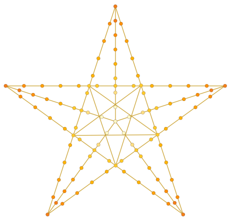

Diskrétní matematika

Vánoční sada příkladů

Vánoční sada je poslední a velmi štědrá: obsahuje velké množství příkladů, ze kterých si můžete svobodně vybrat ty, které vyřešíte a odevzdáte — podle toho, kolik bodů vám ještě chybí do zápočtu. Platí pro ni stejná pravidla jako pro všechny ostatní domácí úkoly: úkoly můžete řešit sami i ve skupině, ale:

- řešení sepisuje **každý samostatně**,
- **rozumím** tomu, co odevzdávám,
- jsem **schopen/schopna argumentovat** ke svému postupu,
- cvičící si vyhrazuje právo **zeptat se na vaše řešení**.

Změna oproti standardním domácím úkolům je, že:

- **není stanovené pevné datum odevzdání**
- příklady **nemusíte odevzdat najednou** — klidně je posílejte **po etapách**

Počítejte s tím, že nemusíte **nemusíte získat plný počet bodů** za každý příklad, a taky s tím, že mi bude nějaký čas trvat vaše řešení opravit. Proto:

- odevzdejte příklady alespoň **3 dny** před pránovaným termínem zkoušky,
- chcete-li mít jistotu, **odevzdejte raději více úloh**, než kolik bodů vám k zápočtu chybí,
- odevzdávat můžete **přes Moodle** nebo **emailem**
- pokud se blíží termín zkoušky na který chcete jít, pro jistotu mi dejte vědět, že jste příklady odevzdali i mail-em,
- pokud budete mít otázky ohledně zadání, ozvěte se.

AŤ SE VÁM DAŘÍ A POD STROMEČKEM PŘÍJEMNĚ POČÍTÁ :)

PŘÍKLADY

Příklad 1. Není rovinný.
Bez použití Kuratowského věty dokažte, že graf $K_{3,3}$ není rovinný.

Příklad 2. Přímky.
Nakresleme n přímek v rovině tak, že žádné 2 nejsou rovnoběžné a žádné 3 se neprotínají v jednom bodě. Dokažte, že rovina je tím rozdělena na přesně $n(n+1)/2+1$ částí.

Příklad 3. ČUM.
Nalezněte ČUM, ve kterém existuje dvouprvková množina která nemá supremum.

Příklad 4. Přesně n koster.
Pro která n existuje graf s právě n různými kostrami?

Příklad 5. Max počet stěn rovinného grafu.

- Určete nejvyšší počet vnitřních stěn v rovinném grafu na n vrcholech.
- Stejná úloha s dodatečnou podmínkou, že vnější stěna grafu je ohraničena cyklem délky k. (+2 body)

Příklad 6. Vnitřní vrcholy a listy.
Mějme strom, který má $l > 0$ listů a v vnitřních vrcholů, přičemž každý vnitřní vrchol má stupeň 3. Dokažte, že vždy platí $l = v + 2$.

Příklad 7. Sousedi ve stromu.
Ukažte, že pro každý strom s n vrcholy existuje pořadí vrcholů $\{v_1, \ldots, v_n\}$ takové, že pro každé $i > 1$ platí, že v_i má právě jednoho souseda v množině $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$.

Příklad 8. Sudý počet hran.
Ukažte, že pokud má $2k$-regulární graf sudý počet hran, tak buď k nebo $|V_G|$ je sudé.

Příklad 9. Sečtěte:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \frac{1}{k}$$

Příklad 10. Dokažte:

$$1n + 2(n-1) + 3(n-2) + \ldots + (n-1)2 + n1 = \binom{n+2}{3}$$

Příklad 11. Různé důkazy identity:
Dokažte (můžete zkusit vícero způsoby +2 body) následující vztah:

$$\binom{2}{2}\binom{n}{2} + \binom{3}{2}\binom{n-1}{2} + \binom{4}{2}\binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{n}{2}\binom{2}{2} = \binom{n+3}{5}$$

Příklad 12. # monotonních funkcí.
Kolik existuje funkcí $f : \{1, 2, \ldots n\} \to \{1, 2, \ldots n\}$, které jsou monotnní, t.j. pro $i < j$ platí $f(i) < f(j)$?

Příklad 13. 0 nebo 5
Nechť G je souvislý graf, v němž každé dva různé vrcholy u, v mají buď 0 nebo 5 společných vrcholů. Dokažte, že pak je G nutně k-regulární (pro nějaké k).
(Hint: podívejte se na u, v spojené hranou, nazvěme U množinu sousedů vrcholu u a V množinu sousedů v. Zkuste dokázat, že $|U| = |V|$.)

Příklad 14. I bez nich to půjde.
Dokažte, že každý souvislý graf G na alespoň třech vrcholech obsahuje dva vrcholy u a v takové, že všechny tři grafy $G \setminus \{u\}$, $G \setminus \{v\}$ a $G \setminus \{u, v\}$ jsou souvislé.

Příklad 15. Neexistence grafu.
Ukažte, že neexistuje eulerovský rovinný graf jehož stěny by tvořil jeden pěticyklus a samé trojúhelníky.

Příklad 16. Nash-Wiliamsova věta.
Ukažte, že hrany každého rovinného grafu lze zorientovat tak, že každý vrchol má výstupní stupeň nejvýše 3.

Příklad 17. Prázdné a neprázdné mocniny. [4+1 bod]
Dokažte, že když vezmu relaci $<$ (tranzitivní, silně antisymetrická relace) pro nosnou množinu $\{1, 2, 3, \ldots k\}$, pak existuje konečné n, že R^n už bude prázdná relace.
Najděte relaci (libovolnou), pro kterou jsou R^n pro všechna n neprázdné.

Příklad 18. Věta o čtyřech barvách.
Dokažte větu o čtyřech barvách pro rovinné grafy bez trojúhelníků.

Příklad 19. Barevnost grafu.
Dokažte užitečné tvrzení, kde $\chi(G)$ je barevnost grafu G, $\alpha(G)$ velikost největší nezávislé množiny v G.

$$\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$$

Příklad 20. $\chi(G)$.
Dokažte: $\chi(G) \leq 1 + \max\{\deg_G(x) \mid x \in V(G)\}$.

Příklad 21. Obarvení skoro K_n.

(1) Určete chromatické číslo úplného grafu bez jedné hrany.
(2) Skuste z grafu K_n odebrat 2 hrany tak, aby jeho barevnost klesla co nejvíc.

Příklad 22. Chromatické číslo W_n.
Určete chromatické číslo grafu W_n (kolesa), což je graf, který vznikne z cyklu C_{n-1} přidáním jednoho vrcholu, který spojíme s každým vrcholem cyklu. Několik příkladů je na obrázku.

Příklad 23. Duál duálu.
Pokud G je souvislý rovinný graf, pak $G = G^{**}$.
Dokažte i opačnou implikaci.