Jan Romanovský
Gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše
4.A
A-I-4

Pro trojúhelník ABC platí $|AB| = 13$, $|BC| = 14$, $|CA| = 15$. Jeho posunutím o vektor délky 1 vznikne trojúhelník $A'B'C'$. Určete nejmenší možný obsah průniku trojúhelníků ABC a $A'B'C'$.

$ABC \cong A'B'C'$ – posunutí je shodné zobrazení
$\Longrightarrow$ je jedno pokud trojúhelníky zaměníme
$\Longrightarrow$ posunutí o vektor $\mathbf{v}$ pro naše účely to stejné jako posun o $-\mathbf{v}$, budeme uvažovat vektory mířící do té poloroviny vymezené přímkou $\overleftrightarrow{AB}$, kde je bod C
$\Longrightarrow$ tento přímý úhel, který bude vektor svírat s přímkou $\overleftrightarrow{AB}$ můžeme rozdělit na tři, a to na úhly po řadě v kladném směru α, γ, β trojúhelníku ABC. Toto jsou tři případy které dále blíže rozebereme.

Vektor $\mathbf{v}$ je v prvním segmentu:
Průsečíkem je trojúhelník $A'XY$, kde $X = BC \cap A'B'$, $Y = BC \cap C'A'$
$AC || A'C'$ – posunutí zachovává rovnoběžnost
$\Longrightarrow$ $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle A'YX|$ – souhlasné úhly, obdobně úhel u X
$\Longrightarrow$ $ABC \approx A'XY$ – věta *uu*, střed podobnosti $S = CY \cap AA'$, koeficient podobnosti $k = \frac{|A'S|}{|AS|} = \frac{|AS| - |\mathbf{v}|}{|AS|}$

Obsah je přímo úměrný druhé mocnině koeficientu podobnosti, hledáme tedy ten co nejmenší. Jeho hodnota závisí na poloze bodu S. Velikost vektoru je daná, koeficient tak bude nejmenší, když bude $|\mathbf{v}|$ oproti $|AS|$ co největší, tedy hledáme co nejmenší $|AS|$. S ale zřejmě leží na XY, nejmenší tato vzdálenost tak bude, pokud bude S kolmým průmětem A na BC, tedy když AS bude výška trojúhelníku ABC.

Obdobně pro dva ostatní segmenty, nejmenší bude obsah když S bude patou výšky trojúhelníku ABC, hledejme délky výšek v_a, v_b, v_c:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ s = \frac{a+b+c}{2}$$
$$S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84 \text{ cm}^2$$

$$v_a = \frac{2S}{a} = \frac{168}{14}$$
$$v_b = \frac{2S}{b} = \frac{168}{15} \text{ – nejmenší}$$
$$v_c = \frac{2S}{c} = \frac{168}{13}$$

$$k = \frac{v_b - |\mathbf{v}|}{v_b} = \frac{153}{168}$$
$$S_{A'XY} = k^2 \cdot S_{ABC} = \frac{2601}{3136} \cdot 84 = \frac{7803}{112} \doteq 69,6696 \text{ cm}^2$$

Nejmenší možný obsah průniku je 69,6696 cm^2.