FYZIKA I: NOFY 021
Mechanika, molekulová fyzika a termodynamika

Přednášející:

Miroslav Kučera - Ke Karlovu 5, II. patro, dv. č. 3

Martin Veis "

e-mail: miroslav.kucera@matfyz.cuni.cz,
martin.veis@matfyz.cuni.cz

Anotace

- Kinematika a dynamika hmotného bodu.
- Soustava hmotných bodů a mechanika tuhého tělesa.
- Kmity a vlnění.
- Základy mechaniky spojitých prostředí.
- Základy termodynamiky.
- Molekulárně kinetická teorie látek.

https://is.cuni.cz/studium/predmety/index.php?do=predmet&kod=NOFY021

Přednáška určena pro posluchače 1. ročníku oboru Fyzika

FYZIKA I: NOFY 021 - mechanika, molekulová fyzika a termodynamika

Anotace - Kinematika a dynamika hmotného bodu. Soustava hmotných bodů a mechanika tuhého tělesa. Kmity a vlnění. Základy mechaniky spojitých prostředí. Základy termodynamiky. Molekulárně kinetická teorie látek. Přednáška určena pro posluchače 1. ročníku Obecné fyziky.

I. MECHANIKA

1. Kinematika bodu.
Parametrický popis pohybu, rychlost, zrychlení, rozklad zrychlení na tečnou a normálovou složku. Základní druhy pohybů.

2. Dynamika hmotného bodu.
Newtonovy zákony. Síly působící při známém druhu pohybu. Pohybová rovnice hmotného bodu, vrhy, harmonický pohyb. Inerciální a neinerciální soustavy souřadné, zdánlivé síly, síla Coriolisova a odstředivá.

3. Energie a pohyb v silovém poli.
Práce, výkon, kinetická energie. Konzervativní pole, intenzita a potenciál, centrální síla, lineární harmonický oscilátor, potenciální energie. Nekonzervativní síly, tření. Gravitační zákon. Pohyb v gravitačním poli, Keplerovy zákony.

4. Soustava hmotných bodů a tuhé těleso.
Popis soustavy, stupeň volnosti. Kinematika tuhého tělesa. Věty o hybnosti a momentu hybnosti soustavy - 1. a 2. věta impulsová. Věty o zachování hybnosti a momentu hybnosti. Energie soustavy hmotných bodů, Königova věta. Zjednodušení soustav sil působících na tuhé těleso.

5. Otáčení tuhého tělesa.
Otáčení kolem pevné osy, pohybová rovnice, moment setrvačnosti. Těžká kladka, kyvadlo, valení. Steinerova věta. Kinetická energie otáčejícího se tělesa. Stručná zmínka o tenzoru setrvačnosti a otáčení tělesa kolem pevného bodu.

6. Kmity a vlnění.
Kmity tlumené, vynucené, skládání kmitů, vázané kmity, aperiodický tlumený pohyb, rezonance. Pojem vlny, vlnová rovnice, rovinná vlna. Energie a intenzita vlny. Harmonická vlna, způsoby popisu, vztah vlnová délka-rychlost-frekvence. Fázová rychlost a grupová rychlost. Typy vlnění, polarizace. Princip superpozice, interference vlnění, stojaté vlnění. Huygensův princip, lom, odraz. Dopplerův jev.

7. Kontinuum - obecné pojmy.
Kinematika kontinua. Tenzor napětí, tenzor deformace a tenzor rychlosti deformace. Rovnice rovnováhy a pohybová rovnice kontinua.

8. Pružnost.
Zobecněný Hookův zákon. Základní úloha teorie pružnosti. Tah, smyk, torze, ohyb.

9. Mechanika tekutin.
Kapalina a plyn. Rovnováha tekutin, hydrostatický tlak, Pascalův zákon, barometrická rovnice, Archimedův zákon. Rovnice kontinuity, proudění ideální tekutiny, Bernoulliova rovnice. Proudění viskózní kapaliny, Newtonův viskózní zákon, Poiseuillův vztah. Laminární a turbulentní proudění.

II. MOLEKULOVÁ FYZIKA A TERMODYNAMIKA

1. Základy termodynamiky.

Termodynamická soustava a její rovnováha. Teplo, teplota, tepelná kapacita. První termodynamický zákon, vnitřní energie ideálního plynu. Stavová rovnice ideálního plynu. Vratné a nevratné děje, Carnotův cyklus, termodynamická teplota. Druhý termodynamický zákon, entropie. Třetí termodynamický zákon.

2. Molekulárně kinetická teorie látek.

Základy statistického popisu. Tlak a teplota, Boltzmannův vztah a entropie. Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení. Střední volná dráha, počet srážek, Brownův pohyb. Difúze, 1. a 2. Fickův zákon, tepelná vodivost, vnitřní tření.

3. Reálné plyny a fázové přechody.

Stavová rovnice reálných plynů. Jouleův-Thomsonův jev. Rovnovážný fázový diagram jednosložkové soustavy, Gibbsovo pravidlo fází. Skupenská tepla a teploty fázových přeměn.

4. Molekulární jevy v kapalinách.

Povrchové napětí. Youngova-Laplaceova rovnice.

Doporučená studijní literatura:

Mechanika:

A. Havránek: Klasická mechanika I-II , skriptum, Carolinum,Praha 2002-3 (chybí kap. Vlnění)

J. Kvasnica a kol.: Mechanika, Academia, Praha 1998, 2004 (pokrývá celou mechaniku)

web: https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/Mechanika/ (doc Dvořák – Mechanika pro učitelství s.š.) !

https://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/www/fyzika.html (webová verze přednášek)

http://material.karlov.mff.cuni.cz/people/hajek/skripta/ (doc Chmelík - Mechanika pro PřF)

Termodynamika a molekulová fyzika:

P.Atkins, J.de Paula: Fyzikální chemie, VŠChT Praha 2013 (kap. 1-4 – termodyn., mol.fyz.)

Doplňková:

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: Fyzika, Vutium, Brno 2000 (elementární učebnice)

R.P.Feynman, R.B.Leighton, M.Sands: Feynmanovy přednášky z fyziky I, II, Fragment, 2000

R. Bakule, E. Svoboda : Molekulová fyzika, Academia, Praha 1992

J. Obdržálek, A. Vaněk: Termodynamika a molekulová fyzika, skriptum, PF Ústí n.L., 2000

P. Atkins, Čtyři zákony, které řídí vesmír, Academia 2012

Z. Horák, F. Krupka: Fyzika, SNTL, Praha 1976, 1981

Cvičení:

J.Fähnrich, A.Havránek, D.Slavínská: Příklady z mechaniky, skriptum, Karolinum, Praha 2005

Matematická:

J.Kvasnica: Matematický aparát fyziky, Academia 1997

====

Wikipedia

AI

Jak bude v roce 2025/6 probíhat výuka

Zkouška: ústní s písemnou přípravou

Nutnou podmínkou pro konání zkoušky je získání zápočtu ze cvičení

Zkouška:
znalosti odpovídající sylabu přednášky a v rozsahu prezentovaném na přednášce;
případné příklady zadané při zkoušce pouze ty, které byly počítané na přednášce

Zápočet: aktivní účast na cvičení a úspěšné absolvování testů (detaily stanoví cvičící)

Prezentace:
//alma.karlov.mff.cuni.cz/fyzika1/

Doplňková výuka-semináře:
NOFY002 - Proseminář z matematických metod fyziky, 0/2 Z
NOFY071 - Procvičovací seminář z Fyziky I , 0/2 Z

Jak studovat …

Fyzika (fysis – příroda) – původně **věda o přírodě**

Základním kritériem ve fyzice je **experiment**,
(každá teorie musí být převeditelná na experiment)

Stručný historický přehled - starověk

Pythagoras, Eukleides (~360–290 př.n.l.) – geometrie

Demokritos (~460–370 př.n.l.) matematik, atomista

Platón (427-347) – „bez znalosti geometrie nevstupuj“, **Akademia** – vzdělávaci instituce

Múseion (Chrám múz, alexandrijská knihovna) věd.středisko, zal. Ptolemaios I.

Klaudios Ptolemaios (90-168) – geocentrický model, Almagest, astronomické tabulky

Archimédes (287 – 212 př.n.l., Syrakusy)

- matematik, fyzik, astronom
- proslul jako vynálezce a experimentátor

Aristoteles (384 – 322 př.n.l., Řecko)

- Spekulativní filosofie, pozorování (disputace, logika) bez matematiky a experimentů
- prvotní hmota, prvotní rozum (nús, duch =čistá forma bez hmoty, udělil hmotě pohyb - první hybatel)

$\Rightarrow$ závěry často spekulativní, chybné !

např.: těleso je udržováno v pohybu neustálým působením vnější síly; když přestane působit síla, pohyb (vzhledem k zemi) se zastaví, pro pohyb je podstatné médium – vzduch okolo šípu prostřednictvím vírů a vibrací posunuje šíp vpřed (tlačí ho zezadu), vakuum neexistuje…. filosofický princip

Stručný historický přehled

Středověk … období hlubokého útlumu

<u>Klasické období:</u> 16-19.stol

<u>Renesance</u>

Mikoláš Koperník (lat. Nicolaus Copernicus, 1473 – 1543, Toruň)

- rozvinul představy starořeckých heliocentriků (Aristarchos ze Samu), *Šest knih o obězích sfér nebeských*

Francis Bacon (1561 – 1625), filozof, státník

- induktivní metody zkoumání, základ - přesné pozorování

Galileo Galilei (1564 – 1642, Itálie)

- astronom, filosof, fyzik
- odmítá slepou důvěru k autoritám (Aristoteles, církev)
- *Dialog o dvou světových systémech – Ptolemaiově a Koperníkově* (1632)
- princip relativity, zákon setrvačnosti !

Stručný historický přehled

Renesance – vznik klasické mechaniky

- Johannes Kepler (1571 – 1630, Německo)

matematik, astronom, astrolog
zákonitosti pohybu nebeských těles (matem.popis)

Praha 1600-1612, 1. a 2. Kepplerův z.,
Tycho Brahe

- René Descartes (lat. Renatus Cartesius, 1596 – 1650, Francie)

zakladatel analytické geometrie, kartézský systém souřadnic
teorie vírů, Voltaire: cokoliv Descartes publikoval o fyzice (=přírodě) je špatně, Emilie du Chatelet

- Robert Hooke (1635 – 1703, Anglie) předseda Royal Society of London

filosof, fyzik, astronom, vynálezce, architekt, Hookeův zákon, mikroskop

- **Christian Huygens** (1629 – 1695, Holandsko)

filosof, fyzik, astronom, kyvadlové hodiny

Royal Society of London, 1660, první předseda R. Hooke, I.Newton, věd.časopis

Académie des sciences, Paris 1662, cíl: podporovat a rozvíjet vědecký výzkum ve Francii, vzor pro ost.

Preußische Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1700, inic. G.W.Leibnitz

Carská akademie věd v Petrohradě, 1723, Leibnitz, Bernoulli, …

Stručný historický přehled - 2.pol. 17 stol.

Isaac Newton (1643-1727)
- Fyzik, matematik, filosof, teolog
- *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687)
- zákon všeobecné gravitace – propojení s Keplerovými zákony (tělesa na Z. se pohybují podle stejných zákonů jako planety)
- ZZ hybnosti a momentu hybnosti
- Infinitezimální počet

Gottfried W. Leibnitz (1646-1716)
- Fyzik, matematik, filosof, teolog
- *Système nouveau de la nature* (1695)
- ZZ kin.energie (vis viva)
- Prostor a čas jsou relativní x absolutní
- Infinitezimální počet – jeho způsob zápisu se používá dodnes

<u>Infinitezimální počet (derivace, integrály)</u>

Stručný historický přehled - 18. - 20. stol.

<u>Analytická (klasická) mechanika</u> (matematika -Euler, Gauss…), 18.-19.st.
vzor pro ostatní vědy !

Leonhard Euler (1707-1782) – (největší z matematiků všech dob, 40 knih, 850 vědeckých prací) - Eulerovy věty, E.principy, E.konstanty, E.úhly, E.integrály, E.číslo, E.funkce, E.vzorce, E.substituce ... , zavedl vektory
Mechanika (metodami matem.analýzy), *Teorie pohybu tuhých těles, Algebra* …

Karl F. Gauss (1777-1855) – „kníže matematiků“, astronom,
Gaussovo rozdělení, F: poruchový počet, matem.podoba Newtonova GZ a Coulombova z., zavedl potenciál
Teorie pohybu nebeských těles, Nová metoda řešeni přitažlivosti těle, Teorie kapal.těles

Thomas Young (1773-1829) vlnová povaha světla/ interference, (poslední, kdo znal vše)

Michael Faraday (1791-1867) – propojení elektřiny a magnetismu, „největší z experimentátorů“

James C. Maxwell (1831-1879) – elektromagnetická teorie, molekulová fyzika …

Moderní fyzika – od poč. 20. stol

Max Planck (1858-1947) - kvanta záření (záření černého tělesa), 1901

Wilhelm C. Roentgen (1845-1923), X-rays, 1895
W.Bragg, M.Laue – difrakce na krystalech … první „zobrazení atomů“

Albert Einstein (1879-1955) navázal na výsledky - Lorentze, Poincarého

Postuláty STR
- princip relativity (Poincaré) ∀ fyzikální zákony mají stejný tvar ve ∀ I.S.S.
- princip konst.rychlosti světla (ve ∀ I.S.S.) – „fyzika éter nepotřebuje“

Teorie gravitace, stimulovaná emise, fotoelektrický jev …

Kvantová mechanika 20.st.

Čím se zabývá:

Mechanika (mechané = nástroj) – popisuje pohyb těles v prostoru a čase a jejich chování při působení síly

Podle volby **vztažného tělesa** se jeví pohyb sledovaného tělesa různě - pohyb je **relativní**!

Newtonova klasická mechanika (klasická mechanika) - uspokojivý obraz mechanického pohybu těles složených z **velkého počtu částic (velké rozměry)**, jejichž **rychlosti jsou malé** ve srovnání s rychlostí světla. Výrazněji se **neprojeví kvantová povaha** hmoty a není tedy třeba přihlížet ani ke kvantové mechanice.

Prostor - pro popis mechanického pohybu zavádí klasická mechanika pojem **absolutního prostoru** jako kontinua, v němž jsou rozmístěna pohybující se tělesa.
Absolutní prostor není přítomností těles ovlivněn, všechna jeho místa jsou rovnocenná (**homogenita** prostoru) a všechny směry v něm jsou rovnocenné (**izotropie** prostoru).

Čas se v klasické mechanice jeví jako samostatný, **nezávislý** na pohybujících se tělesech a všude stejně plynoucí

Relativistická m. $v \to c$,
Kvantová m.: pohybové děje v mikrosvětě - pohyb „malé“ částice v „omezeném“ prostoru, kdy se začíná projevovat kvantová povaha hmoty

Termodynamika – fenomenologická (popisná) věda, vznikla z potřeb přeměny tepelné energie na mechanickou, zákl. pojmy: teplo, teplota, přeměny energie

Molekulová fyzika – klasická **mikroskopická teorie**, předp. vnitřní struktura látek (molekuly, atomy), modeluje (počítá) jejich chování, kin.teorie plynů

Limity platnosti klasické mechaniky:

- přítomnost velkých *gravitačních sil* (obecná teorie relativity)
- rychlosti těles se blíží *rychlosti světla* (speciální teorie relativity)
- pohybové děje na úrovni *mikrosvěta*, kdy se začíná projevovat kvantová povaha hmoty (pohybu „malých“ částic v „omezeném“ prostoru - kvantová mechanika).

Látka x fyzikální pole

klasické pojetí:

látka – skládá se z částic s klidovou hmotností

pole - neskládá se z částic, ale **zprostředkuje silové působení mezi částicemi** (gravitační, elektrické, magnetické)
popis pole - klasicky pomocí fyzikální veličiny, charakterizující silové působení, tj. nejen gravit. a elektrické, ale i silové, teplotní, tlakové,…
nebo kvantově jako výměnu zprostředkujících (intermediálních) polních částic

Typy fyzikálních **polí**:

Skalární pole – popsáno skalární veličinou v prostoru (např. teplotní, tlakové pole)

Vektorové pole – popsáno vektorovou veličinou v prostoru, tj. prostorové rozložení vektorové veličiny (např. pole rychlosti proudění kapaliny, elektrické pole, silové pole)

Homogenní pole (× heterogenní) – fyzikální veličina/vlastnosti se v prostoru nemění, nezávisí na souřadnici

Izotropní pole (× anizotropní) - vlastnosti ve všech směrech stejné, tj. nezávisí na směru

Stacionární pole – veličina nezávisí na čase

Veškeré poznání pochází z pozorování →

Hypotéza

- Předpoklad možného stavu, domněnka, jejíž platnost není ještě plně prokázána
- Je podložená řadou faktů vytyčující další směr výzkumu
- H. je *testovatelná*, je možno předvídat výsledky experimentů, je možno ji potvrdit nebo vyvrátit

Teorie

- Popisuje zákonitosti a souvislosti celé skupiny jevů v určitém oboru
- Co nejlepší přiblížení realitě, vystavěno na objektivních důkazech (rozpracování hypotéz)
- Je vnitřně konzistentní, tj. nejsou v ní rozpory, každá teorie má však své limity
- Na základě teorie vytvoříme různé modely:

Model - kvalitativní / kvantitativní (matem.), zjednodušení úlohy

Zákon

- Popisuje pozorování v přírodě (zatímco teorie se ho snaží vysvětlit)
- Je vždy pravdivý – vychází z mnoha pozorování

Postulát – Axiom

- Je výchozí předpoklad (tvrzení), který je v dané teorii přijímán jako pravdivý

„Spekulace“

Fyzikální veličiny:

extenzívní (kvantita - hmota, náboj, …), **intenzity** (kvality: teplota, napětí…)

Určeny velikostí a rozměrem (jednotkami):

VELIČINA = ČÍSELNÝ ÚDAJ krát JEDNOTKA

Soustavy jednotek (věc dohody):

- **SI** (mezinárodní)
- **Absolutní – Gaussova,** (cgs)
- **MKSA** (technická)
- **…**

https://en.wikipedia.org/wiki/International_System_of_Units

Fyzikální veličina	Jednotka	Značka
Délka	metr	m
Hmotnost	kilogram	kg
Čas	sekunda	s
Termodynamická teplota	kelvin	K
Látkové množství	mol	mol
Elektrický proud	ampér	A
Svítivost	kandela	cd

- každá fyzikální veličina se skládá z hodnoty a rozměru. Rozměry nesmíme vynechávat (jsou stejně důležité jako číslo samotné).
- matematické funkce musí mít bezrozměrné argumenty, např. cos(ωt), exp(kx) …

př.: absolutní Gaussova s., jednojednotková s.

př.: z rozměrové analýzy odvoďte vztah pro frekvenci kmitů matematického kyvadla

Fyzikální veličiny - přehled:

Skaláry – vyjádřeny jedním údajem (velikostí),

př.: hmota, náboj, teplota, energie

(aritmetika)

Vektory – vyjádřeny třemi složkami (uspořádanou trojicí čísel) ve 3D prostoru; obecně *n* složek (čísel) v *n*-D prostoru

– ve 3D prostoru si lze si ho představit jako orientovanou úsečku (má velikost a směr, rozlišujeme počátek a konec), lze ho libovolně posouvat

– operace s vektory (skládání, natahování ..) provádíme po složkách

př.: poloha, rychlost, zrychlení, síla, intenzita fyzikálního pole, el.proud…

(vektorová algebra)

Tenzory – obecně 3^k složek, *k* – řád tenzoru

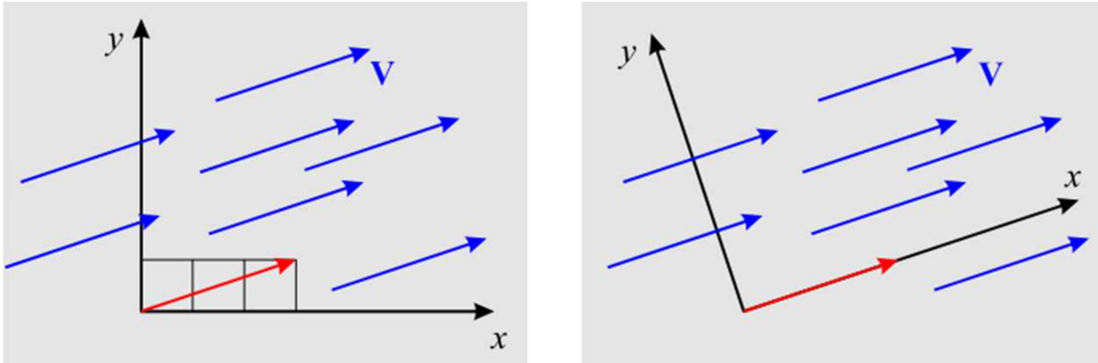
souvisí s anizotropií materiálových parametrů,

př. tenzorů 2. řádu: tenzor napětí, t. deformace, permitivita, moment setrvačnosti

(tenzorová algebra)

Fyzikální veličiny:

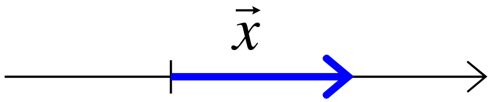
Skalární: invariantní vůči volbě souřadnicové soustavy (velikost)
Vektorové: závisí na volbě souřadnicové soustavy (velikost + směr)



Rovnoběžně posunuté šipky na obr. považujeme za stále stejný vektor. Pokud vektor posuneme do počátku (tzv. umístěný vektor), můžeme z polohy koncového bodu „odečíst“ složky (souřadnice) vektoru: vlevo **V**=(3,1,0), vpravo v jiné s.s. tentýž vektor **V**=($10^{1/2}$,0,0)

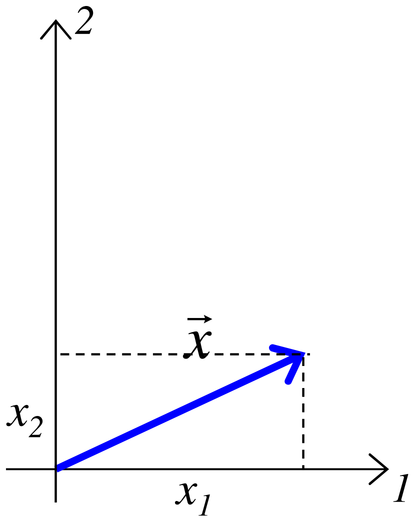
1 D

- skalár: x
- vektor: $\pm x$



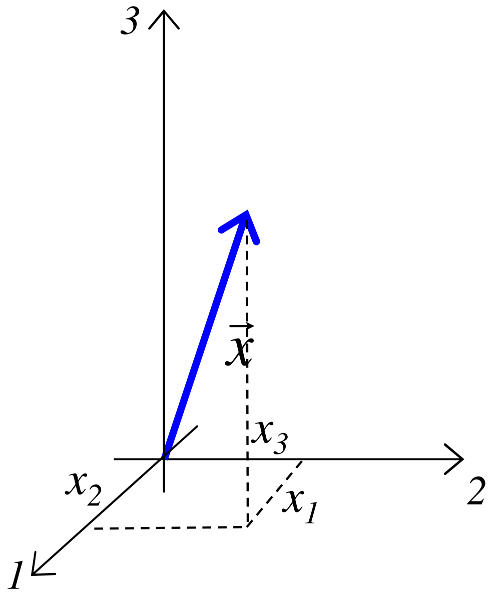
2 D

- skalár: x
- vektor: (x_1, x_2)



3 D

- skalár: x
- vektor: (x_1, x_2, x_3)

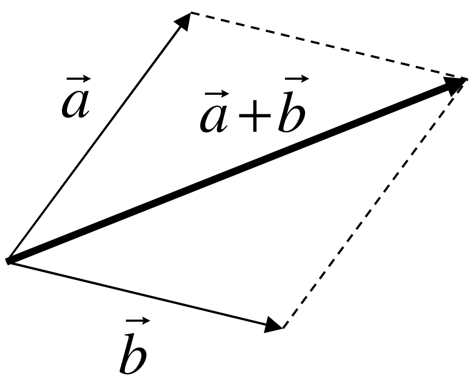


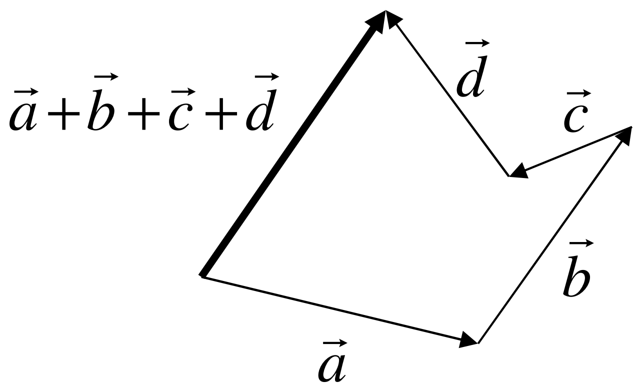
n D

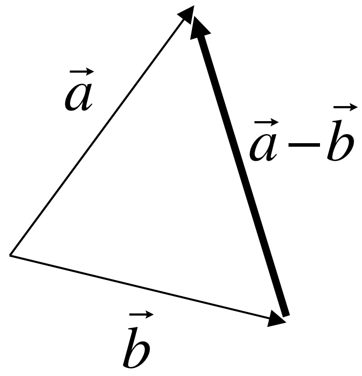
- skalár: x
- vektor: $(x_1, x_2, ..., x_n)$

Vektorové fyzikální veličiny, **operace s vektory**

• skládání - součet / rozdíl vektorů:







$$\boxed{\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)}$$

• násobení reálným koeficientem (protažení vektoru): $\boxed{\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)}$

• některá základní pravidla:

$$\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{V} + \mathbf{U}, \qquad \mathbf{U} + (\mathbf{V} + \mathbf{W}) = (\mathbf{U} + \mathbf{V}) + \mathbf{W},$$
$$\alpha\,(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = \alpha\,\mathbf{U} + \alpha\,\mathbf{V}, \qquad (\alpha + \beta)\,\mathbf{U} = \alpha\,\mathbf{U} + \beta\,\mathbf{U},$$
$$\alpha\,(\beta\,\mathbf{U}) = (\alpha\,\beta)\,\mathbf{U}, \qquad 1\,\mathbf{U} = \mathbf{U},$$
$$\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{W} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = \mathbf{W}.$$

Soustavy souřadné

Pravoúhlý kartézský systém – 3 navzájem kolmé osy (pravotočivá × levotočivá)

- každý bod prostoru určen 3 souřadnicemi
- vektor popsán svými 3 průměty do souřadných os a ortogonálními vektory báze (jednotkovými vektory)

vektor:

$$\vec{a} \equiv \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k \vec{e}_k$$

velikost vektoru:

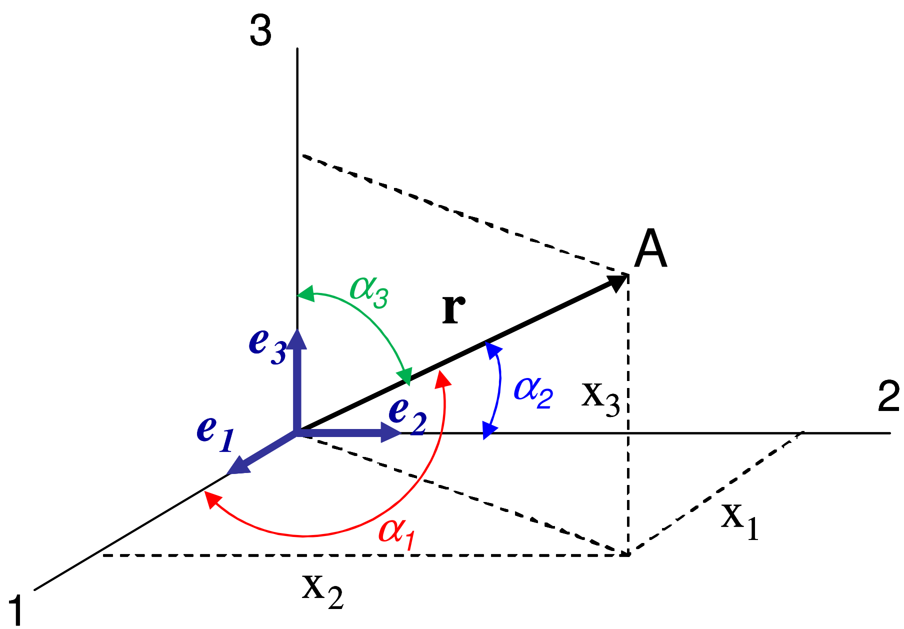
$$a = |\vec{a}| \equiv \|a\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} a_k^2}$$

vektory báze:

$$\vec{e}_1 = (1,0,0)$$

$$\vec{e}_2 = (0,1,0)$$

$$\vec{e}_3 = (0,0,1)$$



Polohový vektor:

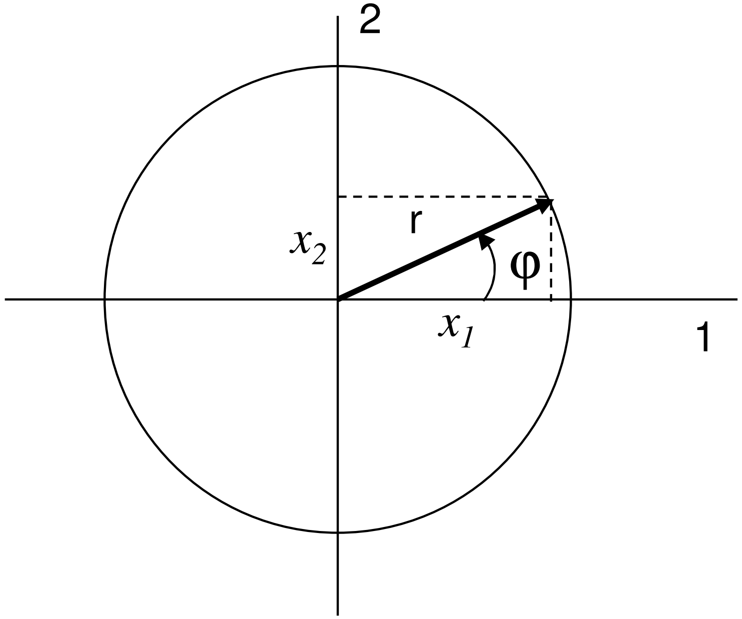
$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = \sum_{k=1}^{3} x_k \vec{e}_k \equiv x_k \vec{e}_k$$

Směrové kosiny:

$$\cos\alpha_k = \frac{x_k}{r}, \qquad \sum_k \cos^2\alpha_k = 1$$

Polární souřadnice – kruhová symetrie v rovině



$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi \\ x_2 &= r\sin\varphi \end{aligned}}$$

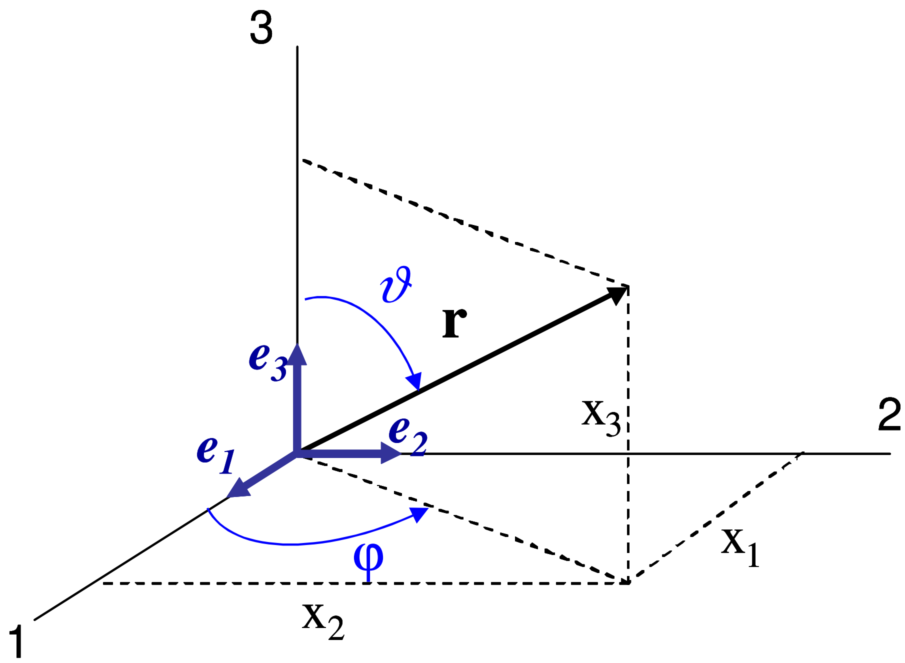
$r \geq 0$ ... průvodič

$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ... polární úhel

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\varphi = \arctan\frac{x_2}{x_1}$$

Sférické souřadnice – kulová symetrie ve 3D prostoru



$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi\sin\vartheta \\ x_2 &= r\sin\varphi\sin\vartheta \\ x_3 &= r\cos\vartheta \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} r^2 &= \sum x^2_k \\ \cos\vartheta &= x_3/r \\ tg\ \varphi &= x_2/x_1 \end{aligned}}$$

Základy vektorového počtu

Skalární součin dvou vektorů

výsledkem je číslo (skalár)

$$S = (\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3)$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k b_k$$

$$= ab \cos \varphi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \| \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = ab$$

Velikost vektoru:

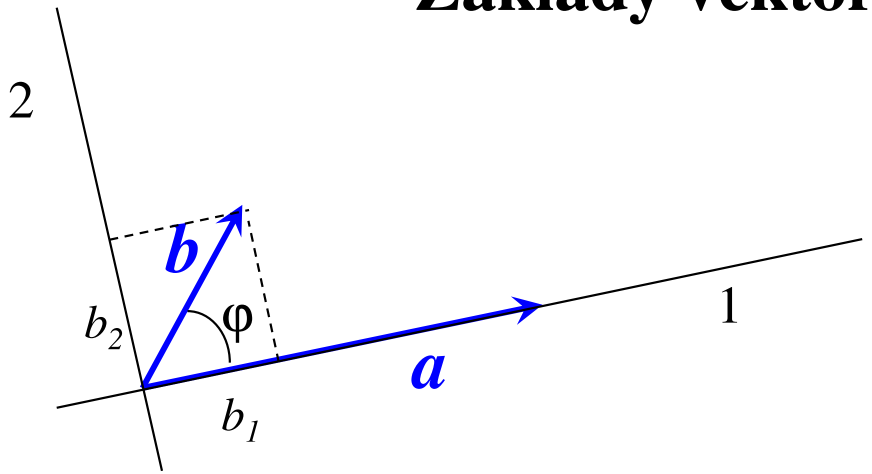
$$a^2 = |\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{a}, \vec{a}) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \sum a_k^2$$

Průmět vektoru do směru ***e***:

$$a_e = \vec{a} \cdot \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|} = a \cos \varphi$$

Př.: práce ve fyzice, určení úhlu mezi vektory viz př.

Základy vektorového počtu



$$\vec{a} = (a, 0, 0)$$

$$\vec{b} = (b\cos\varphi, b\sin\varphi, 0)$$

Skalární součin

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$$

$$= ab\cos\varphi + 0.b\sin\varphi + 0.0$$

$$= ab\cos\varphi$$

Určení úhlu mezi 2 vektory:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

př.: určete úhel mezi tělesovou úhlopříčkou
a hranou krychle (tělesa tvaru …)
Ř.: $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$

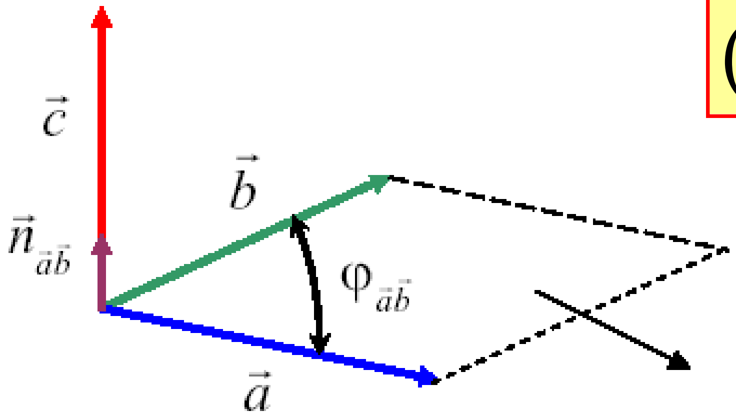
Průmět vektoru do směru ***a*** (do směru jednotk.vektoru):

$$b_a = \vec{b}\cdot|\vec{a}|^0 = \vec{b}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = b\cos\varphi$$

Vektorový součin dvou vektorů

- výsledkem je vektor, kolmý na oba vektory

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \equiv \left[\vec{a}, \vec{b}\right] =$$
$$\left(a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1\right)$$



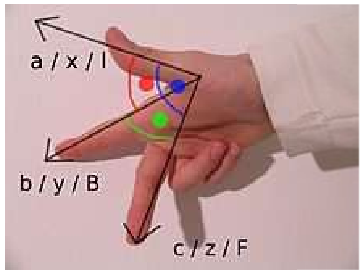
plocha: $S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = a\,b \sin\varphi_{\vec{a}\vec{b}}$

Zřejmě platí:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$
$$\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b}$$
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0, \quad \vec{a} \times \vec{a} = 0$$

Definován jen ve 3 D prostoru!

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tvoří pravotočivý systém

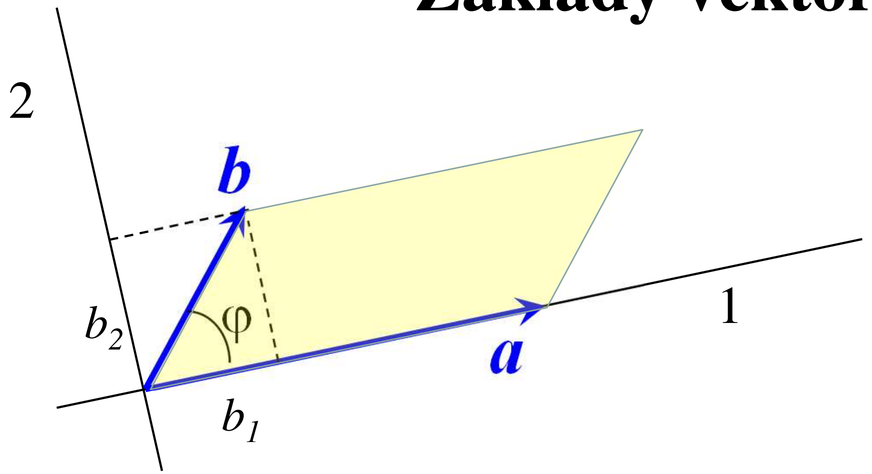


pravidlo pravé ruky

(pravidlo vývrtky)

Př.: momenty síly a hybnosti, pohyb částice v magn.poli, určení kolmice

Základy vektorového počtu



Skalární součin

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

$$= ab\cos\varphi + 0.b\sin\varphi + 0.0$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\varphi}$$

Určení úhlu mezi 2 vektory:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Průmět vektoru do směru *a*:

$$b_a = \vec{b}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = b\cos\varphi$$

Vektorový součin

$$\vec{a} = (a,0,0)$$

$$\vec{b} = (b\cos\varphi, b\sin\varphi, 0)$$

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} \equiv \left[\vec{a},\vec{b}\right] = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (0,0,ab\sin\varphi)$$

$$\boxed{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = ab\sin\varphi}$$

$$\sin\varphi = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{ab} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Geometrický význam:
- určení kolmice k rovině
- plocha rovnoběžnostěnu: $S = a\,b\,\sin\varphi$
- objem rovnoběžnostěnu:

$$V = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a} = \left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$$

Přehled vztahů

Skalární součin $\qquad \vec{a}, \vec{b} \quad \rightarrow \quad (\vec{a}, \vec{b}) \;\equiv\; \vec{a} \cdot \vec{b} \;\in\; \mathbb{R}$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \;=\; (\vec{b}, \vec{a}) \qquad \text{symetrie}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}) \qquad (r\vec{a}, \vec{b}) = r(\vec{a}, \vec{b}) \qquad \text{linearita}$$

$$(\vec{a}, \vec{a}) > 0 \quad \text{pro } \vec{a} \neq \vec{0} \qquad \text{positivní definitnost}$$

$$\forall \vec{x} \quad (\vec{a}, \vec{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = 0 \qquad \text{nedegenerovanost}$$

$$|\vec{a}| \;=\; \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} \qquad \text{délka vektoru}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \;=\; |\vec{a}||\vec{b}| \, \cos \sphericalangle[\vec{a}, \vec{b}] \qquad \text{úhel mezi vektory}$$

Vektorový součin $\qquad \vec{a}, \vec{b} \quad \rightarrow \quad \vec{v} \;=\; \vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{v} \perp \vec{a} \qquad \vec{v} \perp \vec{b} \qquad |\vec{v}| \;=\; |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle[\vec{a}, \vec{b}] \qquad \text{definiční vlastnosti}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \;=\; -\vec{b} \times \vec{a} \qquad \text{antisymetrie}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \qquad (r\vec{a}) \times \vec{b} = r(\vec{a} \times \vec{b}) \qquad \text{linearita}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \;\neq\; \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \qquad \text{není asociativní}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \;=\; \vec{b}\,(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}, \vec{b}) \qquad \text{“bac − cab”}$$

Smíšený součin $\qquad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \;=\; (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \;=\; (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$

$=$ orientovaný objem rovnoběžnostěnu napnutého na $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

Tenzory

Příklad: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ … materiálový vztah; ε je skalár, pouze pro izotropní homogenní látky!

Pro anizotropní látky: ε – tenzor 2. řádu

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_1 E_1 \\ D_2 &= \varepsilon_2 E_1 \\ D_3 &= \varepsilon_3 E_1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_{11} E_1 + \varepsilon_{12} E_2 + \varepsilon_{13} E_3 \\ D_2 &= \varepsilon_{21} E_1 + \varepsilon_{22} E_2 + \varepsilon_{23} E_3 \\ D_3 &= \varepsilon_{31} E_1 + \varepsilon_{32} E_2 + \varepsilon_{33} E_3 \end{aligned}$$

ve složkách: $D_i = \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} E_j \equiv \varepsilon_{ij} E_j$ (Einsteinova součtová konvence)

vektorově: $\vec{D} = \hat{\varepsilon}\, \vec{E}$

maticový zápis: $\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$

pozn: symetrie tenzoru permitivity souvisí se symetrií látky, při vyšší symetrii se počet nezávislých složek snižuje, u izotropní látky přechází ve skalár (1 nezávislá složka – hodnoty na hl.diagonále matice jsou stejné)

Tenzory vyšších řádů, např.:

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + z_{ijk} E_k + \mathrm{Z}_{ijkl} \mathrm{E}_k \mathrm{E}_l + \ldots$ z_{ijk} elektrooptický tenzor 3.ř.

$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}$ σ_{ij} tenzor deformace, e_{kl} tenzor napětí, c_{ijkl} tenzor pružnosti 4.ř.

Vektory polopatě

https://www.matweb.cz/vektory/

Portál středoškolské matematiky:
https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/
Analytická geometrie - Vektory - Co je to vektor (cuni.cz)

Web portály …