Úvod do sem patří název

Zápisky z přednášky Jméno Příjmení učitele

Jméno Příjmení

Úvodní informace

Značení

Kapitola 1

Primitivní funkce????

Věta 1 (LHospital). *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechť $\exists$ vlastní $f'(x), g'(x)$, navíc*

Důkaz. 1. $x \to x_0^+, x_0 \in \mathbb{R}$, případ a); $\epsilon > 0$ dáno: $\exists \delta > 0$ t. ž. $\forall c \in \mathscr{P}_+(x_0, \delta)$ platí:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathscr{U}(L, \epsilon)$$

TRIK do/předefiniceinujme $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (nemá vliv na $\lim_{x \to x_0}$) $\implies f, g$ spojité v $[x_0, x_0 + \delta), \delta > 0$ malé

- v bodě x_0 zprava $(f(x), g(x) \to 0 = f(x_0) = g(x_0), x \to x_0)$
- v bodech $x \in (x_0, x_0 + \delta) \impliedby$ Věta 4. 1. ($\exists f', g'$ vlastní)

Buď $x \in \mathscr{P}_+(x_0, \delta)$ pevné, libovolné Aplikuji větu 6. 8. (C. o stř. h.) na $[x_0, x] \implies \exists x \in [x_0, x] \subset \mathscr{P}_+(x_0, \delta)$ t. ž. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) - f(x)}{g(x_0) - g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathscr{U}(L, \epsilon)$

2. $x \to +\infty$, případ a);

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to 0+} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})} = (LP1.) = \lim_{y \to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{y}) \cdot \frac{-1}{y^2}}{g'(\frac{1}{y}) \cdot \frac{-1}{y^2}} = (L2.3.) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3. $x \to x_0^+$, případ b), tj. $|g(x)| \to +\infty, x \to x_0$ Užiji V. 6. 8. na $[x, y]$:

$$\exists c \in (x, y) \text{ t. ž. } \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \implies$$

pujčím si $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(c)}{g'(c)}(1 - \frac{g(y)}{g(x)}) = P_1 + P_3 \cdot P_2$, fixuji y blízko $x_0 \implies c$ blízko x_0, když $x \to x_0 \implies P_3 \to L, P_1 \to 0, P_2 \to 1$, a tedy PS blízko L.

□

Poznámka 1. Úmluva: $I, J \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly.

Definice 1. Řekneme, že $f(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost, pokud $\forall a, b, \in I, \forall \gamma$ mezi $f(a), f(b) \exists c$ mezi a, b t. ž. $f(c) = \gamma$. (Darbouxova věta: $f(x)$ spoj. v $I \implies$ má v I Darboux. vlast.)

Věta 2. ** Nechť I je otevřený interval, $f(x)$ je spojitá v I, nechť $\exists f'(x)$ vlastní $\forall x \in I$. Pak $f'(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost.*

Věta 3. *Monotonie a znaménko derivace Nechť $I \subset \mathbb{R}$ lib. interval, $f(x)$ je spojité v I, nechť $\exists f' > 0$ (resp. ≥ 0, ≤ 0, < 0) $\forall x$ vnitřní bod I. Potom $f(x)$ je rostoucí (resp. neklesající, nerostoucí, klesající) v I.*

Důkaz. Nechť $x_1 < x_2 \in I \implies^{?} f(x_1) < f(x_2)$ užiji V. 6. 5. (Lagrange) na $[x_1, x_2] \subset I$ – spojitost OK, a taky $\exists f'(x) \forall x \in (x_1, x_2) \subset I \implies \exists c \in (x_1, x_2)$ t. ž. $\frac{f(x_2)-f(x_2)}{x_2-x_1} = f'(c) \iff f(x_1) - f(x_2) = f'(c) \cdot (x_1 - x_2) > 0$ □

Příklad 1. $f(x) = x^n, I = [0, +\infty), n \in \mathbb{N}$ $f'(x) = nx^{n-1} > 0, x \in (0, +\infty)$ – otevřený interval je právě vnitřek intervalu $I \implies (V6.10.) f(x)$ rostoucí v I.

Definice 2. Funkce $f(x)$ se nazve konvexní (resp. ryze konvexní, konkávní, ryze konkávní) v I, jestliže $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I : \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq$ (resp. $<, \geq, >$) $\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

Věta 4. *Konvexita a monotonie derivace Nechť I interval s krajními body $a < b$. Nechť $f(x)$ spojitá v I. Nechť $\exists f'(x) \forall x \in (a, b)$ a je rostoucí (resp. neklesající, klesající, nerostoucí). Potom $f(x)$ je ryze konvexní (resp konvexní, ryze konkávní, konkávní) v I.*

Důkaz. Nechť $x_1 < x_2 < x_3 \in I \implies^{?} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$. Užiji 2x V. 6. 5. (Lagrange) na $[x_1, x_2]$, pak na $[x_2, x_3]$: $\exists c \in (x_1, x_2)$ t. ž. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$ a $\exists d \in (x_2, x_3)$ t. ž. $\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(d)$. Zřejmě $d > c \implies f'(c) < f'(d) \implies$ to co dk. □

Příklad 2. $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ – spojité v $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+|x|)^2} \cdot |x|' = \frac{-\operatorname{sgn} x}{(1+|x|)^2} (x \neq 0) = \begin{cases} \frac{-1}{(1+|x|)^2}, x > 0 \\ \frac{1}{(1+|x|)^2, x<0} \end{cases}$$

V. 6. 11. $\implies f$ je ryze konvexní v $(-\infty, 0)$ a v $(0, +\infty)$ (ale ne už v $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

Poznámka 2. Ekvivalentní definice konvexity $\forall a, b, \in I, \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$.