Cvičení k přednášce NMAG111+NMAG113 Lineární algebra 1

Zadání

Verze ze dne 1. listopadu 2025

6 Regulární matice

Cíle cvičení:

- naučit se pro regulární matice hledat (jednostranně) inverzní matice,
- procvičit rozklad na součin elementárních matic.

Řešené příklady:

Úloha 6.1. Existuje-li, najděte nad tělesy $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{R}$ nějakou zprava inverzní matici k matici

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 6.2. Rozhodněte, které z následujících matic jsou regulární, a k regulárním maticím najděte jejich inverzní matice.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{R}, \mathbb{Z}_5, \text{ (b)} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 2 & -i \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{C}, \text{ (c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7, \text{ (d)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}^T \text{ nad } \mathbb{Z}_7.$$

Úloha 6.3. Napište všechny regulární matice z předchozí úlohy jako součin elementárních matic.

Úloha 6.4. Spočítejte součiny reálných matic

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Cílem úlohy je skrze úvahy o maticích elementárních úprav najít jiný (rychlejší) způsob, než spočtení inverze a vynásobení této inverze druhou maticí. (Tento typ úlohy se bude přirozeně objevovat později při práci se zobrazeními a bázemi.)

Úloha 6.5. Existuje-li, najděte LU rozklad reálných matic:

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(d)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Úloha 6.6. Pomocí LU rozkladu reálné matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ (z úlohy 6.5 (c)) spočítejte všechna řešení soustavy rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ pro vektor pravých stran $\mathbf{y} = (-3, 2, -1)^T$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 6.7. Pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ určete A^{-1}, $(A^T)^{-1}$ a $(A^2)^{-1}$ nad tělesy $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{Q}$.

Úloha 6.8. Spočítejte nad tělesy $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}_7$ součin $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Úloha 6.9. Rozhodněte, pro která a z tělesa je matice A_a regulární, a pro tato a spočítejte A_a^{-1}.

$$\text{(a)} \quad A_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2a-1 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7, \qquad \text{(b)} \quad A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_5.$$

Rozšiřující příklady:

Úloha 6.10. Pro reálnou matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ověřte, že nemá LU rozklad, najděte permutační matici P tak, aby matice PA měla LU rozklad, a ten spočítejte.

Úloha 6.11. Uvažujme blokovou matici $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, kde A je regulární a $Z := D - CA^{-1}B$ také. Ukažte, že pak je X také regulární a $X^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}(I + BZ^{-1}CA^{-1}) & -A^{-1}BZ^{-1} \\ -Z^{-1}CA^{-1} & Z^{-1} \end{pmatrix}$.

Úloha 6.12. Tvoří množina $\left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$ s operacemi součtu a součinu matic těleso? Pokud ne, který axiom nebo jeho důsledek není splněn? Pokud ano, co je v něm nulovým prvkem a co jednotkovým prvkem? Změnilo by se něco, kdyby x náleželo jinému tělesu než $\mathbb{R}$?

Úloha 6.13. Nechť T je těleso a $\mathbf{a} \in T^n$. Za jakých podmínek je matice $I_n + \mathbf{a}\mathbf{a}^T$ regulární a jak vypadá její inverzní matice?

Úloha 6.14. Nechť B je regulární matice a A je matice splňující $A^5 = B^3$. Musí být A nutně regulární matice?

Úloha 6.15. Jak se změní inverzní matice k regulární matici A, pokud v A vyměníme i-tý a j-tý řádek? A jak, pokud v ní vynásobíme i-tý sloupec nenulovým prvkem tělesa?

Výsledky:

6.1. $\boxed{\mathbb{R}}$: ***(a)*** např. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ***(b)*** např. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ***(c)*** $\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\mathbb{Z}_5}$: ***(a)*** např. $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ***(b)*** např. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ***(c)*** neexistuje

6.2. ***(a)*** $\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$, nad $\mathbb{Z}_5$ neexistuje ***(b)*** $\begin{pmatrix} (1-i)/2 & 0 \\ -1-i & i \end{pmatrix}$ ***(c)*** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ ***(d)*** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

6.3. (všechny výsledky jsou např.) ***(a)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ***(b)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
(c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6.4. ***(a)*** $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 & 7 \\ -3 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ ***(b)*** $\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -9 & 13 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

6.5. ***(a)*** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ***(b)*** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ***(d)*** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

6.7. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Q}$. Pro $\mathbb{Z}_5$, resp. $\mathbb{Z}_7$ stačí matice upravit modulo 5, resp. 7.

6.8. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -10 & 2 \\ -4 & 15 & -2 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$ a $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_7$.

6.9. ***(a)*** $A_a^{-1} = \frac{1}{(a-1)^2}\begin{pmatrix} 1-2a & a \\ a & -1 \end{pmatrix}$ pro $a \in \mathbb{Z}_7 \setminus \{1\}$ ***(b)*** $A_a^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 3a^{-1} & 2a^{-1} \\ 0 & 2 & 3 \\ \frac{4}{a^2} & \frac{a+2}{a^2} & \frac{3}{a^2} \end{pmatrix}$ pro $a \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$

6.10. např. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.