

## PIE

**Příklad 1. Expected Value.**

Hrajete hru, ve které se házá minci. Pokud padne hlava, vyhrajete 4 koruny. Pokud orel, prohrajete 2 koruny.

- (a) Jaká je střední hodnota při jednom kole?
- (b) Pokud budete hrát 50 kol, jaká je střední hodnota vaší výhry?

**Příklad 2. Kostky IV.**

Hoďme dvěma spravedlivými šesti-stěnou kostkami. Označme  $X_1$  náhodnou proměnnou počtu ok padlých na první kostce, podobně  $X_2$  počet ok padlých na druhé kostce. Označme  $X = X_1 + X_2$ . Určete střední hodnotu  $\mathbb{E}[X_1 | X = k]$ .

**Příklad 3. Erastóthenovo sito.**

- (a) Kolik čísel zbude z množiny  $\{1, 2, \dots, 100\}$  po vyškrtnutí všech násobků čísel 2, 3, 5 a 7?
- (b) Určete počet přirozených čísel mezi 1 a 840, která nejsou dělitelná 6, 10 ani 14.

**Příklad 4. Fronta.**

Kolika způsoby lze seřadit do fronty 5 Čechů, 4 Slováky a 3 Maďary tak, aby všichni příslušníci žádného národa netvořili jeden souvislý blok? Uvažte oba případy: kdy nám záleží pouze na národnosti, a kdy uvažujeme konkrétní osoby.

**Příklad 5. Slova.**

Kolik existuje pořadí písmen A, B, D, E, I, K, M, N, R, Ů, Z takových, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov:

- (a) BAR, DEN, RAZIE ?

**Příklad 6. Ples.**

Na plese je  $n$  manželských párů. Kolika způsoby lze utvořit  $n$  tanečních párů, jestliže žádná manželská dvojice netancuje spolu?

**Příklad 7. Kameny na šachovnici.**

Kolika způsoby lze umístit osm kamenů na šachovnici  $4 \times 4$  tak, aby se na šachovnici vyskytovaly čtyři kameny ve stejném řádku nebo stejném sloupci?

**Příklad 8. P.I.E. jinak.**

Pomocí vhodné kombinatorické interpretace a použitím principu inkluze a exkluze spočtěte následující sumu pro  $n, m, j$  přirozené a  $n \leq j \leq m + n$ .

(T.j. vyjádřete tuto sumu jako nějaký výraz, který už nebude obsahovat sumu.)

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{m+n-i}{j-i}$$