DÚ Lineární algebra – Sada 3

Jan Romanovský

29. října 2025

(3.1) Hledáme uspořádané čtveřice (x_1, x_2, x_3, x_4). Nalezneme prvně neutrální prvek vůči sčítání (ozn. 0) a neutrální prvek vůči násobení (ozn. 1) dle jejich definice.

$$\forall x \in \mathbf{T} : 0 + x = x$$

$$\forall x \in \mathbf{T} \setminus \{0\} : 1 \cdot x = x$$

Z tabulek operací vidíme, že $0 = \gamma$ (sloupeček pod γ v tabulce sčítání je nezměněn) a $1 = \beta$ (sloupeček pod β v tabulce násobení je nezměněn). Dále najdeme opačné a inverzní prvky (z definice a tabulek).

$$\alpha : \alpha + (-\alpha) = \gamma \implies \underline{-\alpha = \alpha};\ \alpha \cdot \alpha^{-1} = \beta \implies \underline{\alpha^{-1} = \delta}$$

$$\beta : \beta + (-\beta) = \gamma \implies \underline{-\beta = \beta};\ \beta \cdot \beta^{-1} = \beta \implies \underline{\beta^{-1} = \beta}$$

$$\gamma : \gamma + (-\gamma) = \gamma \implies \underline{-\gamma = \gamma};\ \text{ 0 nemá inverzi}$$

$$\delta : \delta + (-\delta) = \gamma \implies \underline{-\delta = \delta};\ \delta \cdot \delta^{-1} = \beta \implies \underline{\delta^{-1} = \alpha}$$

Nyní převedeme matici do odstupňovaného tvaru.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha & \alpha & \delta & \alpha & \delta \\ \beta & \delta & \beta & \delta & \delta \\ \gamma & \beta & \alpha & \beta & \delta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha & \alpha & \delta & \alpha & \delta \\ 1 & \delta & 1 & \delta & \delta \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \delta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha & \alpha & \delta & \alpha & \delta \\ 0 & \delta & 1 & \delta & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \delta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha & \alpha & \delta & \alpha & \delta \\ 0 & \delta & 1 & \delta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dořešíme zpětným dosazením.

$$\begin{aligned}
&x_4 = t_4 \\
&x_3 = t_3 \\
&x_2 = (x_3 + \delta x_4 + \alpha) \cdot \delta^{-1} = (t_3 + \delta t_4 + \alpha) \cdot \alpha = \alpha t_3 + t_4 + \delta \\
&x_1 = (\alpha x_2 + \delta x_3 + \alpha x_4 + \delta) \cdot \alpha^{-1} = (\alpha(\alpha t_3 + t_4 + \delta) + \delta t_3 + \alpha t_4 + \delta) \cdot \delta = (\alpha t_3 + t_4 + \delta) + \alpha t_3 + \\
&\quad = t_4 + \alpha = 1
\end{aligned}$$

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \\ \gamma \\ \beta \end{pmatrix} ; t_3, t_4 \in \mathbf{T} \right\}.$$

Máme dva parametry (pivotů je o dva méně než proměnných), které budou nabývat hodnot prvků tělesa, ty jsou čtyři. Celkem je tedy $4 \cdot 4 = 16$ řešení.