

DÚ Diskrétní matematika – Sada 7

Jan Romanovský

23. listopadu 2025

Příklad 1. Prolomení hotelového trezoru.

Ω ... všechny možné kombinace

A ... kód obsahuje alespoň jednu 4 a alespoň jednu 7

K ... kód obsahuje právě jednu 4 a právě jednu 7

L ... kód obsahuje dohromady třikrát 4 a 7, tedy dvakrát 4 a jednou 7 nebo dvakrát 7 a jednou 4

M ... kód obsahuje dohromady čtyřikrát 4 a 7, tedy třikrát 4 a jednou 7, dvakrát 4 a dvakrát 7 nebo jednou 4 a třikrát 7

$$|\Omega| = 10^4 = 10\,000$$

$|K| = \binom{4}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 8^2$ – prvním činitelem vybírám místa, kde budou 4 a 7, druhým, jaké je jejich vnitřní pořadí (v tomto případě neřeším – mám 1 od každého), třetím prohazuju 4 a 7 a posledním vybírám čísla mimo 4 a 7

$|L| = \binom{4}{3} \cdot \frac{3!}{2!} \cdot 2 \cdot 8$ – prvním činitelem vybírám místa, kde budou 4 a 7, druhým, jaké je jejich vnitřní pořadí, třetím prohazuju 4 a 7 a posledním vybírám čísla mimo 4 a 7

$|M| = \binom{4}{4} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot 1 \cdot 1 + \binom{4}{4} \cdot \frac{4!}{3!1!} \cdot 2 \cdot 1$ – první sčítanec je možnost dvakrát 4 a dvakrát 7, druhý je třikrát 4 a jednou 7 nebo třikrát 7 a jednou 4; prvním činitelem vybírám místa, kde budou 4 a 7, druhým, jaké je jejich vnitřní pořadí, třetím prohazuju 4 a 7 a posledním vybírám čísla mimo 4 a 7

$$|A| = |K| + |L| + |M| = 974$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{974}{10000} = 0,0974 = 9,74\%$$

Příklad 2. Popletené písemky.

Ptáme se vlastně na střední hodnotu počtu pevných bodů náhodné permutace, $\mathbb{E}(A)$, počet pevných bodů bude naše náhodná veličina. Pokud si zavedeme indikátor A_i , který přiřadí i -tému studentu 1, když dostane vlastní písemku a 0 jindy, pak $P(A_i) = \frac{1}{n}$ – právě 1 z n písemek je ta správná. Potom navíc díky linearitě střední hodnoty $\mathbb{E}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(A_i) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$.