Cvičení k přednášce NMAG111+NMAG113 Lineární algebra 1

Zadání
Verze ze dne 26. září 2025

7 Vektorové prostory

Cíle cvičení:

- porozumět pojmům podprostor, lineární kombinace, lineární obal a množina generátorů.

Řešené příklady:

Úloha 7.1. Pro $\mathbf{U} := \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ rozhodněte, zda (a) $\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} \in \mathbf{U}$ a (b) $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbf{U}$, je-li $\mathbf{U}$ podprostor aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

Úloha 7.2. Rozhodněte, zda je podprostorem reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ množina vektorů:

$$\text{(a)}\quad \left\{\begin{pmatrix}x\\x+y\\2y\end{pmatrix} \mid x,y\in\mathbb{R}\right\},\qquad \text{(b)}\quad \left\{\begin{pmatrix}x\\x+1\\2y\end{pmatrix} \mid x,y\in\mathbb{R}\right\},\qquad \text{(c)}\quad \left\{\begin{pmatrix}x^2\\2x\\x\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{R}\right\},$$

$$\text{(d)}\quad \left\{\begin{pmatrix}0\\-x\\x\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{R}\right\},\qquad \text{(e)}\quad \mathbb{Q}^3,\qquad \text{(f)}\quad \left\{\begin{pmatrix}x\\x+y\\2y\end{pmatrix} \mid x,y\in\mathbb{Q}\right\},\qquad \text{(g)}\quad \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

V případech, kdy se jedná o podprostor, jej zapište jako lineární obal vhodných vektorů.

Úloha 7.3. Rozhodněte, zda množina X generuje vektorový prostor $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$, jestliže

$$\text{(a)}\quad X=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\right\},\quad \text{(b)}\quad X=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}\right\},\quad \text{(c)}\quad X=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Úloha 7.4. Rozhodněte, zda je ve vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_7^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ vektor $\mathbf{v}$ lineární kombinací vektorů množiny

$$X=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\1\\1\end{pmatrix}\right\},$$

jestliže

$$\text{(a)}\quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}6\\6\\2\\0\end{pmatrix},\qquad \text{(b)}\quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}0\\6\\2\\6\end{pmatrix},\qquad \text{(c)}\quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \text{(d)}\quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\6\\2\\6\end{pmatrix}.$$

V případě, že ano, určete koeficienty této lineární kombinace.

Úloha 7.5. Rozhodněte, zda je množina U podprostorem aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$, jestliže víte, že
(a) $U=\{(0,0,0)^T\}$, (b) $U=\{(0,0,0)^T,(1,2,3)^T\}$, (c) $|U|=4$ a $U\subseteq\mathbb{Z}_5^3$,
(d) $U=\{(0,0,0)^T,(1,2,3)^T,(2,4,1)^T,(3,1,4)^T,(4,3,2)^T\}$, (e) $|U|=125$ a $U\subseteq\mathbb{Z}_5^3$, (f) $U=\emptyset$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 7.6. Vyjádřete ve vektorovém prostoru $\mathbb{Q}^3$ vektor $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ jako lineární kombinaci vektorů

$$\text{(a)}\quad \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right),\qquad \text{(b)}\quad \left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}\right),\qquad \text{(c)}\quad \left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Úloha 7.7. Rozhodněte, zda jsou pro obecné těleso T podprostorem

(a) řešení homogenní soustavy rovnic o n neznámých v prostoru T^n,

(b) řešení nehomogenní soustavy rovnic o n neznámých v prostoru T^n,

(c) čtvercové matice, které komutují s danou čtvercovou maticí A, ve vektorovém prostoru všech čtvercových matic stejného stupně,

(d) reálné polynomy v reálném vektorovém prostoru spojitých reálných funkcí,

(e) sudé funkce v reálném vektorovém prostoru všech reálných funkcí.

Úloha 7.8. Rozhodněte, zda je podprostorem

(a) podmnožina všech reálných posloupností splňujících rekurentní vztah $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} = 5a_{n+1} - a_n$ v prostoru $\mathbb{R}^\omega$.

(b) podmnožina všech reálných posloupností splňujících rekurentní vztah $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} = 5a_{n+1} - 1$ v prostoru $\mathbb{R}^\omega$.

(c) podmnožina všech horních trojúhelníkových matic v prostoru všech čtvercových matic $n \times n$ nad T.

(d) podmnožina všech neklesajících funkcí v prostoru všech funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

(e) podmnožina všech polynomů, jejichž stupeň není prvočíslo, v prostoru všech polynomů v proměnné x s koeficienty v obecném tělese T.

Obtížnější příklady:

Úloha 7.9. Označme A, B nenulové matice, R regulární matici. Ukažte na příkladech, že (a) $\operatorname{Ker} AR$ nemusí být rovno $\operatorname{Ker} A$, (b) $\operatorname{Ker} BA$ nemusí být rovno $\operatorname{Ker} A$, (c) $\operatorname{Im} RA$ nemusí být rovno $\operatorname{Im} A$, (d) $\operatorname{Im} AB$ nemusí být rovno $\operatorname{Im} A$.

Úloha 7.10. Nechť V je podprostor aritmetického vektorového prostoru T^n. Existuje soustava lineárních rovnic nad T, která má řešení právě všechny vektory z V? Nalezněte ji pro podprostory z úlohy 7.2.

Úloha 7.11. Ukažte, že pro libovolnou čtvercovou matici A a libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $\operatorname{Ker} A^n \leq \operatorname{Ker} A^{n+1}$, a $\operatorname{Im} A^n \geq \operatorname{Im} A^{n+1}$. Navíc, pokud pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $\operatorname{Im} A^n = \operatorname{Im} A^{n+1}$, pak pro všechna $j \in \mathbb{N}$ platí, že $\operatorname{Im} A^n = \operatorname{Im} A^{n+j}$. Zformulujte a dokažte i analogické tvrzení pro Ker.

Úloha 7.12. Najděte matici A takovou, aby $\operatorname{Im} A = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A^T = \operatorname{Ker} A^T$. Může být taková matice reálná? A komplexní?

Výsledky:

7.1. ***(a)*** ano ***(b)*** ne

7.2. ***(a)*** ano ***(b)*** ne ***(c)*** ne ***(d)*** ano ***(e)*** ne ***(f)*** ne ***(g)*** ano

7.3. ***(a)*** ne ***(b)*** ne ***(c)*** ano

7.4. ***(a)*** ano ***(b)*** ano ***(c)*** ne ***(d)*** ne

7.5. ***(a)*** ano ***(b)*** ne ***(c)*** ne ***(d)*** ano ***(e)*** ano ***(f)*** ne

7.6. ***(a)*** $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ***(b)*** $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, ***(c)*** $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

7.7. (b) ne, ostatní ano.

7.8. (a), (c) ano, ostatní ne.

7.9. ***(a)*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ***(b)*** $A = I_2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ ***(c)*** $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
(d) $A = I_2$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

7.12. Nad $\mathbb{R}$ taková matice neexistuje. Nad $\mathbb{C}$ jde např. o $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$.