

8 Lineární (ne)závislost

Cíle cvičení:

- motivovat a procvičit pojmy lineární závislosti a nezávislosti,
- naučit se vybírat lineárně nezávislou generující posloupnost.

Řešené příklady:

Úloha 8.1. Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů X ve vektorovém prostoru V lineárně závislá, či nezávislá, jestliže

- (a) $X = ((1, 0, 2, 1)^T, (2, 0, 1, 1)^T, (1, 0, 1, -1)^T)$ a $V = \mathbb{Q}^4$,
- (b) $X = ((1, 1)^T, (1, 0)^T, (3, 4)^T)$ a $V = \mathbb{Z}_7^2$,
- (c) $X = ((1, 1, 2)^T, (2, 0, 1)^T, (2, 1, 1)^T)$ a $V = \mathbb{Z}_3^3$,
- (d) $X = (3 - i, 2 + 3i)$ a $V = \mathbb{C}$ nad tělesem \mathbb{R} ,
- (e) $X = (3 - i, 2 + 3i)$ a $V = \mathbb{C}$ nad tělesem \mathbb{C} ,
- (f) $X = (x^2 + x + 1, x^2 + 2x, x^2 + 2)$ a $V = \mathbb{R}[x]$ nad tělesem \mathbb{R} .

Úloha 8.2. Vyberte z posloupnosti

$$X = ((2, 4, 0, 1, 4)^T, (4, 3, 0, 2, 3)^T, (1, 2, 3, 4, 0)^T, (3, 1, 1, 1, 2)^T, (4, 3, 4, 0, 2)^T)$$

lineárně nezávislou podposloupnost, která generuje celý podprostor $U = \text{LO } X$ vektorového prostoru \mathbb{Z}_5^5 nad tělesem \mathbb{Z}_5 .

Úloha 8.3. Doplňte lineárně nezávislou množinu $B = \{(2, 4, 0, 1, 4)^T, (1, 2, 1, 0, 3)^T\}$ na lineárně nezávislou posloupnost, která generuje celý aritmetický vektorový prostor \mathbb{Z}_5^5 .

Úloha 8.4. Dokažte, že množina $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ je podprostorem \mathbb{R} jakožto vektorového prostoru nad \mathbb{Q} a navíc že $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

Úloha 8.5. Najděte nenulový polynom stupně (nejvýše) 3 s racionálními koeficienty, jehož kořenem je reálné číslo $1 - \sqrt[3]{2}$. Návod: z druhé části předchozí úlohy víme, že mocniny $1 - \sqrt[3]{2}$ patří do $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$, a tedy každé z nich odpovídá nějaká uspořádaná trojice racionálních čísel a, b, c . Hledaný polynom dává určitou racionální lineární kombinaci těchto trojic a naopak.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 8.6. Dokažte, že je množina reálných polynomů reálným vektorovým prostorem, který neobsahuje žádnou konečnou generující množinu.

Úloha 8.7. Vyberte z množiny

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ve vektorovém prostoru \mathbb{Z}_2^4 nad tělesem \mathbb{Z}_2 maximální lineárně nezávislou množinu a dokažte, že generuje prostor \mathbb{Z}_2^4 .

Obtížnější příklady:

Úloha 8.8. Popište podmnožinu $\text{LO} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cap \text{LO} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ vektorového prostoru \mathbb{Z}_5^3 .

Úloha 8.9. Dokažte, že průnik dvou podprostorů vektorového prostoru V je vždy podprostor. Najděte nějakou množinu generátorů podprostorů $W_1 \cap W_2$, $W_3 \cap W_4$ a $W_1 \cap W_3 \leq \mathbb{Z}_5^5$, kde

$$W_1 := \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$W_2 := \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$W_3 := \text{LO} \{ (1, 2, 1, 4, 3)^T, (0, 4, 1, 1, 0)^T, (2, 0, 1, 3, 4)^T \}$$

$$W_4 := \text{LO} \{ (3, 1, 3, 0, 0)^T, (2, 0, 1, 4, 1)^T \}$$

Platí, že sjednocení dvou podprostorů V je vždy podprostor?

Úloha 8.10. Rozhodněte, zda je posloupnost $(\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x)$ prvků reálného vektorového prostoru všech reálných funkcí reálné proměnné lineárně nezávislá.

Úloha 8.11. Necht $(a_n)_1^\infty, (b_n)_1^\infty, (c_n)_1^\infty$ jsou tři nekonečné reálné posloupnosti. Za jakých podmínek je posloupnost $((a_n)_1^\infty, (b_n)_1^\infty, (c_n)_1^\infty)$ lineárně nezávislá v prostoru všech reálných posloupností za předpokladu, že jsou všechny tři posloupnosti

- (a) aritmetické?
- (b) geometrické?

Úloha 8.12. V prostoru $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ uvažujme matici A . Ukažte, že posloupnost (I_2, A, A^2) je lineárně závislá.

Úloha 8.13. Ukažte, že řádky libovolné 3×3 antisymetrické ($A = -A^T$) matice nad tělesem \mathbb{T} , jehož charakteristika je různá od dvou, tvoří lineárně závislou posloupnost. Pro těleso charakteristiky 2 najděte protipříklad.

Výsledky:

8.1. **(a)** nezávislá **(b)** závislá **(c)** závislá **(d)** nezávislá **(e)** závislá **(f)** závislá

8.2. např. $((2, 4, 0, 1, 4)^T, (1, 2, 3, 4, 0)^T)$

8.3. doplní se např. $\{(0, 1, 0, 0, 0)^T, (0, 0, 0, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 0, 1)^T\}$

8.5. $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ a jeho nenulové násobky

8.7. např. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

8.8. $\text{LO}\{(4, 3, 1)^T\}$