Cvičení k přednášce NMAG111+NMAG113 Lineární algebra 1

Zadání

Verze ze dne 26. září 2025

1 Opakování: analytická geometrie

Cíle cvičení:

- zopakovat středoškolské metody řešení soustav lineárních rovnic v $\mathbb{R}$,
- posílit geometrickou představu řešení soustav jako hledání průniku nadrovin.

Řešené příklady:

Úloha 1.1. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ přímku p s parametrickým vyjádřením $p = \{(1,2) + t \cdot (1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(a) Určete obecné vyjádření přímky p,

(b) najděte průsečíky přímky p s osou x a osou y,

(c) rozhodněte, které z bodů $(2,3)$, $(3,2)$ a $(-1,1)$ leží na p.

Úloha 1.2. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ přímku q s obecným vyjádřením $q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 3\}$.

(a) Určete parametrické vyjádření přímky q,

(b) najděte průsečík přímky q s přímkou p z předchozí úlohy,

(c) vyřešte v reálných číslech soustavu rovnic $\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 3 \\ x & - & y & = & -1 \end{array}$.

Úloha 1.3. Uvažujme v $\mathbb{R}^3$ rovinu r s obecným vyjádřením $r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 1\}$.

(a) Určete parametrické vyjádření roviny r,

(b) rozhodněte, které z bodů $(1,1,1)$ a $(2,2,2)$ leží v rovině r.

Úloha 1.4. Uvažujme v $\mathbb{R}^3$ rovinu v s parametrickým vyjádřením

$$v = \{(3,-1,1) + s \cdot (1,1,2) + t \cdot (1,0,-1) \mid s,t \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Určete obecné vyjádření roviny v,

(b) najděte parametrické vyjádření přímky dané průsečíkem roviny v s rovinou r z předchozího příkladu.

Úloha 1.5. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & + & y & - & z & = & 6. \\ 3x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

Jak lze tuto úlohu geometricky interpretovat?

Další základní příklady k počítání:

Úloha 1.6. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ dvě přímky s obecným vyjádřením:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y = 5\}, \quad T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = -4\}$$

(a) Určete parametrické vyjádření přímek S a T,

(b) najděte průsečík přímek $S \cap T$.

Úloha 1.7. Mějme v $\mathbb{R}^3$ tři roviny s obecným vyjádřením: $R_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 1\}$, $R_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 3\}$, $R_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 3y + 2z = 5\}$.

(a) Určete nějaké parametrické vyjádření těchto rovin.

(b) Najděte parametrický popis průsečíků $R_i \cap R_j$ pro $i \neq j$ a průsečík $R_1 \cap R_2 \cap R_3$. Je-li průsečík přímkou, zapište její parametrický zápis pomocí vektorů.

Úloha 1.8. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic:

(a) $\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 2, \\ x & + & 2y & + & 7z & = & 4 \end{array}$ (b) $\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 2. \\ x & + & 2y & + & 7z & = & 5 \end{array}$

Obtížnější příklady:

Úloha 1.9. Najděte v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ všechna reálná řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & 3z & = & a \\ x & - & ay & + & z & = & 2 \end{array}$$

Příklady na jiné téma, pokud analytickou geometrii ovládáte:

Úloha 1.10. Spočítejte v komplexním oboru: hodnotu výrazů $c + d$, $c \cdot d$, $\frac{1}{c}$, $\frac{c}{d}$, c^{50} pro komplexní čísla $c = 1 + i$, $d = 2 - i$ a rovnici $1 + 2i + (2 + 3i)x = 4 - i$.

Úloha 1.11. Počítání s komplexními čísly lze interpretovat geometricky.

(a) Co znamená geometricky sčítání a odčítání komplexních čísel?

(b) Jak lze interpretovat násobení? Pokud netušíte, připomeňte si goniometrický zápis, v tom je geometrická interpretace násobení vidět lépe.
Návodná otázka: co s nějakým komplexním číslem dělá opakované násobení číslem: i, $2i$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\ldots$?

Úloha 1.12. Spočítejte v komplexním oboru soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccc} ix & + & (1+i)y & = & 2+i \\ (2-i)x & + & 3y & = & 5-4i. \end{array}$$

Tady se vyplatí zamyslet: násobení nebo dělení rovnice komplexním dvojčlenem dá spoustu práce, je možné nějakým postupem snížit počet takových úprav?

Výsledky:

1.1. ***(a)*** $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x-y=-1\}$ ***(b)*** $(-1,0)$ a $(0,1)$ ***(c)*** leží: $(2,3)$; neleží: $(3,2)$ a $(-1,1)$

1.2. ***(a)*** $\{(3,0)+t\cdot(2,-1) \mid t\in\mathbb{R}\}$ ***(b)*** $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ ***(c)*** $(x,y)=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$

1.3. ***(a)*** $\{(1,0,0)+s\cdot(1,0,1)+t\cdot(0,1,1) \mid s,t\in\mathbb{R}\}$ ***(b)*** leží: $(1,1,1)$; neleží: $(2,2,2)$

1.4. ***(a)*** $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-3y+z=7\}$ ***(b)*** $\{(4,0,3)+t\cdot(1,1,2) \mid t\in\mathbb{R}\}$

1.5. $(x,y,z)=(2,1,-1)$

1.6. ***(a)*** například $S=\{(5,0)+t\cdot(3,-1) \mid t\in\mathbb{R}\}$ a $T=\{(0,4)+t\cdot(1,2) \mid t\in\mathbb{R}\}$ ***(b)*** $(-1,2)$

1.7. ***(a)*** např. $R_1=\{(0,1,0)+s\cdot(1,0,2)+t\cdot(-1,2,0) \mid s,t\in\mathbb{R}\}$,
$R_2=\{(3,0,0)+s\cdot(-2,0,1)+t\cdot(-1,1,0) \mid s,t\in\mathbb{R}\}$,
$R_3=\{(1,0,1)+s\cdot(-2,0,3)+t\cdot(1,1,0) \mid s,t\in\mathbb{R}\}$ ***(b)*** např.
$R_1\cap R_2=\{(1,0,1)+t\cdot(3,-5,1) \mid t\in\mathbb{R}\}$, $R_1\cap R_3=\{(1,0,1)+t\cdot(1,7,9) \mid t\in\mathbb{R}\}$,
$R_2\cap R_3=\{(1,0,1)+t\cdot(4,2,-3) \mid t\in\mathbb{R}\}$; $R_1\cap R_2\cap R_3=\{(1,0,1)\}$

1.8. ***(a)*** $\emptyset$ ***(b)*** $\{(-1,3,0)+t\cdot(3,-5,1) \mid t\in\mathbb{R}\}$

1.9. parametrický popis řešení $\left\{(\frac{2+a^2}{1+a^2},-\frac{a}{1+a^2},0)+s\cdot(-1-3a,a-3,1+a^2) \mid s\in\mathbb{R}\right\}$

1.10. $c+d=3$, $c\cdot d=3+i$, $\frac{1}{c}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$, $\frac{c}{d}=\frac{1}{5}+\frac{3i}{5}$, $c^{50}=2^{25}i$, řešení rovnice $x=-\frac{3}{13}-\frac{15i}{13}$

1.12. $x=1$, $y=1-i$