

PIE

Příklad 1. Expected Value.

Hrajete hru, ve které se hází mincí. Pokud padne hlava, vyhrajete 4 koruny. Pokud orel, prohrajete 2 koruny.

- (a) Jaká je střední hodnota při jednom kole?
- (b) Pokud budete hrát 50 kol, jaká je střední hodnota vaší výhry?

Příklad 2. Kostky IV.

Hodme dvěma spravedlivými šesti-stěnou kostkami. Označme X_1 náhodnou proměnnou počtu ok padlých na první kostce, podobně X_2 počet ok padlých na druhé kostce. Označme $X = X_1 + X_2$. Určete střední hodnotu $\mathbb{E}[X_1 \mid X = k]$.

Příklad 3. Erastothénovo sito.

- (a) Kolik čísel zbude z množiny $\{1, 2, \dots, 100\}$ po vyškrtání všech násobků čísel 2, 3, 5 a 7?
- (b) Určete počet přirozených čísel mezi 1 a 840, která nejsou dělitelná 6, 10 ani 14.

Příklad 4. Fronta.

Kolika způsoby lze seřadit do fronty 5 Čechů, 4 Slováky a 3 Maďary tak, aby všichni příslušníci žádného národa netvořili jeden souvislý blok? Uvažte oba případy: kdy nám záleží pouze na národnosti, a kdy uvažujeme konkrétní osoby.

Příklad 5. Slova.

Kolik existuje pořadí písmen A, B, D, E, I, K, M, N, R, Ů, Z takových, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov:

- (a) BAR, DEN, RAZIE ?

Příklad 6. Ples.

Na plesu je n manželských párů. Kolika způsoby lze vytvořit n tanečních párů, jestliže žádná manželská dvojice netancuje spolu?

Příklad 7. Kameny na šachovnici.

Kolika způsoby lze umístit osm kamenů na šachovnici 4×4 tak, aby se na šachovnici vyskytovaly čtyři kameny ve stejném řádku nebo stejném sloupci?

Příklad 8. P.I.E. jinak.

Pomocí vhodné kombinatorické interpretace a použitím principu inkluze a exkluze spočítejte následující sumu pro n, m, j přirozené a $n \leq j \leq m + n$.

(T.j. vyjádřete tuto sumu jako nějaký výraz, který už nebude obsahovat sumu.)

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{m+n-i}{j-i}$$