Jan Romanovský
Gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše
4.A
A-I-1

Předpokládejme, že pro reálná čísla a, b mají výrazy $a^2 + b$ a $a + b^2$ stejnou hodnotu. Jaká nejmenší může tato hodnota být?

$$\begin{aligned} a^2 + b &= a + b^2 \\ a^2 - b^2 &= a - b \\ (a+b)(a-b) &= a - b \end{aligned}$$

i. $a - b = 0 \implies a = b$:

$\implies$ hledáme min. fce $f : y = x^2 + x$

$f' : y = 2x + 1$, extrém pro $y = 0 \implies x = \dfrac{-1}{2}$

$f'' : y = 2 \implies$ minimum

$\implies a = b = \dfrac{-1}{2}$, $a^2 + b = a + b^2 = \dfrac{-1}{4}$

ii. $a - b \neq 0 \implies a \neq b$

$(a+b)(a-b) = (a-b)$

$a + b = 1$

$b = 1 - a$

$\implies$ hledáme min. fce $f : y = x^2 - x + 1$

$f' : y = 2x - 1$, extrém pro $y = 0 \implies x = \dfrac{1}{2}$

$f'' : y = 2 \implies$ minimum

$\implies a = \dfrac{1}{2}, a^2 - a + 1 = \dfrac{3}{4} > \dfrac{-1}{4}$

Tato hodnota bude nejmenší pro $a = b = \frac{-1}{2}$, $a^2 + b = a + b^2 = \frac{-1}{4}$.