Diskrétní matematika

6. 10. 2025 / Cvičení II

INDUKCE

Příklad 1. Dělitelnost.
Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n^5 - n$ dělitelné 5 (beze zbytku).

Příklad 2. Alternující posloupnost.
Dokažte, že pro pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí:

$$\sum_{j=0}^{n} (-\frac{1}{2})^j = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3 \cdot 2^n}$$

Příklad 3. Fibonacci.
Připomeňme si, že Fibonacciho čísla jsou definovány následovně:

- $F_1 = 1$
- $F_2 = 1$
- $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ pro všechna $i \geq 3$

Dokažte, že pro ně platí následující rovnost.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

Příklad 4. Mince.
Dokažte indukcí, že každou sumu větší než 3 umíme zaplatit mincemi hodnoty 2 a 5.

Příklad 5. Podmnožiny.
Dokažte, že každá množina na n prvcích má 2^n různých podmnožin.

Příklad 6. Bláto.
n dětí si společně hraje, po určité době se k dětí zablátí na čele. Vrátí se domů a otec jim řekne: „Nejméně jeden z vás má bláto na čele”.

Dále se postupuje v krocích. Otec se opakovaně ptá: „Ví někdo z vás zda má bláto na čele?” Dokažte, že po k krocích všechny zablácené děti odpovědí ANO.

Příklad 7. Čokoláda.
Tabulku čokolády $m \times n$ dílků chceme rozlámat na jednotlivé dílky. Kolik nejméně rozlomení je na to potřeba? A kolik nejvíce?