

Úvod do sem patří název

Zápisky z přednášky Jméno Příjmení učitele

Jméno Příjmení

Úvodní informace

Značení

Kapitola 1

Primitivní funkce????

Věta 1 (L'Hospital). Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechť \exists vlastní $f'(x), g'(x)$, navíc $g'(x) \neq 0 \forall x_0 \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$. Nechť platí bud'

- a) $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$, nebo
- b) $|g(x)| \rightarrow +\infty, x \rightarrow x_0$.

Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

má-li pravá strana smysl.

Důkaz. 1. $x \rightarrow x_0^+, x_0 \in \mathbb{R}$, případ a); $\varepsilon > 0$ dáno:

$\exists \delta > 0$ t. ž. $\forall c \in \mathcal{P}_+(x_0, \delta)$ platí:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$$

TRIK do/předefiniceinujme $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (nemá vliv na $\lim_{x \rightarrow x_0}$)

$\implies f, g$ spojité v $[x_0, x_0 + \delta], \delta > 0$ malé

- v bodě x_0 zprava $(f(x), g(x)) \rightarrow 0 = f(x_0) = g(x_0), x \rightarrow x_0$
- v bodech $x \in (x_0, x_0 + \delta) \iff$ Věta 4. 1. ($\exists f', g'$ vlastní)

Bud' $x \in \mathcal{P}_+(x_0, \delta)$ pevné, libovolné

Aplikuji větu 6. 8. (C. o stř. h.) na $[x_0, x]$

$$\implies \exists x \in [x_0, x] \subset \mathcal{P}_+(x_0, \delta) \text{ t. ž. } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) - f(x)}{g(x_0) - g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$$

2. $x \rightarrow +\infty$, případ a);

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})} = (LP1.) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(\frac{1}{y}) \cdot \frac{-1}{y^2}}{g'(\frac{1}{y}) \cdot \frac{-1}{y^2}} = (L2.3.) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3. $x \rightarrow x_0^+$, případ b), tj. $|g(x)| \rightarrow +\infty, x \rightarrow x_0$

Užiji V. 6. 8. na $[x, y]$:

$$\exists c \in (x, y) \text{ t. z. } \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \implies$$

pujčím si $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(c)}{g'(c)}(1 - \frac{g(y)}{g(x)}) = P_1 + P_3 \cdot P_2$, fixuji y blízko $x_0 \implies c$ blízko x_0 , když $x \rightarrow x_0 \implies P_3 \rightarrow L, P_1 \rightarrow 0, P_2 \rightarrow 1$, a tedy PS blízko L .

□

Poznámka 1. Úmluva: $I, J \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly.

Definice 1. Řekneme, že $f(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost, pokud $\forall a, b \in I, \forall \gamma$ mezi $f(a), f(b) \exists c$ mezi a, b t. z. $f(c) = \gamma$. (Darbouxova věta: $f(x)$ spoj. v $I \implies$ má v I Darboux. vlast.)

Věta 2 (*). Nechť I je otevřený interval, $f(x)$ je spojitá v I , nechť $\exists f'(x)$ vlastní $\forall x \in I$. Pak $f'(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost.

Věta 3 (Monotonie a znaménko derivace). Nechť $I \subset \mathbb{R}$ lib. interval, $f(x)$ je spojité v I , nechť $\exists f' > 0$ (resp. $\geq 0, \leq 0, < 0$) $\forall x$ vnitřní bod I . Potom $f(x)$ je rostoucí (resp. neklesající, nerostoucí, klesající) v I .

Důkaz. Nechť $x_1 < x_2 \in I \implies ?f(x_1) < f(x_2)$.

Užiji V. 6. 5. (Lagrange) na $[x_1, x_2] \subset I$ – spojitost OK, a taky $\exists f'(x) \forall x \in (x_1, x_2) \subset I \implies \exists c \in (x_1, x_2)$ t. z. $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \iff f(x_1) - f(x_2) = f'(c) \cdot (x_1 - x_2) > 0$. □

Příklad 1. $f(x) = x^n, I = [0, +\infty), n \in \mathbb{N}$

$f'(x) = nx^{n-1} > 0, x \in (0, +\infty)$ – otevřený interval je právě vnitřek intervalu $I \implies (V6.10.) f(x)$ rostoucí v I .

Definice 2. Funkce $f(x)$ se nazve konvexní (resp. ryze konvexní, konkávní, ryze konkávní) v I , jestliže $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq$ (resp. $<, \geq, >$) $\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Věta 4 (Konvexit a monotonie derivace). Nechť I interval s krajními body $a < b$. Nechť $f(x)$ spojitá v I . Nechť $\exists f'(x) \forall x \in (a, b)$ a je rostoucí (resp. neklesající, klesající, nerostoucí). Potom $f(x)$ je ryze konvexní (resp konvexní, ryze konkávní, konkávní) v I .

Důkaz. Nechť $x_1 < x_2 < x_3 \in I \implies \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Užiji 2x V. 6. 5. (Lagrange) na $[x_1, x_2]$, pak na $[x_2, x_3]$: $\exists c \in (x_1, x_2)$ t. ž. $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$ a $\exists d \in (x_2, x_3)$ t. ž. $\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(d)$.

Zřejmě $d > c \implies f'(c) < f'(d) \implies$ to co dk. □

Příklad 2. $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ – spojité v \mathbb{R}

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+|x|)^2} \cdot |x'| = \frac{-\operatorname{sgn} x}{(1+|x|)^2} (x \neq 0) = \begin{cases} \frac{-1}{(1+|x|)^2}, & x > 0 \\ \frac{1}{(1+|x|)^2}, & x < 0 \end{cases}$$

V. 6. 11. $\implies f$ je ryze konkavní v $(-\infty, 0)$ a v $(0, +\infty)$ (ale ne už v $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

Poznámka 2 (Ekvivalentní definice konkavosti). $\forall a, b \in I, \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$.

Důkaz. Důkaz jako cvičení pro čtenáře, napovíme $x_1 = a, x_3 = b, x_2 =$ nějaký zlomek s λ □