Cvičení k přednášce NMAG111+NMAG113 Lineární algebra 1

Zadání
Verze ze dne 26. září 2025

4 Tělesa a matice

Cíle cvičení:

- procvičit počítání v tělesech $\mathbb{Z}_p$ a výpočet řešení soustavy lineárních rovnic nad tělesy $\mathbb{Z}_p$,
- naučit se počítat s maticemi nad obecnými tělesy.

Řešené příklady:

Příklady jsou řazené tak, aby spočtení jednoho podpříkladu pomohlo vyřešit následující. Snažte se volit postup tak, abyste si práci usnadnili – nepočítejte mechanicky.

Úloha 4.1. Spočítejte v $\mathbb{Z}_p$:

(a) v $\mathbb{Z}_5$ hodnoty 2^{-1}, 3^{-1}, 4^{-1} a $(-2)^{-1} \cdot \big((2+4)\cdot(4+4)^{-1}\big) + 3$,

(b) v $\mathbb{Z}_7$ hodnoty 2^{-1}, 3^{-1}, 4^{-1}, 5^{-1}, 6^{-1} a $(-2)^{-1} \cdot \big((2+4)\cdot(4+4)^{-1}\big) + 3$,

(c) v $\mathbb{Z}_p$ pro liché prvočíslo p hodnoty 2^{-1} a $(p-1)^{-1}$,

(d) v $\mathbb{Z}_5$ hodnotu a splňující rovnici $3a + 4 = 1$ a všechna x a y splňující rovnici $4x - 3y + 1 = 2$.

Úloha 4.2. Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ všechna řešení soustavy rovnic s maticí

$$\text{(a)} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad \text{(b)} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Úloha 4.3. Uvažujme vektory

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

nad tělesem $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{Z}_{11}$.

(a) Spočítejte součty $\mathbf{B} + \mathbf{C}$, $\mathbf{C} + \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T$.

(b) Spočítejte součiny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_1$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_2$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_3$, $\mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{B}$, $5 \cdot \mathbf{C}$.

(c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}$,

(d) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T) + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T)^T - \mathbf{A}$.

Úloha 4.4. Najděte nad tělesy $T = \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ všechny vektory $\mathbf{x} \in T^3$ splňující rovnici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Další základní příklady k počítání:

Úloha 4.5. Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ všechna řešení soustavy rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Úloha 4.6. Uvažujte těleso $\mathbb{Z}_p$ (p je prvočíslo). Platí vždy, že $\forall a, \forall b \neq 0\ \exists c$ takové, že $a = bc$? Proč?

Obtížnější příklady:

Úloha 4.7. Dokažte, že množina $\mathbb{R}^2$ s operacemi

$$(x, y) + (r, s) \coloneqq (x + r, y + s)$$
$$(x, y) \cdot (r, s) \coloneqq (x \cdot r, y \cdot s),$$

kde $x, y, r, s \in \mathbb{R}$ a $+$ a $\cdot$ na pravé straně je běžné sčítání a násobení reálných čísel, není těleso. Které axiomy jsou splněny a které ne? Byla by tělesem množina všech $m \times n$ matic nad tělesem T, na které bychom sčítání zavedli jako běžné maticové a násobení předpisem $(A \cdot B)_{ij} \coloneqq a_{ij}b_{ij}$ pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$?

Úloha 4.8. Dokažte, že následující množiny tvoří spolu s běžnými operacemi tělesa:

(i) $\{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$,

(ii) $\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

Proč je v druhé množině člen $c\sqrt[3]{4}$? (Odpověď na tuto otázku není potřeba formálně dokazovat.)

Výsledky:

4.1. ***(a)*** $2^{-1} = 3$, $3^{-1} = 2$, $4^{-1} = 4$, $(-2)^{-1} \cdot \big((2+4)\cdot(4+4)^{-1}\big) + 3 = 2$ ***(b)*** $2^{-1} = 4$, $3^{-1} = 5$, $4^{-1} = 2$, $5^{-1} = 3$, $6^{-1} = 6$, $(-2)^{-1} \cdot \big((2+4)\cdot(4+4)^{-1}\big) + 3 = 0$ ***(c)*** $2^{-1} = \frac{p+1}{2}$, $(p-1)^{-1} = p-1$ ***(d)*** $a = 4$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{Z}_5 \right\}$

4.2. ***(a)*** $\emptyset$ ***(b)*** $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{Z}_7 \right\}$

4.3. ***(a)*** $\boxed{\mathbb{R}}$: $\mathbf{B} + \mathbf{C} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \mathbf{C} + \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$; $\boxed{\mathbb{Z}_7}$: $\mathbf{B} + \mathbf{C} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{smallmatrix}\right)$; $\boxed{\mathbb{Z}_{11}}$: $\mathbf{B} + \mathbf{C} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 4 & 7 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \\ 10 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ***(b)*** $\boxed{\mathbb{R}}$: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 10 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{B} = (3\,4\,1)$, $\mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{B} = (8\,10\,2)$, $5 \cdot \mathbf{C} = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 15 & 25 & 5 \end{smallmatrix}\right)$;
$\boxed{\mathbb{Z}_7}$: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{B} = (3\,4\,1)$, $\mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{B} = (1\,3\,2)$, $5 \cdot \mathbf{C} = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$;
$\boxed{\mathbb{Z}_{11}}$: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 10 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{B} = (3\,4\,1)$, $\mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{B} = (8\,10\,2)$, $5 \cdot \mathbf{C} = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$
(c) $\boxed{\mathbb{R}}$: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 8 & 10 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 10 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 10 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 6 & 10 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 7 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; $\boxed{\mathbb{Z}_7}$: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 3 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; $\boxed{\mathbb{Z}_{11}}$: stejně jako pro $\mathbb{R}$ ***(d)*** $\boxed{\mathbb{R}}$: $\left(\begin{smallmatrix} 6 & 10 \\ 15 & 26 \end{smallmatrix}\right)$, $\boxed{\mathbb{Z}_7}$: $\left(\begin{smallmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, $\boxed{\mathbb{Z}_{11}}$: $\left(\begin{smallmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix}\right)$

4.4. $\boxed{\mathbb{R}}$: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $\boxed{\mathbb{Z}_3}$: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_3 \right\}$; $\boxed{\mathbb{Z}_5}$: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

4.5. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Z}_5 \right\}$

4.6. Ano, stačí vzít $c \coloneqq a \cdot b^{-1}$.