Úvod do sem patří název

Zápisky z přednášky Jméno Příjmení učitele

Jméno Příjmení

Úvodní informace

Značení

Kapitola 1

Hlubší vlastnosti derivace a spojitosti

Věta 1 (L'Hospital). *Nechť* $x_0 \in \mathbb{R}^*$, *nechť* $\exists$ *vlastní* $f'(x), g'(x)$, *navíc* $g'(x) \neq 0 \forall x_0 \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$. *Nechť platí buď*

a) $f(x) \to 0, g(x) \to 0, x \to x_0$, *nebo*

b) $|g(x)| \to +\infty, x \to x_0$.

Pak

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

má-li pravá strana smysl.

Důkaz. 1. $x \to x_0^+, x_0 \in \mathbb{R}$, případ a); $\varepsilon > 0$ dáno:

$\exists \delta > 0$ t. ž. $\forall c \in \mathcal{P}_+(x_0, \delta)$ platí:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$$

TRIK do/předefiniceinujme $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (nemá vliv na $\lim_{x \to x_0}$)

$\implies$ f, g spojité v $[x_0, x_0 + \delta), \delta > 0$ malé

- v bodě x_0 zprava $(f(x), g(x) \to 0 = f(x_0) = g(x_0), x \to x_0)$
- v bodech $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $\impliedby$ Věta 4. 1. $(\exists f', g'$ vlastní$)$

Buď $x \in \mathcal{P}_+(x_0, \delta)$ pevné, libovolné

Aplikuji větu 6. 8. (C. o stř. h.) na $[x_0, x]$

$\implies$ $\exists x \in [x_0, x] \subset \mathcal{P}_+(x_0, \delta)$ t. ž. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) - f(x)}{g(x_0) - g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$

2. $x \to +\infty$, případ a);

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to0^+}\frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})}=(LP1.)=\lim_{y\to0^+}\frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})}=\lim_{y\to0^+}\frac{f'(\frac{1}{y})\cdot\frac{-1}{y^2}}{g'(\frac{1}{y})\cdot\frac{-1}{y^2}}=(L2.3.)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3. $x \to x_0^+$, případ b), tj. $|g(x)| \to +\infty, x \to x_0$

   Užiji V. 6. 8. na $[x, y]$:

$$\exists c \in (x, y) \text{ t. ž. } \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \implies$$

   pujčím si $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(y)}{g(x)}+\frac{f'(c)}{g'(c)}(1-\frac{g(y)}{g(x)})=P_1+P_3\cdot P_2$, fixuji y blízko $x_0 \implies c$ blízko x_0, když $x \to x_0 \implies P_3 \to L, P_1 \to 0, P_2 \to 1$, a tedy PS blízko L.

□

Poznámka 1. Úmluva: $I, J \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly.

Definice 1. Řekneme, že $f(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost, pokud $\forall a, b, \in I, \forall\gamma$ mezi $f(a), f(b) \exists c$ mezi a, b t. ž. $f(c)=\gamma$. (Darbouxova věta: $f(x)$ spoj. v $I \implies$ má v I Darboux. vlast.)

Věta 2 (*). *Nechť I je otevřený interval, $f(x)$ je spojitá v I, nechť $\exists f'(x)$ vlastní $\forall x \in I$. Pak $f'(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost.*

Věta 3 (Monotonie a znaménko derivace). *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ lib. interval, $f(x)$ je spojité v I, nechť $\exists f' > 0$ (resp. ≥ 0, ≤ 0, < 0) $\forall x$ vnitřní bod I. Potom $f(x)$ je rostoucí (resp. neklesající, nerostoucí, klesající) v I.*

Důkaz. Nechť $x_1 < x_2 \in I \implies {}^? f(x_1) < f(x_2)$.

Užiji V. 6. 5. (Lagrange) na $[x_1, x_2] \subset I$ – spojitost OK, a taky $\exists f'(x) \forall x \in (x_1, x_2) \subset I$

$\implies \exists c \in (x_1, x_2)$ t. ž. $\frac{f(x_2)-f(x_2)}{x_2-x_1}=f'(c) \iff f(x_1)-f(x_2)=f'(c)\cdot(x_1-x_2)>0.$ □

Příklad 1. $f(x)=x^n, I=[0,+\infty), n \in \mathbb{N}$

$f'(x)=nx^{n-1}>0, x \in (0,+\infty)$ – otevřený interval je právě vnitřek intervalu I

$\implies (V6.10.) f(x)$ rostoucí v I.

Definice 2. Funkce $f(x)$ se nazve konvexní (resp. ryze konvexní, konkávní, ryze konkávní) v I, jestliže $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I : \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq$ (resp. $<, \geq, >$) $\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

Věta 4 (Konvexita a monotonie derivace). *Nechť I interval s krajními body $a < b$. Nechť $f(x)$ spojitá v I. Nechť $\exists f'(x) \forall x \in (a, b)$ a je rostoucí (resp. neklesající, klesající, nerostoucí). Potom $f(x)$ je ryze konvexní (resp konvexní, ryze konkávní, konkávní) v I.*

Důkaz. Nechť $x_1 < x_2 < x_3 \in I \implies^? \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

Užiji 2x V. 6. 5. (Lagrange) na $[x_1, x_2]$, pak na $[x_2, x_3]$: $\exists c \in (x_1, x_2)$ t. ž. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$ a $\exists d \in (x_2, x_3)$ t. ž. $\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(d)$.

Zřejmě $d > c \implies f'(c) < f'(d) \implies$ to co dk. $\square$

Příklad 2. $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ – spojité v $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+|x|)^2} \cdot |x|' = \frac{-\operatorname{sgn} x}{(1+|x|)^2}(x \neq 0) = \begin{cases} \frac{-1}{(1+|x|)^2}, x > 0 \\ \frac{1}{(1+|x|)^2, x<0} \end{cases}$$

V. 6. 11. $\implies$ f je ryze konvexní v $(-\infty, 0)$ a v $(0, +\infty)$ (ale ne už v $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

Poznámka 2 (Ekvivalentní definice konvexity)**.** $\forall a, b, \in I, \forall \lambda \in (0,1) : f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$.

Důkaz. Důkaz jako cvičení pro čtenáře, napovíme $x_1 = a, x_3 = b, x_2 =$ nějakej zlomek s λ $\square$