

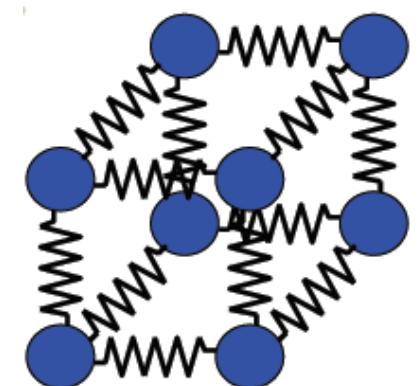
# 8. Pružnost

## Anotace

Pružnost

Zobecněný Hookeův zákon. Základní úloha teorie pružnosti. Tah, smyk, torze, ohyb.

**Nauka o pružnosti:** zjistit souvislost mezi deformacemi a napětími, které v tělese budí vnější síly



# Pružnost

Hledáme vztah mezi napětím a deformací pro elastický materiál.

Elementární úlohy:

## 1. Jednoosý tah/tlak:

a) Poměrné prodloužení:  $\varepsilon = (l' - l)/l = \Delta l/l$

$$\Delta l = c \cdot F \quad \text{kde parametr } c = f(l, S, \text{materiál}), \text{ evidentně: } c \sim l, c \sim 1/S \Rightarrow$$

$$\Delta l = k \frac{l}{S} F \rightarrow \frac{\Delta l}{l} = k \frac{F}{S}$$

$$\varepsilon = k \sigma_n \rightarrow \boxed{\sigma = E \varepsilon}$$

**Hookův zákon** (v elementárním tvaru)

$E$  - Youngův modul pružnosti,  $k$  - poddajnost

tj. za předpokladu malých deformací je deformace úměrná přiloženému napětí.

b) Příčné zkrácení:  $\eta = -(a' - a)/a = -\Delta a/a$

analogicky:  $\eta = k_1 \sigma_n$

tedy:

$$\eta = k_1 E \varepsilon = \nu \varepsilon = \frac{1}{m} \varepsilon = \frac{1}{mE} \sigma_n$$

$$\boxed{\eta = \frac{1}{mE} \sigma_n}$$

$m$  - Poissonova konstanta,  $\nu = 1/m$  Poissonovo číslo

$m = \varepsilon/\eta$  – kolikrát je poměrné prodloužení větší než poměrné zkrácení

# Pružnost

Absolutní prodloužení       $\ell' = \ell(1 + \varepsilon) = \ell \left(1 + \frac{\sigma_n}{E}\right)$

příčné zkrácení       $a' = a(1 - \eta) = a \left(1 - \frac{\sigma_n}{mE}\right)$

**2. Všestranný tlak  $p$ :**

délka hran po deformaci<sup>\*)</sup>:     $a' = a(1 + \varepsilon - 2\eta), \quad b' = b(1 + \varepsilon - 2\eta), \quad c' = c(1 + \varepsilon - 2\eta)$

objem po deformaci:       $V' = a'b'c' = abc(1 + \varepsilon - 2\eta)^3 \approx V[1 + 3(\varepsilon - 2\eta)]$

relativní změna objemu:       $\frac{V' - V}{V} = \frac{\Delta V}{V} = +3(\varepsilon - 2\eta) = +3\left(\frac{1}{E} - \frac{2}{mE}\right)\sigma_n = +\frac{3(m-2)}{mE}\sigma_n$

$\boxed{\gamma = -\frac{1}{p} \frac{\Delta V}{V}}$

Objemová stlačitelnost, def.:

Modul objemové pružnosti:

$$K = \frac{1}{\gamma} = \frac{mE}{3(m-2)} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Protože  $K > 0 \Rightarrow m > 2, \quad 0 < \nu < 1/2$

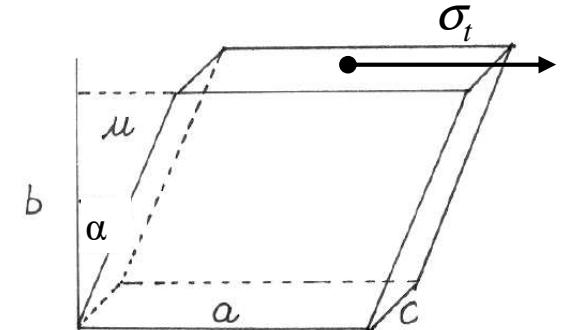
<sup>\*)</sup> Kdyby tlak působil jen v jednom směru, např. hrany c, hranol by se v tomto směru zkrátil a v ostatních prodloužil. Protože však tlak působí i ve směrech a, b, musíme stejnou úvahu udělat i pro tyto směry.

# Pružnost

## 3. Smyk

$$\tan \alpha \approx \alpha = u/b \sim \sigma_t \quad \longrightarrow \quad \boxed{\sigma_t = G\alpha}$$

kde  $G$  ... modul pružnosti ve smyku (modul torze)



lze odvodit (viz dále): 
$$G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

$\Rightarrow$  pouze 2 nezávislé parametry popisují deformaci izotropního tělesa ( $E, m, K, G$ )

$\Rightarrow$  protože  $m > 2$ , platí:  $\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}$

Materiál	$E[\text{Nm}^{-2}]$ (Young)	$\nu$ (Poisson)	$\gamma[\text{m}^2\text{N}^{-1}]$ (stlačitelnost)	$G[\text{Nm}^{-2}]$ (smyk)
Hliník	$7,2 \cdot 10^{10}$	0,34	$1,3 \cdot 10^{-11}$	$2,7 \cdot 10^{10}$
Měď	$1,2 \cdot 10^{11}$	0,35	$7,1 \cdot 10^{-12}$	$4,6 \cdot 10^{10}$
Železo	$2,1 \cdot 10^{11}$	0,28	$6,3 \cdot 10^{-12}$	$7,8 \cdot 10^{10}$

# Zobecněný Hookeův zákon

Lineární teorie pružnosti vycházející z Hookeova zákona předpokládá, že každá složka tenzoru napětí je lineární funkcí všech složek tenzoru deformace:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}$$

**zobecněný Hookův zákon**

$$e_{ij} = \gamma_{ijkl} \sigma_{kl}$$

$c_{ijkl}$  – tenzor pružnosti 4. řádu (elastické koeficienty),  $3^4$  složek

$\gamma_{ijkl}$  – elastické konstanty

( $3^2$  rovnic, celkem  $3^4$  členů, Einsteinova sumační konvence)

Symetrie v indexech:

$i \leftrightarrow j$  a  $k \leftrightarrow l$  ...tj. 36 složek

Symetrie po dvojcích:

$ij kl \leftrightarrow kl ij$  (z energ. úvah)  $\Rightarrow$  max. 21 nezávislých složek

Vyšší symetrie:

triklinický krystal – 21 nezávislých složek

kubický krystal – 3 nezávislé složky

izotropní těleso – 2 nezávislé složky (v praxi:  $E$ ,  $G$ )

Zápis  $c_{ijkl}$  pomocí kontrakce indexů:

dvojici indexů nahradíme jedním indexem podle schématu

$11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6 \Rightarrow$  matice  $6 \times 6$

# Zobecněný Hookeův zákon – izotrpní prostředí

kontrakce indexů:

$$11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6$$

Hookeův zákon při kontrakci indexů (symetrická matice 6x6):

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} \quad \rightarrow \quad \sigma_i = C_{ik} e_k$   
6 rovnic

Připomínáme:  $C_{ij}$  je symetrická matice (tj. nevypsané členy jsou shodné se členy nad hlavní diagonálou)

# Zobecněný Hookeův zákon – izotropní prostředí

Hookeův zákon pro homogenní izotropní prostředí (tenzor pruž. - symetrická matice 6x6):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\mu & 0 & 0 \\ & & & & 2\mu & 0 \\ & & & & & 2\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{13} \\ e_{12} \end{bmatrix} \quad 6 \text{ rovnic}$$

$\lambda, \mu$  - Laméovy koeficienty

Ve složkách:  $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_I + 2\mu e_{ij}$

Zobecněný Hookův z.  
pro izotrop. prostředí



$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \lambda e_I + 2\mu e_{ii}, & i &= j \\ \sigma_{ij} &= 2\mu e_{ij}, & i &\neq j \end{aligned}$$

kde  $e_I = e_{11} + e_{22} + e_{33}$  ... 1. invariant tenzoru deformace

$\sigma_I = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$  ... 1. invariant tenzoru napětí

$$\Rightarrow \sigma_I = (3\lambda + 2\mu) e_I$$

Připomínáme:  $C_{ij}$  je symetrická matice (tj. nevypsané členy jsou shodné se členy nad hlavní diagonálou)  
 $e_{ii}$  ... poměrná prodloužení délkových elementů, které před deformací měly směr souř.os

# Zobecněný Hookeův zákon – tah, smyk, torze, ohyb

Příklady počítané na přednášce (viz Kvasnica – Mechanika):

Př.1. objemová deformace - objem hranolku  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  po deformaci:

$$V' = \Delta x(1+e_{11})\Delta y(1+e_{22})\Delta z(1+e_{33}) \cong \Delta x\Delta y\Delta z(1+e_{11}+e_{22}+e_{33}) = V(1 + e_I) \quad \text{tedy}$$

$$e_I = \frac{V' - V}{V}$$

objemová dilatace (1. invariant popisuje objemovou změnu, nezávisí na s.s.)

Př.2. všeobecný tlak:  $\sigma_{ii} = -p, \quad \sigma_I = -3p$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{K} = -\frac{1}{p} \frac{V' - V}{V} = \frac{3e_I}{\sigma_I} \\ \text{platí: } \sigma_I = (3\lambda + 2\mu)e_I \end{array} \right\} \Rightarrow K = (3\lambda + 2\mu)/3$$

Pozn. Oba invarinty nezávisí na s.s. (avšak složky se mění!)

Př.3. Tyč namáhaná tahem,  $\sigma \parallel x_1$

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{22} \end{pmatrix}$$

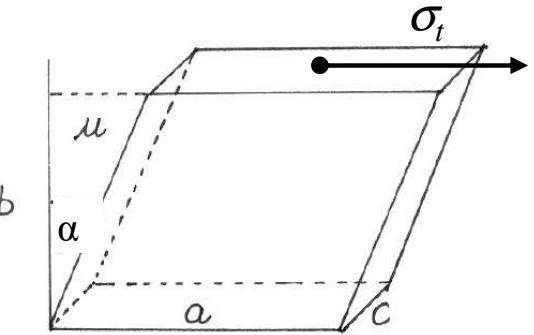
# Zobecněný Hookeův zákon – tah, smyk, torze, ohyb

Příklady počítané na přednášce (viz např. Kvasnica – Mechanika)

Př.4. Smyk

$$e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad e_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (\alpha + 0) = \frac{\alpha}{2}, \quad e_{13} = e_{23} = 0$$

$$\sigma_6 = 2\mu e_6, \quad \text{tj. } \sigma_{12} = 2\mu e_{12} = \mu\alpha \\ \text{def.: } \sigma_{12} = G\alpha \quad \Rightarrow \quad G = \mu$$



a dle př. 3:

$$\lambda = \frac{G(E - 2G)}{3G - E}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu\alpha & 0 \\ \mu\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha/2 & 0 \\ \alpha/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Př.5. Torze tyče kruhového průřezu (na cvičení)

moment sil:  $M_t = \frac{\pi Gr^4}{2l} \varphi \equiv D\varphi$

torzní kmity:  $J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi$

Př.6. Průhyb trámku (na cvičení, viz Kvasnica):

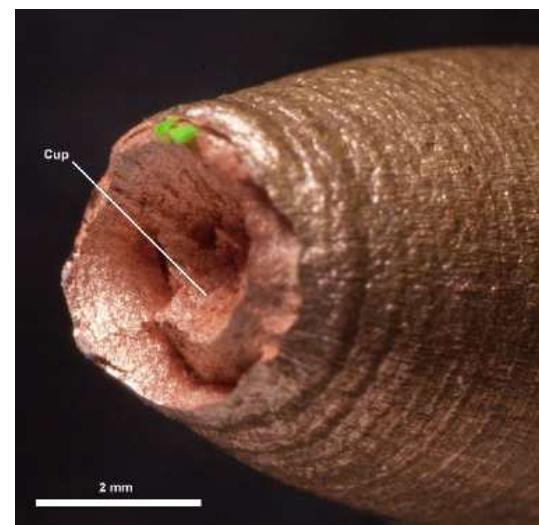
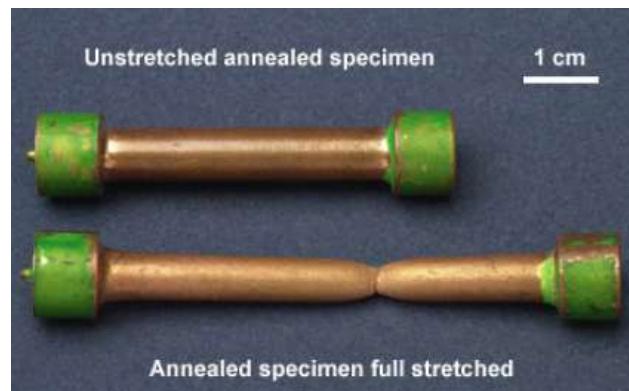
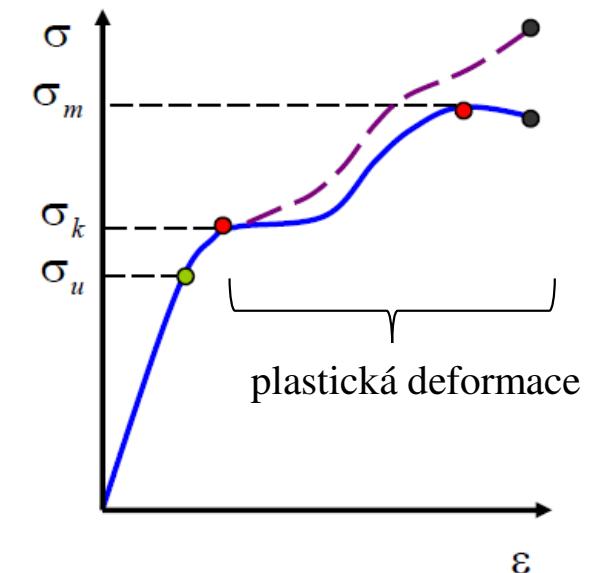
$$d = \frac{Fl^3}{4Eab^3}$$

# Hookeův zákon

$\sigma_u$  je mezní napětí, které ještě splňuje Hookeův zákon a nazývá se **mezí úměrnosti**

$\sigma_k$  je tedy mezní napětí, které ještě nevyvolá trvalou plastickou deformaci. Nazýváme ho **mez pružnosti** (v technické praxi se nazývá **mez kluzu**)

Maximální smluvní napětí, kterého v průběhu deformace dosáhneme, se nazývá mez pevnosti  $\sigma_m$  (často se nazývá **pevnost v tahu**)



Materiál	$\sigma_u$ [MPa]	$\sigma_m$ [MPa]
ocel	190-220	380-450
dural	180-200	370
dřevo	25	40
sklo	40-100	80-200
beton	3-25	5-50
zdivo	2-6	3,5-20

# Základní úloha



**Základní úloha teorie pružnosti:** nalézt napětí a deformaci v každém bodě tělesa, známe-li rozložení napětí nebo deformace na povrchu.

Předp.: těleso je po deformaci v rovnováze, hledáme složky  $\sigma_{ij}$  a  $u_i$  popsané rovnicemi:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + G_j = 0$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_I + 2\mu e_{ij}$$

9 ric pro 9 neznámých (neb  $e_{ij} \leftrightarrow u_i$ )

2 zákl. úlohy – je známo rozložení sil na povrchu tělesa  $\sigma(r)$

– je známo posunutí bodů na povrchu tělesa  $u(x_k)$

Řešení – viz speciální učebnice