Cvičení k přednášce NMAG111+NMAG113 Lineární algebra 1

Zadání

Verze ze dne 30. listopadu 2025

9 Báze

Cíle cvičení:

- naučit se hledat báze maticových i obecných vektorových prostorů
- a určovat jejich dimenzi.

Řešené příklady:

Úloha 9.1. Najděte pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_5$ báze prostorů $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} A^T$, $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker} A^T$.

Úloha 9.2. Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů

$$M = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

bází vektorového prostoru $\mathbb{Q}^3$ nad tělesem $\mathbb{Q}$.

Úloha 9.3. Najděte nějakou bázi podprostoru U aritmetického vektorového prostoru T^4 nad tělesem T, jestliže

(a) $U = \{(0,0,0,0)^T\}$ pro libovolné těleso T,

(b) $U = T^4$ pro libovolné těleso T,

(c) $U = \operatorname{Span}\{(1,0,2,1)^T, (2,0,1,1)^T, (1,0,1,-1)^T\}$ pro $T = \mathbb{Q}$,

(d) $U = \operatorname{Span}\{(2,1,1,1)^T, (4,2,1,3)^T, (3,4,3,0)^T, (1,3,4,2)^T\}$ pro $T = \mathbb{Z}_5$,

(e) $U = \operatorname{Span}\{(2,0,3,4)^T, (3,3,1,2)^T, (3,1,1,2)^T\}$ pro $T = \mathbb{Z}_5$,

(f) $U = \operatorname{Span}\{(1,1,3,6)^T, (5,5,1,0)^T, (3,3,2,6)^T\}$ pro $T = \mathbb{Z}_7$.

Úloha 9.4. Najděte nějakou bázi podprostorů vekt. prostoru reálných polynomů $\mathbb{R}[x]$ nad tělesem $\mathbb{R}$:

(a) $U_1 = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq 3\}$,

(b) $U_2 = \operatorname{Span}\{x^2 + x + 1, x^2 + 2x, x^2 + 2\}$,

(c) $U_3 = \operatorname{Span}\{x + 1, x - 2, x^2 - x + 3, x^2 + 1\}$.

Úloha 9.5. Spočítejte dimenzi podprostorů

(a) $U = \{(0,0,0)^T\}$ aritmetického vektorového prostoru T^3 nad tělesem T,

(b) $U = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq 9\}$ vektorového prostoru reálných polynomů $\mathbb{R}[x]$ nad tělesem $\mathbb{R}$,

(c) $U = \operatorname{Span}\{(3,5,6)^T, (2,4,1)^T, (3,3,1)^T, (1,0,6)^T\}$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_7^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$,

(d) $U = \operatorname{Span}\{(2,1,1,1,1)^T, (1,2,1,1,1)^T, (1,1,2,1,1)^T, (1,1,1,2,1)^T, (1,1,1,1,2)^T\}$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_3^5$ nad tělesem $\mathbb{Z}_3$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 9.6. Najděte nějakou bázi prostoru $W = \operatorname{Span}\{(0,1,-3,4)^T, (2,2,2,2)^T, (1,-1,3,7)^T\} \leq \mathbb{R}^4$, která obsahuje vektor $(1,4,-4,-1)^T$.

Úloha 9.7. Najděte nějakou bázi následujících podprostorů vektorového prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$:

(a) podprostoru všech diagonálních matic

(b) podprostoru všech horních trojúhelníkových matic

(c) podprostoru všech takových symetrických matic, že součet prvků na hlavní diagonále je nula.

(d) podprostor všech antisymetrických matic (tj. splňujících $A^T = -A$.)

Úloha 9.8. Najděte bázi podprostoru U reálného vektorového prostoru polynomů $\mathbb{R}[x]$, jestliže

(a) $U = \mathrm{Span}\{x^6 + 1, x^9 + x^3, x^3\}$,

(b) $U = \mathrm{Span}\{x^3 + x^2 - x + 2, x^3 + 5x^2 + x + 4, x^3 - x^2 - 2x + 1, 2x^2 + x + 1\}$,

(c) $U = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 0, \deg p < 5\}$,

(d) $U = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 0, \deg p < 5\} \cap \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(3) = 0, \deg p < 5\}$.

Úloha 9.9. Vyberte z posloupnosti $X = ((0,0,0,0)^T, (3,1,4,2)^T, (2,3,5,1)^T, (1,5,6,1)^T)$ bázi podprostoru $\mathbf{U} = \mathrm{Span}\, X$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_7^4$ a doplňte ji na bázi celého prostoru $\mathbb{Z}_7^4$.

Úloha 9.10. Určete dimenzi vektorového prostoru

$$W = \mathrm{Span}\{(3,2,3,4)^T, (a,1,3,5)^T, (4,1,2,3)^T, (4,a,4,7)^T\} \leq \mathbb{R}^4$$

v závislosti na $a \in \mathbb{R}$, vyberte z dané množiny generátorů bázi W a případně tuto bázi doplňte na bázi celého $\mathbb{R}^4$.

Obtížnější příklady:

Úloha 9.11. Jestliže

$$\mathbf{U} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right\} \quad \text{a} \quad \mathbf{V} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$$

jsou podprostory vektorového prostoru $\mathbb{Z}_3^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_3$, najděte báze podprostorů $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ a $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$.

Úloha 9.12. Je-li $U = \mathrm{Span}\{(2,-1,1,1)^T, (4,1,5,1)^T, (1,-2,-1,1)^T, (1,1,2,0)^T\}$ podprostor aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$, najděte bázi takového podprostoru V, aby $U \cap V = 0$ a $U + V = \mathbb{Q}^4$.

Úloha 9.13. Najděte nějakou bázi

(a) vektorového prostoru reálných polynomů $\mathbb{R}[x]$ nad tělesem $\mathbb{R}$,

(b) racionálního vektorového prostoru $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

Úloha 9.14. Mějme množinu vektorů $M = \{(a_{i1}, \ldots, a_{in})^T \in \mathbb{C}^n \mid i = 1, \ldots, n\}$. Dokažte, že pokud pro všechna j platí $|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^n |a_{ij}|$, pak je M bází $\mathbb{C}^n$.

Výsledky:

9.1. Im A: např. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right)$; Im A^T: např. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$; Ker A: $\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$; Ker A^T: $\left(\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\right)$

9.2. ano, je

9.3. ***(a)*** prázdná posloupnost ***(b)*** např. kanonická báze
(c) např. $((1,0,2,1)^T, (2,0,1,1)^T, (1,0,1,-1)^T)$ ***(d)*** např. $((1,3,4,2)^T, (0,0,3,2)^T)$
(e) např. $((2,0,3,4)^T, (0,3,4,1)^T, (0,0,1,4)^T)$ ***(f)*** např. $((1,1,3,6)^T, (0,0,0,5)^T)$

9.4. ***(a)*** např. $(1, x, x^2, x^3)$ ***(b)*** např. (x^2+x+1, x^2+2x) ***(c)*** např. $(1, x, x^2)$

9.5. ***(a)*** 0 ***(b)*** 10 ***(c)*** 2 ***(d)*** 4

9.6. např. $((1,4,-4,-1)^T, (0,1,-3,4)^T, (2,2,2,2)^T)$

9.7. ***(a)*** Například množina všech (reálných) matic A typu $n \times n$ takových, které mají na diagonále právě jednu jedničku a jinak jsou všude nulové. ***(b)*** Například množina všech (reálných) matic A typu $n \times n$, které mají jedničku na nějaké pozici (i, j) pro $i \leq j$ a všude jinde jsou nulové. ***(c)*** Podobně jako (a), (b) je to například sjednocení dvou množin reálných matic $n \times n$: První množinu tvoří matice, pro které existují $1 \leq i < j \leq n$, že $A_{ij} = A_{ji} = 1$, a všude jinde je $A_{kl} = 0$. Druhou množinu tvoří diagonální matice, pro které existuje $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ takové, že $A_{kl} = 0$ všude krom $A_{ii} = 1$ a $A_{(i+1),(i+1)} = -1$. ***(d)*** Například čtvercové reálné matice řádu n, pro které existují $1 \leq i < j \leq n$, že $A_{ij} = 1$, $A_{ji} = -1$. (Antisymetrické matice nad tělesem charakteristiky různé od 2 mají na diagonále samé nuly.)

9.8. ***(a)*** např. (x^6+1, x^9+x^3, x^3) ***(b)*** např. $(x^3+x^2-x+2, x^3+5x^2+x+4)$ ***(c)*** např. (x, x^2, x^3, x^4)
(d) např. $(x^2-4x+3, x^3-4x^2+3x, x^4-4x^3+3x^2) = \big((x-3)(x-1), (x-3)(x-1)x, (x-3)(x-1)x^2\big)$

9.9. Posloupnost $((3,1,4,2)^T, (2,3,5,1)^T)$ je maximální LN v $\mathbf{U}$ a např. $((0,1,0,0)^T, (0,0,1,0)^T)$ ji doplňuje na bázi $\mathbb{Z}_7^4$.

9.10. pro $a \in \{1, 9\}$ je $\dim W = 3$, pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 9\}$ pak $\dim W = 4$

9.11. Bázi $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ tvoří například celá kanonická báze $\mathbb{Z}_3^4$ a báze $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ je třeba $((1,2,2,1)^T, (0,1,1,0)^T)$.

9.12. např. $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$

9.13. ***(a)*** např. $(x^i)_{i=0}^{+\infty}$ ***(b)*** např. $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$