DÚ Lineární algebra – Sada 4

Jan Romanovský

5. listopadu 2025

(4.1) Označme $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ a $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Dále si přepíšeme podmínky ze zadání pomocí násobení matic.

$$\forall s, t \in \mathbb{Z}_7 : \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3s \\ 4t \\ s+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_7^3 : \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \end{pmatrix}; t \in \mathbb{Z}_7 \tag{2}$$

Roznásobením podmínky 2 získáme soustavu dvou rovnic.

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 3t \\ dx + ey + fz &= 4t \end{aligned}$$

$$4ax + 4by + 4cz = 3dx + 3ey + 3fz$$

Protože x, y, z jsou nezávislé složky vektoru můžeme rovnici rozkouskovat na tři pro každou složku vektoru, címž dostaneme následující tvar pro matici A.

$$\begin{aligned} 4ax = 3dx &\implies a = 6d \\ 4by = 3ey &\implies b = 6e \\ 4cz = 3fz &\implies c = 6f \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6d & 6e & 6f \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Nyní tento tvar matice A dosadíme do rovnice dané podmínkou 1 a roznásobíme.

$$\begin{aligned} 4ds + 3et + 6fs + 6ft &= 0 \\ 3ds + 4et + fs + ft &= 0 \end{aligned}$$

Vidíme, že rovnice druhá rovnice je šestinásobkem první, takže stačí počítat s jednou. Máme tedy jednu rovnici o třech neznámých, která ale musí platit pro každou dvojici hodnot parametrů s, t. Dosadíme tedy BÚNO $(s, t) = (0, 1), (s, t) = (1, 0)$ (všechna jiná dosazení už by byly lin. komb. těchto dvou a $(0, 0)$ nám dá rci $0 = 0$).

$$\begin{aligned} 3e + 6f &= 0 \\ 4d + 6f &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3e &= 4d \\ e &= 6d \\ f &= 4d \end{aligned}$$

Zbude nám tedy parametr d. Ještě vyloučíme nulovou matici, která by dosud byla přípustná, ale když ji dosadíme nesplní ani jednu podmínku (přepsaní podmínek ze zadání nebylo úplné – vytáhli jsme si z něj nutné, ale ne dostačující podmínky), řešení tedy bude následujícího tvaru.

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 6d & d & 3d \\ d & 6d & 4d \end{pmatrix}; d \in \mathbb{Z}_7 \setminus \{0\} \right\}.$$