Diskrétní matematika

27. 10. 2025 / Cvičení V

Pravděpodobnost & Jiné

Příklad 1. Vláčky.
Krabice dřevěných dětských vláčků obsahuje jednu lokomotivu a tři vagónky. Vagónky a lokomotiva se spojují pomocí magnetů. Lokomotiva má jeden magnet a každý vagónek dva - po jednom na obou koncích.

(a) S jakou pravděpodobností by vláček držel pohromadě v daném pořadí (vagónky nelze otáčet ani přemisťovat), pokud by v továrně orientaci magnetů přiřazovali náhodně?
(b) S jakou pravděpodobností by se dal sestavit vláček s vagónky v alespoň jednom pořadí (vagónky lze otáčet i přemisťovat), pokud by v továrně orientaci magnetů přiřazovali náhodně?
(c) S jakou pravděpodobností by se dal sestavit vláček s vagónky v každém pořadí (pro zvolené pořadí je dovoleno vagónky otáčet), pokud by v továrně orientaci magnetů přiřazovali náhodně?

Příklad 2. Zmrzlinová laboratoř
V cukrárně je k dispozici 11 různých příchutí zmrzliny.

a) Vyberte tři *různé* příchutě a naskládejte je na sebe (záleží na pořadí shora dolů).
b) Zvolte si čtyři kopečky, příchutě se *mohou opakovat* (např. vanilka–vanilka–čokoláda–jahoda), ale na pořadí kopečků *nezáleží*. Určete počet možností.
c) Sestavte dezert o pěti vrstvách; na pořadí vrstev *záleží* a příchutě se *mohou opakovat*. Určete počet možností.
d) Dvě možnosti konstrukce dezertu o 5 vrstvách; na pořadí *záleží*
   - Buď všech 5 vrstev tvoří zmrzlinové kopečky (z 11 příchutí, *mohou se opakovat*), *nebo*
   - přesně 3 vrstvy jsou zmrzlinové (z 11 příchutí, s opakováním) a přesně 2 vrstvy jsou *crumble* vybrané z 5 typů (*mohou se opakovat*).

Příklad 3. Dokažte:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$$

Příklad 4. Kostky III.
Ve hře osadníci se hází 2 kostkami (spravedlivými).

(a) Jaká je pravěpodobnost, že na první kostve padla jednička, když padl součet hodů rovný 7?
(b) Víme, že padla alespoň jedna šestka. Jaká je pravděpodobnost, že součet obou hodů je větší než 9?

Příklad 5. Dva jevy I.
Nechť jsou A a B náhodné jevy s $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ a $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$. Najděte následující:

(a) $P(A|B)$
(b) $P(B|A)$
(c) $P(\bar{A}|B)$
(d) $P(\bar{A}|\bar{B})$

Příklad 6. $P(A|B)$ vs $P(B|A)$ Vyjádřete $P(A|B)$ pomocí $P(B|A)$.

Příklad 7. Monty Hall.
V zábavném pořadu *Let's Make a Deal* nabízel moderátor Monty Hall výhru podle těchto pravidel: Výhra – automobil – je ukryta za jedněmi ze tří dveří, za zbývajícími dvěma jsou kozy. Hráč nejprve ukáže na jedny dveře. Moderátor, který zná umístění výhry, poté z ostatních dveří otevře takové, u nichž ví, že je za nimi koza. Následně dá hráči možnost vybrat si mezi dveřmi, na které původně ukázal, a druhými dosud zavřenými dveřmi. Je pro hráče výhodné změnit volbu a přejít na ty druhé dveře?