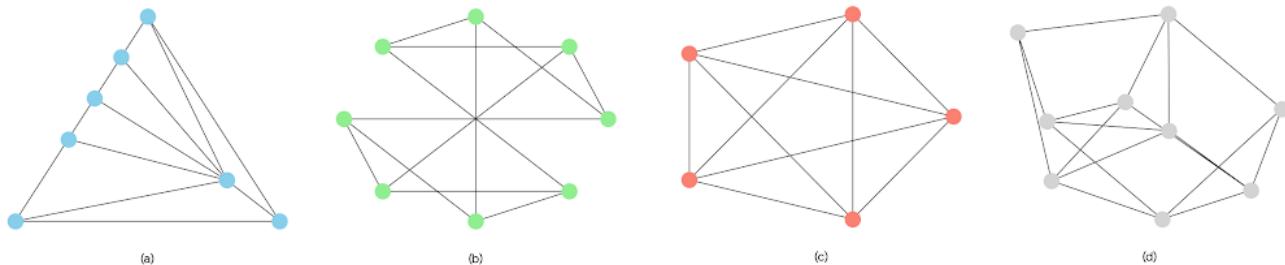


## ROVINNÉ GRAFY

**Příklad 1. Je rovinný?**

Rozhodněte, které z následujících grafů (a)–(d) jsou rovinné a které nikoli. Své tvrzení zdůvodněte (nakreslením rovinného diagramu nebo důkazem nerovinnosti).



OBRÁZEK 1. Grafy k příkladu 1

**Příklad 2.  $K_5$  není rovinný.**

Bez použití Kuratowského věty dokažte, že graf  $K_5$  (graf (c) z předchozího obrázku) není rovinný.

**Příklad 3.  $K_{m,n}$  je rovinný**

Dokažte, že graf  $K_{m,n}$  je rovinný graf, právě když  $\min\{m, n\} \leq 2$ .

**Příklad 4. Ukažte, že doplněk rovinného grafu s 11 vrcholy nemůže být rovinný.**

Najděte příklad co největšího rovinného grafu, jehož doplněk je rovinný.

**Příklad 5. Jedným tahem :**

Dokažte, že každý souvislý rovinný eulerovský graf lze nakreslit do roviny jediným uzavřeným tahem, který se „jen“ dotýká ve vrcholech, a nikdy se v nich neprotíná.

**Příklad 6. Pět hranově disjunktních lesů.**

Dokažte, že každý rovinný graf lze vyjádřit jako sjednocení pěti hranově disjunktních lesů.  
(Platí to i pro tři lesy, ale to už není tak snadné dokázat.)

**Příklad 7. Existují?**

Existuje kubický (tj. 3-regulární) rovinný graf, který obsahuje:

- (a) právě 12 šestiúhelníkových stěn (a žádné další)?
- (b) právě 12 pětiúhelníkových stěn (a žádné další)?
- (c) jednu dvacetiúhelníkovou stěnu a deset pětiúhelníkových stěn (a žádné další)?

**Příklad 8. Self-duál.**

Graf  $G$  je *self-duál* pokud  $G \approx G^*$ .

- (1) Najděte jednoduchý graf  $G$  (bez smyček a násobných hran) na 4 vrcholech takový, že  $G^* = G$ .
- (2) Pro  $n > 4$  najděte jednoduchý graf na  $n$  vrcholech takový, že  $G^* = G$ .

**Příklad 9. (Ne)jednoznačnost duálu.**

Najděte dvě nakreslení téhož grafu, jejichž duály nejsou isomorfní.

**Příklad 10. Charakterizujte:**

- (a) takové souvislé rovinné grafy, že duální graf jejich libovolného rovinného nakreslení nemá žádnou smyčku.
- (b) takové souvislé rovinné grafy, že duální graf jejich libovolného rovinného nakreslení nemá žádnou smyčku ani dvojici násobných hran.