Úvod do sem patří název

Zápisky z přednášky Jméno Příjmení učitele

Jméno Příjmení

Úvodní informace

Značení

Kapitola 1

Úvod, reálná čísla, funkce

Poznámka 1. Značení:

- P, Q ... výroky, x, y, z ... čísla (prvky), A, B, M ... množiny
- $P \& Q$ ... P zároveň s Q
- $P \vee Q$ ... P nebo Q
- $P \implies Q$ ... P implikuje Q
- $P \iff Q$ ... P je ekvivalentní s Q
- $\neg P$ ... negace P
- $\forall x$ ... pro všechna x
- $\exists x$ ... existuje x
- $\exists! x$ ... existuje právě 1 x
- $x \in A$ ... x je prvkem A
- $A \subset B$ ... A je podmnožina B
- $\{a_1, a_2, \dots\}$ ... množina definována výčtem prvků $a_1, a_2, \dots$
- $x \in M, \varphi(x)$ ... množina definována vlastností $\varphi(x)$
- $\emptyset, \{\}$ ... prázdná množina
- $A \cup B$ ... sjednocení množin A, B
- $A \cap B$ ... průnik množin A, B
- $A \setminus B$ ... rozdíl množin (prvky z A, které nejsou v B)

Axiom 1 (Algebraické vlastnosti $\mathbb{R}$)**.** Existuje množina reálných čísel $\mathbb{R}$, která obsahuje prvky 0 a 1, a jsou na ní definovány operace "$\cdot$"a "$+$"tak, že $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ platí:

i. $x + y = y + x, x \cdot y = y \cdot x$

ii. $x + (y + z) = (x + y) + z, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

iii. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

iv. $0 + x = x$, $1 \cdot x = x$

v. $0 \cdot x = 0$ a naopak $x \cdot y = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$

Axiom 2 (Uspořádání $\mathbb{R}$)**.** Na množině $\mathbb{R}$ je definována relace "<"tak, že $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ platí:

i. $x = y$, nebo $x < y$, nebo $y < x$

ii. $x < y \& y < z \implies x < z$

iii. $x < y \implies x + z < y + z$

iv. $0 < x \& 0 < y \implies 0 < x \cdot y$

Poznámka 2. $x \leq y$ je zkratka za $(x < y) \vee (x = y)$. Z věty A2 opět lze vyvodit další známé poučky, např. $x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, apod.

Poznámka 3 (Význačné podmnožiny $\mathbb{R}$)**.**

- přirozená čísla $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- celá čísla $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, ---\}$
- racionální čísla $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$
- intervaly s krajními body $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$, resp. . . . , resp. neomezené pozor hranaté závorky! a ne zobáčky – uvidíme

Definice 1 (Absolutní hodnota)**.** Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom $x := \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$

Lemma 1. *Nechť $a \geq 0, b \in \mathbb{R}$ lib. Potom:*

$$|b| \leq a \iff -a \geq b \geq a.$$

Důkaz. (rozborem případů)

$b \geq 0$

$b < 0$ □

Věta 1 (Trojúhelníková nerovnost)**.** $\forall x, y \in \mathbb{R}:$

- $|x \pm y| \leq |x| + |y|$
- $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$

Důkaz.
- $|x| \leq |x|, |\pm y| \leq |y| \implies (L.1.1.) - |x| \leq x \leq |x|, -|y| \leq \pm y \leq |y|$, když sečtu $-|x| - |y| \leq x \pm y \leq |x| + |y| \implies (L.1.1.)|x \pm y| \leq |x| + |y|$
- TRIK $\mp y = x - (x \pm y)$

□

Axiom 3 (B. Odmocnina v $\mathbb{R}$).
- Nechť $n \in \mathbb{N}$ je sudé. Pak $\forall a \in [0, \infty)\exists! b \in [0, \infty)$ takové, že $b^n = a$
- Nechť $n \in \mathbb{N}$ je liché. Pak $\forall a \in \mathbb{R}\exists! b \in \mathbb{R}$ takové, že $b^n = a(b = \sqrt[n]{a})$.

Poznámka 4.
- $\sqrt{1} = 1, \sqrt[3]{-1} = -1, \sqrt{-1}$ není definována
- $\sqrt[n]{x^n} = x \forall x \in \mathbb{R}, n$ liché
- $\sqrt{x^2} = |x|$

Věta 2. *Existují iraconální čísla.*

Axiom 4 (Axiomy $\mathbb{N}$).
- $\forall x \in \mathbb{R}\exists n \in \mathbb{N} : n > x$ (Archimédova vlastnost)
- Nechť $M \subseteq \mathbb{N}$ splňuje:
  i. $1 \in M$
  ii. $\forall n \in \mathbb{N} : n \in M \implies n + 1 \in M$

  potom $M = \mathbb{N}$. (princip indukce)

Poznámka 5 (alternativní ekvivalentní formulace).
- $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon > 1$
- Nechť $\phi(n)$ je formule s proměnnou $n \in \mathbb{N}$, nechť $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť platí:
  i. $\phi(n)$
  ii. $\forall n \geq n_0 : \phi(n) \implies \phi(n + 1)$

  potom platí $\phi(n) \forall n \geq n_0$.

Poznámka 6 (indukce ještě jinak). $\forall M \subseteq \mathbb{N}, M \neq \emptyset : M$ má nejmenší prvek.

TODO k větě 1.2. doplnit důkaz o iracionálnosti odmocniny ze 3

Věta 3. *Každý otevřený interval obsahuje nekonečně mnoho racionálních a iracionálních čísel.*

pro iracionální. BÚNO: $I = (a, b), 0 \leq a < b$

položme $x_n = \frac{n\sqrt{3}}{m}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ velké tak, že $m > \frac{2\sqrt{3}}{b-a} \iff \frac{2\sqrt{3}}{m} < b - a$

$M = \{n \in \mathbb{N} : x_n \geq b\}$, nechť n_0 je nejmenší prvek M (viz A3)

tvrdíme: $x_{n_0-1}, x_{n_0-2} \in (a, b)$, tj. $a < x_{n_0-2} < x_{n_0-1} < b$

zřejmě $x_n \notin \mathbb{Q}, \forall n \neq 0$

$a < \frac{n_0-2}{m}\sqrt{3} = \frac{n_0}{m}\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{m}$, první zlomek $\geq b$, druhý $< b-a \implies > a$ $\square$

Definice 2. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Potom

- $x \in M$ nazveme maximum (největší prvek) M, pokud $\forall y \in M : y \leq x$
- $x \in M$ nazveme minimum (nejmenší prvek) M, pokud $\forall y \in M : y \geq x$
- $K \in \mathbb{R}$ nazveme horní odhad M, jestliže $\forall x \in M : x \leq K$
- $K \in \mathbb{R}$ nazveme dolní odhad M, jestliže $\forall x \in M : x \geq K$

Množina M se nazve

- shora omezená, má-li nějaký horní odhad
- zdola omezená, má-li nějaký dolní odhad
- omezená, má-li horní i dolní odhad.

Příklad 1.
- $M = [0, 1)$
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Definice 3. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, Číslo $S \in \mathbb{R}$ nazveme supremum M, značíme $S = \sup M$, jestliže:

i. $\forall x \in M : x \leq S$

ii. $\forall S' < S : \exists y \in M : y > S'$

čili S je nejmenší horní odhad M.

Poznámka 7.
- Supremum užitečně zobecňuje pojem maximum.
- Existuje nejvýše jedno sup M.

Axiom 5 (Úplnost $\mathbb{R}$ = Axiom suprema)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a shora omezená. Pak $\exists! S \in \mathbb{R}$ takové, že $S = \sup M$.

Definice 4. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, Číslo $s \in \mathbb{R}$ nazveme infimum M, značíme $s = \inf M$, jestliže:

i. $\forall x \in M : x \geq s$

ii. $\forall s' > s : \exists y \in M : y < s'$

čili s je největší dolní odhad M.

Axiom 6 (A4′)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a zdola omezená. Pak $\exists! s \in \mathbb{R}$ takové, že $s = \inf M$.

Definice 5 (Rozšířená reálná čísla)**.** $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} + \{-\infty, +\infty\}$. Uspořádání a aritmetika v $\mathbb{R}^*$:

- $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty, -\infty < +\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R} : x + \infty = +\infty, x - \infty = -\infty, +\infty + \infty = +\infty, -\infty - \infty = -\infty$
- $\forall x > 0 x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \pm\infty \cdot (+\infty) = \pm\infty, \pm\infty \cdot (-\infty) = \mp\infty$
- $\forall x < 0 x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x}{\pm\infty} = 0$

Nedefinováno zůstává $+\infty - \infty, -\infty + \infty, 0 \cdot (\pm\infty), \frac{x}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Definice 6. Nechť X, Y množiny. Funkce $f : X \to Y$ je libovolný předpis, který každému $x \in \mathbb{X}$ přiřadí jednozačně určený prvek z Y. Dále definujme

- obraz množiny $M \subset X : f(M) = \{f(x); x \in M\}$
- vzor množiny $N \subset Y : f^{-1}(N) = \{x, f(x) \in N\}$ (zde „$^{-1}$“ není inverzní funkce, toto můžu říct i pro nezinvertovatelnou funkci)

Funkce je

- prostá (injektivní), pokud $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$
- "na"(surjektivní), pokud $f(X) = Y$, tj. $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$
- je vzájemně jednoznačná (bijektivní), je-li prostá i "na"

TODO složené zobrazení def. obor?, inverzní a invertovatelná funkce

Kapitola 2

03

Kapitola 3

04

Kapitola 4

05

Kapitola 5

Hlubší vlastnosti derivace a spojitosti

Věta 4 (L'Hospital). *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechť $\exists$ vlastní $f'(x), g'(x)$, navíc $g'(x) \neq 0 \forall x_0 \in \mathscr{P}(x_0, \delta)$. Nechť platí buď*

a) $f(x) \to 0, g(x) \to 0, x \to x_0$, *nebo*

b) $|g(x)| \to +\infty, x \to x_0$.

Pak

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

má-li pravá strana smysl.

Důkaz. 1. $x \to x_0^+, x_0 \in \mathbb{R}$, případ a); $\varepsilon > 0$ dáno:

$\exists \delta > 0$ t. ž. $\forall c \in \mathscr{P}_+(x_0, \delta)$ platí:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathscr{U}(L, \varepsilon)$$

TRIK do/předefiniceinujme $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (nemá vliv na $\lim_{x \to x_0}$)

$\implies f, g$ spojité v $[x_0, x_0 + \delta), \delta > 0$ malé

- v bodě x_0 zprava $(f(x), g(x) \to 0 = f(x_0) = g(x_0), x \to x_0)$
- v bodech $x \in (x_0, x_0 + \delta) \impliedby$ Věta 4. 1. $(\exists f', g'$ vlastní$)$

Buď $x \in \mathscr{P}_+(x_0, \delta)$ pevné, libovolné

Aplikuji větu 6. 8. (C. o stř. h.) na $[x_0, x]$

$\implies \exists x \in [x_0, x] \subset \mathscr{P}_+(x_0, \delta)$ t. ž. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) - f(x)}{g(x_0) - g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathscr{U}(L, \varepsilon)$

2. $x \to +\infty$, případ a);

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})} = (LP1.) = \lim_{y \to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{y}) \cdot \frac{-1}{y^2}}{g'(\frac{1}{y}) \cdot \frac{-1}{y^2}} = (L2.3.) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3. $x \to x_0^+$, případ b), tj. $|g(x)| \to +\infty, x \to x_0$

Užiji V. 6. 8. na $[x, y]$:

$$\exists c \in (x, y) \text{ t. ž. } \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \implies$$

pujčím si $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(c)}{g'(c)}(1 - \frac{g(y)}{g(x)}) = P_1 + P_3 \cdot P_2$, fixuji y blízko $x_0 \implies c$ blízko x_0, když $x \to x_0 \implies P_3 \to L, P_1 \to 0, P_2 \to 1$, a tedy PS blízko L.

□

Poznámka 8. Úmluva: $I, J \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly.

Definice 7. Řekneme, že $f(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost, pokud $\forall a, b, \in I, \forall \gamma$ mezi $f(a), f(b) \exists c$ mezi a, b t. ž. $f(c) = \gamma$. (Darbouxova věta: $f(x)$ spoj. v $I \implies$ má v I Darboux. vlast.)

Věta 5 (*). *Nechť I je otevřený interval, $f(x)$ je spojitá v I, nechť $\exists f'(x)$ vlastní $\forall x \in I$. Pak $f'(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost.*

Věta 6 (Monotonie a znaménko derivace). *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ lib. interval, $f(x)$ je spojité v I, nechť $\exists f' > 0$ (resp. ≥ 0, ≤ 0, < 0) $\forall x$ vnitřní bod I. Potom $f(x)$ je rostoucí (resp. neklesající, nerostoucí, klesající) v I.*

Důkaz. Nechť $x_1 < x_2 \in I \overset{?}{\implies} f(x_1) < f(x_2)$.

Užiji V. 6. 5. (Lagrange) na $[x_1, x_2] \subset I$ – spojitost OK, a taky $\exists f'(x) \forall x \in (x_1, x_2) \subset I$

$\implies \exists c \in (x_1, x_2)$ t. ž. $\frac{f(x_2)-f(x_2)}{x_2-x_1} = f'(c) \iff f(x_1) - f(x_2) = f'(c) \cdot (x_1 - x_2) > 0.$ □

Příklad 2. $f(x) = x^n, I = [0, +\infty), n \in \mathbb{N}$

$f'(x) = nx^{n-1} > 0, x \in (0, +\infty)$ – otevřený interval je právě vnitřek intervalu I

$\implies (V6.10.) f(x)$ rostoucí v I.

Definice 8. Funkce $f(x)$ se nazve konvexní (resp. ryze konvexní, konkávní, ryze konkávní) v I, jestliže $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I : \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq$ (resp. $<, \geq, >$) $\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

Věta 7 (Konvexita a monotonie derivace). *Nechť I interval s krajními body $a < b$. Nechť $f(x)$ spojitá v I. Nechť $\exists f'(x) \forall x \in (a, b)$ a je rostoucí (resp. neklesající, klesající, nerostoucí). Potom $f(x)$ je ryze konvexní (resp konvexní, ryze konkávní, konkávní) v I.*

Důkaz. Nechť $x_1 < x_2 < x_3 \in I \overset{?}{\implies} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

Užiji 2x V. 6. 5. (Lagrange) na $[x_1, x_2]$, pak na $[x_2, x_3]$: $\exists c \in (x_1, x_2)$ t. ž. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$ a $\exists d \in (x_2, x_3)$ t. ž. $\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(d)$.

Zřejmě $d > c \implies f'(c) < f'(d) \implies$ to co dk. □

Příklad 3. $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ – spojité v $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+|x|)^2} \cdot |x|' = \frac{-\operatorname{sgn} x}{(1+|x|)^2} (x \neq 0) = \begin{cases} \frac{-1}{(1+|x|)^2}, x > 0 \\ \frac{1}{(1+|x|)^2, x<0} \end{cases}$$

V. 6. 11. $\implies f$ je ryze konvexní v $(-\infty, 0)$ a v $(0, +\infty)$ (ale ne už v $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

Poznámka 9 (Ekvivalentní definice konvexity). $\forall a, b, \in I, \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$.

Důkaz. Důkaz jako cvičení pro čtenáře, napovíme $x_1 = a, x_3 = b, x_2 =$ nějakej zlomek s λ $\square$

Věta 8 (Konvexita a znaménko druhé derivace)**.** *Nechť $f'x$ je spojitá v I, nechť $\exists f''(x)$ vlastní uvnitř I. Nechť platí $f''(x) > 0$ (resp. $\geq, <\leq$) $\forall x \in I$ vnitřní. Pak $f(x)$ je v I ryze konvexní (resp. konvexní, ryze konkávní, konkávní).*

Důkaz. Označ $\tilde{I}$ vnitřek I.

$f''(x) = (f'(x))' > 0$ v $\tilde{I}$, konečné

$\implies f'(x)$ spojité (V. 5. 1.) a je rostoucí v $\tilde{I}$ (V. 6. 10.)

$\implies f(x)$ je ryze konvexní v I (V. 6. 11.). $\square$

Definice 9. Řekneme, že x_0 je inflexní bod $f(x)$, jestliže

i. $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}^*$

ii. $\exists \delta > 0$ t. ž. na jednom z intervalů $(x_0 - \delta, x_0), (x_0, x_0 + \delta)$ je $f(x)$ ryze konvexní a na druhé ryze konkávní.

Kapitola 6

Posloupnosti

Definice 10. Posloupnost je funkce $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$, značíme $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nebo $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$, krátce $\{a_n\}$.

Příklad 4. 1. $a_n = \frac{1}{n}, b_n = (-1)^n$

2. rekurentně: $a_1 = 0, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

Definice 11. Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ se nazve limita posloupnost $\{a_n\}$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies a_n \in \mathcal{U}(a, \varepsilon).$$

Značíme $a_n \to a$ nebo $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$.

Poznámka 10. $a \in \mathbb{R} \ldots \{a_n\}$ konverguje

$a = \pm + \infty \ldots \{a_n\}$ diverguje

Poznámka 11 (Ekvivalentní definice (pokud $a \in \mathbb{R}$))**.**

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

Obecně: $a_n \to a \iff \forall \varepsilon > 0$ platí $a_n \in \mathcal{U}(a, \varepsilon)$ pro všechna n až na konečně mnoho výjimek

Důkaz. $\implies$ “ výjimečně jen pro $n < n_0$ (těch je konečně)

„ $\impliedby$ “ $V = \{n; a_n \notin \mathcal{U}(a, \varepsilon)\} \subset \mathbb{N}$ konečné

volme $n_0 > \max V \in \mathbb{N}$

□

Poznámka 12. Pro limity posloupností platí analogie vět pro limity funkcí s analogickými důkazy.

i. (VoAL, V. 2. 3., V. 2. 7.) $a_n \to a, b_n \to b \implies$

   1. $a_n \pm b_n \to a \pm b$
   2. $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$
   3. $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$, má-li PS smysl

ii. (V. 2. 9.) je-li $\alpha \leq a_n \leq \beta$ od jistého $n_0, a_n \to a \implies \alpha \leq a \leq \beta$

iii. (V. 2. 10.) je-li $b_n \leq a_n \leq c_n$ od jistého $n_0, b_n \to a, c_n \to a \implies a_n \to a$

iv. nechť $a_n \to 0$, nechť $a_n >$ (resp. $<$) 0 od jistého $n_0 \implies \frac{1}{a_n} \to +\infty$ (resp. $-\infty$)

Důkaz. cíl: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : n \geq n_0 \implies \frac{1}{a_n} \in \mathscr{U}(+\infty, \varepsilon)$, tj. $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\varepsilon > 0 \text{ dáno:} \exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \implies a_n \in \mathscr{U}(0, \varepsilon), \text{ tj. } |a_n| < \varepsilon \implies -\varepsilon < a_n < \varepsilon$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N} : n \geq n_2 \implies a_n > 0 \implies 0 < a_n < \varepsilon$$

polož $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$; nechť $n \geq n_0 \implies$ cíl □

Definice 12. Posloupnost se nazve omezená (resp. shora omezená, zdola omezená), pokud $\exists K > 0$ (resp. $K \in \mathbb{R}$) t. ž. $|a_n| \leq K$ (resp. $a_n \leq K, a_n \geq K$) $\forall n \in \mathbb{N}$. Posloupnost se nazve rostoucí (resp. neklesající, klesající, nerostoucí) pokud $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n \leq a_{n+1}, a_n > a_{n+1}, a_n \geq a_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$. Všechny tyto posloupnosti zároveň nazveme monotónní.

Věta 9. *Nechť $\{a_n\}$ konverguje. Pak $\{a_n\}$ je omezené.*

Důkaz. víme: $\exists a \in \mathbb{R}$ t. ž. $a_n \to a \ldots \varepsilon = 1, \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < 1 \iff L = a - 1 < a_n < a + 1 = K$

polož $C := \max\{K, -L\} \implies |a_n| \leq C, \forall n \geq n_0$, to není $\forall n \in \mathbb{N}$

položme $\tilde{C} := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n-1}|, C\}$

nyní zřejmě: $|a_n| \leq \tilde{C} \forall n \geq 1$ tj. $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Věta 10. *Nechť $\{a_n\}$ je monotónní. Pak $\exists a \in \mathbb{R}^*$ t. ž. $a_n \to a$. Je-li $\{a_n\}$ omezená, pak $a \in \mathbb{R}$, tj. $\{a_n\}$ konverguje.*

Důkaz. BÚNO $\{a_n\}$ je neklesající, tj. $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$, a tedy $a_n \leq a_m \forall n \leq m$

polož $M := \{a_m; m \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}$.

1. nechť M je omezená ($\iff$ $\{a_n\}$ je omezená); $S := \sup M$ (A. 4., $M \neq \emptyset$) ukážeme, že $a_n \to S$

   $\varepsilon > 0$ dáno: $S' := S - \varepsilon < S \ldots \exists n_0 : a_{n_0} > S - \varepsilon$

$\{a_n\}$ neklesající: $a_n > S - \varepsilon \forall n \geq n_0$, zároveň $a_n \leq S < S + \varepsilon$

$\implies a_n \in \mathcal{U}(S, \varepsilon), \forall n \geq n_0$.

2. nechť M je neomezená ($\iff$ $\{a_n\}$ je neomezená, nutně shora (protože je neklesající))

   ukážeme: $a_n \to +\infty$

   $\varepsilon > 0$ dáno: $\exists n_0$ t. ž. $a_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$ a tedy $a_n > \frac{1}{\varepsilon}, \forall n \geq n_0 \implies a_n \in \mathcal{U}(+\infty, \varepsilon)$

□

TODO

Věta 11. *Následující je ekvivalentní*

1. *$\{a_n\}$ konverguje*
2. *$\{a_n\}$ je cauchyovské*

Důkaz. (1) $\implies$ (2) …víme $\exists a \in \mathbb{R}$ t. ž. $a_n \to a$; cíl (B. C.)

$\varepsilon > 0$ dáno: $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n \in \mathcal{U}(a, \frac{\varepsilon}{2})$, tj. $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\implies \forall m, n \geq n_0$ lze psát: $a_m - a_n = (a_m - a) + (a - a_n)$, takže $|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon$

(2) $\implies$ (1)

i. $\{a_n\}$ je omezená: užiji (B. C.) pro $\varepsilon = 1$: $\exists n_0 \forall n, m \geq n_0 : |a_m - a_n| < 1$, speciálně $|a_n - a_{n_0}| < 1 \forall n \geq n_0$

   $\implies a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1 \implies \{a_n\}$ omezené

ii. plyne z V. 7. 4.

iii. $\varepsilon > 0$ dáno: užiji (B. C.) pro $\frac{\varepsilon}{2} \ldots \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

   dále $a_m \in \mathcal{U}(a, \frac{\varepsilon}{2})$ pro nekonečně $m \implies \exists m \geq n_0$ t. ž. $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

CELKEM $n \geq n_0 : |a_n - a_m| + |a_m + a| < \varepsilon$ □

Věta 12 (Heineho věta pro limitu funkce). *Nechť $f(x)$ je definována na $\mathcal{P}(x_0), x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechť $A \in \mathbb{R}^*$. Potom je ekvivalentní*

1. *$f(x) \to A, x \to x_0$*
2. *$\forall$ posloupnost $\{x_n\}$, která*

   i. *$x_n \to x_0$*

   ii. *$x_n \neq x_0 \forall n$*

   platí $f(x_n) \to A$.

Důkaz. (1) $\implies$ (2) nechť $\{x_n\}$ splňuje kladené podmínky, cíl: $f(x_n) \to A$

nechť $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 : n \geq n_0 \implies f(x_n) \in \mathscr{U}(A, \varepsilon)$

$\varepsilon > 0$ dáno: dle (1) $\exists \delta > 0$ t. ž. $x \in \mathscr{P}(x_0, \delta) \implies f(x) \in \mathscr{U}(A, \varepsilon)$

dle (i): $\exists n_0$ t. ž. $n \geq n_0 \implies x_n \in \mathscr{U}(x_0, \delta)$, navíc díky (ii) dokonce $x_n \in \mathscr{P}(x_0, \delta)$

CELKEM: $\forall n \geq n_0 : f(x_n) \in \mathscr{U}(A, \varepsilon)$

(2) $\implies$ (1) nepřímo: $\neg(1) \implies \neg(2)$

nechť $\neg(f(x) \to A, x \to x_0)$, tedy $\exists \varepsilon > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists x \in \mathscr{P}(x_0, \delta)$ t. ž. $f(x) \notin \mathscr{U}(A, \varepsilon)$

fixuji takové $\varepsilon > 0$ a užívám zbytek formule pro $\delta = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots \implies \exists x_n \in \mathscr{P}(x_0, \frac{1}{n})$ t. ž. $f(x_n) \notin \mathscr{U}(A, \varepsilon)$, z těchto x_n získám posloupnost $\{x_n\}$

vidíme: $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, avšak $x_n \neq x_0 \, \forall n \implies x_n \to x_0$; nicméně $f(x) A$, tj. $\neg(2)$

$\square$

Poznámka 13 (Užití axiomu výběru (AC))**.** Byl použit při formulaci $\exists x_n \in \mathscr{P}(x_0, \frac{1}{n})$, tohle bych měl udělat nekonečně mnoho krát, udělám jen pro nějaké jedno ??

Poznámka 14 (Heineho věta pro limitu zprava)**.** Následující tvrzení jsou ekvivalentní

1. $f(x) \to A, x \to x_0^+$
2. $\forall$ posloupnosti $\{x_n\}$ t. ž.
   i. $x_n \to x_0$
   ii. $x_n > x_0$

Věta 13 (7.7. Heineho věta pro spojitost funkce v intervalu)**.** *Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$. Potom je ekvivalentní*

1. *$f(x)$ je spojitá v I*
2. *$\forall$ posloupnost $\{x_n\}, \forall x_0$ splňující*
   i. $x_n \to x_0$
   ii. $x_0 \in I, x_n \in I \, \forall n$

   platí $f(x_n) \to f(x_0)$.

Důkaz. (1) $\implies$ (2) ...víme: $\forall x_0 \in I \, \forall \varepsilon \, \exists \delta > 0$ t. ž. $x \in \mathscr{U}(x_0, \delta) \cap I \implies f(x) \in \mathscr{U}(f(x_0), \varepsilon)$

nechť x_n, x_0 splňují (i), (ii) ...cíl: $f(x_n) \to f(x_0)$

$\epsilon > 0$ dáno $\exists \delta > 0$ t. ž. $x \in \mathscr{U}(x_0, \delta) \cap I \implies f(x) \in \mathscr{U}(f(x_0), \varepsilon)$

dle (i) $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies x_n \in \mathscr{U}(x_0, \delta)$

navíc dle (ii) $x_n, x_0 \in I \implies f(x_n) \in \mathscr{U}(f(x_0), \varepsilon), \forall ngeqn_0$

$\neg(1) \implies \neg(2)$ ... nechť neplatí (1), tj.:

$\exists x_0 \in I\, \exists \varepsilon > 0 : \exists x \in \mathscr{U}(x_0, \delta) \cap I$ t. ž. $f(x) \notin \mathscr{U}(f(x_0), \varepsilon)$

fixuji takové $x_0 \in I, \varepsilon > 0$, potom užívám pro $\delta = \frac{1}{n}$ pro $n = 1, 2, \ldots$

$\implies \exists x_n \in \mathscr{U}(x_0, \frac{1}{n}) \cap I$ t. ž. $f(x_n) \notin \mathscr{U}(f(x_0), \varepsilon)\, \forall n = 1, 2, \ldots$

zřejmě platí (i), (ii), avšak $f(x_n) f(x_0)$, tj. neplatí (2)

$\square$

Příklad 5. $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \ldots$ V. 7. 6. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = e^1 \ldots x_0 = 0, x_n = \frac{1}{n}, x \to 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = f(x_n)$, posloupnost splňuje (i), (ii)

Věta 14 (6. 1.). *Nechť $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojité. Pak je zde omezené*

pomocí posloupností. nepřímo: nechť $f(x)$ je neomezená v $[a, b]$, BÚNO shora

$M := f([a, b]) = \{f(x), x \in [a, b]\}$ není omezené shora

tj. $\forall K > 0\, \exists y\; inM$ t. ž. $y > K$ užívám pro $K = n = 1, 2, \cdots \implies \exists y_n \in M, y_n > n$, zřejmě $y_n \to +\infty, n \to +\infty$

$\exists x_n \in [a, b]$ t. ž. $f(x_n) = y_n \to +\infty$

užiji V. 7. 4., resp. důsl. $\implies \exists$ posloupnost $\{\tilde{x}_n\} \subseteq \{x_n\}, \exists x_0 \in [a, b]$ t. ž. $\tilde{x}_n \to x_0$.

V. 7. 7. $\implies f(\tilde{x}_n) \to f(x_0) \in \mathbb{R}$, ale $f(\tilde{x}_n) = \tilde{y}_n \to +\infty$ - spor $\square$

Věta 15 (6.2.). *Nechť $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojité. Pak zde má globální maximum a minimum*

Důkaz. polož $S := \sup\{f(x), x \in [a, b]\} \in \mathbb{R}$

cíl: $\exists x_0 \in [a, b]$ t. ž. $f(x_0) = S$

$n = 1, 2, \ldots : S - \frac{1}{n} < S \implies \exists x_n \in [a, b]$, t. ž. $S - \frac{1}{n}$ $\square$

Kapitola 7

Taylorův polynom

Příklad 6 (Motivační). Chci aproximaci $f(x) = e^{-2x}$ v bodě $x = 0$, hledáme aproximaci $p(x) = a + bc + cx^2$

Nikoho nepřekvapí, že lineární aproximace bude tečna, tedy $p(x) = f(0) + f'(0)x = 1 - 2x$

Chceme ji ale nějak vylepšit, zpřesnit, a to tím, že přidáme kvadratický člen. Jak ho ale najdeme?

IDEA: napasujeme vyšší derivace, tj. $f''(0) = p''(0)$

$p''(0) = 2c, f''(0) = 4 \implies c = 2 \implies p(x) = 1 - 2x + 2x^2$

Jak toto dělat obecně? Jak určit další vyšší členy? Když aproximaci useknu, jak velká je chyba?

Definice 13. Nechť $f(x), g(x)$ jsou definovány na $\mathscr{P}(x_0)$. Řekneme, že

- $f(x)$ je malé ó od $g(x)$ pro $x \to x_0$, pokud $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0, x \to x_0$
- $f(x)$ je velké Ó od $g(x)$ pro $x \to x_0$, pokud $\exists C, \delta > 0$ t. ž. $|f(x)| \leq C|g(x)| \forall x \in \mathscr{P}(x_0, \delta)$
- $f(x)$ je řádově rovno $g(x)$ pro $x \to x_0$, pokud $\exists a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ t. ž. $\frac{f(x)}{g(x)} \to a, x \to x_0$

Značíme $f(x) = o(g(x))$ resp. $f(x) = O(g(x))$ resp. $f(x) \sim g(x), x \to x_0$

Příklad 7. 1. $\ln x = o(\sqrt{x}), x \to +\infty \ldots \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \to 0, x \to +\infty$

2. $\frac{\sin x + \cos x}{x^2+1} = O(\frac{1}{x^2}), x \to +\infty \ldots |f(x)| \leq \frac{2}{x^2} = 2\frac{1}{x^2} = Cg(x)$

3. $\sin x \sim x, 1 - \cos x \sim x^2, x \to 0 \ldots$ (pouze pro cos) $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}(= a), x \to 0$

Definice 14 (Derivace vyšších řádů). i. $f^{(0)}(x) = f(x)$

ii. $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))'$, tj. $f^{(1)}(x) = f'(x), f^{(2)}(x) = f''(x)$

Pro $I \subseteq \mathbb{R}$ otevřený interval definuji

$$C^n(I) = \left\{ f(x) : I \to \mathbb{R}; f^{(t)} \text{ existuje a je spojitá v } I \, \forall k = 0, 1, \ldots n \right\}$$

Speciálně $C^0(I) = C(I) = \{f(x) : I \to \mathbb{R} \text{ je spojité v } \mathbb{R}\}$