DÚ Lineární algebra – Sada 4

Jan Romanovský

5. listopadu 2025

(4.2) Kolmá projekce vektoru $\mathbf{u}$ na danou přímku P je ten vektor $\mathbf{v} \in P$, pro který je vektor $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ kolmý na směrový vektor $\mathbf{v}$ přímky P, tedy když zapíšeme $\mathbf{u} = (a, b, c)^T, \mathbf{v} = (t^*, 2t^*, t^*)^T$ (t^* je konkrétní hodnota parametru t), potom $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (a - t^*, b - 2t^*, c - t^*)$ a použijeme poznatek o kolmosti ze zadání.

$$(a - t^*)t^* + (b - 2t^*)2t^* + (c - t^*)t^* = 0$$

$$at^* + 2bt^* + ct^* - {t^*}^2 - 4{t^*}^2 - {t^*}^2 = 0$$

$$t^*(a + 2b + c - 6t^*) = 0$$

$$t^* = 0 \vee (a + 2b + c - 6t^*) = 0$$

První případ nás nezajímá, to je nulový vektor, pokračujeme s druhým.

$$a + 2b + c = 6t^*$$

Nyní zkusíme dosadit vektory kanonické báze.

i. $\mathbf{u} = (1, 0, 0)^T$:

$$1 = 6t^*$$

$$t^* = \frac{1}{6}$$

$$f_A((1, 0, 0)) = (t^*, 2t^*, t^*) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

ii. $\mathbf{u} = (0, 1, 0)^T$:

$$2 = 6t^*$$

$$t^* = \frac{1}{3}$$

$$f_A((0, 1, 0)) = (t^*, 2t^*, t^*) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

iii. $\mathbf{u} = (0, 0, 1)^T$:

$$1 = 6t^*$$

$$t^* = \frac{1}{6}$$

$$f_A((0, 0, 1)) = (t^*, 2t^*, t^*) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

Když použijeme sloupcový pohled, našli jsme takto přímo matici A, resp. její sloupce, protože lib. $\mathbf{u} = (a, b, c)^T = a(1, 0, 0)^T + b(0, 1, 0)^T + c(0, 0, 1)^T)$ a potom $A = \left(\begin{array}{c|c|c} f_A(\mathbf{e}_1) & f_A(\mathbf{e}_2) & f_A(\mathbf{e}_3) \end{array} \right)$.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$