Domácí úkol č. 8 k přednášce NMAG111/113: Lineární algebra 1
zimní semestr 2025/2026

Datum odevzdání **středa 3. 12. 2025, 23:55 hod.**

(8.1) V prostoru $\mathbb{R}^{3\times 3}$ reálných 3×3 matic nad tělesem reálných čísel uvažujme jeho podprostor $\mathbf{W}$ určený množinou

$$W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A \right\}.$$

Najděte nějakou bázi prostoru $\mathbf{W}$.

Poznámka: To, že $\mathbf{W}$ je skutečně podprostorem prostoru $\mathbb{R}^{3\times 3}$, nemusíte ověřovat, ale rozmyslete si to.

Nápověda: Napište si, jak vypadá obecný prvek prostoru $\mathbf{W}$, a vyřešením vhodné soustavy odhadněte bázi. Důkaz, že nalezená posloupnost **matic** (nikoliv aritmetických vektorů) tvoří bázi prostoru $\mathbf{W}$, můžete provést z definice báze.

(8.2) Fibonacciho posloupnost $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots) \in \mathbb{R}^{\omega}$ splňující vztah $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ z příkladu 5.54 ze skript byla na začátku 13. století použita italským matematikem známým jako Fibonacci k popsání růstu populace králíků. Podmínky jsou poněkud idealizované. Číslo a_n popisuje velikost populace (= počet párů) po n měsících, pokud předpokládáme, že

- v nultém měsíci začneme s jedním párem mláďat,
- nově narozené páry jsou produktivní od druhého měsíce svého života,
- každý měsíc se každému produktivnímu páru narodí další pár mláďat,
- králíci nikdy neumírají, nejsou nemocní atd.

Co se stane, pokud se změní naše idealizované podmínky? Řekněme, že do příběhu vstoupí pan Bonifacci, konkurent pana Fibonacciho, který také množí králíky, ale nedaří se mu tak dobře, takže po prvním vrhu přestanou být králíci plodní. Čili počet králičích párů je dán vztahem

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$$

pro všechna $n \geq 3$ (tj. přežívají ti z minulé generace, rodí jen ti z předminulé generace, ale už ne ti z generace předtím).

Uvažujte podprostor $\mathbf{V}$ prostoru $\mathbb{R}^{\omega}$ sestávající ze všech posloupností splňujících tuto rovnici. Jaká je jeho dimenze? Najděte bázi B prostoru $\mathbf{V}$ sestávající z posloupností, které jsou geometrickou nebo aritmetickou posloupností (tj. posloupností tvaru $a_n = q^n$, resp. $a_n = qn$, pro nějaké $q \in \mathbb{R}$). Napište matici přechodu od „kanonické báze“ K k vaší nalezené bázi B. „Kanonickou bází“ K v této úloze myslíme bázi sestávající z posloupností, které začínají $(1, 0, 0, \dots)$, $(0, 1, 0, \dots)$ a $(0, 0, 1, \dots)$. Napište explicitní vzorec pro posloupnost, která odpovídá situaci, že jste si v nulté generaci koupili jeden pár mláďat (tj. $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 2$).

Nápověda: Inspirujte se příkladem 5.54. Rozdíl je v tom, že tuto rovnici řeší nejen geometrická (tj. exponenciální) posloupnost, ale také aritmetická (tj. lineární) posloupnost. Nenechte se rozhodit tím, že ty geometrické posloupnosti jsou trochu divné.

Bonusový problém: Pan Mičurinetti byl nešťastný, že králíci přibývají tak pomalu, a tak vyšlechtil plemeno, u kterého jsou králici plodní dva měsíce. Čili počet králičích párů je dán vztahem

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-4}.$$

Řešte stejnou úloh pro tento vztah.

Nápověda: Na výpočet kořenů jistého polynomu třetího stupně můžete použít `www.wolframalpha.com` . Nenechte se rozhodit tím, že vyjdou komplexní kořeny (co to znamená?).

Na závěr si všimněte, jaké je tzv. asymptotické chování všech těch posloupností. Pan Fibonacci má v n-té generaci přibližně $c \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ králíků, pro jistou konstantu c (ta druhá geometrická posloupnost jde limitně k nule), čili jde o exponenciální růst o základu $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$. Jak zjistíte, pan Mičurinetti svým šlechtěním dosáhl také exponenciálního růstu, o základu přibližně 1.32. Pan Bonifacci je na tom se svým lineárním růstem podstatně hůře. (Nejlépe je na tom samozřejmě kouzelník Tuttifrutti, který umí králíka zdvojit mávnutím kouzelné hůlky a dosahuje tak základu 2, a nejhůř pan Kaputti, kterému králíci po prvním vrhu navíc umírají, a tak dostane posloupnost konstantní. Teoretická řešení se zápornými a necelými počty králíků nechme stranou.)