Domácí úkol č. 12 k přednášce NMAG111/113: Lineární algebra 1
zimní semestr 2025/2026

Datum odevzdání **pátek 9. 1. 2026, 23:55 hod.**

(12.1) Determinant reálné matice

$$\begin{pmatrix} 2x & e & 2 & 1 \\ 1 & -2 & x & 3x \\ \pi & -4 & x & 5 \\ 3 & x & x & -2 \end{pmatrix}$$

je polynom v proměnné x. **Přímo z definice determinantu** najděte koeficienty tohoto polynomu u x^4 a x^3 (tj. nesmíte např. vypočítat celý determinant nějakou jinou metodou a pak se podívat na koeficienty).

(12.2) V závislosti na parametrech $n \in \mathbb{N}$ a $a \in \mathbb{R}$ spočtěte determinant matice $A_{n,a}$, kde na diagonále leží a, pod diagonálou 1, nad diagonálou a^2, jinde nuly.

$$A_{n,a} = \begin{pmatrix} a & a^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & a^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Návod: Pomocí rozvoje si napište rekurentní rovnici pro determinant, spočítejte několik prvních členů

$$\det A_{1,a}, \det A_{2,a}, \det A_{3,a}, \det A_{4,a}, \ldots$$

a odhadněte řešení.

Bonusový problém: Permutace $\alpha, \beta \in S_9$ jsou dány redukovaným cyklickým zápisem.

$$\alpha = (3\ 1\ 2\ 6)(4\ 9\ 5), \quad \beta = (5\ 1\ 3\ 8)(2\ 6\ 7)$$

(a) Dokažte, že pro libovolnou permutaci $\pi \in S_9$ je redukovaný cyklický zápis permutace $\pi\alpha\pi^{-1}$ tvaru $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)(x_5\ x_6\ x_7)$. (Nápověda: kam se zobrazí $\pi(1)$?)

(b) Určete počet permutací $\pi \in S_9$, pro které platí $\pi\alpha\pi^{-1} = \beta$.

Poznámka: Po vyřešení bodu (a) vás asi napadne, že permutace $\pi\alpha\pi^{-1}$ a α mají obecně vždy stejný „cyklický typ“ – v zápisu pomocí nezávislých cyklů mají stejný počet cyklů každé délky. To je pravda (ale bez důkazu to nemůžete ve svém řešení použít). Permutace $\pi\alpha\pi^{-1}$ se nazývá *konjugovaná* permutace k permutaci α.

Poznámka: Konjugování se využívá například při skládání Rubikovy kostky: Pokud bychom si všechny barevné plošky rubikovy kostky očíslovali, každé otočení kostky odpovídá nějaké permutaci těchto čísel. Označme α takovou permutaci odpovídající pootočení horní stěny o 90 stupňů a π permutaci, která prohazuje dvě sousední hranové kostičky v horní stěně a všechny ostatní kostičky v horní stěně nechává na místě (ostatní kostičky můžeme promíchat libovolně). Takový tah π asi umí nalézt téměř každý, kdo si nějakou dobu s Rubikovou kostkou hrál. Po vyřešení části (a) by neměl být problém si rozmyslet, co udělá tah $\pi\alpha\pi^{-1}$, a pak tah $\alpha^{-1}\pi\alpha\pi^{-1}$. Zjistíte, že druhý tah cyklicky rotuje tři hranové kostičky a všechny ostatní kostičky nechává na místě. Těmito tahy lze přesunout všechny hranové kostičky na správné místo. Podobným trikem lze vymyslet tahy, které umožní přesunout rohové kostičky na správné místo, a také opravit orientaci rohových a hranových kostiček.