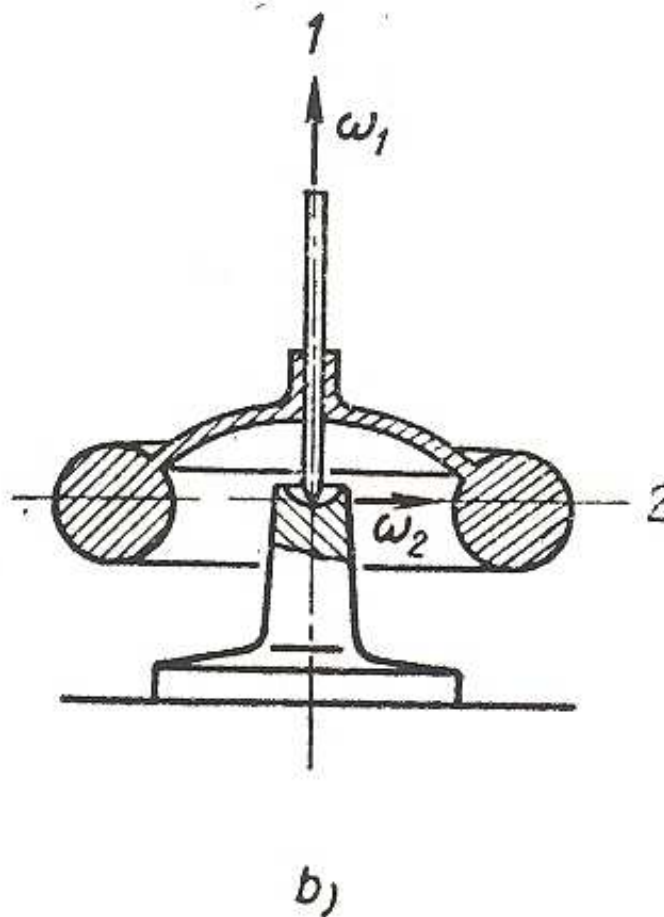
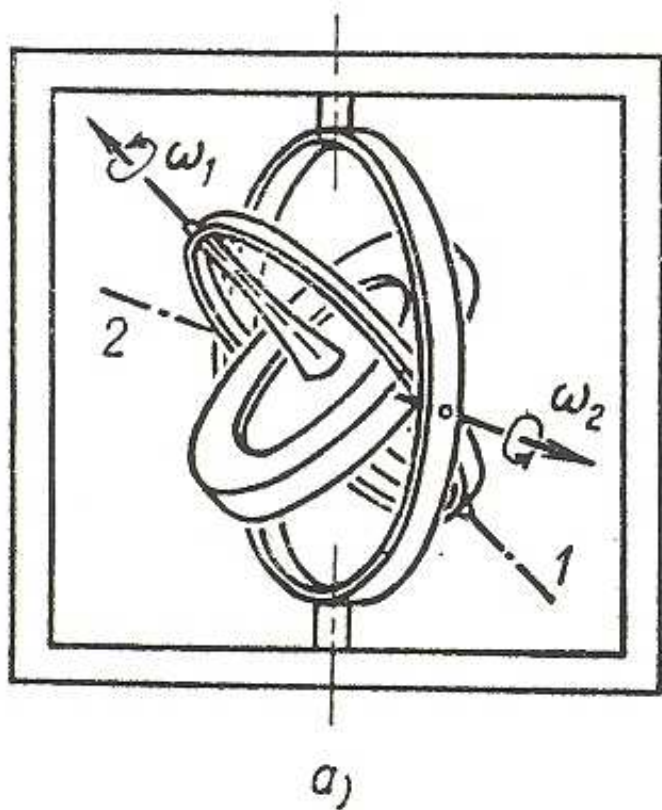


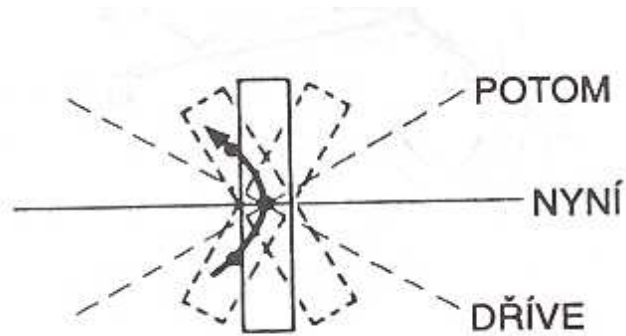
# Rotace tuhého tělesa



Volný setrvačník – a) v Cardanově závěsu, b) Maxwellův (těžký) setrvačník

# Rotace tuhého tělesa

## Zákon zachování momentu hybnosti



Předtím

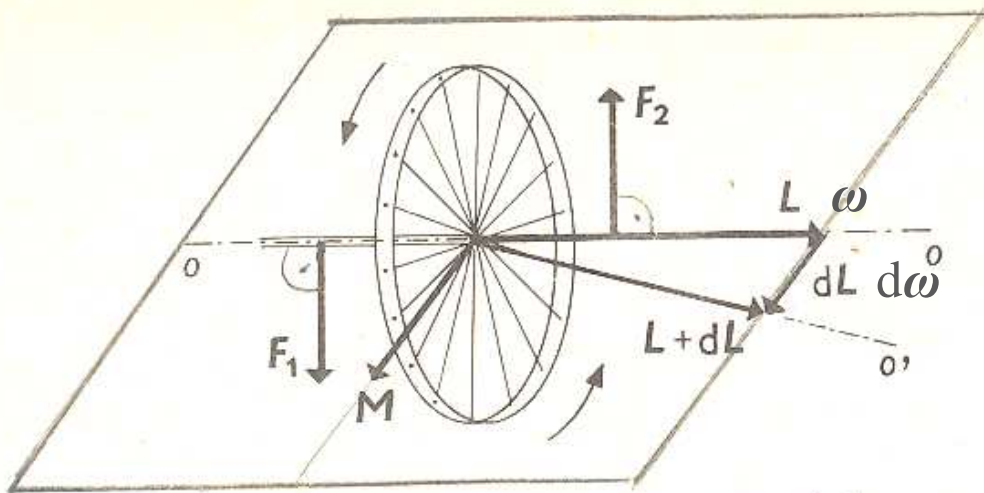


Potom

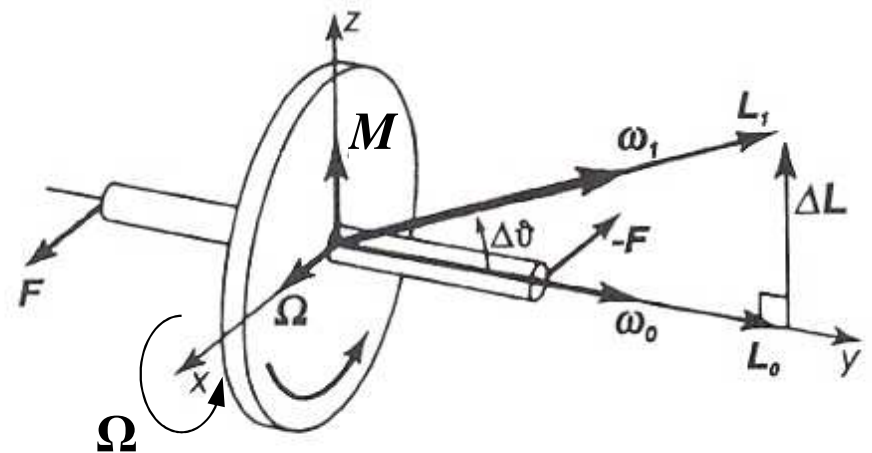
**Předtím:** osa má horizontální směr; moment hybnosti vzhledem k vertikální ose = 0.  
**Potom:** osa má vertikální směr; moment hybnosti vzhledem k vertikální ose je stále roven nule;  
člověk a židle se otáčejí v opačném směru než kolo.

# Rotace tuhého tělesa

## Kinetická reakce setrvačníku



Obr. 4-17 Kinetická reakce setrvačníku



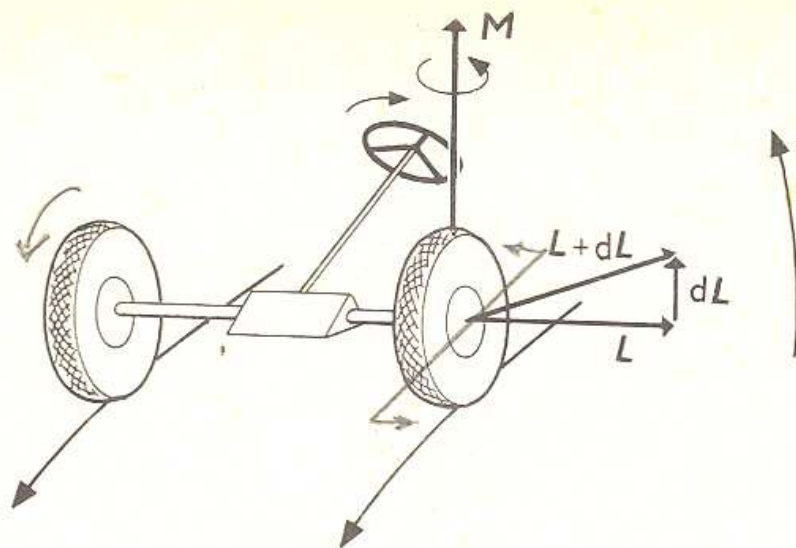
Pootočení kol osy  $x$  úhl. rychlostí  $\Omega$ :

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = L_0 \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} = \Omega L_0 \rightarrow$$

$$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \vec{\Omega} \times \vec{L}_0$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{\Omega} \times \vec{L}_0$$

$$\Omega = \frac{rF}{L_0} = \frac{rF}{J\omega} \xrightarrow{\text{těžký setrvačnick}} \frac{rmg}{J\omega} \quad (\text{precese})$$

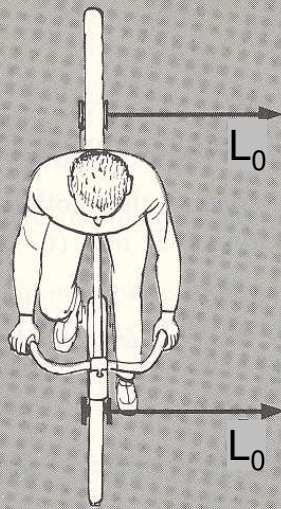


Obr. 4-18 Kinetická reakce kol automobilu při zatáčení

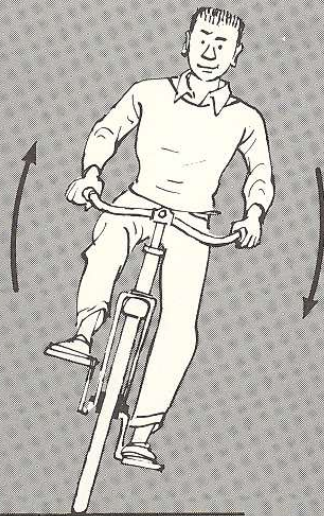




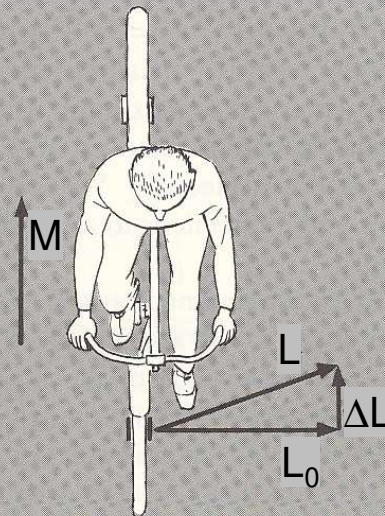
There are many examples of gyroscopic motion in daily life. Here is a student riding his bicycle, straight ahead.



A top view shows the direction of the angular momenta associated with the wheels.



To make a left turn the rider applies a torque as shown (tipping over toward *his* left.) The direction of the torque is to the rear of the bicycle . . .



and so must be the direction of  $\Delta \mathbf{J}$ . The new  $\mathbf{J}$  is as shown, and the bike moves off to the rider's left.

Gyroskopický efekt udržuje stabilitu při naklonění v zatáčce,

vozidla, která se nenaklánějí, jsou naopak vyklápěna ven ze zatáčky

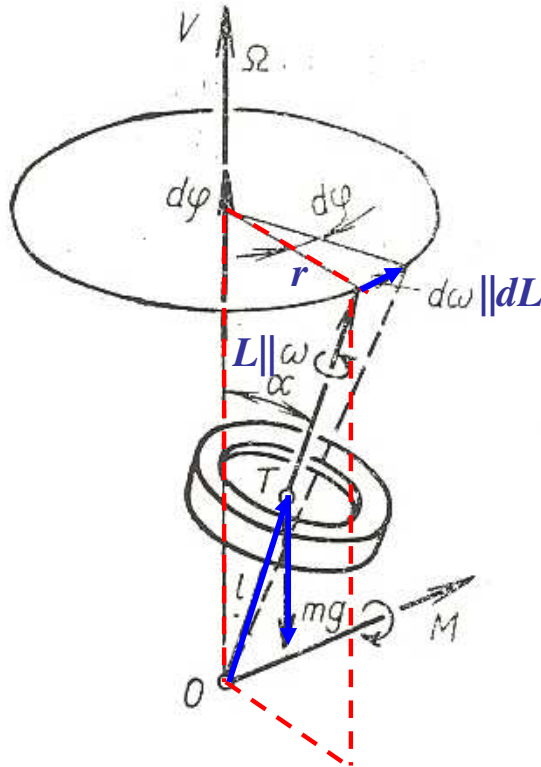
[https://tv.idnes.cz/krimi/motorkar-stihl-seskocit-jinak-by-ho-dodavka-zabila.V211108\\_143023\\_idnestv\\_jda](https://tv.idnes.cz/krimi/motorkar-stihl-seskocit-jinak-by-ho-dodavka-zabila.V211108_143023_idnestv_jda)

[Řidič na dálnici natočil "nejšílenější nehodu". Auto vylétlo několik metrů do vzduchu - Aktuálně.cz \(aktualne.cz\)](#)



# Rotace tuhého tělesa

## Těžký setrvačnick

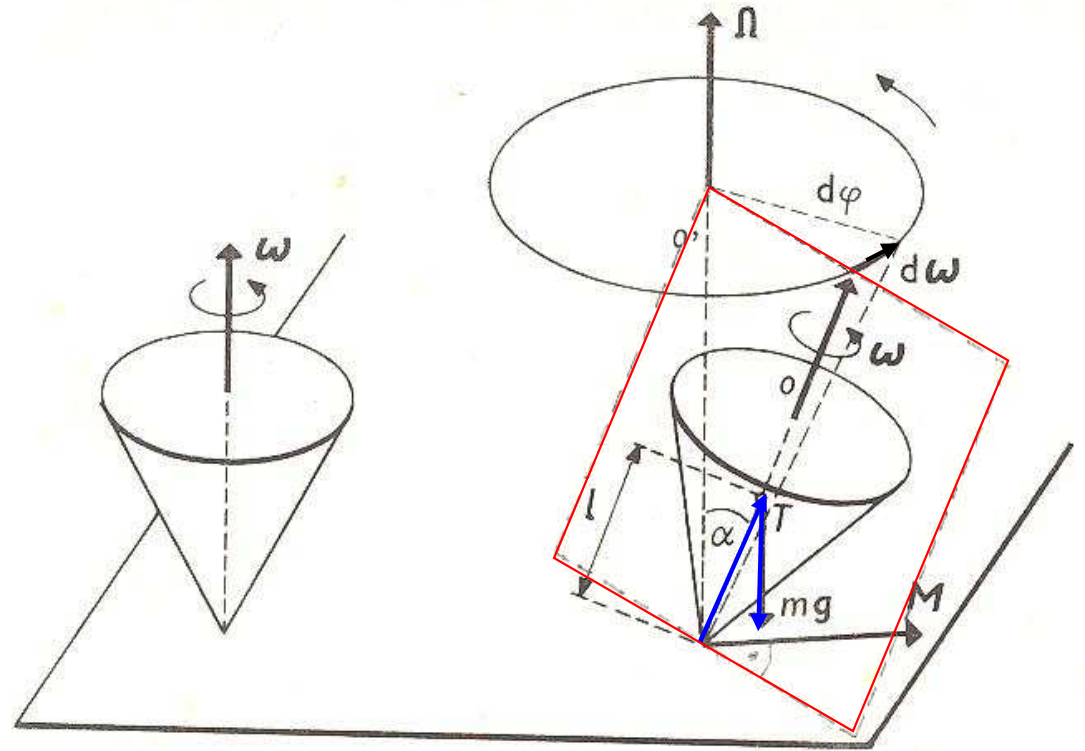


Obr. (2.5) 23. Precesní pohyb setrvačnicku vlivem

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \approx J \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad \text{platí: } d\omega = r d\varphi = \omega \sin \alpha \cdot d\varphi \rightarrow d\vec{\omega} = d\vec{\varphi} \times \vec{\omega}$$

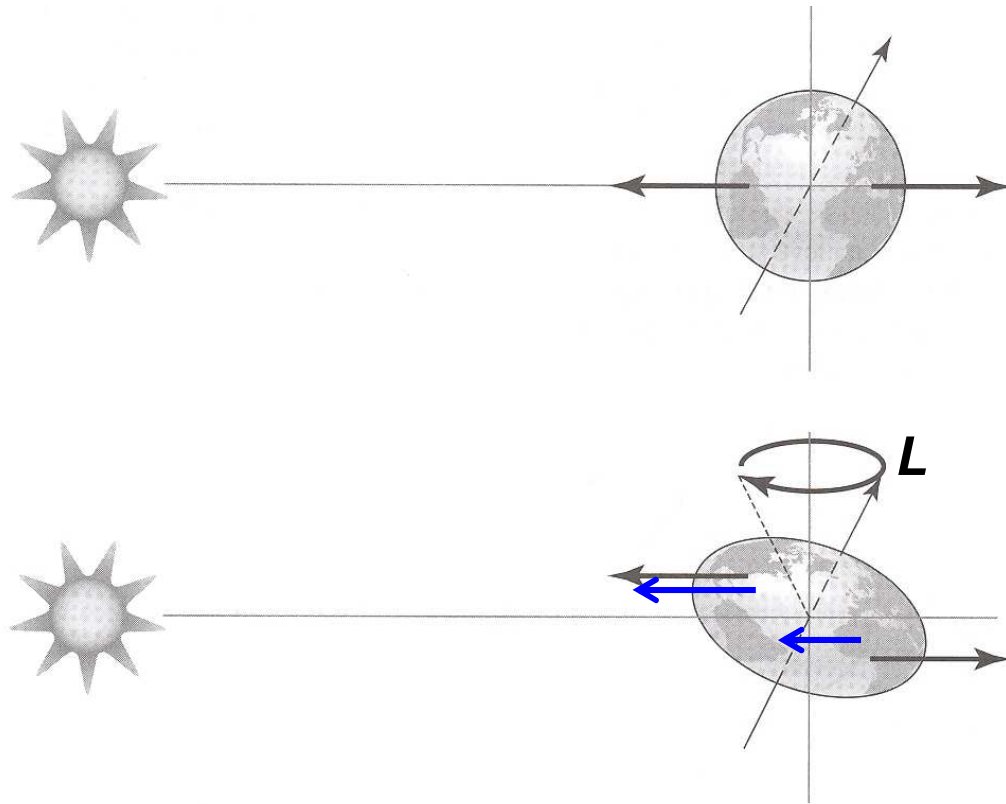
$$\vec{M} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times J\vec{\omega} \equiv \vec{\Omega} \times J\vec{\omega}$$

$$\text{pro } M = mgl \sin \alpha \Rightarrow \Omega = \frac{mgl}{J\omega} \quad (\text{precese})$$



Obr. 4-20 Rotace vlčku na vodorovné podložce

# Rotace tuhého tělesa



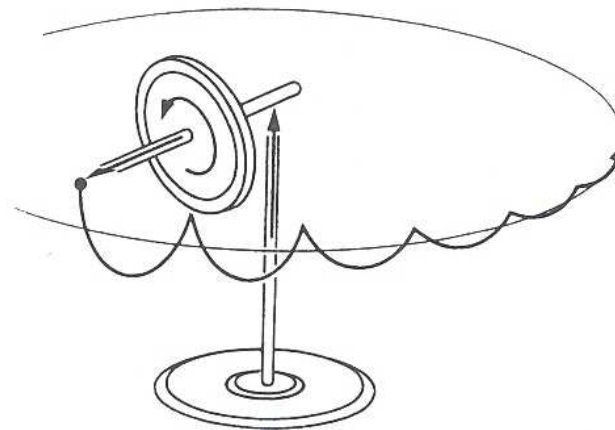
OBR. 4.25 Zploštělá Země koná precesi způsobenou momenty gravitačních sil.

Precese a nutace Země:

Z - volný setrvačnick, na který však působí moment sil od S a M (tedy nerotuje bezsilově),

Moment sil (je kolmo k nákresně) způsobuje **precesi** osy, ~26000 let

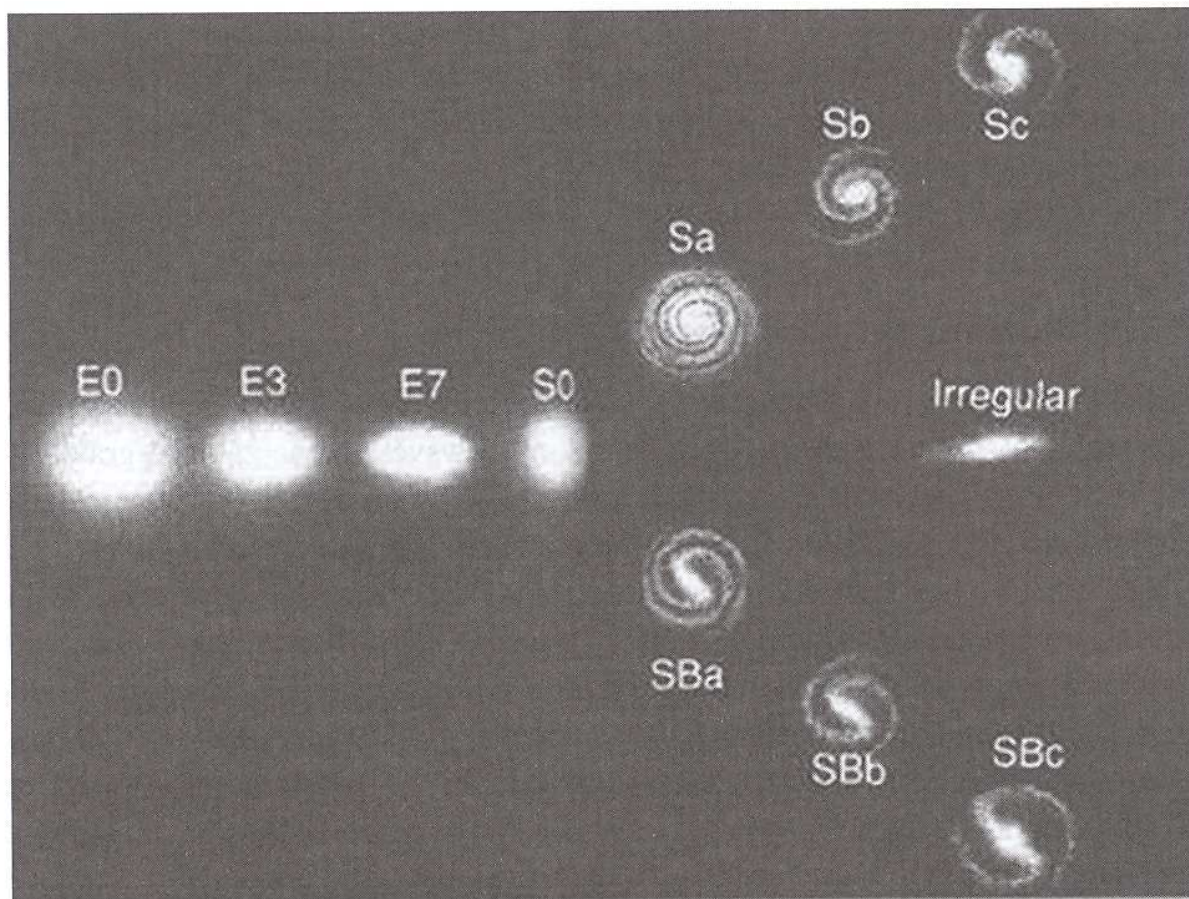
Nutace – výchylky osy (pólu), perioda ~433 dní



5 Skutečný pohyb konce osy setrvačnicku pod vlivem tíhy ihned po uvolnění předtím uchycené osy

# Rotace tuhého tělesa

## Zákon zachování momentu hybnosti



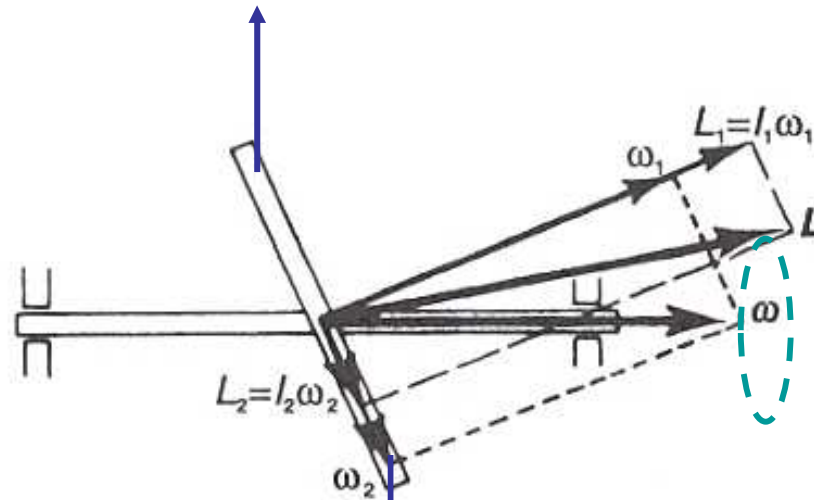
**OBR. 4.31** Různé typy mlhovin – spirální, spirální s příčkou a eliptické.

# Rotace tuhého tělesa

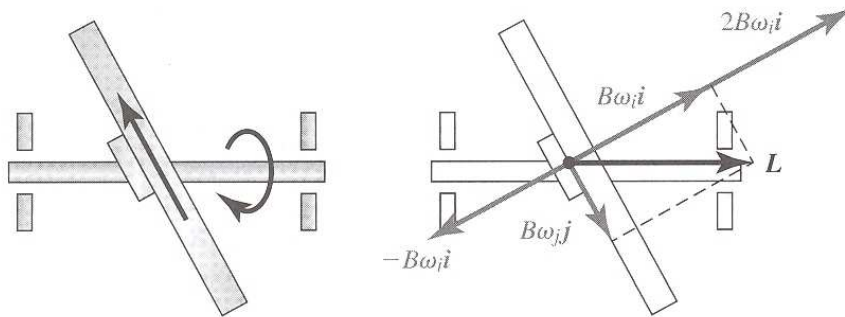
$$J_1 \neq J_2, \quad L_1 = J_1 \omega_1, \quad L_2 = J_2 \omega_2$$

$$L_1 \neq L_2$$

$L$  není  $\parallel \omega$



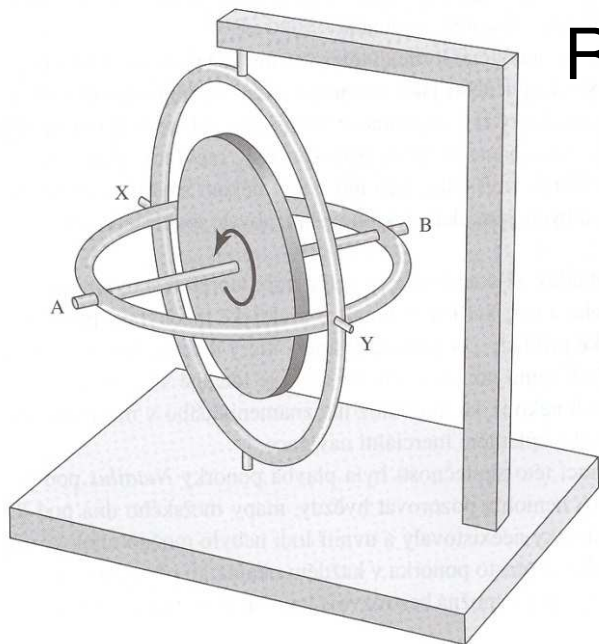
**6 Moment hybnosti rotujícího tělesa není nutně rovnoběžný s úhlovou rychlostí**



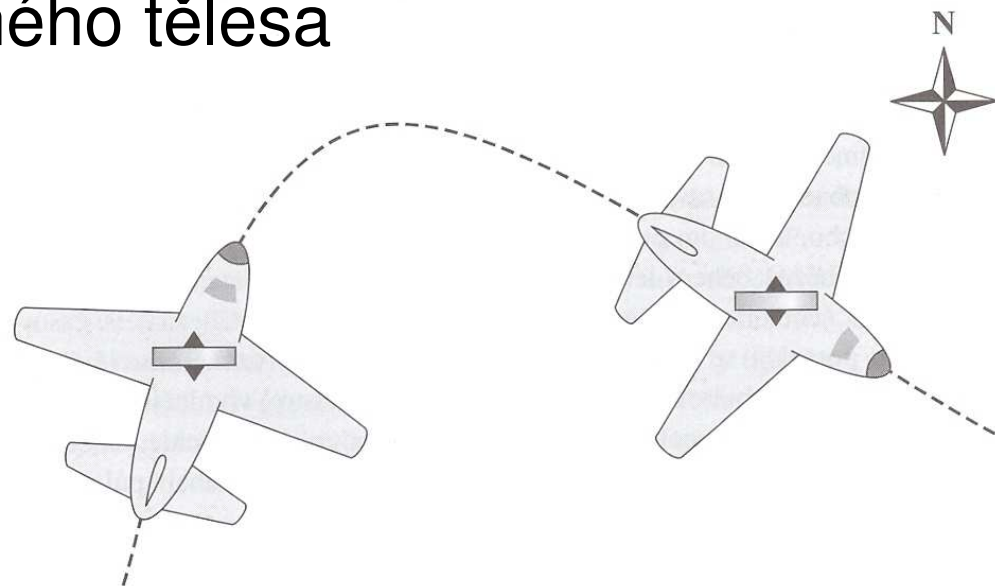
**OBR. 4.30** Otáčení hřídele a současné otáčení kotouče kolem jeho hlavní osy v opačném směru tak, že celkový moment hybnosti je rovnoběžný s hřídelí.



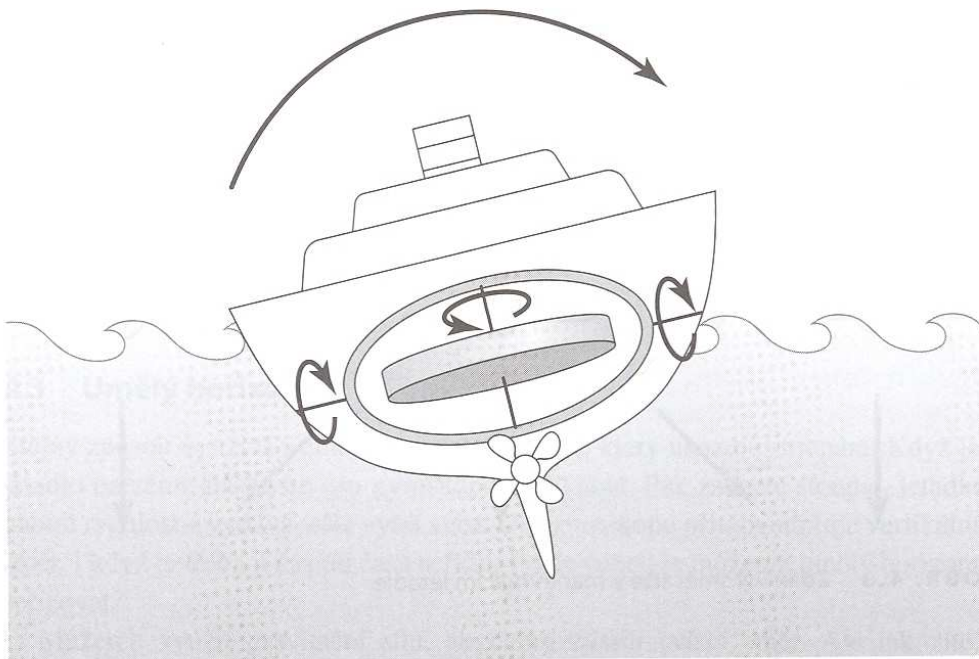
# Rotace tuhého tělesa



**OBR. 4.1** Demonstrační gyroskop.



**OBR. 4.2** Směrový gyroskop zachovává svou orientaci v zatáčejícím letadle.

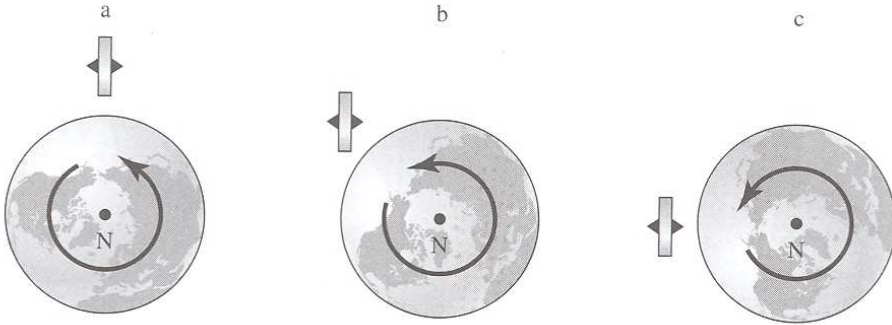


**OBR. 4.4** Gyroskop ke stabilizaci lodí: zvedání gyroskopu dopředu vytváří silový moment, který nakloní loď do strany.

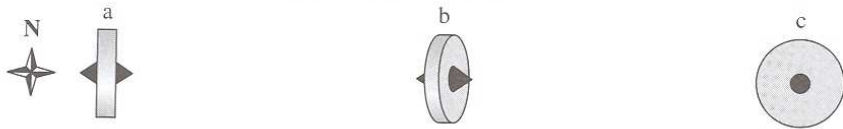
směrový gyroskop  
umělý horizont

# Rotace tuhého tělesa

Pohled ze stanoviště nad severním pólem:

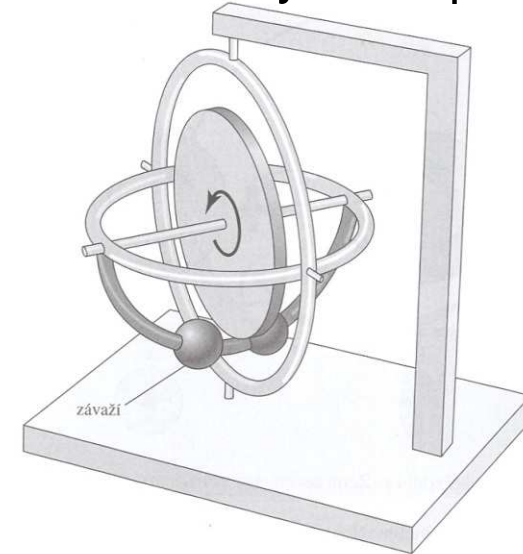


Pohled ze stanoviště přímo nad gyroskopem na rovníku:



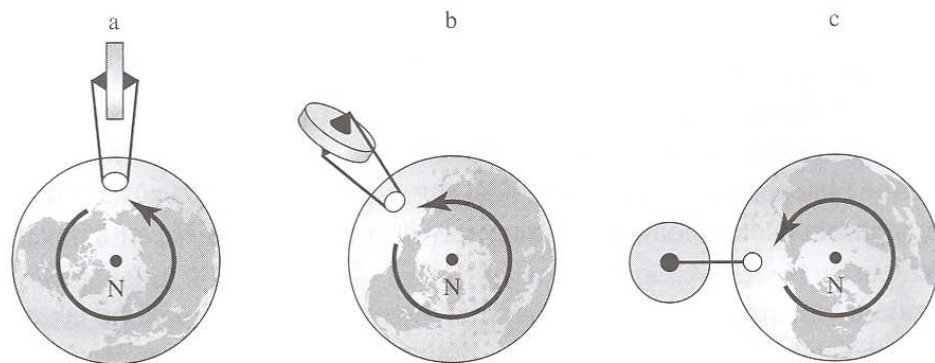
**OBR. 4.5** Volný gyroskop rotující spolu se Zemí zachovává svou orientaci v prostoru.

## Gyrokompas

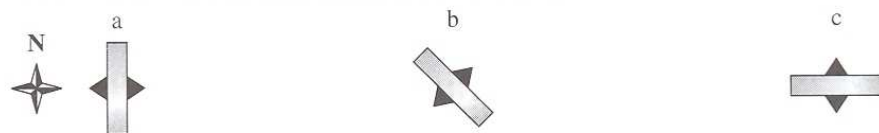


**OBR. 4.6** Ukázka zatíženého gyroskopu, který má snahu udržovat rotační osu kolmo ke směru tíže.

Pohled ze stanoviště nad severním pólem:

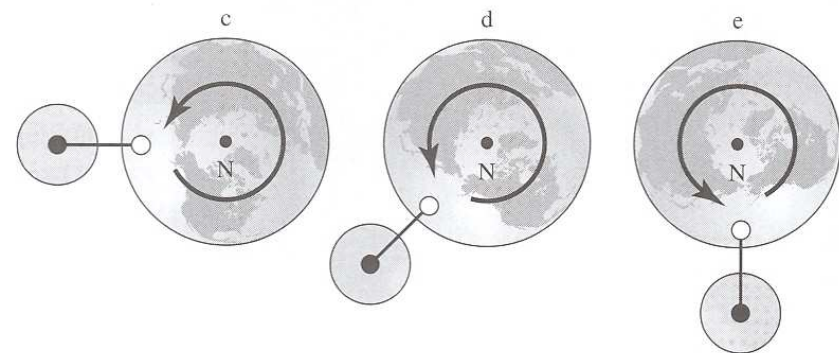


Pohled ze stanoviště přímo nad gyroskopem na rovníku:



**OBR. 4.7** Zatížený gyrokompas se snaží orientovat svou osu rotace rovnoběžně s rotační osou Země.

Pohled ze stanoviště nad severním pólem:

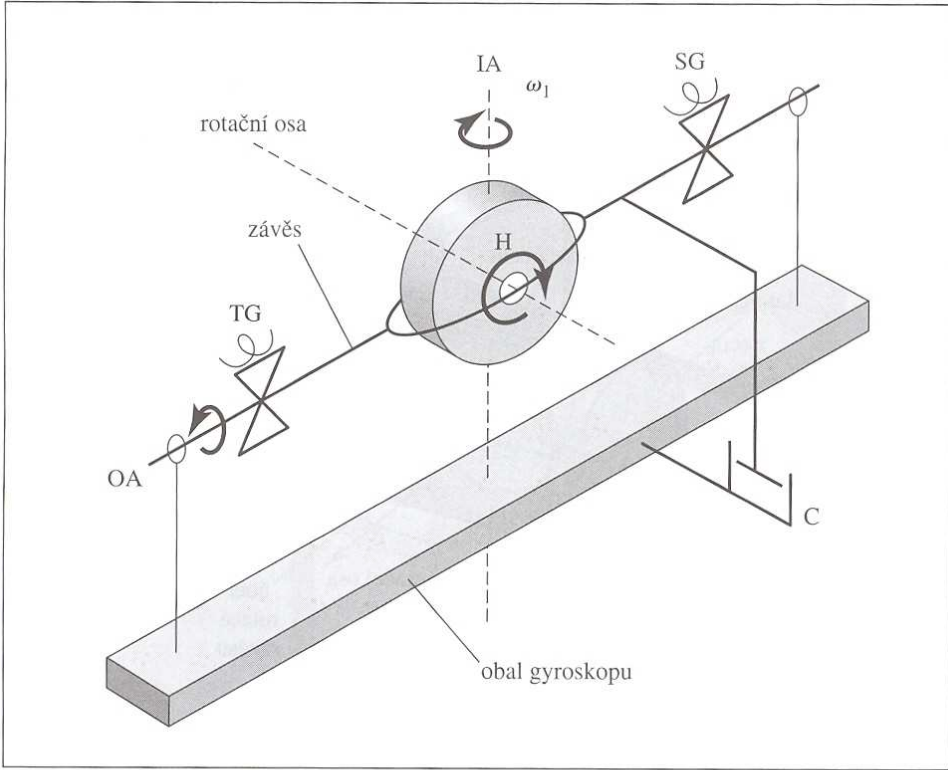


Pohled ze stanoviště přímo nad gyroskopem na rovníku:

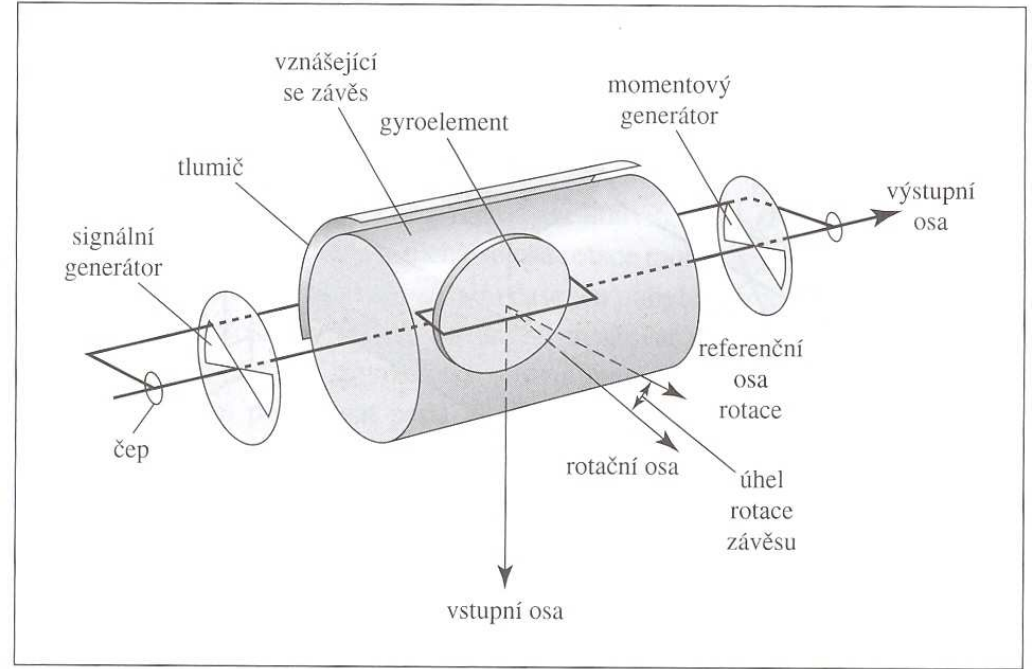


**OBR. 4.8** Gyrokompas s osou rotace rovnoběžnou s rotační osou Země má snahu uchovat tento směr.

# Rotace tuhého tělesa

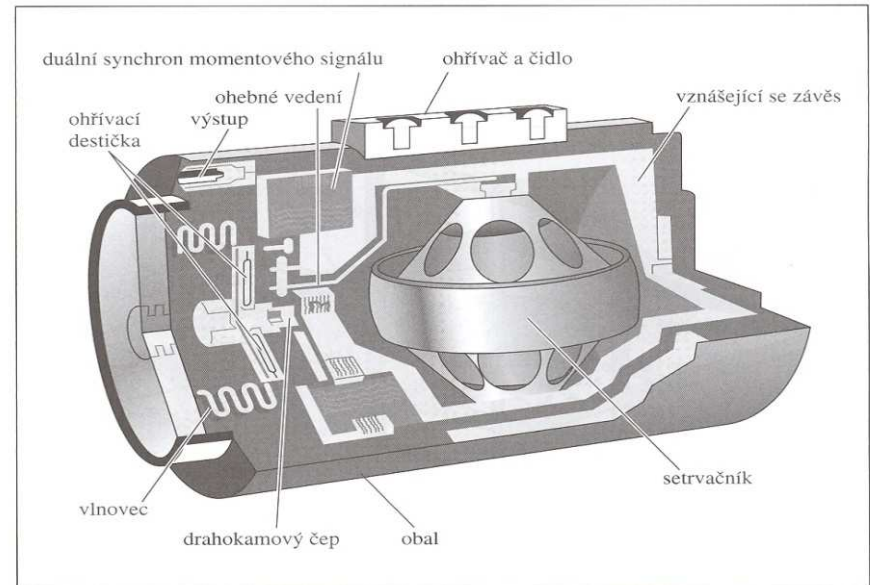


**OBR. 4.10** Zjednodušené schéma gyroskopu s jedním stupňem volnosti. Použit originální přednáškový diapositiv. (SG – signální generátor, TG – momentový generátor)



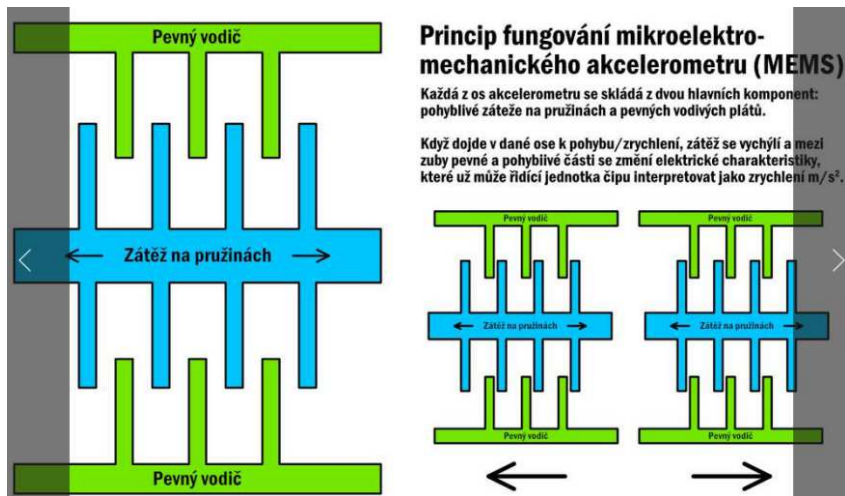
**OBR. 4.11** Podrobné schéma integrujícího gyroskopu s jedním stupněm volnosti. Použit originální přednáškový diapositiv.

# Inerciální navigace

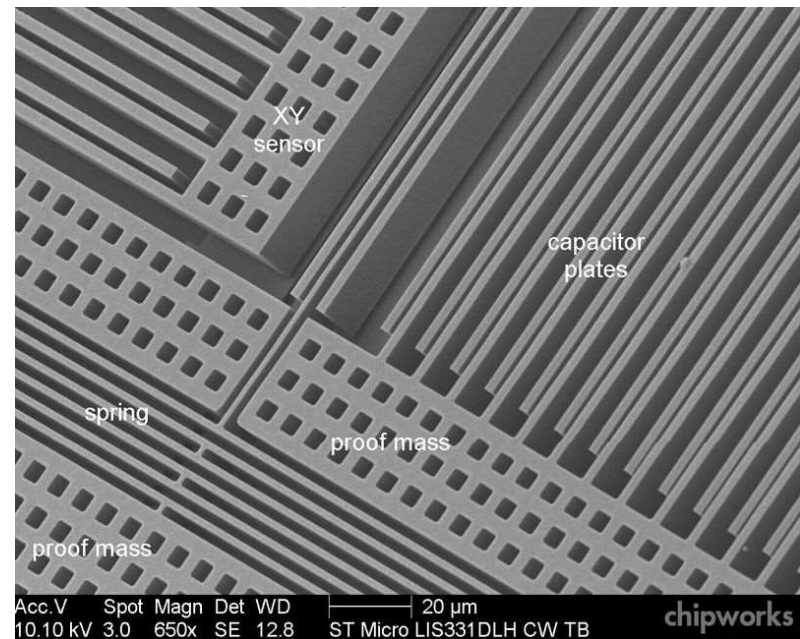


**OBR. 4.13** Řez skutečným integrujícím gyroskopem s jedním stupněm volnosti. Použit originální přednáškový diapozitiv.

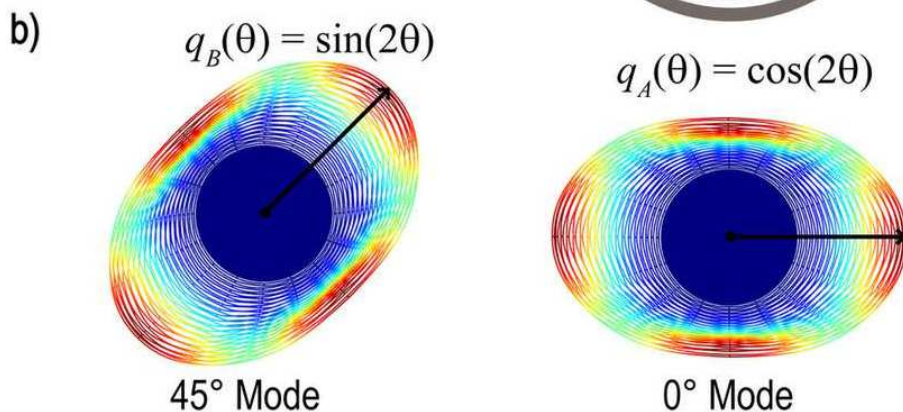
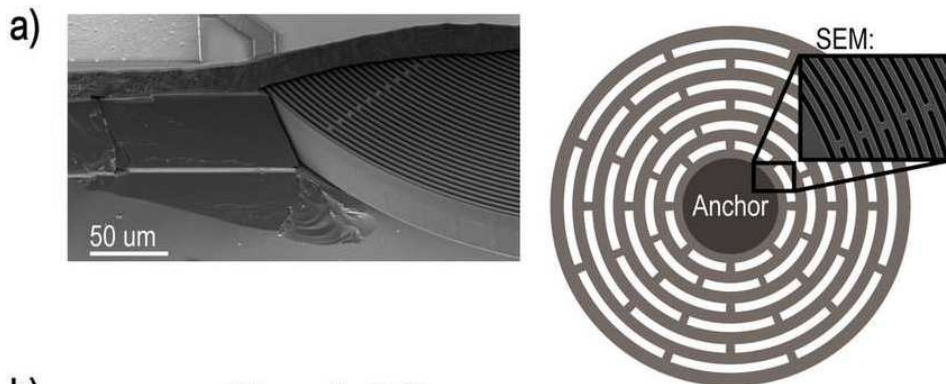




Trojosý akcelometr měří zrychlení pohybu v osách X, Y a Z. Ve formě čipu se jedná o miniaturní polovodičové zařízení, tzv. MEMS



MEMS akcelometr pod elektronovým mikroskopem. Některé pláty jsou pevné a jiné na pružinách, když se tedy akcelometr pohne v jejich ose, pláty se vzájemně lehce posunou a čip díky změně elektrických charakteristik tuto změnu vyjádří jako zrychlení



Konstrukce MEMS gyroskopu využívá Coriolisova efektu. Když se těleso otáčí okolo své osy, na rezonující (pohybující se) soustředné pláty disku působí ona síla, vychylují se a mění se elektrická charakteristika obvodu, kterou gyroskop vyjádří úhlovou rychlostí otáčení v dané ose. Z něj už lze spočítat úhel otočení v dané ose.

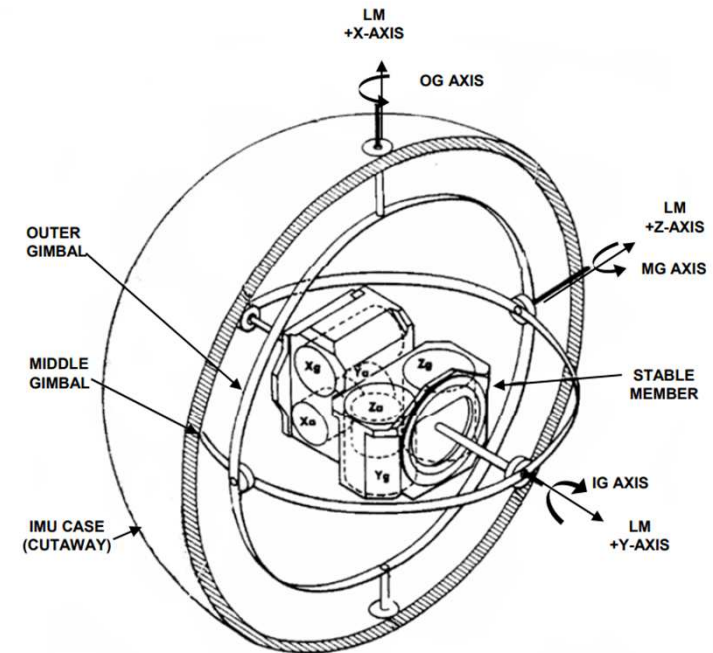
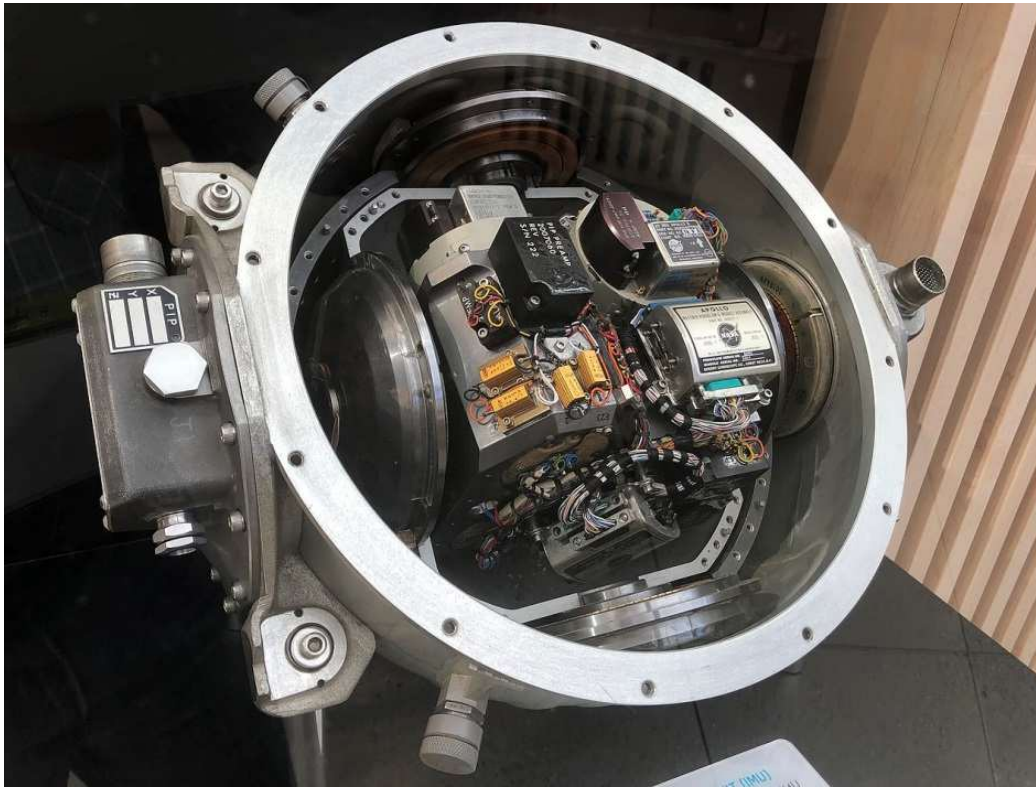
Samotný kompas se přitom pro zjištění tohoto úhlu zase tak často nepoužívá, snadno jej totiž vyruší jakákoliv železná masa, větší spotřebič apod. Zároveň často vyžaduje kalibraci. Že ji v telefonu neděláte? Jistě, takto výkonný stroj s hromadou dalších senzorů včetně GPS má hromadu času provádět automatickou kalibraci průběžně – třeba v klidu uprostřed noci, kdy vám leží na stole, a neustále tedy seřizovat měření, aby bylo co nejpřesnější.

Další součástí je **matematický koprocessor**, který se postará o automatickou kalibraci všech členů, anebo změří, že je potřeba ruční a vyzve nás, abychom s tělesem provedli třeba klasickou osmičku, která se používá pro kalibraci kompasu.

V předchozích kapitolách jsme si ukázali funkci jednoduchého akcelerometru a gyroskopu, přičemž čip MPU-6050 v tom druhém případě obsahoval obě pohybová čidla. Právě čipům, které podobné senzory propojují do sebe, aby podávaly co nejlepší výsledek, říkáme **IMU** – Inertial Measurement Unit.

Pořádná IMU vedle akcelerometru a gyroskopu zpravidla obsahuje ještě **magnetometr** – kompas, který poslouží především ke **kalibraci měření úhlu okolo osy Z**, tedy otáčení doleva a doprava v základní rovině. Díky kompasu totiž víme, odkud tento úhel vlastně pokaždé počítat (třeba od severu).

Gyroskop funguje v klidu, gyroskop funguje na oběžné dráze, gyroskop funguje dokonce i při jízdě po české D1. Je srdcem umělých horizontů v letadlech, stará se o orientaci v kosmických lodích atp. Akcelerometr by naopak tyto úhly (a to spolehlivě jen dva z nich) dokázal spočítat jen v klidu, protože jakýkoliv pohyb tělesa toto měření silně ovlivní a výsledkem bude jen těžko interpretovatelný šum.



## Apollo Inertial Measurement Unit

Apollo IMU, where Inertial Reference Integrating Gyros (IRIGs,  $X_g, Y_g, Z_g$ ) sense attitude changes, and Pulse Integrating Pendulous Accelerometers (PIPAs,  $X_a, Y_a, Z_a$ ) sense velocity changes

An **inertial measurement unit (IMU)** is an electronic device that measures and reports a body's [specific force](#), angular rate, and sometimes the [orientation](#) of the body, using a combination of [accelerometers](#), [gyroscopes](#), and sometimes [magnetometers](#). IMUs are typically used to maneuver [aircraft](#) (an [attitude and heading reference system](#)), including [unmanned aerial vehicles](#) (UAVs), among many others, and [spacecraft](#), including [satellites](#) and [landers](#). Recent developments allow for the production of IMU-enabled [GPS](#) devices. An IMU allows a GPS receiver to work when GPS-signals are unavailable, such as in tunnels, inside buildings, or when electronic interference is present.



# Navigace

Korean Airlines Flight 007, 1 September 1983

