

DÚ Diskrétní matematika – Sada 1

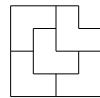
Jan Romanovský

12. října 2025

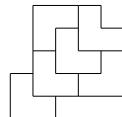
Příklad 1. Šachovnice

Postupujme od nejmenších n a „silnou indukcí“, BÚNO mějme vždy vykousnutou kostičku vpravo nahore.

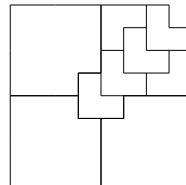
- $n = 1$: triválně, to je přesně jedna kostička
- $n = 2$: lze např. dle obrázku:



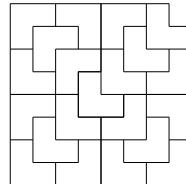
- $n = 3$: přidejme jednu kostičku naproti té vykousnuté, tj. vlevo dole:



potom ale vidíme, že nám vznikly tři sekce čtvrtinového obsahu, stejného tvaru a obsahu jako v případě o jedna menším, tj. $n = 2$, pouze některé jsou otočené:



a o těch už víme, že jdou vyplnit:



a vidíme, že dle tohoto postupu umíme pomocí plochy $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ vyplnit jakoukoliv další plochu o rozměrech $2^n \times 2^n$ – QED

Příklad 2. Suma

MI:

1. $n = 1 : 1^3 = 1^2$ – platí
2. Chceme dk. že $\sum_{i=1}^n i^3 = (\sum_{i=1}^n i)^2 \implies \sum_{i=1}^{n+1} i^3 = (\sum_{i=1}^{n+1} i)^2$, předp. že $\sum_{i=1}^n i^3 = (\sum_{i=1}^n i)^2$.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^n i + n + 1\right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2 + 2 \sum_{i=1}^n i \cdot (n+1) + (n+1)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n i^3 + 2 \sum_{i=1}^n i \cdot (n+1) + (n+1)^2 - \text{IP} \\
&= \sum_{i=1}^n i^3 + 2 \frac{n(n+1)}{2} (n+1) + (n+1)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n i^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
&= \sum_{i=1}^n i^3 + (n+1)^3 \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} i^3 - \text{QED}
\end{aligned}$$