

DÚ Diskrétní matematika – Sada 5

Jan Romanovský

9. listopadu 2025

Příklad 1. Různé cesty.

Máme obdélník $m \times n$, čili mřížku $m+1 \times n+1$. Smíme se pohybovat jen nahoru nebo doprava, tzn. nesmíme se vracet. Každá cesta tak bude stejně dlouhá a každá bude mít stejný počet pohybů nahoru a doprava. pochybů doprava bude m a pochybů nahoru bude n . Hledáme tedy permutace s opakováním $P_0(m, n) = \frac{(m+n)!}{m!n!}$.

Příklad 2. Slova.

Ω ... všechna možná pořadí

A ... to, co chceme

A' ... doplněk A v Ω , tj. vypuštěním lze dostat alespoň jedno ze slov

K ... vypuštěním lze poskládat „PONK“

L ... vypuštěním lze poskládat „DOBA“

M ... vypuštěním lze poskládat „COP“

$|\Omega| = 16!$ – permutace šestnácti prvků

$|A'| = |K| + |L| + |M| - |K \cap L| - |K \cap M| - |L \cap M| + |K \cap L \cap M|$

$|K| = \binom{16}{4} \cdot 12!$ – vyberu, kde budou v pořadí písmena P, O, N, K a potom skládám pořadí zbylých písmen

$|L| = \binom{16}{4} \cdot 12!$ – vyberu, kde budou v pořadí písmena D, O, B, A a potom skládám pořadí zbylých písmen

$|M| = \binom{16}{3} \cdot 13!$ – vyberu, kde budou v pořadí písmena C, O, P a potom skládám pořadí zbylých písmen

$|K \cap L| = \binom{16}{7} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 9!$ – kombinačním číslem vybírám, kde budou písmena P, O, N, K, D, B, A , dalšími dvěma činiteli počítám pořadí těchto písmen (O uprostřed, dvě možnosti před O , pět po něm) a posledním činitelem skládám pořadí zbylých písmen

$|K \cap M| = 0$ – ve slově „PONK“ je P před O , ve slově „COP“ naopak – nelze poskládat nikdy

$|L \cap M| = \binom{16}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10!$ – kombinačním číslem vybírám, kde budou písmena D, O, B, A, C, P , dalšími dvěma činiteli počítám pořadí těchto písmen (O uprostřed, dvě možnosti před O , tři po něm) a posledním činitelem skládám pořadí zbylých písmen

$|K \cap L \cap M| = 0$ – viz $|K \cap M|$

$$|A| = |\Omega| - |A'| = |\Omega| - |K| - |L| - |M| + |K \cap L| + |K \cap M| + |L \cap M| - |K \cap L \cap M| = 15\,907\,962\,470\,400$$