DÚ Diskrétní matematika – Sada 1

Jan Romanovský (matykub11)

8. října 2025

Příklad 1. Vlastnosti součtu

Rozdělme na případy:

1. $n = 0 \mod 4 : n = 4k, k \in \mathbb{Z} : S_n = \frac{16k^2+4k}{2} = 0 \mod 4$
2. $n = 1 \mod 4 : n = 4k+1, k \in \mathbb{Z} : S_n = \frac{16k^2+8k+1+4k+1}{2} = 1 \mod 4$
3. $n = 2 \mod 4 : n = 4k+2, k \in \mathbb{Z} : S_n = \frac{16k^2+16k+4+4k+2}{2} = 1 \mod 4$
4. $n = 3 \mod 4 : n = 4k+3, k \in \mathbb{Z} : S_n = \frac{16k^2+24k+9+4k+3}{2} = 0 \mod 4.$

A vidíme, že $S_n = 1 \mod 4$ v případech 2. a 3., tedy když $n = 1$ nebo $2 \mod 4$ – QED

Příklad 2. Trojúhelníková nerovnost

Postupujme přímo:

$$\begin{aligned}
|a+b| &\leq |a| + |b| \\
|a+b|^2 &\leq (|a| + |b|)^2 \text{ – ekv. úprava, protože obě strany nezáporné} \\
a^2 + 2ab + b^2 &\leq a^2 + 2|ab| + b^2 \\
ab &\leq |ab|
\end{aligned}$$

1. $ab \geq 0 : ab \leq ab$ – platí – pro tento případě vidíme hledanou rovnost
2. $ab < 0 : -ab \leq ab$ – platí – QED