Cvičení k přednášce NMAG111+NMAG113 Lineární algebra 1

Zadání

Verze ze dne 30. listopadu 2025

10 Báze – pokračování

Cíle cvičení:

- procvičit počítání souřadnic vzhledem k bázi,
- matice přechodu,
- hodnosti matice,
- dimenze součtu a průniků podprostorů.

Řešené příklady:

Úloha 10.1. Najděte souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bázi $M = \big((1,0,2)^T, (2,1,1)^T, (1,1,1)^T\big)$ vektorového prostoru $\mathbb{Q}^3$ nad tělesem $\mathbb{Q}$, jestliže

$$\text{(a)}\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \text{(c)}\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Úloha 10.2. Ověřte, že posloupnost polynomů $P = (x^2+x-1, x^2+2x+2, 2x^2-x+1)$ je báze podprostoru $U = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \le 2\}$ vektorového prostoru reálných polynomů $\mathbb{R}[x]$ nad tělesem $\mathbb{R}$, a spočítejte souřadnice polynomu $4x$ vzhledem k bázi P.

Úloha 10.3. Ověřte, že obě posloupnosti aritmetických vektorů $B = \big((1,4,3)^T, (3,1,1)^T\big)$ a $C = \big((1,1,4)^T, (1,0,1)^T\big)$ jsou báze podprostoru $U = \operatorname{Span} B$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$, spočítejte souřadnice vektorů C vzhledem k bázi B a určete matici přechodu $[\mathrm{id}]^C_B$.

Úloha 10.4. Najděte matice přechodu:

(a) $[\mathrm{id}]^B_{K_2}$ a $[\mathrm{id}]^{K_2}_B$, kde $B = \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)$ a K_2 je kanonická báze ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ nad tělesem $\mathbb{R}$.

(b) $[\mathrm{id}]^N_M$, kde $N = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ a $M = \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ jsou báze $\mathbb{Z}_3^2$ nad tělesem $\mathbb{Z}_3$.

(c) $[\mathrm{id}]^L_K$ a $[\mathrm{id}]^K_L$, kde $K = (1, i)$ a $L = (3-5i, 1-2i)$ jsou báze $\mathbb{C}$ nad tělesem $\mathbb{R}$.

Úloha 10.5. Pro matici A nad tělesy $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z}_5$ spočítejte její hodnost a dimenze prostorů $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} A^T$, $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker} A^T$, jestliže

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix}1&2\\2&1\\1&4\end{pmatrix}, \quad \text{(b)}\quad A = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&4&3\end{pmatrix}, \quad \text{(c)}\quad A = \begin{pmatrix}1&2&1&2\\4&1&1&2\\2&2&4&3\end{pmatrix}, \quad \text{(d)}\quad A = \mathbf{0}_{n\times m}.$$

Rozhodněte nad jednotlivými tělesy, zda je součet $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A^T$ direktní.

Úloha 10.6. Spočítejte dimenze podprostorů U, V, $U+V$, $U \cap V$, jestliže

(a) $U = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$ a $V = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ v prostoru $\mathbb{Q}^3$,

(b) $U = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ a $V = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$ v prostoru $\mathbb{Z}_3^4$.

Úloha 10.7. Najděte bázi prostorů $U+V$ a $U \cap V$ z úlohy 10.6 (b).

Další základní příklady k počítání:

Úloha 10.8. Ověřte, že $B = (3-i, 1-2i)$ tvoří bázi vektorového prostoru komplexních čísel $\mathbb{C}$ nad tělesem $\mathbb{R}$, a spočítejte souřadnice vektoru i.

Úloha 10.9. Uvažme posloupnost $M = (\cos x, \sin x, \cos^2 x, \sin^2 x)$ reálných funkcí proměnné x.

(a) Dokažte, že M je báze podprostoru $\operatorname{Span} M$ vektorového prostoru všech reálných funkcí,

(b) dokažte, že $1, \cos 2x \in \operatorname{Span} M$,

(c) určete souřadnice vektorů 1, $\cos 2x$ a $3 + 2\cos x + \cos 2x$ vzhledem k bázi M.

Úloha 10.10. Určete v prostoru všech reálných polynomů stupně nejvýše 2 matici přechodu od báze $N = (x^2+2x+1, 2x^2+1, x^2-x)$ k bázi $N' = (x^2+2, x^2-3x+1, x^2+x+3)$.

Úloha 10.11. V prostoru všech reálných matic 2×2 určete obě matice přechodu mezi bázemi

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$
$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Úloha 10.12. Pro matici $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ spočítejte nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ hodnost matice, její redukovaný odstupňovaný tvar a dimenze prostorů $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} A^T$, $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker} A^T$. Rozhodněte nad danými tělesy, zda je součet $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A^T$ direktní.

Obtížnější příklady:

Úloha 10.13. Najděte dimenzi podprostoru

$$\operatorname{Span}\{(1,1,1,a)^T, (1,1,a,1)^T, (1,a,1,1)^T, (a,1,1,1)^T\}$$

v $\mathbb{R}^4$ v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

Skeletním rozkladem matice $A \in T^{n\times m}$ hodnosti $r > 0$ rozumíme rozklad tvaru $A = BC$, kde $B \in T^{n\times r}$ a $C \in T^{r\times m}$

Úloha 10.14. Spočítejte skeletní rozklady $A = BC$ matic z úloh 10.5 a 10.12 tak, aby byla matice C redukovaná odstupňovaná.

Výsledky:

10.1. ***(a)*** $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ***(b)*** $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ***(c)*** $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

10.2. $[4x]_B = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

10.3. $[\mathrm{id}]^C_B = \left(\begin{smallmatrix}2&4\\3&4\end{smallmatrix}\right)$

10.4. ***(a)*** $[\mathrm{id}]^B_{K_2} = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\2&3\end{smallmatrix}\right)$, $[\mathrm{id}]^{K_2}_B = \left(\begin{smallmatrix}3&-1\\-2&1\end{smallmatrix}\right)$ ***(b)*** $\left(\begin{smallmatrix}0&2\\1&2\end{smallmatrix}\right)$ ***(c)*** $[\mathrm{id}]^L_K = \left(\begin{smallmatrix}3&1\\-5&-2\end{smallmatrix}\right)$, $[\mathrm{id}]^K_L = \left(\begin{smallmatrix}2&1\\-5&-3\end{smallmatrix}\right)$

10.5. v prvním sloupci jsou vždy výsledky nad $\mathbb{Q}$, ve druhém nad $\mathbb{Z}_5$.

	reduk. odstup. tvar		rank A		$\dim \operatorname{Ker} A$		$\dim \operatorname{Ker} A^T$		$\operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A^T$	
(a)	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$	2	2	0	0	1	1	✓	✓
(b)	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	3	2	0	1	0	1	✓	✗
(c)	$\begin{pmatrix}1&0&0&\frac14\\0&1&0&\frac34\\0&0&1&\frac14\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&4&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$	3	2	1	2	0	1	✓	✓
(d)	A	A	0	0	m	m	n	n	✓	✓

10.6. ***(a)*** 2, 2, 3, 1; ***(b)*** 3, 3, 4, 2

10.7. $U+V$: např. kanonická báze $\mathbb{Z}_3^4$; $U \cap V$: např. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

10.8. $\frac{1}{5}\left(\begin{smallmatrix}1\\-3\end{smallmatrix}\right)$

10.9. ***(a)*** Pro důkaz lineární nezávislosti stačí uvažovat hodnoty v $0, \pm\pi/2, \pi$; ***(b)*** $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$; ***(c)*** $(0,0,1,1)^T, (0,0,1,-1)^T, (2,0,4,2)^T$.

10.10. $[\mathrm{id}]^N_{N'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}10&16&8\\-3&-3&-1\\-5&-9&-5\end{pmatrix}$

10.11. $[\mathrm{id}]^{B_1}_{B_2} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$, $[\mathrm{id}]^{B_2}_{B_1} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$.

10.12. nad $\mathbb{R}$: $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Im} A^T = 3$, $\dim \operatorname{Ker} A = 1$, $\dim \operatorname{Ker} A^T = 0$, nad $\mathbb{Z}_5$ a nad $\mathbb{Z}_7$: $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Im} A^T = 2$, $\dim \operatorname{Ker} A = 2$, $\dim \operatorname{Ker} A^T = 1$. Redukovaný odstupňovaný tvar je $\left(\begin{smallmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{smallmatrix}\right)$ nad $\mathbb{R}$, $\left(\begin{smallmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{smallmatrix}\right)$ nad $\mathbb{Z}_5$, $\left(\begin{smallmatrix}1&0&5&1\\0&1&3&0\\0&0&0&0\end{smallmatrix}\right)$ nad $\mathbb{Z}_7$. Součet je direktní nad všemi třemi tělesy.

10.13. Pro $a = 1$ je dimenze 1, pro $a = -3$ je to 3, jinak je to 4.

10.14. 10.5: (a) $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\1&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\2&1\\1&4\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ nad $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}_5$, (b) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&4&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Q}$ a $= \begin{pmatrix}1&2\\2&1\\1&4\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}1&0&3\\0&1&0\end{smallmatrix}\right)$ nad $\mathbb{Z}_5$. (c) $\begin{pmatrix}1&2&1&2\\4&1&1&2\\2&2&4&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&1\\4&1&1\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac14\\0&1&0&\frac34\\0&0&1&\frac14\end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Q}$ a $= \begin{pmatrix}1&2\\4&1\\2&2\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}1&0&3&1\\0&1&4&3\end{smallmatrix}\right)$ nad $\mathbb{Z}_5$. (d) Skeletní rozklad neexistuje, protože hodnost je rovna nule.

10.12: $\begin{pmatrix}3&1&4\\2&4&1\\1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$, $\begin{pmatrix}3&4\\2&1\\1&4\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&0\end{smallmatrix}\right)$ nad $\mathbb{Z}_5$, $\begin{pmatrix}3&1\\2&4\\1&2\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}1&0&5&1\\0&1&3&0\end{smallmatrix}\right)$ nad $\mathbb{Z}_7$.