Domácí úkol č. 4 k přednášce NMAG111/113: Lineární algebra 1
zimní semestr 2025/2026

Datum odevzdání **středa 5. 11. 2025, 23:55 hod.**

(4.1) Najděte všechny matice A typu 2×3 nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ takové, že pro příslušné zobrazení f_A platí zároveň následující dvě podmínky.

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_7^3 : f_A(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\} = \{s(3,0,1)^T + t(0,4,1)^T : s,t \in \mathbb{Z}_7\}$$
$$\{f_A(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_7^3\} = \{t(3,4)^T : t \in \mathbb{Z}_7\}$$

Poznámka: Obě podmínky jsou rovnosti množin; proto jsou nalevo a napravo různá písmena ($\mathbf{x}$ versus s a t, resp. jenom t).

Návodné otázky: Jak určit druhý řádek matice A pomocí prvního řádku? (Podívejte se na druhou podmínku a vzpomeňte si na řádkovou interpretaci řešení soustav lineárních rovnic.) Jak bude vypadat matice A po Gaussově eliminaci? (Dopočtěte prvky matice z první podmínky.)

(4.2) Najděte reálnou čtvercovou matici A řádu 3 takovou, aby příslušné zobrazení f_A bylo kolmou projekcí na přímku $\{t(1,2,1)^T : t \in \mathbb{R}\}$.

Poznámka: Kolmá projekce vektoru $\mathbf{u}$ na danou přímku P je ten vektor $\mathbf{v} \in P$, pro který je vektor $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ kolmý na směrový vektor přímky P. Využijte následující poznatek bez důkazu: dva vektory $(a,b,c)^T$, $(d,e,f)^T$ jsou kolmé právě tehdy, když $ad + be + cf = 0$.

Návod: Nehledejte v tom nic složitého: napište si souřadnice obecného vektoru, spočtěte, kam se zobrazí, a z těchto dat nějak poskládejte tu matici. Pozor, a priori nepředpokládejte, že jde o zobrazení dané maticí, to není ze zadání zřejmé (teoreticky by mohla být odpověď, že taková matice neexistuje, že úloha nemá řešení).

Bonusový problém: Najděte matici odpovídající projekci na rovinu $ax+by+cz=0$ podél přímky se směrovým vektorem $(d,e,f)^T$.