

DÚ Diskrétní matematika – Sada 9

Jan Romanovský

7. prosince 2025

Příklad 1. Automorfismy stromu.

Když každý automorfismus stromu zachovává vzdálenosti vrcholů, můžeme si vzít všechny vrcholy, které mají od všech ostatních tu nejmenší maximální vzdálenost a o nich víme, že se zobrazí na takové vrcholy, které mají od všech ostatních zase tu nejmenší maximální vzdálenost – tzv. střed grafu. Střed stromu má vždy jeden, nebo dva vrcholy, což vyplývá z algoritmu pro hledání středu stromu – osekáme v jednom kroku všechny listy, tím nám vznikne nový strom zase s nějakými listy, takto osekáváme dokud máme co osekávat a buď nám zůstane jeden vrchol – jednoprvkový střed, nebo žádný vrchol – dvouprvkový střed kde středem jsou dva poslední osekane vrcholy, které budou spojené hranou. Když bude mít střed jeden vrchol, zobrazí se sám na sebe – bude fixovaným vrcholem. Když bude mít dva, každý se může zobrazit sám na sebe – 2 fixované vrcholy, nebo se můžou zobrazit na sebe navzájem – fixovaná hrana. \square

Příklad 2. Podstromy.

Postupujme sporem. Mějme tři podstromy A, B, C takové, že každé dva mají neprázdný průnik, ale průnik všech třech je prázdný. Pokud podstromy A a B mají průnik v bodě X , průnik podstromů B a C nesmí být v bodě X , jinak by byl průnik všech třech neprázdný, nechť mají průnik v bodě Y . Potom průnik C a A musí být zase v bodě jiném od X, Y , nebo průnik všech tří není prázdný. Takto nám ale vznikne cyklus obsahující body X, Y, Z a procházející přes podstromy A, B, C což je spor s tím, že máme podstromy stromu. \square