

Jan Romanovský
Gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše
4.A
A-I-1

Předpokládejme, že pro reálná čísla a, b mají výrazy $a^2 + b$ a $a + b^2$ stejnou hodnotu. Jaká nejmenší může tato hodnota být?

$$\begin{aligned}a^2 + b &= a + b^2 \\a^2 - b^2 &= a - b \\(a + b)(a - b) &= a - b\end{aligned}$$

$$i. \ a - b = 0 \implies a = b:$$

$$\begin{aligned}\implies & \text{hledáme min. fce } f : y = x^2 + x \\f' : y = 2x + 1, \text{ extrém pro } y = 0 & \implies x = \frac{-1}{2} \\f'' : y = 2 & \implies \text{minimum} \\\implies a = b = \frac{-1}{2}, a^2 + b = a + b^2 &= \frac{-1}{4}\end{aligned}$$

$$ii. \ a - b \neq 0 \implies a \neq b$$

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= (a - b) \\a + b &= 1 \\b &= 1 - a \\\implies & \text{hledáme min. fce } f : y = x^2 - x + 1 \\f' : y = 2x - 1, \text{ extrém pro } y = 0 & \implies x = \frac{1}{2} \\f'' : y = 2 & \implies \text{minimum} \\\implies a = \frac{1}{2}, a^2 - a + 1 &= \frac{3}{4} > \frac{-1}{4}\end{aligned}$$

Tato hodnota může být nejméně $\frac{-1}{4}$.