# DÚ Lineární algebra – Sada 1

Jan Romanovský

14. října 2025

**(1.1)** Pro která $a \in \mathbb{R}$ je zobrazení $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ „na“?

$$f_a(x, y) = ((a + 2)x + ay, ax + y)$$

Převedeme předpis fce na soustavu rovnic, pokud $\exists$ řešení pro každou pravou stranu, tj. „parametry“ na sobě budou nezávislé, pokryjí celou množinu do které zobrazujeme, tj. fce bude „na“. Hledáme $a$ pro která toto platí:

$$\begin{aligned} (a + 2)x + ay &= k \\ ax + y &= l \end{aligned}$$

i. $a = 0$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{k}{2} \\ y &= l \end{aligned}$$

ii. $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{k - (a + 2)x}{a} \\ ax + \frac{k - (a + 2)x}{a} &= l \\ ax - x - \frac{2}{a}x &= l - \frac{k}{a} \\ \left(a - 1 - \frac{2}{a}\right) x &= l - \frac{k}{a} \end{aligned}$$

1. $a - 1 - \frac{2}{a} = 0 \implies a^2 - a - 2 = 0 \implies (a - 2)(a + 1) = 0:$

$$k = al$$

2. $a - 1 - \frac{2}{a} \neq 0:$

$$x = \frac{l - \frac{k}{a}}{a - 1 - \frac{2}{a}}$$

Vidíme, že v případech $a = 2, a = -1$ nelze $(k, l)$ vybrat libovolně, fce $f_a$ pro ně tedy není „na“. Jinak vždy jindy lze vybrat $(k, l)$ libovolně, funkce $f_a$ pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{2, -1\}$ je „na“.