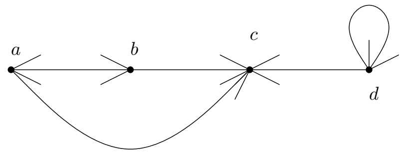
Diskrétní matematika

15. 12. 2025 / Cvičení XI

Relace, Částecná Uspořádání

Příklad 1. Dvě relace (Matice)
Rozhodněte pro zadané relace R (obrázek) a S (matice) zda platí:



$$S = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(a) Je R tranzitivní?
(b) Je S antisymetrická? (Klíčové pro uspořádání!)
(c) Je $S \cap R$ symetrická?
(d) Je $R \circ S$ reflexivní?

Příklad 2. Počty
Určete počet různých:
(a) ekvivalencí na množině velikosti 5.
(b) reflexivních relací na množině n prvků.
(c) symetrických relací na množině velikosti n.

Příklad 3. ČUM III. (Dělitelnost)
Uvažujme relaci dělitelnosti na $M = \{1, 2, \dots 12\}$.
(1) Nakreslete její Hasseův diagram.
(2) Nalezněte největší/nejmenší a maximální/minimální prvky.
(3) Rozhodněte, zda pro tuto relaci na $\mathbb{N}$ platí, že pro každou konečnou množinu existuje supremum či infimum.

Příklad 4. Uspořádání na $\mathbb{N}^2$
Které z těchto relací na množině $\mathbb{N}^2$ jsou uspořádání? Která jsou lineární?
(a) Porovnání v alespoň jedné souřadnici $\leq_U$: $(a, b) \leq_U (c, d) \iff a \leq c \vee b \leq d$
(b) Porovnání po obou souřadnicích $\leq_S$: $(a, b) \leq_S (c, d) \iff a \leq c \wedge b \leq d$
(c) Lexikografické porovnání $\leq_L$: $(a, b) \leq_L (c, d) \iff a < c \vee (a = c \wedge b \leq d)$

Příklad 5. ČU a ekvivalence
Popište všechny relace na množině X, které jsou zároveň ekvivalencí a částečným uspořádáním.

Příklad 6. Vnoření (Cayleyho věta pro uspořádání)
Dokažte, že pro každou uspořádanou množinu $(X, \preceq)$ existuje vnoření do uspořádané množiny $(2^X, \subseteq)$.

Příklad 7. (Anti)řetězce
Najděte délku maximálního řetězce a antiřetězce na uspořádání $(\{1, 2, \dots, n\}, |)$.