DÚ Lineární algebra – Sada 7

Jan Romanovský

21. listopadu 2025

(7.2) Posloupnost $(4\mathbf{u}+3\mathbf{v}+2\mathbf{w}+\mathbf{z}, \mathbf{u}-\mathbf{v}-\mathbf{w}+\mathbf{z}, \mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}+\mathbf{z})$ je lineárně nezávislá, pokud žádný z vektorů z posloupnosti nejde vyjádřit jako lineární kombinace ostatních (pro každé z $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$ můžu řešit nezávisle na sobě, jelikož jejich posloupnost je lineárně nezávislá), když si tedy vektory přepíšeme do matice jako řádky (kde ve sloupcích potom najdu koeficienty původních vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$) je to ekvivalentní s tvrzením, že po převedení na odstupňovaný tvar nebude v matici žádný nulový řádek. Napíšeme si tedy popsanou matici.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že se žádný řádek nevynuloval, posloupnost $(4\mathbf{u}+3\mathbf{v}+2\mathbf{w}+\mathbf{z}, \mathbf{u}-\mathbf{v}-\mathbf{w}+\mathbf{z}, \mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}+\mathbf{z})$ je tedy lineárně nezávislá.