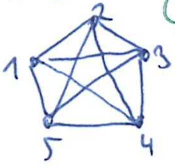
Zpět ke grafům: ukažme si nějaké příklady.

Úplný graf K_n ($n \geq 1$) (kompletní)

K_5



$V := \{1 \ldots n\}$

$E := \binom{V}{2}$

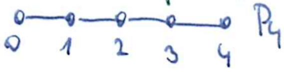
Prázdný graf E_n ($n \geq 1$)

$V := \{1 \ldots n\}$

$E := \emptyset$

Cesta P_n ($n \geq 0$) (path)

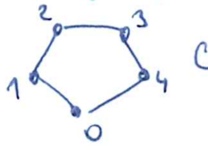
n hran (délka cesty)



$V = \{0 \ldots n\}$

$E = \{\{i-1, i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$

Kružnice C_n ($n \geq 3$) (cyklus)

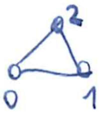


$V = \{0 \ldots n-1\}$

$E = \{\{i, (i+1) \bmod n\} \mid 0 \leq i < n\}$

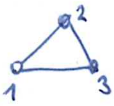
Některé grafy "vypadají stejně", i když jsou různé

$C_3 =$



$K_2 =$

$K_3 =$



$P_1 =$

Df: Grafy G a H jsou izomorfní ≡ liší se jen očíslováním vrcholů. } později řekneme pořádně

Rozmyslete si: které další dvojice grafů K_n, E_n, P_n, C_n jsou izomorfní?

Už známe: • stupeň $\deg_G(v)$ ... Df: Graf je k-regulární pro $k \in \mathbb{N}$ ≡ $\forall v \in V\ \deg(v) = k$

regulární ≡ $\exists k$: je k-regulární

K_n je $(n-1)$-regulární, E_n je 0-reg., C_n je 2-reg, P_n není reg.

Věta: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$

Dk: Obě strany počítají "konce hran", formálněji (v,e) t.ž. $e \in E$, $v \in e$

→ důsledek: graf obsahuje sudý počet vrcholů lichého stupně "princip sudosti"

! neplatí pro nekonečné grafy !

Podgrafy: Df: Graf $G' = (V', E')$ je podgrafem grafu $G = (V, E)$ ≡ $V' \subseteq V$ & $E' \subseteq E$

↳ značíme $G' \subseteq G$

... je indukovaným podgrafem: $V' \subseteq V$, $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ ← vybereme vrcholy a zdědíme hrany

↳ $G[V']$:= podgraf indukovaný podmnožinou vrcholů V'

Podgrafy K_n jsou všechny grafy (až na označení vrcholů)
Podgrafy E_n jsou zase jen prázdné.
Indukované podgrafy K_n jsou úplné.

Už známe: souvislost: pro každé 2 vrcholy ∃ cesta, která je spojuje → cesta v grafu

- posloupnost vrcholů a hran
- podgraf izomorfní s P_n pro nějaké n

analogicky kružnice v grafu

Ale pozor, sledy nejde obecně popsat jako podgrafy!

Nesouvislý graf můžeme rozložit na komponenty souvislosti ≡ souvislé pografy maximální v inkluzi:

$K \subseteq G$ je komponenta ≡ K je souvislý & $\forall K'$: $K \subsetneq K' \subseteq G$ není souvislý.

Graf je souvislý $\Leftrightarrow$ má právě 1 komponentu souvislosti. ⚡ Problematické, kdybychom dovolovali $V=\emptyset$

Úloha: Kolik nejvíce může mít hran graf bez Δ (cyklus délky 3) s n vrcholy.
↳ označme $T(n)$. Pro srovnání: K_n má $\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$ hran

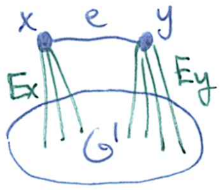
- Malé případy: $T(1)=0$ $T(3)=2$ $T(5)=6$  ... lepší než C_5 s 5 hranami
  $T(2)=1$ $T(4)=4$ $T(6)=?$  ... $T(6)\geq 9$ ← toto je $K_{3,3}$

Věta: Pro sudé n je $T(n)=\frac{n^2}{4}$. ← obecně to je $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$, ale to nebudeme dokazovat

Dk: ① $T(n)\geq \frac{n^2}{4}$ ... graf $K_{n/2,n/2}$ nemá Δ ← $K_{a,b}$ je úplný bipartitní graf:
$V = \{1 \dots a, 1' \dots b'\}$
$E := \{\{i,j'\} \mid 1\leq i\leq a,\ 1\leq j\leq b\}$
Obecně: G je bipartitní $\equiv$ vrcholy lze rozdělit na 2 části („partity") tak, že uvnitř části nevedou hrany. ← $G[\text{partita}]$ nemá hrany

② $T(n)\leq\frac{n^2}{4}$ indukcí podle n
- $T(2)=1=\frac{2^2}{4}$
- $n\to n+2$: Nechť G je graf bez Δ s $n+2$ vrcholy. Zvolme hranu $e=\{x,y\}\in E$ libovolně:

kdyby žádná neexistovala, jistě je $0=|E|\leq\frac{n^2}{4}$

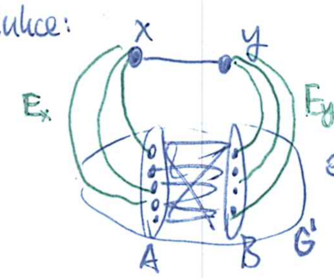


→ označme $G'=(V',E')$
$G' := G[V']$ kde $V' := V\setminus\{x,y\}$ graf bez Δ s n vrcholy } → podle IP: G' má max. $\frac{n^2}{4}$ hran

- x,y nemohou mít společného souseda $\Rightarrow |E_x|+|E_y|\leq n$
- $E = E'\cup E_x\cup E_y\cup\{e\} \Rightarrow |E|\leq \frac{n^2}{4}+n+1 = \frac{n^2+4n+4}{4} = \frac{(n+2)^2}{4}$. ■

Dokonce: **Věta*:** Extremální grafy (grafy bez Δ s max. # hran) jsou pro sudé n izomorfní s $K_{n/2,n/2}$.

Dk: Podobná indukce:



← podle IP je to $\cong K_{n/2,n/2}$

$\Rightarrow A\cup\{y\}$ a $B\cup\{x\}$ jsou partity grafu izomorfního s $K_{\frac{n+2}{2},\frac{n+2}{2}}$ ■

x musí mít hrany jen do 1 partity (jinak Δ), BÚNO do A
y taktéž (ještě nevíme, zda do A nebo B)
... ale hran musí být n, aby vyšel celkový počet $\Rightarrow$ x je spojen se všemi vrcholy z A, y se všemi z B (BÚNO)

x,y nemají společné sousedy v G'
$\Rightarrow |E_x|+|E_y|\leq n$
G' nemá $\Delta \Rightarrow |E(G')|\leq T(n)=\frac{n^2}{4}$
a však aby se $|E'(G)|+|E_x|+|E_y|+1$ nasčítalo na $T(n+2)=\frac{(n+2)^2}{4}$, musí být $|E_x|+|E_y|=n$ & $|E'(G)|=T(n)$

proto zde mohu použít IP