

## Opakování

### Opakování ze SŠ

1. Nalezněte reálnou a imaginární část

a)  $\frac{2}{1 - 3i}$       b)  $(1 + i\sqrt{3})^3$

2. Nalezněte velikosti a argumenty následujících komplexních čísel

a)  $-2 - 2i$       b)  $1 + i^{123}$

3. Dokažte

a) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$	b) $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$	c) $\overline{(\bar{z})} = z$
d) $ \bar{z}  =  z $	e) $ z_1 z_2  =  z_1   z_2 $	
f) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$	$z_1, z_2 \neq 0$	
g) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$	$z_1, z_2 \neq 0$	

4. Řešte v  $\mathbb{C}$ :

a)  $x^6 + 1 = 0$       b)  $x^2 + x + 1 = 0$

5. Řešte v  $\mathbb{R}$ :

a)  $|x + 1| + |x - 1| \geq 2$       b)  $|x - 3| + |x + 2| \leq 0$

## Výroky, množiny, zobrazení

6. Dokažte, že platí

- a)  $A \Rightarrow A$
- b)  $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
- c)  $A \Leftrightarrow A$
- d)  $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$
- e)  $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$
- f)  $\text{non } (\text{non } A) \Leftrightarrow A$
- g)  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non } B \Rightarrow \text{non } A)$
- h)  $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non } B \Leftrightarrow \text{non } A)$
- i)  $(\text{non } (A \vee B)) \Leftrightarrow ((\text{non } A) \wedge (\text{non } B))$
- j)  $(\text{non } (A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\text{non } A) \vee (\text{non } B))$

- k)  $(\text{non } (A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (A \bigwedge (\text{non } B))$   
l)  $(\text{non } (A \Leftrightarrow B)) \Leftrightarrow ((A \bigwedge (\text{non } B)) \bigvee (B \bigwedge (\text{non } A)))$

7. Zapište negaci výroku

$$\exists x \in \mathbb{R} : \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

a rozhodněte, který z výroků je pravdivý.

8. Jsou následující výroky pravdivé?
- a)  $\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in (a, a + \varepsilon) : x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$
  - b)  $\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists x \in (a, a + \varepsilon) : x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$
9. Dokažte:
- a)  $C \setminus (A \bigcup B) = (C \setminus A) \bigcap (C \setminus B)$
  - b)  $C \setminus (A \bigcap B) = (C \setminus A) \bigcup (C \setminus B)$
  - c) Nechť  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  je systém libovolných množin a nechť  $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ . Potom  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ .
10. Dokažte, že je-li  $f$  zobrazení, pak
- $$f(M_1) \setminus f(M_2) \subset f(M_1 \setminus M_2).$$
- $(M_1, M_2$  jsou podmnožiny definičního oboru  $f$ .) Kdy platí rovnost?
11. Nechť  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$  je bijekce a nechť  $\psi(x) = \sqrt{\varphi(x)^2 - 1}$ . Dokažte, že existuje inverzní funkce  $\psi^{-1}$  a vyjádřete ji pomocí  $\varphi^{-1}$ . Určete  $D_{\psi^{-1}}$ .