

Úvod do sem patří název

Zápisky z přednášky Jméno Příjmení učitele

Jméno Příjmení

**Úvodní informace**

**Značení**

## Kapitola 1

# Úvod, reálná čísla, funkce

**Poznámka 1.** Značení:

- $P, Q \dots$  výroky,  $x, y, z \dots$  čísla (prvky),  $A, B, M \dots$  množiny
- $P \& Q \dots P$  zároveň s  $Q$
- $P \vee Q \dots P$  nebo  $Q$
- $P \implies Q \dots P$  implikuje  $Q$
- $P \iff Q \dots P$  je ekvivalentní s  $Q$
- $\neg P \dots$  negace  $P$
- $\forall x \dots$  pro všechna  $x$
- $\exists x \dots$  existuje  $x$
- $\exists! x \dots$  existuje právě 1  $x$
- $x \in A \dots x$  je prvkem  $A$
- $A \subset B \dots A$  je podmnožina  $B$
- $\{a_1, a_2, \dots\} \dots$  množina definována výčtem prvků  $a_1, a_2, \dots$
- $x \in M, \varphi(x) \dots$  množina definována vlastností  $\varphi(x)$
- $\emptyset, \{\} \dots$  prázdná množina
- $A \cup B \dots$  sjednocení množin  $A, B$
- $A \cap B \dots$  průnik množin  $A, B$
- $A \setminus B \dots$  rozdíl množin (prvky z  $A$ , které nejsou v  $B$ )

**Axiom 1 (Algebraické vlastnosti  $\mathbb{R}$ ).** Existuje množina reálných čísel  $\mathbb{R}$ , která obsahuje prvky 0 a 1, a jsou na ní definovány operace " $\cdot$ " a " $+$ " tak, že  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$  platí:

- i.  $x + y = y + x, x \cdot y = y \cdot x$
- ii.  $x + (y + z) = (x + y) + z, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- iii.  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- iv.  $0 + x = x, 1 \cdot x = x$
- v.  $0 \cdot x = 0$  a naopak  $x \cdot y = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$

**Axiom 2 (Uspořádání  $\mathbb{R}$ ).** Na množině  $\mathbb{R}$  je definována relace " $<$ " tak, že  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$  platí:

- i.  $x = y$ , nebo  $x < y$ , nebo  $y < x$
- ii.  $x < y \wedge y < z \implies x < z$
- iii.  $x < y \implies x + z < y + z$
- iv.  $0 < x \wedge 0 < y \implies 0 < x \cdot y$

**Poznámka 2.**  $x \leq y$  je zkratka za  $(x < y) \vee (x = y)$ . Z věty A2 opět lze vyvodit další známé poučky, např.  $x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , apod.

**Poznámka 3 (Význačné podmnožiny  $\mathbb{R}$ ).** • přirozená čísla  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

- celá čísla  $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, \dots\}$
- racionální čísla  $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$
- intervaly s krajními body  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ , resp.  $\dots$ , resp. neomezené pozor hranaté závorky! a ne zobáčky – uvidíme

**Definice 1 (Absolutní hodnota).** Necht  $x \in \mathbb{R}$ . Potom  $x := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

**Lemma 1.** Necht  $a \geq 0, b \in \mathbb{R}$  lib. Potom:

$$|b| \leq a \iff -a \geq b \geq a.$$

*Důkaz.* (rozbořem případů)

$$b \geq 0$$

$$b < 0$$

□

**Věta 1 (Trojúhelníková nerovnost).**  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  :

- $|x \pm y| \leq |x| + |y|$
- $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$

*Důkaz.* •  $|x| \leq |x|, |\pm y| \leq |y| \implies (L.1.1.) -|x| \leq x \leq |x|, -|y| \leq \pm y \leq |y|$ , když sečtu  $-|x| - |y| \leq x \pm y \leq |x| + |y| \implies (L.1.1.) |x \pm y| \leq |x| + |y|$

- TRIK  $\mp y = x - (x \pm y)$

□

**Axiom 3 (B. Odmocnina v  $\mathbb{R}$ ).** • Nechť  $n \in \mathbb{N}$  je sudé. Pak  $\forall a \in [0, \infty) \exists! b \in [0, \infty)$  takové, že  $b^n = a$

- Nechť  $n \in \mathbb{N}$  je liché. Pak  $\forall a \in \mathbb{R} \exists! b \in \mathbb{R}$  takové, že  $b^n = a$  ( $b = \sqrt[n]{a}$ ).

**Poznámka 4.** •  $\sqrt{1} = 1, \sqrt[3]{-1} = -1, \sqrt{-1}$  není definována

- $\sqrt[n]{x^n} = x \forall x \in \mathbb{R}, n$  liché
- $\sqrt{x^2} = |x|$

**Věta 2.** *Existují iracionální čísla.*

**Axiom 4 (Axiomy  $\mathbb{N}$ ).** •  $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$  (Archimédova vlastnost)

- Nechť  $M \subseteq \mathbb{N}$  splňuje:

i.  $1 \in M$

ii.  $\forall n \in \mathbb{N} : n \in M \implies n + 1 \in M$

potom  $M = \mathbb{N}$ . (princip indukce)

**Poznámka 5 (alternativní ekvivalentní formulace).** •  $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon > 1$

- Nechť  $\phi(n)$  je formule s proměnnou  $n \in \mathbb{N}$ , nechť  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Nechť platí:

i.  $\phi(n)$

ii.  $\forall n \geq n_0 : \phi(n) \implies \phi(n + 1)$

potom platí  $\phi(n) \forall n \geq n_0$ .

**Poznámka 6 (indukce ještě jinak).**  $\forall M \subseteq \mathbb{N}, M \neq \emptyset : M$  má nejmenší prvek.

TODO k větě 1.2. doplnit důkaz o iracionálnosti odmocniny ze 3

**Věta 3.** *Každý otevřený interval obsahuje nekonečně mnoho racionálních a iracionálních čísel.*

*pro iracionální.* BÚNO:  $I = (a, b), 0 \leq a < b$

položme  $x_n = \frac{n\sqrt{3}}{m}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$  velké tak, že  $m > \frac{2\sqrt{3}}{b-a} \iff \frac{2\sqrt{3}}{m} < b - a$

$M = \{n \in \mathbb{N} : x_n \geq b\}$ , nechť  $n_0$  je nejmenší prvek  $M$  (viz A3)

tvrdíme:  $x_{n_0-1}, x_{n_0-2} \in (a, b)$ , tj.  $a < x_{n_0-2} < x_{n_0-1} < b$

zřejmě  $x_n \notin \mathbb{Q}, \forall n \neq 0$

$a < \frac{n_0-2}{m}\sqrt{3} = \frac{n_0}{m}\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{m}$ , první zlomek  $\geq b$ , druhý  $< b - a \implies > a$  □

**Definice 2.** Necht  $M \subset \mathbb{R}$ . Potom

- $x \in M$  nazveme maximum (největší prvek)  $M$ , pokud  $\forall y \in M : y \leq x$
- $x \in M$  nazveme minimum (nejmenší prvek)  $M$ , pokud  $\forall y \in M : y \geq x$
- $K \in \mathbb{R}$  nazveme horní odhad  $M$ , jestliže  $\forall x \in M : x \leq K$
- $K \in \mathbb{R}$  nazveme dolní odhad  $M$ , jestliže  $\forall x \in M : x \geq K$

Množina  $M$  se nazve

- shora omezená, má-li nějaký horní odhad
- zdola omezená, má-li nějaký dolní odhad
- omezená, má-li horní i dolní odhad.

**Příklad 1.** •  $M = [0, 1)$

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

**Definice 3.** Necht  $M \subset \mathbb{R}$ , Číslo  $S \in \mathbb{R}$  nazveme supremum  $M$ , značíme  $S = \sup M$ , jestliže:

- i.  $\forall x \in M : x \leq S$
- ii.  $\forall S' < S : \exists y \in M : y > S'$

čili  $S$  je nejmenší horní odhad  $M$ .

**Poznámka 7.** • Supremum užitečně zobecňuje pojem maximum.

- Existuje nejvýše jedno  $\sup M$ .

**Axiom 5 (Úplnost  $\mathbb{R}$  = Axiom suprema).** Necht  $M \subset \mathbb{R}$  je neprázdná a shora omezená. Pak  $\exists! S \in \mathbb{R}$  takové, že  $S = \sup M$ .

**Definice 4.** Necht  $M \subset \mathbb{R}$ , Číslo  $s \in \mathbb{R}$  nazveme infimum  $M$ , značíme  $s = \inf M$ , jestliže:

- i.  $\forall x \in M : x \geq s$
- ii.  $\forall s' > s : \exists y \in M : y < s'$

čili  $s$  je největší dolní odhad  $M$ .

**Axiom 6 (A4').** Necht  $M \subset \mathbb{R}$  je neprázdná a zdola omezená. Pak  $\exists! s \in \mathbb{R}$  takové, že  $s = \inf M$ .

**Definice 5 (Rozšířená reálná čísla).**  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} + \{-\infty, +\infty\}$ . Uspořádání a aritmetika v  $\mathbb{R}^*$ :

## Úvod, reálná čísla, funkce

- $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty, -\infty < +\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R} : x + \infty = +\infty, x - \infty = -\infty, +\infty + \infty = +\infty, -\infty - \infty = -\infty$
- $\forall x > 0 x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \pm\infty \cdot (+\infty) = \pm\infty, \pm\infty \cdot (-\infty) = \mp\infty$
- $\forall x < 0 x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x}{\pm\infty} = 0$

Nedefinováno zůstává  $+\infty - \infty, -\infty + \infty, 0 \cdot (\pm\infty), \frac{x}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ .

**Definice 6.** Necht  $X, Y$  množiny. Funkce  $f : X \rightarrow Y$  je libovolný předpis, který každému  $x \in X$  přiřadí jednoznačně určený prvek z  $Y$ . Dále definujeme

- obraz množiny  $M \subset X : f(M) = \{f(x); x \in M\}$
- vzor množiny  $N \subset Y : f^{-1}(N) = \{x, f(x) \in N\}$  (zde „ $^{-1}$ “ není inverzní funkce, toto můžu říct i pro neinvertovatelnou funkci)

Funkce je

- prostá (injektivní), pokud  $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$
- "na" (surjektivní), pokud  $f(X) = Y$ , tj.  $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$
- je vzájemně jednoznačná (bijektivní), je-li prostá i "na"

TODO složené zobrazení def. obor?, inverzní a invertovatelná funkce



## **Kapitola 2**

**03**

## **Kapitola 3**

**04**

## **Kapitola 4**

**05**

## **Kapitola 5**

**Věta 4 (L'Hospital).** *Nechť  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ , nechť  $\exists$  vlastní  $f'(x), g'(x)$ , navíc  $g'(x) \neq 0 \forall x_0 \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$ . Nechť platí buď*

a)  $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$ , nebo

b)  $|g(x)| \rightarrow +\infty, x \rightarrow x_0$ .

*Pak*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

*má-li pravá strana smysl.*

*Důkaz.* 1.  $x \rightarrow x_0^+, x_0 \in \mathbb{R}$ , případ a);  $\varepsilon > 0$  dáno:

$\exists \delta > 0$  t. ž.  $\forall c \in \mathcal{P}_+(x_0, \delta)$  platí:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$$

TRIK do/předdefinice inujme  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  (nemá vliv na  $\lim_{x \rightarrow x_0}$ )

$\Rightarrow f, g$  spojitě v  $[x_0, x_0 + \delta), \delta > 0$  malé

- v bodě  $x_0$  zprava ( $f(x), g(x) \rightarrow 0 = f(x_0) = g(x_0), x \rightarrow x_0$ )
- v bodech  $x \in (x_0, x_0 + \delta) \Leftarrow$  Věta 4. 1. ( $\exists f', g'$  vlastní)

Buď  $x \in \mathcal{P}_+(x_0, \delta)$  pevné, libovolné

Aplikuji větu 6. 8. (C. o stř. h.) na  $[x_0, x]$

$$\Rightarrow \exists x \in [x_0, x] \subset \mathcal{P}_+(x_0, \delta) \text{ t. ž. } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) - f(x)}{g(x_0) - g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$$

2.  $x \rightarrow +\infty$ , případ a);

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})} = (LP1.) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(\frac{1}{y}) \cdot \frac{-1}{y^2}}{g'(\frac{1}{y}) \cdot \frac{-1}{y^2}} = (L2.3.) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3.  $x \rightarrow x_0^+$ , případ b), tj.  $|g(x)| \rightarrow +\infty, x \rightarrow x_0$

Užiji V. 6. 8. na  $[x, y]$ :

$$\exists c \in (x, y) \text{ t. ž. } \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow$$

pujčím si  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(y)} + \frac{f'(c)}{g'(c)}(1 - \frac{g(y)}{g(x)}) = P_1 + P_3 \cdot P_2$ , fixuji  $y$  blízko  $x_0 \Rightarrow c$  blízko  $x_0$ ,  
když  $x \rightarrow x_0 \Rightarrow P_3 \rightarrow L, P_1 \rightarrow 0, P_2 \rightarrow 1$ , a tedy PS blízko  $L$ .

□

**Poznámka 8.** Úmluva:  $I, J \subset \mathbb{R}$  jsou intervaly.

**Definice 7.** Řekneme, že  $f(x)$  má v  $I$  Darbouxovu vlastnost, pokud  $\forall a, b \in I, \forall \gamma$  mezi  $f(a), f(b) \exists c$  mezi  $a, b$  t. ž.  $f(c) = \gamma$ . (Darbouxova věta:  $f(x)$  spoj. v  $I \implies$  má v  $I$  Darboux. vlast.)

**Věta 5 (\*).** Nechť  $I$  je otevřený interval,  $f(x)$  je spojitá v  $I$ , nechť  $\exists f'(x)$  vlastní  $\forall x \in I$ . Pak  $f'(x)$  má v  $I$  Darbouxovu vlastnost.

**Věta 6 (Monotonie a znaménko derivace).** Nechť  $I \subset \mathbb{R}$  lib. interval,  $f(x)$  je spojitá v  $I$ , nechť  $\exists f' > 0$  (resp.  $\geq 0, \leq 0, < 0$ )  $\forall x$  vnitřní bod  $I$ . Potom  $f(x)$  je rostoucí (resp. neklesající, nerostoucí, klesající) v  $I$ .

*Důkaz.* Nechť  $x_1 < x_2 \in I \xrightarrow{?} f(x_1) < f(x_2)$ .

Užijí V. 6. 5. (Lagrange) na  $[x_1, x_2] \subset I$  – spojitost OK, a taky  $\exists f'(x) \forall x \in (x_1, x_2) \subset I$

$$\implies \exists c \in (x_1, x_2) \text{ t. ž. } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \iff f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) > 0. \quad \square$$

**Příklad 2.**  $f(x) = x^n, I = [0, +\infty), n \in \mathbb{N}$

$f'(x) = nx^{n-1} > 0, x \in (0, +\infty)$  – otevřený interval je právě vnitřek intervalu  $I$

$\implies$  (V6.10.)  $f(x)$  rostoucí v  $I$ .

**Definice 8.** Funkce  $f(x)$  se nazve konvexní (resp. ryze konvexní, konkávní, ryze konkávní) v  $I$ , jestliže  $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq$  (resp.  $<, \geq, >$ )  $\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$ .

**Věta 7 (Konvexita a monotonie derivace).** Nechť  $I$  interval s krajními body  $a < b$ . Nechť  $f(x)$  spojitá v  $I$ . Nechť  $\exists f'(x) \forall x \in (a, b)$  a je rostoucí (resp. neklesající, klesající, nerostoucí). Potom  $f(x)$  je ryze konvexní (resp konvexní, ryze konkávní, konkávní) v  $I$ .

*Důkaz.* Nechť  $x_1 < x_2 < x_3 \in I \xrightarrow{?} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$ .

Užijí 2x V. 6. 5. (Lagrange) na  $[x_1, x_2]$ , pak na  $[x_2, x_3]$ :  $\exists c \in (x_1, x_2)$  t. ž.  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$   
a  $\exists d \in (x_2, x_3)$  t. ž.  $\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(d)$ .

Zřejmě  $d > c \implies f'(c) < f'(d) \implies$  to co dk.  $\square$

**Příklad 3.**  $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$  – spojitá v  $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+|x|)^2} \cdot |x|' = \frac{-\operatorname{sgn} x}{(1+|x|)^2} (x \neq 0) = \begin{cases} \frac{-1}{(1+|x|)^2}, & x > 0 \\ \frac{1}{(1+|x|)^2}, & x < 0 \end{cases}$$

V. 6. 11.  $\implies f$  je ryze konvexní v  $(-\infty, 0)$  a v  $(0, +\infty)$  (ale ne už v  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ )

**Poznámka 9 (Ekvivalentní definice konvexity).**  $\forall a, b \in I, \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$ .

*Důkaz.* Důkaz jako cvičení pro čtenáře, napovíme  $x_1 = a, x_3 = b, x_2 =$  nějaký zlomek s  $\lambda$  □

**Věta 8 (Konvexita a znaménko druhé derivace).** *Nechť  $f'$  je spojitá v  $I$ , nechť  $\exists f''(x)$  vlastní uvnitř  $I$ . Nechť platí  $f''(x) > 0$  (resp.  $\geq, < \leq$ )  $\forall x \in I$  vnitřní. Pak  $f(x)$  je v  $I$  ryze konvexní (resp. konvexní, ryze konkávní, konkávní).*

*Důkaz.* Označ  $\tilde{I}$  vnitřek  $I$ .

$f''(x) = (f'(x))' > 0$  v  $\tilde{I}$ , konečné

$\implies f'(x)$  spojitě (V. 5. 1.) a je rostoucí v  $\tilde{I}$  (V. 6. 10.)

$\implies f(x)$  je ryze konvexní v  $I$  (V. 6. 11.). □

**Definice 9.** Řekneme, že  $x_0$  je inflexní bod  $f(x)$ , jestliže

i.  $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}^*$

ii.  $\exists \delta > 0$  t. ž. na jednom z intervalů  $(x_0 - \delta, x_0), (x_0, x_0 + \delta)$  je  $f(x)$  ryze konvexní a na druhé ryze konkávní.

## Kapitola 6

# Posloupnosti

**Definice 10.** Posloupnost je funkce  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n$ , značíme  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  nebo  $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ , krátce  $\{a_n\}$ .

**Příklad 4.** 1.  $a_n = \frac{1}{n}, b_n = (-1)^n$

2. rekurentně:  $a_1 = 0, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

**Definice 11.** Číslo  $a \in \mathbb{R}^*$  se nazve limita posloupnost  $\{a_n\}$ , pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies a_n \in \mathcal{U}(a, \varepsilon).$$

Značíme  $a_n \rightarrow a$  nebo  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ .

**Poznámka 10.**  $a \in \mathbb{R} \dots \{a_n\}$  konverguje

$a = \pm \infty \dots \{a_n\}$  diverguje

**Poznámka 11** (Ekvivalentní definice (pokud  $a \in \mathbb{R}$ )).

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

Obecně:  $a_n \rightarrow a \iff \forall \varepsilon > 0$  platí  $a_n \in \mathcal{U}(a, \varepsilon)$  pro všechna  $n$  až na konečně mnoho výjimek

*Důkaz.*  $\implies$  “ výjimečně jen pro  $n < n_0$  (těch je konečně)

„  $\Leftarrow$  “  $V = \{n; a_n \notin \mathcal{U}(a, \varepsilon)\} \subset \mathbb{N}$  konečné

volme  $n_0 > \max V \in \mathbb{N}$

□

**Poznámka 12.** Pro limity posloupností platí analogie vět pro limity funkcí s analogickými důkazy.

i. (VoAL, V. 2. 3., V. 2. 7.)  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \implies$

$$1. a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b$$

$$2. a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$$

$$3. \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}, \text{ má-li PS smysl}$$

ii. (V. 2. 9.) je-li  $\alpha \leq a_n \leq \beta$  od jistého  $n_0, a_n \rightarrow a \implies \alpha \leq a \leq \beta$

iii. (V. 2. 10.) je-li  $b_n \leq a_n \leq c_n$  od jistého  $n_0, b_n \rightarrow a, c_n \rightarrow a \implies a_n \rightarrow a$

iv. nechť  $a_n \rightarrow 0$ , nechť  $a_n > (\text{resp. } <) 0$  od jistého  $n_0 \implies \frac{1}{a_n} \rightarrow +\infty$  (resp.  $-\infty$ )

*Důkaz.* cíl:  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : n \geq n_0 \implies \frac{1}{a_n} \in \mathcal{U}(+\infty, \varepsilon)$ , tj.  $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\varepsilon > 0 \text{ dáno: } \exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \implies a_n \in \mathcal{U}(0, \varepsilon), \text{ tj. } |a_n| < \varepsilon \implies -\varepsilon < a_n < \varepsilon$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} : n \geq n_2 \implies a_n > 0 \implies 0 < a_n < \varepsilon$$

polož  $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ ; nechť  $n \geq n_0 \implies$  cíl □

**Definice 12.** Posloupnost se nazve omezená (resp. shora omezená, zdola omezená), pokud  $\exists K > 0$  (resp.  $K \in \mathbb{R}$ ) t. ž.  $|a_n| \leq K$  (resp.  $a_n \leq K, a_n \geq K$ )  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Posloupnost se nazve rostoucí (resp. neklesající, klesající, nerostoucí) pokud  $a_n < a_{n+1}$  (resp.  $a_n \leq a_{n+1}, a_n > a_{n+1}, a_n \geq a_{n+1}$ )  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Všechny tyto posloupnosti zároveň nazveme monotónní.

**Věta 9.** Nechť  $\{a_n\}$  konverguje. Pak  $\{a_n\}$  je omezené.

*Důkaz.* víme:  $\exists a \in \mathbb{R}$  t. ž.  $a_n \rightarrow a \dots \varepsilon = 1, \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < 1 \iff L = a - 1 < a_n < a + 1 = K$

polož  $C := \max\{K, -L\} \implies |a_n| \leq C, \forall n \geq n_0$ , to není  $\forall n \in \mathbb{N}$

položme  $\tilde{C} := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, C\}$

nyň zřejmé:  $|a_n| \leq \tilde{C} \forall n \geq 1$  tj.  $\forall n \in \mathbb{N}$ . □

**Věta 10.** Nechť  $\{a_n\}$  je monotónní. Pak  $\exists a \in \mathbb{R}^*$  t. ž.  $a_n \rightarrow a$ . Je-li  $\{a_n\}$  omezená, pak  $a \in \mathbb{R}$ , tj.  $\{a_n\}$  konverguje.

*Důkaz.* BÚNO  $\{a_n\}$  je neklesající, tj.  $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ , a tedy  $a_n \leq a_m \forall n \leq m$

polož  $M := \{a_m; m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ .

1. nechť  $M$  je omezená ( $\iff \{a_n\}$  je omezená);  $S := \sup M$  (A. 4.,  $M \neq \emptyset$ ) ukážeme, že  $a_n \rightarrow S$

$$\varepsilon > 0 \text{ dáno: } S' := S - \varepsilon < S \dots \exists n_0 : a_{n_0} > S - \varepsilon$$

## Posloupnosti

$\{a_n\}$  neklesající:  $a_n > S - \varepsilon \forall n \geq n_0$ , zároveň  $a_n \leq S < S + \varepsilon$

$$\implies a_n \in \mathcal{U}(S, \varepsilon), \forall n \geq n_0.$$

2. nechť  $M$  je neomezená ( $\iff \{a_n\}$  je neomezená, nutně shora (protože je neklesající))

ukážeme:  $a_n \rightarrow +\infty$

$$\varepsilon > 0 \text{ dáno: } \exists n_0 \text{ t. ž. } a_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon} \text{ a tedy } a_n > \frac{1}{\varepsilon}, \forall n \geq n_0 \implies a_n \in \mathcal{U}(+\infty, \varepsilon)$$

□

TODO

**Věta 11.** *Následující je ekvivalentní*

1.  $\{a_n\}$  konverguje
2.  $\{a_n\}$  je cauchyovské

~~(1)  $\implies$~~  (2) ... víme  $\exists a \in \mathbb{R}$  t. ž.  $a_n \rightarrow a$ ; cíl (B. C.)

$$\varepsilon > 0 \text{ dáno: } \exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n \in \mathcal{U}(a, \frac{\varepsilon}{2}), \text{ tj. } |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies \forall m, n \geq n_0 \text{ lze psát: } a_m - a_n = (a_m - a) + (a - a_n), \text{ takže } |a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \varepsilon$$

$$(2) \implies (1) \quad \text{i. } \{a_n\} \text{ je omezená: užijí (B. C.) pro } \varepsilon = 1: \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 : |a_m - a_n| < 1, \text{ speciálně } |a_n - a_{n_0}| < 1 \forall n \geq n_0$$

$$\implies a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1 \implies \{a_n\} \text{ omezené}$$

ii. plyne z V. 7. 4.

$$\text{iii. } \varepsilon > 0 \text{ dáno: užijí (B. C.) pro } \frac{\varepsilon}{2} \dots \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{dále } a_m \in \mathcal{U}(a, \frac{\varepsilon}{2}) \text{ pro nekonečně } m \implies \exists m \geq n_0 \text{ t. ž. } |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{CELKEM } n \geq n_0 : |a_n - a_m| + |a_m - a| < \varepsilon$$

□

**Věta 12 (Heineho věta pro limitu funkce).** *Nechť  $f(x)$  je definována na  $\mathcal{P}(x_0)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ , nechť  $A \in \mathbb{R}^*$ . Potom je ekvivalentní*

1.  $f(x) \rightarrow A, x \rightarrow x_0$
2.  $\forall$  posloupnost  $\{x_n\}$ , která

$$\text{i. } x_n \rightarrow x_0$$

$$\text{ii. } x_n \neq x_0 \forall n$$

$$\text{platí } f(x_n) \rightarrow A.$$

~~Důkaz~~  $\Rightarrow$  (2) nechť  $\{x_n\}$  splňuje kladené podmínky, cíl:  $f(x_n) \rightarrow A$

nechť  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : n \geq n_0 \implies f(x_n) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$

$\varepsilon > 0$  dáno: dle (1)  $\exists \delta > 0$  t. ž.  $x \in \mathcal{P}(x_0, \delta) \implies f(x) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$

dle (i):  $\exists n_0$  t. ž.  $n \geq n_0 \implies x_n \in \mathcal{U}(x_0, \delta)$ , navíc díky (ii) dokonce  $x_n \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$

CELKEM:  $\forall n \geq n_0 : f(x_n) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$

(2)  $\implies$  (1) nepřímo:  $\neg(1) \implies \neg(2)$

nechť  $\neg(f(x) \rightarrow A, x \rightarrow x_0)$ , tedy  $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$  t. ž.  $f(x) \notin \mathcal{U}(A, \varepsilon)$

fixuji takové  $\varepsilon > 0$  a užívám zbytek formule pro  $\delta = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots \implies \exists x_n \in \mathcal{P}(x_0, \frac{1}{n})$  t. ž.  $f(x_n) \notin \mathcal{U}(A, \varepsilon)$ , z těchto  $x_n$  získám posloupnost  $\{x_n\}$

vidíme:  $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ , avšak  $x_n \neq x_0 \forall n \implies x_n \rightarrow x_0$ ; nicméně  $f(x) \not\rightarrow A$ , tj.  $\neg(2)$

□

**Poznámka 13** (Užití axiomu výběru (AC)). Byl použit při formulaci  $\exists x_n \in \mathcal{P}(x_0, \frac{1}{n})$ , tohle bych měl udělat nekonečně mnoho krát, udělám jen pro nějaké jedno ??

**Poznámka 14** (Heineho věta pro limitu zprava). Následující tvrzení jsou ekvivalentní

1.  $f(x) \rightarrow A, x \rightarrow x_0^+$
2.  $\forall$  posloupnosti  $\{x_n\}$  t. ž.
  - i.  $x_n \rightarrow x_0$
  - ii.  $x_n > x_0$

**Věta 13** (7.7. Heineho věta pro spojitost funkce v intervalu). Nechť  $f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Potom je ekvivalentní

1.  $f(x)$  je spojitá v  $I$
2.  $\forall$  posloupnost  $\{x_n\}, \forall x_0$  splňující
  - i.  $x_n \rightarrow x_0$
  - ii.  $x_0 \in I, x_n \in I \forall n$
 platí  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

~~Důkaz~~  $\Rightarrow$  (2) ... víme:  $\forall x_0 \in I \forall \varepsilon \exists \delta > 0$  t. ž.  $x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I \implies f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$

nechť  $x_n, x_0$  splňují (i), (ii) ... cíl:  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

$\varepsilon > 0$  dáno  $\exists \delta > 0$  t. ž.  $x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I \implies f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$

dle (i)  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies x_n \in \mathcal{U}(x_0, \delta)$

navíc dle (ii)  $x_n, x_0 \in I \implies f(x_n) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon), \forall n \geq n_0$

$\neg(1) \implies \neg(2)$  ...nechť neplatí (1), tj.:

$$\exists x_0 \in I \exists \varepsilon > 0 : \exists x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I \text{ t. ž. } f(x) \notin \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$$

fixuji takové  $x_0 \in I, \varepsilon > 0$ , potom užívám pro  $\delta = \frac{1}{n}$  pro  $n = 1, 2, \dots$

$$\implies \exists x_n \in \mathcal{U}(x_0, \frac{1}{n}) \cap I \text{ t. ž. } f(x_n) \notin \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon) \forall n = 1, 2, \dots$$

zřejmě platí (i), (ii), avšak  $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$ , tj. neplatí (2)

□

**Příklad 5.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \dots$  V. 7. 6.  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = e^1 \dots x_0 = 0, x_n = \frac{1}{n}, x \rightarrow 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = f(x_n)$ , posloupnost splňuje (i), (ii)

**Věta 14 (6. 1.).** *Nechť  $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá. Pak je zde omezená*

*pomocí posloupností.* nepřímo: nechť  $f(x)$  je neomezená v  $[a, b]$ , BÚNO shora

$$M := f([a, b]) = \{f(x), x \in [a, b]\} \text{ není omezená shora}$$

tj.  $\forall K > 0 \exists y \in M \text{ t. ž. } y > K$  užívám pro  $K = n = 1, 2, \dots \implies \exists y_n \in M, y_n > n$ , zřejmě  $y_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty$

$$\exists x_n \in [a, b] \text{ t. ž. } f(x_n) = y_n \rightarrow +\infty$$

užijí V. 7. 4., resp. důsl.  $\implies \exists$  posloupnost  $\{\tilde{x}_n\} \subseteq \{x_n\}, \exists x_0 \in [a, b] \text{ t. ž. } \tilde{x}_n \rightarrow x_0$ .

$$\text{V. 7. 7. } \implies f(\tilde{x}_n) \rightarrow f(x_0) \in \mathbb{R}, \text{ ale } f(\tilde{x}_n) = y_n \rightarrow +\infty - \text{spor}$$

□

**Věta 15 (6.2.).** *Nechť  $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá. Pak zde má globální maximum a minimum*

$$\text{Důkaz. poloř } S := \sup\{f(x), x \in [a, b]\} \in \mathbb{R}$$

$$\text{cíl: } \exists x_0 \in [a, b] \text{ t. ž. } f(x_0) = S$$

$$n = 1, 2, \dots : S - \frac{1}{n} < S \implies \exists x_n \in [a, b], \text{ t. ž. } S - \frac{1}{n}$$

□

## Kapitola 7

# Taylorův polynom

**Příklad 6 (Motivační).** Chci aproximaci  $f(x) = e^{-2x}$  v bodě  $x = 0$ , hledáme aproximaci  $p(x) = a + bx + cx^2$

Nikoho nepřekvapí, že lineární aproximace bude tečna, tedy  $p(x) = f(0) + f'(0)x = 1 - 2x$

Chceme ji ale nějak vylepšit, zpřesnit, a to tím, že přidáme kvadratický člen. Jak ho ale najdeme?

IDEA: napasujeme vyšší derivace, tj.  $f''(0) = p''(0)$

$$p''(0) = 2c, f''(0) = 4 \implies c = 2 \implies p(x) = 1 - 2x + 2x^2$$

Jak toto dělat obecně? Jak určit další vyšší členy? Když aproximaci useknu, jak velká je chyba?

**Definice 13.** Necht  $f(x), g(x)$  jsou definovány na  $\mathcal{P}(x_0)$ . Řekneme, že

- $f(x)$  je malé  $o$  od  $g(x)$  pro  $x \rightarrow x_0$ , pokud  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$
- $f(x)$  je velké  $O$  od  $g(x)$  pro  $x \rightarrow x_0$ , pokud  $\exists C, \delta > 0$  t. ž.  $|f(x)| \leq C|g(x)| \forall x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$
- $f(x)$  je řádově rovno  $g(x)$  pro  $x \rightarrow x_0$ , pokud  $\exists a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  t. ž.  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow a, x \rightarrow x_0$

Značíme  $f(x) = o(g(x))$  resp.  $f(x) = O(g(x))$  resp.  $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$

**Příklad 7.** 1.  $\ln x = o(\sqrt{x}), x \rightarrow +\infty \dots \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$

2.  $\frac{\sin x + \cos x}{x^2 + 1} = O(\frac{1}{x^2}), x \rightarrow +\infty \dots |f(x)| \leq \frac{2}{x^2} = 2\frac{1}{x^2} = Cg(x)$

3.  $\sin x \sim x, 1 - \cos x \sim x^2, x \rightarrow 0 \dots$  (pouze pro  $\cos$ )  $\frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2} (= a), x \rightarrow 0$

**Definice 14 (Derivace vyšších řádů).** i.  $f^{(0)}(x) = f(x)$

ii.  $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))'$ , tj.  $f^{(1)}(x) = f'(x), f^{(2)}(x) = f''(x)$

## Taylorův polynom

Pro  $I \subseteq \mathbb{R}$  otevřený interval definuji

$$C^n(I) = \left\{ f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}; f^{(t)} \text{ existuje a je spojitá v } I \forall k = 0, 1, \dots, n \right\}$$

Speciálně  $C^0(I) = C(I) = \{f(x) : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ je spojitá v } \mathbb{R}\}$

**Definice 15.** Pro  $x_0 \in \mathbb{R}, k \geq 0$  celé označme  $Q_{k,x_0}(x) = \frac{1}{k!}(x-x_0)^k$ , speciálně  $Q_{0,x_0}(x) \equiv 1$ ,  $Q_{1,x_0}(x) = \frac{1}{2}(x-x_0)^2$ , atd.

**Lemma 2 (8.1. Vlastnosti funkcí  $Q_{k,x_0}$ ).** Platí

- i.  $Q_{k,x_0}$  je polynom stupně  $k$
- ii.  $Q'_{0,x_0} \equiv 0, Q'_{k,x_0} = Q_{k-1,x_0} \forall k \geq 1$
- iii.  $Q_{k,x_0}^{(l)} = \begin{cases} 1, l = k \\ 0, l \neq k \end{cases} \quad \forall k, l \geq 0 \text{ celé}$

*Důkaz.* i.  $(x-x_0)^k = (\text{binom. v.}) x^k + \dots$

ii.  $1^{prime} = 0; (Q_{k,x_0})' = \frac{1}{k!}((x-x_0)^k)' = \frac{1}{k!}k(x-x_0)^{k-1} = \frac{1}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} = Q_{k-1,x_0}$

iii.  $l = k : Q_{k,x_0}^{(k)}(x_0) = Q_{0,x_0}(x_0) = 1; l > k : Q_{k,x_0}^{(l)} \equiv 0; l < k \text{ tj. } k = l + s, s \geq 1 : Q_{k,x_0}^{(l)} = Q_{s,x_0} = \frac{1}{s!}(x-x_0)^s, x = x_0 \implies Q_{s,x_0}(x_0) = 0$

□

**Definice 16.** Necht  $f(x) \in C^n(\mathcal{U}(x_0))$ . Potom výraz

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

nazveme Taylorův polynom funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  stupně  $n$  (též  $n$ -tý Taylorův polynom). Značíme  $T_{x_0,n}^f(x)$ . Alternativně  $T_{x_0,n}^f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \cdot Q_{k,x_0}(x)$ .

**Příklad 8.** 1.  $f(x) = e^x, x_0 = 0; f^{(k)}(x) = e^x \implies f^{(k)}(0) = 1 \forall k \geq 0$ .

$$T_{0,n}^{e^x}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

2.  $f(x) = \sin x, x_0 = 0; f^{(k)}(x) : \sin x, \cos x, -\sin x, -\cos x, \dots; f^{(k)}(0) : 1, 0, -1, 0, \dots$

$$T_{0,2n+1}^{\sin x} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3.  $f(x) = (1+x)^a, x_0 = 0, a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}; f^{(k)}(x) = a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a-k+1) \cdot (1+x)^{a-k};$

## Taylorův polynom

$$f^{(k)}(0) = a(a-1)\dots(a-k+1).$$

$$T_{0,n}^{(1+x)^a}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} x^k = 1+ax + \frac{a(a-1)}{2} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6} x^3 + \dots$$

**Věta 16 (8.1. Aproximační vlastnost Taylorova polynomu).** *Nechť  $f(x) \in C^n(\mathcal{U}(x_0))$ . Potom  $f(x) = T_{x_0,n}^f(x) + o((x-x_0)^n)$ ,  $x \rightarrow x_0$ . Navíc  $T_{x_0,n}^f(x)$  je jediný polynom stupně  $\leq n$  s touto vlastností.*

*Důkaz.* BÚNO  $x_0 = 0$ , označme  $p(x) = T_{0,n}^f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$

klíčové pozorování:  $p^{(l)}(0) = f^{(l)}(0) \forall l = 0, \dots, n$

dk. L. 8. 1.  $\implies p^{(l)}(0) = \sum_{k=0}^n (f^{(k)}(0) Q_k(x))^{(l)}|_{x=0} = f^{(l)}(0)$

1. aprox. vlast.: cíl:  $\frac{f(x)-p(x)}{(x)^n} \rightarrow 0, x \rightarrow 0$  – metoda L'Hospital  $\frac{0}{0}$   $n$ -krát

po  $n$ -tém kroku:  $\frac{f^{(n)}(x)-p^{(n)}(x)}{n!}$ , když dosadím  $x = 0 \implies \frac{0}{n!} = 0$

2. jedonznačnost: necht  $\exists g(x) \dots$  polynom st.  $\leq n$  t. ž.  $\frac{f(x)-g(x)}{(x)^n} \rightarrow 0, x \rightarrow 0 \dots$  cíl:  $g(x) \equiv p(x) = T_{0,n}^f(x)$

pomocná úvaha:  $\frac{p(x)-g(x)}{x^n} = \frac{f(x)-g(x)}{x^n} - \frac{f(x)-p(x)}{x^n} \rightarrow 0 - 0 = 0, x \rightarrow 0$

pišme  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$

sporem: když se  $p(x), g(x)$  nerovnejí  $\exists s \in \{0, \dots, n\}$  t. ž.  $a_s \neq b_s$ , BÚNO s nejmenší takové  $\implies p(x) - g(x) = \sum_{k=s}^n (a_k - b_k) x^k, a_k - b_k =: c_k \implies p(x) - g(x) = c_s x^s + \sum_{k=s+1}^n c_k x^k$

potom  $\frac{p(x)-g(x)}{x^s} = \begin{cases} c_s + \sum_{k=s+1}^n c_k x^{k-s}, & \text{kdýž } x \rightarrow 0, \text{ výraz} \rightarrow c_s \neq 0 \\ \frac{p(x)-g(x)}{x^n} \cdot x^{n-s} & (\text{viz pomocná úvaha}) \rightarrow 0 - \text{SPOR} \end{cases}$

□

**Poznámka 15.** Polynomická funkce je přesně rovna svému Taylorovu polynomu pro lib.  $x_0 \in D(f)$ .

**Věta 17 (8.2. Integrál a derivace Taylorova polynomu).** *Nechť  $F(x) \in C^{n+1}(\mathcal{U}(x_0))$ , necht  $F'(x) = f(x)$ , tj.  $F(x) = \int f(x) dx$  v  $\mathcal{U}(x_0)$ . Potom*

1.  $(T_{x_0,n+1}^F(x))' = T_{x_0,n}^f(x) \forall x \in \mathcal{U}(x_0)$ ,

2.  $\int T_{x_0,n}^f(x) dx = T_{x_0,n+1}^F(x) + c \forall x \in \mathcal{U}(x_0)$  a vhodně zvolené  $c$ .

*Důkaz.* 1.  $T_{x_0,n+1}^F(x) = \sum_{k=0}^{n+1} F^{(k)}(x_0) \cdot Q_{k,x_0}(x)$  – zderivujeme

$$\sum_{k=1}^{n+1} F^{(k)}(x_0) \cdot Q_{k+1,x_0}(x) = \sum_{l=0}^n F^{(l+1)}(x_0) \cdot Q_{l,x_0}(x) = T_{x_0,n}^f(x)$$

2.  $\int T_{x_0,n}^f(x) dx = \int \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \cdot Q_{k,x_0}(x) dx = \sum_{l=1}^{n+1} F^{(l)}(x_0) \cdot Q_{l+1,x_0}(x) + c = T_{x_0,n+1}^F(x)$   
pro vhodně zvolené  $c = F(x_0) \cdot Q_{NECO}(x) = F(x_0)$

□

**Příklad 9.** 1.  $\cos x = (\sin x)'$  TODO2.  $\ln 1 + x = \int \frac{dx}{1+x}$  TODO**Příklad 10.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} - \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

**Věta 18 (8.3. Početní pravidla pro malé  $o$ ).** Necht'  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Potom

1.  $f(x) = o(x^n), g(x) = o(x^m), x \rightarrow 0$ , kde  $m \geq n; a, b \in \mathbb{R} \implies af(x) + bg(x) = o(x^n), x \rightarrow 0$ ,
2.  $f(x) = o(x^n), x \rightarrow 0, a \in \mathbb{R} \implies ax^m f(x) = o(x^{m+n}), x \rightarrow 0$ ,
3.  $f(x) = o(x^n), g(x) = o(x^m), x \rightarrow 0 \implies f(x)g(x) = o(x^{m+n}), x \rightarrow 0$ ,
4.  $f(x) = o(x^n), g(x) \sim x^m, x \rightarrow 0$ , kde  $m \geq 1 \implies f(g(x)) = o(x^n + m), x \rightarrow 0$ .

*Důkaz.* 1. víme:  $\frac{f(x)}{x^n}, \frac{g(x)}{x^m} \rightarrow 0, x \rightarrow 0 \dots$  cíl  $\frac{af(x)+bg(x)}{x^n} \rightarrow 0, x \rightarrow 0$ 

$$a \frac{f(x)}{x^n} + b \frac{g(x)}{x^m} \cdot x^{m-n} \rightarrow (VoAL) 0, x \rightarrow 0$$

4. víme:  $\frac{f(y)}{y^n} \rightarrow 0, y \rightarrow 0; \frac{g(x)}{x^m} \rightarrow c, x \rightarrow 0$ , kde  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 

$$\text{cíl: } \frac{f(g(x))}{x^{m+n}} \rightarrow 0, x \rightarrow 0$$

$$\text{TRIK } \frac{f(g(x))}{(g(x))^n} \cdot \left(\frac{g(x)}{x^m}\right)^n = P_1 \cdot P_2$$

 $P_1 \rightarrow 0$ , ale VoLSF (b)  $\dots g(x) \rightarrow 0, x \rightarrow 0; g(x) \neq 0$  na  $\mathcal{P}(x_0, \delta), \delta > 0$  malé

$$g(x) = \frac{g(x)}{x^n} x^n \rightarrow c \cdot 0 = 0,$$

$$\frac{g(x)}{x^m} \rightarrow c \neq 0 \implies \frac{g(x)}{x^m} \neq 0 \text{ na } \mathcal{P}(0, \delta) \implies g(x) \neq 0 \text{ na } \mathcal{P}(0, \delta)$$

□

**Poznámka 16 (Doplňek).** 2'  $f(x) = o(x^n), x \rightarrow 0, (m \leq n) \implies \frac{f(x)}{x^m} = o(x^{n-m})$ **Příklad 11.** 1.  $x \rightarrow 0, \frac{x^3}{\sin x \ln(1+x^2)} = \frac{x^3}{(x+o(x))(x^2+o(x^2))} = \frac{x^3}{x^3+x \cdot o(x^2)+x^2 \cdot o(x)+o(x)o(x^2)} = \frac{x^3}{x^3+o(x^3)+o(x^3)+o(x^3)} = \frac{x^3}{x^3+o(x^3)} = 1 + \frac{x^3}{o(x^3)} \rightarrow 1$ 2.  $T_0^{tg}, 5(x) = Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^5); \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ 

$$\operatorname{tg} x \cdot \cos x = \sin x (Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^5)) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\text{a dále M. P. K. } T = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$$

**Poznámka 17.** Čím větší řád taylorova polynomu, tím přesnější odhad = lepší řád aproximace, bude ale chyba v nekonečnu nulová?

**Definice 17.** Zbytek po Taylorově polynomu nazveme  $R^f_{x_0, n+1}(x) = f(x) - T^f_{x_0, n}(x)$ .