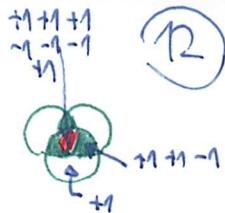


$$\bullet \text{To je vlastně: } |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



↓ záležíme pro n množin

Veta (Princip inkluze a exkluze) Pro konečné množiny $A_1 - A_n$ platí:

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{j}} |\bigcap_{i \in I} A_i|.$$

[dokážeme za chvíli ... tedy zpět k řešení]

Alternativně:

$$|\bigcup_i A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

$$\bullet A_1 - A_n: A_i := \{ \pi \in S_n \mid \pi(i) = i \} \leftarrow i \text{ je pevný bod}$$

$$\bullet A := \bigcup_i A_i \leftarrow \text{mají aspoň 1 pevný bod} \dots \text{zajímá nás tedy } |A| \text{ (přesuji řešení } n! - |A|)$$

$$\bullet \text{pro PIE potřebujeme: } |A_{i_1}| = (n-1)!$$

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$$

$$\vdots$$

$$\text{průnik k množin: } (n-k)!$$

$$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n-k)!$$

$$\text{(k) stejných členů} \\ \rightarrow \sum = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot (n-k)!$$

$$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} = n! \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} \right) = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

$$P(\pi \text{ má pevný bod}) = P(A)$$

$$\bullet \text{Máš zajímá jev opačný: } P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \dots - \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Pro $n \rightarrow \infty$ konverguje $P(\bar{A}) \leftarrow \frac{1}{e}$

Důkaz PIE: Pro prvek $x \in \bigcup_i A_i$ ověříme, že jsme ho započítali právě jednou.

Nechť $k := \# A_i$, v nichž se vyskytuje $x \leftarrow \# i : x \in A_i$

Průnik k množin $\rightarrow 1_x \rightarrow$ přispěje $(-1)^{k+1}$

$j > k$ množin $\rightarrow 0_x$

$j < k$ množin $\rightarrow \binom{k}{j}$ j-tic obsahuje $x \rightarrow$ celkem přispěje $(-1)^{j+1} \binom{k}{j}$

Sečtem všechna j :

$$\sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \binom{k}{j} = - \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} = 1$$

to je případ $j=k$

když bychom sčítali od 0,
bylo by to $(1-1)^k$ podle Binom. věty.
Takže chybí $(-1)^0 \binom{k}{0} = 1 \rightarrow$ výjde -1

Druhý dílčík P1E (abstraktnější)

- Zvolme $A := \bigcup_i A_i \dots$ každé $X \subseteq A$ přiřadíme charakteristickou funkci

$$c_X: A \rightarrow \{0, 1\} \quad t.z. \quad c_X(a) = \begin{cases} 0 & a \notin X \\ 1 & a \in X \end{cases}$$

- Vlastnosti char. funkci:
 - $c_{X \cap Y} = c_X \cdot c_Y$
 - $c_{\overline{X}} = 1 - c_X$
 - $c_{X \cup Y} = c_{\overline{\overline{X} \cap \overline{Y}}} = 1 - (1 - c_X)(1 - c_Y)$
 - $|X| = \sum_{a \in A} c_X(a)$

- Rozdělujeme

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i) = \sum_{I \subseteq [n]} \prod_{i \in I} x_i \quad \xrightarrow{\text{dosaž. } x_i \leftarrow -x_i} \prod_{i=1}^n (1 - x_i) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} x_i$$

proměnné

- Dosažíme $x_i \leftarrow c_{A_i}$:

$$\prod_{i=1}^n (1 - c_{A_i}) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} c_{A_i}$$

c_{A_i}

$c_{\bigcap_i A_i}$

$$= 1 - c_{\bigcup_i A_i}$$

pro $I \neq \emptyset$ je to $c_{\bigcap_{i \in I} A_i}$

pro $I = \emptyset$ je to 1

- Upravujeme:
(do podoby ještě blíže P1E)

~~$c_{\bigcup_i A_i} = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} c_{\bigcap_{i \in I} A_i}$~~

- Nakonec sečteme přes všechna $A \subseteq A$:

$$|\bigcup_i A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} A_i| \quad \text{... euhle, P1E ?}$$

Příběhová otázka: Kolik různých bodů má průměrné náhodná permutace?

Model pro podobné otázky:

Df: Náhodná veličina na pr. prostoru je funkce $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ← třeba #1
při n hodech kostkou

- $P(X \leq 1)$ je vlastně P jem $\{w \in \Omega \mid X(w) \leq 1\}$

Df: Sřední hodnota $E(X) := \sum_{w \in \Omega} P(w) \cdot X(w)$ ← vzdělý průměr (vahy = prstí)

pro nekonečnou Ω nemusí existovat

Def: $E(X) = \sum_{a \in \mathbb{R}} P(X=a) \cdot a$ ← nelekejte se nespočetné sumy - nejvýše spočetné členy může být několikých

?? E není median ?? \rightarrow Většina lidí má nadprůměrný hruškový ?? 14
 \uparrow $E[\text{hruškový}] < 2 \Rightarrow P(\text{hruškový} > E(\dots)) = 1 - \varepsilon$
 to je m.t.z. $P(X < m) \leq 1/2$
 $P(X > m) \leq 1/2$

Příklad: 2 kostky, $S = \text{součet hodů}$: $E(S) = \sum_{a=2}^{12} P(S=a) \cdot a = \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{2}{36} \cdot 3 + \dots + \frac{6}{36} \cdot 7 + \frac{5}{36} \cdot 6 + \dots + \frac{1}{36} \cdot 12$
 ↓ ale jde to počítat snáz

Věta (linearity střední hodnoty): Nechť X, Y jsou náhodné veličiny a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak:
 ① $E(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot E(X)$
 ② $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ } důkaz rozepsáním dle definice

$$\begin{aligned} X &= \text{hodnota 1. kostky} & \} & E(X) = E(Y) = \frac{1}{6} (1+2+\dots+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} \\ Y &= \text{hodnota 2. kostky} & \} & \\ S &= X+Y \rightarrow E(S) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 \cdot \frac{7}{2} = 7 \end{aligned}$$

A zpět k řešení: $B := \#\text{různých hodů}$ (náh. veličina)

$$\begin{aligned} B_1 - B_n: B_i(n) := \begin{cases} 0 & \text{pokud } \pi(i) \neq i \\ 1 & \text{inak} \end{cases} & \} \text{ indikátor jem "i je různý od i"} \\ B = \sum_i B_i \rightarrow E(B) = E\left(\sum_i B_i\right) = \sum_i E(B_i) & \leftarrow E(B_i) = P(B_i = 1) \\ & = n \cdot \frac{1}{n} = 1. \end{aligned}$$

Dále 1 příklad na indikátory: Postupnost n hodů mincí ... $\Omega = \{0,1\}^n$
 Chceme $E(\#\underbrace{\text{číselků stejných hodnot}}_U)$

$U_1 - U_n \dots U_i := \text{indikátor jem "na pozici } i \text{ zadní číselka"}$

$$\begin{aligned} U_i \text{ je vždy 1} \rightarrow E(U_i) = 1 & \} \\ \text{Dílak } U_i = \begin{cases} 0 & p = 1/2 \\ 1 & \text{inak} \end{cases} \rightarrow E(U_i) = 1/2 & \leftarrow i\text{-tý hod se liší od } (i-1)\text{-tého} \\ \} & E(U) = \sum_i E(U_i) = 1 + \frac{n-1}{2} \\ & = \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

GRAFY, CESTY, TAHY

15

Úloha: Mosty města Královce (a.k.a. Königsbergu / Kaliningradu) - Euler 1736
 ... nebo také kreslení domlučku jedním tahem

↪ graf (matem. struktura) Df: (V, E) , kde V je množina vrcholů (konečná, neprázdná) a $E \subseteq \binom{V}{2}$ množina hran

↪ grafy jsou dobré modely (binárních) vztahů mezi nejakymi objekty $e \in V$ je hrana mezi vrcholy u, v

Příklad: Náměstí spojená ulicemi, stavu křavolamu atd.

• Cestování po grafu: posloupnost $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n$
 kde $v_i \in V$, $e_j \in E$, $e_j = \{v_{j-1}, v_j\}$

• Co se s ní opakovat? ① všechny \rightarrow sled, ② nic \rightarrow cesta, ③ jen vrcholy \rightarrow tah

↪ kdyžme eulerovský tah - to je takový, že obsahuje všechny vrcholy i hrany grafu

uzavřený $\equiv v_0 = v_n$ otevřený $\equiv v_0 \neq v_n$ \leftarrow to je také potřeba: 

proč nestačí posl. hrany?

proč ne vrcholy?

(to zatím nás def. grafu nedovoluje, ale časem ji zabolíme)

• Nutné podmínky pro existenci uzavřeného eul. tahu:

① graf musí "dřít polkružnice": Df: Graf je souvislý = pro všechny $u, v \in V$ existuje cesta $\neq \emptyset$ z u do v

Lemma: Pokud existuje sled $\neq \emptyset$ z u do v , existuje i cesta $\neq \emptyset$ z u do v .

Dk: Uvažme nejkratší sled $\neq \emptyset$ z u do v . \leftarrow nezapomenout osetřit případ $u=v$.

Kdyžby nebyl cestou, existuje nejaky vrchol t , který se v něm opakuje



tuto část musíme odstranit a tak získat kratší sled $\neq \emptyset$

② každý vrchol se účastní sudeho počtu hrani: Df: Stupeň vrcholu $\deg_G(v) = |\{e \in E(G) \mid v \in e\}|$

Uvažme uzavř. eul. tah T a všechny výskytu nejakého vrcholu v :



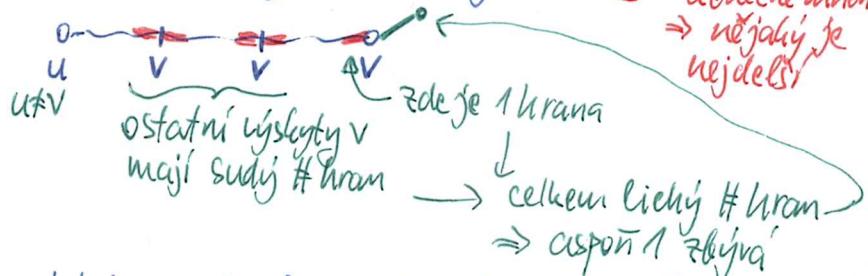
Každá hrana z vrcholu v leží před/za výskytom $v \rightarrow$ dvojice hrani.

Dvojice se nepřekrývají $\Rightarrow \# \text{hran} = 2 \cdot \# \text{dvojic}$, což je sude.

Věta: Graf má uzavřený eulerovský tah \Leftrightarrow je souvislý & všechny vrcholy mají sudé stupně. (16)

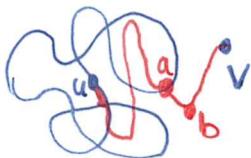
Důkaz: \Rightarrow všechny hraně, zbytek \Leftarrow . Uzavřené nejdelsí možný tah T. tah je konečné mnoho → nejdelší je nejdelsí

① T je uzavřený: kdyby nebyl:



Tah můžeme prodloužit ↴

② T obsahuje všechny vrcholy ... kdyby existoval v neležící na T, "nenakreslený" vrchol vyberme libovolný u na T a najdeme cestu P z u do v (souvislost \Rightarrow existuje).



Cesta P začíná na T, končí u nahoře \Rightarrow někde je přechod... vyberme poslední acP, které leží na T a následníka bcP, ten už na T neleží b může, ale nemusí

- \rightarrow b je nenakreslený a sousedí s nakresleným a hranou. být roven v
- \rightarrow tah "rozštíhne" při libovolném průchodu a, přidáme hranu ab
- \rightarrow získali jsme delší tah ↴

③ T obsahuje všechny hranы ... kdyby existovala nenakreslená hraná \notin $\{u, v\}$, kde u, v jsou nakreslené vrcholy

- \rightarrow tah rozštíhne v u a prodloužme o hranu $\notin \{u, v\}$
- \rightarrow opět spor s maximality T ↴

💡 Co otevřené tahy? Souvislost & právě 2 vrcholy lichého stupně. (civíci) stupně?

Grafy můžeme definovat orientování ... příklad: "ireverzibilní" tahy ve hranách, jednosměrné ulice

Df: Orientovaný graf je dvojice (V, E) , kde V je konečná množina vrcholů ž leží neprázdná a $E \subseteq V^2$ množina hran (šípek). připomíná smyšlení ↴

- sledy, tahy, cesty zobecněme přímočáre
- lemma sled \rightarrow cesta stále funguje
- souvislost se komplikuje:
 - a) silná souvislost $\equiv \forall u, v \in V \exists$ cesta $u \rightarrow v$ (orientovaná)
 - b) slabá souvislost \equiv "zapojujícím orientací"

💡 silná \Rightarrow slabá, ale neopáčně:



vznikne souvislý neorient. graf

podkladající graf

orient. grafu (V, E) je množina vrcholů grafu

(neorientovaný) graf (V, E') t. j.

$E' = \{ \{u, v\} \mid (u, v) \in E \}$

- stupně se rozdělují na vstupní $\deg_{\text{in}}(v) \equiv \{ u \in V \mid (u, v) \in E \}$ (u, v) \in E v (u, v) \in E
- výstupní $\deg_{\text{out}}(v) \equiv \{ u \in V \mid (v, u) \in E \}$ (v, u) \in E
- místo souvislosti stupňů: Df: G je hybridní $\equiv \forall v \in V \colon \deg_{\text{in}}(v) = \deg_{\text{out}}(v)$.

Věta: Pro orientovaný graf G jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- ① G je využíván a slabě souvislý.
- ② G obsahuje uzavřený eulerovský tah.
- ③ G je využíván a silně souvislý.

Proto: pro využívané grafy je silná a slabá souvislost ekvivalentní

Dk: ① \Rightarrow ③ ... snadná úprava důkazu neorientované verze věty
 ② \Rightarrow ③ ... takéž
 ③ \Rightarrow ① ... přímo z definice souvislosti

Cílem: Jak vypadají grafy s otevřeným euler. tahem? (orientované)

Cílem: Co bylo by mělo být víc kram? (multigraf)

naštívění kramy

Příklad: Otevříme sejf, hledáme posloupnost čísel, v níž se každé trojčíslo vyskytne aspoň jednou. (nebo obecně k -číslo...)

Zjednodušení: Dvojková soustava místo desítkové, \rightarrow pro $k=2$ funguje 0110 posloupnost je cyklická.

Je potřeba délka $\geq 2^k$... ukážeme, že tolik stačí.

Df: de Bruijnova posloupnost řádu k je cyklická posloupnost 0,1 délky 2^k t.ž. každý k -znakový řetězec 0,1 se v ní vyskytuje právě jednou.

je souvislá podposloupnost

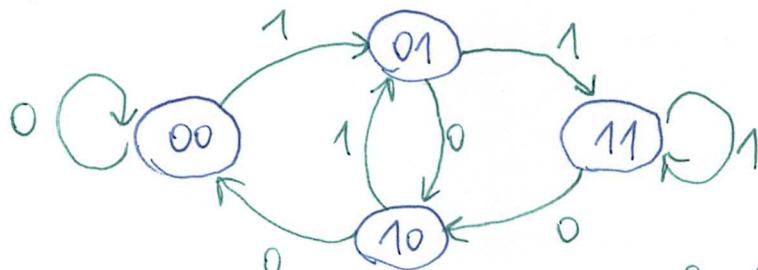
Věta: Pro každý řád $k \geq 1$ existuje dBrp. řádu k .

Dk: Pro $k=1$ je věta triviální (posl. 01 je dBrp.), ukážme $k \geq 1$.

Sestrojíme orientovaný graf: $V = \{0, 1\}^{k-1}$

$$E = \{(x_1 - x_{k-1}, x_2 - x_k) \mid x_1 - x_k \in \{0, 1\}\}$$

Příklad pro $k=3$:



- $\deg^{\text{in}}(v) = 2$ } graf je
- $\deg^{\text{out}}(v) = 2$ } využíván
- graf je souvislý

\Downarrow
 3 uzavřený euler. tah

posloupnost $\stackrel{\text{def.}}{=} \text{označení}$ řádu v pořadí daném tahem

• když tah objde do vrcholu $x_1 - x_{k-1}$, předchozích $k-1$ kram je označeno $x_1 - x_{k-1}$

\hookrightarrow když chci najít $x_1 - x_k$, vyberu ten ze dvou výskytů $x_1 - x_{k-1}$, po kterém následuje x_k .

\hookrightarrow posl. 01011100 je dBrp. řádu 3.

Cílem: Rozšířte na libovolnou konečnou abecedu.