Cvičení k přednášce NMAG111+NMAG113 Lineární algebra 1

Zadání

Verze ze dne 26. září 2025

13 Permutace a determinanty

Cíle cvičení:

- Procvičit výpočet determinantů.
- Naučit se počítat znaménko permutace.

Řešené příklady:

Úloha 13.1. Nechť $p = (135)(4798)(26)$ a $q = (18)(247693)$ jsou dvě permutace z S_9. Spočítejte permutace $p \circ q$, $q \circ p$, p^{-1} a q^{-1}.

Úloha 13.2. Určete znaménka permutací $p = (17)(36)(2458)$, p^{-1}, $q = (245)(3687)$, $r = (13)(2675)$, $p \circ q \circ r$, $q^{-1} \circ r \circ p^{-1} \circ q \in S_8$.

Úloha 13.3. Napište permutace $p = (13475)$ a $q = (19)(267)(3548)$ z S_9 jako součin transpozic.

Úloha 13.4. Spočítejte nad tělesy $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ determinanty matic

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Úloha 13.5. Rozhodněte, pro která reálná a jsou regulární reálné matice

$$P(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(a) = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(a) \cdot Q(a), \quad P(a)^{257} \cdot Q(a)^{374}.$$

Další základní příklady k počítání:

Úloha 13.6. Spočítejte determinant matice

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

nad tělesem racionálních čísel.

Úloha 13.7. Rozhodněte, pro která $x \in \mathbb{Z}_5$ je matice

$$\begin{pmatrix} 2x & x+3 & 2x+1 \\ x+4 & 3x+2 & 3 \\ x+1 & x & 4x \end{pmatrix}$$

nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ singulární.

Úloha 13.8. Určete objem rovnoběžnostěnu vytyčeného vektory $(1,1,0)$, $(3,5,-2)$ a $(4,0,7)$.

Obtížnější příklady:

Úloha 13.9. Určete determinant matice $n \times n$, která vznikne jako levý horní roh Pascalova trojúhelníku:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \dots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Úloha 13.10. Spočtěte determinant matice typu $n \times n$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Výsledky:

13.1. $p \circ q = (1495)(27)(368)$, $q \circ p = (129)(3587)(46)$, $p^{-1} = (62)(8974)(531)$, $q^{-1} = (18)(239674)$

13.2. $\operatorname{sgn} p = -1 = \operatorname{sgn} p^{-1}$, $\operatorname{sgn} q = -1$, $\operatorname{sgn} r = 1$, $\operatorname{sgn}(p \circ q \circ r) = 1$, $\operatorname{sgn}(q^{-1} \circ r \circ p^{-1} \circ q) = -1$.

13.3. např. $p = (13) \circ (34) \circ (47) \circ (75)$, $q = (19) \circ (26) \circ (67) \circ (35) \circ (54) \circ (48)$

13.4. nad $\mathbb{Q}$: ***(a)*** 5 ***(b)*** -5 ***(c)*** -30 ***(d)*** 5; nad $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ jen upravíme modulo 5 a 7.

13.5. $P(a)$: $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$; $Q(a)$: $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$; $P(a) \cdot Q(a)$: $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$; $P(a)^{257} \cdot Q(a)^{374}$: $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

13.6. Vyjde -344. Práci si výrazně usnadníme, odečteme-li první sloupec od čtvrtého.

13.7. pro $x = 3$

13.8. 6

13.9. 1 pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

13.10. $2n + 1$