

DÚ Lineární algebra – Sada 9

Jan Romanovský

10. prosince 2025

(9.1) Provedeme na matici $A_{a,b}$ vhodné řádkové a sloupcové úpravy, které nemění dimenzi řádkového či sloupcového prostoru.

$$\begin{pmatrix} a+2 & b & 1 & 2 \\ 2a+1 & 2b & a+3 & 1 \\ 3a+b+3 & 3b & a+4 & b+3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a+2 & b & 1 & 2 \\ 2 & 0 & a+1 & 2 \\ b+2 & 0 & a+1 & b+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a+2 & b & 1 & 2 \\ 2 & 0 & a+1 & 2 \\ b & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b & 4a & 0 \\ 2 & 0 & a+1 & 2 \\ b & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} a & b & 4a & 4a \\ 2 & 0 & a+1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nyní budeme hledat, zda je posloupnost řádků lineárně nezávislá. Vidíme, že můžeme vynulovat první a třetí řádek, a to volbou parametru $a = b = 0$ resp. $a \neq 0, b = 0$. V tom případě bude posloupnost řádků $\dim \text{Im } A_{a,b} = 1$, resp. $\dim \text{Im } A_{a,b}^T = 2$ jindy vždy $\dim \text{Im } A_{a,b}^T = 3$. Z tvrzení o dimenzi jádra a sloupcového prostoru můžeme rovnou určit dimenze ostatních prostorů.

$[a, b]$	$\dim \text{Im } A_{a,b}$	$\dim \text{Im } A_{a,b}^T$	$\dim \text{Ker } A_{a,b}$	$\dim \text{Ker } A_{a,b}^T$
$[0, 0]$	1	1	3	3
$[\neq 0, 0]$	2	2	2	2
$[\text{lib.}, \neq 0]$	3	3	1	1