

DÚ Lineární algebra – Sada 5

Jan Romanovský

12. listopadu 2025

(5.2) Označme matici A . Prvně zjistíme její hodnost.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & a & 1 & 2a \\ 0 & 1 & a & a \\ 1 & 0 & 0 & a \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & a & 1 & 2a \\ 0 & 1 & a & a \\ 0 & -a & -1 & -a \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & a & 1 & 2a \\ 0 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & a^2 - a \end{array} \right)$$

i. $i = 1$: rank $A = 2$, tj. se nerovná ani počtu řádků, ani počtu sloupců, tj. neexistuje ani zprava, ani zleva inverzní matice.

ii. $i \neq 1$: rank $A = 3$, tj. stejný jako počet řádků. To znamená, že matice nebude invertovatelná zleva a bude invertovatelná zprava. Nyní spočteme matici inverzní zprava k matici A pomocí řádkových elementárních úprav.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & a & 1 & 2a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1-a^2 & 2a-a^2 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & a & a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1-a^2 & 2a-a^2 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & a & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a^2-a & -1 & a & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a^2-a & -1 & a & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & \frac{a^2}{a+1} & -\frac{a}{a^2-1} & \frac{a^2}{a^2-1} & \frac{a}{a^2-1} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a}{a+1} & \frac{a}{a^2-1} & \frac{-1}{a^2-1} & \frac{-a}{a^2-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{a+1} & \frac{-1}{a^2-1} & \frac{a}{a^2-1} & \frac{1}{a^2-1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Po cestě jsme ale dělili $a^2 - 1$ a násobili a , musíme tedy vyloučit krajní případy těchto výrazů.

(a) $a = -1$:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \\ & A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) $a = 0$:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \\ & A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) $a \neq 0, \pm 1$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{a}{a^2-1} & \frac{-1}{a^2-1} & \frac{-a}{a^2-1} \\ \frac{-1}{a^2-1} & \frac{a}{a^2-1} & \frac{1}{a^2-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$