

DÚ Lineární algebra – Sada 2

Jan Romanovský

22. října 2025

(2.1) Hledáme uspoř. trojice (x, y, z) . Převedeme matici na odstupňovaný tvar a dále řešíme zpětnou substitucí:

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|c} -i & a & 1+i & 0 \\ 1 & 3i & b & 0 \\ i & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3i & b & 0 \\ -i & a & 1+i & 0 \\ i & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3i & b & 0 \\ -i & a & 1+i & 0 \\ 0 & a-3 & 2+i & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3i & b & 0 \\ 1 & ia & i-1 & 0 \\ 0 & a-3 & 2+i & 1 \end{array} \right) \sim \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3i & b & 0 \\ 0 & ia-3i & i-1-b & 0 \\ 0 & a-3 & 2+i & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3i & b & 0 \\ 0 & a-3 & 1+i+ib & 0 \\ 0 & a-3 & 2+i & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3i & b & 0 \\ 0 & a-3 & 1+i+ib & 0 \\ 0 & 0 & 1-ib & 1 \end{array} \right) \\ (1-ib)z = 1 \end{array}$$

i. $b = -i : 0z = 1$ – nelze

ii. $b \neq -i :$

$$z = \frac{1}{1-ib}$$

$$(a-3)y + (1+i+ib)z = 1$$

a. $a = 3$:

$$(1+i+ib)z = 1$$

$$\frac{(1+i+ib)}{(1-ib)} = 1$$

$$1+i+ib = 1-ib$$

$$2ib = -i$$

$$b = \frac{-1}{2}$$

$$z = \frac{1}{1+\frac{i}{2}} = \frac{2}{2+i} = \frac{2-i}{5}$$

$$y = t$$

$$x = -3iy + \frac{z}{2} = \frac{2-i-30it}{10}$$

b. $a \neq 3$:

$$y = \frac{-1-i-ib}{(1-ib)(a-3)}$$

$$x + 3iy + bz = 0$$

$$x = -3i \frac{-1-i-ib}{(1-ib)(a-3)} - b \frac{1}{1-ib}$$

$$x = \frac{3i-3-3b}{(1-ib)(a-3)} - \frac{b}{1-ib}$$

$$x = \frac{3i-3-3b-ab+3b}{(1-ib)(a-3)}$$

$$x = \frac{3i-3-ab}{(1-ib)(a-3)}$$

Když dáme vše dohromady: $P = \left\{ \left(\frac{3i-3-ab}{(1-ib)(a-3)}, \frac{-1-i-ib}{a-3}, \frac{1}{1-ib} \right); a \in \mathbb{C} \setminus \{3\}, b \in \mathbb{C} \setminus \{-i\} \right\} \cup \left\{ \left(\frac{2-i-30it}{10}, t, \frac{2-i}{5} \right); t \in \mathbb{C} \right\}$