DÚ Lineární algebra – Sada 2

Jan Romanovský

22. října 2025

(2.2) (a) Obecnou rovnici roviny zjistíme přes normálový vektor roviny $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Víme, že směrový vektor přímky leží v rovině, tj. je kolmý na normálový vektor roviny. To nám dává první rovnici (skalární součin):

$$a(1) + b(0) + c(1) = 0$$

$$a = -c$$

Dále víme že bod $(1, 2, 4)$ leží na přímce p, leží tak i v rovině, z toho dostaneme druhou rovnici:

$$a(1) + b(2) + c(4) + d = 0$$

$$a + 2b + 4c + d = 0$$

Máme tedy 2 rovnice o 4 neznámých, první dosadíme do druhé

$$2b + 3c + d = 0$$

$$d = u$$

$$c = v$$

$$b = \frac{3v + u}{2}$$

$$a = -v$$

Obecná rovnice roviny obsahující přímku p bude tedy:

$$-vx + \frac{3v + u}{2}y + vz + u = 0$$

ještě nesmíme zapomenout vyloučit případy, kdy tato rovnice nezadává rovinu (tj. zadává $\emptyset$ nebo $\mathbb{R}^3$ – v tomhle případě jen $\mathbb{R}^3$):

$$P = \left\{ -vx + \frac{3v + u}{2}y + vz + u = 0; u, v \in \mathbb{R}, (u, v) \neq (0, 0) \right\}$$

(b) Rovnice, které hledáme, budou obecné rovnice rovin, jejich průsečnice bude přímka p, tj. musí obě obsahovat přímku p a nesmí se rovnat (pokud se roviny nerovnají, je jejich průsečíkem jedna přímka, pokud obě roviny obsahují přímku p a nerovnají se, jejich průsečíkem, tj. řešením soustavy jejich obecných rovnic, bude přímka p), generátor rovin obsahujících přímku p jsme ale přesně vytvořili v podúloze (a), vyberme lib. $(u, v) = (1, 1)$ a $(u, v) = (1, 2)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & \frac{7}{2} & 2 & -1 \end{array} \right)$$