Cvičení k přednášce NMAG111+NMAG113 Lineární algebra 1

Zadání

Verze ze dne 26. září 2025

11 Lineární zobrazení

Cíle cvičení:

- procvičit si lineární zobrazení,
- naučit se počítat matice lineárního zobrazení.

Řešené příklady:

Úloha 11.1. Uvažujme pro matici $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ lineární zobrazení $f_A \colon \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ dané maticovým násobením. Najděte matici f_A vzhledem

(a) ke kanonickým bázím K_3 a K_2,

(b) k bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ a K_2,

(c) k bázi B a $C = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Úloha 11.2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažujme bázi $B = \left((1,2)^T, (1,3)^T\right)$. Dále $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pro následující lineární zobrazení určete matice jejich zobrazení vzhledem ke specifikovaným bázím:

(a) Pro $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ určete $[f]_{K_2}^{K_2}$, $[f]_{K_2}^{B}$, $[f]_{B}^{K_2}$, $[f]_{B}^{B}$

(b) Pro $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ určete $[f]_{K_2}^{K_2}$, $[f]_{K_2}^{B}$, $[f]_{B}^{K_2}$, $[f]_{B}^{B}$

(c) Pro $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2$ určete $[f]_{K_1}^{K_2}$, $[f]_{K_1}^{B}$

(d) Pro $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(s) = (s, -s)^T$ určete $[f]_{K_2}^{K_1}$, $[f]_{B}^{K_1}$

(e) Pro $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ určete $[f]_{K_2}^{K_2}$, $[f]_{K_2}^{B}$, $[f]_{B}^{B}$, $[f^{-1}]_{K_2}^{K_2}$, $[f^{-1}]_{B}^{K_2}$

(f) Pro $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \mid 2\mathbf{x})^T$ určete $[f]_{C}^{B}$, kde $C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

Úloha 11.3. Nechť $g \colon \mathbb{Z}_7^2 \to \mathbb{Z}_7^3$ je zobrazení určené předpisem

$$g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 \\ 2x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}.$$

Dokažte, že se jedná o lineární zobrazení, a najděte jeho matici vzhledem ke kanonickým bázím a vzhledem k bázím $A = \left((1,4)^T, (3,1)^T\right)$ a $B = \left((1,1,2)^T, (1,0,3)^T, (6,0,5)^T\right)$.

Úloha 11.4. Označme D první derivaci na vektorovém prostoru $\mathbb{R}[x]_4 = \{\sum_{i=0}^{3} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ reálných polynomů stupně menšího než 4 a označme $K = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ bázi $\mathbb{R}[x]_4$. Z matematické analýzy víme, že je D lineární zobrazení.

(a) Najděte matici $[D]_K^K$,

(b) je-li B nějaká báze $\mathbb{R}[x]_4$, najděte nejmenší $n \in \mathbb{N}$, pro které $([D]_B^B)^n = \mathbf{0}$.

Úloha 11.5. Nechť $g \colon \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^3$ lineární zobrazení s maticí $[g]_C^B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázím $B = \left((4,3)^T, (1,4)^T\right)$ a $C = \left((1,1,1)^T, (1,4,0)^T, (4,0,1)^T\right)$. Spočítejte matici

(a) $[g]_{K_3}^{K_2}$ lineárního zobrazení g vzhledem ke kanonickým bázím,

(b) $[fg]_{K_3}^{K_2}$ složeného lin. zobrazení fg vzhledem ke kanonickým bázím, jestliže $[f]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 11.6. Je-li $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineární zobrazení splňující

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix},$$

ověřte, že jde o bijekci, a najděte vzhledem ke kanonickým bázím matice zobrazení φ, φ^{-1} a φ^2.

Obtížnější příklady:

Úloha 11.7. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Najděte matici přechodu od báze $N = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$ k bázi $N' = (1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n)$ a od báze N' k bázi N v prostoru všech reálných polynomů stupně nejvýše n.

Úloha 11.8. Najděte všechna $a, b, c \in \mathbb{Q}$, pro která existuje lineární zobrazení $\varphi\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ splňující

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2b\end{pmatrix}.$$

Úloha 11.9. Označme $\mathbb{R}[x]_4 = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) < 4\}$ podprostor vektorového prostoru reálných polynomů a definujme zobrazení $\Omega\colon \mathbb{R}[x]_4 \to \mathbb{R}^4$ předpisem

$$\Omega(p) = \begin{pmatrix}p(0)\\p(1)\\p(2)\\p(3)\end{pmatrix}.$$

Ověřte, že je Ω lineární, najděte jeho matici vzhledem k bázím (x^0, x^1, x^2, x^3) a $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ a rozhodněte, zda jde o bijekci.

Úloha 11.10. Pro matici $A = \begin{pmatrix}0 & -2\\1 & 3\end{pmatrix}$ najděte všechna $\lambda \in \mathbb{R}$ taková, že matice $A - \lambda I_2$ je singulární. Pro každé takové λ najděte nějakou bázi prostoru $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_2)$. Sestavte z takto získaných vektorů bázi B prostoru $\mathbb{R}^2$. Určete matici $[f_A]_B^B$ a ověřte, že je diagonální. S pomocí této matice a transformační formule pro matici lineárního zobrazení spočtěte, čemu se rovná A^{10}.

Výsledky:

11.1. ***(a)*** $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ ***(b)*** $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ***(c)*** $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

11.2. ***(a)*** všechny matice jsou nulové ***(b)*** $[f]_{K_2}^{K_2} = [f]_B^B = I_2$, $[f]_{K_2}^B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $[f]_B^{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ***(c)*** $[f]_{K_1}^{K_2} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $[f]_{K_1}^B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ ***(d)*** $[f]_{K_2}^{K_1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $[f]_B^{K_1} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$ ***(e)*** $[f]_{K_2}^{K_2} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $[f]_{K_2}^B = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $[f]_B^B = \left(\begin{smallmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, $[f^{-1}]_{K_2}^{K_2} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $[f^{-1}]_B^{K_2} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ ***(f)*** $[f]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

11.3. $[g]_{K_3}^{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $[g]_B^A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

11.4. ***(a)*** $[D]_K^K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ***(b)*** 4

11.5. ***(a)*** $[g]_{K_3}^{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ***(b)*** $[fg]_{K_3}^{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

11.6. $[\varphi]_{K_2}^{K_2} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $[\varphi^{-1}]_{K_2}^{K_2} = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $[\varphi^2]_{K_2}^{K_2} = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$

11.8. $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) \in \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

11.9. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$; ano, jde o bijekci