Domácí úkol č. 11 k přednášce NMAG111/113: Lineární algebra 1
zimní semestr 2025/2026

Datum odevzdání **středa 7. 1. 2026, 23:55 hod.**

(11.1) Uvažujme báze aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$

$$B = \big((1,2),\,(2,-1)\big), \qquad C = \big((1,1),\,(1,-1)\big).$$

Lineární zobrazení $f_1, f_2, f_3, f_4 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mají vzhledem k bázi B následující matice:

$$[f_1]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad [f_2]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[f_3]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad [f_4]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Zdůvodněte, proč posloupnost (f_1, f_2, f_3, f_4) tvoří bázi vektorového prostoru $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.
2. Buď $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ zobrazení, jehož matice vzhledem k bázi C je

   $$[g]_C^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Nalezněte souřadnice zobrazení g v bázi (f_1, f_2, f_3, f_4) prostoru $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

(11.2) Buď $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineární zobrazení mezi konečně generovanými prostory nad tělesem $\mathbf{T}$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ a buď $U \subseteq V$ podmnožina vektorů. Rozhodněte, které z následujících implikací (obecně) platí, a buď je dokažte, nebo uveďte protipříklad:

- Je-li $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ lineárně nezávislá posloupnost ve $\mathbf{V}$, pak je $(f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_k))$ lineárně nezávislá posloupnost v $\mathbf{W}$.
- Je-li $(f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_k))$ lineárně nezávislá posloupnost v $\mathbf{W}$, pak je $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ lineárně nezávislá posloupnost ve $\mathbf{V}$.
- Je-li U podprostorem prostoru $\mathbf{V}$, pak je $f(U) = \{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in U\}$ podprostorem prostoru $\mathbf{W}$.
- Je-li $f(U)$ podprostorem prostoru $\mathbf{W}$, pak je U podprostorem prostoru $\mathbf{V}$.