

RELACE

Příklad 1. Ekvivalence?

Rozhodněte, zda následující relace jsou ekvivalence:

- (a) $X = \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$ (pevné), $(x, y) \in R \iff p \text{ dělí } (x - y)$
- (b) $X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(x, y) \in R \iff x \text{ dělí } y \text{ a zároveň } y \text{ dělí } x$
- (c) $X = \mathbb{N}$, $(x, y) \in R \iff \exists z \in \mathbb{N}, z > 1$, že z dělí x i y

Příklad 2. Příklady relací.

Nalezněte relaci na konečné množině (je-li to možné), která

- (a) je antisymetrická i symetrická zároveň
- (b) je antisymetrická a není symetrická
- (c) není antisymetrická, ale je symetrická
- (d) není ani antisymetrická ani symetrická

Příklad 3. Zachovávání tranzitivity.

Nechtě R a S jsou tranzitivní relace na množině X . Budou následující relace také tranzitivní?

- (a) $R \cup S$ (Tip: Zkuste najít protipříklad)
- (b) $R \cap S$ (Tip: Zkuste dokázat formálně)
- (c) R^{-1}

Příklad 4. Skládání relací.

Popište relaci $R \circ R$, označuje-li R

- (a) relaci rovnosti „=” na množině \mathbb{N}
- (b) relaci „ \leq ” na \mathbb{N}
- (c) relaci „ $<$ ” na \mathbb{N}
- (d) relaci „ $<$ ” na \mathbb{R}

EULEROVSKÉ & HAMILTONOVSKÉ GRAFY

Příklad 5. Jedním tahem.

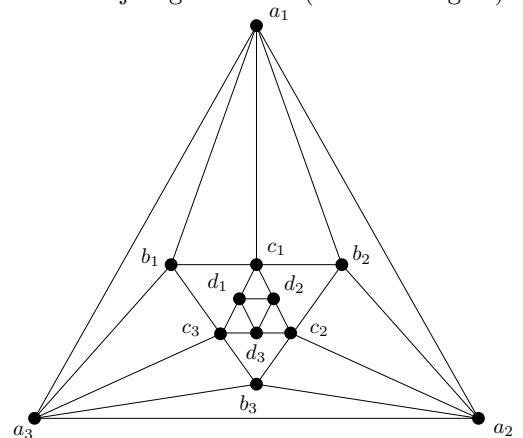
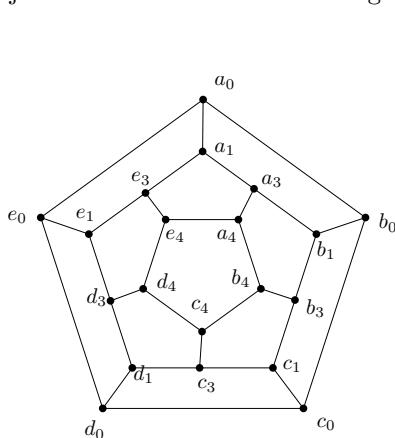
Charakterizujte grafy, které lze nakreslit jedním tahem, jenž nemusí být nutně uzavřený.

Příklad 6. Disjunktní sjednocení kružnic.

Dokažte, že hrany každého eulerovského grafu lze rozložit na disjunktní sjednocení kružnic. Je rozklad jednoznačný? Pokud ne, je počet kružnic v rozkladu dán jednoznačně?

Příklad 7. Hamiltonovská kružnice.

Najdete Hamiltonovskou kružnici grafu na obrázku (vpravo). Rozhodněte, zda existuje v grafu vlevo (Petersenův graf).

**Příklad 8. Hamiltonovský graf (Diracova věta).**

Dokažte že $\forall G = (V, E) : |V| \geq 3$, který splňuje $\delta(G) \geq \frac{|V|}{2}$, je hamiltonovský. $\delta(G)$ označuje minimální stupeň grafu G .