

Domácí úkol č. 6 k přednášce NMAG111/113: Lineární algebra 1

zimní semestr 2025/2026

Datum odevzdání **středa 19. 11. 2025, 23:55 hod.**

(6.1) Označme $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ vektorový prostor všech reálných polynomů stupně nejvýše 4 (nad \mathbb{R}) a uvažujme jeho podmnožinu V sestávající z polynomů, které zároveň splňují podmínky:

- součet všech jejich koeficientů je 0,
- jejich hodnota v bodě 2 je rovna jejich hodnotě v bodě -1 .

Dokažte, že V (s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem) je podprostorem prostoru $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$, a najděte nějakou tříprvkovou množinu generátorů tohoto podprostoru.

Nápověda: Napište si, jak vypadá obecný polynom splňující dané podmínky. Pak ho vyjádřete jako lineární kombinaci tří konkrétních polynomů, které také splňují dané podmínky. Na základě tohoto můžete snadno obě části úlohy dokončit (tj. při použití vhodného tvrzení ze sekce o lineárním obalu rovnou zjistíte, že jde o podprostor, a nemusíte ověřovat definici).

(6.2) Najděte matici A nad tělesem \mathbb{Z}_3 s co nejmenším počtem řádků tak, aby $\text{Ker } A = \text{Im } B$, kde B je následující matice nad \mathbb{Z}_3 .

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nápověda: Inkluze $\text{Im } B \subseteq \text{Ker } A$ je ekvivalentní jistým podmínkám na každý řádek matice A . (Jakým?) Na tomto základě navrhněte matici A a zdůvodněte, že platí i opačná inkluze a že počet řádků nelze dále zmenšit. Argumentovat lze počtem prvků.

Bonusový problém: Najděte nějakou dvouprvkovou množinu generátorů prostoru reálných posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňujících $2a_{n+2} = -3a_{n+1} - 1a_n$. Řešte stejnou úlohu pro posloupnosti splňující $2a_{n+2} = -3a_{n+1} - 2a_n$.