

# 1. Kinematika

**Anotace: Kinematika bodu.** Parametrický popis pohybu, rychlost, zrychlení, rozklad zrychlení na tečnou a normálovou složku. Základní druhy pohybů.

- Zkoumá pohyb těles v prostoru bez toho, že by se zabývala příčinami pohybu
- **Prostor – trojrozměrné (3D) kontinuum** (spojitá změna vzdáleností, Eukleidovský prostor) **počet stupňů volnosti**  $N=3$  (počet údajů, kterými je hmotný bod popsán v prostoru). Stupně volnosti můžeme odebrat pomocí **vazeb**, (pohyb v rovině  $N=2$ , pohyb po přímce  $N = 1$ )
- **Čas – spojitý parametr, společný všem objektům nezávisle na pohybu, plyne rovnoměrně** (1D kontinuum)
- **Hmotný bod** (h.b.) – bezrozměrný, tj. rozumíme jím takové těleso, jehož **velikost, tvar a prostorové rozložení hmotnosti můžeme z hlediska řešené úlohy zanedbat**, a který můžeme v prostoru zobrazit jediným bodem (nemá rozměr, tedy např. nerotuje, nedeformuje se)  
Pozn. reálná tělesa lze popsat jako soustavy h.b.
- Vztažná **soustava souřadnic** (s.s.) - vůči ní stanovujeme polohu h.b.  
kartézská (pravotočivá), polární, sférická ..., určena počátkem a orientací os

# Pohyb hmotného bodu (hb)

- Poloha tělesa (hmotného bodu) – určena v prostoru pouze **relativně** vzhledem ke vztažné soustavě souřadné
- **Vztažná soustava souřadná** může být zvolena libovolně, vždy však vázána na hmotné objekty (tělesa)
- Poloha je určena polohovým vektorem (**radius vektor**)  $\mathbf{r}$ , který se mění s časem (je funkcí času), parametrický popis:

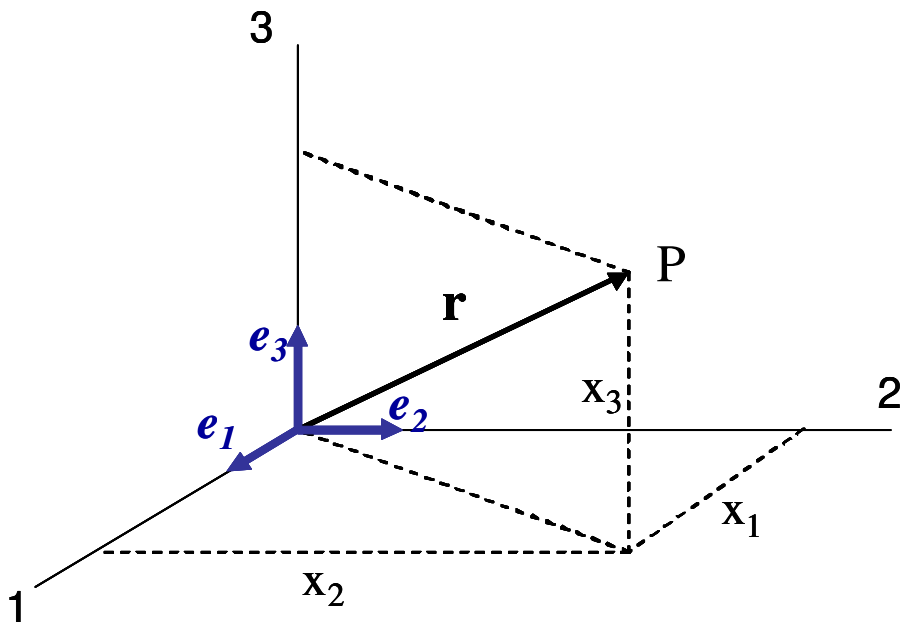
$$\mathbf{r} = f(t) \rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad \text{tj. } x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), x_3 = x_3(t)$$
$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3$$

- Úplný popis pohybu hmotného bodu získáme, udáme-li časovou závislost polohového vektoru, tj. pro všechny složky  $x_i = x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3 \dots$  **parametrický popis** pohybu
- **Trajektorie** – geometrická křivka v prostoru, po které se *hb* pohybuje (opisuje koncový bod polohového vektoru), dle tvaru – přímočarý a křivočarý pohyb
- **Dráha**,  $s$  – délka trajektorie, kterou h.b. proběhne za časový úsek  $\Delta t = t_2 - t_1$ ,  $s = s(t)$
- Tvar dráhy (trajektorie)  $\rightarrow$  vyloučením parametru  $t$ ,  
př.: najděte tvar trajektorie zadané parametricky:  $x_1 = 2t$ ,  $x_2 = t^2$

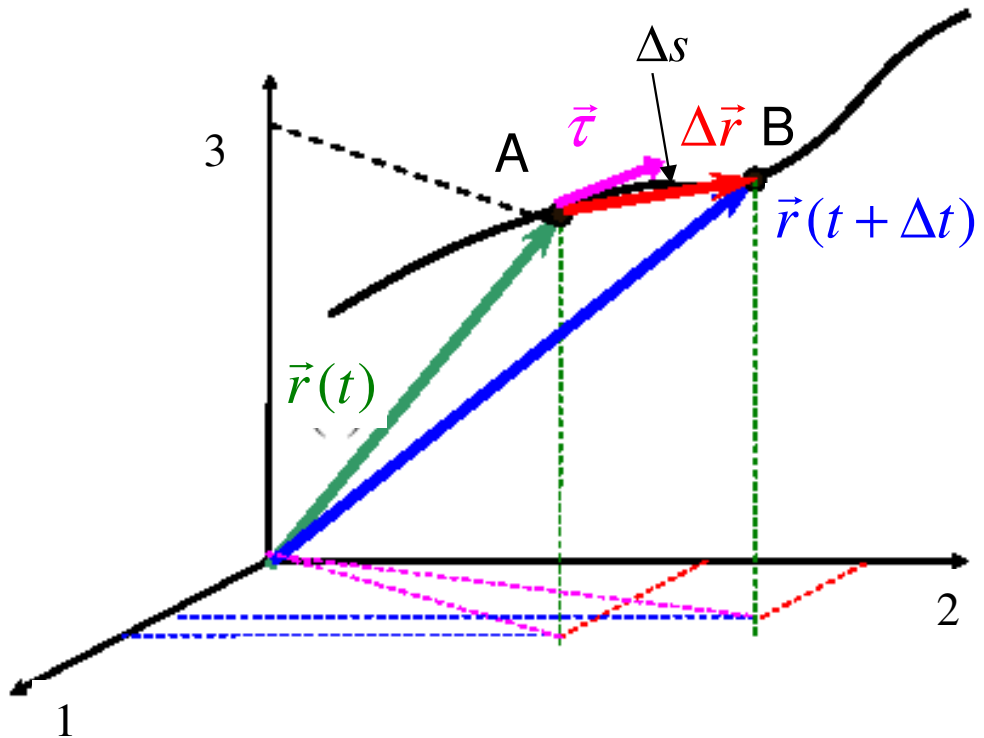
# Poznámky

- Souřadnice bodu P v kartézské ss prostoru  $x_1, x_2, x_3$
- Polohový vektor  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  ... pevně umístěný v počátku
  - při posunutí ss  $\rightarrow$  změna polohových vektorů všech hb
  - ale vektory se při translaci nemění
  - polohový vektor je tzv. umístěný (vázaný) vektor
  - jako volný vektor se chová rozdíl polohových vektorů

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$$



# Pohyb hmotného bodu



$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \dots$  změna poloh.v.

$$|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta s$$

$$|\Delta \mathbf{r}| \leq \Delta s$$

Pro  $\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0$  nahradíme  $\Delta \mathbf{r} \rightarrow d\mathbf{r}$ ,  $\Delta s \rightarrow ds$

Platí:

$d\mathbf{r}$  není  $\parallel \mathbf{r}$

$d\mathbf{r} \parallel \boldsymbol{\tau}$  (tečný vektor)

$$d\mathbf{r} = ds \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \text{tedy } |d\mathbf{r}| = ds$$

➤ **Dráha:**  $s = \sum_A^B \Delta s_k \rightarrow \lim_{\Delta s_k \rightarrow 0} \sum_A^B \Delta s_k = \int ds$

$$ds = \sqrt{\sum dx_i^2}$$

➤ **Rychlost** (velikost rychlosti - např. údaj tachometru) - časová změna polohy

**Průměrná:**  $\bar{v} \equiv \langle v \rangle \quad \bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

**Okamžitá:**  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$

$$v = \frac{ds}{dt} \equiv \dot{s}$$

(skalár)

# Pohyb hmotného bodu

- **Vektor okamžité rychlosti,  $\vec{v}$**  – časová změna polohy

- Vektor rychlosti  $\vec{v}$ :  $\vec{v} = v\vec{\tau} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$   $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}(t)$  tj.  $d\vec{r} = \vec{v} dt$ ,  $d\vec{r} \parallel \vec{v}$   
 $\vec{v}$  je tečna k trajektorii

- Složky rychlosti:  
(průměty okamžité rychlosti do směru os)  $v_i = \frac{dx_i}{dt} \equiv \dot{x}_i(t), \quad i = 1, 2, 3$

**Okamžitá rychlost je vektor, který má směr tečny ke křivočaré dráze v místě, v němž okamžitou rychlost určujeme, a míří ve směru pohybu.**

- **Pravidlo o skládání rychlostí a pohybu (postulát):**  
Rychlost bodu je možno rozkládat na složky, ale také skládat různé rychlosti příslušné těmto hmotnému bodu.

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{e}_i \equiv v_i \vec{e}_i$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\sum v_i^2} = \sqrt{\sum \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2} \quad \text{směrové kosiny: } \cos \alpha_i = \frac{v_i}{v}$$

- **Rovnoměrný pohyb**  $v = \text{konst}$ , nerovnoměrný pohyb  $v \neq \text{konst}$
- Opačná úloha – zjištění dráhy (integrál pohybu):  $s = \int v(t) dt$

# Pohyb hmotného bodu

Ekviv.popis:

Uvažujeme  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  a  $s = s(t)$ , tedy jako složenou funkci  $\vec{r} = \vec{r}(s(t))$

Vektorovou rychlost vyjádříme jako derivaci složené funkce

$$\vec{v}(s(t)) = \frac{d}{dt} \vec{r}(s(t)) = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds(t)}{dt}, \text{ kde}$$

- $\frac{ds(t)}{dt} = v(t)$  ... velikost rychlosti (skalární rychlost)
- $\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = \vec{\tau}$  ... tečný vektor trajektorie
  - jednotkový vektor  $|\vec{\tau}| = 1$
  - $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt \Rightarrow d\vec{r} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{\tau} \parallel \vec{v}$

Závěr:  $\vec{v}(t) = \vec{\tau} \cdot v(t)$

# Pohyb hmotného bodu

- **Zrychlení  $a$**  – časová změna rychlosti

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}$$

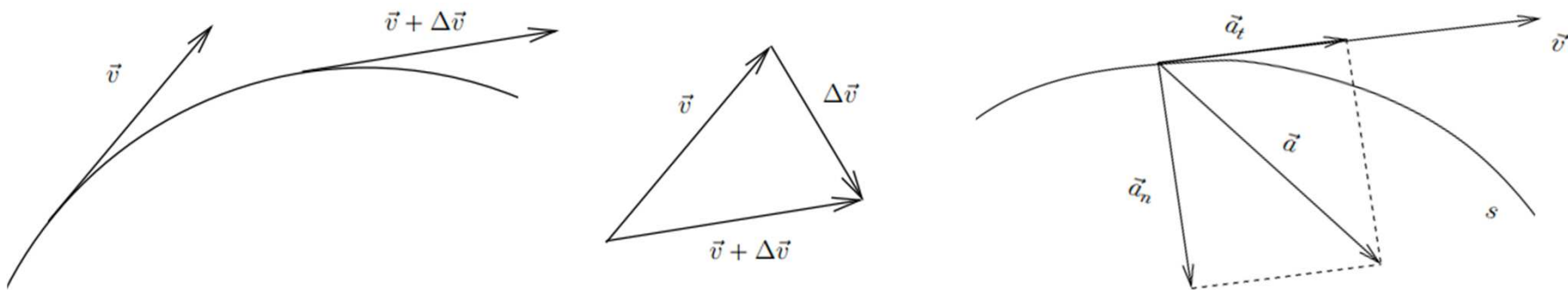
- Složky zrychlení:  
(průměty okamžité rychlosti do směru os)

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{d^2x_i}{dt^2} \equiv \ddot{x}_i$$

- $\vec{a} \parallel d\vec{v}$  směr rovnoběžný s přírůstkem rychlosti, nikoli s tečnou k trajektorii  
 $\vec{a}$  obecně není  $\parallel \vec{\tau}, \vec{v}, \vec{r}$

- Skládání složek zrychlení:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i \equiv a_i \vec{e}$$



Obr. Změna vektoru rychlosti při křivočarém pohybu, tečné a normálové zrychlení

# Pohyb hmotného bodu

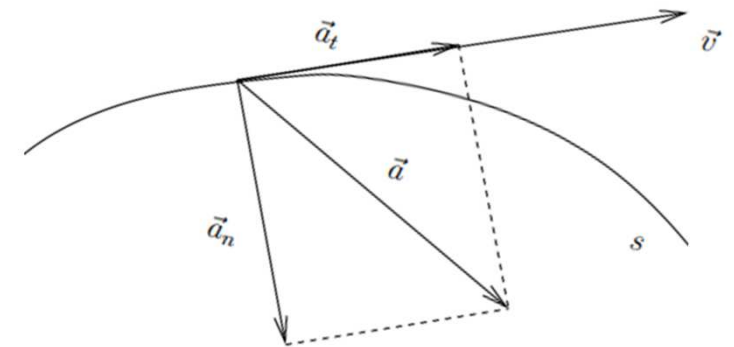
## ➤ Tečné a normálové zrychlení $a_t, a_n$

$\vec{a} \parallel d\vec{v}$  směr rovnoběžný s přírůstkem rychlosti, nikoli s tečnou k trajektorii

$\vec{a}$  obecně není  $\parallel \vec{\tau}, \vec{v}, \vec{r}$

$$a_t = \vec{a} \cdot \vec{\tau} = \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{a}_t = \left( \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left( \frac{\sum \frac{dv_i}{dt} \cdot v_i}{v} \right) \cdot \vec{\tau} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} \equiv \frac{dv}{dt} \cdot \frac{\vec{v}}{v}$$



Velikost  $a_t$ :

$$a_t = \frac{dv}{dt} \equiv \dot{v} \equiv \frac{d^2 s}{dt^2} \equiv \ddot{s}$$

## ➤ Normálové zrychlení:

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$R$  je poloměr křivosti dráhy (oskulační kružnice) a  $v$  velikost rychlosti v místě, kde  $a_n$  určíme, viz následující strana.

# Pohyb hmotného bodu – řešte příklad:

Pro vodorovný vrh rychlostí  $v_0$  z výšky  $H$ , nalezněte:

- Souřadnice pohybu jako fci času
- Trajektorii
- Vzdálenost letícího tělesa od počátku s.s.
- Složky rychlosti a zrychlení
- Velikost rychlosti a zrychlení
- Velikost a složky tečného zrychlení  $a_t$
- Velikost a složky normálového zrychlení  $a_n$
- Poloměr oskulační kružnice

# Pohyb hmotného bodu

## Tečná a normálová složka zrychlení:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{\tau}) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

tečná složka

normálová složka

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1 \Rightarrow d(\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}) = 2\vec{\tau} \cdot d\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{\tau} \perp d\vec{\tau} \Rightarrow \vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{|d\vec{\tau}|} \quad \text{tj. } \vec{n} \parallel d\vec{\tau}, \quad \vec{n} \perp \vec{\tau}$$

podobné  $\Delta$ :  $\frac{|d\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|} = \frac{ds}{R}$ , protože  $|\vec{\tau}| = 1 \rightarrow \frac{|d\vec{\tau}|}{ds} = \frac{1}{R}$ ,

$$\text{vynásobením obou stran } \vec{n}: \frac{\vec{n}|d\vec{\tau}|}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$$

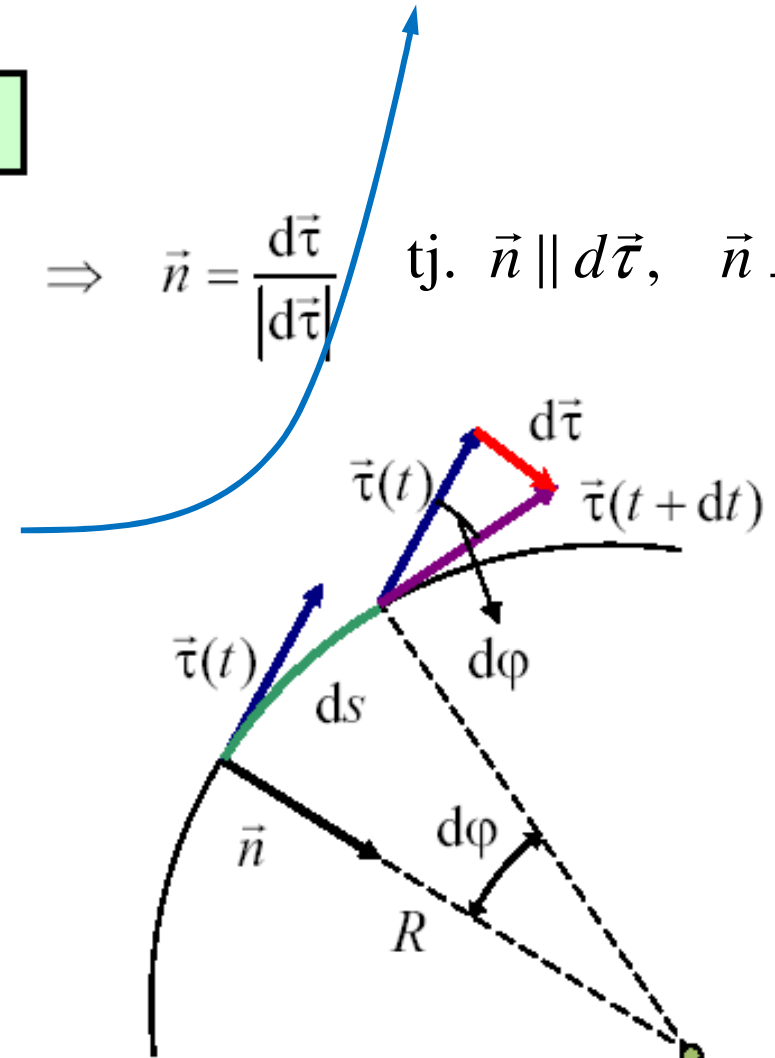
• tečná složka:

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau}$$

• normálová složka:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}$$

(odvození – viz též kruhový pohyb)



$R$  = poloměr oskulační kružnice 10

# Klasifikace pohybů – integrály pohybu

- Přímočarý,  $v/|v| = \text{const}$
- Křivočarý
- Rovnoměrný  $v = \text{const}$
- Nerovnoměrný  $v \neq \text{const}$

➤ Přímočarý rovnoměrný:  $x = k_1 t + k_0$

➤ Přímočarý rovnoměrně zrychlený:  $x = k_2 t^2 + k_1 t + k_0$

➤ rychlost a zrychlení:  $v = 2k_2 t + k_1 \quad a = 2k_2$   
 $k_2 = a/2, \quad k_0, k_1$  poloha a rychlost v čase  $t=0$

## ➤ Integrály pohybu:

**zrychlení:**  $\vec{a} = \text{const.}$

**rychlost:**  $\vec{v} = \int \vec{a} \, dt = \vec{v}_0 + \vec{a} t$

**dráha:**  $\vec{r} = \int \vec{v} \, dt = \int (\vec{v}_0 + \vec{a} t) \, dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$

## Počáteční podmínky

$$\vec{r}_0(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{v}_0(t_0) = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

# Klasifikace pohybů – harmonický pohyb

➤ **Harmonický pohyb v přímce:**  $x = A \sin(\omega t + \alpha) + x_0$ ,  $(\omega t + \alpha) \dots$  fáze

kde amplituda  $A$ , *úhlová* frekvence  $\omega > 0$  jsou konstanty

rychlost, zrychlení:  $a = -\omega^2(x - x_0)$

Zrychlení harmonického pohybu je tedy úměrné výchylce a míří proti ní

Perioda kmitů:  $T = 2\pi/\omega$

Frekvence kmitů:  $f = 1/T = \omega/2\pi$

Odvoďte rychlost a zrychlení

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \alpha)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2(x - x_0)$$

# Klasifikace pohybů – kruhový pohyb

Křivočaré pohyby - v rovině (2 parametrické rce), v prostoru (3 parametrické rce)

## ➤ Rovnoměrný kruhový pohyb

$$\begin{aligned}x_1 &= R \cos(\omega t + \alpha) + x_{10} \\x_2 &= R \sin(\omega t + \alpha) + x_{20}\end{aligned}$$

kde  $R > 0$  poloměr kružnice,  $\omega = \text{konst.}$ , kruhová frekvence,  $x_{10,20}$  souř. středu kružnice

- Rovnice dráhy:  $(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 = R^2$
- Perioda frekvence:  $T = 1/f$ ,  $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$

Vypočítejte složky a velikosti vektorů rychlosti a zrychlení:

- Rychlost:  $v_1 = \dots$   $v_2 = \dots$

$$v = \omega R$$

- Zrychlení:  $a_1 = \dots = -\omega v_2$   $a_2 = \dots = \omega v_1$

$$|\vec{a}| = \omega \cdot v = \omega^2 R = v^2 / R$$

vektorově:  $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}_0$

kde vektor  $\vec{r}_0 = (x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20})$  míří ze středu kružnice k h.b. dostředivé zrychlení

$$\vec{a} \updownarrow \vec{r}_0$$

- Pozn.: harmonický pohyb vznikne průmětem rovnoměrného kruhového pohybu na některou souřadnou osu

## ➤ Nerovnoměrný pohyb po kružnici: $x_1 = R \cos \varphi(t) = R \cos(\omega(t).t + \alpha)$

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \dots \text{úhlové zrychlení}$$

$$x_2 = R \sin \varphi(t) = R \sin(\omega(t).t + \alpha)$$

$\vec{a}$  není  $\parallel \vec{r}_0$

# Klasifikace pohybů – kruhový pohyb, vektorové znázornění

## Vektorové znázornění kruhového pohybu

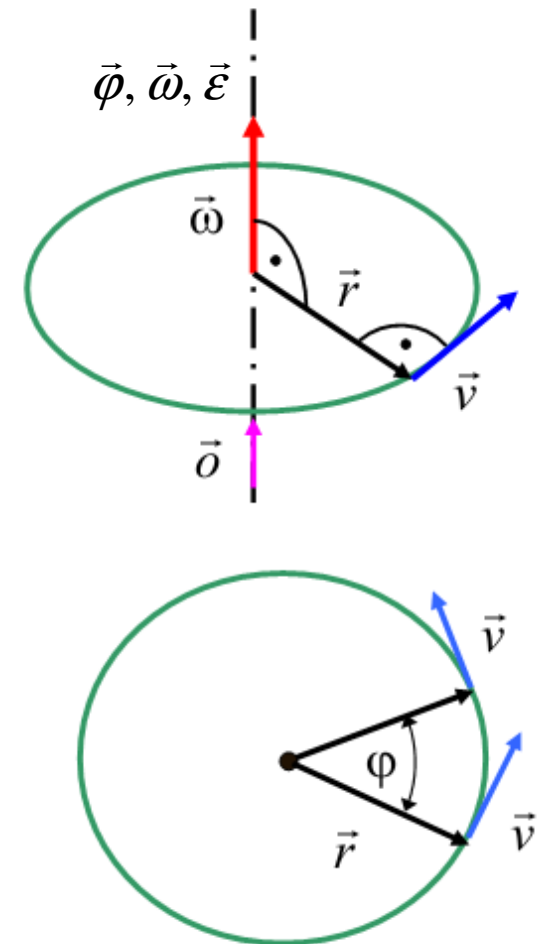
- **úhlové pootočení**  $\varphi$  - úhel, který svírají dva průvodiče pohybujícího se bodu  $\vec{\varphi} = \varphi \cdot \vec{o}$

- **úhlová rychlost**  $\omega$  - časová změna úhlu  $\varphi$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{o} \quad [\text{rad/s}]$$

- časovou změnu úhlové rychlosti poté vyjadřuje **úhlové zrychlení**

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} \quad [\text{rad/s}^2]$$



# Klasifikace pohybů – vektory úhlové rychlosti a zrychlení

$$s = R\varphi$$

$$ds = R d\varphi$$

$$\frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}$$

$$v = R\omega$$

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

vektorově:

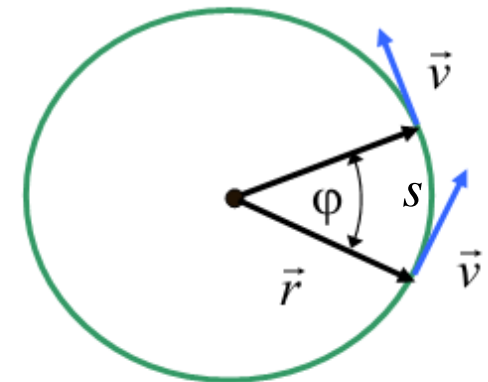
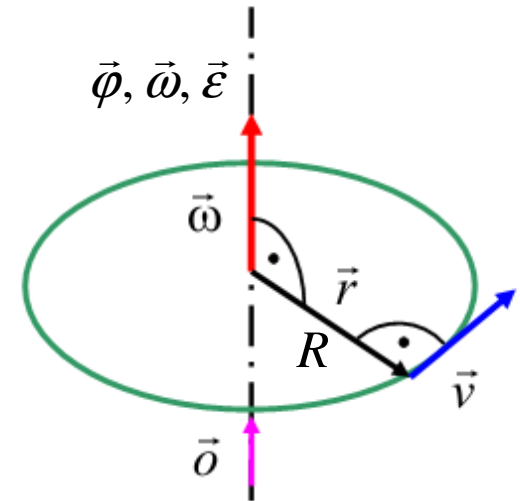
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$

normálová složka

tečná složka



Kontrola derivací:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\vec{\varepsilon}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} = \underbrace{\vec{\varepsilon} \times \vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\vec{a}_n} = \underbrace{\vec{\varepsilon} \times \vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\vec{a}_n}$$