Cvičení k přednášce NMAG111+NMAG113 Lineární algebra 1

Zadání
Verze ze dne 26. září 2025

12 Typy a prostory lineárních zobrazení

Cíle cvičení:

- procvičit hledání jader a obrazů lineárních zobrazení,
- naučit se využívat dimenze jádra a obrazu k popisu typu lineárního zobrazení,
- naučit se pracovat s prostory lineárních zobrazení a s lineárními formami.

Řešené příklady:

Úloha 12.1. Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ s maticí vzhledem ke kanonickým bázím $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ najděte bázi podprostorů $\operatorname{Ker} f$ a $\operatorname{Im} f$ a rozhodněte, zda je f monomorfismus, epimorfismus či izomorfismus.

Úloha 12.2. Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ s maticí $[f]^M_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi $M = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ a kanonické bázi K_3. Ověřte, že f je izomorfismus, a najděte matice f a f^{-1} vzhledem ke kanonickým bázím.

Úloha 12.3. Uvažujme lineární zobrazení $\varphi\colon \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^2$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ dané podmínkami

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Najděte matici $[\varphi]^{K_3}_{K_2}$ lineárního zobrazení φ vzhledem ke kanonickým bázím, spočítejte dimenze podprostorů $\operatorname{Ker}\varphi$ a $\operatorname{Im}\varphi$ a rozhodněte, zda jde o monomorfismus nebo epimorfismus.

Úloha 12.4. Najděte nějakou bázi reálného vektorového prostoru $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ a rozhodněte, zda jsou ve vektorovém prostoru $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ lineárně nezávislá posloupnost lineární zobrazení f, g, h, pokud

(a) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, $h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$,

(b) $[f]^{K_3}_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[g]^{K_3}_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $[h]^{K_3}_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, kde K_3 a K_2 jsou kanonické báze,

(c) $[f]^B_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $[g]^B_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $[h]^B_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, kde B je báze $\mathbb{R}^3$ a C je báze $\mathbb{R}^2$.

Úloha 12.5. Uvažujme lineární formy na vektorovém prostoru $V = \mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$:

$$f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x + 2z, \quad f_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 3x + y + 2z, \quad f_3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 4x + y + z.$$

(a) Ověřte, že posloupnost $B = (f_1, f_2, f_3)$ tvoří bázi duálního vektorového prostoru $V^d = \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_5^3, \mathbb{Z}_5)$,

(b) spočítejte souřadnice $[g]^B$ lineární formy $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 4z$,

(c) najděte bázi podprostoru $\bigcap_{a,b \in \mathbb{Z}_5} \operatorname{Ker}(af_1 + bf_2)$,

(d) najděte bázi podprostoru všech lineárních forem, jejichž jádro obsahuje vektor $(1, 1, 2)^T$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 12.6. Určete dimenzi jádra $\operatorname{Ker} h$ a obrazu $\operatorname{Im} h$ lineárního zobrazení h nad tělesem T víte-li, že jeho matice vzhledem k (neznámým) bázím B a C je

(a) $[h]^B_C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ pro $T = \mathbb{Z}_{11}$

(b) $[h]^B_C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ pro $T = \mathbb{R}$

(c) $[h]^B_C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ pro $T = \mathbb{Q}$

(d) $[h]^B_C = \begin{pmatrix} 2+i & 1-i & 7+3i & -1 & 6-7i \\ 7-i & 3 & 4-i & 0 & 2i \end{pmatrix}$ pro $T = \mathbb{C}$

Úloha 12.7. Najděte báze jádra a obrazu lineárního zobrazení φ z úlohy 12.3.

Úloha 12.8. Je-li $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ matice lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{Z}_7^4 \to \mathbb{Z}_7^3$ vzhledem k bázím $M = \big((1,1,0,0)^T, (0,1,1,0)^T, (0,0,1,1)^T, (1,0,0,0)^T\big)$ prostoru $\mathbb{Z}_7^4$ a $N = \big((3,1,4)^T, (3,3,0)^T, (2,1,6)^T\big)$ prostoru $\mathbb{Z}_7^3$, určete bázi a dimenzi jádra $\operatorname{Ker} f$ a obrazu $\operatorname{Im} f$.

Obtížnější příklady:

Úloha 12.9. Nechť $k \leq n$, V je vektorový prostor V nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ dimenze n a U jeho podprostor dimenze k. Kolik existuje takových lineárních zobrazení $\varphi\colon V \to U$, že $U \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$?

Úloha 12.10. Pro parametrické lineární zobrazení $f_{a,b}\colon \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^3$ najděte všechna $(a,b) \in \mathbb{Z}_7^2$, pro která je $f_{a,b}$ izomorfismus, jestliže $[f_{a,b}]^B_B = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & 1 \\ 2 & b & 1+a \\ 3 & -a & 1 \end{pmatrix}$.

Úloha 12.11. Nechť $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ je báze vektorového prostoru V. Dokažte, že je posloupnost lineárních forem $(f_1, \ldots, f_n)$ bází duálu V^d, právě když je matice $(f_i(\mathbf{b}_j))_{ij}$ regulární.

Výsledky:

12.1. báze $\operatorname{Ker} f$: např. $\left(\left(\begin{smallmatrix}2\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$; báze $\operatorname{Im} f$: jakákoliv báze $\mathbb{Z}_5^2$; jde pouze o epimorfismus

12.2. $[f]_{K_3}^{K_3} = \left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&3&0\end{smallmatrix}\right)$, $[f^{-1}]_{K_3}^{K_3} = \left(\begin{smallmatrix}0&3&3\\0&4&1\\1&3&1\end{smallmatrix}\right)$

12.3. $[\varphi]_{K_2}^{K_3} = \left(\begin{smallmatrix}0&2&2\\0&3&3\end{smallmatrix}\right)$, $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 2$, $\dim \operatorname{Im} \varphi = 1$, nejde ani o monomorfismus, ani o epimorfismus

12.4. ***(a)*** lin. nezávislá ***(b)*** lin. závislá ***(c)*** lin. nezávislá

12.5. ***(b)*** $[g]^B = \left(\begin{smallmatrix}3\\3\\2\end{smallmatrix}\right)$ ***(c)*** např. $\left(\left(\begin{smallmatrix}3\\4\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$ ***(d)*** např. (h_1, h_2), kde $h_1((x,y,z)^T) = 4x + y$, $h_2((x,y,z)^T) = 3x + z$

12.6. ***(a)*** 2, 1 ***(b)*** 1, 2 ***(c)*** 1, 2 ***(d)*** 3, 2

12.7. Báze $\operatorname{Ker} \varphi$ je např. $\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\6\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$ a báze $\operatorname{Im} \varphi$ je $\left(\left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right)\right)$.

12.8. $\dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rank}([f]_N^M) = 2$ a $\dim(\operatorname{Ker} f) = 4 - \dim(\operatorname{Im} f) = 2$.

Báze $\operatorname{Ker} f$ je například $\big((2,5,4,1)^T, (4,2,6,0)^T\big)$ a báze $\operatorname{Im} f$ je například $\big((6,5,6)^T, (5,2,3)^T\big)$.

12.9. $2^{k(n-k)}$