Diskrétní matematika

13. 10. 2025 / Cvičení III

Kombinatorické počítání

Definice 1 (Permutace). Permutací nazýváme prosté zobrazení konečné množiny X do sebe.

Definice 2 (Faktoriál). Pro $n = 0$ je $0! = 1$. Pro $n \geq 1$ definujeme

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = \prod_{i=1}^{n} i$$

Definice 3 (Binomický koeficient).

$$\binom{n}{k} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Příklad 1. Vybíráme.
Z n předmětů vybíráme k. Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

	záleží na pořadí	nezáleží na pořadí
s opakováním		
bez opakování		

Příklad 2. Kuličky do přihrádek.
Mějme k kuliček, které chceme rozdělit do n jamek. Vyjádřete, kolika způsoby můžeme rozdělit kuličky do jamek pokud v každé jamce má být daný počet kuliček a kuličky jsou různo/stejnobarevné.

	nanejvýš jedna kulička	libovolně kuliček	alespoň jedna kulička
různobarevné			
stejnobarevné			

Příklad 3. Dokažte:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Příklad 4. Sečtěte:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

Příklad 5. Dvojice.
Spočítejte, kolik je uspořádaných dvojic (A, B) takových, že $A \subseteq B \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Příklad 6. MISSISSIPPI.
Kolik slov (ne nutně smysluplných) lze sestavit z písmen slova MISSISSIPPI?

Příklad 7. Vodníci a čarodejnice.
Kolika způsoby lze rozestavit postavičky m vodníků a n čarodějnic tak, že žádní dva vodníci nestojí vedle sebe, když je navíc dáno:

(a) m= 5, n= 7, postavy stavíme do řady, vodníci jsou navzájem nerozeznatelní, a stejně tak i čarodějnice.
(b) m= 5, n= 7, postavy stavíme do řady, ale všechny jsou navzájem rozeznatelné.
(c) m= 5, n= 7, vodníci, resp. čarodějnice jsou navzájem nerozeznatelní, ale stavíme je do kruhu.

Příklad 8. Triangulace.
Kolik existuje triangulací konvexního n-úhelníka? Přesněji:
Kolik existuje různých rozdělení pravidelnéhon-úhelníku na vrcholech $\{1, \ldots n\}$ na troj-úhelníky, tak že řezy vedou podél tětiv, které se vzájemně nekříží a navíc každý trojúhelník má alespoň jednu stranu společnou s n-úhelníkem?.Např. pětiúhelník lze rozdělit na tři trojúhleníky $(1, 2, 3), (1, 3, 5)$ a $(3, 4, 5)$.