Úvod do sem patří název

Zápisky z přednášky Jméno Příjmení učitele

Jméno Příjmení

Úvodní informace

Značení

2025/09/30

streamy, nahrávky webovky, povinný úkoly a kvízy david stanovský / stanovsk

základ: lineární algebra – rovinné (lineární) útvary + maticový počet matematická analýza – hladké (spojité) útvary + diferenciální, integrální počet diskrétní matematika – diskrétní objekty + kombinatorika programování – algoritmizace + reálně programování

"zásadní rozdíl od sš: budete hodně číst"

todo každej týden (v pořadí): pro každej týden si načíst kripta dopředu aspoň letmo přednášky – nečte se ze skript znovu číst skipta (pořádně) další týden vyplnit kvíz cvičení další týden DÚ a takhle asi víc cyklů paralelně

hodně prostoru na dotazy midtermy "doučování"v pátek nebo čtvrtek před a po midtermech

Motivační úloha: Fotbalista kope do míče a ten odletí. S největší pravděpodobností existuje právě jedna dvojice bodů, které před i po směřují stejným směrem – každá rotace má osu. Proč? tohle asi nechápu

zkoumají se rovinné útvary a lineární zobrazení + abstrakce – už nemáš intuici

1. Opakování

1.1. Analytická geometrie

bod ... "je prostě místo v prostoru"čili prvek? té množiny = toho prostoru vektor ... "směr v tom prostoru, včetně jeho délky"– na počátku nezáleží operace – vektory můžu sčítat, vektor můžu násobit číslem, můžu sčítat bod a vektor (dostanu bod) (bod a bod nemůžu sčítat jasně) volba souřadnic – potřebuju počátek a bázové vektory (zpravidla KSS) – tady body a vektory splývají

vektory se píšou do sloupce

Jak vypadá množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 10\}$? Je to přímka, ale proč to vím? Psát proč to vím (znalost ze SŠ).

2025/10/02

na webu kurzu odkaz na srever s přednáškami přes cas login, obraz tohoto na karlin serveru, web taky na strankach predmetu, na karline login: nmag211, 49sl94ka

Jak vypadá množina M = {(1,2)+t·(1, −1) : $t \in \mathbb{R}\}?TaktřebazeSŠvím, žetojepřímka, aletakzkusímtořešitnějo$
$vektor(tohlebudetroškubolesttaargumentaceutohohleborce)$

Jak vypadá množina N = {(3,0)+s·(−2, 2) : $s \in \mathbb{R}\}?Budetotastejnápřímkajakopředchozí, jaktoaleukážeme?N$
$Tvrzení.M = NDůkaz.1.tocojenapsánovýše, vycházízgeom.představypřímky2.převedemearitmetickykaždý$
$N : Uvažujmeprvek(1, 2) + t \cdot (1, -1) \in M, pronějakét \in \mathbb{R}.Chcinajíts \in \mathbb{R}t.ž.(1, 2) + t \cdot (1, -1) = (3, 0)+s\cdot(-2, 2)Dosaďmes = 1-\frac{t}{2}, vidíme, že(3, 0)+(1-\frac{t}{2})\cdot(-2, 2) = (3-2+t, 0+2-t) = (1, 2)+t\cdot(1, -1)totosmůžuzjistitjakchci, uhodnoutho, ...nikohotonezajímáii)N \subseteq M : Uvažujmeprvek(3, 0) + s \cdot (-2, 2) \in N, pronějakés \in \mathbb{R}.Chcinajítt \in \mathbb{R}t.ž.(3, 0) + s \cdot (-2, 2) = (1, 2) + t \cdot (1, -1)Dosaďmet = ..., vidíme, že...jetoanalogické$

Jak vypadá množina K = {(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2 : x+y = 3\}?Tvrzení.K = MDůkaz.1.geometrickápoučka-$
$-třebapřímkajeurčena2body, pokudjsemsijistý, žeobojejsoupřímkystačínajít2společnébody2.aritmeticky-$
$-převedemei)K \subseteq M : Uvažujme(x, y) \in K, tj.x + y = 3Chcinajítt \in \mathbb{R}|t.ž.(x, y) = (1, 2) + t \cdot (1, -1)Zvoltt.ž.x = 1 + t.Ověřím, žey = 2 - t.Vím, žey = 3 - x = 3 - (1 + t) = 2 - t, cožjsmechtělidokázatii)M \subseteq K : Uvažujme(1, 2) + t \cdot (1, -1) \in M, tj.jeto(x, y) = (1 - t, 2 + t)Stačíověřit, žex + y = 3 : 1 - t + 2 + t = 3 = 3 - -ověřeno$

1.5. Zobrazení = funkce - pičo

Zobrazení f z množiny X do množiny Y přiřazuje každému prvku množiny X právě jeden prvek množiny Y. "zobrazení je nějaká krabička do které lezou prvky množiny x a z ní vylízají nějaký prvky množiny y"

Zobrazení f$_1$ $: X_1 \rightarrow$ Y$_1$, $f_2 : X_2 \rightarrow$ Y$_2$$považujemezatotožnápokudX_1 = X_2, Y_1 = Y_2a\forall x \in X_1 = X_2 : f_1(x) = f_2(x).$

Příklad. f: R → R g: R → R f(x) = |x| g(x) = $\sqrt{x^2}Pozorování : f = gh : \mathbb{R} \rightarrow$ [0;∞)$h(x) = |x|Pozorování : h \neq f$

Obor hodnot Im(f) (jako image)

Příklad. Nechť X = {1, 2, 5,6}, Y = {a, b,c,d,e} Definujme zobrazení f: X → Y. 1) f(1) = c, f(2) = a, f(5) = d, f(6) = c 2) f: X → Y 1 | → c 2 | → a 5 | → d 6 | → c 3) tabulkou nevim TODO 4) bramborový diagram se šipkami (klasika) 5) graf

Příklad. f: R^2→ R^2(x, y)|→ souřadnice bodu, který vznikne otočením bodu se souř. (x, y) kolem (0, 0) o 42 stupňů proti směru hod. ruč. tak borec prosě dropnul vzorec s gon. fcema nakonec prostě ta matice rotace dává to smysl

Příklad. id$_x$ $: X \rightarrow$ X x | → x

Skládání zobrazení: no tak logicky děcka

Úloha: Najděte nejmenší množinu a dvě zobrazení na ní t. ž. tyto dvě zobrazení nekomutují vůči skládání. 2 prvky Pozorování: skládání není komutativní, ale je asociativní

Vlastnosti zobrazení:prosté, "na", vzájemně jednoznačné

inverzní zobrazení

TODO zleva a zprava inverzní zobrazení Tvrzení. Nechť $f : X \to Y$ zobrazení, $X \neq \emptyset$ (z toho vyplývá $Y \neq \emptyset$). Pak f je prosté $\iff$ k f existuje zleva inverzní zobrazení (např. g).
Důkaz.

i. „ $\implies$ “: g definujeme třeba pomocí bramborového grafu: každou šipku z f přetočíme, pokud by f nebylo prosté, nemůžu z nějakého prvku Y jednoznačně přetočit šipku – měl bych dvě šipky – není zobrazení; a ještě pak prvky Y, které nejsou v oboru hodnot f pošlu kam chci kam chci

ii. „ $\impliedby$ “: obměnou: pokud f není prosté, neexistuje zleva inv. zobr.: úplně stejně jako i. v bramborovém grafu

Tvrzení. Nechť $f : X \to Y$ zobr., $X, Y \neq \emptyset$. Pak f je „na“ $\iff$ $\exists$ zprava inv. zobr. k f.
Důkaz. analogicky, bramborové grafy

Příklad. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; x| \to 2x$ – je prosté, není „na“ levý inverz: $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; y$sudé$| \to y/2; y$liché$| \to$ lib.

Kapitola 1

2. Soustavy lineárních rovnic

= SLR Definice. příkladem: (vložte SLR) Cíl. najít řešení, tj. popsat množinu uspořádaných n-tic, které splňují tuto soustavu (po jejichž dosazení dostaneme pravdivé výrazy)

1.1 2.1. SLR jsou všude

Případ 1. (v matematice) proložit kružnici třemi body (nevim) Případ 2. (ve fyzice) závažíčka na páce Případ 3. (v chemii) vyrovnávání chem. rovnic

1.2 2.2. Řešení SLR

Gaussova elimináační metoda – úpravy uvnitř GEM jsou opravdu ekvivalentní vyjádřením a dosazením sčítáním a odčítáním rovnic

Poznámka. Ekvivalentní úprava je úprava, které nezmění množinu řešení.

H$_f oborhodnotsetéžněkdyzapisujerng(f) - -rangef$

Poznámka. Definice zobrazení pomocí kartézského součinu a binární relace byla zmíněna.

Příklad. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 5 & 15 \\ 2 & 8 & 3 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies$
$z = 2 \implies x + 4y + 6 = 11$ – jeden stupeň volnosti = zavedu parametr $y = t$, pak $x = 5 - 4t$

$$P = \{(5 - 4t, t, 2); t \in \mathbb{R}\} = \{(5, 0, 2) + t(-4, 1, 0); t \in \mathbb{R}\}$$

V tomto případě x, z bázové proměnné (jednozn. určené tím, co je napravo od nich) a y je volná proměnná, koef. v matici u bázových proměnných jsou pivoty.

Příklad. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 11 & 13 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$x_7 = t_7$$
$$x_6 = -1 - t_7$$
$$x_5 = t_5$$
$$x_4 = 1 - 3x_7 - 2x_5 = 1 - 3t_7 - 3t_5$$
$$x_3 = t_3$$
$$x_2 = 1 - 6t_7 - 5(-1 - t_7) - 4t_3 - 3(1 - 3t_7 - 2t_5) - 2t_3 = 3 - 2t_3 + 2t_5 + 8t_7$$
$$x_1 = t_1$$

a potom $P = \{(0,3,0,1,0,-1,0)+t_1(1,0,0,0,0,0,0)+t_3(0,-2,1,0,0,0,0)+t_5(0,2,0,-2,1,0,0)+t_7(0,8,0,-3,0,-1,1); t_1,t_3,t_5,t_7 \in \mathbb{R}\}$ Pro parametrické řešení platí, že vektor bez param. řeší původní soustavu, vektory s param. řeší tzv. homogenní soustavu příslušnou soustavě, kde je pravá strana nulová.

]

Definice 1. i. Řekneme, že matice je v **odstupňovaném tvaru** pokud každý nenulový řádek kromě prvního má na začátku víc nul než řádek předchozí.

ii. **Bázové sloupce** jsou ty sloupce, v kterých se nachází první nenulový prvek nějakého řádku.

iii. **Hodnost matice odstupňovaném tvaru** se definuje jako počet bázových sloupců. Všimneme si, že hodnost matice = počet nenulových řádku a že počet parametrů řešení soustavy rozšířené matice = počet sloupců A - hodnost matice A

Definice 2. **Hodnost matice** A je rovna hodnosti matice v odstupňovaném tvaru, na který matici A převedeme Gaussovou eliminací. (musim si ale dávat pozor, jestli je jedno jak udělám Gaussovu eliminaci)

1.3 2. 5. Geometrický význam SLR

1. řádkový pohled – intuitivní
   řádky $\leftrightarrow$ rovnice určující nadrovinu
   víc řádku $\leftrightarrow$ průnik nadrovin
2. sloupcový pohled – pro nás důležitější, ukážeme na příkladu:

Příklad 1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$x + 2y = 1$$
$$2x - 3y = 4$$

$\implies x(1,2) + y(2,-3) = (1,4)$ – lineární kombinace

Kapitola 2

Tělesa

speciální číselný obor na které nás zajímají dané binární operace (prdelní nebo neprdelní definice?)

nějakej motivační příklad

Definice 3. Tělesem nazveme množinu T, na které jsou definovány operace $+, \cdot$ splňující:

1. $\forall a, b, c \in T : a + (b + c) = (a + b) + c$
2. $\forall a, b \in T : a + b = b + a$
3. $\exists 0 \in T \forall a \in T : a + 0 = a$
4. $\forall a \in T \exists (-a) \in T : a + (-a) = 0$
5. $\forall a, b, c \in T : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
6. $\forall a, b \in T : a \cdot b = b \cdot a$
7. $\exists 1 \in T \forall a \in T : a \cdot 1 = a$
8. $\forall a \in T \setminus \{0\} \exists a^{-1} \in T : a \cdot a^{-1} = 1$
9. $\forall a, b, c \in T : a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
10. $|T| > 1$,

přičemž $+ : T \times T \to T, \cdot T \times T \to T$.

[Vlastnosti těles]

1. $0, 1, -a, a^{-1}$ jsou jednoznačně určené
2. $\forall a \in T : 0 \cdot a = 0$
3. $a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$
4. $O \neq 1$

TODO

Poznámka 1. Příklady těles

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ NE!, není inverze k násobení
- $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ NE!, není inverze ani k násobení, ani ke sčítání
- $(\mathbb{Z}_p, \text{modulární } +, \text{modulární } \cdot)$ – prvočíselné zbytkové třídy

$\mathbb{Z}_p$ je těleso p prvočíselné. Zřejmé kromě existence inverze: Chceme dk., že $\forall p$ prvoč. $\forall a \in \{1, ..., p-1\} \exists! \{1, ..., p-1\}$ t. ž. $a \cdot b \mod p = 1$ přímo: Uvažujme $a \in \{1, ..., p-1\}$, dále uvažujme zobr. $f_a : \{1, ..., p-1\} \to \{1, ..., p-1\}, x \mapsto a \cdot x \mod p$. Nejprve dk., že je zobr. dobře definované, tj. že $a \cdot x \mod p \neq 0$. Napišme $ax = qp + r$ (dělení se zbytkem), potom $r \neq 0 \iff p \nmid ax$, to ale zjevně ne, protože $p \nmid a, p \nmid x$ a nemůže dělit ani součin, viz prvoč. rozklad. Teď dokážeme, že f_a je prosté. Uvažujme x, y t. ž. $f_a(x) = f(a)y$, tj. ax, ay dávají stejný zbytek po dělení p, čili $p \mid ax - ay = a(x - y)$, ale $p \nmid a$, takže $p \mid (x - y)$, jenže $|x - y| < p$, čili jediná možnost je $x - y = 0$, tj. $x = y \implies$ zobrazení je prosté. KKaždé prosté zobrazení na konečné množině je bijektivní, tedy i „na“, tedy $\exists! b$ t. ž. $f_a(b) = 1$, potom b je to co hledáme.