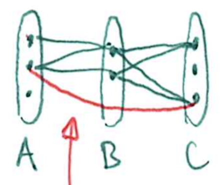
Df: Inverzní relace: Je-li R relace mezi A, B, pak
$R^{-1} := \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$ je relace mezi B, A. } tedy $aRb \Leftrightarrow bR^{-1}a$

Df: Skládání relací: Je-li R relace mezi A,B a S mezi B,C, pak
$R \circ S := \{(a,c) \mid a \in A, c \in C : \exists b \in B : aRb \ \& \ bSc\}$



"zkratka" za každou cestu $A \to B \to C$

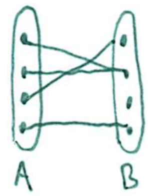
👁 $R \circ id_B = R$, $id_A \circ R = R$

Df: Funkce neboli zobrazení z A do B je relace f mezi A a B
t.ž. $\forall a \in A \ \exists! b \in B : afb$. } značíme $f: A \to B$

$f(x) := y$ t.ž. xfy (jednoznačně určené)

👁 id_A je identické zobrazení

Df: $f: A \to B$ je
- **prostá** (injektivní) $\equiv \forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$
- **na** (surjektivní) $\equiv \forall b \in B \ \exists a \in A : f(a) = b$
- **vzájemně jednoznačná** (1-1, bijektivní) $\equiv$ prostá & na



je to funkce: $\deg(a) = 1$ pro $a \in A$
prostá: $\deg(b) \leq 1$
na: $\deg(b) \geq 1$

Příklady: ① $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ (nebo $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) ② $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ (pro $x<0$, pro $x>0$) ③ $\mathrm{card} : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mohutnost množiny (kardinalita) ④ $f : A \times B \to C$ funkce dvou proměnných

👁 Je-li $f: A \to B$, $g: B \to C$, pak $f \circ g$ je funkce z A do C, kde $(f \circ g)(x) = g(f(x))$
nebo je to $g \circ f$? Lidé se neshodnou...

👁 Pro $f: A \to B$ je f^{-1} funkce $\Leftrightarrow$ f je bijekce

---

Motivace: Snažíme se zobecnit rovnost / geom. shodnost

Df: Relace R na množině A je:
- **reflexivní** $\equiv \forall a \in A : aRa$ $\leftarrow id_A \subseteq R$
- **symetrická** $\equiv \forall a,b \in A : aRb \Rightarrow bRa$ $\leftarrow R = R^{-1}$
- **tranzitivní** $\equiv \forall a,b,c \in A : aRb \ \& \ bRc \Rightarrow aRc$ $\leftarrow R \circ R \subseteq R$ příklady: $x<y$, $x=y$
- **antisymetrická** $\equiv \forall a,b \in A : aRb \ \& \ bRa \Rightarrow a = b$ $\leftarrow R \cap R^{-1} \subseteq id_A$

Df: Relace R na A je **ekvivalence** $\equiv$ je reflexivní & symetrická & tranzitivní.
Značení: často $\equiv, \approx, \sim, \cong$ apod. "různá rovnítka"

Příklady:
① rovnost na $\mathbb{N}$
② rovnost modulo n
③ geometrická shodnost
④ geom. podobnost
⑤ podmnožiny $\mathbb{N}$ jsou stejně velké ($\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y) \Leftrightarrow$ existuje bijekce $X \to Y$)
⑥ dosažitelnost v neorientovaných grafech
relace na V, $xRy \equiv \exists$ cesta mezi x, y
⑦ obousměrná dosažitelnost v orient. grafech
$xRy \equiv \exists$ cesta $x \to y$ & $\exists$ cesta $y \to x$

Df: Ekvivalenční třída prvku $x \in A$: $R[x] := \{a \in A \mid aRx\}$

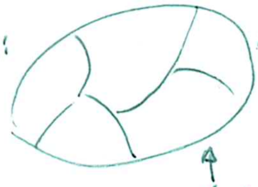
nebo xRa ... to je díky symetrii totéž

$\forall x \in A: x \in R[x]$ díky reflexivitě

Věta: Nechť R je ekvivalence na množině A.

1. $\forall x \in A: R[x] \neq \emptyset$.
2. $\forall x,y \in A$: buď $R[x] = R[y]$, nebo $R[x] \cap R[y] = \emptyset$.
3. $\{R[x] \mid x \in A\}$ jednoznačně určuje R.

Představa:

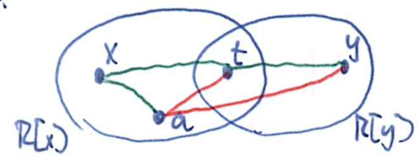


ekviv. třídy

Dk:
1. triviální díky $x \in R[x]$
2. ukážeme, že pokud $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$, pak $R[x] \subseteq R[y]$ ... prohozením x,y získáme $R[x] \supseteq R[y]$ a zkombinováním inkluzí rovnost.

Nechť $\underbrace{t \in R[x] \cap R[y]}_{tRx \,\&\, tRy}$ a $\underbrace{a \in R[x]}_{\text{tedy } aRx}$. Ukážeme, že $\underbrace{a \in R[y]}_{aRy}$.

Obrázkem:



$aRx \to aRt \to aRy$

$tRx \Rightarrow xRt \to aRt$

$tRy \to aRy$

3. xRy rozhodneme podle $x \in R[y]$.

Třídy pro naše příklady ekvivalencí:
- ② rovnost mod n → n zbytkových tříd
- ⑥ neorient. dosažitelnost → komponenty souvislosti
- ⑦ orient. — " — → — " — silné souvislosti

Df: Množinový systém $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ je rozklad množiny X $\equiv$
1. $\forall A \in \mathcal{S}: A \neq \emptyset$
2. $\forall A,B \in \mathcal{S}: A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$
3. $\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = X$

ekviv. třídy tvoří rozklad, naopak ke každému rozkladu vytvoříme ekvivalenci "být v téže třídě", tedy $aRb \equiv \exists A \in \mathcal{S}: \{a,b\} \subseteq A$

Pozor, někdy se více hodí rozklad dovolující prázdné třídy, třeba u bipart. grafů rozklad V.

Na okraj: Relace typu "být si blízko" nebývají ekvivalence – nejsou tranzitivní.
Třeba na $\mathbb{R}$: $xBy \equiv |x-y| \leq 1$. Tedy $1B2$ a $2B3$, ale $\neg 1B3$.

Motivace: Teď zkusíme zobecnit "je menší (nebo rovno)"

Df: Relace R na množině A je (částečné) uspořádání $\equiv$ R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Df: Prvky $a,b \in A$ jsou porovnatelné $\equiv$ aRb nebo bRa.

Často značíme $\leq, \preceq, \sqsubseteq$ apod.

Uspořádání je lineární (úplné) $\equiv$ každé 2 prvky jsou porovnatelné.

Df: Částečně uspořádaná množina (ČUM) je dvojice (A,R), kde A je množina a R uspořádání na A.