Cvičení k přednášce NMAG111+NMAG113 Lineární algebra 1

Zadání

Verze ze dne 26. září 2025

5 Matice soustavy a zobrazení

Cíle cvičení:

- procvičit si násobení matic, maticový zápis soustav rovnic a práci se zobrazeními určenými maticí.

V následujícím značíme $f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ pro matici A.

Řešené příklady:

Úloha 5.1. Pro matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}_5$ spočítejte pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ jejich mocniny A^n, B^n, C^n, D^n.

Úloha 5.2. Pro matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ všechna řešení rovnic

$$\text{(a)} \quad A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)} \quad A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(d)} \quad AX = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Úloha 5.3. Uvažujme zobrazení $f_M : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ pro matici $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$. Najděte všechny vektory $\mathbf{v}$, pro které

$$\text{(a)} \quad f_M(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad f_M(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)} \quad f_M(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Úloha 5.4. Uvažujme pro matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ dvojici zobrazení $f_A : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ a $f_B : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$.

(a) Najděte všechny vektory $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_5^3$, pro něž je $f_B(\mathbf{v}) = (0, 0)^T$.

(b) Najděte všechny vektory $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_5^3$, pro něž je $f_B(\mathbf{v}) = (1, 2)^T$.

(c) Rozhodněte, zda jsou f_A a f_B prostá zobrazení a zda jsou na.

Úloha 5.5. Mějme zobrazení $f_A : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ pro racionální matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Spočítejte jádro matice A,

(b) dokažte, že f_A je bijekce,

(c) existuje-li, najděte racionální matici X, pro niž $AX = I_2$,

(d) existuje-li, najděte matici B, pro niž platí $f_B \circ f_A = f_A \circ f_B = \mathrm{Id}$, tedy $f_B = f_A^{-1}$, kde je f_B definováno předpisem $f_B(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$,

(e) spočítejte součin $X \cdot A$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 5.6. Uvažujme matici M nad tělesem $\mathbb{Z}_5$. Spočítejte jádro matice M (zobrazení f_M) a najděte úplný vzor vektoru $\mathbf{v}$ v zobrazení f_M, jestliže

$$\text{(a)} \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Úloha 5.7. Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ všechny matice X splňující rovnost $A \cdot X = B$, jestliže

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 5.8. Pro matici B z úlohy 5.4

(a) najděte všechny matice X nad $\mathbb{Z}_5$, pro něž $BX = I_2$,

(b) najděte všechny matice Y nad $\mathbb{Z}_5$, pro něž $YB = I_3$.

Obtížnější příklady:

Úloha 5.9. Najděte takové tři matice A, B, C, aby součin žádných dvou nebyl nula a součin všech tří byl nulová matice.

Úloha 5.10. Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ najděte matici typu 2×2 takovou, že posloupnost mocnin A^n má periodu k. Úlohu řešte zvlášť nad $\mathbb{R}$ a zvlášť nad konečným tělesem $\mathbb{Z}_p$.

Úloha 5.11. Uvažujme zobrazení $f : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ definované předpisem $f(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Dokažte, že toto zobrazení představuje maticovou realizaci komplexních čísel, tj. pro $z, w \in \mathbb{C}$ platí

$$f(z + w) = f(z) + f(w)$$
$$f(zw) = f(z)f(w)$$

Najděte zobrazení $f : \mathbb{H} \to M_2(\mathbb{C})$ se stejnými vlastnostmi, tedy maticovou realizaci kvaternionů.

Úloha 5.12. Označme J_n čtvercovou $n \times n$ matici, jejíž ij-tý element je $(J_n)_{ij} := \delta_{i+1,j}$. (Používáme Kroneckerovo delta, ale pozor, J_n není jednotková matice!)

(a) Spočtěte k-té mocniny matice J_n a J_n^T pro $n = 2, 3, 4, 5$ a $k \in \mathbb{N}$.

(b) Ilustrujte pomocí matic J_n a J_n^T, že pro maticové násobení obecně neplatí vzorec $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$. Čím je třeba tento vzorec nahradit?

(c) Je-li X matice typu $p \times q$, pro blokovou matici $A = \begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ spočtěte její mocninu A^k pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a matici transponovanou A^T.

(d) Spočtěte součin dvou 6×6 matic v blokovém zápise $\begin{pmatrix} J_3 & J_3 \\ J_3^T & J_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_3^T & J_3 \\ J_3^2 & J_3 \end{pmatrix}$. Zapište výsledek také jako (i) blokovou matici s 3×3 bloky, (ii) 6×6 číselnou matici, (iii) blokovou matici s 2×2 bloky.

Výsledky:

5.1. $\boxed{\mathbb{R}}$: • $A^n = 0_{2\times 2}$ pro $n \geq 2$, • $B^2 = -I_2$, $B^3 = -B$, $B^4 = I_2$, $B^{4q+k} = B^k$ pro $q \in \mathbb{N}$, $k \in \{0,1,2,3\}$, • $C^n = \left(\begin{smallmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{smallmatrix}\right)$, • $D^n = 8^{n-1}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{smallmatrix}\right)$; $\boxed{\mathbb{Z}_5}$: • $A^n = 0_{2\times 2}$ pro $n \geq 2$, • $B^{4q} = I_2$, $B^{4q+1} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{4q+2} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{4q+3} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ pro $q \in \mathbb{N}$, • $C^{4q} = I_2$, $C^{4q+1} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $C^{4q+2} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $C^{4q+3} = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ pro $q \in \mathbb{N}$, • $D^{4q+1} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $D^{4q+2} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $D^{4q+3} = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $D^{4q+4} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ pro $q \in \mathbb{N}_0$

5.2. ***(a)*** $\left\{s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{Z}_5\right\}$, ***(b)*** $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{Z}_5\right\}$, ***(c)*** $\emptyset$, ***(d)*** $\left\{\begin{pmatrix} s & 1+t \\ 2s & 1+2t \\ s & t \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{Z}_5\right\}$

5.3. ***(a)*** $\left\{t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5\right\}$, ***(b)*** $\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5\right\}$, ***(c)*** $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5\right\}$

5.4. ***(a)*** $\left\{t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5\right\}$ ***(b)*** $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5\right\}$ ***(c)*** f_A není prosté ani na, f_B není prosté, ale je na

5.5. ***(a)*** $\{\mathbf{0}\}$ ***(b)*** prosté je z (a), surjektivita se ukáže Gaussovou eliminací ***(c)*** $\left(\begin{smallmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ ***(d)*** $B = X$ ***(e)*** I_2

5.6. ***(a)*** $\operatorname{Ker} f_M = \left\{s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{Z}_5\right\}$, $f_M\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)\right)^{-1} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f_M\right\}$,
(b) $\operatorname{Ker} f_M = \left\{s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{Z}_5\right\}$, $f_M\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f_M\right\}$

5.7. ***(a)*** $\left\{\left(\begin{smallmatrix} 4c & 2+4d \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid c,d \in \mathbb{Z}_7\right\}$, ***(b)*** $\left(\begin{smallmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{smallmatrix}\right)$

5.8. ***(a)*** $\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 4s & 4t \\ s & t \\ s & t \end{smallmatrix}\right) \mid s,t \in \mathbb{Z}_5\right\} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 4s+1 & 4t \\ s+4 & t+1 \\ s & t \end{smallmatrix}\right) \mid s,t \in \mathbb{Z}_5\right\}$ ***(b)*** $\emptyset$

5.9. například $A = B = C = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ nebo $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.