DÚ Lineární algebra – Sada 5

Jan Romanovský

12. listopadu 2025

(5.1) Nalezneme matici inverzní jako matici inverzní zprava (protože A je zřejmě regulární) pomocí řádkových elementárních úprav. Mějme rozšířenou matici.

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \vdots & & & & & & & \vdots & & & \\
0 & 0 & n-2 & \dots & n-2 & n-2 & n-2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\
0 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n-1 & n-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\
n & n & n & \dots & n & n & n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

Přehodíme řádky tak, aby byl poslední na prvním místě, předposlední na druhém místě, ..., první na posledním místě.

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
n & n & n & \dots & n & n & n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\
0 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n-1 & n-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & n-2 & \dots & n-2 & n-2 & n-2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\
 & & & \vdots & & & & & & & \vdots & & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Dále řádky přenásobíme tak, abychom měli vlevo všude jedničky.

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{n} \\
0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n-1} & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n-2} & 0 & 0 \\
 & & & \vdots & & & & & & & \vdots & & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

A nakonec od k-tého řádku odečteme $k+1$., ten poslední už je ve tvaru, který chceme.

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-1} & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n-2} & 0 & 0 \\
 & & & \vdots & & & & & & & \vdots & & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Inverzní matici k matici A pak nalezneme napravo od svislé čáry.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} \\
0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n-2} & 0 & 0 \\
 & & & \vdots & & & \\
0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
-1 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$