

GRAFY - ÚVOD

Definice 1 (Isomorfismus grafů). Dva grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ jsou isomorfní, jestliže existuje bijekce $\pi: V \rightarrow V'$ taková, že $\{u, v\} \in E$ právě když $\{\pi(u), \pi(v)\} \in E'$.

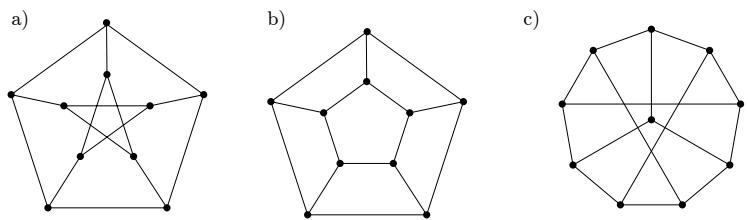
Definice 2 (Automorfismus, asymetrický graf). Automorfismus grafu je každý isomorfismus z G do G . Graf je *asymetrický (strnulý)*, je-li jeho jediný automorfismus identické zobrazení (tj. $f(v) = v$, neboli každý vrchol se zobrazí sám na sebe).

Příklad 1. ZOO na 4 vrcholech.

Najděte všechny neisomorfní grafy na 4 vrcholech.

Příklad 2. Izomorfní?

Rozhodněte zdali jsou následující grafy izomorfní a pokud ano najděte mezi nimi izomorfismus, pokud ne dokažte to.

**Příklad 3. Počty?**

Uvažte množinu vrcholů $\{1, 2, \dots, n\}$ a určete, kolik je na této množině různých (ale vzájemně izomorfních):

- (a) úplných grafů K_n
- (b) cest P_n
- (c) cyklů C_n
- (d) úplných bipartitních grafů $K_{k,n-k}$ v závislosti na k
- (e) disjunktních sjednocení dvou úplných grafů $K_k \cup K_{n-k}$ v závislosti na k
- (f) grafů, v nichž každý vrchol má stupeň 1.

Příklad 4. Kružnice a její doplněk

Pro která $n \in \mathbb{N}$ je C_n isomorfní se svým doplňkem?

Příklad 5. Kubické grafy.

Ukažte, že každý 3-regulární graf má sudý počet vrcholů.

Příklad 6. Asymetrické stromy.

- (a) Najděte *nějaký* asymetrický strom na alespoň 2 vrcholech (tzn. strom s jediným automorfismem).
- (b) Jaký je nejmenší možný počet vrcholů asymetrického stromu? Najděte takový strom.

Příklad 7. Podgrafy.

Najděte všechny grafy, které jako podgraf neobsahují

- (a) cestu délky 2
- (b) cestu délky 3
- (c) indukovanou cestu délky 2.