

Úvod do sem patří název

Zápisky z přednášky Jméno Příjmení učitele

Jméno Příjmení

Úvodní informace

Značení

Kapitola 1

Úvod, reálná čísla, funkce

Poznámka 1. Značení:

- $P, Q \dots$ výroky, $x, y, z \dots$ čísla (prvky), $A, B, M \dots$ množiny
- $P \& Q \dots$ P zároveň s Q
- $P \vee Q \dots$ P nebo Q
- $P \implies Q \dots$ P implikuje Q
- $P \iff Q \dots$ P je ekvivalentní s Q
- $\neg P \dots$ negace P
- $\forall x \dots$ pro všechna x
- $\exists x \dots$ existuje x
- $\exists!x \dots$ existuje právě 1 x
- $x \in A \dots$ x je prvkem A
- $A \subset B \dots$ A je podmnožina B
- $\{a_1, a_2, \dots\} \dots$ množina definována výčtem prvků a_1, a_2, \dots
- $x \in M, \varphi(x) \dots$ množina definována vlastností $\varphi(x)$
- $\emptyset, \{\} \dots$ prázdná množina
- $A \cup B \dots$ sjednocení množin A, B
- $A \cap B \dots$ průnik množin A, B
- $A \setminus B \dots$ rozdíl množin (prvky z A , které nejsou v B)

Axiom 1 (Algebraické vlastnosti \mathbb{R}). Existuje množina reálných čísel \mathbb{R} , která obsahuje prvky 0 a 1, a jsou na ní definovány operace \cdot a $+$ tak, že $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ platí:

- i. $x + y = y + x, x \cdot y = y \cdot x$
- ii. $x + (y + z) = (x + y) + z, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- iii. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- iv. $0 + x = x, 1 \cdot x = x$
- v. $0 \cdot x = 0$ a naopak $x \cdot y = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$

Axiom 2 (Uspořádání \mathbb{R}). Na množině \mathbb{R} je definována relace " $<$ " tak, že $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ platí:

- i. $x = y$, nebo $x < y$, nebo $y < x$
- ii. $x < y \& y < z \implies x < z$
- iii. $x < y \implies x + z < y + z$
- iv. $0 < x \& 0 < y \implies 0 < x \cdot y$

Poznámka 2. $x \leq y$ je zkratka za $(x < y) \vee (x = y)$. Z věty A2 opět lze vyvodit další známé poučky, např. $x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, apod.

- Poznámka 3 (Význačné podmnožiny \mathbb{R}).**
- přirozená čísla $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
 - celá čísla $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, \dots\}$
 - racionální čísla $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$
 - intervaly s krajními body $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$, resp. \dots , resp. neomezené pozor hranaté závorky! a ne zobáčky – uvidíme

Definice 1 (Absolutní hodnota). Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom $x := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Lemma 1. Nechť $a \geq 0, b \in \mathbb{R}$ lib. Potom:

$$|b| \leq a \iff -a \geq b \geq a.$$

Důkaz. (rozborem případů)

$$b \geq 0$$

$$b < 0$$

□

Věta 1 (Trovjúhelníková nerovnost). $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

- $|x \pm y| \leq |x| + |y|$
- $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$

- Důkaz.*
- $|x| \leq |x|, |\pm y| \leq |y| \implies (L.1.1.) - |x| \leq x \leq |x|, -|y| \leq \pm y \leq |y|$, když sečtu
 - $-|x| - |y| \leq x \pm y \leq |x| + |y| \implies (L.1.1.) |x \pm y| \leq |x| + |y|$
 - TRIK $\mp y = x - (x \pm y)$

□

- Axiom 3 (B. Odmocnina v \mathbb{R}).**
- Nechť $n \in \mathbb{N}$ je sudé. Pak $\forall a \in [0, \infty) \exists! b \in [0, \infty)$ takové, že $b^n = a$
 - Nechť $n \in \mathbb{N}$ je liché. Pak $\forall a \in \mathbb{R} \exists! b \in \mathbb{R}$ takové, že $b^n = a$ ($b = \sqrt[n]{a}$).

- Poznámka 4.**
- $\sqrt{1} = 1, \sqrt[3]{-1} = -1, \sqrt{-1}$ není definována
 - $\sqrt[n]{x^n} = x \forall x \in \mathbb{R}, n$ liché
 - $\sqrt{x^2} = |x|$

Věta 2. Existují iracionální čísla.

- Axiom 4 (Axiomy N).**
- $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$ (Archimédova vlastnost)

- Nechť $M \subseteq \mathbb{N}$ splňuje:
 - i. $1 \in M$
 - ii. $\forall n \in \mathbb{N} : n \in M \implies n + 1 \in M$
- potom $M = \mathbb{N}$. (princip indukce)

- Poznámka 5** (alternativní ekvivalentní formulace).
- $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon > 1$

- Nechť $\phi(n)$ je formule s proměnnou $n \in \mathbb{N}$, nechť $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť platí:
 - i. $\phi(n)$
 - ii. $\forall n \geq n_0 : \phi(n) \implies \phi(n + 1)$
- potom platí $\phi(n) \forall n \geq n_0$.

Poznámka 6 (indukce ještě jinak). $\forall M \subseteq \mathbb{N}, M \neq \emptyset : M$ má nejmenší prvek.

TODO k větě 1.2. doplnit důkaz o iracionálnosti odmocniny ze 3

Věta 3. Každý otevřený interval obsahuje nekonečně mnoho racionálních a iracionálních čísel.

pro iracionální. BÚNO: $I = (a, b), 0 \leq a < b$

položme $x_n = \frac{n\sqrt{3}}{m}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ velké tak, že $m > \frac{2\sqrt{3}}{b-a} \iff \frac{2\sqrt{3}}{m} < b - a$

$M = \{n \in \mathbb{N} : x_n \geq b\}$, nechť n_0 je nejmenší prvek M (viz A3)

tvrdíme: $x_{n_0-1}, x_{n_0-2} \in (a, b)$, tj. $a < x_{n_0-2} < x_{n_0-1} < b$

zřejmě $x_n \notin \mathbb{Q}, \forall n \neq 0$

$$a < \frac{n_0-2}{m}\sqrt{3} = \frac{n_0}{m}\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{m}, \text{ první zlomek } \geq b, \text{ druhý } < b-a \implies > a \quad \square$$

Definice 2. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Potom

- $x \in M$ nazveme maximum (největší prvek) M , pokud $\forall y \in M : y \leq x$
- $x \in M$ nazveme minimum (nejmenší prvek) M , pokud $\forall y \in M : y \geq x$
- $K \in \mathbb{R}$ nazveme horní odhad M , jestliže $\forall x \in M : x \leq K$
- $K \in \mathbb{R}$ nazveme dolní odhad M , jestliže $\forall x \in M : x \geq K$

Množina M se nazve

- shora omezená, má-li nějaký horní odhad
- zdola omezená, má-li nějaký dolní odhad
- omezená, má-li horní i dolní odhad.

Příklad 1. • $M = [0, 1)$

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Definice 3. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, Číslo $S \in \mathbb{R}$ nazveme supremum M , značíme $S = \sup M$, jestliže:

- i. $\forall x \in M : x \leq S$
- ii. $\forall S' < S : \exists y \in M : y > S'$

čili S je nejmenší horní odhad M .

Poznámka 7. • Supremum užitečně zobecňuje pojem maximum.

- Existuje nejvýše jedno $\sup M$.

Axiom 5 (Úplnost $\mathbb{R} = \text{Axiom suprema}$). Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a shora omezená. Pak $\exists! S \in \mathbb{R}$ takové, že $S = \sup M$.

Definice 4. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, Číslo $s \in \mathbb{R}$ nazveme infimum M , značíme $s = \inf M$, jestliže:

- i. $\forall x \in M : x \geq s$
- ii. $\forall s' > s : \exists y \in M : y < s'$

čili s je největší dolní odhad M .

Axiom 6 (A4'). Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a zdola omezená. Pak $\exists! s \in \mathbb{R}$ takové, že $s = \inf M$.

Definice 5 (Rozšířená reálná čísla). $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} + \{-\infty, +\infty\}$. Uspořádání a aritmetika v \mathbb{R}^* :

- $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty, -\infty < +\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R} : x + \infty = +\infty, x - \infty = -\infty, +\infty + \infty = +\infty, -\infty - \infty = -\infty$
- $\forall x > 0 x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \pm\infty \cdot (+\infty) = \pm\infty, \pm\infty \cdot (-\infty) = \mp\infty$
- $\forall x < 0 x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x}{\pm\infty} = 0$

Nedefinováno zůstává $+\infty - \infty, -\infty + \infty, 0 \cdot (\pm\infty), \frac{x}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Definice 6. Nechť X, Y množiny. Funkce $f : X \rightarrow Y$ je libovolný předpis, který každému $x \in X$ přiřadí jednoznačně určený prvek z Y . Dále definujme

- obraz množiny $M \subset X : f(M) = \{f(x); x \in M\}$
- vzor množiny $N \subset Y : f^{-1}(N) = \{x, f(x) \in N\}$ (zde „ -1 “ není inverzní funkce, toto můžu říct i pro neinvertovatelnou funkci)

Funkce je

- prostá (injektivní), pokud $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$
- "na" (surjektivní), pokud $f(X) = Y$, tj. $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$
- je vzájemně jednoznačná (bijektivní), je-li prostá i "na"

TODO složené zobrazení def. obor?, inverzní a invertovatelná funkce

Kapitola 2

03

Kapitola 3

04

Kapitola 4

05

Kapitola 5

Věta 4 (L'Hospital). Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechť \exists vlastní $f'(x), g'(x)$, navíc $g'(x) \neq 0 \forall x_0 \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$. Nechť platí bud'

- a) $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$, nebo
- b) $|g(x)| \rightarrow +\infty, x \rightarrow x_0$.

Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

má-li pravá strana smysl.

Důkaz. 1. $x \rightarrow x_0^+, x_0 \in \mathbb{R}$, případ a); $\varepsilon > 0$ dáno:

$\exists \delta > 0$ t. z. $\forall c \in \mathcal{P}_+(x_0, \delta)$ platí:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$$

TRIK do/předefiniceinujme $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (nemá vliv na $\lim_{x \rightarrow x_0}$)

$\implies f, g$ spojité v $[x_0, x_0 + \delta], \delta > 0$ malé

- v bodě x_0 zprava $(f(x), g(x)) \rightarrow 0 = f(x_0) = g(x_0), x \rightarrow x_0$
- v bodech $x \in (x_0, x_0 + \delta) \iff$ Věta 4. 1. ($\exists f', g'$ vlastní)

Bud' $x \in \mathcal{P}_+(x_0, \delta)$ pevné, libovolné

Aplikuji větu 6. 8. (C. o stř. h.) na $[x_0, x]$

$\implies \exists x \in [x_0, x] \subset \mathcal{P}_+(x_0, \delta)$ t. z. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) - f(x)}{g(x_0) - g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$

2. $x \rightarrow +\infty$, případ a);

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})} = (LP1.) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(\frac{1}{y}) \cdot \frac{-1}{y^2}}{g'(\frac{1}{y}) \cdot \frac{-1}{y^2}} = (L2.3.) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3. $x \rightarrow x_0^+$, případ b), tj. $|g(x)| \rightarrow +\infty, x \rightarrow x_0$

Užiji V. 6. 8. na $[x, y]$:

$$\exists c \in (x, y) \text{ t. z. } \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \implies$$

pujčím si $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(c)}{g'(c)}(1 - \frac{g(y)}{g(x)}) = P_1 + P_3 \cdot P_2$, fixuji y blízko $x_0 \implies c$ blízko x_0 , když $x \rightarrow x_0 \implies P_3 \rightarrow L, P_1 \rightarrow 0, P_2 \rightarrow 1$, a tedy PS blízko L .

□

Poznámka 8. Úmluva: $I, J \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly.

Definice 7. Řekneme, že $f(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost, pokud $\forall a, b \in I, \forall \gamma$ mezi $f(a), f(b) \exists c$ mezi a, b t. ž. $f(c) = \gamma$. (Darbouxova věta: $f(x)$ spoj. v $I \implies$ má v I Darboux. vlast.)

Věta 5 (*). Nechť I je otevřený interval, $f(x)$ je spojitá v I , nechť $\exists f'(x)$ vlastní $\forall x \in I$. Pak $f'(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost.

Věta 6 (Monotonie a znaménko derivace). Nechť $I \subset \mathbb{R}$ lib. interval, $f(x)$ je spojité v I , nechť $\exists f' > 0$ (resp. $\geq 0, \leq 0, < 0$) $\forall x$ vnitřní bod I . Potom $f(x)$ je rostoucí (resp. neklesající, nerostoucí, klesající) v I .

Důkaz. Nechť $x_1 < x_2 \in I \stackrel{?}{\implies} f(x_1) < f(x_2)$.

Užiji V. 6. 5. (Lagrange) na $[x_1, x_2] \subset I$ – spojitost OK, a taky $\exists f'(x) \forall x \in (x_1, x_2) \subset I$
 $\implies \exists c \in (x_1, x_2)$ t. ž. $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \iff f(x_1) - f(x_2) = f'(c) \cdot (x_1 - x_2) > 0$. \square

Příklad 2. $f(x) = x^n, I = [0, +\infty), n \in \mathbb{N}$

$f'(x) = nx^{n-1} > 0, x \in (0, +\infty)$ – otevřený interval je právě vnitřek intervalu I
 \implies (V6.10.) $f(x)$ rostoucí v I .

Definice 8. Funkce $f(x)$ se nazve konvexní (resp. ryze konvexní, konkávní, ryze konkávní) v I , jestliže $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq$ (resp. $<, \geq, >$) $\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Věta 7 (Konvexit a monotonie derivace). Nechť I interval s krajními body $a < b$. Nechť $f(x)$ spojitá v I . Nechť $\exists f'(x) \forall x \in (a, b)$ a je rostoucí (resp. neklesající, klesající, nerostoucí). Potom $f(x)$ je ryze konvexní (resp konvexní, ryze konkávní, konkávní) v I .

Důkaz. Nechť $x_1 < x_2 < x_3 \in I \stackrel{?}{\implies} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Užiji 2x V. 6. 5. (Lagrange) na $[x_1, x_2]$, pak na $[x_2, x_3]$: $\exists c \in (x_1, x_2)$ t. ž. $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$
a $\exists d \in (x_2, x_3)$ t. ž. $\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(d)$.

Zřejmě $d > c \implies f'(c) < f'(d) \implies$ to co dk. \square

Příklad 3. $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ – spojité v \mathbb{R}

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+|x|)^2} \cdot |x'| = \frac{-\operatorname{sgn} x}{(1+|x|)^2} (x \neq 0) = \begin{cases} \frac{-1}{(1+|x|)^2}, & x > 0 \\ \frac{1}{(1+|x|)^2}, & x < 0 \end{cases}$$

V. 6. 11. $\implies f$ je ryze konvexní v $(-\infty, 0)$ a v $(0, +\infty)$ (ale ne už v $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

Poznámka 9 (Ekvivalentní definice konvexity). $\forall a, b \in I, \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$.

Důkaz. Důkaz jako cvičení pro čtenáře, napovíme $x_1 = a, x_3 = b, x_2 =$ nějaký zlomek s λ □

Věta 8 (Konvexita a znaménko druhé derivace). Nechť $f'(x)$ je spojité v I , nechť $\exists f''(x)$ vlastní uvnitř I . Nechť platí $f''(x) > 0$ (resp. $\geq, <\leq$) $\forall x \in I$ uvnitřní. Pak $f(x)$ je v I ryze konvexní (resp. konvexní, ryze konkávní, konkávní).

Důkaz. Označ \tilde{I} vnitřek I .

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' > 0 \text{ v } \tilde{I}, \text{ konečné} \\ \implies f'(x) &\text{ spojité (V. 5. 1.) a je rostoucí v } \tilde{I} \text{ (V. 6. 10.)} \\ \implies f(x) &\text{ je ryze konvexní v } I \text{ (V. 6. 11.).} \end{aligned}$$
□

Definice 9. Řekneme, že x_0 je inflexní bod $f(x)$, jestliže

- i. $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}^*$
- ii. $\exists \delta > 0$ t. ž. na jednom z intervalů $(x_0 - \delta, x_0), (x_0, x_0 + \delta)$ je $f(x)$ ryze konvexní a na druhé ryze konkávní.

Kapitola 6

Posloupnosti

Definice 10. Posloupnost je funkce $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$, značíme $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nebo $\{a_n\}_{n=n_0}^\infty$, krátce $\{a_n\}$.

- Příklad 4.** 1. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n$
2. rekurentně: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

Definice 11. Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ se nazve limita posloupnosti $\{a_n\}$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies a_n \in \mathcal{U}(a, \varepsilon).$$

Značíme $a_n \rightarrow a$ nebo $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$.

Poznámka 10. $a \in \mathbb{R} \dots \{a_n\}$ konverguje

$a = \pm + \infty \dots \{a_n\}$ diverguje

Poznámka 11 (Ekvivalentní definice (pokud $a \in \mathbb{R}$)).

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

Obecně: $a_n \rightarrow a \iff \forall \varepsilon > 0$ platí $a_n \in \mathcal{U}(a, \varepsilon)$ pro všechna n až na konečně mnoho výjimek

Důkaz. \implies “ výjimečně jen pro $n < n_0$ (těch je konečně)

„ \iff “ $V = \{n; a_n \notin \mathcal{U}(a, \varepsilon)\} \subset \mathbb{N}$ konečné

volme $n_0 > \max V \in \mathbb{N}$

□

Poznámka 12. Pro limity posloupností platí analogie vět pro limity funkcí s analogickými důkazy.

- i. (VoAL, V. 2. 3., V. 2. 7.) $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \implies$
 1. $a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b$
 2. $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$
 3. $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$, má-li PS smysl
- ii. (V. 2. 9.) je-li $\alpha \leq a_n \leq \beta$ od jistého n_0 , $a_n \rightarrow a \implies \alpha \leq a \leq \beta$
- iii. (V. 2. 10.) je-li $b_n \leq a_n \leq c_n$ od jistého n_0 , $b_n \rightarrow a, c_n \rightarrow a \implies a_n \rightarrow a$
- iv. nechť $a_n \rightarrow 0$, nechť $a_n > 0$ (resp. < 0) od jistého $n_0 \implies \frac{1}{a_n} \rightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$)

Důkaz. cíl: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : n \geq n_0 \implies \frac{1}{a_n} \in \mathcal{U}(+\infty, \varepsilon)$, tj. $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \varepsilon > 0 \text{ dáno: } &\exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \implies a_n \in \mathcal{U}(0, \varepsilon), \text{ tj. } |a_n| < \varepsilon \implies -\varepsilon < a_n < \varepsilon \\ &\exists n_2 \in \mathbb{N} : n \geq n_2 \implies a_n > 0 \implies 0 < a_n < \varepsilon \end{aligned}$$

polož $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$; nechť $n \geq n_0 \implies$ cíl

□

Definice 12. Posloupnost se nazve omezená (resp. shora omezená, zdola omezená), pokud $\exists K > 0$ (resp. $K \in \mathbb{R}$) t. ž. $|a_n| \leq K$ (resp. $a_n \leq K, a_n \geq K$) $\forall n \in \mathbb{N}$. Posloupnost se nazve rostoucí (resp. neklesající, klesající, nerostoucí) pokud $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n \leq a_{n+1}, a_n > a_{n+1}, a_n \geq a_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$. Všechny tyto posloupnosti zároveň nazveme monotónní.

Věta 9. Nechť $\{a_n\}$ konverguje. Pak $\{a_n\}$ je omezené.

Důkaz. víme: $\exists a \in \mathbb{R}$ t. ž. $a_n \rightarrow a \dots \varepsilon = 1, \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < 1 \iff L = a - 1 < a_n < a + 1 = K$

polož $C := \max\{K, -L\} \implies |a_n| \leq C, \forall n \geq n_0$, to není $\forall n \in \mathbb{N}$

položme $\tilde{C} := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n-1}|, C\}$

nyní zřejmě: $|a_n| \leq \tilde{C} \forall n \geq 1$ tj. $\forall n \in \mathbb{N}$.

□

Věta 10. Nechť $\{a_n\}$ je monotónní. Pak $\exists a \in \mathbb{R}^*$ t. ž. $a_n \rightarrow a$. Je-li $\{a_n\}$ omezená, pak $a \in \mathbb{R}$, tj. $\{a_n\}$ konverguje.

Důkaz. BÚNO $\{a_n\}$ je neklesající, tj. $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$, a tedy $a_n \leq a_m \forall n \leq m$

polož $M := \{a_m; m \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}$.

1. nechť M je omezená ($\iff \{a_n\}$ je omezená); $S := \sup M$ (A. 4., $M \neq \emptyset$) ukážeme, že $a_n \rightarrow S$

$\varepsilon > 0$ dáno: $S' := S - \varepsilon < S \dots \exists n_0 : a_{n_0} > S - \varepsilon$

$\{a_n\}$ neklesající: $a_n > S - \varepsilon \forall n \geq n_0$, zároveň $a_n \leq S + \varepsilon$
 $\implies a_n \in \mathcal{U}(S, \varepsilon), \forall n \geq n_0$.

2. nechť M je neomezená ($\iff \{a_n\}$ je neomezená, nutně shora (protože je neklesající))

ukážeme: $a_n \rightarrow +\infty$

$\varepsilon > 0$ dáno: $\exists n_0$ t. ž. $a_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$ a tedy $a_n > \frac{1}{\varepsilon}, \forall n \geq n_0 \implies a_n \in \mathcal{U}(+\infty, \varepsilon)$

□

TODO

Věta 11. Následující je ekvivalentní

1. $\{a_n\}$ konverguje
2. $\{a_n\}$ je cauchyovské

Diskaz \implies (2) ... výme $\exists a \in \mathbb{R}$ t. ž. $a_n \rightarrow a$; cíl (B. C.)

$\varepsilon > 0$ dáno: $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n \in \mathcal{U}(a, \frac{\varepsilon}{2})$, tj. $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\implies \forall m, n \geq n_0$ lze psát: $a_m - a_n = (a_m - a) + (a - a_n)$, takže $|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon$

(2) \implies (1) i. $\{a_n\}$ je omezená: užiji (B. C.) pro $\varepsilon = 1$: $\exists n_0 \forall n, m \geq n_0 : |a_m - a_n| < 1$, speciálně $|a_n - a_{n_0}| < 1 \forall n \geq n_0$
 $\implies a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1 \implies \{a_n\}$ omezené

ii. plyne z V. 7. 4.

iii. $\varepsilon > 0$ dáno: užiji (B. C.) pro $\frac{\varepsilon}{2}$... $\exists n_0 \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

dále $a_m \in \mathcal{U}(a, \frac{\varepsilon}{2})$ pro nekonečně $m \implies \exists m \geq n_0$ t. ž. $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

CELKEM $n \geq n_0 : |a_n - a_m| + |a_m - a| < \varepsilon$

□

Věta 12 (Heineho věta pro limitu funkce). Nechť $f(x)$ je definována na $\mathcal{P}(x_0), x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechť $A \in \mathbb{R}^*$. Potom je ekvivalentní

1. $f(x) \rightarrow A, x \rightarrow x_0$
2. \forall posloupnost $\{x_n\}$, která
 - i. $x_n \rightarrow x_0$
 - ii. $x_n \neq x_0 \forall n$
 platí $f(x_n) \rightarrow A$.

Důkaz \Rightarrow (2) nechť $\{x_n\}$ splňuje kladené podmínky, cíl: $f(x_n) \rightarrow A$

nechť $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : n \geq n_0 \implies f(x_n) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$

$\varepsilon > 0$ dáno: dle (1) $\exists \delta > 0$ t. ž. $x \in \mathcal{P}(x_0, \delta) \implies f(x) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$

dle (i): $\exists n_0$ t. ž. $n \geq n_0 \implies x_n \in \mathcal{U}(x_0, \delta)$, navíc díky (ii) dokonce $x_n \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$

CELKEM: $\forall n \geq n_0 : f(x_n) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$

(2) \implies (1) nepřímo: $\neg(1) \implies \neg(2)$

nechť $\neg(f(x) \rightarrow A, x \rightarrow x_0)$, tedy $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathcal{P}(x_0, \delta) \text{ t. ž. } f(x) \notin \mathcal{U}(A, \varepsilon)$

fixuji takové $\varepsilon > 0$ a užívám zbytek formule pro $\delta = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots \implies \exists x_n \in \mathcal{P}(x_0, \frac{1}{n})$ t. ž. $f(x_n) \notin \mathcal{U}(A, \varepsilon)$, z těchto x_n získám posloupnost $\{x_n\}$

vidíme: $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, avšak $x_n \neq x_0 \forall n \implies x_n \rightarrow x_0$; nicméně $f(x) \not\rightarrow A$, tj. $\neg(2)$

□

Poznámka 13 (Užití axiomu výběru (AC)). Byl použit při formulaci $\exists x_n \in \mathcal{P}(x_0, \frac{1}{n})$, tohle bych měl udělat nekonečně mnoho krát, udělám jen pro nějaké jedno ??

Poznámka 14 (Heineho věta pro limitu zprava). Následující tvrzení jsou ekvivalentní

1. $f(x) \rightarrow A, x \rightarrow x_0^+$
2. \forall posloupnosti $\{x_n\}$ t. ž.
 - i. $x_n \rightarrow x_0$
 - ii. $x_n > x_0$

Věta 13 (7.7. Heineho věta pro spojitost funkce v intervalu). Nechť $f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom je ekvivalentní

1. $f(x)$ je spojitá v I
2. \forall posloupnost $\{x_n\}, \forall x_0$ splňující
 - i. $x_n \rightarrow x_0$
 - ii. $x_0 \in I, x_n \in I \forall n$

platí $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Důkaz \Rightarrow (2) ... víme: $\forall x_0 \in I \forall \varepsilon \exists \delta > 0$ t. ž. $x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I \implies f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$

nechť x_n, x_0 splňují (i), (ii) ... cíl: $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

$\epsilon > 0$ dáno $\exists \delta > 0$ t. ž. $x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I \implies f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$

dle (i) $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies x_n \in \mathcal{U}(x_0, \delta)$

navíc dle (ii) $x_n, x_0 \in I \implies f(x_n) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon), \forall n \geq n_0$

$\neg(1) \implies \neg(2)$... nechť neplatí (1), tj.:

$$\exists x_0 \in I \exists \varepsilon > 0 : \exists x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I \text{ t. ž. } f(x) \notin \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$$

fixuji takové $x_0 \in I, \varepsilon > 0$, potom užívám pro $\delta = \frac{1}{n}$ pro $n = 1, 2, \dots$

$$\implies \exists x_n \in \mathcal{U}(x_0, \frac{1}{n}) \cap I \text{ t. ž. } f(x_n) \notin \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon) \forall n = 1, 2, \dots$$

zřejmě platí (i), (ii), avšak $f(x_n) \neq f(x_0)$, tj. neplatí (2)

□

Příklad 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \dots$ V. 7. 6. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = e^1 \dots x_0 = 0, x_n = \frac{1}{n}, x \rightarrow 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = f(x_n)$, posloupnost splňuje (i), (ii)

Věta 14 (6. 1.). Nechť $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojité. Pak je zde omezené

pomocí posloupnosti. nepřímo: nechť $f(x)$ je neomezená v $[a, b]$, BÚNO shora

$M := f([a, b]) = \{f(x), x \in [a, b]\}$ není omezené shora

tj. $\forall K > 0 \exists y \in M$ t. ž. $y > K$ užívám pro $K = n = 1, 2, \dots \implies \exists y_n \in M, y_n > n$, zřejmě $y_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty$

$\exists x_n \in [a, b]$ t. ž. $f(x_n) = y_n \rightarrow +\infty$

užiji V. 7. 4., resp. důsl. $\implies \exists$ posloupnost $\{\tilde{x}_n\} \subseteq \{x_n\}, \exists x_0 \in [a, b]$ t. ž. $\tilde{x}_n \rightarrow x_0$.

V. 7. 7. $\implies f(\tilde{x}_n) \rightarrow f(x_0) \in \mathbb{R}$, ale $f(\tilde{x}_n) = \tilde{y}_n \rightarrow +\infty$ - spor

□

Věta 15 (6.2.). Nechť $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spojité. Pak zde má globální maximum a minimum

Důkaz. polož $S := \sup\{f(x), x \in [a, b]\} \in \mathbb{R}$

cíl: $\exists x_0 \in [a, b]$ t. ž. $f(x_0) = S$

$$n = 1, 2, \dots : S - \frac{1}{n} < S \implies \exists x_n \in [a, b], \text{ t. ž. } S - \frac{1}{n}$$

□

Kapitola 7

Taylorův polynom

Příklad 6 (Motivační). Chci approximaci $f(x) = e^{-2x}$ v bodě $x = 0$, hledáme approximaci $p(x) = a + bc + cx^2$

Nikoho nepřekvapí, že lineární approximace bude tečna, tedy $p(x) = f(0) + f'(0)x = 1 - 2x$

Chceme ji ale nějak vylepšit, zpřesnit, a to tím, že přidáme kvadratický člen. Jak ho ale najdeme?

IDEA: napasujeme vyšší derivace, tj. $f''(0) = p''(0)$

$$p''(0) = 2c, f''(0) = 4 \implies c = 2 \implies p(x) = 1 - 2x + 2x^2$$

Jak toto dělat obecně? Jak určit další vyšší členy? Když approximaci useknou, jak velká je chyba?

Definice 13. Nechť $f(x), g(x)$ jsou definovány na $\mathcal{P}(x_0)$. Řekneme, že

- $f(x)$ je malé ó od $g(x)$ pro $x \rightarrow x_0$, pokud $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$
- $f(x)$ je velké Ó od $g(x)$ pro $x \rightarrow x_0$, pokud $\exists C, \delta > 0$ t. ž. $|f(x)| \leq C|g(x)| \forall x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$
- $f(x)$ je řádově rovno $g(x)$ pro $x \rightarrow x_0$, pokud $\exists a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ t. ž. $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow a, x \rightarrow x_0$

Značíme $f(x) = o(g(x))$ resp. $f(x) = O(g(x))$ resp. $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$

Příklad 7. 1. $\ln x = o(\sqrt{x}), x \rightarrow +\infty \dots \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$

2. $\frac{\sin x + \cos x}{x^2 + 1} = O\left(\frac{1}{x^2}\right), x \rightarrow +\infty \dots |f(x)| \leq \frac{2}{x^2} = 2\frac{1}{x^2} = Cg(x)$

3. $\sin x \sim x, 1 - \cos x \sim x^2, x \rightarrow 0 \dots$ (pouze pro \cos) $\frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2} (= a), x \rightarrow 0$

Definice 14 (Derivace vyšších řádů). i. $f^{(0)}(x) = f(x)$

ii. $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))'$, tj. $f^{(1)}(x) = f'(x), f^{(2)}(x) = f''(x)$

Taylorův polynom

Pro $I \subseteq \mathbb{R}$ otevřený interval definuji

$$C^n(I) = \left\{ f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}; f^{(t)} \text{ existuje a je spojitá v } I \forall k = 0, 1, \dots n \right\}$$

Speciálně $C^0(I) = C(I) = \{f(x) : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ je spojité v } \mathbb{R}\}$

Definice 15. Pro $x_0 \in \mathbb{R}, k \geq 0$ celé označme $Q_{k,x_0}(x) = \frac{1}{k!}(x-x_0)^k$, speciálně $Q_{0,x_0}(x) \equiv 1$, $Q_{1,x_0}(x) = \frac{1}{2}(x-x_0)^2$, atd.

Lemma 2 (8.1. Vlastnosti funkcí Q_{k,x_0}). Platí

- i. Q_{k,x_0} je polynom stupně k
- ii. $Q'_{0,x_0} \equiv 0, Q'_{k,x_0} = Q_{k-1,x_0} \forall k \geq 1$
- iii. $Q_{k,x_0}^{(l)} = \begin{cases} 1, l = k \\ 0, l \neq k \end{cases} \quad \forall k, l \geq 0 \text{ celé}$

Důkaz. i. $(x-x_0)^k =^{(\text{binom. v.})} x^k + \dots$

ii. 1st prime = 0; $(Q_{k,x_0})' = \frac{1}{k!}((x-x_0)^k)' = \frac{1}{k!}k(x-X-0)^{k-1} = \frac{1}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} = Q_{k-1,x_0}$

iii. $l = k : Q_{k,x_0}^{(k)}(x_0) = Q_{0,x_0}(x_0) = 1; l > k : Q_{k,x_0}^{(l)} \equiv 0; l < k \text{ tj. } k = l+s, s \geq 1 : Q_{k,x_0}^{(l)} = Q_{s,x_0} = \frac{1}{s!}(x-x_0)^s, x = x_0 \implies Q_{s,x_0}(x_0) = 0$

□

Definice 16. Nechť $f(x) \in C^n(\mathcal{U}(x_0))$. Potom výraz

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

nazveme Taylorův polynom funkce $f(x)$ v bodě x_0 stupně n (též n -tý Taylorův polynom). Značíme $T_{x_0,n}^f(x)$. Alternativně $T_{x_0,n}^f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \cdot Q_{k,x_0}(x)$.

Příklad 8. 1. $f(x) = e^x, x_0 = 0; f^{(k)}(x) = e^x \implies f^{(k)}(0) = 1 \forall k \geq 0$.

$$T_{0,n}^{e^x}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

2. $f(x) = \sin x, x_0 = 0; f^{(k)}(x) : \sin x, \cos x, -\sin x, -\cos x, \dots; f^{(k)}(0) : 1, 0, -1, 0, \dots$

$$T_{0,2n+1}^{\sin x} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3. $f(x) = (1+x)^a, x_0 = 0, a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}; f^{(k)}(x) = a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a-k+1) \cdot (1+x)^{a-k};$

$$f^{(k)}(0) = a(a-1)\dots(a-k+1).$$

$$T_{0,n}^{(1+x)^a}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} x^k = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6} x^3 + \dots$$

Věta 16 (8.1. Aproximační vlastnost Taylorova polynomu). Nechť $f(x) \in C^n(\mathcal{U}(x_0))$. Potom $f(x) = T_{x_0,n}^f(x) + o((x-x_0)^n), x \rightarrow x_0$. Navíc $T_{x_0,n}^f(x)$ je jediný polynom stupně $\leq n$ s touto vlastností.

Důkaz. BÚNO $x_0 = 0$, označme $p(x) = T_{0,n}^f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$

klíčové pozorování: $p^{(l)}(0) = f^{(l)}(0) \forall l = 0, \dots, n$

$$\text{dk. L. 8. 1. } \implies p^{(l)}(0) = \sum_{k=0}^n (f^{(k)}(0) Q_k(x))^{(l)}|_{x=0} = f^{(l)}(0)$$

1. aprox. vlast.: cíl: $\frac{f(x)-p(x)}{(x)^n} \rightarrow 0, x \rightarrow 0$ – metoda L'Hospital $\frac{0}{0}$ n -krát

po n -tém kroku: $\frac{f^{(n)}(x)-p^{(n)}(x)}{n!},$ když dosadím $x = 0 \implies \frac{0}{n!} = 0$

2. jedonznačnost: nechť $\exists g(x) \dots$ polynom st. $\leq n$ t. ž. $\frac{f(x)-g(x)}{(x)^n} \rightarrow 0, x \rightarrow 0 \dots$ cíl: $g(x) \equiv p(x) = T_{0,n}^f(x)$

pomocná úvaha: $\frac{p(x)-g(x)}{x^n} = \frac{f(x)-g(x)}{x^n} - \frac{f(x)-p(x)}{x^n} \rightarrow 0 - 0 = 0, x \rightarrow 0$

pišme $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$

sporem: když se $p(x), g(x)$ nerovnají $\exists s \in \{0, \dots, n\}$ t. ž. $a_s \neq b_s$, BÚNO s nejmenší takové $\implies p(x) - g(x) = \sum_{k=s}^n (a_k - b_k) x^k, a_k - b_k =: c_k \implies p(x) - g(x) = c_s x^s + \sum_{k=s+1}^n c_k x^k$

potom $\frac{p(x)-g(x)}{x^s} = \begin{cases} c_s + \sum_{k=s+1}^n c_k x^{k-s}, & \text{když } x \rightarrow 0, \text{ výraz } \rightarrow c_s \neq 0 \\ \frac{p(x)-g(x)}{x^n} \cdot x^{n-s} & (\text{viz pomocná úvaha}) \rightarrow 0 - \text{SPOR} \end{cases}$

□

Poznámka 15. Polynomická funkce je přesně rovna svému Taylorovu polynomu pro lib. $x_0 \in D(f)$.

Věta 17 (8.2. Integrál a derivace Taylorova polynomu). Nechť $F(x) \in C^{n+1}(\mathcal{U}(x_0))$, nechť $F'(x) = f(x)$, tj. $F(x) = \int f(x) dx$ v $\mathcal{U}(x_0)$. Potom

$$1. (T_{x_0,n+1}^F(x))' = T_{x_0,n}^f(x) \forall x \in \mathcal{U}(x_0),$$

$$2. \int T_{x_0,n}^f(x) dx = T_{x_0,n+1}^F(x) + c \forall x \in \mathcal{U}(x_0) \text{ a vhodně zvolené } c.$$

Důkaz. 1. $T_{x_0,n+1}^F(x) = \sum_{k=0}^{n+1} F^{(k)}(x_0) \cdot Q_{k,x_0}(x)$ – zderivujeme

$$\sum_{k=1}^{n+1} F^{(k)}(x_0) \cdot Q_{k+1,x_0}(x) = \sum_{l=0}^n F^{(l+1)}(x_0) \cdot Q_{l,x_0}(x) = T_{x_0,n}^f(x)$$

$$2. \int T_{x_0,n}^f(x) dx = \int \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \cdot Q_{k,x_0}(x) dx = \sum_{l=1}^{n+1} F^{(l)}(x_0) \cdot Q_{l+1,x_0}(x) + c = T_{x_0,n+1}^F(x)$$

pro vhodně zvolené $c = F(x_0) \cdot Q_{NECO}(x) = F(x_0)$

□

Příklad 9. 1. $\cos x = (\sin x)'$ TODO

2. $\ln 1 + x = \int \frac{dx}{1+x}$ TODO

Příklad 10.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} - \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

Věta 18 (8.3. Početní pravidla pro malé ó). Nechť $m, n \in \mathbb{Z}$. Potom

1. $f(x) = o(x^n), g(x) = o(x^m), x \rightarrow 0$, kde $m \geq n; a, b \in \mathbb{R} \implies af(x) + bg(x) = o(x^n), x \rightarrow 0$,
2. $f(x) = o(x^n), x \rightarrow 0, a \in \mathbb{R} \implies ax^m f(x) = o(x^{m+n}), x \rightarrow 0$,
3. $f(x) = o(x^n), g(x) = o(x^m), x \rightarrow 0 \implies f(x)g(x) = o(x^{m+n}), x \rightarrow 0$,
4. $f(x) = o(x^n), g(x) \sim x^m, x \rightarrow 0$, kde $m \geq 1 \implies f(g(x)) = o(x^{n+m}), x \rightarrow 0$.

Důkaz. 1. víme: $\frac{f(x)}{x^n}, \frac{g(x)}{x^m} \rightarrow 0, x \rightarrow 0 \dots$ cíl $\frac{af(x)+bg(x)}{x^n} \rightarrow 0, x \rightarrow 0$

$$a \frac{f(x)}{x^n} + b \frac{g(x)}{x^m} \cdot x^{m-n} \rightarrow (VoAL)0, x \rightarrow 0$$

4. víme: $\frac{f(y)}{y^n} \rightarrow 0, y \rightarrow 0; \frac{g(x)}{x^m} \rightarrow c, x \rightarrow 0$, kde $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\text{cíl: } \frac{f(g(x))}{x^{m+n}} \rightarrow 0, x \rightarrow 0$$

$$\text{TRIK } \frac{f(g(x))}{(g(x))^n} \cdot \left(\frac{g(x)}{x^m}\right)^n = P_1 \cdot P_2$$

$P_1 \rightarrow 0$, ale VoLSF (b) $\dots g(x) \rightarrow 0, x \rightarrow 0; g(x) \neq 0$ na $\mathcal{P}(x_0, \delta), \delta > 0$ malé

$$g(x) = \frac{g(x)}{x^n} x^m \rightarrow c \cdot 0 = 0,$$

$$\frac{g(x)}{x^m} \rightarrow c \neq 0 \implies \frac{g(x)}{x^m} \neq 0 \text{ na } \mathcal{P}(0, \delta) \implies g(x) \neq 0 \text{ na } \mathcal{P}(0, \delta)$$

□

Poznámka 16 (Doplněk). 2' $f(x) = o(x^n), x \rightarrow 0, (m \leq n) \implies \frac{f(x)}{x^m} = o(x^{n-m})$

Příklad 11. 1. $x \rightarrow 0, \frac{x^3}{\sin x \ln(1+x^2)} = \frac{x^3}{(x+o(x))(x^2+o(x^2))} = \frac{x^3}{x^3+x \cdot o(x^2)+x^2 \cdot o(x)+o(x)o(x^2)} = \frac{x^3}{x^3+o(x^3)+o(x^3)+o(x^3)} = \frac{x^3}{x^3+o(x^3)} = 1 + \frac{o(x^3)}{o(x^3)} \rightarrow 1$

2. $T_0^{tg}, 5(x) = Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^5); \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\operatorname{tg} x \cdot \cos x = \sin x (Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^5))(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

a dále M. P. K. $T = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$

Poznámka 17. Čím větší řád taylorova polynomu, tím přesnější odhad = lepší řád aproximace, bude ale chyba v nekonečnu nulová?

Definice 17. Zbytek po Taylorově polynomu nazveme $R^f_{x_0, n+1}(x) = f(x) - T^f_{x_0, n}(x)$.