

Diskrétní matematika - Domácí úkol VII

Odevzdat **24. 11. 2025** na cvičení / Moodle

KRÁTKÉ INSTRUKCE

Domácí úkoly slouží k tomu, abyste si v klidu zopakovali nové pojmy, zkusili je použít na konkrétních příkladech a postupně se naučili psát matematiku *exaktně a srozumitelně*. V matematice i v praxi je schopnost přehledně a jasně formulovat své myšlenky velmi cenná.

Úkoly můžete řešit sami, nebo ve skupině. Platí ale tyto podmínky:

- řešení sepisuje **každý samostatně**,
- **rozumím** tomu, co odevzdávám,
- jsem **schopen/schopna argumentovat** ke svému postupu,
- cvičící si vyhrazuje právo **zeptat se na vaše řešení**.

Domácí úkol můžete odevzdat na cvičení, anebo přes moodle (nejpozději večer před cvičením). Řešení může být čitelně psané rukou (a *dobře* vyfocené), nebo sepsané na počítači (např. v \TeX u — stejně se ho brzy budete potřebovat naučit, proč nezačít už teď?). Ideálně posílejte ve formátu **PNG** nebo **PDF**.

PŘÍKLADY

Příklad 1. Prolomení hotelového trezoru.

Hotelový trezor má 4-místný číselný kód. Každé místo na zámku může být libovolná číslice od 0 do 9 (celkem tedy $10^4 = 10\,000$ možných kódů).

Zloděj pozoroval majitele a zjistil dva klíčové údaje o jeho kódu:

- (1) Majitel je pověrčivý a kód *určitě* obsahuje jeho šťastné číslo **7**.
- (2) Kód *určitě* obsahuje i jeho neštastné číslo **4**.

Zloděj tedy ví, že platný kód musí obsahovat **alespoň jednu číslici '7'** A **alespoň jednu číslici '4'**. (Například kódy '7412', '7740' nebo '4874' jsou platné, ale '1234' nebo '7788' nejsou).

Otázka: Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný 4-místný kód splňuje obě tyto podmínky najednou?

Příklad 2. Popletené písemky.

Profesor má ve třídě n studentů. Každý odevzdal písemku. Profesor všechny písemky opravil, ale při vracení je omylem zamíchal. Nyní je rozdá zpět studentům zcela náhodným způsobem (každý student dostane právě jednu písemku, každá permutace je stejně pravděpodobná).

Otázka: Jaká je **střední hodnota** počtu studentů, kteří dostanou zpět *svou vlastní* písemku?

(*Tip: Nesnažte se počítat pravděpodobnost, že přesně k studentů dostane svou písemku. Zkuste problém rozložit na n menších, jednodušších náhodných veličin a využít linearity střední hodnoty.*)