

2 Zobrazení

Cíl cvičení: pochopit / zopakovat pojem zobrazení a procvičit zjišťování jeho vlastností

Řešené příklady:

Zavedeme následující značení geometrických zobrazení roviny \mathbb{R}^2 do sebe:

- R_φ – otočení se středem v počátku $(0, 0)$ o úhel φ (proti směru hodinových ručiček),
- O_x , resp. O_y – osová souměrnost podle osy x , resp. y ,
- P_x , resp. P_y – kolmá projekce na osu x , resp. y .

Úloha 2.1. Uvažujme zobrazení O_x, O_y, P_x, P_y a R_φ pro všechna φ (každý úhel určuje jedno zobrazení).

- Která ze zobrazení jsou prostá a která jsou na celé \mathbb{R}^2 ?
- Pro každé zobrazení najděte úplný vzor bodu $(0, 1)$ a úplný vzor bodu $(1, 1)$.
- Pro všechna bijektivní zobrazení určete zobrazení inverzní.
- Popište složená zobrazení $O_x \circ O_y, P_x \circ P_y, R_\varphi \circ R_\psi$.
- Jak zobrazení O_x a P_x transformují přímku s obecným tvarem $\{(x, y) \mid x + 2y = 1\}$? Nakreslete si obrázek.

Úloha 2.2. Uvažujme zobrazení $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ daná předpisem

$$f((x, y)) = (3x + 2y, 2x + y), \quad g((x, y)) = (2x - y, -4x + 2y).$$

- Rozhodněte, zda jsou zobrazení f a g na (to je jednodušší) a zda jsou prostá.
- Najděte úplný vzor bodů $(-1, 2)$ a $(1, 0)$.
- Popište podobným vzorečkem složená zobrazení $f \circ g, g \circ f$.
- Jak zobrazení f a g transformují přímku s parametrickým vyjádřením $\{(1, 1) + s(1, -1) \mid s \in \mathbb{R}\}$?

Úloha 2.3. Jak podobným vzorečkem jako v úloze 2.2 popsat zobrazení O_x, O_y, P_x, P_y a $R_{\frac{\pi}{2}}$?

Další základní příklady k počítání:

Úloha 2.4. Uvažujme zobrazení $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ daná předpisem

$$F((x, y, z)) = (x + y - z, x - 2y + z), \quad G((x, y)) = (x + y, x - 3y, 2x - y).$$

- Rozhodněte, zda jsou zobrazení F a G prostá a zda jsou na.
- Najděte úplný vzor bodu $(1, 1)$ v zobrazení F .
- Popište obraz přímky $p = \{(1, 1) + s(1, -1) \mid s \in \mathbb{R}\}$ při zobrazení G .
- Popište vzorečkem složená zobrazení $F \circ G, G \circ F$ a rozhodněte, zda jsou tato zobrazení prostá a zda jsou na.

Úloha 2.5. Pro zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ daná předpisy $f((x, y)) = (x + y, y)$ a $g((x, y)) = (2y, 3x)$ určete (a) obraz čtverce s vrcholy $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$, (b) obraz množiny \mathbb{Z}^2 .

Úloha 2.6. Pro následující zobrazení $f : X \rightarrow Y$ určete (i) počet zobrazení $g : Y \rightarrow X$, pro která $g \circ f = \text{id}_X$; (ii) počet zobrazení $g : Y \rightarrow X$, pro která $f \circ g = \text{id}_Y$; (iii) počet zobrazení $g : Y \rightarrow X$, pro která $g \circ f = \text{id}_X$ a $f \circ g = \text{id}_Y$.

- $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}, f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 5$,
- $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, f(1) = f(3) = f(5) = 2, f(2) = f(6) = 1, f(4) = 3$,
- $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 3, f(4) = 1$.

Obtížnější příklady:

Úloha 2.7. Popište vzorečkem zobrazení R_φ .

Úloha 2.8. Najděte parametrické vyjádření obrazu přímky $\{(x, y) \mid x + 2y = 1\}$ při zobrazení R_φ .

Úloha 2.9. Popište složená zobrazení $O_x \circ R_\varphi$ a $R_\varphi \circ O_x$ a mocniny zobrazení R_φ^n , $n \in \mathbb{Z}$.

Úloha 2.10. Označme $\mathbf{n} = (a, b)$ nenulový vektor v \mathbb{R}^2 , $O_{\mathbf{n}}$ osou souměrnost podle přímky $p : ax+by=0$ a $P_{\mathbf{n}}$ kolmou projekci na tuto přímku. Zapište tato zobrazení podobným vzorcem jako v úloze 2.2.

Úloha 2.11. Uvažujte následující zobrazení komplexní roviny do sebe:

- (a) $d_k(z) = kz$, kde $k \in \mathbb{R}$;
- (b) $r_\varphi(z) = (\cos \varphi + i \sin \varphi)z$, kde $\varphi \in \mathbb{R}$;
- (c) $p_b(z) = z + b$, kde $b \in \mathbb{C}$.

Popište tato zobrazení geometricky a napište vzorce pro reálnou a imaginární část obrazu čísla z pomocí reálné a imaginární části $z = x + iy$. Popište inverzní zobrazení, mocniny těchto zobrazení a porovnejte $r_{\pi/2} \circ p_i$ a $p_i \circ r_{\pi/2}$. Zapište pomocí standardních operací na komplexních číslech osovou souměrnost podle reálné a podle imaginární osy.

Úloha 2.12. Podobně jako v úloze 2.2 popište vzorcem následující zobrazení \mathbb{R}^3 do sebe:

- (a) Zrcadlení podle roviny obsahující osy x a z .
- (b) Zrcadlení podle osy x .
- (c) Rotaci okolo osy y o úhel φ .
- (d) Rotaci okolo osy prvního oktantu, která cyklicky zobrazuje kladné polopřímky os x , y a z na sebe.

A ještě obtížnější příklady:

Úloha 2.13. Popište zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vzniklá

- (a) složením dvou osových symetrií podle přímek procházejících počátkem,
- (b) složením rotace kolem počátku a osové symetrie podle přímky procházející počátkem (obě možnosti půřadí skládání).

Úloha 2.14. Najděte zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které je prosté, ale není na.

Úloha 2.15. Najděte zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které je na, ale není prosté.

Úloha 2.16. Mějme zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které splňuje

- pro každou dvojici aritmetických vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ platí $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$,
- pro každý aritmetický vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ a každý skalár $t \in \mathbb{R}$ platí $f(t \cdot \mathbf{x}) = t \cdot f(\mathbf{x})$.

Dokažte, že f je prosté právě tehdy, když je na.

Výsledky:

2.1. (a) O_x , O_y a R_φ pro všechna $\varphi \in \mathbb{R}$ jsou prostá i na, P_x a P_y nejsou ani jedno (b) $(0, 1)$:
 $O_x: \{(0, -1)\}$, $O_y: \{(0, 1)\}$, $P_x: \emptyset$, $P_y: \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $R_\varphi: \{\sin \varphi, \cos \varphi\}$; $(1, 1)$: $O_x: \{(1, -1)\}$,
 $O_y: \{(-1, 1)\}$, $P_x, P_y: \emptyset$, $R_\varphi: \{(\sqrt{2} \cos(\pi/4 - \varphi), \sqrt{2} \sin(\pi/4 - \varphi))\}$ (c) $O_x^{-1} = O_x$, $O_y^{-1} = O_y$,
 $R_\varphi^{-1} = R_{-\varphi}$ (d) $O_x \circ O_y = R_\pi$, $P_x \circ P_y$ přiřadí každému bodu počátek, $R_\varphi \circ R_\psi = R_{\varphi+\psi}$
(e) $O_x: \{(x, y) \mid x - 2y = 1\}$, $P_x: \{(x, y) \mid y = 0\}$

2.2. (a) f je prosté i na, g ani jedno (b) $f^{-1}(\{(-1, 2)\}) = \{(5, -8)\}$,
 $g^{-1}(\{(-1, 2)\}) = \{(x, y) \mid 2x - y = -1\}$, $f^{-1}(\{(1, 0)\}) = \{(-1, 2)\}$, $g^{-1}(\{(1, 0)\}) = \emptyset$
(c) $(f \circ g)((x, y)) = (-2x + y, 0)$, $(g \circ f)((x, y)) = (4x + 3y, -8x - 6y)$ (d) $f: \{(5, 3) + s(1, 1) \mid s \in \mathbb{R}\}$,
 $g: \{(1, -2) + s(3, -6) \mid s \in \mathbb{R}\}$

2.3. $O_x((x, y)) = (x, -y)$, $O_y((x, y)) = (-x, y)$, $P_x((x, y)) = (x, 0)$, $P_y((x, y)) = (0, y)$,
 $R_{\pi/2}((x, y)) = (-y, x)$

2.4. (a) F je na a není prosté, G není na a je prosté (b) $\{(1, 0, 0) + s(1, 2, 3) \mid s \in \mathbb{R}\}$
(c) $\{(2, -2, 1) + s(0, 4, 3) \mid s \in \mathbb{R}\}$ (d) $(F \circ G)((x, y)) = (-y, x + 6y)$ je prosté a na,
 $(G \circ F)((x, y, z)) = (2x - y, -2x + 7y - 4z, x + 4y - 3z)$ není ani prosté, ani na

2.5. (a) f : rovnoběžník s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, g : obdélník s vrcholy $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 3)$, $(2, 3)$
(b) f : celé \mathbb{Z}^2 , g : $\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid (2 \mid a) \& (3 \mid b)\}$

2.6. (a) 9, 0, 0 (b) 0, 6, 0 (c) 1, 1, 1

2.7. $R_\varphi((x, y)) = (x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi)$

2.8. např. $\{(\cos \varphi, \sin \varphi) + s(2 \cos \varphi + \sin \varphi, 2 \sin \varphi - \cos \varphi) \mid s \in \mathbb{R}\}$

2.9. $(O_x \circ R_\varphi)((x, y)) = (x \cos \varphi - y \sin \varphi, -x \sin \varphi - y \cos \varphi)$,
 $(R_\varphi \circ O_x)((x, y)) = (x \cos \varphi + y \sin \varphi, x \sin \varphi - y \cos \varphi)$, $R_\varphi^n = R_{n\varphi}$

2.10. $O_n((x, y)) = \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} x - \frac{2ab}{a^2 + b^2} y, -\frac{2ab}{a^2 + b^2} x + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y \right)$,

$P_n((x, y)) = \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} x - \frac{ab}{a^2 + b^2} y, -\frac{ab}{a^2 + b^2} x + \frac{a^2}{a^2 + b^2} y \right)$.