Jan Romanovský
Gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše
4.A
A-I-3

Na tabuli jsou napsána navzájem různá přirozená čísla se součtem 2024*. Každé z nich kromě nejmenšího je násobkem součtu všech menších napsaných čísel. Kolik nejvíce čísel může na tabuli být?*

Čísla napsaná na tabuli můžeme brát jako členy rostoucí posloupnosti z přirozených čísel, kdy pro všechny členy kromě prvního platí, že jsou násobkem součtu všech předchozích členů. Součet této posloupnosti je 2024.

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, ...,\, a_n$$
$$a_n = k_n \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i,\ k_n \in \mathbb{N}$$
$$S_{a_n} = 2024$$

Rozepišme si každý člen:

$$\begin{aligned}
&a_1 = a_1 \\
&a_2 = k_2 \cdot a_1 \\
&a_3 = k_3 \cdot (a_1 + a_2) = k_3 \cdot (k_2 + 1) \cdot a_1 \\
&a_4 = k_4 \cdot (a_1 + a_2 + a_3) = k_4 \cdot (a_1 + k_2 \cdot a_1 + k_3 \cdot (k_2 + 1) \cdot a_1) = k_4 \cdot (k_3 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot a_1 \\
&... \\
&a_n = k_n \cdot (k_{n-1} + 1) \cdot (k_{n-2} + 1) \cdot ... \cdot (k_2 + 1) \cdot a_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{a_n} &= a_n + (k_{n-1} + 1) \cdot (k_{n-2} + 1) \cdot ... \cdot (k_2 + 1) \cdot a_1 = \\
&= k_n \cdot (k_{n-1} + 1) \cdot (k_{n-2} + 1) \cdot ... \cdot (k_2 + 1) \cdot a_1 + (k_{n-1} + 1) \cdot (k_{n-2} + 1) \cdot ... \cdot (k_2 + 1) \cdot a_1 = \\
&= (k_n + 1) \cdot (k_{n-1} + 1) \cdot (k_{n-2} + 1) \cdot ... \cdot (k_2 + 1) \cdot a_1 = 2024
\end{aligned}$$

Zaměřme se na poslední rovnost. Všechny k jsou přirozená, a_1 také, takže všichni činitelé jsou přirození a jejich součin je 2024. Chceme, aby jich bylo co nejvíc – takový součin ale známe, je to rozklad na prvočinitele, protože žádný prvočinitel už nejde v přirozeném oboru dále rozložit. Každá závorka tedy reprezentuje jednoho prvočinitele čísla $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$, za první člen a_1 nám zbývá vybrat 1, aby se S_{a_n} opravdu rovnal 2024. Tento součin tedy může mít maximálně 6 činitelů.

Na tabuli může být maximálně 6 čísel.