Úvod do sem patří název

Zápisky z přednášky Jméno Příjmení učitele

Jméno Příjmení

Úvodní informace

Značení

Kapitola 1

01

Kapitola 2

02

Kapitola 3

03

Kapitola 4

04

Věta 1 (L'Hospital). *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechť $\exists$ vlastní $f'(x), g'(x)$, navíc $g'(x) \neq 0 \forall x_0 \in \mathscr{P}(x_0, \delta)$. Nechť platí buď*

a) $f(x) \to 0, g(x) \to 0, x \to x_0$, *nebo*

b) $|g(x)| \to +\infty, x \to x_0$.

Pak

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

má-li pravá strana smysl.

Důkaz. 1. $x \to x_0^+, x_0 \in \mathbb{R}$, případ a); $\varepsilon > 0$ dáno:

$\exists \delta > 0$ t. ž. $\forall c \in \mathscr{P}_+(x_0, \delta)$ platí:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathscr{U}(L, \varepsilon)$$

TRIK do/předefiniceinujme $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (nemá vliv na $\lim_{x \to x_0}$)

$\implies f, g$ spojité v $[x_0, x_0 + \delta), \delta > 0$ malé

- v bodě x_0 zprava $(f(x), g(x) \to 0 = f(x_0) = g(x_0), x \to x_0)$
- v bodech $x \in (x_0, x_0 + \delta) \impliedby$ Věta 4. 1. ($\exists f', g'$ vlastní)

Buď $x \in \mathscr{P}_+(x_0, \delta)$ pevné, libovolné

Aplikuji větu 6. 8. (C. o stř. h.) na $[x_0, x]$

$\implies \exists x \in [x_0, x] \subset \mathscr{P}_+(x_0, \delta)$ t. ž. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) - f(x)}{g(x_0) - g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathscr{U}(L, \varepsilon)$

2. $x \to +\infty$, případ a);

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})} = (LP1.) = \lim_{y \to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{y}) \cdot \frac{-1}{y^2}}{g'(\frac{1}{y}) \cdot \frac{-1}{y^2}} = (L2.3.) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3. $x \to x_0^+$, případ b), tj. $|g(x)| \to +\infty, x \to x_0$

Užiji V. 6. 8. na $[x, y]$:

$$\exists c \in (x, y) \text{ t. ž. } \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \implies$$

pujčím si $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(c)}{g'(c)}(1 - \frac{g(y)}{g(x)}) = P_1 + P_3 \cdot P_2$, fixuji y blízko $x_0 \implies c$ blízko x_0, když $x \to x_0 \implies P_3 \to L, P_1 \to 0, P_2 \to 1$, a tedy PS blízko L.

$\square$

Poznámka 1. Úmluva: $I, J \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly.

Definice 1. Řekneme, že $f(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost, pokud $\forall a, b, \in I, \forall \gamma$ mezi $f(a), f(b) \exists c$ mezi a, b t. ž. $f(c) = \gamma$. (Darbouxova věta: $f(x)$ spoj. v $I \implies$ má v I Darboux. vlast.)

Věta 2 (*). *Nechť I je otevřený interval, $f(x)$ je spojitá v I, nechť $\exists f'(x)$ vlastní $\forall x \in I$. Pak $f'(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost.*

Věta 3 (Monotonie a znaménko derivace). *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ lib. interval, $f(x)$ je spojité v I, nechť $\exists f' > 0$ (resp. ≥ 0, ≤ 0, < 0) $\forall x$ vnitřní bod I. Potom $f(x)$ je rostoucí (resp. neklesající, nerostoucí, klesající) v I.*

Důkaz. Nechť $x_1 < x_2 \in I \overset{?}{\implies} f(x_1) < f(x_2)$.

Užiji V. 6. 5. (Lagrange) na $[x_1, x_2] \subset I$ – spojitost OK, a taky $\exists f'(x) \forall x \in (x_1, x_2) \subset I$

$\implies \exists c \in (x_1, x_2)$ t. ž. $\frac{f(x_2)-f(x_2)}{x_2-x_1} = f'(c) \iff f(x_1) - f(x_2) = f'(c) \cdot (x_1 - x_2) > 0.$ □

Příklad 1. $f(x) = x^n, I = [0, +\infty), n \in \mathbb{N}$

$f'(x) = nx^{n-1} > 0, x \in (0, +\infty)$ – otevřený interval je právě vnitřek intervalu I

$\implies (V6.10.) f(x)$ rostoucí v I.

Definice 2. Funkce $f(x)$ se nazve konvexní (resp. ryze konvexní, konkávní, ryze konkávní) v I, jestliže $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I : \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq$ (resp. $<, \geq, >$) $\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

Věta 4 (Konvexita a monotonie derivace). *Nechť I interval s krajními body $a < b$. Nechť $f(x)$ spojitá v I. Nechť $\exists f'(x) \forall x \in (a, b)$ a je rostoucí (resp. neklesající, klesající, nerostoucí). Potom $f(x)$ je ryze konvexní (resp konvexní, ryze konkávní, konkávní) v I.*

Důkaz. Nechť $x_1 < x_2 < x_3 \in I \overset{?}{\implies} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

Užiji 2x V. 6. 5. (Lagrange) na $[x_1, x_2]$, pak na $[x_2, x_3]$: $\exists c \in (x_1, x_2)$ t. ž. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$ a $\exists d \in (x_2, x_3)$ t. ž. $\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(d)$.

Zřejmě $d > c \implies f'(c) < f'(d) \implies$ to co dk. □

Příklad 2. $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ – spojité v $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+|x|)^2} \cdot |x|' = \frac{-\operatorname{sgn} x}{(1+|x|)^2} (x \neq 0) = \begin{cases} \frac{-1}{(1+|x|)^2}, x > 0 \\ \frac{1}{(1+|x|)^2, x<0} \end{cases}$$

V. 6. 11. $\implies f$ je ryze konvexní v $(-\infty, 0)$ a v $(0, +\infty)$ (ale ne už v $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

Poznámka 2 (Ekvivalentní definice konvexity). $\forall a, b, \in I, \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$.

Důkaz. Důkaz jako cvičení pro čtenáře, napovíme $x_1 = a, x_3 = b, x_2 =$ nějakej zlomek s λ □

Věta 5 (Konvexita a znaménko druhé derivace). *Nechť $f'x$ je spojitá v I, nechť $\exists f''(x)$ vlastní uvnitř I. Nechť platí $f''(x) > 0$ (resp. $\geq, <\leq$) $\forall x \in I$ vnitřní. Pak $f(x)$ je v I ryze konvexní (resp. konvexní, ryze konkávní, konkávní).*

Důkaz. Označ $\tilde{I}$ vnitřek I.

$f''(x) = (f'(x))' > 0$ v $\tilde{I}$, konečné

$\implies$ $f'(x)$ spojité (V. 5. 1.) a je rostoucí v $\tilde{I}$ (V. 6. 10.)

$\implies$ $f(x)$ je ryze konvexní v I (V. 6. 11.). □

Definice 3. Řekneme, že x_0 je inflexní bod $f(x)$, jestliže

i. $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}^*$

ii. $\exists \delta > 0$ t. ž. na jednom z intervalů $(x_0 - \delta, x_0), (x_0, x_0 + \delta)$ je $f(x)$ ryze konvexní a na druhé ryze konkávní.

Kapitola 7

Posloupnosti

Definice 4. Posloupnost je funkce $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$, značíme $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nebo $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$, krátce $\{a_n\}$.

Příklad 3. 1. $a_n = \frac{1}{n}, b_n = (-1)^n$

2. rekurentně: $a_1 = 0, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

Definice 5. Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ se nazve limita posloupnost $\{a_n\}$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies a_n \in \mathcal{U}(a, \varepsilon).$$

Značíme $a_n \to a$ nebo $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$.

Poznámka 3. $a \in \mathbb{R} \ldots \{a_n\}$ konverguje

$a = \pm + \infty \ldots \{a_n\}$ diverguje

Poznámka 4 (Ekvivalentní definice (pokud $a \in \mathbb{R}$))**.**

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

Obecně: $a_n \to a \iff \forall \varepsilon > 0$ platí $a_n \in \mathcal{U}(a, \varepsilon)$ pro všechna n až na konečně mnoho výjimek

Důkaz. $\implies$ “ výjimečně jen pro $n < n_0$ (těch je konečně)

„ $\Longleftarrow$ “ $V = \{n; a_n \notin \mathcal{U}(a, \varepsilon)\} \subset \mathbb{N}$ konečné

volme $n_0 > \max V \in \mathbb{N}$

□

Poznámka 5. Pro limity posloupností platí analogie vět pro limity funkcí s analogickými důkazy.

i. (VoAL, V. 2. 3., V. 2. 7.) $a_n \to a, b_n \to b \implies$

1. $a_n \pm b_n \to a \pm b$
2. $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$
3. $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$, má-li PS smysl

ii. (V. 2. 9.) je-li $\alpha \leq a_n \leq \beta$ od jistého $n_0, a_n \to a \implies \alpha \leq a \leq \beta$

iii. (V. 2. 10.) je-li $b_n \leq a_n \leq c_n$ od jistého $n_0, b_n \to a, c_n \to a \implies a_n \to a$

iv. nechť $a_n \to 0$, nechť $a_n >$ (resp. $<$) 0 od jistého $n_0 \implies \frac{1}{a_n} \to +\infty$ (resp. $-\infty$)

Důkaz. cíl: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : n \geq n_0 \implies \frac{1}{a_n} \in \mathcal{U}(+\infty, \varepsilon)$, tj. $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \varepsilon > 0 \text{ dáno:} \exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_1 &\implies a_n \in \mathcal{U}(0, \varepsilon), \text{ tj. } |a_n| < \varepsilon \implies -\varepsilon < a_n < \varepsilon \\ \exists n_2 \in \mathbb{N} : n \geq n_2 &\implies a_n > 0 \implies 0 < a_n < \varepsilon \end{aligned}$$

polož $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$; nechť $n \geq n_0 \implies$ cíl □

Definice 6. Posloupnost se nazve omezená (resp. shora omezená, zdola omezená), pokud $\exists K > 0$ (resp. $K \in \mathbb{R}$) t. ž. $|a_n| \leq K$ (resp. $a_n \leq K, a_n \geq K$) $\forall n \in \mathbb{N}$. Posloupnost se nazve rostoucí (resp. neklesající, klesající, nerostoucí) pokud $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n \leq a_{n+1}, a_n > a_{n+1}, a_n \geq a_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$. Všechny tyto posloupnosti zároveň nazveme monotónní.

Věta 6. *Nechť $\{a_n\}$ konverguje. Pak $\{a_n\}$ je omezené.*

Důkaz. víme: $\exists a \in \mathbb{R}$ t. ž. $a_n \to a \dots \varepsilon = 1, \exists n_0 \, \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < 1 \iff L = a - 1 < a_n < a + 1 = K$

polož $C := \max\{K, -L\} \implies |a_n| \leq C, \forall n \geq n_0$, to není $\forall n \in \mathbb{N}$

položme $\tilde{C} := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n-1}|, C\}$

nyní zřejmě: $|a_n| \leq \tilde{C} \forall n \geq 1$ tj. $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Věta 7. *Nechť $\{a_n\}$ je monotónní. Pak $\exists a \in \mathbb{R}^*$ t. ž. $a_n \to a$. Je-li $\{a_n\}$ omezená, pak $a \in \mathbb{R}$, tj. $\{a_n\}$ konverguje.*

Důkaz. BÚNO $\{a_n\}$ je neklesající, tj. $a_n \leq a_{n+1} \, \forall n \in \mathbb{N}$, a tedy $a_n \leq a_m \, \forall n \leq m$

polož $M := \{a_m; m \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}$.

1. nechť M je omezená ($\iff$ $\{a_n\}$ je omezená); $S := \sup M$ (A. 4., $M \neq \emptyset$) ukážeme, že $a_n \to S$

   $\varepsilon > 0$ dáno: $S' := S - \varepsilon < S \dots \exists n_0 : a_{n_0} > S - \varepsilon$

$\{a_n\}$ neklesající: $a_n > S - \varepsilon \forall n \geq n_0$, zároveň $a_n \leq S < S + \varepsilon$

$\implies a_n \in \mathcal{U}(S, \varepsilon), \forall n \geq n_0$.

2. nechť M je neomezená ($\iff$ $\{a_n\}$ je neomezená, nutně shora (protože je neklesající))

   ukážeme: $a_n \to +\infty$

   $\varepsilon > 0$ dáno: $\exists n_0$ t. ž. $a_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$ a tedy $a_n > \frac{1}{\varepsilon}, \forall n \geq n_0 \implies a_n \in \mathcal{U}(+\infty, \varepsilon)$

$\square$