

Jan Romanovský
Gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše
4.A
A-I-1

Předpokládejme, že pro reálná čísla a, b mají výrazy $a^2 + b$ a $a + b^2$ stejnou hodnotu. Jaká nejmenší může tato hodnota být?

$$\begin{aligned}a^2 + b &= a + b^2 \\a^2 - b^2 &= a - b \\(a + b)(a - b) &= a - b\end{aligned}$$

$$i. \ a - b = 0 \implies a = b:$$

$$\implies \text{hledáme min. fce } f : y = x^2 + x$$

$$f' : y = 2x + 1, \text{ extrém pro } y = 0 \implies x = \frac{-1}{2}$$

$$f'' : y = 2 \implies \text{minimum}$$

$$\implies a = b = \frac{-1}{2}, a^2 + b = a + b^2 = \frac{-1}{4}$$

$$ii. \ a - b \neq 0 \implies a \neq b$$

$$(a + b)(a - b) = (a - b)$$

$$a + b = 1$$

$$b = 1 - a$$

$$\implies \text{hledáme min. fce } f : y = x^2 - x + 1$$

$$f' : y = 2x - 1, \text{ extrém pro } y = 0 \implies x = \frac{1}{2}$$

$$f'' : y = 2 \implies \text{minimum}$$

$$\implies a = \frac{1}{2}, a^2 - a + 1 = \frac{3}{4} > \frac{-1}{4}$$

Tato hodnota může být nejméně $\frac{-1}{4}$.