

112. Udejte velikost součinu prvých n členů geometrické posloupnosti na základě a_1, q, n.

113. Mezi kořeny rovnice $x^2 - 9x + 8 = 0$ vložte dvě čísla tak, aby vznikly čtyři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Vypište je.

114. Mezi čísla a^9 a b^8 ($a \neq 0$, $b \neq 0$) vložte sedm čísel tak, aby vznikla geometrická posloupnost. Vypište její členy.

115. Mezi čísla 5 a 640 vložte tolik čísel, aby vznikla geometrická posloupnost, v níž součet vložených čísel je 630. Vypište je.

116. Součet čtyř po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti je 80. Určete je, víte-li, že člen poslední je devětkrát větší než člen druhý.

117. V geometrické posloupnosti je $a_2 - a_1 = 15$, $a_3 - a_2 = 60$. Určete S_4.

118. V geometrické posloupnosti je $a_1 + a_2 + a_3 = 35$, $a_4 + a_5 + a_6 = 280$. Určete prvých šest členů.

119. Jak velký je pátý člen geometrické posloupnosti, ve které platí: $a_1 + a_4 = 56$, $a_2 + a_3 = 24$?

$\boxed{\textbf{120.}}$ Přičteme-li k číslům 2, 7, 17 totéž číslo, vzniknou prvé tři členy geometrické posloupnosti. Určete je.

Řešení

Označme x číslo, které je nutno přičíst k číslům 2, 7, 17, aby vznikly tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Potom $a_1 = 2 + x$, $a_2 = 7 + x$ a $a_3 = 17 + x$. Jelikož mezi třemi po sobě jdoucími členy geometrické posloupnosti a_k, a_{k+1}, a_{k+2} platí vztah $a^2_{k+1} = a_k \cdot a_{k+2}$, je

$$(7 + x)^2 = (2 + x)(17 + x).$$

Uvedené rovnici vyhovuje číslo $x = 3$.

Jsou tedy členy naší posloupnosti $a_1 = 5$, $a_2 = 10$, $a_3 = 20$.

Závěr: Přičteme-li k číslům 2, 7, 17 číslo 3, vzniknou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti 5, 10, 20.

121. Délky stran a, b, c trojúhelníka ABC tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Jak jsou velké, je-li jeho obvod $o = 42$ cm a délka strany $b = 8$ cm?

122. Kratší úhlopříčka, strana a delší úhlopříčka kosočtverce mají délky, které tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Vypočítejte velikosti úhlů kosočtverce.

***123.** Obsah rovnoramenného lichoběžníka $P = 54$, součin délek obou základen $z_1 \cdot z_2 = 18$. Jak velké jsou jeho úhly, tvoří-li z_1, z_2 a výška v tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti?

124. Jak velký je ostrý úhel α, tvoří-li $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti?

125. Je dán čtverec, jehož strana má délku a. Spojíte-li středy jeho stran, dostanete nový čtverec, spojíte-li středy stran tohoto nového čtverce, dostanete zase čtverec atd. Jak velký je obsah čtverce, který vznikne desátým členěním?

***126.** Je dán čtverec, jehož strana má délku a. Rozdělte každou jeho stranu na tři stejné díly a nad každým středním dílem sestrojte čtverec vně obrazce. Každou stranu takto vzniklého útvaru rozdělte opět na tři stejné díly a nad středními díly sestrojte čtverec vně útvaru atd. Kolik stran a jak velký obvod má útvar, který vznikne, opakuje-li se postup n-krát?

127. Povrch kvádru je 78 cm^2, součet jeho rozměrů 13 cm. Jak velký je jeho objem, tvoří-li rozměry tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti?

128. Baktérie se množí půlením tak, že k dělení dojde v příznivých podmínkách vždy za půl hodiny. Kolik baktérií vznikne za 12 hodin z jedné baktérie?

129. V nádobě je m gramů radonu. Jaké množství radonu zbude v nádobě za 36 dní, je-li poločas rozpadu radonu 4 dny? (Za každé 4 dny se rozpadne polovina jeho množství.) Jaké množství radonu by zbylo v nádobě za $4 \,.\, t$ dny? Seřaďte jednotlivá množství radonu za $4 \,.\, t$ dny do posloupnosti a vyšetřete ji ($t = 0, 1, 2 \ldots$).

130. Poločas rozpadu rádia C je asi 20 minut. Jaké množství rádia C zbude za 4 hodiny z původního množství 1 mg? Jaké množství zbude za dobu t (v hodinách)?

131. Tlaku vzduchu ubývá se stoupající výškou asi o 1,2 % na každých 100 m při stálé teplotě. Jaký je tlak na vrcholu Sněžky, je-li tlak na hladině mořské 760 torr? [Návod: Ve výšce $n \,.\, 100$ m je barometrický tlak $b = 760 \left(1 - \frac{1,2}{100}\right)^n$ torr. Proč?]

***132.** Dokažte, že pro vypočítání výškového rozdílu dvou míst platí přibližný vzorec $d = 19\,230\,(\log b_1 - \log b_2)$, v němž b_1 a b_2 jsou naměřené tlaky ve výškách h_1 a h_2 ($h_2 > h_1$). [Návod: Jako ve cvičení předešlém. Podíl $b_2 : b_1$ pak logaritmujte.]

133. Z jaké výšky byla spuštěna pružná koule, která se odrazila od země celkem osmkrát a po osmém odrazu odskočila ještě do výše $\frac{1}{2}$ m, vyletěla-li po každém dopadu do $\frac{4}{5}$ té výše, ze které spadla?

***134.** V temperovaném ladění se dělí každá oktáva na 12 půltónů, jejichž kmitočty tvoří geometrickou posloupnost. Jak velký je kvocient této posloupnosti? Jaké kmitočty mají tóny c^1, d^1, má-li tón a^1 kmitočet 440 Hz?

135. V nádobě je 25 l vody s teplotou 100 °C. Odebere se 1 l a nalije se místo něho 1 l vody s teplotou 0 °C. Pak se odebere z nádoby 1 l směsi a dolije se opět jedním litrem vody s teplotou 0 °C atd. Jakou teplotu má voda v nádobě, opakuje-li se tento postup desetkrát? Kolikrát je nutno postup opakovat, má-li teplota vody v nádobě klesnout na 50 °C?

136. Roste-li výroba každý rok o 10 %, o kolik procent vzroste do konce pětiletky?

Řešení

Označíme-li V_0 objem výroby na počátku prvního roku, pak na konci prvního roku má výroba objem $V_1 = V_0 + \frac{V_0 \,.\, 10}{100} = V_0(1 + 0{,}1) = V_0 \,.\, 1{,}1$, na konci druhého roku objem $V_2 = V_1 + \frac{V_1 \,.\, 10}{100} = V_1(1 + 0{,}1) = V_1 \,.\, 1{,}1 = V_0 \,.\, 1{,}1^2$, na konci třetího roku objem $V_3 = V_2 + \frac{V_2 \,.\, 10}{100} = V_2 \,.\, 1{,}1 = V_0 \,.\, 1{,}1^3$, na konci čtvrtého roku objem $V_4 = V_3 + \frac{V_3 \,.\, 10}{100} = V_3 \,.\, 1{,}1 = V_0 \,.\, 1{,}1^4$ a na konci pátého roku objem $V_5 = V_4 + \frac{V_4 \,.\, 10}{100} = V_4 \,.\, 1{,}1 = V_0 \,.\, 1{,}1^5$.

Přiřadíme-li objemu V_0 číslo 100, potom objemu V_5 je přiřazeno číslo
$\frac{100\, V_5}{V_0} = \frac{100 \,.\, V_0 \,.\, 1{,}1^5}{V_0} = 100 \,.\, 1{,}1^5 \doteq 161$.

Ze srovnání čísel 100 a 161 je patrno, že do konce pětiletky vzroste objem výroby o 61 procent.

Závěr: Roste-li výroba rok od roku o 10 %, vzroste do konce pětiletky o 61 %.

137. Stroj ztrácí opotřebováním každý rok p procent ze své ceny. Za jakou dobu klesne jeho cena na polovinu? Též pro $p = 4{,}5$.

138. Počet obyvatelů města vzrostl za 10 let z 25 000 na 33 600. Jaký byl roční přírůstek v procentech?

139. V lese bylo odhadnuto množství dřeva na 4000 m³. Jaké množství dřeva bude v lese za 3 roky, jestliže se počítá s ročním přírůstkem 2,2 % a během každého roku se poraží a odveze 200 m³ dřeva?
[Návod: Počítejte množství dřeva, které v lese zbude ke konci prvého, druhého a třetího roku.]

140. Odvoďte, na jakou částku vzroste vklad K při p % celoročním složeném úrokování za n roků. Potvrďte správnost vzniklého vzorce matematickou indukcí.

[Návod: $K_1 = K + \frac{Kp}{100} = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)$, $K_2 = K_1 + \frac{K_1 p}{100} =$
$= K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$ atd., odtud usuďte na K_n, tj. na hodnotu vkladu K na konci n-tého roku.]

141. Na jakou částku vzroste vklad 5 000 Kčs za 12 let při 2% celoročním složeném úrokování? Na jakou částku by vzrostl uvedený vklad, kdyby se úrokovalo jednoduše? Kolik činí úroky z úroků?

[Návod: Využijte vzorce z úlohy 90.]

142. Jak velký vklad vzroste za 15 let na 1 346 Kčs, úrokuje-li se 2 % celoročně?

143. Při které procentové míře vzroste vklad uložený do peněžního ústavu za 11 let o 25 %?

144. Za jakou dobu se vklad vložený do peněžního ústavu při 2% celoročním složeném úrokování zdvojnásobí?

145. Vklady s okamžitou výpovědní lhůtou se úrokují 2 % celoročně, vklady s tříměsíční výpovědní lhůtou 3 % celoročně. Za jakou dobu vzroste 10 000 Kčs uložených na 2 % a 9 711 Kčs uložených na 3 % na stejnou výši?

Řešení

Označme x počet let, za který vzrostou obě uvedené částky na stejnou výši.

První částka vzroste při 2 % celor. slož. úrokování za x let na $10\,000 \,.\, 1{,}02^x$ Kčs, druhá částka při 3 % cel. slož. úrokování za x let na $9\,711 \,.\, 1{,}03^x$ Kčs.

Podle podmínky úlohy je

$10\,000 \,.\, 1{,}02^x = 9\,711 \,.\, 1{,}03^x$.

Logaritmujeme-li obě strany této rovnice, dostaneme

$4 + x \log 1{,}02 = \log 9\,711 + x \log 1{,}03$, odkud

$$x = \frac{4 - \log 9\,711}{\log 1{,}03 - \log 1{,}02} = \frac{4 - 3{,}98726}{0{,}01284 - 0{,}00860} = \frac{0{,}01274}{0{,}00424} =$$
$$= \frac{1274}{424} \doteq 3\,.$$

Závěr: Za 3 roky vzrostou obě částky na stejnou výši.

***146.** JZD si vypůjčilo 100 000 Kčs a zavázalo se, že je splatí dvěma stejnými splátkami, z nichž jedna bude splatná za dva roky, druhá za 4 roky ode dne vypůjčení. Jak velké budou tyto splátky při 2% celoročním složeném úrokování?

[Návod: Počítejte hodnoty splátek ke dni vypujčení.]

147. Podnik má zaplatit výrobnímu družstvu za 3 roky 60 000 Kčs. Zaplatí však 50 000 Kčs ihned a zbytek chce vyplatit po roce. Kolik činí zbytek při 3 % celoročním složeném úrokování?

148. Kuřák prokouří ročně průměrně 1 800 Kčs. Kolik by si uspořil za 10 let, kdyby tuto částku ukládal koncem každého roku do spořitelny při 2 % celoročním složeném úrokování?

[Návod: Prvý vklad by vzrostl do konce 10. roku na $1\,800 \,.\, 1{,}02^9$, druhý na $1\,800 \,.\, 1{,}02^8$ atd.]

***149.** Jakou částkou, vloženou počátkem roku, se zajistí důchod ročních 1 000 Kčs, splatný vždy koncem každého roku a trvající 10 let při 2% celoročním složeném úrokování?

[Návod: Počítejte hodnoty jednotlivých částek k počátku prvého roku.]

150. Národní podnik zakoupil stroj za 300 000 Kčs, a tím se zlevnil provoz v podniku o 27 000 Kčs ročně. Rozhodněte, zda koupě stroje je pro podnik rentabilní či nikoli, počítá-li se s vyřazením stroje za 15 let (3 % celoroční složené úrokování).

151. Zaměstananec podniku si nastřádal za osm let 42 000 Kčs na zakoupení auta. Jakou částku ukládal průměrně koncem každého roku? (3% p. a.)

Poznámka: Značka *p. a.* znamená celoroční slož. úrokování.

152. Student zdědil po svých rodičích 30 000 Kčs, které uložil počátkem roku do peněžního ústavu na 3 % *p. a.* Jak velkou částku K mohl vybírat počátkem každého roku, jestliže mu mělo dědictví stačit na dobu šesti let? [Užijte tabulek zásobitelů.]

Poznámka: První částku si chtěl vybrat ihned, aby měl na výdaje prvního roku.

153. Jak velkými deseti stejnými ročními splátkami, splatnými vždy koncem roku, lze umořit dluh 400 000 Kčs při 4 % *p. a.*? Oč by se tyto splátky snížily, kdyby úroková míra byla 3 % *p. a.* [Užijte tabulek umořovatelů.]

154. Družstevní podnik splácí půjčku 50 000 Kčs ročními splátkami 7 500 Kčs vždy koncem roku. Kolika splátkami půjčku vyrovná a jak velká bude poslední splátka? (4 % *p. a.*)

[Návod: Ze vztahu $50\,000 = 7\,500 \,.\, v + 7\,500 \,.\, v^2 + \ldots + 7\,500 \,.\, v^n$ plyne, že $a_n = 6{,}6$. Z tabulek zásobitelů se určí, že splátek po 7 500 Kčs bude sedm a osmá bude menší.]

3. NEKONEČNÉ GEOMETRICKÉ ŘADY

155. Odůvodněte konvergenci nekonečné geometrické řady a potom určete její součet:

$$(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{5}-2)^2+(\sqrt{5}-2)^3+\ldots.$$

156. Je dána nekonečná geometrická řada

$1+\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^3+\ldots$; odůvodněte její konvergenci a určete její součet.

157. Určete dvojím způsobem součet nekonečné geometrické řady

$$1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{27}{64}+\frac{81}{256}-\frac{243}{1024}+\ldots$$

a) přímo,

b) po předcházejícím uspořádání na rozdíl dvou nekonečných geometrických řad s kladnými členy. Konvergenci řady odůvodněte.

158. Určete součet řady

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\ldots$$

159. Zjistěte, pro která čísla x lze určit součet řady $p-qx+px^2-qx^3+$ $+px^4-qx^5+\ldots$ a potom tento součet určete.

$\boxed{\textbf{160.}}$ Zjistěte, pro která čísla x lze určit součet řady:
$\sin^2 x+\cos^2 x+\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^6 x+\cos^6 x+\ \ldots$ a potom tento součet určete.

Řešení

Uspořádejme nejprve členy naší řady takto:
$(\sin^2 x+\sin^4 x+\sin^6 x+\ldots)+(\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^6 x+\ \ldots)$.
Je-li $\sin^2 x+\sin^4 x+\sin^6 x+\ \ldots=S$ a $\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^6 x+$ $+\ldots=S'$,
má naše řada součet $S+S'=\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}+\dfrac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+$ $+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x$, ovšem za předpokladu, že $0<\sin^2 x<1$ a $0<\cos^2 x<1$, tedy pro $x\neq k\dfrac{\pi}{2}$, kde k je číslo celé.

Závěr: Danou řadu lze sečíst pro všechna čísla $x\neq k\dfrac{\pi}{2}$, kde k je číslo celé; pro uvedené hodnoty čísla x má řada součet $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x$.

161. Zjistěte, pro která čísla x lze určit součet řady:

a) $1 + (2 - x) + (2 - x)^2 + (2 - x)^3 + \dots$

b) $1 + (4 + x) + (4 + x)^2 + (4 + x)^3 + \dots$

a potom ho určete.

162. Rozhodněte, které z daných řad jsou konvergentní a které divergentní (konvergentní řady sečtěte):

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{2n-1}$.

163. Přeměňte na zlomky obyčejné:

a) $2{,}\overline{4}$; b) $0{,}\overline{23}$; c) $2{,}\overline{403}$;

d) $3{,}\overline{789}$; e) $1{,}\overline{5042}$; f) $0{,}\overline{4305}$;

g) $0{,}2\overline{4}$; h) $0{,}58\overline{3}$; i) $2{,}6\overline{34}$;

j) $3{,}48\overline{72}$; k) $0{,}02\overline{347}$; l) $1{,}374\overline{89}$.

164. a) Určete součet $0{,}\overline{27} + 0{,}4\overline{63}$. Užijte nekonečných geometrických řad.

b) Dokažte, že je správný zápis: $\frac{0{,}4\overline{6}}{0{,}\overline{63}} = \frac{11}{15}$. Použijte nekonečných geometrických řad.

165. Která nekonečná konvergentní geometrická řada má prvý člen $a_1 = 1$ a součet S rovný součtu řady $6 - \frac{6}{5} + \frac{6}{25} - \frac{6}{125} + \dots$?

166. Stanovte hodnotu součinu $y = 3 \,.\, \sqrt{3} \,.\, \sqrt[4]{3} \,.\, \sqrt[8]{3} \dots$

167. Menší kořen rovnice $2x^2 - 5x + 2 = 0$ je roven prvému členu nekonečné konvergentní geometrické řady, větší kořen jejímu součtu. Určete kvocient řady.

***168.** Je dána rovnice $x^2 - 2x + a = 0$; její diskriminant určuje kvocient nekonečné konvergentní geometrické řady, její absolutní člen součet této řady. Napište tuto řadu a stanovte vymezení pro čísla a.

169. Vypočítejte hodnotu výrazu: $\dfrac{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n}{n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \dots}$

170. Zlomek $\frac{1}{1-2x}$ je možno považovat za součet geometrické řady. Napište tuto řadu a uveďte podmínku pro číslo x.

Řešení

Srovnáme-li zlomek $\frac{1}{1-2x}$ se vzorcem $S = \frac{a_1}{1-q}$ udávajícím hodnotu součtu nekonečné konvergentní geometrické řady, je zřejmé, že $a_1 = 1$, $q = 2x$, přičemž je nutné, aby $|x| < \frac{1}{2}$.
Rozvineme-li tedy náš zlomek v nekonečnou konvergentní geometrickou řadu, dostaneme $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$

Závěr: $\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$ za předpokladu, že $|x| < \frac{1}{2}$.

171. Nahraďte zlomek $\frac{m}{m-x}$ nekonečnou konvergentní geometrickou řadou a stanovte vztah mezi čísly m a x.

172. Rozviňte zlomek $\frac{1 + a + a^2 + a^3 + \dots}{1 - a + a^2 - a^3 + \dots}$ v nekonečnou konvergentní geometrickou řadu a stanovte vymezení pro číslo a.

173. Rozviňte výraz $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$ v nekonečnou konvergentní geometrickou řadu a stanovte vymezení pro úhel α.
[Návod: $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$.]

174. Řešte rovnici:

a) $\log x + \log \sqrt{x} + \log \sqrt[4]{x} + \log \sqrt[8]{x} + \dots = 2$;

b) $1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \dots = \frac{4x-3}{3x-4}$;

c) $2^x + 4^x + 8^x + 16^x + \dots = 1$.

175. Pro x z intervalu $\langle 0° - 360° \rangle$ řešte rovnici:
$1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \dots = 2 \operatorname{tg} x$.

176. Která nekonečná konvergentní geometrická řada má tu vlastnost, že její prvý člen $a_1 = 1$ a libovolný její člen má hodnotu rovnou součtu všech členů následujících?
[Návod: Řada má tvar $1 + q + q^2 + \dots$,
$a_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots$.]

177. Ukažte, že řešení soustavy $y = x$, $y = qx + a_1$, kde x, y jsou neznámé, tvoří dvě stejná čísla, která je možno pokládat za součet nekonečné konvergentní geometrické řady. Řešte také graficky v soustavě pravoúhlých souřadnic, přičemž zvolte za q a a_1 určitá čísla tak, aby $0 < q < 1$ a $a_1 > 0$.

178. V nekonečné konvergentní geometrické řadě je součet prvých tří členů $1\frac{1}{18}$ a jejich součin $\frac{1}{27}$. Určete součet této řady.

179. Do čtverce $ABCD$ je vepsán čtverec $A_1B_1C_1D_1$ tak, že jeho vrcholy leží ve středech stran čtverce $ABCD$; tomu je vepsán čtverec $A_2B_2C_2D_2$ tak, že jeho vrcholy leží ve středech stran čtverce $A_1B_1C_1D_1$ atd. Postup se stále opakuje. Jak velký je součet: a) obvodů, b) obsahů všech čtverců, má-li strana čtverce $ABCD$ délku a?

Řešení

a) Sledujeme-li obvody uvažovaných čtverců, dostaneme po řadě čísla:

$0_1 = 4a$, $0_2 = 2a\sqrt{2}$, $0_3 = 2a$, $0_4 = a\sqrt{2}$ atd.

Tato čísla zřejmě tvoří geometrickou posloupnost, jejíž kvocient $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a prvý člen $a_1 = 4a$

Výraz $4a + 2a\sqrt{2} + 2a + a\sqrt{2} + \dots$ je nekonečnou konvergentní geometrickou řadou, jelikož $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, a má součet

$$\varphi = \frac{4a}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8a}{2 - \sqrt{2}} = \frac{8a(2 + \sqrt{2})}{2} = 4a(2 + \sqrt{2})\,.$$

b) Sledujeme-li obsahy uvažovaných čtverců, dostaneme po řadě čísla:

$P_1 = a^2$, $P_2 = \frac{a^2}{2}$, $P_3 = \frac{a^2}{4}$, $P_4 = \frac{a^2}{8}$ atd.

Výraz $a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \dots$ je nekonečnou konvergentní geometrickou řadou s kvocientem $q = \frac{1}{2}$. Její součet je $\varphi' = 2a^2$.

Závěr: Součet obvodů všech čtverců dané vlastnosti je $4a(2 + \sqrt{2})$, součet obsahů těchto čtverců $2a^2$.

180. Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka ABC je vepsán trojúhelník $A_1B_1C_1$ tak, že jeho vrcholy leží ve středech stran trojúhelníka ABC; jemu je opět vepsán trojúhelník $A_2B_2C_2$, jehož vrcholy leží ve středech stran trojúhelníka $A_1B_1C_1$ atd. Postup se stále opakuje. Jak velký je součet obsahů všech trojúhelníků, mají-li odvěsny trojúhelníka ABC délku a?

181. Nad výškou rovnostranného trojúhelníka ABC je sestrojen rovnostranný trojúhelník $A_1B_1C_1$, nad jeho výškou je sestrojen rovnostranný trojúhelník $A_2B_2C_2$ atd. Postup se stále opakuje. Jak velký je součet obsahů všech trojúhelníků, má-li strana trojúhelníka ABC délku a?

***182.** Úhly os soustavy pravoúhlých souřadnic jsou rozpůleny přímkami p a q tak, že přímka p půlí prvý a třetí kvadrant, přímka q kvadrant druhý a čtvrtý. Na ose x je zvolen bod A ve vzdálenosti d od počátku P ($PA > 0$). Z něho je spuštěna kolmice na přímku p, z její paty P_1 kolmice na osu y, z její paty P_2 kolmice na přímku q atd. Jakou délku má tato vzniklá lomená spirála?

***183.** V rovnostranném trojúhelníku ABC je spuštěna z vrcholu C na stranu AB výška v_c; z její paty P_1 kolmice na stranu AC, z její paty P_2 kolmice v_c; z její paty P_3 kolmice na AC atd. Postup se opakuje nekonečně. Vypočítejte délku lomené čáry $CP_1P_2P_3P_4\ldots$, která tímto způsobem vznikne, má-li strana trojúhelníka ABC délku a.

***184.** Do rovnostranného trojúhelníka o straně a je vepsán kruh, do něho rovnostranný trojúhelník, do toho opět kruh atd. Postup se stále opakuje. Jak velký je součet obsahů všech kruhů (obsah kruhu $P = \pi r^2$)?

***185.** Určete kvocient posloupnosti RaA, jestliže čas sledujeme v 1 min intervalech a poločas rozpadu RaA je 3,05 min (tj. za 3,05 min se rozpadne polovina látky).

***186.** Otáčí-li se útvar uvedený v úloze 184 okolo výšky trojúhelníka, vzniknou rotační kužele a koule. Jak velký je součet objemů všech kuželů a součet objemů všech koulí $\left(\text{objem kužele } V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 v, \text{ objem koule } V' = \dfrac{4}{3}\pi r^3\right)$?

***187.** Při štěpení jaderného paliva uvolní každý neutron několik nových neutronů. Má-li vzniknout řetězová reakce, musí se z neutronů vzniklých při jednom štěpení využít nejméně jeden k dalšímu štěpení. Označíme-li průměrný počet neutronů z jednoho štěpení, využitých k dalšímu štěpení, značkou k, je $k \geqq 1$.

a) Kolik asi reakcí proběhlo v reaktoru při $k = 1{,}001$, zvětšil-li se počet neutronů tisíckrát?

b) Za jakou dobu se dosáhlo tohoto zvětšení, je-li střední doba od vzniku štěpného neutronu k dalšímu štěpení 0,003 s?

***188.** Oteplování, popřípadě ochlazování tuhého tělesa v prostředí stálé teploty probíhá tak, že teplotní rozdíly mezi tělesem a okolím tvoří po stejných časových intervalech geometrickou posloupnost.

a) Za jakou dobu se sníží teplotní rozdíl mezi povrchem tělesa a okolím na $\frac{1}{10}$ původní hodnoty, jestliže za každou sekundu se tento teplotní rozdíl sníží na 95 % předchozí hodnoty?

b) Jak dlouho by (za stejných předpokladů) trvalo zmenšení teplotního rozdílu na $\frac{1}{100}$ původní hodnoty?

c) Jak dlouho potrvá ochlazení na $\frac{1}{100}$ původního teplotního rozdílu, ochladí-li se za 1 s na 88 % původního teplotního rozdílu?

***189.** Do krychle o hraně a je vepsána koule, do koule krychle, do ní opět koule atd. Postup se stále opakuje. Jak velký je součet povrchů všech krychlí a součet povrchů všech koulí? [Návod: Povrch koule $S = 4\pi r^2$, tělesová úhlopříčka krychle se rovná průměru koule krychli opsané.]

4. OPAKOVÁNÍ

190. Je dána posloupnost $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5} \ldots$; určete $a_n + a_{n+1}$.

191. Vyhovují-li členy posloupnosti rekurentnímu vzorci $a_{n+1} = a_n - 1$, dokažte, že vyhovují také vzorci $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} - a_{n-2}$.

192. Dokažte, že v posloupnosti $\{n^2\}$ je platný rekurentní vzorec $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$.

193. Dokažte matematickou indukcí vzorec $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, $q \neq 1$, víte-li, že $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

194. Dokažte matematickou indukcí správnost vzorce $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, víte-li, že $a_{n+1} = a_1 + nd$.

195. Dokažte matematickou indukcí, že výraz $6^{2n} - 1$ je dělitelný 7 pro každé přirozené číslo n.
[Návod: Výraz $6^{2(n+1)} - 1$ lze upravit na tvar $36\,(6^{2n} - 1) + 35$.]

196. Dokažte matematickou indukcí, že výraz $\frac{10^n - 1}{81} - \frac{n}{9}$ je číslo celé pro každé přirozené číslo n.

[Návod: $\frac{10^{n+1} - 1}{81} - \frac{n+1}{9}$ lze upravit na tvar $10\left(\frac{10^n - 1}{81} - \frac{n}{9}\right) + n$.]

197. Dokažte matematickou indukcí, že součet prvých n členů posloupnosti $\{n^2\}$ má hodnotu $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

198. V aritmetické posloupnosti má n-tý člen hodnotu x a součet prvých n-členů hodnotu y. Určete prvý člen a diferenci.

199. Dvě aritmetické posloupnosti mají stejný prvý člen. n-tý člen prvé posloupnosti je 15, druhé posloupnosti 21. Součet prvých n členů prvé posloupnosti je 63, druhé posloupnosti 84. Vypište součty prvních n členů obou posloupností.

200. Součet prvých n členů aritmetické posloupnosti je $S_n = 81$, součet prvých $(n + 4)$ členů téže posloupnosti $S_{n+4} = 124$. Určete prvý člen posloupnosti a_1 a číslo n, je-li diference posloupnosti $d = \dfrac{1}{2}$.

201. Ve které aritmetické posloupnosti je součet prvých pěti členů s indexy lichými rovný číslu 85 a součet prvých pěti členů s indexy sudými rovný číslu 100?

202. Dělíme-li trojciferné číslo N jeho ciferným součtem, dostaneme podíl 26; píšeme-li číslice čísla N v opačném pořádku, dostaneme číslo M, které je o 396 větší než číslo N. Určete číslo N, tvoří-li jeho číslice tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

203. Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou velké, je-li součet jejich kosinů $\dfrac{5}{4}$?

204. Určete velikost ostrého úhlu α, tvoří-li $\operatorname{cotg}\alpha$, $\dfrac{1}{\sin\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha$ tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

205. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou velké, měří-li poloměr kružnice trojúhelníku opsané 12,5 cm?

206. Rychlost šíření zvuku ve vzduchu při 0 °C je asi 331 m/s; s rostoucí teplotou roste také rychlost zvuku asi o 0,6 m/s na každý stupeň. Jaká je rychlost šíření zvuku při teplotě 25 °C? Při jaké teplotě je rychlost zvuku 340 m/s?

207. Dvě tělesa, která jsou 48 m od sebe vzdálená, dají se současně do pohybu po přímé dráze proti sobě. Jedno proběhne za prvou sekundu dráhu 4 m a v každé následující vždy o 2 m více než za sekundu předcházející. Druhé se pohybuje rovnoměrně rychlostí 10 m/s. Za jakou dobu nastane srážka?

208. Dokažte, že v každé aritmetické posloupnosti platí vztah:
$a_{k-1}^2 + 8a_k \, . \, a_{k+1} = (2a_k + a_{k+1})^2 \, .$
[Návod: Využijte rovnice $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$.]

209. Tvoří-li čísla a, b, c tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, dokažte, že platí mezi nimi vztah:
$(a + b + c)^2 - 3(a^2 + b^2 + c^2) + 6(a - b)^2 = 0 \, .$
[Návod: Krajní členy vyjádřete členem prostředním a diferencí.]

210. Která geometrická posloupnost má tu vlastnost, že součet prvých deseti členů je 33krát větší než součet prvých pěti členů?

211. Jak velký je součet prvých pěti členů geometrické posloupnosti, jejíž členy a_2, a_3, a_4 vzniknou, odečteme-li od čísel 33, 45, 63 totéž číslo?

212. Napište prvých 8 členů geometrické posloupnosti, je-li
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15, \quad a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 240.$

213. Délku stran a, b, c trojúhelníka ABC tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem $q = \frac{3}{2}$. Vypočítejte velikost jeho nejmenšího úhlu.

***214.** Je dán rovnostranný trojúhelník, jehož strana má délku a. Rozdělte každou jeho stranu na tři stejné díly a nad každým středním dílem sestrojte rovnostranný trojúhelník vně obrazce. Každou stranu takto vzniklého útvaru rozdělte opět na tři stejné díly a nad každým středním dílem sestrojte rovnostranný trojúhelník vně útvaru atd. Kolik stran a jak velký obvod má útvar, který vznikne, opakuje-li se postup n-krát?

***215.** Výroba podniku roste ročně vždy o p procent. Za kolik let se zdvojnásobí? Též pro $p = 10\frac{1}{3}\,\%$.

216. Inventář závodu má cenu 100 000 Kčs; z této ceny se odpisují ročně 2 % na opotřebování. Jaká bude cena inventáře po deseti letech, doplňuje-li se ročním nákladem 3 000 Kčs, vypláceným vždy koncem každého roku?

217. V sudě je 100 l čistého lihu. Odebere se jeden litr a místo něho se nalije do sudu jeden litr vody. Pak se odebere jeden litr směsi a dolije se jedním litrem vody atd. Kolikaprocentní líh bude v sudě po dvacátém zředění? Kolikrát je nutno uvedené ředění opakovat, aby vznikl líh asi padesátiprocentní?

218. Vývěva, jejíž recipient má objem 15 dm³, je opatřena válcem na vysávání vzduchu objemu 2,5 dm³ (nepočítáme prostor zabraný pístem). Jaký bude tlak pod recipientem po dvanáctém vytažení pístu, byl-li původní tlak 760 torr?

*219. Vklad 5 000 Kčs se úrokoval 2 % celoročně složitě tři roky. Po třech letech byl přeložen i s úroky na vkladní knížku s dlouhodobou výpovědní lhůtou, přičemž úroková míra stoupla o 1 %. Na jakou částku vzrostl uvedený vklad za 8 let (celkem)?

*220. JZD si vypůjčilo 100 000 Kčs a zavázalo se, že je splatí během deseti let, a to stejnými částkami, splatnými koncem každého roku. Určete velikost těchto splátek při 3% celoročním složitém úrokování. [Návod: Počítejte hodnoty jednotlivých splátek ke dni vypůjčení. Použijte tabulek pro SVVŠ, str. 85.]

221. V geometrické posloupnosti $\{3^{n-1}\}$ a aritmetické posloupnosti $\{2n - 1\}$ je člen a_n funkcí indexu n. Narýsujte grafy obou funkcí v soustavě pravoúhlých souřadnic a ukažte na nich, že třetí člen prvé posloupnosti a pátý člen druhé posloupnosti mají stejnou hodnotu.

222. Čtyři čísla jsou po sobě jdoucími členy geometrické posloupnosti, jejich dekad. logaritmy čtyřmi po sobě jdoucími členy posloupnosti aritmetické s diferencí 1 a součtem 22. Která jsou to čísla?

223. Délky stran a, b, c trojúhelníka ABC tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, přičemž délka strany b je 10 cm. Zmenší-li se délka strany b o 2 cm, tvoří délky stran nového trojúhelníka $A'B'C'$ tři po sobě jdoucí členy posloupnosti geometrické. Určete délky stran trojúhelníka ABC.

224. Tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti mají součet 21. Zmenší-li se prostřední člen o 1 a zvětší-li se poslední člen o 6, vzniknou tři po sobě jdoucí členy posloupnosti geometrické. Určete členy obou posloupností.

225. Mezi čísla 3 a 18 vložte dvě čísla tak, aby první tři tvořila posloupnost geometrickou a poslední tři posloupnost aritmetickou. (V obou případech jde o tři po sobě jdoucí členy.)

226. Pět čísel, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, má tu vlastnost, že první tři tvoří posloupnost geometrickou a poslední čtyři posloupnost aritmetickou. Určete je, je-li

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 6 \quad \text{a} \quad a_2 \,.\, a_5 = -18\,.$$

227. Určete součet nekonečné geometrické řady:

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^3 + \ldots$$

228. Rozviňte výraz $\dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$ v nekonečnou konvergentní geometrickou řadu a stanovte vymezení pro úhel α.

229. Mezi každé dva členy nekonečné konvergentní geometrické řady $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$ je vložen další jeden člen tak, že spolu s původními členy vytvoří opět nekonečnou konvergentní geometrickou řadu. Stanovte součty obou řad a vymezení pro číslo a.

230. Řešte rovnici:

a) $1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{8}{x^3} + \ldots = \dfrac{6}{x + 5}$;

b) $2^x . \sqrt{2^x} . \sqrt[4]{2^x} . \sqrt[8]{2^x} \ldots = 0{,}25$;

c) $2 . 3^{x+2} - 135 = 2\,(3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + \ldots)$.

231. Určete číslo, jemuž se blíží délka spirály, která vznikne takto: Nad průměrem $AB = 2r$ sestrojte půlkružnici, jejíž střed označte S; nad průměrem BS sestrojte opět půlkružnici, která leží v opačné polovině a má střed S_1, nad $S\,S_1$ opět půlkružnici atd. Postup se opakuje do nekonečna.

***232.** Rovnostrannému trojúhelníku, jehož strana má délku a, je vepsán kruh k, do zbývajících částí trojúhelníka opět kruhy, které se dotýkají dvou stran trojúhelníka a kruhu k atd. Postup se stále opakuje. Určete součet obsahů všech kruhů.

XI. KOMBINATORIKA, BINOMICKÁ VĚTA

1. VARIACE A PERMUTACE

1. Zapište všechna čísla dvojciferná větší než 30 a trojciferná větší než 400, která jsou vytvořena z cifer 1, 3, 4, 6. (Cifry v čísle se neopakují.)

2. Vytvořte všechny permutace z prvků x, y, z, u, v, které začínají a) skupinou xy, b) prvkem x a končí prvkem y.

3. Na základě komutativního zákona napište všemi možnými způsoby součin $v = abcd$. Kolik těchto součinů má činitele a na prvém místě?

4. Kolik trikolór je možno sestavit z látek barvy bílé, žluté, červené a modré, jestliže se v každé trikolóře může vyskytovat každá barva jen jednou? Kolik trikolór má červenou barvu na kraji? (Uvažujeme oba okraje.)

5. 8 studujících si slíbilo, že si pošlou vzájemně pohlednice z prázdninových cest. Kolik pohlednic bylo rozesláno?

6. Kolik různých popěvků složených ze čtyř tónů je možno vytvořit z tónů stupnice C dur?
[Poznámka: Tóny v popěvku se neopakují, jdou po sobě a na jejich délce nezáleží.]

7. Ve třídě se vyučuje jedenácti předmětům. Kolikerým způsobem lze sestavit rozvrh na jeden den, připadá-li na tento den šest různých jednohodinových předmětů?

8. Vypuklý n-úhelník má vrcholy v bodech $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ($n \geqq 4$), které leží v téže rovině. Kolika různými způsoby můžeme projít všechny jeho vrcholy, postupujeme-li po jeho stranách nebo úhlopříčkách, přičemž každý vrchol n-úhelníka projdeme právě jednou a všechny tyto cesty začínají ve vrcholu A_1 a končí ve vrcholu A_n?

9. V rovině jsou dány 4 body A_1, A_2, A_3, A_4, z nichž žádné tři neleží v téže přímce. Kolik různých uzavřených lomených čar lze z nich vytvořit?

10. V lavici sedí 5 žáků A, B, C, D, E.
a) Kolikerým způsobem je můžeme přesadit?
b) Kolikerým způsobem je můžeme přesadit tak, aby žák A seděl stále na jednom nebo druhém z obou okrajů?
c) Kolikerým způsobem je můžeme přesadit tak, aby žáci B, C seděli stále spolu?
d) Kolikerým způsobem je můžeme přesadit tak, aby žák A seděl na jednom nebo druhém z obou okrajů a žáci B, C spolu?

11. Kolik trojciferných přirozených čísel vesměs s různými ciframi lze vytvořit z cifer 0, 1, 2, 3, 5, 7? Určete z nich počet sudých a tato sudá čísla zapište.

12. Kolik jednociferných až čtyřciferných čísel s různými ciframi lze vytvořit z cifer 0, 2, 4, 6?

13. Z kolika prvků lze vytvořit 210 variací druhé třídy?

14. Z kolika prvků lze vytvořit pětkrát tolik variací třetí třídy než variací třídy druhé?

15. Zvětší-li se počet prvků o dva, zvětší se počet permutací z těchto prvků vytvořených a) dvaačtyřicetkrát, b) šestapadesátkrát. Kolik je prvků?

16. Zmenší-li se počet prvků o dva, zmenší se počet permutací z těchto prvků vytvořených dvacetkrát. Kolik je prvků?

17. Zvětší-li se počet prvků o dva, zvětší se počet variací třetí třídy o 384. Kolik je prvků?

$\boxed{\textbf{18.}}$ Z kolika prvků lze vytvořit 5 040 variací čtvrté třídy?

Řešení

Označíme-li počet hledaných prvků x, potom platí rovnice
$x(x-1)(x-2)(x-3) = 5\,040$.
Tuto rovnici můžeme upravit na tvar $(x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 2) = 5\,040$ a řešit pomocí substituce $x^2 - 3x = y$.
Dostaneme rovnici $y(y+2) = 5\,040$, jejíž kořeny jsou $y_1 = 70$ a $y_2 = -72$.
Dále je nutno uvažovat dva případy:
a) Pro $y_1 = 70$ řešíme rovnici $x^2 - 3x - 70 = 0$, jejíž kořeny jsou $x_1 = 10$, $x_2 = -7$, z nichž však kořen x_2 úloze nevyhovuje.
b) Pro $y_2 = -72$ řešíme rovnici $x^2 - 3x + 72 = 0$, která však nemá reálné kořeny.

Závěr: 5 040 variací čtvrté třídy lze vytvořit z deseti prvků.

19. Čtyři knihy české a tři slovenské se mají postavit na poličku do řady tak, aby byly zařazeny nejprve knihy české a potom slovenské. Kolikerým způsobem to lze provést?

20. Kolik různých šesticiferných čísel, v nichž se cifry neopakují, lze vytvořit z cifer 1, 2, 3, 4, 5, 6, mají-li cifry liché stát v těchto číslech na místech lichých (řádu prvého, třetího a pátého) a cifry sudé na místech sudých. [Návod: Určete nejprve počet permutací vytvořených z cifer lichých, potom z cifer sudých a uvažte, že každé permutaci sestavené z čísel sudých je přiřazeno 3! permutací sestavených z cifer lichých.]

*21. Jsou dána přirozená čísla $1, 2, 3, \ldots, n$, přičemž n je libovolné liché číslo větší než 1. Dokažte, že z těchto čísel lze vytvořit $\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!$ takových permutací, ve kterých daná lichá čísla obsazují jen místa s indexy lichými a sudá čísla jen místa s indexy sudými.

22. Upravte výrazy (n je libovolné přirozené číslo):

a) $\dfrac{n^2-9}{(n+3)!}+\dfrac{6}{(n+2)!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$;

b) $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{3}{(n+1)!}-\dfrac{n^2-4}{(n+2)!}$.

23. Proveďte:

$\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!}+\dfrac{(3n+3)!}{(3n+4)!}$; n je libovolné přirozené číslo.

24. Dokažte, že platí:

$n[n!+(n-1)!]+n^2(n-1)!+(n+1)!=(3n+2)n!$; n je libovolné přirozené číslo.

25. Je-li n libovolné přirozené číslo, dokažte, že platí:

a) $n!+(n+3)!>(n+1)!+(n+2)!$;

b) $n!(n+3)!>(n+1)!\,(n+2)!$.

26. Číslo $a = 50! + 53!$, číslo $b = 51! + 52!$ Které z nich je větší?

27. Kolika nulami je zakončen dekadický zápis čísel a) $100!$, b) $300!$?

28. Je-li n libovolné přirozené číslo, dokažte matematickou indukcí, že platí:

a) $1.1!+2.2!+3.3!+\ldots+n.n!=(n+1)!-1$;

b) $\dfrac{0}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\ldots+\dfrac{n-1}{n!}=1-\dfrac{1}{n!}$.

29. Řešte rovnici:

$$\frac{(n-1)!+2(n-1)!+3(n-1)!+\ldots+n(n-1)!}{n!+\dfrac{n!}{2}+\dfrac{n!}{4}+\dfrac{n!}{8}+\ldots\ldots}=\frac{(n+1)!}{4x};$$

x je neznámá, n libovolné přirozené číslo.

30. Napište všechny variace s opakováním třídy druhé a třetí z prvků a) a, b; b) a, b, c.
Vyhovuje jejich počet vzorci $V'_k(n) = n^k$, kde n znamená počet prvků a k třídu?

31. Kolik různých vrhů lze učinit a) dvěma, b) třemi kostkami, jsou-li jejich stěny označeny čísly 1 až 6?

32. Vypište všechny případy, které mohou nastat při vrhu čtyř mincí, sledujete-li líce a ruby.

33. Kolika různými způsoby lze vyplnit tiket Sazky?

34. Kolik různých značek lze utvořit v Morseově abecedě, sestavují-li se body a čárky ve skupiny po jedné až pěti?

35. Kolik čtyřciferných čísel, v nichž se mohou cifry i opakovat, lze vytvořit z cifer

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

b) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

36. Určete počet všech trojciferných čísel, která jsou tvořena z cifer 0, 2, 5, 7, jsou dělitelná číslem 9, přičemž cifry v čísle se mohou i opakovat.

Řešení

Číslo je dělitelné devíti, je-li jeho ciferný součet dělitelný devíti. V našem případě přicházejí v úvahu jen čísla, jejichž ciferný součet je 9, neboť čísla s ciferným součtem 18, 27 atd. z daných cifer nelze vytvořit. Součet 9 však vznikne z našich cifer jen ve dvou případech: a) $7 + 2 + 0$ a všechny jeho tvary vzniklé záměnou jeho sčítanců, přičemž záměna začínající nulou úloze nevyhovuje, b) $5 + 2 + 2$ a všechny tvary tohoto součtu vzniklé záměnou sčítanců.

Případ a) vede ke čtyřem číslům $(3! - 2! = 4)$, případ b) ke třem číslům $\left(\frac{3!}{2!} = 3\right)$ vyhovujícím naší úloze.

Závěr: Z cifer 0, 2, 5, 7 lze vytvořit celkem 7 čísel dělitelných devíti. Jsou to: 720, 702, 270, 207, 522, 252, 225.

37. Určete počet všech čtyřciferných čísel, která jsou tvořena z cifer 0, 1, 2, 5, 7, jsou dělitelná číslem 9, přičemž cifry v čísle se mohou i opakovat.

***38.** Nastavme libovolným způsobem heslový zámek, který má 5 kruhů po osmi číslicích 1, 2, 3, . . ., 8. a) Kolika různými způsoby lze toto nastavení provést? b) Kolik kruhů po osmi číslicích musí mít přinejmenším tento zámek, má-li počet všech možných případů překročit milión? c) Kolik číslic musí mít přinejmenším každý z pěti kruhů, má-li počet všech možných způsobů překročit 10 000?

***39.** Zmenší-li se počet prvků, mezi nimiž jsou dva stejné, právě o tyto dva stejné prvky, zmenší se počet permutací 45krát. Kolik je prvků?

[Počet permutací s opakováním je dán vzorcem $P'_{p,q}(n) = \frac{n!}{p!\,q!}$, kde n znamená počet prvků, z nichž jeden se opakuje p-krát a druhý q-krát.]

2. KOMBINACE

40. Vytvořte všechny a) dvojzvuky, b) trojzvuky, c) čtyřzvuky z tónů d, f, a, c.

41. Jsou dány úsečky, které mají délky 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 9 cm. Kolik různostranných trojúhelníků lze z těchto úseček sestrojit?

42. Prvky a_1, a_n, d, n, S_n aritmetické posloupnosti jsou vázány vztahy $a_n = a_1 + (n - 1)d$ a $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. Jsou-li dány tři z uvedených prvků, lze zbývající z daných vztahů vypočítat. Toto vede k úlohám, ve kterých se vypočítávají na základě tří daných prvků prvky ostatní. Vypište všechny možnosti.

43. Kolika různými způsoby lze vyplnit tiket Sportky?

44. Ve společnosti šesti osob si přiťukl sklenkou každý s každým. Kolik cinknutí se celkem ozvalo? (Při každém přiťuknutí se ozvalo cinknutí a žádná dvě cinknutí nesplynula.)

45. Kolik různých dělitelů má číslo 210? Můžete zjistit jejich počet aniž byste je vypisovali? (1 jako dělitele čísla 210 neuvažujte.)

46. Určete počet všech různých dělitelů čísla 2 310, aniž byste je vypisovali. (1 jako dělitele čísla 2 310 neuvažujte.)

47. a) Kolika přímkami lze spojit 6 bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v téže přímce? Kolik přímek prochází každým z těchto bodů?
b) Kolika přímkami lze spojit těchto 6 bodů, leží-li čtyři z nich v jedné přímce? Ověřte si výpočet náčrtem a úlohu zobecněte.

48. Kolik úhlopříček má vypuklý n-úhelník? Vyvoďte tento počet též na základě kombinačních úvah. Který z těchto n-úhelníků má alespoň dvakrát tolik úhlopříček co stran?

49. V kolika bodech se protíná 10 přímek ležících v téže rovině, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné? V kolika bodech se protne 10 přímek, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem a čtyři z nich jsou rovnoběžné? Úlohu zobecněte.

50. V rovině je dáno n bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce a žádné čtyři na kružnici. Kolik kružnic je jimi určeno a kolik kružnic prochází každým z daných bodů? Proveďte též pro $n = 10$.

51. Kolik navzájem různých rovin lze položit šesti body, z nichž
a) žádné čtyři neleží v téže rovině,
b) čtyři body, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce, leží v jedné rovině,
c) tři body leží v téže přímce a žádných pět bodů neleží v téže rovině?

52. V rovině jsou dány dvě rovnoběžné přímky a, b, které nesplývají. Na přímce a leží n různých bodů $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, na přímce b leží m různých bodů $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$. Určete počet všech trojúhelníků, které mají všechny tři vrcholy v uvedených bodech.

Řešení

A. Počet všech uvažovaných bodů je dán číslem $(m + n)$. Vytvoříme-li všechny trojice z těchto bodů, pak jejich počet je dán číslem $\binom{m+n}{3}$. Avšak každá z těchto trojic neurčuje trojúhelník. Je třeba vyloučit ty trojice, které leží jen na přímce a i ty trojice, které leží jen na přímce b. Jelikož z bodů přímky a lze vytvořit $\binom{n}{3}$ trojic, z bodů přímky b lze vytvořit $\binom{m}{3}$ trojic, je počet trojúhelníků, který určujeme, dán číslem

$$\binom{n+m}{3} - \binom{n}{3} - \binom{m}{3}.$$

B. Úloze vyhovují trojúhelníky, které mají dva vrcholy na přímce a a jeden vrchol na přímce b, nebo dva vrcholy na přímce b a jeden vrchol na přímce a. Jiné možnosti nejsou. Trojúhelníků prvého druhu je $m\binom{n}{2}$, neboť každému vrcholu na přímce b lze přiřadit kteroukoli dvojici vrcholů ležících na přímce a. Trojúhelníků druhého druhu je $n\binom{m}{2}$, neboť každému vrcholu na přímce a lze přiřadit kteroukoli dvojici vrcholů ležících na přímce b. Je tedy počet trojúhelníků vyhovujících úloze dán číslem $m\binom{n}{2} + n\binom{m}{2}$.

Ze srovnání obou řešení plyne vztah $\binom{m+n}{3} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3} = m\binom{n}{2} + n\binom{m}{2}$.

(Vztah je zadán k důkazu na jiném místě.)

Závěr: Počet trojúhelníků vyhovujících úloze je dán číslem $\binom{m+n}{3} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3}$ nebo číslem $m\binom{n}{2} + n\binom{m}{2}$.

53. Kolika způsoby je možno na čtvercové šachovnici s 64 poli vybrat tři pole tak, aby neměla stejnou barvu?
(Dvě pole černá a jedno bílé nebo dvě pole bílá a jedno černé.)

54. Kolika způsoby je možno na čtvercové šachovnici s 64 poli vybrat tři pole tak, aby všechna neležela v témž sloupci?

55. Na maturitním večírku je 24 chlapců a 15 dívek. Kolik různých tanečních párů lze z nich vytvořit?

56. Z kolika prvků lze vytvořit 136 kombinací druhé třídy?

57. Zvětší-li se počet prvků o 1, zvětší se počet kombinací třetí třídy o 21. Kolik je prvků?

58. Zvětší-li se počet prvků o 8, zvětší se počet kombinací druhé třídy jedenáctkrát. Kolik je prvků?

59. Kolik je prvků, je-li počet kombinací čtvrté třídy z nich vytvořených dvacetkrát větší než počet kombinací druhé třídy z těchto prvků?

60. Dvě skupiny mají dohromady 26 prvků a 160 kombinací druhé třídy. Kolik prvků je v každé skupině?

61. Kolika způsoby lze rozdělit 6 prvků a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 na dvě stejně početné skupiny, nepřihlížíme-li k pořadí prvků ve skupinách?

62. Ve třídě je 20 chlapců a 5 dívek. Kolik různých deputací složených ze dvou chlapců a dvou dívek je možno z nich vytvořit?

63. Ve třídě je 18 chlapců a 14 dívek. Kolikerým způsobem lze zvolit do třídního výboru 3 funkcionáře tak, aby to byli dva chlapci a jedna dívka?

***64.** Z pěti hráčů stolního tenisu školního klubu se mají vybrat dvě dvojice protihráčů. Kolikerým způsobem to lze provést?
[Návod: Označte hráče H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 a proveďte rozpis dvojic hráčů.]

65. Mezinárodní hokejové družstvo odjíždějící na olympijské hry bylo složeno ze 17 hráčů: 10 útočníků, 5 obránců a 2 brankářů. Kolik různých sestav by mohl trenér vytvořit?

***66.** Je dán čtverec $ABCD$. Uvnitř strany AB zvolte dva různé body a veďte jimi rovnoběžné přímky se stranou BC. Uvnitř strany BC zvolte 3 různé body a veďte jimi rovnoběžné přímky se stranou AB. Kolik pravoúhlých rovnoběžníků takto vzniklo?
Řešte tuto úlohu také pro případ, že uvnitř strany AB je zvoleno m různých bodů a uvnitř strany BC n různých bodů.

67. Vyjádřete jediným kombinačním číslem součty:

a) $\binom{9}{4} + \binom{9}{5}$; b) $\binom{20}{3} + \binom{20}{16}$; c) $\binom{17}{7} + \binom{17}{8}$.

68. Víte-li, že $\binom{10}{3} = 120$, utvořte $\binom{10}{7}$, $\binom{10}{2}$, $\binom{10}{4}$, $\binom{11}{3}$, $\binom{11}{4}$.

69. Dokažte, že platí vztah $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$, jsou-li n, k přirozená čísla, $n \geqq k, n \neq 1$.

70. Dokažte, že platí:

$$\frac{1}{2}\binom{n}{2}\left[\binom{n}{2} - 1\right] - n \cdot \binom{n-1}{2} = 3\binom{n}{4},$$ kde n je přirozené číslo větší než 3.

71. Určete všechna přirozená čísla x, která vyhovují rovnici

a) $\binom{x}{2} + \binom{x-1}{2} = 4$;

b) $\binom{x-1}{x-2} + \binom{x-2}{x-4} = 4$.

72. Jsou-li m, n přirozená čísla, přičemž $m \geqq 3$, $n \geqq 3$, dokažte, že platí vztah

$$\binom{m+n}{3} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3} = n \cdot \binom{m}{2} + m \cdot \binom{n}{2}.$$

[Návod: Obě strany rovnice lze upravit na tvar $\frac{m \cdot n}{2}(m + n - 2)$.]

73. Pro která přirozená čísla n, m platí nerovnost

a) $\binom{n}{2} + \binom{n+3}{2} + \binom{n+6}{2} < 72$; $n > 1$;

b) $\binom{m+n}{2} \geqq \binom{m}{2} + \binom{n}{2} + 4$; $m > 1$, $n > 1$?

74. Určete všechna přirozená čísla n tak, aby platilo:

$$\binom{n}{3} + \binom{n+2}{3} + \binom{n+4}{3} = \frac{n^3}{2} + 88.$$

75. Určete všechna přirozená čísla x a y, která vyhovují vztahu

$$\binom{x+1}{y+1} : \binom{x+1}{y} : \binom{x+1}{y-1} = 5 : 5 : 3.$$

[Návod: Využijte vzorce $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.]

76. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla m platí vztah

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \ldots . \binom{m+p}{m} = \binom{m+p+1}{m+1},$$

kde p je nezáporné celé číslo.

[Návod: $\binom{m+1}{m} + \binom{m+1}{m+1} = \binom{m+2}{m+1}$; $\binom{m+2}{m} + \binom{m+2}{m+1} = \binom{m+3}{m+1}$ atd. až $\binom{m+p}{m} + \binom{m+p}{m+1} = \binom{m+p+1}{m+1}$; tyto rovnice sečtěte.]

77. Vyjádřete jediným kombinačním číslem součet

a) $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3}$;

b) $\binom{10}{10} + \binom{11}{10} + \binom{12}{10} + \binom{13}{10}$.

[Návod: Využijte vztahu z úlohy 76.]

78. Dokažte matematickou indukcí vztah

$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$; n je přirozené číslo větší než 1.

$\boxed{\textbf{79.}}$ Dokažte, že platí vztah

$\binom{r+s}{2} = \binom{r}{2} + \binom{r}{1} \cdot \binom{s}{1} + \binom{s}{2}$, kde r, s jsou přirozená čísla větší než 1.

Řešení

A. $$\binom{r+s}{2} = \frac{(r+s)(r+s-1)}{2} = \frac{(r+s)^2 - r - s}{2} =$$
$$= \frac{r^2 + 2rs + s^2 - r - s}{2} = \frac{r(r-1) + s(s-1) + 2rs}{2} = \frac{r(r-1)}{2} +$$
$$+ \frac{s(s-1)}{2} + rs = \binom{r}{2} + \binom{s}{2} + rs = \binom{r}{2} + \binom{r}{1}\binom{s}{1} + \binom{s}{2}.$$

B. Nechť $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_r$ jsou předměty určitého druhu, jejichž počet udává číslo r a $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_s$ předměty jiného druhu, jejichž počet udává číslo s.

Máme-li všechny tyto předměty zkombinovat po dvou, můžeme postupovat také tak, že zkombinujeme po dvou předměty prvého druhu, potom spojíme každý předmět prvého druhu s každým předmětem druhého druhu a nakonec zkombinujeme po dvou všechny předměty druhého druhu. Dvojic vytvořených z předmětů prvého druhu je $\binom{r}{2}$, dvojic z předmětů různých druhů je rs a dvojic vytvořených z předmětů druhého druhu je $\binom{s}{2}$.

Závěr: Vztah $\binom{r+s}{2} = \binom{r}{2} + \binom{r}{1}\cdot\binom{s}{1} + \binom{s}{2}$ pro $r > 1$, $s > 1$ platí.

[Poznámka: Vztah platí i pro čísla $r = 1$, $s = 1$; nutno však předpokládat, že kombinační číslo $\binom{n}{k}$ pro $k > n$ je rovno nule.]

80. Dokažte, že platí vztah

$\binom{r+s}{3} = \binom{r}{3} + \binom{r}{2}\binom{s}{1} + \binom{r}{1}\binom{s}{2} + \binom{s}{3}$, kde r, s jsou přirozená čísla větší než 2.

Řešení

$$\binom{r+s}{3} = \binom{r+s}{2}\cdot\frac{r+s-2}{3} = \left[\binom{r}{2} + rs + \binom{s}{2}\right]\cdot\frac{r+s-2}{3} =$$

$$= \binom{r}{2}\cdot\frac{r+s-2}{3} + \frac{rs(r-1+s-1)}{3} + \binom{s}{2}\frac{r+s-2}{3} =$$

$$= \binom{r}{2}\frac{r-2}{3} + \binom{r}{2}\cdot\frac{s}{3} + \frac{rs(r-1)}{3} + \frac{rs(s-1)}{3} + \binom{s}{2}\frac{s-2}{3} +$$

$$+ \binom{s}{2}\cdot\frac{r}{3} = \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3} + \binom{r}{2}\cdot\frac{s}{3} + \frac{r(r-1)}{2}\cdot\frac{2s}{3} +$$

$$+ \frac{s(s-1)}{2}\cdot\frac{2r}{3} + \frac{s(s-1)(s-2)}{2.3} + \binom{s}{2}\cdot\frac{r}{3} = \binom{r}{3} + \binom{r}{2}\cdot\frac{s}{3} +$$

$$+ \binom{r}{2}\cdot\frac{2s}{3} + \binom{s}{2}\cdot\frac{2r}{3} + \binom{s}{2}\cdot\frac{r}{3} + \binom{s}{3} = \binom{r}{3} +$$

$$+\binom{r}{2}\left(\frac{s}{3}+\frac{2s}{3}\right)+\binom{s}{2}\left(\frac{2r}{3}+\frac{r}{3}\right)+\binom{s}{3}=\binom{r}{3}+\binom{r}{2}\cdot s+$$

$$+\binom{s}{2}\cdot r+\binom{s}{3}=\binom{r}{3}+\binom{r}{2}\binom{s}{1}+\binom{r}{1}\binom{s}{2}+\binom{s}{3}.$$

Poznámka: Při dokazování tohoto vztahu je možno využít též postupu uvedeného v řešení B úlohy 79.

Závěr: Vztah $\binom{r+s}{3}=\binom{r}{3}+\binom{r}{2}\binom{s}{1}+\binom{r}{1}\binom{s}{2}+\binom{s}{3}$

platí pro všechna přirozená čísla r a s (viz poznámka úlohy 79.)

81. Jsou-li r, s, k přirozená čísla $r \geqq k$, $s \geqq k$ a platí-li vztah

$$\binom{r+s}{k}=\binom{r}{k}+\binom{r}{k-1}\binom{s}{1}+\binom{r}{k-2}\binom{s}{2}+\ldots+$$

$$+\binom{r}{1}\binom{s}{k-1}+\binom{s}{k},$$

dokažte, že platí též:

$$\binom{2k}{k}=\binom{k}{0}^2+\binom{k}{1}^2+\binom{k}{2}^2+\ldots+\binom{k}{k}^2.$$

[Návod: Učiňte $r = s = k$.]

82. Je-li dáno v rovině n bodů $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, z nichž žádné tři neleží v přímce, pak je jimi určeno $\binom{n}{2}$ přímek. Dokažte, že tyto přímky mohou mít kromě uvedených bodů nejvýše $3\binom{n}{4}$ dalších průsečíků za předpokladu, že $n \geqq 4$.

Řešení

$\binom{n}{2}$ přímek v rovině může mít nejvýše $\binom{\binom{n}{2}}{2}$ průsečíků.

Tento počet je však nutno v našem případě snížit, neboť každým daným bodem jde $(n-1)$ přímek. Je tedy celkový a nejvyšší počet všech průsečíků dán číslem $\binom{\binom{n}{2}}{2}-n\binom{n-1}{2}+n$.

Podle textu úlohy nás však zajímá nejvyšší počet průsečíků uvažovaných přímek kromě daných bodů. Tento počet udává číslo

$$\binom{\binom{n}{2}}{2} - n\binom{n-1}{2} + n - n = \binom{\binom{n}{2}}{2} - n\binom{n-1}{2} =$$

$$= \frac{\frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{n(n-1)}{2} - 1\right]}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n^2-n-2)}{8} - \frac{4n(n-1)(n-2)}{8} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)(n-2) - 4n(n-1)(n-2)}{8} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n+1-4)}{8} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8} =$$

$$= \frac{1}{8}\binom{n}{4} \cdot 24 = 3\binom{n}{4}.$$

Závěr: Přímky spojující n bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v téže přímce, mohou mít kromě těchto bodů nejvýše $3\binom{n}{4}$ dalších průsečíků; $n \geqq 4$.

83. Určete všechny navzájem různé součiny, z nichž každý se skládá ze tří činitelů vybíraných z čísel 2, 3, 5, 7, přičemž činitelé téhož součinu se mohou i opakovat. Přesvědčte se, že počet takto vzniklých součinů vyhovuje vzorci $P = \binom{n+k-1}{k}$, kde $n = 4$ a $k = 3$.

***84.** Kolik různých početních spojů obsahuje malá násobilka? [Návod: Spoje jsou 1 . 1; 1 . 2; 1 . 3; . . . , 1 . 9; 1 . 10; 2 . 2; 2 . 3; 2 . 4; . . . ; 2 . 9; 2 . 10; 3 . 3; 3 . 4; . . .; 3 . 9; 3 . 10 atd.]

***85.** Z kolika prvků lze vytvořit o 49 více kombinací třetí třídy s opakováním než bez opakování?

***86.** Kolik řešení má v oboru nezáporných čísel celých rovnice $x + y + z = 4$? (x, y, z jsou neznámé.)

***87.** Vypište všechny výrazy $M = Ax^t \cdot y^k \cdot z^s$, kde A je reálný parametr, x, y, z proměnné a t, k, s nezáporná čísla celá splňující rovnici $t + k + s = 5$. Kolik je takových navzájem různých výrazů M?

3. BINOMICKÁ VĚTA

88. Proveďte:

a) $(x \pm 1)^6$; b) $(a^2 - 1)^5$; c) $(x^2 \pm 2y^3)^4$;

d) $(1 + \sqrt{a})^7$, $a \geqq 0$; e) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^4$; f) $(\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{3})^6$;

g) $\left(\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{b}{a}\right)^{7}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$.

89. Proveďte: a) $(2x + 3y)^5 + (2x - 3y)^5$;

b) $(a + ib)^4 - (a - ib)^4$;

c) $(1 + \mathrm{i})^8 - (2\mathrm{i})^4$.

90. Ukažte, že platí:

a) $(a + b)^6 - 6ab(a + b)^4 + 9a^2b^2(a + b)^2 - 2a^3b^3 =$
$= (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$;

b) $(a + b)^7 - (a^7 + b^7) = 7ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)^2$.

[Návod: $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.]

91. V oboru reálných čísel rozložte v součin výraz $(x + y)^5 - x^5 - y^5$.

92. Jak velký je pátý člen geometrické posloupnosti, jejíž prvý člen $a_1 = (xy)^{-2}$ a kvocient $q = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$? $(x > 0, y > 0.)$

93. Dokažte, že výraz $(1 - x)^5 + x^5 - 1$ je dělitelný deseti pro všechna celá čísla x.

94. Určete v^6, je-li $v = \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3} - 1}{2}$. Lze výraz v považovat za kořen rovnice $x^6 - 1 = 0$? Vyhovuje této rovnici též kořen $u = \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3} + 1}{2}$?

***95.** Dokažte, že číslo $x = \left[\dfrac{(1 + \sqrt{2})^n + (-1 + \sqrt{2})^n}{2}\right]^2$ je přirozené pro každé přirozené číslo n.

[Návod: Užijte binomické věty a zkoumejte číslo x, je-li a) n číslo sudé, b) n číslo liché.]

96. Vypočítejte na 5 desetinných míst hodnoty mocnin $1{,}02^5$; $1{,}03^4$; $0{,}99^6$ a) pomocí logaritmů, b) na základě výpočtů

$\left(1 + \dfrac{2}{100}\right)^5$, $\left(1 + \dfrac{3}{100}\right)^4$, $\left(1 - \dfrac{1}{100}\right)^6$ pomocí binomické věty.

Výsledky srovnejte.

97. Na jakou částku vzroste 1 000 Kčs při 2% celoročním složeném úrokování za 5 let? K výpočtu užijte binomické věty. Jaké chyby se dopustíte, užijete-li k výpočtu přibližného vzorce $(1 + x)^n \doteq 1 + nx^2$?

98. a) Dokažte dvojím způsobem (rozkladem v součin i užitím binomické věty), že výraz $V = (b + 1)^n - 1$ je dělitelný číslem b, jsou-li čísla b, n přirozená a číslo $b \geqq 2$.
b) Sestavte výraz V, který je dělitelný a) třemi, b) čtyřmi, c) deseti.

99. a) Je-li číslo $n \geqq 2$ přirozené, potom výraz $V = (n + 1)^n - 1$ je dělitelný číslem n^2. Dokažte to.
b) Sestavte výraz V, který je dělitelný číslem a) 25, b) 36, c) 64.

$\boxed{\textbf{100.}}$ Dokažte, že výraz $p = \dfrac{6^{2n} - 1}{35}$ je číslo celé pro každé přirozené číslo n.

Řešení

Upravujme výraz $q = 6^{2n} - 1$ takto:

$$q = 6^{2n} - 1 = (6^2)^n - 1 = 36^n - 1 = (35 + 1)^n - 1 = \binom{n}{0} 35^n +$$

$$+ \binom{n}{1} 35^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} 35 + \binom{n}{n} - 1 = \binom{n}{0} 35^n +$$

$$+ \binom{n}{1} 35^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} 35\,.$$

Závěr: Výraz q je dělitelný číslem 35, v důsledku čehož je výraz p číslo celé.

101. Dokažte, že výraz $Z = \dfrac{(\sqrt{14^{13}} - 1)(\sqrt{14^{13}} + 1)}{169}$ je číslo celé.

102. Dokažte, že výraz $V = 40^n - 8^n - 5^n + 1$ je dělitelný číslem 28 pro každé přirozené číslo n.
[Návod: $40^n = (5 . 8)^n$; potom výraz V rozložte v součin.]

103. Dokažte, že číslo $11^{100} - 1$ končí čtyřčíslím 6 000.

104. Určete čtvrtý člen mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^5$ pomocí binomické věty ($a > 0$, $b > 0$).

105. Určete třetí člen mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $(a^5 - 2b^4)^4$ pomocí binomické věty.

106. Pro které číslo x je pátý člen mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2}\right)^{10}$ pomocí binomické věty roven číslu 105?

107. Který člen mnohočlenu vzniklého po výpočtu $\left(3x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{10}$ pomocí binomické věty obsahuje x^8?

108. Vypočítáme-li podle binomické věty $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^n$, $x \neq 0$, dostaneme mnohočlen, jehož druhý člen má koeficient o 54 menší než člen třetí. Určete ten člen mnohočlenu, který neobsahuje x.

Řešení

Zřejmě platí vztah $\binom{n}{1} + 54 = \binom{n}{2}$, který vede po upravení k rovnici $n^2 - 3n - 108 = 0$, jejíž kořeny jsou $n_1 = 12$, $n_2 = -9$, z nichž však jen kořen $n_1 = 12$ vyhovuje úloze.

Zbývá vyšetřit, zda v mnohočlenu, který vznikne výpočtem $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{12}$ existuje absolutní člen. Dejme tomu, že tento člen existuje a je v mnohočlenu členem k-tým; označme ho A_k.

Potom platí: $A_k = \binom{12}{k-1} \cdot (x^3)^{13-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{k-1} = \binom{12}{k-1} x^{39-3k} x^{1-k} =$
$= \binom{12}{k-1} x^{40-4k}$.

Aby člen A_k neobsahoval x, je nutno, aby $40 - 4k = 0$, odkud $k = 10$.

Závěr: Desátý člen mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{12}$, $x \neq 0$, neobsahuje x.

109. Vypočtete-li podle binomické věty $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^6$, $x \neq 0$, který člen výpočtu neobsahuje x?

110. Mnohočlen, který dostaneme, vypočítáme-li podle binomické věty $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$, $x \neq 0$, má koeficient druhého členu o 44 menší než členu třetího. Určete ten člen mnohočlenu, který neobsahuje x.

111. Kolik racionálních členů má mnohočlen, který vznikne po výpočtu $(\sqrt{5} + \sqrt[3]{2})^{12}$ pomocí binomické věty? Vypište je.

112. Určete ten člen mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $(1 + \sqrt{3})^8$ pomocí binomické věty a který má tu vlastnost, že je větší než člen předcházející a větší než člen následující.

Řešení

Nechť tuto vlastnost má člen A_k, který je k-tým členem uvažovaného mnohočlenu. Podle dané podmínky je $A_{k-1} < A_k$, $A_k > A_{k+1}$, kde

$$A_k = \binom{8}{k-1}(\sqrt{3})^{k-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \binom{8}{k-1} \cdot (\sqrt{3})^k, \quad A_{k-1} =$$
$$= \binom{8}{k-2}(\sqrt{3})^{k-2} = \frac{1}{3}\binom{8}{k-2}(\sqrt{3})^k, \quad A_{k+1} = \binom{8}{k}(\sqrt{3})^k.$$

a) Jelikož je $A_k > A_{k-1}$, platí nerovnost $\frac{1}{\sqrt{3}}\binom{8}{k-1}(\sqrt{3})^k >$ $> \frac{1}{3}\binom{8}{k-2}(\sqrt{3})^k$, odkud po využití vztahu $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ plyne nerovnost $k < 6{,}706$.

b) Jelikož je $A_k > A_{k+1}$, platí nerovnost
$\frac{1}{\sqrt{3}}\binom{8}{k-1}(\sqrt{3})^k > \binom{8}{k}(\sqrt{3})^k$, ze které plyne nerovnost $k > 5{,}706$.

Závěr: Šestý člen mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $(1 + \sqrt{3})^8$ pomocí binomické věty, je větší než oba členy sousední.

113. Který člen mnohočlenu vzniklého po výpočtu $(1 + \sqrt{3})^{100}$ pomocí binomické věty je větší než člen předcházející i člen následující?

114. Určete největší koeficient mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $(5a + 3b)^{10}$ podle binomické věty.

115. Určete ten člen mnohočlenu vzniklého po výpočtu $(1 + x^3)^9 \,.\, (1 + x^2)^{10}$ pomocí binomické věty, který obsahuje x^{14}.
[Návod: Je-li A_k k-tý člen mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $(1 + x^3)^9$ a A'_r r-tý člen mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $(1 + x^2)^{10}$, pak hledaný člen uvažovaného mnohočlenu má tvar $A_k \,.\, A'_r$.]

116. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí:

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$;

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$.

[Návod: $2^n = (1 + 1)^n$, $0 = (1 - 1)^n$.]

117. Dokažte, že součet všech kombinací bez opakování prvé až n-té třídy z n prvků je roven číslu $(2^n - 1)$.

118. Dokažte, že pro všechna přirozená sudá čísla n platí:

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^{n-1}$;

b) $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots + \binom{n}{n-1} = 2^{n-1}$.

[Návod: Užijte $(1 + 1)^n \pm (1 - 1)^n$.]

119. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + \ldots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1},$$

víte-li, že $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

[Návod: Dosazujte postupně za k čísla 1, 2, 3, ..., n a vzniklé rovnice sečtěte.]

120. Vyjádřete a) $\cos 4\alpha$; $\sin 4\alpha$; b) $\cos 5\alpha$; $\sin 5\alpha$; c) $\cos 7\alpha$; $\sin 7\alpha$ pomocí funkcí s argumentem α.

4. OPAKOVÁNÍ

121. Vypište kombinace a variace všech tříd z prvků u, v, p, q a přesvědčte se, že počet všech variací je o 49 větší než počet všech kombinací. Které cyklické permutace můžete z těchto prvků vytvořit?

122. Kolik různých vlajek je možno vytvořit z látek barvy bílé, modré, červené, žluté a zelené, skládá-li se každá vlajka ze tří různých barev? Které z nich mají červenou barvu uprostřed? Uveďte jejich počet.

123. Vrcholy obdélníka $ABCD$ a střed E strany BC tvoří skupinu pěti bodů. Kolik trojúhelníků má všechny tři své vrcholy v těchto bodech? Zakreslete je a rozdělte do skupin, z nichž každá obsahuje trojúhelníky shodné.

124. Je dáno n prvků $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Určete počet všech permutací vytvořených z těchto prvků, v nichž prvky a_1, a_2 nestojí vedle sebe.

125. 36 žáků bylo na brigádě namátkou rozděleno do devíti místností po čtyřech žácích. Kolika způsoby mohou být určitému žáku přiděleni jeho spolubydlící?

126. Na základě vztahu $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ ukažte, že výraz

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{3} + \binom{n+3}{4} - \binom{n+4}{4} = 0.$$

127. Dokažte, že pro každé přirozené číslo k platí vztah

$$\binom{3k+1}{2} + \binom{4k+2}{2} = \binom{5k+2}{2}.$$

Na základě tohoto vztahu napište aspoň dvě řešení rovnice

$\binom{x}{2} + \binom{y}{2} = \binom{z}{2}$, jsou-li x, y, z neznámé.

128. Která přirozená čísla x vyhovují rovnici

$$\binom{x}{2} - 2\binom{x-1}{x-2} + \binom{x}{0} = 0\,;\ x \geqq 2\,?$$

129. Z kolika prvků lze vytvořit 32 760 variací čtvrté třídy?

130. Kolika způsoby lze rozdělit 6 prvků na tři stejně početné skupiny, jestliže se nepřihlíží k pořadí prvků ve skupinách?

131. Kolikerým způsobem lze vytáhnout z bedny, ve které je 44 výrobků dobrých a 6 vadných, při tahu pěti výrobků a) samé výrobky dobré, b) jeden vadný a 4 dobré, c) dva vadné a 3 dobré, d) tři vadné a 2 dobré, e) jeden dobrý a 4 vadné? Jsou ještě jiné možnosti?

132. Dokažte matematickou indukcí, že pro všechna přirozená čísla n platí:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \binom{n+1}{2}^2.$$

133. Která přirozená čísla x splňují rovnici

$$3x\binom{x}{x-3} - \binom{x}{x-2} - \left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0\,;\ x \geqq 3\,?$$

134. Kolik trojciferných čísel dělitelných třemi lze vytvořit z cifer 0, 1, 2, 5, mohou-li se cifry v čísle opakovat?

135. Ukažte, že počet kombinací k-té třídy z n prvků bez opakování se rovná počtu permutací z těchto n prvků, v nichž se jeden prvek opakuje k-krát a jiný $(n-k)$-krát.

136. Zjednodušte výraz $V = \left(\dfrac{5+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^5 + \left(\dfrac{5-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^5.$

137. Dokažte pomocí binomické věty, že pro každé přirozené číslo n a každé nezáporné číslo x platí vztah $(1+x)^n \geqq 1 + nx$ (Bernoulliho nerovnost). Na základě dokázaného vztahu se přesvědčte, že číslo

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqq 2\,.$$

138. Dokažte, že výraz $11^{10} - 1$ je dělitelný stem.

139. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je výraz

$V = \dfrac{10^n - 1}{81} - \dfrac{n}{9}$ roven celému číslu.

[Návod: $10^n = (9 + 1)^n$.]

140. Určete číslo x tak, aby čtvrtý člen mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $\left(4x - \dfrac{1}{3x}\right)^8$, $x \neq 0$, podle binomické věty, byl roven číslu -14.

141. Pro které přirozené číslo n jsou koeficienty třetích členů mnohočlenů, které vzniknou po výpočtu $(a + b)^{2n}$, $(a + b)^{3n}$, v poměru $2 : 5$?

142. Určete čísla x, n tak, aby třetí člen mnohočlenu vzniklého po výpočtu mocniny $(1 + x)^n$ byl roven číslu 135 a čtvrtý člen tohoto mnohočlenu aby byl roven číslu 540.

143. Který člen mnohočlenu vzniklého po výpočtu $\left(2x + \dfrac{1}{x^2}\right)^{3n}$, $x \neq 0$, neobsahuje x?

***144.** Kolik racionálních členů má mnohočlen, který vznikne po výpočtu $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$ pomocí binomické věty?

***145.** Určete ten člen, který v mnohočlenu vzniklém po výpočtu $(1 + x^4)^3 (1 + x^2)^4$ pomocí binomické věty obsahuje x^{10}.

***146.** Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí:

a) $\dbinom{n}{0} - \dbinom{n}{2} + \dbinom{n}{4} - \dbinom{n}{6} + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos \dfrac{n\pi}{4}$;

b) $\dbinom{n}{1} - \dbinom{n}{3} + \dbinom{n}{5} - \dbinom{n}{7} + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin \dfrac{n\pi}{4}$.

[Návod: Použijte vztahu $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos \dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i} \sin \dfrac{\pi}{4}\right)$, vztahu $(\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + \mathrm{i} \sin n\alpha$ a binomické věty.]

XII. ÚVOD DO POČTU INFINITEZIMÁLNÍHO

I. SPOJITOST A LIMITA FUNKCE

1. Zpaměti:

a) Definujte limitu funkce $y = f(x)$ v bodě $x = a$.

b) Vyslovte pravidla, kterých užíváme při výpočtu limit funkcí:

1. $\lim\limits_{x\to a} k = k$; 2. $\lim\limits_{x\to a} k \,.\, f(x) = k \lim\limits_{x\to a} f(x)$;

3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \,.\, g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \,.\, \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

5. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, pokud $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existují.

$\boxed{2.}$ Na základě definice dokažte, že funkce $y = \sqrt{x}$ je spojitá v celém definičním oboru (kromě bodu $x = 0$).

Řešení

Podle definice spojitosti funkce v intervalu musí platit v každém jeho vnitřním bodě, tj. pro všechna $x \geqq 0$, $|\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}| < \varepsilon$, kde ε je libovolně malé. Tato nerovnost musí platit pro všechna $0 < \Delta x < \delta$.

Potom $|\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\,| = \dfrac{|(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})\,(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})|}{|\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}|} =$

$= \dfrac{|\Delta x|}{|\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}|} \leqq \dfrac{|\Delta x|}{|\sqrt{x}|} = \varepsilon$, neboť $|\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}| > \sqrt{x}$. Protože $\Delta x > 0$, platí $|\Delta x| = \Delta x$. Δx je možno najít v intervalu $0 < \Delta x < \delta$ tak malé, aby $\dfrac{\Delta x}{\sqrt{x}}$ bylo menší než libovolně malé předem zvolené kladné číslo. Tím je důkaz proveden.

3. Dokažte podle definice, že funkce:

a) $y = x^2$ je spojitá v bodě $x = 2$; b) $y = \dfrac{1}{x}$ je spojitá v bodě $x = 3$;

c) $y = x^3$ je spojitá v bodě $x = 0$; d) $y = 2x - 3$, $y = 3 - x$ jsou spojité v každém bodě definičního oboru.

4. Podle definice dokažte, že funkce:

a) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ je spojitá v bodě $x = 1$; b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, kde a, b, c, d jsou čísla reálná, je spojitá v každém bodě $x \in (-\infty, \infty)$; c) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ je nespojitá v bodě $x = 0$; $f(x) = x + \sqrt{x}$ je spojitá pro všecka $x > 0$.

5. Ve kterých bodech je nespojitá funkce:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$; c) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$;

d) $f(x) = 2x - 1$ pro $x \geqq 1$
$\phantom{f(x) = {}}1$ pro $x < 1$;

e) $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0 \\ 1 & \text{pro } x < 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0; \end{cases}$$

f) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ x & \text{pro } 0 \leqq x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{pro } 1 \leqq x < 3 \\ 4 - x & \text{pro } x \geqq 3\,. \end{cases}$$

6. Jak je třeba doplnit zápis funkce, aby byla definována i v bodě nespojitosti:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$; b) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$; c) $f(x) = \dfrac{(1 + x)^k - 1}{x}$;

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$?

7. Určete, zda jsou spojité zprava (zleva) funkce z úlohy 5: funkce a) v bodě $x = 2$, $x = 1$; funkce b) v bodě $x = -2$; c) v bodě $x = \dfrac{\pi}{2}$; d) v bodě $x = 1$; e) v bodě $x = 0$; f) v bodě $x = 0, 1, 3$.

$\boxed{\mathbf{8.}}$ Vyložte na příkladě pojem $\lim\limits_{x \to 0_+} \dfrac{|x|}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0_-} \dfrac{|x|}{x}$.

Řešení

Daná funkce není pro $x = 0$ definována. Pro $x > 0$ je $|x| = x$, x se blíží nule kladnými hodnotami (načrtněte si situaci), a proto $\dfrac{x}{x} = 1$, tj. $\lim\limits_{x \to 0_+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0_+} \dfrac{x}{x} = 1$, když jsme $x \neq 0$ nejprve krátili. Pro $x \to 0_-$

je $|x| = -x$ a $\lim\limits_{x\to 0_-} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0_-} \frac{-x}{x}$. x je číslo záporné, $-x$ tedy kladné a jejich podíl je -1. Proto $\lim\limits_{x\to 0_-} \frac{|x|}{x} = -1$.

Závěr: Limita dané funkce pro $x \to 0$ zprava je rovna jedné, pro $x \to 0$ zleva je rovna -1. Oboustranná limita v bodě $x = 0$ neexistuje.

9. Dokažte, že

a) $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 0$; b) $\lim\limits_{x\to 0_-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 1$; c) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}+} (2x - 1) = 0$;

d) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}+} \frac{1}{x - 1} = -2$; e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} = -\infty$.

10. Zpaměti určete limity:

a) $\lim\limits_{n\to 0_+} 2^{\frac{-1}{n}}$; b) $\lim\limits_{n\to -\infty} 2^{\frac{1}{n}}$; c) $\lim\limits_{n\to 1_-} 2^{\frac{1}{n-1}}$; d) $\lim\limits_{n\to 1_+} 2^{\frac{1}{n-1}}$;

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} 3^{\operatorname{tg} x}$; f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}+} 3^{\operatorname{tg} 2x}$; g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+} \frac{1}{1 + 2^{\operatorname{tg} x}}$; h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-} \frac{2}{1 + 2^{\operatorname{tg} x}}$.

11. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to 1_-} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1+} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$; c) $\lim\limits_{x\to 0_-} 2^{\frac{1}{x}}$; d) $\lim\limits_{x\to 1_-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$; f) $\lim\limits_{x\to 1_\pm} \frac{x^3 - x^2}{2 \cdot |x - 1|}$; g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}+} \frac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 4x}$;

h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}-} \frac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 4x}$; i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 4x}$.

12. Určete:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x - 3}{x - 5}.$$

Řešení

V bodě $x = 1$ je daná funkce definována a je v něm i v jeho okolí spojitá. Graf je křivka spojitá (až na bod $x = 5$). Hodnotu limity v každém jejím bodě $x \neq 5$ můžeme určit podle pravidla 5 z úlohy 1, tj. limita podílu je rovna podílu limit, pokud existují.

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x-3}{x-5} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(2x-3)}{\lim\limits_{x\to 1}(x-5)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} 2x - \lim\limits_{x\to 1} 3}{\lim\limits_{x\to 1} x - \lim\limits_{x\to 1} 5} = \frac{2-3}{1-5} = \frac{1}{4}.$$

Přitom jsme použili pravidla 3 a pravidla 1 z úlohy 1.

Závěr: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-3}{x-5} = \frac{1}{4}$.

13. Určete:

a) $\lim\limits_{x\to 5}(2x-1)$; b) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2)$; c) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{1}{x-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to -1}(3-2x-x^2)$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{x^2-3x+4}$.

14. Jaké jsou limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2}{x^2-3x+4}$; b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x-5}{x^2-2x+3}$;

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$; d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$;

e) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \frac{x^2+3}{x^4-2x+3}$; f) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2+x-2}{x^2-x}$?

$\boxed{15.}$ Určete limitu funkce:

$$\frac{x-2}{x^2-3x+2} \text{ pro } x \to 2.$$

Řešení

V bodě $x = 2$ není daná funkce definována a její graf je tedy v tomto bodě nespojitý. Rozložíme proto jmenovatele dané funkce v součin, jehož jeden činitel je $x - 2$. Dříve než přejdeme k limitě, vykrátíme tímto činitelem, který zřejmě není roven nule. Máme tedy

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x-1} = 1.$$

16. Určete limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-3x-4}$; b) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$;

c) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$; d) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$; e) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^3+27}{x+3}$;

f) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$; g) $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{y-x}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}$, $x \neq y > 0$; h) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;

i) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a}$, n číslo přirozené.

17. Najděte limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2+x-12}{2x^2-x-15}$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{3x^2+2x-1}{3x^2-x}$;

c) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$; d) $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$; e) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$;

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \sin x}$; g) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$;

h) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. [Návod pro h: Položte $x = t^6$.]

18. Určete:

a) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$; b) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$; c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3\,.\,(x-1)}{3x^3-2x-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$; e) $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$; g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$.

19. Dokažte podle definice, že

a) $\lim\limits_{x\to2} (3x-1) = 5$; b) $\lim\limits_{x\to2} x^2 = 4$.

Řešení

a) Jestliže $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$, musí platit $|f(x) - A| < \varepsilon$, kde ε je libovolně malé číslo kladné, pro všechna čísla x z okolí bodu c, tj. pro něž platí $0 < |x - c| < \delta$. V našem případě je tedy $|3x - 1 - 5| < \varepsilon$, tj. $3|x-2| < \varepsilon$, $|x-2| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Odtud platí pro $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$: ke každému libovolně malému číslu ε existuje číslo x z intervalu $2 - \frac{\varepsilon}{3} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{3}$ takové, aby byla splněna podmínka $|3x - 1 - 5| < \varepsilon$. Tím je důkaz proveden.

20. Podle definice dokažte:
a) $\lim\limits_{x\to 3}(x + 2) = 5$; b) $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$; c) $\lim\limits_{x\to -1}(3 - 2x - x^2) = 4$.
Ze kterého okolí čísla -1 je třeba uvažovat x, aby hodnota funkce $3 - 2x - x^2$ se lišila od limity méně než 10^{-4}?

21. Dokažte:
a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x - 3}{2x + 1} = 2$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1 - 2x^2}{2 + 4x^2} = -0{,}5$.

22. Určete limity funkcí v nevlastním bodě:
a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^3 - 7x}{1 - 2x^3}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 1}$;
d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x - 1)^3}{3x^3 - 2x - 1}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3 + x - x^5 - 1}{2 + x^2 + 4x^5}$;
f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^2 - 5x + 2}{x^3 - 3}$; g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x + 5}}{x}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$, $e \neq 0$, $f \neq 0$.
[Návod: Čitatele i jmenovatele dělte nejvyšší mocninou jmenovatele a potom přejděte k limitě.]

23. Určete limitu funkce:
a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 5}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^3 - 5x + 3}{3x^4 - 2}$;
c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)}{(5x - 1)^5}$;
d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x - 3)^5 . (3x + 2)^{25}}{(2x + 1)^{30}}$.

24. Určete:
a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$; b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$;
d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 3}}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x + 1}\right)$; g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}\right)$.

[Návod k b)–d): Rozšiřte výraz výrazem sdruženým se jmenovatelem.]

25. Vypočítejte hodnotu konstant a, b z podmínky:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{2x+1} - ax - b\right) = 0$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(ax + b - \dfrac{x^3+1}{x^2+1}\right) = 0$.

26. Pro urychlení výpočtu je třeba znát zpaměti limity některých důležitých funkcí, jako např.:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; c) $\lim\limits_{n\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, n číslo přirozené; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$; e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0, n > 0$;

f) $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{1}{x^n} = \infty$, n číslo celé, kladné; g) $\lim\limits_{x\to 0_-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ (n liché);

h) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty \; (x > +1)$.

$\boxed{\textbf{27.}}$ Určete:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}.$$

Řešení

Danou funkci nejprve upravíme na případ a) předchozí úlohy tím, že rozšíříme zlomek výrazem $\dfrac{1}{6x}$, kde $x \neq 0$. Dostaneme tak

$$\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{\dfrac{1}{3}\,\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\sin 3x}{3x}}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 2x}{6x}}{\dfrac{\sin 3x}{6x}} = \lim \frac{\dfrac{1}{3}\,\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\sin 3x}{3x}}.$$

Přejdeme-li k limitě (limita podílu je rovna podílu limit), dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

28. Najděte limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\operatorname{tg}x}{7x}$; c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\operatorname{tg}x}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg}3x}$; e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$; f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\cos^2 x}{x}$.

[Návod k: a) Rozšiřte zlomek čtyřmi; c) rozdělte daný výraz na dva zlomky; d) rozšiřte zlomkem $\dfrac{1}{12x}$; e) rozšiřte zlomkem $\dfrac{1}{x}$; f) vyjádřete funkci $\cos x$ pomocí funkce $\sin x$.]

***29.** Vypočtěte limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$; b) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$; c) $\lim\limits_{x\to0}x\,.\operatorname{cotg}3x$;

d) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

2. DERIVACE

$\boxed{\textbf{30.}}$ Na základě definice derivace funkce odvoďte derivaci funkce $y = x^3 - 1$ v jejím bodě x.

Řešení

Podde definice je $y' = \lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{(x+\Delta x)^3-1-(x^3-1)}{\Delta x}$.

Proto je $y' = \lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta^2 x)+\Delta^3 x-1-x^3+1}{\Delta x} =$
$= \lim\limits_{\Delta x\to0}(3x^2+3x\Delta x+\Delta^2 x)$.

Přejdeme-li k limitě, dostaneme $y' = 3x^2$.

$\boxed{\textbf{31.}}$ Odvoďte derivaci funkce $y = e^x$.

Řešení

$y' = \lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = e^x\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$.

Položme $e^{\Delta x}-1=\dfrac{1}{n}$. Potom pro $\Delta x\to0$ je $n\to\infty$.

Odtud $e^{\Delta x} = 1 + \frac{1}{n}$, $\Delta x = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Je tedy $y' = e^x \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^x \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} =$

$= e^x \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = e^x \cdot \dfrac{1}{\ln e} = e^x$, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$,

$\ln e = 1$.

Závěr: $(e^x)' = e^x$.

32. Podle definice derivace funkce odvoďte derivaci funkce $y = c \cdot f(x)$, kde x je proměnná, c je konstanta, za předpokladu, že y' existuje. Zapamatujte si dále vzorce:

a) $(x^n)' = nx^{n-1}$, n je reálné; b) $(e^x)' = e^x$; c) $(\sin x)' = \cos x$; d) $(\cos x)' = -\sin x$; e) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; f) $(\operatorname{cotg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$.

a), b), c), d) platí pro $x \in (-\infty, \infty)$; e) platí pro $x \neq (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$;

f) pro $x \neq k\pi$, kde k je celé číslo;

g) $(u + v)' = u' + v'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, kde $u = u(x)$, $v = v(x)$.

33. Podle definice derivace odvoďte derivace funkcí:
a) $y = 2x + 1$; b) $y = 3x - 2$; c) $y = 2x^2 - 3x + 1$; d) $y = x^2 + 2x - 1$; e) $y = \dfrac{1}{2x - 3}$; f) $y = \sqrt{x + 2}$.

34. Určete množinu čísel, pro něž jsou dané funkce definovány a podle úlohy 30 určete jejich derivaci. Stanovte též, jaké hodnoty nabývají tyto derivace pro $x = 0$, $x = 1$, $x = -2$: a) $y = 2 + x - x^2$; b) $y = 3x^2 - 5x + 1$; c) $y = \dfrac{1}{x^3}$; d) $y = \dfrac{x^3 - x^2 - 3x + 5}{x^3}$.
[Návod k d): Nejprve proveďte dělení.]

35. Určete hodnoty derivací v daném bodě $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$:
a) $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{2x}$; b) $y = \dfrac{2x^2 - x + 5}{x^2}$;

c) $y = \dfrac{-0{,}5x^2 + 2x - 3}{x^3}$; d) $y = \dfrac{-2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 6x - 3}{x^3}$.

36. Počítejte derivace funkcí v proměnné x: a) $y = ax^5 - bx^4$; b) $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$; c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$; d) $y = (1 + nx^m)(x + 1)$, m, n racionální;

e) $y = \left(\dfrac{x}{2}\right)$; f) $y = \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)^2$; g) $y = \left(\sqrt{a} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$;

h) $y = x - \sin x$.

[Návod: Použijte pravidla, že derivace součtu několika funkcí je rovna součtu jejich derivací. V případě b), c), g) si uvědomte, že

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$.]

37. Najděte definiční obor a první derivaci funkce:

a) $y = \sqrt{x} + 5$; b) $y = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{x^2}}$; c) $y = 3\sqrt[3]{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + e^x$;

d) $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$; e) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$; f) $y = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$.

$\boxed{\textbf{38.}}$ Podle pravidla pro derivování podílu derivujte funkci $y = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$ a určete hodnotu této derivace v bodě $x = 0$, $x = 2$, $x = \pm 1$.

Řešení

Daná funkce je definována pro všecka x kromě $x = \pm 1$. Podle pravidla o derivování podílu funkcí $u = f(x)$, $v = g(x)$ platí:

$y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. V našem případě tedy $y' =$

$$= \frac{2x(1 - x^2) - (1 + x^2)(-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{2x - 2x^3 + 2x + 2x^3}{(1 - x^2)^2} = \frac{4x}{(1 - x^2)^2}.$$

Hodnota derivace dané funkce v bodě $x = 0$ je $y'(0) = 0$, $y'(2) = \dfrac{8}{9}$.

V bodě $x = \pm 1$ není derivace definována.

39. Určete množinu čísel, pro něž existuje derivace dané funkce a derivujte podle pravidla pro derivování součtu, součinu a podílu funkcí:

a) $y = x^2 \sin x + \sqrt{x}$; b) $y = \sqrt{x^3} + (\cos x)(1 - \sin x)$; c) $y = x^2 \operatorname{tg} x - \sqrt{x} \cos x$; d) $y = \dfrac{2}{x - 1}$; e) $y = \dfrac{-3}{x + 4}$; f) $y = 2 - \dfrac{3}{x}$;

g) $y = \dfrac{2x - 3}{x - 1}$; h) $y = \dfrac{x - 1}{x + 2}$; i) $y = \dfrac{x^2 + 3}{2x}$; j) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

***40.** Určete derivaci funkce $y = \ln x$, $x > 0$.

Řešení

Funkce inverzní k dané funkci $y = \ln x$ je $x = e^y$. Potom $\dfrac{dx}{dy} = e^y$, a tedy $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{e^y} = \dfrac{1}{x}$.

Závěr: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

***41.** Derivujte podle proměnné x:

a) $y = \ln(1 - x^2)$, $x \neq \pm 1$; b) $y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$; c) $y = xe^x(\cos x + \sin x)$;

d) $y = \cos ax \, . \, \sin bx$; e) $y = \ln \dfrac{2 - x}{2 + x}$, $x \neq \pm 2$;

f) $y = \dfrac{(1 + x)\sin^3 x}{3 \cos x}$, $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$.

42. Jaký je 1. geometrický, 2. fyzikální, 3. chemický význam první derivace? Určete směrnici tečny grafu funkce v jejím bodě T: a) $y = \sin x + \cos x$, $T \equiv \left(\dfrac{\pi}{6}, ?\right)$; b) $y = 2 \sin x \cos x$, $T \equiv \left(\dfrac{\pi}{6}, ?\right)$;

c) $y = x \sin x$, $T \equiv \left(\dfrac{\pi}{6}, ?\right)$; d) $y = \dfrac{\cos x}{1 + 2 \sin x}$, $T \equiv \left(\dfrac{\pi}{3}, ?\right)$;

e) $y = x - \operatorname{tg} x$, $T \equiv \left(\dfrac{\pi}{3}, ?\right)$; f) $y = x^2 \cos x$, $T \equiv \left(\dfrac{\pi}{3}, ?\right)$.

43. Pro které hodnoty proměnné x funkce $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x$ je:

a) $f'(x) = 0$; b) $f'(x) = -2$; c) $f'(x) = 10$?

44. Určete množinu, na níž je daná funkce definována, a stanovte první derivaci:

a) $y = \dfrac{\sin x}{1 - \sin x}$; b) $y = \dfrac{2 \sin x}{\sin x - \cos x}$; c) $y = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$;

d) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1}$.

45. Pod jakým úhlem protíná graf funkce $y = \sin x$ osu x v intervalu $\left\langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi \right\rangle$?

Řešení

Daná křivka protíná osu x v bodech, jejichž druhá souřadnice je rovna nule. Proto $\sin x = 0$ a $x = 0, \pi$. Úhel, pod kterým křivka protíná osu x, zjistíme ze směrnice tečny dané křivky v bodech $x = 0$, $x = \pi$. Směrnice tečny v daném bodě je rovna hodnotě prvé derivace funkce v tom bodě. $y' = \cos x$, v bodě $x = 0$ je $y'(0) = \cos 0° = 1$. V bodě $x = \pi$ je $y' = \cos \pi = -1$. Směrnice tečny v bodě $x = 0$ je tedy $\operatorname{tg} \varphi_1 = 1$, $\varphi_1 = 45°$, v bodě $x = \pi$ je směrnice $\operatorname{tg} \varphi_2 = -1$, $\varphi_2 = 135°$.

Závěr: Křivka $y = \sin x$ protíná osu x v bodě $x = 0$ pod úhlem 45°, v bodě $x = \pi$ pod úhlem 135°.

46. Určete, pod kterými úhly protíná osu x křivka:

a) $y = x^3 + x$; b) $y = 2 + x - x^2$; c) $y = \cos x$; d) $y = \sqrt{3} \operatorname{tg} x$.

47. Ve kterém bodě má graf dané funkce tečnu, svírající s osou x úhel 45°:

a) $y = 3x^2 - 5x + 2$; b) $y = \dfrac{2x + 1}{x}$; c) $y = \dfrac{a}{x^n}$, n je číslo přirozené; d) $y = \sin x - \cos x$?

48. Napište rovnici tečny a normály ke křivce o rovnici:

a) $y = \dfrac{8}{4 + x^2}$ v bodě $T \equiv (2,1)$; b) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + 5$ v bodě $T \equiv (2,1)$;

c) $y = 2x^2 + 3x - 1$ v bodě $R \equiv (0,-1)$; d) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 5x - 4$ v bodě $P \equiv (-3,?)$; e) $y = x^3 - 5x + 6$, je-li tečna rovnoběžná s přímkou, jejíž rovnice je $y = 7x + 3$. [Normála je kolmice na tečnu v jejím bodě dotyku.]

49. a) Ve kterém bodě je normála paraboly $y = x^2$ kolmá k přímce o rovnici $y = 4x + 1$?

b) Určete body křivky, ve kterých normála křivky o rovnici $y = \frac{a}{x^2}$ prochází počátkem.

c) Najděte body, v nichž tečna vedená ke křivce o rovnici $y = ax^2$ vytíná na obou osách souřadnic úseky stejné velikosti.

50. V intervalu $\langle 1,4 \rangle$ najděte bod C tak, aby v něm pro funkci:

a) $y = x^3 + 4x$ bylo $f'(c) = y$; b) $y = \sqrt[3]{x^2}$ bylo $f'(c) = \frac{(fb) - f(a)}{b - a}$, kde $b = 4$, $a = 1$.

51. Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ jsou umístěny tak, že $\boldsymbol{a} = AB$, $\boldsymbol{b} = AC$, kde $A \equiv (0,0)$, $B \equiv (1,1)$, $C \equiv (3,9)$. Na dané křivce najděte bod, v němž tečna dané funkce

a) $f(x) = x^2$ je rovnoběžná s vektorem $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$; b) $f(x) = x^2$ je kolmá k vektoru $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$; c) $f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 3x)$ je rovnoběžná s vektorem $\boldsymbol{v} \equiv (-1,1)$; d) $y = \frac{1}{6}(x^3 - 3x)$ je kolmá k vektoru $\boldsymbol{v} \equiv (-1,1)$;

e) $f(x) = 3x^2 - x^3$ je rovnoběžná s přímkou $9x - 3y - 4 = 0$.

52. Určete derivaci zprava i zleva u funkcí:

a) $f(x) = |x|$ nebo $f(x) = \sqrt{x^2}$ v bodě $x = 0$;

b) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ v bodě $x = 1$;

c) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(x - 2)^2}$ v bodě $x = +2$;

d) $f(x) = \sqrt{\sin^2 x}$ v bodě $x = 0$;

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ pro } x > 1, \text{ v bodě } x = 1, \\ 2 - x \text{ pro } x \leqq 1; \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ pro } x \geqq 2, \\ x^2 \quad \text{pro } x < 2; \text{ v bodě } x = 2; \end{cases}$

g) u funkcí d), e), f) z příkladu 5 tohoto článku v bodech $x = 1$ a $x = 0$.

V úlohách e)—g) sestrojte graf funkce v intervalu $\langle -2, 4 \rangle$.

53. Ve kterém bodě mají dané funkce jednostranné derivace:

a) $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x - 1)^2}$; b) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$, $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$;

c) $y = \sqrt[5]{(x + 2)^2} + \sqrt[5]{x - 2}$; d) $y = \sqrt[3]{x^2 + x}$? Spočtěte je.

***54.** Dokažte, že trojúhelník omezený osami souřadnic a tečnou hyperboly o rovnici $xy = \frac{1}{2}a^2$ má konstantní obsah.

***55.** Podle definice odvoďte vzorec pro okamžitou rychlost a zrychlení pohybu, jehož zákon dráhy je $s = at^2$, kde s je dráha, kterou těleso proběhne za dobu t.

56. Podle výsledků předchozí úlohy najděte rychlost a zrychlení pohybu, jehož dráha závisí na čase výrazem:

a) $s = s_0 + ct + \frac{1}{2}gt^2$; b) $s = c \cdot e^{-bt}$. Najděte i sílu, která pohyb způsobuje. [Návod: $F = m \cdot a$.]

57. Těleso s hmotností 10 kg se pohybuje po přímce podle zákona dráhy $s = 1 + t + t^2$, kde s je dráha měřená v metrech, t je čas měřený v sekundách. Jakou kinetickou energii v joulech $\left(E = \frac{1}{2}mv^2\right)$ bude mít toto těleso na konci páté sekundy počínaje od $t = 0$?

58. Těleso se pohybuje nerovnoměrně podle zákona dráhy $s = 2t^3 - 3$ (s v metrech). Určete jeho rychlost v metrech za sekundu po 10 sekundách pohybu, počínaje od $t = 0$.

***59.** Derivujte jako funkci složenou $y = (2x^3 + 3)^3$.

Řešení

Položme $2x^3 + 3 = u$. Potom daná funkce nabude tvaru $y = u^3$. Derivujeme-li ji podle proměnné u, dostaneme $\frac{dy}{du} = y'_u = 3u^2$.

Derivaci y podle x je možno psát $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. Podle toho v našem případě $\frac{dy}{dx} = y'_x = 3u^2 \cdot \frac{du}{dx} = 3(2x^3 + 3)^2 \cdot 6x = 18x(2x^3 + 3)^2$.

***60.** Jako funkci složenou derivujte podle x:

a) $y = (1 - x)^3$; b) $y = (x^3 - 2)^5$; c) $y = (x^4 - 6x^2 + 7)^3$;

d) $y = (x - 1)(x - 2)^2(x - 3)$; e) $y = \frac{1}{a^2 - x^2}$;

f) $y = \frac{1}{(5 - x)^2}$.

***61.** Jako funkci složenou derivujte (pokud existuje derivace dané funkce):

a) $y = \sqrt{1 + x^2}$; b) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$; c) $y = x\sqrt{1 + x^2}$;

d) $y = (x - \sqrt{1 - x^2})^2$; e) $y = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x)^2}$; f) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a}}$, $a > 0$;

g) $y = \dfrac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}}$, $a \neq 0$.

*62. Určete první derivaci funkce (pokud existuje):

a) $y = (x + 1)\sqrt{x^2 + 1}$; b) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$; c) $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$;

d) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$; e) $y = \ln(x \cdot \sin x \cdot \sqrt{1 - x^2})$;

f) $\ln \sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} = y$; g) $y = \dfrac{1}{3} \ln^3 x^3$.

*63. Derivujte složené funkce:

a) $y = (3x^2 + 1)^2$; b) $y = (x^2 - 2x + 2)^3$; c) $y = (3x - 2)^2 \cdot (x + 1)$;

d) $y = x^{\sqrt{2}} \cdot \sin x$; e) $y = 3\cos^2 x - \cos^3 x$; f) $y = \dfrac{1}{3}\sin^3 x -$
$- \dfrac{1}{6}\sin^6 3x$; g) $y = \cos x\sqrt{1 + \sin^2 x}$; h) $y = \dfrac{1}{18}\sin^6 3x -$
$- \dfrac{1}{24} \cdot \sin^8 3x$.

64. V rovnici paraboly $y = x^2 + bx + c$ určete hodnoty koeficientů b, c tak, aby graf této paraboly se dotýkal přímky $y = x$ v bodě $x = 2$.

65. Jaký vztah má platit mezi koeficienty p, q, aby se kubická parabola, jejíž rovnice je $y = x^3 + px + q$, dotýkala osy x?

66. Hmotnost m tuhé látky rozpuštěné v kapalině závisí na čase t podle vztahu $m = m_0(1 - e^{-k \cdot t})$, kde m_0 je hmotnost látky potřebné k nasycení roztoku, k je kladná konstanta. Dokažte, že rychlost rozpouštění je přímo úměrná množství dosud nerozpuštěné látky.

67. Z bodu $M \equiv (-2,2)$ veďte tečny ke křivce $y = x + \dfrac{1}{x}$.

[Návod: Souřadnice dotykových bodů tečny na křivce nechť jsou $T_1 \equiv (x_1, y_1)$, $T_2 \equiv (x_2, y_2)$. Směrnice tečny v bodě T_1 je $k = f'(x_1)$. Tato směrnice je současně směrnicí přímky MT_1, tj. $k = \dfrac{y_1 - 2}{x_1 + 2}$. Z rovnosti obou výrazů pro k a z podmínky, že bod T_1 leží na dané křivce, plyne: $\dfrac{y_1 - 2}{x_1 + 2} = 1 - \dfrac{1}{x_1^2}$, $y_1 = x_1 + \dfrac{1}{x_1}$. Odtud řešením $x_1 = 1, y_1 = 2$; $x_1' = -\dfrac{1}{2}$, $y_1' = -2{,}5$, a tedy $k_1 = 0$, $k_1' = -3$. Rovnice hledaných tečen pak jsou: $t_1 \equiv y - 2 = 0$, $t_2 \equiv y = -3x - 4$.]

68. Z bodu $N \equiv (0,0)$ veďte tečny ke křivce $y = x^2 + 3x + 2$. Řešte početně.

69. Ve kterém bodě paraboly $y = x^2 - 2x + 5$ je nutno vést tečnu, aby byla kolmá k ose lichých kvadrantů?

70. Pod jakým úhlem seče a) hyperbola $y = \dfrac{1}{x}$ parabolu $y = \sqrt{x}$;
b) parabola $y = \sqrt{2x}$ parabolu $y = x^2 : 2$; c) $y = \sin x$, $y = \cos x$;
d) $y = x^2$, $x = y^2$?

71. Určete vzdálenost vrcholu paraboly $y = x^2 - 4x + 3$ od tečny sestrojené v průsečíku této křivky s osou x. Sestrojte parabolu i tečnu.

72. V jakém úhlu protíná přímka $y = \dfrac{1}{2}$ křivku $y = \cos x$?

*73. Napište rovnici tečny paraboly $y = 2 + x - x^2$ rovnoběžné s osou prvního kvadrantu. Určete délku její subtangenty a subnormály.

74. Ve funkci $y = x^3 + 3x^2 + cx + d$ určete koeficienty c, d tak, aby se daná křivka dotýkala osy prvního a třetího kvadrantu v bodě $x = 2$. [Návod: Směrnice tečny $f'(2) = 1$.]

75. Vlak se rozjíždí ze stanice pohybem vyjádřeným rovnicí $s = at^2 + bt + c$ a po uplynutí jedné minuty dosáhne rychlosti 60 km/h. Jak velkou vzdálenost ujede, než této rychlosti dosáhne? Jaké je zrychlení onoho pohybu?

*76. Těleso sjede po nakloněné rovině 50 m dlouhé za 10 s. Předpokládáme-li, že dráha je kvadratická funkce času a že počáteční rychlost tělesa je rovna nule, jaká je jeho konečná rychlost?

77. Rychlík jedoucí rychlostí 90 km/h má zabrzdit tak, aby se zastavil na vzdálenost 1 km. a) Po jaké době se zastaví? b) Stanovte jeho rychlost vždy po 10 s od okamžiku, kdy začal brzdit.

78. Těleso vržené svisle vzhůru (ve vakuu a při malých rychlostech i ve vzduchu) se pohybuje podle zákona dráhy $s = c \cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2$, kde t je čas, s je dráha, c daná počáteční rychlost, g je tíhové zrychlení ($g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$). a) Určete rychlost tělesa v čase t. b) V kterém okamžiku a ve které poloze je rychlost tělesa rovna nule? Jaký to má fyzikální význam? c) S jakou rychlostí a ve kterém okamžiku dopadne těleso na místo, ze kterého bylo vrženo?

79. Raketa se pohybuje po určitou krátkou dobu přímočaře podle zákona $s = \dfrac{2}{9}\sin\dfrac{\pi t}{2} + s_0$. Určete zrychlení tohoto pohybu na konci první sekundy (s je udáno v metrech, $s_0 =$ konst., t je čas měřený v sekundách).

***80.** Těleso se pohybuje přímočaře, přičemž $s = \sqrt{kt}$ (k je konstanta). Dokažte, že je to pohyb zpomalený a že zpomalení a je úměrné třetí mocnině rychlosti v.

81. Kolo setrvačníku se rozbíhá tak, že úhel otočení je úměrný druhé mocnině času. První otočka trvala 8 sekund. Určete úhlovou rychlost po 32 sekundách od počátku pohybu.

82. Pohyb tělesa vrženého šikmo danou rychlostí c pod výškovým úhlem α lze rozložit ve dvě složky, z nichž jedna je vodorovná a má velikost $ct\cos\alpha$, druhá svislá $ct\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$. a) Dokažte, že křivka, kterou těleso opisuje, má ve vakuu rovnici $y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2c^2\cos^2\alpha}$.
b) V jaké vzdálenosti od počátku dopadne těleso zpět na zem? Jaká je největší vzdálenost vrhu při dané rychlosti c?

***83.** Okamžitá výchylka x tlumeného harmonického pohybu je dána vzorcem $x = Ae^{-kt}\sin(at + b)$, kde t je čas, $A \neq 0$ amplituda, $k > 0$, $a \neq 0$, b jsou konstanty. Vypočítejte rychlost i zrychlení tohoto pohybu v čase t.

3. PRŮBĚH FUNKCE, MAXIMA, MINIMA

84. Určete průběh funkce $y = x^3 + \frac{x^4}{4}$.

Řešení

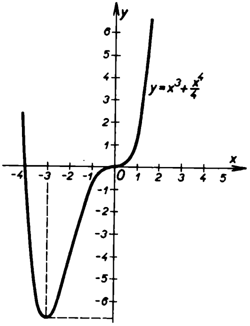
Průběh (graf) funkce $y = f(x)$, spojité v bodě x_0, určujeme pohodlně podle hodnoty směrnice její tečny v uvažovaném bodě. Směrnice tečny křivky $y = f(x)$ v bodě x_0 je $y' = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$. Podle toho, jaké hodnoty nabývá tato derivace v daném bodě, rozlišujeme případy:
a) $y' > 0$, tj. $\operatorname{tg}\alpha > 0$, což znamená, že úhel tečny sevřený s osou $+x$ je ostrý, funkce pak v tomto bodě je rostoucí. Je-li $y' > 0$ v celém intervalu I, je funkce rostoucí v celém tomto intervalu. Obrácená věta neplatí.
b) $y' < 0$, tj. $\operatorname{tg}\alpha < 0$ znamená, že úhel tečny s kladným směrem osy x je v daném bodě tupý a že tedy funkce v tomto bodě je klesající. Je-li $y' = \operatorname{tg}\alpha < 0$ v celém intervalu I, je daná funkce $y = f(x)$ klesající v celém intervalu I. Obrácená věta opět neplatí.
c) Je-li v některém bodě $x_0 \in$ I funkce $y = f(x)$, $f'(x_0) = 0$, je v tomto bodě tečna dané funkce rovnoběžná s osou x (proč?) a funkce $y = f(x)$ může v tomto bodě nabýt extrémní hodnoty. Největší (lokálního maxima) tehdy, platí-li mimo $f'(x_0) = 0$ v okolí bodu x_0 ještě $f'(x) > 0$ pro

$x < x_0$ a $f'(x) < 0$ pro $x > x_0$, nejmenší (lokálního minima), když $f'(x_0) = 0$ a současně v okolí bodu x_0 $f'(x) < 0$ pro $x < x_0$ a $f'(x) > 0$ pro $x > x_0$.

Při vyšetřování průběhu dané funkce zjistíme nejprve její průsečíky s osou x, tj. hodnoty proměnné x, pro něž je $y = 0$. Je tedy

$$x^3 + \frac{x^4}{4} = x^3\left(1 + \frac{x}{4}\right) = 0, \; x_{1,2,3} = 0, \; x_4 = -4\,.$$

Protože tato funkce je definována pro všecka x a je v celém oboru spojitá, existuje v každém jejím bodě derivace: $y' = 3x^2 + x^3$. Podle pozn. c) může lokální extrém nastat jen tehdy, když $x^2(3 + x) = 0$, tj. pro $x_{1,2} = 0$, $x_3 = -3$. Jaký extrém to bude, to záleží na znaménku funkce v okolí těchto bodů. Protože $y' = x^2(x + 3)$ je kladná pro všecka $x > -3$, je v tomto intervalu daná funkce rostoucí. Klesající je pak v intervalu $(-\infty, -3)$. Proč? (Obr. 16.)



Obr. 16

Závěr: Funkce $y = x^3 + \dfrac{x^4}{4}$ je rostoucí v intervalu $(-3, \infty)$, klesající v intervalu $(-\infty, -3)$. V bodě $x = -3$ má tedy lokální minimum $(-6{,}75)$. V bodě $x = 0$ extrém nenastává. Není tedy zřejmě podmínka $f'(x_0) = 0$ pro existenci lokálního extrému funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 postačující.

85. Ve kterých intervalech proměnné x jsou dané funkce 1. rostoucí; 2. klesající:

a) $y = |x|$; b) $y = \dfrac{1}{x}$; c) $y = \cos|x|$; *d) $y = \cos\dfrac{\pi}{x}$;

e) $y = x + \sin x$; f) $y = \log x + 3$?

86. Rozhodněte, zda dané funkce jsou rostoucí či klesající nebo mají v uvedeném bodě lokální extrém:

a) $y = 2x^2 - x^4$ pro α) $x = 1$; β) $x = 0$; γ) $x = 2$;

b) $y = x^3 - 6x^2 - 4$ pro: α) $x = 3$; β) $x = 0$; γ) $x = 2$;

c) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ pro: α) $x = 0$; β) $x = 2$; γ) $x = -1$;

d) $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ v bodě $\alpha)$ $x = 8$; $\beta)$ $x = 0$; $\gamma)$ $x = -1$;

e) $y = \sin 2x - 1$ v bodě $\alpha)$ $x = \frac{\pi}{3}$; $\beta)$ $x = \frac{\pi}{4}$; $\gamma)$ $x = 0$;
$\delta)$ $x = \frac{\pi}{12}$;

f) $y = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x}$ v bodě $\alpha)$ $x = \frac{\pi}{6}$; $\beta)$ $x = -\frac{\pi}{2}$; $\gamma)$ $x = -\frac{\pi}{6}$;

g) $y = \frac{10}{1 + \sin^2 x}$ v bodě $\alpha)$ $x = \pi$; $\beta)$ $x = \frac{\pi}{2}$; $\gamma)$ $x = \frac{\pi}{4}$.

87. Určete souřadnice vrcholů parabol a načrtněte přibližně jejich grafy v daném intervalu proměnné x:
a) $y = 3x^2 - 2$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$;
b) $y = (x - 3)^2 + 9$, $x \in \langle 2{,}5 \rangle$;
c) $y = x^2 - 6x + 7$, $-3 \leqq x \leqq 3$;
d) $y = 2 + 8x - x^2$, $-1 \leqq x \leqq 9$;
e) $y = 8x - x^2$, $0 \leqq x \leqq 9$.

88. Určete interval, v němž je daná funkce rostoucí nebo klesající, spočítejte její lokální extrémy a načrtněte její graf:
a) $y = 3x^5 - 5x^3$; b) $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$; c) $y = \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{8}$;
d) $y = \frac{3 - x^2}{x + 2}$; e) $y = x + 2\sqrt{-x}$; f) $y = \frac{(x + 3)^3}{(x + 2)^2}$;
g) $y = \sqrt{1 - \cos x}$; *h) $y = x + \sin 2x$; i) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;
j) $y = \frac{\ln x}{x}$.

89. Určete lokální extrém dané funkce, interval, v němž je funkce rostoucí či klesající a načrtněte její graf:
a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$; b) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 20$;
c) $y = x^3 - 6x^2 + 7$; d) $y = 2x^2 - x^4$.
[Návod: Souřadnice aspoň jednoho nulového bodu lze najít zkusmo. Pro první náčrt grafu funkce použijte nulových bodů a bodů, v nichž nastává extrém.]

90. Dokažte, že funkce:
a) $y = ax + b$ je rostoucí v celém definičním oboru pro $a > 0$ a klesající pro $a < 0$; b) $y = x^2 - 3x + 2$ je rostoucí v intervalu $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

a klesající v intervalu $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$; c) $y = 3x - x^3$ je rostoucí pro $-1 < x < 1$, klesající pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; d) $y = \frac{2x}{1 + x^2}$ je rostoucí a klesající v témž intervalu jako funkce v případě c).

91. Vyšetřte průběh (i souměrnost a chování funkce v krajních bodech definičního oboru) a načrtněte graf funkce:

a) $y = 3x - x^3$; b) $y = 1 + x^2 - 0{,}5x^4$; c) $y = \frac{1}{1 - x^2}$.

92. Vyšetřte průběh funkce:

a) $y = (x + 1)(x - 2)^2$; b) $y = x^3 + 6x^2 - 15x$; c) $y = \sqrt{\sin x^2}$;
d) $9y = x^3 - 6x^2 - 15x + 64$; e) $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

93. Určete průběh funkce:

a) $y = x \, . \sqrt{x}$; b) $y = 4x - \frac{x^3}{3}$; c) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$;

d) $y = \sqrt[3]{x^2}$; e) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{1 - x}$; f) $y = x + \frac{1}{x}$.

94. Načrtněte graf funkce:

a) $y = x^2(x^2 - 4)$; b) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$; c) $y = \frac{x - 1}{(x - 2)^2}$;

d) $y = \frac{x^2}{x - 2}$; e) $y = \frac{2x}{1 + x^2}$; f) $y = \sin x + \cos x$.

95. Dokažte, že lineární lomená funkce $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, kde $a \neq 0$, $c \neq 0$, $a \neq kc$, nemá lokální extrém v žádném bodě svého defin. oboru.

$\boxed{\textbf{96.}}$ Na kružnici o rovnici $x^2 + y^2 - 2rx = 0$ najděte bod, v němž rovnoběžky s osami souřadnic omezují s těmito obdélník maximálního obsahu ($r > 0$, libovolné).

Řešení

Kružnice $y^2 = 2rx - x^2$ má střed $S \equiv (r,0)$ na ose x. Vrchol obdélníka ležícího na kružnici nechť má souřadnice x, y. Jeho obsah je $P = xy$, kde $y = \sqrt{2rx - x^2}$. Potom $P = x\sqrt{2rx - x^2}$, $P' = \sqrt{2rx - x^2} + \frac{x(2r - 2x)}{2\sqrt{2rx - x^2}} = \frac{2rx - x^2 + x(r - x)}{\sqrt{2rx - x^2}}$. Z podmínky pro extrém, $P' = 0$, vyplývá $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = \frac{3}{2} r$,

$$y_2 = \sqrt{2r\frac{3}{2}r - \frac{9}{4}r^2} = \sqrt{3r^2 - \frac{9}{4}r^2} = \frac{r}{2}\sqrt{3}.$$

Závěr: Vrchol hledaného obdélníka je $A \equiv \left(\frac{3}{2}r,\ \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)$, jeho obsah je $P = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$.

97. Kouli o poloměru r je vepsán kvádr se čtvercovou podstavou maximálního objemu. Určete jeho rozměry. [Návod: $V = x^2z$, $z^2 + 2x^2 = 4r^2$.]

***98.** Bodem $M \equiv (3,6)$ je vedena přímka tak, aby trojúhelník vytvořený tou přímkou a jejími úseky na kladných poloosách měl nejmenší obsah. Napište její rovnici.

99. Šedesát metrů dlouhým pletivem se má ohradit obdélníkový výběh pro slepice, jednou stranou přiléhající ke stěně stavení. Jaké rozměry musí mít výběh, aby měl co největší obsah? Sestrojte graficky závislost obsahu výběhu na šířce oplocení.

100. Na rohové trojúhelníkové parcele s přeponou 8 m a s úhlem 60° má být postavena chata s obdélníkovou podstavou. Jaké musí být rozměry základů budovy, aby zastavěná plocha byla co největší?

101. Z lepenky tvaru čtverce o stranách a cm se mají v rozích vyříznout stejně velké čtverce a ze zbylé části se ohnutím získá krabička tvaru kvádru. Jak velké musí být strany odříznutých čtverečků, aby objem krabičky byl co největší?

102. Kolikrát je větší objem koule než objem největšího válce, který je té kouli vepsán?

103. Z válcovitého kmene o poloměru r se má vytesat trám co největší nosnosti. Jaké rozměry musí mít průřez trámu, je-li jeho nosnost dána vztahem $y = ks \cdot v^2$, kde k je konstanta, s je šířka a v výška průřezu?

104. Určete rozměry válcové silážní jámy, jejíž objem je 27 m^3 tak, aby na vyzdění její stěny a dna bylo třeba co nejméně materiálu.

105. Na válcovou konzervu se smí spotřebovat 5 dm^2 bílého plechu. Jaké má mít konzerva rozměry, aby měla přitom největší objem?

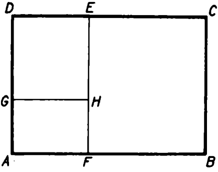
106. V kuželovité věžičce o poloměru podstavy r a výšce v je třeba zřídit válcovitou místnost maximálního objemu. Jaké bude mít rozměry?

***107.** Průřez odpadového kanálu má tvar rovnoramenného lichoběžníka. Jeho hloubka je h dm, obsah průřezu P dm^2. Jaký bude sklon bočních stěn, jestliže náklad na vyzdění kanálu při daných rozměrech má být minimální?

*108. K osvětlení $2b$ metrů široké ulice se má nad jejím středem zavěsit svítidlo. V jaké výšce musí být lampa, aby okraj silnice byl co nejvíce osvětlen?

109. Nad suportem soustruhu je zavěšen světelný zdroj svítivosti I. V jaké výši má být zdroj, aby osvětlení lože soustruhu ve vzdálenosti d od suportu bylo co největší?

110. Půdorys kravína má mít tvar obdélníka o daném obsahu P, přičemž vnitřní prostor má být rozdělen příčkami na tři nestejné části (obr. 17). Přitom $AF = \frac{2}{5}AB$. Náklady na délkový metr vnitřní stěny jsou jen $\frac{2}{3}$ nákladů na délkový metr obvodového zdiva. Jaké rozměry musí mít půdorys kravína, aby stavební náklady byly co nejmenší? [Návod: Položte $AB = x$, k je náklad na běžný metr vnější stěny, y je celkový náklad.]



Obr. 17

111. Ze čtyř stejně dlouhých stanových tyčí délky a metrů se má postavit stan se čtvercovou podstavou a největším uzavřeným prostorem. Určete délku strany podstavy x, výšku stanu y i velikost stanového prostoru.

112. Jaká je výška kužele maximálního objemu, je-li vepsán kouli o poloměru r?

*113. Dvě chodby široké 2,4 m a 1,6 m se protínají v pravém úhlu. Jaký nejdelší žebřík lze ještě ve vodorovné poloze přenést z jedné chodby do druhé?

114. Denní náklady při plavbě lodi sestávají ze dvou částí:
a) z konstantní části a Kčs, b) z proměnné části, jejíž velikost je přímo úměrná třetí mocnině rychlosti plavidla. Pro kterou rychlost lodi bude doprava nákladu nejekonomičtější?

115. Dva body A, B ležící na opačných březích potoka, jehož šířka je d metrů, jsou spojeny pěšinami AC a BD a lávkou kolmou k oběma břehům v bodech C, D. Určete polohu lávky tak, aby cesta z A do B byla co nejkratší. [Bod A je a metrů a bod B je b metrů vzdálen od břehu potoka.]

116. Po přímé silnici od místa A do místa B jde chodec rychlostí 1,5 m/s. Ze kterého místa X na silnici musí odbočit, chce-li se dostat za nejkratší dobu přes pastvinu do místa C, ležícího od silnice stranou ve vzdálenosti

b? Rychlost chodce přes pastvinu je 1 metr za sekundu, vzdálenost AD je a metrů. [D je pata kolmice z bodu C na směr AB.]

117. Z plechu tvaru kruhu o poloměru r se má vyříznout kruhová výseč a svinout v plášť kužele. Jak velký musí být středový úhel svinovaného plechu, aby objem kužele byl co největší? [Návod: Uvažte, že obvod podstavy kužele je roven oblouku výseče, tj. $2\pi\varrho = \pi\varphi$.]

118. Určete číslo, jehož dekadický logaritmus se nejméně liší od jeho druhé odmocniny.

119. Určete:
a) největší; b) nejmenší vzdálenost bodu $A \equiv (3,4)$ od kružnice o poloměru $r = 2$ se středem v počátku.

120. Určete rozměry kvádru se čtvercovou podstavou, jehož povrch má velikost P cm^2 a jehož objem je maximální.

121. Ze všech rovnoramenných trojúhelníků o daném obvodu má rovnostranný trojúhelník největší obsah. Dokažte. [Návod: Užijte Heronova vzorce.]

***122.** Ze 72 monočlánků, $U_e = 2$ V, $R_i = \frac{1}{6}\,\Omega$, je sestavena baterie. Kolik článků za sebou a kolik článků vedle sebe je třeba zapojit, aby tato baterie dávala co největší proud, je-li vnější odpor vedení $R = 3\,\Omega$?

123. Spodní okraj plakátu je a metrů nad výškou očí pozorovatele, jeho horní okraj b metrů nad výškou očí pozorovatele. Ze které vzdálenosti od stěny je vidět plakát v maximálním zorném úhlu?

$\boxed{\textbf{124.}}$ Určete absolutní extrémy funkce $f(x) = x^3 + \frac{x^4}{4}$ v intervalu $\langle -4,1 \rangle$.

Řešení

$$f(-4) = 0,\ f(1) = \frac{5}{4}\,.$$

Protože je daná funkce spojitá, má v každém bodě definičního oboru derivaci. (Viz př. 84.) Extrém nastává v bodě $(-3,-6{,}75)$. Pro $x < -3$ je $y' < 0$, pro $x > -3$ je $y' > 0$. V tomto bodě $(-3,-6{,}75)$, který patří do vyšetřovaného intervalu, nastává absolutní minimum. V bodě $x = 1$ nastává absolutní maximum, a to $\frac{5}{4}$.

125. Stanovte absolutní extrémy dané funkce v daném intervalu:
a) $y = 4x - x^2$, $x \in \langle 0,3 \rangle$; b) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$, $x \in \langle -3,-1 \rangle$;
c) $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in \langle -2,2 \rangle$; d) $y = \sqrt{100 - x^2}$; $x \in \langle -6,8 \rangle$;

e) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, $x \in (-1{,}4\rangle$; f) $y = \sin 2x - x$; $x \in \langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\rangle$;

g) $y = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$, $x \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

126. Řešte rovnici: a) $x^3 + 6x^2 + 6x + 5 = 0$;
b) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$;
c) $x^5 - 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$;
d) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = 0$;
e) $x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 12 = 0$.

[Návod k b): Má-li rovnice $f(x) = 0$ celočíselný kořen, musí tento kořen být dělitelem absolutního členu funkce $f(x)$. Pro nás tedy může být kořen jedno z čísel $-1{,}1$. Je to $x = -1$, protože $f(-1) = 0$. Je-li kořen vícenásobný, musí být kořenem i rovnice $f'(x) = 0$, tj. $4x^3 + 6x^2 + 4x + 2 = f'(x) = 0$. Platí $f'(-1) = 0$, a proto $x = -1$ je dvojnásobným kořenem původní rovnice. ($f''(-1) \neq 0$, není proto kořenem trojnásobným.) Je tedy: $(x+1)^2 . (x^2+1) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$.]

127. Určete počet reálných kořenů dané rovnice a uveďte interval $(a, a+1)$, kde a je číslo celé, v němž kořen je:
a) $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$; b) $x^4 + 3x^2 - x - 2 = 0$;
c) $x^4 + 2x^3 - 6x + 2 = 0$; d) $x^5 + 5x + 1 = 0$.
[Návod: Viz učeb. pro 3. roč. SVVŠ, větev přírodovědná.]

128. Podle věty Lagrangeovy o střední hodnotě určete pro danou funkci $f(x)$ číslo $c \in \langle a, b\rangle$, pro které je $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$:
a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, interval $\langle 0{,}3\rangle$; b) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 36$, interval $\langle -3{,}2\rangle$; c) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, int. $\langle 1{,}9\rangle$; d) $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$, $c \in \langle 0, \dfrac{\pi}{3}\rangle$; *e) $f(x) = \log x$, $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 2$.

$\Big[$Návod k e): $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\log 2$, $f(2) = \log 2$, $f'(c) = \dfrac{1}{c . \lg 10}$;

$\log 2 + \log 2 = \dfrac{1}{c \lg 10} \cdot \left(2 - \dfrac{1}{2}\right)$; $c = \dfrac{3}{4 . \lg 10 . \log 2} = \dfrac{3 . \log e}{4 . \log 2}$.$\Big]$

129. Dokažte pomocí věty o střední hodnotě, že pro všecka čísla reálná x a y platí $|\sin x - \sin y| \leqq |x - y|$.

130. Pomocí věty o střední hodnotě určete přibližnou hodnotu:
a) $\log 99$; b) $\sqrt{101}$; c) $\cos 59°$; d) $\sin 29°$.

$\left[\text{Návod k c): } 59° < c < 60°;\ \cos 59° = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{180} . \sin c; \text{protože } 45° <\right.$

$\left. < c < 60°, \text{ je } \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin c < \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{360} < \cos 59° < \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{360} .\right]$

131. Letadlo na trati Praha—Moskva létá průměrnou rychlostí $v = 750$ km/h. Pomocí věty o střední hodnotě dokažte, že existuje okamžik, v němž toto letadlo má okamžitou rychlost 750 km/h.

4. INTEGRÁLNÍ POČET

a) *Neurčitý integrál*

132. Pro rychlý a bezpečný výpočet integrálů elementárních funkcí je dobře znát zpaměti hodnoty níže uvedených integrálů a vzorců. (V závorce jsou uvedeny intervaly, ve kterých integrály existují. Pro stručnost zápisu jsou integrační konstanty všude vynechány.)

$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $[n \neq -1,\ x \in (-\infty, \infty)]$;

$\int \mathrm{d}x = x$, $[x \in (-\infty, \infty)]$; $\int a \, \mathrm{d}x = ax$, $[x \in (-\infty, \infty)]$;

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln |x|$, $[x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)]$; $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x$, $[x \in (-\infty, \infty)]$;

$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x$, $[x \in (-\infty, \infty)]$;

$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x$, $[x \in (-\infty, \infty)]$;

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$, $\left[\cos x \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \text{ celé číslo}\right]$;

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x$, $[\sin x \neq 0,\ x \neq k\pi,\ k \text{ celé číslo}]$;

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln |f(x)|$, $f(x) \neq 0$;

$\int a f(x) \, \mathrm{d}x = a . \int f(x) \, \mathrm{d}x$, ($a$ je libovolné číslo);

$\int [f(x) \pm g(x)] \, \mathrm{d}x = \int f(x) \, \mathrm{d}x \pm \int g(x) \, \mathrm{d}x$.

O správnosti se přesvědčte derivováním primitivní funkce.

133. Vypočtěte neurčitý integrál funkce $y = \frac{(\sqrt{x^3} + 1)^2}{x}$.

Řešení

Danou funkci si nejprve upravíme na algebraický součet funkcí (pokud je to vůbec možné), jehož integrály známe:

$y = \dfrac{x^3 + 2\sqrt{x^3} + 1}{x} = x^2 + 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$, pokud $x > 0$. Integrál součtu funkcí je roven součtu integrálů jednotlivých funkcí, a proto

$$\int (x^2 + 2 \,.\, x^{\frac{1}{2}} + x^{-1})\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x + \int 2x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Podle uvedených vzorců je $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + c_1$,

$$\int 2x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\,\frac{x^{1,5}}{\frac{3}{2}} + c_2 = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + c_2\,, \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c_3.$$

Potom $\displaystyle\int \left(x^2 + \sqrt{2}\,x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \ln|x| + C$,

kde $C = c_1 + c_2 + c_3$.

Zkouška správnosti výsledku:

Derivace primitivní funkce musí být rovna funkci dané:

$$\left[\frac{x^3}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \ln|x| + C\right]' \overset{?}{=} x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}\,,$$

$$\frac{3x^2}{3} + \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} + 0 \overset{?}{=} x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}\,,$$

$$x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} = x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}\,, \text{ pro } x > 0\,.$$

Oba výrazy jsou si rovny, výpočet neurčitého integrálu je tedy správný.

134. Metodou přímé integrace, tj. pomocí vzorců z úlohy 132, určete zpaměti hodnoty neurčitých integrálů:

a) $\int x^2\,\mathrm{d}x$; b) $\int -\pi x\,\mathrm{d}x$; c) $\int (ax + b)\,\mathrm{d}x$; d) $\displaystyle\int \frac{t^2}{3}\,\mathrm{d}t$;

e) $\displaystyle\int \frac{5}{t^2}\,\mathrm{d}t$; f) $\int u\,\mathrm{d}u$; g) $\int 3x^{2n+1}\,\mathrm{d}x$. Proveďte vždy (i ve všech dalších úlohách) zkoušku správnosti řešení.

135. Řešte zpaměti:

a) $\int(2x - x^{-2})\,dx$; b) $\int(1 - x^2 + x^{-3})\,dx$; c) $\int\left(\frac{x^3}{a} - \frac{a}{x^3}\right)dx$, $a \neq 0$;

d) $\int(2x^2 - 3x + 2)\,dx$; e) $\int(x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2)\,dx$;

f) $\int x^2(1 - x^2)\,dx$.

136. Stanovte:

a) $\int\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)dx$; b) $\int\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$; c) $\int\sqrt{t^3\sqrt{t}}\,dt$;

d) $\int\frac{t-1}{\sqrt{t}}\,dt$; *e) $\int\left(\frac{4x+3}{x} - \frac{2}{1+x^2} + \frac{5x-1}{3x^2}\right)dx$;

*f) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$.

137. Vypočtěte:

a) $\int(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\,dx$; b) $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$; c) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$;

d) $\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$; e) $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$; f) $\int\frac{x-2}{\sqrt{x^3}}\,dx$.

Stanovte intervaly proměnné x, pro které jsou integrované funkce definovány, a ověřte správnost výpočtu integrálů.

138. Vypočtěte integrály:

a) $\int\frac{t^3 + 3t - 1}{t}\,dt$; b) $\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{t}} - \frac{1}{3t}\right)^2 dt$;

c) $\int(\sqrt[3]{t} - 3\sqrt{5t} + 2)^3\,dt$; d) $\int\left(\frac{\sqrt{t} - t\sqrt[3]{t}}{4t^2} - t\right)dt$;

e) $\int t\sqrt{t}\,.\,\sqrt[3]{t}\,.\,(t^2 - 1)\,dt$.

139. Vypočtěte:

a) $\int(\sin x + \operatorname{tg} x)\,dx$; b) $\int(e^x - 2\sin x)\,dx$;

c) $\int\frac{(\cos 2x)\,dx}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$; d) $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$;

e) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \,.\, \sin^2 x}\,dx$; f) $\int \sin^2 x\,dx$; g) $\int (2\cos^{-2}x + \sin^{-2}x)\,dx$;

h) $\int \frac{1}{1+\cos 2x}\,dx$.

[Návod: d) čitatele nahraďte výrazem $\sin^2 x + \cos^2 x$; f) užijte dvojnásobného úhlu; h) jmenovatele rozložte na $\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x$.]

140. Určete:

a) $\int \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 dx$; b) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}\,dx$; c) $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx$;

d) $\int \frac{e^{2x}}{(1+2e^{2x})^{-2}}\,dx$; e) $\int \left(-a \,.\, x^{\frac{b}{c}} + e^x\right) dx, a > 0, b \neq -c, c \neq 0$.

[Návod: d) rozšiřte zlomek čtyřmi.]

***141.** Vypočtěte integrály:

a) $\int \frac{dx}{(x-2)^3}$; b) $\int (1-x)^5\,dx$; c) $\int (ax+b)^n\,dx$, n číslo přirozené;

d) $\int \frac{1}{(2x-3)^3}\,dx$; e) $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$, $x \neq a$, n číslo přirozené;

f) $\int e^{3t}\,dt$; g) $\int \sqrt[5]{9-3x}\,dx$ (a, b čísla reálná).

[Návod: a) nahraďte $x - 2 = t$, potom $dx = dt$; b) $1 - x = t$, $dx = -dt$, atd.]

142. Ověřte derivováním správnost vzorce $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$, $f(x) \neq 0$.

Vypočtěte pak integrály:

a) $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$, $x \neq k\pi$; b) $\int \frac{2}{3x-1}\,dx$, $x \neq \frac{1}{3}$.

Řešení

a) $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$ je integrál typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$,

neboť čitatel je roven derivaci jmenovatele, tj. $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + c$, $x \neq k\pi$.

Zkouška správnosti řešení:

$(\ln|\sin x| + c)' = \dfrac{1}{\sin x}\cos x = \operatorname{cotg} x$, pro $x \neq k\pi$, kde k je celé číslo.

b) Upravíme si daný zlomek na tvar $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, tj. $k\,.\,\dfrac{(3x-1)'}{3x-1} = \dfrac{3}{3x-1}\,.\,k$. Toho je možno dosáhnout znásobením původního zlomku třemi třetinami. Tedy $\displaystyle\int \frac{2}{3x-1}\,dx = \int \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3x-1}\,dx = \frac{2}{3}\int\frac{3}{3x-1}\,dx = \frac{2}{3}\ln|3x-1| + c$, pro $x \neq \dfrac{1}{3}$.

Přesvědčte se o správnosti řešení.

143. Vypočtěte integrály (pokud existují):

a) $\displaystyle\int\frac{1}{x+3}\,dx$; b) $\displaystyle\int\frac{1}{2-x}\,dx$; c) $\displaystyle\int\frac{2x}{x^2-1}\,dx$; d) $\displaystyle\int\frac{dx}{2x+5}$;

e) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$; f) $\displaystyle\int\frac{2x-1}{x^2-x+3}\,dx$; g) $\displaystyle\int\frac{3x^2-1}{x^3-x+2}\,dx$;

h) $\displaystyle\int\frac{dt}{3t+1}$; i) $\displaystyle\int\frac{\sin u\cos u}{\cos^2 u}\,du$; *j) $\displaystyle\int\frac{x^{n-1}\,dx}{ax^n+b}$, $a \neq 0, n \neq 0$;

*k) $\displaystyle\int\frac{t^6}{t-1}\,dt$; l) $\displaystyle\int\frac{(t^2-1)^2}{t^3}\,dt$; m) $\displaystyle\int\frac{e^x}{1-2e^x}\,dx$.

b) *Určitý integrál*

144. Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^3\,dx$; b) $\displaystyle\int_a^b x^m dx$; $0 < a < b,\ m \neq -1$; c) $\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{x^2}$, $0 < a < b$;

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt$; e) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt$; f) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2 t}\,dt$; g) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\cos x)\,dx$;

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\frac{x}{2}\,dx$.

[Návod pro h): Užijte vzorce pro poloviční úhel.]

145. Řešte:

a) $\int_1^3 x(1 + \sqrt{x})\,dx$; b) $\int_{-2}^0 (3 - 2x - x^2)\,dx$; c) $\int_{-1}^3 (x^2 - 6x - 16)\,dx$;

d) $\int_1^a \frac{dx}{2\sqrt{ax}}$, $a > 0$; e) $\int_2^4 \frac{\sqrt[3]{2x}}{6x\sqrt{x}}\,dx$; f) $\int_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}\right) dx$.

146. Podle Riemanovy definice určitého integrálu řešte:

a) $\int_2^3 1{,}5\,x\,dx$; b) $\int_0^2 (x + 1)\,dx$; c) $\int_0^2 x^2\,dx$; d) $\int_2^5 (x - 1)^2\,dx$; e) $\int_0^3 e^x dx$.

Řešení

a) Interval $\langle 2{,}3 \rangle$ rozdělíme na n stejných dílků velikosti $\frac{1}{n}$. V koncových bodech těchto dílků si myslíme sestrojeny druhé souřadnice a spočteme obsah obrazce omezeného osou x, grafem funkce $y = 1{,}5x$ a druhými souřadnicemi koncových bodů intervalu $\langle 2{,}3 \rangle$ jako společnou limitu součtu obsahů „vepsaných" a „opsaných lichoběžníků" pro $n \to \infty$. Načrtněte si situaci.

Pro součet obsahů „vepsaných" obrazců platí:

$$P_1 = \frac{1}{n} \,.\, 1{,}5 \,.\, 2 + \frac{1}{n} \,.\, 1{,}5 \,.\left(2 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \,.\, 1{,}5 \,.\left(2 + \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n} \,.\, 1{,}5 \,.\left(2 + \frac{n-1}{n}\right).$$

Pro $n \to \infty$: $P'_1 = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1{,}5}{n} \left[2 + \left(2 + \frac{1}{n}\right) + \left(2 + \frac{2}{n}\right) + \ldots + \left(2 + \frac{n-1}{n}\right)\right] =$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1{,}5}{n} \left[2 + \frac{2 + \frac{1}{n} + 2 + \frac{n-1}{n}}{2} \,.\, (n - 1)\right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1{,}5}{n} \left[2 + \frac{5}{2}\,(n - 1)\right] = \lim_{n \to \infty} 1{,}5 \left[\frac{2}{n} + \frac{5}{2} : \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = 3{,}75.$$

Pro součet obsahů „opsaných" obrazců platí:

$$P_2' = \lim_{n\to\infty} \frac{1{,}5}{n} \cdot \left[\frac{2 + \frac{1}{n} + 3}{2} \cdot (n-1) \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1{,}5}{n} \cdot \left[\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2n} \right) \cdot (n-1) \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1{,}5}{n} \cdot \left[\frac{5}{2} n + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} - \frac{1}{2n} \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1{,}5 \cdot \left[\frac{5}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{5}{2n} - \frac{1}{2n^2} \right] = 3{,}75\,.$$

Závěr:

$$\int_2^3 1{,}5x \, dx = 3{,}75\,.$$

147. Jestliže funkce $y = f(x)$ je funkce spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ a $F(x)$ je její primitivní funkce v tomto intervalu, pak určitý integrál z funkce $y = f(x)$ v mezích od a do b (a,b jsou konstanty, $a < b$) je $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$. Jaký je geometrický význam $\int_a^b f(x)\, dx$? Stanovte podle toho obsah obrazce omezeného grafem funkce $y = x^3 + 2$, osou x a druhými souřadnicemi bodů grafu dané funkce: $A \equiv (1, ?)$, $B \equiv (3, ?)$.

Řešení

Funkce $y = x^3 + 2$ je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$ (neboť je to funkce racionální celistvá) a je tedy spojitá i v požadovaném intervalu $\langle 1, 3\rangle$. Je proto možno použít pro výpočet obsahu tohoto obrazce určitého integrálu.

$$\int_1^3 (x^3 + 2)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} + 2x \right]_1^3 = \frac{3^4}{4} + 2 \cdot 3 - \left(\frac{1}{4} + 2 \right) = 24\,.$$

Závěr: Obsah obrazce je 24 j².

148. Určete obsah obrazce omezeného parabolou $y = x^2 + 2x - 3$, osou x a druhými souřadnicemi bodů dané funkce: $A \equiv (-2, ?)$, $B \equiv (3, ?)$. [Návod: $x \in (-\infty, \infty)$. Graf dané funkce má s osou x průsečíky o souřadnicích $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, minimum v bodě $x = -1$. $f'(-1) = 0$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$, $f'\left(-\frac{3}{2}\right) < 0$. Obsah obrazce omezeného obloukem paraboly a osou x „pod osou x" označme P_1, obsah obrazce „nad osou x" označme P_2. Potom $P_1 = -\int_{-2}^{1}(x^2 + 2x - 3)\,dx$, $P_2 = \int_{1}^{3}(x^2 + 2x - 3)\,dx$. Obsah celého obrazce omezeného křivkou a osou x v intervalu $\langle -2,3 \rangle$ je $P = P_1 + P_2$.] Načrtněte.

$$P = -\int_{-2}^{1}(x^2 + 2x - 3)\,dx + \int_{1}^{3}(x^2 + 2x - 3)\,dx =$$

$$= \left[x^3 : 3 + \frac{2x^2}{2} - 3x\right]_1^{-2} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 3x\right]_1^3 =$$

$$= \frac{-8}{3} + 4 + 6 - \frac{1}{3} - 1 + 3 + \frac{27}{3} + 9 - 9 - \frac{1}{3} - 1 + 3 = 19\frac{2}{3}.$$

Obsah vyšetřované plochy je $19\frac{2}{3}$ plošné jednotky.

149. Určete obsah obrazce omezeného osou x, grafem funkce a druhými souřadnicemi jeho bodů $A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ pro:

a) $y = x^2 + x - 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$; b) $y = \sin x$, $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$;

c) $y = 3x - x^2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; d) $y = x^2 - 5x + 6$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$;

e) $y = x^2 - 4$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; f) $y = x + \cos x$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

150. Zpaměti určete obsah obrazce vymezeného danou křivkou, osou x a druhými souřadnicemi bodů křivky: a) $y = \frac{1}{x}$, $A \equiv (?, 5)$; $B \equiv (5, ?)$; b) $y = \cos x$, $A \equiv (0, ?)$, $B \equiv \left(\frac{\pi}{2}, ?\right)$; c) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$, $A \equiv (0, ?)$, $B \equiv \left(\frac{\pi}{4}, ?\right)$; d) $y = e^x$, $A \equiv (0, ?)$, $B \equiv (2, ?)$;

*e) $y = \frac{1}{1 + x^2}$, $A \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, ?\right)$, $B \equiv (\sqrt{3}, ?)$.

151. Určete obsah obrazce omezeného čárami $y = x^3$ a $y = x$.

Řešení

Křivka $y = x^3$ (kubická parabola) je souměrná podle počátku souřadnic a s přímkou $y = x$ omezuje dvě shodné plochy. (Načrtněte.)

Stanovíme nejprve souřadnice průsečíků obou čar. $x = x^3$, $x^3 - x = 0$, $x(x^2 - 1) = 0$, $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$, $y_1 = 0$, $y_{2,3} = \pm 1$, tj. $M \equiv (1,1)$, $N \equiv (-1,-1)$. Obsah vyšetřovaného obrazce je $P = 2(P_1 - P_2)$. P_1 je obsah pravoúhlého trojúhelníka, P_2 je obsah plochy omezené parabolou, osou x a druhou souřadnicí bodu M. Je tedy celkový obsah plošky omezený oběma čárami $P = \left[\frac{1 \cdot 1}{2} - \int_0^1 x^3 \, dx\right] \cdot 2 = 1 - 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Závěr: Obsah vyšetřovaného obrazce je $P = \frac{1}{2} \, \mathrm{j}^2$.

152. Určete obsah obrazce omezeného čárami, jejichž rovnice jsou: a) $y = x^2 - x - 2$, $y = 0$; b) $y^2 = 2x + 4$, $x = 0$; c) $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$; d) $y = x^2$, $y = 2 - x^2$; e) $y = x^2 : 4$, $y = 2\sqrt{x}$; f) $y = 3 - x^2$, $y = 1 + x^2$; g) $y = x^3 - 7x^2 + 10x$, $y = 0$.

153. Určete obsah rovinného obrazce omezeného čárami: a) $y = x^2$, $y = 1 - x^2$; b) $y = x^2$, $y = 2 - x$; c) $x^2 - 4x - 2y + 6 = 0$, $2x - y - 3 = 0$; d) $y^2 = 16x$, $x^2 = 2y$; e) $y^2 = 2x + 1$, $x - y - 1 = 0$; f) $y = \mathrm{tg} x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$.

154. Určete obsah plochy, která je omezena: a) oblouky dvou protínajících se parabol: $y = -2x^2 + 8x - 3$, $y = x^2 - 4x + 6$; b) grafem funkce $y = \sin^2 x$ a osou x v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$; c) křivkou $y = 2 \sin x - \sin 2x$ a osou x v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

$\boxed{\textbf{155.}}$ Vypočítejte objem kulové úseče, která je částí koule o poloměru r a jejíž výška je v.

Řešení

Objem tělesa, které vznikne rotací plochy omezené křivkou o rovnici $y = f(x)$ s krajními body, jejichž první souřadnice jsou x_1, x_2 ($x_2 > x_1$), kolem osy x, je $V = \int_{x_1}^{x_2} \pi y^2 \, dx$. Rotuje-li plocha omezená obloukem křivky $y = f(x)$ s krajními body, jejichž druhé souřadnice jsou y_1, y_2 ($y_2 > y_1$) kolem osy y, je objem tak vzniklého tělesa určen výrazem $V = \int_{y_1}^{y_2} \pi x^2 \, dy$.

Jestliže naše kulová úseč vznikla rotací kruhového oblouku $x^2 + y^2 = r^2$

omezeného body s prvními souřadnicemi $r - v$ a r kolem osy x, je její objem $V = \pi\int\limits_{r-v}^{r} y^2\,dx = \pi\int\limits_{r-v}^{r}(r^2 - x^2)\,dx = \pi r^2\int\limits_{r-v}^{r} dx - \pi\int\limits_{r-v}^{r} x^2\,dx =$

$$= \left[\pi r^2 x - \frac{\pi x^3}{3}\right]_{r-v}^{r} = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} - \pi r^2(r - v) + \frac{\pi(r - v)^3}{3} =$$

$$= \frac{\pi v^2}{3}(3r - v).$$ Správnost výsledku je evidentní.

156. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací obrazce omezeného čárami $x^2 - y^2 = 4,\ y = \pm 2$ kolem osy y. [Návod: $V = \pi\int\limits_{-2}^{2}(y^2 + 4)\,dy$.]

157. Určete objem koule poloměru r, která vznikne rotací kruhu kolem průměru ležícího a) v ose x, b) v ose y.

158. Jaký objem má těleso, omezené plochou, jež vznikne rotací oblouku křivky $a \,.\, y^2 = x^3$ v intervalu $\langle 0,a\rangle$ kolem osy y?

159. Určete objem tělesa, které vznikne rotací obrazce omezeného parabolou $y^2 = 6x$ a přímkou $x = 3$ kolem osy x.

160. Určete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky: a) $y^2 = 2px$ kolem osy x v mezích $\langle 0,p\rangle$; b) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ kolem osy y; c) $x^2 - y^2 = a^2$ kolem osy y v mezích $\langle -a,+a\rangle$; d) $x^2 - y^2 = a^2$ kolem osy x v mezích $\langle a,2a\rangle$. [p, a, b čísla kladná.]

161. Určete hydrostatickou tlakovou sílu F na svislé obdélníkové stavidlo, sahá-li voda do výšky h, je-li šířka stavidla a a hustota kapaliny ϱ. [Návod: Hydrostatická tlaková síla na proužek stavidla v hloubce x je $dF = g x \,.\, \varrho \,.\, a \,.\, dx$.] Řešte též pro trojúhelníkové stavidlo šířky a a výšky vody h. Jaká bude hydrostatická tlaková síla na lichoběžníkové stavidlo o rozměrech 20 m (horní základna), 10 m, $v = 6$ m? Jaká síla bude působit na spodní polovinu stavidla v prvním případě?

162. Oč se prodlouží vlastní tíhou lano těžní klece stálého průřezu S ($\varrho = 7{,}7\ \mathrm{g/cm^3}$) dlouhé 3 000 m, je-li jeho modul pružnosti $E = 2 \,.\, 10^5\ \mathrm{N/mm^2}$. [Návod: Prodloužení $l' = \int\limits_0^l \frac{G\,dx}{ES}$, $G = gS\,(l - x)\varrho$.]

163. Jakou práci je třeba vykonat, aby těleso hmotnosti m bylo dopraveno do výše h nad povrch Země, jejíž poloměr je R? $\left(F = \varkappa\,\frac{mM}{(R + h)^2}\,.\right)$

164. Válcová nádoba o průměru podstavy $d = 20$ cm a výšce $v = 80$ cm je naplněna plynem tlaku 7 600 torr. Jakou práci je nutno vykonat při stlačování plynu, aby při nezměněné teplotě byl objem plynu polovinou původního objemu?

***165.** Určete práci, kterou vykoná plyn při adiabatickém zmenšení objemu z $V_0 = 1\ \mathrm{m^3}$ a tlaku $p_0 = 10^5\ \mathrm{N/m^2}$ na objem $V_1 = 10\ \mathrm{cm^3}$ ($\varkappa = 1{,}4$).

5. OPAKOVÁNÍ

166. Určete první derivaci funkce: a) $y = e^t \sin t - (\ln |t|) \,.\, \mathrm{tg}\, t$; b) $y = (t + 1) \,.\, (2t - 1)(3t + 2)$; c) $z = \sqrt{t}(2t^2 - \sqrt[3]{t} + \sqrt{3})$; d) $z = \sqrt{t + \sqrt{t + \sqrt{t}}}$.

167. Určete derivaci: a) $y = |x|$; b) $y = x|x|$; c) $y = \ln |x|$; d) $y = 1 - x$ pro $x \leqq 0$, $y = e^{-x}$ pro $x > 0$.

168. Určete souřadnice průsečíků grafů funkcí $y = \dfrac{1}{x}$, $y = x^2$ a velikost úhlu, pod kterým se protínají.

169. Najděte rovnice tečen vedených bodem křivky $A = (x_0, y_0)$ ke křivce o rovnici: a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; b) $y^2 = 2px$; c) bodem $B(x, y)$ křivky $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ v průsečíku přímky $y = x$ s touto křivkou.

170. a) V jakých úhlech protíná osu x graf funkce $y = x^3 - x^2$? b) V jakém úhlu se protínají grafy funkcí $x^2 + y^2 = 5$, $x^2 - 4y = 0$?

171. Napište rovnice tečen vedených k hyperbole o rovnici $xy = 4$ v jejích bodech $T_1 \equiv (1, ?)$, $T_2 \equiv (-4, ?)$ a stanovte jejich odchylku. Sestrojte graf křivky i tečen.

172. V rovnici paraboly $y = x^2 + bx + c$ najděte hodnoty konstant b, c tak, aby přímka o rovnici $y = x$ se dotýkala dané paraboly v bodě $T \equiv (2, ?)$.

173. Počet baktérií v živném prostředí se zvětší z počátečního množství n_0 za čas t na $n = n_0 e^{kt}$, kde k je konstanta závislá na druhu baktérií a na jakosti prostředí. Jak je možno definovat rychlost rozmnožování baktérií a jak velká je tato rychlost v čase t?

174. Stanovte rychlosti, zrychlení a síly způsobující pohyb v případě, že rovnice dráhy je dána funkcí: a) $s = c \,.\, e^{-bt}$; b) $s = a \,.\, \dfrac{t^2}{2}$; c) $s = y = r \sin \omega t$.

175. Naložený vagón bto váhy 40 t se pohybuje po svážném kopci na rozřaďovacím nádraží podle zákona dráhy $s = 2t^2 + 3t + 1$. Určete jeho kinetickou energii po: a) 5*s* trvajícím pohybu; b) po 30s trvajícím pohybu.

***176.** Pohybuje-li se těleso podle zákona $s = a \cdot e^t + b \cdot e^{-t}$, je zrychlení toho pohybu v určitém okamžiku t úměrné dráze, kterou těleso do té doby urazilo. Dokažte.

177. Těleso se pohybuje podle zákona dráhy daného rovnicí: $s = a + bt + ct^2$. Dokažte, že síla, způsobující jeho pohyb, je konstantní.

***178.** Dráha tělesa padajícího volným pádem ve vzduchu za předpokladu, že odpor vzduchu je úměrný rychlosti, je dána vzorcem $s = \frac{g}{k} \cdot \left(t + \frac{e^{-kt} - 1}{k}\right)$, kde g je tíhové zrychlení, k je konstanta.
Určete závislost rychlosti tohoto pohybu na čase.

***179.** Vyšetřete průběh funkce a načrtněte její graf: a) $y = x^2 - 3x + 5$; b) $y = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$; c) $y = \frac{x(x-1)}{x+1}$; d) $y = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2}$.

***180.** Daným bodem $P \equiv (a,b)$ $(a > 0, b > 0)$ veďte přímku protínající osy soustavy souřadnic $0xy$ v bodech $M \equiv (x > 0, 0)$, $N \equiv (0, y > 0)$. Napište její rovnici, jestliže: a) $x + y$ je nejmenší; b) obsah trojúhelníka $0xy$ je nejmenší; c) $x^n + y^n$ je nejmenší. (n přirozené číslo.)

181. Stanovte průběh funkce: a) $y = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$;

b) $y = \frac{x^3 - 9x}{10}$.

182. Stanovte lokální extrémy funkcí, jejichž rovnice jsou:

a) $y = \frac{1}{x} + \ln x$; b) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$; c) $y = |x^2 - 1| + 1$;

d) $y = \frac{x^2}{e^x}$.

183. Které kladné číslo dává s číslem k k němu převráceným nejmenší součet?

184. Který obdélník o daném obsahu P má nejmenší obvod?

185. Kolik procent materiálu odpadne z kmene válcovitého průřezu o poloměru $r = 20$ cm, z něhož se má vytesat kvádr: a) s pravidelnou podstavou, jejíž obsah je maximální; b) jehož nosnost je největší, je-li nosnost kvádru určena $N = cxy^2$, kde c je konstanta, x vodorovný a y svislý rozměr?

186. Do pravoúhlého trojúhelníka vepište pravoúhlý rovnoběžník maximálního obsahu tak, aby jeho dvě sousední strany ležely v odvěsnách daného trojúhelníka. Jakou částí obsahu trojúhelníka je obsah tohoto rovnoběžníka?

187. Který rovnoramenný trojúhelník vepsaný do kružnice o poloměru r má největší obsah?

188. Jaké rozměry má obdélník maximálního obsahu, vepsaný do elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$?

189. Vypočítejte neurčitý integrál:

a) $\displaystyle\int \frac{x+a}{x-a}\,\mathrm{d}x$, a libovolné kladné číslo; b) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}}\,\mathrm{d}x$, $a > 0$;

c) $\displaystyle\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, $m > 0$, $n > 0$; d) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$;

e) $\displaystyle\int \frac{3 - 2\cotg^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1 + 3\cos x}\,\mathrm{d}x$.

***190.** Řešte:

a) $\displaystyle\int \sqrt{x-1}\,.\,x\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5x-2}}\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int x(5x^2-3)^7\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\,\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$.

***191.** Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x-3}\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{2+3x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$; d) $\displaystyle\int \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$.

192. Najděte chybu ve výpočtu integrálu:

a) $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sqrt{\cos^2 x\,\mathrm{d}x} = \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x = \Big[\sin x\Big]_0^\pi = 0;$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{4}{3}\sqrt{x^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int_{-1}^{1} x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\cdot\left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^{1} = 0\,.$

193. Stanovte:

a) $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})\,dx$; b) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,dy$; c) $\int_{-1}^1 \frac{y^5}{y+2}\,dy$;

d) $\int_3^6 \sqrt{x-2}\,dx$.

194. Vypočtěte obsah obrazce omezeného křivkou a přímkou: a) $x = 2 - y - y^2$, $x = 0$; b) $y = 4x - x^2$, $y = 0$; c) $y = x(x-1) \,.\, (x-2)$, $y = 0$.

195. Určete obsah obrazce omezeného křivkou:

a) $y = \operatorname{tg} x$, osou x a přímkou o rovnici $x = \frac{\pi}{3}$;

b) $y = x^3$, přímkou $y = 8$ a osou y; c) $y = 2x - x^2$ a přímkou o rovnici $y = -x$; d) $y = x^2$ a přímkou o rovnici $y = 3 - 2x$; e) $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ a přímkou $y = 2x$.

196. Najděte obsah obou částí kruhu, které na kruhu omezeném kružnicí o rovnici $x^2 + y^2 = 8$ vymezuje parabola, jejíž rovnice je $y^2 = 2x$.

***197.** Vypočtěte obsah obrazce omezeného hyperbolou o rovnici $x^2 - y^2 = 9$, osou x a průměrem hyperboly procházející bodem $M \equiv (5,4)$.

198. Jak velký obsah má obrazec omezený grafy funkcí:

a) $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$; b) $y^2 = x$, $y = \frac{x^2}{2}$; c) $y = \frac{x^3}{3}$, $y = x^2$;

d) $y = 2 - x^2$, $y = x^2$; *e) $y = \ln x$, osou x a přímkou o rovnici $x = a$ pro $a > 1$; f) $y = x^2 - x$, $y^2 = 2x$.

199. Jaký obsah má obrazec omezený parabolou, jejíž rovnice je $x^2 = 4ay$ a křivkou o rovnici $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$, když $a > 0$.

***200.** Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací obrazce omezeného čárami o rovnicích:

a) $y - a = \sqrt{ax}$, $a > 0$, $x = 0$, $y = 2a$ kolem osy x;
b) $y = \cos x$, $y = -1$ kolem přímky $y = -1$ pro $-\pi \leqq x \leqq \pi$;
c) $y = 2x - x^2$, $y = 0$, kolem osy x;
*d) $x^2 + (y - b)^2 = a^2$, $0 < a \leqq b$, kolem osy x.

201. Určete objem tělesa, které vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona je přímka o rovnici:

a) $y = \frac{1}{2} x$, kolem osy x, pro $x \in \langle 0{,}6 \rangle$; b) $y = \frac{r}{v} x$ kolem osy x, pro $x \in \langle 0, v \rangle$; c) $y = \frac{r}{v} x$ kolem osy x, kde $x_2 - x_1 = v$, $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$, r, v čísla kladná.

202. Určete objem tělesa vytvořeného otáčením obrazce, omezeného čárami: a) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$, kolem osy y; b) $xy = 4$ pro $x = 1$, $x = 4$, kolem osy x; c) $y^2 = -a^2 + x^2$, $y = 0$, $x = \pm 2a$, kolem osy x, $a > 0$.

XIII. ZÁKLADY STATISTIKY A POČTU PRAVDĚPODOBNOSTI

I. ZÁKLADY STATISTIKY

1. Ve 101 zkoumaných klasech šlechtěného druhu pšenice byl nalezen tento počet obilek:

Tabulka 1

83	58	80	86	80	77	70	78	82	80
79	80	81	76	82	79	84	81	80	77
82	81	61	85	75	74	80	78	80	82
75	79	87	84	89	80	79	80	76	97
80	85	74	81	71	81	75	66	84	75
79	80	88	80	79	80	85	92	72	86
78	71	82	79	91	69	80	70	69	79
87	81	78	89	67	89	74	80	81	73
74	78	75	73	85	78	73	76	79	68
91	95	90	92	96	81	82	89	91	95
									79

a) Proveďte třídění těchto údajů podle velikosti zkoumaného znaku (počtu zrn) a vyznačte příslušné četnosti.
b) Stanovte medián, modus a velikost aritmetického průměru zkoumaného znaku.

Řešení

a)

Tabulka 2

x_i	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
f_i	1	–	–	–	–	1	–	–	1	1	1	2	2	2
x_i	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
f_i	1	3	4	5	3	2	6	10	15	8	6	1	3	4
x_i	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97		
f_i	2	2	1	4	1	3	2	–	1	1	1	1		

Pro lepší přehlednost užijeme pro celé variační rozpětí daného souboru, tj. pro 97 — 58, menší počet intervalů, např. (57,5; 62,5⟩, (62,5; 67,5⟩; (67,5; 72,5⟩ atd. Hodnoty znaku, které padnou dovnitř příslušného intervalu, nahradíme jedinou hodnotou, příslušnou středu tohoto intervalu, tj. 60, 65, 70, ...

Tabulka 3

x_i'	60	65	70	75	80	85	90	95
f_i'	1	3	8	17	45	12	11	4

x_i' znamená zde i-tý interval, jejichž počet je $m < n$, f_i' četnost v něm zkoumaného znaku.

b) Medián je ta hodnota znaku, která leží v uspořádané tabulce právě uprostřed, tj. hodnota, „nad kterou" je právě tolik pozorovaných jedinců jako „pod ní". V našem případě je to hodnota 80. (Větších hodnot je 16, menších rovněž 16.)
Modus je hodnota znaku, který se v daném souboru nejčastěji vyskytuje. V našem případě je to též hodnota 80.

Aritmetický průměr je definován $\bar{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$, nebo

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i' f_i'}{\sum\limits_{i=1}^{m} f_i'}. \text{ V našem případě } x = \frac{58 + 63 + 66 + \ldots + 97}{101} =$$

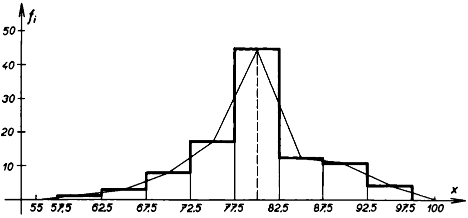
$$= \frac{58.1 + 63.1 + \ldots + 69.2 + 70.2 + \ldots + 78.6 + \ldots + 97.1}{101}$$

2. Sestrojte sloupkový diagram (histogram) a polygon četností pozorovaného znaku z úlohy 1.

Řešení

Histogram je horní obrys skupiny obdélníků, jejichž základny jsou na ose x rovné šířkám třídních intervalů a jejichž obsahy jsou rovny třídním četnostem. Obsah histogramu je proto číselně roven rozsahu souboru. Zvolíme-li šířku třídního intervalu 1, jsou výšky příslušných obdélníků rovny třídním četnostem. V histogramu tab. 3 je třídní interval 5 jednotek, výšky obdélníků jsou tedy rovny jedné pětině třídních četností. Viz obr. 18.

Polygon četností je čára, která se skládá z úseček spojujících postupně středy „horních" stran histogramu. Polygon četností začíná i končí na ose x, a to v půlícím bodě intervalů šířky h (jako je šířka intervalů histogramu), které připojujeme na obou koncích histogramu. Čárkovaná úsečka v obr. 18 značí medián souboru.



Obr. 18

3. Výsledky měření výšky 74 žáků třetích ročníků SVVŠ byly zapsány do této tabulky:

Výšky žáků v cm: Tabulka 4

174,	178,	183,	168,	163,	175,	178,	177,	169,	182,	188,	176,	177,
178,	184,	185,	170,	168,	157,	158,	174,	174,	173,	171,	168,	170,
172,	174,	176,	179,	179,	188,	186,	181,	180,	169,	172,	174,	165,
164,	156,	174,	184,	182,	181,	172,	176,	177,	185,	181,	178,	175,
170,	168,	180,	183,	183,	181,	180,	173,	175,	177,	179,	164,	161,
172,	174,	178,	184,	176,	179,	162,	182,	177				

a) Sestavte tabulku rozdělení četností při třídním intervalu 1 cm.
b) Napište tabulku rozdělení četností pro třídní interval 5 cm.
c) Zobrazte histogram a polygon četnosti pro tabulku z úlohy 3b.
d) Jaký je medián daného souboru?

[Návod: a) Žák vysoký asi 156 cm (tj. vyšší než 155,5 cm a menší než 156,5 cm) je jediný, žák vysoký asi 157 cm také jediný atd. Četnosti v těchto intervalech jsou tedy 1. b) První interval bude (155,5; 160,5), jeho střed 158 a skupinová četnost 3, druhý interval (160,5; 165,5) se středem 162 a skupinovou četností 6 atd. c) Výšky obdélníků jsou rovny pětině velikostí zkoumaného znaku.]

4. Sestavte tabulku rozdělení četností výnosu vyšlechtěné pšenice na 24 farmách státního statku, jestliže pěstitelské podmínky jsou na všech farmách přibližně stejné.

Tabulka 5

Číslo farmy	Výnos v q/ha	Číslo farmy	Výnos v q/ha	Číslo farmy	Výnos v q/ha	Číslo farmy	Výnos v q/ha
1	44,–	7	45,8	13	37,7	19	40,4
2	42,2	8	51,2	14	42,2	20	45,8
3	36,1	9	40,4	15	34,2	21	37,7
4	33,3	10	40,4	16	28,8	22	35,1
5	41,3	11	43,1	17	36,9	23	42,2
6	46,7	12	57,5	18	36,9	24	41,3

5. Šlechtěná odrůda máku byla pěstována na výměře 400 m². Výnos máku byl zjišťován v pondech pro každý m² zvlášť. V prvním sloupci tabulky je uveden výnos v pondech z 1 m², v druhém sloupci počet m², na nichž byl příslušný výnos docílen.

Tabulka 6

Váha v p/m² (rozpětí tříd)	Počet m² (četnost)	Váha v p/m² (rozpětí tříd)	Počet m² (četnost)
22– 40	1	136–154	80
41– 59	1	155–173	97
60– 78	4	174–192	78
79– 97	12	193–211	21
98–116	31	212–230	4
117–135	69	231–249	2
			400

Sestavte tuto tabulku rozdělení četností pro středy intervalů a zobrazte histogram i polygon četností.

6. U 842 vzorků mléka v krajské mlékárně byla provedena zkouška sušiny, jejíž výsledky jsou v tabulce 7.

Tabulka 7

Třídy %	7—8	8—9	9—10	10—11	11—12	12—13	13—14	14—15	15—16
Střed třídy	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5
Četnost	2	5	12	13	186	461	140	16	7

Sestrojte polygon četností.

7. Zobrazte sloupkovým diagramem růst výroby elektřiny v ČSSR v letech 1962—1971 (v 10^9 kWh).

Tabulka 8

Ukazatel	1962	1965	1968	1969	1970	1971
Výroba elektřiny celkem	28,7	34,2	41,6	43,1	45,2	47,2
v tom parní elektrárny	25,6	30,8	38,3	40,6	41,4	44,5
vodní elektrárny	3,0	3,3	3,2	3,5	3,7	3,7
spalovací motory	0,1	0,05	0,05	0,04	0,05	0,04

a) Určete podíl výroby parních elektráren na celkové výrobě elektřiny.
b) O kolik procent byla výroba elektřiny v roce 1971 vyšší než v roce 1965?
c) Jaký byl podíl výroby vodních elektráren na celkové výrobě?

8. Zobrazte spojnicovým diagramem na formátu 10,8 cm . 6,5 cm záznam o těžbě kamenného uhlí v ČSSR v letech 1948—1962:

Tabulka 9

Rok	1948	1949	1950	1955	1956	1960	1961	1962	1963
Těžba v 10^6t	17	17	18	20	21	24	26	27	27

Řešení

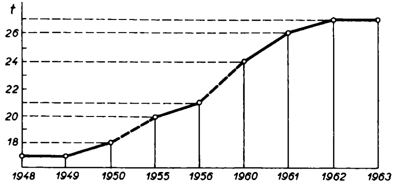
Má-li se celý graf právě vejít na daný formát, musíme stanovit nejprve modul stupnice (šířku intervalu). Budeme zobrazovat 9 hodnot, šířka jednoho intervalu je tedy 108 mm : 9 = 12 mm. Na výšku zobrazujeme rozpětí 27 t — 17 t = 10 t a máme k dispozici rozměr 6,5 cm. Za počátek grafu zvolíme bod o druhé souřadnici 5 mm a potom pro modul

Tabulka 10

Podíl krajů na průmyslové výrobě v ČSSR v r. 1970 (v %) ve vybraných odvětvích

Prům. odvětví	I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Výroba elektr. energie	2,4	12,6	2,0	12,1	13,7	15,0	10,5	14,2	8,2	7,7	1,6
Průmysl paliv	4,4	1,8	0,1	7,6	40,3	0,6	4,3	31,9	7,6	1,4	–
Metalurgie černých kovů	–	15,6	–	3,5	6,4	1,7	2,4	61,6	0,4	4,7	3,7
Metalurgie barevných kovů	–	34,6	–	5,6	20,4	–	–	13,7	0,3	21,1	4,3
Strojírenský a kovoděl. průmysl	16,0	14,4	3,8	6,1	6,2	8,7	14,8	14,1	5,5	8,4	2,–
Chemický průmysl	7,9	10,6	1,4	1,7	14,-	14,7	14,7	8,4	8,5	13,-	5,1
Průmysl staveb. hmot	4,9	13,8	3,3	8,6	6,-	6,3	9,5	9,6	12,1	8,9	17,-
Průmysl dřevozpracující	7,7	2,2	12,3	6,1	4,3	9,2	21,7	7,3	7,7	16,5	5,-
Průmysl celulózy a papíru	12,7	–	12,8	5,5	14,3	10,7	5,6	12,8	–	20,8	4,8
Průmysl skla a porcelánu	3,2	6,5	1,-	6,9	60,5	6,7	8,-	3,3	1,6	2,3	–
Průmysl textilní	0,4	–	6,7	6,4	16,4	36,9	9,9	9,4	4,2	6,8	2,9
Průmysl konfekční	16,3	3,1	10,8	1,1	6,-	3,7	27,6	5,1	13,3	6,5	6,5
Průmysl obuvnický, kožedělný	2,5	5,2	1,3	3,6	1,3	11,8	49,8	2,1	17,1	5,1	0,2
Průmysl potravinářský	10,1	12,8	4,6	5,-	9,3	11,6	12,9	9,8	15,7	4,5	3,7

svislé stupnice dostaneme 60 mm : (27 – 17) = 60 mm: 10 = 6 mm (obr. 19). Přerušovaná čára znamená, že tempo růstu znázorněné v intervalech 1950—1955, 1956—1960 není srovnatelné s tempem růstu v ostatních obdobích.



Obr. 19

V tab. 10 značí I oblast hlavního města Prahy, 1, 2, 3, ..., 10 po řadě oblast krajů: 1 Středočeského, 2 Jihočeského, 3 Západočeského, 4 Severočeského, 5 Východočeského, 6 Jihomoravského, 7 Severomoravského, 8 Západoslovenského, 9 Středoslovenského, 10 Východoslovenského.

9. Podle údajů tab. 10 zjistěte ústně:
a) Kolik % celkové výroby elektrického proudu připadlo v roce 1970 na Západoslovenský a na Východoslovenský kraj? b) Kolik % celkové výroby černých kovů je v kraji Severomoravském? c) O kolik procent je v celostátním měřítku chemický průmysl ve Středočeském kraji větší než v kraji Jihočeském? d) Jak velký je podíl průmyslu v celostátním měřítku v jednotlivých krajích?

10. Podle tabulky 10 sestavte tabulku skupinového rozdělení četností pro a) strojírenský průmysl (se středy intervalů 1,5; 4,5; 7,5; atd.); b) průmysl stavebních hmot (pro třídy 3—5, 5—7, atd.) a sestrojte polygon četnosti.

11. Údaje tab. 10 zobrazte graficky histogramem podle dvou kvalitativních znaků. První kvalitativní znak — druh výroby, na přímkách rovnoběžných s osou y, druhý kvalitativní znak — kraj (na ose x). a) Pro průmysl paliv, strojírenství a kovodělný průmysl; b) pro průmysl textilní a konfekční. (Poznámka: Jednotlivé kvalitativní znaky — druh průmyslu — odlišujte barevně nebo čárkováním.)

12. Podle údajů tab. 10 zobrazte histogram rozdělení celkového průmyslu v kraji Východoslovenském a Jihomoravském.

13. Výsečkovým diagramem zobrazte:
a) Z tab. 11 počet obyvatel jednotlivých krajů v ČSSR; b) z tabulky 8 výrobu elektrického proudu v ČSSR v r. 1970; c) z tab. 10 podíl jednotlivých krajů na metalurgii barevných kovů. [Návod: Kruh o libovolném poloměru rozložte na kruhové výseče, jejichž středové úhly mají velikosti v poměru četností jednotlivých vyšetřovaných znaků.]

14. Zobrazte sloupkovým diagramem o rozměrech 10,5 cm . 15 cm z tab. 11:
a) počet obyvatel jednotlivých krajů ve věku do 14 let; b) počet obyvatel ve věku od 15—59 let; c) počet obyvatel starších 60 let; d) počet obyvatel starších 15 let.

15. Podle tab. 11 určete průměrný počet obyvatel v krajích:
a) českých zemí; b) Slovenska.

Demografický charakter krajů ČSSR v r. 1971

Podíl obyvatelstva v % z počtu obyvatel v krajích — Tabulka 11

Kraj	Průměrný počet obyvatel	ve věku 0—14	ve věku 15—59	ve věku 60 a více	na 1000 obyvatel živě naroz.	na 1000 obyvatel zemřelí	na 1000 obyvatel prům. přír.	Kojen. úmrtnost
Hlavní město Praha	1 011 608	19,7	64,1	16,2	12,4	14,2	−1,8	21,6
Středočeský kraj	1 191 138	23,0	59,1	17,9	14,6	15,0	−0,4	19,0
Jihočeský kraj	654 674	25,3	57,7	17,—	15,5	13,—	2,5	19,9
Západočeský kraj	852 313	26,7	60,3	13,—	16,1	11,6	4,5	20,2
Severočeský kraj	1 105 721	27,8	60,6	11,6	17,4	11,2	6,2	23,6
Východočeský kraj	1 204 013	24,8	58,1	17,1	15,8	15,4	2,4	20,—
Jihomoravský kraj	1 942 445	25,4	59,4	15,2	15,5	12,1	3,4	17,4
Severomoravský kraj	1 809 893	28,6	59,5	11,9	17,2	10,3	6,9	20,4
Hlavní město SSR Bratislava	288 042	30,2	58,1	11,7	15,5	8,6	6,9	19,—
Západoslovenský kraj	1 604 760	30,2	58,—	11,8	18,1	10,2	6,9	22,5
Středoslovenský kraj	1 408 494	31,4	57,—	11,6	18,1	9,4	8,7	23,3
Východoslovenský kraj	1 263 671	33,8	56,2	10,—	20,3	8,5	11,8	28,7

16. Najděte průměrnou výšku žáka třetí třídy SVVŠ podle tabulky 4.

Řešení

a) $\bar{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{12\,956}{74} = 175{,}081\,.$

b) $\bar{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i' f_i'}{\sum\limits_{i=1}^{m} f_i'}$, kde četnosti f_i' jsou váhy jednotlivých znaků.

Tabulka 12

střed int. x_i'	158	163	168	173	178	183	188	celkem
četnost f_i'	3	6	9	17	21	15	3	74
součin $x_i'f_i'$	474	978	1 512	2 941	3 738	2 745	564	12 952

$$\bar{x} = \frac{12\,952}{74} = 175{,}027.$$

c) Odhadneme velikost průměru zkoumaného znaku a označíme jej A. Pro výpočet skutečné velikosti průměru užijeme vztahu:

$\bar{x} = A + \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m} (x_i' - A) f_i'}{\sum\limits_{i=1}^{m} f_i'}$, kde f_i' jsou opět četnosti. Ověřte správnost vztahu roznásobením.

Tabulka 13

Odchylka středu int. od A = 176	−18	−13	−8	−3	2	7	12
Součin $(x_i' - A)f'_i$	−54	−78	−72	−51	42	105	36
				−255			183

$$\bar{x} = 176 + \frac{-255 + 183}{74} = 175{,}027\,.$$

Průměrná výška jednoho žáka je tedy asi 175,03 cm. Způsob b) a c) je sice méně přesný, ale pohodlnější, přičemž rozdíly mezi vypočtenými hodnotami průměru jsou zanedbatelně malé.

17. Hodinová produktivita práce u vybraných pracovníků vyrábějících stejný výrobek je roztříděna takto:

Tabulka 14

Hodinová produktivita	2,0–2,99	3,0–5,99	6,0–6,49	6,5–6,99	7,0–7,49
Počet pracovníků	4	12	14	8	2

Vypočítejte průměrnou produktivitu pomocí středů intervalů a stanovte, jaká může být maximální odchylka takto vypočteného průměru od průměru počítaného pomocí celých intervalů.

$$\left(\bar{d} = \frac{1.4 + 3.12 + \ldots + 0,5.2}{40}.\right)$$

18. Průměrný výnos žita z 1 ha pozemku podhorské oblasti je na pozemku 1. druhu 22 q, na pozemku 2. druhu 21 q a na pozemku 3. druhu 20 q.

a) Určete průměrný výnos ze všech tří pozemků, mají-li stejnou rozlohu.

b) Jaký bude průměrný výnos, je-li pozemků 1. druhu 150 ha, 2. druhu 80 ha a 3. druhu 20 ha?

19. Určete průměrný výnos máku při pokuse popsaném v úloze 5.

***20.** Určete velikost mediánu a modu i odchylky těchto středních hodnot od velikosti průměrného výnosu podle textu úlohy 5.

Tabulka 15

Pořad. č. závodu	Prům. produkce tkaniny na 1 dělnici v m za směnu x_i	Počet tkadlen f_i	$x_i f_i$
1	87	96	8 352
2	76	160	12 160
3	92	64	5 888
4	85	128	10 880
5	79	224	17 696
6	88	288	25 344
		960	80 320

[Návod: Řešte podle úlohy 16.]

21. Určete medián $\tilde{x}$ z tabulky 11 pro počet obyvatel krajů: a) V ČSSR; b) ve slovenských krajích.

22. Velikosti hran pěti krychlí jsou 6 cm, 8 cm, 9 cm, 10 cm, 11 cm. Stanovte hodnotu mediánu: a) pro hrany těchto krychlí; b) pro jejich povrch; c) pro objem těchto krychlí.

23. Údržbářská četa ČSD spotřebuje za rok 250 kg šroubů po 40 Kčs za 1 kg, 300 kg šroubů po 39 Kčs za 1 kg, 100 kg šroubů po 36 Kčs za 1 kg a 50 kg šroubů po 46 Kčs. Kolik stojí průměrně 1 kg spotřebovaných šroubů?

24. Určete průměrnou produktivitu práce jedné tkadleny pomocí váženého průměru, kde váhy jsou počty tkadlen v jednotlivých závodech. Použijte tabulky 15.

25. Podniky strojírenského průmyslu jsou rozděleny podle objemu výroby takto:

Tabulka 16

Objem produk. v mil. Kčs	1,– – 2	2,1 – 3	3,1 – 4	4,1 – 5	5,1 – 6	6,1 – 7	7,1 – 8	8,1 – 9	9,1 – 10
Počet závodů	10	65	126	180	204	73	89	44	13

Najděte průměrný objem výroby připadající na 1 podnik.
[Návod: Řešte podle úlohy 16.]

26. Doplňte tabulku vyjadřující základní údaje o těžbě na pěti uhelných

Tabulka 17

Důl	Těžba T (10^3t)	Množství odprac. směn M	Produktivita práce $P = \frac{T}{M}$
1	660	600	1,10
2	558	450	1,24
3	605	335	1,80
4	495	495	1,00
5	205	155	1,32
	2523	2035	6,46

dolech, a to údaji: a) o průměrné těžbě jednoho dolu; b) o průměrné produktivitě jednoho dolu; c) o průměrné produktivitě jedné směny.

27. Určete směrodatnou odchylku v úl. 16 (tab. 12). [Návod: Směrodatná odchylka je definována vztahem: $\tau = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$.]

Výpočet se zjednoduší, jestliže místo hodnoty $\bar{x}$ zvolíme hodnotu znaku A tak, aby odchylky $x_i - A$ byly vyjádřeny celými čísly. Potom lze směrodatnou odchylku počítat podle vzorce

$$\tau^2 = s^2 - d^2, \text{ kde } s^2 = \frac{(x_1 - A)^2 f_1 + (x_2 - A)^2 . f_2 + \ldots + (x_n - A)^2 f_n}{n},$$

$$d^2 = (\bar{x} - A)^2 .$$

$A = 176$.

Tabulka 18

Středy intervalů	Odchylka $x_i - A$	$(x_i - A)^2$	Četnost f_i	$(x_i - A)^2 f_i$
158	−18	324	3	972
163	−13	169	6	1014
168	−8	64	9	576
173	−3	9	17	153
178	2	4	21	84
183	7	49	15	735
188	12	144	3	432
			74	3966

Rozptyl $s^2 = \dfrac{3\,966}{74} = 53{,}59$, $d^2 = (\bar{x} - A)^2 = (175{,}03 - 176)^2 = 0{,}94$.

Směrodatná odchylka $\tau = \sqrt{52{,}65} = 7{,}25$ vychází stejně, jako kdybychom v tab. 18 místo A použili hodnoty $\bar{x}$. Proveďte sami.

28. Dvě továrny A, B na sušení mléka zásobují trh, přičemž za 1 rok plnily dodávky v jednotlivých měsících takto:

Počet dodaných q zboží v měsíci:

Tabulka 19

Továrna	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	456	456	455	454	442	432	429	466	427	487	492	483
B	501	512	520	512	480	467	452	475	436	453	475	498

Určete aritmetický průměr ročních dodávek a jeho směrodatnou odchylku u obou továren. (Podle úlohy 27.)

29. Určitý znak nabývá hodnot x_i s četnostmi f_i. Určete jeho variační rozpětí R, rozptyl s^2 a směrodatnou odchylku τ.

Tabulka 20

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	5	3	8	9	50	9	8	3	5

30. Pomocí rozptylu a směrodatné odchylky posuďte, zda došlo k nivelisaci mezd dělníků v továrně v roce 1971 vzhledem k roku 1966, jestliže znáte tyto údaje:

Tabulka 21

Výše mezd v Kčs	Počet dělníků 1960	1965
1 600 – 1 699	12	1
1 700 – 1 799	36	13
1 800 – 1 899	87	56
1 900 – 1 999	221	133
2 000 – 2 099	344	366
2 100 – 2 199	323	447
2 200 – 2 299	138	143
2 300 – 2 399	24	29
2 400 – 2 499	15	12

31. Z úlohy 7 určete průměrný roční přírůstek výroby elektrického proudu v letech 1962—1971: a) celkem; b) u vodních elektráren. [Návod: Použijte geometrického průměru.]

32. Určete průměrný roční přírůstek a) celkové průmyslové výroby v ČSSR; b) produktivity práce v letech 1960—1971. Použijte tabulky 22.

(Rok 1955 ... 100%.) Tabulka 22

Ukazatel	1959	1964	1966	1967	1968	1969	1970	1971
Prům. výroba celkem (v %)	132	224	270	300	333	372	405	429
Růst produktivity práce v průmyslu (v %)	127	191	—	—	249	268	284	295

33. Určete velikost průměrné produktivity práce v letech 1965, 1966, 1967 z tab. 22. $\left[\text{Návod: Průměrný koeficient růstu je } \sqrt[4]{\frac{249}{191}} = 1{,}069.\right]$

34. Jeden dělník opracuje jednu strojovou součást za 4 minuty, druhý dělník za 6 minut a třetí za tři minuty. Jaký čas průměrně potřebuje jeden dělník na obrobení jedné součástky?

Řešení

Podle definice harmonického průměru je $\bar{x}_h = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i}}$.

$$\bar{x}_h = \frac{3}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{36}{9} = 4 .$$

Průměrný čas k opracování jedné součástky jsou tedy 4 minuty.

35. Ke zhotovení jednoho koše z rákosu potřebují dělnice jedné dílny tyto časy:

Dělnice	1	2	3	4	5	6	7
Čas v min x_i	30	25	20	40	50	30	45

Určete průměrnou dobu, kterou potřebuje jedna dělnice ke zhotovení jednoho kusu. ($\bar{x}$, $\bar{x}_h$.)

36. Jeden dělník potřebuje k opracování výrobku dvě minuty, druhý šest minut. Jaký je průměrný čas potřebný k opracování výrobku? Jaký je správný výsledek, který vyplývá z harmonického průměru?

37. Pro traktory jsou stanoveny tyto normy pro střední orbu 1 ha: Z 4611 . . . 1,8 hodin, DT 75 . . . 1,25 hodin, Z 5511 . . . 3,0 hodin. Určete průměrnou dobu potřebnou k zorání jednoho hektaru jedním traktorem.

38. Družstvo má dva traktory Z 5511, šest traktorů Z 4611 a tři traktory DT-75. Určete průměrnou dobu ($\bar{x}_h$) potřebnou k zorání jednoho hektaru jedním traktorem za předpokladu, že uvedené traktory budou pracovat současně. (Normy z příkl. 37.)

39. Určete průměrnou potřebu času v minutách na jeden výrobek ze souboru 67 pracovníků, je-li známo:

Počet dělníků	6	15	5	20	10	11
Čas potřebný na výrobu součástky	8	12	6	10	15	9

40. Odhadněte počet chlapců, kteří půjdou v letech 1974—1976 do školy, znáte-li tyto údaje:

Rok	1967	1968	1969	1970
Narozených chlapců	106 724	109 845	114 708	117 127

Šestého roku se podle úmrtnostní tabulky dožije 81 485 ze 100 000 živě narozených dětí. (Porodnost je po celý rok rovnoměrná.)
(Poznámka: Do 1. třídy jdou žáci narození od 1. 7. ($x-1$). roku do 30. 9. x. roku.)

41. Definujte poměrná čísla ve statistice a uveďte jejich rozdělení.

42. Průměrná cena pšenice byla v roce 1966 158 Kčs, v roce 1969 170 Kčs a v roce 1971 174 Kčs. Určete jednoduchý cenový index vzhledem k roku 1969. [Návod: 170 Kčs . . . 100, 158 Kčs . . . x.]

43. Určete index dělnických mezd ve stavebnictví vzhledem k roku a) 1960, b) 1970, je-li známo, že průměrné dělnické mzdy v Kčs měsíčně byly:

Rok	1960	1965	1970	1971
Kčs	1 480	1 610	2 034	2 113

44. Určete jednoduché indexy (ukazatele) nákupních cen zemědělských výrobků vzhledem k roku 1965. (1965 ... 100)

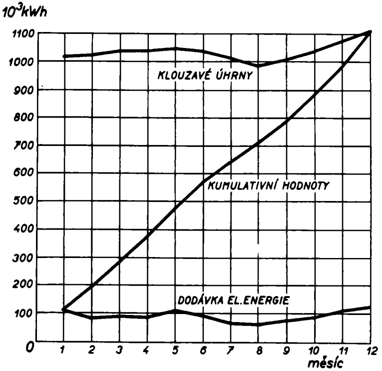
	jednotka	1965	1968	1971
Pšenice	100 kp	135,–	170,–	174,–
Mléko	1 l	2,–	2,5	2,5
Vejce	1 kp	15,8	16,7	16,6
Jateč. prasata	1 kp	11,–	12,7	14,3

Jak určíte cenový index vzhledem k roku 1968? [Návod: Jednoduchý cenový index je poměr daného čísla k číslu považovanému za základ. Např. $\frac{170}{135} \doteq 1{,}26$; $\frac{16{,}7}{15{,}8} \doteq 1{,}06$.]

45. Elektrárna na Lipně dodávala do sítě ve večerní špičce ve dvou po sobě následujících letech elektrickou energii tak, jak je uvedeno v tab. (v 10^3 kWh). Doplňte tabulku klouzavými úhrny a sestrojte příslušný diagram Z.

Měsíc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	celkem
i-tý rok absol.	85	80	76	90	94	105	93	90	62	56	70	90	991
$(i + 1)$ rok absol.	110	85	90	88	104	96	70	65	78	92	108	120	1106
kumul. hodnoty	110	195	285	373	477	573	643	708	786	878	986	1106	

[Návod: Kumulat. hodnota je množství energie, vyrobené od začátku roku ke konci uvažovaného měsíce. Klouzavé úhrny jsou množství energie vyrobené za posledních 12 měsíců.
Např. k 31. 1.: 991 − 85 + 110 = 1 016, k 28. 2. ... 1 016 − 80 + + 85 = 1 021 atd.] Viz obr. 20.



Obr. 20

46. Sestrojte diagram Z měsíčně vyplácených mezd podniku A, jsou-li známy tyto údaje:

Měsíc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Výše vypl. mezd v 10^3 Kčs	305	308	312	318	320	320	319	317	322	328	330	331
Kumul. hodnoty	305	613	925	1243	1563	1883	2202	2519	2841	3169	3499	3830
Klouzavé úhrny	3720	3720	3745	3766	3780	3783	3791	3799	3810	3818	3822	3830

2. PRAVDĚPODOBNOST

47. Pravděpodobnost, že nastane jev A, je p_1, pravděpodobnost, že nastane jev B, je p_2. Jaká je pravděpodobnost, že:
a) jev A nenastane; b) oba jevy nastanou; c) A nastane, B nenastane; d) nastane jen jev B (A nenastane); e) žádný nenastane; f) nastane nejvýše jeden (jeden nebo žádný); g) nastane buď jev A, nebo jev B; h) nastane nejméně jeden z obou (jeden nebo oba). (A, B jevy nezávislé a neslučitelné.)

48. Bylo provedeno 250 pokusů, při nichž nastal jev o pravděpodobnosti $\frac{1}{3}$ celkem 90krát. Vypočtěte relativní četnost, tj. poměr počtu případů, které skutečně nastaly, k počtu případů možných a stanovte její procentní odchylku od pravděpodobnosti.

Řešení

Pravděpodobnost jevu A definujeme jako součet pravděpodobností příznivých případů. Máme-li m provedených pokusů a ty jsou stejně pravděpodobné, potom se pravděpodobnost jevu A rovná zlomku $P(A) = \frac{a}{m}$, kde a je počet příznivých případů, o jejichž pravděpodobnosti p předpokládáme, že $0 < p < 1$. Příznivý případ je pokus, při němž sledovaný jev nastává.

Relativní četnost jevu je $r = \frac{90}{250} = 0{,}36$, pravděpodobnost jevu v našem případě $p = \frac{1}{3}$. Procentní odchylka od průměru je v našem případě $\frac{0{,}36 - 0{,}3}{\frac{1}{3}} \cdot 100 = 0{,}026\,7 \,.\, 3 \,.\, 100 = 8.$

Závěr: Relativní četnost daného jevu je 0,36 a odchylka od pravděpodobnosti je 8 %.

49. Pokus o pravděpodobnosti a) 0,4, b) 0,426 byl proveden celkem stokrát, přičemž procentní odchylka relativní četnosti od pravděpodobnosti činila v případě a) 12,5 %, v případě b) 12,67 %. Kolikrát se pokus zdařil?

50. Jev, jehož pravděpodobnost je $\frac{2}{7}$, má být opakován stokrát. V kolika asi případech jev nastane, očekáváme-li, že procentní odchylka relativní četnosti od pravděpodobnosti nepřesáhne 10 %?

$$\left[\text{Návod: } \left(\frac{a}{100} - \frac{2}{7}\right) : \frac{2}{7} \leqq \frac{1}{10}, \ \left(\frac{a}{100} - \frac{2}{7}\right) : \frac{2}{7} \geqq -\frac{1}{10}.\right]$$

51. Pravděpodobnost, že nastane nějaký jev, je $p = 0{,}35$. Kolikrát se musí opakovat, chceme-li aby nastal stokrát, a očekáváme-li, že procentní odchylka relativní četnosti od pravděpodobnosti nepřesáhne 10 %?

52. Pokus provedený tisíckrát měl kladný výsledek ve 346 případech. Jaká je asi pravděpodobnost tohoto jevu, není-li odchylka relativní četnosti od pravděpodobnosti větší než 12 %?
Úlohy 53—59 řešte zpaměti.

53. Při výrobě 1 000 kusů karburátorů v jednom závodě bylo v r. 1964 zpravidla 12 kusů zmetků. Jaká je pravděpodobnost, že určitý výrobek té série byl zmetek?

54. Střelec zasáhl cíl 93krát ze sta výstřelů. Jakou má pravděpodobnost zásahu? Jaká je pravděpodobnost, že cíl nezasáhne?

55. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne číslo šest? Jaká je pravděpodobnost, že nepadne číslo šest?

56. Jaká je pravděpodobnost, že libovolné číslo končí: a) pětkou; b) nulou; c) sudou číslicí?

57. Určete pravděpodobnost, že libovolné dvojciferné přirozené číslo je dělitelné a) sedmi; b) devíti; c) jedenácti?

58. Jaká je pravděpodobnost, že libovolné dvojciferné číslo a) je dělitelné pěti, b) není dělitelné pěti?

59. V tombole je 500 lístků. Jakou pravděpodobnost hlavní výhry má účastník, který koupil 10 losů?

60. Jsou dány dva body $B \equiv [-1,4]$, $C \equiv [6,5]$. Jaká je pravděpodobnost, že polopaprsek ležící v rovině ABC a jdoucí z bodu $A \equiv [3,1]$ protíná úsečku BC? (Až na bod C.)

61. Jaká je pravděpodobnost, že polopaprsek vycházející z bodu A dopadá na kouli o středu S, je-li $AS = 17$, $r = 8$?

62. Krychle, jejíž všechny stěny jsou obarveny, je rozřezána na 1 000 krychliček stejného objemu, které jsou smíchány v jedné nádobě. Jaká je pravděpodobnost, že krychle vytažená z nádoby bude mít právě dvě obarvené stěny?

[Návod: Krychle má 12 hran, na každé 8 krychlí, jejichž dvě stěny jsou obarvené. Proto $a =$ 12krát 8.]

63. Mnohaletým pozorováním v určitém kraji bylo zjištěno, že ze 100 000 dětí, které dosáhly věku deseti let, se průměrně dožilo 40 let 82 277 a 70 let 37 977. Vypočítejte pravděpodobnost, že čtyřicetiletý člověk se dožije sedmdesáti let.

64. Podle statistických dat byla dětská úmrtnost v ČSSR na 100 000 žijících dětí ve věku 1 rok — 14 let tato:

Rok	1 rok až 4 roky	5 až 9 roků	10 až 14 roků
1965	120,–	47,1	38,6
1967	103,3	42,–	37,5
1968	95,6	46,1	37,4
1969	101,9	49,–	40,2
1970	95,–	41,4	32,2

Jaká byla v jednotlivých letech pravděpodobnost, že a) jednoleté dítě se dožije 4 let; b) čtyřleté dítě se dožije 14 let; c) jednoleté dítě se dožije 14 let?

65. Pravděpodobnost, že střelec zasáhne střed terče označený I, je 0,31. Pravděpodobnost, že zasáhne kruh označený II, je 0,45. Jaká je pravděpodobnost, že zasáhne oblast terče I nebo II?

66. Podle statistiky dochází na velké STS k přerušení práce ze 100 případů průměrně v 11 případech pro poruchy traktorů, ve 4 případech pro poruchy závěsného nářadí a v 55 případech pro poruchy na kombajnech. Jaká je pravděpodobnost, že při současné práci všech tří druhů strojů dojde k přerušení práce a) z uvedených příčin; b) z jiných příčin; c) že dojde k dvěma poruchám kombajnu za sebou? (Poruchy považujeme za vzájemně nezávislé.)

67. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padne a) součet pět nebo šest; b) že nenastane tento případ; c) že padne součet větší než šest; d) že padne součet větší než šest, ale za předpokladu, že na jedné kostce padne číslo dva?

68. Jaká je pravděpodobnost, že dvojciferné číslo namátkou napsané, je dělitelné dvěma nebo třemi?

69. Jaká je pravděpodobnost, že majitel dvou losů státní loterie, z nichž jeden končí číslicí dva, druhý nula, vyhraje na oba po 10 Kčs? Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje aspoň 10 Kčs?

[Poznámka: Z každé desítky losů vyhrávají po 10 Kčs vždy dva losy, a to jeden končící číslicí 1, 2, 3, 4, 5, nebo 0, 6, 7, 8, 9.]

70. Kdy platí rovnost:

a) $P(B/\bar{A}) = P(B/A)$;

b) $P(A) = P(A/B) + P(A/\bar{B})$?

71. Jaká je pravděpodobnost, že dvěma kostkami vrhneme jedním hodem součet 8 nebo 9 nebo 10?

72. Jaká je pravděpodobnost, že třemi kostkami vrhneme součet větší než 14?

73. Jaká je pravděpodobnost, že dvěma kostkami vrhneme a) třikrát po sobě součet 7; b) prvním hodem 10, nebo, když se to nestane, tedy aspoň druhým hodem 9; c) spíše (pravděpodobněji) součet 7 než 4?

74. Jaká je pravděpodobnost, že z čísel 1—90, která jsou v osudí, vytáhneme číslo a) dělitelné 15; b) dělitelné třemi nebo pěti?

75. Míček o průměru $d = 5$ cm je vržen proti síti se čtvercovými oky o stranách délky 8 cm. Jaká je pravděpodobnost, že míček proletí, aniž se dotkne sítě?

76. Osudí je rozděleno na tři oddíly. V prvním je 6 bílých a 7 červených, ve druhém 6 modrých a 3 červené, ve třetím 8 červených a 4 bílé koule. Jaká je pravděpodobnost, že jedním tahem vyjmeme dvě bílé koule?

[Návod: Pravděpodobnost, že sáhneme do 1. oddílu je $\frac{1}{3}$, že z 1. oddílu vytáhneme kouli bílou je $\frac{1}{3} \cdot \frac{\binom{6}{2}}{\binom{13}{2}} = p_1$.]

77. Sestavte tabulku rozdělení pravděpodobností i distribuční funkci náhodné veličiny počtu košů při jednom hodu, je-li pravděpodobnost „koše“ při jednom hodu $p = 0{,}3$.

78. Zkouší se postupně pevnost vlákna, až se vlákno přetrhne. Pravděpodobnost, že vlákno snese žádané zatížení, je vždy 0,9. Počet pokusů je náhodná veličina. Sestavte tabulku rozdělení pravděpodobností této náhodné veličiny.

79. Na cestě automobilu městem jsou čtyři křižovatky se světelnými semafory. Každý z nich uvolňuje nebo uzavírá dopravu s pravděpodobností 0,5. Počet projetých křižovatek je náhodná veličina. Sestrojte diagram (polygon) rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X.

[Návod: $p_i = P(X = i) = p(1 - p)^i$ pro $i = 0, 1, 2, 3,$

$$P(X = 4) = (1 - p)^4,$$

kde p je pravděpodobnost toho, že semafor auto zastaví.]

*80. Je pravděpodobnější, že vyhrajeme nad rovnocenným soupeřem (nerozhodný výsledek vylučujeme): a) tři partie ze čtyř nebo pět z osmi; b) nejméně tři partie ze čtyř nebo nejméně pět partií z osmi?

*81. Pravděpodobnost, že nastane jev A při čtyřech nezávislých pokusech je 0,59. Jaká je pravděpodobnost, že jev A nastane při jednom pokusu, je-li tato pravděpodobnost při každém pokusu stejná?

82. Pravděpodobnosti toho, že průměr libovolné součástky z celé série je menší než je přípustno, větší než je přípustno a v přípustných mezích jsou postupně 0,05; 0,10; 0,85. Z celé série se vybere namátkou sto kusů. Určete pravděpodobnost toho, že mezi nimi bude pět součástek s menším průměrem a pět součástek s větším průměrem. [Návod: $P = \frac{100!}{5!\,5!\,90!} \cdot$ $\cdot\, 0{,}05^5 . 0{,}1^5 . 0{,}85^{90}$.]

83. V rodině je šest dětí. Jaká je pravděpodobnost, že ta rodina má: a) 6 synů; b) pět synů a 1 dceru; čtyři syny a dvě dcery atd., když pravděpodobnost narození syna a dcery je stejná?

*84. V sérii výrobků je 25 % zmetků. Vypočtěte pravděpodobnost toho, že mezi náhodně vybranými deseti kusy bude: a) 0, 1, 2, 3, ..., 8, 9, 10 zmetků; b) více než pět zmetků.

85. Při podzimních pracích je v určitém závodě využito dopravních prostředků na 80 %. Jaká je pravděpodobnost, že ze 7 vozů jich bude využito 5?

86. První střelec dosahuje 80 % zásahů cíle, druhý střelec za týchž podmínek 70 % zásahů. Určete pravděpodobnost zasažení cíle, střílejí-li oba současně.

87. V loterii je s losů, z nichž při tahu vyhrává k losů. Jaká je pravděpodobnost, že majitel r losů vyhraje alespoň na jeden?

88. Při zkoušení pevnosti vlákna dvou přaden příze vyrobených na různých strojích se ukázalo, že první vzorek vydržel zkoušený tah s pravděpodobností 0,84, kdežto druhý jen s pravděpodobností 0,78. Jaká je pravděpodobnost, že oba vzorky vydrží současně požadované zatížení?

89. Jaká je pravděpodobnost, že při vrhu šesti kostkami na třech padne šestka a na třech kostkách nepadne šestka? [Návod: Jednotlivé hody možno považovat za nezávislé jevy.]

*90. Dva basketbalisté střílejí třikrát míčem na koš. Pravděpodobnosti koše jsou 0,6 a 0,7. Určete pravděpodobnost pro to, že: a) oba docílí stejného počtu košů; b) první docílí více košů než druhý.

91. Pravděpodobnost, že žárovky vydrží 1 000 hodin svítit, je 0,2. Jaká je pravděpodobnost, že právě jedna žárovka ze tří vydrží provoz 1 000 hodin?

92. Pravděpodobnost, že díl vyrobený na prvním automatu bude výrobek první jakosti, je 0,7. Při zhotovení téže součástky na druhém automatu je pravděpodobnost 0,8. Zatímco na prvním se vyrobí dvě součástky, zhotoví druhý automat tři. Najděte pravděpodobnost toho, že všechny vyrobené součástky jsou první jakosti.

93. Určete pravděpodobnost toho, že namátkou vybraný výrobek je prvotřídní jakosti, je-li známo, že 4 % výrobků té továrny jsou výmětové výrobky a 75 % nezávadných výrobků produkce vyhovuje požadavkům na první jakost výrobků.

94. Pravděpodobnost, že se v elektrickém obvodě zvýší jmenovité napětí pro měřicí přístroj, je p_1. Pravděpodobnost poruchy měřicího přístroje při zvýšeném napětí je p_2. Jaká je pravděpodobnost pro to, že se zvýší napětí tak, že dojde k poruše přístroje?

95. Součástka může být zhotovena dvěma různými technologickými postupy. V prvém případě se zhotoví třemi operacemi. Při každé z nich vznikne zmetek s pravděpodobností po řadě 0,1; 0,2; 0,3. V druhém případě se součástka zhotoví dvěma operacemi, při nichž jsou však pravděpodobnosti vadného výrobku stejné, a to 0,3. Který postup zaručuje větší pravděpodobnost kvalitních výrobků, je-li v prvém případě pravděpodobnost získání výrobku první jakosti rovna 0,9 a při druhém postupu 0,8?

96. Určete pravděpodobnost přerušení elektrického obvodu, které může nastat následkem poruchy zdroje K nebo obou paralelních větví K_1, K_2, které vycházejí ze společného zdroje K a jejichž pravděpodobnosti poruchy jsou po řadě 0,3; 0,2; 0,2.

97. Mechanismus se skládá z deseti prvků na sobě nezávislých, přičemž mechanismus přestane pracovat, jakmile jeden prvek je vyřazen z provozu. Označme $P(t)$ pravděpodobnost, že každý element bude schopen provozu aspoň po dobu t. Jaká musí být pravděpodobnost $P(t)$, aby pravděpodobnost, že celý mechanismus bude v provozu po dobu t, byla 0,8?

98. Jsou dány dva na sobě nezávislé systémy I a II a pravděpodobnost, že budou schopny provozu t hodin [$P(A)$, $P(B)$]. Určete pravděpodobnost, že aspoň jeden z obou systémů vydrží pracovat t hodin.

99. Je dán systém skládající se z m zdvojených elementů, přičemž je dána pravděpodobnost $P(t)$, že každý element bude schopen provozu t hodin. Systém bude pracovat, když aspoň jeden element v každé dvojici bude v pořádku. Najděte pravděpodobnost, že systém bude v provozu po dobu t hodin. [Pravděpodobnost, že aspoň jeden element je v pořádku, je $[1 - (1 - P(t))^2$.]

100. V dílně, v níž pracovalo 9 mužů a 6 žen, došlo k výbuchu, při němž byly zraněny 4 osoby. Jaká je pravděpodobnost, že to byli
a) jen muži; b) jen ženy; c) nejvýše dvě ženy?

101. Z deseti pevnůstek jsou tři neobsazeny. Nepřítel ostřeluje jen tři z těchto deseti pevnůstek. Jaká je pravděpodobnost, že ostřeluje: a) jen neobsazené pevnůstky; b) aspoň jednu obsazenou?

$\boxed{\textbf{102.}}$ V sérii 100 výrobků je 10 vadných. Z celé série se vybere namátkou k prověrce jakosti pět výrobků. Určete očekávanou hodnotu (matematickou naději) počtu vadných výrobků ve vybraném vzorku.

Řešení

Pravděpodobnost, že ve vzorku bude i vadných výrobků, je

$p_i = \dfrac{C_i(10)\,.\,C_{5-i}(90)}{C_5(100)}$, $i = 0, 1, \ldots, 5$. Hledaný průměr je

$$M(X) = \sum_{i=0}^{5} i\,\frac{C_i(10)\,.\,C_{5-i}(90)}{C_5(100)} = 0{,}5\,.$$

103. Stanovte očekávanou hodnotu náhodné veličiny X (tj. matematickou naději) počtu přístrojů (n), které selžou během provozu, jestliže pravděpodobnost poruchy jednoho je p.

104. Střelec střílí tak dlouho, pokud nezasáhne cíl, ale nejvýše čtyřikrát. Pravděpodobnost zásahu je 0,8. Určete střední hodnotu počtu provedených výstřelů nutných k zasažení cíle.

105. Při montáži přesného přístroje se má zkoušet jedna součást po druhé, až se některá hodí, což závisí na náhodě. Počet nutných zkoušek je tedy diskrétní náhodná veličina, která může nabývat hodnot 1, 2, 3, 4 nebo 5. Zákon rozdělení pravděpodobností této náhodné veličiny je dán tabulkou:

1	2	3	4	5
0,07	0,16	0,55	0,21	0,01

Určete přibližný počet součástí, které musí mít montér v zásobě, aby mohl sestavit 20 přístrojů.

XIV. PLANIMETRIE

I. PŘÍMKA, POLOPŘÍMKA, ÚSEČKA, POLOROVINA, ÚHEL, VYPUKLÝ n-ÚHELNÍK

1. V soustavě souřadnic Pxy sestrojte body $A \equiv (3;0)$, $B \equiv (1;-2)$, $C \equiv (0;-5)$, $D \equiv (-2;0)$, $E \equiv (0;1)$.
a) Přesvědčte se, že těchto pět bodů lze spojit celkem deseti přímkami.
b) Přímka AE je protínána ostatními přímkami v devíti bodech $A \equiv \equiv X \equiv Y$, $E \equiv U \equiv V$, M, N, Q. Zapište dvojím způsobem jejich pořadí na přímce AE.

2. Dokažte, že n bodů $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ležících v rovině lze spojit $\frac{n(n-1)}{2}$ přímkami, neleží-li žádné tři z uvedených bodů v jedné přímce.
[Návod: Uvažte, že každým bodem A_k jde $(n-1)$ přímek spojujících bod A_k s body ostatními, přičemž každá z těchto přímek je počítána dvakrát.]

3. Zdůvodněte, že n navzájem různoběžných přímek $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ ležících v jedné rovině se protíná v $\frac{n(n-1)}{2}$ průsečících, jestliže žádné tři z těchto přímek neprocházejí týmž bodem.
[Návod: Uvažte, že každá přímka p_k je protínána ostatními přímkami v $(n-1)$ bodech a že každý z těchto bodů je počítán dvakrát.]

4. Na ose o s počátkem P zobrazte body $A \equiv (-2)$, $B \equiv (1)$, $C \equiv (3)$, $D \equiv (6)$.
a) Zapište všechny různé polopřímky, které mají počáteční bod v některém z těchto pěti bodů.
b) Kolik různých úseček je těmito body určeno? Které z nich jsou shodné?
c) Který bod odděluje body A a C? Který neodděluje body B a D?

5. Na ose o s počátkem P vyznačte obrazy všech reálných čísel x, pro která platí: a) $x \geqq 5$; b) $3 \leqq x \leqq 4$; c) $x \neq -2$; d) $x < -3$. Jaké útvary tyto body vyplňují?

6. Na přímce $p \equiv AB$ sestrojte střed S úsečky AB a body C, D tak, aby bod C odděloval bod S od bodu B a bod D odděloval bod C od bodu B. Napište pořadí těchto bodů na přímce p a určete průnik a) polopřímky SC a DA, b) polopřímky CB a polopřímky opačné k polopřímce DA,

c) úseček AD a SB, d) polopřímky DA a úsečky SC, e) polopřímky SB a úsečky AB, f) polopřímek SA a DB.

7. Zobrazte na ose o s počátkem P množinu všech reálných čísel x, která splňují zároveň nerovnosti: a) $x \leqq 5$, $x > -1$, $x > 2$, b) $x > 0$, $x > -1$, $x \geqq 2$. Jaké útvary tyto obrazy vyplňují?

8. Je dáno šest bodů A, B, C, D, E, F, které jsou vrcholy pravidelného šestiúhelníka, a přímka p, která odděluje bod B od bodu C a bod D od bodu E.

a) Vypište ty body, které přímka p odděluje od bodu C.

b) Zapište všechny poloroviny určené hranicí p a jedním z daných bodů. Které z nich jsou totožné?

c) Kolik úseček s krajními body A, B, C, D, E, F protne přímku q, která neprochází žádným z uvedených bodů? Kolik je tu možností?

9. Zvolte dvě různoběžné přímky $p \equiv AB$ a $q \equiv CD$ tak, aby se protínaly v bodě U, který leží uvnitř úseček AB a CD. Zapište všechny poloroviny s hranicemi p a q a vyznačte šrafováním průnik polorovin ABC a DCA.

10. Je dán trojúhelník ABC. Definujte jako množinu bodů (průnik dvou polorovin) jeho vnější úhel při vrcholu A.

11. Je dán dutý úhel $\sphericalangle AVB$. Jako množinu bodů definujte jeho vrcholový úhel.

12. Jako množinu bodů definujte každý z úhlů, na které rozdělují rovinu polopřímky VA, VB, které nejsou opačné.

13. Zvolte lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD a vyznačte průnik polorovin BDC, ACB a poloroviny opačné k polorovině ABC. Tento průnik se dá určit jako průnik dvou polorovin; kterých?

14. V soustavě souřadnic Pxy sestrojte body $A \equiv (0;0)$, $B \equiv (5;0)$, $C \equiv (-2;3)$ a průsečík V výšek trojúhelníka ABC. V kterých polorovinách s hranicemi AB, BC, CA leží bod V?

15. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Nad stranou AC je sestrojen rovnostranný trojúhelník ACD tak, že leží celý vně trojúhelníka ABC. Dokažte, že bod D je vnitřním bodem úhlu $\sphericalangle ABC$.

16. Je dán čtverec $ABCD$. Nad jeho úhlopříčkou AC je sestrojen rovnostranný trojúhelník ACM tak, že jeho vrchol M leží v polorovině ACD. Dokažte, že bod M leží uvnitř úhlu $\sphericalangle ABC$.

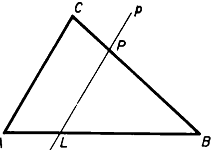
17. Uvnitř dutého úhlu $\sphericalangle AVB$ zvolte dva různé body X a Y. Dokažte, že úsečka XY leží celá uvnitř úhlu $\sphericalangle AVB$. Má úsečka XY tuto vlastnost, nahradíme-li dutý úhel $\sphericalangle AVB$ úhlem nekonvexním? (Nekonvexní úhel je větší než 2 R a menší než 4 R.)

18. Přímka p je hranicí dvou opačných polorovin ϱ_1 a ϱ_2. Uvnitř poloroviny ϱ_1 jsou dány dva různé body X, Y, uvnitř poloroviny ϱ_2 dva různé body Z, U.

a) Na přímce XY zvolte bod M a na přímce ZU bod N tak, aby úsečka MN zcela určitě protínala hranici p.
b) Jakou polohu musí mít přímky XY a ZU k hranici p, aby každá úsečka MN přímku p protínala?
c) Jaký útvar vyplní bod L ležící na přímce XY a bod K ležící na přímce ZU, jestliže celá úsečka LK leží v polorovině ϱ_2?

19. Přímka p, která je vedena libovolným vnitřním bodem L strany AB trojúhelníka ABC a je rovnoběžná se stranou AC, protíná stranu BC v jejím vnitřním bodě. Dokažte to.

Řešení (obr. 21)



Obr. 21

Jelikož bod L leží uvnitř úsečky AB, odděluje bod L bod A od bodu B, a tedy i přímka p, která není totožná s přímkou AB, odděluje bod A od bodu B; v důsledku toho jsou poloroviny pA, pB opačné. Přímka $AC \parallel p$ leží celá v polorovině pA, a tedy i její bod C leží v této polorovině. Jsou tedy body B, C body opačných polorovin s hranicí p, a proto úsečka BC je přímkou p protínána uvnitř.

Závěr: Přímka p, která je vedena libovolným vnitřním bodem strany AB trojúhelníka ABC a je rovnoběžná se stranou AC, protíná stranu BC v jejím vnitřním bodě.

***20.** Dvě různé polopřímky $AB \parallel CD$ jsou souhlasně rovnoběžné, leží-li bod D v polorovině ACB a nesouhlasně rovnoběžné, leží-li bod D v polorovině opačné k polorovině ACB.
Zvolte uvnitř polopřímky AB bod X, uvnitř polopřímky CD bod Y a dokažte, že a) úsečky XY a AC se protínají ve vnitřním bodě, jsou-li polopřímky AB a CD nesouhlasně rovnoběžné, b) úsečky XY a AC nemají společný bod, jsou-li polopřímky AB a CD souhlasně rovnoběžné.

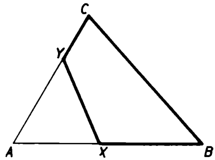
21. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož základna je AB. Uvnitř úsečky AB zvolte libovolný bod L a veďte jím kolmice k_1, k_2 k přímkám AC a BC. Dokažte, že paty P, Q těchto kolmic jsou vnitřními body poloroviny ABC.

22. Zvolte libovolný dutý úhel a jeho vrchol označte V. Uvnitř jednoho ramena zvolte dva různé body A, B a uvnitř druhého ramena sestrojte body C, D tak, aby platil vztah $VA = VC$, $VB = VD$. Dokažte, že přímky AD a BC se protínají v bodě U, který leží uvnitř úhlu AVC.

23. Je dán lichoběžník $ABCD$, jehož základny jsou AB a CD. Zdůvodněte, proč pětiúhelník $ABCDU$ není vypuklý. (U je průsečík úhlopříček lichoběžníka.)

24. Je dán trojúhelník ABC. Uvnitř strany AB zvolte bod X, uvnitř strany AC bod Y a dokažte, že čtyřúhelník $YCBX$ je vypuklý.

Řešení (obr. 22)



Obr. 22

Čtyřúhelník $YCBX$ bude vypuklý tehdy, bude-li ležet celý v jedné z obou polorovin, jejichž hranici tvoří kterákoli z přímek YC, CB, BX, XY. Je zřejmé, že uvažovaný čtyřúhelník leží celý v polorovině YCB, neboť v této polorovině leží trojúhelník ABC, a tedy i body X, Y jeho stran AB a AC.

Týmž způsobem se dokáže, že čtyřúhelník $YCBX$ leží celý v polorovinách CBX a BXC.

Zbývá dokázat, že tento čtyřúhelník leží celý v jedné z obou polorovin, jejichž hranici tvoří přímka XY.

Bod X je vnitřním bodem úsečky AB, odděluje tedy bod A od bodu B; také přímka XY odděluje bod A od bodu B, neboť bod $Y \not\equiv A$ a přímka $XY \not\equiv AB$. Leží tedy body A, B v opačných polorovinách s hranicí XY. Bod Y je vnitřním bodem úsečky AC, odděluje tedy bod A od bodu C; také přímka XY odděluje bod A od bodu C, neboť bod $X \not\equiv A$ a přímka $XY \not\equiv AC$. Leží tedy body A, C v opačných polorovinách s hranicí XY a body B, C v téže polorovině s hranicí XY.

Závěr: Čtyřúhelník $YCBX$ je vypuklý čtyřúhelník.

25. Je dán vypuklý n-úhelník $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Uvnitř jeho strany A_1A_2 zvolte bod X, uvnitř strany A_2A_3 bod Y a dokažte, že mnohoúhelník $A_1XYA_3 \ldots A_n$ je vypuklý.

26. Je dán vypuklý mnohoúhelník $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ a jeho vnitřní bod X. Dokažte, že libovolná polopřímka p s počátkem v bodě X má s obvodem mnohoúhelníka jediný společný bod.

27. Počet úhlopříček vypuklého n-úhelníka je o 26 větší než počet úhlopříček vypuklého $(n + 4)$-úhelníka. Určete počet stran obou mnohoúhelníků.

Řešení

Počet úhlopříček vypuklého n-úhelníka je $P = \frac{n(n-3)}{2}$ a počet úhlopříček vypuklého $(n+4)$-úhelníka $P_{n+4} = \frac{(n+4)(n+1)}{2}$.

Podle podmínky úlohy platí vztah $P_{n+4} = P_n + 26$, který po dosazení za P_n a P_{n+4} vede k rovnici

$\frac{(n+4)(n+1)}{2} = \frac{n(n-3)}{2} + 26$; její kořen $n = 6$.

Závěr: Vypuklý n-úhelník je šestiúhelník, vypuklý $(n+4)$-úhelník je desetiúhelník.

28. a) Sečteme-li počet stran a počet úhlopříček vypuklého n-úhelníka, dostaneme číslo 15. Kolik stran a kolik úhlopříček má tento n-úhelník? b) Kolik stran a kolik úhlopříček má vypuklý n-úhelník, je-li počet jeho úhlopříček o 3 větší než počet jeho stran?

29. Který vypuklý n-úhelník má tolik úhlopříček jako stran? [Návod: Příslušnou rovnici upravte na tvar $n(n-5) = 0$.]

30. Dva styčné úhly mají součet r stupňů. Určete je, jsou-li jejich velikosti v poměru $m:n$. Sestrojte je, je-li $m = 1$, $n = 3$, $r = 60°$.

31. Dva styčné úhly mají velikosti v poměru 2 : 3; jejich rozdíl je 36°. Jsou to úhly vedlejší?

32. Ze dvou vedlejších úhlů je jeden o n stupňů větší než úhel druhý. Jak jsou tyto úhly velké? Pro která celá čísla n jsou oba úhly vyjádřeny celým počtem stupňů?

33. Jak velké jsou úhly mezi dvěma různoběžkami, měří-li jeden z nich 24°16′35″? Určete podmínku, za které jsou všechny tyto úhly pravé.

***34.** Je dán ostrý úhel α. Určete meze pro velikost úhlu β, je-li $(\alpha + \beta)$ úhlem ostrým a $(\alpha + 2\beta)$ úhlem tupým. Určete tyto meze též pro úhel $\alpha = 86°$ a $\alpha = 88°$.

***35.** Ze dvou výplňkových úhlů α, β je úhel α n-násobkem úhlu β. Jak jsou tyto úhly velké? Pro která celá čísla n je velikost obou úhlů udána celým počtem stupňů?

2. VZTAHY MEZI STRANAMI A ÚHLY TROJÚHELNÍKA. VĚTY O SHODNOSTI TROJÚHELNÍKŮ

36. Rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož základna je AB, má při vrcholu C vnější úhel $\gamma' = 130°$. Vypočítejte jeho vnitřní úhly.

37. Mezi vnitřními úhly α, β, γ trojúhelníka ABC platí vztahy $\alpha = 2\beta$, $\beta = 3\gamma$. Určete je.

38. Vnitřní úhly α, β, γ trojúhelníka ABC mají velikosti v poměru $2:3:5$. Jak velké jsou jeho vnější úhly α', β', γ'?

39. Vnější úhly α', β', γ' trojúhelníka ABC mají velikosti v poměru $5:7:8$. V jakém poměru jsou velikosti jeho vnitřních úhlů?

40. V kterém trojúhelníku je: a) součet; b) rozdíl velikostí dvou vnitřních úhlů roven velikosti úhlu třetího?

41. V kterém trojúhelníku je součet velikostí dvou vnějších úhlů roven 3 R?

42. V trojúhelníku ABC je úhel $\alpha > \beta$. Dokažte, že osa úhlu γ svírá s výškou v_c úhel $\omega = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

43. Dokažte, že osy úhlů α a β trojúhelníka ABC svírají úhel $\omega = \mathrm{R} + \frac{\gamma}{2}$.

44. Je dán dutý úhel $\sphericalangle AVB$. Libovolným vnitřním bodem ramena VA, např. bodem A, veďte uvnitř úhlu $\sphericalangle AVB$ polopřímku AL rovnoběžnou s přímkou VB a naneste na ni úsečku $AP = AV$. Dokažte, že bod P leží na ose úhlu $\sphericalangle AVB$.

45. Vrcholem C trojúhelníka ABC prochází přímka p rovnoběžná s osou $o \equiv BK$ úhlu β. Dokažte, že $BD = BC$, kde D je průsečík přímky p s přímkou AB.

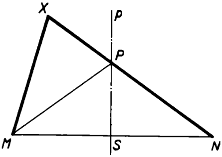
46. Jsou dány úsečky o délkách 36 cm, 15 cm, 14 cm. Zjistěte, zda tyto úsečky mohou být stranami trojúhelníka.

47. Délky stran trojúhelníka ABC jsou vyjádřeny celými čísly navzájem různými. Jakou délku má strana c, má-li strana a délku 2 dm a strana b délku 3 dm?

48. Trojúhelník ABC má obvod $o = 26$ cm a délky stran $a = 6{,}5$ cm, $b = 11{,}2$ cm. Seřaďte jeho vnitřní úhly podle velikosti.

49. V rovině ϱ je dána úsečka MN, jejíž střed je S a osa p. Dokažte, že všechny body roviny ϱ, které mají od bodu M menší vzdálenost než od bodu N, vyplňují vnitřek poloroviny pM.

Řešení (obr. 23)



Obr. 23

Je zřejmé, že všechny vnitřní body polopřímky SM tuto vlastnost mají. Zvolme bod X uvnitř poloroviny pM, který neleží na polopřímce SM. Přímka p odděluje bod N od bodu X, neboť bod N leží v polorovině opačné k polorovině pX; proto úsečka NX je proťata přímkou p ve vnitřním bodě P. Platí tedy vztah $NX = NP +$ $+ PX$; jelikož $NP = MP$, je $NX =$ $= MP + PX > MX$, neboť $P \not\equiv X$, $P \not\equiv M$ a PMX je trojúhelník.

Závěr: Pro každý vnitřní bod X poloroviny pM platí vztah $NX > MX$. Obrácenou větu „Je-li $NX > MX$, pak $X \in pM$", dokažte sami.

50. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož základna je AB. Na polopřímce AC za bodem C sestrojte bod D tak, aby platil vztah $DC = AC$. Dokažte, že přímky AB a BD jsou k sobě kolmé.

51. V trojúhelníku ABC sestrojte osu o úhlu γ a označte D její průsečík se stranou AB. Dokažte, že platí vztahy $AD < AC$ a $DB < BC$.

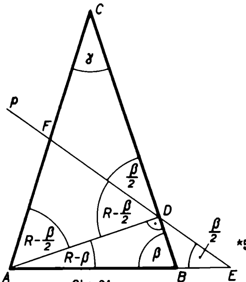
52. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a bod A, který leží vně kružnice k. Bodem A je vedena sečna p kružnice k, která tuto kružnici protíná v bodech C, D tak, že vnější úsek $AC = r$; polopřímka AS protíná kružnici k v bodě B, který leží za bodem S. Dokažte, že velikost úhlu $\sphericalangle ASC$ se rovná třetině velikosti úhlu $\sphericalangle BSD$.

53. Je dán ostrý úhel $\sphericalangle AVB = 15°$. Na polopřímce VA sestrojte bod X_1 a na polopřímce VB bod Y_1 tak, aby platil vztah $VX_1 = X_1Y_1 = 2$ cm, na polopřímce VA sestrojte bod X_2 a na polopřímce VB bod Y_2 tak, aby platil vztah $Y_1X_2 = X_2Y_2 = 2$ cm atd. Kolik rovnoramenných trojúhelníků na základě uvedeného postupu vznikne?

54. V trojúhelníku ABC je úhel $\beta = 2\gamma < R$. Vrcholem A veďte kolmici na stranu BC a její patu označte D. Na polopřímce AB za bodem B sestrojte bod E tak, aby platil vztah $BE = BD$. Přímka $p \equiv ED$ protíná přímku AC v bodě F. Dokažte, že platí $CF - DF = AF$.

Řešení (obr. 24)

Bod D leží uvnitř úsečky BC, neboť úhly β a γ jsou ostré. Bod F leží uvnitř úsečky AC, neboť přímka ED neprochází žádným vrcholem trojúhelníka ABC, protíná stranu BC ve vnitřním bodě D, a musí tedy protínat podle věty Paschovy ještě jednu stranu trojúhelníka ABC uvnitř. Stranu AB protínat uvnitř nemůže, neboť bod E leží na polopřímce AB za bodem B; musí tedy protínat stranu AC ve vnitřním bodě F. Troj-



Obr. 24

úhelník EBD je rovnoramenný a má úhly $\frac{\beta}{2}$ při základně ED; trojúhelník DFC je také rovnoramenný a má úhly $\frac{\beta}{2} = \gamma$ při základně DC. Trojúhelník DFA je také rovnoramenný a má úhly $\left(R - \frac{\beta}{2}\right)$ při základně AD. Je tedy $DF = FC$ a $DF = AF$.

Závěr: Vztah $DF = FC = AF$ platí.

***55.** Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož úhel $\alpha < 45°$. Sestrojte přímku $p \equiv CM$, kde M je střed úsečky AB a uvnitř polopřímky CM sestrojte bod D tak, aby platil vztah $CD = CA$. Dále sestrojte bod B', který je souměrně sdružený k bodu B podle přímky p a průsečíky P, Q přímky BB' s přímkami CM a CA. Body A, M, B, C, D, P, Q, B' určují řadu trojúhelníků; vyberte si některé z nich a vyjádřete jejich úhly pomocí úhlu α.

56. Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod U. Dokažte, že platí vztah $AU + BU + CU > s$, kde s je poloviční obvod trojúhelníka ABC.

57. Dokažte, že pro součet těžnic t_a, t_b, t_c trojúhelníka ABC platí vztah $t_a + t_b + t_c > \frac{3s}{2}$, kde s je poloviční obvod trojúhelníka ABC.

***58.** Jsou-li t_a, t_b, t_c těžnice trojúhelníka ABC, dokažte, že platí vztah $t_a + t_b + t_c < a + b + c$.

59. V trojúhelníku ABC je úhel $\alpha = 50°$ a úhel $\beta = 60°$. Osa úhlu β protíná stranu AC v bodě D. Seřaďte podle velikosti úsečky AB, BC, CD, AD, BD, AC.

$\boxed{\textbf{60.}}$ Ve vypuklém čtyřúhelníku $ABCD$ je bod U průsečík úhlopříček AC a BD. Dokažte, že platí vztah $\frac{o}{2} < AC + BD < o$, kde o je obvod čtyřúhelníka $ABCD$.

Řešení

Bod U je vnitřním bodem čtyřúhelníka $ABCD$. Jelikož součet obou stran trojúhelníka je vždy větší než strana třetí, platí nerovnosti $AB +$

$+ BC > AC$, $CD + DA > AC$, $AB + DA > DB$, $BC + CD > DB$. Sečteme-li tyto nerovnosti, dostaneme nerovnost $2(AB + BC + CD + DA) > 2(AC + BD)$, z které plyne nerovnost $o > AC + BD$. Dále platí nerovnosti : $AB < AU + BU$, $AD < DU + AU$, $DC < DU + CU$, $BC < CU + BU$.

Sečteme-li tyto nerovnosti, dostaneme nerovnost

$AB + AD + DC + BC < AU + BU + DU + AU + DU + CU + CU + BU$, z které plyne nerovnost $o < 2(AU + BU + CU + DU)$ a z této nerovnosti $\frac{o}{2} < AC + BD$.

Závěr: Nerovnost $\frac{o}{2} < AC + BD < o$ ve vypuklém čtyřúhelníku $ABCD$ platí.

***61.** Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, jehož obvod je $2s$. Dokažte, že platí nerovnosti $s < v_a + v_b + v_c < 2s$, kde v_a, v_b, v_c jsou výšky trojúhelníka ABC.

***62.** Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Osa úhlu γ a osa úhlu β se protínají v bodě P, kterým je vedena přímka $p \parallel BC$. Průsečíky přímky p se stranami AB a AC jsou M a N. Dokažte, že platí $MN = NC + MB$.

63. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC. Uvnitř jeho základny AB zvolte libovolný bod L a veďte jím přímky p, q tak, aby $p \parallel AC$ a $q \parallel BC$. Přímka p protne rameno BC v bodě P, přímka q protne rameno AC v bodě Q. Dokažte, že obvod rovnoběžníka $LPCQ$ se rovná součtu úseček $AC + BC = 2AC$. (Obvod tohoto rovnoběžníka je nezávislý na volbě bodu L uvnitř úsečky AB.)

***64.** Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC tak, že jeho odvěsna $BC = a$ má velikost menší než odvěsna $CA = b$. Uvnitř úsečky BC zvolte bod X a uvnitř úsečky AB najděte bod Y tak, aby platil vztah $XY = XB$. Bodem Y veďte kolmici k přímce XY a její průsečík s přímkou AC označte Z. Dokažte, že čtyřúhelník $XYZC$ má obvod $o = a + b$. (Obvod o je nezávislý na poloze bodu X uvnitř úsečky BC.)

65. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC a bod D, který je středem jeho základny AB. Bodem D jsou vedeny kolmice k ramenům AC a BC trojúhelníka ABC a jejich paty označeny M, N. Dokažte různými způsoby, že je $\triangle DMC \cong \triangle DNC$.

66. Je dán ostrý úhel $\alpha = \sphericalangle AVB$ a bod S, který leží na ose o úhlu α uvnitř úhlu α. Bodem S jsou vedeny přímky $p \perp VA$ a $q \perp VB$. Přímka p protíná ramena VA, VB po řadě v bodech D, E a přímka q v bodech F, G. Dokažte, že platí: $\triangle VDE \cong \triangle VGF$.

67. Dva trojúhelníky $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ mají $A_1B_1 = A_2B_2$, $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle B_2A_2C_2$ a $C_1D_1 = C_2D_2$, kde body D_1, D_2 jsou paty výšek vedených z vrcholů C_1 a C_2. Dokažte, že $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.

68. Dva trojúhelníky $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ mají $A_1C_1 = A_2C_2$, $A_1B_1 = A_2B_2$ a $C_1D_1 = C_2D_2$, kde D_1, D_2 jsou paty výšek vedených z vrcholů C_1 a C_2. Dokažte, že je $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.

69. Je dán čtverec $ABCD$. Veďte v něm dvě libovolné k sobě kolmé příčky, z nichž jedna protíná strany AD a BC v bodech P a Q a druhá protíná strany AB a CD v bodech U a V. Dokažte, že platí vztah $PQ = UV$.

70. Nad stranami AC a BC ostroúhlého trojúhelníka ABC jsou sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ACD a BCE tak, že každý z nich leží vně trojúhelníka ABC. Dokažte, že je $\triangle AEC \cong \triangle DBC$.

71. Nad stranami AB a AC ostroúhlého trojúhelníka ABC jsou sestrojeny čtverce $ABPQ$ a $ACRT$ tak, že leží vně trojúhelníka ABC. Dokažte, že je $CQ = BT$.

***72.** V rovnoběžníku $ABCD$ je $AB > BC$ a úhel $\sphericalangle BAD$ je ostrý. Nad stranou AB je v polorovině ABC sestrojen čtverec $ABPQ$ a nad stranou BC v polorovině BCA čtverec $BCUT$. Dokažte, že je $\triangle CBD \cong \triangle BTP$.

73. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a bod P, který leží vně kružnice k. Veďte bodem P ke kružnici k tečny t_1 a t_2 a označte jejich dotykové body T_1 a T_2. Dokažte, že je $PT_1 = PT_2$ a $\sphericalangle SPT_1 = \sphericalangle SPT_2$.

74. Na ose o ostrého úhlu AVB zvolte bod S uvnitř úhlu $\sphericalangle AVB$ a sestrojte kružnici $k \equiv (S; r)$ tak, aby $r > SV$. Dokažte, že platí vztah $MN = PQ$, kde M, N jsou body, ve kterých přímka AV protíná kružnici k a P, Q body, ve kterých přímka VB protíná kružnici k.

75. Rovnoramenný trojúhelník ABC má při základně AB úhel $\alpha = 30°$. Dokažte, že osy ramen tohoto trojúhelníka rozdělují jeho základnu AB na tři stejné díly.

3. OBSAH KRUHU A JEHO ČÁSTÍ, DÉLKA KRUŽNICE, DÉLKA OBLOUKU, ÚHEL STŘEDOVÝ A OBVODOVÝ

76. Vypočítejte poloměr kruhové dráhy, kterou musí běžec proběhnout třikrát, aby urazil 2 km.

77. Vypočítejte poloměr kružnice, jejíž délka je o 7 cm větší než obvod pravidelného šestiúhelníka, který je této kružnici vepsán $\left(\pi \doteq \frac{22}{7}\right)$.

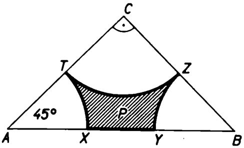
78. Vypočítejte poloměr kruhu, jehož obsah P (v cm^2) a obvod o (v cm) je vyjádřen týmž číslem.

79. Vypočítejte poloměr r a obvod o kruhu k, jehož obsah se rovná součtu obsahů tří kruhů k_1, k_2, k_3 o poloměrech r_1, r_2, r_3.

80. Je dán pravoúhlý trojúhelník rovnoramenný ABC, jehož odvěsny mají délku $CA = CB = 2$ dm. Kolem každého jeho vrcholu je opsána kružnice o poloměru $r = 1$ dm. Oblouky těchto kružnic oddělují z trojúhelníka ABC tři kruhové výseče a zbytek tvoří obrazec M, jehož obsah je P. Určete, kolik % z obsahu trojúhelníka ABC činí P.

Řešení (obr. 25)

Obsah trojúhelníka ABC je $U = \frac{2^2}{2} = 2$, obsah výseče $V_1 = \frac{\pi}{8}$, $V_2 = \frac{\pi}{8}$, $V_3 = \frac{\pi}{4}$; obsah útvaru M je tedy $P = U - (V_1 + V_2 + V_3) = 2 - \frac{\pi}{2} \doteq 2 - \frac{22}{14} = \frac{3}{7}$. Označíme-li p hledaný



Obr. 25

počet procent, potom $p = \frac{P}{U} \cdot 100 = \frac{300}{7} : 2 = \frac{150}{7} = 21\frac{3}{7}$.

Závěr: Obsah útvaru M je $P \doteq \frac{3}{7}$ dm^2, což je asi $21\frac{3}{7}$ % obsahu trojúhelníka ABC.

81. Čtverci $ABCD$, jehož strana má délku a, vepište kruh k. Dále sestrojte čtyři čtvrtkruhy, které mají středy ve vrcholech A, B, C, D čtverce, poloměry $r = \frac{a}{2}$ a zapadají dovnitř čtverce. Vypočítejte obsah útvaru, jehož body jsou společné kruhu k a čtvrtkruhům.

82. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a. Okolo jeho vrcholů A a C jsou opsány čtvrtkružnice o poloměru $r = a$ dovnitř čtverce. Určete obsah útvaru U mezi oběma čtvrtkružnicemi.

83. Na přímce p jsou zvoleny čtyři body A, B, C, D v uvedeném pořadí, přičemž platí vztah $AB = BC = CD$; nad průměry AD a BC jsou sestrojeny polokružnice k_1, k_2 a nad průměry AB, CD polokružnice k_3, k_4 tak, že polokružnice k_1, k_2 leží v téže polorovině a polokružnice k_3, k_4 v opačné polorovině s hranicí p. Vypočítejte obvod a obsah útvaru omezeného těmito čtyřmi polokružnicemi, je-li délka úsečky $AD = 2r$.

84. Obvod kruhové výseče, jejíž poloměr $r = 12$ cm, je $39\frac{5}{7}$ cm. Vypočítejte její obsah $\left(\pi \doteq \frac{22}{7}\right)$.

***85.** Je dána úsečka AB a její vnitřní bod M, který rozděluje úsečku AB na dva úseky $AM = a$, $BM = b$. Nad průměry AB, AM, BM jsou sestrojeny polokružnice k_1, k_2, k_3 ležící v téže polorovině s hranicí AB. Vypočítejte obsah útvaru U mezi těmito půlkružnicemi pomocí čísel a a b.

***86.** Horní stěna desky stolu má tvar obdélníka, jehož rozměry jsou a dm a b dm. Vypočítejte obvod a obsah této stěny, je-li v rozích zaoblena čtvrtkružnicemi o poloměrech r dm. ($a > b$, $2r < b$.)

87. Jsou dány dvě soustředné kružnice k_1, k_2, jejichž poloměry jsou r_1, r_2, přičemž $r_1 > r_2$. Vypočítejte poloměr r kružnice k, která je soustředná s kružnicemi k_1, k_2 tak, aby obsah mezikruží určeného kružnicemi k_1, k se rovnal obsahu mezikruží určeného kružnicemi k, k_2.

***88.** Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Nad průměry AB, AC, BC jsou opsány polokružnice ležící v polorovině ABC. Tyto tři polokružnice omezují dva měsíčky, které mají obsahy P_1 a P_2. Dokažte, že platí vztah $P_1 + P_2 = P$, kde P je obsah trojúhelníka ABC.

89. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC, jehož strana AB má délku a. Okolo jeho vrcholů A, B, C opište kružnice k_1, k_2, k_3, které mají vnější dotyk. Vypočítejte obsah útvaru U ležícího mezi těmito kružnicemi. (Poznámka: Obsah rovnostranného trojúhelníka ABC je $P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.)

90. Čtverci $ABCD$, jehož strana má délku a, je opsána a vepsána kružnice. Vypočítejte obsah mezikruží omezeného těmito kružnicemi. (Poznámka: Úhlopříčka čtverce $ABCD$ má délku $u = a\sqrt{2}$.)

91. Má-li strana rovnostranného trojúhelníka ABC délku $AB = a$, má jeho výška velikost $v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Vypočítejte obsah mezikruží omezeného kružnicí trojúhelníku ABC opsanou a vepsanou.

92. Odvěsna AC pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka ABC má délku 4 cm. Vypočítejte obsah útvaru mezi kružnicí trojúhelníku ABC opsanou a vepsanou.

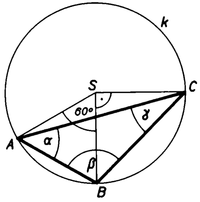
93. Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1 \equiv (S; r)$ a $k_2 \equiv \left(S; \frac{r}{2}\right)$. Vypočítejte obvod a obsah výseče mezikruží se středovým úhlem $\alpha = 120°$.

94. Jak je velký obvodový úhel příslušný a) $\frac{3}{5}$, b) $\frac{5}{8}$ kružnice?

95. Kružnice $k \equiv (S; r)$ je rozdělena na dva oblouky tak, že obvodový úhel nad větším obloukem se rovná středovému úhlu nad menším obloukem. Jak velké jsou obvodové úhly nad oběma oblouky?

96. Do kružnice $k \equiv (S; r)$ je vepsán trojúhelník ABC tak, že jeho vrcholy dělí kružnici k na tři oblouky, jejichž délky jsou v poměru $2:3:7$. Vypočítejte vnitřní úhly tohoto trojúhelníka.

Řešení (obr. 26)



Obr. 26

Jsou-li velikosti oblouků AB, BC, CA kružnice k v poměru $2:3:7$, jsou v tomto poměru i středové úhly příslušné těmto obloukům. Je tedy úhel $\sphericalangle ASB = 60°$, $\sphericalangle BSC = 90°$ a úhel $4\,\mathrm{R} - \sphericalangle CSA = 210°$. Na základě vztahu mezi středovým a obvodovým úhlem nad týmž obloukem je úhel $\sphericalangle BAC = \alpha = \frac{1}{2} \sphericalangle CSB = 45°$, $\sphericalangle ACB = \gamma = \frac{1}{2} \sphericalangle ASB = 30°$ a $\sphericalangle ABC = \beta = 2\,\mathrm{R} - (\alpha + \gamma) = 105° = \frac{1}{2}(4\,\mathrm{R} - \sphericalangle CSA)$.

Závěr: Trojúhelník ABC má vnitřní úhly $\alpha = 45°$, $\beta = 105°$, $\gamma = 30°$.

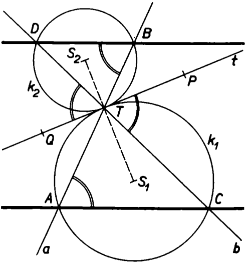
97. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a dvě její tětivy AC, BC, přičemž $AC < 2r$, $BC < 2r$. Jestliže menšímu oblouku AC přísluší středový úhel α a menšímu oblouku BC přísluší středový úhel β, určete úhel $\sphericalangle ACB$. [Návod: Využijte vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem nad týmž obloukem.]

98. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Nad průměry AB a AC jsou sestrojeny kružnice k_1, k_2. Dokažte, že se tyto kružnice protínají v bodech X, Y, přičemž $X \equiv A$ a Y leží uvnitř strany BC trojúhelníka ABC.

99. Dvě shodné kružnice $k_1 \equiv (S_1; r)$, $k_2 \equiv (S_2; r)$ mají tu vlastnost, že střed jedné leží na kružnici druhé. Označte průsečíky obou kružnic P, Q a sestrojte průměry PA a PB. Dokažte, že trojúhelník PAB je rovnostranný a že jeho strana AB prochází bodem Q.

100. Je dána polokružnice k se středem S a s krajními body A, B. Tětiva CD této polokružnice má délku $c < AB$ a přísluší jí středový úhel $\sphericalangle CSD = \varphi$. Dokažte, že úhlopříčky čtyřúhelníka $ABCD$ svírají úhel $\omega = \mathrm{R} + \frac{\varphi}{2}$. (Pořadí bodů A, B, C, D na polokružnici k volte tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl konvexní.)

101. Jsou dány kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$ a $k_2 \equiv (S_2; r_2)$, které mají vnější dotyk v bodě T. Tímto bodem jsou vedeny dvě přímky a, b, které jsou sečnami obou kružnic. Označte $A \not\equiv T$, $B \not\equiv T$ průsečíky přímky a s kružnicemi k_1, k_2, $C \not\equiv T$, $D \not\equiv T$ průsečíky přímky b s kružnicemi k_1, k_2 a dokažte, že je $AC \parallel BD$.



Obr. 27

Řešení (obr. 27)

Jelikož kružnice k_1, k_2 mají vnější dotyk v bodě T, mají v tomto bodě též společnou tečnu t a leží v opačných polorovinách s hranicí t; z toho důvodu odděluje bod T bod A od bodu B a bod C od bodu D. Zvolme na tečně t body P, Q tak, aby byly bodem T odděleny a aby bod Q ležel v polorovině CDA a bod P v polorovině k CDA opačné; potom jsou úhly $\sphericalangle CTP$ a $\sphericalangle DTQ$ vrcholové, takže $\sphericalangle CTP = \sphericalangle DTQ$. Jelikož úhel $\sphericalangle CTP$ je úsekový a patří oblouku TC, je $\sphericalangle CTP = \sphericalangle CAT$; ze stejného důvodu je $\sphericalangle DTQ = \sphericalangle DBT$. Z uvedených vztahů plyne vztah $\sphericalangle CAT = \sphericalangle DBT$, přičemž tyto úhly jsou střídavé, neboť body C, D leží v opačných polorovinách s hranicí AB. V důsledku toho je $AC \parallel BD$.

Závěr: Přímky AC a BD jsou rovnoběžné.

***102.** Dokažte, že $AC \parallel BD$, mají-li kružnice k_1, k_2 z příkladu 101 vnitřní dotyk.

***103.** Dvě kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$ se protínají ve dvou různých bodech A, B. Bodem A veďte přímku a, která protíná kružnice k_1, k_2 v bodech $E \not\equiv A$, $F \not\equiv A$, bodem B přímku b, která protíná kružnice k_1, k_2 v bodech $C \not\equiv B$, $D \not\equiv B$. Dokažte, že $CE \parallel DF$.

104. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a bod P ležící vně kružnice k. Sestrojte z bodu P tečny t_1, t_2 ke kružnici k a označte jejich dotykové body T_1, T_2. Dále sestrojte přímku T_1S, která protne kružnici k v bodě $H \not\equiv T_1$. Dokažte, že $HT_2 \parallel PS$.

***105.** Trojúhelníku ABC je opsána kružnice $k \equiv (S; r)$. Osa o_1 vnitřního úhlu $\alpha = \sphericalangle BAC$ protne kružnici k v bodě $U_1 \not\equiv A$; osa vnějšího úhlu α' příslušného k úhlu α protne kružnici k v bodě $U_2 \not\equiv A$. Dokažte, že přímka U_1U_2 je osou strany BC.

***106.** V kružnici $k \equiv (S; r)$ jsou dány tětivy $AB \parallel A'B'$ a $BC \parallel B'C'$. Dokažte, že $AC' \parallel A'C$.

***107.** Kružnici $k \equiv (S; r)$ je opsán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, jehož základny jsou AB a CD. Dokažte, že kružnice k_1, k_2 opsané nad průměry AD a BC se dotýkají v bodě S.

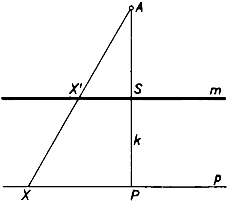
108. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a úhly α, β, přičemž $\alpha + \beta < 2R$. Vepište kružnici k trojúhelníku ABC tak, aby jeho úhel $\sphericalangle BAC = \alpha$ a úhel $\sphericalangle ABC = \beta$.

***109.** Jsou dány tři přímky a, b, c jdoucí bodem M a kružnice $k \equiv (S; r)$. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy ležely na kružnici k a strany byly rovnoběžné s přímkami a, b, c.

4. GEOMETRICKÁ MÍSTA BODŮ A JEJICH UŽITÍ

110. Je dána přímka p a bod A, který na přímce p neleží. Určete geometrické místo středů úseček AX, jestliže bod X probíhá přímku p.

Řešení (obr. 28)



Obr. 28

Vedeme-li bodem A kolmici k přímce p a označíme P její patu na přímce p, je střed S úsečky AP bodem hledaného geometrického místa. Zvolíme-li na přímce p libovolně bod $X \not\equiv P$ a sestrojíme střed X' úsečky AX, patří bod X' také hledanému geometrickému místu. Dále je zřejmé, že bod X' leží na přímce m, která prochází bodem S a je rovnoběžná s přímkou p, neboť úsečka $X'S$ je střední příčkou trojúhelníka APX. K témuž výsledku dospějeme, volíme-li bod $X \not\equiv P$ kdekoli na přímce p. Je tedy hledaným geometrickým místem přímka m. Dokážeme obráceně, že všechny body přímky m patří hledanému geometrickému místu. Za tím účelem zvolme na přímce m bod $X' \not\equiv S$. Přímka AX' protíná přímku p v bodě $X \not\equiv P$, takže body A, P, X jsou vrcholy pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona je AX. Jelikož bod S je středem jeho odvěsny AP a $m \equiv SX' \parallel XP$, je úsečka SX' střední příčka trojúhelníka APX a bod X' přímky m střed úsečky AX. K témuž výsledku dojdeme, volíme-li bod $X' \not\equiv S$ kdekoli na přímce m.

Závěr: Hledané geometrické místo tvoří přímka $m \parallel p$, která půlí úsečku AP.

111. Určete geometrické místo středů všech úseček, které mají krajní body na dvou různých rovnoběžkách p a q.

112. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$. Určete geometrické místo středů všech kružnic, které se dotýkají kružnice k a procházejí bodem S.

113. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$. Určete geometrické místo bodů souměrně sdružených k bodu S podle všech tečen kružnice k.

114. Je dán dutý úhel $\sphericalangle AVB$. Po jeho ramenu VA se pohybuje bod P a po jeho ramenu VB bod Q tak, že platí vztah $VP = VQ$. Určete geometrické místo středů všech úseček PQ.

115. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a úsečka délky d. V bodě T kružnice k je sestrojena tečna t a na ní bod X tak, aby platil vztah $TX = d$. Určete geometrické místo všech bodů X, jestliže bod T bude probíhat kružnici k.

116. Je dán trojúhelník ABC a libovolný bod M. Na obvodu trojúhelníka ABC zvolte libovolný bod X a na přímce MX bod $Y \not\equiv X$ tak, aby platil vztah $MY = MX$. Určete geometrické místo všech bodů Y, probíhá-li bod X obvod trojúhelníka ABC.

117. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a úsečka délky $r_1 > r$. Určete geometrické místo středů kružnic, které mají poloměr r_1 a kružnici k půlí.

118. Je dán rovnoběžník $ABCD$, který má pevnou stranu AB, kdežto strany AD a BC se mohou otáčet okolo bodů A a B (kloubový čtyřúhelník — např. pohyb ojnice u lokomotivy). Jakou dráhu opisuje při tomto pohybu střed S rovnoběžníka $ABCD$?

119. Je dán trojúhelník ABC, jehož strana BC je pevná, kdežto strana AB se může volně okolo bodu B otáčet. Strana AC při tomto pohybu mění svoji velikost. Určete geometrické místo středů všech úseček AC.

120. Určete geometrické místo středů kružnic, které mají daný poloměr r a vytínají na dané přímce p tětivu dané délky d.

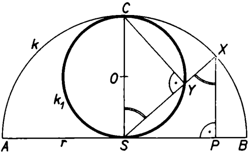
121. Určete geometrické místo středů kružnic, které se dotýkají dané přímky t a na dané přímce $p \parallel t$ vymezují tětivu dané délky d.

122. Co je geometrickým místem bodů, z kterých vidíme danou úsečku AB v zorném úhlu větším než 45° a menším než 60°?

123. Určete geometrické místo průsečíků os vnitřních úhlů všech pravoúhlých trojúhelníků, které mají pevnou přeponu AB.

124. Bod X probíhá polokružnici $k \equiv (S; r)$ sestrojenou nad průměrem AB, jehož střed je S. Na každé polopřímce SX je sestrojen bod Y tak, že jeho vzdálenost od bodu S je rovna vzdálenosti bodu X od přímky AB. Určete a sestrojte geometrické místo všech bodů Y.

Řešení (obr. 29)



Obr. 29

Je-li $X \equiv A$ nebo $X \equiv B$, je vzdálenost bodu X od přímky AB rovna nule, takže bod $Y \equiv S$; bod S patří hledanému geometrickému místu. Je-li bod $X \equiv C$, kde C je koncový bod poloměru SC kolmého k přímce AB, je jeho vzdálenost od přímky AB rovna r, takže $Y \equiv C$; bod C patří hledanému geometrickému místu. Zvolme dále bod X tak, že leží uvnitř oblouku BCA, přičemž $X \not\equiv C$; veďme bodem X kolmici k přímce AB a její patu označme P. Zřejmě je $SP < r$, $XP < r$, takže bod Y je vnitřním bodem úsečky SX. Dále je patrno, že $\sphericalangle CSX = \sphericalangle PXS$, neboť $SC \parallel XP$, C a P leží v opačných polorovinách s hranicí SX, takže jde o úhly střídavé. V důsledku toho je $\triangle CSY \cong \triangle SXP$ (sus), takže $\sphericalangle CYS = \sphericalangle SPX = R$. Leží tedy bod Y na Thaletově kružnici k_1 sestrojené nad průměrem SC. K témuž výsledku dojdeme, zvolíme-li bod $X \not\equiv C$ kdekoli uvnitř oblouku AB. Dokážeme obráceně, že body Y kružnice k_1 mají předepsanou vlastnost. Trojúhelník SCY podle Thaletovy věty je pravoúhlý, takže $\sphericalangle CYS = R$. Polopřímka SY protne polokružnici k v bodě X. Označíme-li patu kolmice vedené bodem X k přímce AB písmenem P, je trojúhelník PSX pravoúhlý, má přeponu SX a $\sphericalangle SPX = R$. Jelikož $\sphericalangle CSY = \sphericalangle SXP$ ($CS \perp AB$, $XP \perp AB$, proto $CS \parallel PX$, takže jde o úhly střídavé) a $SC = SX$, je $\triangle CSY \cong \triangle SXP$ (usu), odkud plyne vztah $SY = XP$. Bod Y tedy patří našemu geometrickému místu. K témuž výsledku dojdeme, zvolíme-li bod $Y \not\equiv S$, $Y \not\equiv C$ kdekoli na kružnici k_1.

Závěr: Hledané geometrické místo tvoří kružnice k_1 sestrojená nad průměrem SC, kde S je střed polokružnice k a C krajní bod poloměru k přímce AB kolmého.

***125.** Polopřímky VM a VN mají společný počáteční bod V a svírají úhel α. Určete geometrické místo bodů, které mají od obou polopřímek součet vzdáleností rovný danému číslu $d > 0$.

***126.** Je dán dutý úhel AVB. Po jeho ramenu VA se pohybuje bod P a po ramenu VB bod Q tak, že součet velikostí úseček $VP + VQ = d$, kde d je kladné číslo. Určete geometrické místo středů S úseček PQ.

***127.** Jsou dány dvě různé rovnoběžky p, q, jejichž vzdálenost je v. Určete geometrické místo středů kružnic, které vymezují na přímce p tětivu délky a a na přímce q tětivu délky b ($a \geqq b$).

***128.** Je dána polokružnice $k \equiv (S; r)$ s krajními body A, B a úsečka délky $c < AB$; najděte geometrické místo průsečíků úhlopříček všech čtyřúhelníků $ABCD$, jejichž vrcholy C, D leží na polokružnici k a to tak, že strana CD čtyřúhelníka $ABCD$ má stálou délku rovnou číslu c.

***129.** Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a na ní dva různé body A, B. Ke každému bodu X, který probíhá kružnicí k, přičemž $X \not\equiv A$, $X \not\equiv B$, je sestrojen na polopřímce AX za bodem X bod Y tak, že $XY = XB$. Určete geometrické místo všech bodů Y. [Návod: Trojúhelníky XYB jsou rovnoramenné a mají při vrcholu Y stejné úhly.]

***130.** Jsou dány dvě různé rovnoběžky p, p' a uvnitř pásu mezi nimi bod M. Bodem M veďte přímku q tak, aby proťala přímky p a p' v bodech A a A'. Sestrojte v bodě A' kolmici k k přímce q a určete na ní bod Q tak, aby platil vztah $A'Q = MA$. Stanovte geometrické místo bodů Q, jestliže přímka q mění svoji polohu.

131. Je dána přímka p, dva různé body A a B a úsečka délky d. Sestrojte bod X tak, aby měl od bodů A, B stejnou vzdálenost a od přímky p vzdálenost d.

132. Je dán trojúhelník ABC. Uvnitř tohoto trojúhelníka sestrojte bod M tak, aby jeho vzdálenosti od přímek AB, BC, AC byly v poměru $2:3:4$.

133. Je dána úsečka AB délky a, přímka $p \parallel AB$ mající od úsečky AB vzdálenost d a dutý úhel α. Na přímce p sestrojte bod X tak, aby z něho bylo vidět úsečku AB pod úhlem α. Určete vztah mezi d a α, má-li být úloha řešitelná.

134. Je dán čtverec $ABCD$. Na jeho obvodu najděte bod X tak, aby z něho bylo vidět úhlopříčku AC tohoto čtverce pod úhlem 120°.

135. Je dán kosočtverec $ABCD$. Sestrojte takový bod X, aby z něho bylo vidět stranu AB pod úhlem 60° a stranu BC pod úhlem 45°.

136. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Sestrojte bod M tak, aby z něho bylo vidět všechny tři strany tohoto trojúhelníka pod stejným úhlem.

***137.** Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$, libovolná její tětiva AB a bod $C \not\equiv S$, který leží uvnitř kružnice k. Bodem C veďte tětivu MN tak, aby byla tětivou AB půlena.

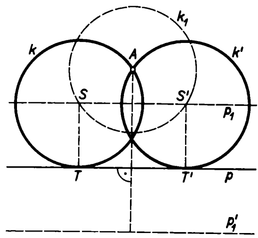
138. Je dána přímka p, bod A, který na přímce p neleží, a úsečka délky r. Sestrojte kružnici k tak, aby měla poloměr r, procházela bodem A a dotýkala se přímky p.

Řešení (obr. 30)

A. *Rozbor*: Jelikož kružnice k o poloměru r má procházet bodem A, je nutno hledat její střed S na kružnici k_1, která má střed v bodě A a poloměr r. (k_1 je geometrické místo středů kružnic, které mají poloměr r a procházejí bodem A.)

Jelikož kružnice k se má dotýkat přímky p, je nutno hledat její střed S na přímkách p_1, p_1', které leží v opačných polorovinách s hranicí p, jsou s přímkou p rovnoběžné a mají od ní vzdálenost r (p_1 a p_1' tvoří geometrické místo středů kružnic, které mají poloměr r a dotýkají se přímky p). Střed S kružnice k je společným bodem obou geometrických míst.

B. *Konstrukce:* Sestrojíme kružnici $k_1 \equiv (A; r)$ a obě přímky p_1, p_1' tak, aby $p_1 \parallel p$, $p_1' \parallel p$, aby měly od přímky p vzdálenost r a aby ležely v opačných polorovinách s hranicí p. Jestliže kružnice k_1 některou z obou přímek p_1, p_1' protne, pak tento průsečík je střed S kružnice k. Potom stačí okolo středu S opsat kružnici k poloměrem r a úloha je vyřešena.



Obr. 30

C. *Důkaz konstrukce:* Kružnice $k \equiv (S; r)$ zřejmě prochází bodem A, neboť $SA = r$ a dotýká se přímky p, neboť vzdálenost bodu S od přímky p je $ST = r$.

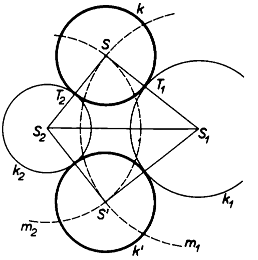
D. *Diskuse*: Úloha má řešení tehdy, jestliže obě uvedená geometrická místa mají společné body; to znamená, že alespoň jedna z přímek p_1, p_1' je sečnou nebo tečnou kružnice k_1. Bod A musí mít tedy alespoň od jedné z uvedených přímek vzdálenost menší nebo rovnou poloměru r.

a) Nechť bod A a přímka p_1 leží v téže polorovině s hranicí p; potom je úloha řešitelná tehdy, je-li $|d - r| \leqq r$, kde d značí vzdálenost bodu A od přímky p. Uvedený vztah lze upravit na tvar $0 < d \leqq 2r$; je-li $d = 2r$, existuje jedna kružnice $k \equiv (S; r)$, která řeší úlohu; je-li $d < 2r$, lze sestrojit takové kružnice dvě, je-li $d > 2r$, nemá úloha řešení.

b) Vzhledem k případu a) leží bod A a přímka p_1' v opačných polorovinách s hranicí p; přímka p_1' má od bodu A vzdálenost $(d + r)$, tedy větší než r. Přímka p_1' nemá s kružnicí k_1 společné body.

Závěr: Střed S hledané kružnice k je průsečíkem kružnice $k_1 \equiv (A; r)$ s přímkou p_1, která má od přímky p vzdálenost r a leží s bodem A v téže polorovině s hranicí p. Úloha má řešení tehdy, platí-li $0 < d \leqq 2r$, kde d značí vzdálenost bodu A od přímky p.

139. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$ a $k_2 \equiv (S_2; r_2)$ tak, aby $S_1S_2 > r_1 + r_2$, přičemž $r_1 > r_2$. Sestrojte kružnici k tak, aby měla daný poloměr r a dotýkala se obou kružnic vně.



Obr. 31

Řešení (obr. 31)

A. *Rozbor*: Střed S kružnice k leží na kružnici $m_1 \equiv (S_1; r + r_1)$ a na kružnici $m_2 \equiv (S_2; r + r_2)$.

B. *Konstrukce*: Okolo bodu S_1 opíšeme kružnici m_1 poloměrem $r + r_1$, okolo bodu S_2 kružnici m_2 poloměrem $r + r_2$. Společný bod kružnic m_1, m_2 je středem S hledané kružnice k, jejíž poloměr je r. Body T_1, T_2, ve kterých protínají přímky S_1S, S_2S kružnice k_1, k_2, jsou body dotyku kružnice k s kružnicemi k_1 a k_2.

C. *Důkaz konstrukce*: Kružnice k má poloměr r, neboť $T_1S = T_2S = r$, a dotýká se kružnic k_1, k_2 v bodech T_1, T_2 vně, neboť $S_1T_1 = r_1$, $T_1S = r$, $S_1S = r + r_1$, $S_2T_2 = r_2$, $T_2S = r$, $S_2S = r + r_2$.

D. *Diskuse*: Úloha má řešení tehdy, mají-li kružnice m_1, m_2 společné body. To nastane tehdy, jsou-li splněny vztahy $(r_1 + r) - (r_2 + r) \leqq S_1S_2 \leqq (r_1 + r) + (r_2 + r)$, odkud plynou nerovnosti $r_1 - r_2 \leqq S_1S_2 \leqq r_1 + r_2 + 2r$. Jelikož v našem případě je $S_1S_2 > r_1 + r_2$, je vztah $S_1S_2 \geqq r_1 - r_2$ vždy splněn a stačí uvažovat jen vztah $S_1S_2 \leqq r_1 + r_2 + 2r$. V případě, že $S_1S_2 < r_1 + r_2 + 2r$, má úloha dvě řešení; v případě, že $S_1S_2 = r_1 + r_2 + 2r$, má úloha jedno řešení a v případě, že $S_1S_2 > r_1 + r_2 + 2r$, nemá úloha řešení.

Závěr: Střed S hledané kružnice k je průsečíkem kružnic $m_1 \equiv (S_1; r + r_1)$ a $m_2 \equiv (S_2; r + r_2)$. Úloha je řešitelná tehdy, je-li $S_1S_2 \leqq r_1 + r_2 + 2r$.

140. Je dán dutý úhel $\sphericalangle AVB$. Sestrojte kružnici k tak, aby procházela bodem B a dotýkala se ramen VA a VB daného úhlu.

141. Jsou dány dvě různé rovnoběžky p a q a na přímce p dva různé body A, B. Sestrojte kružnici k tak, aby procházela body A, B a dotýkala se přímky q.

142. Je dána kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$ a dvě různoběžky p, q, které procházejí bodem S_1. Sestrojte kružnici k, která má střed na kružnici k_1 a dotýká se přímek p a q.

143. Jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky p a q a přímka m, která obě rovnoběžky protíná. Sestrojte kružnici k tak, aby se dotýkala všech tří přímek.

144. V soustavě souřadnic Pxy sestrojte kružnici k tak, aby procházela bodem $M \equiv (3; 0)$ a dotýkala se obou os.

145. Jsou dány dvě různé rovnoběžky p a q a bod A. Sestrojte kružnici k tak, aby se dotýkala přímek p, q a procházela bodem A.

146. Vepište kružnici k kruhové výseči se středovým úhlem $\alpha = 45°$.

147. Je dán čtverec $ABCD$ a kružnice k_1, která je mu vepsána. Sestrojte kružnici k tak, aby se dotýkala dvou sousedních stran daného čtverce a kružnice k_1.

148. Je dána přímka t a dva body A, T, z nichž bod T leží na přímce t. Sestrojte kružnici k tak, aby se dotýkala přímky t v bodě T a procházela bodem A.

***149.** Jsou dány dvě shodné kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$, přičemž $r_1 = r_2 = 25$ mm a vzdálenost $S_1S_2 = 120$ mm. Sestrojte kružnici k tak, aby se dotýkala kružnic k_1, k_2 a přímky $p \equiv S_1S_2$.

150. Je dána kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$ a její libovolná tečna t, která se dotýká kružnice k v bodě T; dále je dána úsečka délky r. Sestrojte kružnici k tak, aby se dotýkala přímky t, měla poloměr r a s kružnicí k_1 vnější dotyk.

151. Je dána kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$ a přímka p, která prochází bodem S_1. Sestrojte kružnici k tak, aby se dotýkala přímky p, kružnice k_1 a měla poloměr $r = \frac{1}{2} r_1$.

152. Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$, přičemž $r_1 > r_2$; dále je dán bod A. Sestrojte kružnici k, která se dotýká kružnic k_1, k_2 a prochází bodem A.

153. Je dána kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, bod M a úsečka délky d. Sestrojte kružnici k tak, aby měla poloměr d, půlila kružnici k_1 a procházela bodem M.

154. Je dána kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$ a bod A. Sestrojte kružnici k shodnou s kružnicí k_1 tak, aby procházela bodem A a dotýkala se kružnice k_1.

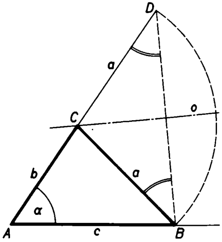
***155.** Jsou dány tři kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$, $k_3 \equiv (S_3; r_3)$, přičemž platí $r_1 = r_2 = 4$ cm, r_3 libovolné. Tyto kružnice se navzájem dotýkají vně. Sestrojte kružnici k tak, aby měla s každou z daných kružnic vnitřní dotyk.

$\boxed{\textbf{156.}}$ Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a + b$, c, α.

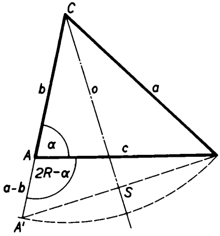
Řešení (obr. 32)

A. *Rozbor*: Předpokládejme, že úloha má řešení. Na polopřímce AC za bodem C sestrojme bod D tak, aby platilo $CD = CB = a$; potom trojúhelník ABD má strany $AB = c$, $AD = b + a$ a úhel $\sphericalangle BAD = \alpha$. Trojúhelník BCD je rovnoramenný a má základnu BD; osa o této základny jde bodem C.

B. *Konstrukce*: Sestrojme nejprve trojúhelník ABD, který je určen stranami $AB = c$, $AD = b + a$ a úhlem α jimi sevřeným. Dále sestrojme osu o strany BD, která protne přímku AD v bodě C. Za předpokladu, že průsečík C padne dovnitř úsečky AD, je hledaným trojúhelníkem trojúhelník ABC.



Obr. 32



Obr. 33

C. *Důkaz*: Protože bod C leží na ose úsečky BD, je $CD = CB$, $AC + CB = AC + CD = AD = a + b$. Trojúhelník ABC má stranu $AB = c$, $\sphericalangle BAC = \alpha$ a součet stran $AC + CB = a + b$; je to tedy hledaný trojúhelník.

D. Diskuse: Je-li $a + b > c$ a úhel $\alpha < 2R$, má úloha vždy jedno řešení. Lze totiž trojúhelník ABD vždy sestrojit a trojúhelník ABC existuje, neboť průsečík C osy úsečky BD s přímkou AD padne dovnitř úsečky AD. Úsečka $AD > AB$, a proto i úhel $\sphericalangle ABD > \sphericalangle ADB$, přičemž $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD$. Úhel $\sphericalangle ADB$ je vždy ostrý, takže polopřímka DA se s osou úsečky DB protnou uvnitř poloroviny DBA. Úhly $\sphericalangle ABD$ a $\sphericalangle CBD$ mají společné rameno BD, $\sphericalangle ABD > \sphericalangle CBD$, takže bod C padne dovnitř úsečky AD.

Závěr: Trojúhelník ABC lze vždy sestrojit, je-li $a + b > c$ a úhel $\alpha < 2R$. Úloha má jedno řešení.

157. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a - b > 0$, c, $\alpha < R$.

Řešení (obr. 33)

A. *Rozbor*: Předpokládejme, že jsme trojúhelník ABC sestrojili. Naneseme-li na polopřímku CA úsečku $CA' = CB$, je $A'A = a - b$,

$\sphericalangle A'AB = 2R - \alpha$, takže trojúhelník $A'AB$ je určen dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným.

B. *Konstrukce*: Sestrojíme trojúhelník $A'AB$ určený stranami $AA' = a - b$, $AB = c$ a úhlem $\sphericalangle A'AB = \alpha' = 2R - \alpha$. Jelikož trojúhelník $A'BC$ je rovnoramenný, protíná osa o jeho základny $A'B$ přímkou AA' ve vrcholu C trojúhelníka ABC, pokud tento průsečík existuje a padne dovnitř polopřímky opačné k polopřímce AA'.

C. *Důkaz*: Bod C leží uvnitř polopřímky opačné k polopřímce AA', a proto úhel $\sphericalangle CAB = 2R - (2R - \alpha) = \alpha$. Dále je $CA = CA' - AA' = a - (a - b) = b$, $AB = c$. Trojúhelník ABC má tedy požadované vlastnosti.

D. *Diskuse*: Aby bylo možno trojúhelník ABC sestrojit, je nutno volit úhel $\alpha < 2R$ a rozdíl $a - b < c$. Je-li totiž $\alpha < 2R$, je i $2R - \alpha < 2R$, takže trojúhelník $AA'B$ lze sestrojit; rovněž lze sestrojit osu o strany $A'B$, která protne polopřímku opačnou k polopřímce AA' ve vnitřním bodě C. (Kdyby protala osa o úsečku AA' ve vnitřním bodě X, musel by platit vztah $a - b = AA' = A'X + XA = XA + XB > AB = c$, což je ve sporu s předpokladem, že $a - b < c$; také bod A neleží na ose o, protože $c = AB \neq AA' = a - b$. Na polopřímce opačné k polopřímce $A'A$ uvažovaný průsečík také ležet nemůže, neboť $\sphericalangle AA'B$ je ostrý.) Úloha má vždy jedno řešení.

Závěr: Trojúhelník ABC lze sestrojit vždy, je-li $\alpha < 2R$ a $a - b < c$. Úloha má jedno řešení.

158. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:
a) $b = 4$ cm, $c = 10$ cm, $t_c = 7$ cm; b) $b = 5$ cm, $c = 7$ cm, $v_a = 4$ cm; c) $b = 5$ cm, $v_c = 3$ cm, $\gamma = 75°$; d) $\gamma = 75°$, $v_a = 3$ cm, $v_b = 2$ cm; e) $a = 8$ cm, $b = 4$ cm, $t_c = 5$ cm; f) $\varrho = 2$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$; g) $a = 6$ cm, $v_b = 4$ cm, $r = 5$ cm.

159. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:
a) a, β, v_a; b) a, b, v_a; *c) $c, \alpha < R, t_a$; d) a, v_a, t_a. Proveďte diskusi.

160. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:
a) $c, \beta, a + b$; *b) $b, \beta, a + c$; c) $a + b + c, \alpha, v_b$. Proveďte diskusi.

161. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC o základně AB, je-li dáno: $b + v_c = 6$ cm, $\sphericalangle ACB = \gamma = 75°$.

162. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB a rameny AC, BC, je-li dáno a) $b \equiv AC, v_b$; b) obvod $2s$, v_c (výška na AB); c) v_c, t_a; d) $c \equiv AB$, ϱ (ϱ poloměr kružnice trojúhelníku ABC vepsané). Proveďte diskusi.

163. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC, je-li dáno:
a) a, ϱ; b) $a + b + c = 2s, \beta$; c) $c - a > 0, \beta < R$; d) c, t_b. Proveďte diskusi.

164. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník rovnoramenný ABC, je-li dán jeho obvod $2s$.

165. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, je-li dáno: a) v; b) $a - v$. Proveďte diskusi.

166. Sestrojte obdélník $ABCD$, je-li dáno: $a + b = 5$ cm, $\omega = 150°$. ($\omega = \sphericalangle ASB$, kde S je střed obdélníka.)

167. Sestrojte obdélník $ABCD$, je-li dáno: a) a, $b + e$; b) o, e. [$a = AB$, $b = BC$, $e = AC$, $o = 2(a + b)$.] Proveďte diskusi.

***168.** Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dáno: $e + f = 6$ cm, $\alpha = 75°$. ($e = AC$, $f = BD$, $\alpha = \sphericalangle BAD$.)

169. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dáno: a) v, $e = 2v$; b) a, $e + f$; c) f, ϱ; d) $e - a > 0$, α. ($e = AC$, $f = BD$, $\alpha = \sphericalangle BAD$, ϱ poloměr vepsané kružnice.)

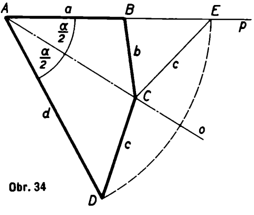
170. Sestrojte kosodélník $ABCD$, je-li dáno: $f = 5$ cm, $\gamma = 75°$, $\omega = 60°$. ($f = BD$, $\gamma = \sphericalangle ACD$, $\omega = \sphericalangle ABS$, kde S je střed kosodélníka.)

171. Sestrojte kosodélník $ABCD$, je-li dáno: a) a, v_a, v_b; b) α, v_a, v_b ($\alpha < R$). ($a = AB$, $\alpha = \sphericalangle BAD$, v_a je výška na stranu AB, v_b je výška na stranu BD.) Proveďte diskusi.

172. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, je-li dáno: a) $a + c = 8$ cm, $d = 3$ cm, $f = 5$ cm, $\omega = 120°$; b) $a + c = 8$ cm, $b = 3{,}5$ cm, $e + f = 9{,}3$ cm, $\omega = 120°$. ($a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $e = AC$, $f = BD$, $\omega = \sphericalangle AUB$, kde U je průsečík úhlopříček lichoběžníka.)

173. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, je-li dáno: a) a, b, c, $\beta < R$; b) a, b, e, $\alpha < R$; c) a, e, f, v; d) a, b, c, d ($a > c$); e) $a - c > 0$, b, d, e; f) a, c, α, β ($a > c$). ($a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $e = AC$, $f = BD$, $\alpha = \sphericalangle BAD$, $\beta = \sphericalangle ABC$.) Proveďte diskusi.

174. Jsou dány úsečky délky a, b, c, d, přičemž $d > a$. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$ tak, aby měl délky stran $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ a úhlopříčka AC aby půlila úhel $\sphericalangle DAB$.



Obr. 34

Řešení (obr. 34)

A. *Rozbor*: Předpokládejme, že jsme úlohu vyřešili. Sestrojíme-li na polopřímce AB bod E tak, že $AE = d$ a sestrojíme-li v jedné z obou polorovin s hranicí AB bod C tak, aby bylo $BC = b$, $EC = c$, je $\triangle AEC \cong \triangle ADC$, takže $\sphericalangle CAD = \sphericalangle EAC$.

B. *Konstrukce*: Zvolme na přímce p úsečku $AB = a$ a na polopřímce AB sestrojme bod E tak, aby $AE = d$; jelikož je $d > a$, leží bod E na polopřímce AB za bodem B. Dále sestrojme nad úsečkou BE trojúhelník BEC tak, aby bylo $BC = b$, $EC = c$; potom sestrojme $\triangle ADC \cong$ $\cong \triangle AEC$, aby vrcholy D, E ležely v opačných polorovinách s hranicí AC. Čtyřúhelník $ABCD$ je hledaným čtyřúhelníkem.

C. *Důkaz*: Z konstrukce plyne, že $AB = a$, $BC = b$; jelikož $\triangle AEC \cong$ $\cong \triangle ADC$, přičemž body D, E leží v opačných polorovinách s hranicí AC, je $CD = CE = c$, $AD = AE = d$ a přímka AC půlí úhel BAD, neboť $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$. Čtyřúhelník $ABCD$ má tedy požadované vlastnosti.

D. *Diskuse*: Úloha bude mít řešení tehdy, bude-li existovat trojúhelník BEC, to jest, budou-li mezi délkami jeho stran platit známé nerovnosti a budou-li platit vztahy $\sphericalangle BCA + \sphericalangle ACD \neq 2R$, $\sphericalangle CAB +$ $+ \sphericalangle CAD \neq 2R$; přitom čtyřúhelník $ABCD$ nemusí být vypuklý. Poznámka: Úlohu lze řešit též pomocí osové souměrnosti (viz kapitolu Shodnost přemístěním).

175. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno:

a) $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm, $d = 2$ cm, $\alpha = 60°$; b) $a = 2{,}5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 3{,}5$ cm, $\beta = 120°$, $\gamma = 75°$; c) $a = 2$ cm, $b = 2{,}5$ cm, $c = 4$ cm, $\alpha = 135°$, $\beta = 90°$; d) $a = 4{,}5$ cm, $b = 3{,}2$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 150°$.

176. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno: a) $a, b, c, d, e = AC$; b) $a, e =$ $= AC, f = BD, \alpha < R, \beta < R$. Proveďte diskusi.

177. Sestrojte deltoid $ABCD$, znáte-li $a + b, e = AC, \alpha = \sphericalangle BAD$. ($AC$ půlí úhly $\sphericalangle BAD$ a $\sphericalangle BCD$.)

178. Sestrojte tětivový čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno:

a) $a = 6$ cm, $c = 2$ cm, $\alpha = 60°$, $r = 4$ cm (r je poloměr kružnice čtyřúhelníku opsané); b) $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $c = 2$ cm, $\beta = 120°$; c) $a = 5$ cm, $\alpha = 45°$, $e = AC = 5{,}3$ cm, $f = BD = 4$ cm.

***179.** Protínají-li se osy vnitřních úhlů různoběžníka ve čtyřech různých bodech, pak tyto body jsou vrcholy tětivového čtyřúhelníka. Dokažte to.

***180.** Sestrojte tětivový čtyřúhelník, je-li dáno $e = AC$, $f = BD$, φ, r. (r je poloměr kružnice čtyřúhelníku opsané, φ úhel jeho úhlopříček.)

181. Sestrojte tečnový čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno: a) $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 7$ cm, $\alpha = 60°$; b) $a = 5$ cm, $\alpha = 60°$, $\gamma = 105°$, $\varrho = 1{,}5$ cm (ϱ je poloměr kružnice čtyřúhelníku vepsané); c) $a = 4{,}5$ cm, $b = 5{,}3$ cm, $\beta = 75°$, $\varrho = 1{,}5$ cm.

182. Sestrojte tečnový čtyřúhelník, je-li dáno $a, b, c, e = AC$. Proveďte diskusi.

183. Dokažte, že úhly, pod kterými vidíme protější strany tečného čtyřúhelníka ze středu vepsané kružnice, jsou výplňkové.

5. OPAKOVÁNÍ

184. Je dán trojúhelník ABC, který má úhel $\sphericalangle ACB$ pravý nebo tupý. Dokažte, že pata P kolmice k vedené vrcholem C na přímku AB leží uvnitř úsečky AB.

185. Je dán trojúhelník ABC. Uvnitř strany AB zvolte bod X, uvnitř strany BC bod Y a dokažte, že úsečky AY, CX mají společný bod.

***186.** Je dán obdélník $ABCD$ tak, že $AB < BC$. Uvnitř strany AB zvolte bod X a na přímce BD najděte bod Y tak, aby platilo $XB = XY$. Dokažte, že bod Y je vnitřním bodem úsečky BD.

187. Vnitřní úhly trojúhelníka ABC jsou α, β, γ. Určete vnitřní úhly trojúhelníka, jehož strany tvoří osy vnějších úhlů trojúhelníka ABC.

188. Je dána přímka p a dva body M, N ležící uvnitř jedné poloroviny s hranicí p. Označte Q průsečík přímek p a MN; který bod X přímky p má rozdíl $|XM - XN|$ nejmenší?

189. $ABCD$ je čtverec, jehož úhlopříčky se protínají v bodě S. Uvnitř úsečky SD zvolte bod P, potom k přímce AP veďte kolmici k bodem B a její průsečík s úhlopříčkou AC označte Q. Dokažte, že je $\triangle ABP \cong \triangle BCQ$.

190. Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Vrcholem A jsou vedeny úhlopříčky AE, AC, které protínají úhlopříčku BF v bodech P a Q. Dokažte, že platí $BQ = QP = PF$.

191. Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$.
a) Dokažte, že jeho úhlopříčky jsou stejně dlouhé.
b) Dokažte, že přímka $AB \parallel EC$.

192. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a bod P ležící vně kružnice k. Z bodu P jsou vedeny ke kružnici k tečny t_1, t_2, jejichž dotykové body jsou T_1, T_2. Uvnitř menšího oblouku T_1T_2 je zvolen bod T_3, jímž je vedena ke kružnici k tečna t_3, která protíná tečny t_1, t_2 v bodech M, N. Dokažte, že platí vztah $2\alpha + \beta = 2R$, je-li $\alpha = \sphericalangle MSN$, $\beta = \sphericalangle MPN$. Co z toho plyne pro úhel $\sphericalangle NSM$, jestliže bod T_3 mění svou polohu na oblouku T_1T_2?

***193.** Dvě kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$ mají vnější dotyk v bodě T. Tímto bodem veďte přímku a, která protíná kružnici k_1 v bodě $A \not\equiv T$ a kružnici k_2 v bodě $B \not\equiv T$. Dokažte, že tečny t_1, t_2 vedené ke kružnicím k_1, k_2 v bodech A, B jsou navzájem rovnoběžné.

194. Vnitřní úhly čtyřúhelníka $ABCD$ mají velikosti v poměru $n : (n + 1) : : (n + 2) : (n + 3)$, kde n je přirozené číslo. Dokažte, že čtyřúhelník je lichoběžníkem.

195. Body A, B rozdělují kružnici $k \equiv (S; r)$ na dva oblouky, jejichž délky jsou v poměru $1 : 4$. Vypočítejte obsahy kruhových výsečí, které těmto obloukům přísluší, je-li poloměr $r = 5$ cm.

196. Dvě soustředné kružnice k_1, k_2 mají délky $d_1 = 20\pi$ cm a $d_2 = 16\pi$ cm. Vypočítejte obsah mezikruží omezeného těmito kružnicemi.

197. Určete poloměry r_1, r_2 kružnic k_1, k_2, je-li rozdíl délek těchto kružnic udán číslem m a poměr velikostí jejich poloměrů číslem p ($m > 0$, $p > 0$, $r_1 > r_2$).

198. Mezikruží omezené kružnicemi k_1, k_2 se má rozdělit soustřednou kružnicí k tak, aby obsah mezikruží byl touto kružnicí dělen v poměru $1 : 2$. Vypočítejte poloměr r kružnice k na základě poloměrů r_1, r_2 kružnic k_1, k_2, je-li $r_1 > r_2$.

199. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a. Nad průměrem BD je sestrojena půlkružnice jdoucí bodem C a okolo bodu A je opsána čtvrtkružnice poloměrem $r = a$ tak, že leží až na body D, B uvnitř daného čtverce. Vypočítejte obsah útvaru U omezeného polokružnicí a čtvrtkružnicí.

200. Tři shodné kružnice o poloměru r mají tu vlastnost, že každá z nich prochází středy obou kružnic zbývajících. Vypočítejte obsah společné části všech tří kružnic pomocí čísla r. [Návod: Trojúhelník $S_1S_2S_3$, kde S_1, S_2, S_3 jsou středy uvažovaných kružnic, je rovnostranný a má obsah $P = \frac{r^2}{4}\sqrt{3}$.]

***201.** Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož úhel $\alpha = 60°$ a strana AC má délku 1. Nad průměry AC, BC, AB jsou sestrojeny po řadě polokružnice k_1, k_2, k_3 tak, že leží v úhlu $\sphericalangle ACB$. Vypočítejte obsah útvaru omezeného polokružnicí k_3 a oblouky polokružnic k_1, k_2, které leží v polorovině ABX, kde X je vnitřní bod polokružnice k_3. [Návod: Strany trojúhelníka ABC mají délky $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$, $AC = 1$.]

202. Jak velký je obvodový úhel nad obloukem kružnice, jehož délka se rovná poloměru této kružnice?

203. Vrcholy trojúhelníka ABC dělí kružnici tomuto trojúhelníku opsanou na tři oblouky, jejichž délky jsou v poměru $11 : 12 : 13$. Určete vnitřní úhly trojúhelníka ABC.

***204.** Jsou dány dvě různé rovnoběžky a, b a přímka k kolmá k těmto rovnoběžkám. Označte A průsečík přímky k s přímkou a, B průsečík přímky k

s přímkou b, S střed úsečky AB a M bod ležící na polopřímce SA za bodem A. Bodem M veďte přímku p tak, aby protala přímku a v bodě X, přímku b v bodě Y a trojúhelník XYS byl pravoúhlý. (Opište kružnici nad průměrem AB.)

205. Jsou dány dvě různé rovnoběžky a, b. Na přímce a zvolte bod A, na přímce b bod B a určete geometrické místo středů S všech rovnoběžníků $ABCD$, které mají vrchol C na přímce b a vrchol D na přímce a.

206. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a její tětiva AB. Určete geometrické místo středů O všech vepsaných kružnic trojúhelníkům ABX, jestliže bod X probíhá kružnicí k. [Návod: Mají-li trojúhelníky ABX při vrcholu X úhly γ, mají trojúhelníky ABO při vrcholu O úhly $\mathrm{R} + \dfrac{\gamma}{2}$; O je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABX.]

207. Jsou dány tři shodné kružnice k_1, k_2, k_3, které se navzájem dotýkají vně. Sestrojte kružnici k tak, aby se dotýkala všech tří kružnic.

***208.** Jsou dány dvě kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$. Sestrojte kružnici k tak, aby měla daný poloměr r a půlila kružnice k_1, k_2.

209. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a - b = 1$ cm, $\gamma = 60°$, $c = 4$ cm.

***210.** Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a) a, t_a, t_b; b) a, t_a, r. Proveďte diskusi.

***211.** Je dán rovnostranný trojúhelník ABC, jehož strana má délku a a úsečka délku d. Uvnitř strany AC najděte bod P, uvnitř strany BC bod Q tak, aby body P, Q půlily obvod trojúhelníka ABC a úsečka $PQ = d$. Proveďte diskusi vzhledem k délce d.

212. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC, je-li dáno t_b, t_c; $\sphericalangle BCA = \mathrm{R}$. Proveďte diskusi.

213. Je dána přímka p a bod S, který neleží na přímce p. Sestrojte pravidelný šestiúhelník tak, aby bod S byl jeho středem a jedna jeho strana ležela v přímce p.

214. Obdélník $ABCD$ má obvod o. Určete jeho obsah P, je-li vzdálenost středu S tohoto obdélníka od přímky AB o n větší než od přímky BC. Též pro $o = 52$ cm, $n = 3$ cm.

215. Vypočítejte obsah kosočtverce $ABCD$, jehož strana má délku a a úhel $\sphericalangle BAD = \alpha = 30°$.

216. Základny rovnoramenného lichoběžníku mají délky v poměru $5 : 3$, ramena mají délku $b = 5$ cm a výška lichoběžníka $v = 4{,}8$ cm. Vypočítejte jeho obvod a obsah a potom lichoběžník sestrojte.

217. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, je-li dáno $AB = a$, $CD =$

$= c$, $AC = e$, přičemž $a > c$. [Návod: Veďte výšku v_c trojúhelníka ABC a její patu označte E; úsečka AE má délku $\frac{a + c}{2}$.]

***218.** Sestrojte lichoběžník $ABCD$, je-li dáno $a + c$, b, d, v.

219. Lichoběžník $ABCD$ má základny $AB = a$, $CD = c$ a výšku v. Dokažte, že obsah trojúhelníka ASD, kde S je střed ramena BC, se rovná polovině obsahu lichoběžníka $ABCD$.

220. Vnější společné tečny dvou kružnic $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$ se dotýkají těchto kružnic v bodech T_1, T_1', T_2, T_2'. Dokažte, že čtyřúhelník $T_1T_1'T_2'T_2$ je tětivový.

6. SHODNOST PŘEMÍSTĚNÍM
(osová a středová souměrnost, otáčení a posouvání)

221. Je dán lichoběžník $ABCD$, jehož základny jsou AB a CD. Sestrojte k němu lichoběžník osově souměrný, je-li v této souměrnosti přiřazen vrcholu A střed A' strany BC.

222. V soustavě souřadnic Pxy je dán trojúhelník ABC [$A \equiv (0; 1)$, $B \equiv (5; 3)$, $C \equiv (3; -2)$]. Sestrojte k němu trojúhelník $A'B'C'$ souměrně sdružený podle: a) osy x; b) osy y.

223. V soustavě souřadnic Pxy je dán bod $Q \equiv (a_1; a_2)$. Jaké souřadnice má bod Q', který je souměrně sdružený k bodu Q podle přímky o půlící prvý a třetí kvadrant.

224. V soustavě souřadnic Pxy je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ [$S \equiv (2; 3)$; $r = 3$]. Sestrojte kružnici k' souměrně sdruženou ke kružnici k podle: a) osy x; b) osy y; c) přímky o, která půlí druhý a čtvrtý kvadrant.

225. Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Sestrojte k němu šestiúhelník souměrně sdružený podle: a) přímky AE; b) přímky FC.

226. Kolik os souměrnosti má: a) pravidelný šestiúhelník; b) čtverec; c) obdélník; d) rovnostranný trojúhelník; e) rovnoramenný trojúhelník; f) kosočtverec; g) kružnice; h) přímka; i) úsečka?
(Útvar U má osu souměrnosti p tehdy, jestliže útvar U' sdružený k útvaru U podle osy p s útvarem U splyne; někdy se též říká, že útvar U se v souměrnosti s osou p na sebe zobrazuje.)

227. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a přímka p, která je: a) nesečnou kružnice k; b) prochází středem kružnice k. Existuje taková přímka, podle které je souměrná kružnice k i přímka p?

228. V kružnici $k \equiv (S; r)$ veďte vodorovný průměr AB a přímku $p \| AB$ tak, aby kružnici k protínala v bodech P, Q. Dokažte, že trojúhelníky APB a AQB jsou shodné.

229. Je dán oblouk kružnice, jehož střed S není znám. Určete S.

230. Jsou dány dvě různoběžky a, b a bod P, který neleží na žádné z daných různoběžek. Bodem P veďte přímku p tak, aby svírala s oběma různoběžkami stejné úhly.

231. Jsou dány dva body A, B, které přímka p odděluje. Sestrojte dutý úhel tak, aby jeho ramena procházela body A, B a přímka p byla jeho osou. Proveďte diskusi řešitelnosti této úlohy.

232. V soustavě souřadnic Pxy jsou dány kružnice k_1 a k_2. Kružnice k_1 má střed $S_1 \equiv (0; 3)$ a poloměr $r_1 = 2$ a kružnice k_2 střed $S_2 \equiv (3; 0)$ a poloměr $r_2 = 4$. Sestrojte úsečku AB kolmou k ose x tak, aby osou x byla půlena, bod A aby ležel na k_1 a bod B na k_2.

233. Sestrojte dráhu kulečníkové koule, která dospěje z polohy A po odrazu od mantinelu do polohy B; $A \not\equiv B$.

234. V soustavě souřadnic Pxy je dán bod $A \equiv (3; 2)$. Sestrojte na ose x bod Q tak, aby lomená čára PQA měla délku $d = 8$ cm.

235. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, je-li dána kružnice k tomuto trojúhelníku vepsaná a bod M jedné jeho strany. (Bod M neleží na kružnici k.)

***236.** V soustavě souřadnic Pxy je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a bod $T \equiv (0; -1\frac{1}{2})$. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC tak, aby bod T byl jeho těžištěm, základna AB byla rovnoběžná s přímkou p půlící druhý a čtvrtý kvadrant, vrchol A aby ležel v ose x a vrchol B na kružnici k; $S \equiv \left(2; -2\frac{1}{2}\right)$, $r = 1\frac{1}{2}$. [Návod: Uvažujte souměrnost s osou $o \perp p$.]

237. V soustavě souřadnic Pxy jsou dány kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$ a přímka $p \equiv x$. Sestrojte kosočtverec $ABCD$ tak, aby měl vrchol A na kružnici k_1, vrchol C na kružnici k_2, vrcholy B a D na přímce p, přičemž $BD = u_1 = 2\frac{1}{2}$; $S_1 \equiv \left(0; 2\frac{1}{2}\right)$, $S_2 \equiv \left(1\frac{1}{2}; -3\right)$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1\frac{1}{2}$. [Návod: Uvažujte souměrnost kosočtverce podle přímky p.]

***238.** Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a, b, \alpha - \beta$, přičemž $\alpha > \beta$, $a > b$. [Návod: Uvažujte souměrnost, jejíž osou je osa úsečky AB.]

***239.** Sestrojte lichoběžník $ABCD$ o základnách AB, CD, je-li dáno: $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ a rozdíl $\alpha - \beta = \varepsilon$, kde $\alpha = \sphericalangle DAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$.

***240.** V soustavě souřadnic Pxy jsou dány dva body $A \equiv (a; 0)$, $B \equiv (b; 0)$, přičemž je $a > 0$, $b > 0$, $b > a$. Sestrojte na ose y bod M tak, aby platil vztah $\sphericalangle PMA = \sphericalangle AMB$. Proveďte diskusi.

241. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Dokažte, že součet vzdáleností libovolného bodu L, který leží uvnitř úsečky AB od přímek AC, BC má konstantní hodnotu. [Návod: Použijte osové souměrnosti s osou AB.]

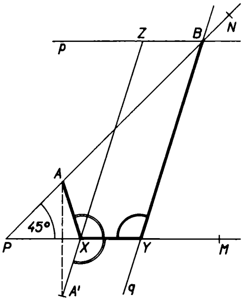
242. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Na přímce AB zvolte mimo úsečku AB bod L a dokažte, že absolutní hodnota rozdílu jeho vzdáleností od přímek AC a BC je nezávislá na volbě bodu L. Dokažte, že toto tvrzení platí i pro bod $L \equiv A$ a $L \equiv B$. [Návod: Použijte osové souměrnosti s osou AB.]

243. Je dána přímka p a dva různé body A, B, které leží v téže polorovině s hranicí p. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby jeho vrchol C ležel na přímce p a osa o úhlu $\sphericalangle ACB$ byla k přímce p kolmá.

244. Je dán dutý úhel $\sphericalangle MPN = 45°$. Uvnitř polopřímky PN jsou dány dva body A, B tak, že úsečka $PA = 4$ cm a úsečka $PB = 14$ cm. Na polopřímce PM sestrojte body X, Y tak, aby v čtyřúhelníku $AXYB$ platily tyto vztahy: $\sphericalangle AXY = \sphericalangle XYB$ a $XY = 3$ cm.

Řešení (obr. 35)

A. *Rozbor:* Předpokládejme, že body X, Y na polopřímce PM existují. Sestrojíme-li bod A' souměrně sdružený k bodu A podle osy PM, potom obrazem úhlu $\sphericalangle AXY$ v této souměrnosti je úhel $\sphericalangle A'XY$, takže platí vztah $\sphericalangle AXY = \sphericalangle A'XY$. Jelikož podle podmínky úlohy je $\sphericalangle AXY = \sphericalangle XYB$, platí též vztah $\sphericalangle A'XY = \sphericalangle XYB$, přičemž body A', B leží v opačných polorovinách s hranicí PM, takže jde zřejmě o úhly střídavé. V důsledku toho je $A'X \parallel YB$. Vedeme-li dále bodem B přímku $p \parallel PM$ a její průsečík s přímkou $A'X$ označíme Z, je čtyřúhelník $XYBZ$ rovnoběžníkem, v němž $XY = BZ$.



Obr. 35

B. *Konstrukce:* Sestrojme úhel $\sphericalangle MPN = 45°$ a na polopřímce PN body A, B. Sestrojme bod A' souměrně sdružený k bodu A podle přímky PM a bodem B veďme přímku $p \parallel PM$, na níž sestrojme úsečku BZ délky 3 cm tak, aby body M, Z ležely v opačných polorovinách s hranicí PN. Přímka ZA' protíná polopřímku PM v bodě X; přímka q jdoucí bodem B rovnoběžně s přímkou ZA' protíná polopřímku PM v bodě Y.

C. *Důkaz:* $XY = BZ = 3$ cm, neboť podle konstrukce je čtyřúhelník $XYBZ$ rovnoběžník. Jelikož $A'Z \parallel BY$, jsou úhly $\sphericalangle BYX$, $\sphericalangle YXA'$ střídavé, neboť X leží uvnitř úsečky $A'Z$. (Body B a A' leží v opačných polorovinách s hranicí PM, $BZ \parallel PM$, takže i body Z a A' leží v opačných polorovinách s hranicí PM a úsečka ZA' je proťata přímkou PM v bodě X uvnitř.) V souměrnosti podle přímky PM je $\sphericalangle A'XY = \sphericalangle AXY$, takže body X, Y splňují oba požadavky úlohy.

D. *Diskuse:* Úloha má za daných podmínek právě jedno řešení, neboť všechny operace v konstrukci prováděné jsou jednoznačné.

Závěr: Úloze vyhovuje jediná dvojice bodů X, Y ležících na polopřímce PM.

***245.** Je dána kružnice $k \equiv (S;r)$ a bod A, který leží vně kružnice k. Uvnitř úsečky AS sestrojte bod X tak, aby platil vztah $AX = XT$, kde T je dotykový bod tečny vedené z bodu X ke kružnici k.

***246.** Je dán rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož přepona AB má délku 1, a úsečka délky d. Z vnitřního bodu X úsečky AB vyslaný světelný paprsek se odrazí na odvěsně BC v bodě Y tak, že dopadne právě do středu M odvěsny AC. Sestrojte bod X tak, aby dráha $XY + YM$ paprsku měla délku d. Proveďte diskusi vzhledem k číslu d.

247. V soustavě souřadnic Pxy jsou dány body $A \equiv (0; 2)$, $B \equiv (0; 5)$ a $C \equiv (8; 0)$. Na ose x sestrojte bod X tak, aby platil vztah $\alpha = 2\beta$, kde $\alpha = \sphericalangle CXB$, $\beta = \sphericalangle PXA$.

248. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$. Sestrojte k němu středově souměrný lichoběžník podle průsečíku jeho úhlopříček.

249. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Sestrojte trojúhelník $A'B'C'$ souměrně sdružený k trojúhelníku ABC podle jeho těžiště T.

250. V soustavě souřadnic Pxy znázorněte bod $M \equiv (3; 2)$. Veďte bodem M přímku p tak, aby platil vztah $MN = MQ$, kde body N, Q jsou průsečíky přímky p s osami souřadnic. Jaké souřadnice mají body N a Q?

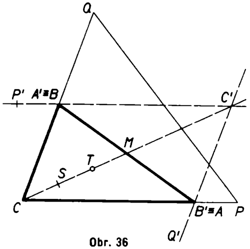
251. V soustavě souřadnic Pxy je dán bod $S \equiv (3; 2)$. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby vrchol A ležel na ose x, vrchol C na ose y a bod S byl jeho středem.

252. Je dán trojúhelník PCQ a uvnitř tohoto trojúhelníku bod T. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bod T byl jeho těžištěm, aby bod A ležel na polopřímce CP a bod B na polopřímce CQ.

Řešení (obr. 36)

A. *Rozbor:* Předpokládejme, že trojúhelník ABC o těžišti T lze sestrojit; potom polopřímka CT prochází středem M strany AB a platí vztah $TM = \frac{1}{2}\,CT = CS$, kde S je střed úsečky CT. Ve středové souměrnosti se středem M odpovídá bodu A bod $A' \equiv B$ a bodu B bod $B' \equiv A$, polopřímce CQ polopřímka $C'Q' \| CQ$ (nesouhlasně) jdoucí bodem $B' \equiv A$ a polopřímce CP polopřímka $C'P' \parallel CP$ (nesouhlasně) jdoucí bodem $A' \equiv B$.

B. *Konstrukce:* Sestrojme střed S úsečky CT a na polopřímce CT za bodem T bod M tak, aby platilo $TM = CS$. Dále sestrojme bod C' souměrně sdružený k bodu C podle středu M, veďme jím polopřímku $C'Q' \parallel CQ$ (nesouhlasně), která protne polopřímku CP v bodě A a polopřímku $C'P' \parallel CP$ (nesouhlasně), která protne polopřímku CQ v bodě B.



Obr. 36

C. *Důkaz:* Podle konstrukce je $CM = C'M$, polopřímka $C'P'$ nesouhlasně rovnoběžná s polopřímkou CP a polopřímka $C'Q'$ nesouhlasně rovnoběžná s polopřímkou CQ.
Jelikož bod T leží uvnitř trojúhelníka CPQ, leží polopřímky CP a CQ v opačných polorovinách s hranicí CT. Jelikož polopřímky $C'P'$ a CP jsou nesouhlasně rovnoběžné, leží též v opačných polorovinách s hranicí CT. Polopřímka CQ a $C'P'$ leží tedy v téže polorovině s hranicí CT a protínají se v bodě B, který leží uvnitř obou polopřímek, neboť $C'P' \not\equiv\not\equiv CT$ a polopřímky nejsou rovnoběžné.

Stejným způsobem lze ukázat, že i polopřímky CP a $C'Q'$ mají společný bod A, přičemž A, B leží v polorovinách opačných s hranicí CT. Body C, A, C', B jsou tedy vrcholy rovnoběžníka, jehož úhlopříčkou je úsečka CC' a jehož středem je bod M. Odtud plyne, že úsečka AB je druhou úhlopříčkou rovnoběžníka $CAC'B$ a je bodem M půlena. Trojúhelník ABC má tedy úsečku CM za těžnici a bod T za těžiště, neboť podle konstrukce je $CT = 2TM$. Trojúhelník ABC má žádané vlastnosti.

D. *Diskuse*: Za daných podmínek má úloha vždy jediné řešení (všechny konstrukce jsou jednoznačné).

Závěr: Lze sestrojit jediný trojúhelník ABC, jehož vrcholy A, B leží na polopřímkách CP a CQ a jehož těžištěm je bod T.

253. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a bod A, který neleží na kružnici k. Co je geometrickým místem všech bodů X', které leží na přímkách AX tak, že bod A je středem úsečky XX', probíhá-li bod X kružnici k?

254. Je dán půlkruh omezený kružnicí k a jejím průměrem PQ; uvnitř půlkruhu zvolte libovolný bod M a veďte jím přímku p tak, aby platilo $AM = BM$, kde A, B jsou průsečíky přímky p s obvodem půlkruhu. Je tato úloha vždy řešitelná?

255. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a její tečna t s dotykovým bodem T. V polorovině tS zvolte bod M a veďte jím přímku p tak, aby platilo $MN = MQ$, kde N je průsečík přímky p s tečnou t a Q průsečík přímky p s kružnicí k. Kdy má tato úloha řešení?

256. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2, které mají dva různé společné body C a M. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby jeho vrchol A ležel na kružnici k_1, vrchol B na kružnici k_2 a strana AB byla bodem M půlena. Dokažte dále, že úloha má vždy jediné řešení.

257. V soustavě souřadnic Pxy je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a body $M \equiv \left(6\frac{1}{2}; -1\right)$, $N \equiv (5; -3)$. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby vrchol A ležel na ose x, vrchol B na kružnici k, aby bod M byl středem strany AC a bod N středem strany BC; $S \equiv (2; -3)$, $r = 2$.

***258.** Jsou dány tři body A, B, S, které neleží v přímce. Sestrojte čtverec $MNPQ$ tak, aby měl střed v bodě S, aby přímka MN procházela bodem A a přímka PQ bodem B. Dokažte, že úloha má vždy právě jedno řešení.

***259.** Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána jeho strana $AB = c$, těžnice t_a a ostrý úhel φ, který svírá těžnice t_a se stranou AC. Proveďte též diskusi

260. Dokažte pomocí otáčení, že úhly s rameny kolmými jsou shodné.

261. Do kružnice $k \equiv (S; r)$ je vepsán rovnostranný trojúhelník ABC. Otočte ho okolo bodu S o 60° v kladném smyslu a vytvořte z obou poloh šesticípou hvězdu. Jak velké duté úhly svírají sousední strany hvězdy?

262. V soustavě souřadnic Pxy je dán bod $S \equiv (3; 2)$. O jaký úhel je nutno otočit osu x okolo bodu S, aby svírala s osou y úhel 30°? Proveďte.

263. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$, přímka p a úsečka délky d. Sestrojte takovou tětivu kružnice k, která je rovnoběžná s přímkou p a má délku d.

264. Nad stranami AB, AC ostroúhlého trojúhelníka ABC jsou sestrojeny čtverce $ABPQ$, $ACUT$ tak, že leží vně trojúhelníka ABC. Dokažte, že platí $CQ = BT$, $CQ \perp BT$. [Návod: Použijte otáčení se středem otáčení v bodě A.]

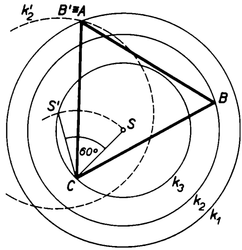
265. Nad stranami AB, AC trojúhelníka ABC jsou sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ABU, ACZ tak, že leží vně trojúhelníka ABC. Dokažte, že platí tyto vztahy: $UC = BZ$, $\sphericalangle\ BLC = 120°$, kde L je průsečík přímek CU a BZ. [Návod: užijte otáčení okolo bodu A.]

266. Do čtverce $ABCD$ vepište rovnostranný trojúhelník PQR tak, aby vrchol P ležel uvnitř strany AB a aby platilo $AP = 3PB$.

267. Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_1 r_2)$, $r_2 < r_1$ a bod A ležící na kružnici k_1. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby vrchol B ležel na kružnici k_1 a vrchol C na kružnici k_2.

268. Jsou dány tři soustředné kružnice $k_1 \equiv (S; r_1)$, $k_2 \equiv (S; r_2)$ a $k_3 \equiv (S; r_3)$, přičemž $r_1 > r_2 > r_3$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B, C ležely po řadě na kružnicích k_1, k_2, k_3.

Řešení (obr. 37)



Obr. 37

A. *Rozbor*: Na kružnici k_3 zvolme pevně bod C a předpokládejme, že trojúhelník ABC daných vlastností existuje. V otáčení se středem v bodě C a úhlem $\alpha = 60°$ je obrazem bodu B bod $B' \equiv A$ a obrazem kružnice k_2 kružnice $k'_2 \equiv (S', r_2)$, která prochází bodem $B' \equiv A$.

B. *Konstrukce*: Okolo pevně zvoleného bodu C otočme kružnici k_2 o úhel $\alpha = 60°$ třeba ve smyslu kladném do polohy k'_2. Společný bod A kružnice k_1 a k'_2 je dalším vrcholem trojúhelníka ABC. Zbývá sestrojit rovnostranný trojúhelník ABC nad stranou AC, což je úloha známá.

C. *Důkaz:* Při otáčení vrcholu B okolo bodu C v kladném smyslu je obrazem bodu B bod A. Platí tedy vztah $CB = CA$, což ukazuje, že trojúhelník ABC je rovnoramenný s rameny CB a CA; jelikož však úhel otáčení je $\alpha = 60°$, je úhel $\sphericalangle\ BCA = 60°$, z čehož plyne, že trojúhelník ABC je rovnostranný.

D. *Diskuse*: Kružnice k_1 a k'_2 musí mít společné body, aby úloha měla řešení. To nastane tehdy, platí-li vztah $r_2 - r_3 < r_1 \leqq r_2 + r_3$. Vzhledem k předpokladu $r_1 > r_2 > r_3$, je nerovnost $r_1 > r_2 - r_3$ splněna vždy, takže pro řešitelnost úlohy stačí, aby byla splněna nerovnost $r_1 \leqq r_2 + r_3$, přičemž platí-li nerovnost $r_1 < r_2 + r_3$, má úloha dvě řešení, a platí-li rovnost $r_1 = r_2 + r_3$ má jedno řešení.

Poznámka: Je zřejmé, že při pevně zvoleném bodu C bychom dostali další dva trojúhelníky popřípadě jeden trojúhelník na základě otáčení okolo bodu C o úhel $\alpha = 60°$ ve smyslu záporném. Dále je nutno uvážit, že při pohyblivém bodu C by měla úloha neomezený počet řešení. Ve všech případech však dochází ke konstrukci jen dvou druhů trojúhelníků navzájem neshodných.

Závěr: Rovnostranný trojúhelník ABC daných vlastností lze sestrojit tehdy, platí-li mezi poloměry r_1, r_2, r_3 vztah $r_1 \leqq r_2 + r_3$, přičemž $r_1 > r_2 > r_3$.

269. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$ se společným bodem A. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby vrchol B ležel na kružnici k_1 a vrchol D na kružnici k_2.

270. V rovině jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_1; r_2)$, $r_2 < r_1$ a bod M, který leží uvnitř mezikruží omezeného kružnicemi k_1 a k_2. Bodem M veďte úsečku XY tak, aby bod X ležel na kružnici k_1, bod Y na kružnici k_2 a úsečka XY měla danou délku d.

271. Zvolte různoběžník $ABCD$ a posuňte ho do polohy $A'B'C'D'$, je-li vektor posunutí 2 $\mathbf{DB}$.

272. V posouvání určeném vektorem $\mathbf{AC}$ sestrojte k libovolně zvolenému rovnoramennému lichoběžníku $ABCD$ lichoběžník $A'B'C'D'$.

273. V soustavě souřadnic Pxy je dán trojúhelník ABC, $A \equiv (2; 0)$, $B \equiv (0; 3)$, $C \equiv (3; 1)$. Posuňte ho do polohy $A'B'C'$, je-li vektor posouvání $\mathbf{PB}$; posuňte dále trojúhelník $A'B'C'$ do polohy A'' B'' C'', je-li vektor posouvání $\mathbf{PA}$. Určete vektor $\mathbf{AA''}$ velikostí a ostrým úhlem α, který svírá s kladným smyslem osy x.

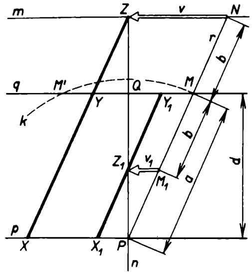
274. Jsou dány dvě různé rovnoběžky p, q, jejichž vzdálenost je d, přímka n, která je k oběma rovnoběžkám kolmá, a dvě úsečky délek a a b. Na přímkách p, q, n najděte po řadě body X, Y, Z tak, aby ležely v přímce a aby platil vztah $XY = a$, $YZ = b$. Udejte podmínky řešitelnosti jako vztah mezi čísly a, b, d.

Řešení (obr. 38)

A. *Rozbor*: Označme P, Q průsečíky přímky n s přímkami p, q. Je-li XY přímka, která splňuje požadavky úlohy, veďme bodem P přímku $r \parallel XY$ a označme M její průsečík s přímkou q. Jelikož $XPMY$ je rovnoběžník, je $XY = PM = a$. Dále sestrojme na polopřímce PM za bodem M bod N tak, aby platil vztah $MN = b$. Z rovnoběžníku $YMNZ$ plyne, že $YZ = MN = b$.

B. *Konstrukce*: Opišme kružnici $k \equiv (P; a)$ a označme M společný bod kružnice k a přímky q. Na polopřímku opačnou k polopřímce MP nanesme úsečku $MN = b$. Úsečku PN posuňme o vektor $\mathbf{NZ}$, kde bod Z je průsečíkem přímky $m \parallel p$ jdoucí bodem N s přímkou n, do polohy XZ a průsečík přímky XZ s přímkou q označme Y. X, Y, Z jsou hledané body.

C. *Důkaz*: Podle konstrukce leží bod N na polopřímce PM za bodem M. Úsečce PN odpovídá v posouvání určeném vektorem $\mathbf{NZ}$ úsečka XZ a bodu M úsečky PN bod Y úsečky XZ. Leží tedy body X, Y, Z v jedné přímce, $XY = a$, $YZ = b$, neboť podle konstrukce je $PM = a = XY$ a $MN = b = YZ$.



Obr. 38

D. *Diskuse*: Aby existoval bod M, musí platit vztah $a \geqq d$. Je-li $a < d$, nemá úloha řešení. Je-li $a = d$, $X \equiv P$, $Y \equiv Q$ a bod Z leží na polopřímce XY za bodem Y tak, že $YZ = b$. Je-li $a > d$, protne kružnice k přímku q ve dvou různých bodech M a M', což vede ke dvěma řešením. Jelikož však úsečku $MN = b$ můžeme sestrojit také tak, že leží na polopřímce MP, je možno získat ještě další dvě, popřípadě jedno řešení. Má tedy úloha nejvýše čtyři řešení.

Závěr: Body X, Y, Z, které splňují podmínky úlohy, lze najít tehdy, je-li $a \geqq d$, kdežto b může mít velikost libovolnou.

275. Jsou dány dvě různoběžky a, b a úsečka MN. Sestrojte čtverec $XYZU$ tak, aby strana $XY \parallel MN$, $XY = MN$, bod X ležel na přímce a a bod Y na přímce b.

276. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a dvě její libovolné tečny t_1, t_2, přičemž $t_1 \parallel t_2$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby vrchol A ležel na přímce t_1, vrchol B na přímce t_2 a vrchol C na kružnici k, má-li strana AB délku a.

***277.** Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno: a, b, ω. ($a = AB$, $b = BC$, $\omega = \sphericalangle ASB$, kde S je střed rovnoběžníka.)

***278.** Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno: e, f, c, α, ω. ($e = AC$, $f = BD$, $c = CD$, $\alpha = \sphericalangle BAD$, $\omega = \sphericalangle AUB$, kde U je průsečík úhlopříček.) [Návod: Užijte posunutí o vektor $\mathbf{AC}$.]

*279. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, je-li dáno: a, c, e, f. ($a = AB$, $c = CD$, $e = AC$, $f = BD$.)

*280. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ její průměr PQ, přímka p, která je nesečnou kružnice k a na ní úsečka AB. Na kružnici k najděte bod Z tak, aby přímky PZ, QZ vytínaly na přímce p úsek $XY = AB$.

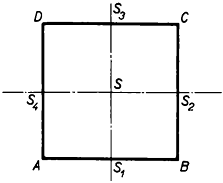
281. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a přímka p, která je sečnou kružnice k. V osové souměrnosti s osou p sestrojte obraz $k' \equiv (S'; r)$ kružnice k a dokažte, že k' je též obrazem kružnice k ve středové souměrnosti a posunutí.

282. Čtverec $ABCD$ o středu S je rozdělen středními příčkami ve čtyři navzájem shodné čtverce $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_3$, $\mathbf{U}_4$ ($\mathbf{U}_1 \equiv QBPS$, kde Q je střed strany AB a P střed strany BC). Která shodná zobrazení převádí a) čtverec $\mathbf{U}_1$ na čtverec $\mathbf{U}_2$; b) čtverec $\mathbf{U}_1$ na čtverec $\mathbf{U}_3$? [Čtverce $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_3$ mají společný jen vrchol S, čtverce $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ společnou stranu SP.] [Řešte nejprve prvních 25 příkl. z odst. „Vektory".]

$\boxed{283.}$ Určete počet shodných zobrazení, ve kterých je čtverec $ABCD$ útvarem samodružným.

Řešení (obr. 39)

Útvar $\mathbf{U}$ je ve shodném zobrazení samodružný tehdy, je-li v tomto zobrazení $\mathbf{U}' \equiv \mathbf{U}$; dvě zobrazení $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ považujeme za různá, jestliže alespoň jednomu bodu X útvaru $\mathbf{U}$ odpovídají v těchto zobrazeních dva různé body X', X'' ($X' \not\equiv X''$).



Obr. 39

Jsou tu jen tyto možnosti:

a) čtverec $ABCD$ se zobrazuje na čtverec $ABCD$; zobrazení $\mathbf{Z}_1$ ($A \to A$, $B \to B$, $C \to C$, $D \to D$) je identita;

b) čtverec $ABCD$ se zobrazuje na čtverec $BCDA$; zobrazení $\mathbf{Z}_2$($A \to B$, $B \to C$, $C \to D$, $D \to A$) je otočením o úhel $\varphi = 90°$ v kladném smyslu se středem otočení S;

c) čtverec $ABCD$ se zobrazuje na čtverec $CDAB$; zobrazení $\mathbf{Z}_3$($A \to C$, $B \to D$, $C \to A$, $D \to B$) je středová souměrnost se středem S;

d) čtverec $ABCD$ se zobrazuje na čtverec $DABC$; zobrazení $\mathbf{Z}_4$($A \to D$, $B \to A$, $C \to B$, $D \to C$) je otočením o úhel $\varphi' = 270°$ v kladném smyslu se středem otočení S;

e) čtverec $ABCD$ se zobrazuje na čtverec $DCBA$; zobrazení $\mathbf{Z}_5(A \to D, B \to C, C \to B, D \to A)$ je osová souměrnost s osou S_4S_2;

f) čtverec $ABCD$ se zobrazuje na čtverec $ADCB$; zobrazení $\mathbf{Z}_6(A \to A, B \to D, C \to C, D \to B)$ je osová souměrnost s osou AC;

g) čtverec $ABCD$ se zobrazuje na čtverec $BADC$; zobrazení $\mathbf{Z}_7(A \to B, B \to A, C \to D, D \to C)$ je osová souměrnost s osou S_1S_3;

h) čtverec $ABCD$ se zobrazuje na čtverec $CBAD$; zobrazení $\mathbf{Z}_8(A \to C, B \to B, C \to A, D \to D)$ je osová souměrnost s osou BD.

Závěr: Existuje celkem 8 shodných zobrazení, v nichž je čtverec $ABCD$ útvarem samodružným (čtyři osové souměrnosti, jedna středová souměrnost, jedna identita a dvě rotace v kladném smyslu).

284. a) Určete počet shodných zobrazení, v nichž je pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ útvarem samodružným; kolik z těchto zobrazení je osových souměrností, kolik souměrností středových a kolik rotací?
b) Řešte tuto úlohu též pro pravidelný n — úhelník.

285. Určete počet shodných zobrazení, ve kterých je kosočtverec $ABCD$ útvarem samodružným.

286. Složíte-li dvě shodná zobrazení $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, které jsou středovými souměrnostmi s různými středy S_1, S_2 dostanete zobrazení $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_1 . \mathbf{Z}_2$, které je posunutím. Ověřte si to na příkladu, v němž volíte za vzor v zobrazení $\mathbf{Z}_1$ libovolný trojúhelník.

Poznámka: Jsou-li dána v rovině dvě shodná zobrazení $\mathbf{Z}_1$ $(X \to X')$, $\mathbf{Z}_2(X' \to X'')$, pak shodné zobrazení $\mathbf{Z}_3(X \to X'')$ se nazývá složením zobrazení $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ v tomto pořadí a zapisuje se $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_1 . \mathbf{Z}_2$.

287. Složíte-li dvě shodná zobrazení $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, která jsou osovými souměrnostmi s různoběžnými osami o_1, o_2, dostanete zobrazení $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_1 . \mathbf{Z}_2$, které je otočením se středem $S \equiv o_1 . o_2$ a úhlem otočení $\varphi = 2\omega$, kde ω je úhel, který svírají osy o_1, o_2; je-li $o_1 \parallel o_2$, $o_1 \not\equiv o_2$, je zobrazení $\mathbf{Z}_3$ posunutím. Dokažte to.

288. Je-li shodné zobrazení $\mathbf{Z}_1(X \to X')$ osovou soměrností s osou o a shodné zobrazení $\mathbf{Z}_2(X' \to X'')$ posunutím s vektorem posunutí $X'X'' \parallel o$, říkáme, že zobrazení $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_1 . \mathbf{Z}_2$ je posunutým zrcadlením. Určete, zda zobrazení $\mathbf{Z}_3$ je shodností přímou či nepřímou a zda v něm existují samodružné body a samodružné přímky.

7. PODOBNOST TROJÚHELNÍKŮ

289. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Označte D patu výšky vedené z vrcholu C na stranu AB, E patu kolmice vedené z bodu D na stranu BC a F patu kolmice vedené z bodu D na stranu AC. Kolik trojúhelníků takto vzniklo? Dokažte, že jsou podobné.

290. Je dán trojúhelník ABC. Na polopřímce AB je zvolen za bodem B bod D tak, aby bylo $BD = \frac{1}{3} AB$, na polopřímce CB za bodem B bod E tak, aby bylo $BE = \frac{1}{3} BC$. Dokažte, že $DE \parallel AC$ a $DE = \frac{1}{3} AC$.

291. V rovnostranném trojúhelníku ABC je vedena středem D strany BC kolmice na stranu AB a její pata označena písmenem E. Dokažte, že platí vztah $AE = \frac{3}{4} AB$.

***292.** Je dán trojúhelník ABC. Osa o úhlu $\sphericalangle ACB$ protíná stranu AB v bodě D. Dokažte, že platí vztah $AD : AC = DB : BC$. Zdůvodněte též, že trojúhelníky ADC a DBC nejsou podobné, i když se shodují v jednom úhlu a mají úměrné dvě dvojice stran.

293. Určete délky a, b stran trojúhelníka ABC, je-li a o 4 cm delší než b, výška $v_a = 6$ cm a výška $v_b = 9$ cm.

294. Dokažte, že v trojúhelníku ABC je vzdálenost středu S kružnice trojúhelníku ABC opsané od strany BC rovna polovině vzdálenosti průsečíku V jeho výšek od vrcholu A.

295. Lichoběžník $ABCD$ má základny $AB = a$, $CD = b$, přičemž $a > c$. Střední příčka MN lichoběžníka protíná úhlopříčku AC v bodě U a úhlopříčku BD v bodě V. Dokažte, že platí $UV = \frac{a-b}{2}$.

296. Jsou dány dvě kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$. Vypočítejte vzdálenost průsečíku P jejich vnějších tečen od středu S_1, je-li $r_1 = 16$ cm, $r_2 = 6$ cm a $S_1S_2 = 30$ cm.

297. Vrcholy trojúhelníka ABC mají od přímky p po řadě vzdálenosti $d_1 = 3$ cm, $d_2 = 4$ cm, $d_3 = 8$ cm. Jak velkou vzdálenost má od přímky p těžiště T trojúhelníka ABC?

298. V kružnici $k \equiv (S; r)$ je vedena tětiva AB, která je bodem M rozdělena ve dvě části $AM = a = 16{,}2$ cm a $BM = b = 9{,}8$ cm. Jakou délku má tětiva kružnice k, která je bodem M půlena?

299. Dokažte, že platí vztah $s_1 : v_1 = s_2 : v_2$, jsou-li trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a

$A_2B_2C_2$ podobné. (s_1, s_2 jsou strany těchto trojúhelníků ležící proti stejným úhlům, v_1, v_2 výšky, které těmto stranám přísluší.)

300. V trojúhelníku ABC, jehož strana AB má délku 25 mm, je sestrojena příčka p rovnoběžná se stranou AB tak, že její vzdálenost od strany AB je $d = 5$ mm. Vypočítejte výšku v_c trojúhelníka ABC, má-li úsek DE příčky p ležící uvnitř trojúhelníka ABC délku 18 mm.

$\boxed{\textbf{301.}}$ Do rovnostranného trojúhelníka ABC, jehož strana má délku a, je vepsán čtverec. Vypočítejte délku strany čtverce.

Řešení (obr. 40)

Jelikož $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$, kde $A'B' = x$ je strana vepsaného čtverce, platí vztah $a : x = \frac{a}{2}\sqrt{3} : \left(\frac{a}{2}\sqrt{3} - x\right)$, který postupně upravujeme takto: $a\left(\frac{a}{2}\sqrt{3} - x\right) = \frac{1}{2}ax\sqrt{3}$,

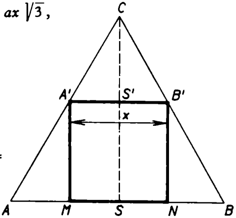
$$\frac{a}{2}\sqrt{3} - x = \frac{1}{2}x\sqrt{3},$$

$$a\sqrt{3} - 2x = x\sqrt{3},$$

$$a\sqrt{3} = x(2 + \sqrt{3}),$$

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} =$$

$$= a(2\sqrt{3} - 3).$$



Obr. 40

Závěr: Strana čtverce vepsaného rovnostrannému trojúhelníku ABC má délku $x = a(2\sqrt{3} - 3)$.

302. Do rovnoramenného trojúhelníka ABC o základě $AB = a$ a výšce $CD = v_c$ je vepsán obdélník $MNPQ$ o rozměrech $MN = p$, $PQ = q$ tak, že úsečka MN leží uvnitř strany AB. Dokažte, že platí vztah $\frac{p}{a} + \frac{q}{v_c} = 1$.

303. Dokažte, že obvody dvou podobných trojúhelníků mají týž poměr, jako délky stran těchto trojúhelníků, ležící proti stejným úhlům.

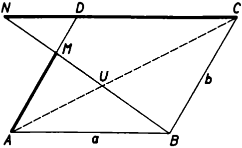
304. $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$. Vypočítejte délky stran trojúhelníka $A_1B_1C_1$, je-li jeho obvod $o = 100$ cm, $A_2B_2 = c_2 = 18$ cm, $B_2C_2 = a_2 = 8$ cm, $C_2A_2 = b_2 = 14$ cm.

305. Dokažte, že platí $P_1 : P_2 = s_1^2 : s_2^2$, kde P_1, P_2 jsou obsahy dvou podobných trojúhelníků a s_1, s_2 délky odpovídajících stran těchto trojúhelníků, které leží proti úhlům sobě rovným.

306. V rovnostranném trojúhelníku ABC, jehož strana má délku a, je vedena příčka $p \parallel AB$ tak, že obsah trojúhelníka půlí. Vypočítejte úsek této příčky ležící uvnitř trojúhelníka ABC.

307. Jsou dány dva rovnostranné trojúhelníky $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, mezi jejichž obsahy P_1, P_2 platí vztah $P_2 = \frac{1}{3} P_1$. Vypočítejte obvod trojúhelníka $A_2B_2C_2$, je-li $A_1B_1 = a$.

308. Je dán kosoúhlý rovnoběžník $ABCD$, jehož strana AB má délku a a strana BC délku b. Určete průsečík N přímek BM a CD, kde M je vnitřní bod strany AD, a dokažte, že platí $AM \,.\, CN = ab$. (Součin $AM \,.\, CN$ má hodnotu nezávislou na poloze bodu M uvnitř strany AD.)



Obr. 41

Řešení (obr. 41)

Bod M neleží na přímce AB, takže přímka BM je různoběžná s přímkou AB a tedy různoběžná i s přímkou CD, neboť $CD \parallel AB$. Průsečík N přímek BM a CD existuje a leží na polopřímce CD za bodem D. (Rovnoběžník $ABCD$ je vypuklý a leží tedy v úhlu $\sphericalangle ABC$; v tomto úhlu leží i polopřímka BM, neboť M je vnitřní bod strany AD.) Tato polopřímka musí obsahovat bod U, který leží mezi body A, C úhlu $\sphericalangle ABC$, z čehož plyne, že obvod trojúhelníka ACD je proťat polopřímkou BC ve dvou bodech U a M; v důsledku toho nemůže polopřímka BM protnout stranu DC trojúhelníka ACD uvnitř (věta Paschova). Protíná tedy polopřímku CD, která leží také v úhlu ABC v bodě N, který leží za bodem D. $\triangle BCN \sim \triangle MDN$ (u u), v důsledku čehož platí vztah $CN : DN = b : (b - AM)$, přičemž $b > AM$. Tento vztah upravujeme takto: $b \,.\, CN - AM \,.\, CN = b \,.\, DN$, $AM \,.\, CN = b \,.\, (CN - DN)$, přičemž $CN - DN = a$. Je tedy $AM \,.\, CN = ab$.

Závěr: Součin $AM \,.\, CN = ab$; je tedy jeho hodnota nezávislá na poloze bodu M uvnitř úsečky AD.

309. Je dán obdélník $ABCD$. Na přímku AE, kde E je střed strany DC, je vedena bodem D kolmice, která protne přímku AB v bodě F. V jakém poměru dělí bod F délku strany AB? Určete podmínku řešitelnosti této úlohy.

310. Přímka a protíná přímky p_1, p_2, p_3, které jsou navzájem rovnoběžné po řadě v bodech A_1, A_2, A_3, přímka b protíná tyto rovnoběžky po řadě v bodech B_1, B_2, B_3. Jsou-li přímky a, b navzájem různoběžné, dokažte, že platí $\dfrac{A_1A_2}{A_1A_3} = \dfrac{A_2B_2 - A_1B_1}{A_3B_3 - A_1B_1}$.

311. Trojúhelník ABC rozdělte příčkami rovnoběžnými se stranou AB na tři části, které mají sobě rovné obsahy. Jakou délku mají úseky na těchto příčkách ležící uvnitř trojúhelníka ABC?

312. Zvolte ostroúhlý trojúhleník ABC a označte A_1, B_1, C_1 paty jeho výšek v_a, v_b, v_c na stranách a, b, c. Dokažte, že trojúhelníky AB_1C_1, BA_1C_1, CB_1A_1 jsou podobné trojúhelníku ABC.
[Návod: Čtyřúhelník ABA_1B_1 je tětivový, a proto $\sphericalangle BAB_1 + \sphericalangle B_1A_1B = 2R$, $\sphericalangle ABA_1 + \sphericalangle A_1B_1A = 2R$.]

313. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Dokažte, že jeho výšky v_a, v_b, v_c jsou osami úhlů trojúhelníka $A_1B_1C_1$, kde A_1, B_1, C_1 jsou paty těchto výšek na stranách a, b, c. [Návod: Využijte výsledku úlohy č. 312.]

314. Dokažte, že platí vztah $a : b : c = \dfrac{1}{v_a} : \dfrac{1}{v_b} : \dfrac{1}{v_c}$, jsou-li a, b, c délky stran a v_a, v_b, v_c výšky trojúhelníka ABC.

$\boxed{\textbf{315.}}$ Do kruhové výseče o poloměru r je vepsána kružnice o poloměru ϱ. Dokažte, že platí vztah $\dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{r}$, kde a je délka poloviční tětivy spojující krajní body obou poloměrů výseče.

Řešení (obr. 42)

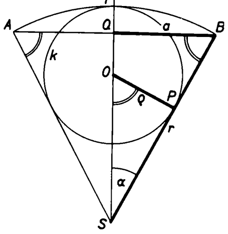
$\triangle\ SBQ \sim \triangle\ SOP$, v důsledku čehož platí vztah $r : a = (r - \varrho) : \varrho$. Upravujeme tento vztah takto:

$$\frac{r}{a} = \frac{r}{\varrho} - 1\,,$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\,,$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a} + \frac{1}{r}\,.$$

Závěr: Vztah $\dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{r}$ platí.



Obr. 42

***316.** Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC ($BC = a$, $AC = b$, $BC > AC$). Vypočítejte poloměr r kružnice k, která má střed na přeponě AB, prochází bodem A a dotýká se přímky BC. Totéž pro případ $a = 4$, $b = 3$.

***317.** Platí-li mezi délkami stran trojúhelníka ABC vztah $a^2 = b^2 + bc$, platí též vztah $\alpha = 2\beta$. Dokažte to. [Návod: Daný vztah je možno psát ve tvaru $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$, ze kterého je patrno, že $\triangle ABC \sim \triangle BDC$, kde D leží na polopřímce CA za bodem A tak, že platí $AD = c$.]

***318.** Bodem M, který leží uvnitř trojúhelníka ABC, jsou vedeny tři přímky rovnoběžně s jeho stranami. Tyto přímky rozdělují trojúhelník ABC na šest částí, z nichž tři jsou trojúhelníky, jejichž obsahy jsou P_1, P_2, P_3. Dokažte, že platí $P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3})^2$, kde P je obsah trojúhelníka ABC.

***319.** Je dán trojúhelník ABC. Dokažte, že body souměrně sdružené k průsečíku V jeho výšek podle stran a, b, c leží na kružnici, která je trojúhelníku ABC opsaná.

***320.** Je dán trojúhelník ABC; dokažte, že body souměrně sdružené s průsečíkem V jeho výšek podle středů stran a, b, c leží na kružnici k trojúhelníku ABC opsané.
[Návod: Užijte výsledku úlohy č. 319. Uvažte též, že tu jde o souměrnost podle dvou os k sobě kolmých, např. podle strany c a její osy o.]

321. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a její sečna p, která má od středu S kružnice k vzdálenost $\frac{r}{2}$. Na přímce p najděte bod X tak, aby jeho mocnost ke kružnici k byla 144, je-li poloměr $r = 16$.

***322.** V soustavě souřadnic Pxy je dán bod $M \equiv (5; 2)$. Sestrojte kružnici k, která se dotýká os souřadnic a prochází bodem M.
[Návod: Prochází-li kružnice k bodem M, prochází také bodem M', který je souměrně sdružený s bodem M podle osy úhlu os souřadnic. Kružnice k se sestrojí tak, aby procházela body M, M' a dotýkala se jedné z os souřadnic.]

***323.** V soustavě souřadnic Pxy jsou dány kružnice k_1, k_2, jejichž středy jsou $S_1 \equiv (-3; 3)$, $S_2 \equiv (2; 6)$ a poloměry $r_1 = r_2 = 2$. Sestrojte kružnici k tak, aby se dotýkala kružnic k_1, k_2 a osy x.

324. Jsou dány kružnice k_1, k_2, které se protínají v bodech P a Q. a) Dokažte, že každý bod X přímky PQ má k oběma kružnicím stejnou mocnost. (Přímka PQ je chordála obou kružnic.) b) Dokažte, že z každého bodu X přímky PQ, který nepatří úsečce PQ, lze vést k oběma kružnicím tečny XT_1, XT_2, přičemž $XT_1 = XT_2$.

325. Dokažte, že chordály tří kružnic k_1, k_2, k_3 se protínají v jednom bodě. Této vlastnosti využijte k sestrojení chordály dvou nesoustředných kružnic k_1, k_2, které nemají společné body.

326. Jsou dány nesoustředné kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$ a přímka p. Na přímce p najděte bod X tak, aby platilo $XT_1 = XT_2$, kde T_1, T_2 jsou dotykové body tečen vedených z bodu X ke kružnicím k_1, k_2.

327. Jsou dány tři kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$, $k_3 \equiv (S_3; r_3)$, které nemají společné body a žádné dvě nejsou soustředné. Sestrojte bod X tak, aby bylo $XT_1 = XT_2 = XT_3$, kde T_1, T_2, T_3 jsou dotykové body tečen vedených z bodu X ke kružnicím k_1, k_2, k_3.

***328.** Je dána kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$ a body A, B, které leží uvnitř vodorovné polopřímky S_1L tak, že $S_1A = \frac{3}{2} r_1$ a $S_1B = \frac{5}{2} r_1$. Sestrojte kružnici k tak, aby procházela body A,B a dotýkala se kružnice k_1.
[Návod: Chordála dvou kružnic k_1, k_2, které se dotýkají v bodě T, je společná tečna t těchto kružnic v bodě T. Bod Q tečny t lze získat jako společný bod chordál kružnic k_1, k a k_2, která je libovolná, kružnici k_1 protíná a prochází body A, B.]

8. VĚTY EUKLEIDOVY A VĚTA PYTHAGOROVA

329. Dokažte, že platí vztah $c_1 : c_2 = a^2 : b^2$, jsou-li a, b délky odvěsen a c_1, c_2 délky úseků vyťatých výškou v_c na přeponě c pravoúhlého trojúhelníka ABC.

330. Proměňte: a) trojúhelník, b) kosočtverec ve čtverec stejného obsahu. [Návod: Proměňte trojúhelník a kosočtverec nejprve v obdélník stejného obsahu.]

331. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a bod M, který má od středu S kružnice k vzdálenost $SM = d > r$. Z bodu M vedené tečny t_1, t_2 se dotýkají kružnice k v bodech T_1, T_2. Určete délku tětivy T_1T_2 a její vzdálenost od středu kružnice k.

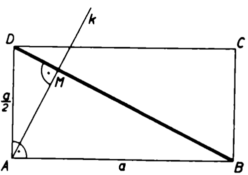
332. Bod M leží vně kružnice $k \equiv (S; r)$ a má od nejbližšího bodu kružnice k vzdálenost p. Přímka T_1T_2, která spojuje dotykové body T_1, T_2 tečen t_1, t_2 vedených z bodu M ke kružnici k, rozděluje kruh omezený kružnicí k na dvě úseče U_1, U_2. Určete výšky v_1, v_2 těchto úsečí.

$\boxed{\textbf{333.}}$ Obdélník $ABCD$ má rozměry $AB = a$ a $AD = b = \frac{a}{2}$. V jakém poměru rozděluje délku úhlopříčky BD bod M, který je patou kolmice k vedené bodem A k přímce BD?

Řešení (obr. 43)

Jelikož úhel $\sphericalangle BAD = R$, je pata kolmice k vedené bodem A k přímce BD uvnitř úsečky BD.
Podle Eukleidovy věty je $(AD)^2 = BD \,.\, DM$, $(AB)^2 = BM \,.\, DB$, takže

$$DM : BM = (AD)^2 : (AB)^2 = \frac{a^2}{4} : a^2 = 1 : 4\,.$$



Obr. 43

Závěr: Bod M rozděluje délku úhlopříčky BD obdélníka $ABCD$ v poměru $DM : BM = 1 : 4$.
Poznámka: Řešení této úlohy bude ještě jednodušší, využijete-li vztahu, který jste dokázali v úloze 329.

334. Pravoúhlý trojúhelník ABC má přeponu $c = 20$ cm a výšku $v_c = 8$ cm. Jak velké úseky vytíná výška v_c na přeponě c?

***335.** Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a její průměr AB. V bodě A sestrojte tečnu t k této kružnici a vypočítejte poloměr kružnice k_1, která se dotýká tečny t, prochází bodem B a má střed na kružnici k.

336. Je dán obdélník $ABCD$, jehož rozměry jsou $AB = a$, $BC = b$. Označte M patu kolmice k vedené bodem B k přímce AC a vypočítejte délky úseček AM, CM, BM na základě délek a, b.

337. Určete obsah obdélníka, jehož délka $a = 84$ cm, má-li jeho úhlopříčka délku o 72 cm větší než je jeho šířka.

338. Určete obsah rovnostranného trojúhelníka, má-li jeho výška velikost v.

339. Určete obsah pravoúhlého lichoběžníka ($z_1 = 66$ cm, $z_2 = 18$ cm), je-li jeho kosé rameno o 36 cm delší než rameno k základnám kolmé.

340. Vypočítejte obsah rovnoramenného lichoběžníka, jehož základny mají délky $z_1 = 22$ cm, $z_2 = 12$ cm, je-li jeho výška o 1 cm menší než délka ramena.

341. Rotační komolý kužel má poloměry podstav $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 4$ cm a výšku $v = 8$ cm. Jak velká je jeho strana?

342. V trojúhelníku ABC je $b = 97$ cm, $c = 153$ cm a $v_a = 72$ cm. Určete jeho obsah P.

343. Jakou vzdálenost od středu kružnice $k \equiv (S; r)$ má bod M, z kterého lze ke kružnici k vést tečny svírající pravý úhel? Co je geometrickým místem všech bodů M?

344. Je dána kružnice $k \equiv (S; 5\text{ cm})$ a bod M, který má od středu S kružnice k vzdálenost $d = 10$ cm. Jakou vzdálenost od středu S má přímka p, která prochází bodem M a vytíná na kružnici k tětivu délky $m = 6$ cm? Úlohu řešte též konstruktivně.

345. Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, jehož hrana podstavy má délku $a = 6$ cm, má pobočnou hranu délky $b = 9$ cm. Vypočítejte jeho tělesovou výšku v.

346. Dvě kružnice $k_1 \equiv (S_1; r)$ a $k_2 \equiv \left(S_2; \dfrac{r}{2}\right)$ mají vnější dotyk. Vypočítejte délku úseku na jejich společné tečně t mezi jejími dotykovými body T_1 a T_2.

347. Jak velký obsah má úhlopříčný řez krychlí, má-li její tělesová úhlopříčka délku u?

348. Kružnici k je opsán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$. Určete poloměr ϱ kružnice k, mají-li základny AB, CD tohoto lichoběžníka délky z_1 a z_2.

349. Okolo vrcholů A, B čtverce $ABCD$, jehož strana má délku a, jsou opsány čtvrtkružnice k_1, k_2 o poloměrech $r_1 = a$ dovnitř čtverce. Vypočítejte poloměr r kružnice k, která se dotýká obou čtvrtkružnic a přímky AB. Potom kružnici k sestrojte.

350. Nad stranami AD a BC čtverce $ABCD$, jehož strana má délku a, jsou opsány půlkružnice k_1, k_2 dovnitř čtverce. Vypočítejte poloměr r kružnice k, která se dotýká obou půlkružnic a strany AB. Potom kružnici k sestrojte.

351. Obdélník $ABCD$ má rozměry $AB = 3a$, $AD = a$. Okolo jeho vrcholů A, B jsou sestrojeny čtvrtkružnice k_1, k_2 dovnitř obdélníka. Vypočítejte poloměr r kružnice k, která se dotýká obou čtvrtkružnic a přímky CD; potom kružnici k sestrojte.

***352.** Tři shodné kružnice k_1, k_2, k_3 o poloměru r se vzájemně dotýkají. Vypočítejte poloměr r_1 kružnice k, která se dotýká všech tří daných kružnic.

353. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku $2a$. Vepište mu kružnici k a vypočítejte poloměr r kružnice k_1, která se dotýká stran AB, AD daného čtverce a kružnice k.

354. Je dána úsečka AB, jejíž střed je S. Nad průměry AB, AS, BS jsou sestrojeny půlkružnice tak, že leží v téže polorovině s hranicí AB. Vypočítejte poloměr r kružnice k, která se dotýká všech tří polokružnic.

355. Kružnici o poloměru ϱ je opsán rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož výška $v = 5\varrho$. Vypočítejte délku základny AB tohoto trojúhelníka.

***356.** Vypočítejte strany pravoúhlého trojúhelníka ABC, je-li $t_a = 10$, $t_b = 4\sqrt{10}$.

***357.** Dokažte, že platí vztah $\frac{1}{v_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$, kde a, b jsou délky odvěsen a v_c výška pravoúhlého trojúhelníka ABC.

***358.** Do čtverce $ABCD$, jehož strana má délku a, vepište rovnostranný trojúhelník tak, aby jeden jeho vrchol byl ve vrcholu C tohoto čtverce. Vypočítejte délku strany trojúhelníka.

359. Stěnové úhlopříčky kvádru $ABCDA'B'C'D'$ mají délky $AC = u_1$, $AB' = u_2$, $AD' = u_3$. Jakou délku má jeho tělesová úhlopříčka? [Návod: Tělesová úhlopříčka má délku $u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, kde a, b, c jsou rozměry kvádru.]

360. Určete stranu pravidelného osmiúhelníka na základě poloměru r kružnice k, která je tomuto osmiúhelníku opsána.

***361.** Vypočítejte stranu pravidelného osmiúhelníka na základě poloměru ϱ kružnice k, která je tomuto osmiúhelníku vepsána.

***362.** Úsečka S_1S_2 spojující střed kružnic $k_1 \equiv (S_1; r_1 = 7 \text{ cm})$, $k_2 \equiv (S_2; r_2 = 12 \text{ cm})$ má délku 15 cm. Vypočítejte délku úsečky spojující průsečíky obou kružnic a její vzdálenosti od středů obou kružnic.

363. Jakou velikost má úsečka AB $[A \equiv (x_1; y_1; z_1),\ B \equiv (x_2; y_2; z_2)]$?

364. Na mapě byla odměřena vzdálenost dvou míst A a B tak, že $AB = 4{,}2$ cm. Jak velká je skutečná vzdálenost obou míst, je-li 318 m kóta místa A a 423 m kóta bodu B. (Měřítko 1 : 50 000.)

***365.** Dokažte, že mezi délkami stran trojúhelníka ABC platí vztah $a^2 = b^2 + c^2 - bc$, je-li jeho úhel $\sphericalangle BAC = 60°$.
$\left[\text{Návod: } v_c = CD = \frac{b}{2}\sqrt{3},\ BD = c - \frac{b}{2}.\right]$

366. Vypočítejte délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníka ABC, má-li jeho přepona délku $c = 5$ cm a $\varrho = 1$ cm. (ϱ je poloměr kružnice trojúhelníku ABC vepsané.)

367. V rovnoběžníku $ABCD$ je $AB = a$, $BC = b$, $AC = e$, $BD = f$. Dokažte, že platí $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Řešení (obr. 44)

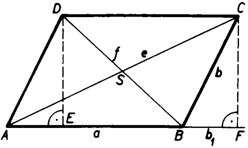
Je-li rovnoběžník $ABCD$ obdélníkem, platí podle Pythagorovy věty vztahy

$$e^2 = a^2 + b^2\,, \tag{1}$$

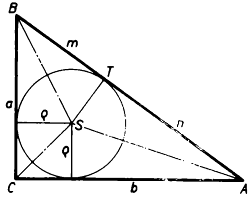
$$f^2 = a^2 + b^2\,, \tag{2}$$

takže platí též vztah $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$ vzniklý sečtením rovnic (1) a (2). Je zřejmé, že tento vztah platí i tehdy, je-li rovnoběžník $ABCD$ čtvercem.

Nechť je $ABCD$ rovnoběžník kosoúhlý, jehož úhel $\sphericalangle BAD$ je ostrý; potom pata E kolmice vedené bodem D k přímce AB leží uvnitř polopřímky AB a pata F kolmice vedené bodem C k přímce AB uvnitř polopřímky opačné k polopřímce BA. Označíme-li $BF = b_1$, je též $AE = b_1$, neboť trojúhelníky AED a BFC jsou shodné; $AF = a + b_1, AE = |a - b_1|$, $e^2 = v^2 + (a + b_1)^2$, $f^2 = v^2 + (a - b_1)^2$, kde $v = DE = CF$.



Obr. 44



Obr. 45

Sečteme-li oba uvedené vztahy, dostaneme vztah
$e^2 + f^2 = 2v^2 + 2a^2 + 2b_1^2 = 2a^2 + 2(v^2 + b_1^2) = 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2)$.
Stejným způsobem bychom dokázali, že náš vztah platí, když úhel $\sphericalangle BAD$ je tupý.

Závěr: Daný vztah platí pro každý rovnoběžník $ABCD$.

368. Přepona AB pravoúhlého trojúhelníka ABC je rozdělena dotykovým bodem T kružnice tomuto trojúhelníku vepsané na dva úseky $AT = n$, $BT = m$. Dokažte, že obsah trojúhelníka ABC je $P = m \cdot n$.

Řešení (obr. 45)

Jelikož střed S kružnice trojúhelníku ABC vepsané leží uvnitř tohoto trojúhelníka, platí vztah $P = P_1 + P_2 + P_3$, kde P_1, P_2, P_3 jsou obsahy trojúhelníků ASC, BSC, ASB. Protože $P_1 = \frac{b \cdot \varrho}{2}$, $P_2 = \frac{a \cdot \varrho}{2}$, $P_3 = \frac{c \cdot \varrho}{2}$, kde ϱ je poloměr kružnice trojúhelníku ABC vepsané, je $P = \frac{\varrho}{2}(a + b + c) = \varrho \cdot s$, kde s je poloviční obvod trojúhelníka ABC.

Dále je $AB = c = m + n$, $BC = a = m + \varrho$, $AC = b = n + \varrho$,
takže $P = \varrho(m + n + \varrho)$. (1)
Podle Pythagorovy věty je
$(m + n)^2 = (m + \varrho)^2 + (n + \varrho)^2$, což po úpravě vede ke vztahu $m \,.\, n =$
$= \varrho(m + n + \varrho)$; (2)
z (1) a (2) plyne vztah $m \,.\, n = P$, což jsme měli dokázat.

Závěr: Obsah pravoúhlého trojúhelníka ABC je $P = m \,.\, n$, kde m, n jsou délky úseků, které na přeponě AB vymezuje dotykový bod kružnice trojúhelníku ABC vepsané.

9. STEJNOLEHLOST

369. Zvolte lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD a sestrojte k němu lichoběžník stejnolehlý, je-li středem stejnolehlosti bod $U \equiv AC \,.\, BD$ a koeficient stejnolehlosti a) $k = \frac{1}{2}$; b) $k = -\frac{1}{2}$.

370. K rovnostrannému trojúhelníku ABC sestrojte stejnolehlý trojúhelník $A'B'C'$, je-li koeficient stejnolehlosti $k = -2$ a střed stejnolehlosti ve středu trojúhelníka ABC.

371. Ke čtverci $ABCD$ sestrojte stejnolehlý čtverec $A'B'C'D'$, je-li středem stejnolehlosti střed M strany BC a koeficient stejnolehlosti $k = -\frac{1}{3}$.

372. Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$, bod $V \equiv AB \,.\, ED$ a bod M' ležící uvnitř úhlu $\sphericalangle AVE$. Sestrojte pětiúhelník $A'B'C'D'E'$ tak, aby byl stejnolehlý s pětiúhelníkem $ABCDE$, středem stejnolehlosti bod V a aby bod M' ležel uvnitř strany $A'E'$.

373. Z lichoběžníka $ABCD$, jehož úhlopříčky se protínají v bodě U, vyberte trojúhelník AUD, takže vznikne nevypuklý pětiúhelník $ABCDU$. Zmenšete ho v poměru 2 : 3 užitím stejnolehlosti o středu $S \equiv B$ a užitím stejnolehlosti o středu $S_1 \equiv AD \,.\, BC$. Který způsob je vyhodnější?

374. Obdélník $ABCD$ zmenšete v poměru 1 : 2 užitím stejnolehlosti o středu S, který leží na ose úsečky AB vně obdélníka $ABCD$. Přesvědčte se, že oba obdélníky mají ještě jeden střed stejnolehlosti. V jakém vztahu jsou koeficienty obou stejnolehlostí?

375. Je dán dutý úhel $\sphericalangle AVB$ a uvnitř něho bod P. Bodem P veďte přímku p tak, aby vytínala na ramenech tohoto úhlu úseky, jejichž délky mají poměr 3 : 4. [Návod: Užijte stejnolehlosti se středem $S \equiv V$)].

376. Je dán dutý úhel $\sphericalangle AVB$ a bod M, který leží uvnitř tohoto úhlu. Bodem M veďte přímku p tak, aby platil vztah $MX : MY = 2 : 3$, kde X, Y jsou průsečíky přímky p s rameny VA a VB.

377. Je dán úhel $\sphericalangle AVB = 60°$. Uvnitř tohoto úhlu sestrojte bod M tak, aby jeho vzdálenost od vrcholu V byla $d = 5$ cm a jeho vzdálenosti od ramen VB a VA v poměru $3 : 4$.

378. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:
a) $v_a = 5$, $a : b : c = 2 : 3 : 4$;
b) α, β, t_c.

379. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$; zvolte v ní dva libovolné poloměry a sestrojte tětivu kružnice k tak, aby byla oběma poloměry rozdělena na tři stejné díly. [Návod: Užijte stejnolehlosti o středu S a osy o úhlu obou zvolených poloměrů.]

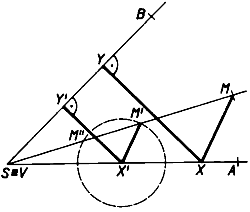
380. Jsou dány dva páry různoběžek p, q a m, n, jejichž průsečíky X, Y nejsou dostupné. Sestrojte přímku XY.

381. Je dán ostrý úhel $\sphericalangle AVB$ a jeho vnitřní bod M. Sestrojte lomenou čáru MXY tak, aby bod X ležel uvnitř polopřímky VA, bod Y uvnitř polopřímky VB a aby platily tyto vztahy: $XY \perp VB$, $XY = 2MX$.

Řešení (obr. 46)

A. *Rozbor*: Lomená čára MXY, která vyhovuje požadavkům úlohy, a lomená čára $M'X'Y'$ jsou stejnolehlé podle středu stejnolehlosti $S \equiv V$.

B. *Konstrukce*: Uvnitř polopřímky VA zvolíme libovolný bod X', sestrojíme úsečku $X'Y' \perp VB$ a kružnici $k \equiv \equiv \left(X'; \frac{1}{2} X'Y'\right)$, která protne přímku VM v bodě M'. Ve stejnolehlosti se středem V sestrojíme k lomené čáře $M'X'Y'$



Obr. 46

čáru MXY tak, aby bodu M' odpovídal bod M, bodu X' bod X a bodu Y' bod Y. Lomená čára MXY má požadované vlastnosti.

C. *Důkaz*: Podle konstrukce je $X'Y' \perp VB$, $XY \parallel X'Y'$, v důsledku čehož je $XY \perp VB$. Bod M' je průsečíkem přímky VM s kružnicí $k \equiv \equiv \left(X'; \frac{1}{2}X'Y'\right)$; platí tedy vztah $M'X' = \frac{1}{2}\ X'Y'$. Jelikož je dále

$\frac{X'Y'}{XY} = \frac{M'X'}{MX} = k$, potom s přihlédnutím ke vztahu $M'X' = \frac{1}{2}X'Y'$ je $\frac{2M'X'}{XY} = \frac{M'X'}{MX}$; odtud plyne vztah $MX = \frac{1}{2}XY$.

D. *Diskuse*: Úloha má řešení tehdy, mají-li přímka VM a kružnice k společný bod. Jelikož přímka může mít s kružnicí nejvýše dva body společné, má tato úloha nejvýše dvě řešení.

Závěr: Lomenou čáru MXY, která splňuje požadavky úlohy, lze sestrojit tehdy, existuje-li průsečík přímky VM a kružnice $k \equiv \left(X'; \frac{1}{2}X'Y'\right)$. Úloha má nejvýš dvě řešení.

382. Sečna p kružnice $k \equiv (S; r)$ rozděluje kruh, který kružnice k omezuje, na dvě části. Vepište jim čtverce tak, aby měly dva vrcholy na přímce p. [Návod: Použijte stejnolehlosti, jejíž střed půlí tětivu AB kružnice k ležící v přímce p.]

383. Kruhové výseči vepište obdélník, jehož rozměry mají poměr 3 : 2.

***384.** Je dán lichoběžník $ABCD$, jehož základny jsou AB a CD, přičemž $AB > CD$. Uvnitř úsečky AD sestrojte bod P a uvnitř úsečky BC bod Q tak, aby platily vztahy $PQ \parallel AB$, $PC \parallel AQ$. [Návod: Užijte stejnolehlosti, jejímž středem je průsečík přímky AD s přímkou BC.]

***385.** Je dán trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c. Sestrojte trojúhelník $A'BC'$ tak, aby byl stejnolehlý s trojúhelníkem ABC a platil vztah $a = a' + v_c$, kde a' je délka strany BC' a v_c výška trojúhelníka $A'BC'$ jdoucí vrcholem C'. [Návod: Využijte osové souměrnosti, v níž body C, D' tvoří pár sdružených bodů, přičemž D' je pata výšky v_c.]

***386.** Jsou dány přímky a, b, c, které procházejí bodem P, a bod $M \not\equiv P$. Bodem M veďte přímku p tak, aby protínala přímky a, b, c po řadě v bodech A,B,C a aby platil vztah $AB = 2BC$.

387. Průsečík výšek V, těžiště T a střed opsané kružnice S trojúhelníka ABC leží na jedné přímce a platí vztah $VT : TS = 2 : 1$. Dokažte to.

388. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán jeho vrchol C, průsečík výšek V a střed opsané kružnice S. [Návod: Použijte výsledku úlohy 387.]

389. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a přímka p, která je nesečnou kružnice k. V kružnici k veďte průměr $PQ \parallel p$ a na přímce p zvolte libovolný bod M. Na přímce p sestrojte body Y, X tak, aby úsečka XY byla bodem M půlena a aby přímky PX, QX se protínaly v bodě Z na kružnici k. [Návod: Užijte stejnolehlosti, jejíž střed leží v průsečíku přímky SM s kružnicí k.]

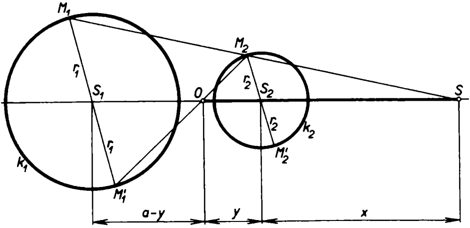
390. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a bod M, který leží uvnitř kružnice k. Bodem M veďte tětivu XY tak, aby platil vztah $XM : YM = 2 : 3$.

391. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a bod A, který leží vně kružnice k. Bodem A veďte sečnu p kružnice k tak, aby platil vztah $AY = 3AX$, kde X, Y jsou průsečíky přímky p s kružnicí k.

392. Jsou dány kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$ tak, že $r_1 \neq r_2$. Kružnici k_1 vepište trojúhelník ABC a sestrojte k němu stejnolehlý trojúhelník $A'B'C'$ tak, aby jeho vrcholy ležely na kružnici k_2. [Návod: Použijte středů stejnolehlosti obou kružnic.]

393. Jsou dány kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$ tak, že $r_1 > r_2$, a úsečka délky $a \equiv S_1S_2 > r_1 + r_2$. Vypočítejte vzdálenost středů stejnolehlosti obou kružnic.

Řešení (obr. 47)



Obr. 47

Označme O, S středy stejnolehlosti obou kružnic. Podle známé konstrukce těchto středů a na základě podmínek úlohy leží bod S na polopřímce S_1S_2 za bodem S_2 a bod O uvnitř úsečky S_1S_2, takže platí
$S_1S = a + x$, kde x je délka úsečky S_2S, $S_1S_2 = S_1O + OS_2 = a - y + y$,
kde y je délka úsečky OS_2. Hledaná vzdálenost OS má tedy velikost $x + y$. Označíme-li ještě $S_1M_1 = S_1M_1' = r_1$ a $S_2M_2 = r_2$, platí vztahy

$(a + x) : x = r_1 : r_2$, ... (1)

$(a - y) : y = r_1 : r_2$ .... (2)

Ze vztahu (1) je $x = \dfrac{ar_2}{r_1 - r_2}$, ze vztahu (2) je $y = \dfrac{ar_2}{r_1 + r_2}$, takže

$$OS = x + y = \frac{2ar_1 \cdot r_2}{r_1^2 - r_2^2}.$$

Závěr: Středy stejnolehlosti kružnic k_1, k_2 mají vzdálenost

$$OS = \frac{2ar_1r_2}{r_1^2 - r_2^2}.$$

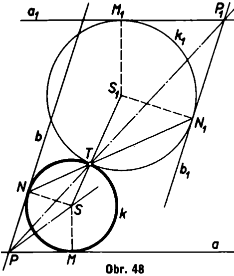
394. Z kusu plechu, který má tvar čtvrtkruhu, vyřízněte největší kruh. [Návod: Užijte stejnolehlosti, jejíž střed je v dotykovém bodě křivek omezujících kruh a čtvrtkruh.]

395. Je dán ostrý úhel $\sphericalangle AVB$ a bod Q, který leží uvnitř tohoto úhlu. Sestrojte polokružnici k tak, aby procházela bodem Q, dotýkala se polopřímky VA a měla průměr PR v přímce VB. [Návod: Užijte stejnolehlosti se středem V.]

$\boxed{\textbf{396.}}$ Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, která se nedotýká žádné z obou různoběžek. Sestrojte kružnici k tak, aby se dotýkala přímek a, b a kružnice k_1.

Řešení

A. *Rozbor* (obr. 48): Předpokládejme, že kružnice k, která má dané vlastnosti, existuje; potom kružnice k a k_1 jsou stejnolehlé a mají střed stejnolehlosti v bodě T, ve kterém se obě kružnice dotýkají. V této stejnolehlosti H odpovídá tečně a kružnice k tečna $a_1 \parallel a$ kružnice k_1, tečně b kružnice k tečna $b_1 \parallel b$ kružnice k_1 a průsečíku P přímek a, b průsečík P_1 přímek a_1, b_1.



Obr. 48

B. *Konstrukce*: Sestrojíme tečny a_1, b_1 kružnice k_1 tak, aby bylo $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ a P_1 jejich průsečík; přímka PP_1 protíná kružnici k_1 v bodě T, který je bodem dotyku kružnic k_1 a k. Sestrojení středu S kružnice k je pak zřejmé (bod S leží na přímce S_1T a na ose úhlu přímek a, b).

C. *Důkaz*: Z konstrukce je patrno, že přímky $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ jsou tečnami kružnice k_1. Ze stejnolehlosti H_1, jejímž středem je bod T a párem sdružených bodů tedy P_1, P, plyne, že tečně a_1 odpovídá přímka a, tečně b_1 přímka b, v důsledku čehož se kružnice k dotýká přímek a, b. Střed stejnolehlosti T leží na kružnici k_1, proto musí mít v tomto bodě obě kružnice dotyk. Kružnice k tedy vyhovuje podmínkám úlohy.

D. *Diskuse*: Jelikož lze ke kružnici k_1 sestrojit dvě tečny rovnoběžné s přímkou a a dvě tečny rovnoběžné s přímkou b vesměs různé, existují čtyři průsečíky $P_1 \not\equiv P$, které jsou vrcholy rovnoběžníka kružnice k_1 opsaného. Každá přímka PP_1 buď protne kružnici k_1 ve dvou bodech T, nebo nemá s kružnicí k_1 žádný společný bod. Může tedy vzniknout nejvýše osm bodů T a úloha může mít nejvýše osm řešení.

Závěr: Kružnici k dotýkající se kružnice k_1 a různoběžek a, b lze vždy sestrojit. Úloha za daných podmínek může mít nejvýše 8 řešení.

397. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a bod M, který leží uvnitř kružnice k. Bodem M veďte dvě tětivy AB, CD kružnice k tak, aby bylo $AB \perp CD$. Sestrojte všechny čtyři kružnice, které se dotýkají obou daných tětiv a kružnice k uvnitř.

398. V soustavě souřadnic Pxy je dána kružnice k_1, jejíž střed je $S \equiv (5; 3)$ a poloměr $r_1 = 1{,}5$. Sestrojte jednu z kružnic, která se dotýká kružnice k_1 a obou os x a y.

399. Je dána kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$ a přímka p, která prochází jejím středem S_1. Na přímce p zvolte bod M tak, aby ležel vně kružnice k_1 a sestrojte kružnici k, aby se dotýkala kružnice k_1 a přímky p v bodě M. Dokažte, že úloze vyhovují dvě kružnice navzájem shodné a souměrné podle přímky p.

***400.** Jsou dány dvě různoběžky p_1 a p_2 a bod M, který neleží na žádné z daných různoběžek. Sestrojte dvě různé shodné kružnice k_1 a k_2, které se dotýkají v bodě M; kružnice k_1 má dotyk s přímkou p_1 a kružnice k_2 dotyk s přímkou p_2.

***401.** Jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky a,b, jejichž vzdálenost je v. Na přímce a zvolte bod A a na přímce b bod B tak, aby jejich vzdálenost AB byla větší než vzdálenost v. Sestrojte kružnice k_1, k_2 tak, aby měly tyto vlastnosti: a) kružnice k_1 se dotýká přímky a v bodě A, kružnice k_2 přímky b v bodě B; b) kružnice k_1, k_2 mají vnější dotyk a leží uvnitř pásu vymezeném přímkami a, b; c) platí vztah $r_1 = 2r_2$, kde r_1 je poloměr kružnice k_1 a r_2 poloměr kružnice k_2.

***402.** Je dán trojúhelník ABC. Body V_1, V_2, V_3 souměrně sdružené k průsečíku V výšek tohoto trojúhelníka podle stran a body V_4, V_5, V_6 souměrně sdružené k bodu V podle středů jeho stran leží na kružnici k trojúhelníku ABC opsané. Dokažte, že paty výšek, středy stran trojúhelníka a středy úseček AV, BV, CV leží na kružnici k'. (Kružnice devíti bodů.)

403. Je dán trojúhelník ABC, přímka p a bod S. V zobrazení $\mathbf{Z}_1$, které je osovou souměrností s osou p, sestrojte obraz $A_1B_1C_1$ trojúhelníka ABC a v zobrazení $\mathbf{Z}_2$, které je stejnolehlostí se středem S a koeficientem $\varkappa = 2$, obraz $A_2B_2C_2$ trojúhelníka $A_1B_1C_1$. Přesvědčte se, že $\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_1$, je-li S bodem přímky p a $\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 \neq \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_1$, není-li bod S bodem přímky p.

404. Zobrazení $\mathbf{Z}_1$ je otočení se středem S a úhlem $\varphi = \mathrm{R}$, zobrazení $\mathbf{Z}_2$

stejnolehlost se středem O a koeficientem stejnolehlosti $\varkappa = -2$. Je-li $S \equiv O$, je $\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_1$?

10. KONSTRUKTIVNÍ ÚLOHY ŘEŠENÉ POMOCÍ VÝPOČTU

405. Jsou dány úsečky délek a, b, c. Sestrojte úsečku délky x tak, aby platil vztah:

a) $x = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$; b) $a + b\sqrt{5} + c\sqrt{13}$; c) $a\sqrt{6} + \sqrt{bc\sqrt{2}}$.

406. Jsou dány úsečky délek a, b. Sestrojte úsečku délky x, jestliže platí:

a) $x = \dfrac{a(a+b)}{2b}$; b) $x = \dfrac{ab}{a-b}$, $a > b$; c) $x = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$;

d) $x = \sqrt{ab - \dfrac{a^3}{b}}$, $b > a$.

407. Jsou dány úsečky a, b, c. Sestrojte úsečku délky x, jestliže

platí: a) $x = \dfrac{a\sqrt{a^2+b^2}}{c}$; b) $x = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{a^2-b^2}}{bc}$, $a > b$;

c) $x = \sqrt[4]{abc^2}$; d) $x = \sqrt{a^2 + \dfrac{b^3}{c}}$; e) $x = \sqrt{2a^2 + bc}$.

408. Jsou dány úsečky délek a, b, c, d. Sestrojte úsečku délky y, platí-li:

a) $y = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}$, $a > d$; b) $y = \sqrt{ac + bd}$;

c) $y = \dfrac{ab}{\sqrt{ab + cd}}$; d) $y = \dfrac{ab + cd}{c + d}$.

***409.** Jsou dány úsečky délek a, b. Sestrojte úsečku délky x, platí-li

$$x = \sqrt{\frac{a^3 + b^3}{a - b}}, \quad a > b.$$

***410.** Jsou-li dány úsečky délek a, b, c, d, e, sestrojte úsečku délky x, platí-li

$$x = \frac{ac}{d} \cdot \sqrt{\frac{ab}{de}}.$$

411. Jsou dány úsečky délek a, b. Sestrojte úsečku délky x, platí-li

$$x = \frac{a\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad a > b.$$

412. Je dána úsečka délky r. Sestrojte úsečku délky x, platí-li $x = r \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.
$\left[\text{Návod: } \sqrt{2+\sqrt{3}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.\right]$

413. Jsou dány úsečky, jejichž délky jsou a, b, c. Sestrojte úsečky délek x, y tak, aby platily vztahy: $x + y = a,\ x : y = b : c$.

414. Uvnitř úsečky AB délky a sestrojte bod M tak, aby platilo $AM : BM = \sqrt{2} : 2$,

415. Je dán obdélník $ABCD$, jehož rozměry jsou $AB = a$, $BC = b$. Nad jeho úhlopříčkou BD délky u sestrojte obdélník $BDPQ$ tak, aby jeho obsah se rovnal obsahu obdélníka $ABCD$.

416. Jsou dány úsečky délek u, m, n. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $a + b = u, \gamma,\ a : b = m : n$.

417. Je dán trojúhelník ABC, přičemž $BC > AC$. Nad jeho stranou AB sestrojte obdélník tak, aby jeho obsah se rovnal rozdílu obsahů čtverců nad stranami BC a AC.

418. Je dán obdélník $ABCD$ o rozměrech $AB = a$, $AD = b$. Uvnitř úsečky AB sestrojte bod M tak, aby rozdíl obsahů čtverců nad úsečkami AM a BM se rovnal obsahu obdélníka $ABCD$.

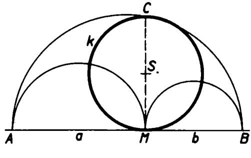
419. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Přímku $p \parallel AC$ veďte tak, aby protínala přeponu AB ve vnitřním bodě M, odvěsnu BC ve vnitřním bodě N a aby platilo $AM = BN$.

420. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a, a obdélník $A'B'C'D'$ o rozměrech $A'B' = b$, $A'D' = c$. Sestrojte čtverec $MNPQ$ tak, aby jeho obsah se rovnal součtu obsahů čtverce $ABCD$ a obdélníka $A'B'C'D'$.

421. Je dána úsečka AB a bod M, který leží uvnitř úsečky AB a rozděluje ji na dva úseky $AM = a$, $BM = b$. Nad průměry AB, AM, BM sestrojte půlkružnice, které leží v téže polorovině s hranicí AB. Sestrojte kruh k, jehož obsah se rovná obsahu útvaru omezeného těmito třemi půlkružnicemi.

Řešení (obr. 49)

A. *Rozbor*: Podle podmínky úlohy má kruh k obsah $P = P_1 - P_2 - P_3 > 0$, kde $P_1 = \frac{1}{8}\pi(a + b)^2, P_2 = \frac{1}{8}\pi a^2, P_3 = \frac{1}{8}\pi b^2$ jsou obsahy daných půlkruhů.



Obr. 49

Je tedy $P = \frac{1}{8}\pi(a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2) = \frac{1}{4}\pi ab = \pi r^2$. Z tohoto vztahu plyne, že kruh k má průměr $2r = \sqrt{ab}$.

B. *Konstrukce*: Jelikož úsečky délek a, b jsou dány, lze průměr $2r = \sqrt{ab}$ kruhu k sestrojit jako výšku v_c pravoúhlého trojúhelníka ABC, jehož přepona je $AB = a + b$ a pata výšky v_c v bodě M. Kruh sestrojený nad průměrem $2r = MC$ vyhovuje podmínkám úlohy.

C. *Důkaz*: Z konstrukce plyne, že $2r = MC = v_c = \sqrt{ab}$, neboť trojúhelník ABC je pravoúhlý a v_c je jeho výška. Zřejmě platí též vztahy $4r^2 = ab$, $r^2 = \frac{1}{4}\,ab$, $\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi\,.\,ab = \frac{1}{8}\pi\,.\,2ab = \frac{1}{8}\pi\,.\,(a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2) = \frac{1}{8}\pi\,(a + b)^2 - \frac{1}{8}\pi a^2 - \frac{1}{8}\pi b^2$, což je obsah útvaru mezi danými třemi půlkružnicemi.

D. *Diskuse*: Kruh k má obsah $P = P_1 - P_2 - P_3$, přičemž podle podmínek úlohy je výraz $P_1 - P_2 - P_3 > 0$. Existuje tedy vždy takový kruh k, který má obsah P, a úloha má vždy jedno řešení.

Závěr: Hledaný kruh k má průměr $2r = \sqrt{ab}$ a lze ho vždy sestrojit.

422. Rozdělte mezikruží omezené kružnicemi $k_1 \equiv (S; r_1)$, $k_2 \equiv (S; r_2)$ kružnicí $k \equiv (S; x)$ na dvě části stejného obsahu.

423. Je dán trojúhelník ABC, jehož strany mají délky $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Uvnitř stran AC a BC sestrojte body A', B' tak, aby trojúhelník $A'B'C$ byl rovnoramenný, měl úsečku $A'B'$ za základnu a obsah rovný polovině obsahu trojúhelníka ABC.

424. Jsou dány úsečky délek a, v. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC tak, aby jeho výška v_c příslušná základně AB měla délku v a aby jeho obsah se rovnal obsahu rovnostranného trojúhelníka, jehož strana má délku a.

425. Je dán trojúhelník ABC, jehož strany mají délky $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Na straně AC sestrojte bod M, na straně BC bod N tak, aby bylo $CM = CN$ a $AM + BN = c$.

426. Obdélník $ABCD$ o rozměrech $AB = a$, $BC = b$ vyměňte za rovnostranný trojúhelník stejného obsahu.

427. Obdélník $ABCD$ o rozměrech $AB = a$, $BC = b$ vyměňte za kosočtverec $A'B'C'D'$ stejného obsahu tak, aby a) $\sphericalangle B'A'C' = \alpha = 60°$, b) $\alpha = 30°$.

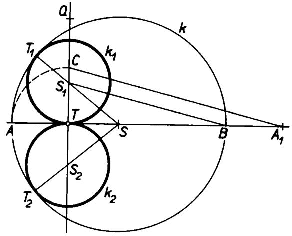
***428.** Je dán trojúhelník ABC; veďte příčku $p \parallel BC$ tak, aby obvod trojúhelníka ABC půlila.

$\boxed{\textbf{429.}}$ Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a její průměr AB. Uvnitř tohoto průměru zvolte bod T tak, aby vzdálenost $ST = p$, přičemž $p < r$. Sestrojte dvě shodné kružnice k_1, k_2 tak, aby se dotýkaly v bodě T a každá z nich též kružnice k.

Řešení (obr. 50)

A. *Rozbor*: Označme x poloměry shodných kružnic k_1, k_2 a uvažujme dva případy:

a) Je-li $p = 0$, je $T \equiv S$ a $x = \frac{1}{2} r$; tomu případu vyhovuje zřejmě nekonečný počet dvojic kružnic k_1, k_2 splňujících požadavky úlohy.



Obr. 50

b) Je-li $0 < p < r$, je trojúhelník S_1S_2S rovnoramenný, přičemž je T středem jeho základny S_1S_2, neboť $SS_1 = ST_1 - S_1T_1 = r - x$, $SS_2 = ST_2 - S_2T_2 = r - x$ a $S_1T = S_2T = x$. Je tedy přímka ST osou trojúhelníka SS_1S_2 a zároveň osou útvaru složeného z kružnic k, k_1, k_2. Trojúhelník STS_1 je pravoúhlý, má odvěsny $ST = p$, $S_1T = x$ a přeponu $SS_1 = r - x$, takže podle Pythagorovy věty je $(r - x)^2 = p^2 + x^2$, z něhož je $x = \frac{r^2 - p^2}{2r} = \frac{(r + p)\,(r - p)}{2r}$. Úsečku délky x lze tedy sestrojit na základě délek r, p jako čtvrtou geometrickou úměrnou.

B. *Konstrukce*: Na polopřímce TS sestrojíme úsečku $TA_1 = 2r$, $TB = r + p$ a na polopřímce TQ bod C tak, aby bylo $TC = r - p$. (Polopřímku TQ je možno volit různě; je však výhodné volit tuto polopřímku tak, aby bylo $TQ \perp TS$.) Dále vedeme $BS_1 \parallel A_1C$ a úsečka $TS_1 = x$ je délka poloměru kružnice k_1.

C. *Důkaz*: Z konstrukce je patrno, že $\triangle\, TA_1C \sim \triangle\, TBS_1$ (uu), takže platí vztah $2r : (r + p) = (r - p) : x$. Tento vztah upravujme takto:

$$2rx = r^2 - p^2, \quad -2rx = p^2 - r^2, \quad r^2 - 2rx + x^2 = p^2 + x^2,$$
$$(r - x)^2 = p^2 + x^2 . \tag{1}$$

Vztah (1) ukazuje, že úsečku x můžeme považovat za odvěsnu pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona má délku $(r - x)$ a druhá odvěsna délku $p = TS$.

Má tedy tento trojúhelník vrcholy T, S a třetí vrchol S_1 na kolmici vedené bodem T k přímce TS; jelikož přepona tohoto trojúhelníka je $(r - x)$, existuje na polopřímce SS_1 za bodem S_1 bod T_1 tak, že $ST_1 = r$ a $S_1T_1 = x$. Má tedy kružnice k_1 střed v bodě S_1, dotýká se přímky ST v bodě T a kružnice k v bodě T_1.

D. *Diskuse*: Podle podmínky úlohy je $p < r$, v důsledku čehož lze výraz $x = \frac{(r + p)(r - p)}{2r}$ vždy sestrojit, neboť $r - p > 0$. Úloha má jediné řešení.

Závěr: Je-li $p < r$, lze sestrojit právě jednu dvojici shodných kružnic k_1, k_2 vyhovujících požadavkům úlohy; je-li $p = 0$, lze sestrojit takových dvojic nekonečně mnoho.

***430.** Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a v ní průměr AB. V bodě B je sestrojena tečna t kružnice k. Na tečně t najděte bod x tak, aby přímka AX vytínala mezi kružnicí k a tečnou t úsek $m = XY$ dané délky.
[Návod: $\triangle ABY \sim \triangle AXB$. Určete na základě výpočtu délku $x = AX$.]

***431.** Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a bod A, který leží vně kružnice k a má od středu S této kružnice vzdálenost d. Na úsečce SA najděte bod X tak, aby bylo $XT = XA$, kde T je dotykový bod tečny t vedené z bodu X ke kružnici k.

***432.** Jsou dány dvě polopřímky VM, VN, které mají ostrý úhel α, a úsečka délky a. Uvnitř polopřímky VM zvolte dva různé body A, B a sestrojte kružnici k tak, aby procházela body A, B a aby vytínala na polopřímce VN tětivu délky a. [Návod: Nechť $PQ = a$ je délka tětivy kružnice k na polopřímce VN. Potom platí vztah $VA \,.\, VB = VP \,.\, (VP + a)$, odkud lze VP vypočítat.]

***433.** Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC, je-li dáno $a + b$, v_c.

***434.** Je dána polokružnice k_1 o průměru $AB = 2r$ a bod C ležící uvnitř úsečky AB tak, že $AC = 2p < r$; dále je sestrojena nad průměrem AC polokružnice k_2, která leží s polokružnicí k_1 v téže polorovině s hranicí AB, a přímka n jdoucí bodem C kolmo k přímce AB. Sestrojte kružnici k tak, aby se dotýkala polokružnic k_1, k_2 a přímky n. [Návod: Vypočítejte nejprve poloměr x kružnice k pomocí čísel r a p.]

11. OPAKOVÁNÍ

435. Zvolte dva shodné trojúhelníky $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ a ukažte, že nejvýše třemi osovými souměrnostmi (překlápěním) lze jeden ztotožnit s druhým.

436. Jsou dány dvě kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$ a společná jejich vnitřní tečna t. Na přímce t najděte takový bod x, aby úhel dalších tečen z něho ke kružnicím k_1, k_2 vedených byl přímkou t půlen.

437. Jsou dány dva různé body M a N, přímka p, která tyto body odděluje, a úsečka délky d. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC tak, aby jeho osou byla přímka p, výškou v_c na základnu AB úsečka délky d a ramena CA, CB (popřípadě polopřímky CA, CB) procházela body M, N. Proveďte diskusi.

438. Jsou dány dvě přímky p, q navzájem různoběžné a bod S, který neleží na žádné z nich. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby měl střed v bodě S, vrchol A na přímce p a vrchol C na přímce q.

439. Do čtverce $ABCD$, jehož strana má délku a, vepište čtverec $A_1B_1C_1D_1$, jehož strana A_1B_1 má předepsanou délku b. Jaký vztah musí platit mezi délkami a, b, aby úloha měla řešení?

440. Jsou dány dvě kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$ a bod T. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby měl vrchol A na kružnici k_1, vrchol B na kružnici k_2 a aby bod T byl jeho těžištěm. [Návod: Použijte vhodného otáčení okolo středu T.]

***441.** Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány velikosti úseček $AC = e$, $BC = b$, $AD = d$ a úhly $\sphericalangle ADB = \alpha$, $\sphericalangle DBC = \beta$, přičemž $\alpha > \beta$.

442. Dva rovnostranné trojúhelníky mají obsahy $P_1 = 405\ \text{cm}^2$ a $P_2 = 2\,880\ \text{cm}^2$. V jakém poměru jsou délky jejich stran?

443. V rovnoramenném trojúhelníku ABC má základna AB délku 30 cm a výška $v_c = 20$ cm. Vypočítejte v_b.

444. Dokažte, že přímka spojující střed základen lichoběžníka prochází průsečíkem jeho úhlopříček.

***445.** Strany pravidelného pětiúhelníka mají délku a, jeho úhlopříčky délku u. Dokažte, že platí $u : a = a : (u - a)$. (Strana pravidelného pětiúhelníka je delším úsekem zlatým řezem rozdělené úhlopříčky.)

***446.** Dokažte, že v tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí $ac + bd = m \,.\, n$, kde a, b, c, d jsou délky jeho stran, m a n délky jeho úhlopříček. [Návod: $\sphericalangle ACB = \alpha$ přeneste ke straně c, takže $\sphericalangle DCE = \alpha$, přičemž bod E leží na přímce DB. Bodem E je rozdělena úsečka DB na dva úseky n_1 a n_2. Dále sledujte podobnost trojúhelníků ABC a DEC, ACD a BCE.]

***447.** Je-li v rovnoramenném trojúhelníku ABC ($AB = a$, $AC = BC = b$) úhel $ACB = 20°$, platí mezi a, b vztah $a^3 + b^3 = 3\,ab^2$. Dokažte.

***448.** Zvolte ostroúhlý trojúhelník ABC a dokažte, že jeho obsah $P = \dfrac{abc}{4r}$, kde a, b, c jsou strany a r poloměr kružnice trojúhelníku ABC opsané.

Přesvědčte se, že tento vzorec platí i tehdy, je-li trojúhelník ABC pravoúhlý nebo tupoúhlý.

*449. Pravoúhlému trojúhelníku ABC jsou vepsány dva čtverce tak, že jeden z nich má stranu uvnitř úsečky BC a druhý uvnitř úsečky AB. Který z těchto čtverců má větší stranu?

*450. Je-li trojúhelník ABC pravoúhlý, potom platí $c + v_c > a + b$. Dokažte. [Návod: K důkazu použijte goniometrických funkcí.]

*451. Je dána tětiva AB kružnice $k \equiv (S; r)$ a bod C ležící na kružnici k, přičemž $C \not\equiv A$, $C \not\equiv B$. Sestrojte patu D kolmice vedené z bodu C na přímku AB a paty E, F kolmic vedených z bodů A, B na tečnu t kružnice k v bodě C. Dokažte, že platí vztah $(CD)^2 = AE \,.\, BF$.
[Návod: Volte bod C na kružnici k tak, aby přímka AB tečnu t v bodě M protínala a využijte jednak podobnosti trojúhelníků MDC a MEA, MDC a MFB, jednak mocnosti bodu M ke kružnici k.]

452. Jsou dány dvě shodné kružnice $k_1 \equiv (S_1; 16)$, $k_2 \equiv (S_2; 16)$, přičemž kružnice k_1 má střed S_1 na kružnici k_2 a kružnice k_2 má střed S_2 na kružnici k_1. Na kružnici k_1 sestrojte bod X tak, aby jeho mocnost ke kružnici k_2 byla -112. (Proveďte v měřítku 1 : 4.)

453. Jsou dány kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$, které se protínají pravoúhle (tečny kružnic k_1, k_2 v průsečném bodě stojí k sobě kolmo). Jakou mocnost má střed S_1 ke kružnici k_2 a střed S_2 ke kružnici k_1?

454. Čtverci $ABCD$ je vepsána kružnice k. Označte její dotykové body na stranách BC a DA po řadě Q a N. V jakém poměru jsou délky úseček DM a MQ, je-li $M \not\equiv Q$ průsečík přímky DQ s kružnicí k?

455. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a. Okolo vrcholů A, B jsou opsány čtvrtkružnice k_1, k_2 o poloměru $\frac{a}{2}$ dovnitř čtverce. Vypočítejte poloměr r kružnice k, která se dotýká přímky CD a obou čtvrtkružnic; potom kružnici k sestrojte.

*456. Body A, B, C, D dělí kružnici $k \equiv (S; r)$ na čtyři oblouky, jejichž délky jsou v poměru $AB : BC : CD : DA = 1 : 2 : 4 : 5$. Přímky AD a BC se protnou v bodě Q. Vypočítejte vzdálenosti QB a QD.

457. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a. Rozdělte stranu BC v poměru $BE : EC = 1 : 2$ a na přímce AE sestrojte patu F kolmice vedené bodem C na přímku AE. Určete délku úsečky AF.

*458. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC ($BC = a$, $AC = b$). Osa o úhlu $\sphericalangle ACB$ protíná přeponu AB v bodě D. Vypočítejte délku úsečky CD pomocí délek a, b. [Návod: Veďte bodem D kolmici na přímku AC a její patu označte E; potom je $\triangle AED \sim \triangle ACB$.]

***459.** Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Středem D odvěsny AC je vedena kolmice k přeponě AB a její pata označena E. Bodem E je přepona AB rozdělena na dva úseky $AE = x$ a $BE = y$, o nichž platí vztah $y^2 - x^2 = a^2$, kde a je délka odvěsny BC. Dokažte to.

***460.** V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ je $AB = z_1$ a $AC = u$, přičemž úhlopříčka AC je osou úhlu $\sphericalangle BAD$. Vypočítejte délku základny CD. [Návod: Je-li bod S průsečík úhlopříček lichoběžníka, je $\triangle ABC \sim \triangle BSC$, $\triangle ABS \sim \triangle CDS$, takže $BC = CD$. Dále užijte dvakrát Pythagorovy věty k výpočtu výšky v na stranu AB.]

461. Zvolte čtyřúhelník (různoběžník) $ABCD$ a dokažte, že přímky spojující středy jeho protějších stran a středy úhlopříček procházejí týmž bodem.

462. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $r = 5$, $\gamma = 75°$ a poměr $a : b = 2 : 3$ (r je poloměr kružnice trojúhelníku ABC opsané).

463. Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod M, který neleží na žádné z obou různoběžek. Sestrojte kružnici k tak, aby procházela bodem M, dotýkala se přímky p a měla střed na přímce q. [Návod: Užijte stejnolehlosti, jejíž střed je v průsečíku přímek p, q.]

464. Jsou dány úsečky délek a, b, c, d. Sestrojte úsečku délky x, je-li $x = \sqrt{\frac{abc}{d} + a^2}$.

465. Je dán obdélník $ABCD$, který má rozměry $AB = a$, $AD = b$ a obsah P. Sestrojte čtverec $MNPQ$ tak, aby jeho obsah $P' = \frac{2}{3} P$.

466. Jsou dány úsečky délek a, c, m. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ tak, aby jeho základna AB měla délku a, základna CD délku c a jeho obsah se rovnal obsahu čtverce $MNPQ$, jehož strana má délku m.

467. Rozdělte kruh o poloměru r dvěma soustřednými kružnicemi na tři stejné díly.

468. Je dán lichoběžník $ABCD$, jehož základny jsou AB, CD. Sestrojte příčku $p \parallel AB$ tak, aby obsah lichoběžníka $ABCD$ půlila. ($AB = a$, $CD = c$.)

469. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, v němž $AC > BC$. Sestrojte kružnici k tak, aby procházela bodem B, dotýkala se přímky AC a měla střed na přímce AB.
[Návod: Sestrojte osu úhlu $\sphericalangle ABC$ a určete její průsečík se stranou AC.]

***470.** Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož základna je AB. Na polopřímce CA za bodem A sestrojte bod E a na polopřímce CB za bodem B bod F tak, aby platilo $AE = EF = FB$. Dokažte, že úloha má řešení tehdy, je-li úhel $\sphericalangle ACB < 60°$.

XV. TRIGONOMETRIE

I. GONIOMETRICKÉ FUNKCE

1. Sestrojte úhel α, jehož a) $\sin\alpha$, b) $\cos\alpha$, c) $\operatorname{tg}\alpha$ je $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 0,8; 1; 1,4; 2,5.

2. Sestavte tabulku hodnot goniometrických funkcí $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ pro úhly 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

3. Z pětimístných matematických tabulek najděte hodnoty goniometrických funkcí:

a) $\sin 18°10'$; $\sin 29°40'$; $\sin 66°25'$; $\sin 74°35'$; $\sin 21°12$; $\sin 32°36'$; $\sin 48°47'$; $\sin 84°43'$;
b) $\cos 15°10'$; $\cos 36°40'$; $\cos 66°5'$; $\cos 77°25'$; $\cos 23°12'$; $\cos 31°36'$; $\cos 46°37'$; $\cos 82°43'$;
c) $\operatorname{tg} 48°15'$; $\operatorname{tg} 77°25'$; $\operatorname{tg} 32°21'$; $\operatorname{tg} 80°43'$;
d) $\operatorname{cotg} 43°15'$; $\operatorname{cotg} 69°25'$; $\operatorname{cotg} 38°21'$; $\operatorname{cotg} 46°36'$; $\operatorname{cotg} 79°43'$.

4. Z pětimístných tabulek určete velikost úhlu, jestliže:

a) $\sin\alpha = 0{,}\,22\,495$; $\sin\beta = 0{,}\,41\,734$; $\sin\gamma = 0{,}\,61\,176$; $\sin\delta = 0{,}\,93\,929$;
b) $\cos\alpha = 0{,}\,98\,769$; $\cos\beta = 0{,}\,85\,416$; $\cos\gamma = 0{,}\,81\,191$; $\cos\delta = 0{,}\,45\,762$;
c) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}\,12\,278$; $\operatorname{tg}\beta = 0{,}\,65\,771$; $\operatorname{tg}\gamma = 0{,}\,90\,728$; $\operatorname{tg}\delta = 2{,}\,25\,135$;
d) $\operatorname{cotg}\alpha = 9{,}\,51\,436$; $\operatorname{cotg}\beta = 1{,}\,85\,462$; $\operatorname{cotg}\gamma = 1{,}\,03\,373$; $\operatorname{cotg}\delta = 0{,}\,16\,823$.

5. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník, je-li dáno:

a) $b = 7$ j, $\alpha = 40^{g}10^{c}$;
b) $b = 0{,}\,52$ j, $\beta = 35^{g}20^{c}$;
c) $b = 3{,}4$ j, $\alpha = 80^{g}36^{c}$;
d) $a = 11$ j, $\alpha = 34^{g}12^{c}$;
e) $c = 6$ j, $\alpha = 48^{g}25^{c}$;
f) $c = 8$ j, $\beta = 36^{g}24^{c}$;
g) $a = 5$ j, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}$;
h) $a = 10$ j, $\sin\beta = \frac{2}{5}$.

[Návod: Z tabulek určete hodnotu $\operatorname{tg}\alpha$, popřípadě sinus příslušného úhlu.]

6. Řešte trojúhelník pravoúhlý, je-li dáno:

a) $c = 120$ m, $\alpha = 50{,}23°$;
b) $c = 425$ m, $\alpha = 36{,}4°$;
c) $a = 240$ m, $\alpha = 51{,}28°$;
d) $a = 12$ cm, $b = 5$ cm;
e) $c = 425$ m, $a = 416$ m;
f) $c = 0{,}9874$ km, $b = 0{,}\,5365$ km.

7. Určete ostatní prvky trojúhelníka pravoúhlého, je-li dáno:
a) $P = 732{,}84\ m^2$, $b = 17{,}4$ m; c) $P = 50{,}16\ m^2$, $\beta = 72°3'$;
b) $P = 2\,016\ m^2$, $\alpha = 14°15'$; d) $b = 270{,}4$ m, $v_c = 200$ m.

$\boxed{8.}$ Jakou silou rovnoběžnou s délkou nakloněné roviny, která svírá s vodorovnou rovinou úhel 24°20′, se udrží v rovnováze sud s tíhou 450 kp, nepřihlížíme-li ke tření?

Řešení

Tíha břemene G se rozloží na dvě k sobě kolmé složky. Složku T, která je rovnoběžná s délkou nakloněné roviny, a složku N, která je kolmá k nakloněné rovině a jejíž účinek se pevností nakloněné roviny ruší. Pro tyto složky platí: $T = G \sin 24°20' = 185{,}4$ kp, $N = G \cos 24°20'$. Sud se udrží v rovnováze silou $T = 185{,}4$ kp.

9. Žebřík a) 3 m, b) 4,5 m dlouhý je přistaven ke kmeni stromu tak, že od jeho paty je opřen ve vzdálenosti a) 1,5 m, b) 1,09 m. Jaký úhel svírá žebřík s vodorovnou rovinou?

10. Chatu na vrcholu hory, která je od našeho stanoviště podle mapy vzdálena 2 km, vidíme pod výškovým úhlem a) 30°; b) 25°. Jak vysoko nad naším stanovištěm je vrchol hory?

11. Určete poloměr kružnice, v níž středovému úhlu $\alpha = 69°47'20''$ přísluší tětiva dlouhá 36,9 cm.

12. Jak velký je úhel dvou tělesových úhlopříček krychle?

13. Vzdálenost Země od Slunce v perihéliu je $146{,}2 \cdot 10^6$ km. Zdánlivý průměr Slunce v této poloze je 32′36,5″. Určete z toho skutečný průměr Slunce.

14. Sílu $F = 10$ N rozložte na dvě vzájemně kolmé složky, jestliže složka F_1 svírá s F úhel 30°, složka F_2 úhel 60°.

*15. Po dráze dlouhé 1 km na svahu 12° jedou saně.
a) Jakou rychlostí dostihnou spodní konec dráhy, je-li součinitel tření $f = 0{,}1$?
b) Jaká je složka této rychlosti spadající do vodorovného směru?
c) Jak daleko by dojely saně ještě setrvačností za cíl, ležící na rovině, je-li tam $f = 0{,}05$? (Bez odporu vzduchu.)

16. Lyžař sjede po svahu 66 m dlouhém rovnoměrně zrychleným pohybem za 10 s. S jakým zrychlením se pohyboval a jaký je sklon svahu:
a) bez zřetele na odpor;
b) s přihlédnutím ke tření, jehož součinitel je $f = 0{,}025$?

$\left[\text{Návod: a) } s = \frac{1}{2} at^2,\ a = g \sin \alpha\,.\right]$

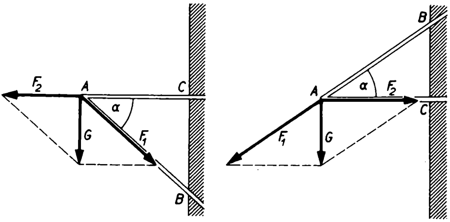
17. Letadlo letí vodorovně ve směru na baterii ve výšce 3 000 m. Při prvém měření byl zjištěn polohový úhel 25°, při druhém měření provedeném po deseti sekundách byl zjištěn polohový úhel 35°. Určete rychlost letadla.

18. Jakou práci je třeba vykonat při překlopení bedny tvaru kvádru, jejíž těžiště je t metrů nad podstavou a těžnice je vzdálena od hrany překlápění a metrů?

19. Vozík, jehož vzdálenost kol je 80 cm, jede po vrstevnici svahu 30°. Jak vysoko smí mít těžiště i s nákladem sena, aby se na tomto svahu nepřevrhl?

20. Určete obsah mírného pásu Země. [Návod: $P = 2\pi R(v_2 - v_1)$, kde $v_1 = R(1 - \cos 23°27')$.]

21. Nosník tvaru na obr. 51ab je v obou případech zatížen břemenem 300 kp. Určete tahové a tlakové síly pro různé hodnoty úhlu α: 30°, 35°, 40°, 45°, 50°, 55°, 60°.



Obr. 51

***22.** Kurs plachetnice svírá se směrem větru úhel $\alpha = 70°$, zatímco plachta svírá se směrem plavby úhel 50°. Určete rychlost lodi, je-li rychlost větru 2,5 m/s. (Poznámka: Pohyb lodi způsobuje jen složka síly větru v_2 spadající do směru pohybu lodi, přičemž složka rychlosti v_1 je kolmá na plachtu.) Řešte graficky.

23. Zpaměti: Odvoďte vzorec pro výpočet velikosti úhlu v obloukové míře je-li jeho velikost udána v míře stupňové $\alpha°$.

24. Zpaměti:
Vyjádřete v obloukové míře velikost úhlů: a) 30°, 90°, 120°, 180°; b) 210°, 390°, −10°, −50°.

25. Zpaměti:
Jaký úhel ve stupních značí úhel

a) π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, 2π;

b) $2\,k\pi$, $(2k + 1)\,\frac{\pi}{2}$, $\frac{7}{12}\,\pi$, $-\pi$, $-\frac{3}{4}\,\pi$, když k je číslo celé?

26. Zpaměti:
Úhly trojúhelníka jsou v poměru 2 : 3 : 7. Určete jejich velikost v obloukové míře.

27. Rotor motoru odstředivky má frekvenci otáčení 900/min. Určete jeho úhlovou rychlost.

Řešení

Je-li frekvence otáčení n, je úhlová rychlost $\omega = 2\pi n$, $n = \frac{900}{60} = 15/\mathrm{s}$,

$$\omega = 30\pi \text{ rad/s}.$$

28. Zpaměti:
Určete v míře stupňové i obloukové, o jaký úhel se otočí velká (malá) ručička na hodinkách, které se zastavily:
a) před dvěma hodinami;
b) před hodinou;
c) před deseti minutami, aby ukazovaly správný čas.

29. Mikrometrický šroub postoupí o jeden milimetr, otočíme-li hlavicí o 360°. O kolik stupňů se musela otočit hlavice tohoto šroubu, byla-li změřena tloušťka plechu

a) 0,27 mm, b) $2\frac{1}{4}$ mm, c) 1,3 mm?

30. Do kružnice o poloměru r je vepsán pravidelný n-úhelník. Téže kružnici je pravidelný n-úhelník opsán. Určete velikost obvodů obou n-úhelníků a obsahů ploch jimi omezených.

31. Dokažte, že poměr obsahu kruhu a obsahu jemu vepsaného pravidelného n-úhelníka z předešlé úlohy nezáleží na r. Jak je tomu u n-úhelníka opsaného?

***32.** Určete hodnotu výrazu, jemuž se blíží velikost obvodu (obsahu) pravidelného n-úhelníka a) vepsaného do kružnice o poloměru r, víte-li, že $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ se neomezeně blíží jedničce, když $\alpha \to 0$; b) opsaného téže kružnici, jestliže víte, že $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}$ se blíží jedničce, pro $\alpha \to 0$.

33. V jednotkové kružnici narýsujte v základní poloze vektor, jehož směr je
a) $30°$, $150°$, $210°$, $330°$, $390°$, $720°$;
b) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$, $\frac{7}{3}\pi$, 4π.

34. Ze shodnosti příslušných pravoúhlých trojúhelníků, jejichž jedna odvěsna leží v ose x a vrchol v počátku, ověřte platnost vztahů:
a) $\sin(2R \pm \alpha) = \mp \sin\alpha$, $\sin(2k\pi \pm \alpha) = \pm \sin\alpha$;
b) $\cos(2R \pm \alpha) = -\cos\alpha$, $\cos(2k\pi \pm \alpha) = \cos\alpha$;
c) $\operatorname{tg}(2R \mp \alpha) = \mp \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}(k\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{tg}\alpha$.
Též pro úhly: 1. $150°$,
2. $250°$,
3. $3\,720°$.

Řešení

Podle a) pro $x = 150°$ je $\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$;
pro $x = 250°$ je $\sin 250° = \sin(180° + 70°) = -\sin 70° = -0{,}93\,969$;

b) $\cos 250° = \cos(180° + 70°) = -\cos 70° = -0{,}34\,202$;
$\operatorname{tg} 250° = \operatorname{tg}(180° + 70°) = \operatorname{tg} 70° = 2{,}74\,748$;

c) pro $\alpha = 3\,720°$ je $\sin 3\,720° = \sin(3\,600° + 120°) = \sin(10 \,.\, 360° + 120°) = \sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 3\,720° = \cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$;
$\operatorname{tg} 3720° = \operatorname{tg}(20 \,.\, 180° + 120°) = \operatorname{tg} 120° = -\sqrt{3}$.

Závěr: Při výpočtu hodnot goniometrických funkcí tupého a orientovaného úhlu je zřejmě výhodné vyjádřit velikost daného úhlu pomocí rozkladu $180° \pm \alpha°$ nebo $k \,.\, 360° \pm \alpha°$, protože potom funkce $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ zůstává funkcí $\sin\alpha'$, $\operatorname{tg}\alpha'$, kofunkce ($\cos\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$) kofunkcí ($\cos\alpha'$, $\operatorname{cotg}\alpha'$) a jejich znamení určíme snadno podle znamení funkce v tom kvadrantu, v němž úhel α leží. Úhel $150°$ leží v druhém kvadrantu (jak je patrno z náčrtku v jednotkové kružnici), v němž je hodnota sinu kladná, kosinu záporná atd.

35. Podle předchozí úlohy najděte zpaměti hodnoty goniometrických funkcí sinu, kosinu, tangenty a kotangenty úhlů:
a) $120°$; b) $135°$; c) $150°$; d) $180°$; e) $210°$; f) $240°$;
g) $270°$; h) $300°$; i) $330°$; j) $360°$; k) $390°$; l) $420°$;
m) $720°$; n) $750°$; o) $120° + k \,.\, 360°$; p) $135° + k \,.\, 360°$.

36. Zpaměti:
Na jednotkové kružnici ověřte:
a) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; b) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$;
c) $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; d) $\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$
a podle toho určete hodnoty všech goniometrických funkcí:
$-30°$, $-150°$, $-240°$, $-300°$, $-2\,050°10'$, $-3\,650°52'$, $-4\,283°25'$.

37. Určete hodnoty goniometrických funkcí úhlu x, je-li:
a) $x = -93^g45^c$; b) $x = -0{,}7\pi$; c) $x = -4\,119^g40^c$;
d) $x = -\dfrac{109}{6}\pi$; e) $x = -\dfrac{97}{8}\pi$; f) $x = -3\,539^g18^c$.

38. Z pětimístných tabulek určete velikost úhlu v intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$, je-li dáno:
a) $\sin t = 0{,}5$; b) $\sin t = 0{,}81021$; c) $\cos\alpha = -0{,}70710$;
d) $\cos\alpha = 0{,}65078$; e) $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}00233$; f) $\operatorname{cotg}\alpha = 0{,}80834$.

39. Určete všechny hodnoty goniometrických funkcí ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$) pro:
a) $118°20'$; b) $173°45'$; c) $135°4'$; d) $3\,975°14'$; e) $2\,470°40'$;
f) $1\,030°38'$.

40. Na milimetrový papír narýsujte v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ z tabulky hodnot přesně graf funkce $y = \sin x$. V jaké míře musí být vyjádřena hodnota proměnné x? Do téhož náčrtku narýsujte průběh některé z daných funkcí:

a) $y = 2\sin x$; b) $y = \dfrac{1}{2}\sin x$; c) $y = \sin 2x$;

d) $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$; e) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

f) $y = \dfrac{3}{4}\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

[Návod: Na ose y zvolíme libovolně velkou jednotkovou úsečku. Protože arc $30° = 0{,}52$ jednotky, arc $60° = 2.0{,}52$ j, označíme na ose x velikosti těchto úseček příslušnými úhly.] Proveďte různobarevnými tužkami.

41. Podobně jako v příkladě 40 narýsujte do téhož obrázku graf funkcí:
a) $y = \cos x$; b) $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$; c) $y = \cos 2x$;
d) $y = \dfrac{3}{4}\cos(x + 30°)$; e) $y = -\cos 2x$; f) $y = \cos(x + 2)$;
g) $y = 2 - \sin x$, ($x \in \langle 0, 2\pi \rangle$).

42. Narýsujte graf funkce:
a) $y = \operatorname{tg} x$; b) $y = 2 \operatorname{tg}(x + 45°)$; c) $y = \operatorname{cotg} 2x$;
d) $y = \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

43. Na grafech goniometrických funkcí v úlohách 40, 41, 42 ověřte $|f(x)| = |f(180° - x)|$.

44. Dokažte, že sinusoida je souměrná a) podle osy jdoucí bodem
a) $\left[(2k + 1)\frac{\pi}{2}, 0\right]$ kolmo k ose souřadnic;
b) podle každého středu $(k \cdot \pi, 0)$, kde k je libovolné číslo celé.

***45.** Dokažte, že graf funkce kosinu je souměrný
a) podle každé osy jdoucí bodem $[k\pi, 0]$ kolmo k ose nezávisle proměnné;
b) podle každého středu $\left[(2k + 1)\frac{\pi}{2}, 0\right]$, kde k je libovolné celé číslo.

46. Dokažte, že graf funkce $y = \operatorname{tg} x$ je souměrný podle středu $\left(k\frac{\pi}{2}, 0\right)$, kde k je libovolné celé číslo.

47. Určete periodu a frekvenci harmonického pohybu daného vztahem $y = y_0 \sin \omega t$.

48. Napište rovnici rovnoměrného pohybu hmotného bodu po kružnici o poloměru r v závislosti na čase $\varphi(t)$, je-li oběžná doba T.

49. V jednotkové kružnici určete polohu bodu z předešlé úlohy pro:

a) $t = \frac{1}{12}T$; b) $t = \frac{1}{8}T$; c) $t = \frac{1}{6}T$; d) $t = \frac{1}{4}T$;
e) $t = \frac{1}{3}T$; f) $t = \frac{3}{8}T$; g) $t = \frac{5}{12}T$; h) $t = \frac{1}{2}T$;
i) $t = \frac{7}{12}T$; j) $t = \frac{2}{3}T$; k) $t = \frac{3}{4}T$; l) $t = \frac{7}{8}T$.

50. Jsou dány tři funkce: $y = \sin\frac{x}{2}$, $y = 2\sin\frac{x}{2}$, $y = 4\sin\frac{x}{2}$. Jakou amplitudu a jakou periodu má každá tato funkce?

51. Čím se liší funkce: a) $y = 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$;
b) $y = 2\sin\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)$; c) $y = \frac{1}{2}\sin\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$?

52. Rotor generátoru se otočí za tři minuty dvěstěpadesátkrát. Určete rovnici $\varphi(t)$ pohybu cívky po kružnici na obvodu tohoto rotoru, je-li jeho průměr 6 m.

53. Najděte početní vyjádření výsledného pohybu složeného ze dvou harmonických pohybů téže amplitudy r a téže doby kmitu T: a) při stejné fázi; b) při opačné fázi; c) při fázovém rozdílu $\frac{T}{4}$; d) při fázovém rozdílu φ.

54. Sestrojte výslednici dvou harmonických pohybů téže amplitudy, jsou-li jejich doby kmitu T_1 a T_2 v poměru:
a) $T_1 : T_2 = 1 : 2$; b) $T_1 : T_2 = 2 : 3$.
(Oba pohyby začínají současně.)

55. Ve třífázovém vedení je průběh proudů v jednotlivých vinutích armatury posunut o jednu třetinu periody. Jaký je součet proudů všech tří fází v každém okamžiku?
[Návod: Proud v jednotlivých vinutích je: $i_1 = i_0 \sin \omega t$, $i_2 = i_0 \sin (\omega t - 120°)$, $i_3 = i_0 \sin (\omega t - 240°)$.]

56. Jaké jsou efektivní hodnoty napětí a proudu mezi vývody třífázového generátoru při spojení: a) do hvězdy; b) do trojúhelníka, je-li napětí jedné cívky u a proud jedné cívky i?
[Návod: a) $u = u_2 - u_1 = U_0 \sin (\omega t - 120°) - U_0 \sin \omega t = -U_0 \sqrt{3} \sin (\omega t + 30°)$.]

57. Rameno rovnoramenného trojúhelníka je čtyřikrát delší než základna. Určete goniometrické funkce úhlů tohoto trojúhelníka.

58. Určete povrch i objem kužele, je-li dána délka strany l a velikost úhlu osového řezu φ při vrcholu.

***59.** Z pravidelného čtyřbokého hranolu $ABCDA'B'C'D'$ je oddělen jehlan, jehož povrch má velikost S. Jeho podstavu tvoří trojúhelník, jehož vrchol je v bodě C' a strany jsou spojnice vrcholů kvádru BC', BD, DC'. Určete povrch kvádru, jestliže úhel řezu $BC'D$ při vrcholu C' má velikost α.

2. VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI

60. Z jednotkové kružnice odvoďte vztah: a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;
b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; c) $\operatorname{tg} \alpha \,.\, \operatorname{cotg} \alpha = 1$; d) $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$.

61. Dokažte, že pro ostrý úhel α platí: a) $\sin\alpha < \operatorname{tg}\alpha$; b) $\cos\alpha < \operatorname{cotg}\alpha$; c) $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$ pro $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

$\left[\text{Návod k a) } \sin\alpha < \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\right]$

62. Určete $\cos x$, popř. $\sin x$, pro $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$, je-li dáno:

a) $\sin x = \frac{-1}{5}$; b) $\sin x, = \frac{-\sqrt{3}}{2}$; c) $\cos x = \frac{2}{3}$; d) $\cos x = \frac{3}{5}$.

63. Aniž počítáte velikost úhlu φ, určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí, je-li dáno: a) $\cos\varphi = \frac{12}{13}$, pro $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$;

b) $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2}$, pro $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$ [viz pozn. k úloze 65].

Řešení

Ve čtvrtém kvadrantu mají všechny zbývající funkce, tj. $\sin\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{cotg}\varphi$ záporné hodnoty. Podle vztahu

a) z příkladu 60 platí: $\sin^2\varphi = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}$;

$\sin\varphi = -\frac{5}{13}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{5}{13} : \frac{12}{13} = -\frac{5}{12}$;

$\operatorname{cotg}\varphi = -\frac{12}{5}$.

Závěr: Hledané hodnoty jsou: $\sin\varphi = \frac{-5}{13}$, $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{5}{12}$, $\operatorname{cotg}\varphi = -\frac{12}{5}$.

b) Ve třetím kvadrantu má funkce tangens a kotangens hodnotu kladnou, sinus a kosinus hodnotu zápornou.

Protože $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, je $\sin\varphi = \sqrt{2}\,.\cos\varphi$, odtud $\sin^2\varphi = 2\cos^2\varphi$ a $1 - \cos^2\varphi = 2\cos^2\varphi$. Z toho $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\varphi = -\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{-\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Zkoušku správnosti proveďte sami.

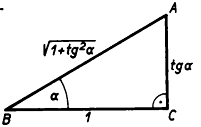
64. Určete hodnoty goniometrických funkcí úhlu x, je-li: a) $\sin x = 0{,}8$, pro $90° < x < 180°$; b) $\cos x = -\frac{3}{5}$; c) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{5}$; d) $\operatorname{cotg} x = -\frac{8}{15}$, pro $1\,500° < x < 1\,620°$.

65. Určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí, je-li dáno:
a) $\operatorname{tg} \varphi = -5$, $(100° < \varphi < 180°)$; b) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{7}{8}$, $\left(-7\pi < \varphi < -\frac{13}{2}\pi\right)$;
c) $\operatorname{cotg} \varphi = \sqrt{3}$, ($\varphi$ je ostrý úhel); $\operatorname{tg} \varphi = 2{,}4$, $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$.

[Návod: K řešení těchto úloh lze s výhodou užít náčrtku (obr. 52).

Tak pro př. a) $\sin \varphi = \dfrac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$,

$\sin \varphi = \dfrac{-5}{\sqrt{1 + 25}} = \dfrac{-5}{\sqrt{26}}$ atd.]



Obr. 52

66. Použijte návodu k úloze 65 při určování hodnot ostatních goniometrických funkcí, je-li dáno:

a) $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{b}$, $b \neq 0$; b) $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$, $a \neq b$;

c) $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2}$.

67. Dokažte, že platí: a) $\sin^2 30° + \cos^2 30° = 1$; b) $\dfrac{\sin \alpha}{\cos(90° - \alpha)} = 1$; c) $\operatorname{tg} 43° : \operatorname{cotg} 47° = 1$; d) $\operatorname{tg} 27° : \operatorname{cotg} 63° = 1$.

68. Je možno najít takovou hodnotu argumentu x, aby: a) $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$; b) $\sin x = \frac{2}{3}$, $\cos x = \frac{4}{5}$; c) $\sin x = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$?

69. Užitím vztahů z úlohy 60 zjednodušte: a) $\sin x \,.\, \operatorname{cotg} x + \cos x$;
b) $\dfrac{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}$; c) $\dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$; d) $\dfrac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x - 1}$;
e) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$.

70. Zjednodušte výrazy: a) $1 - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$; b) $\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \cos^2\alpha$;
c) $\dfrac{\sin x - \sin^3 x}{\cos x - \cos^3 x}$; d) $\dfrac{\cos x - \sin \alpha}{1 - \operatorname{tg} x}$; e) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha}$.

71. Určete: a) $\sin 75°$; b) $\sin 15°$; c) $\cos 75°$; d) $\cos 15°$, znáte-li velikost $\sin 45°$ a $\sin 30°$; e) $\operatorname{tg} 75°$, znáte-li $\operatorname{tg} 45°$ a $\operatorname{tg} 30°$.

Řešení

Použijeme vzorců $\sin(x \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$,
$\cos(x \mp \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin x \sin\beta$, $\operatorname{tg}(x \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\beta}$.

a) $\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° =$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1);$$
b) $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° =$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1);$$
c) $\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \,.\, \cos 30° - \sin 45° \,.\, \sin 30° =$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1);$$
d) $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \sin 75°$. Ověřte.

e) $$\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(45° + 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$
$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}.$$ Ověřte.

72. Určete velikost $\alpha + \beta$, aniž počítáte samostatně velikost úhlů α a β, je-li: a) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\sin\beta = \dfrac{5}{13}$;
b) $\cos\alpha = \dfrac{8}{17}$, $\cos\beta = \dfrac{-7}{25}$; c) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = \dfrac{-1}{5}\sqrt{5}$;
d) $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\sin\beta = \dfrac{5}{13}$, je-li zde vždy úhel α v prvém a úhel β ve druhém kvadrantu.

73. Pomocí vzorce z úlohy 71 určete tg 15°, tg 105°.

74. Aniž počítáte velikosti úhlů α a β, dokažte, že $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, platí-li a) $\operatorname{tg}\alpha = 2 + \sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{3}$; b) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{7}$;

c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = -(2 + \sqrt{3})$.

75. Určete: a) $\sin(\alpha - \beta)$; b) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, pro $\alpha = 135°$ a $90° < \beta < 180°$, jestliže $\sin\beta = \frac{3}{5}$.

76. Do vzorců v úloze 71 dosaďte za velikost úhlu α a odvoďte tak vzorce pro hodnoty goniometrických funkcí dvojnásobného úhlu. Z nich pak určete:

a) $\cos 2\alpha$ pro $\sin\alpha = 0{,}6$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

b) $\sin 2\alpha$, je-li $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\frac{-\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

c) $\sin 2\alpha$ pro $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $180° < \alpha < 270°$;

d) $\sin 2\alpha$ pro $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $90 < \alpha < 180°$; e) $\operatorname{tg} 2\alpha$ pro $|\operatorname{tg}\alpha| = 5$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

77. Pro které úhly α a β platí $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta$?

78. Dokažte, že $\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$, jsou-li α a β ostré úhly.

79. Zjednodušte: a) $\sin(\alpha + \beta) \pm \sin(\alpha - \beta)$; b) $\cos(\alpha + \beta) \pm \cos(\alpha - \beta)$; c) $\cos(\alpha \pm \beta) - 2\sin\alpha\sin\beta$ a vyvoďte vzorce pro $\sin\gamma \pm \sin\delta$, $\cos\gamma \pm \cos\delta$, $\operatorname{tg}\gamma \pm \operatorname{tg}\delta$.

80. Podle součtových vzorců zjednodušte: a) $\sin 60° \cos 30° - \cos 60° \sin 30°$; b) $\cos 30° \cos 60° - \sin 30° \sin 60°$;

c) $\sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$; d) $\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$;

e) $\frac{\operatorname{tg} 70° - \operatorname{tg} 40°}{1 + \operatorname{tg} 70° \operatorname{tg} 40°}$; f) $\frac{\operatorname{tg} 70° + \operatorname{tg} 80°}{1 - \operatorname{tg} 70° \operatorname{tg} 80°}$.

81. Dokažte, že platí: a) $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cdot \cos(45° - x)$;

b) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cdot \sin(45° - x)$; c) $\cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

82. Pro která x nabývají dané funkce největší hodnoty:

a) $y = \cos x + \sin x$; b) $y = \cos x - \sin x$; c) $y = \cos x \sin x$, $x \in (-\infty, \infty)$?

83. Pro která x nabývají dané funkce nejmenší hodnoty v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$: a) $y = 2 + \sin x$; b) $y = 3 - \cos x$; c) $y = \sin x + \cos x$?

$\boxed{\text{*84.}}$ Upravte na součin: $\sin \alpha + \cos \alpha + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha + \sin 3\alpha + \cos 3\alpha$.

Řešení

Daný výraz nejprve upravíme takto: $(\sin \alpha + \sin 3\alpha) + (\cos \alpha + \cos 3\alpha) + (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)$ a dále použijeme vzorců z úlohy 79.

$$(\sin \alpha + \sin 3\alpha) + (\cos \alpha + \cos 3\alpha) + (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha) =$$
$$= 2 \sin 2\alpha \cos \alpha + 2 \cos 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha \cos 2\alpha = (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) \,.$$
$$. (2 \cos \alpha + 1) = 2 (\cos \alpha + \cos 60°) \,.\, (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) =$$
$$= 2 (\cos \alpha + \cos 60°) [\cos (90° - 2\alpha) + \cos 2\alpha] =$$
$$= 4 \cos \frac{\alpha + 60°}{2} \cos \frac{\alpha - 60°}{2} \,.\, 2 \cos 45° \cos (45° - 2\alpha) =$$
$$= 4\sqrt{2} \cos \frac{\alpha + 60°}{2} \cos \frac{\alpha - 60°}{2} \cos (45° - 2\alpha) \,.$$

***85.** Upravte na součin: a) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1. + \cos \alpha}$; b) $\sin^2\alpha + \cos^2 \alpha + \mathrm{tg}^2\, \alpha$;

c) $1 - \cos^2 \beta + \sin^2 \beta$; d) $1 - \sin^2\gamma + \mathrm{cotg}^2\, \gamma \,.\, \sin^2 \gamma$;

e) $(1 + \mathrm{tg}^2\, \gamma) \cos^2 \gamma$; f) $\sqrt{1 + \dfrac{2}{\mathrm{tg}\, \alpha + \mathrm{cotg}\, \alpha}}$;

g) $\sqrt{\mathrm{tg}\, \alpha + \sin \alpha} + \sqrt{\mathrm{tg}\, \alpha - \sin \alpha}$.

86. Dokažte: a) $\sin^2 \gamma - \sin^2 \delta = \cos^2 \delta - \cos^2 \gamma$;

b) $\dfrac{\mathrm{tg}\, \alpha + \mathrm{tg}\, \beta}{\mathrm{cotg}\, \alpha + \mathrm{cotg}\, \beta} = \mathrm{tg}\, \alpha\, \mathrm{tg}\, \beta$;

c) $\dfrac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\, x} + \dfrac{1}{1 + \mathrm{cotg}^2\, x} = 1$.

***87.** Dokažte: a) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$; b) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{1}{2} \sin^2 2x$;

c) $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}$; d) $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}$; e) $2 \sin \alpha +$ $+ \sin 2\alpha = 4 \sin \alpha \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}$.

88. Upravte na součin: a) $\sin 75° \pm \sin 15°$; b) $\cos 75° \pm \cos 15°$; c) $\sin 3\alpha \pm \sin \alpha$; d) $\cos \alpha \pm \cos 3\alpha$; e) $1 \pm \sin \alpha$; f) $\cos (2\alpha - \beta) + \cos \beta$.

*89. Přeměňte na tvar vhodný k logaritmování: a) $1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}$;

b) $1 + \sin x - \cos x$; c) $\cos x + \sin 2x - \cos 3x$;

d) $2 + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} 2x$; e) $\frac{1 + (\operatorname{tg} 2x) \operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x}$;

f) $\operatorname{tg} x - 1 + (\sin x)(1 - \operatorname{tg} x) + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$;

g) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$ pro $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

$\boxed{90.}$ Dokažte: a) $\sin x \left(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg} x$;

b) $\operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg} n\beta + \operatorname{tg} n\gamma = \operatorname{tg} n\alpha \,.\, \operatorname{tg} n\beta \,.\, \operatorname{tg} n\gamma$,
pro $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, n číslo celé.

Řešení

Sledujte úpravy: a) $\sin x \dfrac{\cos x \cos \frac{x}{2} + \sin x \sin \frac{x}{2}}{\cos x \,.\, \cos \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} x$,

$\sin x \dfrac{\cos\left(x - \frac{x}{2}\right)}{\cos x \cos \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} x$, $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$. Tím je důkaz proveden.

b) $\operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg} n\beta + \operatorname{tg} n\gamma = \operatorname{tg} n\alpha + \dfrac{\operatorname{tg} n\beta + \operatorname{tg} n\gamma}{1 - \operatorname{tg} n\beta \,.\, \operatorname{tg} n\gamma}$.
$.\,(1 - \operatorname{tg} n\beta \,.\, \operatorname{tg} n\gamma) = \operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg}(n\beta + n\gamma)$.
$.\,(1 - \operatorname{tg} n\beta \operatorname{tg} n\gamma) = \operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg} n(\pi - \alpha)\,(1 - \operatorname{tg} n\beta \,.\, \operatorname{tg} n\gamma) =$
$= \operatorname{tg} n\alpha - \operatorname{tg} n\alpha\,(1 - \operatorname{tg} n\beta \,.\, \operatorname{tg} n\gamma) = \operatorname{tg} n\alpha \,.\, \operatorname{tg} n\beta \,.\, \operatorname{tg} n\gamma$.

Tím je důkaz tvrzení proveden.

91. Dokažte správnost rovností: a) $\dfrac{\sin \alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$;

b) $\dfrac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \dfrac{\alpha}{2}$; c) $\dfrac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg}^3 \alpha$;

d) $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin^3 \alpha}{\cos 3\alpha - \cos^3 \alpha} = -\operatorname{cotg} \alpha$.

*92. Dokažte: a) $\sin^2 \left(\dfrac{\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2 \left(\dfrac{\pi}{8} - \alpha\right) = \dfrac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$;

b) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$; c) $\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{cotg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$;

d) $\frac{\sin\alpha+\cos(2\beta-\alpha)}{\cos\alpha-\sin(2\beta-\alpha)}=\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$;

e) $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; f) $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

g) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}=\operatorname{cotg}\alpha$; h) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=1$.

93. Dokažte, že pro úhly trojúhelníka platí:

a) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;
b) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta-\sin 2\gamma=4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$;
c) $\operatorname{tg} 2\alpha+\operatorname{tg} 2\beta+\operatorname{tg} 2\gamma=\operatorname{tg} 2\alpha\,.\operatorname{tg} 2\beta\,.\operatorname{tg} 2\gamma$;
d) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$;
e) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;
f) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma=2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$;
g) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\gamma=1-2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

[Návod: a), b) Vyjádřete jako součin $\sin 2\alpha+\sin 2\beta$ a položte $\sin 2\gamma=-\sin 2(\alpha+\beta)=-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$.
c) Vyjděte ze vztahu $\operatorname{tg}(2\alpha+2\beta)=\operatorname{tg}(360°-2\gamma)=-\operatorname{tg} 2\gamma$ a nahraďte $\operatorname{tg}(2\alpha+2\beta)$ vztahem podle vzorce pro tangentu součtu.
d) Umocněte identitu $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ dvěma a osamostatněte $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$. f) Odečtěte na obou stranách rovnice v případě d) $2\sin^2\gamma$ a uvažte, že $1-\sin^2\gamma=\cos^2\gamma$.]

94. Dokažte, že součet vzdáleností středu kružnice trojúhelníku opsané od jeho stran je roven $s=r\left(4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+1\right)$, kde α, β, γ jsou úhly trojúhelníka a r je poloměr kružnice opsané.

95. Zpaměti: Která z daných goniometrických funkcí je sudá, která lichá:

a) $y=\sin^2 x$; b) $y=\frac{\operatorname{tg} x}{x}$; c) $y=\operatorname{tg}^3 x$; d) $y=x+\sin x$;

e) $y=\frac{1+\cos x}{x^2}$; f) $y=\sin x+\operatorname{tg} x$; g) $y=2+\sin x$; h) $y=$ $=\sin x+x^2$?

96. Dokažte, že platí: a) $\sin 2x < 2 \sin x$, pro $0 < x < \pi$;

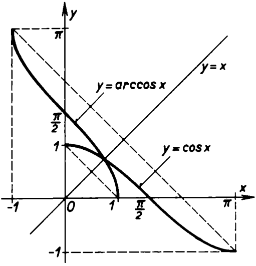
b) $\sin 2x > 2 \sin x$, pro $\pi < x < 2\pi$; c) $\operatorname{tg} 2x > 2 \operatorname{tg} x$, pro $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

97. Určete: a) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$, je-li dáno $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} = a$; b) $\operatorname{tg} \frac{2}{n} \pi$, je-li dán $\sin \frac{\pi}{n} = a$, $\cos \frac{\pi}{n} = b$.

98. Určete množinu čísel, pro která je definována inverzní funkce k funkci $y = \cos x$ a sestrojte její graf.

Řešení (obr. 53)

Inverzní funkce k funkcím goniometrickým se nazývají funkce cyklometrické. K funkci $y = \sin x$ je inverzní funkce $y = \arcsin x$, k funkci $y = \operatorname{tg} x$ pak $y = \operatorname{arctg} x$, k funkci $y = \cos x$ je inverzní funkce $y = \arccos x$, což je velikost oblouku, jehož kosinus je x. K sestrojení grafu funkce $y = \arccos x$ využijeme toho, že graf funkce inverzní je souměrný s grafem funkce dané podle osy $y = x$. Proto je také definiční obor původní funkce roven funkčnímu oboru funkce inverzní a funkční obor původní funkce je roven definičnímu oboru funkce inverzní. Aby funkce daná i inverzní byly prosté, volíme za definiční obor funkce $y = \cos x$ interval $\langle 0, \pi \rangle$. Potom funkční obor funkce $y = \arccos x$ je $y \in \langle 0, \pi \rangle$, definiční obor $\langle -1, 1 \rangle$.



Obr. 53

99. Zpaměti: Určete inverzní funkci k funkci dané: a) $y = \frac{1}{2} \cos x$;

b) $y = \frac{1}{3} \sin x$; c) $y = 2 \operatorname{tg} x$; d) $y = \frac{2}{5} \operatorname{cotg} x$.

100. Zpaměti: Vyložte smysl vztahů:

a) $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; b) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$;

c) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$; d) $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$;

e) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$; f) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$;

g) $\arccos 1 = 0$; h) $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

101. Zpaměti určete hodnotu výrazů: a) $\operatorname{arctg} 0$; b) $\operatorname{arctg} 1$; c) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$; d) $\operatorname{arccotg} \frac{\sqrt{3}}{3}$; e) $\arcsin \sqrt{3}$; f) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

102. Zpaměti určete definiční a funkční obor funkcí:

a) $y = \arcsin 2x$; b) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{5}$; c) $y = \arccos \frac{x}{3}$;
d) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$; e) $y = \arccos \sqrt{x}$; f) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x-5}$;
g) $y = \arccos(x-1)$. V případě a) — c) se pokuste sestrojit graf.

3. TABULKY LOGARITMŮ GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ, ŘEŠENÍ PRAVOÚHLÉHO TROJÚHELNÍKA

103. Vyhledejte z pětimístných tabulek: a) $\log \sin 37° 20'$;
b) $\log \sin 42° 18'$; c) $\log \sin 23°34'25''$;
d) $\log \cos 78°34'40''$; e) $\log \operatorname{tg} 68°32'10''$; g) $\log \cos \frac{2}{3}\pi$;
f) $\log \operatorname{tg} 57° 57'$; h) $\log \operatorname{tg} \frac{3}{16}\pi$; i) $\log \operatorname{tg} 2$;
j) $\log \operatorname{cotg} 11{,}12°$.

104. Určete ostrý úhel ve stupních, je-li: a) $\log \sin = 9{,}86\,934 - 10$;
b) $\log \sin x = 9{,}72\,582 - 10$; c) $\log \cos x = 9{,}94\,317 - 10$;
d) $\log \cos x = 9{,}27\,863 - 10$; e) $\log \operatorname{tg} x = 9{,}59\,059 - 10$;
f) $\log \operatorname{tg} x = 9{,}41\,832 - 10$; g) $\log \cos x = -0{,}46\,271$;
h) $\log \operatorname{cotg} x = -0{,}24\,850$.

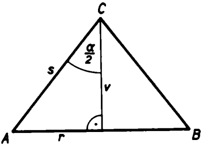
105. Určete x, platí-li: a) $\log \sin x = -0{,}37\,199$;
b) $\log \cos x = -0{,}48\,213$; c) $\log \operatorname{tg} x = 0{,}73\,520$;
d) $\log \operatorname{cotg} x = -0{,}04\,360$.

106. Sestrojte graf funkce (z tabulky hodnot): a) $y = \log \sin x$;
b) $y = \log \operatorname{tg} x$; c) $y = \log \operatorname{cotg} x$; d) $y = \log |\cos x|$;
e) $y = \log |\sin x|$; f) $y = \log |\sin x| + \log \cos x$.

107. Určete velikost úhlu α při vrcholu rotačního kužele, jehož podstava má poloměr $r = 5$ cm a strana s má velikost 8 cm. Jak je tento kužel vysoký?

Řešení (obr. 54)

Osový řez kužele je rovnoramenný trojúhelník, jehož základna je $2\,r$, ramena s a α je úhel proti základně. Výška kužele rozdělí tento trojúhelník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. Pro přehlednost výpočtů volte stálou úpravu, např. jako je zde. Do prvního sloupce píšeme veličiny dané, hledané i vypočteně, do druhého sloupce obecné řešení a do třetího sloupce výpočty (logaritmy).



Obr. 54

Velikost hledaných prvků určete, pokud je to možné, raději z prvků daných než z těch, které jsme už vypočetli. Proč?

$r = 5$ cm	$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s}$	$\log \sin \frac{\alpha}{2} = 0{,}69\,897 - 0{,}90309$
$s = 8$ cm		
$\alpha = \ ?$	$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{8}$	$= 9{,}79\,588 - 10$,
$v = \ ?$		
$\alpha = 77°22'$		
$v = 6{,}2$ cm	$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{v}{r}$	$\frac{\alpha}{2} = 38°41'$.
	$v = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$	$\log v = 0{,}69897 - 9{,}90346 + 10$
		$= 0{,}79\,551$,
		$v = 6{,}2$.

Závěr: Úhel při vrcholu kužele $\alpha = 77°22'$, jeho výška $v = 6{,}2$ cm.

108. Pomocí pětimístných logaritmických tabulek řešte trojúhelník pravoúhlý, je-li dáno: a) $c = 16{,}4$ m, $\alpha = 34°13'$; b) $a = 21$ m, $\beta = 83°30'$;
c) $c = 300$ m, $\alpha = 36°52'$; d) $c = 24{,}3$ m, $\beta = 53°47'$;
e) $a = 144$ m, $b = 165$ m; f) $a = 135$ cm, $c = 205$ cm;
g) $b = 6{,}2$ j, $c = 8{,}3$ j.

109. Pomocí logaritmického pravítka řešte trojúhelník, v němž je dáno:
a) $a = 73{,}5$ mm, $\beta = 28°16'$; b) $b = 16{,}3$ cm, $\beta = 70°$; c) $a = 126$ mm, $b = 76{,}8$ mm; d) $b = 25{,}4$ cm, $\alpha = 22°30'$.

110. Jak velký je výstupový úhel vnějšího okraje šroubového vřetena M 20, jehož průměr $d = 20$ mm a jehož výška závitu je $h = 2{,}5$ mm?

111. Jaký úhel svírá úsečka $AB = 1$ dm s průmětnou π, jestliže délka jejího pravoúhlého průmětu A_1B_1 je 6,5 cm?

112. Do kružnice o poloměru r je vepsán pravidelný n-úhelník. Napište vzorec pro jeho obsah i obvod.

113. Dvě síly F_1, F_2 působí v jednom bodě pod úhlem 90°. Jaká výslednice má stejný účinek jako obě tyto síly a jaké úhly svírá tato síla se směry F_1, F_2?

114. Určete velikost strany a obsahu pravidelného sedmiúhelníka vepsaného do kružnice o poloměru $r = 1$.

115. Najděte velikost stran a úhlů v trojúhelníku pravoúhlém, v němž je dáno: a) $c = 155{,}44$ mm, $\beta = 59°45'20''$; b) $a = 212{,}58$ mm, $\beta = 76°49'38''$; c) $c = 202{,}44$ j, $\alpha = 21°8'12''$; d) $P = 246$ j², $\beta = 38°52'40''$.

116. Pomocí logaritmického pravítka určete zbývající prvky pravoúhlého trojúhelníka:

a) $a = 64{,}6$ cm, $c = 84{,}5$ cm; d) $P = 17$ cm², $a = 5{,}4$ cm;
b) $a = 27{,}5$ cm, $b = 34{,}8$ cm; e) $a = 18{,}5$ cm, $\alpha = 42°\,24'$;
c) $v_c = 5$ cm, $\alpha = 48°15'$; f) $P = 100$ cm², $\alpha = 32°20'$.

117. V lichoběžníku $ABCD$ je dána větší základna $AB = a$, jeho výška v a úhly α, β ramen se základnou AB. Určete velikost druhé základny $CD = c$ a ramen $BC = b$, $AD = d$; proveďte diskusi. Řešte pro $a = 56{,}3$ j, $v = 20$ j, $\alpha = 60°$, $\beta = 48°$.

118. Štít na domě 12,5 m širokém má tvar rovnoramenného trojúhelníka o výšce 4 m; jaký úhel svírají obě části střechy?

119. Sečna dělí délku kružnice na dvě části v poměru 4 : 5. Jaká je její vzdálenost od středu kružnice?

120. Vypočtěte úhel tečen vedených ke kružnici o poloměru $r = 1{,}7$ cm z bodu, jehož vzdálenost od středu kružnice je $a = 4{,}6$ cm.

***121.** Dvě kola o poloměrech $r_1 = 56$ cm, $r_2 = 25$ cm, jejichž středy mají vzdálenost $c = 335$ cm, se mají spojit řemenem. Jak dlouhý bude řemen, otáčejí-li se kola: a) v témž smyslu; b) ve smyslech opačných? Řešte též pro $r_1 = 40$ cm, $r_2 = 20$ cm, $c = 90$ cm.

122. Jaká je výška v úseče příslušející středovému úhlu 110° v kružnici o poloměru $r = 7{,}5$ cm?

123. Jaké je dovolené zatížení dutého sloupku, jehož průřez je omezen pravidelným osmiúhelníkem opsaným kružnici o průměru $d_1 = 230$ mm a soustřednou kružnicí o průměru $d_2 = 210$ mm. Dovolené napětí je $z = 7$ kp/mm².

124. Kolik m^3 vody proteče za hodinu kanálem lichoběžníkového průřezu, je-li šířka jeho dna $z = 3,5$ m, mají-li jeho stěny sklon 65° a 40° a je-li průměrná výška vody v kanále $h = 1,25$ m, přičemž střední rychlost vody je $v = 0,9$ m/s?

***125.** Dokažte, že v trojúhelníku pravoúhlém platí: a) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{b + c}$;

b) $\sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{2b^2}{c^2}$; c) $a + b = c\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$.

126. Dokažte, že trojúhelník, v němž platí $\sin \alpha : \sin \beta = \cos \beta : \cos \alpha$ je trojúhelník pravoúhlý.

***127.** V pravoúhlém trojúhelníku je odvěsna: a) aritmetický;
b) geometrický průměr
druhé odvěsny a přepony. Určete úhly toho trojúhelníka.

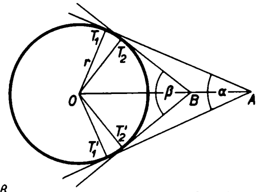
***128.** Hranou krychle je položena rovina tak, že ji dělí ve dvě části, jejichž objemy mají velikosti v poměru $m : n$. Určete úhel této roviny se sousedními stěnami krychle.

129. Trojboký jehlan má výšku $v = 32$ cm a pobočné hrany $s_1 = 40$ cm, $s_2 = 53$ cm, $s_3 = 64$ cm. Jak velké jsou úhly bočních hran s podstavou?

130. Kouli vidíme z jistého bodu v zorném úhlu $\alpha = 37°12'58''$. Přiblížíme-li se k ní o délku $d = 1$ m, vidíme ji v zorném úhlu $\beta = 48°36'18''$. Jaký je její objem?

Řešení (obr. 55)

Objem koule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Poloměr této koule určíme z pravoúhlých trojúhelníků OAT_1, OBT_2, kde O je střed koule, A, B jsou pozorovací body, T_1, T_2 body dotyku tečen vedených z bodů A, B. Potom platí



Obr. 55

$$r = OA \cdot \sin \frac{\alpha}{2}, \; r = OB \cdot \sin \frac{\beta}{2}. \qquad (1)$$

Z těchto rovnic dostaneme

$$r\left(\sin \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}\right) = d \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2},$$

$$r = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}\, d = \frac{d\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\beta+\alpha}{4}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{4}}.$$

Odtud dostaneme

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\beta+\alpha}{4}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{4}}\right)^3.$$

Pro naše hodnoty $\frac{\alpha}{2} = 18°36'29''$, $\frac{\beta}{2} = 24°18'09''$, $\frac{\beta+\alpha}{4} = 21°27'19''$,

$\frac{\beta-\alpha}{4} = 2°50'50'' = 10\,250''$.

$\text{Log}\sin\frac{\beta-\alpha}{4} = \log 10\,250 + S - 10 = 4{,}01\,072 + 4{,}68\,540 - 10 =$ $= 8{,}69\,612 - 10$. $\text{Log}\,V = 1{,}07\,922$, $V = 12{,}00$. Objem pozorované koule je $V = 12\ m^3$.

131. Vrchol věže stojící na rovině vidíme z určitého místa té roviny ve výškovém úhlu 39°25′. Přiblížíme-li se k ní o 50 m, vidíme vrchol té věže V pod úhlem 58°42′. Jak vysoká je věž?

132. Z vrcholu pahorku ležícího 75 m nad vodní hladinou je vidět přesně za sebou 2 lodičky pod hloubkovými úhly $\alpha = 64°$ a $\beta = 48°$. Určete jejich vzdálenost.

***133.** Rotační kužel má při vrcholu úhel $x = 40°12'50''$. Ve vodě je o 476 p lehčí než na vzduchu. Určete velikost strany kužele.

***134.** Na domě jsou dva řádky nápisu. Horní z nich má spodní okraj ve výši 30 m, druhý 15 m nad vodorovnou rovinou. Jak vysoká musí být písmena v prvním i druhém řádku, mají-li být stejně čitelná jako písmena vysoká 80 cm z místa vzdáleného 30 m od příslušné stěny domu ve vodorovném směru ve výšce očí, tj. 1,5 m?

***135.** Sklenice tvaru rotačního válce s podstavou o poloměru 3,2 cm a výškou $v = 9{,}4$ cm je plná vody. O jaký úhel musíme sklenici naklonit, aby z ní vytekla

a) $\frac{1}{20}$ l vody,

b) $\frac{1}{20}$ celkového objemu vody ve sklenici? [Návod: Při naklonění sklenice o úhel α má vytéci $V'\,cm^3$ vody, což je polovina objemu rotačního válce o podstavě s poloměrem r a výšce $x = 2r\,\mathrm{tg}\,\alpha$.]

136. Úhel nakloněné roviny je 18°30′. Jak velká síla udrží v rovnováze břemeno 520 kp, působí-li rovnoběžně: a) s nakloněnou rovinou; b) se základnou nakloněné roviny?

137. Z rotačního válce objemu $V = 156{,}14\ dm^3$ je vyříznut stejně vysoký trojboký hranol, jehož podstava vepsaná do podstavy válce má úhly $\alpha = 35°25'$, $\beta = 44°48'$. Určete objem hranolu.

138. Rovnostranný trojúhelník se otáčí kolem své strany a. Určete objem vzniklého tělesa.

139. Z okna ležícího 8 m nad horizontální rovinou vidíme vrchol věže ve výškovém úhlu 53°20′, její patu v hloubkovém úhlu 14°15′. Jak vysoká je věž?

***140.** Výška kruhového mostního oblouku je $v = 24$ m a jeho rozpětí $d = 82$ m. Vypočtěte poloměr mostního oblouku a velikost příslušného středového úhlu. Kolik m^2 plochy průřezu bude třeba vyzdít, je-li vozovka 1 m nad nejvyšším bodem oblouku?

141. V jaké zeměpisné šířce vrhá svislá tyč vysoká 2,5 m v době rovnodennosti v poledne na vodorovnou rovinu stín 3,6 m dlouhý?

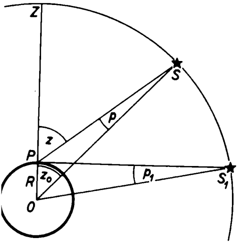
***142.** Letec spatřil objekt A na povrchu zemském, dívaje se směrem severním, v hloubkovém úhlu $\alpha = 33°$. O tři km dále směrem k západu spatřil týž objekt v hloubkovém úhlu $\beta = 21°$. Jak vysoko letěl?

143. Aby bylo možno změřit výšku vysílacího systému televizní antény, byla na vodorovné rovině změřena délka úsečky $AB = a$, která leží v téže svislé rovině jako anténa. Vrchol antény je vidět z bodu A pod výškovým úhlem α, z bodu B pod úhlem β. Z bodu B je pak dolní konec antény zaměřen ve výškovém úhlu β_2. Určete výšku antény: a) obecně; b) pro $a = 12$ m, $\alpha = 34°$, $\beta = 46°$, $\beta_2 = 42°$; c) $a = 16$ m, $\alpha = 39°$, $\beta_1 = 62°$, $\beta_2 = 59°$. (Použijte logaritmického pravítka.)

144. Určete velikost strany a úhlů pravoúhlého trojúhelníka, v němž je dáno: a) $a + c = 338$ m, $b = 260$ m; b) $c - b = 3$ m, $a = 10$ m; c) $a + b = 281$ m, $c = 229$ m; d) $a + b + c = 2064$ j, $\varrho = 95$ j; e) $r = 12{,}5$ j, $\varrho = 3$ j; f) $\varrho = 3$ m, $P = 54\ m^2$. Pokuste se o řešení konstruktivní.

145. Určete ostatní prvky trojúhelníka pravoúhlého: a) $r = 92{,}5$ j, $\beta = 55°47'40''$; b) $r = 4{,}325$ j, $a = 8{,}16$ j; c) $P = 420\ j^2$, $\alpha = 36°52'12''$; d) $P = 780\ j^2$, $\gamma = 30°10'54''$.

$\boxed{\textbf{146.}}$ Určete vzdálenost Slunce od středu Země, je-li velikost poloměru Země R a paralaxa Slunce $p_1 = 8{,}88''$.



Obr. 56

Řešení (obr. 56)

Je-li P místo pozorovatele na povrchu Země, Z jeho zenit a S hvězda, z níž by bylo vidět poloměr Země R pod úhlem p, pak úhel $SPZ = z$ je pozorovaná zenitová vzdálenost. (O je střed Země.) Pro přesná měření je třeba znát z_0. Tuto vzdálenost dostaneme ze vztahu $z_0 = z - p$. Hodnota p je proměnná a největší je v bodě S_1, který leží v horizontální rovině pozorovatele P. Úhel $PS_1O = p_1$ je horizontální paralaxa. Pro vzdálenost Slunce od středu Země pak platí $d = \dfrac{R}{\sin p_1}$. Odtud logaritmicky $d = 23\,229\ R$.

147. Stálice Sírius, nejjasnější hvězda v souhvězdí Velkého psa, má roční paralaxu 0,38″. (Roční paralaxa je úhel, pod nímž bychom z hvězdy viděli poloměr zemské dráhy, tj. $148 \cdot 10^6$ km.) Určete vzdálenost Síria od Země. Jako jednotku délky volte světelný rok, tj. dráhu, kterou urazí světlo za jeden rok.

148. Zdánlivý průměr Slunce ze Země v perihéliu je $\alpha = 32'36{,}5''$. Spočtěte z toho skutečný průměr Slunce, je-li nejmenší vzdálenost Země od Slunce $146{,}2 \cdot 10^6$ km. Určete zdánlivý průměr Slunce v aféliu (vzdálenost Země od Slunce $151{,}1 \cdot 10^6$ km).

149. Střední vzdálenost Měsíce od Země je 60,2778 poloměrů Země. Jak velká je horizontální paralaxa Měsíce?

150. Určete vzdálenost Měsíce od Země, jsou-li známy zeměpisné souřadnice Stockholmu $\varphi_2 = 59°20'31''$ ($z_2 = 61°13'33''$) a Kapského Města $\varphi_1 = -33°54'56''$ ($z_1 = 33°20'24''$), ležících na témže poledníku. [z_1, z_2 jsou zenitové vzdálenosti.]

151. Dva shodné rovnoramenné trojúhelníky mají společnou základnu $a = 40{,}5$ dm a úhly proti ní ležící $\alpha = 70°20'$. Odchylka jejich rovin $\varphi = 42°50'$. Určete vzdálenost třetích vrcholů.

152. V pravidelném čtyřbokém jehlanu je odchylka pobočné hrany od podstavy $\varphi = 48°30'$. Délka strany podstavy je $a = 6$ cm. Vypočtěte obsah průseku vedeného úhlopříčkou podstavy kolmo na pobočnou hranu.

153. Vrcholem pravidelného čtyřbokého jehlanu je vedena rovina svírající s rovinou podstavy úhel φ, jejíž průsečnice s rovinou podstavy je rovnoběžná s hranou podstavy a. Úhel bočné stěny při vrcholu jehlanu je α. Určete obsah řezu.

154. Povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu je S, úhel bočné stěny při jeho vrcholu je α. Určete výšku jehlanu.

155. V podstavě jehlanu leží pravoúhlý trojúhelník, jehož jeden ostrý úhel má velikost α a poloměr vepsané kružnice r. Každá bočná hrana svírá s podstavou úhel α. Určete objem jehlanu.

156. Do koule o poloměru R je vepsán komolý kužel. Podstavy komolého kužele oddělují od koule dvě kulové úseče, jejichž středové úhly jsou α a β. Určete plášť komolého kužele.

157. Určete objem pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož bočná hrana má délku 1 a úhel dvou sousedních stěn má velikost β.

4. GONIOMETRICKÉ ROVNICE

58. Pro která x je splněna rovnice $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}8$?

Řešení

Položme $x + \frac{\pi}{4} = \alpha$. Potom $\cos\alpha = 0{,}8$ a z tabulek goniometrických funkcí najdeme hodnotu $\alpha = 36°52'$. Protože perioda funkce $\cos\alpha$ je 360°, platí též $\cos(36°52' \pm k\,.\,360°) = 0{,}8$. Proto $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(36°52' \pm k\,.\,360°)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Z toho vyplývá $x + \frac{\pi}{4} = 36°52' \pm k\,.\,360°$, $x = -8°8' + k\,.\,360°$. Daná goniometrická rovnice má tedy nekonečně mnoho řešení, lišících se o násobek 360°.

59. Pro která x platí $\operatorname{cotg} 2x = -\operatorname{cotg} 110°$?

Řešení

Protože $\operatorname{cotg}(2R - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$, platí $\operatorname{cotg} 110° = -\operatorname{cotg}(180° - 110°) = -\operatorname{cotg} 70°$, a tedy $-\operatorname{cotg} 110° = \operatorname{cotg} 70° = \operatorname{cotg} 2x$. Perioda funkce $\operatorname{cotg}\alpha$ je 180°, platí proto $\operatorname{cotg}(180° + \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$, $\operatorname{cotg}(k\,.\,180° + \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$. Z rovnosti goniometrických funkcí úhlů vyplývá i rovnost velikosti příslušných úhlů. Tedy $2x = k\,.\,180° + 70°$, $x = 35° + k\,.\,90°$, kde $k = 0,1,2,\ldots$.
Zkouška správnosti: $\operatorname{cotg} 2x = \operatorname{cotg}(70° + k\,.\,180°) = \operatorname{cotg} 70°$.

Závěr: Daná rovnice má nekonečně mnoho řešení tvaru
$x = 35° + k\,.\,90°$, $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$.

160. Řešte zpaměti:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$; b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\sin 2x = 0{,}5$;

d) $\cos 2x = 1$; e) $\operatorname{tg} x = 1$; f) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

g) $\operatorname{cotg} 6x = -1$; h) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

161. Určete x z goniometrických rovnic:

a) $\sin x = \sin 10°$; b) $\cos x = \cos 33°$; c) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 112°$;

d) $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} 190°$; e) $\sin x = -\sin 250°$;

f) $\cos x = -\sin 10°45'12''$; g) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} 60°$.

162. Řešte:

a) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$; b) $\cos x = \cos y$;

c) $\cos x = \sin 3x$; d) $\cos x = -\sin y$.

163. Řešte goniometrické rovnice:

a) $\cos(x - 52°) = 1$; b) $\sin(120° - x) = \frac{1}{4}$; c) $\sin 4x = \sin 3x$;

d) $\sin x = \sin y$; e) $\sin x = -\sin y$.

164. Řešte zpaměti:

a) $\sin |x| = 1$; b) $|\sin x| = 1$; $\cos x^2 = 1$.

165. Řešte zpaměti:

a) $\cos 3x \,.\, \sin 2x = 0$; b) $\sin x \,.\, \operatorname{cotg} 2x = 0$;

c) $(\sin x)(1 + 2\cos x) = 0$; d) $\dfrac{\sin 2x}{\cos x} = 0$;

e) $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$.

$\boxed{\textbf{166.}}$ Řešte goniometrickou rovnici:

$\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ pro $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

Řešení lze provést:

a) Substitucí $|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

Potom $\sin x + \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2}$, $2\sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 - 2\sin x$. Celou rovnici umocníme, což je dovolená úprava, je-li $1 - 2\sin x \geqq 0$, tj. $\sin x \leqq \frac{1}{2}$, a tedy $x \leqq 30°$; $150° \leqq x \leqq 180°$ $4(1 - \sin^2 x) = 1 - 4\sin x + 4\sin^2 x$, $8\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0$. $\sin x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{112}}{16} =$

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{4}$. $\sin x_1 = 0{,}91145$, z toho $x_1 = 65°42' + k \,.\, 360°$, $\sin x_2 =$ $= -0{,}41145$, $x_2 = -24°18' + k \,.\, 360°$. První kořen zřejmě odporuje předpokladu ($x \leqq 30°$), a proto dané rovnici nevyhovuje.

b) Úpravou daného výrazu na $\sin(x + 45°)$. Je totiž $\sin(x + 45°) =$ $= \sin x \cos 45° + \cos x \sin 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (\sin x + \cos x)$.

Proto je možno psát $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin (x + 45°)$. Potom $\sqrt{2} \,.$ $. \sin (x + 45°) = \dfrac{1}{2}$, $\sin (x + 45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

$\log \sin (x + 45°) = \dfrac{1}{2} \,.\, 0{,}30103 - 0{,}60206 = 9{,}54845 - 10$. $x + 45° =$ $= 20°42'18''$, $x = -24°17'42'' \pm k \,.\, 360°$ jako v příkladě a). Je možný ještě jiný způsob řešení?

Závěr: Řešení rovnice $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{2}$ je $x = -24°18'$.

167. Řešte rovnici:

$3 \cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$.

Řešení

Tuto rovnici upravíme nejprve tak, abychom v ní dostali jedinou goniometrickou funkci. Dělíme proto všechny členy dané rovnice výrazem $\cos^2 x \neq 0$, tj. předpokládáme, že $x \neq \dfrac{\pi}{2}$. Tím dostaneme $3 - \operatorname{tg}^2 x -$ $-2 \operatorname{tg} x = 0$, a odtud $\operatorname{tg} x_1 = 1$, $\operatorname{tg} x_2 = -3$. Proto je $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = \operatorname{arctg} (-3) + k\pi = k\pi - \operatorname{arctg} 3 = k\pi - 71°34'$.

Zkouška správnosti:

a) $3 \cos^2 \left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right) - \sin^2 \left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right) - \sin \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \overset{?}{=} 0,$

$3 \cdot \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} - 1 = 0$.

b) $3 \,.\, 0{,}316^2 - 0{,}948^2 + 0{,}599 \doteq 0{,}299 + 0{,}599 - 0{,}898 = 0$.

Oba kořeny $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ a $x_2 = k\pi - 71°34'$ dané rovnici vyhovují.

168. Řešte goniometrické rovnice:

a) $\dfrac{5 + \sin x}{1 - \sin x} = 3$; b) $2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{cotg} x = 1$;

c) $4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$; d) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;
e) $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$; f) $2\sin^2 x = 3\cos x$.

169. Řešte goniometrické rovnice:
a) $\cos^2 x - \sin^2 x - \frac{1}{4} = 0$; b) $\sin^2 x + 3\cos^2 x + \cos x = 1$;
c) $2\sin^2 x - 3\cos^2 x = 2\sin x$; d) $\operatorname{tg}^2 x + 4\sin^2 x - 3 = 0$;
e) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 3 = 0$.

170. Řešte goniometrické rovnice:
a) $\sin x = \cos x - 1$; b) $\sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} x$;
c) $15\sin x + 10\cos x = 12$; d) $\sin x + 2\cos x = 2$;
e) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$; f) $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$;
g) $12\cos x + 5\sin x = 11{,}2$; h) $7\sin x + 4\cos x = 8$.

171. Řešte goniometrické rovnice:
a) $\cos 2x = 2\cos x$; b) $\sin 2x = 3\sin^2 x$; c) $\operatorname{tg}\alpha = \sin 2\alpha$;
d) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = 4\sin 2\alpha$; e) $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} \cdot \operatorname{tg} x = 1$.

172. Řešte rovnice:
a) $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$;
b) $6\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 2$;
c) $\sin^2 x + \frac{3}{2}\cos^2 x = \frac{5}{2}\sin x\cos x$;
d) $3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$;
e) $\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3} \cdot \sin x\cos x = 1$;
f) $\sin^2 x - 6\cos^2 x + \sin x\cos x = 0$.

173. Řešte:
a) $\frac{1 + \cos x}{\sin x} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; b) $a \cdot \sin x = b \cdot \cos x$;
c) $a\sin x = b\operatorname{tg} x$; d) $\sin 2x = b\cos x$;
e) $\sin(a + x) + \sin(a - x) = c$.

174. Řešte rovnice:
a) $\sin 3x = \sin 2x - \sin x$; b) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$;
c) $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = \frac{4}{3}\sin 2x$; d) $\cos 2x + \sin 2x = \cos x + \sin x$;
e) $\sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 1$.

175. Těleso se pohybuje rovnoměrně po kruhové dráze poloměru r úhlovou rychlostí ω. Stanovte okamžiky t, kdy je vzdálenost tělesa od průměru ASB (kde A je počáteční bod pohybu, S střed kružnice a B je bod kružnice na přímce AS) právě rovna danému číslu $a < r$.

***176.** Dva závodníci se pohybují po kruhové dráze o poloměru r pohybem rovnoměrným, přičemž startovali z téhož místa v okamžiku $t = 0$. Určete čas t, v němž jejich vzájemná vzdálenost bude a, jestliže poměr jejich úhlových rychlostí je 1 : 2 a jestliže se pohybují a) v témže smyslu, b) v opačném smyslu.

177. Ve kterém okamžiku po 13 h je vzdálenost konce minutové ručičky od konce hodinové ručičky rovna $v = \sqrt{R^2 + r^2}$, je-li délka minutové ručičky rovna R a hodinové r?

178. Do koule je vepsán rotační kužel tak, že se jeho plášť rovná obsahu kulového vrchlíku, který má s kuželem společnou podstavu. Jak velký je úhel osového řezu kužele při jeho vrcholu?

Řešení

Z daných podmínek vyplývá $\pi x s = 2\pi r (r - a) \ldots$ (1), kde a je vzdálenost podstavy od středu koule, x je poloměr podstavy kužele, s délka jeho strany. Platí: $x = r \sin 2\omega$, $a = r \cos 2\omega$ a $s = 2r \cos \omega$, když ω je poloviční úhel při vrcholu kužele. Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice (1), dostaneme $r^2 \sin 2\omega \cos \omega = r^2(1 - \cos 2\omega)$ neboli $\sin \omega \cos^2 \omega = \sin^2 \omega$. Protože $\omega \neq 0$, můžeme tuto rovnici dělit $\sin \omega$, čímž dostaneme $\sin^2 \omega + \sin \omega - 1 = 0$. Její kořeny jsou $(\sin \omega)_{1,2} = = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, z nichž vyhovuje jen $\sin \omega = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$, neboť ω musí být ostrý úhel. $\log \sin \omega = 9{,}79101 - 10$, $\omega = 38°10'23''$.

Závěr: Úhel při vrcholu kužele v osovém řezu je $2\omega = 76°20'46''$.

179. Povrch kulové výseče je roven čtvrtině povrchu koule, z níž byla vyťata. a) Který středový úhel přísluší kulové výseči, b) v kterém poměru je povrch kulové výseče k povrchu kulové úseče?
[Návod: Povrch kulové výseče je $2\pi rv + \pi \varrho r$. Platí tedy $\pi r(2v + \varrho) = = \pi r^2$.]

180. Poměr součtu (rozdílu) velikostí odvěsen pravoúhlého trojúhelníka k délce jeho přepony je p. Určete velikosti úhlů tohoto trojúhelníka.

***181.** Určete úhly v rovnoramenném lichoběžníku, jehož ramena jsou shodná s menší základnou a v němž poměr velikosti větší základny k velikosti výšky je m. (Např. pro $m = 2$.)

182. V rovnoramenném trojúhelníku je poměr velikosti ramena ke vzdálenosti protějšího vrcholu od středu kružnice vepsané $\frac{15}{7}$. Vypočtěte velikost úhlů toho trojúhelníka.

183. Počáteční rychlost střely vystřelené z děla pod výškovým úhlem $\alpha = 30°$, je 600 m/s. Určete dálku dostřelu. Pro které α bude dálka dostřelu největší? (Bez ohledu na odpor vzduchu.)

184. Cíl, který je na stoupajícím svahu 16°, je od stanoviště děla podle mapy vzdálen 3 km. Pod jakým úhlem musí střílet dělo, aby zasáhlo cíl, je-li počáteční rychlost náboje 600 m/s (bez ohledu na odpor vzduchu)?

185. Řešte goniometrické rovnice:

a) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = 0$;
b) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0$;
c) $\sin 2x + \sin 3x = \sin x$; d) $\cos x - \cos 2x - \cos 4x = 0$;
e) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

186. Řešte goniometrické rovnice:

a) $\frac{\sin x}{\sin y} = 2,\ x + y = 120°$;
b) $\sin x \sin y = \frac{3}{4},\ \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} y = 3$;
c) $\sin x + \cos y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2},\ x + y = 60°$;
d) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = 3,\ x - y = 30°$;
e) $\frac{\sin x}{\sin y} = 1{,}275,\ x + y = 83°40'$.

187. Řešte goniometrické rovnice:

a) $x + y = 120°,\ \sin x + \sin y = 1{,}5$;
b) $x - y = 60°,\ \cos x - \cos y = -\frac{1}{2}$;
c) $x + y = 30°,\ \sin x : \sin y = 2$;
d) $x + y = 45°,\ \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$;
e) $\sin x + \sin y = 1,\ \cos x + \cos y = \sqrt{2}$.

188. Řešte rovnice:

a) $\arcsin(x + 1) = \frac{\pi}{6}$; b) $\arcsin(2x - 3) = \frac{5\pi}{2}$;

c) $\arccos(x^2 - 5x + 7) = 0$; d) $\operatorname{arctg}(x^2 - 4x + \sqrt{3} + 3) = \frac{\pi}{3}$;

e) $\operatorname{arccotg}(x^2 - 8x + 15 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$.

189. Ve tvaru algebraické rovnice napište funkční závislost:

a) $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$; b) $\arccos x = \operatorname{arccotg} \frac{x}{y}$;

c) $\arccos y = \operatorname{arctg} x$.

190. Graficky řešte rovnici:
a) $x^2 = \sin x$; b) $\cos x = x$; c) $\sin x = x$; d) $\operatorname{tg} x = x$.
Kolik řešení má každá z těchto rovnic?
[Návod k a): Položíme $y = x^2$, $y = \sin x$. První souřadnice společného bodu grafů obou funkcí bude pak řešením dané rovnice.]

191. Řešte graficky:

a) $\frac{1}{x} = \sin x$; b) $x^2 - \operatorname{tg} x = 0$; c) $\sin 2x = \cos x$.

192. Kolik reálných řešení má rovnice:
a) $2^x = \sin x$; b) $2x = 5\pi(1 - \cos x)$; c) $\operatorname{tg} x = 2x + 3$.

193. Řešte graficky rovnice:
a) $(ax + b) \sin x = 1$; b) $\sin x + 2x - 1 = 0$;
c) $a \sin x - 3x + 4 = 0$; d) $16^{\sin x} + 3 \cdot 4^{\sin x} = 0$.

194. Pro která x nabývá funkce $y = \sin \frac{1}{x}$ hodnoty:

a) 0; b) 1; c) -1?

195. Dokažte, že jsou ekvivalentní rovnice $\sin^2 2x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$,

$\sin 3x \cdot \sin x = \frac{1}{2}$.

196. Zjistěte, zda jsou ekvivalentní rovnice $\operatorname{tg} x\,(1 - 2\cos x) \cdot (2 + \sin x) = 0$ a $\operatorname{tg} x\,(1 - 2\cos x) = 0$.

197. Jaké musí být a, aby daná rovnice měla řešení:
a) $7 \sin^2 x + 3 \cos^2 x = a$; b) $a \sin^2 x + 5 \cos^2 x = 7$?

5. SINOVÁ A KOSINOVÁ VĚTA

Úlohy 198, 200, 201 řešte zpaměti.

198. Odůvodněte, že v trojúhelníku a) sinus součtu kterýchkoli dvou úhlů je kladný, kdežto kosinus, tangens a kotangens toho součtu mohou být záporné; b) každá funkce polovičního součtu dvou úhlů je kladná; c) kosinus polovičního rozdílu dvou úhlů je vždy kladný, kdežto sinus, tangens a kotangens tohoto rozdílu mohou být i záporné.

199. Odvoďte sinovou větu a vztah platný mezi stranou trojúhelníka, protilehlým úhlem a poloměrem kružnice opsané.

200. Ze sinové věty určete poměr velikostí stran trojúhelníka, jehož úhly jsou: a) 30°, 60°, 90°; b) 45°, 60°, 75°; c) 15°, 45°, 120°. Načrtněte.

201. Určete velikost úhlů a poměr stran v trojúhelníku, jehož úhly jsou v poměru a) 1 : 2 : 3; b) 2 : 3 : 4, c) 4 : 5 : 6.

202. Určete velikost úhlů v trojúhelníku, jehož poměr stran je: a) 2 : 3 : 4; b) 4 : 5 : 6. Existuje trojúhelník, jehož poměr stran je 1 : 2 : 3?

203. V trojúhelníku jsou dány strany a, b a podmínka $\alpha = 2\beta$. Určete jeho úhly pro $a = 32$ cm, $b = 21$ cm.

204. Nepřístupný bod C v rovině byl zaměřen ze dvou stanovišť A, B, jejichž vzdálenost je $c = 56$ m, pod úhly $BAC = 49°57'$, $ABC = 68°20'$. Jaká je vzdálenost bodu C od obou pozorovatelen? Užijte logaritmického pravítka.

Řešení

Existuje-li řešení, označme vzdálenost $AC = b$, vzdálenost $BC = a$. Ze sinové věty pak dostáváme $a = \dfrac{c \sin \alpha}{\sin \gamma}$, $b = \dfrac{c \sin \beta}{\sin \gamma}$.

$c = 56$	$a = \dfrac{c \sin \alpha}{\sin \gamma}$	$\log c = 1{,}748$
$\alpha = 49°57'$		$\log \sin \alpha = 9{,}884$
$\beta = 68°20'$		$\log \sin \beta = 9{,}968$
$a = ?;\ b = ?;$	$b = \dfrac{c \sin \beta}{\sin \gamma}$	$\log \sin \gamma = 9{,}945$
$a = 48{,}7$ m		$\log a = 1{,}687$
$b = 59{,}1$ m	$\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$	$\log b = 1{,}772$

Bod C je vzdálen od zaměřovacího bodu A 59,1 m, od bodu B 48,7 m.

205. Určete ostatní prvky trojúhelníka, v němž je dáno: a) $b = 16{,}52$ m, $\beta = 38°49'48''$, $\gamma = 25°31'12''$; b) $a = 135{,}3$ m, $\beta = 48°50'32''$, $\gamma = 107°16'17''$; c) $v_c = 28$ j, $\alpha = 51°19'$, $\beta = 67°38'$; d) $b = 17{,}5$ j, $c = 26{,}3$ j, $\beta = 33°20'$.

206. Určete ostatní úhly v trojúhelníku, v němž je: a) $b = 13{,}6$ m, $c = 22{,}5$ m, $\beta = 21°38'10''$; b) $a = 746{,}38$ m, $c = 1854{,}4$ m, $\gamma = 145°6'40''$; c) $c = 56$ m, $\alpha = 49°57'$, $\beta = 68°20'$; d) $b = 16{,}52$ m, $\beta = 38°49'48''$, $\gamma = 25°31'12''$.

207. V trojúhelníku je dáno: a) $a = 20$ m, $b = 13$ m, $\alpha = 67{,}38°$;
b) $c = 5{,}1$ km, $\alpha = 148{,}11°$, $\beta = 16{,}26°$;
c) $a = 65$ m, $b = 46$ m, $\alpha = 42{,}5°$.
Určete ostatní prvky.

208. Ze dvou míst A,B na moři, jejichž vzdálenost je 3 740 m, byla pozorována loď L pod úhly $LAB = 72°35'$, $LBA = 81°41'$. Vypočtěte vzdálenost lodi od obou míst A,B.

209. Cíl C je pozorován ze dvou pozorovatelen A,B, které jsou od sebe vzdáleny 350 m. Úhel $BAC = 793$ dílců, úhel $ABC = 1\,258$ dílců (dc). Vypočtěte vzdálenost AC. [Poznámka: $360° = 6\,000$ dc.]

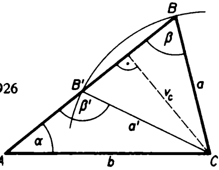
210. Pomocí logaritmického pravítka určete ostatní prvky trojúhelníka: a) $c = 218$ j, $\alpha = 56°51'$, $\beta = 50°57'$; b) $b = 795$ j, $\beta = 55°20'$, $\gamma = 44°40'$; c) $a = 65$ j, $b = 46$ j, $\alpha = 42°30'$; d) $b = 17{,}5$ j, $c = 26{,}3$ j, $\beta = 33°20'$.

$\boxed{\textbf{211.}}$ Určete ostatní prvky trojúhelníka ABC, je-li $a = 81{,}2$ j, $b = 118$ j, $\alpha = 38°20'$.

Řešení (obr. 57)

Porovnáme čísla a, $b \sin\alpha = v$. Protože je $a > v$, má úloha dvě řešení.

$\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$	$\log a = 1{,}9096$
$a = 81{,}2$ j,	$\log b = 2{,}0719$
$b = 118$ j,	$\log\sin 38°20' = 9{,}7926$
$\alpha = 38°20'$	$\log\sin\beta = 9{,}9549$,
$c = ?$	$\beta = 64°20'$,
$\beta = ?$	$\beta' = 115°40'$.
$\beta = 64°20'$	
$\beta' = 115°40'$	



Obr. 57

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 77°20'$,	$\log\sin\gamma = 9{,}9893$
$\gamma' = 26°00'$	
$c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$	
$c = 127{,}7 \doteq 128$	$\log c = 2{,}1063$
$c' = 57{,}4 \doteq 57$	$\log c' = 1{,}7588$

Úloha má opravdu dvě řešení, a to: $c = 128$ j, $\alpha = 77°20'$, $\beta = 64°20'$;
$c' = 57$ j, $\gamma' = 26°$, $\beta' = 115°40'$.

Kolik řešení má úloha, jestliže: a) $a = b \sin\alpha$; b) $a < b \sin\alpha$? Jaký trojúhelník vznikne v případě a)?

212. Dokažte poučku známou z planimetrie: Osa úhlu dělí protější stranu trojúhelníka v poměru zbývajících stran.

213. Vypočtěte velikost ostatních prvků trojúhelníka, v němž jsou dány velikosti dvou stran a velikost úhlu ležícího proti kratší z nich:
a) $a = 7{,}572$ km, $c = 9{,}861$ km, $\alpha = 44°13'$;
b) $b = 9{,}25$ m, $c = 12{,}34$ m, $\beta = 23°50'$;
c) $a = 172{,}4$ m, $b = 236{,}7$ m, $\alpha = 37°46'20''$.

214. Dokažte, že pro obsah trojúhelníka platí vztahy:

a) $P = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$; b) $P = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$; c) $P = \frac{abc}{4r}$;

d) $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde a, b, c jsou strany daného trojúhelníka, α, β, γ jeho úhly, r poloměr kružnice opsané, s poloviční obvod. [Návod: Do vzorce a) dosaďte za b ze sinové věty $b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$ a použijte vztahu $\sin\alpha = \sin[2R - (\beta+\gamma)] = \sin(\beta+\gamma)$; pro c) z úlohy 199 dosaďte do a) $\sin\gamma = \frac{c}{2r}$; pro d) $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ a použijte dále vzorců pro hodnoty goniometrických funkcí polovičního úhlu:
$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{b \cdot c}}$, kde s je poloviční obvod.]

215. Určete úhel ležící proti základně trojúhelníka rovnoramenného, je-li dána velikost ramena b a velikost obsahu P:

a) obecně; b) $b = 3$ j, $P = 4{,}5$ j^2; c) $b = 8\sqrt{2}$ j, $P = 8$ j^2.

216. Trojúhelník, v němž je dána strana c a dva úhly k ní přilehlé, rotuje kolem strany c. Určete objem tělesa, které touto rotací vznikne.

217. Jedna strana pole tvaru ostroúhlého trojúhelníka má při silnici délku 48 m. Cesty vedoucí podél zbývajících stran tohoto pole svírají se směrem silnice úhly $\alpha = 76°30'$. $\beta = 94°30'$. V jaké vzdálenosti se musí pozemek přehradit, aby parcela při silnici měla tvar lichoběžníka velikosti 10 arů? [α je vnitřní, β vnější úhel trojúhelníka.]

***218.** Louka tvaru trojúhelníka ABC se má rozdělit příčkou MN, která svírá se směrem strany AB úhel ε, ve dvě části, jejichž velikosti jsou v poměru: a) 1 : 2; b) 2 : 1. Určete polohu bodu X na straně AB, je-li velikost $AB = 34{,}5$ m, $\alpha = 71°$, $\beta = 58°$, $\varepsilon = 80°$.

219. Vypočtěte obsah P, poloměr kružnice vepsané ϱ a poloměr kružnice opsané r trojúhelníku ABC, v němž je dáno: a) $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$; b) $c = 15$, $\alpha = 62°10'$, $\beta = 18°40'$.

***220.** Proveďte diskusi řešení trojúhelníka, v němž je dáno: a) r, α, β; b) a, b, P; c) a, b, r.

221. Určete ostatní prvky trojúhelníka z předchozí úlohy, je-li a) $r = 10$, $\alpha = 113°, \beta = 48°$; b) $a = 0{,}23$ j, $b = 0{,}45$ j, $r = 0{,}25$ j.

222. Jak dlouhý bude přímý tunel spojující místa A, B, leží-li bod C od nich stranou tak, že platí, $AC = 170$ m, $BC = 250$ m, $\sphericalangle\, CAB = 85°4'30''$?

223. Ze dvou míst A,B na horizontální rovině vzdálených od sebe 3 113 m bylo pozorováno čelo mraku nad spojnicí obou míst ve výškových úhlech $\alpha = 78°40'$, $\beta = 63°50'$. Jak vysoko byl mrak?

***224.** Příkop, který je vykopaný v rovinatém terénu, má nahoře šířku 1,8 m, bočné stěny svírají s vodorovnou rovinou dna úhel 104,4°. Pro pozorovatele, který má oči ve výšce 1,6 m a který stojí ve vzdálenosti 2 m od horního okraje, zmizí právě dno příkopu. Jak je příkop hluboký?

225. Jak vysoká je věž, vidíme-li její patu z okna, umístěného 15 m nad horizontální rovinou, v hloubkovém úhlu $\alpha = 12°50'$ a vrchol ve výškovém úhlu $\beta = 25°12'40''$?

226. Z kopce 155 m nad horizontální rovinou je vidět vrchol továrního komína v hloubkovém úhlu $\alpha = 18°34'17''$ a jeho patu v hloubkovém úhlu $\beta = 29°14'52''$. Jak vysoký je komín?

227. Pomník je vidět z bodu A, který leží v téže horizontální rovině, v úhlu $\alpha = 15°21'16''$, z bodu B, ležícího nad bodem A ve výšce $v = 2{,}3$ m, se jeví pata pomníku v hloubkovém úhlu $\beta = 4°12'$. Jak vysoký je pomník?

228. Z výšiny, ležící 80 m nad hladinou rybníka, je vidět mrak ve výškovém úhlu 56° a jeho obraz ve vodě v hloubkovém úhlu 58°. Jak vysoko je mrak nad hladinou rybníka?

229. 15 m vysoká budova je vzdálena 30 m od břehu řeky. Z vodorovné střechy této budovy je vidět šířku řeky pod úhlem 15°. Jak široká je řeka?

230. Aby mohla být stanovena vzdálenost dvou bodů A, B, oddělených od sebe řekou, byla na jednom břehu řeky změřena základna $AC = b = 136$ m a úhly $CAB = \alpha = 70°21'51''$, $ACB = \gamma = 43°44'9''$. Jak velká je vzdálenost AB?

231. Řešte a sestrojte trojúhelník, v němž je dáno: a) $v_a = 17$, $c = 20$, $\gamma = 49°59'49''$; b) $v_a = 17{,}59$; $v_b = 15{,}739$, $c = 29{,}904$; c) $v_c = 14$, $a = 22{,}2$, $b = 14{,}9$.

232. V trojúhelníku je strana a třikrát tak velká jako strana b. Jak velký je úhel β, je-li $\alpha = 45°12'13''$?

233. V trojúhelníku je dáno $a : b = 5 : 8$, $\beta = 64°12'45''$. Jak velký je úhel α?

***234.** Řešte rovnoběžník, je-li dáno:
a) $P = 4{,}3093$ j², $e = 2{,}736$ j, $f = 5{,}492$ j; b) $a = 3{,}71$; $e = 2{,}69$; $\alpha = 135°6'32''$; c) $P = 4$ j², obvod $2s = 40$ j, $\alpha = 30°$. Řešte i konstruktivně.
[Návod ke konstrukci: a) P považujme za obsah čtverce o straně s a přeměňme jej v obdélník se stranou e.]

***235.** Řešte početně i konstruktivně deltoid, v němž je dáno: a) $P = 10$, $e : f = 2 : 5$, $\alpha = 115°$; b) $\varrho = 16{,}4$, $a = 50{,}5$, $e = 38{,}2$.
[Návod: Určete nejprve úhel β, potom části, na které je rozdělena strana a dotykovým bodem vepsané kružnice.]

***236.** Řešte a sestrojte čtyřúhelník, v němž platí:
a) $a = 14$ cm, $b = 19$ cm, $c = 17$ cm, $d = 13$ cm, $\alpha = 110°$; b) $a = 24{,}5$ cm, $c = 54{,}2$ cm, $\alpha = 80°54'$, $\beta = 147°20'$, $\gamma = 50°$.
[Návod: Prodlužte strany b, d až do jejich průsečíku.]

237. Jak velký je obsah části kruhu mezi dvěma rovnoběžnými tětivami a, b, je-li jejich vzdálenost c:
a) $a = 4$, $b = 6$, $c = 1$; b) $a = 4$ j, $b = 6$ j, $c = 3$ j. Proveďte konstrukci.

[Návod: Je-li x a y vzdálenost tětiv od středu kružnice, pak platí

$$\frac{4x^2 + a^2}{4} = r^2, \frac{4y^2 + b^2}{4} = r^2, \; x - y = c.\Big]$$

238. Určete velikosti ostatních stran a úhlů trojúhelníka, v němž platí:
a) $a + b = 43{,}2$ m, $r = 14{,}31$ m, $\gamma = 81°20{,}2'$;
b) $c - b = 7{,}23$ m, $r = 13{,}17$ m, $\alpha = 25°31{,}2'$;
c) $a - c = 12{,}86$ m, $b = 48{,}54$ m, $r = 32{,}84$ m.
Řešte i konstruktivně.

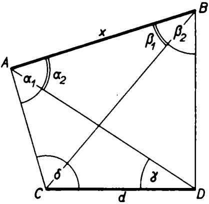
239. Určete ostatní prvky trojúhelníka, v němž je dáno:
a) $b + c = 158{,}8$ m, $\beta = 62°53{,}3'$, $\gamma = 69°52{,}3'$;
b) $a - c = 4{,}8$ m, $\beta = 43°29{,}2'$, $\gamma = 55°10{,}6'$;
c) $a - b = 139{,}8$ m, $c = 637{,}4$ m, $\alpha = 78°5{,}2'$.
Řešte ve vhodném měřítku i konstruktivně.

240. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka, v němž je dáno:
a) $a = 15$ m, $b = 14$ m, $c = 13$ m;
b) $a = 17$ m, $b = 16$ m, $c = 15$ m;
c) $a = 21$ m, $b = 20$ m, $c = 19$ m.
Použijte vztahů pro poloviční úhel. [Viz úlohu 214.]

241. Určete vnitřní úhly trojúhelníka, jehož velikosti stran jsou:
a) $a = 48{,}25$ m, $b = 57{,}63$ m, $c = 31{,}79$ m;
b) $a = 6{,}81$ m, $b = 9{,}08$ m, $c = 3{,}77$ m;
c) $a = 7452{,}7$ m, $b = 5879{,}6$ m, $c = 3758{,}9$ m.

242. Určete vzdálenost dvou bodů A, B, z nichž byly zaměřeny úhly $\alpha_1 = CAB$, $\alpha_2 = DAB$, $\beta_2 = DBA$, $\beta_1 = CBA$ na sloupy primárního elektrického vedení CD, jejichž vzdálenost je d. $[\alpha_1 > \alpha_2,\ \beta_2 > \beta_1.]$

[**Návod k řešení** (obr. 58)



Obr. 58

Označme úhly $\gamma = ADC$, $\delta = ACD$. Existuje-li řešení, potom z trojúhelníku ACD plyne:

$$\gamma + \delta = 2R - (\alpha_1 - \alpha_2),$$

$\dfrac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \dfrac{AC}{AD}$. Z trojúhelníků ABC a ABD najdeme

$$AC = \frac{x \sin\beta_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)},$$

$$AD = \frac{x \sin\beta_2}{\sin(\alpha_2 + \beta_2)},$$ takže dostáváme $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \dfrac{x\sin\beta_1}{\sin(\alpha_1+\beta_1)} : \dfrac{x\sin\beta_2}{\sin(\alpha_2+\beta_2)} = p$, $\gamma + \delta = 2R - (\alpha_1 - \alpha_2) = \omega$. Tuto soustavu rovnic uvedeme na soustavu ekvivalentní:

$\sin\gamma = p \,.\, \sin\delta$, odtud $\sin\gamma \pm \sin\delta = (p \pm 1)\sin\delta$, takže

$\dfrac{\sin\gamma - \sin\delta}{\sin\gamma + \sin\delta} = \dfrac{p-1}{p+1}$, pro $p \neq -1$. Z toho $\operatorname{cotg}\dfrac{\omega}{2} \,.\, \operatorname{tg}\dfrac{\gamma-\delta}{2} = \dfrac{p-1}{p+1}$, $\gamma + \delta = \omega$.

To je soustava rovnic ekvivalentních s původními rovnicemi, za předpokladu, že $\delta \neq k\pi$ (k celé číslo), $p \neq 0$, $p \neq -1$.

Z toho $\dfrac{\gamma-\delta}{2} = \varphi + k\pi$, $\gamma + \delta = \omega$. $\gamma = \dfrac{\omega + 2\varphi}{2} + k\pi$, $\delta = \dfrac{\omega - 2\varphi}{2} - k\pi$, kde k je libovolné celé číslo.]

243. Z děla na stanovišti D je ostřelován cíl C. Z pozorovatelen P_1, P_2, vzdálených od sebe 1500 m a ležících na téže straně spojnice CD, byly změřeny úhly $DP_1P_2 = \alpha_1 = 35°20'$, $CP_1P_2 = \alpha_2 = 58°40'$, $DP_2P_1 = \beta_1 = 48°30'$, $CP_2P_1 = \beta_2 = 42°10$.
Načrtněte obrázek a určete výpočtem vzdálenost cíle od děla.

244. Určete vzdálenost dvou nepřístupných míst M, N, jestliže byly zaměřeny z bodů A, B vzdálených od sebe 435 m, úhly

$MAN = \alpha = 62°10'$, $\quad NAB = \alpha_1 = 41°23'$,
$MBN = \beta = 66°34'$, $\quad MBA = \beta_1 = 34°52'$.

***245.** Čtyři body A, B, C, D leží v rovině. Určete vzdálenost $AD = x$, $BD = y$ a $CD = z$, jestliže byly změřeny tyto hodnoty:

a) $AB = a = 113{,}5$ m, $BC = b = 72$ m, $\sphericalangle ABC = \gamma = 180°$, $\sphericalangle ADB = \alpha = 20°26'12''$, $\sphericalangle BDC = \beta = 9°38'44''$;

b) $a = 250$ m, $b = 155$ m, $\gamma = 134°$, $\alpha = 69°$, $\beta = 35°$.

[Návod: Označme $\sphericalangle BAD = \varphi$, $\sphericalangle BCD = \varepsilon$. Potom $\varepsilon + \varphi = 360° - (\alpha + \beta + \gamma)$, $\dfrac{y}{a} = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$, $\dfrac{y}{b} = \dfrac{\sin\varepsilon}{\sin\beta}$.]

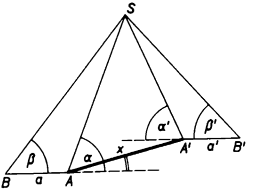
246. Z místa A do místa B má být prokopán přímý tunel. Určete: a) jeho směr; b) jeho délku, jestliže v horizontální rovině, v níž je tunel veden, byla změřena délka $AC = a = 1000$ m a zvolen bod D tak, že úhel $CAD = \alpha = 18°20'$, úhel $ACD = \beta = 138°40'$, úhel $BCD = \gamma = 60°30'$, úhel $CDB = \delta = 84°10'$.

247. Mezi dvěma místy horského masívu má být vybudován vodorovný přímý tunel. Aby bylo možno určit jeho délku, bylo třeba změřit z bodu C, ležícího stranou trasy a položeného o a metrů výše než tunel, hloubkové úhly α_1, α_2, pod nimiž je vidět počáteční bod A a koncový bod B tunelu, i úhel $ACB = \beta$. Určete délku tunelu: a) obecně; b) pro $a = 75$ m, $\alpha_1 = 20{,}3°$, $\alpha_2 = 14{,}5°$, $\beta = 81{,}4°$; c) $a = 82{,}5$ m, $\alpha_1 = 15{,}3°$, $\alpha_2 = 18{,}6°$, $\beta = 100{,}3°$.

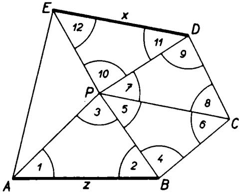
248. Dvě místa A, A' na úpatí hory, z nichž A' je položeno výše než A, mají být spojena tunelem. Z koncových bodů úsečky $BA = a$, $A'B' = a'$ byl zaměřen vrchol hory S, který leží v téže svislé rovině jako úsečka AB, popř. $A'B'$, pod výškovými úhly β, α a α', β'. Určete délku a sklon tunelu: a) obecně; b) pro $a = 400$ m, $\alpha = 28{,}5°$, $\beta = 21{,}3°$, $a' = 550$ m, $\alpha' = 24{,}4°$, $\beta' = 16{,}3°$; c) $a = 600$ m, $\alpha = 25{,}3°$, $\beta = 19{,}2°$, $a' = 880$ m, $\alpha' = 22{,}6°$, $\beta' = 14{,}7°$ [obr. 59].

249. Triangulační body A, B, C třetího řádu mají triangulací stanovené vzdálenosti $BC = a = 6$ km, $AC = b = 9$ km, $AB = c = 5$ km. Ze čtvrtého bodu D je vidět vzdálenost AB v zorném úhlu $\delta = 75°$, vzdálenost BC v zorném úhlu $\varepsilon = 55°$. Určete vzdálenost BD.

***250.** Stanovte vzdálenost vrcholů dvou skal D, E, v jejichž blízkosti není možno změřit základnu. Z koncových bodů vzdálenější základny $AB = 674{,}36$ m byly změřeny velikosti dvanácti pomocných úhlů. (Viz obr. 60.)



Obr. 59



Obr. 60

Velikost úhlu (1) = 66°17'10",
(2) = 50°29'30", (3) = 63°13'20", (4) = 78°54', (5) = 42°31'40",
(6) = 58°34'20", (7) = 59°24'30", (8) = 74°5'50", (9) = 46°29'40",
(10) = 47°30'20", (11) = 69°18'40", (12) = 63°11'.

[Návod: $BP = \dfrac{AB \sin(1)}{\sin(3)}$, $CP = BP\,\dfrac{\sin(4)}{\sin(6)}$, $DP = CP\,\dfrac{\sin(8)}{\sin(9)}$,
$DE = DP\,\dfrac{\sin(10)}{\sin(12)}$.]

251. Jak zní kosinová věta pro stranu c, je-li protilehlý úhel: a) ostrý; b) pravý; c) tupý? (Zpaměti.)

252. Jak velký je úhel γ v trojúhelníku, o jehož stranách platí
a) $c^2 = a^2 + b^2 + ab$; b) $c^2 = a^2 + b^2 - ab$. (Zpaměti.)

253. Dokažte, že jeden úhel trojúhelníka je tupý, je-li čtverec velikosti největší jeho strany větší než součet čtverců jeho druhých stran. (Zpaměti.)

254. Dokažte, že v rovnoběžníku je součet čtverců velikosti dvou sousedních stran rovný polovině součtu čtverců jeho úhlopříček.

255. Dokažte, že se dá sestrojit trojúhelník se stranami $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$ a úhlem $\gamma = 120°$. (Zpaměti.)

256. Silnice, vedoucí po hrázi rybníka, má být po zrušení rybníka nahrazena přímou zkratkou. Její krajní body A, B jsou zaměřeny z bodu C pod úhlem 60°, přičemž $CA = 421$ m, $CB = 233$ m. Jak bude zkratka dlouhá?

Řešení

Jde o výpočet strany trojúhelníka, v němž jsou dány dvě strany a úhel jimi sevřený. V tomto případě je nutno použít věty kosinové.

$CA = 421$ m, $\quad CB = 233$ m, $\quad c = \sqrt{421^2 + 233^2 - 2 \,.\, 421 \,.\, 233 \,.\, \cos 60^\circ}$

$\gamma = 60 \qquad\qquad\qquad\qquad c = \sqrt{177241 + 54289 - 98093}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \qquad c = \sqrt{133437}$

$\log c = 2{,}56264, \; c = 365{,}4.$

Zkratka bude dlouhá 365 m.

257. Určete zpaměti velikost strany c trojúhelníka, v němž je dáno: a) $a = 5$, $b = 6, \gamma = 60^\circ$; b) $a = 3, b = 4, \gamma = 90^\circ$; c) $a = 4, b = 6, \gamma = 60^\circ$; d) $a = 5, b = 4, \gamma = 45^\circ$; e) $a = 5, b = 4, \gamma = 30^\circ$; f) $a = 3, b = 5$, $\gamma = 120^\circ$.

258. Určete zbývající strany a úhly v trojúhelníku, v němž je dáno: a) $a = 6$ m, $b = 11$ m, $c = 7$ m; b) $a = 40$ m, $b = 23$ m, $c = 23$ m; c) $b = 683{,}1$ m, $c = 534{,}7$ m, $\alpha = 26^\circ 38' 16''$; d) $a = 134{,}5$ m, $b = 111{,}2$ m, $\gamma = 54^g 12^c$; e) $a = 863{,}1$ m, $b = 534{,}7$ m, $\gamma = 26^g 38^c 16^{cc}$; f) $a = 290$ m, $b = 750$ m, $\gamma = 58^\circ 40' 16''$.

259. Pomocí logaritmického pravítka řešte trojúhelník, jehož strany jsou a, b, c, úhly α, β, γ : a) $= 8{,}5, b = 7{,}2, c = 6{,}8$; b) $a = 130, b = 180, c = 150$; c) $a = 7$, $b = 8$, $c = 5$; d) $a = 19$, $c = 49$, $\beta = 30^\circ 24'$; e) $b = 48$, $c = 55, \alpha = 73^\circ 12'$.

260. Určete výslednici dvou sil 125 kp a 75 kp působících v témže bodě a svírajících úhel 50°. Při kterém úhlu by byla výslednice obou sil největší?

261. Tlaková síla $R = 12$ kp se má rozložit na dvě složky F_1, F_2, jejichž směry svírají se směrem vektoru R úhly $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$. Jaké budou složky F_1 a F_2?

262. Síla $F_1 = 21$ kp svírá s výslednicí sil F_1 a F_2 úhel $\alpha = 33^\circ$. Určete sílu F_2 i její úhel s výslednicí obou sil $R = 35$ kp.

263. Dva trámy, nesoucí tlakové síly $F_1 = 60$ kp, $F_2 = 70$ kp, jsou podepřeny v témže bodě a svírají spolu úhel α. Jaký je tento úhel, je-li výsledná tlaková síla v tom společném bodě $R = 100$ kp?

264. Ve vazbě střechy jsou do jednoho bodu (A) zapuštěny tři sloupky, které nesou tlakové síly F_1, F_2, F_3, jejichž velikosti jsou: a) v poměru $5 : 29 : 30 = a : b : c$; b) jsou stejné, přičemž jsou v obou případech v rovnováze. Jaké úhly svírají nosníky?

$\left[\text{Návod: } \cos \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}, \text{ kde } s = 32, \sphericalangle\, ab = \alpha + \beta.\right]$

265. Dvě silnice se rozdvojují v lese v bodě A, přičemž směry obou silnic tvoří úhel 37°. Jedna z nich vede k nádraží B, vzdálenému od křižovatky 440 m. Z bodu D na druhé silnici, vzdáleného od A 500 m, se má zřídit odbočka k nádraží. Postavíme-li v bodě D úhloměrný přístroj a zaměříme na bod A, musíme otočit teodolit o úhel α, abychom vytyčili směr k nádraží. Určete velikost úhlu α.

266. Při stavbě primárního vedení lesem se má provést přímý průsek mezi body A, B, ležícími na krajích lesa. Mimo les bylo zvoleno stanoviště C, z něhož jsou oba konce plánovaného průseku vidět, a to pod úhlem $ACB = 75^{g}7^{c}30^{cc}$. Přitom vzdálenost $AC = 361$ m, $BC = 324$ m. Jak bude průsek dlouhý?

***267.** Je třeba stanovit délku budovy, jejíž jeden roh A je nepřístupný. K tomu je nutné z druhého rohu B budovy vytyčit pod libovolným úhlem základnu do bodu C ($BC = 34{,}9$ m) a její prodloužení do bodu D ($CD = 13{,}32$ m). V bodech C, D se zaměří rohy budovy a zjistí se v bodě C velikost úhlu $BCA = 72°$ a v bodě D úhel $BDA = 55°$. Vypočtěte z těchto měření délku budovy.

268. Jaké úhly svírá se svými složkami F_1, F_2 jejich výslednice R, jestliže $F_1 = \frac{2}{3} R, F_2 = R$?

269. Lichoběžník je určen čtyřmi stranami a, b, c, d, přičemž strana a je rovnoběžná s c. Určete jeho úhly a obsah, je-li $a = 368$ m, $b = 285$ m, $c = 300$ m, $d = 293$ m. Sestrojte jej. Řešte též pro $a = 512$ m, $c = 312$ m, $e = 397$ m, $f = 497$ m.

270. V deltoidu $ABCD$ je $AB = BC = a$ a $CD = DA = b$. Mimoto při vrcholu A je dán úhel α. Jaká je velikost ostatních úhlů a úhlopříček? Řešte též pro $a = 12$ j, $b = 9$ j, $\alpha = 120°$.

271. Vypočtěte velikost ostatních prvků a obsahu u tětivového čtyřúhelníka, u něhož známe velikost stran $a = 56$ cm, $b = 33$ cm, $c = 16$ cm, velikost poloměru kružnice opsané $r = 32{,}5$ cm. Sestrojte.

***272.** Čtyřúhelník tečnový je určen velikostí stran $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm a úhlem $\beta = 80°$ sevřeným stranami a, b. Vypočítejte velikost ostatních prvků.

***273.** Tři kružnice o poloměrech $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 2$ cm, $r_3 = 3$ cm, ležící v rovině, se vzájemně dotýkají vně. Jak velký obsah má plocha ležící mezi nimi?

274. V trojúhelníku, jehož strana $a = 17$ cm, $b = 40$ cm, $\gamma = 81°12'9''$, zjistěte velikost strany c, těžnice t_a, symetrály úhlu s_α.

275. Z vrcholu kopce, který má výšku $v = 150$ m nad horizontální rovinou, vidíme dvě místa A, B v té rovině v hloubkových úhlech $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, jejich vzdálenost AB v úhlu $\gamma' = 60°$ (průmět úhlu γ). **Jak velká je tato vzdálenost?**

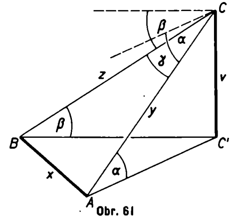
Řešení (obr. 61)

Vrchol kopce označme C. Vzdálenost $CA = y$, vzdálenost $CB = z$, vzdálenost $AB = x$. Položme $C'A = a$, $C'B = b$. Potom $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma'$; $a = v \cdot \operatorname{cotg} 45°$, $b = v \cdot \operatorname{cotg} 30°$.

$x^2 = 150^2 \cdot 3 + 150^2 - 2 \cdot 150^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 150^2 (4 - \sqrt{3})$,

$x = 150 \cdot \sqrt{2{,}26} \doteq 225.$

Vzdálenost míst A, B je přibližně 225 m.



Obr. 61

276. Vypočtěte objem kosého kužele kruhového, v němž: a) nejdelší strana osového řezu je $a = 7$ j, nejmenší strana je $b = 4$ j a úhel řezu při vrcholu kužele $\alpha = 60°$; b) $a = 3$ j, $b = 2$ j, $\alpha = 120°$.

***277.** Pro regulaci toku řeky je třeba určit přesně vzdálenost dvou pilířů C, D ležících na různých březích. Proto byly změřeny ze dvou stanovišť A, B vzdálených od sebe a metrů, ležících v téže rovině na jednom břehu řeky, úhly: $\alpha_1 = \sphericalangle BAC$, $\alpha_2 = \sphericalangle BAD$, $\beta_1 = \sphericalangle DBA$, $\beta_2 = \sphericalangle DBC$. Řešte: a) obecně; b) pro $a = 150$ m, $\alpha_1 = 33°$, $\alpha_2 = 12{,}5°$, $\beta_1 = 31{,}5°$, $\beta_2 = 19°$; c) pro $a = 225$ m, $\alpha_1 = 24°38{,}35'$, $\beta_1 = 39°51{,}65'$, $\alpha_2 = 96{,}5°$, $\beta_2 = 103°$.

***278.** Ze dvou bodů A, B, ležících v údolí na vodorovné přímé trati, vzdálených 500 m, je vidět vrchol hory V, ležící stranou směru AB pod výškovými úhly $\alpha_1 = 26{,}1°$ a $\alpha_2 = 31{,}1°$. Úhly PAB a PBA jsou $\beta_1 = 47°$, $\beta_2 = 116°$. Jak vysoko je vrchol hory nad údolím? [P je průmět vrcholu hory do roviny údolí.]

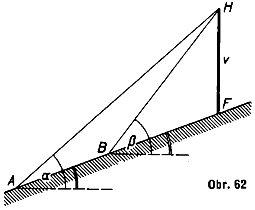
279. Dvě přímé důlní chodby, které ústí do téhož místa A a svírají úhel $\varphi = 37°46'$, mají být spojeny chodbou (prorážkou) BC, spojující bod B na jedné chodbě s bodem C na druhé chodbě. Jak dlouhá je prorážka, je-li $AB = 137{,}8$ m a $AC = 105{,}3$ m?

280. Letadlo letí k východu ve výši 800 m. Pozorovatel v letadle vidí plynojem směrem jihovýchodním pod hloubkovým úhlem $\varepsilon = 29°$. O patnáct vteřin později vidí týž plynojem ve směru přesně jihozápadním pod stejným hloubkovým úhlem ε. Jaká je rychlost letadla?

281. Letec spatřil na povrchu zemském objekt O ve směru přesně severním pod hloubkovým úhlem $\alpha = 33°$. Když uletěl ve stejné výši směrem západním 3 km, spatřil týž předmět v hloubkovém úhlu $\beta = 21°$. Jak vysoko letěl?

***282.** Od paty vysílací věže F stojící na kopci byla po svahu změřena vzdálenost $FB = 56$ m a dále za bod B ve stejném směru vzdálenost $BA = 38$ m Vrchol vysílací věže H byl z bodů A, B zaměřen v úhlech $\alpha = 22°$, $\beta = 32°$. Určete výšku věže i úhel sklonu návrší (obr. 62).

283. Hlídce byl dán pochodový úhel $\varphi_1 = 13°$, po 7 km byl změněn směr pochodu na úhel $\varphi_2 = 75°$. Tímto směrem ušla hlídka dalších 8 km. Jak daleko od výchozího bodu vzdušnou čárou byla potom hlídka?



Obr. 62

284. Na přímé silnici jede vojenská kolona, která je pozorována z místa A ležícího mimo silnici. Radiolokátorem bylo zjištěno, že vzdálenost místa A od čela kolony C je 14 350 m a vzdálenost místa A od zádi kolony je 13 840 m. Úhel $CAZ = 850$ dc. Určete délku kolony.

285. Vzdálenost mezi baterií a pozorovatelnou je 4 000 m, vzdálenost mezi pozorovatelnou a cílem je 3 600 m. Tyto vzdálenosti svírají mezi sebou úhel 155°. Vypočtěte vzdálenost baterie od cíle.

286. Ze tří stanovišť S_1, S_2, S_3, ležících v přímce a vzájemně spojených telefonem, je současně pozorováno letadlo pohybující se stranou spojnice bodů S_1, S_2, S_3 ve výškových úhlech α, β, γ. Jaká je vzdálenost letadla od jednotlivých pozorovatelen, jestliže $S_1S_2 = s_1$, $S_2S_3 = s_2$?

287. Řešte a sestrojte trojúhelník, v němž je dáno: a) $a - b = 15$ j, $c = 26$ j, $\gamma = 71°40'30''$; b) $a + b = 7$ j, $b + c = 9$ j, $c + a = 8$ j; c) $P = 84$ j², $b + c = 28$ j, $\alpha = 59°29'23''$; d) $b - c = 7$j, $a : r = 30 : 111$, $\beta = 110°26'40''$; e) $a + b = 338$ j, $c = 312$ j, $\gamma = 131°24'44''$; f) $b - c = 13$ j, $a = 21$ j, $\alpha = 64°25'55''$.

***288.** Řešte trojúhelník, v němž je dáno: a) $v_a = 75{,}2$ j, $v_b = 46{,}3$ j, $\gamma = 54°$; b) $a = 50$ j, $t_a = 45$ j, $t_b = 36$ j; c) $a = 60$ j, $v_a = 56$ j, $t_a = 75$ j; d) $a = 52$ j, $v_b = 31{,}2$ j, $P = 330$ j². Sestrojte.

289. Sestrojte a řešte trojúhelník, ve kterém je dáno: a) $v_a = 4{,}8$ j, $\alpha = 36°20'55''$, $\beta = 4°46'19''$; b) $v_b = 3$ j, $a = 9{,}25$ j, $b = 7{,}5$ j; c) $v_a = 2$ j, $v_b = 3$ j, $v_c = 5$ j. [Návod k c) $2P = a \cdot v_a = b \cdot v_b = c \cdot v_c$. Vyjádřete velikost strany a, b pomocí velikosti strany c a použijte kosinové věty.]

***290.** Čtyři body A, B, C, D leží v rovině. Určete vzdálenost nepřístupných bodů A, B, jestliže je známa vzdálenost $CD = 160$ m (přitom úsečka CD protíná spojnici AB) a jestliže byly změřeny úhly $\sphericalangle ACD = 42°15'$, $\sphericalangle BCD = 50°12'$, $\sphericalangle BDC = 63°29'$, $\sphericalangle ADC = 37°55'$.

6. TANGENTOVÁ VĚTA

291. Odvoďte vzorce Mollweidovy (Cagnoliovy): $(b + c) : a = \cos\frac{\beta - \gamma}{2} : \sin\frac{\alpha}{2}$, $(b - c) : a = \sin\frac{\beta - \gamma}{2} : \cos\frac{\alpha}{2}$.

[Návod: Sečtěte $b \sin\alpha = a \sin\beta$ a $c \sin\alpha = a \sin\gamma$ a vyjádřete $\sin\alpha = 2 \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$ a použijte poučky $\sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$.]

292. Z výsledku předchozí úlohy odvoďte vzorec pro tangentovou větu.
$(b - a) : (b + a) = \operatorname{tg}\frac{\beta - \alpha}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta + \alpha}{2}$.

$\boxed{\textbf{293.}}$ V trojúhelníku ABC jsou dány velikosti stran $a = 12{,}5$ cm, $b = 5{,}3$ cm a $\sphericalangle\gamma = 24°\,15'$. Najděte velikost strany c a zbývajících vnitřních úhlů.

Řešení

Z výsledku úlohy 292 vyplývá: $\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b}\operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2}$,

tj. $\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{12{,}5 - 5{,}3}{12{,}5 + 5{,}3}\operatorname{tg}\left(90° - \frac{24°15'}{2}\right)$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{7{,}2}{17{,}8}\operatorname{tg} 77°52'30''$. Logaritmickým výpočtem dostaneme $\frac{\alpha - \beta}{2} = 62°1'33''$. Z toho a z podmínky $\frac{\alpha + \beta}{2} = 77°52'30''$ pak vyplývá: $\alpha = 139°54'3''$, $\beta = 15°50'57''$. Ze sinové věty $c = \frac{b}{\sin\beta}\sin\gamma$ dostaneme $c \doteq 8$ cm.

Závěr: Velikost hledané strany c je přibližně 8 cm, velikost úhlu $\alpha = 139°54'3''$, $\beta = 15°50'57''$.

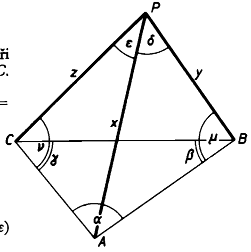
294. Tři sběrné studny A, B, C mají vzájemné vzdálenosti $BC = 272{,}91$ m, $AC = 227{,}37$ m, $AB = 212{,}4$ m, přičemž $\sphericalangle BAC = 76°38' = \alpha$, $\sphericalangle APB = 15°19' = \delta$, $\sphericalangle APC = 21°24' = \varepsilon$. Jak daleko je čerpací stanice P od všech tří studní?

Řešení (obr. 63)

Zavedeme si pomocný úhel μ při bodu B a úhel ν při vrcholu C.

Potom $\dfrac{x}{\sin\mu} = \dfrac{c}{\sin\delta}$, $\dfrac{x}{\sin\nu} = \dfrac{b}{\sin\varepsilon}$, odtud $x = \dfrac{c\sin\mu}{\sin\delta} = \dfrac{b\sin\nu}{\sin\varepsilon}\ldots(1)$.

Protože $\mu + \nu = 360° - (\alpha + \delta + \varepsilon)$ je $\dfrac{\mu+\nu}{2} = 180° - \dfrac{\alpha+\delta+\varepsilon}{2}$.



Obr. 63

Z posledních dvou rovnic je možno určit velikost úhlů μ, ν. Výpočet je zvlášť jednoduchý, když je možno výraz (1) vyjádřit jako funkci $\dfrac{\mu-\nu}{2}$.

Proto položíme $\sin\mu = kb\sin\delta$, $\sin\nu = kc\sin\varepsilon$ a napíšeme

$$\frac{\sin\mu - \sin\nu}{\sin\mu + \sin\nu} = \frac{kb\sin\delta - kc\sin\varepsilon}{kb\sin\delta + kc\sin\varepsilon}.$$

Z toho
$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\mu-\nu}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\mu+\nu}{2}} = \frac{b\sin\delta - c\sin\varepsilon}{b\sin\delta + c\sin\varepsilon} = p.$$

V našem případě je tedy $\operatorname{tg}\dfrac{\mu-\nu}{2} = p\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\delta+\varepsilon}{2}$, kde $\dfrac{\alpha+\delta+\varepsilon}{2} = 56°40'30''$. Logaritmickým výpočtem dostaneme $\dfrac{\mu-\nu}{2} = 10°54'51''$.

Z této rovnice a podmínky $\dfrac{\mu+\nu}{2} = 123°19'30''$ dostaneme $\mu = 134°14'21''$, $\nu = 112°24'39''$.

Ze vztahu (1) máme pak $x = 576{,}1$ m. Pomocí sinové věty získáme i velikost $y = 407{,}4$ m a $z = 449{,}7$ m. (Výpočet ověřte sami.)

Odpověď: Čerpací stanice P je od studně A vzdálena 576,1m, od studně B 407,4 m a od studně C 449,7 m.

295. Najděte vzdálenost dvou míst A, B, mezi nimiž je les, takže z místa A není vidět do místa B. Zvolíme si proto bod C tak, aby bylo možno změřit přímo vzdálenosti AC i BC a úhel ACB. Byla změřena vzdálenost $AC = b = 326$ m, $BC = a = 258$ m, $\sphericalangle ACB = \gamma = 72°35'14''$.

296. V trojúhelníku ABC jsou dány prvky:
a) $a = 17{,}3$ cm, $b = 12{,}4$ cm, $\gamma = 38°25'$; b) $b = 129{,}64$ m, $c = 328{,}52$ m, $\alpha = 19°23'$; c) $a = 52{,}47$ m $c = 128{,}61$ m, $\beta = 125°14'$. Určete zbývající úhly a stranu.

297. Z místa C vyjedou současně dva automobily. První jede po silnici směrem ZSZ rychlostí 28,27 m/s, druhý po jiné silnici směrem SV rychlostí 15,3 m/s. Pojedou-li stále stejnou rychlostí, v kterém směru uvidí po jedné minutě jízdy první automobilista druhého? Za jakou dobu budou oba vozy od sebe vzdáleny 6 650 m?

298. Jak dlouhý bude přímý tunel spojující místa A, B a kterým směrem vzhledem k AC a BC bude veden z míst A i B, má-li bod C položený stranou spojnice AB od míst A, B vzdálenost $AC = 170$ m, $BC = 250$ m, přičemž $\sphericalangle ACB = 85°4'30''$?

299. Na svahu hory stojí památník. Abychom určili jeho výšku, změříme od jeho paty po svahu dolů délku $a = 7{,}5$ m a na jejím konci změříme zorný úhel α, pod nímž památník pozorujeme. V prodloužení změřené délky postoupíme o délku $b = 6$ m a opět změříme zorný úhel, pod nímž vidíme památník. Jak vysoký je památník, je-li $\alpha = 49°37'$, $\beta = 34°32'$?

300. Z místa A byl pozorován vrtulník ve směru SV v elevačním úhlu $\delta = 28°35'$ a současně z místa B ve směru SSV v elevačním úhlu $\varepsilon = 18°15'$, přičemž $AB = 3$ km. Jak vysoko byl vrtulník?

301. Určete ostatní prvky trojúhelníka, v němž je dáno: a) $b = 208{,}33$ j, $c = 182{,}45$ j, $\alpha = 43°20'20''$; b) $a = 13$ j, $b = 14$ j, $c = 15$ j; c) $a = 157{,}8$ m, $c = 256{,}5$ m, $\beta = 67{,}52°$; d) $a = 134{,}5$ m, $b = 111{,}2$ m, $\gamma = 54{,}2°$.

302. V trojúhelníku je dána velikost úhlu $\gamma = 120°$, přičemž platí $a = 2b$. Určete velikost úhlu α, β a poměr velikostí stran $c : a$.

303. Řešte tangentovou větou úlohy 258c, d, e, f.

304. Pozemek tvaru různoběžníka $ABCD$ má velikosti stran $a = AB = 123$ m, $b = BC = 49$ m, $c = CD = 57$ m, $d = DA = 122$ m a úhel při vrcholu B $\beta = 65°$. Vypočtěte velikost zbývajících úhlů.

305. Řešte trojúhelník, v němž je dáno: $P = 84$ j^2, $b + c = 28$ j, $\alpha = 59°29'23''$.

Řešení

$P = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$, z toho $bc = \frac{2P}{\sin\alpha}$. Z logaritmického výpočtu dostaneme $bc = 195$. Potom $b + c = 28$, $bc = 195$. První rovnici umocníme dvěma a odečteme čtyřnásobek druhé, čímž dostaneme

$$\begin{array}{rl} b^2 + 2bc + c^2 &= 784 \\ -\ 4bc \quad &= -780 \\ \hline b^2 - 2bc + c^2 &= 4 \end{array}$$

$b + c = 28$, $b - c = \pm 2$, a proto $b = 15$ j, $c = 13$ j, nebo $b = 13$ j, $c = 15$ j. Dále z tangentové věty $(b + c) : (b - c) = \operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2} : \operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2}$ plyne $28 : 2 = \operatorname{tg} 60°15'18'' : \operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2}$. Logaritmicky pak dostáváme $\beta = 67°22'49''$, $\gamma = 53°7'47''$. Ze sinové věty dostaneme ještě velikost strany $a = 14$ j. Ověřte to.

306. Triangulační body A, B, C třetího řádu mají vzdálenosti $BC = 6$ km, $AC = 9$ km, $AB = 5$ km. Ze čtvrtého bodu D je vidět vzdálenost AB v zorném úhlu $\delta = 75°$, vzdálenost BC v zorném úhlu $\varepsilon = 55°$. Jaká je vzdálenost bodů CD?

307. Vypočtěte vzdálenost dvou míst A, B ze základny $CD = d$ a úhlů $BAC = \alpha_1$, $BAD = \alpha_2$, $ABC = \beta_1$, $ABD = \beta_2$. ($d = 60$ m, $\alpha_1 = 101°39'$, $\alpha_2 = 62°25'$, $\beta_1 = 43°29'$, $\beta_2 = 65°27'$.)

308. Najděte vzdálenost trigonometricky zaměřených bodů B, C, D od bodu A, je-li $BC = 2\,100{,}5$ m, $CD = 1\,875$ m,
$\sphericalangle\, BCD = 114°22'45''$, $\sphericalangle\, BAC = 75°50'12''$, $\sphericalangle\, CAD = 49°43'30''$.

309. V trojúhelníku ABC je dán obvod $2s$, velikost strany a a velikost poloměru r kružnice trojúhelníku opsané. Jaká je velikost stran a úhlů tohoto trojúhelníka?

***310.** V trojúhelníku je dána velikost poloměru r kružnice opsané a poloměru ϱ kružnice trojúhelníku vepsané. Vypočtěte velikost středné obou kružnic. (Řešte aspoň dvěma různými způsoby, např. větou Cagnoliovou a větou kosinovou.)

***311.** Dokažte, že mezi stranami trojúhelníka platí vztah $(a + b)^{-2} + (a - b)^{-2} = 2c^{-2}$, jestliže rozdíl úhlů $\alpha - \beta = 90°$.

312. Řešte rovnoběžník, v němž jsou dány velikosti úhlopříček u_1, u_2 a velikost úhlu jimi sevřeného γ. Řešte: a) obecně; b) $u_1 = 7{,}5$ j, $u_2 = 9$ j, $\gamma = 62°18'$.

313. Najděte velikost stran a úhlů v trojúhelníku, ve kterém je dáno $a : r = 30 : 113$, $b - c = 7$, $\beta = 110°26'40''$.

314. V trojúhelníku je dáno: a) velikost stran a, b a obsah P; b) velikost stran a, b a poloměru kružnice opsané r. Řešte pro a) $a = 6{,}4$ m, $b = 8{,}2$ m, $P = 13{,}12$ m^2; b) $a = 23$ m, $b = 45$ m, $r = 25$ m.
Proveďte diskusi řešení.

7. SFÉRICKÁ TRIGONOMETRIE

315. Mezi základními prvky pravoúhlého trojhranu platí vztahy:

a) $\sin\alpha = \dfrac{\sin a}{\sin c}$, b) $\cos\alpha = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$,

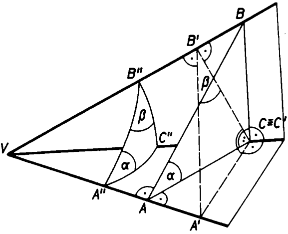
c) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$, d) $\sin\beta = \dfrac{\sin b}{\sin c}$,

e) $\cos\beta = \dfrac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$, f) $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\sin a}$,

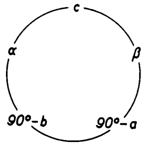
g) $\cos a = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}$, h) $\cos b = \dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha}$,

i) $\cos c = \cos a \,.\, \cos b = \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\beta$.

Pokuste se tyto vztahy pomocí obr. 64 odvodit.



Obr. 64



Obr. 65

316. Jak zní pro přeponu a úhly pravoúhlého trojhranu pravidlo Neperovo?

317. Určete ostatní prvky pravoúhlého trojúhelníka sférického na ploše kulové $r = 5$ cm, jsou-li jeho strany $a = 60°$, $b = 45°$.

Řešení (obr. 65)

Prvky a, b se vyskytují v rovnici (podle pravidla Neperova):
$\cos(90° - b) = \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}(90° - a)$, tj. $\sin b = \operatorname{cotg}\alpha \,.\, (\operatorname{tg} a) \rightarrow \operatorname{tg}\alpha =$
$= \dfrac{\operatorname{tg} a}{\sin b} = \dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{6}$, $\alpha = 67°47'33''$. Podobně $\cos(90° - a) =$

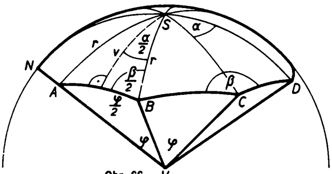
$= \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{cotg}\beta = \sin a$, odtud $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\sin a} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Z toho $\beta =$
$= 49°6'24''$.

$\cos c = \sin(90° - b) \,.\, \sin(90° - a) = \cos b \,.\, \cos a = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

$\log\cos c = 0{,}15056 - 0{,}60206 = 9{,}54850 - 10, c = 69°17'35''$.

318. Kolik stěn má pravidelný jehlan, jehož sousední pobočné hrany tvoří úhel $\varphi = 30°$ a sousední pobočné stěny úhel $\beta = 113°46'$?

Řešení (obr. 66)



Obr. 66

Pravidelný jehlan, jehož vrchol V je ve středu kulové plochy, protíná tuto kulovou plochu v pravidelném sférickém n-úhelníku, jehož vnitřní úhly jsou β. Spojíme-li střed S n-úhelníku s jeho vrcholy a spustíme-li z něho na strany příslušné výšky v, vznikne $2\,n$ sférických shodných pravoúhlých trojúhelníků, jejichž úhly jsou $\dfrac{\beta}{2}$, $\dfrac{\alpha}{2}$, $90°$ a odvěsny v $\dfrac{\varphi}{2}$ a přepona r. Podle Neperova pravidla je pak $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sin\dfrac{\alpha}{2} \,.\, \cos\dfrac{\varphi}{2}$; odtud $\log\cos\dfrac{\alpha}{2} = 9{,}90796 - 10$, $\dfrac{\alpha}{2} = 36°$, $\alpha = 72°$. Protože $72° =$
$= 360° : 5$ je vyšetřovaný jehlan pětiboký.

319. Podle úl. 318 řešte: Kolik stěn má pravidelný jehlan, jehož sousední hrany pobočné mají úhel a) $\varphi = 30°$, $\beta = 159°53$; b) $\varphi = 30°$, $\beta = 146°4'28''$?

320. Pravidelný n-boký jehlan ($n = 3, 4, 6$) má podstavnou hranu $a = 1$, výšku $v = 2$. Určete úhel jeho sousedních pobočných stěn.

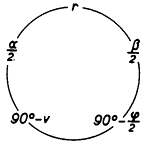
321. Určete úhel mezi pobočnou stěnou a rovinou podstavy v pravidelném osmibokém jehlanu, jehož úhel hran při vrcholu je $\beta = 36°$.

322. Určete ostatní prvky pravoúhlého trojúhelníka sférického, v němž je dáno: a) $a = 125°$, $\beta = 43°$; b) $a = 120°10'$, $\beta = 147°20'$; c) $a = 44°45'24''$, $b = 68°35'52''$; d) $\alpha = 115°37'20''$, $\beta = 73°28'10''$; e) $c = 78°17'43''$, $a = 124°18'32''$.

323. Určete úhly a strany pravoúhlého sférického trojúhelníka, v němž je dáno: a) $a = 43{,}542°$, $b = 36{,}45°$; b) $b = 50°$, $c = 112°48'$; c) $a = 48°19{,}72'$, $\alpha = 50°30{,}45'$. Řešte nejprve obecně. [Pozor na víceznačnost funkcí.]

324. Určete úhly a strany rovnoramenného sférického trojúhelníka ($b = c$), je-li dáno: a) $a = 90°$, $b = 65°$; b) $\alpha = 115{,}96°$, $\beta = 46{,}98°$; c) $b = 78{,}41°$, $\beta = 56{,}64°$.

$\boxed{\textbf{325.}}$ Určete obsah pravoúhlého trojúhelníka sférického na kouli o poloměru $r = 100$ cm, jsou-li jeho odvěsny $a = 60°$, $b = 30°$.



Obr. 67

Řešení

Obsah sférického trojúhelníka je $P = r^2 \operatorname{arc} \varepsilon$, kde $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180°$ je nadbytek sférického trojúhelníka. V našem případě $\varepsilon = \alpha + \beta - 90°$. Velikost úhlů α a β určíme z Neperova pravidla.

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$, $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\sin a}$. Z toho $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3}$ a $\alpha = 73°53'52''$.

$\operatorname{tg} \beta = \dfrac{2}{3}$, $\beta = 33°41'25''$. Je tedy nadbytek sférického trojúhelníka $\varepsilon = 17°35'17''$. $P = r^2 \operatorname{arc} \varepsilon = 10\,000 \,.\, 0{,}306\,973\,5 = 3\,069{,}74$. Obsah daného sférického trojúhelníka je tedy $P = 3\,069{,}74$ cm^2.

326. Určete obsah rovnostranného sférického trojúhelníka vyťatého na kouli o poloměru $r = 8\frac{1}{2}$m, je-li jeho strana $a = 82°$.

327. Vypočtěte velikost strany rovnostranného trojúhelníka sférického, jehož obsah je $P = 15$ m^2 a má-li příslušná kulová plocha poloměr $r = 7$ m.

328. Jaký je obsah sférického trojúhelníka, ležícího na kulové ploše $r = 5$ cm: a) $a = 60°$, $b = 30°$; b) $a = 143°42'36''$, $\beta = 64°15'18''$; c) $c = 86°27'24''$, $\alpha = 29°29'30''$?

329. Určete úhel a stranu pravidelného šestiúhelníka sférického, který zaujímá třetinu příslušné kulové plochy.

330. Úhly sférického trojúhelníka jsou v poměru $\alpha : \beta : \gamma = 7 : 8 : 9$, jeho obsah je roven dvanáctině povrchu příslušné koule. Jak dlouhá je nejdelší strana tohoto trojúhelníka, je-li poloměr příslušné koule $r = 100$ cm?

331. Jaký obsah má sférický trojúhelník na kouli o poloměru r, je-li dáno:
a) $\alpha = 63°27'$, $\beta = 81°56'$, $\gamma = 134°45'$;
b) $\alpha = 44°44'34''$, $\beta = 73°15'13''$, $\gamma = 92°15'13''$;
c) $a = 69°50'$, $b = 46°42'$, $c = 109°38'$?

332. Vypočtěte obsah sférického trojúhelníka, v němž a) $a = 43°4'30''$ $b = 68°17'20''$, $c = 75°48'10''$; b) $\alpha = 67°20'10''$, $\beta = 105°14'45''$, $\gamma = 136°6'5''$.

333. Řešte rovnoramenný sférický trojúhelník, v němž je dáno:
a) $a = 50°$, $b = 86°$; b) $a = 75°20'$, $\alpha = 127°42'$; c) $a = 112°14'30''$, $\beta = 43°20'$.

334. V pravostranném sférickém trojúhelníku najděte velikost stran a úhlů:
a) $a = 116°44'48''$, $b = 44°26'21''$; b) $a = 87°54'$, $\alpha = 76°21'3''$;
c) $\alpha = 143°33'$, $\beta = 136°27'29''$; d) $a = 123°48'4''$, $\beta = 52°55'28''$; e) $\alpha = 131°40'17''$, $\gamma = 104°32'46''$.

335. Najděte zbývající prvky v pravostranném sférickém trojúhelníku ($c = R$):
a) $a = 120°$; $\beta = 135°$;
b) $\alpha = 52°30'$; $\beta = 79°54'$;
c) $a = 98°1'10''$, $b = 48°16'15''$.

336. Vypočítejte poloměr ϱ kružnice vepsané do pravidelného sférického devítiúhelníku, jehož strana je $a = 12°50'4''$.

337. Vypočtěte úhel, poloměr kružnice opsané a vepsané v pravidelném sférickém trojúhelníku, v němž: a) $a = 90°$; b) $\beta = 120°$.

338. Vypočtěte obsah pravidelného n-úhelníka sférického, je-li dáno:
a) $n = 4$, $a = 30°$; b) $n = 5$, $a = 10°$; c) $n = 6$, $r = 72°$.

339. Určete zeměpisnou délku bodu na rovníku, který má od Českých Budějovic ($\varphi = 48°59'$, $\lambda = 14°29'$) vzdálenost 10 000 km.

340. Stanovte vzdálenost Prahy ($\varphi = 50°05'$, $a = 14°25'$) od průsečíku nultého poledníku s rovníkem.

341. Vzdálenost dvou míst ležících na téže rovnoběžce je 5 600 km. Časový rozdíl mezi těmito místy je 4 hodiny 11 minut. Jaká je jejich společná zeměpisná šířka?

342. Loď pluje nejkratší cestou přes rovník a proťala jej v úhlu $\alpha = 50°$. V jakém úhlu protne rovnoběžku $\varphi = 15°$?

343. Města Lisabon a St. Louis mají přibližně stejnou zeměpisnou šířku $\varphi = 38°40'$. Jejich zeměpisné délky se liší o 5 hodin 24,4 minuty. Spočtěte vzdálenost obou míst. [Časovému rozdílu 1 h odpovídá rozdíl zeměpisných délek 15 °.]

344. Jaké úhly svírá s půdorysnou π a nárysnou ν rovina ϱ, jejíž stopy svírají s osou x úhly $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$?

8. OPAKOVÁNÍ

345. Určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí a narýsujte příslušný úhel, je-li dáno:

a) $\sin\alpha = -\dfrac{24}{25}$; b) $\cos\alpha = -\dfrac{9}{4}$, pro $\alpha \in \langle 90°, 180°\rangle$,

c) $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$, pro $0 < \alpha < 90°$; d) $\operatorname{tg}\alpha = -3$, pro $90° < \alpha < 180°$;

e) $\operatorname{cotg}\alpha = -\dfrac{4}{5}$, pro α jako v úloze d).

346. Sestrojte úhel:
a) $42°13'$; b) $37°25'$; c) $48{,}22223°$; d) $120{,}67806°$; e) $84{,}69305°$; f) $72{,}80583°$; g) 120^{g}; h) $60^{g}20^{c}60^{cc}$; i) $89^{g}75^{c}$; j) $135^{g}31^{c}26^{cc}$; k) $2{,}5°$; l) $0{,}64795°$; m) $4{,}2851336°$.

347. Určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí:

a) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{a}$; b) $\sin\alpha = \dfrac{m}{\sqrt{1 + m^2}}$; c) $\operatorname{tg}\alpha = n$; d) $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{n}{m}$;

e) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$; f) $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{n}}{n + 1}$.

348. Najděte goniometrické funkce menšího ostrého úhlu pravoúhlého trojúhelníka, je-li velikost jedné jeho odvěsny rovna 75 % velikosti druhé odvěsny.

349. Aniž počítáte velikost úhlu α, stanovte $\operatorname{tg}(90° - \alpha)$, je-li $\sin\alpha = 0{,}28$.

350. Najděte: a) $\sin 15°$, je-li $\cos 15° = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$; b) $\cos 22°30'$, je-li $\sin 22°30' = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$; c) velikost ostrých úhlů α, β, jestliže platí $\sin(\alpha - \beta) = \dfrac{1}{2}$ a $\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{1}{2}$.

351. Zjednodušte výrazy:

a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{cotg}^2 \alpha$; b) $\dfrac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\dfrac{1}{\cos \alpha}}$;

c) $\dfrac{(1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}$; d) $\left(\dfrac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{cotg} \alpha}\right)^2 = \dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}$.

352. Z koncového bodu průměru kružnice je vedena v kružnici tětiva, svírající s průměrem úhel 44°30′. Stanovte velikost poloměru této kružnice, je-li délka oné tětivy 39,6 cm.

353. Určete velikost výšek v_a, v_b v trojúhelníku, v němž je dáno $a = 16{,}2$ cm, $b = 18{,}9$ cm, $\gamma = 65°42'$.

354. Z koncového bodu průměru kruhu je vedena tětiva, jejíž velikost je 71 % velikosti průměru. Jak velký úhel svírá tato tětiva s průměrem kruhu?

355. Jakou velikost má tětiva, která dělí kružnici o poloměru $r = 10$ cm v poměru 3 : 5?

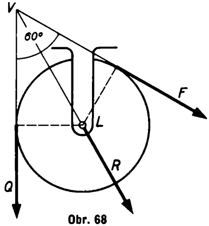
356. Z válcovitého materiálu o průměru 75 mm je třeba vyfrézovat profil pravidelného osmiúhelníka. Jaká bude velikost jeho strany a jaká bude šířka čelistí vhodného klíče?

357. Jaká tahová síla působí na ložisko zavěšené kladky, na níž je vytahováno břemeno $Q = 150$ kg, přičemž směr síly svírá se směrem pohybu břemena úhel 60°? (Obr. 68.)

358. Najděte velikost úhlu stoupání závitu, je-li průměr vřetena šroubu 40 mm a výška závitu $v = 15$ mm (obr. 69).

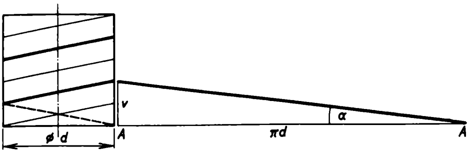
359. Vnější průměr závitu je $D = 38{,}3$ mm. Určete výšku závitu, je-li úhel stoupání závitu 5°30′.

360. Jakou tahovou silou Z je namáháno kotevní táhlo, jímž je upevněna podpěra lanové dráhy, která je ve vodorovném směru namáhána silou $F = 3\,200$ kp, když úhel táhla s vodorovnou rovinou je 38°?



Obr. 68

361. Z bodu mimo kružnici je vedena sečna, jejíž vnější úsek má velikost a, délka tečny vedené z téhož bodu k této kružnici má velikost b. Středový úhel tětivy vyťaté sečnou v kružnici je α. Vypočtěte délku tětivy a poloměr kružnice, je-li $a = 9$ cm, $b = 12$ cm, $\alpha = 48{,}333°$.



Obr. 69

362. Na nakloněné rovině se sklonem $\varphi = 42{,}074°$ je těleso o tíze $Q = 576$ kp. Jaká síla působí rovnoběžně se základnou nakloněné roviny, udrží-li těleso v rovnováze (tření zanedbáme)? Jaká tlaková síla působí na nakloněnou rovinu?

363. Dvacet stejných ocelových kuliček o průměru 30 mm je ve věnečku kuličkového ložiska, přičemž těsně přiléhají k sobě. Najděte velikost vnějšího i vnitřního poloměru věnečku.

364. Jaká musí být šířka zubů na ozubeném kolečku, které má 16 zubů, a jehož průměr je 120 mm?

365. Jakou má velikost poloměr kružnice, která protíná jednu z rovnoběžek, vzdálených od sebe L cm pod úhlem α, druhou pod úhlem β? a) $L = 10$ cm, $\alpha = \left(\frac{100}{3}\right)^g$, $\beta = \left(\frac{200}{9}\right)^g$; b) $L = 10$ cm, $\alpha = \left(\frac{200}{3}\right)^g$, $\beta = \left(\frac{100}{3}\right)^g$.
[Návod: Úhel přímky s kružnicí je úhel, který svírá přímka s tečnou kružnice v jejich průsečíku.]

366. Jaké znaménko má:
a) $\sin 1$; b) $\cos 2$; c) $\operatorname{tg}(-2{,}5)$; d) $\operatorname{cotg}(-1)$? (Zpaměti.)

367. Jakou úhlovou rychlost má vřeteno soustruhu, jehož frekvence otáčení je 300 za minutu?

368. Ozubené převodní kolo má 90 zubů. V radiánech určete velikost úhlu, o který se otočí kolečko, jestliže se pootočilo o: a) 30 zubů; b) 25 zubů; c) 200 zubů.

369. Vyčíslete:

a) $\sin\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)$; b) $\cos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$; c) $\operatorname{tg}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

d) $\operatorname{cotg}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)$; e) $\sin(\operatorname{tg} 1)$; f) $\operatorname{tg}(\sin 1)$.

370. Vyčíslete:

a) $\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$; b) $\cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$; c) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$;

d) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$; e) $\sin(\operatorname{arctg} 2)$; f) $\cos(\operatorname{arccotg}(-2))$.

[Návod: a) $\arccos\frac{2}{3}=\alpha$, tj. $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $|\sin\alpha|=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=$ $=\frac{\sqrt{5}}{3}$; e) $\operatorname{tg}\alpha=2=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.]

371. Vyčíslete:

a) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}\right)$; b) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$; c) $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{2}\right)$;

d) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5}{4}\pi\right)$.

372. Proveďte:

a) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$; b) $\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{2}{5}$.

c) $\arcsin\frac{2}{3}-\arcsin\frac{1}{5}$; d) $\arccos\frac{1}{3}+\arccos\frac{1}{5}$;

e) $\arccos\frac{4}{5}-\arccos\frac{1}{4}$; f) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$;

g) $\operatorname{arccotg} 2-\operatorname{arccotg} 5$.

[Návod: a) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.]

373. Dokažte:

a) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$; b) $\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x)=x$; c) $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$,

$-1\leqq x\leqq 1$; d) $\sin(\operatorname{arccotg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

e) $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, $-1\leqq x\leqq 1$.

[Návod: c) $\arccos x=y\Rightarrow\cos y=x$, $\sin x=\sqrt{1-x^2}$.]

374. Dokažte:

a) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 1+\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; b) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+$

$+ 2 \arcsin \frac{1}{2} = 2 \operatorname{arctg} 1 + 3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\pi}{4}$; d) $\operatorname{arccotg} \frac{5}{2} - \operatorname{arccotg} 3 = \operatorname{arccotg} 17$; e) $\arcsin \frac{12}{13} - \arcsin \frac{3}{5} = \arcsin \frac{33}{65}$; f) $\operatorname{arctg} \frac{m}{n} - \operatorname{arctg} \frac{m-n}{m+n} = \frac{\pi}{4}$.

375. Aniž určíte velikost úhlu α, najděte velikost hodnot $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, je-li: a) $\cos \alpha = \frac{119}{169}$; b) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$, kde $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

376. Vyčíslete:

a) $\sin(\alpha - \beta)$, je-li $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{12}$, jestliže úhly α i β leží v prvním kvadrantu; b) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ a $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, je-li $\cos \alpha = 0{,}8$, $\cos \beta = \frac{15}{17}$ a úhel α je prvkem intervalu $(0{,}90°)$, β je prvkem intervalu $(0{,}90°)$.

377. Stanovte:

a) $\sin 15°$; b) $\cos 15°$; c) $\operatorname{tg} 15°$. (Bez použití tabulek.)

378. Spočtěte:

a) $\frac{\cos(-120°)}{\cos 300°} - \frac{\operatorname{tg} 210° \sin 315°}{\cos 180°}$; b) $8 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} \cdot \operatorname{cotg} \frac{7\pi}{6}$;

c) $2 \sin^2 \frac{17\pi}{4} + \operatorname{tg}^2 \frac{33\pi}{4} \cdot \operatorname{cotg} \frac{3\pi}{4}$; d) $\frac{\operatorname{tg} 3x - 5 \operatorname{cotg}(x + 270°)}{8 \sin(75° + x)}$, pro $x = 225°$.

***379.** Spočtěte hodnotu výrazů:

a) $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$, je-li $\operatorname{tg} \alpha = 2$; b) $\frac{\sec \alpha - \cos \alpha}{\operatorname{cotg} \alpha}$, pro $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{\frac{m}{n}}$ a $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; c) $\sin \alpha \cos \alpha$, $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$, je-li $\sin \alpha + \cos \alpha = n$; d) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{cotg} \alpha$, je-li $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

380. Dokažte, že platí:

a) $\sin(60° - p) \cos(30° + p) + \cos(60° - p) \sin(30° + p) = 1$;

b) $\operatorname{tg} 20° + \operatorname{tg} 40° + \sqrt{3} \operatorname{tg} 20° \, . \, \operatorname{tg} 40° = \sqrt{3}$;

c) $\dfrac{\mathrm{tg}^2 u - \mathrm{tg}^2 v}{\mathrm{cotg}^2 u \cdot \mathrm{cotg}^2 v - 1} = \mathrm{tg}\,(u + v) \cdot \mathrm{tg}\,(u - v) \cdot \mathrm{tg}^2 u \cdot \mathrm{tg}^2 v$;

d) $\sin^2 (a + b) + \cos^2 (a - b) = 1 + \sin 2a \cdot \sin 2b$;

e) $\mathrm{tg}^2 (a + b) + \mathrm{tg}^2 (a - b) = \dfrac{2(\sin^2 2a + \sin^2 2b)}{(\cos 2a + \cos 2b)^2}$;

f) $\mathrm{tg}\, a \cdot \mathrm{tg}\, 3a = \dfrac{\mathrm{tg}^2 2a - \mathrm{tg}^2 a}{1 - \mathrm{tg}^2 a\, \mathrm{tg}^2 2a}$; g) $\dfrac{\sin 3b + \sin^3 b}{\cos^3 b - \cos 3b} = \mathrm{cotg}\, b$.

381. Dokažte rovnosti:

a) $\dfrac{\sin (45^\circ + \alpha) - \cos (45^\circ + \alpha)}{\sin (45^\circ + \alpha) + \cos (45^\circ + \alpha)} = \mathrm{tg}\, \alpha$;

b) $\dfrac{\cos \alpha \cos \beta - \cos (\alpha + \beta)}{\cos (\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta} = \mathrm{tg}\, \alpha \cdot \mathrm{tg}\, \beta$;

c) $\dfrac{2 \sin \alpha \cos \beta - \sin (\alpha - \beta)}{\cos (\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta} = \mathrm{tg}\, (\alpha + \beta)$;

d) $1 - \dfrac{\sin^2 \alpha}{1 + \mathrm{cotg}\, a} - \dfrac{\cos^2 \alpha}{1 + \mathrm{tg}\, \alpha} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$;

e) $\dfrac{(1 - \sin \alpha - \cos \alpha) \cdot (1 - \sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha \cdot (\sin \alpha - 1)} = 2$;

f) $\sec^2 \alpha + \dfrac{1 - \cos^2 \alpha}{1 + \mathrm{tg}^2 \alpha} - \dfrac{\cos^2 \alpha}{1 + \mathrm{cotg}^2 \alpha} - \mathrm{tg}^2 \alpha = 1$.

***382.** Dokažte:

a) $\dfrac{\sin 2\alpha \cdot \cos \alpha}{(1 + \cos 2\alpha)\,(1 + \cos \alpha)} = \mathrm{tg}\, \dfrac{\alpha}{2}$; b) $\dfrac{\mathrm{tg}\, \dfrac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}\, \dfrac{\alpha}{2}} + \dfrac{\mathrm{tg}\, \dfrac{\alpha}{2}}{1 - \mathrm{tg}\, \dfrac{\alpha}{2}} = \mathrm{tg}\, \alpha$;

c) $\dfrac{\mathrm{tg} \left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) - \mathrm{tg} \left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\mathrm{tg} \left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) + \mathrm{tg} \left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \sin 2\alpha$;

d) $\dfrac{\mathrm{tg}^2 \left(\dfrac{\pi}{4} + a\right) - 1}{1 + \mathrm{tg}^2 \left(\dfrac{\pi}{4} + a\right)} = \sin 2a$; e) $\dfrac{\sin a}{1 + \mathrm{cotg}\, a} + \dfrac{\cos a}{1 + \mathrm{tg}\, a} =$

$= \dfrac{1}{\sin a + \cos a}$; f) $\dfrac{2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha - \sin \alpha - \cos^2 \alpha} = \mathrm{cotg}\, \alpha$.

*383. Vylučte x, y ze vztahů:

a) $\cos x - \sin x = m, \sin 2x = n$; b) $a \sin x + b \cos x = m, \sin 2x = n$;
c) $\sin 3x = a, \cos 2x = b$; d) $\sin x + \cos x = a, \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{cotg}^3 x = b$;
e) $\cos x + \cos y = b, \cos (x - y) = c, \sin x + \sin y = a$;
f) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y = b; x + y = c$.

384. Dokažte, že součet čtverců velikosti tětiv, spojujících libovolný bod kružnice o poloměru r s vrcholy n-úhelníka, do té kružnice vepsaného, je $2nr^2$.

385. Do kružnice je vepsán konvexní n-úhelník tak, že jeho strany vytínají na kružnici postupně oblouky $a, 2a, \ldots, n \cdot a$. Stanovte poměr obsahu tohoto mnohoúhelníka k obsahu pravidelného n-úhelníka, vepsaného téže kružnici.

386. Sestrojte graf funkce:

a) $y = 3 \sin \left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; b) $y = 4 \sin \left(3x - \dfrac{3\pi}{8}\right)$;

c) $y = \dfrac{1}{2} \sin \left(\dfrac{3}{2} x + \dfrac{1}{3} \pi\right)$; d) $y = 2 \sin \left(\dfrac{2}{3} x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

387. Stanovte amplitudu, periodu, frekvenci a fázi harmonických pohybů:

a) $y = 30 \sin \left(4\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$; b) $y = 15 \sin 18{,}85t$;

c) $y = 1{,}8 \cdot \sin \left(\dfrac{2\pi}{3{,}8} \cdot t + \dfrac{2\pi}{3}\right)$; d) $y = 4{,}3 \cdot \sin (7{,}6\, t + 6{,}2)$.

388. Pomocí funkce úhlu α vyjádřete:

a) $\sin 3\alpha$; b) $\cos 3\alpha$; c) $\operatorname{tg} 3\alpha$.

389. Sestrojte graf:

a) $y = 2 \sin (2x + 3)$; b) $y = \sin (x^2)$; c) $y = \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} x)$;
d) $y = \operatorname{arctg} (1 : x)$.

390. Sestrojte graf funkce:

a) $y = \arcsin x$; b) $y = 2 \arccos x$; c) $y = \operatorname{arctg} x$.

[Návod: K sestrojení grafu funkce $y = 2 \arccos x$ použijte grafu funkce $x = \cos \dfrac{y}{2}$.]

Jaký je definiční a funkční obor těchto funkcí?

391. Určete množinu čísel, pro něž jsou splněny rovnice:

a) $\operatorname{tg}^2 2x = \dfrac{51}{50} \cdot \operatorname{tg} 2x$; b) $3 \cos^2 2x = \sin^2 2x$;

c) $\sin^2 x + \frac{1}{4} = \sin x$; d) $\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2$;

e) $\cos 2x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} (\cos x - \sin x)$; f) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(a - x) = 2 \operatorname{tg} a$.

392. Najděte množinu čísel x, pro která je splněna rovnice:

a) $\sin^2 x + 1{,}7 \cos^2 x = 6 \sin x \cos x$; b) $\sin^2 2x + \sin 2x \cos 2x = 2 \cos^2 2x$; c) $\sin^3 x = 3 \sin x \cos^2 x$; d) $10 \sin^2 \frac{x}{2} + 13 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = 5$; e) $\sin 2x = \cos 2x - \sin^2 x + 1$;

f) $2 \sin^2 x - 3 \cos^2 x + \sin x \cos x = 0$.

393. Řešte goniometrické rovnice:

a) $\sin(5x - 3) = \cos(4x + 2)$; b) $\operatorname{tg}\left(\pi x + \frac{\pi}{5}\right) = \operatorname{cotg}\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$;

c) $\operatorname{tg}(3\pi x) = \operatorname{tg}(5\pi x)$; d) $(1 - \operatorname{tg} x) . (1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$;

e) $\operatorname{tg}(\pi(x - 1)) \operatorname{cotg}(\pi(x - 1)) = 1$.

394. Pro která x jsou splněny rovnice:

a) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3 \sin x + 2 = 0$; b) $2 \sin^2 x - \cos^2 x - 4 \sin x + 2 = 0$; c) $2 \operatorname{tg} x \cos x + 1 = 2 \cos x + \operatorname{tg} x$; d) $4 \sin^3 x + 4 \sin^2 x - 3 \sin x = 3$; e) $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 1 = 0$.

[Návod k c): Anulujte a rozložte na součiny.]

395. Určete množinu čísel x, pro něž platí:

a) $\sin x + \cos x = \sec x + \operatorname{cosec} x$; b) $4 \sin x \cos x \cos 2x = 1$;

c) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$; d) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x . \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

e) $\sin(x + 70°) - \cos(x - 70°) = 0$; f) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$;

g) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x$; h) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 3 = 0$.

[Návod ke g): Přičtěte k oběma stranám rovnice výraz $2 \sin^2 x \cos^2 x$.]

396. Určete množinu čísel, pro něž platí:

a) $\arcsin x + \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$; b) $\arcsin x - \arccos x = 0$;

c) $\operatorname{arctg}(x + 1) + \operatorname{arctg}(x - 1) = \operatorname{arctg} 2$; d) $\operatorname{arctg}(x^2 - 4x + 4) = \frac{\pi}{4}$; e) $6 \arcsin(x^2 - 5x + 6{,}5) = \pi$; f) $\arccos(x - 1) = 2 \arccos x$.

397. Obsah pravoúhlého rovnoběžníka je P, jeho kratší strana má velikost b. Najděte velikost ostrého úhlu mezi jeho úhlopříčkami.

***398.** Velikost menší základny rovnoramenného lichoběžníka je c, větší základny a, výšky v. Stanovte velikost jeho úhlu α.

***399.** Poloměr kružnice vepsané do rovnoramenného lichoběžníka je r. Najděte velikost úhlu při větší základně lichoběžníka, je-li jeho obsah roven P j^2.

***400.** Bočná hrana pravidelného šestibokého jehlanu má velikost m cm, obsah podstavy S cm^2. Jak velký úhel svírá bočná hrana s rovinou podstavy?

***401.** Řešte nerovnosti:

a) $\cos x > \sin^2 x - \cos^2 x$; b) $\sin \dfrac{\pi}{x} > 0$; c) $\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{(x+1)4} > 1$;

d) $\sin (2\pi \cos x) > 0$; e) $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} > \dfrac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2}$; f) $\sin x + \sin 3x <$

$< \sin 2x + \sin 4x$.

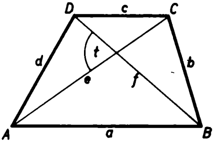
402. Graficky najděte množinu řešení nerovností:
a) $\sin (\pi(x + y)) > 0$; b) $\sin (\pi\, xy) > 0$.

403. Zobrazte množinu všech řešení soustavy nerovností:
$\operatorname{tg} (\pi(x + y)) > 0$, $\operatorname{tg} \pi\, (x - y) > 0$.

***404.** Strany rovnoběžníka jsou a, b, $(a > b)$, t je velikost jeho menšího úhlu, e velikost delší, f kratší úhlopříčky, t_1 menší úhel sevřený úhlopříčkami. Dokažte, že pak platí: a) $e^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos t$; b) $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos t$; c) $4a^2 = e^2 + f^2 + 2ef \cos t_1$; d) $4b^2 = e^2 + f^2 - 2ef \cos t_1$; e) $\sin t_1 : \sin t = 2ab : ef$; f) $\cos t \,.\, \cos t_1 = (e + f)(e - f) \,.\, (a + b) \,.\, (a - b) : 4abef$; g) $\operatorname{tg} t_1 = \dfrac{2ab \sin t}{a^2 - b^2}$; h) $\operatorname{tg} t = \dfrac{2ef \sin t_1}{e^2 - f^2}$;

i) $S = \dfrac{1}{4} \sqrt{(2a + e + f)(2a + e - f)(2a - e + f)(e + f - 2a)}$.

***405.** Dokažte, že v lichoběžníku zobrazeném na obr. 70 platí:



Obr. 70

a) $e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$;

b) $f^2 - e^2 = \dfrac{a + c}{a - c}(b + d)(b - d)$;

c) $f^2 = ac - bd + \dfrac{(ab - cd)(b + d)}{a - c}$;

d) $e^2 = ac - bd + \dfrac{(ad - bc)(b + d)}{a - c}$;

e) $\cos t = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2ef} = \dfrac{(a + c)^2 - (e^2 + f^2)}{2ef}$;

f) $\sin \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b+e-f)(e+f-a-c)}{ef}}$;

g) $\cos \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+c+f-e)(a+c+e-f)}{ef}}$.

406. Najděte velikosti úhlů trojúhelníka, v němž jsou dány velikosti jeho stran: a) $a = 13$, $b = 18$, $c = 15$; b) $a = 186, b = 130, c = 113$; c) $a = 150$, $b = 135$, $c = 255$.

[Návod: Použijte vzorců $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$, $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$, $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$, kde $s = \frac{a+b+c}{2}$.] Použijte logaritmického pravítka.

407. Tangens úhlu tvořeného sousedními stranami trojúhelníka ABC ($a = 29$ m, $b = 40$ m) je roven 1,05. Spočítejte obsah toho trojúhelníka.

***408.** Dokažte, že obsah rovnoramenného lichoběžníka je roven polovině součinu čtverce úhlopříčky a sinu dvojnásobného úhlu tvořeného úhlopříčkou a základnou.

409. Vypočtěte velikost stran a úhlů trojúhelníka, v němž je dáno: a) $a = 150$ m, $v_a = 24$ m, $\gamma = 73{,}733°$; b) $v_a = 17$ cm, $v_b = 23{,}8$ cm, $\gamma = 19{,}86°$; c) $v_a = 12$ m, $v_b = 15$ m, $v_c = 16$ m; d) $c = 147$ m, $v_c = 144$ m, $\beta = 47{,}924°$; e) $c = 52$ m, $v_c = 21$ m, $\alpha = 133{,}6°$; f) $b = 50$ cm, $t_c = 44$ cm, $\alpha = 56{,}338°$. Řešte i konstruktivně.

***410.** Určete velikost ostatních stran, úhlů a velikosti poloměru opsané kružnice r, vepsané ϱ, obsahu P v trojúhelníku, v němž je dáno: a) $v_c = 140$ m, $\alpha = 77^g 75^c 50^{cc}$, $\beta = 43^g 67^c$; b) $a = 509$ m, $b = 221$ m, $t_c = 310{,}4$ m; c) $c = 102$ m, $a + b = 170$ m, $\alpha = 88^g 68^c$; d) $c = 150$ m, $a + b = 170$ m, $\gamma = 107^g 48^c$; e) $c = 40$ m, $v_c = 12$ m, $\gamma = 104^g 10^c$.

411. Řešte nejvhodnějším způsobem trojúhelník: a) $a = 17, \beta = 61°55'40''$, $\gamma = 110°26'40''$; b) $b = 113, \beta = 61°55'40''$, $\gamma = 110°26'40''$; c) $a = 119$, $c = 156$, $\gamma = 71°40'30''$; d) $b = 145$, $\beta = 61°53'40''$, $P = 8\,190$ j^2; e) $a = 388$, $b = 389$, $\alpha = 75°40'52''$; f) $b = 281$, $c = 680$, $\gamma = 100°45'21''$; g) $c = 120$, $b = 113$, $\beta = 68^g 80^c 86^{cc}$.

412. Určete ostatní prvky trojúhelníka, v němž je dáno: a) $a = 330{,}1$, $b = 412{,}2$, $\gamma = 58°47'28''$; b) $b = 17{,}39$, $c = 22{,}88$, $\alpha = 42°30'34''$; c) $P = 58\,188$, $a = 330{,}1$, $\beta = 71°42'42''$; d) $P = 58\,188$, $b = 412{,}2$, $\gamma = 58°47'28''$; e) $a = 15{,}47$, $b = 17{,}39$, $\gamma =$

$= 88°3'27''$; f) $a = 1{,}275$, $c = 0{,}0565$, $\beta = 89°2'5''$; g) $a = 15{,}47$, $b = 17{,}39$, $\gamma = 97^g84^c17^{cc}$; h) $c = 120$, $b = 113$, $\beta = 61{,}91667°$.

***413.** Najděte velikost stran v trojúhelníku, v němž je dáno:

a) $a + b = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$, $\alpha = 132°$, $\beta = 12°$; b) $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, $\alpha - \beta = 50^g$; c) $a = 4$, $\varrho = 1$, $b - c = 2$; d) $\alpha = 60°$, $t_b = 8$, $b + c = a\,.\,\sqrt{3}$.
Pokuste se o řešení konstruktivní.

***414.** Jakou silou je namáhána na ohyb skoba zatlučená do zdi, visí-li na ní břemeno o váze 82 kp a působí-li na ni ještě v téže rovině šikmý tah 60 kp v úhlu 45° od svislého směru?

415. Váha konstrukce 300 kp se má rozložit na dva nosníky svírající se směrem tíže úhly 47°14′ a 18°53′. Vypočtěte jejich zatížení.

416. Tři tlaky velikostí $F_1 = 25$ kp, $F_2 = 36$ kp a $F_3 = 29$ kp, působící v téže rovině, jsou v rovnováze. Vypočtěte velikosti úhlů, které tvoří vektory těchto sil.

417. Budova je vzdálena od řeky 20 m. Z jejího okna, 15 m nad hladinou řeky, je vidět šířku řeky v zorném úhlu 12°. Jak je řeka široká?

***418.** Z bodu C ležícího mimo spojnici AB byla vytýčena vzdálenost $CD = 250$ m a z jejich koncových bodů zaměřeny úhly: úhel $ADC = 41^g44^c44^{cc}$, úhel $BDC = 27^g46^c28^{cc}$ a úhel $ACD = 80^g\ 44^c$. Vypočtěte vzdálenost AB.

***419.** V triangulační síti je zaměřen bod C trojúhelníka ABC pod úhly:
a) $BAC = 50^g20^c$, $ABC = 75^g30^c$, kde $A \equiv (290, 340)$, $B \equiv (-305, -120)$; b) $BAC = 67^g35^c$, $ABC = 40^g48^c$, $A \equiv (-30, 120)$, $B \equiv (350, -200)$.
Stanovte velikost AC.

***420.** Stanovte objem pravidelného čtyřbokého jehlanu, má-li jeho podstavná hrana velikost a a úhel mezi hranami pobočné stěny má velikost α.

***421.** Jehlan má podstavu tvaru kosočtverce o straně velikosti a. Dvě sousední stěny jehlanu přiléhající k ostrému úhlu (velikosti α) podstavy jsou k rovině podstavy kolmé a druhé dvě svírají s rovinou podstavy úhel velikosti β. Určete objem jehlanu.

***422.** Do koule je vepsán pravidelný čtyřboký jehlan. Poloměr koule je R, úhel bočné stěny jehlanu při vrcholu má velikost α. Určete plášť jehlanu. Vyčíslete pro $R = 27{,}3$ dm, $\alpha = 64°16'$.

423. V trojúhelníku ABC se protínají těžnice v bodě O. Najděte objem tělesa, které vznikne rotací čtyřúhelníka $ABCOA$ kolem strany AC, když $AB = c$, $BC = a$, úhel $ABC = \beta$.
Vyčíslete též pro $c = 15$ cm, $a = 14$ cm, $\beta = 67°10'$.

424. Trojúhelník se otáčí kolem strany, k níž přiléhají úhly velikostí α, β. Určete povrch takto vzniklého rotačního tělesa, má-li strana ležící proti úhlu α velikost a.

425. Do kužele, jehož poloměr podstavy je r cm a úhel kolmého řezu při vrcholu kužele má velikost 2α, je vepsán válec tak, že poměr velikostí jeho pláště a pláště kužele je roven číslu $m : n$. Vypočtěte objem válce.

426. Vypočtěte objem pravidelného čtyřbokého jehlanu, je-li velikost poloměru jemu vepsané koule r a velikost úhlu při vrcholu bočné stěny α.

427. Vypočtěte velikost strany a úhlu rovnostranného sférického trojúhelníka, jehož: a) úhel má velikost $\alpha = 80°$. Dokažte, že úhel rovnostranného sférického trojúhelníka musí splňovat podmínku $60° < \alpha < 180°$; b) strana má velikost $a = 75°30'$.

428. Určete obsah pravoúhlého trojúhelníka sférického na kulové ploše, jejíž poloměr je $r = 100$ j a jehož odvěsny $a = 30°$, $b = 45°$.

XVI. STEREOMETRIE

I. PŘÍMKY A ROVINY V PROSTORU, VZÁJEMNÁ POLOHA

1. Zobrazte krychli $ABCDA'B'C'D'$, jejíž hrana má délku a, v základní poloze.
a) Vepište jí čtyřboký pravidelný jehlan $ABCDV$, jehož hlavní vrchol $V \equiv S$, kde S je střed stěny $A'B'C'D'$.
b) Vepište jí pravidelný čtyřstěn $ACB'D'$.
c) Vepište jí pravidelný osmistěn, jehož vrcholy jsou ve středech stěn krychle.
d) Vyjměte z ní kvádr $ABEFA_1B_1E_1F_1$, kde E je střed hrany BC a A_1 leží uvnitř hrany AA' tak, že $AA_1 = \frac{3}{4} AA'$.

2. Pravidelný osmistěn vznikne ze dvou pravidelných čtyřbokých jehlanů, které mají společnou podstavu $ABCD$ a vrcholy U, V v opačných poloprostorech s hraniční rovinou ABC. Všechny jeho hrany jsou stejně dlouhé. Vypište, které přímky vzniklé prodloužením hran osmistěnu jsou s přímkou VB rovnoběžné, které různoběžné a které mimoběžné.

3. a) Kolik různých přímek určují vrcholy A, C, B', D' krychle $ABCDA'B'C'D'$? Které z nich mají polohu mimoběžnou? Vypište je.
b) Kolik párů různoběžných přímek určují tyto vrcholy? Vypište z nich ty páry, které obsahují přímku AC.

4. Dokažte, že přímky AC a $B'D'$, kde A, C, B', D' jsou vrcholy krychle $ABCDA'B'C'D'$, jsou navzájem mimoběžné. Na základě toho dokažte dále, že i přímky AD' a SB', kde S je střed dolní podstavy krychle, jsou navzájem mimoběžné.

5. Body N, S jsou mimo rovinu π a nejsou rovinou π odděleny, bod P leží v rovině π. Popište, jak sestrojíte vržený stín polopřímky PN na rovinu π, je-li S bodem svítícím.

6. Kolik různých úhlopříčných řezů lze sestrojit v krychli, obsahuje-li každý z nich dvě tělesové úhlopříčky krychle? Sestrojte průsečnici p dvou z nich ve volném rovnoběžném promítání.

7. Rovina ϱ a přímka p mají jediný společný bod P.
a) Dokažte, že neexistuje v rovině ϱ taková přímka q, aby platilo $q \parallel p$.
b) Jakou polohu má přímka p k přímkám roviny ϱ?

8. Jakou vzájemnou polohu mohou mít přímky p a q, z nichž přímka p leží v rovině ϱ a přímka q v rovině σ, je-li $\varrho \parallel \sigma$?

9. Jakou vzájemnou polohu mohou mít přímky p a q, z nichž přímka p leží v rovině ϱ a přímka q v rovině σ, jsou-li roviny ϱ a σ navzájem různoběžné?
Sledujte tyto možnosti v krychli $ABCDA'B'C'D'$, kde $\varrho \equiv ABC$, $\sigma \equiv BCD'$ a jejich průsečnice $s \equiv BC$; přímky p a q nechť postupně splývají s prodlouženými hranami nebo úhlopříčkami krychle.

10. Zobrazte krychli $ABCDA'B'C'D'$ a bod M, který půlí hranu BB'. Přímkami $a \equiv BD$ a $b \equiv A'C'$ proložte roviny $\varrho \equiv BDM$ a $\sigma \equiv A'C'M$ a určete jejich průsečnici s. Přesvědčte se, že průsečnici s protínají přímky a, b ve dvou různých bodech.

11. Prodlužte libovolnou hranu krychle v přímku a uveďte ty stěny krychle, s kterými je rovnoběžná. Udejte pro to důvody.

12. Zobrazte pravidelný čtyřstěn $ABCV$ a sestrojte jeho řez s rovinou $\varrho \equiv$ $\equiv MNP$, kde M, N, P jsou po řadě středy hran AV, BV, CV.
a) Dokažte, že rovina ϱ je rovnoběžná s rovinou ABC.
b) Vypočítejte obsah řezu P, je-li délka hrany čtyřstěnu a.
c) Sestrojte síť spodní odťaté části čtyřstěnu.

13.* V rovině π leží různoběžník $ABCD$. Bodem A jde přímka p, která neleží v rovině π, bodem C přímka $q \parallel p$.
Určete průsečnici r rovin $\varrho \equiv Dp$ a $\sigma \equiv Bq$ a dokažte, že je s přímkami p, q rovnoběžná.

14. Zobrazte čtyřboký pravidelný jehlan $ABCDV$ a sestrojte jeho řez s rovinou $\varrho \equiv ACM$, kde M je středem pobočné hrany BV.
Dokažte, že přímka VD je s rovinou ϱ rovnoběžná.

15. Zobrazte krychli $ABCDA'B'C'D'$ a bod M, který leží uvnitř hrany BB' tak, že platí $BM : B'M = 1 : 2$. Sestrojte průsečnici p rovin $\varrho \equiv BCD'$ a $\sigma \equiv ADM$ a dokažte, že je rovnoběžná s přímkami AD a BC.

*16. V krychli $ABCDA'B'C'D'$ jsou přímky $a \equiv AC$ a $b \equiv A'B'$ navzájem mimoběžné. Sestrojte přímku p tak, aby ležela v rovině $\varrho \equiv DBB'$ a aby mimoběžky a, b protínala (příčka dvou mimoběžek).
Proveďte ve volném rovnoběžném promítání.

*17. Jsou dány dvě mimoběžné přímky a, b a bod M, který neleží na žádné z daných mimoběžek. Popište, jak sestrojíte příčku mimoběžek a, b jdoucí bodem M. Je tato úloha vždy řešitelná? Načrtněte si obrázek.

*18. Zobrazte krychli $ABCDA'B'C'D'$ a body M, N, P, které po řadě půlí hrany BB', $B'C'$, $C'D'$.
a) Sestrojte příčku q mimoběžek AM a PN jdoucí bodem A'.
b) Je možno sestrojit příčku p mimoběžek AB a $D'B'$, která jde bodem A'?

***19.** Jsou dány mimoběžky a, b a přímka p, která není rovnoběžná s žádnou z daných mimoběžek. Sestrojte příčku q mimoběžek a a b tak, aby patřila do směru p.
Je tato úloha řešitelná pro jakoukoli polohu přímky p? Načrtněte si obrázek.
[Návod: Příčku q sestrojíme např. jako průsečnici rovin, z nichž jedna je rovnoběžná s přímkou p a obsahuje přímku a a druhá je rovnoběžná s přímkou p a obsahuje přímku b.]

***20.** Zobrazte kvádr $ABCDA'B'C'D'$ a bod S, který je středem horní podstavy kvádru. Sestrojte příčku p mimoběžek $a \equiv AD$ a $b \equiv BS$ tak, aby byla rovnoběžná s přímkou $c \equiv CC'$.

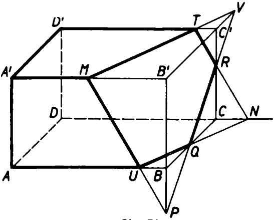
21. Přímky a, b, c procházejí bodem V a neleží v téže rovině. Na přímce a zvolte body A_1, A_2, na přímce b body B_1, B_2 a na přímce c body C_1, C_2 vesměs různé a odlišné od bodu V. Jestliže se přímky A_1B_1 a A_2B_2, A_1C_1 a A_2C_2, B_1C_1 a B_2C_2 protínají, pak jedině v bodech, které leží na téže přímce p. Dokažte to.

22. Zobrazte kvádr $ABCDA'B'C'D'$, jehož rozměry jsou $AB = a = 7$ cm, $AD = b = 6$ cm a $AA' = c = 4$ cm; sestrojte jeho řez s rovinou $\varrho \equiv MNP$, kde bod M je středem hrany $A'B'$, bod N leží na polopřímce DC za bodem C tak, že $CN = 1{,}5$ cm a bod P leží na polopřímce $B'B$ za bodem B tak, že $BP = 2$ cm.

Řešení (obr. 71)

Přímka PM leží v rovině stěny $ABB'A'$ a protíná hranu AB v bodě U, který je vrcholem řezu; přímka $NT \parallel PM$ je průsečnicí roviny $DCC'D'$ s rovinou ϱ a její průsečíky R, T s hranami CC' a $D'C'$ kvádru jsou dalšími vrcholy řezu. Poslední vrchol Q řezu roviny ϱ s kvádrem je průsečíkem přímky VR s hranou BC, kde V je průsečík přímky MT s přímkou $B'C'$.

Závěr: Řezem roviny ϱ s kvádrem je pětiúhelník $MUQRT$, jehož strana $MU \parallel RT$ a strana $MT \parallel UQ$.



Obr. 71

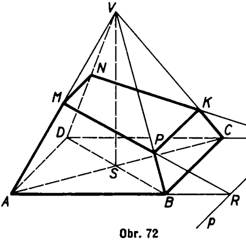
23. Zobrazte čtyřboký pravidelný jehlan $ABCDV$, jehož hrana podstavy AB má délku $a = 8$ cm a tělesová výška $VS = v = 8$ cm. Sestrojte řez jehlanu s rovinou $\varrho \equiv MNP$, kde bod M je středem hrany AV, bod N

středem hrany DV a bod P leží na hraně BV tak, že platí $VP : BP = 4 : 1$.

Řešení (obr. 72)

Úsečka MN je střední příčkou trojúhelníka AVD, proto přímka MN je rovnoběžná s přímkou AD a též s rovinou $ABCD$; průsečnice p roviny ϱ s rovinou $ABCD$ musí být tedy s přímkou MN rovnoběžná za předpokladu, že existuje.

Přímky AB a MP ležící v rovině ABV se protínají v bodě R, který patří rovině $ABCD$ i rovině ϱ, a tedy též jejich průsečnici p. Průsečnice p tedy existuje, prochází bodem R a je rovnoběžná s přímkou MN. Jelikož platí $BC \parallel AD$, $AD \parallel MN$, je $BC \parallel MN$, $BC \parallel p$, a proto i průsečnice PK roviny BCV s rovinou ϱ je rovnoběžná s přímkou p.



Obr. 72

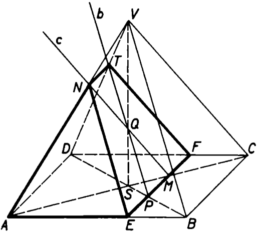
Závěr: Řezem roviny ϱ s jehlanem je lichoběžník $PKNM$, jehož základny tvoří úsečky PK a MN.

24. Zobrazte pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, jehož hrana podstavy AB má délku $a = 8$ cm a tělesová výška $VS = v = 7,5$ cm. Bodem Q, který leží uvnitř úsečky SV tak, že platí vztah $SQ : VQ = 1 : 2$, veďte rovinu ϱ rovnoběžnou s rovinou VBC a sestrojte její řez s jehlanem.

Řešení (obr. 73)

Veďme bodem Q přímky $b \parallel BV$ a $c \parallel CV$, které jsou rovnoběžné též s rovinou pobočné stěny BCV. Rovina $\varrho \equiv bc$ je tedy s rovinou BCV rovnoběžná.

Jelikož přímky b a VB leží v rovině úhlopříčného řezu BDV našeho jehlanu, existují průsečíky P, T přímky b se



Obr. 73

stranami BD a DV trojúhelníka BDV. Jelikož přímky c a VC leží v rovině úhlopříčného řezu ACV jehlanu, existují průsečíky M, N přímky c se stranami AC a AV trojúhelníka ACV. Přímka MP je průsečnice roviny ϱ s rovinou $ABCD$, přičemž $PM \parallel BC$; její průsečíky E, F s hranami AB a CD tvoří s body T, N vrcholy hledaného řezu. Řez $EFTN$ je lichoběžník, jelikož platí vztahy: $PM \parallel BC$, $BC \parallel AD$, a tedy též $PM \parallel AD$; $AD \parallel VBC$, a tedy též $AD \parallel \varrho$, odkud plyne $NT \parallel AD$ a $NT \parallel PM$.

Závěr: Řez roviny ϱ s jehlanem je lichoběžník $EFTN$.

25. Zobrazte krychli $ABCDA'B'C'D'$, jejíž hrana AB má délku $a = 4$ cm. Bod M leží na prodloužené hraně $B'C'$ za bod C' tak, že platí $C'M = B'C' = a$. Sestrojte řez roviny $\varrho \equiv A'BM$ s krychlí a vypočítejte jeho obvod.

26. Zobrazte kvádr $ABCDA'B'C'D'$, jehož rozměry jsou $AB = a = 8$ cm, $AD = b = 10$ cm a $AA' = c = 4{,}5$ cm. Sestrojte jeho řez s rovinou $\varrho \equiv A'PM$, kde M je střed hrany CC' a P leží na prodloužené hraně AB za bod B tak, že $BP = 3$ cm. Sestrojte též průsečnici roviny ϱ s rovinou stěny $ADD'A'$.

27. Zobrazte pravidelný čtyřboký hranol $ABCDA'B'C'D'$, jehož hrana podstavy AB má délku $a = 4$ cm a hrana pobočná AA' délku $c = 8$ cm. Uvnitř hrany BB' leží bod M tak, že $BM = 3$ cm, uvnitř hrany CC' bod N tak, že $CN = 7$ cm. Sestrojte řez hranolu s rovinou $\varrho \equiv AMN$ a skutečnou velikost tohoto řezu.

28. Ve volném rovnoběžném promítání sestrojte řez roviny $\varrho \equiv ABD'$ se šestibokým pravidelným hranolem $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$.

29. Zobrazte kvádr $ABCDA'B'C'D'$, dále bod M, který leží uvnitř hrany DD' a přímku p, která leží v rovině podstavy kvádru tak, že protíná hrany AB a BC ve vnitřních bodech T a U. Sestrojte řez roviny ϱ, která je určena bodem M a přímkou p s tímto kvádrem.

30. Zobrazte krychli $ABCDA'B'C'D'$, jejíž horní podstava má střed S. Sestrojte její řezy s rovinami $\varrho \equiv ABS$ a $\sigma \equiv BCS$ a potom těleso, které vznikne z krychle po vyjmutí přední odříznuté části rovinou ϱ a pravé odříznuté části rovinou σ. Sestrojte též pravoúhlý průmět tohoto tělesa na rovinu $ABCD$, má-li hrana krychle délku $a = 4$ cm.

31. Zobrazte krychli $ABCDA'B'C'D'$ a body M, N, kde M je střed hrany AB a N střed hrany $C'D'$. Sestrojte řez této krychle s rovinou $\varrho \equiv A'MN$ a dokažte, že je to kosočtverec.
[Návod: Ukažte, že řez má všechny strany stejně dlouhé a úhlopříčky různé délky.]

32. Zobrazte kvádr $ABCDA'B'C'D'$, jehož rozměry jsou $AB = a = 8$ cm,

$AD = b = 6$ cm a $AA' = c = 4$ cm. Sestrojte jeho řez s rovinou ϱ, která je rovnoběžná s přímkou AC a prochází body D' a M (bod M je středem hrany AB).

33. Zobrazte krychli $ABCDA'B'C'D'$, jejíž hrana má délku $a = 7$ cm. Sestrojte její řez s rovinou ϱ, která prochází body M, N a je rovnoběžná s přímkou $b \equiv C'P$. (M je střed hrany $A'D'$, N střed hrany $D'C'$ a P leží uvnitř hrany BB' tak, že platí $BP : B'P = 1 : 3$.)

34. Zobrazte čtyřboký pravidelný jehlan $ABCDV$, jehož hrana podstavy AB má délku $a = 7$ cm a tělesová výška $VS = v = 7$ cm. Sestrojte jeho řez $ABMN$ s rovinou $\varrho \equiv ABM$, kde M je střed hrany CV; určete průsečnici p rovin BCV a ADV a dokažte, že přímky p, BM a AN se protínají v jednom bodě.

35. Zobrazte čtyřboký pravidelný jehlan $ABCDV$, jehož hrana AB má délku $a = 8$ cm a tělesová výška $VS = v = 8$ cm. Sestrojte řez jehlanu s rovinou $\varrho \equiv MNP$, kde M je střed hrany CV, N střed hrany DV a P bod, který leží na úsečce VS tak, že $SP = 3$ cm.

***36.** Zobrazte čtyřboký pravidelný jehlan $ABCDV$, jehož hrana podstavy AB má délku $a = 7$ cm a tělesová výška $SV = v = 7{,}5$ cm. Sestrojte jeho řez s rovinami ϱ a σ, přičemž rovina ϱ prochází bodem M a je rovnoběžná s rovinou VBC a rovina σ prochází bodem N a je rovnoběžná s rovinou ADV. [M je vnitřní bod hrany AV a dělí ji v poměru $AM : VM = 1 : 2$, N je vnitřní bod hrany CV a dělí ji v poměru $CN : VN = 1 : 2$.]

37. Zobrazte kvádr $ABCDA'B'C'D'$, jehož rozměry jsou $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$, a zkoste ho rovinami $\varrho \equiv C'D'M$ a $\sigma \equiv A'D'N$, kde M, N jsou vnitřní body hrany BB', přičemž platí $BM = MN = NB' = \frac{1}{3}\,c$.

38. Zobrazte libovolný čtyřstěn $ABCV$. Sestrojte průsečnici p rovin $\varrho \equiv BCA'$, $\sigma \equiv A'BC$, kde A' je střed hrany AV a B' dělí hranu BV v poměru $VB' : BB' = 1 : 2$; potom určete řez čtyřstěnu s rovinou τ, která je určena přímkou p a vrcholem V.

39. Zobrazte čtyřstěn $ABCV$ a těžiště T trojúhelníka ABC. Uvnitř úsečky TV zvolte bod L, na polopřímce AB za bodem B bod M a sestrojte průsečíky přímky $p \equiv ML$ s povrchem čtyřstěnu.

***40.** Zobrazte krychli $ABCDA'B'C'D'$, jejíž hrana má délku a.

a) Sestrojte řez této krychle s rovinou $\varrho \equiv POS$, kde P je bod ležící na polopřímce AB za bodem B tak, že platí $BP = \frac{1}{2}\,AB$, O je střed horní podstavy a S střed spodní podstavy krychle.

b) Vypočítejte obsah řezu pomocí čísla a.

c) Sestrojte průsečíky přímky MP, kde M je střed úsečky OS, s povrchem krychle.

2. PŘÍMKY A ROVINY K SOBĚ KOLMÉ. SOUMĚRNOST PODLE ROVINY

41. Dokažte, že nejvýše dvě pobočné stěny jehlanu jsou kolmé k rovině jeho podstavy.

42. Dokažte, že úhlopříčný řez $AA'C'C$ krychle $ABCDA'B'C'D'$ je obdélník.

43. Hrana AB čtyřbokého pravidelného jehlanu $ABCDV$ má délku a, pobočná hrana AV délku b. Určete konstruktivně vzdálenost bodu M od přímky CN, je-li M střed hrany AB a N střed hrany AV.

44. Určete konstruktivně i výpočtem vzdálenost v vrcholu A od tělesové úhlopříčky BD' kvádru $ABCDA'B'C'D'$, jsou-li jeho rozměry $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$.

45. Hrany krychle $ABCDA'B'C'D'$ mají délku a. Na polopřímce DC za bodem C je zvolen bod M tak, že $CM = a$. Dokažte, že úsečka MB udává vzdálenost bodu M od přímky BD'.

46. Hrana AB čtyřbokého pravidelného jehlanu $ABCDV$ má délku a, jeho tělesová výška VS také délku a. Určete vzdálenost d bodu M od hrany BC, leží-li M uvnitř úsečky VS tak, že platí $SM = \frac{1}{4} VS$.

47. Určete vzdálenost d středu pravidelného šestibokého hranolu $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ od roviny ϱ, která je rovnoběžná s pobočnými hranami hranolu a prochází body M, N, kde M je střed hrany AF a N střed hrany AB. (Délka hrany AB je a.)

***48.** Je dán pravidelný čtyřboký hranol $ABCDA'B'C'D'$, jehož hrana podstavy má délku a a hrana pobočná délku $b = 2a$. Určete početně i konstruktivně vzdálenost d vrcholu B' od roviny $BA'C'$.

49. Hrana AB a tělesová výška VS pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ mají stejnou velikost rovnou kladnému číslu a. Vypočítejte vzdálenost d středu S podstavy jehlanu od roviny jeho pobočné stěny.

Řešení (obr. 74)

Vzdálenost d je výškou SP pravoúhlého trojúhelníka VSM, kde M je střed hrany BC.

Platí vztah $d \cdot VM = a \cdot \frac{a}{2}$, kde $VM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$, z něhož je $d = \frac{a^2}{2 \cdot VM} = \frac{a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Závěr: Vzdálenost středu S podstavy jehlanu od jeho pobočné stěny je $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$, kde a je dané číslo.

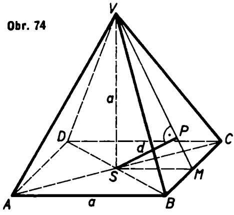
50. Zobrazte krychli $ABCDA'B'C'D'$, jejíž hrana má délku a a sestrojte přímku k, která je kolmá k rovině ABC' a prochází bodem M, který je středem hrany $A'B'$. Určete početně vzdálenost bodu M od roviny ABC'.

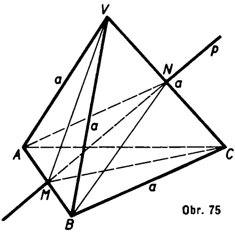
51. Roviny ϱ a σ navzájem k sobě kolmé mají průsečnici s. Bod A leží v rovině ϱ a má od průsečnice s vzdálenost $AA_1 = d_1 \neq 0$, bod B leží v rovině σ a má od průsečnice s vzdálenost $BB_1 = d_2 \neq 0$. Vypočítejte délku úsečky AB, má-li úsečka A_1B_1 délku m.

***52.** V rovině ϱ leží pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož odvěsny mají délky a, b. Ve středu S přepony tohoto trojúhelníka je vedena k rovině ϱ kolmice a na ní zvolen bod M tak, že $SM = v \neq 0$. Vypočítejte vzdálenost bodu M od vrcholů trojúhelníka ABC na základě čísel a, b, v.

***53.** Pravoúhlé průměty bodů A, B na rovinu ϱ jsou A_1, B_1. O jakou délku je nutno prodloužit úsečku AB, aby proťala rovinu ϱ v bodě R, je-li délka $AA_1 = m$, $BB_1 = n$, $A_1B_1 = d_1$ a platí-li vztah $m > n$.

Obr. 74





Obr. 75

54. Je dán čtyřboký pravidelný jehlan $ABCDV$, jehož hrana podstavy má délku a a hrana poboční délku b. Přímka MN, kde M je střed hrany AB a N střed hrany VC, je příčkou navzájem mimoběžných přímek AB a VC. Jaký vztah musí platit mezi čísly a, b, má-li tato příčka být k přímce VC kolmá?

55. Dokažte, že přímka p spojující středy M, N hran AB a VC pravidelného čtyřstěnu $ABCV$ je k přímkám AB a VC kolmá. (Osa mimoběžek.)

Řešení (obr. 75)

Trojúhelník VMC je rovnoramenný, jelikož $VM = CM = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$, má-li čtyřstěn hranu délky a; je tedy $p \perp VC$.

Trojúhelník ANB je také rovnoramenný, jelikož $AN = BN = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$; je tedy $p \perp AB$.

Závěr: Přímka p je kolmá k přímce AB, je kolmá k přímce VC, je tedy osou mimoběžek AB a VC.

56. V krychli $ABCDA'B'C'D'$ vyhledejte alespoň tři páry mimoběžných hran a určete osy těchto párů.

***57.** V pravidelném čtyřstěnu $ABCV$ je tělesová výška VS půlena bodem P. Dokažte, že přímky AP, BP, CP stojí k sobě navzájem kolmo.

58. V rovině ϱ je dán bod M; přímka p je s rovinou ϱ různoběžná a má s ní společný bod $P \not\equiv M$. Bodem M veďte v rovině ϱ přímku q tak, aby $q \perp p$. Proveďte diskusi vzhledem k poloze přímky p k rovině ϱ.

59. Dokažte, že pravoúhlým průmětem pravého úhlu AVB do roviny je zase pravý úhel, leží-li jedno jeho rameno v průmětně a druhé rameno není k průmětně kolmé.
Zobecněte tuto poučku.

60. Dokažte, že pravoúhlými průměty mimoběžek p, q na rovinu π mohou být
a) dvě různoběžky,
b) dvě rovnoběžky,
c) přímka a bod, který na přímce neleží.
Ověřte si všechny tyto možnosti na krychli $ABCDA'B'C'D'$, volíte-li rovinu $ABCD$ za průmětnu π a prodloužené hrany nebo úhlopříčky krychle za přímky p, q.

61. Zobrazte krychli $ABCDA'B'C'D'$, jejíž hrana má délku 5 cm. Ke čtverci $BCC'B'$ sestrojte čtverec souměrný podle roviny $\varrho \equiv CC'P$, leží-li bod P uvnitř hrany AB tak, že platí $AP = 2BP$.
[Návod: Bod B_1 souměrný k bodu B podle roviny ϱ leží na přímce BM, kde M je vnitřním bodem hrany AD, přičemž platí $DM = 2\,AM$.]

62. Zobrazte čtyřboký pravidelný jehlan $ABCDV$, jehož hrana AB má délku $a = 8$ cm a tělesová výška $SV = v = 8$ cm. Sestrojte k němu obraz jehlanu souměrně sdruženého podle roviny ϱ, která jde vrcholem C a je rovnoběžná s přímkami BD a VS.
[Návod: Přímka AC je kolmá k rovině ϱ.]

63. Určete všechny roviny souměrnosti útvaru U složeného ze dvou různých polorovin ϱ a σ majících společnou hraniční přímku p.

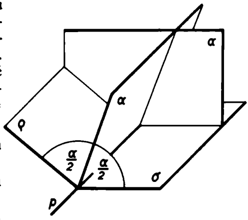
Řešení (obr. 76)

Útvar U má rovinu souměrnosti α tehdy, jestliže se útvar U', který je k útvaru U souměrný podle roviny α, s útvarem U ztotožní. ($U' \equiv U$ v souměrnosti podle roviny α.) V našem případě jsou dvě možnosti:

a) Je-li $\varrho' \equiv \sigma$ a $\sigma' \equiv \varrho$, je útvar $U' \equiv U$; rovina α prochází hraniční přímkou p, $\sphericalangle\, \sigma\alpha = \sphericalangle\, \varrho\alpha$.

b) Je-li $\varrho' \equiv \varrho$ a $\sigma' \equiv \sigma$, je také útvar $U' \equiv U$; poloroviny σ a ϱ jsou v souměrnosti podle roviny α samodružné, v důsledku čehož platí vztahy $\varrho \perp \alpha$, $\sigma \perp \alpha$, $p \perp \alpha$. Takových rovin α je neomezený počet.

Závěr: Útvar U složený ze dvou polorovin ϱ a σ, které mají společnou hraniční přímku p, má neomezený počet rovin souměrnosti. Jsou to všechny roviny kolmé k přímce p a rovina, která přímku p obsahuje a platí: $\sphericalangle\, \sigma\alpha = \sphericalangle\, \varrho\alpha$.



Obr. 76

64. Co je geometrickým místem bodů v prostoru, které mají

a) stejnou vzdálenost od dvou různých bodů A, B,

b) stejnou vzdálenost od tří různých bodů A, B, C, které neleží v téže přímce?

65. Na povrchu krychle $ABCDA'B'C'D'$ najděte body, které mají od vrcholů A, B, C' stejnou vzdálenost. [Návod: Určete průsečnici rovin souměrnosti úseček AB a BC'.]

66. Stanovte všechny roviny souměrnosti čtyřbokého pravidelného jehlanu $ABCDV$.

67. Stanovte všechny roviny souměrnosti krychle.

68. Existují roviny souměrnosti dvou navzájem mimoběžných přímek?

69. V rovině π leží kružnice $k \equiv (S; r)$, mimo rovinu π bod P.

a) Které body kružnice k mají od bodu P stejnou vzdálenost?

b) Který bod kružnice k má od bodu P nejmenší a který největší vzdálenost? [Návod: Uvažujte souměrnost podle roviny $\varrho \perp \pi$, která jde body P a S.]

70. Určete roviny souměrnosti útvaru složeného z roviny ϱ a přímky p s ní různoběžné.

3. ODCHYLKA PŘÍMEK A ROVIN, ODCHYLKA PŘÍMKY OD ROVINY

71. Pravidelný trojboký hranol má všechny hrany stejně dlouhé. Určete početně i konstruktivně odchylku úhlopříček pobočných stěn, které vycházejí z téhož vrcholu hranolu.

72. Určete početně i konstruktivně odchylku roviny $\varrho \equiv BA'C'$ od roviny $ABCD$ krychle $ABCDA'B'C'D'$, jejíž hrana má délku a.

73. Určete početně odchylku dvou sousedních stěn pravidelného osmistěnu, jehož hrany mají délku a.

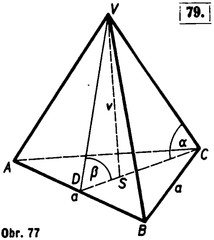
74. Rotační kužel má poloměr podstavy r a tělesovou výšku $v = 3r$. Vypočítejte odchylku jeho tečné roviny od roviny podstavy.

75. Nad horní podstavou rovnostranného válce je postaven rovnostranný kužel, jehož vrchol je V. Určete početně odchylku přímky PV od roviny spodní podstavy válce, je-li P libovolný bod kruhové hrany této podstavy.

76. Pomníček je zakončen pravidelným čtyřbokým jehlanem, jehož všechny hrany mají délku a. Určete konstruktivně i výpočtem odchylku jeho protilehlých pobočných stěn.

77. Jehlan $ABCDV$ má za podstavu tětivový čtyřúhelník, jehož střed opsané kružnice je S. Tělesová výška jehlanu je $VS = v$. Dokažte, že pobočné hrany tohoto jehlanu mají od roviny podstavy stejné odchylky.

78. Je dán čtyřboký pravidelný hranol $ABCDA'B'C'D'$, jehož hrana podstavy má délku a a hrana pobočná délku $2a$. Určete početně i konstruktivně odchylku roviny $\varrho \equiv ACD'$ od roviny podstavy $ABCD$.



Obr. 77

79. Pravidelný trojboký jehlan $ABCV$, jehož hrana podstavy má délku a a tělesová výška $VS = v$, má odchylku pobočné hrany od roviny podstavy $\alpha°$ a odchylku pobočné stěny od roviny podstavy $\beta°$. Jaký je vztah mezi oběma odchylkami?

Řešení (obr. 77)

Je-li D střed hrany AB, je $\sphericalangle DCV = \alpha$ a $\sphericalangle CDV = \beta$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{\frac{a}{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3v}{a\cdot\sqrt{3}} = \frac{3v\cdot\sqrt{3}}{3a} = \frac{v\cdot\sqrt{3}}{a},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v}{\frac{a}{6}\cdot\sqrt{3}} = \frac{6v}{a\,.\,\sqrt{3}} = \frac{6v\,.\,\sqrt{3}}{3a} = \frac{2v\,.\,\sqrt{3}}{a};$$

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = 2,\ \operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha\,.$$

Závěr: Odchylky jsou vázány vztahem $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$.

80. Zobrazte krychli $ABCDA'B'C'D'$, jejíž hrana má délku a a přímku $p \equiv MN$, kde M je střed hrany $A'D'$ a N leží uvnitř hrany BB' tak, že $BN = \frac{1}{4}BB'$. Určete výpočtem odchylku přímky p od roviny $ABCD$.

81. Obdélníkový pozemek ležící na svahu, který má od vodorovné roviny odchylku $\alpha°$, je zobrazen na mapě obdélníkem o délce a a šířce b. Jak velkou výměru má ve skutečnosti, je-li mapa provedena v měřítku $1 : m$?

82. Vypočítejte odchylku α přímky $p \equiv AB$ $[A \equiv (5; 7; 9),\ B \equiv (2; 3; 4)]$ od půdorysny π.

83. Jsou dány dvě různoběžné roviny ϱ a σ, jejichž odchylka je $\alpha°$. Bod M leží na průsečnici p obou rovin. Dokažte, že odchylka kolmic k_1, k_2 vedených bodem M k rovinám ϱ a σ je také $\alpha°$.

84. Podstavu $ABCD$ čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ tvoří rovnoramenný lichoběžník, jehož základny AB, CD mají délky $z_1 = 6$ cm, $z_2 = 3$ cm a výška $v = 3$ cm. Tělesová výška jehlanu má délku $VU = 5$ cm, přičemž U je průsečík úhlopříček podstavy. Určete konstruktivně odchylku průsečnice p stěn ADV a BCV od roviny podstavy jehlanu.

85. Kvádr $ABCDA'B'C'D'$ má rozměry $AB = a$, $AD = b$ a $AA' = c$.
a) Jaký vztah je mezi těmito rozměry, je-li odchylka přímky BD' od roviny $ABCD$ rovna $45°$?
b) O kolik se musí zvětšit rozměr c při pevně zvolených rozměrech a, b, aby se zvětšila tato odchylka o $15°$?

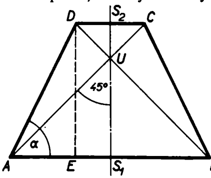
86. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, jehož délka hrany podstavy je $a = 8$ cm a tělesová výška $VS = v = 4$ cm. Určete početně i konstruktivně odchylku kolmice vedené středem M hrany BC ke stěně ADV od roviny $ABCD$.

87. Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$, jehož délka hrany podstavy je a a tělesová výška $VS = v = \frac{a}{2}$. Určete početně odchylku α roviny $\varrho \equiv ACV$ od roviny podstavy jehlanu.

88. Kvádr $ABCDA'B'C'D'$ má rozměry $AB = a$, $AD = b$ a $AA' = c$.

Určete konstruktivně odchylku α přímky BC' od roviny BCD'. (Volte $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = 6$ cm.)

89. Základny osového řezu rotačního komolého kužele mají délky $z_1 = 6$ dm a $z_2 = 2$ dm; jeho úhlopříčky stojí k sobě kolmo. Pomocí čísel z_1, z_2 vypočítejte odchylku strany komolého kužele od roviny větší podstavy.



Obr. 78

Řešení (obr. 78)

Označme α úhel $\sphericalangle BAD$. Potom $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{ED}{AE}$, kde $ED = S_1U + US_2 = \dfrac{z_1}{2} + \dfrac{z_2}{2} = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$, $AE = \dfrac{z_1 - z_2}{2}$. Je tedy $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = \dfrac{8}{4} = 2$ a $\alpha = 63°26'$.

Závěr: Odchylka strany komolého kužele od roviny jeho větší podstavy je $\alpha = 63°26'$.

***90.** Je dán rotační válec, jehož podstava má poloměr r, a bod M, který má od osy válce vzdálenost d. Jakou odchylku mají tečné roviny válce jdoucí bodem M? Je tato úloha vždy řešitelná? Proveďte též pro $r = 3$ dm a $d = 6$ dm.

***91.** Nad obdélníkovým okapem o rozměrech a, b je postavena sedlová střecha se sklonem $\alpha°$. Je-li $\beta°$ odchylka úhlopříčky střechy od roviny okapu, dokažte, že $\beta < \alpha$.

[Návod: Určete poměr $\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$ pomocí čísel a, b.]

***92.** Podstavou pravidelného hranolu trojbokého je rovnostranný trojúhelník ABC, jehož strana AB má délku a.
Hranou AC podstavy hranolu je vedena rovina ϱ, jejíž odchylka od roviny podstavy je $\alpha°$. Jak velký úsek vytíná rovina ϱ na pobočné hraně hranolu, která jde vrcholem B?

***93.** Dva rovnostranné trojúhelníky ABC, ABC' mají společnou stranu AB a leží v různých rovinách. Vypočítejte délku úsečky CC', má-li strana AB délku a a je-li odchylka rovin trojúhelníků $\alpha°$.

4. HRANOL, VÁLEC

94. Určete délku hrany železné krychle, která má hmotnost 1 tunu. (Hustota železa $\varrho = 7{,}8$ g/cm³.)

95. Určete tloušťku t plechu, z něhož je zhotovena krychle o hraně délky a, je-li hustota plechu ϱ a hmotnost krychle M.

96. Krychli je opsána koule o poloměru r. Vypočítejte povrch a objem krychle.

97. Povrch krychle je S. Vypočítejte její objem V.

98. Hrana krychle nebyla změřena přesně. Byla zjištěna její střední aproximovaná hodnota a_1 a prostá chyba ε. S jakou chybou je nutno počítat při určování a) povrchu, b) objemu krychle?

Řešení

Označme a skutečnou velikost hrany krychle, P její povrch a V její objem. Platí: $a_1 - \varepsilon \leqq a \leqq a_1 + \varepsilon$ a také $6(a_1 - \varepsilon)^2 \leqq P \leqq 6(a_1 + \varepsilon)^2$, neboť $a_1 - \varepsilon > 0$ vzhledem k tomu, že číslo ε je oproti číslu a_1 velmi malé.

Prostá chyba, s kterou je nutno počítat u povrchu naší krychle, je

$\varepsilon_1 = \dfrac{6(a_1 + \varepsilon)^2 - 6(a_1 - \varepsilon)^2}{2} = 3(a_1^2 + 2a_1\varepsilon + \varepsilon^2 - a_1{}^2 + 2a_1\varepsilon - \varepsilon^2) =$
$= 12a_1\varepsilon$. Jelikož platí též nerovnost $(a_1 - \varepsilon)^3 \leqq V \leqq (a_1 + \varepsilon)^3$, je prostá chyba, s kterou nutno počítat u objemu naší krychle, $\varepsilon_2 =$
$= \dfrac{(a_1 + \varepsilon)^3 - (a_1 - \varepsilon)^3}{2} = \dfrac{a_1^3 + 3a_1^2\varepsilon + 3a_1\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - a_1^3 + 3a_1^2\varepsilon -}{2}$
$\dfrac{- 3a_1\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{2} = 3a_1{}^2\varepsilon + \varepsilon^3 = 3a_1{}^2\varepsilon$. ($\varepsilon^3$ má hodnotu tak malou, že ji lze zanedbat.)

Závěr: U povrchu P naší krychle je nutno počítat s chybou $\varepsilon_1 = 12a_1\varepsilon$, u jejího objemu V s chybou $\varepsilon_2 = 3a_1{}^2\varepsilon$.

99. Stanovte hmotnost vzduchu v učebně tvaru kvádru o rozměrech $a = 10\ \text{m}$, $b = 6\ \text{m}$, $c = 3\ \text{m}$, je-li hustota vzduchu $\varrho = 1{,}208\ \text{kg/m}^3$.

100. Za jakou dobu se naplní nádrž tvaru kvádru, jsou-li její rozměry $a = 8\ \text{m}$, $b = 5\ \text{m}$, $c = \dfrac{3}{4}\ \text{m}$, přitéká-li do ní každou minutu 50 l vody?

101. Rozměry kvádru jsou v poměru 2 : 3 : 6. Jeho tělesová úhlopříčka má délku 14 cm. Určete jeho povrch a objem.

102. Rozměry kvádru jsou v poměru 2 : 3 : 4; jeho povrch $S = 13\ \text{dm}^2$. Vypočítejte objem kvádru.

103. Stěny kvádru, které mají společný jeden vrchol, mají obsahy $6\ \text{dm}^2$, $8\ \text{dm}^2$, $12\ \text{dm}^2$. Vypočítejte jeho objem.

104. Pobočná hrana kvádru má délku $c = 4\ \text{dm}$, jeho tělesová úhlopříčka délku $u = \dfrac{o}{2}$, kde o je obvod jeho podstavy. Určete jeho objem.

105. Kvádr má povrch $S = 166\ \text{cm}^2$ a objem $V = 140\ \text{cm}^3$. Je-li jeden jeho rozměr $a = 4$ cm, určete ostatní rozměry.

106. Vypočtěte objem prostoru pod střechou domu, který je 15 m dlouhý a 8 m široký, je-li výška štítu 3,5 m.

107. Při melioračních pracích je hloubena hlavní odpadová stoka tak, že kolmý řez stokou tvoří rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, jehož základny mají délky $AB = z_1$m, $CD = z_2$m a výška v m. Kolik m³ zeminy obsahuje výkop stoky na délce d m?

108. Skleněný pravidelný trojboký hranol má hmotnost $M = 129{,}9$ g. Jak je vysoký, je-li délka hrany podstavy $a = 2$ cm a hustota skla $\varrho = 2{,}5\ \text{g/cm}^3$?

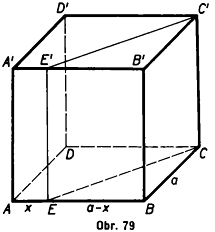
109. Podstavu kolmého hranolu tvoří pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají délky v poměru 3 : 4. Výška hranolu má délku o 2 cm menší než větší odvěsna trojúhelníkové podstavy. Určete objem hranolu, je-li jeho povrch 468 cm².

110. Podstavou kolmého čtyřbokého hranolu je kosočtverec $ABCD$, jehož strana má délku $a = 3$ cm. Vypočítejte jeho objem, mají-li jeho tělesové úhlopříčky od roviny spodní podstavy odchylky 30°, 45°.

[Návod: Jsou-li e, f velikosti úhlopříček podstavy a v výška hranolu, platí vztah $v = e = \dfrac{f}{\sqrt{3}}$.]

111. Podstavu vodojemu 2 m hlubokého tvoří pravidelný šestiúhelník, jehož strana má délku 2 m. Kolik hl vody pojme?

112. V krychli $ABCDA'B'C'D'$ je vedena hranou CC', jejíž délka je a, rovina ϱ tak, že rozdělí krychli na dva kolmé hranoly (čtyřboký a trojboký), jejichž objemy jsou v poměru 3 : 2. V jakém poměru je touto rovinou rozdělena hrana AB?



Obr. 79

Řešení (obr. 79)

Řez roviny ϱ s krychlí je obdélník $CC'E'E$, jehož vrcholy E, E' leží na hranách AB a $A'B'$. Označíme-li V_1 objem čtyřbokého hranolu $AECDA'E'C'D'$, který má za podstavu pravoúhlý lichoběžník, jehož základny mají délky $AE = x$, $CD = a$ a jehož výška $AD = a$, V_2 objem trojbokého hranolu, který má za podstavu pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají délky $EB = a - x$ a $BC = a$, potom platí podle podmínky úlohy vztah $V_1 : V_2 = 3 : 2$. Výšky obou hranolů mají délku a, takže platí i tyto vztahy:

$$P_1 a : P_2 a = P_1 : P_2 = \frac{a + x}{2} a : \frac{a - x}{2} a = (a + x) : (a - x) = 3 : 2,$$

(P_1, P_2 jsou obsahy podstav obou hranolů), odkud $x = \frac{a}{5}$, $a - x = \frac{4a}{5}$, takže $x : (a - x) = \frac{a}{5} : \frac{4a}{5} = 1 : 4$.

Závěr: Rovina ϱ rozděluje hranu AB v poměru $1 : 4$.

113. Dokažte, že objem kolmého trojbokého hranolu se rovná polovičnímu součinu z obsahu jedné pobočné stěny a její vzdálenosti od protější pobočné hrany.

***114.** Vypočítejte plášť kvádru $ABCDA'B'C'D'$, má-li úhlopříčka AC délku u, $\sphericalangle BAC = \beta$ a $\sphericalangle CAC' = \alpha$.

115. Jsou-li odchylky tělesové úhlopříčky kvádru od jeho stěn $\alpha°$, $\beta°$, $\gamma°$, dokažte, že platí:
a) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$;
b) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$.

***116.** Určete plášť pravidelného šestibokého hranolu, má-li jeho stěnová úhlopříčka délku d a odchylku od roviny podstavy $\alpha°$.

***117.** Vypočítejte objem kosého čtyřbokého hranolu, jehož podstavou je kosočtverec mající výšku v a ostrý úhel α, mají-li jeho pobočné hrany délku a a od roviny podstavy odchylku $\beta°$.
(Též pro $v = 6{,}1$ cm, $\alpha = 39°4'$, $a = 24{,}9$ cm, $\beta = 66°2'$.)

***118.** Jednou hranou dolní podstavy a protilehlým vrcholem horní podstavy pravidelného trojbokého hranolu je vedena rovina, která má odchylku od roviny spodní podstavy $\alpha°$. Vypočítejte objem hranolu, má-li vzniklý řez obsah P.

119. Vypočítejte objem trojbokého kolmého hranolu $ABCA'B'C'$, který má za podstavu trojúhelník ABC, jehož strany mají délky $AC = b = 1$ dm, $BC = a = 2$ dm a $\sphericalangle ACB = \gamma = 60°$, je-li výška hranolu $v = AB$.

120. Dvouválcový motor má vrtání 70 mm a zdvih 80 mm. Jak velký je „obsah“ jeho válců v cm^3?

121. Jaký průměr má měděný drát 100 m dlouhý, je-li jeho hmotnost 40 kg? (Hustota mědi $\varrho = 8{,}9$ g/cm^3.)

122. Válcová roura má délku d, světlost s a tloušťku t. Jak velký je její povrch?

123. Nádoba tvaru rotačního válce o poloměru podstavy r je naplněna vodou. Oč vystoupí voda v nádobě, ponoří-li se do ní pravidelný čtyřstěn, jehož hrany mají délku a?

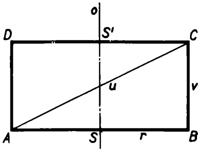
124. Sestrojte kruh, jehož obsah se rovná povrchu rotačního válce, jehož podstava má poloměr velikosti r a tělesovou výšku v.

125. Dva rotační válce mají shodné podstavy o poloměru r. Plášť jednoho z nich se rovná povrchu druhého. Oč se liší jejich tělesové výšky?

126. Stanovte poměr objemů tří rotačních válců opsaných kvádru s rozměry $AB = a = 2$ cm, $AD = b = 3$ cm, $AA' = c = 4$ cm.

***127.** Rovnostranný válec má podstavu o poloměru velikosti r. Rovina ϱ rovnoběžná s osou válce vytíná v podstavě tětivu délky r a rozděluje válec na dvě tělesa T_1 a T_2. Určete jejich objemy.

128. Rotační válec má povrch $S = 20\pi\text{dm}^2$. Úhlopříčka jeho osového řezu má délku $u = 5$ dm. Určete jeho objem V.



Obr. 80

Řešení (obr. 80)

Objem rotačního válce je $V = \pi r^2 v$, kde r je poloměr podstavy a v tělesová výška válce; v a r vypočítáme ze vztahů

$$2\pi r(r + v) = 20\pi \qquad (1)$$

$$4r^2 + v^2 = 25 \qquad (2)$$

Ze vztahu (1) je $v = \dfrac{10 - r^2}{r}$; ze vztahu (2) po dosazení za v plyne rovnice $25 = 4r^2 + \left(\dfrac{10 - r^2}{r}\right)^2$, která po úpravě má tvar $r^4 - 9r^2 + 20 = 0$. Její kladné kořeny jsou $r_1 = 2$ a $r_2 = \sqrt{5}$.

Je tedy nutno rozlišit dva případy:

a) je-li $r = 2$, je $v = \dfrac{10 - 4}{2} = 3$ a $V = 12\pi$;

b) je-li $r = \sqrt{5}$, je $v = \dfrac{10 - 5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ a $V \doteq 5\pi\sqrt{5}$.

Závěr: Objem rotačního válce je buď $12\pi\text{dm}^3$, nebo $5\pi\sqrt{5}\ \text{dm}^3$.

129. Plášť rotačního válce se má k obsahu podstavy jako $5 : 3$. Určete jeho objem, má-li úhlopříčka osového řezu délku 39 cm.

***130.** Z válcového kmene má být vytesán trám největší nosnosti. Jak velký je odpad v procentech?
[Návod: Trám má největší nosnost, jsou-li rozměry jeho podstavy v poměru 1 : 2.]

131. Nádoba tvaru rotačního válce, jehož výška $v = 20$ cm a poloměr podstavy $r = 5$ cm, je naplněna vodou. Kolik vody v ní zůstane, nakloníme-li ji o úhel $\alpha = 45°$? $\left(\pi \doteq \frac{22}{7}.\right)$

132. Svinutím čtverce se může zhotovit plášť rotačního válce. Určete odchylku, kterou má úhlopříčka osového řezu tohoto válce s rovinou podstavy.

133. Do podstavy rovnostranného válce je vepsán pravidelný desetiúhelník, jehož strana má délku a. Určete plášť a objem tohoto válce.

5. JEHLAN A KUŽEL

134. Rovina $\varrho \equiv ACD'$ utíná z krychle $ABCDA'B'C'D'$ jehlan $ACD'D$, jehož povrch je S. Určete povrch krychle.

135. Stan tvaru jehlanu má mít za podstavu čtverec, jehož strana má délku $a = 2$ m a výšku $v = 1{,}8$ m. Kolik m^2 plátna je třeba k jeho zhotovení?

136. Jak velkou tělesovou výšku má trojboký jehlan, jehož objem $V = 200$ cm^3, mají-li hrany podstavy délky $4\frac{1}{3}$ cm, 10 cm, $12\frac{1}{3}$ cm?

137. Rovina $\varrho \equiv BC'A'$ odděluje z krychle $ABCDA'B'C'D'$ jehlan $BA'C'B'$. Vypočítejte jeho objem, má-li hrana krychle velikost a.

138. Do krychle, jejíž hrana má délku a, je vepsán pravidelný osmistěn. Vypočítejte jeho povrch a objem.
[Návod: Vrcholy osmistěnu jsou ve středech stěn krychle.]

139. Do krychle, jejíž hrana má délku a, je vepsán pravidelný čtyřstěn. Vypočítejte jeho objem.
[Návod: Vrcholy čtyřstěnu jsou krajní body mimoběžných úhlopříček, které leží v protějších stěnách krychle.]

140. Vypočítejte povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož pobočné hrany mají délku u, kde u je délka úhlopříčky podstavy jehlanu.

***141.** Do podstavy polokoule je vepsán trojúhelník ABC, jehož strany mají délky $a = 25$ cm, $b = 24$ cm, $c = 20$ cm. Vypočítejte objem jehlanu $ABCV$, leží-li jeho hlavní vrchol V na povrchu polokoule tak, že má od roviny podstavy polokoule největší vzdálenost.
[Návod: Použijte vzorce $P = \frac{abc}{4r}$, kde P je obsah trojúhelníka ABC, a, b, c délky jeho stran a r poloměr opsané kružnice.]

142. Pobočná hrana pravidelného čtyřbokého jehlanu má délku $c = 5$ cm a odchylku $\alpha = 30°$ od roviny jeho podstavy. Vypočítejte objem jehlanu.

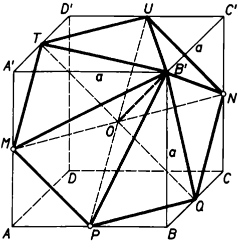
***143.** Určete objem V pravidelného pětibokého jehlanu, má-li jeho pobočná hrana délku a a je-li $\alpha°$ odchylka této hrany od roviny podstavy jehlanu.

***144.** Kovová tyč podoby pravidelného trojbokého hranolu má za podstavu rovnostranný trojúhelník ABC, jehož strana má délku a. Tato tyč byla seříznuta rovinou jdoucí hranou AC a mající odchylku $\alpha°$ od roviny ABC. Vypočítejte objem jehlanu, který rovina z tyče odtíná.

145. Určete objem pravidelného osmibokého jehlanu, jehož tělesová výška $v = 1$ m, je-li odchylka pobočné hrany od roviny jeho podstavy $\alpha = 60°$.

146. Hrana krychle $ABCDA'B'C'D'$ má délku a. Zobrazte řez této krychle s rovinou $\varrho \equiv MNP$, kde M, N, P jsou po řadě středy hran AA', CC', AB a vypočítejte objem a povrch jehlanu, který má řez za podstavu a hlavní vrchol v bodě B'.

Řešení (obr. 81)



Obr. 81

Rovina ϱ protíná krychli $ABCDA'B'C'D'$ v pravidelném šestiúhelníku $MPQNUT$, který má střed ve středu O krychle. Jeho strany mají délku $MP = \frac{a}{2}\sqrt{2}$. Pobočné hrany jehlanu, který má řez za podstavu a hlavní vrchol v bodě B', mají délku $MB' = \frac{a}{2}\sqrt{5}$. Je tedy jehlan $MPQNUTB'$ jehlanem pravidelným s tělesovou výškou $B'O = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Jeho objem $V = \frac{1}{3}P \cdot v = \frac{1}{3}\cdot\left(6\cdot\frac{2a^2}{16}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot$ $\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{3a^3}{8}$. Jeho povrch $S = P +$ $+ 6 \cdot \frac{a}{4}\sqrt{2} \cdot v'$, kde v' je výška trojúhelníka MPB' vedená z vrcholu B' na stranu MP; její délka je $v' = \sqrt{\frac{5a^2}{4} - \frac{2a^2}{16}} = \sqrt{\frac{18a^2}{16}} = \frac{a}{4}\sqrt{18} =$ $= \frac{3a}{4}\sqrt{2}$.

Je tedy povrch $S = 6\cdot\frac{2a^2}{16}\cdot\sqrt{3} + 6\cdot\frac{a}{4}\sqrt{2} = \frac{3a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{9a^2}{4} =$
$= \frac{3 \cdot a^2}{4}(\sqrt{3} + 3)$.

Závěr: Uvažovaný jehlan má objem $V = \frac{3a^3}{8}$ a povrch $S = \frac{3a^2}{4}(\sqrt{3} + 3)$.

147. Čtyřboký jehlan, jehož pobočné hrany jsou stejně dlouhé, má za podstavu obdélník. Určete jeho objem V, je-li jeho tělesová výška v a odchylky pobočných stěn od roviny podstavy $\alpha°$, $\beta°$.

***148.** Podstavou jehlanu $ABCV$ je rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož ramena $AC = BC$ mají délku $a = 15$ cm a svírají úhel $\alpha = 130°13'$. Pobočná hrana jehlanu, která jde vrcholem C, je kolmá k rovině podstavy, další dvě pobočné hrany AV a BV mají od roviny podstavy odchylky $\beta = 26°19'$. Určete objem jehlanu.

***149.** Vzdálenost středu podstavy pravidelného šestibokého jehlanu od středu jeho pobočné hrany je d, odchylka dvou pobočných hran při hlavním vrcholu jehlanu ležících v téže pobočné stěně je $\beta°$. Vypočítejte plášť jehlanu.

150. Kružnice opsaná podstavě pravidelného čtyřbokého jehlanu má poloměr $r = 25{,}3$ cm, odchylka pobočné stěny jehlanu od roviny jeho podstavy je $\alpha = 65°36'$.
Vypočítejte povrch jehlanu.

***151.** Vypočítejte objem čtyřbokého jehlanu $ABCDV$, jehož podstavu tvoří rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $BC = CD = DA = a$, $\sphericalangle BAD = \alpha < \mathrm{R}$), mají-li všechny pobočné hrany jehlanu od roviny podstavy tytéž odchylky $\beta°$.

152. Ocelový nástroj k prorážení plechu má tvar válce zakončeného kuželovým hrotem. Jakou má hmotnost, je-li průměr válce $d = 20$ mm zároveň průměrem kužele, výška válce $v_1 = 50$ mm a výška kuželového hrotu $v_2 = 60$ mm. (Hustota oceli $\varrho = 7{,}85$ g/cm^3.)

153. Rovnostranný kužel má výšku v. Vypočítejte jeho povrch a objem.

154. Objem rovnostranného kužele je V. Určete jeho povrch S.

155. Plášť rotačního kužele měří $15\,\pi\text{cm}^2$; po rozvinutí do roviny tvoří čtvrtkruh. Určete objem kužele.

156. V krychli o hraně délky a je kužel, jehož podstavu tvoří kruh vepsaný dolní podstavě krychle; jeho vrchol leží ve středu horní podstavy krychle. Vypočítejte jeho povrch a objem.

157. Čtyřbokému pravidelnému jehlanu, jehož všechny hrany mají délku a, je opsán rotační kužel. V jakém poměru jsou jejich pláště?

158. Obsah podstavy rotačního kužele a jeho plášť jsou v poměru $1 : 3$; obvod jeho osového řezu je 12 cm. Určete objem kužele.

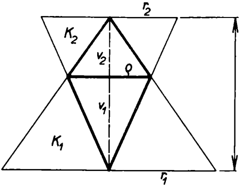
159. Povrch rotačního kužele má se k obsahu podstavy jako $18 : 5$. Určete objem V kužele, je-li jeho tělesová výška $v = 12$ cm.

160. Obsah podstavy rotačního kužele se má k plášti jako $3 : 5$. Jeho tělesová výška $v = 4$ cm. Vypočítejte povrch a objem kužele.

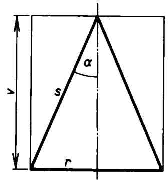
161. Do rotačního kužele je vepsán rotační válec, jehož výška se rovná polovině výšky kužele. Určete poměr objemů obou těles.

***162.** Je-li do rotačního kužele o poloměru podstavy velikosti r a tělesové výšce velikosti v vepsán rotační válec o poloměru podstavy ϱ a tělesové výšce u, pak platí mezi čísly r, v, ϱ, u vztah $\frac{\varrho}{r} + \frac{u}{v} = 1$. Dokažte to.

163. Dva rotační kužele K_1, K_2, které mají stejné tělesové výšky v a poloměry podstav r_1, r_2, jsou do sebe vraženy tak, že vrchol jednoho je ve středu podstavy druhého. Určete objem společné části obou kuželů.



Obr. 82



Obr. 83

Řešení (obr. 82)

Těleso společné kuželům K_1, K_2 se skládá ze dvou kuželů, jejichž společná podstava má polomer ϱ a tělesové výšky jsou v_1, v_2. Objem tohoto tělesa $V = \frac{1}{3}\pi\varrho^2 v_1 + \frac{1}{3}\pi\varrho^2 v_2 = \frac{1}{3}\pi\varrho^2(v_1 + v_2) = \frac{1}{3}\pi\varrho^2 v$.

Jelikož platí úměry $\varrho : r_1 = v_2 : v$, $\varrho : r_2 = v_1 : v$, je $r_2 : r_1 = v_2 : v_1$, $r_2 : (r_1 + r_2) = v_2 : v$, $v_2 = \frac{r_2 v}{r_1 + r_2}$, $\varrho = \frac{r_1 v_2}{v} = \frac{r_1 r_2 v}{v(r_1 + r_2)} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$, takže $V = \frac{1}{3}\pi v \cdot \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_1 + r_2)^2}$.

Závěr: Objem společné části kuželů K_1, K_2 je $V = \frac{1}{3}\pi v \cdot \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_1 + r_2)^2}$.

164. Rotační kužel a rotační válec mají společnou podstavu; vrchol kužele leží ve středu horní podstavy válce.
Vypočítejte odchylku osy kužele od jeho strany, jsou-li povrchy válce a kužele v poměru 7 : 4.

Řešení (obr. 83)

Podle podmínky úlohy platí vztah

$$\frac{2\pi r(r+v)}{\pi r\,.\,(r+s)} = \frac{7}{4}\,, \text{ z něhož je } \frac{r+v}{r+s} = \frac{7}{8}\,. \qquad (1)$$

Rovnici (1) lze upravovat takto:

$$\frac{1+\dfrac{v}{r}}{1+\dfrac{s}{r}} = \frac{7}{8}\,,$$

$$\frac{1+\operatorname{cotg}\alpha}{1+\operatorname{cosec}\alpha} = \frac{7}{8}\,,$$

$$\frac{1+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{1+\dfrac{1}{\sin\alpha}} = \frac{7}{8}\,,$$

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{7}{8}\,,$$

$$8\sin\alpha + 8\cos\alpha = 7 + 7\sin\alpha\,,$$
$$\sin\alpha + 8\cos\alpha = 7\,.$$

Poslední rovnici vyhovuje ostrý úhel $\alpha = 36°52'$, jehož $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$.

Závěr: Odchylka osy kužele od jeho strany je $\alpha = 36°52'$.

***165.** Určete objem tělesa, které vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají délky $a = 13{,}6$ cm, $b = 25{,}5$ cm, okolo jeho přepony.

***166.** Ostroúhlý trojúhelník se otočil postupně kolem svých stran, jejichž délky jsou a, b, c. Dokažte, že o objemech V_1, V_2, V_3 takto vzniklých těles platí vztah $V_1 : V_2 : V_3 = \dfrac{1}{a} : \dfrac{1}{b} : \dfrac{1}{c}$.

[Návod: Uvažte, že platí: $c\,.\,v_c = a\,.\,v_a = b\,.\,v_b$.]

***167.** Osový řez rotačního kužele má obsah P a úhel při hlavním vrcholu 2β. Vypočítejte objem kužele.

168. Jak velký je povrch rotačního kužele, jehož podstava má poloměr r, je-li $\alpha°$ odchylka jeho strany od roviny podstavy?

***169.** Strana rotačního kužele délky s má od roviny podstavy odchylku $\alpha°$. Vypočítejte objem a povrch kužele.

170. Kruh k o poloměru velikosti r je společnou podstavou dvou rotačních kuželů, jejichž vrcholy leží v témže poloprostoru s hranicí, kterou tvoří rovina kruhu k. Strany kuželů mají od roviny podstavy odchylky α° a β°. Vypočítejte objem tělesa mezi plášti obou kuželů, je-li $\alpha > \beta$.

***171.** Pravoúhlý trojúhelník má obsah P a jeden ostrý úhel α. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne otočením tohoto trojúhelníka okolo jeho přepony.

***172.** Technické těleso se skládá ze dvou rotačních kuželů, které mají společnou podstavu poloměru r a vrcholy v opačných poloprostorech s hranicí ϱ, kde ϱ je rovina podstavy obou kuželů. Určete objem tohoto tělesa, jsou-li φ_1°, φ_2° odchylky stran kuželů od roviny podstavy ϱ. Jaký obsah má osový řez uvedeného tělesa?

***173.** V podstavě rotačního kužele přísluší tětivě délky 3,4 dm středový úhel velikosti 37°16′. Odchylka strany od jeho osy je 18°10′. Vypočítejte objem kužele.

6. KOMOLÝ JEHLAN A KOMOLÝ KUŽEL

174. Otevřená nádoba z hliníkového plechu má tvar pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, jehož hrana horní podstavy má délku $a_1 = 22$ cm, hrana dolní podstavy délku $a_2 = 10$ cm a tělesová výška $v = 80$ mm.
a) Jakou má hmotnost, je-li hmotnost 1 dm^2 plechu 13 g.
b) Určete její objem.

175. Hlavice sloupu má tvar pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu. Určete její objem, má-li hrana dolní podstavy délku a_1, hrana horní podstavy délku a_2 a hrana pobočná délku b. ($a_1 > a_2$.)

176. Ze 2 m^3 páleného vápna obdržíme 5 m^3 vápna hašeného. Kolik m^3 vápna bylo rozhašeno, jestliže jím byla naplněna jáma tvaru čtyřbokého pravidelného komolého jehlanu, jehož hrany podstav mají délky $a_1 = 2$ m, $a_2 = 1$ m a jehož hloubka $v = 1,5$ m.
[Návod: K výpočtu objemu použijte přibližného vzorce
$V = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot v$, kde P_1, P_2 jsou obsahy podstav a v tělesová výška komolého jehlanu.]

177. Žulový pomníček se skládá ze dvou komolých pravidelných jehlanů čtyřbokých (délky hran podstav spodního jsou $a_1 = 1,6$ m, $a_2 = 1$ m a jeho tělesová výška $v_1 = 1$ m, délky hran podstav horního $a_2 = 1$ m, $a_3 = 0,6$ m a tělesová výška $v_2 = 2$ m) a pravidelného čtyřbokého jehlanu o hraně podstavy délky $a_3 = 0,6$ m a tělesové výšce $v_3 = 0,5$ m. Určete jeho hmotnost, je-li hustota žuly $\varrho = 2,8$ g/cm^3.

178. Určete objem pravidelného trojbokého jehlanu komolého, jehož podstavy jsou rovnostranné trojúhelníky mající délky stran a, b, je-li pobočná hrana komolého jehlanu odchýlena od roviny větší podstavy o úhel $\alpha°$. ($\alpha < \mathrm{R}$, $a > b$.)

***179.** Podstavy komolého jehlanu K mají obsahy P_1 a P_2. Vypočítejte obsah jeho řezu s rovinou, která půlí pobočné hrany.
[Návod: Počítejte objem komolce K jako součet objemů dvou komolých jehlanů, z nichž jeden má řez za horní podstavu a druhý za dolní podstavu.]

180. Tělesová výška komolého jehlanu má velikost v, obsahy podstav P_1 a P_2. Vypočítejte velikost výšky x jehlanu doplňkového. (Doplňkový jehlan doplňuje komolý jehlan na jehlan.)

***181.** Jehlan, jehož objem je V_0, je zkomolen řezem rovnoběžným s jeho podstavou tak, že platí vztah $P_1 : P_2 = 9 : 4$, kde P_1 je obsah podstavy jehlanu a P_2 obsah řezu. Vypočítejte objemy obou těles řezem oddělených.

182. Čtyřboký komolý pravidelný jehlan má délku hrany větší podstavy a. Jeho pobočná hrana má od roviny této podstavy odchylku $\alpha = 45°$ a rovná se délce hrany menší podstavy komolce. Určete objem V komolého jehlanu.

183. Nádoba tvaru rotačního komolého kužele má poloměry podstav $r_1 = 4\,\mathrm{dm}$, $r_2 = 3\,\mathrm{dm}$ a objem $V = 148\,\pi\ \mathrm{dm}^3$. Jak je vysoká?

184. Papírové stínítko lampy má tvar pláště rotačního komolého kužele, jehož podstavy mají poloměry $r_1 = 15\,\mathrm{cm}$, $r_2 = 9\,\mathrm{cm}$ a jehož strana $s = 18\,\mathrm{cm}$. Rozvineme-li stínítko do roviny, dostaneme výseč o poloměrech s_1, s_2 a středovém úhlu α. Určete s_1, s_2 a α.

185. Objem kmene se v praxi počítá tak, že se poloviční součet obsahů obou podstav násobí výškou kmene. S jakou chybou je nutno při užití tohoto vzorce počítat?

Řešení

Chybu ε udává $|V' - V|$, kde $V' = \dfrac{\pi r_1^2 - \pi r_2^2}{2} \cdot v$ a

$$V = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2);\ V' - V = \frac{\pi r_1^2 - \pi r_2^2}{2} . v -$$

$$- \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi v}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 - 2r_1^2 - 2r_1 r_2 - 2r_2^2) =$$

$$= \frac{\pi v}{6}(r_1^2 - 2r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi v}{6}(r_1 - r_2)^2 .$$

Protože $\frac{\pi v}{6}(r_1 - r_2)^2 > 0$, je $V' - V > 0$ a $\varepsilon = |V' - V| = V' - V$.
Je tedy skutečný objem kmene menší, než udává vzorec V'.

Závěr: Při výpočtu objemu kmene podle přibližného vzorce $V' = \frac{\pi r_1^2 + \pi r_2^2}{2} \cdot v$ vzniká chyba $\varepsilon = \frac{1}{6}\pi v \cdot (r_1 - r_2)^2$. (Vypočítejte chybu ε pro $2r_1 = 60$ cm, $2r_2 = 40$ cm, $v = 6$ m.)

186. Kovová součástka má tvar krychle o hraně délky a; v ní je vyvrtán otvor tvaru souosého komolého kužele, jehož podstavy leží v protějších stěnách krychle a mají průměry $\frac{a}{2}$ a $\frac{a}{4}$. Určete, jaká je hmotnost součástky, je-li hustota kovu ϱ. $\left(\pi \doteq \frac{22}{7}.\right)$

187. Vědro má tvar rotačního komolého kužele o průměrech podstav $d_1 = 180$ mm a $d_2 = 360$ mm; výška vědra je $v = 340$ mm. Kolik l vody zhruba pojme?
(K výpočtu užijte též přibližného vzorce.)

188. Krychle má hranu délky a. Její dolní podstavě je kruh opsán, horní podstavě kruh vepsán. Určete objem komolého kužele, který má uvedené kruhy za podstavy.

189. Rotační komolý kužel má podstavy o poloměrech $r_1 = 6$ cm a $r_2 = 3$ cm. Vypočítejte jeho objem, rovná-li se jeho plášť součtu obsahů obou podstav.

190. Rotační komolý kužel má povrch $S = 2\,450\,\pi$ cm^2 a poloměry podstav $r_1 = 28$ cm a $r_2 = 21$ cm. Jak velká je jeho tělesová výška v?

191. Do pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu je vepsán komolý kužel. V jakém poměru jsou jejich objemy?

***192.** Rotačnímu komolému kuželi je vepsán pravidelný komolý jehlan trojboký. Kolik procent z objemu komolého kužele zaujímá?

193. Určete objem rotačního komolého kužele, kterému je vepsána koule, mají-li jeho podstavy poloměry r_1 a r_2.

194. V soustavě souřadnic Pxy je dán pravidelný šestiúhelník, jehož střed je v počátku, strana má délku a a jeden vrchol leží v ose y. V jakém poměru jsou objemy těles, které vzniknou otočením tohoto šestiúhelníka kolem osy x a kolem osy y?

$\boxed{195.}$ Strana komolého rotačního kužele je s, její odchylka od roviny větší podstavy $\alpha = 60°$. Vypočítejte jeho objem a povrch, platí-li mezi poloměrem r_2 menší podstavy a stranou s komolého kužele vztah $r_2 = s$.

Řešení (obr. 84)

A. Objem komolého kužele $V = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$.

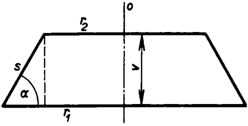
Jelikož $v = s \,.\, \sin 60° = \frac{s\sqrt{3}}{2}$, $r_2 = s$, $r_1 - r_2 = r_1 - s =$

$= s \cos 60° = \frac{s}{2}$, je $r_1 = \frac{3s}{2}$, takže $V = \frac{\pi s \,.\, \sqrt{3}}{6}\left(\frac{9s^2}{4} + \frac{3s^2}{2} + s^2\right) =$

$= \frac{\pi s \,.\, \sqrt{3}}{6} \cdot \frac{19s^2}{4} = \frac{19\pi s^3 \,.\, \sqrt{3}}{24}$.

B. Povrch rotačního komolého kužele $S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi(r_1 + r_2) \,.$
$. \, s = \frac{9\pi s^2}{4} + \pi s^2 + \frac{5\pi s^2}{2} = \frac{23\pi s^2}{4}$.

Závěr: Objem komolého kužele $V = \frac{19\pi s^3 \,.\, \sqrt{3}}{24}$, povrch $S = \frac{23\pi s^2}{4}$.



Obr. 84

196. Osový řez rotačního komolého kužele má obsah P. Vypočítejte jeho plášť, je-li $\alpha°$ odchylka strany od roviny větší podstavy komolého kužele.

Řešení

Plášť rotačního komolého kužele je $S_1 = \pi(r_1 + r_2) \,.\, s$, kde r_1, r_2 jsou poloměry podstav a s jeho strana.
Obsah osového řezu $P = (r_1 + r_2) \,.\, v$, kde v je tělesová výška komolého kužele, takže platí vztah $\frac{P}{S_1} = \frac{v}{\pi s}$, přičemž $\frac{v}{s} = \sin \alpha$. Je tedy $\frac{P}{S_1} =$
$= \frac{\sin \alpha}{\pi}$ a $S_1 = \frac{P\pi}{\sin \alpha}$.

Závěr: Plášť rotačního komolého kužele je $S_1 = \frac{P\pi}{\sin \alpha}$.

7. PLOCHA KULOVÁ A KOULE, JEJICH ČÁSTI

197. Tři olověné koule o poloměrech $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 4$ cm, $r_3 = 5$ cm byly slity v jedinou kouli. Vypočítejte její poloměr r.

198. Ze dvou koulí o poloměrech r_1, r_2 je ulita nová koule. Určete její povrch.

199. Určete poloměr r železné koule, jejíž hmotnost je 5 kg. (Hustota železa $\varrho = 7{,}8$ g/cm³.)

200. U kulečníkové koule byl změřen obvod hlavního kruhu $o = 16$ cm. Jakou má hmotnost, je-li hustota slonoviny $1{,}92\ g/cm^3$?

201. Dutá niklová koule má vnější průměr 4 dm a vnitřní 2 dm. Jaká je její hmotnost, je-li hustota niklu $\varrho = 9\ g/cm^3$?

202. Poloměr Země je 6 378 km, poloměr Měsíce 1 732 km. V jakém poměru jsou jejich povrchy?

203. Dutá kovová koule má vnější průměr $d = 4$ dm. Určete její tloušťku, má-li hmotnost 25 kg. (Hustota kovu $\varrho = 8{,}45\ g/cm^3$.)

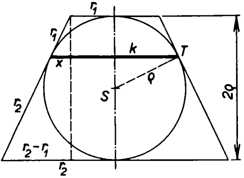
204. Válcová nádoba, jejíž podstava má poloměr $r = 8$ cm, je naplněna zčásti vodou. O kolik cm vystoupí voda v nádobě, vhodí-li se do ní koule o poloměru $r_1 = 6$ cm?

205. Výklenek se skládá z poloviny rotačního válce, který má výšku velikosti d a poloměr podstavy velikosti r a poloviny polokoule, jejíž podstava splývá s horní podstavou poloválce. Vypočítejte jeho objem pomocí čísel r a d.

206. Koule a krychle mají stejný povrch. Určete poměr jejich objemů.

207. Kouli je opsán rovnostranný válec a rovnostranný kužel. V jakém poměru jsou objemy a povrchy všech tří těles?

208. Rotačnímu komolému kuželi, jehož podstavy mají poloměry r_1, r_2, je vepsána koule. Vypočítejte její povrch S a délku m kružnice k, podél níž se pláště komolého kužele dotýká.



Obr. 85

Řešení (obr. 85)

A. Průměr koule, která je rotačnímu komolému kuželi vepsána, je $2\varrho = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2} = \sqrt{r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - r_2^2 + 2r_1r_2 - r_1^2} = \sqrt{4r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$, takže $\varrho = \sqrt{r_1r_2}$ a povrch koule $S = 4\pi r_1r_2$.

B. Označíme-li $(r_1 + x)$ poloměr kružnice k, podél níž se koule dotýká pláště komolého kužele, potom platí $x : (r_2 - r_1) = r_1 : (r_1 + r_2)$, odkud $x = \dfrac{r_1r_2 - r_1^2}{r_1 + r_2}$;

$$r_1 + x = r_1 + \frac{r_1r_2 - r_1^2}{r_1 + r_2} = \frac{r_1^2 + r_1r_2 + r_1r_2 - r_1^2}{r_1 + r_2} = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}.$$

Má tedy kružnice k délku $m = 2\pi(r_1 + x) = \dfrac{4\pi r_1r_2}{r_1 + r_2}$.

Závěr: Povrch koule vepsané rotačnímu komolému kuželi je $S = 4\pi r_1 r_2$ a délka kružnice k, podél níž se koule dotýká pláště komolého kužele, je $m = \dfrac{4\pi r_1 r_2}{r_1 + r_2}$.

***209.** Kouli je opsán kužel, jehož výška se rovná šestinásobku poloměru koule V jakém poměru jsou povrchy obou těles?

210. Rozdíl mezi objemem koule a objemem krychle do ní vepsané je 1 m^3. Určete objem koule.

211. Koule má poloměr $r = 6$ dm. Jak velký poloměr má podstava rotačního kužele, jehož výška je r a jehož povrch se rovná povrchu koule?

212. Dokažte, že povrch koule, která se dotýká všech hran krychle, se rovná rozdílu povrchů koule krychli opsané a vepsané.

***213.** Kulovou plochu rozděluje rovina na dva vrchlíky, jejichž obsahy jsou S_1 a S_2. Vypočítejte obsah řezu.

214. Kulová plocha má poloměr $r = 10$ cm. V jaké vzdálenosti od středu této plochy ji protíná rovina, je-li obsah vzniklého řezu roven $\dfrac{9}{10}$ obsahu odseknutého vrchlíku?

215. Oč je obsah kulového vrchlíku větší než obsah jeho podstavy?

216. Koule o poloměru r je osvětlena z bodu, který má od středu koule vzdálenost d. Jakou hodnotu musí mít poměr $\dfrac{d}{r}$, aby byla osvětlena třetina povrchu této koule?

217. Vypočítejte objem koule, kterou vidíme ze vzdálenosti d od středu koule v zorném úhlu φ. (Zorný kužel má při vrcholu osového řezu úhel φ.)

218. Letadlo je v určitém okamžiku d km nad zemským povrchem. Jakou část tohoto povrchu pozorovatel letadla přehlédne?

219. Z jaké výše vidí letec povrch Země v rozloze 200 000 km^2?

***220.** Povrch kulové úseče se rovná $\dfrac{7}{16}$ povrchu koule. Určete velikost středového úhlu, který úseči přísluší.

221. V jaké výšce má být rozříznuta polokoule rovinou rovnoběžnou s podstavou polokoule, aby oba díly měly stejné povrchy? (Poloměr polokoule má velikost r.)

222. Objem kulové úseče je 45 π cm^3, její výška $v = 3$ cm. Určete povrch úseče.

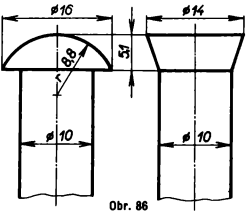
223. Hlava nýtu má tvar kulové úseče, dřík nýtu tvar válce. Posuvným měřítkem byla zjištěna výška dříku v_1, výška hlavy v_2, průměr d podstavy dříku a průměr 2ϱ podstavy hlavy. Určete objem nýtu a poloměr koule, ze které hlava nýtu vznikla.

224. Hlava speciálního nýtu tvaru kulové úseče (průměr podstavy úseče $2\varrho = 16$ mm, výška úseče $v = 5{,}1$ mm) má být přeměněna tvarováním za studena na hlavu tvaru komolého kužele, jehož výška se rovná výšce úseče a jehož průměr menší podstavy, která je zároveň podstavou válcového dříku nýtu, má být $d = 2r = 10$ mm. Určete průměr větší podstavy nové hlavy, jestliže obě hlavy mají mít stejný objem. Na základě výpočtu udělejte technický nákres obou hlav i s částí válcového dříku v měřítku 5 : 1.

Řešení (obr. 86)

Označme $2x$ průměr větší podstavy hlavy tvaru komolého kužele. Podle podmínky úlohy platí vztah

$$\pi\varrho^2 \frac{v}{2} + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{v}{2}\right)^3 = \frac{\pi v}{3}(r^2 + rx + x^2).$$



Obr. 86

Tento vztah upravujeme postupně takto:

$$\pi\varrho^2 \frac{v}{2} + \frac{\pi v^3}{6} = \frac{\pi v}{3}(r^2 + rx + x^2),$$

$$\frac{\varrho^2}{2} + \frac{v^2}{6} = \frac{1}{3}(r^2 + rx + x^2),$$

$$3\varrho^2 + v^2 = 2r^2 + 2rx + 2x^2,$$

$$2x^2 + 2rx + 2r^2 - 3\varrho^2 - v^2 = 0. \quad (1)$$

Pro $\varrho = 8$, $r = 5$, $v = 5{,}1$ má rovnice (1) tvar $x^2 + 5x - 84 = 0$ a vyhovuje jí kladný kořen $x = 7$. Má tedy větší podstava hlavy průměr $2x = 14$.

K technickému nákresu je třeba zjistit též poloměr r_1 koule, z níž hlava tvaru kulové úseče vznikla. Ten se určí ze vztahu

$\varrho^2 = v(2r_1 - v)$; $r_1 \doteq 8{,}8$.

Závěr: Hlava tvaru komolého kužele má průměr větší podstavy $2x =$ $= 14$ mm.

225. Z koule o poloměru r byla odseknuta úseč o výšce $v = \dfrac{r}{2}$. V jakém poměru jsou objemy úseče a koule?

Řešení (obr. 87)

Objem koule je $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, objem úseče $U = \pi\varrho^2 \frac{v}{2} + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{v}{2}\right)^3$, přičemž $v = \frac{r}{2}$ a $\varrho^2 = v(2r - v) = \frac{3r^2}{4}$. Po úpravě $U = \frac{5\pi r^3}{24}$, takže

$U : V = \frac{5\pi r^3}{24} : \frac{4}{3}\pi r^3 = 5 : 32.$

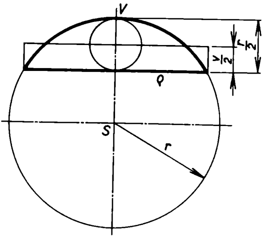
Závěr: Objemy úseče a koule jsou v poměru 5 : 32.

226. Výška kulové úseče má se k poloměru koule jako 2 : 3. Určete poměr objemů úseče a koule.

227. Kulová úseč, jejíž výška $v = 5$ cm, má objem $V = 850\,\text{cm}^3$. Určete velikost poloměru koule r, ze které úseč vznikla.

228. Nádoba tvaru duté polokoule je naplněna vodou do výšky $v = 10$ cm. Kolik litrů vody obsahuje, je-li vnitřní průměr nádoby $d = 28$ cm?

229. Nádoba tvaru duté polokoule je naplněna vodou. Nakloníme-li ji o 30°, vyteče z ní 11 litrů vody. Kolik vody zbývá v nádobě?



Obr. 87

230. Dvě shodné koule o poloměru r se pronikají. Určete objem společné části obou koulí leží-li střed jedné koule na povrchu koule druhé.

***231.** Do hmotné koule je provrtán otvor, který má tvar souosého rovnostranného válce. Jak velký vznikne odpad v procentech?

232. Určete objem kulové vrstvy, která vznikne z polokoule o poloměru $r = 5$ cm odříznutím úseče, jejíž výška $v = 1{,}5$ cm.

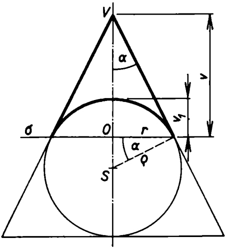
233. Kulová vrstva je souměrná podle roviny jdoucí středem koule a rovnoběžné s podstavami vrstvy. Pás, který tuto vrstvu omezuje, má obsah, který se rovná polovině povrchu koule. Jakou částí objemu koule je objem vrstvy?

234. Objem kulové výseče $V = 72\,\pi\text{cm}^3$, středový úhel jejího osového řezu $2\varphi = 120°$. Jak velký je poloměr r koule, z níž tato výseč vznikla?

235. Objem kulové výseče se rovná $\frac{1}{4}$ objemu koule, z níž výseč vznikla. Určete povrch výseče, má-li poloměr koule velikost r.

236. Do rotačního kužele K, jehož osový řez má při vrcholu V úhel 2α, je vepsána koule o poloměru ϱ.

Určete objem té části kužele K, která leží nad koulí.



Obr. 88

Řešení (obr. 88)

Nechť r je velikost poloměru kružnice, podél níž se koule dotýká pláště kužele K, σ její rovina, v výška kužele K_1, který odtíná rovina σ z kužele K, a v_1 výška kulové úseče, která vniká do kužele K_1.

Potom objem části kužele K nad koulí je $V = V_1 - V_2$, kde $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 v$ a $V_2 = \pi r^2 \cdot \frac{v_1}{2} + \frac{\pi v_1^3}{6}$.

Jelikož $r = \varrho \cos\alpha$, $v = r \operatorname{cotg}\alpha = \varrho \cdot \cos\alpha \operatorname{cotg}\alpha$, $v_1 = \varrho - \varrho \sin\alpha = \varrho(1 - \sin\alpha)$, je

$$V = \frac{1}{3}\pi\varrho^3 \cos^3\alpha \operatorname{cotg}\alpha - \frac{1}{2}\pi\varrho^3\cos^2\alpha(1 - \sin\alpha) - \frac{1}{6}\pi\varrho^3 \cdot (1 - \sin\alpha)^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\varrho^3\cos^3\alpha\operatorname{cotg}\alpha - \frac{3\pi\varrho^3\cos^2\alpha(1 - \sin\alpha) + \pi\varrho^3(1 - \sin\alpha)^3}{6} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\varrho^3\cos^3\alpha\operatorname{cotg}\alpha - \frac{\pi\varrho^3(1 - \sin\alpha)^2 \cdot (3 + 3\sin\alpha + 1 - \sin\alpha)}{6} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\varrho^3\cos^3\alpha\operatorname{cotg}\alpha - \frac{\pi\varrho^3(1 - \sin\alpha)^2 \cdot (2 + \sin\alpha)}{3} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\varrho^3[\cos^3\alpha\operatorname{cotg}\alpha - (1 - \sin\alpha)^2(2 + \sin\alpha)]\,.$$

Závěr: Objem části kužele K nad koulí je

$$V = \frac{1}{3}\pi\varrho^3[\cos^3\alpha\operatorname{cotg}\alpha - (1 - \sin\alpha)^2(2 + \sin\alpha)]\,.$$

8. OPAKOVÁNÍ

237. Středy stran prostorového čtyřúhelníka jsou vrcholy rovnoběžníka. Dokažte to.

238. Zobrazte krychli $ABCDA'B'C'D'$, jejíž hrana AB má délku a, a její řez s rovinou $\varrho \equiv MNP$, kde M, N, P jsou po řadě středy hran AA', BB', $B'C'$. Dále sestrojte skutečnou velikost tohoto řezu a vypočítejte jeho obsah.

239. Zobrazte krychli $ABCDA'B'C'D'$, jejíž hrana AB má délku a, a její řez s rovinou ACP, kde P je střed hrany $A'B'$. Vypočítejte též obsah tohoto řezu.

240. Zobrazte krychli $ABCDA'B'C'D'$ a vepište jí pravidelný čtyřstěn $ACB'D'$. Sestrojte řez tohoto čtyřstěnu s rovinou ϱ, která jde středem krychle a je rovnoběžná s rovinou $ABCD$; vypočítejte též jeho obsah, má-li hrana krychle délku a.

241. Zobrazte řez krychle $ABCDA'B'C'D'$, jejíž hrana má délku a s rovinou $\varrho \equiv BD'M$, kde M je střed hrany AA'. Vypočítejte dále obsah tohoto řezu a dokažte, že přímka MS, kde S je střed krychle, je osou mimoběžek AA' a BD'.

***242.** Zobrazte řez šestibokého pravidelného jehlanu $ABCDEFV$ s rovinou $\varrho \equiv BMN$, kde M je střed hrany DV a N leží na hraně AV tak, že platí vztah $AN : VN = 1 : 3$. Sestrojte též pravoúhlý průmět spodní odseknuté části jehlanu na rovinu jeho podstavy.

243. Zobrazte čtyřboký pravidelný jehlan $ABCDV$, jehož hrana podstavy AB má délku $a = 7$ cm, tělesová výška $VS = v = 8$ cm a bod L, který leží uvnitř hrany VC tak, že platí vztah $CL : VL = 1 : 3$. Sestrojte řez tohoto jehlanu s rovinou $\varrho \equiv BDL$ a s rovinou σ, která prochází středem M výšky SV jehlanu a je rovnoběžná s rovinou ϱ.

***244.** Zobrazte čtyřboký jehlan $ABCDV$, jehož podstavou $ABCD$ je různoběžník; průsečíkem P úhlopříček podstavy veďte přímku m rovnoběžnou s rovinami ABV a CDV a sestrojte její průsečíky s povrchem jehlanu.

245. Čtyřboký pravidelný jehlan $ABCDV$ má délku hrany podstavy a a délku pobočné hrany $2a$. Určete početně i konstruktivně délku úsečky AM, kde M je střed hrany CV.

246. Zobrazte krychli $ABCDA'B'C'D'$, jejíž hrana má délku $a = 6$ cm, a bod P, který leží na hraně AB tak, že platí $AP = 2BP$.
K trojúhelníku $BC'A'$ sestrojte trojúhelník souměrně sdružený podle roviny $CC'P$.

247. Kolik os souměrnosti má krychle, je-li každá z nich průsečnicí těch rovin souměrnosti krychle, které jsou k sobě kolmé?

***248.** Těleso T se skládá z krychle $ABCDA'B'C'D'$, jejíž hrana má délku a, a pravidelného čtyřbokého jehlanu $A'B'C'D'V$, který má všechny hrany stejně dlouhé. Zobrazte těleso T, jeho řez s rovinou $\varrho \equiv ABV$ a vypočítejte odchylku roviny ϱ od roviny $ABCD$.

***249.** Je dán rotační kužel (podstava má poloměr r a tělesová výška $VS = v$) a bod M, jehož pravoúhlý průmět je M_1 ($MM_1 = d$, $M_1S = q$). Určete početně odchylku průsečnice p tečných rovin kužele jdoucích bodem M od roviny jeho podstavy. Proveďte diskusi řešitelnosti této úlohy.

250. Rozměry kvádru jsou v poměru $1 : 3 : 5$. Součet délek všech jeho hran je 72 cm. Vypočítejte jeho povrch a objem.

251. Uzavřený buben odsávacího zařízení má tvar pravidelného šestibokého hranolu, jehož hrana podstavy má délku $a = 0{,}5$ m a tělesová výška $v = 1{,}75$ m. Vypočítejte jeho objem a povrch.

252. Plášť rotačního válce je čtyřikrát větší než obsah jeho podstavy, jejíž poloměr je r. Určete objem pravidelného trojbokého hranolu, který je válci vepsán.

253. Vypočítejte objem šestiboké matice šroubu (první operace) pomocí čísel v, a, d, kde v znamená výšku, a délku hrany podstavy a d průměr válcového otvoru matice.

254. Určete povrch a objem válce, který je vepsán do koule o poloměru $r = 5$ cm, rovná-li se jeho plášť součtu obsahů obou podstav.

***255.** Úhlopříčka d osového řezu rotačního válce má od roviny jeho podstavy odchylku $\beta°$. Vypočítejte objem válce. ($d = 8{,}6$ dm, $\beta = 58°50'$.)

256. Osou rotačního válce, jehož výška je v a r poloměr podstavy, jsou vedeny dvě roviny, které mají odchylku $\alpha°$; těmito rovinami je rozdělen válec na čtyři části. Vypočítejte jejich objemy.

***257.** Je dán pravidelný jehlan čtyřboký, jehož tělesová výška je v a odchylka pobočné hrany od roviny podstavy $\alpha°$. Určete jeho objem a povrch.

258. Plášť rovnostranného kužele je rozvinut do roviny. Jak velký středový úhel má vzniklá kruhová výseč?

259. Plášť rotačního kužele $S' = 4\ \text{cm}^2$, obsah jeho podstavy $P = 2\ \text{cm}^2$. Určete odchylku φ jeho strany od roviny podstavy.

260. Model kužele, který má hustotu ϱ g/cm^3, plave ve vodě špičkou dolů. Jak hluboko je ponořen, je-li jeho tělesová výška v?

***261.** Součet poloměru podstavy a strany rotačního kužele je $m = 60$ cm. Odchylka strany kužele od roviny podstavy je $\alpha = 40°40'$. Vypočítejte povrch kužele.

262. Pravoúhlý trojúhelník, jehož přepona má délku $c = 25$ cm, má obsah

$P = 150\ \mathrm{cm}^2$. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne otočením tohoto trojúhelníka okolo přepony.

263. Pravoúhlý trojúhelník má přeponu c délky 12 cm a jeden ostrý úhel $\alpha = 67\frac{1}{2}°$. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne otočením tohoto trojúhelníka okolo přepony.

***264.** Součet strany a tělesové výšky rotačního kužele je m, úhel při hlavním vrcholu jeho osového řezu je α. Určete výšku rotačního válce, jehož objem se rovná objemu uvedeného kužele, jsou-li obsahy podstav obou těles sobě rovny.

***265.** Platí-li mezi velikostmi poloměrů r_1, r_2 podstav a tělesové výšky v v komolém rotačním kuželi vztah $v^2 = 4r_1r_2$, lze komolému kuželi vepsat kouli. Dokažte to.

266. Parní kotel má tvar rotačního válce, k jehož podstavám jsou připojeny shodné polokoule, mající podstavy totožné s podstavou válce. Vypočítejte objem jeho dutiny pomocí čísel r, v, kde r je poloměr vnitřní podstavy válce a v jeho výška.

267. Poloměr koule nebyl změřen přesně. Byla zjištěna jeho střední aproximovaná hodnota r_1 a prostá chyba ε.
S jakou prostou chybou je nutno počítat při určování povrchu a objemu koule?

268. Dřevěná koule plave na vodě a je ponořena do výše $v = \frac{3}{5}$ svislého průměru. Jaká je hustota dřeva, ze kterého je vyrobena?

269. Koule o poloměru $r = 15$ cm se ponoří ve vodě tak, že okrajová kružnice vytvořená na povrchu koule vodní hladinou má poloměr $\varrho = 12$ cm. Jaká je hustota materiálu, ze kterého je koule vyrobena? [Návod: Při výpočtu použijte vztahu $\varrho^2 = v(2r - v)$.]

270. Do rotačního kužele, jehož poloměr podstavy je r a tělesová výška v, je vepsána polokoule, jejíž podstava leží v rovině podstavy kužele. Vypočítejte její povrch.

271. Kouli je vepsán rovnostranný válec a rovnostranný kužel. V jakém poměru jsou povrchy všech tří těles?

272. Do rotačního kužele je vepsána koule, jejíž povrch se má k obsahu podstavy kužele jako 4 : 3. Vypočítejte úhly osového řezu kužele.

***273.** Rotačnímu kuželi, jehož podstava má poloměr r a tělesová výška je v, je vepsána koule o poloměru ϱ. V jakém poměru jsou objemy obou těles, je-li povrch kužele n-krát větší než povrch koule? [Návod: Z podobnosti trojúhelníků osového řezu plyne $s : r = (v - \varrho) : \varrho$, odkud $s + r = \dfrac{rv}{\varrho}$.]

***274.** Rotační komolý kužel má podstavy o poloměrech r_1, r_2 a tělesovou výšku v. Vypočítejte poloměr koule r, jejíž objem se rovná objemu kužele doplňkového, kterým se komolý kužel doplňuje na kužel.

275. Kulový pás je omezen dvěma kružnicemi ležícími v rovnoběžných rovinách, z nichž jedna je kružnicí hlavní a druhá omezuje kruh, jehož obsah je čtyřikrát menší než obsah hlavního kruhu.
Určete poměr obsahu pásu a povrchu koule.

***276.** Koule má poloměr r. V jaké vzdálenosti od jejího středu je nutno kouli protnout rovinou, aby objem vzniklé úseče se rovnal polovině objemu příslušné výseče?

277. Polokoule o poloměru r má být rozříznuta rovinou rovnoběžnou s její podstavou tak, aby oba díly měly povrchy v poměru 3 : 2. Určete vzdálenost d, kterou má rovina sečná od roviny podstavy polokoule.

278. V kouli o poloměru $r = 10$ cm je kulová výseč, jejíž osový řez má při středu koule úhel $2\varphi = 120°$. Vypočítejte povrch výseče.

XVII. ANALYTICKÁ GEOMETRIE

I. ROVNICE PŘÍMKY V PARAMETRICKÉM I NEPARAMETRICKÉM TVARU, VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMEK

Řešte nejprve co nejvíce úloh z kapitoly „Vektory“. [15.—58.]

1. Napište parametrickou rovnici přímky, která prochází body: $P \equiv (0, 3)$, $Q \equiv (-2, 1)$ a určete souřadnice jejího průsečíku s přímkou, která obsahuje body $R \equiv (5, -2)$, $S \equiv (5, 1)$.

Řešení

Parametrická rovnice přímky procházející body $M \equiv (x_1, y_1)$ a $N \equiv (x_2, y_2)$ zní: $x = x_1 + (x_2 - x_1)t$, $y = y_1 + (y_2 - y_1)t$. V našem případě je tedy rovnice přímky PQ:

$x = 0 + (-2 - 0)t_1 = -2t_1$, $y = 3 + (1 - 3)t_1 = 3 - 2t_1$,

a rovnice přímky RS:

$x = 5 + (5 - 5)t_2$, $y = -2 + (1 + 2)t_2$; $x = 5$, $y = -2 + 3t_2$.

Mají-li obě přímky společný bod, musí tento bod mít na obou přímkách stejné první i druhé souřadnice. Určíme proto nejprve hodnoty parametrů t_1 a t_2, pro které to nastane, a tyto hodnoty pak dosadíme do rovnic přímek PQ a RS.

Musí tedy platit:

$5 = -2t_1$, $t_1 = -\dfrac{5}{2}$; $3 - 2t_1 = -2 + 3t_2$, a tedy $t_2 = \dfrac{10}{3}$.

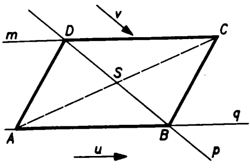
Pro souřadnice průsečíků pak dostáváme $x = -2 \,.\left(-\dfrac{5}{2}\right) = 5$, $y = 3 - 2 \,.\left(-\dfrac{5}{2}\right) = 8$. Stejné hodnoty dostaneme dosazením do druhé rovnice.

Závěr: Parametrické rovnice hledaných přímek jsou $x = -2t_1$, $y = 3 - 2t_1$; $x = 5$, $y = -2 + 3t_2$. Protínají se v bodě $P \equiv (5, 8)$. Ověřte náčrtem.

2. Určete souřadnice vrcholů B, D rovnoběžníka $ABCD$, jsou-li jeho vrcholy $A \equiv (3, 2)$, $C \equiv (-1, 1)$, strana AB je rovnoběžná s vektorem $\boldsymbol{u} \equiv (1, 0)$ a úhlopříčka BD je rovnoběžná s vektorem $\boldsymbol{v} \equiv (3, 2)$.

Řešení (obr. 89)

Symbolická parametrická rovnice přímky q zní: $X = A + \boldsymbol{u}t_1$, rovnice přímky p $Y = S + \boldsymbol{v}t_2$, kde t_1, t_2 jsou různé parametry a $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ dané vektory, s nimiž jsou přímky p a q rovnoběžné. Pro souřadnice bodu $X \equiv (x_1, y_1)$ na přímce q tedy platí:



Obr. 89

$x_1 = x_A + u_1t_1$, $y_1 = y_A + u_2t_1$; pro souřadnice bodu $Y \equiv (x_2, y_2)$ na přímce p $x_2 = x_S + t_2v_1$, $y_2 = y_S + t_2v_2$, přičemž $A \equiv (3, 2)$, $S \equiv \left(1, \frac{3}{2}\right)$, $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $v_1 = 3$, $v_2 = 2$.

Z toho vyplývá pro souřadnice bodů na obou přímkách: $x_1 = 3 + t_1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 1 + 3t_2$, $y_2 = 1{,}5 + 2t_2$. Pro souřadnice průsečíku musí platit $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, tj. $3 + t_1 = 1 + 3t_2$, $1{,}5 + 2t_2 = 2$. Řešením obou rovnic dostaneme $t_1 = -\frac{5}{4}$, $t_2 = \frac{1}{4}$.

Průsečík přímek p a q má pak souřadnice $x = 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$,

$$y = 2\,.$$

Pro každý bod přímky m platí obdobně: $X_1 = C + s\,.\,\boldsymbol{u}$; pro body přímky p: $x_2 = 1 + 3r$, $y_2 = 1{,}5 + 2r$, kde r, s jsou opět parametry. Z rovnosti výrazů pro první souřadnice průsečíku plyne $x_1 = -1 + s\,.\,1 = 1 + 3r$, z rovnosti druhých souřadnic pak $1{,}5 + 2r = 1$. Jejich řešením dostáváme $s = \frac{5}{4}$, $r = -\frac{1}{4}$. Z toho $x = \frac{1}{4}$, $y = 1$.

Závěr: Zbývající vrcholy rovnoběžníka jsou $B \equiv \left(\frac{7}{4}, 2\right)$, $D \equiv \left(\frac{1}{4}, 1\right)$.

O správnosti se přesvědčte narýsováním tohoto rovnoběžníka a tím, že spočtete délky jeho stran. Jsou strany AB a CD rovnoběžné s vektorem $\boldsymbol{u}$? Je úhlopříčka BD rovnoběžná s vektorem $\boldsymbol{v}$? Jak to poznáte?

3. Určete rovnici přímky procházející bodem P rovnoběžně s vektorem $\boldsymbol{u}$.

a) $P \equiv (3, 2)$; $\boldsymbol{u} \equiv (3, 1)$; d) $P \equiv (-3, -5)$, $\boldsymbol{u} \equiv (3, -4)$;
b) $P \equiv (-1, 2)$, $\boldsymbol{u} \equiv (-4, 3)$; e) $P \equiv (3{,}5; 1)$, $\boldsymbol{u} \equiv (-1, 2)$.
c) $P \equiv (0, 1)$, $\boldsymbol{u} \equiv (3, 0)$;

4. Určete parametrickou rovnici přímky, která prochází bodem A rovnoběžně s přímkou BC:

a) $A_1 \equiv (-5, 8)$; b) $A_2 \equiv (-1, 1)$; c) $A_3 \equiv (0, 0)$; d) $A_4 \equiv (3, 4)$, kde $B \equiv (3, -2)$, $C \equiv (-2, 3)$.

5. Je dán trojúhelník svými vrcholy $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (7, 1)$, $C \equiv (2, 6)$. Napište: a) parametrické vyjádření stran tohoto trojúhelníka;

b) parametrické vyjádření stran trojúhelníka $A'B'C'$, jehož strany jsou vedeny vrcholy trojúhelníka ABC rovnoběžně s protějšími stranami;

c) parametrické vyjádření úseček AB, AC, $A'B'$, $C'A'$, $B'C'$.

6. Zjistěte, zda polopřímka:

a) $x = 3 - 2t$, $y = 1 + t$, $(t > 0)$ protíná polopřímku BC, je-li $B \equiv (-1, 0)$, $C \equiv (1, 4)$. Protínají-li se, určete souřadnice jejich průsečíku.

b) $x = 3 + t$, $y = 1 - t$, $(t < 0)$ protíná úsečku AB, kde $A \equiv (-2, 0)$, $B \equiv (2, 8)$ a stanovte souřadnice jejich průsečíku.

c) $x = -1 + 3t_1$, $y = 1 + 2t_1$, $(t_1 < 0)$ protíná přímku $x = 4 - 3t_2$, $y = 1 + 3t_2$;

d) $x = 2 + 5t_1$, $y = -1 + 3t_1$, $(t_1 > 1)$ protíná přímku $x = 2 - 3t_2$, $y = 2 + t_2$.

7. Zjistěte výpočtem, zda body A, B, C, D mohou tvořit vypuklý čtyřúhelník $ABCD$:

a) $A \equiv (-4, -3)$, $B \equiv (2, 2)$, $C \equiv (1, 3)$, $D \equiv (3, -1)$;
b) $A \equiv (4, 5)$, $B \equiv (-2, 2)$, $C \equiv (2, 1)$, $D \equiv (-3, -2)$;
c) $A \equiv (2, 3)$, $B \equiv (-3, -2)$, $C \equiv (2, 0)$, $D \equiv (-1, 2)$;
d) $A \equiv (1; 3{,}3)$ $B \equiv (-1, 2)$, $C \equiv (-2; 1{,}5)$, $D \equiv (1{,}5; -3)$.

8. Stanovte parametrickou rovnici přímky, která je určena dvěma body:

a) $A \equiv (-1, 2)$, $B \equiv (3, 1)$; b) $C \equiv (0, 3)$, $D \equiv (-2, -1)$;
c) $E \equiv (5, -2)$, $F \equiv (5, 1)$; d) $G \equiv (-6, -1)$, $H \equiv (3, 0)$;
e) $K \equiv (-4, 4)$, $L \equiv (3, -2)$.

Jak zní parametrické vyjádření úseček AB, CD, EF, GH, KL? Určete souřadnice průsečíků přímek 1) $AB . CD$; 2) $CD . EF$; 3) $EF . KL$.

9. Narýsujte přímku, jejíž parametrická rovnice zní:

a) $x = 3 - 2t$, $y = -1 + t$; b) $x = 5 - 4t$, $y = 3 + 2t$;
c) $x = -6 + t$, $y = -3 + 2t$; d) $x = 2t$, $y = 3 - t$;
e) $x = 2$, $y = 3t$; f) $x = -t$, $y = 4 + 2t$.

10. Zjistěte početně i graficky, zda dané body leží v jedné přímce:

a) $A \equiv \left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$, $B \equiv (3, 1)$, $C \equiv (4, 0)$;
b) $A \equiv (-1, 1)$, $B \equiv (2, 7)$, $C \equiv \left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$;

c) $A \equiv (-3, 2)$, $B \equiv (0, 3)$, $C \equiv (4,4)$;
d) $A \equiv (0, 5)$, $B \equiv (2, 1)$, $C \equiv (-1, 7)$;
e) $P \equiv (3, 1)$, $Q \equiv (-2, -9)$, $R \equiv (8, 11)$;
f) $E \equiv (0,2)$, $F \equiv (-1, 5)$, $G \equiv (3, 4)$.

11. Bodem $A \equiv (-5, 8)$ veďte přímku p rovnoběžnou se směrem BC a určete souřadnice jejího průsečíku s přímkou DE, je-li $B \equiv (3, -2)$, $C \equiv (-2, 3)$, $D \equiv (7, 4)$, $E \equiv (10, 9)$.

12. Určete souřadnice:

a) průsečíků přímky EF, je-li $E \equiv (7, 4)$, $F \equiv (10, 9)$ s přímkami z úlohy 4;

b) vrcholů trojúhelníka $A'B'C'$ z úlohy 5b.

$\boxed{\textbf{13.}}$ Ve tvaru neparametrickém napište rovnici přímky procházející bodem $A \equiv \left(-\dfrac{ac}{a^2+b^2}, -\dfrac{bc}{a^2+b^2}\right)$, rovnoběžné s vektorem $\boldsymbol{u} \equiv (-b, a)$.

Řešení

Hledaná parametrická rovnice zní: $x = -\dfrac{ac}{a^2+b^2} - bt$, $y = -\dfrac{bc}{a^2+b^2} + at$. Vyloučíme-li z obou rovnic parametr t, dostaneme $ax + by + \dfrac{c(a^2+b^2)}{a^2+b^2} = 0$, čili $ax + by + c = 0$, což je obecný tvar rovnice přímky, pokud ovšem není a i b současně rovno nule. Tohoto poznatku použijeme k řešení úlohy:
Rovnici přímky $3x - 2y + 4 = 0$ vyjádřete ve tvaru parametrickém. Zde je $a = 3$, $b = -2$, $c = 4$, a proto po dosazení do rovnice parametrické dostáváme: $x = -\dfrac{12}{13} + 2t$, $y = \dfrac{8}{13} + 3t$.
O správnosti řešení se přesvědčíme vyloučením parametru t z obou rovnic. Dostaneme tím původní danou rovnici $3x - 2y + 4 = 0$. Přesvědčte se o tom.

14. Převeďte na parametrickou rovnici:

a) $2x + 3y - 1 = 0$;
b) $3x - y + 4 = 0$;
c) $5x - 2 = 0$;
d) $4x + 2y + 3 = 0$;
e) $5x - y - 1 = 0$;
f) $ax + 3y - 4 = 0$.

15. Převeďte na tvar parametrický a dokažte, že přímky dané rovnicemi:
a) $2x + y - 1 = 0$, $x - y - 5 = 0$, $5x + 4y + 2 = 0$;
b) $y = 3x$, $2x - y + 3 = 0$, $y - 4x + 3 = 0$ se protínají v jednom bodě. Řešte též jako soustavu tří rovnic, popř. i graficky.

16. Napište rovnici přímky procházející body $U \equiv (3, -2)$, $V \equiv (-1, 3)$ ve tvaru neparametrickém.

Řešení

Rovnice hledané přímky má tvar $ax + by + c = 0$. Této rovnici musí vyhovovat souřadnice bodů U, V, neboť na dané přímce leží. Platí tedy: $3a - 2b + c = 0$, $-a + 3b + c = 0$. Odtud řešením $a = \frac{-5c}{7}$, $b = \frac{-4c}{7}$ a po dosazení do rovnice přímky $\frac{-5c}{7}x - \frac{4c}{7}y + c = 0$. Po úpravě máme $5x + 4y - 7 = 0$. Jak ověříme správnost výsledku?

17. Napište rovnici přímky v neparametrickém tvaru, je-li určena body:
a) $A \equiv (5, 2)$, $B \equiv (9, 4)$; b) $C \equiv (2, -8)$, $D \equiv (-1, 7)$;
c) $E \equiv (-5, 3)$, $F \equiv (2, 3)$; d) $G \equiv (-2, 1)$, $H \equiv (-2, -3)$;
e) $R \equiv (-4, -3)$, $S \equiv (5, 4)$.
Která z délek úseček je nejmenší: AB, CD, EF, GH, RS?

18. V neparametrickém tvaru určete rovnice přímek, v nichž leží strany a těžnice trojúhelníka:
a) $A \equiv (9, -4)$, $B \equiv (-4, 9)$, $C \equiv (6, 5)$;
b) $A \equiv (-1, -3)$, $B \equiv (4, -1)$, $C \equiv (5, 8)$;
c) $A \equiv (13, -4)$, $B \equiv (-7, 5)$, $C \equiv (11, 1)$.

19. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:
a) $3x - 4y + 5 = 0$, $x = 2 - 3t$, $y = 5t$;
b) $2x - y + 3 = 0$, $x = 1 - 2t$, $y = 3 + t$;
c) $3x + 2y - 1 = 0$, $x = 5 - 2t$, $y = 1 + 3t$;
d) $5x + 2y - 11 = 0$, $x = 3 - 2t$, $y = -2 + 5t$.

20. Na přímce MN leží bod C. Určete jeho souřadnice, je-li
a) $M \equiv (-3, 5)$, $N \equiv (-1, 2)$, $C \equiv (5, y)$;
b) $M \equiv (1, 2)$, $N \equiv (3, 5)$, $C \equiv (x, -1)$;
c) $M \equiv (10, 5)$, $N \equiv (8, -1)$, $C \equiv (-5, y)$.

21. Zjistěte, zda body $A \equiv (3, 5)$, $B \equiv (2, 7)$, $C \equiv (-1, -3)$, $D \equiv (-2, -6)$, $E \equiv (0, -1)$ leží na přímce $y = 2x - 1$.

22. Pomocí jednoho zvoleného bodu přímky a vlastnosti koeficientů a, b rovnice $ax + by + c = 0$ narýsujte přímky dané rovnicemi:
a) $x + y - 6 = 0$, $x - 4y + 10 = 0$, $3x - 2y + 6 = 0$;
b) $x + y = 4$, $x - y + 4 = 0$, $y = 3$, $y = 0$;
c) $x - y - 1 = 0$, $2x + 2y - 11 = 0$, $4x - y = 0$, $y = 0$. Jaký obrazec tím vznikne?

23. Určete rovnice přímek, které jsou vedeny vrcholy trojúhelníka:
a) $A \equiv (10, 8)$, $B \equiv (-6, -2)$, $C \equiv (1, -5)$;
b) $A \equiv (5, 6)$, $B \equiv (-2, 4)$, $C \equiv (6, -1)$, rovnoběžně s protilehlou stranou.

24. Napište rovnice přímek, v nichž leží výšky trojúhelníka, jehož strany leží v přímkách o rovnicích:
a) $x + y = 0$, $\quad x - 2y + 3 = 0$, $\quad 5x + y - 18 = 0$;
b) $x + 2y - 1 = 0$, $\quad 5x + 4y - 17 = 0$, $\quad x - 4y + 11 = 0$;
c) $x - 2y = 6$, $\quad 7x + 6y = 42$, $\quad 9x + 2y = 14$.
Jaké jsou souřadnice průsečíků těchto výšek?

***25.** Určete rovnice výšek trojúhelníků a jejich průsečík:
a) $A \equiv (5, 6)$, $B \equiv (-2, 4)$, $C \equiv (6, -1)$;
b) $A \equiv (3, 5)$, $B \equiv (-4, 2)$, $C \equiv (8, -1)$;
c) $A \equiv (-3, -4)$, $B \equiv (5, -2)$, $C \equiv (1, 5)$;
d) $A \equiv (1, 1)$, $B \equiv (2, 3)$, $C \equiv (-4, -3)$.

26. Napište rovnici přímky procházející průsečíkem přímek:
a) $x + 2y - 5 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$;
b) $x - y - 3 = 0$, $2x + 3y - 11 = 0$, která je současně kolmá k přímce, jejíž rovnice je α) $2x + 3y + 7 = 0$; β) $5x - 4y - 20 = 0$.

27. Která přímka prochází průsečíkem přímek o rovnicích
a) $5x - y + 10 = 0$, $8x + 4y + 9 = 0$ rovnoběžně s přímkou $x + 3y = 0$;
b) $4x + 7y - 15 = 0$, $9x - 14y - 17 = 0$ rovnoběžně s přímkou $y = 0$;
c) $x - 6y - 1 = 0$, $2x + 3y = 4$ rovnoběžně s osou y?

28. Trojúhelník je dán rovnicemi stran:
a) $2x + y + 3 = 0$, $x + 2y = 3$, $x = y + 3$;
b) $-2y + 3x - 5 = 0$, $y = -x$, $y = 2$;
c) $x + 2y - 1 = 0$, $5x + 4y - 17 = 0$, $x - 4y + 11 = 0$.
Určete střed a poloměr kružnice trojúhelníku opsané.

29. Určete střed a velikost poloměru kružnice opsané trojúhelníku ABC, jestliže
a) $A \equiv (4, 3)$, $B \equiv (-3, 2)$, $C \equiv (1, -6)$;
b) $A \equiv (-1, 3)$, $B \equiv (0, 2)$, $C \equiv (1, -1)$.

***30.** Vypočtěte velikost strany rovnostranného trojúhelníka, jehož vrchol je $A \equiv (-2, -1)$ a protilehlá strana BC leží na přímce, jejíž rovnice je $3x + 4y = 12$.

***31.** Ověřte, že průsečík výšek trojúhelníka V, průsečík os stran S a těžiště trojúhelníka T leží na přímce. Řešte pro:
a) $a \equiv x - 2y + 1 = 0$, $b \equiv x - 6y - 12 = 0$,
$c \equiv x + 2y + 9 = 0$;

b) $a \equiv 7x + 3y - 39 = 0$, $b \equiv x - 6y - 12 = 0$,
$c \equiv x - y + 3 = 0$.

32. V rovnici přímky $ax - 8y + 7 = 0$ určete koeficient a tak, aby tato přímka procházela: a) bodem $M \equiv (1, 0)$;
b) průsečíkem přímek $3x - 5y + 4 = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$.

***33.** Jsou dány rovnice dvou přímek: $px + 2qy + 1 - r = 0$, $(1 - p)x + (1 - 2q)y + r = 0$. Pro které hodnoty čísel p, q, r jsou tyto přímky: a) různé rovnoběžky; b) splývající rovnoběžky; c) různoběžky?

34. Určete velikost neznámých konstant m, n v rovnici přímky $(3 - m)x + 12y + 2 - n = 0$, která splývá s přímkou, jejíž rovnice zní $2x - 3y + 2 = 0$.

***35.** Jsou dány rovnice přímek: $a \equiv x = 0$, $b \equiv x - 2y - 3 = 0$, $c \equiv 2x - y - 1 = 0$ a dva body $M \equiv (-2, 3)$, $N \equiv (3, -3)$. Na přímce a určete bod X a na přímce b bod Y tak, aby přímky MX a NY byly rovnoběžné a aby současně byla spojnice bodů X a Y rovnoběžná se stranou c.

2. POLOROVINA, SMĚRNICE PŘÍMKY A VZDÁLENOST BODU OD PŘÍMKY

36. Dokažte, že přímka o rovnici $2x + y + 1 = 0$ odděluje body $A \equiv (-2, 1)$, $B \equiv (1, 4)$ a určete rovnici poloroviny s hraniční přímkou $p \equiv 2x + y + 1 = 0$, obsahující bod B.

Řešení

Rovnice úsečky AB zní: $x = -2 + 3t$, $y = 1 + 3t$, kde $0 < t < 1$. Souřadnice průsečíku C úsečky AB s danou přímkou dostaneme jejich řešením: $2(-2 + 3t) + (1 + 3t) + 1 = 0$, odtud $t = \frac{2}{9}$. Protože hodnota parametru $t = \frac{2}{9} < 1$, je průsečík obou přímek vnitřním bodem úsečky AB. Oba body jsou tedy touto přímkou odděleny. O správnosti se přesvědčte např. tím, že vypočítáte první souřadnici jejich průsečíku a zjistíte, zda leží mezi souřadnicemi bodů A, B. Pro $x = 1$ má bod B' na přímce AB druhou souřadnici $y = -3$. Náš bod $B \equiv (1, 4)$ má druhou souřadnici větší než (-3), a leží tedy „nad" přímkou $2x + y + 1 = 0$. Načrtněte.

Závěr: Rovnice hledané poloroviny zní $2x + y + 1 \geq 0$.

37. Dokažte, že přímka $3x - y + 3 = 0$ protíná aspoň jednu stranu trojúhelníka, jehož vrcholy jsou A, B, C:

a) $A \equiv (1, 0)$, $B \equiv (-3, 1)$, $C \equiv (2, -3)$; b) $A \equiv (-4, -1)$, $B \equiv (-3, 1)$, $C \equiv (0, 0)$; c) $A \equiv (-1, 0)$, $B \equiv (0, 3)$, $C \equiv (2, 2)$; d) $A \equiv (0, 3)$, $B \equiv (2, 6)$, $C \equiv (-2, 1)$.

38. Určete koeficient c dané rovnice přímky tak, aby tato přímka oddělovala body A, B: a) $A \equiv (2, 5)$, $B \equiv (1, -1)$, $p \equiv 2x + 3y + c = 0$; b) $A \equiv (-3, 1)$, $B \equiv (3, 2)$, $p \equiv x + 3y + c = 0$; c) $A \equiv (2, 3)$, $B \equiv (-1, -3)$, $p \equiv y = -2x + c$; d) $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (3, -1)$, $p \equiv 3y - 4x + c = 0$.

39. Zpaměti určete podmínky pro druhé souřadnice bodů A, B, C, D, leží-li tyto body v téže polorovině vymezené přímkou $y = 4x + 7$, v níž leží počátek souřadnic:

a) $A \equiv (1, ?)$; b) $B \equiv (-2, ?)$, $C \equiv (3, ?)$; d) $D \equiv (x_1, ?)$.

40. Ukažte, že všechny vnitřní body trojúhelníka ABC leží v téže polorovině vymezené danou přímkou: a) $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (-1, -3)$, $C \equiv (2, 3)$, $p \equiv 2x - 3y - 6 = 0$; b) $A \equiv (3, 4)$, $B \equiv (1, 3)$, $C \equiv (2, 1)$, $p \equiv 3x + y - 2 = 0$; c) $A \equiv (0, 5)$, $B \equiv (3, 7)$, $C \equiv (-3, 2)$, $p \equiv 2x - y = 0$.

41. Napište rovnici poloroviny, jejíž hraniční přímka prochází body $A \equiv (3, 5)$, $B \equiv (-4, 2)$, jestliže v té polorovině leží další bod:

a) $C \equiv (0, 0)$; b) $D \equiv (-2, -1)$; c) $E \equiv (-4, 5)$; d) $F \equiv (0, 5)$.

42. Určete obsah trojúhelníka vymezeného polorovinami danými nerovnostmi:

a) $x \leqq 0$, $2x - 3y + 6 \geqq 0$, $3x + 4y + 9 \geqq 0$;

b) $y \geqq -3x$, $y \leqq 2x + 6$, $y \geqq 4x - 1$;

c) $3y - x \geqq 2$, $x + 2 \geqq 0$, $2x + y \leqq 5$.

43. Jaký obsah mají trojúhelníky z úlohy 40?

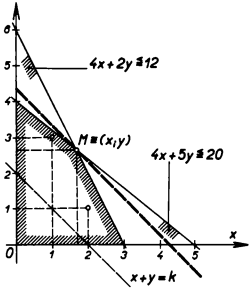
44. Určete rovnice opěrných polorovin rovnoběžníka $ABCD$, jehož vrcholy jsou body: $A \equiv (0, 1)$, $B \equiv (-1, 4)$, $C \equiv (4, 5)$. (Tři řešení.) [Hranice opěrných polorovin procházejí body A, B, A, C, B, C.]

45. Určete rovnice opěrných polorovin pravidelného šestiúhelníka, jehož jeden vrchol má souřadnice: a) $A \equiv (0, 3)$ a jeho střed je v počátku souřadnic; b) $A \equiv (a, 0)$, střed rovněž v počátku souřadnic.

46. Dvě výrobní linky různé výkonnosti vyrábějí dva druhy jehel, přičemž obě linky pracují za sebou. Na výrobu 1 000 kusů prvního druhu potřebuje linka A 4 hodiny, na výrobu 1 000 kusů druhého druhu 5 hodin, přičemž může být v provozu 20 hodin denně. Druhá linka potřebuje na zpracování téhož množství prvního druhu výrobku rovněž 4 hodiny a na výrobu 1 000 kusů jehel druhého druhu 2 hodiny při provozní době 12 hodin denně. Ostatní čas je věnován údržbě. Při jakém vytížení obou linek se docílí výroby maximálního počtu výrobků?

Řešení (obr. 90)

Nechť je nejefektivnější výkon obou linek $x \,.\, 1\,000$ kusů jehel prvního druhu a $y \,.\, 1\,000$ kusů druhého druhu. Čas potřebný k výrobě těchto množství je po řadě $4x$, $5y$. Celý pracovní čas je nejvýše 20 h, musí tedy platit $4x + 5y \leqq 20$. Podobně pro druhou linku dostaneme podmínku $4x + 2y \leqq 12$. Dále je ještě nutné, aby $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, neboť množství výrobků nemůže být záporné. Tyto čtyři nerovnosti zobrazíme a průnik jimi vymezených polorovin (konvexní polyedr) je množina přijatelných řešení. Tak je přijatelné řešení např. pro $x = 1$ a $y = 3$ nebo jiné řešení pro $x = 2$ a $y = 1$ atp. Viz obr. 90.



Obr. 90

Nejvýhodnější bude ovšem to řešení, které splňuje podmínku $z = x + y = \max$, tj. největší počet výrobků obou druhů. Do obr. 90 narýsujeme proto soustavu přímek, jejichž směrnice je -1. (Proč?) Mezi nimi pak najdeme tu přímku, která má s oborem možných (přijatelných) řešení aspoň jeden bod společný. V našem případě je to přímka $y + x = \frac{13}{3}$, která má se čtyřúhelníkem možných řešení společný bod $M \equiv \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Obraz tohoto bodu představuje tedy optimální řešení. Z hlediska maximálního počtu výrobků obou druhů bude tedy nejefektivnější vyrobit $\frac{5}{3} \,.\, 10^3$ kusů jehel prvního druhu a $\frac{8}{3} \,.\, 10^3$ kusů jehel druhého druhu.

47. Řešte tutéž úlohu, jako je úloha 46, jen s tím rozdílem, že budete posuzovat výhodnost či nevýhodnost programu podle ceny výrobků. Nechť je cena prvního výrobku $c_1 = 10$ h, cena druhého výrobku 20 h. Pak požadujeme maximum pro funkci $10x + 20y = P(\text{max.})$ [Návod: Do obr. předchozí úlohy narýsujte soustavu grafů funkce $10x + 20y = P$ a posuňte tak, až se přímka dotkne čtyřúhelníka vymezujícího přijatelná řešení.]

48. Továrna na spalovací motory má výrobní kapacitu součástí na 600 strojů typu A nebo 1 200 strojů typu B za dekádu. Montážní hala může za stejnou dobu sestavit 1 200 strojů typu A nebo 800 strojů typu B. Jak je třeba zvolit výrobní program, aby bylo docíleno maximální výroby, jestliže výrobní cena obou typů motorů je stejná. [Návod: $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $\frac{x}{600} + \frac{y}{1\,200} \leqq 1$, $\frac{x}{1\,200} + \frac{y}{800} \leqq 1$, $z = x + y = \text{max.}$]

49. Řešte úlohu 48 s podmínkou, že zkušebna může vybavit za dekádu 500 kusů strojů A a 2 000 kusů strojů B. [Návod: Graf obsahuje další transformační přímku $\frac{x}{500} + \frac{y}{2\,000} \leqq 1$ a přijatelná řešení tvoří pak pětiúhelník omezený všemi polorovinami z úlohy 48 a touto polorovinou.]

50. JZD má osít 100 ha půdy pšenicí a cukrovkou za těchto podmínek: a) k dispozici má 2 800 pracovních norem, přičemž na 1 ha pšenice je třeba 10 norem a na 1 ha cukrovky 70 norem; b) zásoba osiva pšenice stačí na 80 ha; c) pro cukrovku je vhodných jen 35 ha. Určete takové rozdělení osevních ploch, aby za uvedených podmínek mělo družstvo z pěstování těchto dvou plodin maximální čistý důchod, počítá-li se čistý důchod z 1 ha pšenice 1 000 Kčs a z 1 ha cukrovky 300 Kčs.
[Návod: $x_1 + x_2 \leqq 100$, $10x_1 + 70x_2 \leqq 2\,800$, $x_1 \leqq 80$, $x_2 \leqq 35$, $z = 1\,000x_1 + 300x_2 = \text{max.}$]

51. Určete graficky nejlevnější jídelníček, sestavený ze sýra a uzenin tak, aby tyto dvě potraviny zajišťovaly a) aspoň 500 cal; b) aspoň 40 g bílkovin; c) nejvýše 30 g tuků. Potřebné údaje pro 100 g uvedených potravin obsahuje tabulka:

	kalorie	bílkoviny	tuky	cena
sýr	328	20,3	27	2,8
uzeniny	192	16,3	13,6	3,2

52. Krmná norma živin na výrobu 1 kg mléka u dojnice, jejíž užitkovost je větší než 10 kg mléka denně, je 0,05 kg stravitelných bílkovin a 0,25 škrobových jednotek. Zemědělský závod bude tuto spotřebu živin nahrazovat senem vojtěšky, kosené před květem (obsah 8 % stravitelných bílkovin a 28 % škrobových jednotek) a pšeničnou krmnou moukou (obsah 11 % stravitelných bílkovin a 75 % škrobových jednotek). Určete takovou kombinaci uvedených krmiv, aby krmné náklady na výrobu 1 kg mléka byly minimální. Náklady na výrobu 1 kg vojtěškového sena jsou 0,50 Kčs a na 1 kg krmné pšeničné mouky 1,25 Kčs.

53. Určete velikost směrového úhlu φ přímky, jejíž orientace je určena vektorem $\boldsymbol{AB}$, kde $A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$. Jak se změní směrový úhel této přímky, změní-li se její orientace?

54. Definujte směrnici přímky procházející body $A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$.

55. Napište rovnici přímky, která prochází bodem a) $A \equiv (-3, 7)$ a je rovnoběžná se směrem vektoru $\boldsymbol{c} \equiv (2, 5)$; b) $B \equiv (-1, -2)$ a jejíž směrnice je $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{5}$.

Řešení

a) $x = -3 + 2t$, $y = 7 + 5t$ nebo $y - y_1 = k\,.\,(x - x_1)$, tj. $y - 7 = \frac{5}{2}(x + 3)$, $2y - 5x - 29 = 0$. b) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \frac{3}{5}$, $x = -1 + 5t$, $y = -2 + 3t$. Nebo $y + 2 = \frac{3}{5}(x + 1)$, $3x - 5y - 7 = 0$.

Závěr: Rovnice přímky žádaných vlastností zní: a) $5x - 2y + 29 = 0$; b) $3x - 5y - 7 = 0$.

56. Jakou rovnici má přímka procházející počátkem souřadnic: a) v parametrickém tvaru; b) v neparametrickém tvaru? Najděte rovnici přímky procházející daným bodem rovnoběžně s daným směrem:

a) $C \equiv (-2, 3)$, $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{5}{2}$; b) $C \equiv \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{5}{4}$;

c) $C \equiv (4, 5)$, $x = 4t$, $y = \frac{1}{2} + 5t$.

57. Podle předchozí úlohy vyjádřete zpaměti ve tvaru parametrickém i neparametrickém rovnici přímky procházející počátkem, jestliže její směrový úhel je: 30°, 45°, 60°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°.

58. Narýsujte přímku, která prochází daným bodem $A \equiv (-1, 2)$ a pro jejíž směrový úhel φ platí:

a) $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, $\sin \varphi > 0$; b) $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \varphi > 0$; c) $\cos \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \varphi > 0$; d) $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$, $0 < \varphi < \pi$; e) $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{2}\pi$; f) $\sin \varphi = -1$, $0 < \varphi < 2\pi$.

59. Určete směrový úhel spojnice bodů (v daném pořadí); a) $A \equiv (0,2)$, $B \equiv (-2, 4)$; b) $C \equiv (3, -1)$, $D \equiv (1, -5)$; c) $E \equiv$ $\equiv (5\sqrt{3}, 5)$, $F \equiv (-\sqrt{3}, -1)$; d) $G \equiv (0,0)$, $H \equiv (1, \sqrt{3})$.

60. Určete rovnice stran a úhlopříček čtyřúhelníka $ABCD$, jehož vrcholy jsou: a) $A \equiv (-9, 4)$, $B \equiv (0, 7)$, $C \equiv (5, 1)$, $D \equiv (0, 0)$; b) $A \equiv (-1, -1)$, $B \equiv (3, -2)$, $C \equiv (5, 1)$, $D \equiv (1, 4)$. Jaké jsou úhly stran tohoto čtyřúhelníka s osou $+x$?

61. Při scelování pozemků při zakládání JZD byl vytvořen hon tvaru čtyřúhelníka, jehož vrcholy A, B, C, D měly vůči pevně zvolenému geodetickému nulovému bodu polohu: $A \equiv (580, 600)$, $B \equiv (700, -450)$, $C \equiv (-800, -500)$, $D \equiv (-750, 320)$, měřeno v metrech. Určete výměru tohoto honu. [Návod: V geodézii jsou body rovinného útvaru vyznačovány v soustavě souřadnic, jejíž kladný směr osy x leží v meridiánu směrem severním a kladný směr osy y ve směru východním.]

62. Jaký směrový vektor má přímka o rovnici $ax + by + c = 0$? Jak zní její a) směrnicový, b) úsekový, c) normálový tvar? [$a \neq 0$, $b \neq 0$.]

63. Jak zní rovnice přímky procházející bodem A, jejíž směrnice je k: a) $k = 2$, $A \equiv (3, -1)$; b) $k = 1$, $A \equiv (-2, 3)$; c) $k = -2$, $A \equiv$ $\equiv (0, -3)$; d) $k = 0$, $A \equiv (3, -3)$; e) $k = \frac{1}{2}$, $A \equiv (-4, -5)$; f) $k = -\frac{2}{3}$, $A \equiv (-1, -3)$? Narýsujte je.

64. Jak zní rovnice přímky, která svírá s osou x úhel α stupňů a na ose y vytíná úsek q: a) $\alpha = 30°$, $q = 2$; b) $\alpha = 30°$, $q = 0$; c) $\alpha = 60°$, $q = -1$; d) $\alpha = 60°$, $q = 3$; e) $\alpha = 120°$, $q = 1$; f) $\alpha = 135°$, $q =$ $= -4$; g) $\alpha = -45°$, $q = 2$? (Zpaměti.)

65. Napište úsekový tvar rovnice přímky a sestrojte ji, je-li obecný tvar její rovnice: a) $3x - 4y + 5 = 0$; b) $x + y - 2 = 0$; c) $2x - 3y + 4 =$ $= 0$; d) $5x - 12y + 14 = 0$; e) $4x + 5 = 0$.

66. Určete rovnici přímky, která je určena některými z hodnot: k, α, p, q. (k je směrnice přímky, α je směrový úhel přímky, p je úsek vymezený přímkou na ose x, q je úsek vymezený přímkou na ose y.) a) $\alpha = 30°$, $q = 3$; b) $\alpha = 45°$, $q = -10$; c) $\alpha = 135°$, $q = 2$; d) $k = 2$, $q = -3$; e) $k = -\frac{1}{3}$, $q = 0$; f) $p = 3$, $q = -4$; g) $p = -1$, $q = -2$. (Zpaměti.)

67. Napište v úsekovém tvaru rovnice přímek z úlohy 62 a 63.

68. Jaké úseky na osách vytíná přímka určená body A, B, je-li: a) $A \equiv (3, 4)$ $B \equiv (-1, -3)$; b) $A \equiv (-1, -2)$, $B \equiv (-3, -5)$; c) $A \equiv (2, 3)$, $B \equiv (4, -3)$?

69. Najděte směrnici přímky a úseky, které vytíná daná přímka na osách souřadnic, je-li její rovnice: a) $3x - 6y + 10 = 0$; b) $4x + 3y - 1 = 0$; c) $6x - 5y = 0$; d) $6x + y - 1 = 0$; e) $ax + 3y + 2 = 0$; f) $3x + by - 1 = 0$, $b \neq 0$.

70. Jak zní rovnice přímky procházející daným bodem rovnoběžně s danou přímkou: a) $P \equiv (3, 1)$, $y = 0$; b) $P \equiv (-1, 3)$, $x = 0$; c) $P \equiv (-1, -2)$, $y = x$; d) $P \equiv (4, 2)$, $x - 6y + 3 = 0$; e) $P \equiv (-1, -1)$, $x = 2$? (Zpaměti.)

71. Jakou směrnici má přímka, jejíž parametrická rovnice je: a) $x = 3 - t$, $y = 1 + 2t$; b) $x = 2t$, $y = 3t$; c) $x = -1 + 2t$, $y = 3 - t$; d) $x = 3 - 2t$, $y = 7 + 3t$; e) $x = -1$, $y = 1 + t$? Napište směrnicový a úsekový tvar rovnice těchto přímek.

72. Určete odchylku dvou přímek:

a) $2x - 5y + 35 = 0$, $9x + 10y - 42 = 0$; b) $5x - 2y + 26 = 0$, $9x + 10y - 42 = 0$; c) $5x - y + 6 = 0$, $3x + y - 4 = 0$. Řešte vektorově.

73. Určete odchylku dvou přímek, jejichž rovnice jsou:

a) $5x - y + 7 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$; b) $3x + 2y = 0$, $6x + 4y = -9$; c) $2x + y = 0$, $y = 3x - 4$; d) $3x - 4y = 6$, $8x + 6y = 11$; e) $3x + 2y = 0$, $6x + 4y + 9 = 0$; f) $y = 2x - 3$, $y = 0{,}5x + 1$.

74. Strany trojúhelníka jsou dány rovnicemi:

a) $a \equiv x + 3y = 0$, $b \equiv x = 3$, $c \equiv x - 2y + 3 = 0$;
b) $a \equiv x + 7y + 11 = 0$, $b \equiv 3x + y - 7 = 0$, $c \equiv x - 3y - 1 = 0$;
c) $a \equiv x + 2y = 0$, $b \equiv x + 4y - 6 = 0$, $c \equiv x - 4y - 6 = 0$.
Určete souřadnice vrcholů těchto trojúhelníků a velikosti jejich vnitřních úhlů.

75. Poloha trojúhelníkové parcely na plánu je vyznačena vrcholy trojúhelníka A, B, C. Jaké jsou její vnitřní úhly, jestliže:

a) $A \equiv (-1, -1)$, $B \equiv (15, 3)$, $C \equiv (8, -6)$; b) $A \equiv (9, -3)$, $B \equiv (2, 5)$, $C \equiv (-4, 2)$; c) $A \equiv (0, 7)$, $B \equiv (6, -1)$, $C \equiv (2, 1)$.

76. Najděte rovnici přímky procházející počátkem souřadnic, která současně protíná přímku, jejíž rovnice zní $y = 4 - 2x$, pod úhlem 45°.

Řešení

Existuje-li taková přímka, nechť má směrnici k. Její rovnice pak je $y = kx$. Pro odchylku dvou směrů, jejichž směrnice jsou k_1, k_2, platí

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$. Daná přímka má směrnici $k_1 = -2$, $\varphi = 45°$. Platí proto $\operatorname{tg} 45° = \dfrac{k_2 + 2}{1 - 2k_2}$ a z toho $1 - 2k_2 = k_2 + 2$, $3k_2 = -1$, $k_2 = -\dfrac{1}{3}$. Rovnice hledané přímky tedy zní $y = -\dfrac{1}{3}x$. Druhá přímka vyhovující úloze je kolmá k přímce nalezené (načrtněte situaci), tj. $\operatorname{tg} 90° = (k - k_2):(1 + kk_2) = \infty$. Proto je $1 + kk_2 = 0$, neboli v našem případě $1 - \dfrac{1}{3}k = 0$, $k = +3$.

Jiné řešení: Pro odchylku přímek $2x + y = 4$, $y = kx$ platí: $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{|2k + 1|}{\sqrt{1 + k^2}\,.\,\sqrt{5}}$. Odtud pak $k_1 = \dfrac{1}{3}$, $k_2 = +3$.

Závěr: Rovnice obou vyhovujících přímek jsou: $y = -\dfrac{1}{3}x$, $y = +3x$.

77. Jak zní rovnice přímky procházející bodem A a protínající danou přímku p pod úhlem 45°:
a) $A \equiv (-1, -1)$, $p \equiv 2x + 3y = 6$; b) $A \equiv (2, 1)$, $p \equiv 2x + 3y + 4 = 0$; c) $A \equiv (5, 3)$, $p \equiv 2x - 3y - 7 = 0$; d) $A \equiv (-1, 3)$, $p \equiv 4x - 2y - 1 = 0$.

***78.** Určete normálový tvar rovnice přímky:
a) $3x - 4y - 5 = 0$; b) $y = 3x - 1$; c) vytínající na osách souřadnic úseky $p = 4$, $q = -\dfrac{1}{2}$; d) procházející bodem A rovnoběžně se směrem vektoru $\boldsymbol{u} \equiv (-2, 1)$, $A \equiv (3, 1)$.

[Návod: Normálový tvar rovnice přímky $ax + by + c = 0$ má tvar $\dfrac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$.]

***79.** Najděte normálový tvar rovnice přímky, k níž normála vedená z počátku souřadnic má velikost d a svírá s kladným směrem osy x úhel α:
a) $\alpha = 30°$, $d = 10$ j; b) $\alpha = 135°$, $d = 5$ j; c) $\alpha = 60°$, $d = 12$ j.

$\boxed{\textbf{80.}}$ Najděte velikost výšky v_a v trojúhelníku ABC, je-li $A \equiv (1, 5)$, $B \equiv (5, -5)$, $C \equiv (3, 4)$.

Řešení

Velikost kolmice z bodu A na stranu BC určíme podle vzorce $v = \left|\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$, kde $ax + by + c = 0$ je rovnice strany BC,

x_0, y_0 jsou souřadnice bodu A. Rovnici strany BC určíme z podmínky, že body B, C leží na přímce, jejíž rovnice je $ax + by + c = 0$. Platí tedy $5a - 5b + c = 0$, $3a + 4b + c = 0$. Jejich řešením dostaneme $a = \frac{9}{2}b$, $c = -\frac{35}{2}b$. Dosadíme-li tyto hodnoty do obecného tvaru strany BC $(ax + by + c) = 0$, dostaneme $9x + 2y - 35 = 0$. [Rychleji dostaneme rovnici strany BC dosazením do vzorce pro rovnici přímky určené dvěma body:

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, tj. $y + 5 = \frac{4 + 5}{3 - 5}(x - 5)$. Z toho $-2y - 10 = 9x - 45$, $9x + 2y - 35 = 0$.]

Vzdálenost v_a bodu A od strany BC je pak $v = \left|\frac{9x_0 + 2y_0 - 35}{\sqrt{81 + 4}}\right| = \left|\frac{9 + 10 - 35}{\sqrt{85}}\right| = \frac{16}{\sqrt{85}}$.

81. Určete vzdálenost dvou rovnoběžek:
$y = 3x + 5$, $6x - 2y - 13 = 0$.

Řešení

Obě přímky jsou rovnoběžné, neboť jsou kolmé k témuž vektoru. Na první přímce zvolme libovolný bod, třeba průsečík dané přímky s osou y. Potom pro $x = 0$ je $y = 5$, tj. první přímka protíná osu y v bodě $M \equiv (0,5)$. Jeho vzdálenost od druhé přímky je $v = \left|\frac{6x_0 - 2y_0 - 13}{\sqrt{40}}\right| = \frac{23\sqrt{40}}{40}$.

Jiný způsob řešení:

Leží-li počátek soustavy souřadnic v téže polorovině vymezené oběma přímkami, je vzdálenost obou rovnoběžek rovna rozdílu vzdáleností obou přímek od počátku. Jsou-li obě přímky počátkem soustavy souřadnic od sebe odděleny, pak je jejich vzdálenost rovna součtu vzdáleností počátku od obou přímek. Proveďte si náčrt. Vzdálenost počátku od přímky je $d = \left|\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$. V našem případě $d_1 = \frac{5}{\sqrt{10}}$, $d_2 = \frac{13}{\sqrt{40}}$.

Závěr: Vzdálenost $d = d_1 + d_2 = \frac{5}{\sqrt{10}} + \frac{13}{\sqrt{40}} = \frac{23\sqrt{40}}{40}$ (jako v řešení prvním).

82. Jaké vzdálenosti mají dané body od dané přímky:
a) $M \equiv (2, 8)$, $N \equiv (-4, -3)$, $P \equiv (-7, 7)$, $Q \equiv (5, -1)$, $R \equiv$ $\equiv (-10, 0)$, $x - 2y + 10 = 0$; b) $A \equiv (9, -2)$, $B \equiv (11, -3)$, $C \equiv (4, 0)$, $D \equiv \left(0, \dfrac{5}{3}\right)$, $5x + 12y - 20 = 0$?

83. Určete velikost strany čtverce, jehož vrchol A leží:
a) v počátku souřadnic a úhlopříčka BD na přímce, jejíž rovnice je $6x + 8y = 49$;
b) v bodě $A \equiv (-3, -4)$ a úhlopříčka BD na přímce o rovnici $3x +$ $+ 4y = 25$.

84. Určete vzdálenost dvou rovnoběžek (když jste se předem přesvědčili, že dané přímky jsou rovnoběžné):
a) $y = x\sqrt{3} - 4$, $y = x\sqrt{3} + 2$; b) $3x + 2y - 18 = 0$, $6x + 4y + 11 = 0$; c) $2x - 3y = 6$, $4x - 6y - 25 = 0$; d) $ax +$ $+ by + c_1 = 0$, $ax + by + c_2 = 0$.

85. Určete velikost výšek v trojúhelníku, jehož vrcholy jsou:
a) $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (2, 1)$, $C \equiv (3, -1)$; b) $A \equiv (-1, 6)$, $B \equiv (4, -2)$, $C \equiv (6, 5)$; c) $A \equiv (15, 4)$, $B \equiv (1, -3)$, $C \equiv (5, 9)$; d) $A \equiv (5, 2)$, $B \equiv (1, 5)$, $C \equiv (-2, 1)$; e) $A \equiv (7, 8)$, $B \equiv (5, -2)$, $C \equiv (-3, -6)$. Ověřte si, že výšky v trojúhelníku procházejí vždy jedním bodem. [Řešte aspoň pro úlohu a).]

86. Určete velikost výšek trojúhelníka, jehož strany leží na přímkách daných rovnicemi:
a) $a \equiv 2x + 3y + 13 = 0$, $b \equiv 3x + y + 9 = 0$, $c \equiv 4x - 5y + 7 =$ $= 0$; b) $a \equiv 3x + y + 4 = 0$, $b \equiv 3x - 5y + 34 = 0$, $c \equiv 3x -$ $- 2y + 1 = 0$.

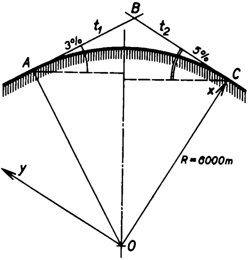
87. Určete k v rovnici přímky $y = kx + 5$, má-li její graf od počátku vzdálenost $d = \sqrt{5}$.

88. Najděte přímku, která obsahuje bod:
a) $M \equiv (1, -1)$ a má od bodu $Q \equiv (2, 7)$ vzdálenost $v = 3$;
b) $P \equiv (3, 12)$ a od bodu $Q \equiv (7, 2)$ má vzdálenost $v = \sqrt{58}$;
c) $R \equiv (-2, 5)$ a je stejně vzdálena od bodů $A \equiv (3, -7)$, $B \equiv (-4, 1)$.

89. Pro které hodnoty konstanty k je přímka o rovnici:
a) $(k - 3)x + (k^2 - 4)y + k^2 - 5k + 6 = 0$;
b) $(k^2 - 1)x + yk + k^2 + 1{,}5k - 1 = 0$ a) rovnoběžná s osou x, b) rovnoběžná s osou y, c) prochází počátkem?

***90.** Trojúhelníková parcela, ležící při cestách protínajících se kolmo, má být na nejdelší straně vymezena přímou hranicí, která prochází přes studni společnou se sousední parcelou. Určete rovnici té strany, je-li studna $M \equiv (40, 50)$ zaměřena v metrech vzhledem k cestám a má-li mít parcela tvar trojúhelníka rovnoramenného. Řešte též pro případ $M \equiv (30, 35)$, je-li obsah parcely 21 a, nebo $M \equiv (60, 50)$, přičemž součet stran při cestách parcely má být dlouhý 220 m

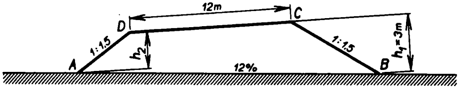
91. Přímky, na nichž leží strany trojúhelníka, mají rovnice: $c \equiv 12x + 5y - 32 = 0$, $b \equiv 4x - 3y + 8 = 0$, $a \equiv y + 8 = 0$. Určete: a) souřadnice vrcholů trojúhelníka $A \equiv b \,.\, c$, $B \equiv a \,.\, c$, $C \equiv a \,.\, b$; b) rovnice těžnic a souřadnice těžiště toho trojúhelníka; c) rovnice os vnitřních úhlů a souřadnice jejich průsečíku; d) velikost poloměru vepsané kružnice; e) velikosti výšek.



Obr. 91

***92.** Dva sklony nivelety silnice o stoupání 3 % a 5 % se mají zakroužit vertikálním obloukem o poloměru $R = 6\,000$ m. Vypočtěte délku tečen $AB = BC = t$. Viz obr. 91.

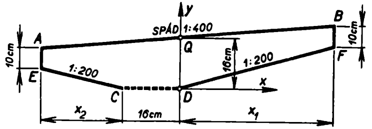
***93.** Na svahu se má zřídit železniční násep široký v koruně 12 m, se sklonem bočních stěn 1 : 1,5. Podélná osa náspu „běží" po vrstevnicích, takže základová spára v příčném řezu stoupá. Její stoupání je 12 %. Jaká je výška náspu h_2, je-li $h_1 = 3$ m. (Viz obr. 92.) Jaká je délka základu AB? Řešte i trigonometricky.



Obr. 92

***94.** Pro odvodnění vozovky dálnice byla zřízena ve štěrkové vrstvě dešťová vpust. Vypočtěte vodorovné vzdálenosti vpusti od krajů vozovky, je-li výška štěrku nad jejími krajními body $AE = BF = 10$ cm, 16 cm nad vpustí CD, přičemž příčný spád vozovky je 1 : 400, spád spodní vrstvy ke vpusti 1 : 200. (Počátek volte v bodě D; obr. 93.)

*95. V projektu navržená niveleta silnice se lomí v bodě C a přiléhající úseky mají sklon 1 : 160 a 1 : 220. Počáteční bod prvého úseku $A \equiv (360; 4{,}8)$ a koncový bod druhého úseku $B \equiv (680; 6{,}5)$ jsou přesně zaměřeny. Lomený úsek má být nahrazen vertikálním kruhem. K tomu je třeba znát souřadnice průsečíku obou směrů. Vypočtěte je.



Obr. 93

3. TRANSFORMACE SOUŘADNIC

96. Posuňte osy souřadnic tak, aby rovnice přímky, procházející bodem $A \equiv (4, -0{,}5)$, v soustavě souřadnic xOy svírající s osou x úhel 60°, měla tvar $y' = \sqrt{3}\,.\,x'$.

Řešení

V původní soustavě souřadnic má rovnice hledané přímky tvar $y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\,(x - 4)$, v nové soustavě $y' = \sqrt{3}x'$. Stačí tedy nahradit výraz $y - \frac{1}{2} = y'$, $x - 4 = x'$. Nový počátek souřadnic $x'O'y'$ je v původní soustavě souřadnic $O' \equiv \left(4, \frac{1}{2}\right)$. Směrnice přímky je stejná, neboť nová soustava souřadnic je rovnoběžná s osami souřadnic původních.

97. Určete rovnoběžné posunutí, kterým se rovnice přímky $y = \frac{1}{2}x + 5$ změní na rovnici $y' = \frac{1}{2}x' - 2$.

Řešení

Daná rovnice přímky má mít tvar $y' + 2 = \frac{1}{2}x'$. Srovnejme ji s tvarem daným, tj. $y - 5 = \frac{1}{2}x$. Potom musí $y - 5 = y' + 2$, tedy

$y = y' + 7$, $x = x' + 0$. Nový počátek bude mít proto souřadnice $O'_1 \equiv (0, 7)$.

Zkouška: $y' + 7 - 5 = \frac{1}{2}x'$, z toho $y' = \frac{1}{2}x' - 2$.

Jiné řešení: Rovnice $y' = \frac{1}{2}x' - 2$ se dá vyjádřit ve tvaru $y' = \frac{1}{2}(x' - 4)$. Porovnáme-li ji s rovnicí $y - 5 = \frac{1}{2}x$, dostaneme vztah $y' = y - 5$, $x = x' - 4$, neboli $y = y' + 5$, $x = x' - 4$, a proto $O'_2 \equiv (-4{,}5)$. Nebo $y' = \frac{1}{2}x' - 2$ přepíšeme ve tvaru $y' = \frac{1}{2}(x' + 6) - 5$, z toho $y' + 5 = \frac{1}{2}(x' + 6)$. Potom platí $y' + 5 = y - 5$, $x = x' + 6$, neboli $y = y' + 10$, $x = x' + 6$. Souřadnice nového počátku jsou tedy $O'_3 \equiv (6, 10)$, atd.

Závěr: Úloha má nekonečně mnoho řešení. Např. $O'_1 \equiv (0, 7)$ nebo $O'_2 \equiv (-4{,}5)$ nebo $O'_3 \equiv (6, 10)$ atd. O správnosti se přesvědčte zobrazením.

98. Zpaměti: Jaké souřadnice bude mít nový počátek soustavy souřadnic, jestliže rovnice přímky:

a) $y - 0{,}5 = 3(x - 4)$ přejde v rovnici $y' = 3x'$; b) $y + 1 = 3(x + 2)$ přejde v rovnici $y' = 3x'$; c) $y - 2x = 5$ přejde v rovnici $2y' - 4x' + \frac{5}{2} = 0$?

99. Zpaměti: Jak zní rovnice přímky procházející počátkem v nové soustavě souřadnic posunuté rovnoběžně k původní soustavě do počátku $P' \equiv (x_1, y_1)$? Řešte též pro: a) $y = 2x$, $P' \equiv (1, 3)$; b) $y = -\frac{1}{2}x$, $P' \equiv (-1, 2)$; c) $y = 0$, $P' \equiv (2, 3)$.

100. Body A, B, C jsou vrcholy trojúhelníka. Posuňte tyto body do nové soustavy souřadnic rovnoběžných se soustavou původní, jestliže nový počátek souřadnic je $O' \equiv (2, -3)$ a ukažte, že obsah daného trojúhelníka se posunutím nezměnil. Řešte pro $A \equiv (1, 0)$, $B \equiv (3, 4)$, $C \equiv (-1, 5)$. Totéž pro $A' \equiv (3, -3)$, $B' \equiv (5, 1)$, $C' \equiv (1, 2)$, $O'' \equiv (-2, 3)$ nebo pro $A'' \equiv (-1, 3)$, $B'' \equiv (1, 7)$, $C'' \equiv (-3, 8)$, $O''' \equiv (-1, -1)$.

101. Zpaměti: Jak bude znít rovnice kružnice, jejíž rovnice v původní soustavě souřadnic zní: a) $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 25$, jestliže počátek souřadnic posuneme rovnoběžně s osami do bodu $O' \equiv (5, -3)$; b) $x^2 + (y - 1)^2 = 4$; c) $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$?

102. Danou funkci zjednodušte tím, že posunete osy souřadnic do nového počátku $O' \equiv (m, n)$. Najděte souřadnice m, n a sestrojte graf daných funkcí v nové soustavě souřadnic: a) $y = (x - 2)^2 + 1$; b) $y - 3 = (x + 2)^2$; c) $y = x^2 - 4x + 5$; d) $y = 4x - x^2$.

103. Jakou rovnici bude mít křivka: a) $y = 2x^2 + 4x - 3$; b) $y = x^2 - 3x + 1$; c) $y = (x - 1)^2$ v nové soustavě souřadnic s počátkem v bodě $O' \equiv (-1, -5)$?

$\boxed{\textbf{104.}}$ Co je grafem funkce $xy - 2x - y + 8 = 0$?

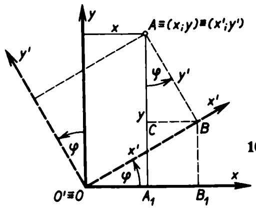
Řešení

Rovnici $xy + ax + by + c = 0$ je možno napsat ve tvaru $(x + b) \cdot (y + a) = ab - c$. Pro náš případ je $b = -1$, $a = -2$. Je tedy $(x - 1)(y - 2) = 2 - 8$. (O správnosti se přesvědčte roznásobením.)

Závěr: Posuneme-li počátek soustavy souřadnic do bodu $O' \equiv (1, 2)$, zní původní rovnice $x'y' = -6$, což je rovnice nepřímé úměrnosti a jejím grafem je rovnoosá hyperbola s větvemi ve druhém a čtvrtém kvadrantu.

105. Podobně jako v úloze 104 převeďte rovnice daných křivek na tvar $xy = k$ a pak zobrazte: a) $xy - 2x = 6$; b) $xy - x + 2y = 6$; c) $xy + 2x = 3y$; d) $xy + 2x + y + 5 = 0$; e) $xy + x - 3y - 1 = 0$.

106. Vyjádřete souvislost souřadnic bodu $A \equiv (x, y)$ ze soustavy souřadnic xOy v nové soustavě souřadnic $x'Oy'$, která vznikla otočením původní soustavy souřadnic kolem počátku O o úhel φ. [Návod: Podle obr. 94 platí: $x = OB_1 - A_1B_1$, $y = A_1C + AC = B_1B + AC$; $OB_1 = x' \cos \varphi$, $BC = A_1B_1 = y' \sin \varphi$. Z toho $x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$, $y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$.]



Obr. 94

107. Transformujte polohu rovnoběžných přímek $y = x + 2$, $y = x - 3$ otočením souřadných os kolem počátku o úhel: a) $30°$; b) $60°$; c) $\alpha°$. Dokažte, že po otočení jsou tyto přímky opět rovnoběžné.

108. Sestrojte křivku, jejíž rovnice je $xy = -4$. Jakou rovnici bude mít tato křivka, když otočíte soustavu souřadnic o úhel $\varphi = -45°$?

109. Otočením o úhel $\varphi = 45°$ zjednodušte rovnici: a) $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 32$; b) $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 32 = 0$; c) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8 = 0$. Narýsujte původní i nové osy souřadnic i grafy funkcí.

110. O jak velký úhel φ se musí otočit soustava souřadnic, aby rovnice: a) $x^2 - y^2 = a^2$ se změnila na rovnici $x'y' = \frac{a^2}{2}$; b) $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 8$ se změnila na rovnici $x'^2 + 2y'^2 = 4$?

4. PARABOLA

111. Podle definice paraboly odvoďte její rovnici, jestliže vrchol paraboly leží v počátku souřadnic a ohnisko ve vzdálenosti $\frac{p}{2}$ na ose x. Jaký význam má parametr $2p$?

112. Zpaměti: Určete rovnici paraboly, jejíž parametr je: a) $2p = 8$; b) $2p = a$, vrchol v počátku a její osa v ose x. Jaký je graf té paraboly pro $a < 0$?

113. Zpaměti: Jak zní rovnice paraboly s vrcholem v počátku, s osou v osách souřadnic: a) y; b) $-y$; c) $-x$, je-li její parametr $2p = a$?

$\boxed{\textbf{114.}}$ Napište rovnici paraboly s osou v ose x, jejíž vrchol leží v počátku a která prochází bodem $A \equiv (2, 2)$.

Řešení

Existuje-li žádaná parabola, má její rovnice tvar $y^2 = 2px$. Bod $A \equiv (2, 2)$ na této parabole leží a jeho souřadnice musí tedy dané rovnici vyhovovat. Proto $4 = 2p \cdot 2$, $p = 1$. Rovnice hledané paraboly tedy zní $y^2 = 2x$. Přesvědčte se o tom konstrukcí.

115. Napište rovnici paraboly, která prochází daným bodem, jejíž vrchol je v počátku a osa leží v ose x: a) $M \equiv (4, 2)$;
b) $N \equiv (6, 8)$;
c) $O \equiv (-4, -6)$;
d) $P \equiv (6, -4)$.

Sestrojte ji pomocí ohniskových vlastností.

116. Najděte rovnici paraboly procházející daným bodem, je-li její vrchol v počátku a osa v ose y: a) $A \equiv (2, 4)$; b) $B \equiv (1, 4)$; c) $C \equiv (2, 8)$; d) $D \equiv (-1, -2)$; e) $E \equiv (2, -8)$. Jak by zněly tyto rovnice, kdyby osa paraboly ležela v ose $+x$, popř. $-x$? [V případě d), e).]

117. Určete polohu ohniska, rovnici řídící přímky paraboly a narýsujte parabolu, jejíž rovnice je dána: a) $y^2 = 4x$; b) $y^2 = -2x$; c) $x^2 = 4y$; d) $x^2 = -4y$; e) $y^2 = -6x$; f) $x^2 = -10y$.

118. Vhodnou volbou nového počátku $P' \equiv (m, n)$ uveďte rovnici paraboly $y = ax^2 + bx + c$ na tvar $y' = ax'^2$, kde x', y' jsou nové souřadnice bodů paraboly. Napište vztah mezi původními souřadnicemi x, y a novými souřadnicemi x', y'. Kterým různým hodnotám x přísluší stejné hodnoty y?

119. Posuňte soustavu souřadnic do bodu $O' \equiv (3,2)$ a v ní určete rovnice parabol z úlohy 117.

$\boxed{\textbf{120.}}$ Napište rovnici paraboly s osou rovnoběžnou s osou y a procházející body $A \equiv (1, 2)$, $B \equiv (3, 1)$, $C \equiv (7, 5)$.

Řešení

Rovnice takové paraboly, pokud existuje, zní $(x - m)^2 = 2p(y - m)$, kde (m, n) jsou souřadnice vrcholu paraboly, p je její parametr. Souřadnice bodů A, B, C této rovnici musí vyhovovat, neboť na křivce leží. Dostaneme tak soustavu tří rovnic pro neznámé m, p, n. Pohodlnější je však upravit rovnici $(x - m)^2 = 2p(y - n)$ na tvar $x^2 - 2mx + m^2 = 2py - 2pm$. Potom $x^2 - 2mx - 2py + m^2 + 2pn = 0$, neboli $x^2 + Mx + Ny + L = 0$. I této rovnici musí vyhovovat souřadnice všech daných bodů. Dostaneme tedy:

$$1 + M + 2N + L = 0\,,$$
$$9 + 3M + N + L = 0\,,$$
$$49 + 7M + 5N + L = 0\,.$$

Jejich řešením dostaneme: $M = -6$, $N = -4$, $L = 13$. Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice $x^2 + Mx + Ny + L = 0$, máme $x^2 - 6x - 4y + 13 = 0$, neboli $(x - 3)^2 = 4y - 13 + 9$, $(x - 3)^2 = 4(y - 1)$. Odtud snadno určíme souřadnice vrcholu paraboly, velikost parametru i směr osy paraboly. $V \equiv (3, 1)$, $2p = 4$ a osa paraboly je rovnoběžná s poloosou $+\,y$.

121. Zpaměti určete souřadnice vrcholu, velikost parametru a směr osy paraboly:

a) $(y - 1)^2 = 2(x - 1)$; b) $(y - 3)^2 = -4(x + 5)$;
c) $(x - 1)^2 = 9(y - 2)$; d) $(x + 4)^2 = 16(y + 2)$;
e) $(x + 3)^2 = 8(y - 2)$.

Zjednodušte jejich tvar transformací souřadnic a načrtněte jejich graf.

122. Určete souřadnice vrcholu a velikost parametru paraboly:

a) $y^2 - 6y - 12x + 57 = 0$; b) $x^2 + 6x - 9y = 0$;
c) $4y^2 - 20y - 24x - 47 = 0$; d) $y = \frac{1}{5}x^2 - 2x + 12\,.$

123. Jaké jsou souřadnice vrcholu a ohniska dané paraboly, jak velký je její parametr a jakou rovnici má její řídící přímka, je-li rovnice paraboly:
a) $x^2 - 8x - 3y + 10 = 0$; b) $2y^2 - 11x + 12y + 73 = 0$;
c) $\frac{x^2}{3} + y - x + 1 = 0$; d) $y = 3x - 2x^2 - 6$;
e) $y = -2x^2 + 8x - 9$; f) $y = -2x^2 - 20x - 50$?

124. Napište rovnici paraboly s osou rovnoběžnou s osou x a procházející body: $A \equiv (-5,3)$, $B \equiv (1,9)$, $C \equiv (-3, 5; 6)$; b) $M \equiv (0,0)$, $N \equiv (4,5; 9)$; $P \equiv (12, -6)$; c) $R \equiv (3,3)$, $S \equiv (4,6)$, $T \equiv (0,12)$.

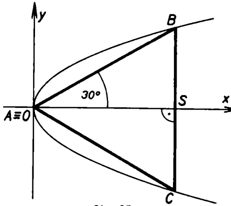
125. Napište rovnici paraboly s vrcholem $V \equiv (3, -7)$, jejíž řídící přímka má rovnici $x = 5$. Určete souřadnice průsečíků této paraboly s osami souřadnic.

126. Určete rovnici paraboly procházející bodem $A \equiv (-5, 4)$, jestliže rovnice její vrcholové tečny je $y - 3 = 0$ a osa paraboly má rovnici $x + 7 = 0$.

127. Do paraboly $y^2 = 4ax, a > 0$, jsou umístěny vrcholy rovnostranného trojúhelníka tak, že jeho vrchol A splývá s vrcholem paraboly a protilehlá strana BC je kolmá k ose x. Určete: a) souřadnice vrcholů tohoto trojúhelníka; b) velikost strany a obsah trojúhelníka.

Řešení (obr. 95)

Přímka AB má rovnici $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. Bod B je v průsečíku přímky $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ a dané paraboly $y^2 = 4ax$. Souřadnice průsečíku obou čar dostaneme řešením jejich rovnic. Tedy $\frac{1}{3}x^2 = 4ax$, z toho $x(x - 12a) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 12a$. Druhé souřadnice průsečíků jsou: $y_1 = 0$, $y_2 = \pm 4a\sqrt{3}$.



Obr. 95

Souřadnice vrcholů hledaného rovnostranného trojúhelníka tedy jsou: $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (12a, 4a\sqrt{3})$, $C \equiv (12a, -4a\sqrt{3})$. Strana tohoto trojúhelníka $AB = s = \frac{y_B}{\sin 30^\circ} = 2y_B = 2 . 4a\sqrt{3} = 8a\sqrt{3}$, $P = 48a^2 \sqrt{3}$.

128. Vrchol rovnostranného trojúhelníka leží ve vrcholu paraboly:
a) $y^2 = 6x$; b) $y^2 = 2x$.

Určete souřadnice ostatních vrcholů tohoto trojúhelníka, leží-li též na dané parabole.

129. Tři vrcholy čtverce o straně $a = 6\sqrt{2}$ leží na parabole o vrcholu v počátku, s osou v ose x, přičemž jeden z vrcholů je ve vrcholu paraboly. Určete její rovnici a narýsujte ji.

130. Tři vrcholy čtverce leží na parabole $y^2 = 8x$ tak, že vrchol A splývá s vrcholem paraboly a protilehlý vrchol C leží na ose x. Určete souřadnice vrcholů tohoto čtverce.

131. V parabolickém automobilovém reflektoru má sklo průměr 20 cm, přičemž hloubka reflektoru je 15 cm. Určete polohu žhavicí spirály, je-li reflektor přepjat na velká světla (na dálku).
[Návod: Světelný zdroj musí být v ohnisku.]

***132.** Pro parabolický zrcadlový dalekohled o průměru zrcadla 17,5 cm má být vybroušena zrcadlová plocha s ohniskovou vzdáleností 100 cm. Určete, oč je parabolické zrcadlo uprostřed zbroušeno víc než na krajích.
[Návod: Udaná ohnisková vzdálenost umožňuje určit rovnici paraboly.]

133. Ve sluneční peci postavené v Číně v provincii Kansu je prý uvařen hrnec rýže během dvaceti minut. Jak daleko od vrcholu parabolického zrcadla na ose musí být zahřívaný předmět, má-li osový řez tvar paraboly o rovnici $y^2 = 240x$?

***134.** Dokažte, že všechny pravoúhlé trojúhelníky s přeponami kolmými k ose x a s vrcholy na parabole $y^2 = 2px$ mají shodné výšky.
[Návod: Zvolte si na parabole bod $A \equiv (x_1, y_1)$ a napište rovnici kružnice k se středem $S \equiv (x_1, 0)$ a poloměru $r = y_1$. Určete souřadnice průsečíku této kružnice s parabolou a odtud velikost výšky v. Její velikost nebude závislá na volbě bodu A.]

135. Těleso bylo vrženo šikmo vzhůru rychlostí c ve výškovém úhlu α. Určete rovnici jeho dráhy bez ohledu na odpor vzduchu.
$\left[\text{Návod: } y = ct \sin\alpha - \frac{1}{2} gt^2,\ x = c\,.\,t\cos\alpha.\ \text{Ověřte podle náčrtku.}\right]$

136. Bod M má souřadnice $x_1 = at$, $y_1 = at^2$, kde $a \neq 0$ a t je parametr. Dokažte, že tyto parametrické rovnice vyjadřují rovnici paraboly.

137. Určete souřadnice průsečíků dané paraboly s přímkou:
a) $y^2 = 2x,\ x = t,\ y = 2t$; b) $x^2 = 4y,\ x = 1 - t,\ y = 2 + t$;
c) $(y - 2)^2 = 2x,\ x = 1 + t,\ y = 2 - t$;
d) $x^2 = 4(y - 1),\ x = 3 + t,\ y = 2 - 3t$;
e) $y^2 = 12x,\ 2x + y - 12 = 0$;
f) $y^2 = 12x - 24,\ 2x + y - 4 = 0$.

138. Přímka má směrnici $k = -\frac{5}{7}$ a prochází vrcholem křivky $x + y^2 = y + 2$. Napište její rovnici a souřadnice průsečíků obou čar.

139. Najděte souřadnice průsečíků dvou parabol:
a) $y^2 = 6x$, $y^2 = 12x - 24$; b) $y^2 = 4(x + 5)$, $y^2 = -3(x - 2)$.

***140.** Napište rovnici přímky, která prochází vrcholem křivky $2x^2 + y - x = 2$ a s přímkou $x - 3y - 6 = 0$ svírá úhel 45°. Určete souřadnice průsečíků s danou parabolou.

141. Jakou rovnici má tečna paraboly $y^2 = 9x$ rovnoběžná s přímkou, jejíž rovnice je $5x - 3y - 2 = 0$?

Řešení

Předpokládejme, že taková tečna existuje. Bod dotyku tečny na parabole nechť je $T \equiv (x_1, y_1)$. Rovnice tečny paraboly v tomto bodě zní $yy_1 = p(x + x_1)$, kde $p = \frac{9}{2}$, neboť z rovnice $y^2 = 9x$ vyplývá, že $2p = 9$. Její směrnice, tj. $\frac{p}{y_1}$, musí být rovna směrnici přímky dané. Proto $\frac{p}{y_1} = \frac{3}{5}$, $\frac{\frac{9}{2}}{y_1} = \frac{5}{3}$, $y_1 = \frac{27}{10}$. Z rovnice $y^2 = 9x$ dostaneme $\left(\frac{27}{10}\right)^2 = 9x_1$, $x_1 = \frac{81}{100}$. Souřadnice dotykového bodu T tedy jsou $T \equiv (0{,}81; 2{,}7)$, rovnice tečny $6y = 10x + 8{,}1$.

142. Napište rovnice tečen vedených z bodu P k parabole:
a) $P \equiv (-3{,}1)$, $y^2 = 8x$; b) $P \equiv (-3; 1{,}5)$, $y^2 = 6x$;
c) $P \equiv (3{,}0)$, $x^2 = 9y$; d) $P \equiv (-6, -2)$, $y^2 = 16x$;
e) $P \equiv (-4, 8)$, $y^2 = 9x$.

***143.** Je dána rovnice paraboly a bod M. Určete rovnice tečen vedených z bodu M ke křivce: a) $y^2 - 7x + 6y + 16 = 0$; $M \equiv (-7, -8)$;
b) $y^2 - 8x - 8y + 24 = 0$, $M \equiv (-5, 8)$.
[Návod: Vhodnou transformací souřadnic uveďte rovnice na tvar $y'^2 = Ax'$.]

144. Přímka o rovnici $7x - 6y + 21 = 0$ je tečnou paraboly s vrcholem v počátku a osou v ose $+x$. Jak zní rovnice té paraboly?

145. Napište rovnici tečny paraboly $x^2 = 12y$, která svírá s kladným směrem osy x úhel: a) 45°; b) 60°; c) 30°.

***146.** Dokažte, že: a) Středy S všech rovnoběžných tětiv MN o směrnici k paraboly, jejíž rovnice je $y = ax^2$, leží na přímce r rovnoběžné s osou y.

Přímka r se nazývá průměr sdružený se směrem tětiv MN. Najděte rovnici tohoto průměru. b) Na průměru r leží také dotykový bod H tečny t, která je rovnoběžná s přímkou MN. c) Tečny t_1, t_2 v bodech M, N paraboly se protínají v bodě R na průměru r. Přitom platí $HR = HS$.

***147.** Který průměr paraboly o rovnici $6y = x^2$ půlí tětivy rovnoběžné s přímkou, jejíž rovnice je $2x - y = 0$?

***148.** Které tětivy paraboly o rovnici $6y = x^2$ jsou půleny průměrem $x + 3 = 0$?

***149.** Sečna $y = tx$ vedená vrcholem paraboly $V \equiv (0, 0)$, jejíž rovnice zní $y = \frac{1}{h} x^2$, protne parabolu ještě v bodě $M \equiv (ht, ht^2)$, kde $h \neq 0$. Každé hodnotě parametru t odpovídá jediný bod paraboly a obráceně, každému bodu paraboly odpovídá jediná hodnota parametru t. Odvoďte tyto výsledky:

a) Sečna (t_1), (t_2) paraboly má rovnici $y = (t_1 + t_2)x - ht_1t_2$.

b) Tečna v bodě (t) paraboly má rovnici $y = 2tx - ht^2$. Její směrnice je $2t$.

c) Určete podmínku mezi hodnotami k, q, h, která musí být splněna, aby přímka $y = kx + q$ byla α) tečna, β) sečna, γ) nesečna dané paraboly.

150. Průsečík tečen ve dvou bodech (t_1), (t_2) paraboly z předešlé úlohy je bod $Q \equiv \left(\frac{h}{2}(t_1 + t_2), ht_1t_2\right)$. Je-li S střed tětivy (t_1) (t_2), udává přímka SQ směr osy paraboly. Dokažte, že dvě kolmé tečny paraboly se protnou v bodě Q, který leží na řídící přímce.

151. Určete velikost úseče paraboly $y^2 = 8x$ vymezené na ní přímkou $2x = 9$.

Řešení

Obsah úseče paraboly mezi křivkou, osou x a kolmicí k ose x v bodě paraboly $P \equiv (x_1, y_1)$ je dán vztahem $P_1 = \frac{2}{3} x_1 y_1$. [Viz oddíl Integrální počet, str. 320, př. 148.] Souřadnice průsečíku dané přímky s parabolou dostaneme řešením obou rovnic $y^2 = 8 \cdot 4{,}5 = 36$; $y_{1,2} = \pm 6$, $x_1 = 4{,}5$. Proto hledaný obsah úseče omezený osou x, druhou souřadnicí $y = 6$ a křivkou $y^2 = 8x$ je 36 j^2. Obsah celé úseče paraboly je $P = \frac{4}{3} x_1 \cdot y_1$. V našem případě tedy $P = 72$ j^2.

152. Pomocí vzorce uvedeného v předchozí úloze odvoďte vzorec pro obsah úseče paraboly omezené obloukem křivky $y^2 = 2px$ a tětivou, jejíž společné body s danou křivkou jsou $P_1 \equiv (x_1, y_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2)$.

$\left[\text{Návod: Použijte nákresu a snažte se dojít k výsledku } P = \dfrac{(y_2 - y_1)^3}{12p}.\right]$

153. Najděte obsah úseče paraboly: a) $y^2 = 6x$; b) $y^2 = 9x$; c) $y^2 = 2px$ omezené křivkou, osou x a přímkou vedenou ohniskem kolmo k ose paraboly.

154. Jaký obsah má úseč paraboly, která je vymezená křivkou a přímkou, jejichž rovnice jsou dány:
a) $y^2 = 12x$, $6x + y - 24 = 0$; b) $y^2 = 8x$, $2x - 3y + 8 = 0$;
c) $x^2 = 8y$, $x + 4y - 12 = 0$?

155. Jaký obsah má rovinný útvar vymezený parabolou $y^2 = 12x$ a dvěma rovnoběžkami, jejichž směrnice jsou $k = -2$ a které vytínají na ose y úseky velikosti 12 j a $\frac{80}{3}$ j?

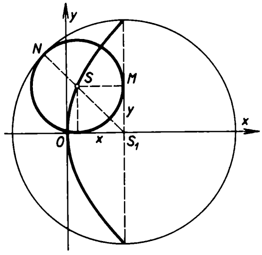
156. Určete velikost plochy omezené parabolou o rovnici $x^2 - 10y = 0$ a tečnami vedenými k této parabole z bodu $M \equiv (-2{,}5; -5)$.

157. Jaká je množina středů kružnic, dotýkajících se dané kružnice o rovnici $(x - r)^2 + y^2 = r^2$ a osy y?

$\boxed{\textbf{158.}}$ V kružnici, jejíž rovnice je $(x - 10)^2 + y^2 = 400$, stanovte množinu středů kružnic dotýkajících se zevnitř dané kružnice a jejího průměru, rovnoběžného s osou y, zleva.

Řešení (obr. 96)

Předpokládejme, že takový střed $S \equiv (x, y)$ aspoň jeden existuje. Potom, jak je patrno z náčrtu, $SM = SN$, $SM = S_1N - S_1S$. Protože $SM = 10 - x$, $S_1N = 20$, je $S_1S = \sqrt{(10 - x)^2 + y^2}$. Z toho $10 - x = 20 - \sqrt{(10 - x)^2 + y^2}$, $y^2 = 40x$. Hledaná množina je tedy parabola (s vrcholem v počátku a ohniskem v bodě $S_1 \equiv (10, 0)$) procházející koncovými body svislého průměru.



Obr. 96

***159.** Najděte množinu bodů, z nichž je vidět parabolu o rovnici $y^2 = 2px$ pod pravým úhlem.

160. Najděte množinu středů sečen vedených ohniskem paraboly $y^2 = 4ax$.

161. Odvoďte množinu středů tětiv paraboly $y^2 = 2px$ rovnoběžných s přímkou $x = kx + q$. [Viz též příklad 149.]

162. Co je množinou pat kolmic spuštěných z ohniska paraboly $y^2 = 2px$ na její normály?

163. Co je množinou průsečíků normál paraboly, které jsou k sobě kolmé?

***164.** Kosočtverec má střed na parabole $y^2 = 2px$, jeden vrchol ve vrcholu paraboly a stranu v ose x. Co je množinou ostatních dvou vrcholů?

5. KRUŽNICE

Úlohu 165 až 171 řešte zpaměti.

165. Jak zní rovnice kružnice s poloměrem r, jejíž střed leží v počátku souřadnic: a) ve tvaru osovém; b) ve tvaru parametrickém?

166. Kružnice se středem v počátku se dotýká přímky:
a) $3x - 4y - 10 = 0$; b) $5x + 4y - 16 = 0$. Určete její rovnici ve tvaru: α) osovém; β) ve tvaru parametrickém.

167. Kružnice, jejíž poloměr je $r = 5$ cm, prochází počátkem a má střed na ose x. Určete její rovnici.

168. Určete rovnici kružnice se středem $S \equiv (O, r)$ o poloměru r.

169. Jak musíte posunout osy souřadnic, aby kružnice z úlohy:
a) 167; b) 168 měla rovnici $x^2 + y^2 = r^2$?

170. Určete ve středovém tvaru rovnici kružnice, jejíž střed je
a) $S \equiv (5, 3)$ a poloměr $r = 6$ cm;
b) $S \equiv (-1, -3)$ a poloměr $r = 5$ cm;
c) $S \equiv (m, n)$ a poloměr r.

171. Jakou parametrickou rovnici má kružnice z úlohy 170c)? Přeměňte ji na tvar středový.

172. Kružnice k prochází dvěma body: $A \equiv (5, 4)$, $B \equiv (7, 0)$ a má střed na ose x. Určete její rovnici.

Řešení

a) *Řešení parametrické*

Střed hledané kružnice leží v průsečíku osy úsečky AB s osou x. Rovnice přímky AB zní: $x = 5 + 2t$, $y = 4 - 4t$. Tato přímka je rovnoběžná s vektorem $(2, -4)$. Vektor kolmý na tento směr je $(4, 2)$. Rovnice symetrály úsečky AB zní: $x = 6 + 4t$, $y = 2 + 2t$, neboť půlicí bod úsečky AB má souřadnice $S \equiv (6, 2)$. Bod na ose x má druhou souřadnici rovnou nule, a tedy platí $0 = 2 + 2t$, $t = -1$ a $x = 6 + 4(-1) = 2$. Střed hledané kružnice je $S \equiv (2, 0)$, $r = \sqrt{(5 - 2)^2 + 4^2} = 5$ a rovnice $(x - 2)^2 + y^2 = 25$.

b) *Řešení neparametrické*

Směrnice kolmice na směr přímky AB je $k' = -\dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}$; rovnice symetrály úsečky AB pak je $y - 2 = \dfrac{1}{2}(x - 6)$, $x - 2y - 2 = 0$. Pro $y = 0$ je $x = 2$, čili $S \equiv (2, 0)$. Potom $r = 5$ a rovnice hledané kružnice $(x - 2)^2 + y^2 = 25$ jako v řešení a).

173. Určete souřadnice průsečíků kružnic o poloměru r a středu S s osami souřadnic:
a) $S \equiv (2, -1)$, $r = 3$; b) $S \equiv (5, 2)$, $r = 7$;
c) $S \equiv (-1, 5; -4)$, $r = 2{,}5$.

174. Jsou dány body A, B. Určete rovnici kružnice, jejíž průměr je úsečka AB:
a) $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (-4, 6)$;
b) $A \equiv (-3, 0)$, $B \equiv (3, 6)$.

175. Sestrojte kružnici: a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$;
b) $x^2 + y^2 - 8x = 0$; c) $x^2 + y^2 + 3x - 6y - 6 = 0$;
d) $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$; e) $x^2 + y^2 + 5x - 7y + 2{,}5 = 0$.
[Návod: Doplňte na čtverec. a) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4 + 1 + 4$.]

176. Určete střed a poloměr kružnice: a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$;
b) $x^2 + y^2 + 6x + 6y - 19 = 0$; c) $2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y - 33 = 0$;
d) $A(x^2 + y^2) + B(x + y) + C = 0$.

$\boxed{\textbf{177.}}$ Určete rovnici kružnice opsané trojúhelníku, jehož vrcholy jsou: $A \equiv (2, 1)$, $B \equiv (1, 4)$, $C \equiv (6, 9)$.

Řešení

Rovnice hledané kružnice v obecném tvaru zní
$x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0$. Souřadnice daných bodů musí této rovnici vyhovovat, neboť na kružnici leží. Platí tedy:

$$\begin{aligned} 2M + N + L &= -5\,, \\ M + 4N + L &= -17\,, \\ 6M + 9N + L &= -117\,. \end{aligned}$$

Jejich řešením dostaneme $M = -12$, $N = -8$, $L = 27$. Rovnice hledané kružnice tedy zní $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 27 = 0$, tj.:
$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 25$. Jiné geometrické řešení by bylo jako v úloze 29.

178. Určete rovnici a střed kružnice opsané trojúhelníku:
a) $A \equiv (3, 0)$, $B \equiv (0, -3)$, $C \equiv (-3, 3)$;
b) $A \equiv (-1, 3)$, $B \equiv (0, 2)$, $C \equiv (1, -1)$;
c) $A \equiv (-12, 8)$, $B \equiv (-3, -5)$, $C \equiv (5, -9)$;
d) $A \equiv (3, 0)$, $B \equiv (2, -2)$, $C \equiv (6, 6)$;
e) $A \equiv (2, -1)$, $B \equiv (3, 6)$, $C \equiv (-1, -2)$.

179. Určete podmínku pro M, N, L, je-li rovnice $x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0$ rovnice kružnice, která: a) prochází počátkem; b) dotýká se osy x; c) dotýká se osy y.

180. Pro které hodnoty prostého členu L je křivka:
a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + L = 0$; b) $x^2 + y^2 + 2Mx + 2Ny + L = 0$ kružnice?

181. Napište rovnici kružnice opsané trojúhelníku, jehož strany mají rovnice:
a) $2x + y + 3 = 0$, $x + 2y = 3$, $x = y + 3$;
b) $4x - 3y + 8 = 0$, $y + 8 = 0$, $12x + 5y - 32 = 0$;
c) $x + 7y - 56 = 0$, $x - 3y + 14 = 0$, $2x - y + 8 = 0$.

182. Určete souřadnice průsečíků čar: a) $x^2 + y^2 = 25$, $x - 3y + 9 = 0$;
b) $x^2 + y^2 = 25$, $x + 2y - 10 = 0$;
c) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 25 = 0$, $x - 7y + 36 = 0$;
d) $(x - 2)^2 + (y - 9)^2 - 10 = 0$, $2x - y = 0$. Zobrazte graficky.

183. Napište rovnici kružnice, která: a) prochází bodem $A \equiv (4, 4)$ a průsečíky kružnice $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ s přímkou $y = -x$;
b) má střed $S \equiv (x_1, -1{,}5)$ a protíná přímku o rovnici $x = 2y + 6$ v bodech $A \equiv (2, ?)$, $B \equiv (-4, ?)$. Zobrazte graficky.

184. Narýsujte kružnici procházející průsečíky kružnic:
a) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 13x - 9y + 30 = 0$ a bodem $P \equiv (-1, 2)$; b) $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 32 = 0$ a bodem $A \equiv (-3, -3)$.

185. Určete rovnici kružnice jdoucí body: a) $A \equiv (1, 3)$, $B \equiv (-3, 1)$ a mající střed na dané přímce $2x - y - 8 = 0$; b) $A \equiv (2, -3)$, $B \equiv (-6, 1)$, $5x - 4y + 2 = 0$; c) $A \equiv (6, 9)$, se středem na přímce $y = 6 - \frac{1}{3}x$, je-li její poloměr $r = 5$.

186. Kružnice prochází počátkem soustavy souřadnic a vytíná na osách úseky:
a) $p = 5$, $q = -3$; b) $p = -4$, $q = 2$; c) $p = 6$, $q = 8$; d) $p = -7$, $q = -1$. Určete rovnici této kružnice.

187. Napište rovnici kružnice procházející bodem $M \equiv (9{,}2)$ a dotýkající se obou os souřadnic. Řešte analyticky i konstruktivně.

***188.** Dvě cesty se protínají v úhlu 80°. Mají se na sebe napojit kruhovým obloukem o poloměru 10 m. Napište rovnici kružnice, jejíž část je oblouk. Jak bude oblouk dlouhý? O kolik metrů se silnice zkrátí?

***189.** Uvnitř kružnice $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ leží bod $P \equiv \left(\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}\right)$. Tímto bodem veďte sečnu, která danou kružnici protíná v bodech A, B tak, že je $PA = PB$. Určete rovnici této sečny.

190. Kružnice prochází ohniskem, vrcholem a průsečíkem křivky $x^2 + 8x + 12 = 4y$ s osou y. Napište její rovnici.

191. Určete rovnice tečen vedených ke kružnici o poloměru $r = 5$, se středem
a) v počátku, je-li bod dotyku $T \equiv (3, ?)$;
b) v bodě $S \equiv (2, -1)$, je-li bod dotyku $T \equiv (6, ?)$.

Řešení

a) Rovnice tečny kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ v bodě dotyku $T \equiv (x_1, y_1)$ zní $xx_1 + yy_1 = r^2 \ldots\ldots (1)$, rovnice tečny kružnice $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ v jejím bodě dotyku $T \equiv (x_1, y_1)$ zní $(x_1 - m)(x - m) + (y_1 - n)(y - n) = r^2 \ldots\ldots (2)$.

Druhou souřadnici dotykového bodu T dostaneme z rovnice kružnice, na níž tento bod leží: $y_1 = \pm \sqrt{r^2 - x^2} = \pm 4$. Úloze tedy vyhovují dva body dotyku: $T_1 \equiv (3, 4)$, $T_2 \equiv (3, -4)$, a proto i dvě tečny: $t_1 \equiv 3x + 4y - 25 = 0$, $t_2 \equiv 3x - 4y - 25 = 0$.

b) Rovnice tečny v tomto případě dostaneme dosazením příslušných hodnot do vzorce (2).

$(6 - 2)(x - 2) + (y_1 + 1)(y + 1) = 25$, kde y_1 je druhá souřadnice bodu dotyku T. Získáme ji z rovnice kružnice, na níž bod T leží, tj. $(x_1 - 2)^2 + (y_1 + 1)^2 = 25$, $(6 - 2)^2 + (y_1 + 1)^2 = 25$, $y_1 = 2$, $y_2 = -4$. Po dosazení do rovnice (2) máme $t_1 \equiv 3y + 4x - 30 = 0$, $t_2 \equiv 4x - 3y - 36 = 0$. t_1, t_2 jsou rovnice hledaných tečen.

192. Určete rovnici tečny v daném bodě kružnice: a) $x^2 + y^2 = 16$, $T \equiv (2, 4; y_1 < 0)$; b) $x^2 + y^2 = 10$, $T \equiv (1, y_1 < 0)$;
c) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$, $T \equiv (-1, y_1 < 0)$;
d) $x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0$, $T \equiv (3, y_1 > 0)$.

193. Určete rovnice tečen k dané kružnici z daného bodu:
a) $x^2 + y^2 = 36$, $P \equiv (0,10)$; b) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$, $P \equiv (0, 0)$; c) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, $P \equiv (9, 2)$.
Určete úhel těchto tečen.

194. Vypočítejte rovnici kružnice dotýkající se osy x a osy prvního kvadrantu v bodě $T \equiv (?, 4)$.

195. Která kružnice se středem v daném bodě se dotýká dané přímky:
a) $M \equiv (-4, 0)$, $x - y = 0$; b) $M \equiv (-4, 1)$, $y = 2x$;
c) $M \equiv (1, 2)$, $8x + 15y + 13 = 0$.

196. Určete číslo a tak, aby rovnice $ax + 4y - 25 = 0$ byla rovnicí tečny křivky $x^2 + y^2 = 25$.

Řešení

Má-li být daná lineární rovnice tečnou kružnice, musí mít střed kružnice od té přímky vzdálenost rovnou poloměru kružnice. Vzdálenost bodu $S \equiv (m, n)$ od dané přímky je $v = \left| \dfrac{am + 4n - 25}{\pm \sqrt{a^2 + 16}} \right|$.
V našem případě jsou souřadnice m, n, nulové a $v = r = 5$.
Platí tedy $\left| \dfrac{-25}{-\sqrt{a^2 + 16}} \right| = 5$; $5 = \sqrt{a^2 + 16}$, $a = \pm 3$.
Číslo a může mít tedy dvě hodnoty: $a = 3$ nebo $a = -3$. Zkouška správnosti: Přímka $\pm 3x + 4y - 25 = 0$ bude tečna ke kružnici $x^2 + y^2 = 25$, jestliže ji protíná v jediném bodě, tj. dané kružnice se dotýká. Souřadnice bodu dotyku dostaneme řešením rovnic obou čar.

$$x = \frac{25 - 4y}{\pm 3}, \; x^2 + y^2 = 25; \; \left(\frac{25 - 4y}{\pm 3}\right)^2 + y^2 = 25, \; y_{1,2} = 4;$$

$x_{1,2} = \pm 3$.
Na přímce existuje tedy jediný bod společný s kružnicí.

197. Určete nejmenší vzdálenost skladiště N od železniční trati zahýbající ve tvaru kruhového oblouku, jehož vrchlík je obrácen k N.
a) $N \equiv (8, 5)$, $x^2 + y^2 = 16$;
*b) $N \equiv (3, 3)$, $x^2 + y^2 + 6x + 12y - 4 = 0$.
[Pozn.: Souřadnice jsou udány v km.]

198. V rovnici $4x - 2y - c = 0$ určete koeficient c tak, aby daná rovnice přímky byla rovnicí tečny kružnice $x^2 + y^2 = 36$.

199. V rovnici $y - x - c = 0$ určete c tak, aby tato lineární rovnice byla tečnou křivky $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 45 = 0$.

200. Ke kružnici: a) $x^2 + y^2 = 4$ veďte tečny rovnoběžné s přímkou $3y - 4x - 1 = 0$; b) $x^2 + y^2 + 10x - 6y = 2$ veďte tečny rovnoběžné s přímkou $2x - y - 7 = 0$.

***201.** Určete velikost zorného úhlu, pod nímž je vidět kružnice: a) $x^2 + y^2 - 3x - 4y - 6 = 0$ z bodu $A \equiv (6{,}4; 2)$;
b) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ z bodu $P \equiv (2, 9)$;
c) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$ z bodu $P \equiv (-3, 0)$;
d) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ z bodů $P \equiv (2{,}5)$.

Napište rovnice tečen z daných bodů.
[Návod: Zorný úhel, pod kterým je vidět křivku, je úhel tečen vedených z daného bodu ke křivce.]

*202. Pod jakým úhlem se protínají křivky: a) $x^2 + y^2 = 25$, $3x^2 + 3y^2 - 50x + 75 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, $x^2 + y^2 - 18x - 4y + 60 = 0$; c) $y^2 = 12x$, $x^2 + y^2 - 6x - 27 = 0$?

*203. Určete velikost úhlu, který svírá spojnice středu křivky $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 1 = 0$ s vrcholem křivky $9y^2 - 18x - 24y + 16 = 0$ s přímkou procházející body $A \equiv (-1, 7)$, $B \equiv \left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

204. Ve kterých bodech a pod jakým úhlem se protínají křivky $x^2 + y^2 = r^2$, $y = ax^2$, kde $a = 2$, $r = \sqrt{5}$?

*205. Určete společné tečny dvou daných křivek: a) $x^2 + y^2 = 36$, $(x-8)^2 + (y-4)^2 = 4$; b) $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$; d) $y^2 = 9x$, $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$.

206. Která kružnice procházející bodem $A \equiv (6, 1)$ a mající střed na přímce $9x + 4y - 47 = 0$ protíná v pravém úhlu kružnici $x^2 + y^2 - 2x + 5y - 5 = 0$?

207. V bodech $A \equiv (3, 4)$, $B \equiv (-13, -8)$, $C \equiv (12, -8)$ mají středy kružnice, které se vzájemně dotýkají vně. Určete jejich rovnice. Řešte i planimetricky.

208. Dokažte analyticky, že ze všech rovnoramenných trojúhelníků, které mají společnou vepsanou kružnici o poloměru r, má nejmenší obsah trojúhelník rovnostranný. [Návod: Zvolte počátek soustavy souřadnic ve středu kružnice, $C \equiv (O, h)$a dokažte, že obsah trojúhelníka je větší než $3\sqrt{3} \cdot r^2$, když $3\sqrt{3}\,r^2$ je obsah trojúhelníka rovnostranného. Dokažte nerovnost $\dfrac{r(h+r)^2}{\sqrt{-r^2 + h^2}} \geqq 3\sqrt{3}\,r^2$.]

209. Jakou množinu bodů vytvoří úsečka $MA = a$, která bodem M probíhá kružnici $x^2 + y^2 = a^2$ a zůstává trvale rovnoběžná s osou x?

210. Určete množinu všech kružnic, které se dotýkají: a) jedné osy souřadnic v počátku; b) obou záporných poloos soustavy souřadnic; c) os prvého a druhého kvadrantu.

*211. Co je množinou bodů, jejichž vzdálenosti: a) od krajních bodů úsečky $c = 6$ jsou v poměru $5 : 4$; b) od bodů $A \equiv (5, 7)$, $B \equiv (-4, -5)$ jsou v poměru $3 : 2$; c) od bodů $A \equiv (-a, 0)$, $B \equiv (a, 0)$ mají poměr konstantní?

***212.** Jsou dány body $A \equiv (-2, 0)$, $B \equiv (1, 0)$. Určete množinu bodů, pro něž platí, že úhel AMO je roven úhlu OMB, kde O je počátek souřadnic, M je bod hledané množiny.

Řešení

$M \equiv (x, y)$, směrnice AM nechť je $k_1 = \dfrac{y}{x+2}$, směrnice OM je $k_2 = \dfrac{y}{x}$ a směrnice BM je $k_3 = \dfrac{y}{x-1}$. Pro úhel směrů AM, OM platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{y}{x+2} - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{y^2}{x^2+2x}} = \frac{-2y}{x^2+2x+y^2}\,.$$

Pro úhel směrů OM, BM platí $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x-1}}{1 + \dfrac{y^2}{x^2-x}} = \dfrac{-y}{x^2-x+y^2}\,.$

Protože $\sphericalangle\, OMB = \sphericalangle\, AMO$, platí

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, a tedy $\dfrac{2y}{x^2+2x+y^2} = \dfrac{y}{x^2-x+y^2}$. Z toho a) $x^2 + y^2 - 4x = 0$; b) $y \neq 0$, $x \neq -2$, $x \neq 1$.

***213.** Na kružnici $x^2 + y^2 = 100$ určete bod A tak, aby $\sphericalangle\, OAM = \sphericalangle\, OAN$, jestliže $M \equiv (10, 0)$, $N \equiv (-17, 0)$.

***214.** Určete množinu vrcholů trojúhelníků, jež mají společnou základnu $a = 3$ a při protějším vrcholu stejný úhel $\alpha = 45°$.

***215.** Určete množinu bodů, z nichž se jeví kružnice $x^2 + y^2 = 36$ a $(x-12)^2 + y^2 = 9$ ve stejných zorných úhlech.

***216.** Najděte množinu všech středů tětiv kružnice $x^2 + y^2 = r^2$, které procházejí bodem $M \equiv (c, 0)$, je-li $0 < c < r$.

217. Jaká je množina středů všech poloh úsečky AB, jejíž délka je c, a která svými koncovými body klouže po osách prvého a druhého kvadrantu?

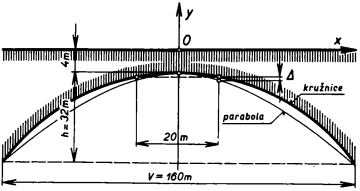
218. Vyšetřte množinu středů kružnic, které se dotýkají přímky $x = 0$ a vně kružnice $(x-m)^2 + y^2 = r^2$, kde $m > r$.

219. Určete dráhu bodu $M \equiv (x, y)$ pohybujícího se tak, že součet čtverců jeho vzdáleností od bodů $A \equiv (-a, 0)$, $B \equiv (0, a)$, $C \equiv (a, 0)$ je $3a^2$.

220. Z bodu $A \equiv (-2, 0)$ kružnice $x^2 + y^2 = 4$ je vedena tětiva AB a prodloužena do bodu M na $BM = AB$. Určete množinu bodů M.

221. Je dána kružnice $x^2 + y^2 = a^2$. Z jejího bodu $A \equiv (a, 0)$ jsou vedeny různé sečny. Určete množinu středů všech příslušných tětiv. Pokuste se o řešení konstruktivní.

222. Je dán bod $A \equiv (a, 0)$. Bod M se pohybuje tak, že úhel OMA v trojúhelníku OMA je stále pravý. Určete rovnici dráhy bodu M. Řešte i konstruktivně.



Obr. 97

223. Určete kružnici, která se dotýká kružnic $x^2 + y^2 = 9$ a $(x - 6)^2 + y^2 = 1$ zevnitř a kružnice $(x - 10)^2 + y^2 = 4$ vně. Narýsujte.

224. Dokažte, že množina bodů M, jejichž vzdálenosti od daného bodu A jsou t-krát větší než vzdálenosti od daného bodu B, je pro $t = 1$ přímka a pro $t \neq 1$ kružnice. [Návod: Za počátek zvolíme bod O, dělící AB v poměru $OA : OB = t$, a za osu x přímku OB.]

225. Z daného bodu byly vystřeleny v jedné rovině současně všemi směry rakety touž rychlostí c. Jaký útvar vyplní za dobu t? [Návod: Rovnice pohybu kterékoli rakety bude $x = c(\cos\alpha)t$, $y = c(\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$. Proč? Odvoďte z grafu.]

226. Ocelový most se skládá z kruhového oblouku o rozpětí $v = 160$ m a výšce $h = 32$ m. Vozovka je ve výši 4 m nad vrcholem oblouku. Napište rovnici kružnice, je-li osa x v rovině vozovky a osa y má směr svislý vzhůru. Kruhový oblouk má být nahrazen parabolickým obloukem. Dokažte, že rozdíl druhých souřadnic pro kružnici a parabolu je asi 6,8 cm pro délku tětivy 20 m. (Obr. 97.)

6. ELIPSA A HYPERBOLA

227. Najděte velikost poloos, délkovou výstřednost a číselnou výstřednost elipsy, jejíž rovnice je $x^2 + 4y^2 = 16$.

Řešení

Danou rovnici elipsy přeměníme na tvar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tj. v našem případě $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Odtud máme velikosti poloos $a = 4$, $b = 2$. Protože $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, je délková výstřednost $2\sqrt{3}$ a číselná výstřednost $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

228. Vyslovte rovnici elipsy v osové poloze, je-li: a) vzdálenost jejích ohnisek $2e = 6$j a velikost vedlejší poloosy $b = 4$j; b) velikost hlavní poloosy $a = 6$j a výstřednost $e = 2\sqrt{5}$ j. Užitím ohniskových vlastností tuto elipsu sestrojte.

229. Určete číselnou výstřednost pro dráhu Země kolem Slunce, je-li nejmenší vzdálenost Země od Slunce přibližně $146 . 10^6$ km a největší asi $152 . 10^6$ km.

230. Určete rovnici elipsy se středem v počátku souřadnic, která prochází dvěma danými body: a) $A \equiv (1, 3)$, $B \equiv (3, 2)$; b) $A \equiv (2, \sqrt{3})$, $B \equiv (0, 2)$; c) $A \equiv (1, -\sqrt{3})$, $B \equiv (0, 2)$. Jaké souřadnice mají její ohniska? Narýsujte ji.

231. Jak zní osová rovnice elipsy, prochází-li bodem $M \equiv (6, 4)$, když délka její hlavní poloosy je $a = 10$ j?

232. Napište rovnici kolmice k přímce $2x - 3y - 4 = 0$ tak, aby procházela ohniskem $F \equiv (0, -e)$ elipsy $25x^2 + 9y^2 = 100$.

233. Dokažte, že bod $A \equiv (a \cos \varphi, b \sin \varphi)$ leží na elipse o rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. a) Jak zní tedy parametrické vyjádření rovnice elipsy, kružnice? b) Jaké jsou velikosti parametrů pro vrcholy elipsy?

234. Obsah části roviny omezené elipsou je dán výrazem $P = \pi ab$. Jak zní rovnice elipsy, jejíž obsah je roven obsahu kruhu o poloměru $r = 6$j a jejíž délková výstřednost je $e = \sqrt{65}$ j?

235. Určete obsah části roviny omezené elipsou, jestliže: a) $a = 13$j, $e = 12$j; b) $a = 8$j, $\varepsilon = 0,75$; c) $\frac{b^2}{a} = \frac{25}{3}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

236. Druhé souřadnice bodů na kružnici $x^2 + y^2 = 36$ byly zmenšeny na jednu třetinu původní velikosti. Napište rovnici této nové křivky.

237. Jak zní rovnice elipsy, jejíž osy jsou rovnoběžné s osami souřadnic a střed je S: a) $S \equiv (m, n)$ a poloosy mají velikost a, b; b) $S \equiv (0, 0)$, $a = 3$, $b = 4$; c) $S \equiv (0, 0)$, $a = 5$, $e = 3$; d) $S \equiv (3, -1)$, $a = 5$, $b = 4$; e) $S \equiv (-5, -2)$, $e = 3$, $\varepsilon = 0{,}75$; f) vedlejší vrcholy jsou $C \equiv (3, 7)$, $D \equiv (-5, 7)$ a ohnisko $F_1 \equiv (-1, 4)$.

238. Určete souřadnice středu a velikost poloos elipsy $25x^2 + 9y^2 + 400x - 36y + 1\,411 = 0$.

Řešení

Doplníme danou rovnici na úplný čtverec členů obsahujících x a členů obsahujících y.
$25(x^2 + 16x) + 9(y^2 - 4y) = -1\,411$, $25(x + 8)^2 + 9(y - 2)^2 \equiv - 1\,411 + 25 \,.\, 64 + 9 \,.\, 4$, tj. $25(x + 8)^2 + 9(y - 2)^2 = 225$.
Srovnáme-li výsledek s rovnicí elipsy, jejíž střed je $S \equiv (m, n)$ a poloosy a, b, $b^2(x - m)^2 + a^2(y - n)^2 = a^2b^2$, vidíme, že $b = 5$, $a = 3$, $m = -8$, $n = 2$. Osa elipsy $(2a)$ je rovnoběžná s osou x.

239. Určete souřadnice středu a velikosti os elipsy: a) $16x^2 + 9y^2 - 40x + 6y + 25 = 0$; b) $x^2 + 2y^2 - 8y = 0$; c) $x^2 + 6y^2 - 2x + 24y + 24 = 0$; d) $16x^2 + 9y^2 - 32x - 18y - 119 = 0$.

240. Určete rovnici elipsy se středem $S \equiv (3, 2)$, dotýkající se obou os souřadnic, jsou-li její osy s osami x, y rovnoběžné.

241. Jakou rovnici má elipsa, jejíž střed je v počátku, velká poloosa $a = 12$ j a trojúhelník ACD je rovnostranný? (A je vrchol hlavní poloosy, C, D jsou vrcholy vedlejší osy.)

242. Elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ je vepsán rovnostranný trojúhelník, jehož jeden vrchol splývá s hlavním vrcholem A. Určete souřadnice obou dalších vrcholů.

243. Napište rovnici elipsy vepsané do obdélníka, jehož rozměry jsou 10 j a 8 j. a) Střed obdélníka je v počátku souřadnic a jeho strany jsou s osami x, y rovnoběžné. b) Daný obdélník má vrchol v počátku a strany v osách: α) $-x, y$; β) $-x$, $-y$.

244. Určete vzájemnou polohu elipsy a přímky: a) $x^2 + 4y^2 = 16$, $3x - y + 2 = 0$; b) $2x^2 + 5y^2 = 40$, $x - y + 10 = 0$; c) $4x^2 + 3y^2 = 16$, $2x + 3y - 8 = 0$.

245. Určete velikost tětivy elipsy $x^2 + 2y^2 = 18$, která půlí úhel sevřený osami souřadnic.

246. Obsah části roviny omezené elipsou je 72π. Jak zní její rovnice, jestliže její tětiva o rovnici $x + 2y = 4$ je půlena bodem $P \equiv (2, 1)$?

247. Stanovte rozměry obdélníka vepsaného elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, je-li jeho obsah roven polovině obsahu obdélníka téže elipse opsaného.

248. Na elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ najděte body, jejichž průvodiče jsou k sobě kolmé. Řešte: a) obecně; b) pro $x^2 + 5y^2 = 20$.

249. Pro která q je přímka $y = x + q$; a) sečna; b) tečna; c) nesečna elipsy $9x^2 + 16y^2 = 144$?

250. Jak zní rovnice tečny elipsy, jejíž osy jsou rovnoběžné s osami souřadnic, pro $S \equiv (m, n)$ v jejím bodě $M \equiv (x_1, y_1)$ s poloosami a, b? Jaká bude rovnice tečny ve středovém tvaru s osami v osách souřadnic? Jaké směrnice mají rovnice tečen v obou případech?

251. Určete rovnici normály elipsy $16x^2 + 25y^2 = 400$ v jejím bodě $M \equiv \equiv (x_1, y_1)$, která s osami souřadnic omezuje rovnoramenný trojúhelník.

Řešení

Předpokládejme, že taková normála existuje. Souřadnice bodu elipsy x_1, y_1 určíme z podmínky, že bod na elipse leží, a z podmínky, že normála má směrnici $k = \pm 1$. Proč? Rovnice normály má směrnici $k_n = \frac{a^2}{b^2x_1} y_1$, tj. $k_n = \frac{25y_1}{16x_1} = \pm 1$. Odtud $y_1 = \pm \frac{16x_1}{25}$. Bod $M \equiv (x_1, y_1)$ leží na elipse, proto platí $16\left(x_1^2 + \frac{16x_1^2}{25}\right) = 400$, $x_{1,2} = \pm \frac{25}{\sqrt{41}}, y_1 = \pm \frac{16}{\sqrt{41}}$. Body dotyku na elipse jsou zřejmě čtyři a v každém z nich existuje normála žádané vlastnosti. Jejich rovnice souhrnně zní:

$y \pm \frac{16}{\sqrt{41}} = \pm \left(x \pm \frac{25}{\sqrt{41}}\right)$. Dokážeme ještě, aspoň pro jednu z nich, že má opravdu žádanou vlastnost. Uvažme např. normálu o rovnici $y - \frac{16}{\sqrt{41}} = x + \frac{25}{\sqrt{41}}$. Její průsečík s osou x má souřadnice $y = 0$, $x = -\sqrt{41}$, průsečík s osou y pak $x = 0$, $y = \sqrt{41}$. Velikost ramen příslušného trojúhelníka je tedy v absolutní hodnotě stejná.

252. Napište rovnice tečen elipsy: a) $49x^2 + 100y^2 - 294x + 400y - - 4\,059 = 0$ v jejím bodě s první souřadnicí $x = 9$ a vypočítejte souřadnice jejich průsečíku; b) $9x^2 + 16y^2 - 54x + 64y - 129 = 0$, $T \equiv (8, ?)$; c) $4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y + 9 = 0$, $T \equiv (?, 0)$.

253. Která tečna elipsy: a) $x^2 + 4y^2 = 16$ je rovnoběžná s přímkou $x = = \frac{16}{13} + 3t$, $y = -\frac{24}{13} + 2t$; b) $9x^2 + 25y^2 = 225$, $x = \frac{28}{41} - 5t, y =$

$= \dfrac{35}{41} + 4t$; c) $4x^2 + y^2 = 4$, $y = -0{,}2x + 2$; d) $9x^2 + 25y^2 = 225$, $4x + 5y - 7 = 0$?

254. Pod kterým úhlem se protínají křivky: a) $25x^2 + 9y^2 = 225$, $x^2 + y^2 = 16$; b) $9x^2 + 25y^2 = 900$, $x^2 + y^2 = 64$?

***255.** Pod kterým úhlem se protíná parabola s elipsou, leží-li vrchol paraboly ve středu elipsy, kladná část osy x je současně hlavní osou paraboly a mají-li obě křivky společné ohnisko. Dokažte, že nejmenší úhel, v němž se křivky protínají, je $67°30'$.

***256.** Určete rovnici tečny elipsy: a) $9x^2 + 25y^2 = 225$, která na osách x, y vymezuje shodné kladné úseky; b) $9x^2 + 16y^2 = 144$, která svírá s kladným směrem osy x úhel $135°$ a na osách x, y vytíná shodné úseky.

257. Pod kterým úhlem je vidět danou elipsu z daného bodu A:
a) $5x^2 + 9y^2 = 45$, $A \equiv (0, -3)$; b) $4x^2 + 9y^2 = 36$, $A \equiv (0{,}5)$;
c) $9x^2 + 16y^2 = 144$, $A \equiv (6, 0)$; d) $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1$, $A \equiv (4, -1)$?

258. Sestrojte tečny rovnoběžné s danou přímkou k elipse pomocí průměru elipsy. Dokažte, že rovnice průměru elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ příslušného tětivě o rovnici $y = kx$ je
$y = -\dfrac{b^2}{a^2 \, . \, k}\,x$. [Návod: Průměr elipsy je množina bodů, půlících rovnoběžné tětivy v elipse.]

259. Určete rovnice sdružených průměrů elipsy: a) $9x^2 + 16y^2 = 144$, jestliže jeden ze sdružených průměrů svírá s osou x úhel $45°$; b) $4x^2 + 9y^2 = 180$, je-li jeden z průměrů rovnoběžný s přímkou $2x - y = 3$.

***260.** V elipse o rovnici $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ určete rovnice a úhel sdružených průměrů, z nichž jeden je dvojnásobkem druhého.

***261.** Která tětiva v elipse o rovnici $x^2 + 4y^2 = 20$ a procházející bodem $A \equiv (-2, -2)$ je půlena průměrem $y = -\dfrac{5}{8}x$?

***262.** Podle výsledku v úloze 261 najděte rovnice tečen dané elipsy $3x^2 + 4y^2 = 300$ rovnoběžných s přímkou $3x - 2y = 40$. Řešte tímto způsobem úlohu 256.

263. Dokažte, že vnitřek elipsy i s jejími body je útvar konvexní. [Návod: Body $M \equiv (x_1, y_1)$, $N \equiv (x_2, y_2)$ jsou dva body neležící vně elipsy. Potom všechny body x úsečky MN musí ležet uvnitř elipsy. Vyjádřete tuto podmínku parametricky.]

*264. Na elipse $8x^2 + 25y^2 = 1\,800$ určete bod M takový, aby jeho vzdálenost od přímky $p = x + 5y - 71 = 0$ byla nejmenší.

265. Najděte společné tečny křivek: a) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$; b) $\frac{x^2}{6} + y^2 = 1, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$

266. Zpaměti: Definujte hyperbolu. Udejte její rovnici v osovém tvaru s hlavní osou rovnoběžnou s osou x a s poloosami a, b; a) $S \equiv (0, 0)$; b) $S \equiv (m, n)$.

$\boxed{267.}$ Najděte rovnici hyperboly v osové poloze, procházející body $M \equiv (4, \sqrt{3}), N \equiv (2\sqrt{2}, -1)$.

Řešení

Dané body leží na křivce o rovnici $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a jejich souřadnice danou rovnici tedy splňují.

Platí $\frac{16}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1$, $\frac{8}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$. Dosaďme $\frac{1}{a^2} = u$, $\frac{1}{b^2} = v$.

Potom uvažované rovnice mají tvar $16u - 3v = 1$, $8u - v = 1$. Jejich řešením dostaneme $u = \frac{1}{4}$, $v = 1$. Odtud $a = 2$, $b = 1$. Rovnice hledané hyperboly je tedy $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$, neboli $x^2 - 4y^2 = 4$. Řešení je správné, neboť souřadnice obou daných bodů této rovnici hyperboly vyhovují.

268. Zpaměti: Jak zní rovnice hyperboly, je-li dáno: a) $a = 5$, $e = 7$, $S \equiv (0, 0)$, $AB \equiv x$, $CD \equiv y$; b) $a = \sqrt{11}$, $b = \sqrt{5}$, $S \equiv (0, 0)$, $AB \equiv x$, $CD \equiv y$; c) $a = \sqrt{5}$, $e = \sqrt{7}$, $S \equiv (1, -1)$, $AB \parallel x$, $CD \parallel y$; d) $a = 1$, $b = 2$, $S \equiv (-2, -5)$, $AB \parallel x$, $CD \parallel y$. Sestrojte ji.

269. Jak zní osová rovnice hyperboly procházející body: a) $M \equiv (4, -\sqrt{3}), N \equiv (-2\sqrt{2}, 1)$; b) $M \equiv (2\sqrt{7}, -3), N \equiv (-7, 6\sqrt{2})$; c) $M \equiv (-5, 3)$, která je konfokální s hyperbolou o rovnici $x^2 - y^2 = 8$.

270. Bod $M \equiv (?, 1)$ leží na hyperbole o rovnici $x^2 - 4y^2 = 16$. Určete jeho vzdálenost od ohnisek.

271. Napište rovnici hyperboly, která má vrcholy v ohniskách a ohniska ve vrcholech elipsy, jejíž rovnice zní: a) $9x^2 + 25y^2 = 225$; b) $9x^2 + 16y^2 = 144$; c) $5x^2 + 8y^2 = 40$.

272. Napište rovnici hyperboly v osovém tvaru, je-li její hlavní osa v ose x a velikost hlavní osy $2a = 8$ j a vzdálenost ohnisek 10 j. Totéž pro $a = 2\sqrt{5}$, je-li číselná výstřednost $\varepsilon = \frac{e}{a} = \sqrt{\frac{6}{5}}$. Narýsujte je.

273. Napište rovnici hyperboly ve středovém tvaru, je-li: a) její střed $S \equiv (2, -1)$, $e = \sqrt{17}$, rozdíl velikostí poloos $b - a = 3$ a osa b je rovnoběžná s osou y; b) parametrický tvar rovnice $x = \frac{a}{2}(t + \frac{1}{t})$, $y = \frac{b}{2}(t - 1 : t)$, kde $a > 0$, $b > 0$, $t \neq 0$; c) $x = \frac{t-1}{t+1}$, $y = \frac{2t}{t+2}$, kde $t \neq -1$, $t \neq -2$.

274. Určete velikosti poloos a souřadnice středu křivky:
a) $x^2 - y^2 + 6x + 4y - 4 = 0$; b) $2x^2 - 3y^2 - 8x + 6y - 25 = 0$;
c) $x^2 - 3y^2 + 2x - 26 = 0$; d) $x^2 - y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$;
e) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$.

275. Jakou vzájemnou polohu mají dané křivky:
a) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{16} = 1$, $4x - y + 1 = 0$; b) $9x^2 - 4y^2 = 36$, $x + y - 2 = 0$; c) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{64} = 1$, $8x + 3y + 32 = 0$;
d) $25x^2 - 9y^2 = 225$, $4x - 3y = 0$; e) $16y^2 - 25x^2 = 400$, $5x - 4y - 10 = 0$.

276. Určete souřadnice průsečíků hyperboly o rovnici $16x^2 - 25y^2 + 64x - 336 = 0$ s osami souřadnic.

277. Najděte velikost úhlu tečen, vedených k hyperbole s poloosami $a = 4$, $b = 3$ v krajních bodech tětivy, jež prochází ohniskem kolmo k hlavní ose.

278. Napište rovnice tečny a normály v bodě křivky:
a) $9x^2 - 4y^2 = 36$, $T \equiv (x_1 > 0, 4)$; b) $3x^2 - y^2 = 3$, $T \equiv (2, ?)$;
c) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$, $T \equiv (x_1 < 0, -3)$; d) $9x^2 - 16y^2 - 54x + 64y - 127 = 0$, $T \equiv (8, ?)$.

279. Daným bodem $Q \equiv (x_1, y_1)$ veďte tečny ke křivce, jejíž rovnice zní:
a) $x^2 - 9y^2 = 9$, $Q \equiv (-3, 0)$;
b) $x^2 - y^2 = 9$, $Q \equiv (3, -6)$;
c) $x^2 - 4y^2 = 36$, $Q \equiv (6, 6)$;
d) $16x^2 - 9y^2 = 144$, $Q \equiv \left(\frac{3}{5}, -4\right)$;
e) $4(x - 3)^2 - 45(y + 2)^2 = 180$ v bodě $Q \equiv (-12, 2)$.

280. Jaké podmínce musí vyhovovat koeficienty m, n, aby přímka o rovnici $y = mx + n$ byla tečnou hyperboly $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$?

281. Najděte velikost směrnice přímky $y = mx + n$, která je tečnou hyperboly o rovnici $16x^2 - 25y^2 = 480$ a vytíná na ose y úsek $n = 3$.

282. Hyperbola v osové poloze prochází bodem M, přičemž přímka p je její asymptota. Jaká je rovnice té hyperboly:
a) $M \equiv (-10, 3\sqrt{3})$, $p \equiv 3x - 5y = 0$;
b) $M \equiv \left(5, \dfrac{8}{3}\right)$, $p \equiv y = \pm \dfrac{2}{3} x$?

283. Stanovte rovnice a velikost úhlu asymptot hyperboly:
a) $16x^2 - 25y^2 = 400$; b) $4x^2 - 5y^2 = 100$; c) $9x^2 - 25y^2 = 225$.
Řešte i graficky.

284. Určete rovnice asymptot hyperboly:
a) $x^2 - y^2 - 2x + 2y + 4 = 0$; b) $4x^2 - 9y^2 - 24x = 0$;
c) $9x^2 - 8y^2 - 36x - 16y - 116 = 0$.

***285.** K asymptotám hyperboly o rovnici $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ veďte body $A \equiv (2a, b)$, $B \equiv (a, 2b)$ rovnoběžky r, r' Určete průsečíky přímek r, r' s hyperbolou.

286. V jakém úhlu se protínají křivky o rovnicích:
$x^2 + y^2 = ma^2$, $x^2 - y^2 = na^2$?
Položte: a) $m = 2, n = 1$; b) $m = 2, n = \sqrt{2}$.

***287.** Dokažte, že součin vzdáleností libovolného bodu hyperboly od obou jejích asymptot je veličina stálá, rovná $\dfrac{a^2b^2}{e^2}$.

***288.** Na zrcadlo tvaru hyperboly o rovnici $4x^2 - 5y^2 = 20$ dopadá světelný paprsek z levého ohniska hyperboly, který s osou svírá úhel α, přičemž $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{-2}{11}$, $\left(\dfrac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi\right)$. Najděte rovnici přímky, v níž leží odražený paprsek, jestliže odraz nastává na: a) pravé větvi hyperboly; b) levé větvi hyperboly.

***289.** Ukažte, že přenesením počátku soustavy souřadnic do levého vrcholu elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ nebo do pravého vrcholu hyperboly o rovnici $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ mají obě rovnice tvar $y^2 = 2px + qx^2$, kde $\dfrac{b^2}{a} = p$, $q = \varepsilon^2 - 1$.

7. OPAKOVÁNÍ

290. Dvě síly, $F_1 = 30$ kp, $F_2 = 40$ kp působí v témže bodě, přičemž svírají úhel:
a) $90°$; b) $60°$; c) $30°$; d) $120°$; e) $180°$. Určete jejich vektorový součet (výslednici).

291. Loďka jede napříč přes řeku rychlostí $\frac{1}{2}$ m/s. Určete výslednou rychlost loďky, je-li rychlost proudu 1,5 m/s.

292. Letadlo letí směrem jihovýchodním rychlostí 450 km/h, vítr vane rychlostí 5 m/s směrem jižním. Narýsujte situaci a určete výslednou rychlost letadla i směr letu.

293. Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} \equiv (2, -1)$, $\boldsymbol{v} \equiv (3, 2)$. Určete vektor:
a) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$; b) $\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v}$; c) $2\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$; d) $3\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$.

294. Určete vektor $\boldsymbol{x}$ tak, aby platilo: a) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$; b) $2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{v}$, jestliže $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou vektory z předešlé úlohy.

295. Jsou dány vektory $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{PA}$, $\boldsymbol{y} \equiv \boldsymbol{PB}$ dvourozměrného vektorového prostoru. Určete graficky vektor: a) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$; b) $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$; c) $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$; d) $c\boldsymbol{x}$; e) $-\boldsymbol{x}$; f) $-\boldsymbol{y}$; g) $-\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$.

296. Určete souřadnice výsledného vektoru, pro nějž platí:
a) $\boldsymbol{u} \equiv (2, 3) + (4, -2) + (-1, -4)$; b) $\boldsymbol{v} \equiv (3,2) + (5,7) + (-8, -9)$.

297. K vektorům $\boldsymbol{a} \equiv (6, -5)$, $\boldsymbol{b} \equiv (-7, 3)$, $\boldsymbol{c} \equiv (-4, -9)$, $\boldsymbol{d} \equiv (3, 8)$ udejte nové souřadnice vektoru, má-li nový počátek souřadnic vzhledem ke starému počátku polohu $O' \equiv (4, 3)$.

298. Jaký výkon musí mít traktor, který jede po hrázi kanálu rychlostí 9 km/h a táhne vor silou 3 000 N, je-li směr síly vzhledem ke směru voru přibližně $30°$?

299. Koncové body vektoru $\boldsymbol{AC}$ jsou vrcholy čtverce. Určete souřadnice zbývajících vrcholů čtverce, je-li $A \equiv (8,4)$, $C \equiv (4, 12)$.

300. Určete souřadnice vrcholů pravidelného osmiúhelníka vepsaného kružnici $S \equiv (0, 0)$ o poloměru $r = 4$ cm, jestliže jeden jeho vrchol leží na ose x.

301. Vypočtem vyšetřte, zda body $A \equiv (1, -1)$, $B \equiv (2, 3)$ $C \equiv (-4, -1)$ leží v téže polorovině vyťaté přímkou $x - 2y + 2 = 0$.

302. Najděte souřadnice bodu, který rozděluje úsečku P_1P_2 v poměru:
a) $\lambda = 4$; b) $\lambda = -4$; c) $\lambda = 1$; d) $\lambda = -3$, $P_1 \equiv (-10, -5)$, $P_2 \equiv$ $\equiv (20, 10)$.

303. Určete souřadnice průsečíku přímek:
a) $x = -3t + 4$, $y = 3 + t$; $x = -1 + 2t_1$, $y = 3 - t_1$;

b) $x = 2 - t$, $y = -1 + 2t$; $x = 3 - 2t_1$, $y = 2 - t_1$;
c) $x = 2 - 3t$, $y = 3 + 2t$; $x = 1 + 6t_1$, $y = 3 - 4t_1$.

304. Jaké jsou souřadnice průsečíků os souřadnic s přímkami:
a) $x = 3 - 2t$, $y = 7 + 3t$; b) $x = 3 + 5t$, $y = 2$; c) $4x - 7y + 14 = 0$; d) $-3x + 2y - 6 = 0$.

305. Ověřte, že polopřímka a) $x = 1 + 2t$, $y = 1 - t$, kde $t < 0$, protíná úsečku MN, když $M \equiv (-1, 0)$, $N \equiv (1, 5)$; b) $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, kde $t > 0$, protíná přímku $3x - y + 7 = 0$; c) $x = 3 + t$, $y = 1 - t$, kde $t < 0$, protíná úsečku AB, je-li $A \equiv (-2, 0)$, $B \equiv (2, 8)$. Stanovte souřadnice jejich průsečíků.

306. Napište rovnici přímky v neparametrickém tvaru:
a) $x = -3 + 9t$, $y = 5 - 15t$; b) $x = 1 + 5t$, $y = 2 + 6t$;
c) $x = 3 + 5t$, $y = -2 + 3t$; d) $x = 1 + (b - 1)t$, $y = a + (3 - a)t$.

307. Určete množinu bodů, která splňuje dané parametrické rovnice pro všechny hodnoty parametru t: a) $x = 2t$, $y = 5t$; b) $x = 0{,}6t + 1$, $y = 0{,}8t$; c) $x = t \sin \alpha$, $y = (t - 3) \cos \alpha$; d) $x = 4 \sin t$, $y = 4 \cos t$; e) $x = 5 \sin t$, $y = 3 \cos t$.

308. Najděte množinu bodů, která vyplní křivku pro všechny hodnoty parametru t: a) $x = \cos t$, $y = \cos 2t$; b) $x = \cos t$, $y = \cos\left(2t + \dfrac{\pi}{2}\right)$;
c) $x = \cos t$, $y = \cos t$; d) $x = \cos t$, $y = \cos\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right)$; e) $x = \cos t$,
$y = \cos\left(t + n \cdot \dfrac{\pi}{6}\right)$, $n = 4, 5, 6, \ldots, 11$.

309. Zjištěte, zda přímka, jejíž rovnice je $2x - 3y + 10 = 0$, protíná úsečku AB, je-li: a) $A \equiv (100{,}71)$, $B \equiv (98{,}68)$; b) $A \equiv (100{,}69)$, $B \equiv (101{,}70)$.

310. Jaká podmínka musí platit pro koeficienty $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$, aby přímky dané rovnicemi $y = a_1x + b_1$, $y = a_2x + b_2$, $y = a_3x + b_3$ se protínaly v jednom bodě?

311. Určete úhel dané přímky s kladným směrem osy x: a) $y = -x + 1$; b) $y + x\sqrt{3} = 1$; c) $2y + x - 3 = 0$.

312. Najděte směrnici přímky a úseky vymezené na osách souřadnic:
a) $3x - 4y + 10 = 0$; b) $x = 3 - t$, $y = 1 + 2t$; c) $6x - 5y = 0$.

313. Převeďte na tvar obecný, úsekový a normálový rovnici přímky, která prochází bodem M a svírá s osou x úhel α:
a) $M \equiv (3, 4)$, $\alpha = 45°$; b) $M \equiv (-3, -1)$, $\alpha = 135°$; c) $M \equiv (1, 8)$, $\alpha = 60°$; d) $M \equiv (-4, 5)$, $\alpha = 70°$.

314. Jak zní rovnice přímky procházející bodem $M \equiv (4, -7)$ rovnoběžně s přímkou: a) $4x - 11y + 3 = 0$; b) $x = 3 - 2t, y = 7 + 9t$; c) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$; d) $4y + 5 = 0$.

315. Napište rovnici přímky, která prochází bodem $P \equiv (2, 5)$ a je rovnoběžná: a) s vektorem $\boldsymbol{a} \equiv (4, 3)$; b) s vektorem určeným body $A \equiv (3, 1)$, $B \equiv (5, 4)$.

316. Napište rovnice výšek trojúhelníka, jehož vrcholy jsou:
a) $A \equiv (3, 3)$, $B \equiv (5, 5)$, $C \equiv (7,1)$; b) $A \equiv (2, 2)$, $B \equiv (0, -1)$, $C \equiv (3, -3)$.

317. Najděte velikost úhlu dvou přímek, jejichž rovnice jsou: a) $x + 2y - 7 = 0$, $2x - y + 11 = 0$; b) $2x - y - 3 = 0$, $x - 2y + 2 = 0$; c) $x = 2 - 3t, y = 1 + 4t$; d) $x = 3 - 4t, y = 8 - t$.

318. Vrcholy trojúhelníka, jehož průsečík výšek je $V \equiv (4, 3)$, tvoří body $A \equiv (3, 0)$, $B \equiv (5, 8)$. Najděte rovnice stran tohoto trojúhelníka. Vrchol C leží v polorovině ABV.

319. Stanovte rovnice stran trojúhelníka ABC, jestliže: a) $C \equiv (-5, -5)$, rovnice výšky $v_a \equiv x - 3y + 22 = 0$ a rovnice výšky $v_b \equiv 2x - y + 14 = 0$; b) $A \equiv (1, -7)$, rovnice výšky $v_a \equiv 3x - 2y + 12 = 0$ a rovnice výšky $v_c \equiv 3x + 2y - 12 = 0$.

320. Pro která čísla a, b, c jsou přímky, jejichž rovnice jsou $ax + 2by + 1 - c = 0$, $(1 - a)x + (1 - 2b)y + c = 0$: a) splývající; b) rovnoběžné; c) různoběžné?

321. Najděte velikost úhlů a obsah trojúhelníka omezeného stranami ležícími na přímkách, jejichž rovnice jsou $y = 2x$, $y = -2x$, $y = x + b$.

322. Z počátku jsou vedeny dvě vzájemně kolmé přímky, které s přímkou $2x + y = a$ omezují rovnoramenný trojúhelník. Určete jeho obsah.

323. Na přímce, jejíž rovnice je $7x + y - 39 = 0$, určete body A, B tak, aby trojúhelník ABC, kde $C \equiv (2,1)$, byl pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C a jeho obsah byl 12 j^2.

324. Určete rovnici přímky procházející průsečíkem přímek:
a) $4x + 7y - 15 = 0$, $9x - 14y - 17 = 0$ rovnoběžně s osou x;
b) $x - y - 3 = 0$, $2x + 3y - 11 = 0$ rovnoběžně s přímkou, jejíž rovnice zní $5x - 4y - 20 = 0$.

***325.** Narýsujte množinu přímek, jejichž rovnice jsou $y = kx + q$ pro: a) q je konstanta a k je proměnné (např. $q = 3$); b) k je konstantní a q je proměnné $\left(\text{např. } k = -\frac{3}{2}\right)$.

*326. Narýsujte nomogram pro určení velikosti pozemku osetého secím strojem, jehož zásobník pojme G kp obilí. $G \in \langle 100, 450 \rangle$.
[Návod: Sestrojte soustavu přímek $G = u \cdot h$, kde u je velikost pozemku v ha, h je norma k osetí 1 ha (v kp).] Z tohoto nomogramu pak určete, jak velký pozemek se oseje: a) $G = 200$ kp pšenice, je-li hektarová norma 240 kp; b) $G = 180$ kp, pro $h = 200$ kp; c) $G = 160$ kp, $h = 200$ kp.

327. Najděte velikost strany rovnostranného trojúhelníka, jehož vrchol je: a) $A \equiv (-2, -1)$ a protilehlá strana BC leží na přímce, jejíž rovnice je $3x + 4y = 12$; b) $A \equiv (0, 0)$, $BC \equiv 3x + 4y - 35 = 0$.

328. Bodem $Q \equiv (0,1)$ veďte přímku tak, aby úsečka, kterou na ní vytínají přímky o rovnicích $x - 3y + 10 = 0$ a $2x + y - 8 = 0$, byla bodem Q půlena.

*329. Určete velikost vnitřních úhlů trojúhelníka, jehož strany leží na přímkách daných rovnicemi: a) $4x + 3y - 12 = 0$, $7x - y - 10 = 0$, $x + 7y + 3 = 0$; b) $x + 7y + 11 = 0$, $x - 3y - 1 = 0$, $3x + y - 7 = 0$.

*330. Jak zní rovnice přímky, která vytíná na ose x úsek -3 a s přímkou o rovnici $3x - y = 5$ svírá úhel $63°26'6''$?

331. Určete množinu vrcholů všech trojúhelníků, které mají společnou stranu AB a stejný obsah P. Řešte pro $A \equiv (1, 4)$, $B \equiv (-1, 2)$, $P = 3\ \text{j}^2$.

*332. Najděte množinu bodů, jejichž vzdálenosti od dvou daných přímek p_1, p_2 mají poměr λ: a) $\lambda = \dfrac{2}{3}$ pro $p_1 \equiv 3x - 10y + 12 = 0$, $p_2 \equiv 3x - 2y + 6 = 0$; b) $\lambda = \dfrac{2}{3}$ pro $p_1 \equiv 3x - 7y + 4 = 0$, $p_2 \equiv x - 2y + 3 = 0$; c) $\lambda = -1$ pro $p_1 \equiv 3x - 10y + 12 = 0$, $p_2 \equiv 3x - 2y + 6 = 0$; d) $\lambda = -1$ pro přímky z *b*).

*333. V rovině najděte množinu bodů, pro jejichž souřadnice platí:
a) $|x| + |y - 2| < 5$; b) $|x - 1| - |y - 2| < 5$;
c) $[|x - 1| - (x - 1)] \cdot [|y - 2| + (y - 2)] < 0$.

*334. Najděte množinu všech bodů, ležících uvnitř daného trojúhelníka, jejichž součet vzdáleností od dvou stran toho trojúhelníka je roven vzdálenosti od třetí strany.

335. Najděte množinu bodů, která tvoří středy všech pravoúhlých rovnoběžníků vepsaných do trojúhelníka ABC, přičemž dva vrcholy vepsaného pravoúhlého rovnoběžníka leží na straně AB.

*336. Vyšetřujte pohyb přímky o rovnici $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, jestliže:
a) a nabývá všech hodnot množiny $(-\infty, \infty)$ a b je konstantní;
b) b je prvkem intervalu $(-\infty, \infty)$ a a je konstantní.

337. Určete rovnici kružnice, která: a) prochází body $A \equiv (2, -1)$, $B \equiv (4, 3)$, $C \equiv (-2, -1)$; b) prochází bodem $P \equiv (-8, -1)$ a dotýká se obou os souřadnic; c) prochází body $P \equiv (2, 2)$, $Q \equiv (4, 4)$ a dotýká se osy x; d) prochází body $P \equiv (3, 4)$, $R \equiv (-3, 4)$ a dotýká se přímky o rovnici $5x - 12y - 65 = 0$; e) dotýká se přímek $y = 3$, $3y = 4x + 1$, $12x + 5y = 11$.

338. Napište rovnici kružnice nad průměrem OA, kde $O \equiv (0, 0)$, $A \equiv (-4, 6)$.

339. Stanovte velikost úhlu, ve kterém kružnice o rovnici $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$ protíná osu x.

340. Napište rovnici kružnice procházející bodem $A \equiv (4, 4)$ a průsečíky přímky $y + x = 0$ s kružnicí, jejíž rovnice je $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$.

341. Jak zní rovnice tečen vedených z počátku soustavy souřadnic ke kružnici: a) o rovnici $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$; b) procházející body $A \equiv (1, -2)$, $B \equiv (0, -1)$, $C \equiv (-3, 0)$?

342. Ukažte, že bod $A \equiv (3, 0)$ leží uvnitř kružnice, jejíž rovnice je $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ a určete rovnici tětivy té kružnice, kterou bod A půlí.

***343.** Jsou dány rovnice tří tečen kružnice: $3x + 4y - 24 = 0$, $4x - 3y - 7 = 0$, $x + 8 = 0$. Najděte rovnici této kružnice a souřadnice dotykových bodů tečen.

344. V kružnici o poloměru a, se středem v počátku veďte bodem $P \equiv (a, 0)$ všechny tětivy a určete množinu jejich středů.

345. Určete množinu bodů M, která má tu vlastnost, že bod N je vždy dvakrát blíže k bodu $A \equiv (1, 0)$ než k bodu $B \equiv (4, 0)$.

346. Jaká je množina vrcholů všech trojúhelníků, které mají společnou základnu $a = 12$ j a stejné součty čtverců zbývajících stran ($c^2 + b^2 = 100$ j^2)? Řešte i obecně.
[Návod: Základnu trojúhelníka umístěte do osy x a její střed do počátku soustavy souřadnic.]

***347.** Dokažte, že přímka o rovnici $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ je tečna křivky o rovnici $x^2 + y^2 = r^2$, je-li splněna podmínka $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{r^2}$. Určete souřadnice dotykového bodu. Ověřte výsledek poučkami o pravoúhlém trojúhelníku.

***348.** Zámečník má zhotovit z tyčí ozdobnou výplň čtvercového tvaru o rozměru $a = 48$ cm s vepsanou kružnicí. Pro konstrukci je třeba určit velikosti poloměrů a souřadnice středů kružnic, které jsou vepsány do rohů čtverce tak, že se dotýkají jeho stran i vepsané kružnice. Určete je.

[Návod: Souřadnice určete vzhledem ke středu čtverce.]

349. Na parabole: a) $y^2 = 8x$; b) $y^2 = 6x$ najděte bod, jehož rádiusvektor vedený z ohniska má délku pro a) 20 j, pro b) 4,5 j.

350. Na železniční trati zatáčející se ve tvaru paraboly o rovnici $y^2 = 18x$ má být zřízena zastávka co nejblíže silnici, jejíž trasa je přímka o rovnici $3x - 4y + 69 = 0$. Které místo na trati vyhovuje a jak je od silnice daleko?

351. Parabolická konstrukce nosného mostu přes řeku širokou 24 m, jejíž břehy jsou ve stejné výši, má vrchol 6 m nad hladinou. Určete rovnici parabolického oblouku a délku nosných traverz, které jsou rozmístěny vždy 3 m od sebe.

352. Napište rovnici paraboly a sestrojte ji, je-li dáno: a) vzdálenost vrcholu paraboly od jejího ohniska $d = 3$ j; b) poloha ohniska $F \equiv (5,0)$ a osa y, která je řídící přímkou paraboly; c) parabola prochází počátkem soustavy souřadnic a bodem $M \equiv (1, -4)$ a je souměrná podle osy y; d) vrchol paraboly leží v počátku souřadnic a ohnisko v bodě $F \equiv (0,2)$, přičemž osa paraboly je v ose y.

353. Jak zní rovnice elipsy procházející dvěma danými body, leží-li její střed v počátku soustavy souřadnic a osy v osách souřadnic:
a) $U \equiv (x_1, y_1)$, $V \equiv (x_2, y_2)$; b) $U \equiv (2, 3)$, $V \equiv (4, 2)$?

354. K parabole $y^2 = 12x$ veďte tečnu: a) v jejím bodě $T \equiv (3, ?)$; b) rovnoběžně s přímkou $3x - y + 5 = 0$; c) kolmo na přímku o rovnici $2x + y - 7 = 0$; d) svírající s přímkou $4x - 2y + 9 = 0$ úhel 45°.

355. Dané elipse o rovnici $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ vepište čtverec. Určete souřadnice jednoho vrcholu.

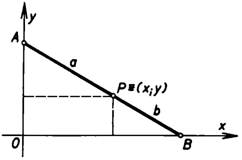
356. V elipse (hyperbole) stanovte množinu středů tětiv rovnoběžných s přímkou $y = kx$. Jak je možno podle toho zjistit souřadnice dotykového bodu tečny křivky, vedené rovnoběžně s daným směrem? Pomocí sdružených průměrů určete rovnice tečen křivky $\frac{x^2}{16} \pm \frac{y^2}{9} = 1$ rovnoběžných se směrem $k = \frac{3}{4}$.

***357.** Pomocí sdružených průměrů najděte rovnice tečen vedených:
a) k parabole o rovnici $y^2 = 9x$ rovnoběžně s přímkou $5x - 3y - 2 = 0$;
b) k elipse, jejíž rovnice je $x^2 + 4y^2 = 16$ rovnoběžně s přímkou $2x - 3y - 8 = 0$; c) k hyperbole $16x^2 - 9y^2 = 144$ kolmo k přímce, jejíž rovnice je $x + 4y - 3 = 0$.

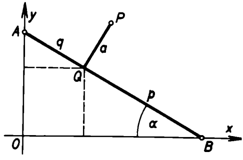
358. Najděte rovnice tečen elipsy (hyperboly) $\frac{x^2}{30} \pm \frac{y^2}{24} = 1$ rovnoběžných s přímkou $2x - y + 17 = 0$.

359. Stanovte rovnice společných tečen křivek $4x^2 + 5y^2 = 20$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$.

***360.** Páka se pohybuje po drážkách k sobě kolmých. Jakou křivku opisuje při tom bod P, který leží na této tyči a rozděluje ji na dvě části velikostí a, b? (Obr. 98.)



Obr. 98



Obr. 99

361. Jaká je množina středů kružnic dotýkajících se kružnice se středem $S \equiv (4, 0)$ o poloměru $r = 10$ a procházejících bodem $A \equiv (-4, 0)$?

362. Stanovte rovnici hyperboly procházející bodem $M \equiv (12, 3\sqrt{3})$, jejíž asymptoty mají rovnice $y = \pm \frac{1}{2} x$.

363. Na hyperbole $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$ najděte body, v nichž tečny vedené k této křivce svírají s osou x úhel 60°.

***364.** Dokažte, že tečny hyperboly omezují s asymptotami trojúhelníky stejného obsahu.

***365.** Najděte množinu středů kružnic vytínajících na dvou vzájemně kolmých přímkách úseky dané délky $2a$, $2b$.

***366.** Jaká je množina středů kružnic, které procházejí bodem $A \equiv (3, 0)$ a dotýkají se kružnice $x^2 + y^2 = 25$? Pokuste se o řešení konstruktivní.

367. Zjednodušte rovnici daných křivek posunutím soustavy souřadnic a pak je zobrazte: a) $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$;
b) $x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$;
d) $x^2 + 4x + 5y^2 - 20y + 20 = 0$.

368. Stanovte množinu středů kružnic, dotýkajících se osy x a vně dvou daných kružnic. Řešte i konstruktivně. $[x^2 + y^2 = 1, (x - 5)^2 + y^2 = 4.]$

369. Na automatu klouže táhlo $c = p + q$ svými koncovými body po vzájemně kolmých drážkách, které se stýkají v bodě O. V bodě táhla Q (viz obr. 99) je k táhlu připevněna tyč délky $QP = a$ kolmo na směr táhla. Určete křivku, po níž se pohybuje bod: a) Q, je-li $p = q = c : 2$;

b) P, je-li $p = q = \dfrac{c}{2}$; c) Q, je-li $p \gtrless q$; d) P, je-li $p \gtrless q$.

[Návod: Zaveďte jako parametr úhel α, který tvoří táhlo se směrem vodorovné drážky.]

370. Napište parametrické rovnice kružnice, která má střed v bodě S a velikost poloměru r: a) $S \equiv (0, 0)$, $r = 3$; b) $S \equiv (-2, 5)$, $r = 1$; c) $S \equiv (4, 0)$, $r = 2$. Určete ve všech případech souřadnice bodů, které odpovídají parametrům $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{5\pi}{6}$, π. Vypočtěte souřadnice průsečíků těchto kružnic s přímkou, jejíž rovnice je $x + y = 3$.

371. Napište parametrickou rovnici elipsy, která má střed v průsečíku přímek $y = 3 + x$ a $2x + y = 0$, hlavní osu $(2a = 6)$ rovnoběžnou s osou x a vedlejší $(2b = 2)$ rovnoběžnou s osou y. Na této elipse najděte bod, který odpovídá parametru $\dfrac{5}{4}\pi$. Který parametr přísluší bodům $K \equiv$ $\equiv (-1, 3)$, $L \equiv (-4, 2)$, $M \equiv \left(\dfrac{3\sqrt{3} - 2}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$?

372. Napište parametrickou rovnici hyperboly, která má střed $S \equiv (m, n)$ na přímce $x = 8$ $(n = -1)$, reálnou osu $(2a = 8)$ rovnoběžnou s osou x a imaginární poloosu velikosti $b = 3$ rovnoběžnou s osou y. Který bod na této hyperbole odpovídá parametru $t = \pi$, $t = \dfrac{7}{4}\pi$, $t = \dfrac{2}{3}\pi$? Který parametr je přiřazen bodům $D \equiv (12, -1)$, $E \equiv (8 + 4\sqrt{2}, 2)$?

373. Vyjádřete ve tvaru neparametrickém rovnici kuželosečky:

a) $x = 3 + \dfrac{2}{\cos t}$, $y = -2 + \operatorname{tg} t$;

b) $x = 1 + 5 \cos t$, $y = 2 + 5 \sin t$;

c) $x = 3 + 8t^2$, $\quad y = 2 + 8t$;

d) $x = \dfrac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}$; $y = \cos t$.

374. Těleso je vrženo vodorovným směrem rychlostí c z výšky y_0. Napište rovnici jeho dráhy v parametrickém tvaru. (Parametr je čas t.)

375. Parametrické rovnice šikmého vrhu jsou uvedeny v úloze 135. Vyjádřete rovnici dráhy takto vrženého tělesa (bez odporu vzduchu), stanovte souřadnice vrcholu a parametr této paraboly.

376. Vypočtěte rovnici tečny v daném bodě $M \equiv (x_1, y_1)$ křivky o rovnici:
a) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, je-li $x_1 = a \cos \varphi$, $y_1 = b \sin \varphi$, kde φ je daný úhel;
b) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, je-li $x_1 = \dfrac{a}{\cos \varphi}$, $y_1 = b \operatorname{tg} \varphi$, kde $\varphi \neq (2k + 1) \dfrac{\pi}{2}$;
c) $x = \sin t$, $y = \cos 2t$ pro $t = \dfrac{\pi}{6}$.

377. V jak velkém úhlu se protínají křivky:
a) $y = x^2$ a $x = \dfrac{5}{3} \cos t$, $y = \dfrac{5}{4} \sin t$; b) $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$, $x = \dfrac{at^2}{1 + t^2}$, $y = \dfrac{at\sqrt{3}}{1 + t^2}$?

378. Elektron hmotnosti m vletí do homogenního elektrického pole intenzity E kolmo k siločárám. Určete rovnici dráhy, kterou opisuje.
[Návod: Osu x volte v původním směru pohybu elektronu, počátek soustavy souřadnic na začátku pole E.]

VÝSLEDKY

I. MNOHOČLENY, LINEÁRNÍ ROVNICE

1. OPAKOVÁNÍ O MNOHOČLENECH ZE ZÁKLADNÍ DEVÍTILETÉ ŠKOLY

1. $t + 2p + 3k + 4m + 5v + 6s + 16$. **2.** $m - 10x - 9y - 8z - 11v$. **3.** $(r - t)nc + d$. **4.** $ab + 2ac + 2bc - 2xy - rs$. **5.** $14m + 6n$. **6.** $5m + n + 15$. **8.** a) $4x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x + 1$; b) $-1 + 4x - 3x^2 - 4x^3$; c) $3x^4 - x^3y - 3x^2y^2 + y^4$; d) $1 + 2x - 2x^2 - x^3$; e) $1 - 3x + 20x^2$. **9.** a) $10a^4 - 10a^3b + 4a^2b^2 - 20ab^3 + 2b^4$; b) $-6a^3b + 12ab^3 - 4b^4$; c) $6a^3b - 12ab^3 + 4b^4$. **10.** a) 0; b) -4; c) -1; d) -21.

11. a) 2; b) 13; c) 2; d) -2. **12.** a) 32; -32; b) -185; 185. **13.** -88. **14.** 0. **15.** -14. **16.** 13; 17; 23; 31; 41; 53; 67; 83; 101. **17.** 7; 11; 17. **18.** a) 0; b) 0; c) $5x - 3y + 9z$; d) $p^2 + q^2 + r^2$; e) y^3; f) $abc + abd - acd + bcd$; g) $38ab - 42a^2$; h) $0{,}7x^2 + 18{,}58xy - 0{,}4y^2$; i) $2r^5 + 2r^3$; j) $8x^6 + x^4$; k) $3a^4y^2 - a^4$. **19.** a) $6am$; b) 2; c) $p^3 + q^3$; d) $1{,}728\,p^3 - 0{,}125\,q^3$; e) $v^4 - 1$; f) $a^5 - b^5$; g) $a^5 + b^5$; h) $2 - 14x$; i) $8a^3 - b^3$; j) $4a^4 + 8a^3 + 4a^2 - 1$; k) $2u^2 + 2v^2 + 2t^2$; l) $m^3 + n^3 + r^3 - 3mnr$. **20.** $x^6 + x^5 - x^4 + x^2 - x - 1$.

21. 10,32. **22.** 16,4. **23.** Zvětší se o $z^3 + 6z^2 + 11z$; 204. **24.** Zmenší se o $az + bz - z^2$; $z < a$, $z < b$; pro $a = 10$, $b = 8$, $z = 3$ je $az + bz - z^2 = 45$. **25.** a) $2x - 5$; b) $a^2 + ab + b^2$; c) $c^2 - 2c - 5$; d) $3y^2 + 2y + 5$; e) $x^2 - 5x - 1$. **26.** $p^3 + 5p^2 + 13p + 8$. **28.** a) $1{,}44x^4y^2 - 1{,}2x^5y^3 + 0{,}25x^6y^4$; b) $6{,}25m^4n^6 + m^5n^5 + 0{,}04m^6n^4$; c) $a^{2m} + 2a^mb^n + b^{2n}$; d) $25x^6 - 20x^3y^n + 4y^{2n}$. **29.** a) 5 050; b) 21 250; c) 180 162; d) 0,539 2.

31. $2(6x^4 + 7x^2 - 12)$. **35.** a) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$; b) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$; c) $9x^4 + 12x^3y - 14x^2y^2 - 12xy^3 + 9y^4$; d) $1 + 2x^n - x^{2n} - 2x^{3n} + x^{4n}$; e) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$; f) $4m^2 + 9k^2 + 16p^2 + 25q^2 + 12km + 16pm - 20qm + 24kp - 30kq - 40pq$. **37.** a) $7x^3 - 6x^2 - 6x + 7$; b) $18x^2y + 12xy^2 + 2y^3$; c) 1. **38.** a) a^8; b) $64x^6 - 48x^4 + 12x^2 - 1$; c) $(a^3 + b^3)^3 = a^9 + 3a^6b^3 + 3a^3b^6 + b^9$. **40.** a) $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$; b) $a^{12} + 12a^{10} + 60a^8 + 160a^6 + 240a^4 + 192a^2 + 64$; c) $64x^6 - 192x^5 + 240x^4 - 160x^3 + 60x^2 - 12x + 1$.

41. $(a + b)^3$; $12(a + b)^2$. **42.** a) $8ab$; b) $16p^2$; c) $169x^8 + 338x^4y^6 + 169y^{12}$. **44.** $-2xz - 2yz$. **45.** $2a + 2b + 3$. **47.** $-m^2 + 4mn - 2np$. **49.** $a^2 + b^2 + c^2 + 1$. **50.** $x = -2$, $y = -2\frac{2}{3}$.

51. a) $2m(p-q)$; b) $2y(ab-5ac+4bc)$; c) $7ux(u^2v+2uv^2x-3x^3)$; d) $pq^2r(p^2+qr+1)$; e) $x^2y^2(x+y+1)$; f) $x(a+b).(a+b+x)$; g) $3v^2(v-r)^2(3v-r)$; h) $ax^3(x-a)^2$; i) $2(2b+3c)(2b-3c)$; j) $(4a-b).(2a+b)$; k) $(a-b)(3p^2-5q).(3p^2+5q)$; l) $(3x-y+z)(3x-y-z)$; m) $(m-n+p)(m+n-p)$; n) $x^2(a-b)(x+1)(x-1)$; o) $2^4(6x-y).(y-x)$; p) $(u+6v-3q)(u+3q)$; r) $x(5x-12a)$; s) $7q(8p-q)$; t) $3.2^2.(a+3b).(3a+b)$; u) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$; v) $x^2(a+b)^2(p-q+1)$. **52.** a) $2a(a^2+1)(a+1)(a-1)$; b) $2(a^2+4).(a+2)(a-2)$; c) $s(2r+s)(2r^2+2rs+s^2)$; d) $(a+b).(c+nd)$; e) $(a+b)(a+b-c)$; f) $(x-y)(z-x+y)$; g) $(m-n)^2(m+n)$; h) $(x-3).(x-2)(x+2)$; i) $(y+2)(y-2).(p+1)(p-1)$; j) $(k+1)(k-1).(2k^2-k+2)$; k) $ay(a-b).(1+a+b)$; l) $a^2(a+1)(a^3-a^2+2)$; m) $(y^2+1)(y-1)^2$; n) $(h+1)(2h-1)$; o) $2a^2(a+1)^3$; p) $r(3r-1).(9r^2+3r+1)$; q) $2a^2x(x+2)(x^2-2x+4)$; r) $2b(3a^2+b^2)$; s) $(x+1)^2.(x^2-x+1)$; t) $(m^2+1)(m^2+m+1)(m-1)$; u) $(y+1)(y-2)^2$. **53.** a) $(a^2+2a+2).(a+1)$; b) $(b^2+1)(2b^2+b+2)$. **56.** a) $x(x+7).(x-6)$; b) $x^2(x+1)(x-10)$; c) $x^3(x+8)(x-7)$; d) $(x^2+3)(x+1).(x-1)$; e) $(x^2+3)(x^2+8)$; f) $(y^2-5)(y^2-8)$; g) $a(a^2+4)(a+1).(a-1)$; h) $(2x-1)(2x-3)$; i) $(3a-1)(3a-2)$; j) $2(b-1)(2b-5)$. **57.** a) $(a+2)(3a-1)$; b) $(y+1)(2y+1)$; c) $(2-3x^2)(3-2x^2)$; d) $(4a+1)(a-1)$; e) $(y^2+1)(2y^2-1)$; f) $(2p+1)(3p-1)$; g) $(3a-5).(2a+1)$; h) $(2x-3)(5x+1)$. **58.** a) $(x-2)(x+a-1)$; b) $(x-1).(x-a-1)$. **60.** a) $3(x+y)(y+z)(z+x)$; b) $3(x^2+y^2)(y^2+z^2).(x^2-z^2)$; c) $(a+b)^2.(a-b)^2.(p+q)^2.(p-q)^2$.

62. $3abc(a-b)(b-c)(c-a)$. **66.** $V=(x-z)(y-z)(x-y)$; $V\neq 0$, jestliže $x\neq y$, $x\neq z$, $y\neq z$. **67.** a) 2; 3; a; $2a$; $3a$; 6; $6a$; b) 5; p; q; $5p$; $5q$; pq; $5pq$; c) 2; a; a^2; b; $2a$; $2a^2$; $2b$; ab; a^2b; $2ab$; $2a^2b$; d) x; $x-y$; x^2-xy; e) a; $a+1$; $a(a+1)$; $(a+1)^2$; $a(a+1)^2$; f) $9x^2+4y^2$; $3x+2y$; $3x-2y$; $9x^2-4y^2$; $(3x-2y)(9x^2+4y^2)$; $(3x+2y)(9x^2+4y^2)$; $81x^4-16y^4$. **68.** a) $2a^4b^3x^2$; b) $a+1$; c) $b(a+3)$; d) $(p-1)(p^2+1)$; e) $m-n$; f) $a+3$; g) $b+5$; h) a^2-b^2; i) $2a-1$; j) u^2-uv+v^2; k) q^2-q+1; l) $x-3$; m) $a-2$; n) $y-4$. **69.** a) $a^5b^4x^5$; b) $ab(x^2-1)$; c) $y^2(y^2-1)^2$; d) $px(p-2q).(p^2-q^2)$; e) $(a^2-b^2).(c^2-d^2)$; f) $(r+2s)(r-6s)(r-3s)$; g) $(4-x^2).(4+2x+x^2)$; h) $(a^4-1)(a^2-a+1)$; i) $(x+1)(x+2)(x-3)$; j) $x(x-8).(x-2)(x+3)$. **70.** a) $D=x^2-y^2$, $n=(x^4-y^4)(x^2+xy+y^2).(x^2-xy+y^2)$; b) $D=x+1$, $n=x^4-1$; c) $D=2a+3b$, $n=(2a+3b)^2.(a-3b)$; d) $D=x(x+y)$, $n=4x(x+y)(2x-2y+1).(x^2-xy+y^2)$; e) $D=a(a+2b)$, $n=3a^2(a+2b)^2(a-2b)$; f) $D=2xy(x-2y)$, $n==4x^2y^2(x-2y)^2(x^2+2xy+4y^2)$; g) $D=1$, $n=(m+1)(m-1)^2$; h) $D=x$, $n=30x(x^2-1)$; i) $D=x$, $n=x^3(x^8-1)$; j) $n=(x+y)$.

$(x^2 - xy + y^2) \,.\, x^2$; k) $n = (a + b)(c + d)(e + f)$; l) $D = x - 5, n = (x - 5)(x + 9)(2x + 1)$; m) $D = x + 2$, $n = x^4 - 5x^2 + 4$.

71. $D = (x - y)(x - 2)$, $n = (x^2 - y^2)(x^2 - 4)(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$. **72.** $z^3 - z^2 - 9z + 9$; $z^3 + 3z^2 - z - 3$. **73.** a) $m + 3$; b) $z + 3$; c) $x + 4$; d) $y - 7$; e) $3 + a^2$; f) $3n - 2$. **74.** a) $(a - 1)(3a - 2)$; b) $m^2 - mn$. **75.** a) $u = 64$; b) $u = -165$; c) $u = -280$. **76.** $x^3 + x^2 + x + 1$; $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; $x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1$

3. ZLOMKY

81. $\frac{3\,600n}{t}$. **82.** $\frac{x + y}{c}$. **83.** $\frac{xh + (x - y)k}{h + k}$. **84.** $\frac{m}{10x + 8y}$; $\frac{1}{2}$ ha. **85.** $\frac{(y + 30) \,.\, n}{y}$; 78. **86.** a) $-11\frac{6}{7}$; b) $1\frac{18}{83}$. **87.** a) $-1{,}4$; b) $-1{,}5$; c) -6. **88.** $-\frac{4}{7}$. **89.** a) $x \neq 0$; b) $x \neq 1$; c) $x \neq y$; d) $x \neq 0$, $x \neq 2$; e) $x \neq -2$; f) $x \neq -2$, $x \neq -3$; g) $x \neq -1$; h) $x \neq -m$, $x \neq n$.

91. $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$. **92.** $p \neq 0$, $p \neq 1$, $p \neq -1$. **93.** x libovolné. **94.** 15. **95.** a) $\frac{19n}{20}, \frac{7n}{10}, \frac{n}{2}, \frac{2n}{5}, \frac{3n}{8}$; b) $\frac{3n}{8}, \frac{2n}{5}, \frac{n}{2}, \frac{7n}{10}, \frac{19n}{20}$. **98.** f) $\frac{2a + 1}{2a - 1}$; g) $3z - 2$; h) $\frac{a - 4}{b}$; i) $\frac{a + b - c}{a - b + c}$; j) $\frac{p - 2}{q - 1}$; k) $\frac{a + 2}{a - 2}$; l) $\frac{x - 1}{x + 1}$; m) $\frac{u + 3}{u - 3}$; n) $\frac{a - 3}{3}$; o) $\frac{r - 2}{r + 3}$; p) $\frac{x - 2}{x - 3}$; q) $\frac{a + 4}{a + 6}$; r) $\frac{3x - 5}{4x - 7}$; s) $\frac{a^2 + a + 1}{a + 1}$; t) $\frac{x}{y(x - y)}$.

103. Nemá smysl pro $a = 4$ a $x + a + 4 = 0$; $z = \frac{x}{a - 4} + 1$. **104.** a) $a + 3$; b) $\frac{5d - 7}{12}$; c) $\frac{xy}{6}$. **105.** a) 1; $m \neq n$; b) $\frac{2}{z}$; $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$; c) $\frac{a^4 - a^3 + a^2 - a + 1}{a^5}$; $a \neq 0$; d) $\frac{1 - u}{u + 1}$; $u \neq -1$; e) $\frac{(m + n)^2}{m - n}$; $m \neq n$; f) 0; $q \neq 0$; g) $\frac{2}{p}$; $p \neq 0, p \neq -q$; h) $\frac{a - b}{a + b}$; $a \neq b, a \neq -b$; i) $\frac{x^2}{1 - x^2}$; $x \neq 1$, $x \neq -1$; j) $\frac{4p - 6q}{2p + 3q}$; $p \neq \frac{3}{2}q$, $p \neq -\frac{3}{2}q$; k) $\frac{v^2 - 12v + 3}{2v(v^2 - 9)}$;

$v \neq 0, v \neq 3, v \neq -3$; l) $\frac{4n - m}{6(m - n)^2}$; $m \neq n$; m) $-\frac{1}{a}$; $a \neq 0$, $a \neq \frac{1}{2}$. **106.** $\frac{3 - 5a}{a^2 - 1}$; $a \neq 1, a \neq -1$; pro $a = 0$ má výraz hodnotu -3. **107.** $\frac{a^3 + a}{a^2 - a + 1}$, a libov. **108.** $\frac{2x^2 + 4x - 2}{(x^2 - 1)^2}$; a) $1\frac{5}{9}$; b) $-\frac{2}{9}$; $x \neq 1$, $x \neq -1$. **109.** $\frac{10}{(x - 5)(x + 2)(1 - x)}$; $x \neq 5$, $x \neq -2$, $x \neq 1$. **110.** O $(x - 1)$.

114. $\frac{3n + 4m + 6s}{12}$; $\frac{9n + 8m + 6s}{12}$. **115.** O $\frac{3a}{n(n + 3)}$ metrů. **116.** Na $\frac{tn}{n - 1}$. **118.** $V = 1$; čísla a, b, c musí být navzájem různá. **119.** $a \neq 2$, $b \neq 1$, $b \neq -1$. **120.** a) $-\frac{18x^3b}{5y^3}$; b) b; c) $\frac{1}{2}(v^2 - 4)$; d) $-\frac{a}{b}$; e) -1; f) $\frac{1}{z}$; g) 1; h) $a - 1$; i) y^2; j) $\frac{p^2}{p - 2}$; k) $\frac{x^3 - 6x^2 + 12x + 9}{x^4 - 81}$; l) $\frac{x^2 + xy + y^2}{y}$.

121. a) $\frac{2ap}{3bq}$; $p \neq 0, q \neq 0, a \neq 0, b \neq 0$; b) $-\frac{3c^2}{a^2b}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$; c) $\frac{a^2}{x^2}$; $x \neq 0, a \neq 0$, $x \neq 1, x \neq -a$; d) $\frac{1}{1 + m}$; $m \neq 1, m \neq -1$; e) $(x - 1)^2$; $x \neq 1$, $x \neq -1$; f) $(p - q)^3$; $p \neq q$, $p \neq -q$; g) u; $1 + uv \neq 0$; h) $\frac{r + s}{r - s}$; $r \neq 0$, $s \neq 0$; $r \neq s$; i) $\frac{b^2 - ab + a^2}{b^2}$; $b \neq 0$, $a + b \neq 0$; j) $c^2 - d^2$; $c + d \neq 0$, $c^2 + cd + d^2 \neq 0$. **122.** $(a + 2)^2$; $a \neq 2$, $a \neq -2, a \neq 0$. **123.** a) $\frac{m - 2}{m}$; $m \neq 0$, $m \neq -2$; b) $\frac{5}{5 - p}$; $p \neq 5$, $p \neq -5$; c) $\frac{b}{a}$; $a \neq 0$, $a \neq b$; d) $\frac{3}{4}$; $x \neq -4$; e) $-\frac{2r}{s}$; $r \neq s, r \neq -s, s \neq 0$; f) $-z$; $k \neq 0$, $z \neq 0$, $k \neq z$; g) $\frac{1}{a - b}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$; h) $\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{ab}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$; i) $\frac{a + b}{a - b}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$; j) $\frac{x^2}{x - y}$; $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$, $x \neq -y$. **124.** a) $\frac{24x}{a}$; b) $\frac{a^{12}}{b^{15}}$; c) 1; d) $\frac{2x^7}{y^7}$; e) $\frac{1}{2a^2}$; f) $\frac{4r^4}{s^4}$; g) $u^2 - v^2$; h) $-c^3$; i) $\frac{x}{x - 1}$; j) $\frac{(a^2 + b^2)^2}{4}$. **125.** $\frac{n + 2}{n - 2}$. **126.** Výrazy nemají smysl pro $p = 0$,

$p = 3$, $p = -3$; $U = V = -1$. **127.** $\dfrac{vt(t_1 + t_2)}{t_1 \cdot t_2}$. **128.** $\dfrac{v_1 v_2(u + d)}{v_1 u + v_2 d}$. **129.** $\dfrac{100y}{x - y}$; $x > y$, $y > 0$. **130.** $\dfrac{(a - b) \cdot 70}{a}$ procentní; 56 %.

131. $\dfrac{130n}{7}$ Kčs. **135.** $\dfrac{a}{b}, \dfrac{a}{a + b}$. **143.** Výraz V ztrácí smysl pro čísla $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$. Jeho upravený tvar je $V = \dfrac{2}{x + 2}$, $x \neq 0$, $x \neq 2$, $x \neq -2$. Je číslem celým pro hodnoty $x = -1$, $x = -3$, $x = -4$. **144.** a) $V = \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$; $a = b$, $a = -b$; b) $a = 4$, $b = 2$ nebo $a = 2$, $b = 4$. **145.** Výraz V nemá smysl pro $a = b$, $ab = 0$, $a = -b$; po zjednodušení je $V = \dfrac{ab}{a^2 + b^2}$; V se nerovná nule pro žádné a, b. Je-li $a > 0$, $b > 0$ nebo $a < 0$, $b < 0$, je $V > 0$; je-li $a > 0$, $b < 0$ nebo $a < 0$, $b > 0$, je $V < 0$. **146.** a) $\dfrac{a(1 + a)}{a + 2}$, $a \neq -2$, $a \neq -1$; b) $\dfrac{a^2 + a + 1}{2a^2 + a + 2}$, $a \neq 0$; c) $\dfrac{a^3 - 2a}{a^4 - a^2 - 1}$; $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1$, $a^2 - 2 \neq 0$, $a^4 - a^2 - 1 \neq 0$; d) $\dfrac{(b - a)^4}{(b - a)^3 + (b - a)^2 + 1}$; $a \neq b$, $(b - a)^3 + (b - a)^2 + 1 \neq 0$; e) $\dfrac{(a + b)^4}{(a + b)^3 - (a + b)^2 + 1}$; $a \neq -b$, $a + b \neq 1$, $a + b \neq -1$, $(a + b)^3 - (a + b)^2 + 1 \neq 0$.

4. LINEÁRNÍ ROVNICE O JEDNÉ NEZNÁMÉ

148. 10. **149.** Nemá řešení. **150.** -1. **151.** 1. **152.** $1\frac{2}{7}$. **153.** -1. **154.** 1. **155.** 5. **156.** $\frac{1}{3}$. **157.** $\frac{1}{2}$. **158.** $-\frac{1}{3}$. **159.** $-\frac{2}{3}$. **160.** 7. **161.** Nemá řešení. **162.** 5. **163.** Rovnici řeší každé číslo. **164.** Nemá řešení. **165.** Každé číslo. **166.** 1.

167. 1. **168.** 24. **169.** $1\frac{2}{3}$. **170.** 7. **171.** 8. **172.** 0,3. **173.** 0,808. **174.** $\frac{50}{43}$. **175.** 2. **176.** $3 + \frac{50}{71}$.

177. 8; 7. **179.** -100; řešení úloze nevyhovuje. **180.** 2880 Kčs; 3840 Kčs. **181.** 2 Kčs, 1,20 Kčs. **182.** 16 mužů, 20 žen, 12 žáků. **183.** 48 chlapců, 16 děvčat. **184.** 45 žáků. **185.** 10 dívek. **186.** 43 žáků.

187. Od pátého měsíce. **188.** Nemá řešení. **189.** 35 velkých, 25 malých. **190.** 30 lístků do divadla, 25 do kina. **191.** 12 tun. **192.** 50°; 50°; 80°. **193.** 20 cm. **194.** 24 cm. **195.** 50 cm, 30 cm. **196.** 5 cm.

197. Největší strana má délku 16 cm. **198.** $\alpha = 120°$, $\beta = 40°$, $\gamma = 20°$. **199.** Za $5\frac{5}{11}$ min po sedmé. **200.** 10,5 km. **202.** Za $1\frac{1}{2}$ h; 6 km od A. **203.** Za 5 h. **204.** 120 km. **205.** 9 min.

207. 600 stromků. **208.** V prvém oddělení je 320 dělníků. **209.** 20 l vody 80 °C teplé a 10 l vody 20 °C teplé. **210.** 240 Kčs; 210 Kčs. **211.** 8 g. **212.** 2,91 kg/dm^3.

5. LINEÁRNÍ ROVNICE S NEZNÁMOU VE JMENOVATELI

216. 3. **217.** Nemá řešení. **218.** $\frac{1}{3}$. **219.** 3. **220.** -2. **221.** 4. **222.** $-\frac{1}{2}$. **223.** 17. **224.** $-3\frac{3}{7}$. **225.** -12. **226.** -4. **227.** 27. **228.** 3. **229.** Nemá řešení. **230.** Nemá řešení. **231.** Vyhovují všechna $x \neq 1$, $x \neq -1$. **232.** Nemá řešení. **233.** -33. **234.** $-8\frac{1}{2}$. **235.** $-\frac{3}{7}$. **236.** 2. **237.** $-0{,}9$. **238.** 14. **239.** Nemá řešení. **240.** $\frac{2}{3}$. **241.** 2. **242.** 8.

243. 0,9. **244.** -5. **246.** Autobus má rychlost 30 km/h, auto 60 km/h. **247.** 6 dní. **248.** Za 12 minut. **249.** 30 dní. **250.** 24 m^2; 12 dní.

6. LINEÁRNÍ ROVNICE S PARAMETREM

253. a) $x = 6; 3; 2; 1$ pro $a = 7; 8; 9; 12$; b) pro $a \neq 1$ je $x = \frac{2a}{a-1} = 2 + \frac{2}{a-1}$. Vyhovují řešení $x = 4$ pro $a = 2$ a $x = 3$ pro $a = 3$; c) pro $a \neq 5$ je $x = \frac{a+5}{a-5} = 1 + \frac{10}{a-5}$. Vyhovují řešení $x = 11; 6; 3; 2$ pro $a = 6; 7; 10; 15$. **254.** $x = 6$ pro $a = 3$, $x = 12$ pro $a = 2$. **255.** a) Pro $a \neq -1$ je $x = \frac{1-a}{1+a} = -1 + \frac{2}{a+1}$. Vyhovují řešení $x = 1; 0; -3; -2$ pro $a = 0; 1; -2; -3$; b) pro $a \neq 2$ je $x = 2 + \frac{7}{a-2}$. Vyhovují řešení $x = 9; 3; -5; 1$ pro $a = 3; 9; 1; -5$. **256.** Pro $a = 0$ vyhovují všechna čísla $x > 0$; pro $a > -1$ má jedno kladné řešení $x = \frac{a+1}{2}$. **257.** $x =$

$= -30; -14; -6; -2$ pro $a = 7; 6; 4; 0$. **258.** Pro $m = 1$ nemá řešení, pro $m \neq 1$ má jedno řešení $x = \frac{2m}{m-1}$. **259.** $y = -\frac{1}{2}$. **260.** Pro $m = 2$ nemá řešení; pro $m \neq 2$ má jedno řešení $y = \frac{5m-13}{m-2}$.

261. Pro $c = 3$ každé číslo; pro $c \neq 3$ má jedno řešení $x = -6$. **262.** Pro $m = 0$, $m = -1$ nemá řešení; pro $m \neq 0$, $m \neq -1$ má jedno řešení $y = \frac{m}{2+2m}$. **263.** Pro $b = 1$, $b = -1$ nemá řešení; pro $b = 0$ je řešením každé číslo; pro $b \neq 1$, $b \neq -1$, $b \neq 0$ jedno řešení $z = 1$. **264.** Pro $a = 0$, $a = 1$ nemá řešení; pro $a \neq 0$, $a \neq 1$ má jedno řešení $x = \frac{a+1}{a-1}$. **265.** Pro $p = 0$ nemá řešení; pro $p \neq 0$ jedno řešení $q = \frac{p+2}{p^2+2}$. **266.** a) Pro $y = 3$ vyhovuje každé číslo; pro $y \neq 3$ má jedno řešení $x = -2$; b) pro $x = -2$ vyhovuje každé číslo; pro $x \neq -2$ jedno řešení $y = 3$. **267.** a) Pro $y = \frac{1}{2}$ nemá řešení; pro $y \neq \frac{1}{2}$ jedno řešení $x = \frac{y}{1-2y}$; b) pro $x = -\frac{1}{2}$ nemá řešení; pro $x \neq -\frac{1}{2}$ jedno řešení $y = \frac{x}{1+2x}$. **268.** Je-li současně $a = 0$, $b = 0$, vyhovuje každé číslo; pro $a^2 + b^2 \neq 0$ jedno řešení $z = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$. **269.** Pro $n = -m$ vyhovuje každé číslo; pro $m = 0$, $n = 0$ nemá řešení; pro $m \neq 0$, $n \neq 0$, $n \neq -m$ jedno řešení $y = 1$. **270.** Pro $p = 0$, $q = 0$, $p = q \neq -2$ nemá řešení; pro $p \neq 0$, $q \neq 0$, $p \neq q$ jedno řešení $v = \frac{p+q+pq}{q-p}$; pro $p = q = -2$ vyhovuje každé číslo.

271. Pro $p = q \neq 0$ vyhovuje každé číslo; pro $p = q = 0$, $p = 0$, $q = 0$ nemá řešení; pro $p \neq 0$, $q \neq 0$, $p \neq q$ má jedno řešení $x = -pq$. **272.** Pro $a = b$ vyhovuje každé číslo; pro $a \neq b$ jedno řešení $y = 0$. **273.** Jedno řešení $x = 6a$, $a \neq 0$. **274.** Pro $a = 0$ vyhovuje každé číslo $y \neq 0$; pro $a \neq 0$ jedno řešení $y = -\frac{a}{6}$. **275.** Pro $b = 0$ nemá řešení; pro $b \neq 0$ má jedno řešení $z = \frac{2-b^2}{b}$. **276.** Pro $q = 0$ a $p = -q$ nemá řešení; pro $p + q \neq 0, q \neq 0$ má jedno řešení $v = \frac{p-q}{p+q}$. **277.** Pro $a + b = 0$ vyhovuje každé číslo; pro $a + b \neq 0$, $b \neq 0$ má jedno řešení $x = -b \neq 0$; pro $b = 0$ nemá řešení. **278.** Pro $m +$

$+ n = 0$ vyhovuje každé číslo $x \neq m$, $x \neq n$, pro $m + n \neq 0$ má jedno řešení $x = \frac{m+n}{2}$, $m \neq n$; pro $m + n \neq 0$, $m = n$ nemá řešení. **280.** Pro $p \neq 3$, $p \neq -3$, $p \neq 2$ má jediné řešení $x = -\frac{6p^2}{(p-2)^2}$; pro $p = 3$, $p = -3$, $p = 2$ nemá řešení; $x = -6$ pro $p = 1$.

281. Je-li $p = \frac{2}{3}$, $p = -\frac{2}{3}$, $p = 0$, nemá řešení; pro $p \neq \frac{2}{3}$, $p \neq -\frac{2}{3}$, $p \neq 0$ má jediné řešení $x = \frac{2}{p}$. **282.** Pro $p = 2$ nemá řešení, pro $p \neq 2$ má jedno řešení $x = \frac{1}{4(p-2)}$; $x = \frac{1}{8}$ pro $p = 4$. **283.** a) Je-li $b \neq -2$ a $12 + 14b + 3b^2 \neq 0$, má jedno řešení $x = \frac{2b}{2+b}$. Je-li $b = -2$, nemá řešení. Je-li $12 + 14b + 3b^2 = 0$, vyhovuje každé číslo. b) Pro $a = 0$ nebo $b = 0$ nebo $c = 0$ nemá řešení; je-li $ab + ac + bc = 0$, vyhovuje každé číslo; je-li $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $ab + ac + bc \neq 0$, má jediný kořen $x = a + b + c$. **284.** Pro $a = 0$, $b = 0$, $p = q \neq 0$ nemá rovnice řešení; pro $p = q = 0$ vyhovují všechna čísla $x \neq 1$, pro $a \neq 0$, $b \neq 0$, $p \neq q$ má jediný kořen $x = \frac{b(p+q)}{a(p-q)} \neq$ $\neq 1$. **285.** Pro $a = 0$ vyhovuje každá dvojice opač. čísel i dvojice $(0; 0)$; je-li $a \neq 0$, je řešení $\frac{a+1}{2}$; $\frac{a-1}{2}$. **286.** $\frac{mn}{m+n}$ h, 3 h; má vždy řešení, jelikož $m > 0$, $n > 0$. **287.** Pro $n = 1$ nemá řešení; pro $n \neq 1$ je délka $\frac{5n}{n-1}$ cm, šířka $\frac{5}{n-1}$ cm. **288.** $\frac{100(20+y)}{y}$ m^3, přičemž $y > 0$; 600 m^3. **289.** Pro $m = 1$ nemá řešení; pro $m > 1$ má řešení $\frac{200}{m-1}$, pokud je číslem přirozeným; nejpravděpodobněji $m = 5$. **290.** $t_1 = \frac{ct}{v+c}$, $s = \frac{vc}{v+c} \cdot t$.

291. Nemá řešení pro $p = q$, $v \neq 0$; vyhovuje každé číslo pro $p = q$, $v = 0$; je-li $p \neq q$, má jedno řešení $\frac{v^2 + q^2 - p^2}{2(p-q)}$. **292.** Je-li $p = q$, nemá řešení; je-li $q > p$, jedno řešení $x = \frac{nq}{q-p}$. **293.** Pole bude zoráno za $x = \frac{a(a-3)}{2a-3}$ h, přičemž $a > 3$. **294.** Za $x = \frac{a - bn}{d(n-1)}$ dní; $x > 0$ pro $a > bn$, $n > 1$; pro $n = 1$, $a = b$ vyhovují všechna kladná čísla.

300. a) 4; 6; b) 8; 4. **301.** Nemá řešení. **302.** a) Nekonečný počet řešení; vyhovují jí všechny dvojice v, $\frac{8-2v}{3}$, kde v je libovolné číslo; b) -6; 12; c) nemá řešení. **303.** a) 3; 2; b) -9; -15. **304.** a) 5; 10; b) 5; 9. **305.** a) 2; 3; b) $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$; c) 3; 1. **306.** 7 812; 7 813. **307.** a) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; b) 3; 4; c) 1; 6. **308.** a) 10; 1; b) 3; $2\frac{1}{2}$. **309.** $5\frac{1}{3}$; $1\frac{1}{3}$. **310.** $\frac{8}{13}$. **311.** 684 $\frac{2}{3}$ litru, 342 $\frac{1}{3}$ litru. **312.** 1 ha, 0,9 ha. **313.** 300; 500. **314.** 29; 27. **315.** 1 600 Kčs, 1 800 Kčs. **316.** 44 let, 12 let. **317.** 405; 138; 543. **318.** 25. **319.** 1,2 dm; 1,8 dm. **320.** $7\frac{1}{2}$ km/h, $4\frac{1}{2}$ km/h. **321.** 65 hl/h; 75 hl/h. **322.** 46 kg; 40 kg. **323.** 88,64 kg; 35,36 kg. **324.** 63,6 kg; 36,4 kg.

325. a) 154 Kčs, 176 Kčs; b) 137 Kčs, 193 Kčs. **326.** 30 dní, 45 dní. **327.** 28 kroků. **328.** 1,53 km/min $\doteq$ 92 km/h; 61 km/h. **329.** 2,7 A; 1,8 A. **330.** 36°; 54°. **331.** 5 dm, 5 dm, 8 dm. **332.** 51 cm; 19 cm. **333.** $z_1 = 64{,}8$ cm, $z_2 = 7{,}2$ cm. **334.** a) Je-li $p = -1$, nemá řešení; je-li $p \neq -1$, má soustava jedno řešení $x = \frac{6}{p+1}$, $y = \frac{4-2p}{p+1}$; b) pro $p = 10$ nemá řešení; pro $p \neq 10$ má jedno řešení $x = \frac{12-p}{30-3p}$, $y = \frac{1}{30-3p}$; c) je-li $p = -2$, nemá řešení; je-li $p \neq -2$, má jedno řešení $x = \frac{18}{p+2}$, $y = \frac{20-8p}{p+2}$; d) je-li $p = -\frac{1}{3}$, nemá řešení; je-li $p \neq -\frac{1}{3}$, má jedno řešení $x = \frac{p+3}{3p+1}$, $y = \frac{4}{3p+1}$; e) je-li $p = -\frac{1}{6}$, nemá řešení; je-li $p \neq -\frac{1}{6}, p \neq 0$, má jedno řešení $x = \frac{3}{6p+1}$, $y = \frac{3p-4}{p(6p+1)}$; pro $p = 0$ nemá řešení.

335. a) Je-li $a + b = 0$, má soustava nekonečně mnoho řešení a vyhovují jí všechny dvojice x, $-x$, kde x je libovolné číslo; je-li $a + b \neq 0$, má jediné řešení $x = a(a-b)$, $y = b(a-b)$; b) vždy jedno řešení $x = a(a-b)$, $y = b(a-b)$; c) je-li $m = 0$, $k = 0$, má soustava nekonečný počet řešení a vyhovují jí všechny dvojice x, 0, kde x je libovolné číslo; je-li $m = 0$, $k \neq 0$, nemá řešení; je-li $m \neq 0$, k libovolné, má soustava jedno řešení $x = \frac{k}{m}$, $y = 0$; d) je-li $b = 0$, nemá řešení; je-li $b \neq 0$, má soustava nekonečný počet řešení a vyhovují jí všechny dvojice x, $\frac{c-ax}{b}$, kde x je libovolné číslo. **337.**

a) Je-li $p = -1$, nemá řešení; je-li $p = 1$, má nekonečný počet řešení a vyhovují jí všechny dvojice čísel x, $1 - x$, kde x je libovolné; pro $p \neq -1$, $p \neq 1$ má jedno řešení $x = \frac{1}{p+1}$, $y = \frac{1}{p+1}$; b) je-li $p = 2$, nemá řešení; je-li $p = -2$, má soustava nekonečný počet řešení a vyhovují jí všechny dvojice čísel x, $\frac{5+2x}{2}$, kde x je libovolné číslo; je-li $p \neq 2$, $p \neq -2$, má jediné řešení $x = \frac{1}{2-p}$, $y = \frac{5-3p}{2-p}$; c) je-li $p = 1$, $p = -1$, nemá soustava řešení; je-li $p \neq 1$, $p \neq -1$, má jedno řešení $x = \frac{p+1}{p-1}$, $y = \frac{2(p^2+1)}{p^2-1}$.
338. $x = \frac{3p+8}{p^2+6}$, $y = \frac{4p-9}{p^2+6}$. **339.** Je-li $a = -1$, $a = -\frac{1}{2}$, nemá řešení; je-li $a = 1$, má nekonečný počet řešení a vyhovují všechny dvojice čísel x, $\frac{3x+2}{x+1}$, přičemž $x \neq -1$; je-li $a \neq -1$, $a \neq 1$, $a \neq -\frac{1}{2}$, má soustava jedno řešení $x = -\frac{a}{1+2a}$, $y = \frac{1+2a}{1+a}$. **340.** $p + \frac{q}{2}$; $p - \frac{q}{2}$, $p > \frac{q}{2}$, $q > 0$.
341. $\frac{ab}{d(c-b)} = 25\,000$; $\frac{ac}{d(c-b)} = 30\,000$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $c > b$. **342.** $10 + d$, 10, $10 - d$, $0 < d < 5$. **343.** $\frac{n(b-v)}{bu-av}$ Kčs; $\frac{n(u-a)}{bu-av}$ Kčs, $bu > av$, $b > v$, $u > a$ nebo $bu < av$, $b < v$, $u < a$. **344.** Je-li $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq$ $\neq \frac{c_1}{c_2}$, nemá soustava řešení; je-li $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, má nekonečný počet řešení $\left(x \text{ libovolné}, y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}\right)$; je-li $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, má jedno řešení $x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$. **346.** 1,068 kg; 0,426 kg. **347.** $s_1(s - s_2) : s_2(s_1 - s)$. **348.** 30 °C; 18 °C.

8. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC O TŘECH A VÍCE NEZNÁMÝCH

349. a) 20; 17; 5; b) 8; 5; 3; c) 3; 2; 1; d) 1; 3; 5. **350.** a) 15; 12; 10; b) 7; 5; −3. **351.** a) 1; −1; 2; b) 0; $\frac{1}{2}$; 0. **352.** a) $\frac{100}{27}$; $\frac{100}{27}$; $\frac{200}{27}$; b) $\frac{55}{4}$, $\frac{55}{4}$, $\frac{55}{4}$.
353. a) 10; 20; 30; b) 20; 30; 40. **354.** 5; 2; 0. **355.** 1; 1; 1. **356.** 11; 9; 7. **357.** 3; 4; 5. **358.** 5; 3; 1.

360. a) $x = 8 - u$, $y = -4 + u$, $z = 12 - u$, u libovolné číslo; b) 2; 4; 8; 10. **361.** a) 1; 2; 3; 4; b) $\frac{11}{2}$; 6; 2; $\frac{3}{2}$; c) 1; 1; 1; 1; d) 2; 2; 3; 3. **362.** 222; 333; 444. **363.** 3; 16; 81. **364.** 17; 31; 43. **365.** 483. **366.** 720 à 1 Kčs, 40 à 2 Kčs, 120 à 0,50 Kčs. **367.** Prvním za 72 min, druhým za 120 min, třetím za 6 h. **368.** $\frac{a}{6}$; $\frac{a}{3}$; $\frac{a}{2}$. **369.** 17; 21; 25. **370.** Vždy jedno řešení $x = \frac{b+c-a}{2}$, $y = \frac{a+c-b}{2}$, $z = \frac{a+b-c}{2}$.

371. a) Je-li $p = 2$, nemá soustava řešení; je-li $p \neq 2$, má soustava jedno řešení $x = \frac{5p-18}{p-2}$, $y = \frac{4}{p-2}$, $z = \frac{p+2}{p-2}$; b) pro $p = 1$ nemá řešení; pro $p \neq 1$ jedno řešení $x = \frac{3p-5}{p-1}$, $y = z = \frac{1}{p-1}$; c) je-li $p = 0$, nemá řešení; je-li $p \neq 0$, má jedno řešení $x = p - 1$, $y = p$, $z = \frac{1-p}{p}$; d) je-li $p = -1$, má soustava nekonečný počet řešení a vyhovují jí všechny trojice x, $x - 1$, $x - 1$, kde x je libovolné číslo. Je-li $p \neq -1$, má soustava jediné řěšení $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$. **373.** a) Je-li $p = -2$, nemá řešení; je-li $p = 1$, má nekonečně mnoho řešení a vyhovují jí všechny trojice čísel x, y, $1 - x - y$, kde x, y jsou libovolná čísla; je-li $p \neq -2$, $p \neq 1$, má soustava jedno řešení $x = -\frac{p+1}{p+2}$, $y = \frac{1}{p+2}$, $z = \frac{(p+1)^2}{p+2}$; b) je-li $p \neq 1$, $p \neq -1$, má soustava jediné řešení $x = y = \frac{1}{(1-p)(1+p^2)}$, $z = \frac{1}{1+p^2}$; je-li $p = 1$, nemá soustava řešení; je-li $p = -1$, má soustava nekonečný počet řešení a vyhovují jí všechny trojice čísel x, y, $1 - x - y$, kde x, y jsou libovolná čísla. **374.** Je-li $p = 0$, nemá úloha řešení; je-li $p > 0$, nateklo rourou A 25 m^3/h, rourou B 30 m^3/h a rourou C $\frac{120}{p}$ m^3/h. **375.** a) Největších matic je $14p$, středních $\frac{15p}{2}$, nejmenších $\frac{17p}{2}$, přičemž p je sudé kladné; b) je-li $p = \frac{17}{15}$, má úloha nekonečně mnoho řešení a vyhovují jí trojice čísel $\frac{28}{15}n$; n; $\frac{17}{15}n$, kde $n = 15k$, k přirozené číslo; pro $p \neq \frac{17}{15}$ nemá úloha smysl. **376.** Je-li $a = -3$, má soustava nekonečný počet řešení a vyhovují jí všechny trojice čísel x, $\frac{3x-2}{3}$, $\frac{3x-4}{3}$, kde x je libovolné číslo.

Je-li $a = 0$, nemá soustava řešení; je-li $a \neq 0$, $a \neq -3$, má soustava jedno řešení $x = \frac{a+1}{a}$, $y = \frac{a+3}{a}$, $z = -\frac{2(a+2)}{a}$.

9. OPAKOVÁNÍ

377. a) 60; b) $-6\frac{1}{9}$. **378.** a) $10a^4 - 10a^3b + 4a^2b^2 - 20ab^3 + 2b^4$; b) $-8a^4 + 16a^3b - 14a^2b^2 + 8ab^3 - 6b^4$; c) $-6a^3b + 12ab^3 - 4b^4$. **380.** a) $4x^6y^4$; b) $5x + 2$; c) $4x(x^2 + 1)$; d) $14m^4 + 16m^2 - 32$. **381.** a) $2(x + 2)(x - 5)$; b) $a^2(x + 9)(x - 10)$; c) $2(x + 2)(2x - 1)$; d) $(nx - 7)(nx + 2)$; e) $xy(y - 3)(y - 4)$; f) $2(y + 3) . (3y - 1)$. **382.** a) $(a - 2)^2(a + 2)$; b) $ax(a - b)(a + b + 1)$; c) $5xy(x + y) . (x^2 + xy + y^2)$. **383.** $4pqzv(qz + pv)^2$. **385.** $V = (a - c)(c - b)(a - b)$; pro čísla a, b, c navzájem různá není žádný z činitelů výrazu V rovný nule. **386.** $D = (a - 2)(2a - 1)$, $n = (a - 1)(a - 2)(2a + 1)(2a - 1)$. **387.** $\frac{100n}{100 + p}$, $\frac{np}{100 + p}$; 600; 120. **388.** a) $\frac{t}{s}$; b) $\frac{t(100 + p)}{100s}$; c) $\frac{t(200 + p)}{200s}$. **389.** $\frac{2(1 - x)}{1 + x}$; $x \neq -1$. **390.** $\frac{3}{2(6 - a)}$; $a \neq 6$, $a \neq -6$, $a \neq -\frac{6}{7}$.

391. 1; $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x + y \neq 0$. **392.** $\frac{a + 2}{2(a - 2)}$; $a \neq 2$, $a \neq -2$, $a \neq -3$. **393.** $\left(\frac{x + y - z}{x - y + z}\right)^2$; $x + y + z \neq 0$, $x \neq y + z$, $y \neq x + z$, $z \neq x + y$. **394.** a) Pro $p = 1$, $p = -1$, $q = 1$, $q = -1$; b) $x = 1$, $x = -1$. **395.** a) 1; $y \neq 0$, $yz + 1 \neq 0$, $xyz + x + z \neq 0$; b) 1; $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, $xy + xz + yz \neq 0$. **396.** -4. **397.** 68 km/h. **398.** 5; 15. **399.** a) Rovnici splňují všechna čísla $x \neq 0$, $x \neq -1$; b) nemá řešení. **400.** Chybně opsaná rovnice měla tvar $\frac{x + 3}{7x + 23} = \frac{x - 2}{7(x - 1)}$.

401. $4\frac{1}{2}$ h. **402.** a) $x = 4$ pro $n = 3$ a $x = 5$ pro $n = 1$; b) $x = 1$ pro $n = 2$. **403.** a) Pro $p = 3$ nemá řešení, pro $p = -3$ má nekonečný počet řešení a vyhovuje jí každé číslo x; pro $p \neq 3$, $p \neq -3$ má jedno řešení $x = \frac{1}{3 - p}$; b) pro $p = 0$, $p = -1$ nemá řešení; pro $p \neq 0$, $p \neq -1$ jedno řešení $x = \frac{p + 3}{p + 1}$; c) pro $p = 1$ vyhovuje každé číslo; pro $p = 0$ nemá řešení; pro $p \neq 1$, $p \neq 0$ má jedno řešení $x = \frac{p + 1}{2}$; d) pro $p = -1$, $p = 0$ nemá řešení; pro $p \neq -1$, $p \neq 0$ má jedno řešení $x = \frac{p}{p + 1} \neq p$. **404.** a) Pro

$p = 0, p = 1$ nemá řešení; pro $p \neq 0, p \neq 1$ má jedno řešení $x = \frac{p}{p-1}$; b) pro $m = 0$, $n = 0$, $an = cm$ nemá řešení; pro $m \neq 0$, $n \neq 0$, $an \neq cm$ má jedno řešení $x = \frac{an - cm}{mn}$. **405.** Jsou 4 možnosti. Buď 15 kusů po 3 Kčs nebo 5 kusů po 5 Kčs nebo 3 kusy po 7 Kčs nebo 1 kus po 17 Kčs. **406.** Za $\frac{abc}{ab + ac + bc}$ h; a) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$; b) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$; $ab + ac + bc \neq 0$. **407.** a) 3; 1; b) 2; 2. **408.** $\frac{1}{2}$; 0. **409.** 11 cm, 11 cm, 7 cm. **410.** 35 cm, 42 cm.

411. 67°7′; 56°13′; 56°40′. **412.** Plán 13 400 tun, vytěženo 13 668 tun a 13 266 tun. **413.** a) Pro $a = -\frac{5}{3}$ nemá řešení; pro $a \neq -\frac{5}{3}$ má soustava jedno řešení $x = \frac{21}{5 + 3a}$, $y = \frac{15(2a + 1)}{5 + 3a}$; b) pro $a = \frac{3}{2}$ nemá řešení; pro $a \neq \frac{3}{2}$ má jedno řešení $x = \frac{3(5 - 4a)}{2(3 - 2a)}$, $y = \frac{2}{3 - 2a}$. **414.** Je-li $a = 2$, $s \neq 0$, nemá soustava řešení; je-li $a = 2$, $s = 0$, má soustava nekonečný počet řešení a vyhovují jí všechny dvojice čísel x, $s - x$, kde x je libovolné číslo; je-li $a \neq 2$, s libovolné, má jedno řešení $x = \frac{2s}{2 - a}$, $y = -\frac{as}{2 - a}$. **415.** a) 4; 6; 8; b) $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$. **416.** a) Soustava má dvě řešení; (0; 0; 0); $\left(\frac{12}{7}; \frac{12}{5}; -12\right)$; b) soustava má dvě řešení; (0; 0; 0); $\left(-1; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}\right)$. **417.** První za 20 dní, druhý za 30 dní, třetí za 60 dní. **418.** 10 cm, 6 cm, 15 cm. **419.** 3; 4; 8. **420.** Je-li $b = 0$ nebo $a = 1$, $b \neq \frac{1}{2}$, nemá soustava řešení; je-li $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, má soustava nekonečný počet řešení a vyhovují jí všechny trojice čísel x, 2, $2 - x$, kde x je libovolné číslo; je-li $a \neq 1, b \neq 0$, má soustava jediné řešení $x = \frac{2b - 1}{b(a - 1)}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{2ab - 4b + 1}{b(a - 1)}$.

421. 2; 3; 4; 5. **422.** $\frac{2\pi m}{m + n + p + q}$, $\frac{2\pi n}{m + n + p + q}$, $\frac{2\pi p}{m + n + p + q}$, $\frac{2\pi q}{m + n + p + q}$. **423.** $a = 5, b = 3, c = 7, d = 9$.

II. KVADRATICKÉ ROVNICE, ROVNICE RECIPROKÉ A BINOMICKÉ

1. NEÚPLNÁ KVADRATICKÁ ROVNICE

9. a) $x_1 = 0$, $x_2 = a + b$; b) $x_1 = -2b$, $x_2 = 0$ pro $a \neq 0$, pro $a = 0$ vyhovuje každé x. **10.** $t = 2n$.

18. a) $x = \pm\sqrt{a}$, $a \geqq 0$; b) $\pm ab$; c) $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$, $\frac{b}{a} \geqq 0$; d) $\pm\frac{b\sqrt{a}}{a}$, $a > 0$.

19. a) $\pm\sqrt{\frac{bc}{ad}}$, $\frac{bc}{ad} \geqq 0$; b) $\pm\sqrt{\frac{1}{n}}$; $n \geqq 0$; c) $\pm\frac{1}{a}$; d) $\pm\frac{\sqrt{b}}{a}$. **20.** a) $\pm\frac{1}{2}$; b) $\pm\frac{5}{2}$; c) $\pm\frac{15}{8}$; d) $\pm\frac{1}{2}$.

21. a) ± 4, ± 5; b) $\pm\sqrt{5}$, $\pm\sqrt{6}$; c) ± 2; d) $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. **22.** a) $\pm(p-1)$; b) $\pm(a-b)$; c) $x_1 = b$, $x_2 = -2a - b$; d) ± 1; e) ± 1 pro $ad \neq bc$; pro $ad - bc = 0$ vyhovuje každé x; f) $\pm 2a$. **23.** ± 6. **24.** -6. **26.** $\pm 12\sqrt{7}$, $\pm 16\sqrt{7}$. **27.** a) 85, 204; b) $15\sqrt{2}$, $36\sqrt{2}$. **28.** $a_1 = 7{,}5$ cm, $v_1 = 10$ cm. **29.** $4s$. **30.** a) $6s$; b) $\sqrt{\frac{2s}{g}}$.

31. $\frac{10}{\sqrt{3\pi}}$. **32.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, $r = 17{,}6$ cm. **34.** O 85 cm. **35.** 21,2 cm. **36.** Ve vzdálenosti 2,25 m od silnějšího zdroje. **37.** a) $\frac{2F}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}$; b) 5,99 mm. **38.** 695 kp, 95,5 kp mm^{-2}; 1 mm. **39.** 39,8 kp mm^{-2}. **40.** Každá tři čísla.

2. ÚPLNÁ KVADRATICKÁ ROVNICE

48. a) $-3{,}1$; b) 4, -2; c) 7, -13; d) $3 \pm \sqrt{5}$. **49.** a) 8, -2; b) 12, -2; c) 4, -16; d) 15, -1. **50.** a) 10, -2; b) 6,5; c) 4,3; d) 9, -5.

51. a) -2, -12; b) nemá řešení; c) 4,4; $-3{,}6$. **52.** a) 1, -3; b) $2 \pm \sqrt{5}$; c) -2, $\frac{4}{3}$; d) $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{65}}{10}$. **53.** a) 0,9; $-0{,}7$; b) 2, $-\frac{1}{3}$; c) $\frac{3}{4}$, -1; d) nemá řešení. **54.** a) $\frac{10}{3}$, $-\frac{8}{3}$; b) 2,4; $-1{,}6$; c) 0,3; $-1{,}2$; d) nemá řešení. **55.** a) $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$; c) pro žádné x. **56.** a) $\frac{a}{2}$, $-a$; b) $\frac{1}{2a}\cdot(-1 \pm \sqrt{5})$;

c) $-\frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{5})$; d) $\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt{\frac{b}{a}}$, kde a, b jsou téhož znamení a různá od nuly. **57.** a), b), c), d), g) nejsou, e, f) ano. **58.** Nejsou. **59.** Násobíme-li rovnici výrazem $(x - \alpha)$, kde α není kořenem dané rovnice, nebo výrazem $\frac{1}{x - \beta}$, kde β je kořenem dané rovnice. **60.** Z Viètovy věty: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 . x_2 = q$. a) Oba téhož znamení; b) opačného znamení; c) aspoň jeden roven nule.

61. a) 1; 6; b) -1; -4; c) 4; -3; d) -6; 2. **62.** a) 2; 4; b) -2; -4; c) 6; 3; d) -6; -3. **63.** a) 3; 4; b) 20; -1; c) 6; 4; d) -8; -3. **64.** a) $x^2 - 5x + 6 = 0$; b) $x^2 - 8x + 15 = 0$; c) $x^2 - x - 6 = 0$; d) $x^2 + 3x - 10 = 0$. **65.** a) $x^2 + 6x + 8 = 0$; b) $4x^2 + 7x + 3 = 0$; c) $2x^2 - 7x + 3 = 0$; d) $2x^2 + 9x - 5 = 0$. **66.** a) $x^2 - 3x = 0$; b) $x^2 + 2x = 0$; c) $9x^2 - 1 = 0$; d) $x^2 - 0{,}2x - 0{,}03 = 0$; e) $2x^2 - x = 0$. **67.** a) $ax^2 - x(a^2 + 1) + a = 0$, $a \neq 0$; b) $x^2 - 5ax + 6a^2 = 0$; c) $x^2 + ax - 2a^2 = 0$; d) $ab . x^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. **68.** a) $(x - 3)(x - 1)$; b) $(x - 7)(x + 5)$; c) $(x - 1)(x - 9)$; d) $(x - 10)(x + 6)$. **69.** a) $(x + 9)(x - 5)$; b) $(x - 6) . (x - 7)$; c) $(x - a - 1)(x - a + 1)$; d) 61a) $(x - 6)(x - 1)$; 61b) $(x + 4) . (x + 1)$; 61c) $(x - 4)(x + 3)$; 61d) $(x + 6)(x - 2)$; 62a) $(x - 4)(x - 2)$; 62b) $(x + 4)(x + 2)$; 62c) $(x - 3)(x - 6)$; 62d) $(x + 3)(x + 6)$; 63a) $(x - 4) . (x - 3)$; 63b) $(x - 20)(x + 1)$; 63c) $(x - 6)(x - 4)$; 63d) $(x + 3)(x + 8)$.

70. a) $3(x - 2a) . \left(x + \frac{5}{3}a\right)$; b) $(m - 8)(m + 7)$; c) $(a - 8)(a - 9)$; d) $(y - 3a)(y + 2a)$; e) $(y + 2a)(y - a)$.

71. a) $[x - (a + b)] . [x - (a - b)]$; b) $4(x - 2a)\left(x + \frac{3}{2}a\right)$; c) $(x - 3b + 2a)(x - 3b - 2a)$. **72.** a) 2; 5; b) 45; -52; c) 0,3; $-1{,}2$; d) $3 + \sqrt{2}$; $3 - \sqrt{2}$. **73.** c) $\frac{b}{2a}$; d) $-a$. **75.** a) -5; b) $-2a$; c) $\frac{16}{7}$; d) 15. **76.** a) -60; b) $-5{,}7$; c) $4a^2 - 1$; d) 4; e) 36. **77.** $x^2 + \frac{b}{a}x + 1 = 0$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 . x_2 = 1$. **78.** Nemůže. **79.** a) $q(-1 + \sqrt{2})$; b) $q(2 + \sqrt{3})$; c) $\frac{q}{2}(1 + \sqrt{3})$. **83.** a) $x_1^2 + x_2^2 = 34$; b) $x_1^2 - x_2^2 = \pm 16$. **84.** a) $x^2 - px + q = 0$; b) $x^2 + (p + 2n)x + q + pn + n^2 = 0$; c) $qx^2 + px + 1 = 0$; d) $x^2 + pnx + qn^2 = 0$; e) $qx^2 + p(q + 1)x + (q - 1)^2 + p^2 = 0$. **85.** $x_1 + x_2 = -p$; $x_1x_2 = q$; $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{p}{q}$. **86.** Důkaz podobně jako v úloze 85. **87.**

$x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a}$; $x_1' . x_2' = \dfrac{a}{c}$; $x_1 . x_2 = \dfrac{1}{x_1' x_2'}$. **88.** a) $p = 0$; $q = 0$; b) $p = 1$; $q = -2$. **89.** Nepřímo. **90.** $D = b^2 - 4ac = 0$; $c = \dfrac{b^2}{4a}$; $D' = (2ax + b)^2$.

91. $q = x_1 x_2$; $q = (a + \sqrt{b})x_2$. **97.** Diskriminant není druhá mocnina čísla. **99.** a) 8; -12; b) 18; -12; c) 14; -36; d) -6; -21. **100.** a) 14; 10; b) 9; -24; c) 9; 8; d) -1; -42.

101. a) 0,3; $-1{,}2$; b) 6; $-\dfrac{13}{3}$; c) 1; $\dfrac{1}{2}$. **102.** a) 4; $-0{,}4$; b) 0,6; $-\dfrac{3}{2}$; c) -5; $\dfrac{3}{4}$; d) $\dfrac{7}{8}$; $-\dfrac{5}{8}$. **103.** a) $\dfrac{7}{5}$; $\dfrac{5}{7}$; b) nemá řešení; c) 0,9; $-0{,}7$; d) $\dfrac{3}{8}$; $-\dfrac{1}{8}$. **104.** a) 3; -11; b) 5; $-\dfrac{5}{6}$; c) 10; $-0{,}7$; d) 3; $-\dfrac{24}{13}$. **105.** a) Nemá řešení; b) 0,9; $-0{,}3$; c) $4 \pm \sqrt{31}$; d) 2; -20. **106.** a) 2; -4; b) 2; $-\dfrac{1}{2}$; c) 7; 3; d) 10; 2; e) -3; $-0{,}6$; f) 7; $\dfrac{31}{8}$; g) 4; $-\dfrac{4}{11}$; h) $\sqrt{3} \pm 2\sqrt{2}$. **107.** a) 4; $-\dfrac{5}{4}$; b) 5; $-\dfrac{2}{3}$; c) 9; 4; d) 9; -42. **108.** a) 7; $\dfrac{1}{7}$; b) $-3 \pm \sqrt{30}$; c) 8; -5; d) $\dfrac{3}{4}$; $-\dfrac{1}{3}$. **109.** a) 0; -27; b) ± 3; c) ± 1; d) 4; $\dfrac{8}{7}$.

111. a) Nemá řešení; b) nemá řešení; c) $\pm 3\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}$; $|a| > 1$; $a \neq 1$; d) $\dfrac{b}{2}$; $-\dfrac{b}{6}$. **112.** a) $\pm \dfrac{b}{3}$; b) $\dfrac{a^2 + b^2}{2a}$, $a \neq 0$; $\dfrac{a^2 + b^2}{2b}$, $b \neq 0$ pro $|a| \neq |b|$; c) $\dfrac{a}{b}$; $-\dfrac{b}{a}$; $a \neq 0$; $b \neq 0$; d) $-a$; $\dfrac{1}{a}$; $a \neq 0$. **113.** a) 3; $\dfrac{1}{3}$; b) $-\dfrac{1}{3}$; -7; c) $\dfrac{7}{5}$; $\dfrac{5}{7}$; d) $\dfrac{9}{7}$; $-\dfrac{7}{5}$; e) $2a$; $-14a$; f) $7a$. **114.** a) $\dfrac{a}{2}$; $\dfrac{2}{a}$, $a \neq 0$; b) $\dfrac{2a}{b}$; $-\dfrac{b}{2a}$, $ab \neq 0$; c) $3a$; $-\dfrac{a}{3}$; d) $-\dfrac{b^2}{a^2}$; 1 (pro $a \neq \pm b \neq 0$); každé x pro $b = 0, a \neq 0$.

115. a) $2a + b$; b; b) $\dfrac{a}{2} . (-3 \pm \sqrt{3})$, $a \neq 0$; c) $-m$; $-n$; d) $m \pm a$. **116.** a) $3a$, $-2a$, pro $a \neq 0$, pro $a = 0$ není řešení; b) $\dfrac{a+b}{a-b}$, 1, $a \neq 0, a \neq b$; c) a, $\dfrac{c+u}{2}$, $a \neq 0, c \neq -u$; d) $\dfrac{a-c}{c-d}$, 1 pro $a \neq c, c \neq d, c^2 \neq ad$; e) $a - 2b, a + b$,

$a \neq \pm b$; f) $\frac{4+k}{2}$, $k \neq -2$. **117.** Shodné pro $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{2}{35}$; b) $3 \pm 2\sqrt{3}$; c) 0; 8; d) žádné a; různé pro: a) $a > 2$, $a < \frac{2}{35}$; b) $a < 3 - 2\sqrt{3}$, $a > 3 + 2\sqrt{3}$; c) $a < 0$, $a > 8$; d) každé a. **118.** $|b| \geqq 2$.

3. ROVNICE S NEZNÁMOU V ODMOCNĚNCI

119. a), b) ano, c), d) ne. **120.** a) d) e) h) má; b) c) f) g) nemá.

121. a) Odmocnina je číslo nezáporné. Součet dvou kladných čísel není roven nule; b) $x \geqq 1$; potom $x + 1 \neq x - 1$; c) $x \geqq 7$; $x \leqq 5$ (nemožné); d) součet dvou čísel nezáporných není záporný. **122.** a) 4; b) 9; c) 28; d) 16; e) 12; f) 15; g) $m + \frac{p^2}{n^2}$. **123.** a) Nemá řešení; b) 8; c) 8; d) 10; e) 30. **124.** a) 8; b) nemá řešení; c) $-5{,}4$; d) -5. **125.** a) 20; b) -1; c) 0; 3; d) $\pm 3\sqrt{2}$ [v d) dosaďte: $y = \sqrt{x^2 - 9}$]. **126.** a) 324; b) 27; -8; c) 1; $-\frac{27}{8}$; d) 84; 19; e) 0; -5. **127.** a) 7; b) buď 54; 24 nebo -24; -54; c) $\pm 2\sqrt{2}$; d) 4; e) 2. **128.** a) ± 5; b) ± 4; c) 4; -3; d) 4; 2. **129.** a) b) d) Nemá řešení; c) 7. **130.** a) 1,1; b) 5; c) 16; d) $\frac{169}{64}$.

131. a) 18; b) 54; c) 16; d) 7; e) $\frac{3}{4}$; f) 8. **132.** a) 9; b) 25; c) nemá řešení; d) 64,16. **133.** a) $b^2 + a$, $b \geqq 0$; b) $a - (a + b)^2$, $a + b \geqq 0$; c) $\pm a$; $a \geqq 0$ (pro $|x| \leqq a$); d) a; $a \geqq 0$. **134.** a) a; b) $9a$, $a \geqq 0$, pro $a < 0$ je $x = \frac{a}{3}$; c) 0; d) $\frac{2a^3}{b(a^2 + 1)}$, $a \geqq 1$, $b > 0$; e) $a^2 - b^2$; 0 ($a \geqq 0$, $b \geqq 0$).

4. SLOVNÍ ÚLOHY NA KVADRATICKOU ROVNICI

136. 86. **137.** $24\sqrt{2}$ cm. **138.** $1 + \sqrt{2}$. **139.** O 5 %. **140.** $z_1 = 18$ cm, $z_2 = 12$ cm, $v = 14$ cm.

141. $z_1 = 1$ cm, $z_2 = 29$ cm nebo $z_1 = 2$ cm, $z_2 = 28$ cm, atd., nebo $z_1 = 14$ cm, $z_2 = 16$ cm, $v = 12$ cm. **142.** 20, 10. **143.** O 200 %. **144.** Platí pro každé r. **145.** a) Celkem 40, přespolních 24, domácích 16; b) celkem 10; 9 přespolních; 1 domácí. **146.** a) $\frac{-n \pm \sqrt{2k^2 - n^2}}{2}$ (10 kp, 24 kp); b) obě stejné: 18,38 kp. **147.** Buď o 20 %, nebo o 80 %. **148.** O 6 %. **149.** 20 %. **150.** 5 %.

151. $\frac{1}{2}\left(\frac{-(a+b)}{2}+\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}+f}\right)$; 14,3 m. **152.** $\frac{m}{\sqrt{8\,000}}$; 34 min. **153.** $t = 6{,}0$ min; $AB = 49{,}70$ km; $LB \doteq 130$ km. **154.** 10 l. **155.** a) 4 s.

156. a) 20 vteřin; b) nemá řešení; c) $t = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 2gs}}{g}$; pro $s = \frac{c^2}{2g}$; 32 km za 80 vteřin. **157.** a) -9; -7; -5; b) 5; 7; 9. **158.** 375 m. **159.** 12. **160.** 45 dní, 36 dní.

161. Osobní vlak 40 km/h, rychlík 70 km/h. **162.** $1 + \sqrt{1 + 2a}$ strojů. **163.** $\frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} - 1}$; b) $7 \pm 4\sqrt{3}$. **164.** První těleso 4 m/s, druhé 2 m/s. **165.** První těleso 4 m/s, druhé 2 m/s. **166.** 40 stromků. **167.** 320 km/h, 400 km/h. **168.** 40 km/h, 30 km/h. **169.** 5 km/h. **170.** 24 km/h.

171. 3 m, 4 m. **172.** První 48 součástek, druhý 20 součástek. **173.** 4. **174.** 12 km/h, 2,5 h. **175.** Za 8 dní, místo 10 dní plánovaných. **176.** 300 Kčs, 5 %. (Druhé řešení je nepravděpodobné, p bv bylo 300 %.) **177.** 3,5 tuny. **178.** 24 m³. **179.** $\varrho_1 = 0{,}6$ g/cm³; $\varrho_2 = 0{,}8$ g/cm³. **180.** 20 km/h.

181. První dělník za $t - 2 + \sqrt{t^2 + 4}$ h; druhý za $t + 2 + \sqrt{t^2 + 4}$ h. **182.** Kůň: $\frac{-t\,.\,p + \sqrt{t^2p^2 + 4ptn}}{2t}$; traktor: $\frac{tp + \sqrt{t^2p^2 + ptn}}{2t}$ ha. **183.** $\frac{\pm\, t\,.\,n + \sqrt{t^2n^2 + 4ptn}}{2n}$. **184.** První proběhne dráhu za $\frac{-d + \sqrt{d^2 + 4t\,.\,d}}{2}$, druhé za $\frac{d + \sqrt{d^2 + 4td}}{2}$ sekund. **185.** $\frac{\sqrt{(a + 10bc)^2 + 400abc} - (a + 10bc)}{20c}$; $a \geqq 0$; $b \geqq 0$; $c \geqq 0$. **186.** 2 m od S_1. **187.** 158. **188.** 345 600 km; 430 000 km. **189.** Chyba je v poslední řádce. Z $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2}$ neplyne vždy $a = b$.

5. SOUSTAVY ROVNICE KVADRATICKÉ A LINEÁRNÍ

191. a) (2; 3); (3; 2); b) (8; 6); (-6; -8); c) (10; 3); (-3; -10); d) $\left(\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right)$. **192.** a) $\pm 5\sqrt{3}$; $\pm 5\sqrt{2}$; b) 2; $\pm\sqrt{3}$; c) ± 6; ± 2. **193.** a) (5,7); $\left(-4\frac{7}{13}; -7\frac{4}{13}\right)$; b) ± 28, ± 12; c) (0,0), (2,4). **194.** a) ± 6, ± 4; b) (5,0),

$\left(-15, \frac{40}{3}\right)$; c) (0,0). **195.** a) (8,1); b) (3,4), (1,2) $\left(x \neq 2, y > \frac{3x-5}{x-2}\right)$; c) $\frac{2}{3}(-1 \pm \sqrt{22})$; $-1 \pm \sqrt{22}$; d) ± 3, ± 2. **196.** a) $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$, $y_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$; b) $a \pm \sqrt{a^2 - b}$; $a \mp \sqrt{a^2 - b}$; c) $x = a, y = a$. **197.** a) $2a$, $-a$; $-a$, $2a$; b) $a + b$, b; b, $a + b$; c) $2a$, a; a, $2a$. **198.** a) (3,1), (1,3); b) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $\left(2, \frac{1}{2}\right)$; c) (5,7), (7,5). **199.** a) (9,1); b) (4,1); c) $\left(\frac{19 + 5\sqrt{13}}{2}, \frac{19 - 5\sqrt{13}}{2}\right)$. **200.** a) ± 4, ± 3, $(\pm 3, \pm 4)$; b) $(\pm 3, 4)$, $(0, -5)$; c) $\pm\sqrt{3 \pm \sqrt{6}}$; $y = 3 \mp \sqrt{6}$.

201. a) ± 2, ± 2; b) ± 3, ∓ 1; ± 5, ∓ 3. **202.** a) $\pm a$, $\pm a$; b) a, $-b$; c) $(a^2; -a)$; $[(a + 1)^2; a + 1]$. **203.** a) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}\right)$; b) (5,1), (−1, −5); c) $\pm\sqrt{ab}$, $\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $ab > 0$. **204.** a) $x_{1,2} = \pm(a^2 - 1)$, $y_{1,2} = \pm(a + 1)$ pro $a \neq 1$; je-li $a = 1$, pak $x = 0$, y libovolné; b) $x_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$, $y_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$, $|a| \geqq |b|$. **205.** a) První rovnice je závislá na druhé lineární. Neomezené množství řešení. b) Žádné řešení. Rovnice vedou ke sporu; c) $\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$. **206.** a) Jako v příkladě 205a; b) $x = 3$, $y = 0$; c) $x = 0$, $y = -1$. **207.** a) Jako v příkladě 205b; b) neřešitelná; c) neřešitelná (součet druhých mocnin není záporný). **208.** a) Reálné řešení jen pro $m^2 \leqq 10$; b) řešitelná pro $a \geqq 4$, nebo $a \leqq 0$; c) neřešitelná (jako v příkl. 207c). **209.** 47,53. **210.** ± 10, ± 24.

211. 36. **212.** (25,52), (−52, −25). **213.** $\frac{3}{4}$. **214.** $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{7}$. **215.** $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{2}$. **216.** a) $p \pm \sqrt{p^2 - q^2}$, $\frac{q^2}{p}$; b) $p \pm \sqrt{p^2 - hp}$, $\sqrt{hp}$; c) $\frac{q^2}{h} \pm \sqrt{\frac{q^4}{h^2} - q^2}$, $\frac{q^2}{h}$; d) $p = 29$, $q = 20$, $h = \frac{400}{29}$; e) $(a - b)^2 \geqq 0$, $(a + b)^2 \geqq 4ab$, $\frac{1}{2}(a + b) \geqq \sqrt{ab}$, $p \geqq q$, $h = \frac{q^2}{p} = q \cdot \frac{q}{p} \leqq q$. **217.** 21 m, 20 m. **218.** $c_1 = 24$ cm, $c_2 = 6$ cm, $a = 12\sqrt{5}$, $b = 6\sqrt{5}$. **219.** 14 cm, 6 cm. **220.** 3 cm, 4 cm.

221. $v_1 = 30$ cm, $v_2 = 40$ cm. **222.** 8 cm, 2 cm. **223.** 6, 8, 10. **224.** 5 %, 6 %. **225.** 2 m, 3 m. **226.** 5 km/h; 4,5 km/h. **227.** 42 dní; 56 dní. **228.** 200 min; 300 min. **229.** 300 Ω, 200 Ω. **230.** 90 km/h; 40 km/h.

231. 60 km/h; 63 km/h. **232.** 120 cm; 40 cm (nebo předmět 20 cm před zrcadlem, obraz 60 cm za zrcadlem). **233.** 120 cm (vzdálenost $b = 60$ cm). **234.** 100 cm; 25 cm, nebo 15 cm před zrcadlem a 60 cm za zrcadlem.

6. ROVNICE KVADRATICKÁ S ŘEŠENÍM V OBORU ČÍSEL KOMPLEXNÍCH

236. a) $x^2 - 4x + 7 = 0$; b) $x^2 + 4 = 0$; c) $x^2 - 6x + 13 = 0$; d) $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$; e) $x^2 - 2x + 5 = 0$; f) $x^2 - 4x + 13 = 0$. **237.** a) $x^2 - 6x + 34 = 0$; b) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 = 0$; c) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 5 = 0$; d) $x^2 - 3x + \frac{29}{4} = 0$; e) $x^2 + \frac{2}{3}x + 9 = 0$; f) neexistuje. **239.** a) $1 \pm i$; b) $\frac{3 \pm i\sqrt{19}}{2}$; c) $2 \pm i$; d) $2 \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\frac{3 \pm i\sqrt{51}}{6}$; f) $1 \pm i\sqrt{2}$; g) $\frac{1 \pm i\sqrt{15}}{8}$.

240. a) $-2 \pm i$; b) $3 \pm 2i$; c) $-3 \pm 3i$; d) $0{,}5 \pm 2i$; e) $\frac{2}{3} \pm \frac{i}{2}$.

241. a) $\pm 2i\sqrt{10}$; b) $8 \pm 3i\sqrt{2}$; c) $\frac{-3 \pm i\sqrt{71}}{20}$; d) $\frac{40 \pm 6i\sqrt{3}}{7}$. **244.** a) Reálné kořeny pro $a \leqq 9$, a to oba záporné, pro $a > 9$ kořeny komplexně sdružené; b) reálné (oba téhož znamení) pro $a \leqq -3$ a $a \geqq 3$, komplexní pro $-3 < a < 3$, oba kladné pro $a < -3$; c) oba kořeny reálné pro $a \geqq 6$ nebo $a \leqq -6$, téhož znamení pro $a < 6{,}5$, oba záporné pro $6 < a < 6{,}5$, oba kladné pro $a < -6$, komplexní pro $-6 < a < 6$. **245.** a) Reálné kořeny pro $\frac{-6}{5} \leqq m < 2$; téhož znamení pro $m < 0$ (oba kladné), pro $m = 2$ řešení neexistuje; b) reálné kořeny pro $m \geqq 3$ a $m \leqq 1$, téhož znamení pro $m > \frac{3}{4}$, oba kladné pro $m > 3$, oba záporné pro $m < 1$; c) pro $m = 0$ je $x = 0$. Reálné kořeny pro $m \leqq \frac{1}{4}$, oba kladné pro $0 < m < \frac{1}{4}$, oba záporné pro $m < 0$; d) reálné kořeny pro $\frac{-3}{11} \leqq m \leqq 3$, opačného znamení pro $\frac{-3}{11} < m < 0$; téhož znamení pro $m > 0$, a to oba záporné. **246.** a) Reálné řešení pro $m \leqq \frac{8}{7}$, téhož znamení pro $m > 0$, $m < -6$, oba kladné pro $0 < m < \frac{8}{7}$, nebo pro $m < -6$; b) reálná řešení pro všecka m; c) reálné kořeny pro $\frac{-2}{5} < m < 6$, téhož znamení pro $m > 2$ a $m < 0$, oba kladné pro $m > 2$; d) pro každé m kořeny komplexně sdružené. **248.** a) $\pm\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; b) $\pm 4 \pm i$; c) $\pm 2 \pm 3i$.

251. a) $-2i + 3$, $2 - i$; b) $2 - 3i$, $3 - 2i$; c) $1 - 3i$, $3 + 2i$. **252.** [Návod:

c)—e): Použijte vzorce pro řešení obecného tvaru kvadratické rovnice.] a) $i(-3 \pm \sqrt{24})$, $i(-3 \pm i\sqrt{6})$; b) $\frac{3}{2}(1-i)$, $1+i$; c) $\frac{1+3i}{7+i}$, $\frac{2i-1}{7+i}$; d) $3+i$, $1-7i$; e) $\frac{2-i}{1+i}$, $\frac{2i}{1+i}$. **253.** $x^3 - 2x^2 + x - 2$. **254.** a) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 6x + 10) = 0$; b) $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8 = 0$; c) $x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10 = 0$. **255.** a) $-i$, $\frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{2}$; b) $1-i$; $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$; c) $1+i$, $2 \pm i$; d) $1 \pm i$, $-i$. **256.** $m = -8$, $n = 24$, $x_2 = 2 + i\sqrt{3}$, $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{3}$.

7. RECIPROKÉ A BINOMICKÉ ROVNICE

260. a) $x_2 = \frac{1}{x_1} = \frac{3-4i}{5}$, $5x^2 - 6x + 5 = 0$; b) $x^4 - \frac{29}{13}x^3 + \frac{681}{208}x^2 - \frac{29}{13}x + 1 = 0$; c) $x^4 - \frac{35}{39}x^3 + \frac{793}{234}x^2 - \frac{35}{39}x + 1 = 0$; d) $(x-i)\,.\,(x+i)(x-1-i)(x-1+i)\left(x - \frac{1+i}{2}\right)\left(x - \frac{1-i}{2}\right) = x^6 - 3x^5 + 5{,}5x^4 - 6x^3 + 5{,}5x^2 - 3x + 1 = 0$; e) $10x^8 - 78x^7 + 273x^6 - 546x^5 + 686x^4 - 546x^3 + 273x^2 - 78x + 10 = 0$.

261. a) $\pm(\sqrt{2}+1)$, $\pm(\sqrt{2}-1)$; b) $3, \frac{1}{3}, -2, -\frac{1}{2}$; c) $2, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}$; d) $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, $\frac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{15})$; e) $-3, -\frac{1}{3}, 2, \frac{1}{2}$. **263.** a) $-1, 2, \frac{1}{2}$; b) -1, $\pm i$; c) $1, \pm i$; d) $-7, -\frac{1}{7}, -1$; e) $-1, -3, -\frac{1}{3}$; f) $-1, \frac{-1 \pm i\sqrt{35}}{6}$; g) $1, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}$. **264.** a) $-1, 2, \frac{1}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; b) $-1, 2, \frac{1}{2}, -2 \pm \sqrt{3}$; c) $-1, 4, \frac{1}{4}, -2, -\frac{1}{2}$; d) $-1, -\frac{1}{2}, -2, 3, \frac{1}{3}$; e) $-1, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -2, -\frac{1}{2}$. **265.** a) $1, +1, -2, -\frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}$; b) $-1, -1, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -2$; c) $-1, -1, 2, \frac{1}{2}, -5, -\frac{1}{5}$; d) $1, -1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$; e) $\pm 1, -2, -\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$. **266.** a) $-2, -6, -\frac{2}{3}$; b) $1, 3, -1 \pm i\sqrt{2}$; c) $\pm 2, \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2}$; d) $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}$. **269.** a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

. $(1 \pm i)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1 \mp i)$; b) $\pm i$, ± 1; c) 1, $\frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, $\frac{-1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$.

271. a) $\sqrt[4]{3}(\pm i)$, $\pm\sqrt[4]{3}$; b) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{1}$; c) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{-1}$; d) $\frac{\sqrt[5]{1}}{2}$ (viz výsledek úlohy 269c); e) $2(\pm 1 \pm i)$. **272.** a) $\frac{3}{2\sqrt{2}}(-1 \pm i)$, $\frac{3}{2\sqrt{2}}(1 \pm i)$; b) $\frac{5}{3}$, $\frac{5(-1 \pm i\sqrt{3})}{6}$; c) $\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\pm\frac{\sqrt{5}}{3}i$. **273.** a) $-2 + 5\sqrt[3]{1} = \frac{1}{2}(-9 \pm 5i\sqrt{3})$, 3; b) $-3{,}1$, -1; c) 3, -1, $1 \pm 2i$; d) $4 + 2\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{1}$; e) $\frac{1 + 2\sqrt[5]{1}}{2 - \sqrt[5]{1}}$.

274. b) ± 1; c) $x_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$; $\left(1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; d) ± 1, $\pm i$; e) $\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$; f) $x_k = \cos\frac{k \cdot 360°}{7} + i\sin\frac{k \cdot 360°}{7}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 6$. **275.** a) -1, $\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i)$; c) $\cos(36° + k \cdot 72°) + i \cdot \sin(36° + k \cdot 72°)$, $k = 0, 1, \ldots, 4$; d) i, $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $-i$, $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$. **276.** a) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$; b) $-i$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$; c) i, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$; d) $\cos(54° + k \cdot 72°) + i \cdot \sin(54° + k \cdot 72°)$, $k = 0, \ldots, 4$; e) $\cos(30° + k \cdot 40°) + i \cdot \sin(30° + k \cdot 40°)$, $k = 0, 1, \ldots, 8$; f) $\cos\frac{(4k + 1)\pi}{14} + i\sin\frac{(4k + 1)\pi}{14}$, $k = 0, \ldots, 6$.

8. OPAKOVÁNÍ

279. a) 7, $\frac{18}{7}$; b) 2, $\frac{29}{24}$; c) 12,1; d) 3, $\frac{7}{5}$; e) 5, $\frac{16}{7}$; f) 3. **280.** a) $|a|$; b) $|b|$; c) $\frac{a + 2b}{2}$, $\frac{a - b}{2}$; d) a, b.

281. $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$. **282.** O 10 %. **283.** Asi 61 s. **284.** a) $x_1 = 2a$,

$x_2 = 2$, a libovolné reálné číslo; b) $x_{1,2} = \frac{1}{a \pm b}$, $|a| \neq |b|$, pro $a = b = 0$ řešení není; c) $x = \frac{a+b}{2}$, $a \neq b$; d) $x_1 = -2a$, $x_2 = 3a$, $a \neq 0$ libovolné číslo reálné; e) $x_1 = \frac{a^2+b^2}{2b}$; $x_2 = \frac{a^2+b^2}{2a}$, $|a| \neq |b|$, $a \neq 0$ nebo $b \neq 0$.
285. a) $6x^2 - 5x + 1 = 0$; b) $4x^2 - 8x + 3 = 0$; c) $x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$. **286.** $x^2 + x - 2 = 0$. **288.** $x'^2 - 13x' + 36 = 0$, $x^2 - 12x + 36 = 0$. **289.** $t = \pm 11$ ($x_1 = -4$, $x_1' = 4$), ($x_2 = -7$, $x_2' = 7$). **290.** $p = 2$, $x = 1$.

291. $p = \pm 7$. **292.** $x^2 + (p - q)x - pq = 0$. **293.** a) $r = 4$; b) $r = 36$; c) $r = \pm 12$; d) $r_1 = 1$, $r_2 = -7$; e) $r_1 = 6$, $r_2 = -11$. **294.** Reálné: a) $|r| \geqq 2\sqrt{10}$, b) $r \leqq 25$. **295.** $k = \frac{2}{3}$. **296.** $a_{1,2} = \pm \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$; $a_{3,4} = \pm \frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\,\mathrm{i}$. **297.** $a_1 = 1$, $a_2 = -2$. **298.** $a = \pm\frac{1}{2}$. **299.** a) $b^2 - 4ac > 0$, $a(ap^2 + bp + c) > 0$, $a(aq^2 + bq + c) > 0$, $a(2ap + b) < 0$, $a(2aq + b) < 0$; b) $(ap^2 + bp + c) \cdot (aq^2 + bq + c) < 0$. **300.** a) žádné a; b) $-2 < a \leqq \frac{1}{4}$; c) $a > 15 + 4\sqrt{17}$.

301. $a_1 = -3$, $a_2 = 9$. **302.** $k = 6$, pro $k = 0$ mají obě rovnice kořen rovný nule. **303.** $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{2}{9}$. **304.** a) $m > 11$; b) $m < -7{,}2$; c) $0 < m < 6$; d) $m > 9$; e) $-\frac{\sqrt{55}}{2} < m < \frac{\sqrt{55}}{2}$. **306.** a) $4x^2 - 24x + 37 = 0$; b) $x^2 - (5 - 3\mathrm{i})x + 4 - 7\mathrm{i} = 0$; c) $3x^2 + 2x + 27 = 0$; d) $2x^2 - x(-\mathrm{i} + 3) + 4 - 2\mathrm{i} = 0$. **307.** a) $x^2 - 6x + 25 = 0$; b) $x^2 + 25 = 0$; c) $x^2 - 2px + p^2 + q^2 = 0$; d) $x^2 - 2x\sqrt{3} + 4 = 0$; e) $x^2 + x + 1 = 0$. **308.** $x = 2, y = 1$; $x = 1{,}5$, $y = 0{,}5$. **309.** a), b) $-4 < b < 4$; c) $-2 < b < 2$. **310.** $3 \pm \mathrm{i}\sqrt{6}$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

311. a) $x^2 - 2x + 4 = 0$; b) $x^2 - 4x + \frac{19}{4} = 0$; c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + \frac{9}{4} = 0$; d) $x^2 - 2x + \frac{10}{9} = 0$. **312.** a) $1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$; b) $2 \pm \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$; c) $\sqrt{2} \pm \frac{\mathrm{i}}{2}$; d) $1 \pm \frac{\mathrm{i}}{3}$. **313.** a) $1 - 2\mathrm{i}$, $-1 + 2\mathrm{i}$; b) $3 - \mathrm{i}$, $-3 + \mathrm{i}$; c) $5 - 3\mathrm{i}$, $-5 + 3\mathrm{i}$; d) $\mathrm{i} - 4$, $-\mathrm{i} + 4$; e) $-5 + 4\mathrm{i}$, $5 - 4\mathrm{i}$. **314.** a) $\frac{1}{12}(\pm\sqrt{119} + 5\mathrm{i})$; b) $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$, $-\frac{3}{2}\mathrm{i}$; c) $-2\mathrm{i}$, $3\mathrm{i}$; d) $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$, $2\mathrm{i}$. **315.** a) $2 - \mathrm{i}$, $2 + 2\mathrm{i}$; b) $1 + \mathrm{i}$, $3 - 2\mathrm{i}$; c) $1 - \mathrm{i}$, $2 + 3\mathrm{i}$; d) $2 + \mathrm{i}$, $2 - 3\mathrm{i}$; e) $2 - 3\mathrm{i}$, $1 - \mathrm{i}$. **316.** 6 osob. **317.** $\frac{7}{10}$.
318. 53.147. **319.** Večer 15. října. **320.** Za 10 h.

321. 3 Ω, 6 Ω. **322.** 24 Ω, 8 Ω. **323.** 7,5 cm, 15,5 cm. **325.** $a_1 = 1$; $a_2 = -2$. **326.** a) $2, -\frac{3}{2}, -\frac{8}{3}$; b) $\frac{1}{3}, 3, \pm 1, +\frac{1}{2}, +2$; c) $2, -\frac{1}{2}, -3, \frac{1}{3}$; d) $-3, -\frac{1}{3}, -2, -\frac{1}{2}$. **327.** a) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \pm\frac{\mathrm{i}}{2}, \pm(1 \pm \mathrm{i}) . \sqrt{2}$; b) $\pm 2, \pm 2\mathrm{i}, \frac{\pm 1 \pm \mathrm{i}}{\sqrt{2}}$; c) $\pm 1; \frac{1}{2}(1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}); \frac{1}{2}(-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3})$; d) $\pm\sqrt{\frac{25 \pm \sqrt{621}}{2}}$. **328.** a) 0, -2; b) 0, 1; c) 0. **329.** a) $a \neq 0$; b) $ab(a-b) . (2b-a) \neq 0$; c) $9b - a \neq 0$, $9a - b \neq 0$, $ab(a-b) \neq 0$. **330.** a) 36, 25; b) 10, 3; c) 12; d) 4; e) 5; f) $5 \leqq x \leqq 10$.

331. a) 2, -1; b) ± 3; c) $\pm 2, \pm\sqrt{2}$; d) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; e) $\frac{5 - \sqrt{17}}{2}$; f) $-3{,}1$; g) ± 1; h) 0,1. **332.** a) $\pm 1, \pm\frac{1}{2}$; b) 0, -1; c) $\frac{5 + \sqrt{17}}{2}$; d) ± 3. **334.** $\pm 3, \pm 3\mathrm{i}$; b) $\pm 2, 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}, -1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$; c) $\pm 2, \pm 2\mathrm{i}, \sqrt{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{2}, -\sqrt{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{2}$. **335.** a) $2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \pm\mathrm{i}$; b) $\pm\mathrm{i}, \pm\sqrt{-7 + \sqrt{55}}, \pm\mathrm{i}\sqrt{7 + \sqrt{55}}$; c) $-4, -\frac{1}{4}, 2, \frac{1}{2}$; d) $\frac{3 \pm \mathrm{i}\sqrt{7}}{4}$; $\frac{1}{4}(-9 \pm \sqrt{65})$. **336.** a) $1, 10, \frac{1}{10}$; b) $10, 10^9, \sqrt[9]{10}$. **337.** a) 7,5; $-1{,}25$; b) nemá reálné řešení; c) 8; 0; d) 7; 2,6; e) 9; f) $y = \pm x$. **338.** a) 5; 2; b) 3; 2; c) 7; 4; d) $x_{1,2,3,4} = 5;\ 8;\ -5;\ -8$; $y_{1,2,3,4} = 8;\ 5;\ -8;\ -5$; e) $x = 10;\ 2;\ -2;\ -10$; $y = 2;\ 10;\ -10;\ -2$; f) $(6, \pm 7), (-6, \pm 7)$. **339.** a) $(1, \pm 2), (-1, \pm 2)$; b) $(\pm 6, \pm 2)$; c) $(3, \pm 2), (-3, \pm 2)$; d) $x_{1,2} = \frac{1}{2} . (\sqrt{106} \pm \sqrt{154})$; $x_{3,4} = \frac{1}{2}(-\sqrt{106} \pm \sqrt{154})$; $y_{1,2,3,4} = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{106} \mp \sqrt{154})$; e) $(\pm 3, \pm 2)$; f) $(3, 2), (3, -3), (-4, 2), (-4, -3)$; g) $(2, 4), (12, -6)$. **340.** 1. druhu $\frac{ak - bt}{a - b}$, druhého druhu $\frac{at - bk}{a - b}$, $a \neq b$.

III. ČÍSLA REÁLNÁ

I. ČÍSLA RACIONÁLNÍ A IRACIONÁLNÍ

2. 9°11′ z. d. **3.** 73°0′19″.

21. a) $0{,}\overline{56}$; $1{,}\overline{13}$; $0{,}\overline{497770}$; b) $0{,}4\overline{97}$; $1{,}3\overline{940212}$; $1{,}\overline{122304}$; $0{,}\overline{478751}$. **22.** a) $1{,}\overline{4}$; b) $0{,}\overline{430976}$. **23.** a) $x = 2$; b) $x = 3$. **24.** O 1 ‰. **25.** 5 329; 7 396; 3 481; 8 464; 9 801; 841. **26.** a) 11,56; 3 844; 756 900; 0,067 6; 0,002 304;

b) 39,44; 1 513; 906 300; 19 180 000; 0,537 3; c) 6,013; 890,4; 0,128 8; 0,002 096. **27.** 132 496; 541 696; 61 009; 765 625; 855 625. **28.** a) 12 321; b) 11 881. **30.** a) 4 913; 21,95; 140 600; 0,079 51; 0,405 2; b) 12 330 000; 31,55; 408 500; 625 000 000; 122 000; c) 1 413 000; 13,08; 2 333 000.

32. a) 2 994,03; 5,632 9; 0,979 976; b) 87,067 6; 4,473 2; c) 124,992 4; 0,004 856; d) 3,312 5; 1 782,721. **33.** a) $1{,}6^2 - 0{,}7^2 = (1{,}6 + 0{,}7)(1{,}6 - 0{,}7) = 2{,}3 \,.\, 0{,}9 = 2{,}07$; d) $0{,}3^2 \,.\, 0{,}05^2 = (0{,}3 \,.\, 0{,}05)^2 = 0{,}015^2 = 0{,}000\,225$. **34.** a) $-21{,}25$; b) 1 628,7; c) 1.

41. $1{,}414 < 1{,}4\overline{14} < \sqrt{2} < 1{,}\overline{414} < 1{,}41\overline{4}$. **44.** a) 3,162 28; b) 7,071 07; c) 31,622 78; d) 2,641 97; k) 4,78. **46.** 12 cm (zaokrouhleno). **47.** 10,5 m. **48.** 13,4 cm. **49.** a) 7,56 cm; b) 10,3 cm. **50.** O 1,54 cm.

51. 9,71 dm. **52.** 2,5 dm. **55.** a) $d = 0{,}8$ mm; b) 0,55 mm; c) 1,1 mm. **56.** $r = 3{,}33$ cm. **57.** a) 2,33 cm; b) 2,09 cm. **58.** $1{,}6r$. **59.** 62,1 cm. **60.** $x = 1{,}414\,23$, $y = 1{,}732\,21$; iracionální řešení mít soustava nemůže. (Při řešení soustavy počítáme x a y jako podíl dvou racionálních čísel.)

2. NEROVNOSTI

74. $a > 2$. **75.** Pro žádné a. **76.** a) $ac < bd$; b) $ac > bd$. **77.** a) $f < b < 2f$; b) $b > 2f$; c) $b < 0$. **95.** a) $x > \frac{4}{3}$; b) $x < -2\frac{2}{3}$; c) $x > 6\frac{2}{3}$; d) $x > \frac{3}{5}$; e) $x > 10$; f) $x < 10$; g) $x > 5{,}5$; h) $x < 5{,}5$; i) nemá řešení; j) $x < \frac{13}{5}$; k) vyhovují všechna čísla x.

96. a) Nemá řešení; b) $x \geqq -1{,}5$; c) $n < 20$; d) $p > 15$; e) $x < 1{,}4$; f) $x > 2$. **97.** a) 1; 2; 3; 4; b) 1; 2; c) všechna; d) 1; e) 1; 2; 3. **98.** a) -1; -2; b) -1; c) žádná; d) všechna; e) žádná; f) -1; -2; -3; -4. **99.** a) Pro $x > -4{,}5$; b) pro každé číslo x; c) pro žádné číslo x. **100.** a) Pro $y < -2$; b) pro $y > \frac{1}{2}$.

101. a) Pro $v > -8$; b) pro $v < 2$; c) pro $v < \frac{1}{2}$. **102.** a) Pro $m > 1$ je $x > \frac{m-2}{m-1}$, pro $m < 1$ je $x < \frac{m-2}{m-1}$, pro $m = 1$ vyhovuje každé číslo x; b) pro $m > \frac{1}{2}$ je $x < \frac{m(m+1)}{2m-1}$, pro $m < \frac{1}{2}$ vyhovují $x > \frac{m(m+1)}{2m-1}$, pro $m = \frac{1}{2}$ vyhovuje každé číslo x; c) pro $m > 0$ vyhovují $x < \frac{1-m^2}{2m}$; pro $m < 0$ vyhovují $x > \frac{1-m^2}{2m}$, pro $m = 0$ vyhovuje každé číslo x; d) pro $m > 0$ vyhovují $x > \frac{1-m^2}{m}$, pro $m < 0$ vyhovují $x < \frac{1-m^2}{m}$, pro $m = 0$

nevyhovuje žádné číslo x; e) pro $m < \frac{3}{2}$ vyhovují $x > \frac{11m+2}{3-2m}$, pro $m > \frac{3}{2}$ vyhovují $x < \frac{11m+2}{3-2m}$, pro $m = \frac{3}{2}$ nevyhovuje žádné číslo x; f) pro $m > 0$ nebo $m < -\frac{1}{2}$ vyhovují $x > \frac{2(1-m)}{3(1+2m)}$, pro $0 > m > -\frac{1}{2}$ vyhovují $x < \frac{2(1-m)}{3(1+2m)}$, pro $m = -\frac{1}{2}$ vyhovuje každé číslo x; g) $x < \frac{2}{2-m}$ pro $m < 2$, $x > \frac{2}{2-m}$ pro $m > 2$. **103.** a) $x < 12$; b) $x > 2$. **104.** a) $-1 < x \leqq \frac{1}{2}$; b) $-1 < x < -\frac{2}{5}$. **105.** $5 < x < 27$; b) $1 < x < \frac{3}{2}$. **106.** $x > 9$. **107.** $x < 2$. **110.** $\frac{1}{2} < x < 2\frac{1}{2}$, tedy $x = 1$, $x = 2$; b) 3; 4; 5.

111. a) $x > 5$ a $x < 1$; b) $1 < x < 5$; c) $1{,}5 < x < 2{,}5$; d) $x < 1{,}5$ a $x > 2{,}5$; e) $\frac{7}{3} > x > \frac{3}{2}$; f) $x > \frac{7}{3}$ a $x < \frac{3}{2}$; g) $x > \sqrt{3}$ a $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; h) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \sqrt{3}$. **112.** a) $-2\frac{1}{3} < a < \frac{1}{3}$; b) $-\frac{8}{5} < a < 2\frac{1}{2}$; c) $a < -\frac{7}{3}$ a $a > \frac{15}{4}$. **113.** $x \geqq 2$ a $x \leqq -3$. **114.** $x > 3$ a $x < 2$. **115.** $\frac{1}{3} < x < 6$. **116.** $-\frac{5}{2} \leqq x \leqq 1$. **117.** $x > 1$ a $x < -\frac{1}{3}$. **118.** $x > \frac{2}{3}$ a $x < \frac{1}{2}$. **119.** $x < -\frac{2}{3}$, $x > 3$. **120.** $3 < x < 12$.

124. $x > 3$ a $-2 < x < 2$. **125.** $1 < x < 2$, $x > 3$. **126.** $x > 5$, $2 < x < 2{,}9$. **127.** $-4 < x < 6$; $x \neq -1$. **128.** $x < -\frac{3}{2}$. **129.** $-1 < x \leqq 1$. **130.** $2 - \sqrt{3} \leqq x \leqq 2 + \sqrt{3}$ s výjimkou čísla $x = 1$.

131. a) $x \geqq 4$ a $x \leqq -1$; b) $2 < x < 3$. **132.** $\frac{2}{4}$. **133.** (19; 13), (18; 14), (17; 15), (16; 16). **134.** $11\frac{19}{21} \leqq x \leqq 12{,}5$, kde x znamená počet litrů. **135.** $34{,}6\,°C < x < 43{,}6\,°C$, přičemž x znamená teplotu přidané vody. **136.** (3; 2; 3), (4; 3; 3), (5; 4; 3) atd. **137.** Více než 14 ha, nejvýše však 16 ha. **139.** a) Pro $a = 0$ nemá řešení, pro $a = 5$ má nekonečně mnoho řešení a vyhovuje jí každé reálné číslo x. Pro $a \neq 0$, $a \neq 5$ má jedno řešení $x = 5 - a$, které je kladné pro $a < 5$, záporné pro $a > 5$ a nulové pro $a = 5$; b) pro $a = 2$, $a = 0$ nemá řešení, pro $a \neq 0$, $a \neq 2$ má jedno řešení, a to $x = \frac{6}{a-2}$, kladné pro $a > 2$, záporné pro $a < 2$. Nulové řešení nemá; c) pro $a = 4$ nemá řešení, pro $a \neq 4$ má jedno řešení $x = \frac{a-6}{a-4}$, kladné pro $a > 6$ nebo $a < 4$, záporné pro $4 < a < 6$, nulové pro $a = 6$; d) pro $a = 0$ nemá řešení, pro $a = 1$ má nekonečný počet řešení a vyhovuje jí každé reálné číslo x. Pro $a \neq 0$, $a \neq 1$ má jedno řešení, a to $x = -a$, kladné pro $a < 0$, záporné pro $a > 0$; e) pro $a = 2$ nemá řešení, pro $a \neq 2$ má jedno řešení $x = -a$, kladné pro $a < 0$, záporné pro $a > 0$, nulové pro $a = 0$; f) pro $a = -1$, $a = 0$ nemá řešení, pro $a \neq -1$, $a \neq 0$ jedno řešení $x = \frac{a}{a+1}$, kladné pro $a > 0$ nebo $a < -1$, záporné pro $-1 < a < 0$; g) pro $a = -\frac{1}{2}$ nemá řešení, pro $a \neq$ $\neq -\frac{1}{2}$ má jedno řešení $x = \frac{a^2}{2a+1} \neq 0$, $x \neq \frac{1}{3}$, které je kladné pro $a > -\frac{1}{2}$, záporné pro $a < -\frac{1}{2}$. **140.** a) Pro $t > 5$; b) pro $t > -1$; c) pro $t > 0$; d) pro $t < 4$ nebo $t > 6$.

142. a) Pro $a = -\frac{3}{2}$ nemá soustava řešení, pro $a \neq -\frac{3}{2}$ má jedno řešení $x = \frac{21}{3+2a}$, $y = \frac{7(3-a)}{3+2a}$ kladné pro $-\frac{3}{2} < a < 3$, záporné pro $a < -\frac{3}{2}$, řešení $x > 0$, $y < 0$ pro $a > 3$, řešení $x \neq 0$, $y = 0$ pro $a = 3$. **143.** a) $a < 10$; b) $28 < a < 30$. **144.** a) Pro $k > 30$; b) $k < -3$; c) $10 < k < 12$. **146.** Pro $p = 1$ dostaneme lineární rovnici, jejíž kořen je $x = -1$. Je-li $p < 0$ nebo $p > \frac{8}{7}$, nemá v oboru reálných čísel řešení, pro $p = 0$ a $p = \frac{8}{7}$ má dvojnásobný kořen, pro $0 < p < \frac{8}{7}$ má dva reálné kořeny různé, pro $0 < p < \frac{1}{2}$ jsou oba kladné, pro $1 < p < \frac{8}{7}$ jsou oba záporné, pro $\frac{1}{2} < p < 1$ mají oba kořeny opačná znamení a pro $p = \frac{1}{2}$ je jeden kořen nulový, druhý nenulový. **147.** Pro $a > 4$. **148.** Pro $n < 2$ nebo $3 < n < 3\frac{1}{3}$. **149.** $-6 < m < 0$. **150.** Je-li $e = f$, $c = d$, má úloha nekonečně mnoho řešení. Pro $e = f$, $c \neq d$ nemá řešení, je-li $e \neq f$, $c \neq d$ má jedno řešení $\frac{c-d}{f-e}$ kladné pro $c >$ $> d, f > e$ nebo $c < d, f < e$, $a \geqq \frac{cf-ed}{f-e} = z$, $b \geqq z$.

151. Je-li $e = f$, $d = f(e+s) = e(f+s)$, má úloha nekonečně mnoho řešení, pro $e \neq f$ má jedno řešení, a to $\frac{d - e(s+f)}{f-e}$, $\frac{f(s+e) - d}{f-e}$. Pro $f > e$ musí být $f(s+e) > d > e(s+f)$, pro $f < e$ platí nerovnost obrácená. **152.** $t_1 = \frac{at - bu}{a-b} > 0$, $t_2 = \frac{au - bt}{a-b} > 0$, $a \neq b$; je-li $a = b$, $t = u$, má úloha nekonečný počet řešení, ale ztrácí smysl. **153.** Za dobu $t = \frac{c_2}{c_2 - c_1}$, kde $c_2 > c_1$; pro $c_2 = c_1$ nemá řešení. **154.** $\frac{a^2}{2} \leqq P < a^2$. **155.** Šířka rámečku je $x = \frac{a + b - \sqrt{a^2+b^2}}{4} < \frac{b}{2}$. Úloha má řešení vždy, protože $a + b > \sqrt{a^2+b^2}$.

3. ABSOLUTNÍ HODNOTA REÁLNÉHO ČÍSLA

166. a) $-10 < x < 6$; b) $x < \frac{3}{2}$; c) $1 \leqq x \leqq 7$; d) $x > 8$, $x < -2$. **167.** a) Nemá řešení; b) vyhovují všechna čísla x; c) $x > 1$; d) $-2 \leqq x \leqq 2$; $4 \leqq x \leqq 8$. **168.** a) 1, 2, 3; b) žádné x. **169.** a) $x > 1$; b) $0 < x < \frac{4}{3}$, $x > 2$; c) každé číslo $x \neq \frac{2}{3}$. **170.** $x = 6$.

171. a) $-1 \leqq x \leqq 1$; b) $x < -\frac{1}{2}$, $x > \frac{3}{2}$; c) $-1 < x < 6$; d) $-2 < x < 1$; e) $-2 < x < \frac{8}{5}$. **172.** a) $x = -1$, $\frac{1}{2} \leqq x < \frac{3}{2}$; b) $x < 0$, $x > 1 + \sqrt{3}$; c) $x < 0$, $0 < x < 2$. **173.** 0. **175.** a) $x = 4$, $x = -\frac{4}{3}$; b) $x = 4$, $x = \frac{4}{3}$; c) $x = -\frac{1}{2}$; d) nemá řešení; e) $x = -1$; f) $x = 1$. **176.** $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$. **177.** a) $x = 2$, $x = -2$; b) nemá řešení; c) vyhovuje každé číslo $x \geqq 1$. **178.** a) $x = 2$, $x = \frac{4}{5}$; b) $x = -1$, $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{5}{3}$; c) $x = -2$ a všechna čísla $x \geqq 2$. **179.** $x = \frac{56}{9}$. **181.** a) $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = -1$, $y_2 = -2$; b) $x = \frac{5}{2}$, $y = \frac{1}{2}$; c) $x_1 = \frac{11}{3}$, $y_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = 3$, $y_2 = -1$; $x_3 = -\frac{7}{3}$, $y_3 = \frac{5}{3}$; d) $x_1 = 1$, $y_1 = 0$; $x_2 = -1$, $y_2 = 0$. **184.** a) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; b) $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; c) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$; d) $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

185. a) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$; b) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$; c) $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$;

d) $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. **186.** a) $x_1 = 2 + \sqrt{5}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$, $x_3 = 1$; b) všechna čísla $3 \leqq x \leqq 4$ a všechna čísla $-4 \leqq x \leqq -3$; c) $x_1 = \frac{3 + \sqrt{37}}{2}$, $x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$, $x_3 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$; d) $x = 1$; e) $x_1 = \frac{5 + \sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$; f) $x = 2 - \sqrt{6}$. **187.** a) $x_1 = 2$, $x_2 = 1 - \sqrt{5}$; b) $x_1 = 3$, $y_1 = 1$; $x_2 = \frac{1 + \sqrt{41}}{2}$, $y_2 = -\frac{1 + \sqrt{41}}{2}$. **189.** $\frac{1}{3} \leqq p \leqq \frac{3\sqrt{5}}{5}$, $p = 1$. **190.** a) Pro $p \leqq 1$ je $x = p$; b) pro $p = 0$ je x libovolné číslo kladné, pro $p \neq 0$ je $x = \frac{p + 1}{2}$ za předpokladu, že $x \geqq = p$.

4. NEÚPLNÁ ČÍSLA

194. 0,050 7 %; 0,040 3 %; druhá zaokrouhlená hodnota je přesnější. **195.** 12 Kčs; 16,80 Kčs. **196.** a) Délka: střední aproxim. hodnota $a = 50{,}5$; prostá chyba $\alpha = 0{,}3$; šířka: střední aproxim. hodnota 30,6; prostá chyba $\beta = 0{,}4$; b) 0,005 94; 0,013 1; 0,594 %; 1,31 %. **197.** Střední aproximace 25,5; absolutní chyba 0,3; relativní chyba 0,011 8; v procentech 1,18 %. **198.** 87,1; 87,5. **199.** 26,59; 0,03; 0,001 13. **200.** 15,092; 15,708.

201. Stejně přesně. **202.** 0,63 %, 0,545 %; druhý způsob je vhodnější. **203.** 4,17 %. **204.** 168,05 $\pm$ 0,01; 21,01 $\pm$ 0,01; b) 696,7 $\pm$ 0,1; 551,7 $\pm$ 0,1. **205.** a) 26,6 $\pm$ 0,14; 1,8 $\pm$ 0,14; b) 246,2 $\pm$ 1,2; 49,8 $\pm$ 1,2. **206.** a) 42,05 $\pm$ 0,35; $-10{,}85 \pm 0{,}35$; b) 409,5 $\pm$ 2,5; 63,5 $\pm$ 2,5. **207.** 23,6 $\pm$ 0,5; 1,6 $\pm$ 0,8. **208.** $c = 876{,}55 \pm 8{,}432$; $d = 0{,}63 \pm 0{,}008$. **209.** $x = 4{,}441\,9 \pm 0{,}000\,2$. **210.** $x = 13{,}2 \pm 0{,}01$; 0,45 %.

212. (6,25 $\pm$ 0,25) cm^2; 0,04. **213.** (15,6 $\pm$ 0,9) cm^3. **214.** U šesté. **216.** (80 $\pm$ 20) litrů. **217.** 14,28. **218.** (175 $\pm$ 32,4) kg. **219.** (5,9 $\pm$ 0,2) kg. **220.** (250 $\pm$ 83) m/min; (4,16 $\pm$ 1,38) m/s.

221. (30 $\pm$ 0,77) cm. **222.** (1,6 $\pm$ 0,4) m^2; (6,8 $\pm$ 3,4) m^3. **223.** (15,92 $\pm$ 0,18) cm. **224.** (7,8 $\pm$ 0,05) g/cm^3. **225.** (1,4 $\pm$ 0,16) g/cm^3. **226.** 47 q až 61 q. **227.** (61,04 $\pm$ 1,51) cm^2. **228.** (7,2 $\pm$ 0,36) q.

5. ČÍSELNÉ SOUSTAVY

232. a) 21_{10}; b) 59_{10}; c) 140_{10}; d) 208_{10}; e) $1\,193_{10}$. **233.** a) 85_{10}; b) $13\,066_{10}$; c) $8\,548_{10}$; d) $1\,726\,414_{10}$; e) $5\,480_{10}$; f) $10\,699_{10}$. **235.** a) 5_{10}; b) 7_{10}; c) 16_{10}; d) 566_{10}; e) $2\,413_{10}$; g) $1\,647_{10}$. **236.** a) 197_{10}; b) 134_{10}; c) 694_{10}. **237.** a) 13_{10}; b) 23_{10}; c) 55_{10}; d) 125_{10}; e) 628_{10}; f) $1\,651_{10}$. **238.** a) $80\,632_{10}$; b) $1\,643\,891_{10}$;

c) $234\,736_{10}$; d) $487\,022_{10}$. **239.** a) 31_{10}; b) $1\,536_{10}$; c) 123_{10}; d) 511_{10}; e) 43_{10}; f) 119_{10}; g) $30\,425_{10}$. **240.** a) Sedmičkové; b) pětkové; c) osmičkové.

242. a) 1_2; b) 10_2; c) 101_2; d) $10\,010_2$; e) $10\,101_2$; f) $1\,010\,110\,111_2$. **243.** a) $111\,111\,111_2$; b) $11\,000\,000\,000_2$; c) $1\,000\,000\,010\,010_2$; d) $101\,110\,101\,110\,001_2$; e) $10\,011\,010\,111_2$; f) $10\,100\,000\,010\,111_2$. **244.** a) $1\,010\,122_3$; b) $2\,021\,000_3$; c) $1\,002\,220\,110_3$; d) $10\,001\,022\,020_3$. **245.** b) $25{,}5_{10}$; c) $6{,}812\,5_{10}$. **246.** a) $0{,}75_{10}$; b) $6{,}75_{10}$; c) $7{,}437\,5$; d) $17{,}75_{10}$; e) $25{,}937\,5_{10}$. **247.** a) $11{,}408_{10}$; b) $74{,}718\,75_{10}$; c) $137{,}069\,4_{10}$; d) $467{,}907\,4_{10}$. **248.** a) 101_2; b) 111_2; c) $10\,000_2$; d) $100\,111_2$. **249.** a) $0{,}375_{10} = 0{,}460_{12} = 0{,}011_2$; b) $0{,}736_{10} = 0{,}89t98_{12} = 0{,}101\,111_2$; c) $0{,}\dot{3}_{10} = 0{,}3\dot{t}_{12} = 0{,}01_2$. **250.** a) $0{,}000\,001\,011\,00_2$; b) $0{,}111_2$; c) $10{,}110\,1_2$.

252. a) $10\,100\,001_2$; b) $1\,010{,}011_2$; c) $100\,100{,}10_2$; d) $101\,110{,}1_2$. **253.** a) $1\,000_2$; b) $1\,110_2$; c) $11\,000_2$; d) $1\,111\,011_2$; e) $111\,110\,001_2$. **254.** a) $11\,000_2$; b) $11\,000_2$; c) $1\,000\,111\,001_2$; d) $111\,110\,001_2$; e) $11\,001\,110\,011_2$. **257.** a) 11_2; b) $11\,100_2$; c) $1\,100\,110_2$; d) $10\,101\,011_2$. **258.** a) $10{,}01_2$; b) $101{,}01_2$; c) $100{,}101\,11_2$; d) $10\,001_2$; e) $1\,100{,}101_2$; f) $-100{,}101\,11_2$. **259.** a) $1\,101_2$; b) $100\,100\,111_2$; c) $1\,001\,110\,100_2$; d) $11\,001\,101_2$; e) $10\,101\,010_2$; f) $111\,000\,101_2$. **260.** a) $101{,}01_2$; b) $1\,011{,}01_2$; c) $1\,100{,}101_2$; d) $1\,110\,100_2$.

262. a) $111\,110_2$; b) $110{,}01_2$; c) $1\,001_2$; d) $1011\,011\,011\,010_2$; e) $1\,100{,}01_2$; f) $101\,010{,}111_2$. **263.** $1\,001\,101\,011\,001_2$.

6. DĚLITELNOST PŘIROZENÝCH ČÍSEL

264. a) 17; b) 401. **265.** Čtyřmi způsoby, nehledíme-li k pořadí činitelů (60.1; 3.20; 4.15; 5.12). **266.** (2; 98), (7; 28), (4; 49), (196; 1), (14; 14); poslední má nejmenší obvod (čtverec). **267.** Pěti způsoby: $2 + 2 + 17$; $3 + 5 + 13$; $3 + 7 + 11$; $5 + 5 + 11$; $7 + 7 + 7$. **268.** a) 1; 2; 3; 4; 8; 11; 18; 53; b) 1; 2; 3; 5; 8; 14; 23; 68. **270.** Osmi způsoby, nepřihlížíme-li k pořadí sčítanců.

271. Větu lze rozšířit pro libovolná čísla celá, jestliže $t \neq 0$. **273.** $x = 180$. **274.** Po 32 otáčkách. **275.** 2,4 vteřiny. **277.** 72 a 6 nebo 18 a 24. **278.** 1 a 8 nebo 7 a 14.

282. a) Jsou čtyři řešení: $x = 11$, $y = 1$; $x = 8$, $y = 3$; $x = 5$, $y = 5$; $x = 2$, $y = 7$; b) $x = 2$, $y = 2$. **283.** $x = y = p$ nebo $x = p^2$; $y = 1$ nebo $x = 1$; $y = p^2$. **284.** Žák B dostane buď 13 tříkorun a 1 pětikorunu nebo 8 tříkorun a 4 pětikoruny nebo 3 tříkoruny a 7 pětikorun. **285.** 11 pětikorun a 3 tříkoruny. **286.** V závodě je 14 zaměstnanců, kteří nepobírají příspěvky, 6 zaměstnanců s jedním a 5 zaměstnanců se dvěma nezaopatřenými dětmi. **287.** a) $x = 8$, $y = 7$ nebo $x = 4$, $y = 1$; b) nemá v oboru přirozených čísel řešení; c) $x = 32$, $y = 1$ nebo $x = 4$, $y = 5$. **288.** 5 cm, 12 cm, 13 cm. **289.** $x = 1, y = 2, z = 3$ nebo $x = 3, y = 1, z = 2$. **290.** 6; 1; 8 nebo 4; 4; 7 nebo 2; 7; 6 nebo 0; 10; 5.

291. Deseti způsoby. **292.** 0; 1; 4; 5; 6; 9. **293.** a) 7; 9; 3; 1; b) dekadický zápis mocniny 7^{4k-3} je zakončen cifrou 7 atd. **294.** a) $a_0 + 10a_1 + 10^2 . a_2 + \ldots + 10^{n-1} . a_{n-1}$, přičemž $0 < a_{n-1} \leqq 9$ je číslo celé a ostatní $0 \leqq a_i \leqq 9$ také čísla celá; b) $x . 10^{n-1} + y . 10^{n-2}$. **297.** M = 612 nebo M = 918. **298.** a) Neřešitelné; b) 15; 26; 37; 48; 59; 40.

310. Obrácená věta zní: Je-li p přirozené číslo tvaru $(6n + 1)$ nebo $(6n - 1)$, pak p je prvočíslo větší než 3; tato věta neplatí, neboť např. $25 = 6 . 4 + 1$.

7. OPAKOVÁNÍ

327. a) Platí pro všecka čísla x; b) $x < 4$. **328.** a) $-14\frac{1}{2} < x < -1\frac{2}{3}$; b) $x > 0$.

331. a) Pro $p > 0$ je $x > \frac{p^2 - 1}{2p}$, pro $p < 0$ je $x < \frac{p^2 - 1}{2p}$, pro $p = 0$ splňuje nerovnost každé číslo x; b) pro $p > \frac{1}{2}$ je $x < \frac{p(p + 1)}{2p - 1}$, pro $p < \frac{1}{2}$ je $x > \frac{p(p + 1)}{2p - 1}$, pro $p = \frac{1}{2}$ splňuje nerovnost každé číslo x. **332.** a) $x > 2$ a $x < -1$; b) $\frac{1}{2} < x < 2$. **333.** a) $x > 4$ a $x < -1$; b) všechna čísla $x \neq 1$; c) $-1 < x < 5$. **334.** $m \geqq 1$ a $m \leqq 0$. **335.** Všechna celá čísla $p \geqq -1$. **336.** Pro $a \geqq 2$ nebo pro $a \leqq -\frac{2}{5}$. **337.** $x > 5$ a $2 < x < 2{,}9$. **338.** $a > 8$, $b > 6$. **339.** Pro $a = 4$ nemá rovnice řešení; pro $a \neq 4$ má jedno řešení $x = \frac{a - 9}{a - 4}$, které je kladné pro $a > 9$ nebo $a < 4$, záporné pro $4 < a < 9$ a nulové pro $a = 9$. **340.** $-24 < p < 3$.

341. $3 < p < 4$. **342.** Strany jsou $\frac{c(s - v)}{c - v}$, $\frac{v(c - s)}{c - v}$; $v < s < c$. **343.** $(8{,}46 \pm 0{,}17)$ cm. **344.** $V \doteq (77\,400 \pm 1\,750)$ cm^3. **345.** $r = (56{,}4 \pm 3{,}1)$ cm. **346.** $s_1 \doteq (6\,200 \pm 100)$ m; $s_2 \doteq (9\,350 \pm 150)$ m. **347.** $(7\,908 \pm 526)$ kg. **348.** a) $x < 1$; b) $x < 1$. **349.** a) $x < 1$; b) řešení neexistuje. **350.** $x < -3$; $-\frac{3}{2} < x < -1$; $x > \frac{1}{2}$.

351. $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = -\frac{3}{4}$. **352.** $x = 0$. **353.** $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. **354.** $x = -2$ a $x \geqq 2$. **355.** $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{4}{5}$. **356.** $x_1 = 2$, $y_1 = 3$ a $x_2 = 3$, $y_2 = 2$. **357.** $x = 2$. **358.** 0; 1. **359.** $x_1 = 2$, $x_2 = 1 - \sqrt{5}$. **360.** $x = 1 + \sqrt{2}$.

361. a) 27_{10}; b) 72_{10}; c) 150_{10}; d) 624_{10}; e) 212_{10}; f) $29\,318_{10}$; g) $42\,935_{10}$. **362.** a) $10\,001\,101_2$; b) $10\,111\,001\,000_2$; c) $1\,111\,010\,100\,011_2$. **363.** a) $10\,101{,}11_2$; b) $10\,111{,}011_2$; c) $0,\ 110\,100\,001\,001\ldots_2$. **364.** a) $101\,000_2$; b) $111\,001\,111_2$; c) $110\,101\,100\,000\,110{,}110\,011\ldots_2$. **365.** a) $101\,110_2$; b) $100\,011{,}011_2$; c) $11\,001\,010_2$. **366.** a) $V = 1\,010\,010\,000\,010_2\,j^3$; b) $V = 111\,010\,100\,110\,000_2\,j^3$; c) $V = 111\,101\,000\,010\,010_2\,j^3$. **367.** 2; 3; 11; 41. **368.** První kolo se otočí pětkrát, druhé třikrát. **369.** 120 minut; první 15krát, druhý 12krát, třetí 10krát. **370.** 12 a 2 nebo 4 a 6.

372. Rovnice má neomezený počet řešení; jsou to např. $x = 6$, $y = 3$; $x = 13$, $y = 8$; $x = 20$, $y = 13$ atd.; obecně: $x = 7k - 1$, $y = 5k - 2$, kde k je přirozené číslo. **373.** $x = 125, y = 5$ nebo $x = 20, y = 10$. **374.** Jsou 4 možnosti: $a = 12$, $b = 3$; $a = 8$, $b = 4$; $a = 6$, $b = 6$; $a = 5$, $b = 10$. **375.** 5 plechovek dvoukilových, 7 tříkilových a 10 pětikilových. **376.** Vyhovuje jen trojice čísel 1; 2; 3. **377.** 916.

IV. MOCNINY A ODMOCNINY

1. MOCNINY S CELOČÍSELNÝM EXPONENTEM

5. a) a^3; b) b^8; c) 0. **6.** a) 1; $x + y \neq 0$; b) 1; $a \neq 0, b \neq 0$; c) abc; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$; d) $2yzm$; $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, $m \neq 0$; e) v^9; $v \neq 0$; f) 1; $m \neq 0$. **7.** a) $(x - y)^7$; b) $r^4(r - s)^3$; $r \neq 0$, $s \neq 0$, $r \neq s$. **8.** a) 1; $a \neq 0$; b) $-2c^3d$; $c \neq 0$, $d \neq 0$; c) a^6; $a \neq 0$; d) $\frac{a}{x}$; $a \neq 0$, $x \neq 0$; e) $\frac{z^8}{9}$; $y \neq 0$, $z \neq 0$; f) $(2b)^3$; $b \neq 0$, $x \neq 0$; g) $\frac{pq^2r^4}{8}$; $p \neq 0$, $q \neq 0$, $r \neq 0$; h) $(uv)^6$; $u \neq 0$, $v \neq 0$. **9.** ac; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. **10.** $\frac{2a^2}{9b^5}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

11. $\frac{a}{50}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. **12.** a) 2^{3n-2}; b) $-3^{4n} \,.\, 2^{2n-1}$; c) $-a^3$; $a \neq 0$; d) $a^{2n-1} \,.\, b^{2n-1}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$; e) $(a - b - c)^{4n+2}$. **13.** a) $\frac{a^k}{b^k}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$; b) $(x - 5)^k \,.\, (x + 2)^k$; $x \neq 2, x \neq 5$; c) $\left(\frac{b}{a}\right)^{2k}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$; d) $\frac{(x^k - 1)^5}{x^5}$. **14.** $a^2 - b^2$; $a \neq b, a \neq -b$. **15.** a) $2\left(\frac{a}{b}\right)^n$; $a \neq 0$, $b \neq 0$; b) 0; $y \neq 0$. **16.** $x - y$; $u \neq v$, $x \neq y$, $x \neq -y$. **17.** $(a - b)^{2m}$; $x \neq y$, $x \neq -y$, $a \neq -b$. **18.** a^{x+y}; $a \neq 0$, $b \neq 0$.

21. a) $a^{2m}(x + y)$; b) $a(a^x + 1)$; c) $3 \,.\, 4^x$; d) $(2^x + 1)(2^x - 1)$; e) $a(a^m + 1) \,.\, (a^m - 1)$; f) $p^n(p + q)(p - q)$; g) $x^r(x - y)(x^2 + xy + y^2)$; h) $x^3y^3 \,.$

. $(x^n - y^n)(x^{2n} + x^ny^n + y^{2n})$; i) $x^ny^n(x + y)(x - y)(x^2 + y^2)$; j) $(a^h + 1)^2 .$ $. (a^h - 1)$. **26.** Neutron je asi 1,8 . 10^3krát těžší než elektron. **27.** 1,7 . 10^{-24} g.

28. 10^{-12} až 10^{-11} mm. **29.** 7,3 . 10^{-26} g. **30.** a) $\frac{3v^2}{ab}$; $a \neq 0,\ b \neq 0,\ v \neq 0$; b) $\frac{d^4}{c^4}$; $d \neq 0,\ c \neq 0$; c) $\frac{b}{x^2}$; $b \neq 0,\ x \neq 0$; d) $a^2 - b^2$; $a + b \neq 0$; e) $\frac{1}{(a-b)(a^2-b^2)}$; $a + b \neq 0,\ a - b \neq 0$; f) $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$; $a - b \neq 0$, $a + b \neq 0$; g) $x^2 + 2x + 3$; $x \neq 0$.

32. a) $\frac{a^6d^2}{c^6b^4}$; $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0$; b) $\frac{3125}{243} \cdot \left(\frac{x}{z^2}\right)^{10} . y^{15}$; $x \neq 0$, $y \neq 0,\ z \neq 0$; c) $\left(\frac{z}{y}\right)^{12}$; $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$; d) $\frac{b^6}{c^5d^2}$; $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$, $d \neq 0$; e) $\frac{1}{(x+y)^9}$; $x + y \neq 0$. **33.** $\frac{b^4c^{60}}{a^4}$; $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$. **34.** $\frac{a}{ab-1}$; $b \neq 0,\ a \neq 0,\ ab \neq 1,\ ab \neq -1$. **35.** $\frac{1}{x^8}$; $x \neq 0$. **36.** 1; $x \neq 0$. **37.** $\frac{b^y}{a^x}$, $a \neq$ $\neq 0,\ b \neq 0,\ |a| \neq 1,\ |b| \neq 1,\ x \neq 0, y \neq 0$.

2. ODMOCNINY

39. 461 cm. **40.** 46,7 mm (zaokrouhleno). **41.** Obdélník má delší úhlopříčku. **42.** 25,02 cm; 38,59 cm; 42,28 cm; 44,17 cm. **43.** 98; 12,4; 1 160; 52,4; 42,36; 3,317 (zaokrouhleno). **44.** a) $4(\sqrt{3} - \sqrt{5})$; b) $4\sqrt{3}$; c) 0; d) $2\sqrt{2}$; e) 0; f) $2b\sqrt{a}$; g) 0. **47.** a) $5\sqrt{7}$; b) $45\sqrt[3]{2}$; c) $18\sqrt{3} + 32\sqrt{2}$; d) $6\sqrt[3]{3} - 7\sqrt{3}$; e) $15\sqrt{3}$. **48.** a) $2\sqrt{19} > 5\sqrt{3}$; b) $9\sqrt{3} > 11\sqrt{2}$. **50.** $7x\sqrt{x} - 3x$; $x > 0$.

51. a) $\sqrt{a}(x - ay + az)$; $a \geqq 0$; b) $a(1 + a + a^2) + \sqrt{a}(1 + a + a^2 + a^3)$; $a \geqq 0$; c) $a(1 + a) + (1 + a)\sqrt[3]{a^2} + (1 + a + a^2)\sqrt[3]{a}$; d) $(a - x)(\sqrt[n-1]{a} - \sqrt[n-1]{x})$; n přirozené číslo větší než 1; e) $3x^2y\sqrt{x^n}$; $x \geqq 0$. **52.** a) $ab(\sqrt{a} + \sqrt{b})$; b) $ab(a - b)$; c) $ab(a\sqrt{b} - b\sqrt{a})$; d) $u + 2\sqrt{uv} - v$; e) $m - n$; f) $3m + 2v$.

54. $\sqrt[n]{b^3}(a^3b + 1)$; 6. **55.** a) $\sqrt{18}$; $\sqrt{12}$; $\sqrt{125}$; $\sqrt{2}$; b) $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[3]{54}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; c) $\sqrt{x^4y^3}$; d) $\sqrt{16(x^2 - y^2)}$; e) $\sqrt{\frac{x+1}{n}}$. **56.** a) $\frac{4}{5}$; b) 0,2; c) $\frac{4}{3}$; d) 6; e) 4; f) $\frac{xy^2z^4}{4a^3}$; g) $\sqrt[5]{a^2}$; h) $\sqrt[3]{\frac{a}{3}}$; i) $3ab^2$; j) $\frac{5a}{3c}\sqrt[3]{\left(\frac{b}{d}\right)^2}$. **57.** a) $2\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 7\sqrt{5} - 2$;

b) $\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{5} + 1$; c) $\sqrt{3} + \sqrt{6}$. **58.** $a + b - \sqrt[3]{ab}$. **59.** $\sqrt[n]{\dfrac{s}{r}}$.

61. a) $6 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$; b) $10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$; c) 1; d) $2(a + \sqrt{a^2 - b})$; e) $\sqrt{x}$. **62.** a) $\sqrt[6]{5}$; b) $\sqrt[6]{2}$; c) $\sqrt[4]{5^3}$; d) $\sqrt[4]{s^3}$; $s \geqq 0$; e) $\sqrt[15]{s^4}$; f) $\sqrt[27]{x^{13}}$; g) $\sqrt[9]{\dfrac{x^4}{y^4}}$; h) $\sqrt[6]{a^{-1}b^{-2}}$; i) $\sqrt[30]{a^{29}}$; j) $m^{-1} . \sqrt[8]{m^{-1}}$. **63.** a) $\sqrt[6]{2^5}$; b) 3; c) 5; d) $\sqrt[4]{2}$. **64.** a) x; $x > 0$; b) $\sqrt[6]{x^{-1}}$; $x > 0$; c) $\sqrt[24]{\dfrac{a^3x}{c^4}}$; $a > 0$, $x > 0$, $c > 0$; d) $\sqrt[10]{x}$; $x > 0$.

65. a) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$; b) $\sqrt[3]{16}$; c) $\dfrac{\sqrt[4]{1\,000}}{5}$; d) $\sqrt[5]{3^4}$; e) $\dfrac{\sqrt[3]{12}}{4}$; f) $2\sqrt[3]{a^2}$. **66.** a) $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$; b) $\dfrac{\sqrt{5} + 1}{4}$; c) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; d) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$; e) $2\sqrt{15} + 4\sqrt{3}$; f) $\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{10}$; g) $5 + 2\sqrt{6}$; h) $\dfrac{(a + b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$; i) $\dfrac{a + 2\sqrt{ab} + b}{a - b}$; j) $\dfrac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$; k) $\dfrac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}$. **67.** a) $\sqrt{3}$; b) 10; c) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{30}$; d) $\dfrac{4x - 2}{1 - x}$; $x > 0$, $x \neq 1$; e) $\sqrt{2} + 1$; f) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. **70.** a) $6\sqrt[6]{x^5}$; b) a; c) $a\sqrt[8]{b}$; d) $\dfrac{2}{y}\sqrt[6]{y}$.

71. a) $\dfrac{-(x + y)\sqrt{x}}{x}$; b) 1. **73.** a) $\sqrt{5} + 1$; b) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$. **74.** $\sqrt{5} - 1$. **79.** $x \leqq \dfrac{2}{3}$. **80.** $1 > x \geqq 2 - \sqrt{3}$.

3. MOCNINY S RACIONÁLNÍM A IRACIONÁLNÍM EXPONENTEM

84. a) Asi 6,84; b) asi 4,78. **85.** a) 5,04; b) 1,73. **86.** a) $a^2 . a^{\frac{11}{30}}$; $a \geqq 0$; b) $z^{-\frac{1}{60}}$; $z > 0$; c) $(y - x)(y - x)^{\frac{5}{12}}$; $y - x \geqq 0$; d) $p^{\frac{3}{8}}$; $p > 0$; e) $u^{\frac{3}{20}}$; $u > 0$; f) $a^{\frac{2}{3}}$; $a \geqq 0$; g) $q^{-\frac{2}{5}}$ $q > 0$; h) $a^{-\frac{2}{9}}$; $a > 0$. **87.** a) $a^{\frac{1}{9}}$; $a > 0$; b) $6a . a^{\frac{17}{20}}$; $a > 0$; c) $a^{\frac{49}{72}} . b^{\frac{1}{9}}$; $a > 0$, $b > 0$; d) $a^{\frac{5}{18}} . b^{\frac{1}{2}}$; $a > 0$, $b > 0$. **88.** a) $4a^{\frac{1}{2}}$; $a \geqq 0$; b) $2(a^{\frac{1}{2}} - 1)$; $a \geqq 0$; c) $2a^{\frac{1}{2}}$; $a \geqq 0$, $a \neq 1$. **90.** 1,15 (zaokrouhleno).

91. a) 1; $a > 0, x > 0, a \neq x$; b) x; $x \neq 1$; c) $a - 1$; $a \neq 0, a \neq 1, a \neq -1$. **93.** a) a^2; $a > 0$; b) $\sqrt[3]{a^2}$; $a > 0$, $b > 0$. **96.** a) a^2; $a \geqq 0$; b) $a^{\sqrt[3]{2}}$; $a \geqq 0$,

$b > 0$; c) 1; $x > 0$; d) a; $a \geqq 0$. **97.** a) 3,162; b) 31,622. **98.** $\left(\frac{x}{y}\right)^2$; $x > 0$, $y > 0$ nebo $x < 0$, $y < 0$. **99.** a) $2^e \cdot 3^{\sqrt{2}+1-e}$; b) $\left(\frac{3}{2}\right)^{3\pi}$; c) $\left(\frac{b}{a}\right)^{\sqrt{5}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$; d) $e^{-2\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. **100.** a) $(a + b)^{2\pi-1}$; $|a| \neq |b|$; $a + b > 0$; b) $\sqrt{\frac{b^{2-\sqrt{3}}}{a^{3\sqrt{3}}}}$; $a > 0$, $b > 0$; c) $\frac{x^{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-1}}{y^{\sqrt{3}}}$; $y > 0$; $x \geqq 0$.

4. OPAKOVÁNÍ

101. a) $-\frac{3}{4} a^{m-2} b^{n-1} c^2$; b) $\frac{1}{2} x^2 y$. **102.** a) $\frac{4a^{m+2} b^5 x \cdot c^3}{y^{n+3}}$; b) $\frac{5}{9} ab^2 c^{n+2} x^4 y^2 z^4$. **103.** a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{9}{8} \cdot \frac{cd^9}{a^7 b^3}$. **104.** $\frac{a^{5n} b^{6m} c^7}{c^{4n} d^{4m+2n}} \cdot \left(\frac{d}{ab}\right)^9$. **106.** a) $\frac{469}{2\,000}$; b) $\frac{5}{6} a^{\frac{1}{2}}$; c) $5^{\frac{7}{2}}$; d) $2\left(3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{1}{2}}\right)$; e) $a^{\frac{5}{6}} - a \cdot a^{\frac{1}{12}}$. **107.** $(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$. **108.** $\frac{2}{27}$. **109.** $\frac{x^2}{2x - 1}$; $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq \frac{2}{3}$, $x \neq 1$, $x \neq 2$. **110.** a) $a\sqrt{a}$; b) $\sqrt{a}$; c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; d) 2; e) $\frac{1}{2}(12\sqrt{5} - 15\sqrt{2} - 3\sqrt{10})$.

111. 5. **112.** 1 700. **113.** $9 + 3\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}$. **114.** $x = 2\sqrt{5}$. **115.** a) $v = 1$; b) $b^{\frac{5}{4}} \cdot a^{-\frac{31}{20}}$; c) $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt{b}$; d) $8\sqrt[3]{a^2 y}$. **118.** a) $\frac{1}{2} < a \leqq 1$; b) $a \geqq 1$ nebo $a \leqq -1$. **119.** Má hodnotu 1. **120.** a) $\frac{1}{9} \leqq x \leqq \frac{1}{4}$ a $x > 1$; b) $\frac{8 - 2\sqrt{3}}{3}$.

V. MNOŽINY

4. a), b), c) $x \notin I$; d) $x \in I$. **7.** a) (4,2); (3,4); (2,6); (1,8); b) (1,6), (2,9), ... **8.** Množina **M** má větší počet prvků než množina **N**; {30; 42}. **9.** a) **P** = = {1 + 8; 2 + 7; 3 + 6; 4 + 5}; b) **P** = {1 + 1 + 7; 1 + 2 + 6; 1 + 3 + + 5; 1 + 4 + 4; 2 + 2 + 5; 2 + 3 + 4; 3 + 3 + 3}. **10.** Ano, neboť pro jejich tvoření je dán předpis.

11. **M** = **U** × **V** = {[1;5], [1;6], [1;7], [2;5], [2;6], . . ., [4,7]}. Množina **N** má 18 prvků. **12.** **Q** = **M**. **14.** **M** = {$\triangle ABC$, $\triangle BAD$, $\triangle ABE$,

$\triangle CDA$, $\triangle ACE$, $\triangle ADE$, $\triangle DCB$, $\triangle DBE$, $\triangle DCE\}$, $\mathbf{Q} = \{\triangle ABC$, $\triangle BAD$, $\triangle CDA$, $\triangle DCB\}$, $\mathbf{R} = \{\triangle ABE$, $\triangle DCE\}$, $\mathbf{S} = \{\triangle ACE$, $\triangle DBE\}$, $\mathbf{T} = \{\triangle ADE\}$. $\mathbf{Q} \subset \mathbf{M}$, $\mathbf{R} \subset \mathbf{M}$, $\mathbf{S} \subset \mathbf{M}$, $\mathbf{T} \subset \mathbf{M}$. **15.** $\mathbf{L} = \{\triangle ABC$, $\triangle ABD$; $\triangle ABE$; $\triangle BCD$; $\triangle BCE$; $\triangle CDE$; $\triangle DEA$; $\triangle DEB$; $\triangle CDA$; $\triangle EAC\}$; $\mathbf{K} \subset \mathbf{L}$, $\mathbf{R} \subset \mathbf{L}$. **16.** $\mathbf{N} \subset \mathbf{M}$. **17.** Každý dělitel čísla 12 je dělitelem čísla 48. **18.** $\mathbf{M}_3 \subset \mathbf{M}_2 \subset \mathbf{M}_1$. **19.** a) Není, nýbrž $\mathbf{N} \subset \mathbf{M}$; b) $n = \emptyset$. **20.** Správný pro a), b), nesprávný pro c); a), b) $n \in \mathbf{A}$; c) $n = \emptyset$.

21. $\mathbf{N} \subset \mathbf{M}$. **25.** [16: $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = \mathbf{N}$, $\mathbf{M} \cup \mathbf{N} = \mathbf{M}$]. [20: a) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B} +$ číslo 2; b) $\mathbf{A}$; $\mathbf{B}$; c) $\emptyset$; všechna n]. **26.** Množina $\mathbf{R}$ obsahuje všechna čísla z, pro která platí nerovnost $-4 < z < 5$, množina $\mathbf{S}$ obsahuje všecka čísla intervalu $(-2,4)$. **28.** a) $\langle 2,7 \rangle$; b) $(-2,6)$; c) $\emptyset$; d) $(2,5)$. **29.** a) $(1,5)$; b) $\emptyset$; c) $(3,8)$; d) $\{-2\}$; e) $\emptyset$; f) $(a, a+1)$.

31. a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \mathbf{D}$; b) $\mathbf{E} = \{6\}$; c) $\{2, 4, 5, 6\} = \mathbf{F}$; d) $\mathbf{G} = \{2, 4, 5, 6\}$. **34.** a) $1 < x \leqq 3$; b) $\langle 4,5 \rangle$; c) $\{5\}$; d) $x \in \langle 1,3 \rangle$; e) $\emptyset$. **35.** $a \leqq 1$, $b = 5$. **36.** Obdélník. **37.** a) $\gamma > 90°$, $\alpha < \beta$; b) $\alpha = 90°$, c) $\alpha > 90°$. **39.** a) Žije-li občan, který se narodil před r. 1870; nežije-li takový občan, pak jde vždy o zobrazení množiny $\mathbf{A}$ do množiny $\mathbf{B}$; c) budou-li přiřazením všecka data vyčerpána (nepravděpodobné); d) bude-li počet dat právě roven počtu občanů a různým občanům přiřazena různá data.

43. Sestrojíme průmět úsečky a na úsečku b z bodu $S = AB \,.\, CD$. **44.** Je to zobrazení do množiny. (Pro $x = 1$ nebo $x = -2$ je $M = 3$.) **46.** 6.

VI. FUNKCE

1. POJEM FUNKCE A FUNKCE LINEÁRNÍ

1. c), d), j), k) ne, ostatní ano. **2.** a), b), c), e) ano, d), f) ne. **4.** a), b), c), d), h), i) $x \in (-\infty, \infty)$; e), j) $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; f) $x \in \langle 0, \infty)$; g) $x \in (0, \infty)$; k) $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$; l) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; a), b), c) $y \in (-\infty, \infty)$; d) $y = a$; f), i), h), k) $y \in \langle 0, \infty)$; g), j), l) $y \in (0, \infty)$. **5.** a), b), c), h), i) $x \in (-\infty, \infty)$; d) $x \leqq \frac{5}{2}$; e) $|x| \leqq |1|$; f) $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$; k) $\emptyset$; g) $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 3, \infty)$. **6.** a) $y \in (-\infty, 3\rangle$; b) — d) $x \in (-\infty, \infty)$; e) $x \in \langle -1, 1 \rangle$, $y \in \langle 0, 1 \rangle$; a) $y \in \langle -\infty, 3)$; b) $y \in \langle -4, \infty)$; c) $y \in \langle 0, \infty)$; d) $y \in (-\infty, 0\rangle$; f) $x \in \langle -1, 1)$; $y \in \langle 0, \infty)$; g) $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, \infty)$, $y \in (-\infty, \infty)$; h) $x \in \langle \frac{-1}{2}, 0) \cup (0, \infty)$, $y \in (-\infty, \infty\rangle$; i) $x = 1$, $y = \sqrt{2}$; j) $\emptyset$; k) $x \in (-1, 1\rangle \cup \langle 2, 3)$, $y \in (0, \infty)$. **7.** a) $s = 0{,}1 \,.\, t + s_0$; b) $s = t + s_0$; c) $s = 1\,000\, at + s_0$.

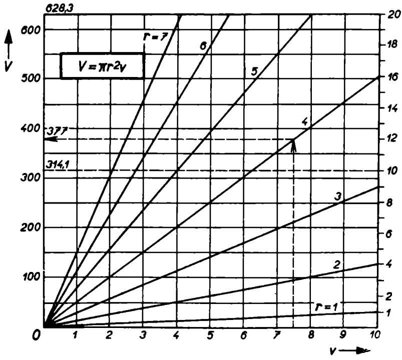
8. a) $\alpha = 6t$; b) $\beta = \frac{1}{2}t$. **9.** $y = 0{,}011x$ (x, y v metrech). **10.** $t_C = \frac{1}{9}(5t_F - 160°)$, lineární.

11. a) Exponenciální; b) $a_0 = a_n\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-n}$. **12.** $y = b - \frac{b}{a}x$. **13.** $V = \pi r^2 v - \frac{\pi v^3}{4}$, $0 < v < 2r$. **14.** $S = \frac{\pi s^2}{2r}\sqrt{4r^2 - s^2}$, $0 < s < 2r$. **15.** a) $v = \frac{2rx^2}{x^2 - r^2}$, $V = \frac{2\pi x^4 r}{3(x^2 - r^2)}$, $x > r$; b) $V = \frac{\pi r^2 v^2}{3(v - 2r)}$, $v > 2r$. **16.** $l = \frac{gT^2}{4\pi^2}$. **17.** $b_n = \frac{V + nv}{v} \cdot b$. **18.** $b_n = \left(\frac{R}{R + V}\right)^n \cdot b$. **19.** Ve kterémkoli kvadrantu, podle znamení a, b.

21. a) Polopřímku vycházející z bodu $(2, -2)$ a rovnoběžnou s osou $+y$ (bez počátečního bodu); c) část poloroviny pro $y = 3$ a poloroviny s hraniční přímkou $x = 2$, obsahující osu $+y$ (přímka $x = 2$ nepatří k útvaru). **23.** a) $y = -\frac{2}{3}x + 2$; d) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$; e) $y = -\frac{5}{7}x + \frac{5}{2}$; f) $y = \frac{7}{6}x - \frac{7}{4}$. **25.** a) $x = 3$; b) $x = 2$; c) $x = 5$; d) $x = 2$; e) $x = 3{,}5$; f) $x = \frac{3}{2}$, průsečík přímky s osou x. **26.** Setkají se v místě C, kde první autobus stojí v době mezi 16.—26. min po výjezdu, druhý v době mezi 24.—34. min. **27.** 8 vozů. **28.** Potká 16 vozů, předjede ho 8 trolejbusů. **29.** Přímky a), b), c) splývají, d) je s nimi rovnoběžná, f), l) jsou rovnoběžné. Rovnoběžné jsou též h), i), m); j), k) splývají. Průsečíky $(d \,.\, e)$, $(l \,.\, n)$ jsou na ose y, $(g \,.\, h)$, $(d \,.\, j = k)$, $(l \,.\, m)$ na ose x.

31. $T = \dfrac{c \log_b \frac{p}{a}}{1 - \log_b \frac{p}{a}}$. **33.** Dvě polopřímky: a) $y = x - 1$, pro $x > 1$, $y = -x + 1$, pro $x < 1$; b) $y = 2x - 1$, pro $x \geq \frac{1}{2}$, $y = -2x + 1$, pro $x < \frac{1}{2}$; c) $y = x + 1$, pro $x < 2$, $y = 5 - x$, pro $x > 2$; d) $y = x - 5$ pro $x \in (-\infty, -1)$, $y = -x + 5$ pro $x \in (1, \infty)$ a úsečka $y = 5x - 1$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$; e) polopřímky $y = -2x + 6$ pro $x \in (-\infty, -1)$, $y = -4$ pro $x \in (3, \infty)$ a úsečky $y = -6x + 2$ pro $x \in \langle -1, 0 \rangle$ a $y = -2x + 2$ pro $x \in \langle 0, 3 \rangle$. **34.** Vnitřek čtverce s vrcholy $A \equiv (1, 0)$, $B \equiv (0, 1)$, $C \equiv (-1, 0)$, $D \equiv (0, -1)$. **35.** a) $a = 2$, $b = -1$; b) $a = 1$, $b = 2$; c) $a = 1$, $b = 0$; d) $a = -3$, $b = 0$.

38.



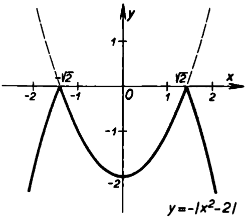
Obr. 100

44. Rostoucí: a), d), e), f), h); klesající: b), g), pro $x > 0$. **45.** a), b), d), e), f), h) v celém definičním oboru; g) $(-\infty, 0)$ nebo $(0, \infty)$. **46.** Sudé funkce: c), g), h): liché, b), d), f). **48.** a) Stále klesá; b) roste pro $x > 0$; c) roste pro $x > 0$, klesá pro $x < 0$; d) roste pro $x \in (-\infty, 1, 5)$, klesá pro $x \in (1{,}5; \infty)$; e) klesá v intervalu $(-\infty, 0)$, roste v intervalu $(0, \infty)$; f) klesá v intervalu $(-\infty, 0)$, v intervalu $(0, \infty)$ je rostoucí; g) klesá pro $x \in (-\infty, -1)$, roste pro $x \in (1, \infty)$, konstantní je v intervalu $(-1, 0)$; h) roste pro $x \in (-1, 1)$, jinde je konstantní. **49.** b), f).

2. FUNKCE KVADRATICKÁ, LOMENÁ, INVERZNÍ

60. a) $a = 1$, $b = 1$; b) $a = 2$, $b = 2$; c) $a = -1$, $b = 2$. **61.** a) $a = 0{,}5$, $b = 1{,}5$, $c = 1$; b) $a = 5$, $b = 7$, $c = 5$. **63.** a) $V \equiv \left(\frac{-3}{2}, \frac{-5}{4}\right)$; b) $V \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{-9}{4}\right)$; c) $V \equiv (1, -4)$; d) $V \equiv \left(\frac{1}{4}, 4\frac{7}{8}\right)$; e) $V \equiv (1, -5)$, osa rovnoběžná s osou $-y$; f) $V \equiv \left(\frac{5}{6}, \frac{13}{12}\right)$. **65.** a) $V \equiv (2, 0)$; b) $V \equiv (0, -2)$; c) pro

$x > 0$, $y = x^2$, pro $x < 0$, $y = -x^2$. **68.** Z grafu (při necelých pěti stupních Celsia $V_5 = 1{,}001\,2$). **69.** $V = \frac{\pi r^2}{v^2}(v - v_1)^2$. v_1 pro $v_1 \leqq v$, kde v_1 je výška válce. **70.** Rovnoramenný.



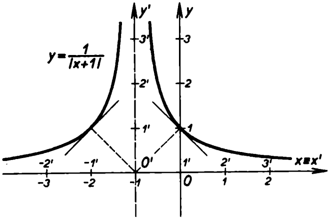
Obr. 101

71. $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$. **72.** $r' = \frac{r}{2}$. **73.** a) 2,5; b) 4, −1; c) 7, −2; d) 6, 7. **74.** a) 7, −6; b) $\frac{-3}{2}$, $\frac{5}{2}$; c), d) neexistuje; e) $\frac{-1}{3}$, 1. **75.** $0 < x < 4$. **77.** a) 2, −3, −1; b) 8, 15; c) 3, −1, 3; d) $\frac{3}{2}$, −2, 3.

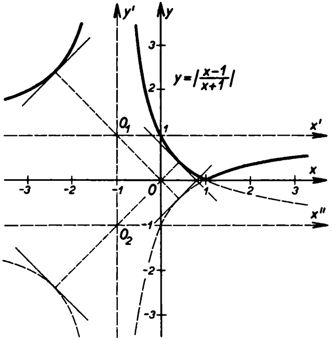
80. $y = \frac{2{,}25}{x}$. **82.** $y = \frac{360}{x}$, a) 72 m; b) 12 m; c) 4 m. **83.** a) 5 h; b) $3\frac{1}{3}$ h; c) 5 h 50 min; d) 1 h 24 min. **84.** 34krát; 85krát; 765krát. **85.** 392krát, 686 m, 648krát, 1 231,2 m. **86.** 160 kp (80 kp, 20 kp, 13,3 kp, 4 kp); $P = \frac{q}{p} \cdot Q$. **87.** 4,8 A. **90.** Rovnoosé hyperboly: a) $y' = \frac{1}{x'}$, $O' \equiv (-3, 0)$; b) $y' = \frac{1}{x'}$, $O' \equiv (2, 0)$; c) $y' = 1 + \frac{3}{x - 2}$, $O' \equiv (2, 1)$; d) $O' \equiv (-1, 1)$; e) $O' \equiv (2, 1)$; f) $O' \equiv (1, 1)$; g) $O' \equiv \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Graf funkce d), e), g) leží ve druhém a čtvrtém kvadrantu.

91. Hyperbola: a) $y' = \frac{a}{x'}$, $O \equiv \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $a = \frac{-7}{6}$; b) $O \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$,

$a = -1$; c) přímka $y = \frac{-2}{3}$, kromě bodu $M \equiv \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$. **92.** a) Viz obr. 102; c) obr. 103. **94.** a) $y = \frac{1}{2}(x - 3)$; b) $y = \sqrt[3]{x}$; c) $y = \frac{\lg(x+1)}{\lg 2}$; d) $y = x^2$; e) $y = \frac{1}{x}$; f) $y = \sqrt{x - 1}$,

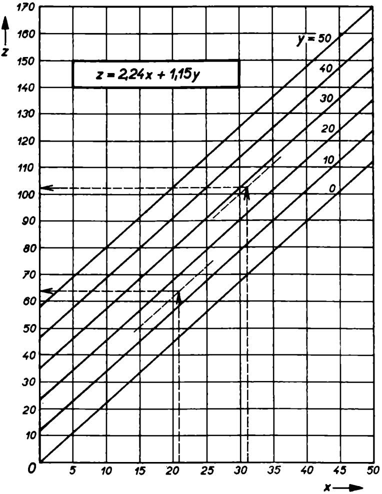


Obr. 102



Obr. 103

95. $V = \frac{1}{4}\pi(4r^2 - x^2)x$. a) $0 < x < 2r$; b) $V \in (0, \frac{4r^3\sqrt{3}\pi}{9}\rangle$. **96.** $s = 3t^2 + \frac{t}{2}$. **97.** $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 2$. **98.** $s = 2 + 40t$, 102 km, 182 km. **99.** 1) $y = \frac{8}{5}x$, 2) $y = -\frac{1}{2}x$, 3) $y = 1{,}6x - 6{,}4$; 4) $y = x + 4$. **100.** a) $y = -x + 3$; b) $y = x - 2$; c) $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$.



$x \in \langle 0; 50\rangle$
$y \in \langle 0; 50\rangle$
$z \in \langle 0; 170\rangle$

$\xi \in \langle 0; 15\rangle$

$\mu \in \langle 0; 20\rangle$

$\xi = \alpha x \Rightarrow \alpha = 0{,}3$

$\mu = \beta z \Rightarrow \beta = 0{,}12$

Obr. 104

101. 340 kg Cu, 40 kg Zn, 20 kg Pb. **102.** $a = -2$. **103.** $n = \dfrac{60}{\pi d}$. **104.** $\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{2}, 2\right)$ násobek původní délky. **105.** $y = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot x, x = \dfrac{180^\circ}{\pi} = \dfrac{200}{\pi}$ gradů ($100^g = 90^\circ$). **106.** a), b) Rovnice jsou závislé; c) obě rovnice jsou identické. **107.** Rovnice jsou sporné (jejich grafické zobrazení jsou rovnoběžky). **108.** a) $y = -2x$ pro $x \leqq 0, y = 0$ pro $x > 0$; b) $y = 2 - x$ pro $x \geqq 2, y = x - 2$ pro $x < 2$; c) $y = 2x - 3$ pro $x > 2, y = 1$ pro $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 2$, $y = -4x + 3$ pro $x < 2$. **110.** Viz obr. 104.

113. $S = bx\left(1 - \dfrac{x}{v}\right)$, $0 < x < v$, kde x je výška stěny. **114.** $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{13}{2}x + 8$. **117.** a) $\dfrac{1}{2}$, 2; b) (0,62; −1,62); d) (2,5), (5,2). **118.** a) $y_{\min} = 3$ pro $x = 1$; b) $y_{\max} = 1{,}25$ pro $x = 1{,}5$; c) $y_{\min} = 7{,}325$ pro $x = 1{,}5$; d) $y_{\min} = \dfrac{5}{3}$ pro $x = \dfrac{4}{3}$. **120.** $\alpha = 2\pi\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ rad. = 293°56′.

121. $r = 25$ m, $P = 625$ m². **122.** $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{CL}}$. **123.** a), c) ne, b) ano. **124.** $f(x) = \dfrac{7x - 13}{3x - 5}$. **125.** Hyperbola: a) $S = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ $a = \dfrac{-5}{2}$; b) $S = (2, 2)$, $a = 1$; c) $S = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$, $a = \dfrac{13}{4}$; d) $S = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, $a = \dfrac{1}{9}$. **128.** a) Pro $x \leqq 0$ je $y = -1$, pro $0 \leqq x < 1$ a pro $x > 1$ je $y = \dfrac{1}{x - 1}$; b) $y = -2$ pro $x \geqq 2$, oblouk křivky $y = -2\sqrt{x - 1}$ pro $1 \leqq x < 2$. **129.** $p = 0, x = 1; 3; -5; p = -1$. **130.** $p = 2$, pro $x = 2, y = 3$. **132.** a) $x = -\dfrac{b}{2a}$; b) $x = \dfrac{1}{2}$; c) $x = \dfrac{b - a}{2}$. **133.** a) $x = x_0, y = ax_0 + b$, x_0 libovolné; b) $\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$; c) (2, 0); d) (2, 1). **134.** a) 1, 1, −2; b) $x \doteq 0{,}58$; c) 0,2; 3,06; −3,26; d) 1,1; e) 2,15; f) 1, 2, 3.

VII. LOGARITMUS

1. FUNKCE EXPONENCIÁLNÍ, DEFINICE LOGARITMU, FUNKCE LOGARITMICKÁ

4. a) $y = \sqrt{10} \doteq 3{,}16$; $y = \frac{1}{\sqrt{10}} \doteq 0{,}31$; b) 2,15; 0,46; c) 1,78; 0,56; d) 1,47; 0,68. **7.** Grafy funkce jsou souměrné podle osy y. Je-li $a > 1$, je prvá rostoucí, druhá klesající, je-li $a < 1$, je prvá klesající, druhá rostoucí, je-li $a = 1$, jsou obě funkce totožné, nerostou ani neklesají. **8.** Oba grafy vzniknou z grafu funkce $y = 2^x$ posunutím o jeden dílek a) doleva, b) doprava. **9.** Při stejném měřítku na ose x se měřítko na ose y v prvém případě zvětší dvakrát, v druhém zmenší dvakrát. **10.** Sčítáním souřadnic y grafů funkcí $y = 2^x$ a $y = 2^{-x}$ dostaneme graf funkce $y = 2^x + 2^{-x}$, odečítáním souřadnic y, graf funkce $y = 2^x - 2^{-x}$.

11. Pro $a > 2$. **12.** Pro $a > 1$. **13.** b), c) větší než 1; a), d) menší než 1. **14.** a), d) $m > n$; b), c) $m < n$. **15.** a) $a > 1$; b), c) $a < 1$. **19.** a) 2; b) -2; c) -1; d) -2; e) -2. **20.** a) 16; b) 0,1; c) 9; d) 4; e) 1; f) 6; g) 2; h) 10.

21. a) 6; b) $\frac{1}{3}$; c) 4; d) 4; e) $\sqrt[6]{10}$; f) $\sqrt[3]{3}$; g) $\frac{1}{4}$; h) $\sqrt[n]{n}$; n přirozené číslo.

22. a) $2 < \log_2 6 < 3$; b) $1 < \log_{10} 30 < 2$; c) $-1 < \log_{10} 0{,}5 < 0$; d) $-5 < \log_2 \frac{1}{25} < -4$. **24.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{1}{4}$; d) $\frac{1}{8}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{1}{4}$; g) $\frac{3}{8}$; h) $\frac{1}{2}$.

25. a) 3; b) 64; c) 1; d) 2; e) $\frac{1}{3}$; f) 2. **27.** 1; 1. **30.** $M(0{,}7;\ 0{,}7)$.

32. $y = \log \frac{x}{10}$; $x > 0$. **33.** $y = 10^{x-1} - 2$. **34.** $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$; $0 < x < 1$.

35. Modul $\frac{\log_2 x}{\log_4 x} = 2$; čísla 2 a 4. **37.** Modul $M \doteq 3{,}32$, modul $M' \doteq 0{,}301$. **38.** Modul $M \doteq 0{,}434\,3$, $M' \doteq 2{,}302\,6$.

46. a) $x > -\frac{3}{2}$; b) $x > 5$ nebo $x < -3$; c) $x > 4$; d) $-1 < x < 1$; e) $0 < x < 3$; ve všech případech $z > 0$, $z \neq 1$. **47.** Výraz $n = \frac{z+1}{z-1} = \frac{(x+3)(x-3)(x+4)(x-4)}{x^2(x+5)(x-1)}$ musí být kladný. To lze splnit několika způsoby, např. pro $x > 5$ nebo $3 < x < 4$ atd.

2. VLASTNOSTI LOGARITMU, LOGARITMUS DEKADICKÝ

48. a) $1 + \log_z a$; b) $2 + \log_z a$; c) $\log_z a - 1$; d) $\log_z a - 2$; e) $1 + \frac{1}{2}\log_z a$; f) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_z a$; g) $\frac{1}{2}\log_z a - \frac{1}{2}$. **49.** a) $2\log_z a + \log_z b$; b) $2\log_z a - \log_z b$;

c) $\log_z a + \frac{1}{2}\log_z b$; d) $\frac{3}{2}\log_z a + \frac{4}{5}\log_z b$; e) $\frac{1}{3}\log_z a - 2\log_z b$; f) $2 + \log_z a - \log_z b$; g) $2 - \log_z a - 2\log_z b$; h) $2 - \log_z a - \frac{1}{2}\log_z b$; i) $\frac{1}{2}\log_z a + \frac{1}{2}\log_z b + \frac{1}{2}$; j) $\frac{2}{3}\log_z b - \frac{1}{3}$. **50.** a) $\log_z a + \log_z b + \log_z c$; b) $\log_z 5 + \log_z c + \log_z d$; c) $\log_z 3 + \log_z(x + y)$; d) $\log_z(a + b) + \log_z(a - b)$; e) $\log_z 2 + \log_z(x + y) + \log_z(x - y)$; f) $\log_z 2 + \log_z a + \log_z b - \log_z c$; g) $\log_z 2 + \log_z(a + b) - \log_z 3 - \log_z(a - b)$; h) $\log_z s + \log_z(s - a) + \log_z(s - b) + \log_z(s - c) - \log_z 4 - \log_z a - \log_z b - \log_z c$; i) $\log_z 12 + 2\log_z a + 3\log_z b + 5\log_z c$; j) $\log_z 2 + 2\log_z m - \log_z 3 - \log_z(m + 1) - \log_z(m - 1)$; k) $3 + \log_z \operatorname{tg}\alpha - \log_z a - \log_z b - \log_z c$; l) $\log_z 10 + \log_z(a + b) + \log_z(a - b) - \log_z 3 - 2\log_z c - 4\log_z d$; m) $\log_z 3 + \log_z a + \frac{1}{3}\log_z 3 + \frac{2}{3}\log_z b$; n) $\frac{3}{4}\log_z a - \frac{1}{4}\log_z b$; o) $\frac{1}{2}[\log_z s + \log_z(s - a) + \log_z(s - b) + \log_z(s - c)]$; p) $\log_z 3 + \frac{8}{5}\log_z a + \frac{2}{5}\log_z(a + b)$; q) $\log_z 15 + \frac{5}{2}\log_z r + \frac{1}{4}\log_z 2 + \frac{3}{4}\log_z(p - q)$; r) $\log_z 3 + \frac{3}{2}\log_z m + \frac{1}{2}\log_z n - \log_z 4 - \frac{1}{2}\log_z 5$; s) $\log_z 6 + \log_z a + \frac{1}{2}\log_z 2 + \frac{1}{2}\log_z c - \frac{3}{2}\log_z(a - b) - \log_z 5$; t) $\frac{3}{5}\log_z a - \frac{3}{5}\log_z 2 - \frac{3}{5}\log_z b$; u) $\frac{3}{4}\log_z a - \frac{3}{4}\log_z b - \frac{3}{2}\log_z 3$.

51. a) $\log_z(3a + 2b) + \log_z(3a - 2b)$; b) $\log_z(5ab^2 + 4c) + \log_z(5ab^2 - 4c)$; c) $\log_z(a - b) + \log_z(a^2 + ab + b^2)$; d) $\log_z(3a - 2c) + \log_z(9a^2 + 6ac + 4c^2)$; e) $2\log_z(a + 3)$; f) $2\log_z(5m - 6n)$. **52.** a) $2\log_z a + \frac{1}{2}\log_z \operatorname{tg}\alpha - 3\log_z b - \frac{1}{3}\log_z c$; $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$; b) $-2\log_z a - 3\log_z b$; $a > 0$; $b > 0$; c) $\log_z 3 - 2\log_z a + \frac{1}{2}\log_z b$; $a > 0$, $b > 0$; d) $\log_z 3 - \log_z m - 2\log_z n + \log_z p$; $m > 0$, $n > 0$, $p > 0$; e) $\frac{1}{2}\log_z a + \frac{2}{3}\log_z b$; $a > 0$, $b > 0$; f) $-\log_z a - \frac{1}{2}\log_z b$; $a > 0$, $b > 0$; g) $\frac{1}{2}\log_z a + \frac{1}{4}\log_z b - \log_z 4$; $a > 0$, $b > 0$; h) $\log_z 3 + \frac{1}{2}\log_z a - \log_z 7$; $a > 0$; i) $\frac{1}{4}\log_z a$; $a > 0$; j) $\frac{m}{n}\log_z a$; $a > 0$, n přirozené číslo; k) $\frac{n}{n+1}\log_z a - \frac{1}{m(n+1)}\log_z b$; $a > 0$, $b > 0$, n a m přirozená čísla; l) $\sqrt{a}\log_z\sqrt{a} = \frac{\sqrt{a}}{2}\log_z a$; $a > 0$; m) $\sqrt[3]{0{,}5}\log_z a$,

$a > 0$; n) $\log_z m + 2\pi \log_z n$; $m > 0$, $n > 0$; o) $\sqrt{3}\log_z m - \sqrt{2}\log_z n$; $m > 0$, $n > 0$. **53.** a) abc; b) $\frac{ab}{c}$; c) a^3b^2z; d) $\frac{a^3b^{n+3}}{z^3}$; e) $a^{b-1} . b^{a-1}$; f) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[m]{b^n}}$;

g) $\frac{\sqrt[4]{a^3} . \sqrt[6]{b^5}}{\sqrt{c}}$. **54.** a) $\frac{\sqrt[3]{a^2 . b^2 . \sqrt{ab}}}{5z^4}$; b) $\frac{(a-2)^2 . (a+2)^3}{(a^2-4)^2} =$
$= a + 2$; c) $(a - b) . \sqrt[3]{a^2b^3}$; d) $\frac{a(a+b)^n}{\sqrt[n]{a-b}}$; e) $\frac{b . (b+c)^m}{\sqrt[m]{b-c}}$.

55. a) $\sqrt[4]{a} . \log_z b$; b) $(a \log_z b)^y$; c) $a^y . \sqrt[4]{\log_z b}$; d) $n^n \log_z n$.

69. a) 0,483 48; b) 0,034 508; c) 0,004 946 9. **70.** a) 0,478 61 — 1; b) 0,678 63 — 1. **71.** a) 0,497 15; b) 0,502 85 — 1. **72.** 0,434 29. **73.** 2,302 6. **74.** 0,693 15.

3. UŽITÍ LOGARITMŮ K VÝPOČTŮM

81. a) 102,695; b) 34 288; c) 2,386 8; d) 11 855; e) 0,000 014 359; f) 45,949; g) 2429,2; h) 0,00035233; i) 0,0042052; j) 0,035265. **82.** a) 769,89; b) 105,687; c) 7 262 500. **83.** a) 15,389; b) 113,7; c) 0,167 98; d) 4,079 5; e) 529,86; f) 4,6; g) 0,705 08; h) 25,521; i) 0,042 292; j) 8,122 7; k) 34,764; l) 0,991 86. **84.** a) 4,971; b) 0,180 8; c) 0,078 42; d) 0,758 0; e) 3 843; f) 1,494; g) 40,39; h) 7,992; i) 0,070 47; j) 36,79. **85.** a) 1,681 8; b) 15,81; c) 1,065; d) 313,92; e) 5,964 5; f) 0,350 14; g) 1,023. **86.** a) 2,386; b) 6,321; c) 7,635; d) 2,32. **87.** 10,80. **88.** 13,64. **89.** 428,7 m². **90.** 224,7 cm².

91. 29,38 cm. **92.** $v_c = 18{,}87$ cm; $P = 361{,}4$ cm²; $a = 24{,}68$ cm; b) 29,29cm. **93.** $P = 2\,507$ cm²; $v_a = 60$ cm, $v_b = 73{,}3$ cm, $v_c = 63{,}8$ cm. **94.** 64,95 cm². **95.** 20,15 cm. **96.** a) 95,5 cm; b) 725,8 cm². **97.** 12 754 km. **98.** a) 1 667 km/h; b) 1 072 km/h. **99.** 482,3 cm². **100.** 75 kg.

101. 4,81 kg. **103.** 7,14 cm. **104.** $v = 10{,}84$ cm; $r = 5{,}42$ cm. **105.** 2 cm. **106.** 1 835 t. **107.** 1 527 t. **108.** 468,1 cm³. **109** 11,7 t. **110.** 510 .10⁶ km²; 10 832 . 10⁸ km³.

111. 10 830 . 10⁸ km³. **112.** 7,45 g/cm³. **113.** 7,065 m. **114.** 3,14 m. **115.** 8 min 20 sec. **116.** 20,74 kg. **117.** 864 000 J; 4,8 kW. **118.** 17,7 kp. **119.** a) 6 kp; b) 5,42 kp. **120.** 0,012 m.

121. b) 340,7 m/s; c) 347 m/s.

4. VÝPOČTY POMOCÍ LOGARITMICKÉHO PRAVÍTKA

124. a) 4,17; b) 4,68; c) 459; d) 257; e) 1,04; f) 81. **126.** a) 58,3; b) 0,917; c) 572; d) 75,2; e) 5,43; f) 0,46; g) 12 300; h) 4,16; i) 4,81; j) 1,352. **127.** 35 km. **128.** 2,16 t. **129.** 15,7 kpm. **130.** 376 m^3.

131. 10,7 %. **132.** 133,5 m. **134.** 180 cm/s. **135.** 1,45 m/s. **136.** 3,14; 7,07; 12,55; 19,7; 28,3 atd. **137.** 20,42 kg. **138.** 14,8 kp. **139.** 300 000 k = 225 NW. **140.** 0 m; 5 m; 20 m; 45 m; 80 m; 125 m; 180 m; 245 m; 320 m; 405 m; 500 m.

141. 36 m. **142.** 3,5 s. **143.** 108 kpm. **144.** 1,82 s. **145.** 26,6 Lx. **146.** 0,016; 0,063; 0,14; 0,25; 0,39; 0,57; 0,77; 1; 1,26; 1,56; 2,25; 3,5; 6,2 A.

5. ROVNICE EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÉ

148. a) 6; b) -3; c) -2; d) 3; e) 4; f) 2. **149.** a) 4; b) 3; c) -3; d) 6; e) -4; f) $-\frac{1}{4}$; g) 1; h) $\frac{12}{11}$. **150.** a) 1; b) 3; c) nemá řešení; d) 3; e) 3; f) 9; g) 3.

151. a) $\frac{2}{\log 2}$; b) $-\frac{\log 1{,}8}{\log 2}$; c) $\frac{3-4\log 4}{\log 4}$; d) 1; e) 0; f) $\frac{5-7\log 2}{3-2\log 2}$; g) 1,396; h) $\frac{\log 13-\log 31}{\log 5-\log 3}$; i) $\frac{\log 7-1}{\log 3-4\log 4}$. **152.** a) $\frac{\log 5-2\log 4}{2(\log 5-2\log 3)}$; b) 2; $b \neq 0$. **153.** 12. **154.** 3. **155.** a) $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; b) $x_1 = 5$; $x_2 = 2$; c) $x_1 = 5$; $x_2 = \frac{1}{2}$. **156.** $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 4$. **158.** $\frac{7}{2}$. **159.** 2. **160.** $\frac{1}{2}$.

161. $x_1 = 2$; $x_2 = -1$. **162.** a) 100; b) 0,01; c) 5,624; d) 2 154; e) 0,01. **163.** a) $10\sqrt[3]{10}$; b) $\frac{99}{101}$. **164.** a) 1; b) 7; c) nemá řešení; d) $\frac{1}{2}$; e) 36. **165.** a) 101; b) $\frac{9}{2}$; c) 25; d) -3. **166.** a) 36; b) $\frac{11}{3}$. **167.** a) 5; b) $\sqrt{2\,501}$. **168.** a) $\frac{1}{b^2}$ $a > 0, b > 0$; b) a; $a > 0, b > 0$. **170.** $x_1 = 1\,000$, $x_2 = \frac{1}{10}$.

171. 3. **172.** 5. **173.** $x_1 = \frac{1}{100}$; $x_2 = 10\sqrt[3]{100}$. **174.** $x_1 = 5$, $x_2 = 3$. **175.** $x_1 = 10^n$; $x_2 = \sqrt[n]{10}$. **176.** a) $\sqrt{10}$; $\sqrt{0{,}1}$; b) 1 000; c) 1 000; d) 1 000; e) $\sqrt{1\,000}$. **177.** $x = 10$. **178.** 1; 10; $\frac{1}{10}$. **179.** $x = 1\,000$. **180.** $x = 100$.

181. 1; 10. **183.** $x = 10\,000$, $y = 10$. **184.** $x = 5$, $y = 2$. **185.** $x = 8$, $y = 3$; $a \geqq 0$. **186.** $x = 100$, $y = 10$. **187.** $x = \sqrt{10}$, $y = \sqrt{1\,000}$. **188.** $x = 1\,000$, $y = 100$. **189.** $x = 4$, $y = 6$.

191. a) 4; c) $x_1 = 2\sqrt[3]{2}$; $x_2 = 2$. **192.** a) $x = 2$, $y = 6$; b) $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

193. Funkce $y = \log x^2$ je definována pro hodnoty $x \neq 0$, funkce $y = 2 \log x$ pro hodnoty $x > 0$; rovnost nastane pro hodnoty $x > 0$. **195.** a) $x > 2, x \neq 3$; b) $1 < x \leqq 3$. **197.** a) $\frac{1}{3}\left(2 \log a + \frac{1}{2} \log b\right) - \log 4 - \frac{1}{2}(\log c + \log d)$; b) $\frac{1}{3} \log c - \frac{1}{6} \log a - \frac{1}{3} \log b - \log 3 + \frac{5}{2} \log 2$. **198.** a) $\frac{a^3 \cdot b^{5-n}}{cd}$; b) $\frac{ad\sqrt[3]{b^2} \cdot \sqrt{d}}{18c^2}$. **199.** 31 místné. **200.** 17,36 (zaokrouhleno).

201. $\sqrt[a]{a}$; $a \neq 1$. **202.** $r \doteq 1{,}67$ m. **203.** O 91 %. **208.** 2. **209.** 7. **210.** $x_1 = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 6} \doteq 0{,}226\,3$, $x_2 = \frac{\log 2 - \log 3}{\log 6} \doteq -0{,}226\,3$.

211. $x_1 = 2, x_2 = 1$. **212.** $x = 1\,000$. **213.** $\frac{3}{2}$. **214.** a) 16; b) 9. **215.** $z = \frac{3}{2}$. Zobecnění: Při kterém základu z je $\log_z a$ o n větší než $\log_z b$? V tom případě je $z = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, n přir. číslo, $\frac{a}{b} > 0$, $a \neq b$. **216.** 2; $\frac{1}{4}$. **217.** a) $x = 24, y = 12$; b) $x = 1\,000, y = 100$. **218.** $x = 3, y = 9$. **219.** $x = 625, y = 3$ nebo $x = 125, y = 4$. **220.** Rovnost pro $x = \frac{1}{2}$, nerovnost pro $0 < x < 1$.

221. $0 < x < 3$ pro $a > 1$, $x > 3$ pro $0 < a < 1$. **222.** $x > 3^{\sqrt{2}}$ a $0 < x < 3^{-\sqrt{2}}$.

VIII. VEKTORY A KOMPLEXNÍ ČÍSLA

I. VEKTORY

3. a) $|AD| = |CB|$; b) neplatí. **6.** $(40 \pm 3{,}6)$ km/h. **9.** 173,9 m/s; 16°42′ od směru SJ. **10.** 86,6 N, 30°.

11. Asi 2 m/s. **13.** 798 km/h, 3°52′13″. **14.** Průřez nejméně 125 mm². **15.** $\boldsymbol{AM} = \boldsymbol{c} + \frac{\boldsymbol{a}}{2}$ nebo $\boldsymbol{AM} = \frac{\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}}{2}$; $\boldsymbol{BN} = \boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{b}}{2} = \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}}{2}$; $\boldsymbol{CP} = \boldsymbol{b} + \frac{\boldsymbol{c}}{2} = \frac{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}}{2}$. **16.** $\boldsymbol{AM} = -\left(\boldsymbol{b} + \frac{\boldsymbol{a}}{2}\right)$, $\boldsymbol{BN} = \boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{b}}{2}$, $\boldsymbol{CP} = \frac{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}}{2}$. **17.** $|R| = 0$. **19.** a) $(-1{,}2)$; b) $(5{,}4)$. **20.** a) $(1, -4)$; b) $(-1{,}2)$.

22. (1,0). $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. 23. a) (1, 5); b) (−1,0). 24. $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$; úhlopříčky rovnoběžníka se vzájemně půlí. 25. $\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$. V tomto šestiúhelníku jsou středy daných úseček v bodě S a navzájem se půlí. 27. $2\sqrt{2}$, $135° + k \,.\, 360°$; $3\sqrt{2}$, $225° + k \,.\, 360°$; 6, $60° + k \,.\, 360°$. Opačné: $315° + k \,.\, 360°$; $45° + k \,.\, 360°$, $240° + k \,.\, 360°$.

31. $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = 15$; $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = \sqrt{593}$. 32. $\widehat{ab} = \frac{\pi}{4}$. 33. $\widehat{st} = \frac{\pi}{3}$. 34. $T = \frac{1}{3}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$, věta o těžišti trojúhelníka. 36. a) $\boldsymbol{x} \equiv (1,1)$; b) $\boldsymbol{x} \equiv (3,0)$; c) $\boldsymbol{x} \equiv \left(-2, -\frac{28}{3}\right)$. 37. a) (−4,2); b) (−1,2). 38. $\left(\pm \frac{4}{5}\right)$. 39. a) $\left(\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right)$; b) (1,11); c) (7, −10); d) (13, −2); e) (−17,16).

41. Jedno ze tří řešení: a) $D \equiv (-2, -3)$; b) $D \equiv (1,4)$; c) $Q \equiv (-5, -1)$; d) $S \equiv (-7, -2)$. 42. a) $AB = \sqrt{13}$, $BC = 2\sqrt{5}$, $CD = 3\sqrt{5}$, $DA = 2\sqrt{13}$, $AC = 7$, $BD = \sqrt{65}$, čtyřúhelník obecný; b) $AB = BC = CD = AD = 5$, $AC = BD = 5\sqrt{2}$, čtverec; c) $AC = 2\sqrt{13}$, $BD = \sqrt{145}$, $AB = \sqrt{178}$, $BC = 3\sqrt{10}$, $CD = \sqrt{13}$, $AD = \sqrt{17}$, čtyřúhelník obecný. 43. $C \equiv \left(\frac{21}{2}, -4\right)$, $D \equiv (4, -3)$. 44. $2\sqrt{10}$, $2\sqrt{5}$, $\sqrt{20}$, 5,5; $T \equiv \left(3, \frac{7}{3}\right)$. 45. a) 5, 5, $\sqrt{2}$, rovnoramenný; b) $\sqrt{34}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{17}$ rovnoramenný, pravoúhlý; c) $\sqrt{305}$, $\sqrt{61}$, $\sqrt{244}$, pravoúhlý. d) $\sqrt{305}$, $\sqrt{61}$, $\sqrt{244}$, pravoúhlý. 46. $D \equiv (-2,1)$. 48. $P = 9\,\mathrm{j}^2$, b) $P = 20\,\mathrm{j}^2$, c) $P = 34{,}5\,\mathrm{j}^2$; d) $P = 2{,}5\,\mathrm{j}^2$. 49. $P = 13\,\mathrm{j}^2$. 50. a) $C \equiv (12,0)$; b) $C \equiv (11,3)$ nebo $C_1 \equiv (9{,}6; 7{,}2)$ nebo $C_2 \equiv (-3,3)$ nebo $C_3 \equiv (-1{,}6; -1{,}2)$.

51. $C_1 \equiv (3,0)$, $C_2 \equiv (-7,0)$. 52. $a = 6$. 55. a) $k \,.\, (-3,5)$; b) $k \,.\, (1,2)$; c) $k \,.\, (0,1)$; d) $\left(-\frac{4}{3}, 1\right) k$, kde k je libovolné číslo. 56. a) $\boldsymbol{v} \equiv k(1, -6)$; b) $\boldsymbol{v} \equiv (3, -1)$; c) $\boldsymbol{v} \equiv k(-3,5)$; d) $\boldsymbol{v} \equiv k(-1, -2)$; e) $k(0, -1) \equiv \boldsymbol{v}$; f) $\boldsymbol{v} \equiv k\left(\frac{4}{3}, -1\right)$. 57. $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{F} \,.\, \boldsymbol{h} = (6, -2) \,.\, (2,3) = 6(\mathrm{J})$. 58. $F = \sqrt{40}\,(\mathrm{N})$, $\varphi = 74°45'$, $s = \sqrt{13}$.

2. KOMPLEXNÍ ČÍSLA

61. a) $a_2 = 0$; b) $a_1 = 0$; c) $a_1 = a_2 = 0$; d) $a_1 = a_2$; e) $a_1 = -a_2$. 63. $a = 6$, $b = 3 + 3\mathrm{i}\sqrt{3}$, $c = -3 + 3\mathrm{i}\sqrt{3}$, $d = -6$, $e = -3 - 3\mathrm{i}\sqrt{3}$, $f = 3 - 3\mathrm{i}\sqrt{3}$. 64. $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$, $b = -a_2 + a_1\mathrm{i}$, $c = -a_1 - a_2\mathrm{i}$, $d = a_2 - a_1\mathrm{i}$.

65. $|a| = 5$; $|b| = 2$; $|c| = 5$; $|d| = 1{,}3$; $|e| = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $|f| = 1$; $|g| = \sqrt{5}$; $|h| = \left|\frac{1}{\cos \alpha}\right|$; $|k| = \sqrt{6}$; číslo f a číslo h pro $\alpha = 0 + k\pi$ je komplexní jednotka.

68. a) $|x| = \frac{2}{3}$; b) $|x| = \frac{\sqrt{7}}{4}$; c) $|x| = \frac{1}{5}$; d) $|x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

73. $a_2 \neq -b_2$. **75.** a) Mají-li komplexní čísla tvar $a_1 + b_2 i$, $b_1 + b_2 i$; b) $a_1 + a_2 i$, $a_1 + b_2 i$, $a_2 \neq b_2$; c) $a_2 \neq b_2$. **76.** a) 0; b) 0; c) 30i; d) $2(a + b)$i.
78. $a = 5$, $b = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5i\sqrt{2}}{2}$, $c = 5i$, $d = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5i\sqrt{2}}{2}$, $e = -5$, $f = -\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5i\sqrt{2}}{2}$, $g = -5i$, $h = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5i\sqrt{2}}{2}$; absolutní hodnota všech čísel je 5 a argumenty po řadě $n \cdot 45°$, kde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 7$. **80.** $|x| = 2\left|\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right|$, $\varphi = \frac{\alpha+\beta}{2}$ pokud $|\alpha - \beta| \leqq \pi$, $\varphi = \pi + \frac{\alpha+\beta}{2}$ pokud $|\alpha - \beta| > \pi$.

82. a) $\cos 60° + i \sin 60°$; b) $39 (\cos 292°37' + i \sin 292°37')$; c) $\cos 45° + i \sin 45°$; d) $\cos 0° + i \sin 0°$; e) $3{,}5 (\cos 180° + i \sin 180°)$; f) $3 (\cos 270° + i \sin 270°)$; g) $5 (\cos 126°52' + i \sin 126°52')$. **83.** $|a| = 1$, $\varphi = 22\frac{1°}{2}$. **84.** a) $\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} i$; b) $-\sqrt{3} - i$; c) $4{,}226\,2 + 9{,}063\,1i$; d) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$; e) -7; f) 1; g) $-2{,}5i$; h) 3i; i) $-1{,}699\,2 - 2{,}472\,3i$. **89.** a) $3 + 2i$; b) $18 + i$; c) 2; d) -2; e) $5 - 12i$; f) 6i; g) $-10i$; h) 4i; i) $2 + 6i$; j) $-2 - 2i$; k) -10; l) 8; m) -4; n) $-8i$. **90.** a) $-i$; b) 1; c) i; d) -1; e) $-i$; f) 1; g) $2i + 1$; h) $(3a + b)i$; i^n může nabývat jen hodnot: 1; -1; i; $-i$.

92. a) $(a + 2)(a - 2)(a + 2i)(a - 2i)$; b) $(a + i)(a - i)(2 + i\sqrt{|a|}) \cdot (2 - i\sqrt{|a|})$; c) $(a\sqrt{2} + i)(a\sqrt{2} - i)(a\sqrt{3} + i)(a\sqrt{3} - i)$; d) $(3 + i\sqrt{|a|}) \cdot (3 - i\sqrt{|a|})(1 + i\sqrt{|a|})(1 - i\sqrt{|a|})$; e) $(a + 1)(a - 1)(a + i) \cdot (a - i) \cdot (2 + i\sqrt{|a|})(2 - i\sqrt{|a|})$; f) $b(a + i)(a - i)(3 + i\sqrt{|a|})(3 - i\sqrt{|a|})$. **93.** a) 16; b) $-32i$. **94.** a) 2^{12}; b) $-2^{19}(1 + i\sqrt{3}) = 2^{20}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$. **95.** a) $a = -a_2 + a_2 i$; b) $a = a_1 + a_1 i$. **96.** a) Je-li alespoň jedno z nich rovné nule, obě reálná, obě ryze imaginární, obě imaginární, přičemž platí $a_1 = ka_2$, $b_1 = -kb_2$ nebo $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2$, kde k je reálné číslo; b) je-li jedno z nich reálné a různé od nuly, druhé ryze imaginární nebo obě imaginární, přičemž $a_1 = ka_2$, $b_2 = kb_1$ nebo $a_1 = kb_2$, $a_2 = kb_1$, kde k je reálné číslo; c) platí-li $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

97. 1 a 0. **99.** a) $3 - 4i$; b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; c) $1 - i$; d) i; e) $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$; f) $\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i$; g) $\frac{7}{10} - \frac{1}{10}i$; h) i; i) $1 + i\sqrt{1 - a}$; j) $\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}i$. **100.** a) 1; b) 0; c) 0; d) 0.

101. $\frac{3}{89} + \frac{4}{89}i$. **102.** $\frac{10}{13} + \frac{15}{13}i$. **103.** a) -1; b) -1. **104.** a) -1; b) $1 - i$; c) $\frac{4ab}{a^2 + b^2}i$. **106.** Pro $a = 5 + 2i$ není řešitelná; je-li $a \neq 5 + 2i$, je $y = \frac{3 - 7i}{5 + 2i - a}$; $-\frac{20}{29} - \frac{21}{29}i$. **107.** $\left(0; -\frac{48}{25}\right)$; (100; 0); (0; 4). **108.** a) $\frac{1}{2} - i$; b) $\frac{2 + a^2}{4 + a^2} + \frac{a}{4 + a^2}i$. **109.** a) Je-li dělenec rovný 0 nebo jsou-li obě čísla reálná a dělitel různý od nuly, jsou-li obě čísla ryze imaginární nebo obě imaginární a platí $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$ nebo $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2$, kde k je reálné číslo; b) je-li jedno reálné a různé od nuly a druhé ryze imaginární, nebo obě imaginární a platí $a_1 = ka_2$, $b_2 = -kb_1$ nebo $a_1 = kb_2$, $a_2 = -kb_1$, kde k je reálné číslo.

111. a) 1; b) $-i\sqrt{2}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; d) $\frac{\sqrt{10}}{5}$; e) 0. **115.** Komplexní jednotky. **116.** 1; -1. **118.** $x = 5 + 3i$. **121.** $x = 6 + 17i$ nebo $x = 6 + 8i$.

3. OPAKOVÁNÍ

124. a; $-\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}i$; $-\frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{2}i$; $a(\cos 0° + i \sin 0°)$; $a(\cos 120° + i \sin 120°)$; $a(\cos 240° + i \sin 240°)$. **125.** $a = 0$, $b = 4$, $c = (4 + 2\sqrt{2}) + 2i\sqrt{2}$, $d = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$. **126.** $|x| = 2\left|\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\right|$; $\varphi = \frac{\pi + \alpha + \beta}{2}$ pokud $\alpha > \beta$, $\varphi = \frac{\alpha + \beta - \pi}{2}$ pokud $\alpha < \beta$. **128.** -676.

131. 0; 1; -1. **132.** $C \equiv \left(\frac{5 - \sqrt{3}}{2}; \frac{1 + 5\sqrt{3}}{2}\right)$; $C' \equiv \left(\frac{5 + \sqrt{3}}{2}; \frac{1 - 5\sqrt{3}}{2}\right)$.
133. a) $0{,}9 - 1{,}7i$; b) 0. **134.** $-\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$. **135.** $x = \frac{3 - 5i}{1 + 2i - a}$, $a \neq 1 + 2i$; $x = -\frac{8}{17} - \frac{15}{17}i$. **137.** $\frac{\sqrt{5}}{5} + 1$. **138.** 0; $\frac{1}{2}i$; $-\frac{1}{2}i$. **140.** Obrazy všech čísel x vyplňují v případě a) levou polovinu roviny P_{xy}, jejíž hraniční přímka je osa y, v případě b) polovinu k ní opačnou.

X. POSLOUPNOSTI

1. POJEM POSLOUPNOSTI, POSLOUPNOST OHRANIČENÁ, NULOVÁ, LIMITA POSLOUPNOSTI

1. a) -24; -35; b) $-\frac{63}{64}$; $1 + \frac{1}{128}$. **2.** a) $\frac{1}{50}$; b) 9. **4.** $4:1$. **5.** O 18. **6.** a) $\frac{1}{n(n+2)}$; b) $\frac{2n-1}{2n+1}$; c) $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$; d) $n^2 - 1$; e) $(-1)^{n+1}$; f) $\frac{1}{n(n+1)}$; g) $\frac{(-1)^n}{2^n}$; h) $\frac{n^2}{2n+1}$; i) $\frac{2n-1}{2^n}$. **7.** $x = 5, y = 8$. **8.** $x = 2, y = 5, z = 8$.

11. Rostoucí pro $x > 0$, klesající pro $x < 0$. **12.** Rostoucí pro $k > 0$ a $x > 1$ nebo $k < 0$ a $0 < x < 1$, klesající pro $k < 0$ a $x > 1$ nebo $k > 0$ a $0 < x < 1$; pro $x < 0$ střídají členy posloupnosti znamení. **13.** 0; 1; 2; 1; -4. **14.** 1; 2; 1; 1; 0; -1. **15.** $d = 6$; $a_5 = 7$. **16.** 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$. **17.** 38. **18.** $\left(3; 3; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$; $\left(2; 2; 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{12}\right)$; $\left(1; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{24}\right)$. **20.** $a_{n+1} = a_n + 2(n+1)$; $a_1 = 2$, popřípadě $a_{n+1} = a_n\left(1 + \frac{2}{n}\right)$; $a_1 = 2$.

21. $a_{n+1} = a_n + \log x$; $a_1 = \log x$. **22.** a) $a_{n+1} = a_n$; $a_1 = 1$; b) $a_{n+1} = 3a_n$; $a_1 = 3$; c) $a_{n+1} = a_n + 2$; $a_1 = 3$; d) $a_{n+1} = a_n$; $a_1 = -1$; e) $a_{n+1} = \frac{n}{n+2} \cdot \frac{1}{a_n}$; $a_1 = \frac{1}{2}$; f) $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot \frac{1}{a_n}$; $a_1 = 2$. **23.** $a_n = 1 + (-1)^n$. **24.** $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$. **25.** $a_n = n$. **26.** a) $a_n = 2n + 1$; b) $a_n = \frac{n+1}{n}$. **37.** $\left\{\frac{1}{2 - 3n}\right\}$.

43. a) Od členu a_{333}; b) od členu a_{501}. **46.** $ra + sb$. **47.** a^r. **49.** a) 2; b) 1; c) 0; d) nemá limitu; e) nemá limitu; f) 0; g) $\frac{2}{3}$. **50.** a) 1; b) $\frac{a}{c}$; c) 2,718 28...

2. ARITMETICKÁ A GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST

51. $d = 3$; $a_{n+1} = a_n + 3$; $d = \frac{1}{2}$; $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$; $d = b$; $a_{n+1} = a_n + b$. **52.** $d = -\frac{2}{b}$; $a_{n+1} = a_n - \frac{2}{b}$; rostoucí pro $b < 0$. **53.** Rostoucí, je-li $b > 0$, $c > 0$ nebo $b < 0$, $c < 0$; klesající, je-li $b > 0$, $c < 0$ nebo $b < 0$,

$c > 0$; posloupnosti stejných čísel pro $b = 0$. **54.** $d = -\frac{1}{n}$; $a_n = 0$; $S_n = \frac{n-1}{2}$. **55.** Počet sčítanců udává přirozené číslo, o jehož dvojmoc jde. **56.** O 100. **57.** $a_3 = 3$. **58.** $2(n^2 + 1 - n)$. **59.** 91.

62. $d = 2$; $a_r = 2r$. **63.** $d = 8$; $a_n = 8n - 7$. **64.** 10. **65.** I. $a_{100} = 67$; $s_{100} = 3\,400$; II. $d = 0{,}5$; $n = 11$; III. $n = 30$; $s_{30} = 146 + \frac{1}{4}$; IV. $a_1 = -38$; $n = 15$. **66.** $d = \frac{b-a}{3} = 0{,}8$; $a_1 = 2a - b = 1$; $a_{10} = 2b - a = 8{,}2$; $s_{10} = 5(a + b) = 46$. **67.** 128. **68.** 90. **69.** $d = \frac{1}{2}$ nebo $d = -\frac{1}{2}$. **70.** $a_2 = \frac{2a-b}{4}$; $a_3 = \frac{a}{2}$; $a_4 = \frac{2a+b}{4}$.

71. 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22. **72.** 2; 5; 8; 11; 14; .... **73.** 2; 5; 8; 11; 14; 17; 20; .... **75.** 3; 7; 11; 15; 19. **76.** $-\frac{13}{3}$; 0; $\frac{13}{3}$ nebo $\frac{1}{3}$; $\frac{14}{3}$; 9 nebo -9; $-\frac{14}{3}$; $-\frac{1}{3}$. **77.** $x - \frac{2\sqrt{x}}{x}$; x; $x + \frac{2\sqrt{x}}{x}$ nebo $x + \frac{2\sqrt{x}}{x}$; x; $x - \frac{2\sqrt{x}}{x}$; racionální pro $x = k^2$, kde k je libovolné rac. číslo. **78.** 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20 nebo v pořadí obráceném; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16 nebo v pořadí obráceném; $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_9 = 12$; 0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24. **79.** Hledanou vlastnost mají dva členy posloupnosti: $a_6 = 15$; $a_{33} = -66$. **80.** $a = 18$ cm; $b = 24$ cm; $c = 30$ cm; $\alpha = 36°52'$; $\beta = 53°8'$, $\gamma = 90°$.

81. 3 dm; 4 dm; 5 dm. **82.** 21 cm; 28 cm; 35 cm. **84.** 3 cm; 8 cm; 13 cm. **85.** 1 480. **86.** 12; 14. **87.** 198. **88.** 39 °C. **89.** $\frac{g}{2} \cdot t^2$. **90.** $c \cdot t - \frac{a}{2} \cdot t^2$.

91. Za 10 minut. **92.** Za 9 sekund. **100.** $q = 3$; $a_{n+1} = 3a_n$; $q = c$; $a_{n+1} = ca_n$; $q = \frac{x}{y}$; $x \neq 0$; $y \neq 0$; $a_{n+1} = \frac{x}{y} a_n$.

101. Rostoucí, je-li $x < 1$; klesající pro $x > 1$; stejných hodnot nabývají členy posloupnosti pro $x = 1$. **103.** 1 688. **104.** $\frac{(n-1) \cdot 2^n + 1}{2^n}$. **105.** 211. **106.** a) $a_{10} = 19\,683$; $s_{10} = 29\,524$; b) $a_1 = 256$; $s_8 = 510$; c) $q = 3$; $s_7 = 2\,186$; d) $a_1 = 7$; $n = 5$; e) $q = \frac{1}{2}$; $n = 7$; f) $n = 8$; $s_8 = \frac{3\,280}{6\,561}$; g) $a_1 = 1$; $s_{19} = 174\,763$; h) $a_1 = -4{,}5$; $s_4 = 90$. **107.** $q = \frac{b}{a}$; $a \neq 0$; $a_n = a^{11-n} \cdot b^{n-1}$; $s_n = \frac{a^{11-n} \cdot (b^n - a^n)}{b - a}$; $b \neq a$. Je-li $a = b$, je $q = 1$, $a_n = a^{10}$, $s_n = n \cdot a^{10}$. **108.** $a_{11} = \frac{b^3}{a^2}$; $a \neq 0$; $b \neq 0$.

111. $n = 6$. **112.** $a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. **113.** 1; 2; 4; 8 nebo 8; 4; 2; 1. **114.** a^8; $\pm a^7b$; a^6b^3; $\pm a^5b^3$; a^4b^4; $\pm a^3b^5$; a^2b^6; $\pm ab^7$; b^8. **115.** 5; 10; 20; 40; 80; 160; 320; 640. **116.** 2; 6; 18; 54 nebo -4; 12; -36; 108. **117.** 425. **118.** 5; 10; 20; 40; 80; 160. **119.** 162 nebo $\frac{2}{3}$.

121. Úloha nemá řešení. Z délek 2 cm, 8 cm, 32 cm nelze sestrojit trojúhelník. **122.** 30°; 150°. **123.** 82°53′; 97°7′. **125.** $\frac{a^2}{1\,024}$. **126.** $4 \cdot 5^n$; $4a \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n$. **127.** 27 cm³. **128.** Asi 16 777 000. **129.** $\frac{m}{2^9}$; $\frac{m}{2^i}$; posloupnost geometrická s kvocientem $q = \frac{1}{2}$. **130.** $\frac{1}{2^{12}}$mg; $\frac{1}{2^{3h}}$ mg.

131. Asi 627 torů. **133.** 298 cm. **134.** $q = \sqrt[12]{2}$; 261,6; 293,7 (Hz). **135.** Asi $66\frac{1}{2}$ °C; 17krát. **137.** Za dobu $t = \frac{\log 2}{2 - \log(100 - p)}$; asi za 15 let. **138.** 3 %. **139.** Asi 3 655 m³. **140.** $K_n = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

141. 6 341 Kčs; 6 200 Kčs; 141 Kčs. **142.** 1 000 Kčs. **143.** Asi 2 %. **144.** Za 35 let. **146.** 53 050 Kčs. **147.** 5 056 Kčs. **148.** 19 710 Kčs. **149.** 8 983 Kčs. **150.** Stroj je rentabilní částkou $x \doteq 34\,800$ Kčs. **151.** 4 723 Kčs. **152.** 5 376,50 Kčs. **153.** 49 316,40 Kčs, 2 424,20 Kčs. **154.** Sedm splátek po 7 500 Kčs, osmá 6 821,80 Kčs.

3. NEKONEČNÉ GEOMETRICKÉ ŘADY

155. $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$. **156.** $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}{2}$. **157.** $\frac{4}{7}$. **158.** $\frac{3}{2}$. **159.** $\frac{p - qx}{1 - x^2}$; $|x| < 1$. **161.** a) $S = \frac{1}{x - 1}$; $1 < x < 3$; b) $S = \frac{-1}{x + 3}$; $-3 > x > -5$. **163.** a) $2 + \frac{4}{9}$; b) $\frac{23}{99}$; c) $2 + \frac{403}{999}$; d) $3 + \frac{789}{999}$; e) $1 + \frac{5\,042}{9\,999}$; f) $\frac{4\,305}{9\,999}$; g) $\frac{22}{90}$; h) $\frac{578}{990}$; i) $2 + \frac{628}{990}$; j) $3 + \frac{4\,824}{9\,900}$; k) $\frac{2\,345}{99\,900}$; l) $1 + \frac{37\,115}{99\,000}$. **164.** $\frac{81}{110}$. **165.** $1 + \frac{4}{5} + \frac{16}{25} + \ldots$ **166.** 9. **167.** $q = +\frac{3}{4}$. **168.** $a^2 + a^2(1 - a) + a^2(1 - a)^2 + \ldots$; $0 < a < 2$. **169.** $\frac{1 + n}{4}$.

171. $1 + \frac{x}{m} + \left(\frac{x}{m}\right)^2 + \left(\frac{x}{m}\right)^3 + \ldots$; $|x| < |m|$. **172.** $(1 + a) + a(1 + a) + a^2(1 + a) + \ldots$, $|a| < 1$. **173.** $1 + \cos^2\alpha + \cos^4\alpha + \cos^6\alpha + \ldots$, $\alpha \neq k\pi$.

174. a) $x = 10$; b) $x_1 = 6$, $x_2 = 1$ nevyhovuje; c) $x = -1$. **175.** 45°; 225°. **176.** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$. **178.** $S = \frac{3}{2}$. **180.** $\frac{2a^2}{3}$.

181. $S = a^2\sqrt{3}$. **182.** $S = d(\sqrt{2} + 1)$. **183.** $S = \frac{3a}{2}(\sqrt{3} + 1)$. **184.** $S = \frac{\pi a^2}{9}$.

185. $q = 0{,}797$. **186.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{21}$; $\frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{189}$. **187.** a) $6\,977 = n$; b) 20,9 s. **188.** a) 45 s; b) 90 s; c) 36 s. **189.** $9a^2$; $\frac{3\pi a^2}{2}$.

4. OPAKOVÁNÍ

190. $\frac{2}{n(n+2)}$. **198.** $a_1 = \frac{2y - nx}{n}$; $d = \frac{2(nx - y)}{n(n-1)}$; $n \neq 1$. **199.** 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21. **200.** $a_1 = -\frac{7}{2}$; $n = 27$ nebo $a_1 = 4$; $n = 12$.

201. 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23; 26; 29; 32. **202.** 468. **203.** $\alpha = 18°35'$; $\beta = 60°$; $\gamma = 101°25'$. **204.** $\alpha = 60°$. **205.** 15; 20; 25. **206.** 346 m/s; 15 °C. **207.** Za 3 sekundy. **210.** Posloupnost s kvocientem $q = 2$.

211. 211. **212.** 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128 nebo −3; 6; −12; 24; −48; 96; −192; 384. **213.** $\alpha = 20°44'$. **214.** $3 \cdot 4^n$; $\frac{a \cdot 4^n}{3^{n-1}}$. **215.** Za dobu $x = \frac{\log 2}{\log(100 + p) - 2}$; 7 let (zaokrouhleně). **216.** 109 143 Kčs. **217.** 82procentní (zaokrouhleně); 69krát. **218.** 120 torů. **219.** Na 6 151 Kčs. **220.** 11 723 Kčs.

222. 10^4; 10^5; 10^6; 10^7. **223.** Úloha nemá řešení. Z délek 4 cm, 10 cm, 16 cm nelze sestrojit trojúhelník. **224.** 18; 7; −4 nebo 2; 7; 12; 18; 6; 2 nebo 2; 6; 18. **225.** 6, 12 nebo $-\frac{9}{2}$, $\frac{27}{4}$. **226.** $a_1 = 12$; $a_2 = 6$; $a_3 = 3$; $a_4 = 0$; $a_5 = -3$. **227.** $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} - 2}{4}$. **228.** $1 + \sin^2\alpha + \sin^4\alpha + \sin^6\alpha + \ldots, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. **229.** $S = \frac{1}{1 - a}$, $|a| < 1$; $S' = \frac{1 \pm \sqrt{a}}{1 - a}$, $0 < a < 1$. **230.** a) $x_1 = 4$, $x_2 = -3$; b) $x = -1$; c) $x = 2$. **231.** $2\pi r$. **232.** $\frac{11\pi a^2}{96}$.

XI. KOMBINATORIKA, BINOMICKÁ VĚTA

1. VARIACE A PERMUTACE

1. a) 31; 34; 36; 41; 43; 46; 61, 63, 64; b) 413; 431; 461; 416; 436; 463; 613; 614; 631; 634; 641; 643. **3.** Šest součinů má činitele a na prvém místě. **4.** 24; 12. **5.** 56. **6.** 1 680. **7.** 332 640 způsoby. **8.** $(n-2)!$ způsoby. **9.** 3. **10.** a) 120; b) 48; c) 48; d) 24 způsoby.

11. 100; 36. **12.** 49. **13.** 15. **14.** 7. **15.** a) 5; b) 6. **16.** 5. **17.** 8. **19.** 144 způsoby. **20.** 36.

22. a) $\dfrac{1}{(n+2)!}$; b) 0. **23.** $\dfrac{(n+2)^2}{n(n+1)(3n+4)}$. **26.** $a > b$. **27.** a) 24 nulami; b) 74 nulami. **29.** $x = n!$

31. a) 36; b) 216. **33.** 3^{12}. **34.** 62. **35.** a) 6 561; b) 9 271. **37.** 54. **38.** a) 32 768; b) 7; c) 7. **39.** 10.

2. KOMBINACE

41. Tři trojúhelníky. **43.** $\binom{49}{6}$. **44.** 15. **45.** 15 různých dělitelů; $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$. **46.** 31. **47.** a) 15; 5; b) 10; $\binom{n}{2} - \binom{m}{2} + 1$, kde n je počet všech bodů a m počet bodů ležících v přímce. **48.** $\dfrac{n(n-3)}{2} = \binom{n}{2} - n$, $n \geqq 7$. **49.** 45; 39; $\binom{n}{2}$; $\binom{n}{2} - \binom{m}{2}$, kde n znamená počet všech přímek a m počet přímek navzájem rovnoběžných. **50.** $\binom{n}{3}$, $\binom{n-1}{2}$; 120; 36.

51. a) 20; b) 17; c) 13. **53.** 31 744 způsoby. **54.** 41 216 způsoby. **55.** 360. **56.** 17. **57.** 7. **58.** 4. **59.** 18. **60.** 15; 11.

61. 10. **62.** 1 900. **63.** 2 142. **64.** 15. **65.** 2 400. **66.** 60; $\binom{m+2}{2}\binom{n+2}{2}$.

71. a) $x = 3$; b) $x = 4$. **73.** a) Jen pro $n = 2$, $n = 3$; b) rovnost pro $n = m = 2$, nerovnost pro $mn > 4$. **74.** $n = 6$. **75.** $x = 6$, $y = 3$.

83. Součinů je 20. **84.** $\binom{10+1}{2} = 55$. **85.** 7. **86.** $\binom{3+4-1}{4} = 15$. **87.** $\binom{3+5-1}{5} = 21$.

3. BINOMICKÁ VĚTA

88. e) $49 + 20\sqrt{6}$; f) $216i$. **89.** a) $64x^5 + 1\,440x^3y^2 + 1\,620xy^4$; b) $8ab\,.\,(a^2 - b^2)\,.\,i$; c) 0. **91.** $5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)$. **92.** $a_5 = x^2 + 4x\sqrt{xy} + 6xy + 4y\sqrt{xy} + y^2$. **94.** Číslo u je také kořenem rovnice $x^6 - 1 = 0$. **97.** 1 104 Kčs. **98.** $4^n - 1$; $5^n - 1$; $11^n - 1$. **99.** $6^5 - 1$; $7^6 - 1$; $9^8 - 1$.

104. $10ab\sqrt{b}$. **105.** $24a^{10}b^8$. **106.** $x = \frac{1}{8}$. **107.** Pátý. **109.** Pátý. **110.** Čtvrtý.

111. $A_1 = 5^6$; $A_7 = \binom{12}{6} 5^3 \,.\, 2^2$; $A_{13} = 2^4$. **113.** Pětašedesátý. **114.** Největší koeficient má člen A_5; jeho velikost je $\binom{10}{4} 5^6 \,.\, 3^4$. **115.** $8\,940x^{14}$. **120.** a) $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$; $\sin 4\alpha = \sin\alpha\,(8\cos^3\alpha - 4\cos\alpha)$; b) $\cos 5\alpha = \cos\alpha(16\cos^4\alpha - 20\cos^2\alpha + 5)$; $\sin 5\alpha = \sin\alpha(16\cos^4\alpha - 12\cos^2\alpha + 1)$; c) $\cos 7\alpha = \cos\alpha(64\cos^6\alpha - 112\cos^4\alpha + 56\cos^2\alpha - 7)$; $\sin 7\alpha = \sin\alpha\,.\,(64\cos^6\alpha - 80\cos^4\alpha + 24\cos^2\alpha - 1)$.

4. OPAKOVÁNÍ

122. 60; 12. **123.** 9; 4 skupiny trojúhelníků. **124.** $(n - 2)(n - 1)!$ **125.** 6 545. **128.** $x = 2$, $x = 3$. **129.** Z 15 prvků. **130.** 15.

131. a) $\binom{44}{5}$; b) $\binom{6}{1} \cdot \binom{44}{4}$; c) $\binom{6}{2} \cdot \binom{44}{3}$; d) $\binom{6}{3} \binom{44}{2}$; e) $\binom{6}{4} \cdot \binom{44}{1}$; f) samé vadné. **133.** Žádná. **134.** 17. **136.** -25. **140.** $|x| = \frac{3\sqrt{3}}{64}$.

141. $n = 2$. **142.** $x = 3$, $n = 6$. **143.** Člen A_k, kde $k = n + 1$. **144.** Mnohočlen má 9 racionálních členů; jsou to členy A_5, A_{17}, A_{29}, A_{41}, A_{53}, A_{65}, A_{77}, A_{89}, A_{101}. **145.** $24x^{10}$.

XII. ÚVOD DO POČTU INFINITEZIMÁLNÍHO

1. SPOJITOST A LIMITA FUNKCE

5. a) $x = 2$; b) $x = -2$; c) $x = (2n - 1)\frac{\pi}{2}$, n celé číslo; d), f) spojitá pro všecky hodnoty proměnné x, tj. $x \in (-\infty, \infty)$; e) $x = 0$. **6.** a) $f(1) = \frac{2}{3}$; b) $f(0) = 1$; c) $0)f) = k$; d) $f(2) = 3$, v bodě $x = 1$ nelze definovat. **7.** a) V bodě

$x = 2$ není, v bodě $x = 1$ ano; b), c) ne; d) ano; e) ne; f) ano. **10.** a) 0; b) 1; c) 0; d) ∞; e) 3; f) $-\infty$; g) 1; h) 0.

11. a), b) 2; c) 0; d) 1; e) 0; f) $\lim\limits_{x\to 1_-} f(x) = -\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1_+} f(x) = \frac{1}{2}$; g), h), j) 1. **13.** a) 9; b) 2; c) -2; d) 4; e) $\frac{1}{2}$. **14.** a) 1; b) $\frac{1}{3}$; c) 1; d) -1; e) $\frac{6+\sqrt{3}}{11}$; f) 0. **16.** a) $\frac{8}{5}$; b) $\frac{3}{2}$; c) 1; d) $-\frac{2}{5}$; e) 27; f) $\frac{2}{3}$; g) $2\sqrt{y}, x \neq y > 0$; h) 6; i) na^{n-1}. **17.** a) $\frac{7}{11}$; b) 4; c) $\frac{1}{4}$; d) -3; e) $\frac{1}{2}$; f) $-\sqrt{2}$; g) $-\frac{1}{2}$; h) $\frac{2}{3}$. **18.** a) 4; b) 0; c) $\frac{3}{7}$; d) 0; e) -1; f) $6\sqrt{2}$; g) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **20.** $x \in (0{,}99;\ 1{,}01)$.

22. a) $\frac{2}{3}$; b) $-\frac{5}{2}$; c) 0; d) $\frac{1}{3}$; e) $-\frac{1}{4}$; f) 0; g) 0; h) $\frac{a}{d}$. **23.** a) ∞; b) 0; c) 5^{-5}; d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{25}$. **24.** a) 0; b) 4; c) $\frac{2}{3}$; d) ∞; e) $\frac{3}{2}$; f) $\frac{1}{2}$; g) 1. **25.** a) $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$; b) a je číslo libovolné; $b = 1$. **28.** a) 4; b) $\frac{3}{7}$; c) 0; d) $\frac{4}{3}$; e) 1; f) 1. **29.** a) 2; b) $(-1)^{m-n} \cdot \frac{m}{n}$, $n \neq 0$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{2}{\pi}$; e) $\frac{1}{2}$.

2. DERIVACE

34. a), b) $x \in (-\infty, \infty)$, c), d) $x \neq 0$. a) $f'(0) = 1$; $f'(1) = -1$; $f'(-2) = 5$; b) $f'(0) = -5$, $f'(1) = 1$, $f'(-2) = -17$; c) neexistuje, -2, $\frac{1}{4}$; d) $f'(0)$ není definována, $f'(1) = -8$, $f'(-2) = \frac{-23}{16}$. **35.** a) $y' = x - \frac{3}{2}$; $y'(1) = -\frac{1}{2}$; $y'(-1) = -2{,}5$, $y'(2) = \frac{1}{2}$; b) $y' = \frac{1}{x^2} - \frac{10}{x^3}$; $y'(1) = -9$; $y'(-1) = 11$; $y'(2) = -1$; c) $y' = \frac{1}{2x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4}$; $y'(1) = 5{,}5$; $y'(-1) = 13{,}5$; $y'(2) = \frac{3}{16}$; d) $y' = -2 - \frac{5}{x^2} - \frac{12}{x^3} + \frac{9}{x^4}$; $y'(1) = -10$, $y'(-1) = 14$; $y'(2) = -4\frac{3}{16}$. **36.** a) $y' = 5ax^4 - 4bx^3$; b) $y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; c) $y' = -\left(\frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\right)$; d) $1 + n(m+1)x^m + n \cdot mx^{m-1}$; e) $\frac{1}{2}(2x - 1)$;

f) $x(x^2 - 2)$; g) $ax^{-\frac{4}{3}} - 2\sqrt{a}\,x^{-\frac{5}{3}} + x^{-2}$; h) $1 - \cos x$. **37.** a) —e): $x \in (0, \infty)$; a) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; b) $y' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}} + e^x$; d) $y' = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} +$ $+ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; e) $y' = -x^2 - \dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$; f) $y' = -x^{-\frac{4}{3}} + 2x^{-\frac{5}{3}} - x^{-2}$, $x \neq 0$. **39.** a) $x \in (0, \infty), y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2x \sin x + x^2 \cos x$; b) $x \in \langle 0, \infty), y' =$ $= \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \sin x - \cos 2x$; c) $0 < x \neq (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$, k číslo přirozené, $y' =$ $= 2x \operatorname{tg} x + \dfrac{x^2}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cos x + \sqrt{x} \sin x$; d) $-\dfrac{2}{(x - 1)^2}$, $x \neq 1$; e) $\dfrac{3}{(x + 4)^2}$, $x \neq -4$; f) $\dfrac{3}{x^2}$, $x \neq 0$; g) $\dfrac{1}{(x - 1)^2}$, $x \neq 1$; h) $\dfrac{1}{(x + 2)^2}$, $x \neq -2$; i) $\dfrac{x^2 - 3}{2x^2}$, $x \neq 0$; j) $\dfrac{4x}{(x^2 + 1)^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$.

41. a) $\dfrac{-2x}{x^2 - 1}$, $|x| < 1$; b) —d): $x \in (-\infty, \infty)$; b) $\dfrac{e^x(1 - x)^2}{(1 + x^2)^2}$; c) $e^x(\cos x +$ $+ \sin x + 2x \cos x)$; d) $b \cos ax \,.\, \cos bx - a \sin ax \sin bx$; e) $\dfrac{4}{x^2 - 4}$, $x \in (-2, 2)$; f) $\dfrac{\sin^3 x \cos x + (1 + x) \sin^2 x \,.\, (1 + 2\cos^2 x)}{3\cos^2 x}$, $x \neq (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$, kde k je číslo celé. **42.** 1) Směrnice tečny; 2) okamžitá rychlost; 3) rychlost reakce. a) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$; b) 1; c) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{12}$, $\dfrac{6\sqrt{3} - 1}{4}$; d) $\dfrac{2\sqrt{3} - 5}{4}$; e) -3; f) $\dfrac{\pi}{3} \cdot$ $\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. **43.** a) $-2{,}1$; b) $-1{,}0$; c) $-4{,}3$. **44.** a) $\dfrac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$, $x \neq$ $\neq (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$; b) $\dfrac{1}{1 + \sin 2x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{4}(4k + 1)$; c) $\dfrac{2 \sin x}{(1 + \cos x)^2}$, $x \neq$ $\neq (2k + 1)\pi$; d) $-\dfrac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$, $x \neq (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$, $x \neq (4k + 1)\dfrac{\pi}{4}$, kde k je vždy celé číslo. **46.** a) -45, $\operatorname{arctg} 2 = 63°26'$; b) $\operatorname{arctg}(\pm 3) = \pm 71°34'$; c) $135°, 45°$; d) $60°$. **47.** a) $(1,0)$; b) neexistuje; c) $\left(\pm \sqrt[n+1]{-an}, \dfrac{\pm a}{\left(\sqrt[n+1]{-an}\right)^n}\right)$, $a < 0$, n liché; $\left(\sqrt[n+1]{-an}, \dfrac{a}{\left(\sqrt[n+1]{-an}\right)^n}\right)$, pro $a \neq 0$, n sudé; d) $(2k\pi, -1)$, $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, 1\right)$, k je číslo celé. **48.** a) $y = 2x - 3$, $x + 2y = 4$; b) $x + y = 3$,

$x - y = 1$; c) $3x - y = 1$, $y + 1 = -\frac{x}{3}$; d) $y = 4x + 14$, $y = -\frac{x}{4} + \frac{5}{4}$; e) $y - 4 = 7(x - 2)$; $y - 8 = 7(x + 2)$, $y - 4 = -\frac{1}{7}(x - 2)$, $y - 8 = -\frac{1}{7}(x + 2)$. **49.** a) (2,4); b) $\left(\pm\sqrt[6]{2a^2}, \sqrt[3]{\frac{a}{2}}\right)$; c) $\left(\frac{\pm 1}{2a}, \frac{1}{4a}\right)$. **50.** a) $c = +2$; b) $c = \left(\frac{2}{2\sqrt[3]{2} - 1}\right)^3$.

51. a) $T_1 \equiv \left(\frac{5}{4}, \frac{25}{16}\right)$; b) $T_2 \equiv \left(-\frac{5}{22}, \frac{25}{484}\right)$; c) neexistuje; d) $T_{3,4} \equiv (\pm\sqrt{3}, 0)$; e) $T_5 \equiv (1, 2)$. **52.** a) 1, -1; b) neexistuje; c) $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$; d) 1, -1; e) jen zleva, -1; f) 1, 4. **53.** a) ∞ pro $x \to 0_+$ a $x \to 1_-$; $-\infty$ pro $x \to 0_-$a $x \to 1_+$; b) ∞ pro $x \to 0_+$, $-\infty$ pro $x \to \frac{\pi}{2}_-$; c) $-\infty$ pro $x \to -2_-$, ∞ pro $x \to -2_+$; d) ∞ pro $x \to -1_+$, $-\infty$ pro $x \to -1_-$. **54.** $P = a^2$. **55.** $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{a(t + \Delta t)^2 - at^2}{\Delta t} = 2at$. **56.** a) $s' = v = c + gt$, $v' = g$, $F = mg$; b) $a = b^2 s$, $F = mb^2 s$. **57.** 605 J. **58.** $v = 600$ m/s. **60.** a) $y' = -3(1 - 2x + x^2)$; b) $y' = 15(x^3 - 2)^4 \cdot x^2$; c) $y' = (12x^3 - 36x) \cdot (x^4 - 6x^2 + 7)^2$; d) $y' = 2(x - 2)(2x^2 - 8x + 7)$; e) $x \neq a$, $y' = \frac{2x}{(a^2 - x^2)^2}$; f) $x \neq 5$, $y' = \frac{2}{(5 - x)^3}$.

61. a) $y' = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$; b) $|x| \leq a$, $y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; c) $y' = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{1 + x^2}}$; d) $|x| \leq 1$, $y' = \frac{2(2x^2 - 1)}{\sqrt{1 - x^2}}$; e) $x \neq 1$, $y' = \frac{2(x + 1)}{(1 - x)^3}$; f) $y' = \frac{a}{(x + a)^{1,5}}$; g) $a \neq 0$; $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}(x + \sqrt{a^2 + x^2})}$. Pokud není vyznačeno jinak, jsou derivace definovány pro $x \in (-\infty, \infty)$. **62.** a) $y' = \frac{2x^2 + x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in (-\infty, \infty)$; b) $y' = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, $x \in (0, \infty)$; c) $y' = \frac{-e^{\frac{1}{\ln x}}}{x \ln^2 x}$, $x \in (0,1) \cup (1, \infty)$; d) $\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$; e) $\frac{1}{x} + \operatorname{cotg} x - \frac{x}{1 - x^2}$; $x \neq 0$, $x \in (-1,1)$; f) $y' = \frac{-1}{\cos x}$, $x \neq (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$, k celé číslo; g) $y' = \frac{3}{x} \ln^2 x^3$, $x > 0$. **63.** a) $y' = 2(3x^2 + 1) \cdot 6x$; b) $y' = 3(x^2 - 2x + 2)^2 (2x - 2)$; c) $(3x - 2)(9x + 4)$; d) $y' = \sqrt{2} x^{\sqrt{2} - 1} \sin x +$

$+ x^{\sqrt{2}} \cos x$; e) $y' = 3(\sin x \cos x)(-2 + \cos x)$; f) $\sin^2 x \cos x - 3 \sin^5 3x \,.\, \cos 3x$; g) $y' = (-\sin x)(2 - 3 \sin x + 5 \sin^3 x) : \sqrt{1 + \sin^2 x}$; h) $y' = \sin^5 3x \,.\, \cos^3 3x$. K definičnímu oboru viz poznámku v řeš. úlohy 61. **64.** $b = -3$, $c = 4$. **65.** $\left(\frac{-p}{3}\right)^3 = \left(\frac{q}{2}\right)^2$. **66.** $m'(t) = (a - m)k$. **68.** $t_{1,2} \equiv y = (\pm 2\sqrt{2} + 3)x$. **69.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{17}{4}\right)$. **70.** a) $71°34'$; b) $90°$, $36°9'$; c) $70°30'$; d) $90°$, $36°52'$.

71. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **72.** $40°54'$ nebo $139°6'$. **73.** $x - y + 2 = 0$, $s_t = 2$, $s_n = 2$. **74.** $c = -23$, $d = 28$. **75.** 500 m, $\frac{5}{36}$ m/s^2. **76.** 10 m/s. **77.** a) $t = 80$ s; b) $78\frac{3}{4}$, $67\frac{1}{2}$, $56\frac{1}{4}$, 45, ..., 0 km/h. **78.** a) $v = c - gt$; b) $t = \frac{c}{g}$, $s = \frac{c^2}{2g}$; c) $v = -c$, $t = \frac{2c}{g}$. **79.** $\frac{\pi^2}{18}$ m/s^2. **80.** $v = \frac{\sqrt{t.k}}{2t}$, $a = \frac{-\sqrt{tk}}{4t^2} = \frac{-2v^3}{k}$.

81. $\alpha = at^2$, $2\pi = 64a$, $\omega = \frac{1}{10}\pi \,.\, t$, pro $t = 32$ je $\omega = 2\pi$ rad/s. **82.** a) $x = ct \cos \alpha$, $y = ct \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2$; b) $s = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$; max. pro $\alpha = 45°$. **83.** $v = A \,.\, e^{-kt} \,.\, [a \cos(at + b) - k \sin(at + b)]$, $a = A \,.\, e^{-kt} [(k^2 - a^2) \,.\, \sin(at + b) - 2ak \cos(at + b)]$.

3. PRŮBĚH FUNKCE, MAXIMA, MINIMA

85. a) Pro $x > 0$ rostoucí, pro $x < 0$ klesající; b) klesající pro všecka $x \neq 0$; c) klesající pro $x \in (2k\pi, (2k + 1)\pi)$, k celé číslo libovolné; d) rostoucí pro $x \in \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right) \cup \left(\frac{-1}{2k+1}, \frac{-1}{2k+2}\right)$, klesající pro $x \in \left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right) \cup \left(-\frac{1}{2k}, \frac{-1}{2k+1}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$; e) rostoucí pro každé x; f) rostoucí pro $x > 0$. **86.** a) α), β) Lokální extrém; γ) klesající; b) α), γ) klesající, β) lokální extrém; c) α) rostoucí; β) klesající; γ) lokální extrém; d) α) rostoucí, β) lokální extrém; γ) klesající; e) β) lokální extrém, γ), δ) rostoucí, α) klesající; f) α) klesající; β), γ) rostoucí; g) α), β) extrém; γ) klesající. **87.** a) min $(0, -2)$; b) min $(3,9)$; c) min $(3, -2)$; d) max $(4,18)$, e) max $(4,16)$. **88.** a) Rostoucí pro $x > 1$ a $x < -1$, klesající pro $-1 < x < 1$, $y_{max} = 2$, $y_{min} = -2$; b) rostoucí pro $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$, klesající pro $x \in (-3,1)$, $y_{max} = 28$, $y_{min} =$

$= -4$; c) rostoucí pro $x \in (-\sqrt{5},0) \cup (\sqrt{5}, \infty)$, $y_{max} = \frac{9}{8}$ pro $x = 0$, $y_{min} =$ $= -2$ pro $x = \pm\sqrt{5}$; d) $x \neq -2$, klesající pro $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$, lokální max $(-1,2)$, min $(-3,6)$; e) rostoucí pro všecka $x < -1$, lokální max $(-1,1)$; f) rostoucí pro $x > 0$ a $x < -2$, klesající pro $x \in (-2,0)$, $y_{min} =$ $= \frac{27}{4}$; g) rostoucí pro $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $y_{max} = \sqrt{2}$, $y_{min} = 0$; h) klesá pro $x \in \left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2}{3}\pi + k\pi\right)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; i) roste pro $x \in (0, \infty)$, klesá pro $x \in (-\infty, 0)$, lokální min $(0,1)$; j) rostoucí pro $x < e$, klesající pro $x > e$, $y_{max} = \frac{1}{e}$. **89.** a) Rostoucí pro $x > 3$, $x < -1$, klesající pro $x \in (-1,3)$, v bodě $x_1 = -1$ je maximum, v bodě $x = 3$ minimum funkce y; b) rostoucí pro $x > 1$ a $x < -2$, $y(1) = -27(\text{min})$, $y(-2) = 0(\text{max})$; c) rostoucí pro $x > 4$ a $x < 0$, $y(0) = 7(\text{max})$; $y(4) = -2{,}5(\text{min})$; d) rostoucí pro $x < -1$ a $0 < x < 1$, $y(0) = 0(\text{min})$, $y(\pm 1) = 1(\text{max})$.

91. a) $x \in (-\infty, \infty)$, $A \equiv (0,0)$, $B \equiv (\sqrt{3},0)$, $C \equiv (-\sqrt{3},0)$, funkce lichá, lokální minimum v bodě $M \equiv (-1, -2)$, lokální maximum v bodě $N \equiv$ $\equiv (1,2)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$; b) $x \in (-\infty, \infty)$, $A \equiv \left(\sqrt{1 + \sqrt{3}}, 0\right)$, $B \equiv \left(-\sqrt{1 + \sqrt{3}}, 0\right)$, kde A, B, C ... značí nulové body, k libovolné celé číslo, lokální minimum $M \equiv (0,1)$, maximum $N_1 \equiv \left(1, \frac{3}{2}\right)$, $N_2 \equiv \left(-1, \frac{3}{2}\right)$, funkce sudá; c) $x \in (-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, \infty)$, $M \equiv (0,1)$, asymptoty: $y = 0$, $x = 1$, $x = -1$. **92.** a) $x \in (-\infty, \infty)$, $A \equiv (-1,0)$, $B \equiv (2,0)$, $M \equiv (2,0)$, $N \equiv (0,4)$; b) $M \equiv (1, -8)$, $N \equiv (-5, 100)$; c) $x \in \langle \pm\sqrt{2k\pi}, \pm\sqrt{(2k+1)\pi} \rangle$, $y \in \langle 0,1 \rangle$, $M \equiv (\sqrt{k\pi}, 0)$, lokální maximum $N \equiv \left(\pm\sqrt{\frac{4k+1}{2}\pi}, 1\right)$, $k = 0$, $\pm 1, \pm 2, \ldots$; d) roste pro $x < -1$ a pro $x > 5$, klesá pro $x \in (-1,5)$, lokální minimum $M \equiv (5, -4)$, lokální maximum $N \equiv (-1,8)$; e) průsečíky s osou x: $A \equiv (-1,0)$, $B \equiv (2,0)$, $C \equiv (1,0)$, roste pro $x < \frac{2 - \sqrt{7}}{3}$ a pro $x > \frac{2 + \sqrt{7}}{3}$, lokální minimum nastává v bodě $\frac{2 + \sqrt{7}}{3}$, maximum pro $x = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}$. **93.** a) Pro $x \in \langle 0, \infty)$, $y \in \langle 0, \infty)$, stále rostoucí; b) $x \in (-\infty, \infty)$, $A \equiv (\pm 2\sqrt{3}, 0)$, $B \equiv (0,0)$, $M \equiv \left(-2, -\frac{16}{3}\right)$, $N \equiv \left(2, \frac{16}{3}\right)$, roste pro $|x| < 2$, klesá pro

$|x| > 2$; c) $(-\infty, \infty)$, $A \equiv (0,0)$, $B \equiv \left(\frac{3 \pm \sqrt{45}}{2}, 0\right)$, $M \equiv (3, -9)$, $N \equiv \left(-1, \frac{5}{3}\right)$, roste pro $x < -1$ a pro $x > 3$; d) $x \in (-\infty, \infty)$, funkce sudá, $A \equiv (0,0)$, roste pro $x > 0$, $M \equiv (0,0)$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$; e) $x \neq 0$, $x \neq 1$, klesá pro každé x, $A \equiv \left(\frac{1}{2}, 0\right)$; f) $x \in (0, \infty) \cup (-\infty, 0)$, $M \equiv (1,2)$, $N \equiv (-1, -2)$, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, rostoucí pro $|x| > 1$, klesající pro $x \in \langle -1,0) \cup (0,1)$. **94.** a) $x \in (-\infty, \infty)$, $A \equiv (0,0)$, $B \equiv (\pm 2, 0)$, $M \equiv (\pm\sqrt{2}, -4)$, $N \equiv (0,0)$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$, klesá pro $x < -\sqrt{2}$, $0 < x < \sqrt{2}$, roste pro $0 > x > -\sqrt{2}$ a pro $\sqrt{2} < x < \infty$; b) $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $A \equiv (-\sqrt[3]{2}, 0)$, $M \equiv \left(1, \frac{3}{2}\right)$, graf se skládá ze dvou částí: I. pro $x \in (-\infty, 0)$ klesá, II. pro $0 < x < 1$ klesá a roste pro $x > 1$; c) $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$, $A \equiv (1,0)$, $M \equiv \left(0, -\frac{1}{4}\right)$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = \infty$; d) $x \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$, $A \equiv (0,0)$, rostoucí pro $x < 0$, $x > 4$, klesající pro $x \in (0,4)$, $M \equiv (4,8)$, $N \equiv (0,0)$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to 2-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2+} y = \infty$; e) $x \in (-\infty, \infty)$, funkce lichá, $A \equiv (0,0)$, rostoucí pro $x \in (-1,1)$, lokální minimum $M \equiv (-1, -1)$, lokální maximum $N \equiv (1,1)$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 0$; f) $x \in (-\infty, \infty)$, rostoucí pro $\left(\frac{5}{4}\pi + 2k\pi, 2\pi \,.\, (k+1) + \frac{\pi}{4}\right)$, $M \equiv \left(\frac{5}{4}\pi + 2k\pi, -\sqrt{2}\right)$, $N \equiv \left(\frac{\pi}{4} + 2\,k\pi, \sqrt{2}\right)$, funkce periodická. **97.** Krychle o hraně $a = \frac{2}{3} r\sqrt{3}$. **98.** $2x + y - 1 = 0$. **99.** 15 m, 30 m. **100.** 4 m, 1,7 m, nebo 2 m, 3,4 m.

101. $\frac{a}{6}$. **102.** $\sqrt{3}$. **103.** $s = \frac{2}{3} r\sqrt{3}$, $v = s\sqrt{2}$. **104.** $r = v \doteq 2{,}05$ m. **105.** $r = 0{,}5$ dm, $v = 1$ dm. **106.** $r' = \frac{2}{3} r$, $v' = \frac{1}{3} v$. **107.** $\alpha = 60°$. **108.** $E = \frac{I \cos\alpha}{d^2}$, kde α je úhel dopadu paprsků, d je vzdálenost osvětleného místa od zdroje světla; $x = \frac{b\sqrt{2}}{2}$. **109.** $h = 0{,}707\, d$. **110.** $x = 2\sqrt{\frac{5P}{17}}$, $BC = \frac{17}{10}\sqrt{\frac{5P}{17}}$.

111. $x = \frac{2a}{3}\sqrt{3}$, $v = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, $V = \frac{4a^3}{27}\sqrt{3}$. **112.** $v = \frac{4}{3} r$. **113.** 5,6 m. **114.**

$v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$, kde k je koeficient úměrnosti. **115.** Jsou-li A', B' kolmé průměty bodů A, B do směru toku potoka, $A'B' = c$, $AA' = a$, $BB' = b$ je $\frac{a}{A'C} = \frac{b}{B'D} = \frac{a+b}{c}$, neboli směr AC je rovnoběžný se směrem BD. **116.** $x = a - \frac{2b\sqrt{5}}{5}$. **117.** $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \doteq 294°$. **118.** $x = \left(\frac{2}{\ln 10}\right)^2$. **119.** $d_{\min} = 3$, $d_{\max} = 7$. **120.** Krychle $a = \sqrt{\frac{P}{6}}$.

121. $r = s\frac{\sqrt{6}}{3}$, $v = \frac{s\sqrt{3}}{3}$, kde s je délka strany kužele. **122.** x článků vedle sebe a těchto skupin y za sebou. Vnitřní odpor baterie: $r_1 \frac{y}{x} = \frac{y}{6x}$, $e_1 y = 2y$. $I = \frac{2y}{\frac{y}{6x} + 3}$. 36 skupin po dvou článcích, $I_{\max} = 12$ A. **123.** $x = \sqrt{ab}$. **125.** a) $M \equiv (0,0)$, $N \equiv (2,4)$; b) $M \equiv (0,9)$, $N \equiv (-3,36)$; c) $M \equiv (\pm 1, 4)$, $N \equiv (\pm 2,13)$; d) $M \equiv (8,6)$, $N \equiv (0,10)$; e) $M \equiv \left(4, \frac{3}{5}\right)$; f) $M \equiv \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $N \equiv \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; g) $N \equiv \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$, M neexistuje. **126.** a) $x_1 = -5$, $x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; b) $x_{1,2} = -1$, $x_{3,4} = \pm i$; c) $x_{1,2} = 1$, $x_3 = -1$, $x_{4,5} = 1 \pm i$; d) $x_{1,2} = 2$, $x_{3,4} = \pm i$; e) $x_1 = -1$, $x_{2,3} = 2$, $x_{4,5} = \pm i\sqrt{3}$. **127.** a) $x_1 \in (0,1)$; b) $x_1 \in (-1,0)$, $x_2 \in (0,1)$; c) $x_1 \in (0,1)$; $x_2 \in (1,2)$; d) $x_1 \in (-1,0)$. **128.** a) $c = \frac{3}{2}$; b) $c = 0$; c) $c = 3$; d) $c = 0{,}596$rad; e) $\frac{3 \log e}{4 \log 2}$. **130.** a) 1,995 6; b) 10,05; c) $0{,}51 \pm 0{,}01$; d) $0{,}48 \pm 0{,}01$.

4. INTEGRÁLNÍ POČET

Integrační konstanty jsou pro úsporu místa vynechány.

136. a) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \ln|x|$; b) $\frac{3}{4}x^3\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$, $x > 0$; c) $\frac{4}{11}t^2\sqrt[4]{t^3}$, $t \geqq 0$; d) $\sqrt{t}\left(\frac{2}{3}t + 2\right)$, $t > 0$; e) $4x + 4\frac{2}{3}\ln|x| + \frac{1}{3x} - 2\operatorname{arctg} x$, $x \neq 0$; f) $\arcsin x + \ln|x| - \operatorname{arctg} x$, $x \in (-1,1)$. **137.** a) $x \cdot \left(\frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{3}{4}\sqrt[4]{x}\right)$, $x \geqq 0$;

b) $\frac{2}{3}\sqrt{x}(x+3)$, $x>0$; c) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}$, $x>0$; d) $\frac{3}{4}(x-4)\sqrt[3]{x}$, $x \neq 0$; e) $3\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$, $x>0$; f) $2\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}$, $x>0$. **138.** a) $\frac{t^3}{3}+3t-\ln|t|$, $t \neq 0$; b) $12\sqrt[3]{t}+4\frac{1}{\sqrt[3]{t}}-\frac{1}{9t}$, $t>0$; c) $\frac{271}{2}t^2-\frac{54}{13}\sqrt{5}\,t^2\sqrt[6]{t}+\frac{405}{7}t^2\sqrt[3]{t}-54\sqrt{5}t^2\sqrt{t}+$ $+\frac{18}{5}t\sqrt[3]{t^2}-\frac{216}{11}\sqrt{5}\,t\sqrt[6]{t}+9t\sqrt[3]{t}-24\sqrt{5}\,t\sqrt{t}+8t$, $t \geqq 0$; d) $-\frac{1}{2}\left(t^2+\right.$ $\left.+\frac{3}{2}\sqrt[3]{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, $t>0$; e) $6t^2 . \sqrt[6]{t^5}\left(\frac{t^2}{29}-\frac{1}{17}\right)$, $t \geqq 0$. **139.** a) $-\cos x-$ $-\ln|\cos x|$, $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, k vždy celé číslo; b) $e^x+2\cos x$; c) $2x-\operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$; d) $\operatorname{tg} x-\operatorname{cotg} x$, $x \neq k\pi$, $x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}$; e) $-(\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x)$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$; f) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$, $x \in (-\infty, \infty)$; g) $2(\operatorname{tg} x-\operatorname{cotg} x)$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$; h) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2}.(2k+1)$. **140.** a) e^x+2x-e^{-x}, $x \in (-\infty, \infty)$; b) e^x+e^{-x}, $x \in (-\infty, \infty)$; c) $e^x-\frac{1}{2x^2}$; d) $\frac{1}{12}(1+2e^{2x})^3$; e) $e^x-\frac{ac}{b+c}\cdot x^{\frac{b+c}{c}}$.

141. a) $-\frac{1}{2}(x-2)^{-2}$, $x \neq 2$; b) $\frac{-(1-x)^6}{6}$; c) $\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$; d) $\frac{-1}{4}\cdot$ $\cdot(2x-3)^{-2}$, $x \neq \frac{3}{2}$; e) $\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n}$, $n \neq 1$; f) $\frac{e^{3t}}{3}$; g) $\frac{-5}{18}.\sqrt[5]{(9-3x)^6}$, $x \leqq 3$. **143.** a) $\ln|x+3|$, $x \neq -3$; b) $-\ln|2-x|$, $x \neq 2$; c) $\ln|x^2-1|$, $x \neq 1$; d) $\frac{1}{2}\ln|2x+5|$, $x \neq \frac{5}{2}$; e) $-\ln|1+\cos x|$, $x \neq (2k+1)\pi$, k číslo celé; f) $\ln|x^2-x+3|$; g) $\ln|x^3-x+2|$, $x^3-x+2 \neq 0$; h) $\frac{1}{3}\cdot$ $.\ln|3t+1|$, $t \neq -\frac{1}{3}$; i) $-\ln|\cos u|$, $u \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$; j) $\frac{\ln|ax^n+b|}{n.a}$, $a \neq 0$, $ax^n+b \neq 0$; k) $\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|$, $t \neq 1$; l) $\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2t^2}-2\ln|t|$, $t \neq 0$; m) $-\frac{1}{2}\ln|1-2e^x|$, $e^x \neq \frac{1}{2}$. **144.** a) 3; b) $\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$; c) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$; d) 1; e) 2; f) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$; g) $1+\frac{\pi}{2}$; h) $\frac{\pi+2}{4}$. **145.** a) $3{,}6+\frac{18}{5}\sqrt{3}$; b) $7\frac{1}{3}$; c) $-78\frac{2}{3}$; d) $1-\frac{1}{\sqrt{a}}$; e) $\sqrt[6]{2}-1$; f) $4{,}5-\sqrt[3]{2}$.

146. b) 4; c) $\frac{8}{3}$; d) 21; e) $e^3 - 1$. **149.** a) $P = \frac{32}{3}j^2$; b) $2j^2$; c) $4{,}5j^2$; d) $\frac{1}{6}j^2$; e) $-\frac{16}{3}j^2$; f) $\left(\frac{\pi^2}{8} + 1\right) j^2$. **150.** a) $2 \ln 5$; b) 1; c) 1; d) $e^2 - 1$; e) $\frac{\pi}{6}$.

152. a) $P = 4{,}5j^2$; b) $\frac{16}{3}j^2$; c) $20\frac{5}{6}j^2$; d) $\frac{8}{3}j^2$; e) $\frac{16}{3}j^2$; f) $\frac{8}{3}j^2$; g) $\frac{253}{12}j^2$.

153. a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; b) 4,5; c) $\frac{16}{3}$; d) $\frac{32}{3}$; e) $\frac{16}{3}$; f) $\ln 2$. **154.** a) 4; b) π; c) 4. **156.** $\frac{64}{3}\pi j^3$. **158.** $\frac{3}{7}\pi a^3$. **159.** $27\pi j^3$. **160.** πp^3; b) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$; c) $\frac{8}{3}\pi a^3$; d) $\frac{4}{3}\pi a^3$.

161. a) $P = \frac{1}{2} a\varrho h^2 g$, 144 kp, 108 kp; b) 240 kp. **162.** $l' = \frac{g\varrho l^2}{2E} = 1{,}73$ m.

163. $k \cdot \frac{mMh}{R(R+h)}$. **164.** $A = \int_{v_0}^{v_1} p \, dv = p_0 v_0 \ln \frac{v_1}{v_0}$, $A = 1{,}8 \cdot 10^4$ J. **165.** $A = \int_{v_0}^{v_1} \frac{p_0 v_0^k}{v^k} dv$, $k = 1{,}4$; $A \doteq 2{,}475 \cdot 10^7$ J.

5. OPAKOVÁNÍ

166. b) $18t^2 + 14t - 1$; c) $5t\sqrt{t} - \frac{5}{6}\sqrt[6]{\frac{1}{t}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{t}}$; d) $\frac{4\sqrt{t}\sqrt{t^2 + t\sqrt{t}} + 2\sqrt{t} + 1}{4\sqrt{t + \sqrt{t + \sqrt{t}}} \cdot \sqrt{t^2 + t\sqrt{t}}}$. **167.** a) $y' = 1$ pro $x > 0$, $y' = -1$ pro $x < 0$, $y'(0)$ neexistuje; b) $y' = |2x|$; c) $y' = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, d) $y' = -1$ pro $x \leqq 0$, $-e^{-x}$ pro $x > 0$. **168.** $T \equiv (1,1)$, $\varphi = 71°32'$. **169.** a) $\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$; b) $yy_0 = p(x + x_0)$; c) $x + y = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$. **170.** a) $\varphi = 0$, $\varphi = 45°$; b) arctg 3.

171. $y = -4x + 8$, $y = \frac{-1}{4}x - 2$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{15}{8} \doteq 62°$. **172.** $y = x^2 - 3x + 4$. **173.** $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = kn_0 e^{kt}$. **174.** a) $v = -bs$, $F = mb^2 s$; b) $v = at$, $v' = a$, $F = m \cdot a$; $v = r\omega \cos \omega t$, $v' = a = -r\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y$, $F = m\omega^2 y$. **175.** a) $1\,058 \cdot 10^3$ J; b) $30\,258 \cdot 10^3$ J. **178.** $\frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$. **179.** a) Parabola, minimum $M \equiv \left(\frac{3}{2}, 2{,}75\right)$, osa rovnoběžná s osou y; b) $x \in$

$\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$, minimum pro $x=0$, klesající pro $x\in(-\infty,-1)\cup$ $\cup(-1,0)$, rostoucí pro x z intervalu $(0,1)\cup(1,\infty)$, $\lim\limits_{x\to-1_+} y=\infty$, $\lim\limits_{x\to-1_-} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1_-} y=\infty$, $\lim\limits_{x\to1_+} y=-\infty$; c) $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$, asymptoty $x=-1$, $y=x-2$; minimum $M\equiv(\sqrt{2}-1,\ -0{,}2)$, lokální max. $N\equiv(-\sqrt{2}-1;\ -5{,}8)$, pro $x=0$, $x=1$, $2y=0$; d) $x\in(-\infty,3)\cup(3,\infty)$, $y=0$ pro $x=5$ a $x=1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1$, rostoucí pro $x>3$, $\lim\limits_{x\to3_\pm} y=-\infty$. **180.** a) $\dfrac{x}{a+\sqrt{ab}}+\dfrac{y}{b+\sqrt{ab}}=1$; b) $\dfrac{x}{2a}+\dfrac{y}{2b}=1$; c) $\dfrac{x}{a+\sqrt[n+1]{ab^n}}+\dfrac{y}{b+\sqrt[n+1]{a^nb}}=1$.

181. a) $x\in(-\infty,\infty)$, průsečík s osou x pro: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$, lokální minimum v bodě $M\equiv\left(\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2},\ -\dfrac{1}{24}\right)$, lokální maximum v bodě $N\equiv\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{128}\right)$, rostoucí pro $x\in\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\ \infty\right)$; b) průsečík s osou x v bodě $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm3$, klesající v intervalu $(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$, lokální maximum v bodě $N\equiv\left(-\sqrt{3},\ \dfrac{3}{5}\sqrt{3}\right)$, lokální minimum v bodě $M\equiv$ $\equiv\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{3}{5}\sqrt{3}\right)$, $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$. **182.** Lokální minimum v bodě $M\equiv(1,1)$; b) $M\equiv\left(\dfrac{1}{2},\ 4\right)$; c) lokální maximum $N\equiv(0,2)$, min. $M=(\pm1,1)$; d) lokální minimum $M\equiv(0,0)$, lokál. max. $N\equiv\left(2,\ \dfrac{4}{e^2}\right)$. **183.** 1. **184.** Čtverec o straně délky $x=\sqrt{P}$. **185.** a) 36,3 %; b) 40 %. **186.** Obsah obdélníka je roven polovině obsahu daného trojúhelníka. **187.** Trojúhelník rovnostranný. **188.** $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$. **189.** a) $x+2a\ln|x-a|+c$; b) $2\sqrt{ax}(a+2x)-4ax-$ $-2x^2+\dfrac{2x^3}{5\sqrt{ax}}+c$; c) $\dfrac{2x^{2m}\sqrt{x}}{4m+1}-\dfrac{4x^{m+n}\sqrt{x}}{2m+2n+1}+\dfrac{2x^{2n}\sqrt{x}}{4n+1}+c$; d) $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}x+c$; e) $3\operatorname{tg}x+2\operatorname{cotg}x+c$, $x\neq k\pi$; f) $-\dfrac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+c$. **190.** a) $\dfrac{2}{5}\cdot$ $\cdot(x-1)^{2,5}+\dfrac{2}{3}(x-1)^{1,5}+c$; b) $\dfrac{2}{5}\sqrt{5x-2}+c$; c) $\dfrac{1}{80}(5x^2-3)^8+c$; d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot$ $\cdot\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{x}+c$, pro $|x|>\sqrt{2}$; e) $\dfrac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+c$; f) (proveďte substituci $t=\sin x$), $\ln|\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}|+c$.

191. a) $\dfrac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+c$; b) $\dfrac{x^4}{4}+x^3+\dfrac{9}{2}x^2+27x+81\ln|x-3|$;

c) $3x - \operatorname{arctg} x + c$; d) $x - 2\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$, $a \neq 0$. **193.** a) $33{,}3\mathrm{j}^2$; b) 1,75; c) $35\frac{1}{15} - 32\ln 3$; d) $\frac{14}{3}$. **194.** $4{,}5\mathrm{j}^2$; b) $\frac{32}{3}\mathrm{j}^2$; c) $\frac{1}{2}\mathrm{j}^2$. **195.** a) $\ln 2$; b) 12; c) 4,5; d) $10\frac{2}{3}$; e) 4. **196.** $2\pi + \frac{4}{3}$, $6\pi - \frac{4}{3}$. **197.** $\frac{9}{2}\ln 3$. **198.** a) $\frac{4}{3}p^2$; b) $\frac{2}{3}\mathrm{j}^2$; c) $\frac{9}{4}$; d) $\frac{8}{3}\mathrm{j}^2$; e) $1 + a(\ln a - 1)\mathrm{j}^2$; f) $2\mathrm{j}^2$. **199.** $a^2\left(2\pi - \frac{4}{3}\right)$.
200. a) $\frac{7}{6}\pi a^3\mathrm{j}^3$; b) $3\pi^2$; c) $\frac{16}{15}\pi$; d) $2\pi^2a^2b$.

201. a) 18π; b) $\frac{\pi r^2 v}{3}$; c) $\frac{\pi r^2}{3v}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$. **202.** a) $\frac{96\pi}{5}$; b) 12π; c) $\frac{8\pi a^3}{3}\mathrm{j}^3$.

XIII. ZÁKLADY STATISTIKY A POČTU PRAVDĚPODOBNOSTI

I. ZÁKLADY STATISTIKY

3. Medián 176, modus 174. **7.** a)

celkem	1962	1965	1968	1969	1970	1971
parní	89,9 %	90 %	92 %	94 %	91 %	94 %

Např.:

(10^9 kWh $= \frac{1}{6}$ cm, parní elektr. — — —,
celkem elektr. ———.)

b) o 38 %. **9.** a) 8,2, 1,6; b) 62,6; c) 9,2.
d)

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6,4	9,6	4,3	5,7	15,6	9,8	13,7	14,5	7,3	9,1	4,1

10. a)

0−3	3−6	6−9	9−12	12−15	15−18
1	2	4	0	3	1

b)

3–5	5–7	7–9	9–11	11–13	13–15	15–17
2	2	1	3	1	1	1

15. a) 1 230 228; b) 1 141 242. **17.** Průměrná hodinová produktivita je 5,5 a leží mezi hodnotami 4,85 a 6,15, neboť maximální možná odchylka od tohoto průměru je $\left|\frac{\pm 1{,}3}{2}\right| = 0{,}65$. **18.** a) 21 q/ha; b) zvážený průměr 21,52 q/ha. **19.** 152 p. **20.** a) 164; b) 12.

21. a) 1 199 808; b) 1 301 011. **22.** $\tilde{a} = 9$ cm, $\tilde{P} = 486$ cm^2, $V = 729$ cm^3; $\bar{a} = 8{,}8$ cm, $\bar{P} = 482{,}4$ cm^2, $\bar{V} = 757{,}6$ cm^3. **23.** 39,43 Kčs. **24.** $\bar{x} = 81{,}58$ m. **25.** 5 210 000 Kčs. **26.** a) 504,6 . 10$^3 t$; b) 1,292; c) 1,239. **28.** $\bar{x}_A = 456$; $\tau_A = 21{,}3$, $\bar{x}_B = 482$, $\tau_B = 25{,}9$. **29.** a) Variační rozpětí $9 - 1 = 8$; b) $s^2 =$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}, \ [2{,}96]; \text{ směrodatná odchylka } \tau = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 . f_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i}} . [1{,}72].$$

30. Rozptyl 1966... 19 908 = s_1^2, 1971... 15 412 = s_2^2; směrodatná odchylka $\tau_1 = 141$, $\tau_2 = 124$. Nižší hodnoty směrodatné odchylky i rozptylu dokazují, že v roce 1971 došlo k určitému vyrovnání mezd

31. a) 5,7 %; b) $k = 1{,}0236$. **32.** 10,3 %; b) 7,3 %. **33.** Průměrný koeficient růstu je $\sqrt[4]{\frac{249}{191}} = 1{,}069$. **35.** a) 34,3 min; b) 31,3 min. **36.** a) 4 min; b) 3 min. **37.** 6,86 h. **38.** $\bar{x}_h = 6{,}77$ h. **39.** 9,96 min.

40.

Rok	Živě narození	Polovina naroz. v běžném roce	Naroz. od 1. 7. – (x - 1). roku do 1. 7. x. roku	Koneč. odhad
1973	106 724	53 362	–	–
1974	109 845	549 22	108 184	88 153
1975	114 708	57 354	112 276	91 488
1976	117 137	58 568	115 922	94 459

(108 184 . 0,81485 = 88 153)

41. Poměrná čísla (indexy) jsou ukazatelé, jež vznikají porovnáním dvou nebo více veličin. Rozdělení: a) intenzitní; b) struktury, c) srovnávací.

49. $\left(\frac{a}{100} - 0{,}426\right) : 0{,}426 = \pm \frac{12{,}67}{100}$; a) $a_1 = 45$; $a_2 = 35$; b) $a_1 = 48$, $a_2 = 37$. **50.** $26 < a < 31$. **51.** $260 < m < 317$. **52.** $0{,}309 < p < 0{,}393$. **56.** a) $\frac{1}{10}$; b) $\frac{1}{10}$; c) $\frac{1}{2}$. **57.** a) $\frac{13}{90}$; b) $\frac{1}{9}$; c) $\frac{1}{10}$. **58.** a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{4}{5}$. **59.** 0,02. **60.** $P = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = 0{,}25$.

61. $\frac{1}{17}$. **62.** $P(A) = 0{,}096$. **63.** $P(A) = 0{,}82$, $P(B) = 0{,}38$, $P(B/A) = 0{,}46$. **64.** a) 0,999; 0,999; 0,998; b) 0,995; 0,998; 0,998 9; 0,999. **65.** $P(A) + P(B) = 0{,}76$. **66.** a) 0,7; b) 0,3; c) 0,3. **67.** a) 0,25; b) 0,75; c) $\frac{7}{12}$; d) $\frac{1}{9}$. **68.** $\frac{2}{3}$. **69.** 0,04. **70.** a) Jsou-li jevy A, B nezávislé; b) $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) = P(B) \,.\, P(A/B) + P(\overline{B}) \,.\, P(A/\overline{B})$. Rovnost platí pro: 1) $A = V$; 2) $B = U$; 3) $B = A$; 4) $B = \overline{A}$; 5) $B = V$, kde U je jev jistý, V nemožný.

71. $\frac{1}{3}$. **72.** $\frac{5}{54}$. **73.** a) $\frac{1}{216}$; b) $p = P(B) + P(A) \,.\, P(\overline{B}), \frac{5}{27}$; c) $P(A) = \frac{1}{6}$; $P(B) = \frac{1}{12}$, A, B neslučitelné, $p = \frac{P(A)}{P(A + B)} = \frac{2}{3}$. **74.** a) $\frac{1}{15}$; b) $\frac{7}{15}$. **75.** $\frac{9}{64}$. **76.** $\frac{27}{286}$. **77.**

x_i	0	1
p_i	0,7	0,3

,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ 0{,}7 & \text{pro } 0 \leqq x < 1. \\ 1 & \text{pro } x \geqq 1 \end{cases}$$

78.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	$0{,}9^4 \,.\, 0{,}1$

.

79. $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}25$, $p_3 = 0{,}125$, $p_4 = 0{,}062\,5$, $p_5 = 0{,}062\,5$. **80.** Pravděpodobnost, že jev o pravděpodobnosti $P(A)$ při n nezávislých pokusech nastane x krát, je $P_n(x) = \binom{n}{x} \,.\, [P(A)]^x \,.\, [1 - P(A)]^{n-x}$, kde $0 \leqq x \leqq n$. a) $P_4(3) = \frac{1}{4}$, $P_8(5) = \frac{7}{32}$; b) nejméně tři ze čtyř: $R_4(3) = \frac{5}{16}$; nejméně pět z osmi $R_8(5) = P_8(5) + \ldots + P_8(8) = \frac{93}{256}$. Protože je $\frac{93}{256} > \frac{15}{16}$, je pravděpodobnější výhra nejméně pět z osmi.

81. $P(A) = 0{,}88$. **82.** 0,006. **83.** 0,016; 0,094; 0,234; 0,312; 0,234; 0,094; 0,016. **84.** Pravděpodobnost, že i-tý zkoumaný výrobek je zmetek či nikoli, nezávisí na tom, zda ostatní výrobky ze skupiny deseti prvků jsou nebo nejsou zmetky. Lze tedy použít vzorce z úlohy **80.** a)

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(X = m)$	0,0563	0,1877	0,2816	0,2503	0,1460	0,0584	0,0162	0,0031	0,0004	0,0000

b) $P(X > 5) = P(X = 6) + \ldots + P(X = 10) = 0{,}02$. **85.** 0,275. **86.** 0,94. **87.** $1 - \dfrac{\binom{s-r}{k}}{\binom{s}{k}}$. **88.** 0,655 2. **89.** $\binom{6}{3} \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^3 = 0{,}053\,6$. **90.** a) 0,321; b) $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}7$; $P = 3 \,.\, P(A) \,.\, P(\bar{A})^2 \,.\, P(\bar{B})^3 + 3 \,.\, P(A)^2 \,.\, .\, P(\bar{A}) \,.\, [P(\bar{B}) + 3P(B) \,.\, P(\bar{B})^2] + P(A)^3 \,.\, P(\bar{B}) \,.\, [P(\bar{B})^2 + 3P(\bar{B}) \,.\, P(B) + 3P(B)^2]$; 0,313.

91. 0,384. **92.** $0{,}7^2 \,.\, 0{,}8^3 = 0{,}251$. **93.** $P(A) = 0{,}96$, $P(B/A) = 0{,}75$; $P = = 0{,}72$. **94.** $P(A) \,.\, P(B)$. **95.** $P(A) = 0{,}9 \,.\, 0{,}7 \,.\, 0{,}8 \,.\, 0{,}9 = 0{,}45$, $P(B) = = 0{,}7^2 \,.\, 0{,}8 = 0{,}39$. První postup zaručuje lepší kvalitu. **96.** 0,47. **97.** $P(t) = = \sqrt[10]{0{,}8} \doteq 0{,}98$. **98.** $1 - [1 - P(A)] \,.\, [1 - P(B)]$. **100.** a) $\dfrac{6}{65}$; b) $\dfrac{1}{91}$; c) 0,857.

101. a) $\dfrac{1}{120}$; b) $\dfrac{119}{120}$. **102.** 0,501. **103.** np. **104.** $E(x) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i$, $E(x) \doteq 1{,}25$. Má-li být zasažen cíl např. 100krát, bude třeba 125 výstřelů. **105.** $E(x) = = 1 \,.\, 0{,}07 + 2 \,.\, 0{,}16 + \ldots + 5 \,.\, 0{,}1 = 2{,}93$. Pro 20 přístrojů bude třeba 59 součástí.

XIV. PLANIMETRIE

I. PŘÍMKA, POLOPŘÍMKA, ÚSEČKA, POLOROVINA, ÚHEL, VYPUKLÝ n-ÚHELNÍK

4. a) AP, PA, PB, BP, BC, CB, CD, DC, polopřímky opačné k polopřímkám AP a DC; b) celkem 10. Jsou to úsečky AP, AB, AC, AD, PB, PC, PD, BC, BD, CD; $AP = BC$, $AB = CD = PC$, $AC = BD$; c) P, B; A, P. **5.** a) Polopřímku opačnou k polopřímce AP, kde $A(5)$; b) úsečku s krajními body $B(3)$, $C(4)$; c) dvě opačné polopřímky s počátečním bodem $D(-2)$, který obrazům čísel x nepatří; d) polopřímku opačnou k polopřímce EP, kde $E(-3)$; bod E k obrazům čísel x nepatří. **6.** $ASCDB$; a) úsečka SD; b) polopřímka DB; úsečka SD; d) úsečka SC; e) úsečka SB; f) nemají průnik. **7.** a) Úsečku AB, kde $A(2)$, $B(5)$, přičemž bod A k obrazům čísel x nepatří; b) polopřímku opačnou k polopřímce CP, kde $C(2)$. **8.** a) A, B, E, F; b) pA, pB, pC, pD, pE, pF; $pE \equiv pF \equiv pA \equiv pB$; $pC \equiv pD$; c) přímka p protne nejvýše 9 úseček. **9.** pC, pD, qA, qB. **10.** Je množinou bodů společných polorovinám ABC a polorovině opačné k polorovině ACB, nebo množinou bodů společných polorovině ACB a polorovině opačné k polorovině ABC.

11. Je množinou bodů společných polorovině opačné k polorovině BVA a polorovině opačné k polorovině AVB. **12.** Jeden z nich je množinou bodů společných polorovinám AVB a BVA, druhý množinou bodů poloroviny opačné k polorovině VBA a bodů společných polorovině VBA a polorovině opačné k polorovině VAB, nebo množinou bodů poloroviny opačné k polorovině VAB a bodů společných polorovině VAB a polorovině opačné k polorovině VBA. **13.** Průnikem je vrcholový úhel k úhlu DBA. **14.** Bod V leží v polorovině BCA a v polorovinách opačných k polorovinám CAB a ABC. **15.** Bod D je vnitřním bodem poloroviny opačné k polorovině ACB; jelikož $\sphericalangle BAD = \alpha + 60° < 2R$, je bod D vnitřním bodem poloroviny ABC. Jelikož $\sphericalangle BCD = \gamma + 60° < 2R$, je bod D vnitřním bodem poloroviny BCA. Bod D je tedy vnitřním bodem polorovin ABC a BCA, a proto leží uvnitř ostrého úhlu ABC. **17.** Body X, Y leží uvnitř poloroviny BVA, úsečka XY nemá s hranicí VB společný bod a leží tedy celá uvnitř poloroviny BVA. Body X, Y leží též uvnitř poloroviny AVB, úsečka XY nemá s hranicí VA společný bod a leží celá uvnitř poloroviny AVB. Úsečka XY leží celá uvnitř polorovin AVB a BVA, tedy uvnitř dutého úhlu AVB; je-li $\sphericalangle AVB$ přímý, má úsečka XY tuto vlastnost. Je-li tento úhel vypuklý, může a nemusí mít tuto vlastnost. **18.** a) M na úsečce XY, N na úsečce ZU; b) $XY \parallel ZU \parallel p$; c) přímka XY musí protnout hranici p v nějakém bodě P. Bod M vyplní vnitřek polopřímky opačné k polopřímce PX. Bod N vyplní celou přímku ZU, je-li $ZU \parallel p$, nebo vnitřek polopřímky NZ, je-li N průsečík přímky ZU s přímkou p. **20.** a) Jelikož B a D jsou libovolné vnitřní body polopřímek AB a CD, leží celá polopřímka AB v polorovině ACB a celá polopřímka CD v polorovině ACD. Body X, Y leží tedy v opačných polorovinách s hranicí AC, a proto úsečka XY přímku AC protne v bodě Q, přičemž $Q \not\equiv A$, $Q \not\equiv C$, neboť přímky AB a CD jsou různé. Úsečka XY leží v polorovině ABC, a proto bod Q je bodem polopřímky AC; úsečka XY leží též v polorovině CDA, proto bod Q je bodem polopřímky CA. Bod Q náleží polopřímkám AC a CA a je vnitřním bodem úsečky AC, neboť $Q \not\equiv A$, $Q \not\equiv C$. Podobně se dokazuje případ b).

21. $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$ je ostrý; proto paty P, Q kolmic k_1, k_2 leží uvnitř polopřímek AC a BC. **23.** Body D, B leží v opačných polorovinách přímky AU. **26.** Rozdělte mnohoúhelník na trojúhelníky A_1A_2X, A_2A_3X atd. Polopřímka p buď splývá s polopřímkou XA_k, kde A_k je některý vrchol mnohoúhelníka, a protíná obvod mnohoúhelníka v bodě A_k, nebo prochází vnitřkem některého z uvedených trojúhelníků a protne jeho stranu protilehlou k X v jednom bodě. **28.** a), b) n-úhelník má 6 stran a 9 úhlopříček. **29.** Vypuklý pětiúhelník. **30.** $\dfrac{mr}{m+n}$ stupňů, $\dfrac{nr}{m+n}$ stupňů; 15°, 45°.

31. $72°$, $108°$; jsou vedlejší. **32.** $R - \frac{n}{2}$ stupňů, $R + \frac{n}{2}$ stupňů, $n < 2R$; je-li n sudé, mají oba úhly celý počet stupňů. **33.** $24°16'35''$, $155°43'25''$, $24°16'35''$, $155°43'25''$; podmínka: aby jeden z těchto úhlů byl pravý. **34.** $45° - \frac{\alpha}{2} < \beta < 90° - \alpha$; $2° < \beta < 4°$; $1° < \beta < 2°$. **35.** $\beta = \frac{180}{n+1}$, $\alpha = \frac{n}{n+1} \cdot 180$ stupňů; pro čísla $n = 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 14, 17, 19, 29, 35, 44, 59, 89, 179$ je vyjádřena velikost obou úhlů celým počtem stupňů.

2. VZTAHY MEZI STRANAMI A ÚHLY TROJÚHELNÍKA, VĚTY O SHODNOSTI TROJÚHELNÍKŮ

36. $\alpha = \beta = 65°$, $\gamma = 50°$. **37.** $\alpha = 108°$, $\beta = 54°$, $\gamma = 18°$. **38.** $\alpha' = 144°$, $\beta' = 126°$, $\gamma' = 90°$. **39.** $5:3:2$. **40.** V trojúhelníku pravoúhlém.

41. V trojúhelníku pravoúhlém. **44.** V trojúhelníku VAP je $\sphericalangle AVP = \sphericalangle APV = \alpha$. Vnější úhel trojúhelníka APV při vrcholu A je 2α. Jelikož je $AP \parallel VB$, je $\sphericalangle AVB = 2\alpha$. **45.** Úhel $\sphericalangle KBC = \sphericalangle BCD = \frac{\beta}{2}$ (úhly střídavé). Úhel $\sphericalangle ABC = \beta$ je vnějším úhlem trojúhelníka BDC, proto $\sphericalangle BDC = \frac{\beta}{2}$. **46.** Trojúhelník nelze sestrojit, neboť $b + c < a$. **47.** $1 < c < 5$, $c = 2$, $c = 3$, $c = 4$. **48.** $\beta > \gamma > \alpha$. **50.** Je-li $\sphericalangle ACB = \gamma$, je $\sphericalangle CBA = R - \frac{\gamma}{2}$ a $\sphericalangle DBC = \frac{\gamma}{2}$. Úhel $\sphericalangle DBA = R - \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = R$.

51. Jelikož $\sphericalangle ADC = \beta + \frac{\gamma}{2} > \frac{\gamma}{2}$, $\sphericalangle BDC = \alpha + \frac{\gamma}{2} > \frac{\gamma}{2}$ je $AD < AC$, $DB < BC$. **52.** Je-li $\sphericalangle ASC = \alpha$, je $\sphericalangle SAC = \alpha$, $\sphericalangle SCD = 2\alpha$ a $\sphericalangle BSD = 3\alpha$. **53.** 5. **55.** Např. $\triangle AMC$ má úhly α, $2R - 2\alpha$, α; trojúhelník $QB'C$ má úhly $R + \alpha$, α, $R - 2\alpha$. **56.** Sečtěte nerovnosti $AB < AU + BU$, $BC < BU + CU$, $AC < CU + AU$. **57.** Sečtěte nerovnosti $AB < \frac{2}{3} t_a + \frac{2}{3} t_b$, $BC < \frac{2}{3} t_b + \frac{2}{3} t_c$, $CA < \frac{2}{3} t_c + \frac{2}{3} t_a$. **58.** Sestrojte na polopřímce AS_1, kde S_1 je střed strany BC, za bodem S_1 bod A' tak, že $AS_1 = S_1A'$. Čtyřúhelník $ABA'C$ je rovnoběžník, takže platí vztah $2t_a < b + c$. Stejným způsobem lze získat nerovnosti $2t_b < a + c$ a $2t_c < a + b$. Tyto nerovnosti sečtěte. **59.** $AB > AC > BC > BD > AD > CD$. Abyste zjistili, že $AD > CD$, naneste na stranu BA úsečku $BC' = BC$; jelikož $BC < AB$, padne bod C' dovnitř strany AB. $\sphericalangle AC'D = 110°$, takže $AD > DC'$ a tedy $AD > DC$, neboť $DC' = DC$.

61. Sečtěte nerovnosti $v_c < AC$, $v_c < BC$, $v_a < AC$, $v_a < AB$, $v_b < AB$, $v_b < BC$. Dále sečtěte nerovnosti $2v_c + c > a + b$, $2v_b + b > a + c$, $2v_a + a > b + c$. Nerovnost $2v_c + c > a + b$ vznikne sečtením nerovností $v_c + AD > b$, $v_c + DB > a$, kde D je pata výšky v_c. **62.** Trojúhelníky BMP a CNP jsou rovnoramenné, takže $CN = PN$ a $BM = PM$. **63.** $LP = QC$, $LQ = AQ$. **64.** Je-li $\sphericalangle CBA = \beta$ a $\sphericalangle BAC = \alpha$, je $\sphericalangle BYX = \beta$, $\sphericalangle ZYA = \alpha$, $XY = XB$, $ZY = ZA$, takže $CX + XY + YZ + ZC = a + b$. Dokažte ještě, že bod Y při volbě $a < b$ a tedy $\alpha < \beta$ padne dovnitř strany AB a bod Z dovnitř strany CA. **65.** $DM = DN$, $\sphericalangle DCM = \sphericalangle DCN = \frac{\gamma}{2}$; $\triangle DMC \cong DNC$ (usu). b) $\triangle DBM \cong \triangle DAN$ (usu), odkud $AN = BM$; potom je $CM = CN$ a $\triangle DMC \cong DNC$ (sss). **66.** $\triangle SGV \cong \triangle SDV$ (sus), odkud $GV = DV$; $\triangle SEG \cong \triangle SFD$ (usu), odkud $GE = DF$. Je tedy $VF = VE$ a $\triangle VED \cong \triangle VFG$ (Ssu). **67.** $\triangle A_1D_1C_1 \cong \triangle A_2D_2C_2$ (usu), odkud je $A_1C_1 = A_2C_2$; $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$ (sus). **68.** $\triangle A_1D_1C_1 \cong \triangle A_2D_2C_2$ (Ssu), odkud $\sphericalangle D_1A_1C_1 = \sphericalangle D_2A_2C_2$; $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$ (sus). **69.** Veďte rovnoběžky s příčkami tak, aby každá z nich procházela jedním vrcholem čtverce; tak vzniknou dva pravoúhlé trojúhelníky, o kterých dokažte, že jsou shodné. **70.** $AC = CD$, $BC = CE$; $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACE = \gamma + 60°$. $\triangle AEC \cong \triangle BDC$ (sus).

71. $\triangle TAB \cong CAQ$ (sus). **72.** $BP = BA$, $TB = BC$, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle TBP$ (ostré úhly s rameny kolmými); $\triangle CBD \cong \triangle BTP$ (sus). **73.** $\triangle SPT_1 \cong \triangle SPT_2$ (Ssu). **74.** $\triangle PSV \cong \triangle MSV$ (Ssu), odkud $PV = MV$; $\triangle QSV \cong \triangle NSV$ (Ssu), odkud $VQ = VN$. Je tedy $PV + VQ = MV + VN$, $MN = PQ$. **75.** Protínají-li osy ramen základnu AB v bodech P, Q, potom rovnoramenné trojúhelníky APC a BQC jsou shodné, trojúhelník PQC je rovnostranný.

3. OBSAH KRUHU A JEHO ČÁSTÍ, DÉLKA KRUŽNICE, DÉLKA OBLOUKU, ÚHEL STŘEDOVÝ A OBVODOVÝ

76. $106\frac{2}{3}$ m $\doteq 106$ m. **77.** $24\frac{1}{2}$ cm. **78.** $r = 2$ cm. **79.** $2\pi\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$. **81.** $\frac{a^2}{2}(\pi - 2)$. **82.** $\frac{a^2}{2}(\pi - 2)$. **83.** $2\pi r$; $\frac{5\pi r^2}{9}$. **84.** $94\frac{2}{7}$ cm^2. **85.** $\frac{1}{4}\pi ab$. **86.** $2(a + b) - 2r(4 - \pi)$; $ab - r^2(4 - \pi)$. **87.** $r = \sqrt{\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2)}$. **89.** $\frac{a^2}{8} \cdot (2\sqrt{3} - \pi)$. **90.** $\frac{1}{4}\pi a^2$. **91.** $\frac{1}{4}\pi a^2$. **92.** $\pi \cdot 4^2(\sqrt{2} - 1) \doteq 20{,}8$ cm^2. **93.** $r(\pi + 1)$; $\frac{\pi r^2}{4}$. **94.** a) 108°, b) $112\frac{1}{2}°$. **95.** 60°, 120°. **97.** $2R - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. **98.** Obě kružnice procházejí bodem A, je tedy $A \equiv X$. Druhý průsečík Y leží uvnitř polorovin ABC a ACB, tedy uvnitř úhlu BAC; $\sphericalangle CYA = R$, $\sphericalangle BYA = R$, takže $\sphericalangle CYA + \sphericalangle AYB = 2R$ a body C, Y, B leží v přímce. **99.** $PS_1 = PS_2 = S_1S_2$; $PA = PB$, $\sphericalangle APB = 60°$; $\sphericalangle PQA = \sphericalangle PQB = R$.. **100.** $\sphericalangle CAD = \frac{\varphi}{2}$, $\sphericalangle ADB = R$; ω je vnější úhel trojúhelníka ADU, kde U je průsečík úhlopříček čtyřúhelníka $ABCD$.

103. $\sphericalangle AEC = 2R - \sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD$; $\sphericalangle ABD = 2R - \sphericalangle AFD$. Odtud $\sphericalangle AEC = 2R - \sphericalangle AFD$. Jsou tedy úhly $\sphericalangle AEC$ a $\sphericalangle AFD$ souhlasné. **104.** Osy úhlů přímek T_1H, T_2S jsou $o \equiv PS$ a o', kde $o' \perp o$. Jelikož trojúhelník HST_2 je rovnoramenný, je $HT_2 \perp o'$. Je tedy $PS \perp o'$, $HT_2 \perp o'$, odkud $PS \parallel HT_2$. **105.** Jelikož $U_2 \not\equiv A$, je $AC \not\equiv AB$; potom existují body U_1 a $U_2 \not\equiv A$. Jelikož úhel $\sphericalangle U_1AU_2 = R$, je úsečka U_1U_2 průměrem kružnice k. Jelikož $\sphericalangle U_1AC = \sphericalangle U_1AB = \frac{\alpha}{2}$, je $\sphericalangle CSU_1 = \sphericalangle BSU_1 = \alpha$, takže $U_1S \perp \perp CB$. **106.** $\sphericalangle AC'A' = \sphericalangle AB'A' = \sphericalangle B'AB = \sphericalangle BCB' = \sphericalangle CB'C' = \sphericalangle C'A'C$. Je tedy úhel $\sphericalangle AC'A' = \sphericalangle C'A'C$, odkud $AC' \parallel A'C$. **107.** Uvažte, že přímky AS, BS, CS, DS jsou osami vnitřních úhlů lichoběžníka. $\sphericalangle ASD = \sphericalangle BSC = R$ a kružnice k_1, k_2 mají společný bod S. Dále dokažte, že v bodě S mají obě kružnice společnou tečnu $t \perp AB$. **108.** Považujeme-li úhly α, β, $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$ za obvodové úhly v kružnici k, potom příslušné středové úhly jsou 2α, 2β, 2γ, přičemž $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 4R$. Sestrojí se tedy nejprve úhly středové. **109.** Přímky a, b, c určují tři dvojice vrcholových úhlů; kterékoli tři z těchto šesti úhlů, jejichž součet je 2R, určují úhly hledaného trojúhelníka.

4. GEOMETRICKÁ MÍSTA BODŮ A JEJICH UŽITÍ

111. Přímka $m \parallel p$, jejíž každý bod je stejně vzdálen od obou přímek. **112.** Kružnice $k \equiv \left(S; \frac{r}{2}\right)$. **113.** Kružnice $k' \equiv (S; 2r)$. **114.** Všechny body osy úhlu AVB, které leží v úhlu AVB. **115.** Kružnice $k' \equiv (S; \sqrt{r^2 + d^2})$. **116.** Trojúhelník $A'B'C'$ souměrně sdružený k trojúhelníku ABC podle středu M. **117.** Kružnice $k' \equiv (S; \sqrt{r_1^2 - r^2})$. **118.** Střed S rovnoběžníka $ABCD$ opisuje kružnici, jejíž střed leží ve středu strany AB a jejíž poloměr $r = \frac{AD}{2}$. Dva body této kružnice dráze, kterou opisuje střed S, nepatří. Které? **119.** Střed M strany AC se pohybuje po kružnici, jejíž střed leží ve středu strany BC a jejíž poloměr $r = \frac{AB}{2}$. **120.** Je-li $d > 2r$, geometrické místo neexistuje, je-li $d = 2r$, je geometrickým místem přímka p. Je-li $d < 2r$, tvoří geometrické místo dvě přímky n_1 a n_2 rovnoběžné s přímkou p ve vzdálenosti $v = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4r^2 - d^2}$.

121. Geometrickým místem je přímka $q \parallel t$ ležící s přímkou p v téže polorovině s hranicí t. Je-li $v > \frac{d}{2}$, přičemž v je vzdálenost přímek t, p, leží přímka q uvnitř pásu omezeného přímkami t a p; je-li $v = \frac{d}{2}$, je $q \equiv p$ a je-li $v < \frac{d}{2}$, leží přímka q v opačné polorovině s hranicí p než přímka t. **122.** Vnitřní body dvou shodných měsíčků ležících v opačných polorovinách s hranicí AB; každý z obou měsíčků je omezen dvěma oblouky nad úsečkou AB patřící středovým úhlům 90° a 120°. **123.** Dva oblouky, z kterých vidíme úsečku AB pod úhlem 135°. **125.** Geometrickým místem je úsečka AB kolmá k ose o úhlu α, přičemž bod A leží na polopřímce VN a má od přímky VM vzdálenost d a bod B leží na polopřímce VM a má od přímky VN vzdálenost d. **126.** Geometrické místo tvoří úsečka S_1S_2, kde bod S_1 leží uvnitř polopřímky VA tak, že $VS_1 = \frac{d}{2}$ a bod S_2 leží uvnitř polopřímky VB tak, že $VS_2 = \frac{d}{2}$. **127.** Geometrické místo tvoří přímka $m \parallel p$, jejíž vzdálenost od přímky p je $x = \frac{4v^2 - a^2 + b^2}{8v}$; je-li $a = b$, je $x = \frac{v}{2}$. **128.** Geometrickým místem je oblouk kružnice s krajními body A, B; z každého bodu tohoto oblouku je vidět úsečku AB pod úhlem $(\mathrm{R} + \varphi)$, přičemž 2φ je středový úhel přináležející libovolné tětivě $CD = c$ dané polokružnice. Jelikož $c < AB$, je $2\varphi < 2\mathrm{R}$, $\varphi < \mathrm{R}$, $\mathrm{R} + \varphi < 2\mathrm{R}$. Body A, B geometrickému místu nepatří. **129.** Geometrické místo tvoří vnitřní body dvou oblouků TB a $T'B$ kružnic k_1 a k_2, které mají středy v průsečících osy o tětivy AB s kružnicí k a procházejí body A, B. Oblouky leží v téže polorovině tečny t vedené ke kružnici k v bodě A; T a T' jsou průsečíky tečny t s kružnicemi k_1 a k_2. **130.** Geometrické místo tvoří dvě přímky l a l' souměrně položené podle osy o, která jde bodem M a je kolmá k přímkám p a p'; přímka l prochází bodem C, který leží na přímce p' a je kolmá k přímce MC. ($NC = MR$, kde N, R jsou body, ve kterých osa o protíná přímky p' a p.)

131. Bod X je průsečík osy o úsečky AB a přímek a, b, které jsou rovnoběžné s přímkou p, leží v opačných polorovinách s hranicí p a mají od přímky p vzdálenost d. Úloha má buď dvě řešení, nebo neomezený počet, je-li $o \equiv a$ nebo $o \equiv b$, nebo žádné, je-li $o \parallel p$ a nesplývá se žádnou z přímek a, b. **132.** Sestrojte libovolný bod M' tak, aby měl od přímky AB vzdálenost 2 a od přímky BC vzdálenost 3. Tuto vlastnost mají všechny body přímky $M'B$. **133.** Bod X leží na oblouku nad úsečkou AB, který patří středovému úhlu 2α; úloha má řešení tehdy, je-li $d \leqq \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$. **134.** Bod X leží na oblouku nad úsečkou AC, který patří středovému úhlu 240°. Úloha má 4 řešení. **135.** Bod X je průsečíkem oblouků nad stranami AB a BC, které patří středovým úhlům 120° a 90°. Úloha má dvě řešení. **136.** $\alpha = 120°$; bod M se sestrojí jako průsečík oblouků jdoucích body A, B a A, C přináležejících středovým úhlům 240°. **137.** Geometrickým místem středů všech tětiv kružnice k, které procházejí bodem C, je kružnice k' sestrojená nad průměrem CS; její průsečík P s tětivou AB a bod C určují přímku, na níž leží tětiva MN. Úloha má nejvýš dvě řešení. **140.** Střed S kružnice k leží na ose úhlu AVB a na kolmici vedené bodem B k přímce VB.

141. Sestrojte osu o úsečky AB. Její průsečík T s přímkou q je dalším bodem kružnice k. **142.** Střed S kružnice k leží na osách úhlů přímek p, q a na kružnici k_1; úloha má vždy čtyři řešení. **143.** Střed S kružnice k leží na osách úhlů přímek p, m a q, m; úloha má vždy dvě řešení. **144.** Střed S kružnice k leží na kolmici vedené bodem M k ose x a osách úhlu přímek x, y; úloha má dvě řešení. **145.** Poloměr r kružnice k se rovná polovině vzdálenosti rovnoběžek p, q; střed S kružnice k leží na kružnici $k_1 \equiv (A; r)$ a na přímce m, která půlí pás mezi rovnoběžkami p, q. Úloha má dvě řešení, leží-li bod A uvnitř pásu mezi rovnoběžkami p, q, jedno řešení, leží-li bod A na některé z daných přímek a žádné řešení, leží-li bod A vně pásu mezi rovnoběžkami p, q. **146.** Sestrojte bod T, který je průsečíkem osy o úhlu α s obloukem AB. Kružnice k se dotýká též tečny t oblouku AB v bodě T. **147.** Kružnice k se dotýká též tečny t kružnice k_1 v bodě T, který je průsečíkem kružnice k_1 s úhlopříčkou čtverce $ABCD$. Úloha má čtyři řešení. **148.** Střed S kružnice k leží na kolmici vedené bodem T k přímce t a na ose o úsečky AT. Úloha má vždy jedno řešení. **149.** Kružnice k je soustředná s kružnicí k', která prochází body S_1, S_2 a dotýká se přímky $p' \parallel p$, mající od přímky p vzdálenost $r_1 = r_2$, v bodě M', přičemž $S_1M' = S_2M'$. Úloha má dvě řešení. **150.** Střed S kružnice k leží na kružnici $k_2 \equiv (S_1; r + r_2)$ a na přímkách t_1, t_2, které jsou rovnoběžné s přímkou t, mají od ní vzdálenost r a leží v opačných polorovinách s hranicí t; úloha má vždy tři řešení.

151. Sestrojte kružnice $k_2 \equiv \left(S_1; \frac{3}{2}r_1\right)$, $k_3 \equiv \left(S_1; \frac{1}{2}r_1\right)$ a přímky p_1 a p_1', které jsou rovnoběžné s přímkou p, mají od ní vzdálenost $\frac{1}{2}r_1$ a leží v opačných polorovinách s hranicí p. Střed S kružnice k je průsečíkem uvedených čar. Úloha má šest řešení. **152.** Střed S kružnice k leží na kružnici $k' \equiv \left(S; \frac{r_1 + r_2}{2}\right)$ a na kružnici $k_1' \equiv \left(A; \frac{r_1 - r_2}{2}\right)$, nebo na kružnici $k'' \equiv \left(S; \frac{r_1 - r_2}{2}\right)$ a $k_1'' \equiv \left(A; \frac{r_1 + r_2}{2}\right)$. Úloha má nejvýš čtyři řešení. **153.** Střed S kružnice k leží na kružnici $k' \equiv (S_1; \sqrt{d^2 - r^2})$ a na kružnici $k_1' \equiv (M; d)$. Úloha má nejvýše dvě řešení. **154.** Střed S kružnice k leží na kružnici $k' \equiv (S_1; 2r)$ a na kružnici $k_1' \equiv (A; r)$. Úloha má řešení, je-li $r \leqq S_1A \leqq 3r$. **155.** Označte P dotykový bod kružnic k_1, k_2; potom přímka $o \equiv PS_3$ je osou souměrnosti útvaru složeného z daných tří kružnic; z toho důvodu se kružnice k dotýká kružnice k_3 v bodě T, který je jedním z průsečíků přímky o s kružnicí k_3 vzdálenějším od bodu P. Kružnice k je soustředná s kružnicí k', která prochází body S_1, S_2 a bodem T' ležícím na přímce o a uvnitř kružnice k_3 tak, že $TT' = 4$ cm. Úloha má řešení tehdy, je-li $PT > 4$ cm. **158.** a) Trojúhelník ASC, kde S je střed strany AB, má strany $AC = b$, $AS = \frac{c}{2}$, $CS = t_c$. b) Sestrojte nejprve pravoúhlý trojúhelník ABD, kde D je pata výšky v_a na straně BC a potom trojúhelník ADC, c) Sestrojte nejprve trojúhelník ACD, kde D je pata výšky v_c na straně AB. d) Sestrojte trojúhelník ADC, kde D je pata výšky v_a na straně BC a potom trojúhelník $BD'C$, kde D' je pata výšky v_b na straně AC. Z těchto trojúhelníků získáte délky stran a a b. e) Sestrojte nejprve trojúhelník S_1S_2C, kde S_1 je střed strany AB a S_2 střed strany AC. Tento trojúhelník má strany $S_1S_2 = \frac{a}{2}$, $S_1C = t_c$ a $S_2C = \frac{b}{2}$. f) Sestrojte nejprve trojúhelník ABO, kde O je střed kružnice trojúhelníku ABC vepsané. g) Sestrojte nejprve kružnici $k \equiv (S; r)$, v ní tětivu $BC = a$ a potom pravoúhlý trojúhelník BCD, kde D je pata výšky v_b na straně AC. **159.** a) Je-li $\beta < 2R$, má úloha vždy řešení. b) Je-li $v_a < b$, vyhovují úloze dva trojúhelníky, je-li $v_a = b$, jeden trojúhelník, je-li $v_a > b$, nemá úloha řešení. c) Užijte rovnoběžníka $ABA'C$ o straně $AB = c$, úhlopříčce $AA' = 2t_a$ a úhlu $\sphericalangle BAC = \alpha$; úloha má řešení, je-li $t_a > \frac{c}{2}$. d) Sestrojte stranu $BC = a$ a hledejte vrchol A pomocí geometrických míst bodů; úloha má řešení, je-li $v_a \leqq t_a$. **160.** a) Na polopřímce BC sestrojte za bodem C bod D tak, aby platil vztah $SD = CA = b$ a uvažujte trojúhelník ABD; úloha má jedno řešení, je-li $a + b > c$ a $\beta < 2R$. b) Na polopřímce AB sestrojte za bodem B bod D tak, aby platil vztah $BD = BC$ a uvažujte trojúhelník ADC s úhlem $\sphericalangle ADC = \frac{\beta}{2}$. Úloha má řešení, je-li $a + c > b \geqq (a + c) \sin \frac{\beta}{2}$. c) Na polopřímce CA sestrojte za bodem A bod D tak, aby platil vztah $AD = AB$, na polopřímce AC za bodem C bod E tak, aby platil vztah $CE = CB$; potom sestrojte trojúhelník DEB. Úloha je řešitelná, je-li $\alpha < 2R$ a $v_b < s \,.\, \sin \alpha$.

161. Na polopřímce DC, kde D je střed strany AB, sestrojte za bodem C bod D' tak, aby platil vztah $CD' = AC$; potom sestrojte pravoúhlý trojúhelník ADD'. **162.** a) Vrchol A leží na tečně kružnice $k \equiv (B; v_b)$ jdoucí vrcholem C a na kružnici $k \equiv (C; b)$. Úloha má řešení, je-li $b \geqq v_b$; b) v_c je výškou rovnoramenného trojúhelníka XYC, v němž $XY = 2s$ je základnou. Je-li v tomto trojúhelníku

$\sphericalangle XCY \leqq R$, nemá úloha řešení. Pro $\sphericalangle XCY > R$ má jedno řešení; c) $v_c \equiv t_c$; sestrojte nejprve pravoúhlý trojúhelník ATD, kde T je těžiště trojúhelníka ABC a D střed strany AB. Úloha má řešení, je-li $2t_a > v_c$. d) Kružnice k vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká strany AB v bodě S, který tuto stranu půlí. Úloha je řešitelná, je-li $c > 2\varrho$. **163.** a) Je-li S střed kružnice trojúhelníku ABC vepsané, je $\sphericalangle BCS = 45°$. Úloha je řešitelná, je-li $a > 2\varrho$. b) Na polopřímce BC sestrojte za bodem C bod X tak, aby platil vztah $CX = CA$, na polopřímce CB za bodem B bod Y tak, aby platil vztah $BY = BA$ a sestrojte trojúhelník XYA. Úloha je řešitelná, je-li $\beta < R$. c) Na polopřímce BA sestrojte bod P tak, aby platil vztah $BT = BC$ a sestrojte trojúhelník APC. Úloha má vždy řešení. d) Sestrojte nejprve trojúhelník BST, kde S je střed strany AB a T těžiště trojúhelníka ABC; $TS = \frac{1}{6} c$, $SB = \frac{1}{2} c$, $BT = \frac{2}{3} t_b$. Úloha je řešitelná, je-li $2t_b > c > t_b$. **164.** Úloha je vždy řešitelná. **165.** b) Na polopřímce CA sestrojte bod P tak, aby platil vztah $CP = CD$, kde D je střed strany AB; potom sestrojte trojúhelník ADP. Úloha je vždy řešitelná, neboť $a > v$, $a - v > 0$. **166.** Na polopřímce CB sestrojte za bodem B bod M tak, aby platil vztah $BM = AB$; potom sestrojte trojúhelník ACM, je-li známa strana MC a úhly $\sphericalangle ACM$ a $\sphericalangle CMA$. **167.** a) Na polopřímce BC sestrojte za bodem C bod E tak, aby platil vztah $CE = CA$ a sestrojte trojúhelník ABE. Úloha má jedno řešení, je-li $b + e > a$. b) Na polopřímce AB za bodem B sestrojte bod B' tak, aby platil vztah $BB' = BC$ a sestrojte trojúhelník $AB'C$, v němž $AB' = \frac{1}{2} o$. Úloha je řešitelná tehdy, je-li $(a + b)\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq e < a + b$; v případě, že $e = (a + b)\frac{\sqrt{2}}{2}$, vznikne čtverec. **168.** Na polopřímce AC sestrojte za bodem C bod C' tak, aby platil vztah $CC' = DB = f$ a na polopřímce AB za bodem B bod A' tak, aby platil vztah $BA' = a$; potom sestrojte trojúhelník $AA'C'$, v němž $AC' = e + f$, $\sphericalangle A'AC' = \frac{1}{2}\alpha$ a $\sphericalangle AC'A' = 45°$.

169. a) Zvolte přímku p a na ní vrchol A kosočtverce; potom veďte přímku $q \parallel p$ ve vzdálenosti v a kružnici $k \equiv (A; 2v)$, která protne přímku q ve vrcholu C kosočtverce. Lze sestrojit vždy v téže polorovině s hranicí p dva navzájem shodné kosočtverce. b) Vrcholem C kosočtverce veďte přímku $p \parallel BD$ a její průsečík s polopřímkou AB označte X; dále na polopřímce XC sestrojte za bodem C bod Y tak, aby platil vztah $CY = e$. Potom sestrojujte trojúhelník XYA, v němž $AX = 2a$, $XY = e + f$ a $\sphericalangle XYA = 45°$. Úloha má řešení, je-li $(e + f)\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq 2a < e + f$; platí-li rovnost, vznikne čtverec. c) Veďte bodem D kolmici na přímku AB a její patu označte M; potom sestrojte trojúhelník DMB. Úloha má řešení, je-li $f > 2\varrho$. d) Na polopřímce CA sestrojte bod M tak, aby platil vztah $CM = CB$; potom sestrojte trojúhelník ABM, je-li $AM = e - a$, $\sphericalangle MAB = \frac{\alpha}{2}$ a $\sphericalangle MBA = \mathrm{R} + \frac{\alpha}{4}$. Úloha je řešitelná, je-li $\alpha < 120°$. **170.** Uvažujte geometrické místo všech bodů C, z kterých vidíme úsečku BD pod úhlem 75°.

171. a) Sestrojte nejprve trojúhelník ABE, kde E je pata výšky v_b na straně AD. Úloha je řešitelná, je-li $v_b < a$; je-li $v_b = a$, přejde kosodélník v obdélník, je-li $v_a = v_b$, přejde kosodélník v kosočtverec, je-li $a = v_a = v_b$, přejde ve čtverec. b) Sestrojte nejprve délky stran AB a BD z trojúhelníků ABE a ADF, kde F je pata výšky v_b na straně AD a F pata výšky v_a na straně AB. Úloha má vždy řešení, neboť $\alpha < \mathrm{R}$. **172.** a) Sestrojí se nejprve trojúhelník $AB'C$, přičemž B' leží na polopřímce AB za bodem B tak, že $BB' = c$. b) Na polopřímce AC se sestrojí za bodem C bod M tak, aby platil vztah $CM = f$ a na polopřímce AB za bodem B bod B' tak, že $BB' = c$; potom se sestrojí trojúhelník $B'CM$. **173.** d) Veďte vrcholem C lichoběžníka $ABCD$ přímku $p \parallel AD$ a označte její průsečík s přímkou AB písmenem E; potom sestrojte trojúhelník BCE. Úloha má řešení, je-li $d + c < a + b$. f) Jako v případě d); pro $\alpha < \mathrm{R}$, $\beta < \mathrm{R}$ má úloha jediné řešení. **175.** a) Sestrojí se nejprve trojúhelník ABD. b) Sestrojí se nejprve trojúhelník ABC a potom trojúhelník ACD, přičemž se považuje úhel γ za obvodový. **176.** a) Sestrojí se trojúhelníky ABC a ACD; úloha je řešitelná, platí-li nerovnosti $|a - b| < e < a + b$, $|c - d| < < e < c + d$, přičemž $\sphericalangle CAB + \sphericalangle CAD \neq 2\mathrm{R}$, $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ACD \neq 2\,\mathrm{R}$. b) Sestrojí se trojúhelníky ABC, ABD. Úloha má řešení, je-li $e \geqq a \sin \beta$, $f \geqq a \sin \alpha$, ovšem za předpokladu, že čtyřúhelník $ABCD$ nepřejde v trojúhelník. **177.** Na polopřímce AB za bodem B sestrojte bod E tak, aby platil vztah $BE = CB$. Potom sestrojte trojúhelník ACE. Je-li $\alpha < 2\mathrm{R}$, je úloha vždy řešitelná. **178.** b) Sestrojí se nejprve trojúhelník ABC a opíše se mu kružnice. c) Sestrojí se trojúhelník ABD a kružnice k tomuto trojúhelníku opsaná. Vrchol C je průsečíkem kružnice k a kružnice $k' \equiv (A; e)$. **179.** Součty protějších úhlů tětivového čtyřúhelníka měří 2R. **180.** Sestrojí se kružnice $k \equiv (S; r)$, v ní tětiva $e = AC$, její osa o_1 a osa o_2, patřící tětivě f tak, aby úhel os o_1, o_2 byl φ; potom teprve tětiva délky f. Úloha má řešení, je-li $e \leqq 2r$, $f \leqq 2r$, $\varphi < 2\mathrm{R}$.

181. a) Vypočítá se délka strany d čtyřúhelníka podle vztahu $a + c = b + d$. b) Sestrojí se nejprve trojúhelník ABS, kde S je střed kružnice trojúhelníku ABC vepsané. c) Sestrojí se nejprve trojúhelník ABC a vepíše se úhlu $\sphericalangle ABC$ kružnice o poloměru ϱ. **182.** Strana $d = a + c - b > 0$. Vypište všechny nerovnosti, které tu musí platit, aby úloha měla řešení. **183.** Vepsaná kružnice $k \equiv (S; \varrho)$ se dotýká stran čtyřúhelníka v bodech T_1, T_2, T_3, T_4. Uvažte dále, že např. $\triangle ST_1B \cong \triangle ST_2B$, kde T_1, T_2 jsou body dotyku na stranách AB a BC, odkud plyne vztah $\sphericalangle T_1SB = \sphericalangle T_2SB$ atd.

184. Jelikož $\sphericalangle ACB$ je pravý nebo tupý, jsou úhly $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ ostré. Leží tedy bod P uvnitř polopřímky BA a uvnitř polopřímky AB, tedy uvnitř úsečky AB. **185.** Uvažujte trojúhelník CXB; přímka $p \equiv AY$ protíná obvod tohoto trojúhelníka v bodě $Y \not\equiv C$, $Y \not\equiv B$. Podle Paschovy věty musí přímka protnout ještě jednu stranu trojúhelníka CXB. **186.** Nechť $\sphericalangle ABD = \alpha$; potom i $\sphericalangle BYX = \alpha$, takže $\sphericalangle AXY = 2\alpha$. Vedeme-li bodem A přímku $AQ \parallel XY$, je $\sphericalangle XAQ = 2\mathrm{R} - 2\alpha$; jelikož úhel $\alpha > 45°$, je $\sphericalangle XAQ < \mathrm{R}$ a polopřímka AQ leží v pravém úhlu $\sphericalangle BAD$. Společný bod Y_0 přímky AQ a BD padne dovnitř úsečky BD, celá přímka XY leží uvnitř poloroviny AQB a bod Y padne dovnitř úsečky Y_0B a tudíž i dovnitř úsečky BD. **187.** $\mathrm{R} - \frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{R} - \frac{\beta}{2}$, $\mathrm{R} - \frac{\gamma}{2}$. **188.** $|XM - XN| < MN$; $|QM - QN| = MN$; $|XM - XN| < |QM - QN|$; tuto vlastnost má bod Q. **189.** $AB = BC$, $\sphericalangle ABP = \sphericalangle BCA = 45°$, $\sphericalangle CBQ = \sphericalangle PAB$ (ostré úhly s rameny kolmými). **190.** $\triangle AFE \cong \triangle ABC \cong FAB$ (sus); $\triangle APF \cong \triangle AQB$ (usu), přičemž $AP = PF$, $AQ = QB$. Trojúhelník APQ je rovnostranný; platí tedy $QP = AP = PF = QB$.

191. a) $\triangle ABC \cong \triangle EAB \cong \triangle DEA \cong \triangle CDE \cong \triangle BCD$ (usu), b) $\sphericalangle ABC = 108°$, $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BCA + \sphericalangle ACE = 72°$. **192.** $\sphericalangle MSN = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle T_1ST_2$. **193.** Veďte bodem T společnou tečnu t obou kružnic a uvažte, že přímky S_1U, S_2V, kde $U \equiv t_1 . t$, $V \equiv t_2 . t$ jsou kolmé k přímce AB. **194.** $\alpha = \frac{n \,.\, 2\mathrm{R}}{2n + 3}$, $\beta = \frac{(n+1) \,.\, 2\mathrm{R}}{2n + 3}$, $\gamma = \frac{(n+2) \,.\, 2\mathrm{R}}{2n + 3}$, $\delta = \frac{(n+3)2\mathrm{R}}{2n + 3}$, takže $\alpha + \delta = \beta + \gamma = 2\mathrm{R}$. **195.** $5\pi\ \mathrm{cm}^2$; $20\pi\ \mathrm{cm}^2$. **196.** $36\pi\ \mathrm{cm}^2$. **197.** Je-li $\frac{r_1}{r_2} = p$, je $r_1 = \frac{pm}{2\pi(p-1)}$, $r_2 = \frac{m}{2\pi(p-1)}$; $p \neq 1$. **198.** $r = \sqrt{\frac{1}{3}(2r_1^2 - r_2^2)}$, přičemž obsah mezikruží mezi kružnicemi k_1 a k je menší než obsah mezikruží mezi kružnicemi k a k_2. **199.** $\frac{a^2}{2}$. **200.** $\frac{r^2}{2}(\pi - \sqrt{3})$.

201. $\frac{1}{24}(5\pi + 6\sqrt{3})$. **202.** $\frac{90}{\pi}$ stupňů. **203.** 55°, 60°, 65°. **204.** Sestrojte kružnici k nad průměrem AB a její tečnu t jdoucí bodem M; tato tečna protne přímky a, b v bodech X, Y. **205.** Geometrické místo středů S tvoří osa o rovnoběžek a, b, která půlí pás mezi nimi vyjma bodu, ve kterém protíná osa o úsečku AB. **206.** Geometrické místo tvoří vnitřní body dvou oblouků, které procházejí body A, B. **207.** Kružnice k je soustředná s kružnicí, která prochází středy všech tří kružnic; úloha má vždy dvě řešení. **208.** Střed kružnice k leží na kružnici $k' \equiv (S_1; \sqrt{r^2 - r_1^2})$ a na kružnici $k_1' \equiv (S_2; \sqrt{r^2 - r_2^2})$. Úloha má nejvýše dvě řešení. **209.** Uvnitř strany CB sestrojte bod M tak, aby platil vztah $CM = CA$ a sestrojte trojúhelník ABM, v němž $\sphericalangle AMB = \mathrm{R} + \frac{\gamma}{2} = 120°$. **210.** a) Sestrojte nejprve trojúhelník TSB, kde T je těžiště trojúhelníka ABC a S střed strany AB. Úloha je řešitelná, platí-li nerovnosti $2t_a + 4t_b > 3a$, $2t_a + 3a > 4t_b$, $4t_b + 3a > 2t_a$. b) Sestrojte nejprve kružnici $k \equiv (S; r)$, její tětivu $BC = a$ a střed M úsečky BC. Vrchol A trojúhelníka ABC je průsečíkem kružnic k a $k' \equiv (M; t_a)$. Úloha je řešitelná, je-li $a \leqq 2r$ a $t_a \leqq r + \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

211. Sestrojí se nejprve trojúhelník PQC, pro který známe $PC + QC = \frac{3}{2}a$, $\sphericalangle PCQ = 60°$ a $PQ = d$. Úloha je řešitelná, je-li $\frac{3a}{4} \leqq d \leqq \frac{a}{2}\sqrt{3}$. **212.** Trojúhelník BTS, kde S je střed strany AB a T těžiště trojúhelníka ABC má strany $TS = \frac{1}{3}t_c$, $SB = t_c$ a $BT = \frac{2}{3}t_b$. Úloha je řešitelná, je-li $t_c < t_b < 2t_c$. **214.** $P = \frac{o^2 - 16n^2}{16}$; 160 cm². **215.** $\frac{a^2}{2}$. **216.** $o = 21{,}2$ cm; $P = 26{,}88$ cm². **218.** Na polopřímce AB se sestrojí za bodem B bod B' tak, aby platil vztah $BB' = c$ a sestrojí se trojúhelník $AB'D$; potom se určí délka úsečky $(a - c)$ z trojúhelníka AB_1D, kde $DB_1 \parallel BC$, přičemž B_1 leží na přímce AB. Z rovnic $a + c = AB'$, $a - c = AB_1$ dostaneme $a = \frac{AB' + AB_1}{2}$.
219. Počítejte obsah trojúhelníka ASD jako součet obsahů trojúhelníků ASM a MSD, kde SM je střední příčka lichoběžníka. **220.** Dokažte, že protější úhly čtyřúhelníka $T_1T_1'T_2'T_2$ jsou výplňkové.

6. SHODNOST PŘEMÍSTĚNÍM, OSOVÁ A STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST, OTÁČENÍ A POSOUVÁNÍ

223. $Q' \equiv (a_2; a_1)$. **226.** a) 6; b) 4; c) 2; d) 3; e) 1; f) 2; h) neomezený počet (přímka sama a každá přímka k ní kolmá); i) 2. **227.** a) osou je přímka q, která jde středem kružnice k a stojí kolmo k přímce p; b) přímka p a přímka q, která jde středem S kolmo k přímce p. **229.** Zvolte dvě nerovnoběžné tětivy daného oblouku a sestrojte osy těchto tětiv; jejich průsečík je střed oblouku. **230.** Přímka p je kolmá na osy úhlů obou různoběžek.

231. Ramena úhlu leží v přímkách AB' a $A'B$, kde A', B' jsou body souměrně sdružené k bodům A, B podle přímky p. Úloha má neomezený počet řešení, je-li p osou úsečky AB. Úloha nemá řešení, je-li úsečka AB kolmá k přímce p, ale p není její osou, nebo jsou-li body A, B od přímky p stejně vzdáleny a neleží v přímce kolmé k přímce p. V ostatních případech má jedno řešení. **232.** Sestrojte kružnici k_1' souměrnou ke kružnici k_1 podle osy x a určete průsečíky kružnic k_1' a k_2. **234.** Na ose x sestrojte bod B tak, aby úsečka $PB = 8$ cm. Bod Q leží na ose úsečky AB. Úloha je dvojznačná. **235.** Tečna t vedená z bodu M ke kružnici k se této kružnice dotýká v bodě T. TS je osou souměrnosti hledaného trojúhelníka. **239.** Uvažujte osovou souměrnost s osou úsečky AB. Trojúhelník ACD', kde D' je souměrně sdružený bod k bodu D, má úhel $\sphericalangle CBD' = \alpha - \beta$, je-li $\alpha > \beta$. Je-li $b = d$, vznikne rovnoběžník. **240.** Na ose y sestrojte bod B' tak, aby $AB = AB'$; bod M je průsečík osy y s osou úsečky BB'. Úloha má řešení, je-li $b > 2a$.

241. K přímce AC sestrojte souměrně sdruženou přímku AC' podle osy AB; $AC' \parallel BC$. Součet vzdáleností bodu L od přímek AC a BC se rovná vzdálenosti přímek AC' a CB. **243.** Sestrojte bod A' souměrně sdružený k bodu A podle přímky p. Přímka $A'B$ protne přímku p v bodě C. Úloha má řešení, není-li $AB \perp p$. **245.** Hledejte osu o úhlu $\sphericalangle AXT$; veďte bodem A kolmici k přímce AS a sestrojte na ní bod S' tak, aby $AS' = r$. Osa o je osou úsečky SS'. **246.** Sestrojte bod M' souměrně sdružený k bodu M podle osy $o \equiv BC$ a sestrojte kružnici $k \equiv (M'; d)$, která protne přímku AB v bodě X. Aby úloha, měla řešení, musí bod X ležet uvnitř úsečky AB. Úloha nemá řešení, je-li $d < \frac{3}{4}$ nebo $d \geqq \frac{3}{4}\sqrt{2}$, jedno řešení, je-li $d = \frac{3}{4}$ nebo pro $\frac{\sqrt{10}}{4} \leqq d < \frac{3}{4}\sqrt{2}$ a dvě řešení pro $\frac{3}{4} < d < \frac{\sqrt{10}}{4}$. **247.** Sestrojte bod A' souměrný k bodu A podle osy x; dále sestrojte kružnici $k \equiv (A'; r)$, kde $r = A'B$. Průsečík kružnice k s osou x označte M; osa o úsečky BM protíná osu x v hledaném bodě X. Úloha je dvojznačná. **250.** $Q \equiv (0; 4)$, $N \equiv (6; 0)$. **253.** Je-li $A \equiv S$, je geometrickým místem bodů X' kružnice k. Jestliže $A \not\equiv S$, je geometrickým místem bodů X' kružnice k' souměrně sdružená ke kružnici k podle středu A. **255.** Sestrojte přímku t' souměrně sdruženou k přímce t podle středu M. Její průsečík s kružnicí k je bod Q. Úloha je řešitelná, je-li $d \leqq r$, kde d znamená vzdálenost bodu M od tečny t. **256.** Sestrojte kružnici k_2' souměrnou ke kružnici k_2 podle středu M; její druhý průsečík s kružnicí k_1 je hledaným bodem A. **257.** Uvažujte středovou souměrnost se středem M a středovou souměrnost se středem N; z nich usuďte na polohu bodu C. **258.** Existuje jen jedna dvojice přímek $A'B$ a AB', kde A', B' jsou souměrné body k bodům A, B podle středu S a mezi nimi jediná vzdálenost. **259.** Uvažujte středovou souměrnost, ve které je středem souměrnosti bod S, který půlí stranu BC. Je-li $2t_a \cdot \sin\varphi < c < 2t_a$, má úloha dvě řešení, je-li $c = 2t_a \sin\varphi$ nebo $c \geqq 2t_a$, má úloha jedno řešení. Je-li $c < 2t_a \sin\varphi$, nemá úloha řešení.

261. 60° a 120°. **262.** O 60° nebo 120° v obou smyslech. **263.** Libovolnou tětivu, která má délku d, otočte do polohy rovnoběžné s přímkou AB okolo středu S kružnice k. **267.** Otočte kružnici k_1 okolo bodu A o úhel 60°. Otočená poloha kružnice k_1 protne kružnici k_2 ve vrcholu C trojúhelníka ABC. Úloha má 4 řešení. **269.** V otáčení se středem A a úhlem $\alpha = 90°$ je převeden bod B do bodu D. **270.** Na kružnici k_1 zvolte libovolný bod X_0 a sestrojte kružnici $k \equiv (X_0; d)$, která protne kružnici k_2 v bodě Y_0, takže $X_0Y_0 = d$; dále sestrojte kružnici $k_3 \equiv (S; SM)$, která protne úsečku X_0Y_0 v bodě M_0. Úsečku X_0Y_0 otočte do žádané polohy X, Y, víte-li, že v tomto otáčení o středu S odpovídá bodu M_0 bod M. Úloha nemá řešení, je-li $d > r_1 + r_2$ nebo $d < r_2 - r_1$, jedno řešení, je-li $d = r_2 - r_1$ nebo $d = r_1 + r_2$. V ostatních případech má úloha dvě řešení.

273. $\sqrt{13}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$. **275.** V posunutí určeném vektorem MN sestrojíme přímku a' přidruženou k přímce a a zjistíme průsečík $Y \equiv a' \,.\, b$. Bodem Y vedeme rovnoběžku s přímkou MN a její průsečík s přímkou a je bod X. Úloze vyhovují čtyři čtverce. **276.** Sestrojí se libovolný rovnostranný trojúhelník $A'B'C'$, aby měl vrchol A' na přímce t_1 a vrchol B' na přímce t_2 a posune se do polohy ABC tak, aby vrchol C' přešel do bodu C na kružnici. Směr vektoru posouvání udává přímka t_1. Úloha nemá řešení, je-li $a < 2r$ nebo $a > \frac{4}{3} r\sqrt{3}$; může mít nejvýše osm řešení. **277.** Posuňte úhlopříčku BD o vektor $\mathbf{AC}$ do polohy $B'D'$. Rovnoběžník $BB'D'D$ má úhlopříčky délek $2a$, $2b$. Trojúhelník $DB'C$ lze sestrojit, neboť $DB = 2a$, $CD' = b$ a $\sphericalangle DD'B' = \sphericalangle ASB$. Úloha má nejvýše dvě řešení. **278.** Posuňte body D, B do polohy D', B' o vektor $\mathbf{AC}$. Čtyřúhelník $DCB'D'$ lze sestrojit. **279.** Posuňte body B, D do polohy B', D' o vektor $\mathbf{AC}$. Trojúhelník $DB'D'$ má strany $DB' = a + c$, $B'D' = f$, $D'D = e$. Úloha je řešitelná, je-li $e + f > a + c$. **280.** Posuňte bod P do polohy P' o vektor $\mathbf{BA}$ a sestrojte nad průměrem $P'Q$ kružnici k'. Průsečík přímky p s kružnicí k' je bod Y. Přímka YQ vytíná na kružnici k bod Z. Úloha má nejvýše čtyři řešení.

281. $S_1 \equiv SS' \,.\, p$ je střed středové souměrnosti, $\mathbf{SS'}$ vektor posunutí. **282.** a) Osová souměrnost s osou SP; středová souměrnost se středem S_1, který půlí stranu SP; posunutí s vektorem posunutí $\mathbf{BP}$; otáčení se středem P a úhlem otočení $\varphi = 270°$ v kladném smyslu; otáčení se středem S a úhlem otáčení $\varphi' = 90°$; b) osová souměrnost s osou AC; středová souměrnost se středem S; posunutí o vektor posunutí $\mathbf{SD}$. **284.** a) 12; 6 osových souměrností, jedna středová, jedna totožnost a ostatní rotace; b) $2n$; n osových souměrností, jedna středová, jedna identita a ostatní rotace. **285.** 4; jedna identita, jedna středová souměrnost a dvě osové souměrnosti.

7. PODOBNOST TROJÚHELNÍKŮ

289. Vzniklo 7 trojúhelníků, počítáme-li do tohoto počtu i trojúhelník ABC. **290.** $\triangle ABC \sim \triangle DBE$. **292.** Trojúhelník ADC má obsah $p_1 = AD \,.\, v_c = \frac{1}{2} AC \,.\, d$; trojúhelník DBC má obsah $P_2 = \frac{1}{2} BD \,.\, v_c = \frac{1}{2} BC \,.\, d$, kde d

je vzdálenost bodu D od stran AC a BC. Utvořte poměr $P_1 : P_2$. Trojúhelníky ADC, BDC nejsou podobné, neboť shodné úhly nejsou sevřeny úměrnými stranami. **293.** $a = 12$ cm, $b = 8$ cm. **294.** $\triangle AVC \sim \triangle O_1O_2S$, kde O_1, O_2 jsou středy stran BC a AB. **296.** 48 cm. **297.** 5 cm. **298.** $2\sqrt{ab} = 25{,}2$. **300.** $17\frac{6}{7}$ mm. **304.** $a_1 = 20$ cm, $b_1 = 35$ cm, $c_1 = 45$ cm. **306.** $\frac{1}{2} a\sqrt{2}$. **307.** $a\sqrt{3}$.

309. $2b^2 : (a^2 - 2b^2)$, $a > b\sqrt{2}$. **310.** Upravte úměry $SA_1 : SA = u_1 : u_2$, $SA_1 : SA_3 = u_1 : u_3$, je-li S průsečík přímek a, b.

311. $\frac{1}{3}a\sqrt{6}$, $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$, kde a je délka strany AB. **316.** $r = \frac{bc}{b + c}$, kde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; $1\frac{7}{8}$. **318.** Uvažované trojúhelníky jsou podobné s trojúhelníkem ABC, proto platí vztahy $\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{p}{AB}$, $\frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{q}{AB}$, $\frac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{r}{AB}$, kde p, q, r jsou úseky které vytínají rovnoběžky se stranami trojúhelníka ABC jdoucí bodem M na straně AB. Uvedené rovnice sečtěte. **319.** Je-li trojúhelník ABC pravoúhlý, je jeho průsečík výšek $V \equiv C$ a věta platí. Zvolme trojúhelník ABC např. ostroúhlý a označme A_1, B_1, C_1 paty výšek v_a, v_b, v_c a V_1, V_2, V_3 body souměrně sdružené podle stran a, b, c k průsečíku výšek V; $\triangle AVB_1 \sim \triangle BVA_1$, takže platí vztah $VA : VB_1 = VB : VA_1$ a tedy také vztah $VA : 2VB_1 = VB : 2VA_1$, odkud $VA \,.\, VV_1 = VB \,.\, VV_2$ (mocnost bodu V ke kružnici k). Stejným způsobem se dokáže, že i bod V_3 leží na kružnici k.

321. Na přímce p se nalézají dva body X, X', které mají od středu S kružnice k vzdálenost $d = 20$. **323.** Kružnice k je soustředná s kružnicí k', která prochází body S_1, S_2 a dotýká se přímky $p \parallel x$, jejíž vzdálenost od osy x je $d = 2$ cm. Úloha má dvě řešení ($p \equiv y = 2, p' \equiv y = -2$). **324.** a) $XA \,.\, XB = XP \,.\, XQ = XA' \,.\, XB'$, kde A, B jsou průsečíky libovolné sečny jdoucí bodem X s kružnicí k_1 a A', B' průsečíky libovolné sečny jdoucí bodem X s kružnicí k_2; b) $XP \,.\, XQ = (XT_1)^2 = (XT_2)^2$, odkud $XT_1 = XT_2$. **325.** Zvolte kružnici k_3, která protíná kružnice k_1 a k_2. Společný bod chordál kružnic k_1, k_3 a k_2, k_3 patří též chordále kružnic k_1, k_2. **326.** Sestrojí se chordála q kružnic k_1, k_2; její průsečík s přímkou p je bod X. Úloha má řešení, mají-li přímky p, q společný bod. **327.** Bod X je společný bod chordál všech tří kružnic.

8. VĚTY EUKLEIDOVY A VĚTA PYTHAGOROVA

331. $\frac{r^2}{d}$; $\frac{2r}{d}\sqrt{d^2 - r^2}$. **332.** $v_1 = \frac{rp}{r + p}$, $v_2 = \frac{r(2r + p)}{r + p}$. **334.** 16 a 4. **335.** $r\left(\sqrt{5} - 1\right)$. **336.** $AM = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $CM = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $BM = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. **337.** 1 092 cm². **338.** $\frac{v^2}{3}\sqrt{3}$. **339.** 588 cm². **340.** 204 cm².

341. 10 cm. **342.** 72 dm^2 nebo 2 520 cm^2. **343.** $r\sqrt{2}$; geometrickým místem je kružnice $k' \equiv (S; r\sqrt{2})$. **344.** 4 cm. **345.** $3\sqrt{7}$ cm. **346.** $r\sqrt{2}$. **347.** $\frac{1}{3}u^2\sqrt{2}$. **348.** $\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{z_1 . z_2}$. **349.** $r = \frac{3}{8}a$. **350.** $r = \frac{a}{8}$.

351. $r = \frac{9}{16}a$. **352.** $\frac{1}{3}r(2\sqrt{3} \pm 3)$. **353.** $a . (3 - 2\sqrt{2})$. **354.** $r = \frac{1}{6}AB$. **355.** $\frac{2}{3}\varrho\sqrt{15}$. **356.** $a = 12$, $b = 8$, $c = 4\sqrt{13}$. **357.** Využijte vztahů $ab = c . v_c$, $c^2 = a^2 + b^2$. **358.** $a(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. **359.** $\frac{1}{2}\sqrt{2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)}$. **360.** $r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

361. $2\varrho\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = 2\varrho(\sqrt{2} - 1)$. **362.** 11 (zaokrouhleno); $10\frac{2}{3}$; $4\frac{1}{3}$. **363.** $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. **364.** 2 103 m. **366.** 3; 4.

9. STEJNOLEHLOST

373. Výhodnější je užití stejnolehlosti o středu $S \equiv B$. **374.** Koeficienty k a k' jsou čísly opačnými. **375.** Na rameno VA naneste úsečku $VA' = 3$, na rameno VB úsečku $VB' = 4$ a veďte bodem P rovnoběžku s přímkou $A'B'$; úloha připouští též možnost $VA' = 4$, $VB' = 3$. **376.** Bodem M veďte přímku $q \parallel VA$ a její průsečík s přímkou VB označte N; potom platí vztah $VN : NY = XM : MY = 2 : 3$. **377.** Bod M leží na kružnici $k \equiv (V; d)$; dále se sestrojí bod M', který má od ramena VB vzdálenost $v_1 = 3$ a od ramena VA vzdálenost $v_2 = 4$ a k němu stejnolehlý bod M ležící na kružnici k ve stejnolehlosti o středu $S \equiv V$. **378.** a) Sestrojí se trojúhelník $A'B'C'$, který má strany $a' = 2$, $b' = 3$, $c' = 4$ a k němu stejnolehlý trojúhelník ABC tak, aby $v_a = 5$, přičemž středem stejnolehlosti je bod $A' \equiv A$. b) Sestrojí se libovolný trojúhelník $A'B'C'$, který má úhly α a β, a sestrojí se k němu stejnolehlý trojúhelník ABC ve stejnolehlosti o středu $S \equiv C \equiv C'$ tak, aby jeho těžnice t_c měla danou délku. **380.** Přímky n, q, m, p omezují čtyřúhelník $ABCD$, v němž $A \equiv p . n$, $B \equiv q . n$, $C \equiv m . q$, $D \equiv m . p$; sestrojte trojúhelník DFE stejnolehlý s trojúhelníkem AXC, kde X je nepřístupný průsečík přímek m, n a trojúhelník CGH stejnolehlý s trojúhelníkem DBY, kde Y je nepřístupný průsečík přímek p, q. Přímka $FH \equiv a$.

383. Úloha má dvě řešení. **384.** Platí vztahy: $MP : MA = MC : MQ$, $MP : MA = MQ : MB$, $MC : MQ = MQ : MB$, odkud $(MQ)^2 = MC . MB$. **386.** Označme α úhel různoběžek a, c a β úhel různoběžek b, c. Zvolme dále libovolnou úsečku A_1C_1 a sestrojme uvnitř této úsečky bod B_1 tak, aby platil vztah $A_1B_1 = 2B_1C_1$; potom sestrojme trojúhelník $A_1C_1P_1$, který má úhel $\sphericalangle A_1P_1C_1 = \alpha$ a $\sphericalangle B_1P_1C_1 = \beta$. Trojúhelník $A_1C_1P_1$ přemístěme tak, aby $P_1 \equiv P$ a body A_1, B_1, C_1 ležely po řadě na přímkách a, b, c. Zbytek úlohy se řeší pomocí stejnolehlosti se středem v bodě P. **387.** Trojúhelník AVC je stejnolehlý s trojúhelníkem OO_1S, kde O, O_1 jsou středy stran BC a AB; středem stejnolehlosti je bod T. **389.** Úloha je dvojznačná. **390.** Ve stejnolehlosti se středem M a koeficientem $k = -\frac{2}{3}$ sestrojte kružnici k' sdruženou s kružnicí k. Průsečík kružnic k a k' je bod X. Úloha má nejvýše dvě řešení.

391. Ve stejnolehlosti se středem v bodě A a koeficientem $k = \frac{1}{3}$ sestrojte kružnici k' přidruženou ke kružnici k. Průsečík obou kružnic je bod X. Úloha má nejvýše dvě řešení. **399.** Středy S_1, S_2 hledaných kružnic k_1, k_2 jsou souměrně sdružené podle středu M; v této souměrnosti odpovídá přímce p_1 přímka $p_1' \parallel p_1$ a přímce p_2 přímka $p_2' \parallel p_2$. Kružnici k_1 možno sestrojit, neboť se dotýká přímek p_2, p_1' a prochází bodem M. (To je známá úloha, která se řeší pomocí stejnolehlosti o středu $S \equiv p_2 \,.\, p_1'$.) Kružnice k_2 je souměrně sdružená s kružnicí k_1 podle bodu M. Úloha má právě dvě řešení.

401. Uvažujte stejnolehlost se středem v bodě dotyku T obou kružnic a s koeficientem $k = \frac{BT}{AT} = -\frac{1}{2}$. **402.** Kružnice k' je stejnolehlá s kružnicí k ve stejnolehlosti, jejíž střed O půlí úsečku SV, kde S je střed kružnice k; poloměr kružnice k' je $r' = \frac{1}{2}r$, kde r je poloměr kružnice k.

10. KONSTRUKTIVNÍ ÚLOHY ŘEŠENÉ POMOCÍ VÝPOČTU

405. c) $a\sqrt{6} + \sqrt{bc\sqrt{2}} = (a\sqrt{2})\sqrt{3} + \sqrt{b \,.\, (c\sqrt{2})}$. **406.** c) $a^2 + b^2 = y^2$, $ab = z^2$; d) $\frac{a^2}{b} = y$. **407.** b) $a^2 - b^2 = y^2$, $\frac{ay}{b} = z$; c) $ab = y^2$; d) $\frac{b^2}{c} = y$.
408. d) $\frac{ab + cd}{c + d} = \frac{ab}{c + d} + \frac{cd}{c + d}$. **409.** $\frac{a^3 + b^3}{a - b} = \frac{a^2}{a - b} \,.\, a + \frac{b^2}{a - b} \,.\, b$.
410. $\frac{ac}{d}\sqrt{\frac{ab}{de}} = \frac{a}{d} \cdot \sqrt{\frac{abc^2}{de}} = \frac{a}{d} \cdot \sqrt{\frac{ac}{d} \cdot \frac{bc}{e}}$.

411. $y = a\sqrt{5} = \sqrt{5a \,.\, a}$, $a^2 - b^2 = z^2$, $a^2 + b^2 = u^2$. **413.** $x = \frac{ab}{b + c}$, $y = a - x$. **414.** $AM = a\sqrt{2} - a$. **415.** Šířka obdélníka je $x = \frac{ab}{u}$. **416.** Strany trojúhelníka ABC jsou $a = \frac{u \,.\, m}{m + n}$, $b = \frac{u \,.\, n}{m + n}$. **417.** Šířka hledaného obdélníka je $x = \dfrac{(a+b)(a-b)}{c}$. **418.** $AM = \dfrac{a+b}{2}$, $BM = \dfrac{a-b}{2}$ nebo $AM = \dfrac{a-b}{2}$, $BM = \dfrac{a+b}{2}$. **419.** $AM = BN = \dfrac{ac}{a+c}$. **420.** Strana čtverce $MNPQ$ je $x = \sqrt{a^2 + bc}$. **422.** $x = \dfrac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}\sqrt{2}}{2}$. **423.** $A'C = B'C = x = \dfrac{\sqrt{ab}\,.\sqrt{2}}{2}$. **424.** $AB = \dfrac{a\,.\,a\sqrt{3}}{2v}$. **425.** $CM = CN = \dfrac{a+b-c}{2}$. **426.** Strana rovnostranného trojúhelníka $x = \sqrt{\dfrac{4a}{3}\cdot(b\sqrt{3})}$. **427.** a) $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}a\,.(b\sqrt{3})}$; b) $x = \sqrt{(2a)\,.\,b}$, přičemž x je délka strany kosočtverce $A'B'C'D'$. **428.** Příčka $p \parallel BC$ protíná strany AC a AB v bodech X, Y. Označíme-li $CX = x$, $BY = y$, platí vztahy $a + x + y = s$, $b : x = c : y$, přičemž $s = \dfrac{a+b+c}{2}$; $x = \dfrac{b\,.(s-a)}{b+c}$. **430.** $x = \dfrac{1}{2}m + \sqrt{\left(\dfrac{m}{2}\right)^2 + 4r^2}$.

431. $XT = XA = x = \dfrac{(d+r)(d-r)}{2d}$. Úloha je vždy řešitelná, neboť $d > r$. **432.** $VP = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + VA\,.\,VB} - \dfrac{a}{2}$. **433.** Platí vztahy $a^2 + b^2 = c^2$, $ab = c\,.\,v_c$; z nich $c = \sqrt{(a+b)^2 + v_c^2} - v_c$; $a + b \geqq 2v_c\sqrt{2}$. **434.** Uvažujte trojúhelníky SS_2K, SS_1K, kde S je střed hledané kružnice a K pata kolmice vedené bodem S k přímce AB; $SS_2 = x + p$, $S_2K = p - x$, $SS_1 = r - x$, $S_1K = r + x - 2p$. Poloměr kružnice k je $x = \dfrac{p(r-p)}{r}$. Úloha má vždy jedno řešení, jelikož je $r - p > 0$.

II. OPAKOVÁNÍ

438. K přímce p se sestrojí přímka p' souměrně sdružená podle bodu S. Průsečík C přímek p' a q je vrchol čtverce. **439.** Sestrojí se čtverec $A_1'B_1'C_1'D_1'$ tak, aby jeho vrcholy ležely na úhlopříčkách čtverce $ABCD$, aby strana $A_1'B_1' = b$, a potom se použije otáčení o středu S čtverce $ABCD$; $\dfrac{a}{2}\sqrt{2} \leqq b < a$.

441. Sestrojte body A', D' přidružené k bodům A, D v posunutí o vektor **CB** a sestrojujte nejprve trojúhelník ADD', který je určen dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným. **442.** 3: 8. **443.** 24 cm. **444.** $\triangle ABU \sim \triangle CDU$, kde U je průsečík úhlopříček lichoběžníka, takže platí vztah $AU : AB = CU : DC$ a tedy také $AU : \dfrac{1}{2}AB = CU : \dfrac{1}{2}DC$; je tedy $\triangle AO_1U \sim \triangle CO_2U$, kde O_1 je střed základny AB a O_2 střed základny CD. Odtud je $\sphericalangle AUO_1 = \sphericalangle CUO_2$ a body O_1, O_2, U leží v jedné přímce. **445.** $\triangle ABC \sim \triangle FAC$, kde F je průsečík úhlopříček AD a BC; vedle toho je trojúhelník ABF rovnoramenný. **446.** Uvnitř strany BC sestrojte bod E tak, aby úhel $\sphericalangle BAE = 20°$; potom $\triangle BAE \sim$ $\sim \triangle ABC$, $BE = \frac{a^2}{b}$, $CE = b - \frac{a^2}{b}$, $CD = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, kde D je pata kolmice vedené z bodu C na polopřímku AE, $AD = \frac{1}{2}b$, $ED = \frac{1}{2}b - a$. Uvedený vztah dostanete ze vztahu $(BE)^2 = (CD)^2 + (ED)^2$. **448.** $\triangle AOS \sim \triangle BDC$, kde S je střed kružnice trojúhelníku ABC opsané, O střed strany AB a D pata výšky v_b; $P = \frac{b \cdot v_b}{2}$, $r : \frac{c}{2} = a : v_b$. **449.** Strana čtverce ležící uvnitř úsečky BC je $x = \frac{ab}{a+b}$, strana čtverce ležící uvnitř úsečky AB je $y = \frac{c \cdot v_c}{c + v_c}$. Jelikož $c \cdot v_c = ab$ a $c + v_c > a + b$, je $x > y$. (Viz př. 450.) **450.** $a = c \sin \alpha$, $v_c = b \sin \alpha$; $a - v_c = c \sin \alpha - b \sin \alpha$; $\frac{a - v_c}{c - b} = \sin \alpha$, $\frac{a - v_c}{c - b} < 1$, $a - v_c <$ $< c - b$, $a + b < c + v_c$.

451. Platí vztahy: $CD : MC = AE : MA$, $CD : MC = BF : MB$; z nich je $MA = \frac{MC \cdot AE}{CD}$, $NB = \frac{MC \cdot BF}{CD}$, $MA \cdot NB = \frac{(MC)^2 \cdot AE \cdot BF}{(CD)^2}$, $(MC)^2 =$ $= \frac{(MC)^2 \cdot AE \cdot BF}{(CD)^2}$ a $(CD)^2 = AE \cdot BF$. **452.** Bod X je průsečík kružnic k_1 a $k' \equiv (S_2; 12)$. Úloha má dvě řešení. **453.** r_1^2; r_2^2. **454.** 1 : 4. **455.** $r = \frac{a}{3}$. **456.** Trojúhelník CQD je rovnoramenný pravoúhlý se základnou QD; $DC = r\sqrt{3}$, $CQ = r + QB = r\sqrt{3}$; $QB = r(\sqrt{3} - 1)$, $QD = r\sqrt{6}$. **457.** $\frac{2a\sqrt{10}}{5}$. **458.** $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. **459.** $x^2 = \frac{b^2 - v_c^2}{4} = \frac{b^2(c^2 - a^2)}{4c^2}$, neboť $v_c = \frac{ab}{c}$; $y^2 = (c - x)^2$. **460.** $\frac{\sqrt{z_1^2 + (2u)^2} - z_1}{2}$.

461. Jsou-li středy úseček AB, BC, CD, DA, AC, BD po řadě S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, jsou trojúhelníky $S_1S_4S_5$, $S_2S_3S_6$ stejnolehlé. **462.** Sestrojí se trojúhelník $A'B'C'$ o stranách $a' = 2$, $b' = 3$, $\gamma' = 75°$ a střed S kružnice tomuto trojúhelníku opsané. Trojúhelník ABC je stejnolehlý s trojúhelníkem $A'B'C'$ podle středu S. **464.** $x = \sqrt{\frac{abc}{d} + a^2} = \sqrt{a\left(\frac{bc}{d} + a\right)}$; $\frac{bc}{d} = y$, $y + a = z$, $x = \sqrt{az}$. **465.** Strana hledaného čtverce je $x = \sqrt{\frac{2}{3}a \cdot b}$. **466.** Výška lichoběž-

níka $v = \frac{2m^2}{a + c} = \frac{2m \cdot m}{a + c}$. **467.** Poloměry těchto kružnic jsou $\frac{r\sqrt{3}}{3}, \frac{r\sqrt{6}}{3}$.
468. Délka úseku na příčce p mezi rameny lichoběžníka je $x = \frac{\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{2}}{2}$.
470. Úlohu lze řešit různými způsoby, i tak, že se sestrojí výraz $AE = x = \frac{AB \cdot AC}{AC - AB}$; úloha má řešení, je-li $AC > AB$, z čehož plyne, že $\sphericalangle ACB < 60°$.

XV. TRIGONOMETRIE

I. GONIOMETRICKÉ FUNKCE

3. a) 0,311 78; 0,494 95; 0,916 48; 0,964 02; 0,361 62, 0,538 77; 0,752 22; 0,995 75; b) 0,965 17; 0,802 12; 0,405 41; 0,217 86; 0,919 13; 0,851 73; 0,686 87; 0,126 78. **4.** a) 13°; 24°40′; 37°43′; 69°56′; b) 9°; 31°20′; 35°43′; 62°46′; c) 7°; 33°20′; 42°13′; 66°3′; d) 6°; 28°20′; 44°3′; 80°27′. **6.** a) $b = 76{,}77$ m, $a = 92{,}23$ m, $\beta = 39{,}77°$; b) $a = 313$ m, $c = 528$ m, $\beta = 53{,}6°$; c) $c = 307{,}6$ m, $b = 192{,}4$ m, $\beta = 38{,}72°$; d) $c = 13$ cm, $\alpha = 67{,}38°$, $\beta = 22{,}62°$; e) $b = 87{,}04$ cm, $\alpha = 78{,}17°$; f) $a = 0{,}828\,7$ km, $\alpha = 57{,}07°$. **7.** a) $a = 84{,}25$ m, $c = 86$ m, $\alpha = 78°35′$; b) $a = 32$ m, $b = 126$ m, $c = 130$ m, $\beta = 75°45′$; c) $a = 5{,}7$ m, $b = 17{,}6$ m, $c = 18{,}5$ m; d) $a = 297{,}2$ m, $c = 401{,}8$ m, $\beta = 42°18′$. **8.** 185,4 kp. **9.** a) 60°; b) 76°. **10.** a) 1 154,7 m; b) 932,6 m.

11. $r = 32{,}4$ cm. **12.** 70°31′46″. **13.** 1 386 000 km. **14.** $F_1 = 8{,}66$ N, $F_2 = 5$ N. **15.** Pohyb tělesa je ovládán silou $F = M \cdot g \sin \alpha - T$, kde $T = f \cdot N$. (f je koeficient tření, $N = M \cdot g \cdot \cos \alpha$.) a) $v \doteq 47\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; b) $v = 46\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; c) 105 m. **16.** $s_1 = \frac{a}{2} \cdot t^2$, $a = g \sin \alpha$. a) $\alpha = 7°40′$; b) 9°30′. **17.** 215 m/s.

18. $L = Ga \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{t}$. **19.** 69,2 cm.

21. a) 800, 698, 628, . . ., 462 kp; b) 693, 571, 476, . . ., 231 kp. **22.** 1,51 m/s. **26.** $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{7}{12}\pi$. **29.** a) 97,2°; b) 810°; c) 468°. **30.** $2nr \sin \frac{\pi}{n}$, $2nr \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$, $P = nr^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$; $nr^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$. **39.** a) 0,880 2, −0,474 6, −1,854 6, −0,539 2; b) 0,108 9, −0,994 1; −0,109 5, −9,132 6; d) 0,262 7, 0,964 9, 0,272 3, 3,672 3; e) −0,758 5, 0,651 7, −1,164 0; −0,859 1. **47.** Perioda

$\frac{2\pi}{\omega}$, frekvence $\frac{\omega}{2\pi}$. **48.** $x = r\cos\omega t$, $y = r\sin\omega t$, kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$. **49.** a) $\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}, \frac{r}{2}\right)$; b) $\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$; c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)$; d) $(0, r)$; e) $\left(-\frac{r}{2}, \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$; f) $\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, -\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$.

51. a), b) fází; a), c) amplitudou a fází. Ověřte na grafu. **52.** $x = 3\cos\frac{2\pi}{T}t = 3\cos 8{,}73t$, $y = 3\sin 8{,}73\,.\,t$. **53.** a) $y = 2r\sin\omega t$; b) $y = 0$; c) $y = r\,.\,\sin\omega t + r\sin\omega\left(t - \frac{T}{4}\right) = \sqrt{2}r\,\sin\omega\,.\left(t - \frac{T}{8}\right)$; d) $y = 2r\cos\frac{\pi}{T}\varphi\,.\,\sin\omega\left(t - \frac{\varphi}{2}\right)$, kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$. **54.** a) $y = 2r\cos\frac{\pi}{2T}t\sin\frac{3\pi}{2T}t$; b) $y = 2r\cos\frac{\pi}{3T}t\,.\,\sin\frac{5\pi}{T}t$. **56.** $i = i_1 = i_2 = i_3$; $u = \frac{u_0\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; b) $i = \frac{i_0\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $u = u_1 = u_2 = u_3$. **57.** $\cos\alpha = \frac{1}{8}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{63}}{8}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{63}$.
58. $\pi l^2\sin\frac{\varphi}{2}\left(1 + \sin\frac{\varphi}{2}\right)$, $V = \frac{1}{6}\pi l^3\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\varphi$. **59.** $s =$

$$= \sqrt{\frac{2S\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2\cos\alpha} + \cos\frac{\alpha}{2}}},\quad S' = \frac{4S\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2\cos\alpha}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2\cos\alpha}}.$$

2. VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI

62. a) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $-\sqrt{\frac{5}{9}}$; d) $\frac{-4}{5}$. **64.** a) $\cos x = -0{,}6$; $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$; b) $\frac{4}{5}$, $-\frac{4}{3}$; c) $\frac{\sqrt{30}}{6}$, $-\frac{\sqrt{6}}{6}$; d) $\sin x = \frac{15}{17}$, $\cos x = \frac{-8}{17}$. **65.** a) $\sin\varphi = \sqrt{26} : 26$, $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{26}}{26}$; b) $\sin\varphi = -0{,}66$, $\cos\varphi = -0{,}75$; c) $\sin\varphi = \frac{1}{2}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\sin\varphi = \frac{12}{13}$, $\cos\varphi = \frac{5}{13}$. **66.** a) $\sqrt{4a^2 - b^2} : 2a$, $\frac{b}{2a}$; b) $(a^2 + b^2) : \sqrt{2(a^4 + b^4)}$, $\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{2(a^4 + b^4)}}$; c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14 - 4\sqrt{5}}}$, $\frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{14 - 4\sqrt{5}}}$. **68.** a) ano, b), c) ne. **69.** a) $2\cos x$; b) $\operatorname{cotg} x \,.\, \operatorname{cotg} y$; c) $1 + \cos x$; d) $\operatorname{cotg}^2 x$; e) 2. **70.** $2\cos^2\alpha$; b) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; c) $\operatorname{cotg}\alpha$; d) $\cos\alpha$; e) 1. **72.** a) $194°15'$; b) $168°12'$; c) $161°34'$. **75.** a) $\dfrac{-\sqrt{2}}{10}$; b) $\dfrac{1}{-7}$. **76.** a) 0,28; b) $-\dfrac{8}{9}$; c) $\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$; d) $-\dfrac{24}{25}$; e) $\pm 5 : 12$. **77.** $\alpha = -\beta + 2k\pi$ nebo $\alpha = k \,.\, 360°$ nebo $\beta = k \,.\, 360°$. **79.** a) $2\sin\alpha \cos\beta$, $2\cos\alpha\sin\beta$; b) $2\cos\alpha\cos\beta$, $-2\sin\alpha \,.\, \sin\beta$; c) $\cos . (\alpha \pm \beta)$. **80.** a) $\dfrac{1}{2}$; b) 0; c) $\sin 75°$; d) $\cos\dfrac{\pi}{12}$; e) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; f) $\operatorname{tg} 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **82.** a) $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $y = \sqrt{2}$; b) $-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $y = \sqrt{2}$; c) $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\dfrac{\pi}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}$, k je číslo celé. **83.** a) $x = \dfrac{3}{2}\pi$, $y = 1$; b) $x = 0$ nebo 2π, $y = 2$; c) $x = \dfrac{5}{4}\pi$, $y = -\sqrt{2}$. **85.** a) $\alpha \neq 2k\pi + \pi$, $2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$; b) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; c) $2\sin^2\beta$; d) $2\cos^2\gamma$, $\gamma \neq k\pi$; e) 1, $\gamma \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; f) $\sqrt{2} \,.\, \cos(\alpha - 45°)$, $x \neq k \,.\, \dfrac{\pi}{2}$; g) $2\sqrt{\operatorname{tg} x} \,.\, \cos\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)$, $0° < \alpha < 45°$. **88.** a) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; c) $2\sin 2\alpha\cos\alpha$, $2\cos 2\alpha \,.\, \sin\alpha$; d) $2\cos 2\alpha\cos\alpha$, $2\sin 2\alpha \,.\, \sin\alpha$; e) $2\sin\dfrac{90° + \alpha}{2}\cos\dfrac{90° - \alpha}{2}$, $2\cos\dfrac{90° + \alpha}{2}\sin\dfrac{90° - \alpha}{2}$; f) $2\cos\alpha \,.\, \cos \,.\, (\alpha - \beta)$. **89.** a) $4\cos\dfrac{x}{2} \,.\, \cos\left(\dfrac{x}{4} + 30°\right)\cos\left(\dfrac{x}{4} - 30°\right)$; b) $2\sqrt{2}\cos\left(45° - \dfrac{x}{2}\right) \,.\, \sin\dfrac{x}{2}$; c) $4\sin 2x \,.\, \sin\left(\dfrac{x}{2} + 15°\right)\cos\left(\dfrac{x}{2} - 15°\right)$; d) $\dfrac{4\cos^2(45° - 2x)}{\sin 4x}$; e) $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$; f) $4\operatorname{tg} x\cos^2\dfrac{x}{2} \,.\, \sin^2\left(45° - \dfrac{x}{2}\right)$; g) $4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$. **94.** $x + y + z = k$, $x = r\cos\alpha$, $y = r\cos\beta$, $z = r\cos\gamma$. **95.** Sudá: a), b), e), lichá c), d), f); g), h) ani sudá ani lichá. **96.** a) $2\sin\alpha\cos\alpha < 2\sin\alpha$. **97.** $\dfrac{2a}{1 - a^2}$; b) $\dfrac{2ab}{b^2 - a^2}$. **98.** a) $y = \arccos 2x$; b) $y = \arcsin 3x$; c) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$; d) $y = \operatorname{arccotg}\dfrac{5}{2}x$. **100.** Úhel, jehož sinus je $\dfrac{1}{2}$, je $\dfrac{\pi}{6}$.

101. a) 0; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{\pi}{3}$; e) neexistuje; f) $\frac{\pi}{6}$. **102.** a) $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$; b) všecka čísla reálná; c) $-3 \leqq x \leqq 3$; d) $x \geqq 0$; e) $0 \leqq x \leqq 1$; f) $x \geqq 5$; g) $0 \leqq x \leqq 2$.

3. TABULKY LOGARITMŮ GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ, ŘEŠENÍ PRAVOÚHLÉHO TROJÚHELNÍKA

103. c) 9,601 98; d) 9,296 75; j) 0,706 52. **104.** f) 14°40′56″; g) 69°50′38″; h) 60°33′52″. **105.** a) $25°7'38'' + k \,.\, 360°$, $154°52'22'' + k \,.\, 360°$; b) $70°45'39'' + k \,.\, 360°$; d) $47°52'17'' + k \,.\, 180°$. **108.** a) $a = 9{,}2$ m, $b = 13{,}6$ m; b) $c = 186$ m, $b = 184$ m; c) $a = 180$ m, $b = 240$ m; d) $a = 14{,}4$ m, $b = 19{,}6$ m; e) $c = 219$ m, $\alpha = 41°07'$; f) $b \doteq 154$ cm, $\beta \doteq 48°48'43''$; g) $a = 5{,}5$ j, $\alpha = 41°40'$. **109.** a) $c = 83{,}6$ mm, $b = 39{,}5$ mm, $P = 1\,452$ mm^2; b) 17,3 cm, $P = 48{,}0$ cm^2; c) $\alpha = 58°38'$, $P = 4\,638$ mm^2; d) $a = 10{,}5$ cm, $c = 27{,}5$ cm, $P = 133{,}3$ cm^2. **110.** 2°16′31″.

111. 49°27′30″. **112.** $o_{\text{veps}} = 2nr \sin \frac{\pi}{n}$, $P = nr^2 \sin \frac{\pi}{n} \,.\, \cos \frac{\pi}{n}$. **113.** $F_1 = 12$ kp, $F_2 = 5$ kp, 22°31′. **114.** $a_7 = 0{,}867\,76$ j, $P_7 = 2{,}736\,4$ j^2. **115.** $a = 78{,}29$ mm, $b = 134{,}28$ mm; b) $b = 908{,}28$ mm, $c = 932{,}82$ mm; c) $a = 73$ j, $b = 188{,}82$; d) $a = 24{,}7$ j, $b = 19{,}92$ j. **116.** a) $\alpha = 49°50'$, $b = 54{,}5$ cm, $P = 1\,760$ cm^2; b) $\alpha = 38°19'$, $c = 44{,}4$ cm, $P = 478{,}5$ cm^2; c) $b = 6{,}7$ cm, $c = 10{,}1$ cm, $a = 7{,}5$ cm; d) $b = 6{,}3$ cm, $\alpha = 40°37'$; e) $c = 27{,}44$ cm, $b = 20{,}26$ cm; f) $a = 11{,}3$ cm, $b = 17{,}8$ cm. **117.** $b = 26{,}9$ j, $c = 26{,}7$ j, $d \doteq 23{,}1$ j, $\alpha + \beta < 180°$, $v < a \dfrac{\sin \alpha \,.\, \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$. **118.** 114°46′. **119.** $0{,}174 \,.\, r$. **120.** 43°23′.

121. a) 939,6 cm; b) 947,7 cm. **122.** 3,2 cm. **123.** 64 t. **124.** $18{,}2 \,.\, 10^3$m^3. **127.** a) $\alpha = 53°7'50''$; b) $\alpha = 51°49'36''$. **128.** $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2n}{m + n}$. **129.** 30°, 53°7′48″, 37°8′25″.

131. 82,1 m. **132.** 31 m. **133.** $s = \sqrt[3]{\dfrac{1\,428}{\pi \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}}$, $s = 16$ cm. **134.** 1 m; 1,60 m. **135.** a) 25°54′20″; b) 8°21′20″. **136.** a) 165 kp; b) 174 kp. **137.** 40 dm^3. **138.** $V = \frac{1}{4} \pi a^3$ j^3. **139.** 50,3 m. **140.** $r = 47$ m, $\alpha = 121°25'$, $P = 82 \,.\, 25 - \frac{1}{2} 47^2 (\operatorname{arc} \alpha - \sin \alpha)$. **141.** 55°13′. **142.** 1 427,7 m. **143.** a) $x = \dfrac{a \,.\, \sin \alpha \,.\, \sin (\beta - \beta_2)}{\sin (\beta - \alpha) \cos \beta_2}$; b) $x = 3{,}03$ m; c) $x = 2{,}62$ m. **144.** a) $a = 69$ m,

$b = 260$ m, $\alpha = 14°51'50''$; b) $b = 15{,}167$ m, $c = 18{,}167$ m, $\alpha = 33°24'$; c) $b = 60$ m, $\alpha = 74°48'30''$; d) $a = 912$, $b = 215$, $c = 937$, $\beta = 76°44'$; e) $\alpha = 16°15'37''$, $a = 24$, $b = 7$, $c = 25$; f) $a = 12$ m, $b = 9$ m, $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} = 53°8'$. **145.** a) $a = 104$ j, $b = 153$ j, $c = 185$ j, $\alpha = 34°12'20''$; b) $b = 2{,}87$ j, $c = 8{,}65$ j, $\beta = 19°22'46''$. **147.** 8,7 světelného roku. **148.** a) 1 386 800 km; b) $\alpha = 0°31'32''$. **149.** 57'2,1''. **150.** 62,46 R. (R je poloměr Země.)

151. $x = 21$ dm. **152.** $P = 13{,}5$ cm². **153.** $P = \dfrac{a^2 \sqrt{\cos\alpha}}{4 \sin\dfrac{\alpha}{2} \sin\varphi}$. **154.** $v = \dfrac{\sqrt{S}}{2} \cdot \sqrt{\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2} - 1}$. **155.** $V = \dfrac{r^3}{3} \cdot \dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^3}$ **156.** $2\pi R^2 . \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha-\beta}{4}$. **157.** $V = \dfrac{2}{3} l^3 \operatorname{cotg}\dfrac{\beta}{2} \cdot \left(1 - \operatorname{cotg}^2\dfrac{\beta}{2}\right)^3$.

4. GONIOMETRICKÉ ROVNICE

162. a) $x = k\pi$, k vždy i dále je číslo celé; b) $x = -y + 2k\pi$, nebo $x = y + 2k\pi$; c) $\frac{\pi}{8}(4k + 1)$, $\left(2k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$; d) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $x = -y + \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi$, $x = y + \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$. **163.** a) $52° + k . 360°$; b) $105°31' + k . 360°$; c) $x = k . 360°$; d) $x = -y + (2k + 1)\pi$, $x = y + 2k\pi$; e) $x = -y + 2k\pi$, $x = y + (2k + 1)\pi$. **164.** a) $x = \frac{\pm\pi}{2} \pm k.\ 360°$; b) $x = -90° + k . 360°$; c) $x = k . 360°$, $x = 180° + k . 360°$. **165.** a) $(2k + 1) . \frac{\pi}{6}, \frac{k\pi}{2}$; b) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$; c) $k\pi$, $\pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$; d) $k\pi$; e) $k\frac{\pi}{2} + (-1)^k . \frac{\pi}{12}$. **168.** a) $(210°, 330°) + k . 360°$ (k vždy číslo celé); b) $(56°18', 135°) + k . 180°$; c) $\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; d) $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_3 = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{6}$; e) $(30°, 150°, 270°) + k . 360°$; f) $(60°, 300°) + k . 360°$. **169.** a) $\pm 37°46' + k . 180°$; b) $(90°, 120°, 240°, 270°) + k . 360°$; c) $(323°8', 90°, 216°52') + k . 360°$; d) $(45°, 135°) + k . 180°$; e) $\left(-\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{3}\right) + k\pi$. **170.**

a) $k \,.\, 360°$, $(4k+3) \,.\, 90°$; b) $(0°, 60°, 180°, 300°) + k \,.\, 360°$; c) $(8°02'$, $104°34') + k \,.\, 360°$; d) $53°08' + k \,.\, 360°$, $k \,.\, 360°$; e) $\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $\frac{\pi}{6}(12k-1)$; f) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $2k\pi$, $(8k+1)\frac{\pi}{4}$; g) $53°7'48'' + k \,.\, 360°$, $352°6'35'' + k \,.\, 360°$; h) $67°22'48'' + k \,.\, 360°$, $53°7'48'' + k \,.\, 360°$.

171. a) $(111°32', 248°28') + k \,.\, 360°$; b) $(0°, 180°, 33°41'24'', 213°41'24'') + {}$ $+ k \,.\, 360°$; c) $(0°, 45°, 180°, 135°, 225°, 315°) + k \,.\, 360°$; d) $\sin 2\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, (8 hodnot); e) $\operatorname{arctg}(-1 \pm \sqrt{2}) + k \,.\, 180°$. **172.** a) $x = \frac{\pi}{8}(4k-1)$; b) $x = {}$ $= \frac{\pi}{4} + k\pi$, $119°45' + k \,.\, 180°$; c) $x = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + k\pi$, $\frac{\pi}{4} + k\pi$; d) $x_1 = {}$ $= \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = k\pi - \operatorname{arctg} 3$; e) $x_1 = k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{3}(3k-1)$; f) $x_1 = \operatorname{arctg} 2 = {}$ $= 63°26'6'' + k \,.\, 180$, $x_2 = 108°26'6'' + k \,.\, 180°$. **173.** a) $x = 2 \,.\, \operatorname{arctg}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = {}$ $= \pm 70°31'46'' + 2k \,.\, 180°$; b) $x = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$; c) $x_1 = k\pi$, $x_2 = 2k\pi \pm \arccos\frac{b}{a}$; d) $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2 = \arcsin\frac{b}{2}$; e) $x = \arccos\frac{c}{2\sin\alpha}$. **174.** a) $k \,.\, 90°$, $\pm 60° + k \,.\, 360°$; b) $\frac{\pi}{4}(4k \pm 1)$, $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; c) $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi$; d) $2k\pi$, $\frac{\pi}{6} \,.$ $.\,(4k+1)$; e) $\frac{\pi}{30}(-1)^k + \frac{\pi}{15}(3k-1)$, k celé. **175.** $\sin\omega t = \frac{\pm a}{r}$; pro $a = 1, r = 2, \omega = \frac{\pi}{2}$ je $\omega t = \left(\pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{5}{6}\pi\right) + 2k\pi$; $t = \frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$ vteřiny. **176.** a) $v = |x_2 - x_1| = r|\cos\omega t + i\sin\omega t - \cos 2\omega t -$ $- i\sin 2\omega t|$. Pro $v = 1$, $r = 1$, $\omega = \frac{1}{3}\pi$ je $t = 1, 5, 7, 11, \ldots$ vteřin; b) $t = \frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{11}{3}, \ldots$ vteřin. **177.** $t = 21$ min 49 s. **179.** a) $\omega = 73°44'$; b) 25 : 19. **180.** a) $1 < p \leqq \sqrt{2}$; např. pro $p = \sqrt{2}$ je $\alpha = 45°$; b) $-1 < p < 1$; pro $p = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ je $\alpha = 15°$.

181. $\alpha = 65°42'$. **182.** $67°7'$, $67°7'$, $45°36'$. **183.** a) $\frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$, $36 \,.\, 10^3 \,.$ $.\,\sin 2\alpha$; b) pro $\alpha = 45°$. **184.** $15\operatorname{tg}^2 x - c^2 \operatorname{tg} x + c^2 \operatorname{tg} 16° + 15 = 0$; $x \doteq 90°$; tímto dělem není možno cíl ostřelovat. **185.** a) 0°, 60°, 120°, 180°, 240°, atd.; b) 18°, 45°, 54°, 90°, 126°, 135°, 162°, 198°, 225°, ...; c) $(0°, 60°, 180°, 300°) + k \,.\, 360°$; d) $\pm 20° + k \,.\, 120°$, $k \,.\, 180° \pm 90°$; e) 30°, 90°, 120°, 150°, 240°, ... **186.** a) $x = 90°, y = 30°$; b) $x = 60°, y = 60°$; c) $x = 30°$, $y = 30°$; d) $x = 60°, y = 30°$; e) $x = 69°12', y = 14°28'$. **187.** a) $x = 90°, 30°$, $y = 30°, 90°$; b) $x = 60°, y = 0°, x = 180°, y = 120°, \ldots$; c) $x = \operatorname{arctg} . . (\sqrt{3} - 1)\frac{1}{2}, y = 30° - x$; d) $x = 30°, y = 15°, \ldots$; e) $x_1 = 65°15'53'', y_1 = = 5°15'53'', x_2 = y_1, y_2 = x_1$. **188.** a) $-\frac{1}{2}$; b) $+2$; c) $x_1 = 2, x_2 = 3$; d) $x_1 = 1, x_2 = 3$; e) $x_1 = 5, x_2 = 3$. **189.** a) $x^2 + y^2 = 1$; b) $x^2 + y^2 = 1$; c) $y^2(1 + x^2) = 1$. **190.** a) $x_1 = 0, x_2 = 0{,}85$; b), c) jedno řešení; d) nekonečně mnoho řešení.

191. c) $y = \sin 2x, y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. **192.** a) ∞; b) 7; c) ∞. **193.** Pro $a = 0$, $-1 < b < 1$ nemá daná rovnice řešení; pro $a = 0, b > 1$ nebo $b < -1$ nebo pro $a \neq 0$ a b libovolné má neomezeně mnoho řešení; d) řešení neexistuje. **194.** a) $x = \frac{1}{k\pi}$; b) $\frac{1}{\pi\left(2k + \frac{1}{2}\right)}$; c) $x = \frac{1}{\pi\left(2k - \frac{1}{2}\right)}$. **196.** Jsou. **197.** a) $7 \geqq a \geqq 3$; b) $a \geqq 7$.

5. SINOVÁ A KOSINOVÁ VĚTA

200. a) $1 : \sqrt{3} : 2$; b) $2\sqrt{2} : 2\sqrt{3} : (\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

202. a) $\beta = 46°34'$, $\alpha = 28°57'18''$; b) $\gamma = 82°49'10''$, $\beta = 55°46'15''$; c) neexistuje.

203. $\beta = 40°22'4''$. **205.** a) $c = 11{,}35$ m, $a = 23{,}75$ m, $\alpha = 115°39'$; b) $c = = 319{,}1$ m, $b = 251{,}6$ m; c) $c = 33{,}94$ j, $b = 35{,}87$ j, $a = 30{,}28$ j; d) $a = = 31{,}8$, $\alpha = 91°$. **206.** a) $\gamma_1 = 37°35'20''$, $\gamma_2 = 2R - \gamma_1$, $a_1 = 31{,}692$ m, $a_2 = 10{,}138$ m; b) $\alpha = 13°18'37''$, $b = 1\,192{,}3$ m; c) $\gamma = 61°43'$, $a = 48{,}68$ m, $b = 59{,}1$ m; d) $a = 23{,}75$ m, $c = 11{,}35$ m, $\alpha = 115°39'$. **207.** $c = 21$ m, $\beta = 36{,}87°$, $\gamma = 75{,}75°$; b) $a = 10$ km, $b = 5{,}3$ km, $\gamma = 15{,}63°$; c) $c = 91$ m, $\beta = 28°34'$. **208.** 8 520 m, 8 220 m. **209.** 404,3 m. **210.** a) $a = 192$ j, $b = 178$ j, $\gamma = 72°12'$; b) $a = 952$, $c = 680$, $\alpha = 80°$; c) 91 m, $\gamma = 108°56'$; d) $a_1 = = 31{,}8$ j, $\alpha_1 = 91°$; $a_2 = 12{,}1$ j, $\alpha_2 = 22°20'$.

213. a) $b_1 = 10{,}237$ km, $b_2 = 3{,}898\,5$ km, $\beta_1 = 70°31'30''$, $\beta_2 = 21°2'30''$; b) $a_2 = 3{,}496\,8$ m, $a_1 = 19{,}079$ m, $\alpha_1 = 123°32'48''$, $\alpha_2 = 8°47'12''$; c) $c_1 = = 280{,}38$ m, $c_2 = 93{,}82$ m, $\beta_1 = 57°14'33''$, $\beta_2 = 122°45'27''$, $P_1 = 20\,325$ m^2, $P_2 = 6\,801$ m^2. **215.** a) $P = \frac{b^2 \sin\gamma}{2}$, $\gamma = \arcsin\frac{2P}{b^2}$; b) $\alpha = 90°$; c) $\alpha_1 = = 7°11'$, $\alpha_2 = 172°49'$. **216.** $\frac{\pi c^3}{3} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}\right)^2$. **217.** 22,5 m. **218.** a) $AX = = 8{,}9$ m; b) $AX = 16{,}4$ m. **219.** a) $P = 14{,}7$ j^2, $\varrho = 1{,}6$ j, $r = 3{,}5$ j; b) $\varrho =$

$= 1{,}9$ j, $r = 7{,}6$ j, $P = 32{,}4$ j². **220.** a) Řešení existuje vždy, když $\alpha + \beta < 180°$, $r > 0$; b) pro $2P < ab$ dvě řešení, pro $2P = ab$ jediné řešení, pro $P = 0$ nebo $2P > ab$ nemá úloha řešení; c) je-li $a \leqq 2r$, $b \neq a$, přičemž $b < 2r$, má úloha dvě řešení, je-li $a < 2r$, $b = a$ nebo $b = 2r$, jediné řešení, pro $a > 2r$ nebo $b > 2r$, nebo $a = b = 2r$, žádné řešení.

221. a) $a = 18{,}4$ j; $b = 14{,}9$ j; b) $c_1 = 0{,}50$ j, $\alpha_1 = 27°23'$, $\beta_1 = 64°10'$, $c_2 = 0{,}30$ j, $\alpha_2 = 27°23'$, $\beta_2 = 115°51'$. **222.** $c = 196$ m, $\alpha = 85°4'30''$; $\beta = 42°38'51''$. **223.** 4 500 m. **224.** Asi 120 cm. **225.** 46 m. **226.** 62 m. **227.** 8,6 m. **228.** 2 095 m. **229.** 43,3 m. **230.** 103 m.

231. a) $\beta_1 = 58°12'42''$, $a_1 = 24{,}807$, $b_1 = 22{,}193$; $\beta_2 = 121°47'18''$, $a_2 = 3{,}731$, $b_2 = 22{,}193$; b) $a = 17$, $b = 19$, $\alpha = 31°45'23''$, $\beta = 36°1'50''$; c) $\alpha = 69°59'$, $\beta = 39°5'49''$, $c = 22{,}33$. **232.** $\beta = 13°40'57''$. **233.** $\alpha = 106°15'20''$. **234.** a) $a = 3{,}95$, $b = 1{,}81$, $\alpha = 142°18'$; b) $\beta = 44°53'28''$, $b = 3{,}245$; c) $a = 19{,}592$, $b = 0{,}408\,34$. **235.** a) $a = 6{,}112\,2$, $c = 1{,}803\,8$, $\beta = 26°47'12''$; b) $c = 28{,}36$, $\alpha = 115°26'18''$, $\beta = 44°26'46''$. **236.** a) $\beta = 81°36'54''$, $\gamma = 75°36'50''$; b) $b = 39{,}494$ m, $d = 37{,}94$ m. **237.** a) $r^2 = 13$, $P = 5{,}132\,3$; b) $r^2 = \dfrac{85}{9}$, $P = 16{,}875$. **238.** a) $c = 28{,}3$ m, $\alpha = 43°37{,}4'$, $\beta = 55°2{,}4'$, $a = 19{,}7$ m, $b = 23{,}5$ m; b) $a = 11{,}35$ m, $\beta = 38°49'20''$, $\gamma = 115°39'28''$, $b = 16{,}52$ m; c) $\beta = 47°39'$, $\alpha = 80°12'$, $a = 64{,}72$ m, $c = 51{,}86$ m. **239.** a) $a = 63{,}7$ m, $b = 77{,}3$ m, $c = 81{,}5$ m; b) $\alpha = 81°20{,}2'$, $b = 19{,}7$ m, $a = 28{,}3$ m, $c = 23{,}5$ m; c) $\beta = 54°53'$, $\gamma = 47°1{,}8'$, $a = 852{,}3$ m, $b = 712{,}5$ m. **240.** a) $\alpha = 67{,}4°$, $\beta = 59{,}5°$; b) $\alpha = 66{,}4°$, $\beta = 59{,}6°$; c) $\alpha = 65°$, $\beta = 59{,}8°$.

241. a) $\alpha = 56{,}84°$, $\beta = 89{,}67°$; b) $\alpha = 42°44'$, $\beta = 115°12'$; c) $\alpha = 98°54'22''$, $\beta = 51°12'24''$. **243.** 448 m. **244.** 625 m. **245.** a) $x = 273{,}5$ m, $y = 317{,}56$ m, $z = 361{,}68$ m; b) $x = 203{,}72$ m, $y = 235{,}27$ m, $z = 268{,}97$ m. **246.** $\omega = 62°9'10''$; $d = 1\,532{,}8$ m. **247.** a) $x = a\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha_1} - \dfrac{2\cos\beta}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2} + \dfrac{1}{\sin^2\alpha_2}}$; b) 342 m; c) 438 m. **248.** a) Označme E patu kolmice z bodu S na směr BA, D patu kolmice z bodu A' na týž směr. Položme $AE = m$, $ED = m'$, $SE = v$, $A'D = v'$. Potom $x = \sqrt{(m + m')^2 + (v - v')^2}$, kde $m = \dfrac{a \,.\, \mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}$, $m' = \dfrac{a'\,\mathrm{tg}\,\beta'}{\mathrm{tg}\,\alpha' - \mathrm{tg}\,\beta'}$, sklon $\sin\varphi = \dfrac{v - v'}{x}$; b) $x = 2\,019$ m, (1 : 20); c) $x = 3\,183$ m, (1 : 19). **249.** 5,044 km. **250.** $DE = 871{,}3$ m.

257. a) $\sqrt{31}$; c) $c = 2\sqrt{7}$; d) $c = \sqrt{41 - 20\sqrt{2}}$; e) $\sqrt{41 - 20\sqrt{3}}$. **258.** a) $\alpha = 29°32'$, $\beta = 115°22'$; b) $\alpha = 120°48'$, $\beta = \gamma = 29°36'$; c) $a = 315{,}5$ m, $\gamma = 49°27'6''$; d) $c = 103{,}5$ m, $\alpha = 77{,}580°$; e) $c = 431{,}2$ m, $\beta = 29°57'8''$; f) $\alpha = 22°27'39''$; c) $c = 648{,}4$ m. **259.** a) $\alpha = 74°5'$, $\gamma = 50°37'$; b) $\alpha = 45°17'$,

$\beta = 79°40'$; c) $\alpha = 60°$, $\beta = 81°47'$; d) $b = 34$, $\alpha = 16°26'$; e) $a = 61{,}6$ m, $\beta = 48°15'22''$. **260.** 182,3 kp.

261. $F_1 = 8{,}785$ kp, $F_2 = 6{,}212$ kp. **262.** $F_2 = 20{,}8$ kp, $\beta = 33°22'$. **263.** 79°42'50''. **264.** a) $\sphericalangle ab = 83°18'$, $\sphericalangle bc = 170°26'20''$, $\sphericalangle ac = 253°44'22''$. **265.** 60,72°. **266.** 382,2 m. **267.** 42,5 m. **268.** $\alpha = 70°31'43'' = 78^g36^c51^{cc}$, $\beta = 180° - 2\alpha = 43^g26^c97^{cc}$. **269.** a) $\alpha = 76°34'50''$, $\beta = 90°$, $P = \dfrac{a+c}{2}\,b$; b) $b = 231$ m, $d = 178$ m, $\alpha = 75°13'20''$, $\beta = 48°9'55''$. **270.** $\delta = 69°25'48''$, $BD = 18{,}2$ j, $AC = 10{,}3$ j, $\beta = 50°34'12''$.

271. $d = 63$ cm, $\alpha = 44°45'37''$, $\beta = 90°$, $P = 1\,428$ cm^2. **272.** $d = 6$ cm, $\alpha = 74°8'28''$, $\gamma = 144°46'34''$, $\delta = 61°4'58''$. **273.** $P = 0{,}464\,28$ cm^2. **274.** $c = 41$ cm, $t_a = 39{,}6$ cm, $s_\alpha = 39{,}7$ cm. **276.** a) 38,615 j^3; b) $V = \dfrac{\pi}{4}\sqrt{57}$ j^3.

277. $x^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC\,.\,AD\,.\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$, kde $AC = \dfrac{a\sin(\beta_1 - \beta_2)}{\sin(\alpha_1 + \beta_1 - \beta_2)}$, $AD = \dfrac{a\sin\beta_1}{\sin(\alpha_2 + \beta_1)}$; b) 71,9 m; c) 325 m. **278.** 755 m. **279.** 84,5 m, **280.** 489,8 km/h.

281. 1 428 m. **282.** $x = 30{,}5$ m, $\varphi = 4°30'50''$. **283.** 13 km. **284.** 12 140 m. **285.** 7 420 m. **286.** $x = 537{,}1$ m, $d_1 = 614$ m, $d_2 = 591$ m, $d_3 = 633$ m. **287.** a) $a = 27{,}12$ j, $b = 12{,}12$ j, $\beta = 26°16'35''$; b) $a = 3$ j, $b = 4$ j, $c = 5$ j; c) $b = 15$ j, $c = 13$ j, $a = 14$ j, $\beta = 67°22'49''$; d) $b = 118$ j, $a = 111$ j, $\alpha = 7°46'$; e) $b = 229$, $a = 109$, $\beta = 33°23'38''$; f) $b = 23{,}278$, $\beta = 89°22'3''$. **288.** a) $b = 57{,}23$ j, $a = 92{,}95$ j, $c = 75{,}2$ j; b) $c = 42{,}76$ j, $\beta = 78°27'$, $b = 58{,}96$ j; c) $c = 59{,}42$ j, $\gamma = 107°47'23''$, $b = 97{,}56$ j; d) $b = 21{,}15$ j, $\gamma = 36°52'10''$, $c = 37{,}3$ j. **289.** a) $a = 52$, $b = 7{,}3$, $c = 57{,}7$; b) $\gamma_1 = 18°55'29''$, $\alpha_1 = 112°37'12''$, $c = 3{,}25$; $\gamma_2 = 161°4'31''$, $\alpha_2 = 10°27'47''$, $c = 16{,}52$; c) $a = 11{,}15$, $\alpha = 137°52'35''$, $\beta = 26°33'40''$. **290.** 189 m.

6. TANGENTOVÁ VĚTA

295. 350 m. **296.** a) $\alpha = 96°7'52''$, $\beta = 45°27'8''$, $c = 10{,}81$ cm; b) $\gamma = 148°49'56''$, $a = 210{,}68$ m; c) $\gamma = 39°40'13''$; $b = 164{,}55$ m. **297.** $\alpha = 45°$, $\beta \doteq 22°30'$, 3 min. **298.** 290 m, $\alpha = 59°11'25''$, $\beta = 35°44'05''$. **299.** 10 m. **300.** 1 987 m.

301. a) $a = 146{,}29$ j, $\beta = 77°47'37''$; b) $\alpha = 53°7'50''$, $\beta = 59°29'20''$; c) $\alpha = 36{,}63°$, $\gamma = 75{,}85°$, $b = 244{,}4$ m; d) $\alpha = 73°24'$, $\beta = 52°24'$, $c = 113{,}8$ m. **302.** $\left|\dfrac{c}{a}\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{7}$. **304.** $\alpha = 51°16'12''$, $\gamma = 177°54'38''$, $\delta = 65°49'6''$. **306.** 7,244 km. **307.** 75,7 m. **308.** $AB = 1\,330{,}7$ m, $AC =$

$= 1\,983{,}1$ m, $AD = 2\,389{,}5$ m. **309.** $\sin\alpha = \dfrac{a}{2r}$, $(b + c) : a = \cos\dfrac{\beta - \gamma}{2}$: $: \sin\dfrac{\alpha}{2}$, kde $b + c = 2s - a$, $\dfrac{\beta + \gamma}{2} = \mathrm{R} - \dfrac{\alpha}{2}$. **310.** $s = \sqrt{r^2 - 2\varrho r}$.

312. $b = 4{,}315$ j, $a = 7{,}07$ j, $\alpha = 78°18'4''$. **313.** $b = 120$, $c = 113$, $\alpha = 7°37'41''$. **314.** a) $c_1 = 4{,}3$ m, $\alpha_1 = 50°18'$, $\beta_1 = 99°42'$, $c_2 = 14{,}1$ m, $\alpha_2 = 13°7'$, $\gamma_2 = 150°$; b) $c_1 = 50$ m, $\alpha_1 = 27°23'$, $\beta_1 = 64°9'$, $c_2 = 28$ m, $\alpha_2 = 27°23'$, $\beta_2 = 115°51'$.

7. SFÉRICKÁ TRIGONOMETRIE

319. a) $n = 10$; b) $n = 8$. **320.** $62°30'$; $93°22'18''$; $125°22'34''$.

321. $38°19'54''$. **322.** a) $b = 37°22'30''$, $\alpha = 113°1'40''$, $c = 117°07'$; b) $b = 150°59'56''$, $c = 63°55'39''$, $\alpha = 105°44'15''$; c) $c = 74°58'54''$, $\alpha = 46°48'7''$, $\beta = 74°34'21''$; d) $a = 116°48'46''$, $b = 71°36'20''$, $c = 98°11'$; e) $b = 111°5'48''$, $\alpha = 122°28'57''$, $\beta = 107°40'29''$. **323.** a) $\beta = 46{,}995°$, $\alpha = 57{,}989°$, $c = 54{,}333°$; b) $a = 127°4{,}53'$, $\alpha = 120°3{,}83'$, $\beta = 56°11{,}93'$; c) $b_1 = 67°48{,}28'$, $c_1 = 75°27{,}23'$, $\beta_1 = 73°3{,}05'$, $b_2 = 112°11{,}72'$, $c_2 = 104°32{,}77'$, $\beta_2 = 106°56{,}95'$. **324.** a) $\alpha = 102{,}56°$, $\beta = 62{,}205°$; b) $a = 87{,}048°$, $c = 54{,}304°$; c) $a = 139{,}093°$, $\alpha = 146{,}06°$. **326.** $P = 86{,}944$ m^2. **327.** $a = 46°10'$ ($a = 5{,}64$ m). **328.** a) $P = 7{,}67$ cm^2; b) $P = 48{,}35$ cm^2; c) $P = 12$ cm^2. **329.** $\alpha = 160°$, $a = 56°51'44''$. **330.** $c = 86°19'13''$ (150,7 cm).

331. a) $1{,}747\,7r^2$; b) $0{,}527\,94r^2$; c) $0{,}805\,76r^2$. **332.** a) $P = 0{,}527\,97r^2$; b) $P = 2{,}245\,95r^2$. **333.** a) $a = 50°35'40''$, $\beta = 88°7'53''$; b) $b_1 = 42°54'16''$, $b_2 = 2\mathrm{R} - b_1$; $\beta_1 = 33°50'$, $\beta_2 = 2\mathrm{R} - \beta_1$; c) $b = 63°58'9''$, $\alpha = 135°1'$. **334.** a) $\alpha = 130°$, $\beta = 36°54'48''$, $\gamma = 59°4'26''$; b) $b = 8°56'$, $\beta = 8°41'3''$, $\gamma = 103°29'23''$; c) $a = 133°20'$, $b = 122°45'$, $\gamma = 125°40'$; d) $b = 59°56'10''$, $\alpha = 130°$, $\gamma = 67°12'$; e) $a = 129°29'33''$, $b = 106°56'57''$, $\beta = 112°11'48''$. **335.** $b = 127°45'41''$, $\alpha = 129°13'53''$, $\gamma = 116°33'54''$; b) $a = 52°55'46''$, $b = 81°57'22''$, $\gamma = 96°7'43''$; c) $\alpha = 100°46'26''$, $\beta = 47°45'56''$, $\gamma = 82°46'53''$. **336.** $\varrho \doteq 18°$. **337.** a) $\alpha = 90°$, $r = 54°44'7''$, $\varrho = 35°15'53''$; b) $a = 109°28'16''$, $r = 70°31'45''$, $\varrho = 54°44'7''$. **338.** a) $0{,}287\,6r^2$; b) $0{,}052\,4r^2$; c) $4{,}164\,5r^2$. **339.** $\lambda_1 = 75°31'$ záp. délky, $\lambda_2 = 104°29'$ východní délky. **340.** 5 731 km.

341. $35°8'7''$. **342.** $48°16'52''$. **343.** Asi 6 779 km. **344.** $\psi = 33°41'24''$, $\varphi = 73°53'52''$.

347. a) $\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$, $a \neq 0$; b) $\operatorname{tg}\alpha = \pm m$, $m \neq 0$; c) $\sin\alpha = \pm\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$; d) $\sin\alpha = \pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$; e) $\sin\alpha = \pm\frac{b}{a}$, $|a| \neq |b|$, $a \neq 0$; f) $n \neq -1$, $n \neq 0$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{(n-1)\sqrt{n}}{2n}$. **348.** 36°52,2′. **349.** $3\frac{3}{7}$. **350.** a) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$; b) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$; c) 45°, 15°.

351. a) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$, $\alpha \neq k\pi$; b) $\frac{1}{\cos\alpha}$, $\alpha \neq \frac{1}{2}k\pi$; c) $\operatorname{cotg}^4\alpha$, $\alpha \neq k\,.\,\frac{\pi}{2}$ (k je vždy celé číslo); d) 0, $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$. **352.** 27,8 cm. **353.** 14,8 cm, 17,2 cm. **354.** 44°46′. **355.** 18,5 cm. **356.** 28,7 mm, 70 mm. **357.** 259,8 kp. **358.** 6°49′. **359.** 11,7 mm. **360.** $D = 2\,500$ kp, $Z = 4\,060$ kp.

361. 7 cm, 8,5 cm. **362.** 520 kp, 776 kp. **363.** 80,9 mm, 110,9 mm. **364.** 23,4 mm. **365.** a) $r = 135{,}7$ cm; $r' = 5{,}539$ cm; b) $r = 27{,}32$ cm, $r' = 7{,}33$ cm. **366.** a), c) +; b), d) −. **367.** 10π/s. **368.** $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{9}$, $4\frac{4}{9}\pi$. **369.** a) 0,761 7; b) $\cos\frac{1}{2} = \cos 57{,}3°\,.\,\frac{1}{2} = \cos 28{,}65° = \cos 28°39' = 0{,}877\,59$; c) $\operatorname{tg}\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{tg} 57{,}3°\,.\,0{,}707 = \operatorname{tg} 40°31' = 0{,}854\,6$; d) 1,830 33; e) 0,999 94, f) 1,115 63. **370.** a), b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; c) $\frac{\sqrt{15}}{4}$; d) $\frac{4}{5}$; e) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; f) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

371. a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{5}$; c) $-\frac{\pi}{2}$; d) $\frac{\pi}{4}$. **372.** a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\arccos\frac{2(\sqrt{42}-1)}{15}$; c) $\arcsin\frac{4\sqrt{6}-\sqrt{5}}{15}$; d) $\arccos\frac{1-8\sqrt{3}}{15}$; e) $\arcsin\frac{3-4\sqrt{15}}{20}$; f) $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$; g) $\operatorname{arctg}\frac{3}{11}$. **375.** a) $+\frac{5}{13}$ pro $0 < \alpha < 90°$, $-\frac{5}{13}$ pro $270° < \alpha < 360°$, $\pm\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{5}{12}$; b) $\frac{+\sqrt{10}}{10}$, $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **376.** a) $\frac{12-10\sqrt{2}}{39}$; b) $2\frac{5}{36}$, $\frac{13}{84}$. **377.** a) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; c) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$. **378.** a) $-\frac{6+\sqrt{6}}{6}$; b) 6; c) 0; d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **379.** a) 3; b) $-\frac{m}{n}\,.\,\sqrt{\frac{m}{m+n}}$; c) $\frac{n^2-1}{2}$, $\frac{n}{2}(3-n^2)$; d) $\pm\frac{a^2-b^2}{ab}$, $a \neq b \neq 0$. **383.** a) $1 - n = m^2$; b)

$-1 \leqq n \leqq 1, (2m^2 - a^2 - b^2 - 2abn)^2 = (b^2 - a^2)^2 \,.\, (1 - n^2)$; c) $(1 - b)(1 + 2b)^2 = 2a^2$; d) $b(a^2 - 1)^3 + 6(a^2 - 1)^2 - 8 = 0$; e) $a^2 + b^2 = 2(1 + c)$; f) $ab = (b - a)\operatorname{tg} c$, $a \neq b$. **385.** $\dfrac{\sin \dfrac{na}{2}}{n \sin \dfrac{a}{2}}$. **387.** a) 30, $\dfrac{1}{2}$, 2, $\dfrac{\pi}{6}$; b) 15, $\dfrac{1}{3}$, 3, 0; c) 1,8; 3,8; $\dfrac{1}{3{,}8}$; 120°; d) 4,3, $\dfrac{\pi}{3{,}8}$, $\dfrac{3{,}8}{\pi}$, 355°14′. **388.** a) $3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; b) $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$; c) $\dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

391. a) $x = k \,.\, 90°$, $x = 22°47' + k \,.\, 90°$; b) $x = \pm 30° + k \,.\, 90°$; c) $30° + k \,.\, 360°$; d) $\pm \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$; e) $\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$; f) je-li $\operatorname{tg} a = 0$, pak je identita, je-li $\operatorname{tg} a \neq 0$, potom $x = \dfrac{a}{2} + (2k + 1) \,.\, \dfrac{\pi}{4}$, kde k je číslo celé. **392.** a) $80°3'7'' + k \,.\, 180°$, $16°37'13'' + k \,.\, 180°$; b) $x = 22°30' + k \,.\, 90°$, $58°16'57'' + k \,.\, 90°$; c) $x = k\pi$; $\pm 60° + k \,.\, 180°$; d) $x = 43°36'10'' + k \,.\, 360°$, $216°52'12'' + k \,.\, 360°$; e) $x = 36°12'21'' + k \,.\, 180°$, $110°6'14'' + k \,.\, 180°$; f) $x_1 = 45° + k \,.\, 180°$, $x_2 = 123°41'24'' + k \,.\, 180°$. **393.** a) $\left((4k + 1)\dfrac{\pi}{2} + 1\right) \,.\, \dfrac{1}{9}$, $(4k + 1)\dfrac{\pi}{18} - \dfrac{5}{9}$; b) $\dfrac{2k + 1}{4} - \dfrac{4}{15}$; c) k; d) $k\pi$; e) každé číslo $x \neq k + \dfrac{1}{2}$. **394.** a) $(30°, 90°, 150°) + k \,.\, 360°$; b) $(90°, 19°28', 160°32') + k \,.\, 360°$; c) anulujte a rozložte na součin. $2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$, $k\pi + \dfrac{\pi}{4}$; d) $\left(2k - \dfrac{1}{2}\right)\pi$, $\left(k \pm \dfrac{1}{3}\right)\pi$; e) $(45°, 63°26') + k \,.\, 180°$. **395.** a) $\dfrac{4k - 1}{4}\pi$; b) $\dfrac{4k + 1}{8}\pi$; c) $2k\pi + \dfrac{\pi}{12}$, $\left(2k + \dfrac{7}{12}\right)\pi$, $2k\pi + \dfrac{11}{12}\pi$; d) $k\pi$; e) $k\pi + \dfrac{\pi}{4}$; f) $k \,.\, 180° \pm 60°$; g) $180° \,.\, k + 23°32'$, $k \,.\, 180° + 66°28'$; h) $k \,.\, 180° - 45°$, $k \,.\, 180° \pm 60°$. **396.** a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; c) 1; d) 1; 3; e) 2; 3; f) 0; $\dfrac{1}{2}$. **397.** $2 \operatorname{arctg} \dfrac{b^2}{P}$. **398.** $\alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{2v}{a - c}$. **399.** $\arcsin \dfrac{4r^2}{P}$. **400.** $\alpha = \arccos \dfrac{\sqrt{2S\sqrt{3}}}{3m}$.

401. a) $x \in \left(2k\pi - \dfrac{\pi}{3}, 2k\pi + \dfrac{\pi}{3}\right)$; b) $x > 1$ a $\dfrac{1}{2k + 1} < x < \dfrac{1}{2k}$, $k \neq$

$\neq 0$; c) $\dfrac{4k-1}{4k} < x < \dfrac{4k+2}{4k+1}$; d) $\left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup$ $\cup \left(2k\pi - \dfrac{\pi}{2}, 2k\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(2k\pi + \dfrac{2}{3}\pi, 2k\pi + \pi\right) \cup \left(2k\pi + \pi, 2k\pi + \right.$ $\left. + \dfrac{4}{3}\pi\right)$; e) $\left(\left(2k + \dfrac{1}{2}\right)\pi, (2k+1)\pi\right) \cup \left(2k\pi + \dfrac{3}{2}\pi, 2k\pi + 2\pi\right)$; f) $\left(2k\pi, 2k\pi + \dfrac{\pi}{5}\right) \cup \left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}, 2k\pi + \dfrac{3}{5}\pi\right) \cup \left(2k\pi + \pi, 2k\pi + \dfrac{3}{2}\pi\right) \cup$ $\cup \left(2k\pi + \dfrac{7}{5}\pi, 2k\pi + \dfrac{9}{5}\pi\right)$, k celé číslo. **406.** a) $\alpha = 45°16'$, $\beta = 79°40'$; b) $99°39'$, $43°33'$; c) $28°4'$, $126°52'$. **407.** $420\ \mathrm{m}^2$. **409.** $b = 25$ m, $c = 145$ m, $\alpha = 96{,}744°$; b) $a = 70{,}06$ cm, $b = 50{,}04$ cm, $c = 29{,}35$ cm, $\alpha = 123{,}922°$; c) $a = 20{,}29$ m, $b = 16{,}23$ m, $c = 15{,}20$ m, $\alpha = 80{,}28°$, $\gamma = 47{,}67°$; d) $a = 194$ m, $b = 145$ m, $\alpha = 82{,}9°$; e) $a = 75$ m, $b = 29$ m, $\beta = 16{,}262°$; f) $a = 70$ cm, $c = 85$ cm, $\beta = 36°28'39''$. **410.** a) $a = 221$ m, $b = 149$ m, $c = 222$ m, $P = 15\,542\ \mathrm{m}^2$, $r = 117{,}6$ m, $\varrho = 52{,}6$ m, $\gamma = 78^{g}57^{c}50^{cc}$; b) $c = 480$ m, $v_c = 220$ m, $\alpha = 93^{g}95^{c}$, $\beta = 28^{g}45^{c}$, $\gamma = 77^{g}60^{c}$, $r = 225{,}6$ m, $\varrho = 87{,}27$ m, $P = 52\,800\ \mathrm{m}^2$; c) $a = 109$ m, $b = 61$ m, $\gamma = 74{,}3^{g}$, $r = 55{,}4$ m, $\varrho = 22{,}5$ m, $P = 3\,062\ \mathrm{m}^2$; d) $a = 145$ m, $b = 25$ m, $v_c = 24$ m, $\alpha = 81^{g}93^{g}$, $\beta = 10^{g}58^{c}$, $r = 75{,}5$ m, $\varrho = 11{,}25$ m, $P = 1\,800\ \mathrm{m}^2$; e) $a = 37$ m, $b = 13$ m, $r = 20$ m, $\varrho = 5{,}33$ m, $P = 240\ \mathrm{m}^2$, $\alpha = 74^{g}87^{c}$, $\beta = 21^{g}3^{c}$.

411. a) $b = 113$, $c = 120$, $P = 900$; b) $a = 208$, $c = 269$, $\beta = 23°9'30''$; c) $b = 145$, $\alpha = 46°23'50''$; d) $c = 119$, $a = 156$, $\gamma = 46°23'50''$ e) $c = 195$, $\beta = 75°45'$, $P = 36\,666$; f) $a = 569$, $\alpha = 55°17'31''$, $P = 78\,540$; g) $a_1 = 17$; $\alpha_1 = 7°37'40''$; $a_2 = 96$, $\alpha_2 = 48°31'$. **412.** a) $c = 371{,}3$, $\alpha = 49°29'50''$; b) $a = 15{,}47$, $\beta = 49°25'49''$, $P = 134{,}43$; c) $b = 412{,}2$, $c = 371{,}3$, $\alpha = 49°29'50''$; d) $a = 330$, $\beta = 71°42'42''$, $c = 371{,}3$; e) $c = 22{,}88$, $\alpha = 42°30'44''$, $P = 134{,}43$; f) $b = 1{,}275$, $\alpha = 88°25'36''$, $P = 0{,}036\,0$; g) $c = 22{,}88$, $\alpha = 42°30'44'' = 47^{g}5^{c}6^{cc}$, $P = 134{,}43$; h) $a_1 = 17$, $\gamma_1 = 110°27'37''$, $a_2 = 96$, $\gamma_2 = 69{,}52°$. **413.** a) $a = 1{,}264\,3$, $c = 1$; b) $c = 1$; c) $b = 5$, $c = 3$, $\beta = 90°$; d) $a_1 = 8\sqrt{3}$, $b_1 = 16$, $c_1 = 8$; $a_2 = b_2 = \dfrac{16\sqrt{13}}{13} = \dfrac{c_2}{2}$. **414.** 124,4 kp nebo 39,6 kp. **415.** 241 kp, 106 kp. **416.** $126°52'$, $96°44'$, $136°24'$. **417.** 12,4 m. **418.** Úloha není dostatečně určena. Řešte ji, je-li dán ještě úhel $DCB = 70^{g}20^{c}10^{cc}$, $x = 16{,}9$ m. **419.** a) $AC = 756$ m; b) 297 m. **420.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\dfrac{\alpha}{2}}\ \mathrm{j}^3$.

421. $V = \frac{1}{3} a^3 \sin^2 \alpha \, . \operatorname{tg} \beta \text{j}^3$. **422.** $S = 4R^2 \sin 2\alpha \text{j}^2$, $S = 2\,332 \text{ dm}^2$. **423.** $V = \frac{8\pi}{27} \cdot \frac{a^2 c^2 \sin^2 \beta}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta}}$, $V = 2\,172 \text{ cm}^3$. **424.** $S = \frac{2\pi a^2 \sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \text{j}^2$. **425.** $V = \frac{\pi r^3 m \operatorname{cotg} \alpha}{4n^2 \cos \alpha} \cdot (n + \sqrt{n^2 - 2nm \sec \alpha})$.

426. $V = \frac{4}{3} r^3 \cdot \frac{\left(\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + 1\right)^2}{\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} - 1} \text{j}^3$. **427.** $a = 77°52'10''$; b) $\alpha = 78°27'$. **428.** $P = 2\,210{,}4 \text{ j}^2$.

XVI. STEREOMETRIE

1. PŘÍMKY A ROVINY V PROSTORU, VZÁJEMNÁ POLOHA

2. S přímkou VB je rovnoběžná přímka DU; různoběžné jsou s ní přímky VD, VA, VC, CB, AB, UB; mimoběžné jsou s ní přímky DC, AD, AU, CU. **3.** a) 6; mimoběžnou polohu mají přímky AC, $B'D'$; AD', CB'; CD', AB'; b) 12; AC, AB'; AC, AD'; AC, CD'; AC, CB'. **5.** Všechny přímky jdoucí bodem S a protínající přímku PN vyplňují rovinu ϱ; určíme průsečnici p rovin ϱ a π, která prochází bodem P. Polopřímka PN', kde N' je průsečík přímky SN s rovinou π, je vrženým stínem polopřímky PN na π. **7.** b) Různoběžnou, mají-li společný bod P, nebo mimoběžnou (ostatní). **8.** Přímky p, q jsou buď rovnoběžné nebo mimoběžné; polohu různoběžnou mít nemohou, neboť jejich společný bod by patřil rovině ϱ i σ, což je ve sporu s předpokladem. **9.** Přímky p, q mohou být různoběžné, mají-li společný bod na průsečnici s obou rovin, rovnoběžné, jsou-li rovnoběžné s přímkou s a mimoběžné, protínají-li přímku s ve dvou různých bodech, nebo jedna z nich přímku s protíná a druhá je s přímkou s rovnoběžná.

12. b) $P = \frac{a^2}{16}\sqrt{3}$. **14.** Přímka $VD \parallel MS$, kde S je střed podstavy jehlanu. **15.** V rovině ϱ leží přímka BC, v rovině σ přímka AD, přičemž $BC \parallel AD$; průsečnice p obou rovin musí být s těmito přímkami rovnoběžná. **16.** $p \equiv SB'$, kde S je střed dolní podstavy krychle. **17.** Jako průsečnici rovin $\varrho \equiv (ma)$ a $\sigma \equiv (mb)$. Úloha není řešitelná, je-li tato průsečnice s jednou mimoběžkou rovnoběžná. **18.** a) Příčka $q \equiv A'B'$; b) příčku p nelze sestrojit, neboť $p \parallel A'B'$. **19.** Přímka p nesmí být rovnoběžná s žádnou z daných mimoběžek. **20.** $p \equiv DD'$. **21.** Přímka p je průsečnice rovin $\sigma \equiv A_1B_1C_1$ a $\varrho \equiv A_2B_2C_2$. **25.** Řezem je rovnoramenný lichoběžník o základnách $z_1 = a\sqrt{2}$, $z_2 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ a ramenech $r_1 = r_2 = \frac{a}{2}\sqrt{5}$. Obvod řezu $o \doteq 175$ mm. **27.** Řez $AMNP$ je rovnoběžník; určete skutečnou velikost úseček AM, MN, AN.

33. Vrcholem řezu M veďte přímku q rovnoběžnou s přímkou $C'P$; potom $\varrho \equiv (qN)$. **34.** Řez $ABMN$ je lichoběžník, v němž $AB \parallel MN$; roviny ADV, BCV, ABM jsou navzájem různoběžné a mají společný bod, který leží na průsečnících všech tří rovin. **35.** Sestrojte napřed průsečnici roviny ϱ s rovinou $ABCD$. **39.** K sestrojení průsečíku přímky p s povrchem čtyřstěnu použijte řezu tohoto čtyřstěnu s rovinou $\varrho \equiv MTV$. **40.** b) $\frac{a^2}{2}\sqrt{5}$.

2. PŘÍMKY A ROVINY K SOBĚ KOLMÉ. SOUMĚRNOST PODLE ROVINY

41. Kdyby jich existovalo více, měl by jehlan alespoň dvě pobočné hrany rovnoběžné, což je vyloučeno. **42.** $AA' \perp ABCD$ a tedy také $AA' \perp AC$; $\overline{AC} = \overline{AA'} \cdot \sqrt{2}$, tedy $\overline{AC} \neq \overline{AA'}$. **43.** Trojúhelník MNC možno sestrojit. $MN = \frac{b}{2}$, MC je úhlopříčkou obdélníka o rozměrech a, $\frac{a}{2}$ a CN je těžnicí rovnoramenného trojúhelníka ACV. **44.** $v = \dfrac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. **45.** Trojúhelník MBD' má strany $MB = a\sqrt{2}$, $BD' = a\sqrt{3}$, $D'M = a\sqrt{5}$. **46.** $d = \frac{a}{4}\sqrt{5}$. **47.** $d = \frac{3}{4}a$. **48.** $d = \frac{2}{3}a$. **50.** Kolmice k je rovnoběžná s úhlopříčkou $A'D$ krychle; vzdálenost $d = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

51. $AB = \sqrt{d_1^2 + d_1^2 + m^2}$. **52.** $MA = MB = MC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 4v^2}$. **53.** $BR = \frac{n}{m - n}\sqrt{(m - n)^2 + d_1^2}$. **54.** $b = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. **56.** Např. AA' a CD; osou je přímka AD. **57.** Nechť hrana BC čtyřstěnu má délku a a její střed je D. Počítáte-li délku úsečky DP na základě čísla a, zjistíte, že $DP = \frac{a}{2}$; $\sphericalangle BPD = 45°$, $\sphericalangle BPC = 90°$. **58.** Je-li $p \perp \varrho$, potom každá přímka roviny ϱ jdoucí bodem M je kolmá k přímce p; není-li přímka p kolmá k rovině ϱ, existuje jediná přímka jdoucí bodem M kolmá k přímce p a ležící v rovině ϱ. Tato přímka je kolmá k průsečnici rovin ϱ a σ, kde σ prochází přímkou p kolmo k rovině ϱ. **59.** Leží-li i druhé rameno v průmětně, je to zřejmé. Leží-li rameno AV v průmětně a BV neleží v průmětně, je $VB \perp VA$, $BB_1 \perp VA$ a tedy i rovina $VBB_1 \perp VA$; odtud plyne vztah $VB_1 = VA$. Zobecnění: Průmětem pravého úhlu je pravý úhel tehdy, je-li alespoň jedno jeho rameno s průmětnou rovnoběžné a druhé rameno není k průmětně kolmé. **60.** Např. průměty mimoběžek $A'C'$, $B'D$ jsou různoběžné, průměty mimoběžek AD', CB' jsou rovnoběžné a průměty mimoběžek AA' a $B'D$ tvoří bod a přímka. **64.** a) Rovina souměrnosti úsečky AB; b) přímka kolmá k rovině trojúhelníka ABC, která prochází středem S kružnice trojúhelníku opsané. **65.** Vyhovují body M, N, z nichž M je středem úsečky $A'B'$ a N středem úsečky DC. **66.** Má čtyři roviny souměrnosti, z nichž každá prochází vrcholem V a obsahuje jednu z úhlopříček nebo středních příček podstavy jehlanu. **67.** Jsou to úhlopříčné řezy krychle a roviny půlící rovnoběžné hrany krychle. **68.** Jsou-li mimoběžky prostorově kolmé, existují dvě roviny souměrnosti; každá z nich obsahuje jednu mimoběžku a je k druhé mimoběžce kolmá. Nejsou-li prostorově kolmé, nemají roviny souměrnosti. **69.** Od bodu P mají stejnou vzdálenost koncové body každé tětivy kružnice k, která je kolmá k přímce SP_1, kde P_1 je kolmý průmět bodu P na rovinu π. b) Průsečíky přímky SP_1 s kružnicí k. **70.** Není-li přímka p k rovině ϱ kolmá, existuje jediná rovina souměrnosti útvaru U složeného z přímky p a roviny ϱ; je to rovina σ obsahující přímku p a kolmá k rovině ϱ. Je-li $p \perp \varrho$, má útvar U neomezený počet rovin souměrnosti; jsou to všechny roviny obsahující přímku p i rovina ϱ.

3. ODCHYLKA PŘÍMEK A ROVIN, ODCHYLKA PŘÍMKY OD ROVINY

71. 41°24'28". **72.** 54°44'. **73.** 70°32'. **74.** 71°34'. **75.** 75°. **76.** Sestrojí se rovnoramenný trojúhelník o základně délky a a ramenech délky $\frac{a}{2}\sqrt{3}$; odchylka α leží proti základně a měří 70°32'. **77.** $\triangle ASV \cong \triangle BSV \cong \triangle CSV \cong = \triangle DSV$. **78.** Sestrojí se pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají délky $2a$, $\frac{a}{2}\sqrt{2}$; odchylka leží proti odvěsně délky $2a$ a měří 70°32'. **80.** 33°51'15".

81. $\dfrac{abm^2}{\cos\alpha}$. **82.** $\alpha = 45°$. **83.** Kolmice k_1, k_2 určují rovinu kolmou k průsečnici p; tato protne rovinu ϱ v přímce k_1' a rovinu σ v přímce k_2', přičemž $k_1' \perp k_1$, $k_2' \perp k_2$. **85.** a) $c^2 = a^2 + b^2$; b) o délku $d = c(\sqrt{3} - 1)$. **86.** 45°. **87.** $\alpha = 45°$. **88.** α je úhel $C'BP$ pravoúhlého trojúhelníka $PC'B$, kde P je pata kolmice vedené vrcholem C' na úhlopříčku CD'. **90.** $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{r}{d}$, $\alpha = 60°$. Úloha není řešitelná pro $d < r$; je-li $d = r$, existuje jediná tečná rovina válce. Je-li $d > r$, existují dvě tečné roviny, jejichž průsečnice jde bodem M a je rovnoběžná s osou válce.

92. Úsek $BB' = u = \dfrac{1}{2}a\sqrt{3}\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **93.** $CC' = a\sqrt{3}\,.\,\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

4. HRANOL A VÁLEC

94. 50,42 cm. **95.** $t = \dfrac{M}{6a^2\varrho}$. **96.** $8r^2$; $\dfrac{8r^3\sqrt{3}}{9}$. **97.** $V = \dfrac{S \cdot \sqrt{6S}}{36}$. **99.** 217,44 kg. **100.** Za 10 h.

101. $S = 288\ \text{cm}^2$, $V = 288\ \text{cm}^3$. **102.** $V = 3\ \text{dm}^3$. **103.** 24 dm^3. **104.** 32 dm^3. **105.** 5 cm, 7 cm. **106.** 210 m^3. **107.** $\left(\dfrac{z_1 + z_2}{2} \cdot v \cdot d\right) \text{m}^3$. **108.** Jeho výška $v =$ $= 30$ cm. **109.** $a = 9$ cm, $b = 12$ cm, $c = 15$ cm, $v = 10$ cm, $V = 540\ \text{cm}^3$. **110.** $V = \dfrac{27}{2}\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

111. $207\dfrac{4}{5}$ hl. **114.** $2u^2\sqrt{2} \cdot \text{tg}\,\alpha \cos(45° - \beta)$. **116.** $3d^2 \sin 2\alpha$. **117.** $\dfrac{av^2 \sin\beta}{\sin\alpha} \doteq 1\,343\ \text{cm}^3$. **118.** $P \sin\alpha\sqrt{2P\cos\alpha\ \sin 60°}$. **119.** $1\dfrac{1}{2}\ \text{dm}^3$. **120.** 615 cm^3 (zaokrouhleno).

121. $7\dfrac{1}{2}$ mm (zaokrouhleno). **122.** $2\pi(s + t)(t + d)$. **123.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12\pi r^2}$. **124.** Poloměr kruhu $x = \sqrt{2r(r + v)}$; sestrojení x pomocí Eukleidovy věty. **125.** Výšky se liší o r. **126.** 26: 25: 30. **127.** $\dfrac{r^3}{6}(2\pi - 3\sqrt{3})$; $\dfrac{r^3}{6}(10\pi + 3\sqrt{3})$. **129.** $4\,860\pi\ \text{cm}^3$. **130.** $100\left(1 - \dfrac{4\sqrt{2}}{3\pi}\right)$.

131. 1,178 litrů. **132.** 72°20′35″. **133.** $\dfrac{\pi a^2}{\sin^2 18°}$; $\dfrac{\pi a^3}{4\sin^3 18°}$.

5. JEHLAN A KUŽEL

134. $2S(3 - \sqrt{3})$. **135.** $8\dfrac{1}{4}\ \text{m}^3$ (zaokrouhleno). **136.** 30 cm. **137.** $\dfrac{a^3}{6}$. **138.** $a^2 \cdot \sqrt{3}$; $\dfrac{a^3}{6}$. **139.** $\dfrac{a^3}{3}$. **140.** $\dfrac{u^2}{2}(1 + \sqrt{7})$.

141. $\dfrac{abc}{12} = 1\ \text{dm}^3$. **142.** $31\dfrac{1}{4}\ \text{cm}^3$. **143.** $V = \dfrac{5}{12}a^3 \sin 2\alpha \cos\alpha \sin 72°$. **144.** $\dfrac{a^3}{8}\,\text{tg}\,\alpha$. **145.** 314,3 dm^3 (zaokrouhleno). **147.** $V = \dfrac{4}{3}v^3 \cotg\alpha \cdot \cotg\beta$. **148.** $\dfrac{1}{6}a^3 \sin\alpha\ \text{tg}\,\beta \doteq 212{,}4\ \text{cm}^3$. **149.** $12d^2 \sin\beta$. **150.** $\dfrac{4r^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} \doteq$ $\doteq 4\,379\ \text{cm}^2$.

151. $\frac{2}{3}a^3\cos^3\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta$. **152.** $172\frac{1}{2}$ g (zaokrouhleno). **153.** πv^2; $\frac{1}{9}\pi v^3$. **154.** $S = 3\sqrt[3]{3\pi V^2}$. **155.** $\frac{75\pi}{8}$ cm³. **156.** $\frac{\pi a^2}{4}(\sqrt{5}+1)$; $\frac{\pi a^3}{12}$. **157.** $2\sqrt{3}:\pi\sqrt{2}$. **158.** $\frac{9\pi\sqrt{2}}{4}$ cm³. **159.** $V = 100\pi\text{cm}^3$. **160.** 24π cm²; 12π cm³.

161. 8 : 3. **162.** Vztah plyne z úměry $r : \varrho = v : (v - u)$. **165.** 4 358 cm³. **167.** $\frac{1}{3}\pi P \,.\, \sqrt{P \,.\, \mathrm{tg}\,\beta}$. **168.** $\dfrac{2\pi r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **169.** $\frac{1}{3}\pi s^3\cos^2\alpha\,\sin\alpha$; $2\pi s^2 \,.\, \cos\alpha\,\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **170.** $\frac{\pi r^3}{3}\cdot\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

171. $\frac{2}{3}\pi P\sqrt{P\sin 2\alpha}$. **172.** $\frac{\pi r^3}{3}\,\frac{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}{\cos\varphi_1\,\cos\varphi_2}$; $r^2\cdot\frac{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}{\cos\varphi_1\,\cos\varphi_2}$. **173.** $\frac{1}{24}\cdot\dfrac{\pi a^3\,\mathrm{cotg}\,\beta}{\sin^3\frac{\alpha}{2}} \doteq 480{,}6$ dm³.

6. KOMOLÝ JEHLAN A KOMOLÝ KUŽEL

174. a) 96,2 g; b) $2\frac{3}{20}$ litru (zaokrouhleno). **175.** $\frac{1}{6}\sqrt{(2b)^2 - 2(a_1 - a_2)^2}\,.\,(a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2)$. **176.** $1\frac{1}{2}$ m³. **177.** $86\frac{1}{2}$ q. **178.** $\frac{1}{12}(a^3 - b^3)\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **179.** $\left(\frac{\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}}{2}\right)^2$. **180.** $x = \dfrac{v\sqrt{P_2}(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2})}{P_1 - P_2}$.

181. $\frac{8}{27}V_0$; $\frac{19}{27}V_0$. **182.** $V = \frac{7a^3\sqrt{2}}{48}$. **183.** 12 dm. **184.** 27 cm, 45 cm, 120°. **186.** $\frac{\varrho a^3}{192\,000}(192 - 7\pi)$ kg. **187.** 20 litrů; podle přibližného vzorce asi $21\frac{1}{2}$ litrů. **188.** $\frac{\pi a^3}{12}(3 + \sqrt{2})$. **189.** 84π cm³. **190.** $v = 24$ cm.

191. $4 : \pi$. **192.** $\frac{75\sqrt{3}}{\pi} \doteq 41\frac{1}{3}$ %. **193.** $\frac{2}{3}\pi\sqrt{r_1r_2}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$. **194.** $7 : 4\sqrt{3}$.

7. PLOCHA KULOVÁ A KOULE, JEJICH ČÁSTI

197. $r = 6$ cm. **198.** $4\pi \cdot \sqrt[3]{(r_1^3 + r_2^3)^2}$. **199.** $r \doteq 5{,}35$ cm. **200.** $132\frac{1}{2}$ g (zaokrouhleno).

201. 264 kg. **202.** $\dfrac{S_1}{S_2} \doteq \dfrac{27}{2}$. **203.** 6 mm (zaokrouhleno). **204.** $4\frac{1}{2}$ cm. **205.** $\frac{1}{6}\pi r^2 (3d + 2r)$. **206.** $\sqrt{6} : \sqrt{\pi}$. **207.** 4 : 6 : 9. **209.** 4 : 9. **210.** $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{\pi\sqrt{3} - 2} \doteq$ $\doteq 1{,}581$ m^3.

211. $\dfrac{4r}{3} = 8$ dm. **213.** $\dfrac{S_1 \cdot S_2}{4\pi r^2}$. **214.** Ve vzdálenosti $d = 8$ cm. **215.** Je větší o πv^2, kde v je výška vrchlíku. **216.** $\dfrac{d}{r} = 3$. **217.** $\frac{4}{3}\pi d^3 \sin^3 \dfrac{\varphi}{2}$. **218.** $\dfrac{2\pi r^2 d}{r + d} \doteq 2\pi r d$. **219.** 5 km (zaokrouhleno). **220.** 120°.

221. $\dfrac{r}{4}$. **222.** 63π cm^2. **223.** $\frac{1}{4}\pi d^2 v_1 + \frac{1}{2}\pi \varrho^2 v_2 + \frac{1}{6}\pi v_2^3$; $\dfrac{\varrho^2 + v_2^2}{2v_2}$. **226.** 7 : 27. **227.** $r \doteq 12\frac{1}{2}$ cm. **228.** 3,35 litru (zaokrouhleno). **229.** 5 litrů. **230.** $\dfrac{5}{12}\pi r^3$.

231. 64,6 %. **232.** 230 cm^3 (zaokrouhleno). **233.** $\dfrac{11}{16}$ objemu koule. **234.** $r = 6$ cm. **235.** $\frac{1}{2}\pi r^2(2 + \sqrt{3})$.

8. OPAKOVÁNÍ

237. Označíme-li středy stran prostorového čtyřúhelníka $ABCD$ po řadě X, Y, Z, U, je $XY \parallel ZU \parallel AC$, přičemž $XY = ZU = \frac{1}{2} AC$. **238.** $\dfrac{a^2}{2}\sqrt{2}$. **239.** Řez je rovnoramenný lichoběžník $ACQP$, jehož základny jsou $z_1 = AC = a\sqrt{2}$, $z_2 = QP = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}$ a ramena $AP = CQ = \dfrac{a}{2}\sqrt{5}$. Obsah řezu je $P = \dfrac{9a^2}{8}$. **240.** Řez je čtverec, jehož vrcholy leží ve středech stran čtverce, ve kterém protíná rovina ϱ krychli. Obsah řezu $P = \dfrac{a^2}{2}$.

241. Řez je kosočtverec o obsahu $P = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$. Trojúhelník $AA'S$ je rovnoramenný, takže $MS \perp AA'$; trojúhelník BMD' je také rovnoramenný, takže $MS \perp BD'$. **242.** K sestrojení pravoúhlého průmětu spodní části odseknutého jehlanu užijte sklopeného trojúhelníka ADV. **243.** Bodem M veďte přímky rovnoběžné s přímkami DB a LS. **244.** Přímka m je rovnoběžná s průsečnicí s rovin ABV a CDV. Rovina $\varrho \equiv m \,.\, s$ je vrcholová a protíná jehlan v trojúhelníku, jehož obvod má s přímkou m dva společné body; tyto body jsou průsečíky přímky m s povrchem jehlanu. **245.** $AM = a\sqrt{2}$. **246.** Obraz souměrně sdruženého bodu k bodu A' podle roviny $CC'P$ leží na rovnoběžce s přímkou BM, kde M je bod hrany AD a platí $DM = 2AM$. **247.** 9. **248.** Odchylka $\alpha = 73°40'30''$. **249.** $\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{v-d}{q}\right|$; pro $v = d$ je průsečnice p rovnoběžná s rovinou podstavy kužele a $\alpha = 0°$. Úloha nemá řešení, je-li $\left|\frac{v-d}{q}\right| \geqq \frac{v}{r}$. **250.** $184\ \mathrm{cm}^2$; $120\ \mathrm{cm}^3$.

251. $1{,}137\ \mathrm{m}^3$; $6{,}56\ \mathrm{m}^2$. **252.** $\frac{3r^3\sqrt{3}}{2}$. **253.** $\frac{v}{4}(6a^2\sqrt{3} - \pi d^2)$. **254.** $80\pi\ \mathrm{cm}^2$; $40\pi\sqrt{5}\ \mathrm{cm}^3$. **255.** $\frac{1}{8}\pi d^3 \sin 2\alpha \cos\beta \doteq 114\frac{1}{2}\ \mathrm{dm}^3$. **257.** $\frac{2v^3 \operatorname{cotg}^2\alpha}{3}$; $2v^2 \operatorname{cotg}\alpha \,.\, (\operatorname{cotg}\alpha + \sqrt{2 + \operatorname{cotg}^2\alpha})$. **258.** 180°. **259.** $\varphi = 60°$. **260.** $v \,.\, \sqrt[3]{\varrho}$.

261. $\frac{\pi m^2 \cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \doteq 4\,878\ \mathrm{cm}^2$. **262.** $1\,200\pi\ \mathrm{cm}^3$. **263.** $72\pi\ \mathrm{cm}^3$. **264.** $\frac{1}{3} m \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} \,.\, \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$. **265.** Osový řez rotačního komolého kužele je rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, přičemž $AB \parallel CD$. Označme koncové body střední příčky lichoběžníka E, F, její průsečík s osou lichoběžníka S, K patu výšky v z vrcholu C na AB a D patu výšky z bodu S na BC; $\sphericalangle KCB = \sphericalangle ESL$. Komolému kuželi lze vepsat kouli tehdy, je-li $2SL = x = 2v$. Tento vztah platí, neboť $\cos\alpha = \frac{2x}{r_1 + r_2} = \frac{v}{s}$, kde $s = \sqrt{v^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{4r_1 \,.\, r_2 + (r_1 - r_2)^2}$. **266.** $\frac{1}{3}\pi r^2(3v + 4r)$. **267.** $8\pi r_1 \varepsilon$; $4\pi r_1^2 \varepsilon$. **268.** $0{,}648\ \mathrm{g/cm}^3$. **269.** $0{,}104\ \mathrm{g/cm}^3$; $0{,}896\ \mathrm{g/cm}^3$. **270.** $\frac{3\pi r^2 v^2}{r^2 + v^2}$.

271. $16 : 12 : 9$. **272.** 60°. **273.** $V_1 : V_2 = n : 1$, kde V_1 je objem kužele. **274.** $r = r_2 \sqrt[3]{\frac{v}{4(r_1 - r_2)}}$; $r_1 > r_2$. **275.** $P_1 : P_2 = \sqrt{3} : 4$, kde P_2 je obsah kulové plochy. **276.** Ve vzdálenosti $x = \frac{r(\sqrt{5} - 1)}{2}$. **277.** $d = r(\sqrt{30} - 5)$. **278.** $50\pi(2 + \sqrt{3})\ \mathrm{cm}^2$.

XVII. ANALYTICKÁ GEOMETRIE

I. ROVNICE V PARAMETRICKÉM I NEPARAMETRICKÉM TVARU, VZÁJEMNÁ POLOHA

3. a) $x = 3 + 3t$, $y = 2 + t$; b) $x = -1 - 4t$; $y = 2 + 3t$; c) $x = 3t$, $y = 1$; d) $x = -3 + 3t$, $y = -5 - 4t$; e) $x = 3{,}5 - t$, $y = 1 + 2t$. **4.** a) $x = -5 - 5t$, $y = 8 + 5t$; b) $x = -1 - 5t$, $y = 1 + 5t$; c) $x = -5t$, $y = 5t$; d) $x = 3 - 5t$, $y = 4 + 5t$. **5.** a) $AB: x = 7t,\ y = t,\ 0 \leqq t \leqq 1$; $BC: x = 7 - 5r,\ y = 1 + 5r,\ 0 \leqq r \leqq 1$; $AC: x = s,\ y = 3s,\ 0 \leqq s \leqq 2$; c) $A'B': x = 9 - 14v,\ y = 7 - 2v,\ 0 \leqq v \leqq 1$; $C'A': x = 5 + u,\ y = -5 + 3u,\ 0 \leqq u \leqq 4$; $B'C': x = -5 + p,\ y = 5 - p,\ 0 \leqq p \leqq 10$; $AB: x = 7t,\ y = t,\ 0 \leqq t \leqq 1$; $AC: x = s,\ y = 3s,\ 0 \leqq s \leqq 2$. **6.** a) $D \equiv \left(\frac{1}{5}, \frac{12}{5}\right)$; b) $D \equiv (0{,}4)$; c), d) průsečík neexistuje. **7.** a), b), c), d) nemohou. **8.** a) $x = -1 + 4t$; $y = 2 - t$; b) $x = -2t$, $y = 3 - 4t$; c) $x = 5$, $y = -2 + 3t$; d) $x = -6 + 9t$, $y = -1 + t$; e) $x = -4 + 7t$, $y = 4 - 6t$. Pro úsečky AB, CD, EF, GH, KL je v a), b), c), d), e) vždy $0 \leqq t \leqq 1$. $AB \,.\, CD \equiv \left(-\frac{5}{9}, \frac{17}{9}\right)$; $CD \,.\, EF = (5{,}13)$; $EF \,.\, KL \equiv \left(5, -\frac{26}{7}\right)$. **10.** a), b), d), e) Dané body leží na téže přímce, c), f) neleží na téže přímce.

11. $P \equiv (4, -1)$, $x = -5 + t$, $y = 8 - t$. **12.** a) $M_1 \equiv (4, -1)$, $M_2 \equiv \left(\frac{23}{8}, \frac{-23}{8}\right)$, $M_3 \equiv (5{,}5;\ 1{,}5)$; b) $A' \equiv (9{,}7)$, $B' \equiv (-5{,}5)$, $C' \equiv (5, -5)$. **14.** $x = t$, $y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t$; b) $x = t$, $y = 4 + 3t$; c) $x = \frac{2}{5}$, $y = t$; d) $x = t$, $y = -\frac{3}{2} - 2t$; e) $x = t$, $y = -1 + 5t$; f) $x = t$, $y = \frac{4}{3} - \frac{a}{3}t$. **15.** a) $x = t$, $y = 1 - 2t$; $x = r$, $y = -5 + r$; $x = s$, $x = \frac{-1}{2} - \frac{5}{4}s$; $P \equiv (2, -3)$; b) $x = t$, $y = 3t$; $x = r$, $y = 3 + 2r$; $x = s$, $y = -3 + 4s$; $P \equiv (3, 9)$. Dokažte, že třetí přímka prochází průsečíkem prvních dvou. **17.** a) $x - 2y - 1 = 0$; b) $5x + y - 2 = 0$; c) $y = 3$; d) $x = -2$; e) $7x - 9y + 1 = 0$. Nejmenší vzdálenost $GH = 4$. **18.** a) $a \equiv 2x + 5y - 37 = 0$, $t_a \equiv 11x + 8y - 67 = 0$, $b \equiv 3x + y - 23 = 0$, $t_b = 17x + 23y - 139 = 0$, $c \equiv x + y - 5 = 0$, $t_c \equiv 5x - 7y + 5 = 0$; b) $a \equiv 9x - y - 37 = 0$, $t_a \equiv 13x - 11y - 20 = 0$, $b \equiv 11x - 6y - 7 = 0$, $t_b \equiv 7x + 4y - 24 = 0$, $c \equiv 2x - 5y - 13 = 0$, $t_c \equiv 20x - 7y - 44 = 0$; c) $a \equiv 2x + 9y - 31 = 0$, $t_a \equiv 7x + 11y - 47 = 0$, $b \equiv 5x + 2y - 57 = 0$, $t_b \equiv 13x + 38y - 99 = 0$, $c \equiv 9x + 20y - 37 = 0$, $t_c \equiv x - 16y + 5 = 0$. **19.** a), c) různoběžky, b) kolmé různoběžky, d) splývající rovnoběžky. **20.** a) $C \equiv (5, -7)$; b) $C \equiv (-1, -1)$; c) $C \equiv (-5, -40)$.

21. Body A, C, E leží na dané přímce, body B, D na ní neleží. **22.** a) Trojúhelník; b) lichoběžník; c) obecný čtyřúhelník. **23.** a) $3x + 7y - 86 = 0$, $13x - 9y + 60 = 0$, $5x - 8y - 45 = 0$; b) $5x + 8y - 73 = 0$, $2x - 7y - 19 = 0$, $7x + y + 10 = 0$. **24.** a) $v_a \equiv x - y = 0$, $v_b \equiv 4x + 2y - 9 = 0$, $v_c \equiv x - 5y + 6 = 0$, $V \equiv (1{,}5; 1{,}5)$; b) $2x - y + 1 = 0$, $4x - 5y + 22 = 0$, $4x + y - 18 = 0$, $V \equiv \left(\frac{17}{6}, \frac{20}{3}\right)$; c) $2x + y = 7$, $6x - 7y = 26$, $2x - 9y = 12$, $V \equiv \left(3\frac{3}{4}, -0{,}5\right)$. **25.** a) $8x - 5y - 10 = 0$, $x - 7y + 30 = 0$, $7x + 2y - 40 = 0$, $V \equiv \left(4\frac{16}{51}, 4\frac{46}{51}\right)$; b) $4x - y - 7 = 0$, $5x - 6y + 32 = 0$, $7x + 3y - 53 = 0$, $V \equiv \left(\frac{74}{19}, \frac{163}{19}\right)$; c) $4x - 7y - 16 = 0$, $4x + 9y - 2 = 0$, $4x + y - 9 = 0$, $V \equiv \left(\frac{79}{32}, -\frac{7}{8}\right)$; d) $v_a \equiv x + y - 2 = 0$, $v_b \equiv 5x + 4y - 22 = 0$, $v_c \equiv x + 2y + 10 = 0$, $V \equiv (14, -12)$. **26.** a) $3x - 2y + 1 = 0$; b) $4x + 5y - 21 = 0$. **27.** a) $x + 3y - 2 = 0$, b) $y = \frac{67}{119}$; c) $x = \frac{9}{5}$. **28.** a) $S \equiv \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$; b) $S \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $r = \sqrt{6{,}5}$; c) $S \equiv \left(\frac{1}{12}, \frac{-11}{6}\right)$, $r \doteq 4{,}9$. **29.** a) $S \equiv (1, -1)$, $r = 5$; b) $S \equiv (-4{,}1)$, $r = 5$. **30.** $a = \frac{44\sqrt{3}}{15}$.

31. a) $V \equiv (-20, -47)$, $T \equiv \left(\frac{-55}{3}, 8\right)$, $S \equiv (-17{,}5; 35{,}5)$, $p \equiv 33x - y + 613 = 0$; b) $V \equiv (3{,}8; 1{,}2)$, $T \equiv \left(1, \frac{2}{3}\right)$, $S \equiv (-0{,}4; 0{,}4)$, $p \equiv 4x - 21y + 10 = 0$. **32.** a) $a = -7$; b) $a = 8$. **33.** a) $r \neq 1 - p$, $p \neq 0$, $p \neq 1$, $p = 2q$; b) $p = 2q$, $r = 1 - p$, $p \neq 0$, $p \neq 1$; c) $p \neq 2q$, $q \neq 0$. **34.** $m = 11$, $n = 10$. **35.** $X_1 \equiv (0{,}3)$, $Y_1 \equiv (-3, -3)$, $X_2 \equiv (0, -5)$, $Y_2 \equiv \left(\frac{7}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.

2. POLOROVINA, SMĚRNICE PŘÍMKY, VZDÁLENOST BODU OD PŘÍMKY

37. Protíná strany: a) AB, BC; b) AC, BC; c) AB; d) BC a prochází bodem A. **38.** a) $-19 < c < 1$; b) $-9 < c < 0$; c) $+7 > c > -5$; d) $0 < c < 15$. **39.** a) $y < 11$; d) $y < 4x_1 + 7$.

41. a), b) $3x - 7y + 26 \geqq 0$; c), d) $3x - 7y + 26 < 0$. **42.** a) $\frac{51}{8} j^2$; b) $15\frac{109}{140} j^2$; c) $17\frac{5}{14} j^2$. **43.** a), c) $\frac{3}{2} j^2$; b) $\frac{5}{2} j^2$. **44.** I. $3x + y - 1 \geqq 0$, $5y - x - 21 \leqq 0$, $3x + y - 17 \leqq 0$, $-x + 5y + 5 \geqq 0$. II. $x - 5y + 5 \geqq 0$, $y - x - 5 \leqq 0$, $y - x - 1 \geqq 0$, $5y - x - 21 \leqq 0$. III. $3x + y - 1 \geqq 0$, $y - x - 1 \geqq 0$, $y - x - 5 \leqq 0$, $3x + y - 17 \leqq 0$. **45.** a) $x = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; $x + \sqrt{3}y - 3\sqrt{3} \leqq 0$, $y\sqrt{3} + x + 3\sqrt{3} \geqq 0$; $x - y\sqrt{3} - 3\sqrt{3} \leqq 0$, $y\sqrt{3} - x - 3\sqrt{3} \geqq 0$; b) $\sqrt{3}x + y - a\sqrt{3} \leqq 0$, $\sqrt{3}x + y + a\sqrt{3} \geqq 0$, $y \leqq \frac{a}{2}\sqrt{3}$, $y - \sqrt{3}x - a\sqrt{3} \leqq 0$, $y \geqq \frac{-a}{2}\sqrt{3}$, $y - \sqrt{3}x + a\sqrt{3} \geqq 0$. **47.** Nejvýhodnější je zde zřejmě výroba 4 000 kusů výrobků prvního druhu a žádný výrobek druhého druhu. Proč? **48.** 300 kusů motorů typu A, 600 kusů motorů typu B. **50.** Optimální řešení bude: osít 80 ha pšenicí a 20 ha cukrovkou. Čistý výnos pak bude 86 000 Kčs.

51. $328x + 192y \geqq 500$, $20{,}3x + 16{,}3y \geqq 40$, c) $27x + 13{,}6y \leqq 30$, $z = 2{,}80x + 3{,}20y = \min$. Soustava nemá řešení. **52.** 0,34 kg sena, 0,21 kg mouky, 0,432 Kčs. **54.** $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$. **56.** a) $x = t\cos\varphi$, $y = t\sin\varphi$; b) $y = kx$, $(k = \operatorname{tg}\varphi)$, $y - y_1 = k(x - x_1)$; a) $5x + 2y + 4 = 0$; b) $5x - 4y + 2 = 0$; c) $4y = 5x$. **57.** a) $x = \frac{\sqrt{3}}{2} t$, $y = \frac{1}{2} t$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2} t$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2} t$; b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x$, $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, atd. **58.** a) $\varphi = 60°$; c) $\varphi = 135°$; e) $\varphi = 210°$. **59.** a) $\varphi = 135°$; b) $\varphi = 63°26'5''$; c) $\varphi = 30°$; d) $\varphi = 60°$. **60.** a) $x = -9 + 9t$, $y = 4 + 3t$; $x = 5t$, $y = 7 - 6t$; $x = 5 - 5t$, $y = 1 - t$; $x = -9t$, $y = 4t$; $x = -9 + 14t$, $y = 4 - 3t$; $x = 0$, $y = 7 - 7t$; $18°26'6''$; $11°18'35''$; $129°48'20''$; $156°2'18''$; b) $x + 4y + 5 = 0$, $3x - 2y - 13 = 0$; $3x + 4y - 19 = 0$, $5x - 2y + 3 = 0$, $x - 3y - 2 = 0$, $3x + y - 7 = 0$.

61. 132,9 ha. **62.** $\vec{s} = k(b, -a)$, kde k je libovolné číslo. a) $y = \frac{-a}{b} x - \frac{c}{b}$; b) $\frac{x}{\frac{-c}{a}} + \frac{y}{\frac{-c}{b}} = 1$; c) $\frac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$. **63.** a) $y - 2x + 7 = 0$; b) $x - y + 5 = 0$; c) $2x + y + 3 = 0$; d) $y = -3$; e) $x - 2y = 6$; f) $2x + 3y = -11$. **64.** a) $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x + 2$; b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x$. **65.** a) $\frac{x}{\frac{-5}{3}} + \frac{y}{\frac{5}{4}} = 1$; b) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$; c) $\frac{y}{\frac{4}{3}} - \frac{x}{2} = 1$; d) $\frac{x}{\frac{-14}{5}} +$

$+ \dfrac{y}{\frac{7}{6}} = 1$; e) $\dfrac{x}{\frac{-5}{4}} = 1$. **67.** a) $\dfrac{x}{3{,}5} - \dfrac{y}{7} = 1$; b) $\dfrac{y}{5} - \dfrac{x}{5} = 1$; c) $\dfrac{-x}{1{,}5} - \dfrac{y}{3} =$ $= 1$; d) $\dfrac{y}{-3} = 1$; e) $\dfrac{x}{6} - \dfrac{y}{3} = 1$; f) $\dfrac{x}{\frac{-11}{2}} - \dfrac{y}{\frac{11}{3}} = 1$. **68.** a) $p = \dfrac{5}{7}$, $q =$ $= \dfrac{-5}{4}$; b) $p = \dfrac{1}{3}, q = \dfrac{-1}{2}$; c) $p = 3, q = 9$. **69.** a) $\dfrac{-10}{3}, \dfrac{5}{3}, k = \dfrac{1}{2}$; b) $p = \dfrac{1}{4}, q = \dfrac{1}{3}, k = \dfrac{-4}{3}$; c) $p = q = 0, k = \dfrac{6}{5}$; d) $p = \dfrac{1}{6}, q = 1, k = -6$; e) $p = \dfrac{-2}{a}, a \neq 0, q = \dfrac{-2}{3}, k = \dfrac{-a}{3}$; f) $p = \dfrac{1}{3}, q = \dfrac{1}{b}, b \neq 0, k = \dfrac{-3}{b}$.
70. a) $y = 1$; b) $x = -1$; c) $y - x + 1 = 0$; d) $6y - x - 8 = 0$; e) $x = -1$.

71. a) $k = -2$, $y = -2x + 7$, $\dfrac{x}{3{,}5} + \dfrac{y}{7} = 1$; b) $k = \dfrac{3}{2}$, $y = \dfrac{3}{2}x$; c) $k = \dfrac{-1}{2}, y = \dfrac{-x}{2} + \dfrac{5}{2}, \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{\frac{5}{2}} = 1$; d) $k = \dfrac{-3}{2}, y = \dfrac{-3}{2}x + \dfrac{23}{2}$; e) $x = -1$, nemá směrnici. **72.** a) $63°47'$; b) $69°49'$; c) $29°45'$. **73.** a) $45°$; b) $0°$; c) $45°$; d) $90°$; e) $0°$; f) $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$. **74.** a) $(3, -1)$, $(3{,}3)$; $(-1{,}8; 0{,}6)$, $45°$, $71°34'$; b) $(-2{,}6; -1{,}2)$, $(2{,}2; 0{,}4)$, $(3, -2)$, $26°33'54''$, $90°$, $63°26'6''$; c) $(6{,}0)$, $(-6{,}3)$, $(2, -1)$, $12°31'43''$, $28°4'20''$, $139°24'$. **75.** a) $\alpha = 43°6'$, $\beta =$ $= 38°5'$, $\gamma = 98°49'$; b) $\alpha = 27°46'36''$, $\beta = 104°37'15''$, $\gamma = 47°36'9''$; c) $\alpha = 18°26'$, $\beta = 26°34'$, $\gamma = 135°$. **77.** a) $x - 5y - 4 = 0$, $5x + y + 6 = 0$; b) $x - 5y + 3 = 0$, $5x + y - 11 = 0$; c) $5x - y - 22 = 0$, $x + 5y - 20 =$ $= 0$; d) $y + 3x = 0$, $3y - x = 10$. **78.** a) $\dfrac{3x - 4y - 5}{\pm 5} = 0$; b) $\dfrac{3x - y - 1}{\pm\sqrt{10}} = 0$; c) $\dfrac{x - 8y - 4}{\pm\sqrt{65}} = 0$; d) $\dfrac{x + 2y - 5}{\pm\sqrt{5}} = 0$. **79.** a) $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{3} + y - 20\right) = 0$; b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(y - x) - 5 = 0$; c) $\dfrac{1}{2}\left(x + y\sqrt{3} - 24\right) = 0$. **82.** a) $v_M = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$, $v_N = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$, $v_P = \dfrac{11\sqrt{5}}{5}$, $v_Q = \dfrac{17\sqrt{5}}{5}$, $v_R = 0$; b) $v_A = v_B = \dfrac{1}{13}, v_C =$ $= v_D = 0$. **83.** a) $4{,}9\sqrt{2}$; b) $10\sqrt{2}$ **84.** a) 3; b) $47\sqrt{13} : 26$; c) $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$; d) $\dfrac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
85. a) $v_a = v_c = \sqrt{5}, v_b = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$; b) $v_a = \dfrac{51}{53}\sqrt{53}$; $v_b = 5{,}1\sqrt{2}, v_c = \dfrac{51}{89}\sqrt{89}$;

c) $v_a = 3{,}5\sqrt{10}$, $v_b = 5{,}6\sqrt{5}$, $v_c = 4\sqrt{5}$; d) $v_a = v_c = 5$, $v_b = \frac{5}{2}\sqrt{2}$; e) $\frac{18}{5}\sqrt{5}$, $\frac{18}{37}\sqrt{74}$, $\frac{18}{13}\sqrt{26}$. **86.** $v_a = \frac{98\sqrt{13}}{247}$, $v_b = \frac{49\sqrt{10}}{110}$, $v_c = \frac{14\sqrt{41}}{41}$; b) $\frac{36\sqrt{10}}{10}$, $\frac{18\sqrt{34}}{17}$, $\frac{18\sqrt{13}}{13}$. **87.** $k = \pm 2$. **88.** a) $(3\sqrt{14} \pm 4)x \pm 4y - 3\sqrt{14} = 0$; b) $7x - 3y + 15 = 0$, $3x + 7y - 93 = 0$; c) $8x + 7y - 19 = 0$, $16x + 3y + 17 = 0$. **89.** a) Rovnoběž. s osou y pro $k = \pm 2$; rovnoběž. s osou x pro $k = 3$, prochází počátkem pro $k = 2$, $k = 3$; b) rovnoběž. s osou y pro $k = 0$, rovnoběž. s osou x pro $k = \pm 1$, prochází počátkem pro $k = -2$, $k = \frac{1}{2}$.
90. a) $x + y = 90$; c) $x : 110 + y : 110 = 1$, $x : 120 + y : 100 = 1$.

91. a) $A \equiv (1{,}4)$, $B \equiv (6, -8)$, $C \equiv (-8, -8)$; b) $6x - y - 2 = 0$, $12x - 23y - 88 = 0$, $19y + 12x + 80 = 0$, $T \equiv \left(-\frac{1}{3}, -4\right)$; c) $-8x + y + 4 = 0$, $x - 2y - 8 = 0$, $3y + 2x + 12 = 0$, $(0, -4)$; d) $\varrho = 4$; e) 12; 11,20; 12,9. **92.** 241 m. **93.** Počátek volte na svislé ose náspu $h_2 = 0{,}865$ m, $AB = 17{,}95$ m. **94.** $x_1 = 24$ m, $x_2 = 8$ m. **95.** $C \equiv (652; 6{,}6)$.

3. TRANSFORMACE SOUŘADNIC

101. a) $x'^2 + y'^2 = 25$; b) $(x' + 5)^2 + (y' - 4)^2 = 4$; c) $(x' - m + 5)^2 + (y' - n - 3)^2 = r^2$. **102.** a) $m = 2$, $n = 1$; b) $m = -2$, $n = 3$; c) $n = 1$, $m = 2$; d) $m = 2$, $n = 4$. **103.** a) $y' = 2x'^2$; b) $y' - 3{,}75 = (x' - 2{,}5)^2$; c) $y' - 5 = (x' - 2)^2$. **105.** a) $x' . y' = 6$, $O' \equiv (0{,}2)$; b) $x' . y' = 4$, $O' \equiv (-2{,}1)$; c) $x' . y' = -6$, $O' \equiv (3, -2)$; d) $x' . y' = -3$, $O' \equiv (-1, -2)$; e) $x' . y' = -2$, $O' \equiv (3, -1)$. **107.** a) $x'\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y'\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2$, $x' . \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + y' \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = -3$; c) $x'(\sin\alpha - \cos\alpha) + y'(\cos\alpha + \sin\alpha) = 2$, $x'(\sin\alpha - \cos\alpha) + y'(\cos\alpha + \sin\alpha) = -3$. **108.** $x^2 - y^2 = 8$. **109.** $x = x' . \frac{1}{\sqrt{2}} - y' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = x' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x'^2 + 4y'^2 = 16$; b) $x'^2 - 4y'^2 = 16$; c) $x'^2 + 2y'^2 = 4$. **110.** a) 135°; b) 45°, 225°.

4. PARABOLA

115. a) $y^2 = x$; b) $y^2 = \frac{32}{3} . x$; c) $y^2 = -9x$; d) $y^2 = \frac{8}{3}x$. **116.** a) $y = x^2$; b) $y = 4x^2$; c) $y = 2x^2$; d) $y = -2x^2$; e) $y = -2x^2$. **117.** a) $F \equiv \left(\frac{p}{2}, 0\right)$,

$F \equiv (1{,}0)$; $d \equiv x = -1$; b) $F \equiv \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $d \equiv x = \frac{1}{2}$; c) $F \equiv (0{,}1)$, $d \equiv y = -1$; d) $F \equiv (0, -1)$, $d \equiv y = 1$. **118.** $y' = ax'^2$, kde $x' = x + b : 2a$, $y' = y + \frac{b^2}{4a} - c$, pro x_1, x_2, pro něž $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. **119.** a) $(y + 2)^2 = 4(x + 3)$; b) $(y + 2)^2 = -2(x + 3)$; c) $(x + 3)^2 = 4(y + 2)$; d) $(x + 3)^2 = -4(y + 2)$.

121. a) $V \equiv (1{,}1)$, $2p = 2$, osa x; b) $V \equiv (-5{,}3)$, $2p = 4$, osa $-x$; c) $V \equiv (1{,}2)$, $2p = 9$, osa y. **122.** a) $V \equiv (4{,}3)$, $2p = 12$; b) $V \equiv (-3, -1)$, $2p = 9$; c) $V \equiv \left(-3, \frac{5}{2}\right)$, $2p = 6$; d) $V \equiv (5{,}7)$, $2p = 5$. **123.** a) $2p = 3$, $V \equiv (4, -2)$, $F \equiv \left(4, -\frac{5}{4}\right)$, $4y = -11$; b) $2p = \frac{11}{2}$, $V \equiv (5, -3)$, $F \equiv \left(\frac{51}{8}, -3\right)$, $y + 3 = 0$, $8x - 29 = 0$; c) $2p = +3$, $V \equiv \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, $F \equiv \left(\frac{3}{4}, -1\right)$, $2x - 3 = 0$, $2y - 1 = 0$; d) $2p = +\frac{1}{2}$, $V \equiv \left(\frac{3}{4}, -\frac{39}{8}\right)$; $F \equiv \left(\frac{3}{4}, -5\right)$, $4x - 3 = 0$, $4y + 19 = 0$; e) $2p = \frac{1}{2}$, $V \equiv (2, -1)$, $F \equiv \left(2, \frac{-9}{8}\right)$, $x = 2$, $y = \frac{-7}{8}$; f) $2p = \frac{1}{2}$, $V \equiv (-5{,}0)$, $F \equiv \left(-5, -\frac{1}{8}\right)$, $x = 5$, $8y = 1$. **124.** a) $(y - 3)^2 = 6(x + 5)$; b) $(y - 3)^2 = 6(x + 1{,}5)$; c) $(y - 6)^2 = -9(x - 4)$. **125.** $y^2 + 14y + 8x + 25 = 0$, $M \equiv \left(\frac{-25}{8}, 0\right)$, $N \equiv (0, -7 \pm 2\sqrt{6})$. **126.** $(x + 7)^2 = 4(y - 3)$. **128.** a) $B \equiv (18{,}6\sqrt{3})$, $C \equiv (18, -6\sqrt{3})$, b) $(6, \pm 2\sqrt{3})$. **129.** $y^2 = \pm 6x$. **130.** $A \equiv (0{,}0)$, $B \equiv (8{,}8)$, $C \equiv (16{,}0)$, $D \equiv (8, -8)$.

131. 1,67 cm od vrcholu reflektoru. **132.** 1 914 μm. **133.** 60 cm od vrcholu pece. **134.** $v = 2p$. **135.** $y = x \operatorname{tg} \alpha - gx^2 : 2c^2 \cos^2 \alpha$. **136.** $y = \frac{x^2}{a}$. **137.** a) $(0{,}0)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$; b) $(2{,}1)$, $(-6{,}9)$; c) $(2 \pm \sqrt{3}, 1 \mp \sqrt{3})$; d) $(-6 \pm \sqrt{76}, 29 \mp 3\sqrt{76})$; e) $(12, -12)$, $(3{,}6)$; f) $(2{,}0)$, $(5, -6)$. **138.** $20x + 28y - 59 = 0$, $A \equiv (0{,}29; 1{,}9)$, $B \equiv (2{,}25; 0{,}5)$. **139.** a) $(4, \pm 2\sqrt{6})$; b) $(-2, \pm 2\sqrt{3})$. **140.** $2x + 4y = 9$, $16x - 8y + 13 = 0$, $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $\left(\frac{1}{4}, \frac{17}{8}\right)$, $\left(\frac{-3}{4}, \frac{1}{8}\right)$.

142. a) $2x - 3y + 9 = 0$, $x + y + 2 = 0$; b) $x - 2y + 6 = 0$, $2x + 2y + 3 = 0$; c) $y = 0$, $4x - 3y - 12 = 0$; d) $x - y + 4 = 0$, $2x + 3y + 18 = 0$; e) $x - 4y + 36 = 0$, $9x + 4y + 4 = 0$. **143.** a) $x + 4y + 39 = 0$,

$7x - 8y - 15 = 0$; b) $x - 3y + 29 = 0$, $x + y - 3 = 0$. **144.** $y^2 = \frac{49}{3}x$.

145. a) $x - y - 3 = 0$; b) $x\sqrt{3} - y - 9 = 0$; c) $\sqrt{3}x - 3y - 3 = 0$. **147.** $x = 6$. **148.** Tětivy o směrnici $k = -1$. **149.** $h \cdot (k^2h + 4q) \gtreqqless 0$.

153. a) 3; b) $\frac{1}{2} \cdot 13{,}5$; c) $\frac{1}{3}p^2$. **154.** a) $38\frac{1}{9}$; b) $1\frac{1}{3}$; c) $20\frac{5}{6}$. **155.** $163\frac{1}{9}$. **156.** $28\frac{1}{8}\,\mathrm{j}^2$. **157.** $y^2 = 4rx$. **159.** $x = \frac{-p}{2}$. **160.** $y^2 = 2ax - 2a^2$.

161. $y = \frac{p}{k}$. **162.** $y^2 = \frac{p}{2}\left(x - \frac{1}{2}p\right)$ pro $y^2 = 2px$. **163.** $y^2 = \frac{1}{2}p \cdot \left(x - \frac{3}{2}p\right)$ pro $y^2 = 2px$. **164.** $y^2 = 8p(x + 2p)$ pro první, $y^2 = 4px$ pro druhý vrchol.

5. KRUŽNICE

165. a) $x^2 + y^2 = r^2$; b) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. **166.** a) $x^2 + y^2 = 4$, $x = 2\cos\varphi$, $y = 2\sin\varphi$, $0° \leqq \varphi < 360°$; b) $41x^2 + 41y^2 = 256$, $x = \sqrt{\frac{256}{41}}\cos\varphi$, $y = \sqrt{\frac{256}{41}}\sin\varphi$. **167.** $(x - 5)^2 + y^2 = 25$. **170.** a) $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$; c) $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$.

171. $x - m = r\cos\varphi$, $y - n = r\sin\varphi$. **173.** a) $(2 \pm 2\sqrt{2}, 0)$, $(0, -1 \pm \sqrt{5})$; b) $(5 \pm 3\sqrt{5}, 0)$, $(0{,}2 \pm 2\sqrt{6})$; c) $(0, -2)$, $(0, -6)$. **174.** a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$; b) $x^2 + y^2 - 6y - 9 = 0$. **175.** a) $S \equiv (2, -1)$, $r = 3$. b) $S \equiv (4{,}0)$, $r = 4$; c) $S \equiv \left(\frac{-3}{2}, 3\right)$, $r = \sqrt{17{,}25}$; d) $S \equiv (5{,}5)$, $r = 5$; e) $S \equiv (-2{,}5; 3{,}5)$, $r = 4$. **176.** a) $S \equiv (2, -3)$, $r = 4$; c) $S \equiv (-2{,}5; 1{,}5)$, $r = 5$; d) $S \equiv \left(-\frac{B}{2A}, -\frac{B}{2A}\right)$, $r = \frac{1}{2A} \cdot \sqrt{2B^2 - 4AC}$. **178.** a) $(x + 0{,}5)^2 + (y - 0{,}5)^2 = 12{,}5$; b) $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$; c) $x^2 + y^2 - 24x - 30y - 256 = 0$, $S \equiv (12{,}15)$; d) přímka $2x - y - 6 = 0$; e) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$, $S \equiv (-1{,}3)$, $r = 5$. **179.** a) $L = 0$; b) $L = \frac{M^2}{4}$; c) $L = N^2 : 4$. **180.** a) $L < 10$; b) $L < M^2 + N^2$.

181. a) $x^2 + y^2 + x - y - 12 = 0$; b) $(x + 1)^2 + \left(y + 3\frac{7}{8}\right)^2 = \left(\frac{65}{8}\right)^2$; c) $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. **182.** a) $(3{,}4)$, $(-4{,}8; 1{,}4)$; b) $(0{,}5)$, $(4{,}3)$; c) $(6{,}6)$, $(-1{,}5)$; d) $(5{,}10)$, $(3{,}6)$. **183.** a) $x^2 + y^2 - 8y = 0$; b) $x^2 + y^2 + 4x + 3y = 10$. **184.** a) $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 15$; b) $11 \cdot (x^2 + y^2) + 82x - 32y = 48$. **185.** a) $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 30$; b) $3x^2 + 3y^2 + 20x + 22y = 13$; c) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$, $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 25$. **186.** a) $x^2 + y^2 - 5x +$

$+ 3y = 0$; b) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$; c) $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$; d) $x^2 + y^2 + 7x + y = 0$. **187.** $(x - 17)^2 + (y - 17)^2 = 289$, $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$. **188.** a) $(y - 10)^2 + (x - 11{,}9)^2 = 100$, 17,45 m; o 6,6 m. **189.** $y = x - 8$. **190.** $x^2 + y^2 + x + y = 12$.

192. a) $3x - 4y = 20$; b) $x - 3y = 10$; c) $3x + 4y + 7 = 0$; d) $4x + 3y = 21$. **193.** a) $\pm 4x + 3y - 30 = 0$, $73°44'23''$; b) $x - y = 0$, $x + 7y = 0$, $53°7'48''$; c) $4x + 3y = 42$, $3x - 4y = 19$, $90°$. **194.** $(x - 4\sqrt{2})^2 + [y - 4(2 - \sqrt{2})]^2 = 96 - 64\sqrt{2}$. **195.** a) $(x + 4)^2 + y^2 = 8$; b) $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 16{,}2$; c) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$. **197.** a) 5,4 km; b) 3,8 km. **198.** $c = \pm 12\sqrt{5}$. **199.** $c = -5 \pm 2\sqrt{29}$. **200.** a) $\pm 4x \mp 3y = 10$; b) $2x - y + 13 \pm 6\sqrt{5} = 0$.

201. a) $\varphi = 88°49'50''$; b) $3x + 4y - 42 = 0$, $4x - 3y + 19 = 0$, $\varphi = 90°$; c) $7x + 24y + 21 = 0$, $x + 3 = 0$, $\varphi = 106°26'$; d) neexistuje, bod P leží uvnitř kružnice. **202.** a) $90°$; b) $90°$; c) $135°$. **203.** $15°2'28''$. **204.** $(\pm 1, 2)$, $77°20'$. **205.** a) $t_1 \equiv y = 6$, $t_2 \equiv 4x - 3y = 30$, $t_3 \equiv 3x + 4y = 30$; b) $x = -3$, $4x - 3y = 15$; c) $x = 1, y = 2$, $4x - 3y = 10$, $3x + 4y = 5$; d) $3x \pm 4y + 12 = 0$. **206.** $(x - 7)^2 + (y + 4)^2 = 26$. **207.** $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, $x^2 + y^2 + 26x + 16y + 8 = 0$, $x^2 + y^2 - 24x + 16y + 108 = 0$. **210.** $x^2 + y^2 - 2ny = 0$, $x^2 + y^2 - 2mx = 0$.

211. a) $3(x^2 + y^2) - 82x + 27 = 0$; b) $5(x^2 + y^2) + 112x + 146y + 73 = 0$; c) $x^2 + y^2 + x \,.\, 2a(1 + k^2) : (1 - k^2) + a^2 = 0$, $|k| \neq 1$. **213.** $\left(\frac{35}{17}, \pm \frac{15\sqrt{123}}{17}\right)$. **214.** $4x^2 + 4y^2 - 12y = 9$. **215.** $x^2 + y^2 - 32x + 192 = 0$. **216.** $x^2 + y^2 = cx$. **217.** $x^2 + y^2 = c^2 : 4$. **218.** $y^2 - 2(m + r)x + m^2 - r^2 = 0$. **219.** $x^2 + \left(y - \frac{a}{3}\right)^2 = a^2 : 9$. **220.** $(x - 2)^2 + y^2 = 16$.

221. $x^2 + y^2 = ax$. **222.** $x^2 + y^2 = ax$. **223.** $S \equiv \left(\frac{1}{2}, \pm\sqrt{42}\right)$, $r = 9{,}5$. **224.** $(t - 1)x^2 + (t - 1)y^2 = 2tax$, $OB = a$. **225.** $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}gt^2\right)^2 = c^2t^2$.

6. ELIPSA A HYPERBOLA

228. a) $16x^2 + 25y^2 = 400$; b) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$. **229.** $\varepsilon = 0{,}278$. **230.** a) $5x^2 + 8y^2 = 77$; b) $x^2 + 4y^2 = 16$; c) $x^2 + y^2 = 4$.

231. $25x^2 + 100y^2 = 2\,500$. **232.** $9x + 6y + 16 = 0$. **233.** a) $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$; $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$. **234.** $16x^2 + 81y^2 = 1\,296$. **235.** a) $65\pi j^2$; b) $16\pi\sqrt{7}j^2$; c) $120\pi j^2$. **236.** $x^2 + 9y^2 = 36$. **237.** d) $\frac{(x - 3)^2}{25} + \frac{(y + 1)^2}{16} = 1$;

e) $\frac{(x+5)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{7}=1$; f) $\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y-7)^2}{25}=1$. **239.** a) $S\equiv \left(\frac{5}{4},\frac{-1}{3}\right)$, $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{3}$; b) $S\equiv(0,2)$, $a=2\sqrt{2}$, $b=2$; c) $S\equiv(1,-2)$, $a=1$, $b=\frac{1}{\sqrt{6}}$. **240.** $4x^2+9y^2-24x-36y+36=0$. **241.** $x^2+3y^2=144$.

242. $\left(\frac{-2}{7},\pm\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$. **243.** a) $16x^2+25y^2=400$; b) $16x^2+25y^2+160x\pm\pm 200y+400=0$. **244.** a) sečna; b) nesečna; c) tečna. **245.** $4\sqrt{3}$. **246.** $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}=1$. **247.** $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$. **248.** a) $M\equiv\left(\frac{a}{e}\cdot\sqrt{a^2-2b^2},\frac{\pm b^2}{e}\right)$, atd. v dalších kvadrantech; b) $M\equiv(\pm\sqrt{15},\pm1)$. **249.** a) $q\in(-5,5)$; b) $q=\pm5$; c) $|q|>5$. **250.** $b^2(x_1-m)(x-m)+a^2(y_1-n)(y-n)=a^2b^2$; $\frac{-b^2(x_1-m)}{a^2(y_1-n)}$.

252. a) $21x+40y-333=0$, $21x-40y-493=0$, $P\equiv\left(19\frac{2}{3},-2\right)$; b) $45x\pm28y=409\mp56$; c) $\pm2x+y\sqrt{3}=\mp6+3\sqrt{3}$. **253.** a) $2x-3y\pm\pm10=0$; b), d) $4x+5y\pm25=0$; c) $x+5y=\pm10{,}05$. **254.** a), b) $\varphi==27°53'9''$. **255.** $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{a(a+e)}{e(a-e)}}$. **256.** a) $x+y=\sqrt{34}$; b) $x+y=\pm5$. **257.** a) $67°22'48''$; b) $113°35'$; c) $67°42'33''$; d) $56°19'$. **259.** a) $y=x$, $y==\frac{-9}{16}x$; b) $y=2x$, $y=-\frac{2}{9}x$. **260.** $104y=\pm3\sqrt{10}x$, $65y=\pm48\sqrt{10}x$, $\varphi=72°1'48''$.

261. $2x-5y=6$. **262.** $3x-2y=\pm20\sqrt{3}$. **264.** $M\equiv(5,8)$. **265.** a) $x++y=\pm3$; $x-y=\pm3$; b) $2x\pm y=\pm5$. **268.** a) $24x^2-25y^2=600$; b) $5x^2-11y^2-55=0$; c) $2x^2-5y^2-4x-10y=13$; d) $4x^2-y^2++16x-10y=13$. **269.** a) $x^2-4y^2=4$; b) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$; c) $3x^2--5y^2=30$. **270.** $d_1=1$, $d_2=9$.

271. a) $9x^2-16y^2=144$; b) $9\,.\,x^2-7y^2=63$; c) $\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{5}y^2=1$. **272.** a) $9x^2-16y^2=144$; b) $x^2-5y^2=20$. **273.** a) $y^2-16x^2+2y+64x--47=0$; b) $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$; c) $x'y'=-8$, kde $x'=x-3$, $y'=y+2$. **274.** a) $S\equiv(-3,2)$, $a=b=3$; b) $S\equiv(2,1)$, $a=\sqrt{15}$, $b=\sqrt{10}$; c) $S\equiv\equiv(-1,0)$, $a=3\sqrt{3}$, $b=3$; d) $S\equiv(3,-2)$, $a=b=2\sqrt{2}$; e) $S\equiv(1,-2)$, $a=5$, $b=3$. **275.** Společné body: b) $M\equiv(2,0)$, $N\equiv(-5{,}2;7{,}2)$; a) neexistuje; c) $\left(-6\frac{1}{4},6\right)$; d) $\left(\pm5,\pm6\frac{2}{3}\right)$; e) $\left(-3,-6\frac{1}{4}\right)$. **276.** $x_1=3$, $x_2=$

$= -7$, s osou y neexistuje. **277.** $102°40'49''$. **278.** a) $15x - 8y = 18$, $24x + 45y = 260$; b) $2x \pm y = 1$; $2y \pm x \mp 8 = 0$; c) $3y - 4x = 16$; d) α) $5x + 4y = 39$, $5x - 4y = 23$; β) $4x - 5y = 33{,}25$, $4x + 5y = 53{,}25$. **279.** a) $x + 3 = 0$, $y = 0$; b) $x = 3$, $5x + 4y + 9 = 0$; c) $x = 6$, $8y - 5x = 18$; d) $20x - 9y = 48$, $5x + 3y + 9 = 0$; e) $x + 3y + 6 = 0$, $3x - y + 38 = 0$. **280.** $n^2 + b^2 - a^2m^2 = 0$.

281. $m = \pm 1$. **282.** a) $9x^2 - 25y^2 = 225$; b) $4x^2 - 9y^2 = 36$. **283.** a) $y = \pm \frac{4}{5}x$, $77°19'12''$; b) $y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}x$, $83°37'13''$. **284.** a) $x - y = 0$, $x + y - 2 = 0$; b) $2x \pm 3y - 6 = 0$; c) $3\sqrt{2}x \pm 4y - 6\sqrt{2} \pm 4 = 0$. **285.** $(a, 0)$, $(-a, 0)$; $\left(\frac{5}{3}a, \frac{4}{3}b\right)$. **286.** $\operatorname{tg} \gamma = \frac{-1}{n}\sqrt{m^2 - n^2}$. a) $\gamma = 120°$; b) $\gamma = 135°$. **288.** $2x - y - 6 = 0$; b) $x - 38y - 3 = 0$.

7. OPAKOVÁNÍ

291. 1,58 m/s. **292.** 453,5 km/h, azimut 135°13′. **296.** a) $(5, -3)$; b) $(0,0)$. **297.** $a_1 \equiv (2, -8)$; $b_1 \equiv (-11,0)$; $c_1 \equiv (-8, -12)$, $d_1 \equiv (-1,5)$. **298.** 6,5 kW. **299.** $B \equiv (10,10)$, $D \equiv (2,6)$. **300.** $A \equiv (r, 0)$, $B \equiv \left(r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $C \equiv (0, r)$; $D \equiv \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$, $E \equiv (-r, 0)$, atd.

301. C na hraniční přímce, A, B v opačných polorovinách. **302.** a) $(30,15)$; b) $(14,7)$; c) v ∞; d) $(12{,}5; 6{,}25)$. **303.** a) $(-11,8)$; b) $(1,1)$. **304.** a) $P \equiv \left(\frac{23}{3}, 0\right)$, $Q \equiv \left(0, \frac{23}{2}\right)$; c) $P \equiv (-3{,}5; 0)$, $Q \equiv (0,2)$; b) $P \equiv (0,2)$, osu x neprotíná. **305.** a) $P \equiv \left(\frac{-1}{3}, \frac{5}{3}\right)$; c) $t_1 = -3$, $P \equiv (0,4)$. **306.** a) $5x + 3y = 0$; b) $6x - 5y + 4 = 0$; c) $3x - 5y - 19 = 0$; d) $x(3 - a) - y(b - 1) = -ab + 3$. **307.** a) $5x = 2y$; b) $4x - 3y = 4$; c) $x \cos\alpha = y \sin\alpha + 3 \sin\alpha \cos\alpha$; d) $x^2 + y^2 = 16$; e) $9x^2 + 25y^2 = 225$. **308.** $y = 2x^2 - 1$; b) $y = -2x \cdot \sqrt{1 - x^2}$; c) $y = x$; d) $x^2 + y^2 = 1$; e) elipsa pro $n = 4, 5, 7, 8, 10, 11$; kružnice pro $n = 9$, přímka pro $n = 6$. **309.** a) Protíná; b) neprotíná. **310.** $a_1(b_2 - b_3) + a_2(b_3 - b_1) + a_3(b_1 - b_2) = 0$.

311. a) 135°; b) 120°; c) 153°26′6″. **312.** a) $k = \frac{3}{4}$, $p = -\frac{10}{3}$, $q = 2{,}5$; b) $k = -2$, $p = 3{,}5$, $q = 7$; c) $k = \frac{6}{5}$, $q = p = 0$. **313.** $y - x - 1 = 0$, $\frac{y - x - 1}{\sqrt{2}} = 0$; b) $y + x + 4 = 0$, $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-4} = 1$, $\frac{y + x + 4}{\sqrt{2}} = 0$; c)

$y - x\sqrt{3} - 8 + \sqrt{3} = 0$, $\frac{-x\sqrt{3}}{8-\sqrt{3}} + \frac{y}{8-\sqrt{3}} = 1$, $\frac{y - x\sqrt{3} - 8 + \sqrt{3}}{2} = 0$; d) $y - x \operatorname{tg} 70° - 5 - 4 \operatorname{tg} 70° = 0$, $\frac{y}{16} + \frac{11x}{-64} = 1$, $\frac{11x - 4y + 64}{\sqrt{137}} = 0$.
314. a) $4x - 11y - 93 = 0$; b) $x = 4 - 2t$, $y = -7 + 9t$; c) $4x + 3y + 5 = 0$; d) $y = -7$. **315.** a) $x = 2 + 4t$, $y = 5 + 3t$; b) $x = 2 + 2t$, $y = 5 + 3t$. **316.** a) $x - 2y + 3 = 0$, $2x - y - 5 = 0$, $x + y - 8 = 0$; b) $3x - 2y - 2 = 0$, $x + 5y + 5 = 0$, $2x + 3y + 3 = 0$. **317.** a) $\varphi = 90°$; b) $\operatorname{arctg} \frac{3}{4} = 36°52'$; c) $\operatorname{arctg} \frac{19}{8} = 67°10'$. **318.** $4x - y - 12 = 0$, $x + 3y - 29 = 0$, $x + 5y - 3 = 0$. **319.** a) $3x + y + 20 = 0$, $x + 2y + 15 = 0$, $5x + 55y + 112 = 0$; b) $2x + 3y + 19 = 0$, $2x - 3y - 23 = 0$, $x - 13y - 225{,}4 = 0$. **320.** a) $c = 1 - 2b$, $a = 2b$, $b \neq 0$, $b \neq \frac{1}{2}$; b) $a \neq 2b$, $b \neq 0$, $b \neq \frac{1}{2}$, $c \neq 1 - 2b$; c) $a \neq 2b$, $b \neq 0$.

321. $\alpha = 18°21'$, $\beta = 108°27'$, $2b^2 : 3$. **322.** $a^2 : 5$. **323.** $A \equiv (6, -3)$, $B \equiv (5, 4)$; $A' \equiv \left(\frac{93}{25}, \frac{-51}{25}\right)$, $B' \equiv \left(\frac{68}{25}, \frac{124}{25}\right)$. **324.** a) $y = \frac{67}{119}$; b) $5x - 4y = 16$. **327.** a) $\frac{44\sqrt{3}}{15}$; b) $\frac{14}{3}\sqrt{3}$. **328.** $x + 4y - 4 = 0$. **329.** a) $90°$, $45°$, $45°$; b) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 26°33'54''$, $\gamma = 63°26'6''$. **330.** $x - 7y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$.

331. $y = x$, $y = x + 6$. **332.** a) $\frac{|3x - 10y + 12|}{\sqrt{109}} : \frac{|3x - 2y + 6|}{\sqrt{13}} = 2 : 3$; b) $3\sqrt{5}\,|3x - 7y + 4| = 2\sqrt{58}\,|x - 2y + 3|$; c) $3(\sqrt{109} \pm \sqrt{13})\,x - 2(\sqrt{109} \pm 5\sqrt{13})\,y + 6(\sqrt{109} \pm 2\sqrt{13}) = 0$; d) $\frac{|3x - 7y + 4|}{\sqrt{58}} = \frac{|x - 2y + 3|}{-\sqrt{5}}$. **333.** a) Vnitřek čtverce s vrcholy: $(0, 7)$, $(-5, 2)$, $(1, -6)$, $(6, 1)$; b) $(6, 2)$, $(1, -3)$, $(-4, 2)$, $(1, 7)$; c) nevyhovuje žádný bod. **334.** Úsečka DE, kde D, E jsou průsečíky osy přilehlých úhlů ke třetí straně, se stranami protilehlými. **335.** Úsečka S_1S_2, kde S_1 je střed úsečky AB, S_2 střed výšky v_c. **336.** Svazek přímek se středem: a) v bodě $P \equiv (0, b)$; b) $P \equiv (a, 0)$. **337.** a) $x^2 + y^2 - 5y = 10$; b) $(x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$, $(x + 13)^2 + (y + 13)^2 = 169$; c) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$, $(x + 4)^2 + (y - 10)^2 = 100$; d) $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 + \left(y - 116\frac{12}{25}\right)^2 = \left(112\frac{13}{25}\right)^2$; e) $S_1 \equiv \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$, $r_1 = \frac{2}{3}$;

$S_2 \equiv (1{,}5)$, $r_2 = 2$; $S_3 \equiv \left(\frac{19}{6}, \frac{2}{3}\right)$, $r_3 = \frac{7}{3}$, $S_4 \equiv \left(\frac{-3}{2}, \frac{5}{4}\right)$, $r_4 = \frac{7}{4}$. **338.** $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$. **339.** 33°41′. **340.** $x^2 + y^2 - 8y = 0$.

341. a) $y = \frac{4}{3}x, y = 0$; b) $15x + 8y = 0$, $y = 0$. **342.** $x + y = 3$. **343.** $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$, $(0{,}6)$, $(1, -1)$, $(-8{,}2)$. **344.** $x^2 + y^2 = ax$. **345.** $x^2 + y^2 = 4$. **346.** $x^2 + y^2 = 14$ nebo $4(x^2 + y^2) = 2(b^2 + c^2) - a^2$. **348.** $\varrho = r(3 - 2\sqrt{2})$; $p = q = \pm 2r(\sqrt{2} - 1)$. **349.** a) $(18, \pm 12)$; b) $(3, \pm 3\sqrt{2})$. **350.** $(8, 12)$, $d = 9$.

351. 6 m; 3,375 m; 1,5 m; 0,375 m. **352.** a) $(y - n)^2 = 12(x - m)$ nebo $(x - m)^2 = 12(y - n)$; b) $y^2 = 10(x - 2{,}5)$; c) $x^2 = -\frac{1}{4}y$; d) $x^2 = 8y$. **353.** a) $a^2 = (x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2):(y_2^2 - y_1^2)$, $(x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2):(x_1^2 - x_2^2) = b^2$, $|x_1| \neq \neq |x_2|$, $|y_1| \neq |y_2|$; b) $a^2 = \frac{128}{5}$, $b^2 = \frac{32}{3}$. **354.** a) $\pm y - x + 3 = 0$; b) $y = 3x + 1$; c) $x - 2y + 12 = 0$; d) $3x + y + 1 = 0$, $3y - x = 27$. **355.** $x_1 = y_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. **356.** $y = \mp \frac{b^2}{a^2 k} x$; $\pm 3\sqrt{2}x \mp 4\sqrt{2}y - 24 = 0$. **357.** a) $100x - 60y + 81 = 0$; b) $2x - 3y \pm 10 = 0$; c) $4\sqrt{2x} - \sqrt{2y} \pm 16 = 0$. **358.** $2x - y \pm 12 = 0$; $2x - y = \pm 4\sqrt{6}$. **359.** $x \pm y \pm 3 = 0$. **360.** $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

361. $9x^2 + 25y^2 = 225$. **363.** $\left(\pm \frac{8\sqrt{5}}{5}, \pm \frac{3\sqrt{15}}{5}\right)$. **365.** $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$. **366.** $\frac{(x - 1{,}5)^2}{2{,}5^2} + \frac{y^2}{4} = 1$. **367.** a) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{5} = 1$, $O' \equiv (-1, -1)$; b) $x^2 - 4y^2 = 4$, $O' \equiv (-3{,}0)$; c) $x^2 + y^2 = 18$, $O' \equiv (2, -3)$; d) $x^2 + 5y^2 = 4$, $O' \equiv (-2, 2)$. **368.** $S \equiv (-5, \pm 4\sqrt{3})$, $n = r = 36 \pm 20\sqrt{3}$. **369.** a) Čtvrt kružnice o rovnici $x^2 + y^2 = p^2$; b) $\left(\frac{c^2}{4} + a^2\right)(x^2 + y^2) - 2acxy - \left(\frac{c^2}{4} - a^2\right) = 0$; c) čtvrt elipsy o rovnici $p^2x^2 + q^2y^2 = p^2q^2$; d) $(p^2 + a^2)x^2 + (a^2 + q^2)y^2 - 2a(p + q)xy - (pq - a^2)^2 = 0$. **370.** a) $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $A \equiv (0{,}3)$, $B \equiv \left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$, $C \equiv (-3, 0)$; b) $x = -2 + \cos t$, $y = 5 + \sin t$, $A \equiv (-2{,}6)$, $B \equiv \left(-2 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{11}{2}\right)$, $C \equiv (-3, 5)$; c) $x = 4 + 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $A \equiv (4, 2)$, $B \equiv (4 - \sqrt{3}, 1)$, $C \equiv (2{,}0)$. a) $(3{,}0)$, $(0{,}3)$; b) $\left(\frac{7 \pm \sqrt{7}}{2}, \frac{-1 \mp \sqrt{7}}{2}\right)$; c) $\left(-2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 5 \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

371. $x = -1 + 3\cos t$, $y = 2 + \sin t$, $A \equiv \left(-1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $t_K = \frac{\pi}{2}$, $t_L = \pi$, $t_M = \frac{11}{6}\pi$. **372.** $x = 8 + \frac{4}{\cos t}$, $y = -1 + 3\,\mathrm{tg}\, t$, $A \equiv (4, -1)$, $B \equiv (8 + 4\sqrt{2}, -4)$, $C \equiv (0, -1 - 3\sqrt{3})$, $t_D = 0$, $t_E = \frac{\pi}{4}$. **373.** a) $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{1} = 1$; b) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$; c) $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$; d) $y^2(1+x) = 1$. **374.** $x = ct$, $y = -\frac{1}{2}gt^2$, $y = y_0 - \frac{g}{2c^2}x^2$. **375.** $\left(x - \frac{c^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 = \frac{2c^2\cos^2\alpha}{g}\left(y - \frac{c^2 . \sin^2\alpha}{2g}\right)$, $V \equiv \left(\frac{c^2 \sin 2\alpha}{2g}, \frac{c^2 \sin^2\alpha}{2g}\right)$, $p = \frac{c^2\cos^2\alpha}{g}$. **376.** a) $xb\cos\varphi + ya\sin\varphi = ab$; b) $x\left(\frac{b}{\cos\varphi}\right) - y \,.\, a\,\mathrm{tg}\,\varphi = ab$; c) $4x + 2y - 3 = 0$. **377.** a) $\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{41}{2} = 87°12'$; b) $\alpha = 30°$. **378.** $x^2 = \frac{2mv^2}{E.e}y$.

OBSAH

Záznam o použití učebnice

Poř. číslo	Jméno žáka	Školní rok	Stav učebnice	
			na zač. šk. r.	na konci šk. r.
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Edice Pomocné knihy pro žáky

FRANTIŠEK VEJSADA, FRANTIŠEK TALAFOUS

SBÍRKA ÚLOH Z MATEMATIKY

PRO GYMNASIA

Obrázky narýsoval dr. Ing. Jan Volejník
Vydání 2. – Praha 1973 – Počet stran 688
Odpovědná redaktorka: Květoslava Brázdová
Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk
Technická redaktorka: Eva Skřivánková

Vytiskl Tisk, knižní výroba, n. p., Brno, závod 1
AA 36,17 (34,70 AA textu, 1,47 AA grafiky) – VA 37,69
Náklad 3000 výtisků
Tematická skupina a podskupina 03/2
Cena vázaného výtisku Kčs 29,50
101/23,815

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze
jako svou publikaci č. 05-10-43

1271

14-265-73 Kčs 29,50