

## JEDNODUCHÉ DŮKAZY

**Příklad 1.** Dokažte, že pro všechna  $n \in \mathbb{Z}$  je  $n^4 - n^2$  dělitelné 12.

**Příklad 2.** Dokažte, že neexistuje nejmenší kladné racionální číslo.

**Příklad 3.** Dokažte pro všechna reálná  $a, b$ :  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

**Příklad 4.** Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $n$  prvočíslo nebo  $n + 2$  je prvočíslo.

**Příklad 5. Suma čtverců.**

Dokažte  $\forall n \in \mathbb{N}_0$  platí:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

## HÁDANKY

**Příklad 6. Mince.**

Na stole je 10 mincí, některé lícem, některé rubem nahoru. Bez dívání rozdělte mince do dvou hromádek tak, aby v obou byl stejný počet mincí lícem. Můžete mince otáčet.

**Příklad 7. Šachovnice.**

Mějme šachovnici  $8 \times 8$  Lze ji:

- (a) pokrýt kostkami domina?
- (b) pokrýt kostkami domina, jestliže z ní vyřadíme dvě protilehlá políčka (z diagonály)?
- (c) pokrýt kostkami domina jestliže vyřadíme dvě políčka téže barvy?
- (d) pokrýt kostkami domina jestliže vyřadíme dvě políčka různých barev?

(Dominové kostky jsou obdélníky  $1 \times 2$  a lze je otáčet.)

**Příklad 8. Ostrov** Na vzdáleném ostrově žijí tři typy obyvatel: *rytíři*, kteří vždy říkají pravdu; *lháři*, kteří vždy lžou; a *špióni*, kteří mohou buď lhát, nebo říkat pravdu.

Potkáte tři osoby: A, B a C. Je známo, že mezi nimi je právě jeden rytíř, jeden lhář a jeden špión. Dále každý z nich zná skutečnou identitu (tj. roli) těch zbývajících dvou.

Vášim úkolem je určit, na základě jejich výroků, zda informace umožňují *jednoznačné řešení* — tedy zda lze definitivně určit, kdo je rytíř, kdo lhář a kdo špión. Pokud ano, uveďte jejich role. Pokud ne, vypište všechna možná řešení nebo vysvětlete, proč řešení neexistuje.

Níže je uvedeno pět scénářů:

Varianta	A říká	B říká	C říká
a)	B je lhář.	A je rytíř.	Já jsem špión.
b)	Já jsem rytíř.	A říká pravdu.	Já jsem špión.
c)	Nejsem špión.	Nejsem špión.	Já jsem špión.
d)	Já jsem rytíř.	A není lhář.	B není lhář.

**Příklad 9. Devatero mincí.**

Máte 9 mincí a rovnoramenné váhy. Jedna z mincí je falešná, což se pozná podle toho, že váží méně než ostatní (to víte, kočičí zlato). Jak na co nejmenší počet vážení zjistit, která to je?

(A jak to dopadne pro  $M$  mincí?)