9. Mechanika tekutin

Anotace

Mechanika tekutin.

Kapalina a plyn. Rovnováha tekutin, hydrostatický tlak, Pascalův zákon, barometrická rovnice, Archimedův zákon. Proudění ideální tekutiny, rovnice kontinuity, Bernoulliova rovnice. Proudění viskózní kapaliny, Newtonův viskózní zákon, Poiseuillův vztah. Laminární a turbulentní proudění.

Základním úkolem mechaniky tekutin je určit **tlak** p, **hustotu** ρ a **rychlost** $\boldsymbol{v}$ proudění jako funkci polohy a času

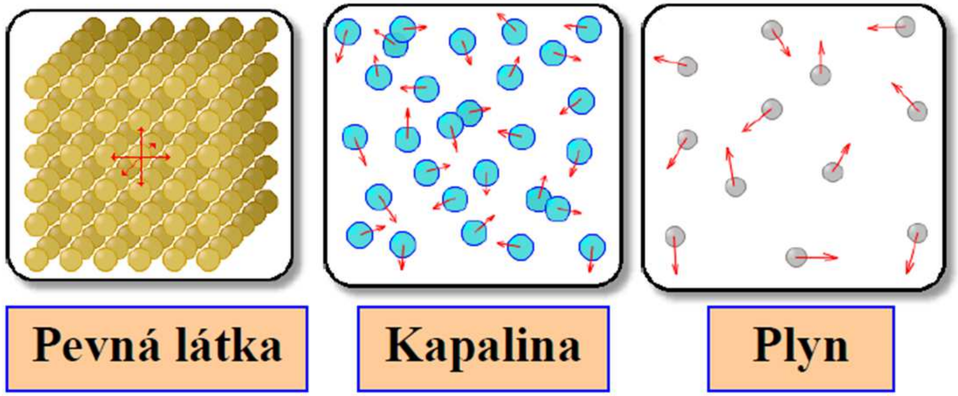
Literatura

Kapaliny:
Feynman
Kvasnica – Mechanika
(Horák)

Kontinuum, pružnost:
Feynman
Horák
(Kvasnica)

Tekutiny

tekutiny (plyny a kapaliny) se výrazně liší z hlediska vnitřní struktury od pevných látek



molekuly nejsou vázány na neproměnné rovnovážné polohy, ale mohou se vzájemně volně posouvat (**tekutiny jsou tvarově nestálé**)

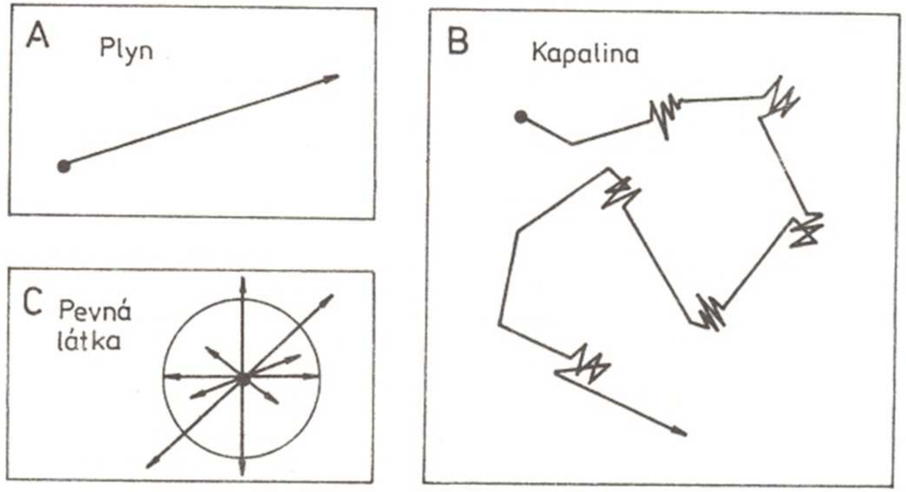
kapaliny a plyny se navzájem liší stlačitelností a rozpínavostí

u plynu lze velmi snadno **měnit tvar i objem** (plyny se snaží vyplnit celý uzavřený prostor – nevytváří volnou hladinu)

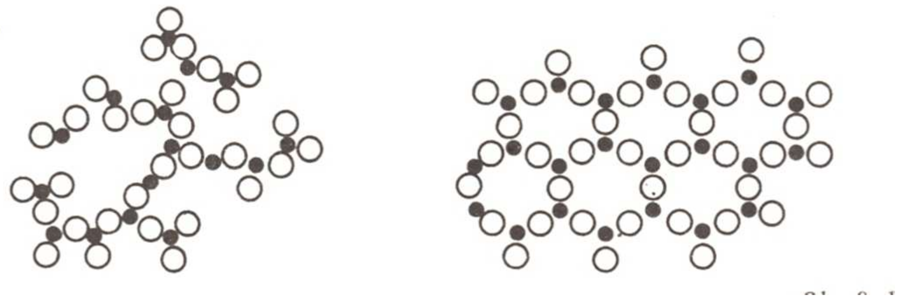
ve statickém stavu u izotropních tekutin **neexistují smyková napětí** pouze **normálová (tlaková) napětí**

Tekutiny

tekutiny (plyny a kapaliny) se výrazně liší z hlediska vnitřní struktury od pevných látek



Pevná látky – uspořádání na <u>dlouhou vzdálenost</u>
Kapaliny, amorfní látky – uspořádání na krátkou vzdálenost
Plyny – nespořádaný pohyb molekul



Tekutiny

<u>Ideální tekutina</u>:
neexistuje vnitřní tření – viskozita (ani za pohybu)
plyn – dokonale pružný (libovolně stlačitelný)
kapalina – nestlačitelná
předp.: homogenní (stejná hustota), izotropní

<u>Reálná tekutina</u>:
uplatňují se síly vnitřního tření - **viskozita** - mezi jednotlivými vrstvami <u>proudící</u> kapaliny
viskozita souvisí s **tečnými (smykovými) napětími** a vede k disipaci mechanické energie

Rovnováha tekutin - hydrostatika

Tekutina v <u>rovnováze</u> – neexistují smyková napětí (ani v reálné viskózní tekutině), působí pouze normálové síly na lib.plošku nezávislé na orientaci plošky

Tlak: $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad p \geq 0$

Rovnice rovnováhy: $\dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + G_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{-\dfrac{\partial p}{\partial x_j} + G_j = 0}$

$$\boxed{-\vec{\nabla} p + \vec{G} = 0}$$

- ***G*** objemová síla, tj. ***G* = *F***/*V*
- <u>*p* roste ve směru ***G***</u>
- *p* má charakter <u>potenciálu objemových sil</u>
- rovnováha – jen když ***G*** je konzervativní
- Síly objemové × plošné (Ot.: které síly můžeme považovat za objemové?)

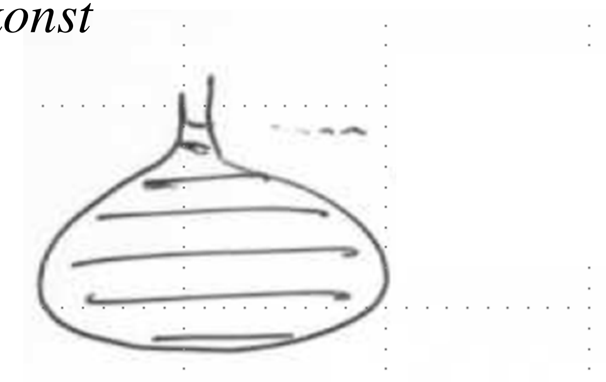
Intenzita: $\vec{I} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \dfrac{\vec{G}V}{m} = \dfrac{\vec{G}}{\rho} = \dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho}$ def. potenciál: $\vec{I} = -\vec{\nabla}\varphi$

$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} p - \rho \vec{I} = 0}$ resp. $\boxed{\vec{\nabla} p + \rho \vec{\nabla}\varphi = 0}$ … základní rovnice hydrostatiky (rov. hydrostatické rovnováhy), její řešení?

$\boxed{\vec{\nabla} p - \rho \vec{I} = \rho \times \text{zrychlení}}$ pohybová rovnice

Rovnováha tekutin - hydrostatika

Pascalův zákon - pro dokonalé tekutiny, ρ = *konst*



$$\nabla p = \rho \vec{I}, \quad \vec{I} = (0, 0, -g)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad p \neq f(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = -\rho g x_3 + p_0}$$ … hydrostatický tlak

- Objemové síly - určují rozložení tlaku v tekutině (až na aditivní konstantu)
  - určují pouze změny tlaku
- Pascalův zákon: změna tlaku v jednom místě tekutiny způsobí stejnou změnu v celém objemu tekutiny (kapalina je v rovnováze)
- $\Rightarrow$ všestranné šíření tlaku, nezávisí na orientaci plošky ! tlak vždy kolmý na libovolnou plošku ($\exists$ jen normálová napětí)

Rovnováha tekutin - hydrostatika

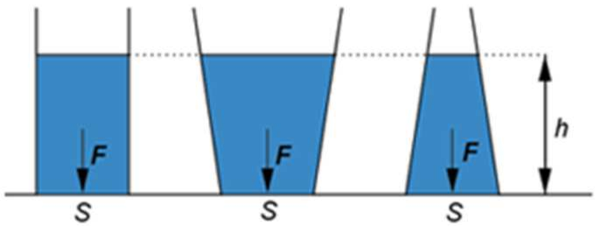
Pascalův zákon: Působí-li na tekutinu vnější tlak pouze v jednom směru, pak uvnitř tekutiny působí v každém místě stejně velký tlak a to ve všech směrech.

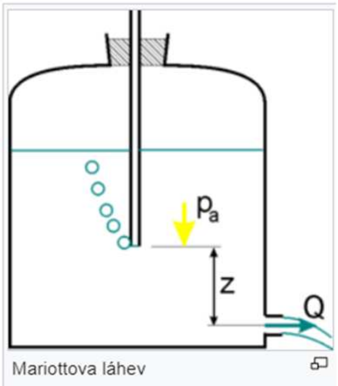
Elementární formulace Pascalova zákona:

pokud na tekutinu žádné objemové síly nepůsobí

$$\boxed{\operatorname{grad} p = 0 \;\Longrightarrow\; p(\vec{r}) = \text{konst.}}$$

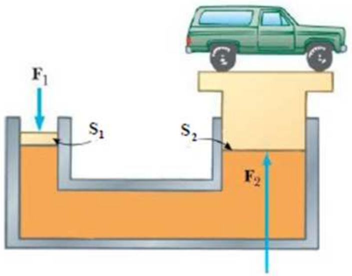
Hydrostatické paradoxon





Mariottova láhev - tlak určen výškou z

Aplikace:
Hydraulické stroje
(lis, brzdy,…)



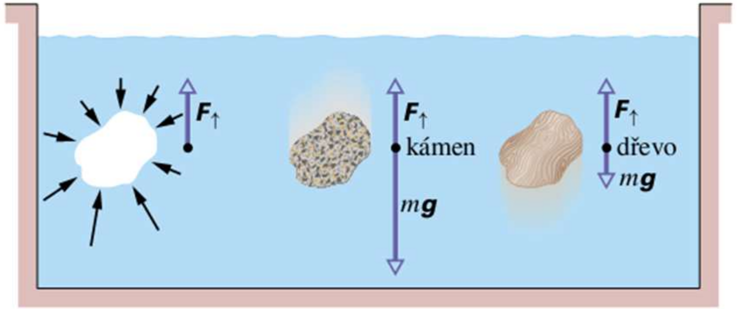
Rovnováha tekutin - hydrostatika

Archimédův zákon

$$\vec{F}^V + \vec{F}^P = 0, \quad \text{složky:} \quad F_1^V = F_2^V = 0, \quad F_3^V = -\int_V g\rho dV \;\Rightarrow\; \underline{F_3^P = -F_3^V, \quad F_1^P = F_2^P = 0}$$

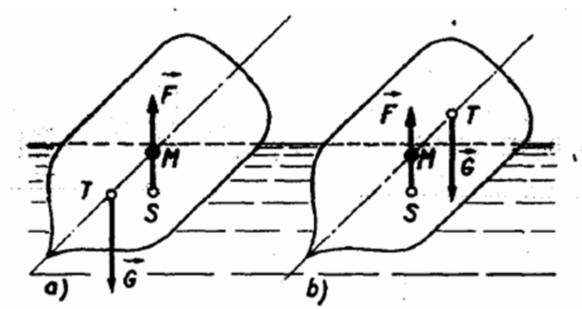
Na objem V působí přes hraniční plochu S stejné síly, jako kdyby byl vyplněn tekutinou – plošné síly působí proti silám objemovým

pozn. 3. složka míří vzhůru



Archimédův zákon: Těleso ponořené do tekutiny je nadlehčováno silou, která je rovna tíze tekutiny tělesem vytlačené

Stabilita plování



-výslednice vztlakové síly $\boldsymbol{F}$ a tíhy $\boldsymbol{G}$ tvoří silovou dvojici

- pokud se tato dvojice při vychýlení snaží plovoucí těleso navrátit zpět – potom je **rovnováha stabilní**

Rovnováha tekutin - hydrostatika

Př.1. Kapalina v rotující nádobě (řešení na předn.)

$$-\frac{\partial p}{\partial x_j}+G_j=0 \qquad \text{kde} \quad \vec{G}=\vec{G}_g+\vec{G}_o \qquad \vec{G}_g=(0,0,-\rho g) \qquad \vec{G}_O=\left(\rho\omega^2 x_1,\rho\omega^2 x_2,0\right) \longrightarrow$$

$$p=-\rho g x_3+\frac{1}{2}\rho\omega^2\left(x_1^2+x_2^2\right)+p_0$$

$$\text{tj.} \quad x_3=\frac{1}{2g}\omega^2\left(x_1^2+x_2^2\right)+\frac{p_0-p}{\rho g}$$

Plochy konst.tlaku – rotační paraboloidy

Vnější síly, vždy kolmé k hladině

Newton – důkaz NI.S.S.

Př.2. Barometrická rovnice

$$\vec{\nabla}p=\rho\vec{g}, \qquad \vec{g}=(0,0,-g)$$

stavová rovnice ideálního plynu: $\frac{pV}{T}=konst$

a) Izotermický děj: $\frac{p}{\rho}=\frac{p_0}{\rho_0}=konst$

$$\frac{dp}{dx_3}=-\rho g=-\frac{\rho_0}{p_0}gp \Longrightarrow p=p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gx_3} \qquad \left(\rho=\rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gx_3}\right)$$

b) Adiabatický děj: $pV^\kappa=konst \rightarrow \frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\kappa$ (polytropní děj: $pV^n=konst$, $\kappa>n>1$)

$$\frac{dp}{dx_3}=-g\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\kappa} \Longrightarrow p=p_0\left(1-\frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{\rho_0}{p_0}gx_3\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \qquad T=T_0\left(1-\frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{\rho_0}{p_0}gx_3\right)$$

Hydrodynamika

Tekutina – lib.změna tvaru, **neudrží se v ní trvale smyková napětí** → dá se do pohybu

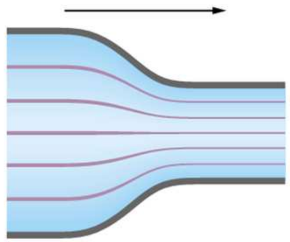
Tekutina v rovnováze - neexistují smyková napětí (ani ve viskózní tekutině)

- napětí (tlak) vždy kolmá na lib.plošku v tekutině → ve všech směrech stejná
- smyková napětí existují pouze při pohybu viskózní tekutiny
- při vyšších rychlostech způsobují smyková napětí vznik chaotického proudění, promíchávání tekutiny, vytváření vírů

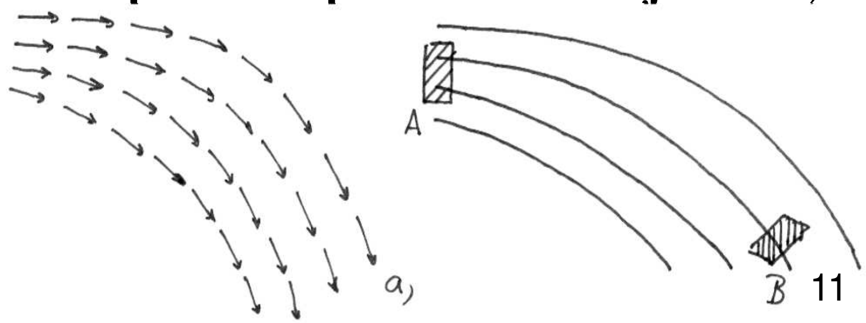
Proudění tekutiny:

Proudnice (proudové čáry) = zobrazení vektorového pole rychlostí

- křivky, jejichž **tečny v každém bodě mají směr rychlosti částic** → **neexistuje tok přes proudnice (proudnice se neprotínají!)**
- každým bodem kontinua prochází ve zvoleném čase *t* jen jediná proudnice
- obraz proudnic – rychlosti **různých částic** v jednom okamžiku (v daném čase)
  → nemění se v čase – **stacionární (ustálené) proudění**
  → mění se s časem – **nestacionární proudění**
- **hustota proudnic** – úměrná (gradientu) rychlosti proudění
- **trajektorie** – dráha určité částice (pouze **při ustáleném proudění proudnice = trajektorie**)



- proudová trubice – plášť je tvořen proudnicemi (neprotéká jím žádný tok)
- proudové vlákno – hmotný vnitřek proudové trubice

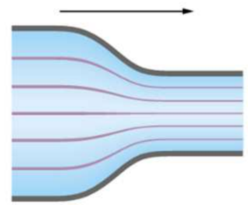


Hydrodynamika

Rychlosti ***v*** tekutiny tvoří **vektorové pole**

Stacionární (ustálené) - rychlost proudící tekutiny v kterémkoliv místě nemění s časem ani co do velikosti, ani co do směru

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{v} \neq \vec{v}(t)\big|_{x_i} \\ &\partial\vec{v}/\partial t\big|_{x_i} = 0 \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \partial\rho/\partial t\big|_{x_i} = 0$$

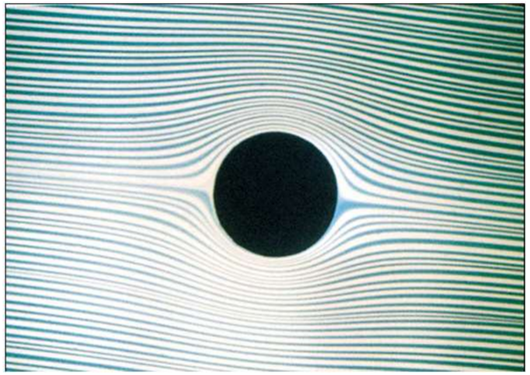


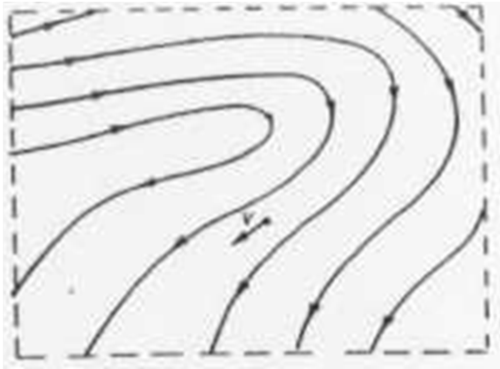
Laminární proudění - rychlost proudění v každém bodě tekutiny je "rozumně" definována; může se od místa k místu měnit, ale "ne příliš prudce".
Zobrazení pomocí proudnic.
Nedochází k mísení tekutiny, ale může být $\boldsymbol{v} = f(x_i, t)$

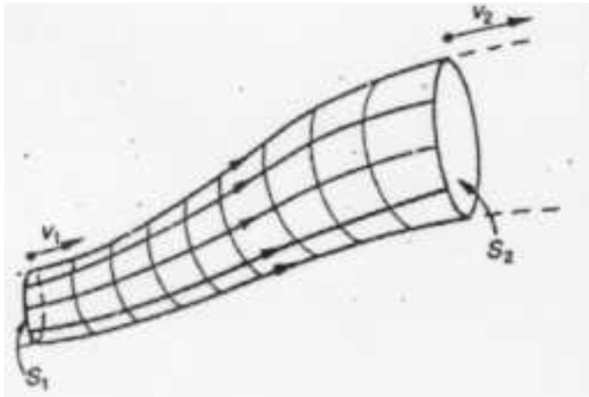
Turbulentní proudění – existuje nad určitou kritickou rychlostí reálné kapaliny
nelze zobrazit proudnice, chaotické proudění, promíchávání tekutiny – rychlosti částic se nepravidelně mění (v prostoru i v čase), dochází k rozvinutí vírů;
je vždy nestacionární

Vírové – pohyb částice tekutiny po kruhové dráze (nikoli však rotace kolem své osy), rychlost lokálně kolísá
Nevírové – charakterizováno proudnicemi

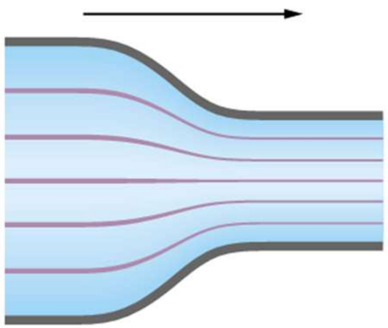
Hydrodynamika

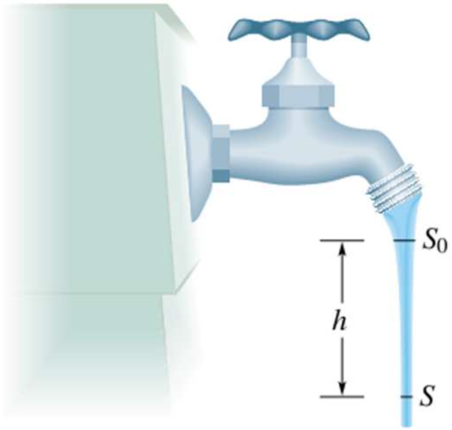




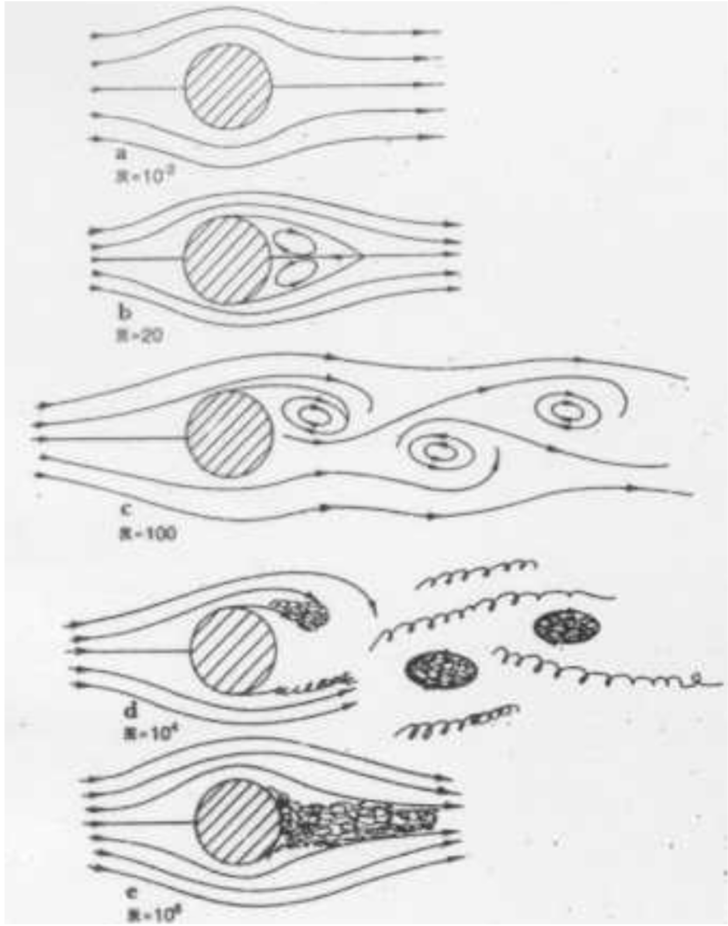


přes proudnice neexistuje tok





Hydrodynamika



Hydrodynamika

připomenutí:

Helmholtzova věta:
Pohyb kontinua v okolí lib.bodu lze rozložit na pohyb translační, rotační a deformační

Rychlost v diferenciálním okolí lib.bodu x_j:

$$v_i\left(x_j + dx_j, t\right) = v_i\left(x_j, t\right) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j + \ldots = \underbrace{v_i\left(x_j, t\right)}_{\text{rychlost translace}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{rychlost rotace}} dx_j + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{rychlost deformace}} dx_j$$

(pohyb kontinua jako celku)

s jakou se mění vzdálenost částic v okolí bodu x_j

Taylorův rozvoj:
V případě existence všech konečných derivací funkce v bodě a lze Taylorovu řadu zapsat jako

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Hydrodynamika

Jestliže některé proudočáry jsou uzavřené křivky, pak jde o **vírový pohyb**.

Vírový pohyb je možno charakterizovat **rotací rychlosti**:

- **Operátor rotace**: $\operatorname{rot}\vec{v} = \left[\nabla \times \vec{v}\right]$ Ve složkách: $\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)_1 = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)$ ... atd.

kde $\vec{v}$ je lib.vektor a $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$

Vírové (vířivé) proudění: rot $\boldsymbol{v} \neq 0$
Nevírové (nevířivé) proudění: rot $\boldsymbol{v} = 0$

Platí identita: $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\varphi\right) = \left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\right)\varphi \equiv 0$ pro lib. φ (dokaž pro složky)

$\Rightarrow$ je-li rot $\boldsymbol{v}$ = 0 můžeme $\boldsymbol{v}$ vyjádřit jako gradient skalární fce, tj. $\exists$ potenciál:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi, \quad v_i = \partial\varphi/\partial x_i}$$

φ **… rychlostní potenciál** $\rightarrow$ **potenciálové proudění** (= nevířivé proudění)

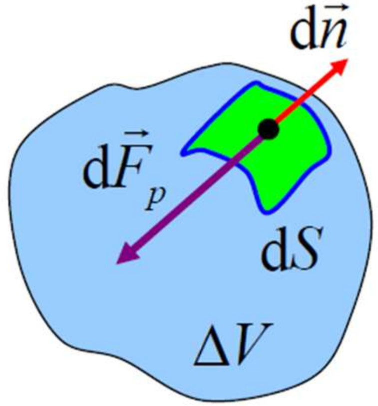
Cirkulace vektorového pole podél uzavřené smyčky v tekutině:

Stokesova věta: $\oint_l \vec{v}\cdot d\vec{r} = \iint_{S(l)} \vec{\nabla}\times\vec{v}\, d\vec{S}$ $\Rightarrow$ dif. charakteristika konzervativní pole: $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0}$

platí pro lib.uzavřenou křivku l, Kvasnica-Mat.aparát fyziky

Tok vektoru

Skalární pole × vektorové pole
(derivace skal.pole, gradient,)



Tok vektorového pole uzavřenou plochou ohraničující objem V

- tok vektoru $\boldsymbol{v}$ plochou dS, $\boldsymbol{n}$ – normála
- tok plochou dS: $d\Phi = \boldsymbol{v}.\boldsymbol{n}\ dS = \boldsymbol{v}.d\boldsymbol{S}$,
  kde $\boldsymbol{n}dS = d\boldsymbol{S}$

> 0 výtok

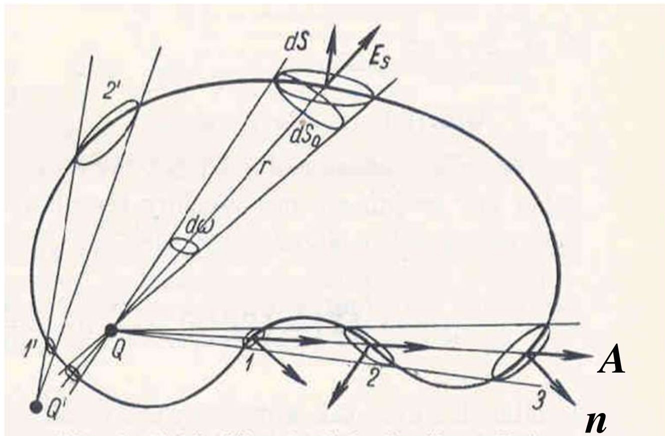
= 0 tj. vtok=výtok, nebo $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{v}$

< 0 vtok

- celkový tok vektoru plochou S (= celkovému počtu proudnic procházející plochou)

$$\Phi = \sum v_k \Delta\vec{S}_k \rightarrow \boxed{\oiint_{S(V)} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \Phi}$$

- platí evidentně: tok vnější plochou
  = suma toků všemi vnitřními částmi



Obr. (5.1) 10. Silový tok bodového náboje uzavřenou plochou

Tok vektoru

Gaussova věta: $$\oiint\limits_{S(V)} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int\limits_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\, dV$$ … platí pro lib.uzavřenou plochu

(Kvasnica-Mat.aparát fyziky)

kde: $$\operatorname{div} \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$ ... **divergence vektoru** (tok vektoru plochou)

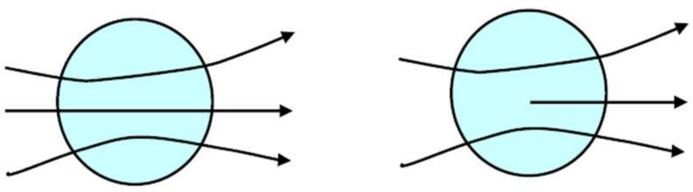
- Tok uzavřenou plochou: můžeme charakterizovat počtem proudočar:

protože $$\Phi = \oiint\limits_{S(V)} \vec{v} d\vec{S} = \int\limits_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\, dV \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div} \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{d\Phi}{dV}}$$

- Prodočáry mohou vznikat i zanikat, o jejich změně nás informuje divergence vektoru rychlosti
- Divergence – výtok vektoru z objemového elementu *dV*

Divergence vyjadřuje to, zda dané vektorové pole (např. pole rychlosti proudící kapaliny, elektromagnetické pole,…) obsahuje v daném místě zdroje či úbytky toku dané veličiny

Umožňuje určit tok daného vektorového pole ve specifikovaném objemu, např. hmotnostní průtok kapaliny



$\operatorname{div} \vec{v} = 0$ $\operatorname{div} \vec{v} \neq 0$

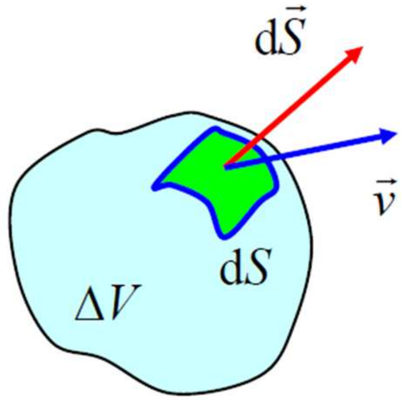
proudění nezřídlové

Rovnice kontinuity

Rovnice kontinuity: $\dfrac{dm}{dt} = 0$

vyjadřuje **zákon zachování hmoty**

úbytek hmotnosti, ke kterému v objemu ΔV dojde za časovou jednotku, je roven toku hmotnosti přes povrch ΔS objemu ΔV



Hmotnostní tok: $\Delta Q \equiv dm/dt = \rho\, dV/dt = \rho\vec{v}\cdot\vec{n}dS = \rho\vec{v}\cdot d\vec{S}$, kde $d\vec{S} = dS\cdot\vec{n}$

- celkový tok povrchem *S(V)*: $Q = \oiint_{S(V)} \rho\vec{v}d\vec{S}$
- hmotnostní úbytek z objemu *V*: $Q = -\dfrac{\partial m}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\int_V \dfrac{\partial \rho}{\partial t} dV$

$$\boxed{\oiint_{S(V)} \rho\vec{v}d\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV}$$

\+ **Gaussova věta**: $\oiint_{\Delta S} \rho\vec{v}\,d\vec{S} = \underbrace{\int_{\Delta V} \operatorname{div}\rho\vec{v}\,dV = -\int_{\Delta V}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV}$

rovnice kontinuity

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{v} = 0}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\rho v_i}{\partial x_i} = 0$$

Rce kontinuity v dif.tvaru, platí v každém bodu prostoru

Rce kont. v integrálním tvaru:
Výtok hmotnosti tekutiny z jednotkového objemu = úbytku hmotnosti v tomto objemu

Rovnice kontinuity

Rovnice kontinuity pro **stacionární proudění** tekutiny:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \rho\vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_{\Delta S} \left(\rho\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\right) = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$$

(nestlačitelné kap.)

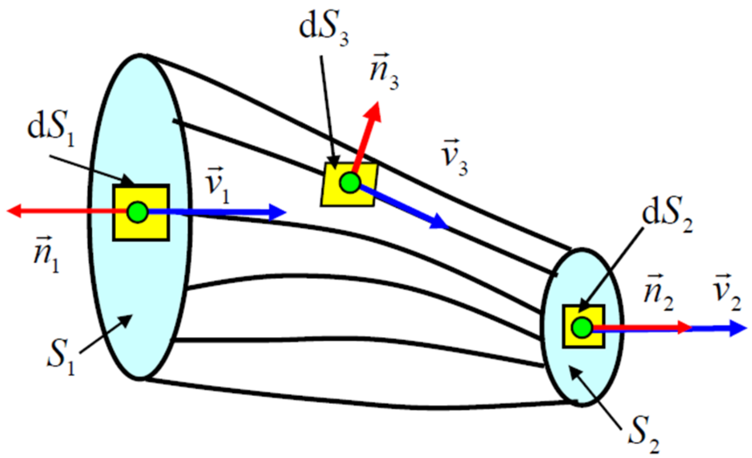
Zvl. případ: stacionární proudění proudovou trubicí

(tj. předp.: rychlost v_i a hustota ρ_i jsou v daném průřezu S_i konstantní)

$$\int_{S_1}\left(\rho\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\right) + \int_{S_2}\left(\rho\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\right) + \underbrace{\int_{S_3}\left(\rho\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\right)}_{0} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2}$$



Pozn. - uzavřenost indukčních čar v elmg.: $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (vždy), avšak $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$

- transport el.náboje: $\rho\boldsymbol{v} = \boldsymbol{j}$ … proudová hustota, rce kontinuity v el.: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$

Pohybová rovnice id.tekutiny

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + G_j = \rho \frac{d^2 u_j}{dt^2}} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\partial p}{\partial x_i} + G_i = \rho \frac{dv_i}{dt}, \quad \text{tj.} \quad -\vec{\nabla} p + \vec{G} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad *$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

Slovy: ρ × zrychlení (≡ hustota síly) = ***G*** (vnější objemová síla) – grad p (tlaková síla)

Avšak na pravé straně rce * potřebujeme parciální derivaci podle času (hledáme rychlost/zrychlení) v daném bodě kontinua! Jak řešit?

Obecně je: $\frac{d\vec{v}}{dt} \neq \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ proč? … úplná čas.derivace – jak se mění rychlost konkrétní částice
parc. čas.derivace – jak se mění rychlost v daném místě prostoru, (kterým procházejí různé částice)

(nelze komutovat)

Platí:
(dokaž)

$$\boxed{\frac{dv_i}{dt} = \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}$$

Eulerova hydrodynamická rce:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ &\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla}\varphi \end{aligned}}$$

kde $G = \rho\vec{I} = -\rho\vec{\nabla}\varphi$
(I - intenzita silového pole,
φ - potenciál obj.síly)

pohyb.rce pro element id.tekutiny
levá str. – celk.zrychlení
pravá str. – intenzita síly působící na element

(nelineární rovnice)
(proudění „suché“ vody)

Pohybová rovnice id.tekutiny

(Eulerova hydrodyn. rce nebude vyžadována u zkoušky)

Zahrneme vírové proudění:

Identita: $(\vec{v}\nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla(v^2) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})$ Def.: $\vec{\Omega} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{v}$

$= 0$ bezvírové

$\neq 0$ vírové proudění

Eulerova hydrodynamická rce:

$$\boxed{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega}\times\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} - \vec{\nabla}\varphi}$$

Vektorové pole **Ω** - vírnatost (**Ω** udává cirkulaci kolem jednotk.plochy kolmé na **Ω**)
Důsledek: je-li **Ω** =0 (nevířivé proudění) v čase t , je $d\Omega/dt$ = 0, takže **Ω=**0 i v čase $t + \Delta t$ (tj. zůstává nevířivé)

Pozn.: nevířivé stacionární proudění nestlačitelné kapaliny (analogie elektro/magnetostatiky):

$$\mathrm{div}\,\vec{v} \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$$

$$\Omega = \vec{\nabla}\times\vec{v}$$

Řešení úlohy pro 4 (5) neznámé: $v_i = v_i(x_j,t)$, $p = p(x_j,t)$:
- 3 Eulerovy rce + rce kontinuity (+ závislost $\rho = \rho\,(p)$ pro stlačitelné tekutiny)
- charakteristika stavu *proudící kapaliny v místě* x_i

Bernoulliho rovnice id.tekutiny

Důsledky: $$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} - \vec{\nabla}\varphi$$

Stacionární prodění: $\left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{x_i} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} - \vec{\nabla}\varphi}$

(proudnice a rychlost v daném místě v prostoru se s časem nemění, avšak částice se pohybují, mohou měnit svou rychlost, stac. proudění může být vířivé)

Bernoulliho rce (pro ideální kapalinu):

a) Pro stacionární proudění a ρ = konst.

Eulerovu rci vynásobíme skalárně $\boldsymbol{v}/v \Rightarrow$ $\underline{\vec{v}\vec{\nabla}\left(v^2/2 + p/\rho + \varphi\right) = 0}$, integrací podél proudnice $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varphi + p = konst}$$

(platí na proudnici, na každé proudnici může být *konst* jiná)

b) Nevířivé proudění $\Omega = 0 \;\Rightarrow$ Bernoulliho rce výše platí v celém objemu kapaliny

c) Stlačitelná tekutina (plyn): $$\boxed{\frac{1}{2}v^2 + \varphi + \int \frac{dp}{\rho} = konst}$$

(část práce se spotřebuje na stlačení plynu)

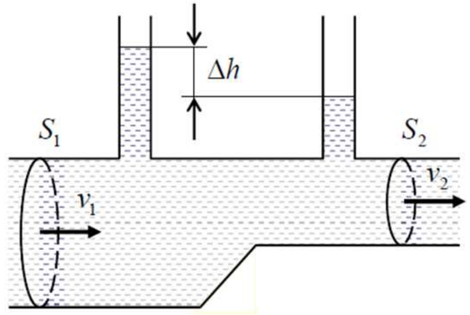
Pozn. $\rho v^2/2$ … hustota K.E.(tj. K.E. jednotk.objemu) ≡ hydrodynamický tlak
$\rho\varphi$ … hustota potenciální energie (např. pro homog.gravit.pole $\varphi = gh$)
p … tlak ≡ hustota tlakové energie

$\Big\}\ \sum = konst$ (Z.Z.E.)

Pohybová rovnice id.tekutiny

Důsledky Bernoulliho rce:

Proudění vodorovnou trubicí (Venturiho trubice):



$$\underbrace{S_1 v_1 = S_2 v_2 \qquad \frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2}$$

$$S_2 < S_1 \quad \Rightarrow \quad v_2 > v_1 \quad \Rightarrow \quad p_2 < p_1$$

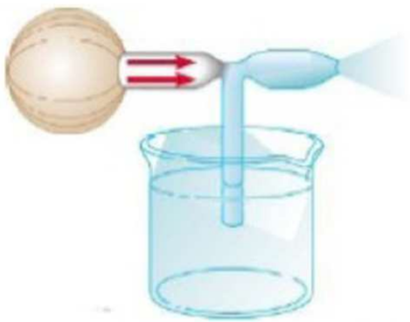
$$p_2 - p_1 = \rho v_2^2/2 - \rho v_1^2/2$$

… zúžená část – vyšší rychlost, nižší tlak (**hydrodynamické paradoxon**)

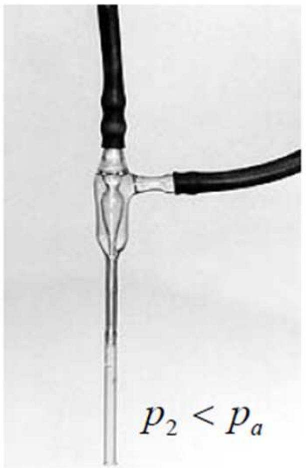
… úbytek tlaku = přírůstku K.E. tekutiny

Ot.: jaká síla urychlí kap. v užší části trubice? (viz Z.Z.E.)

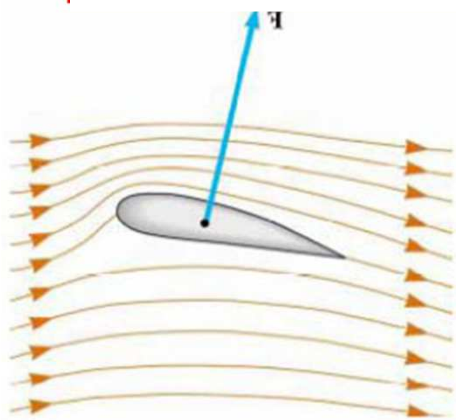
rozprašovač

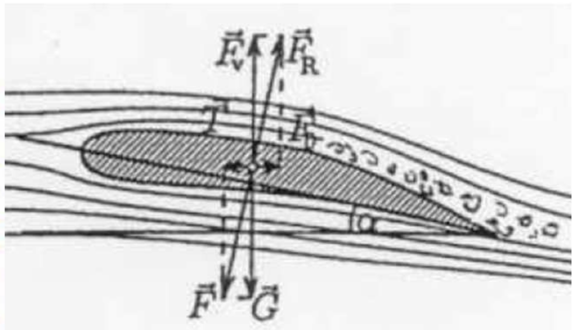


vodní vývěva



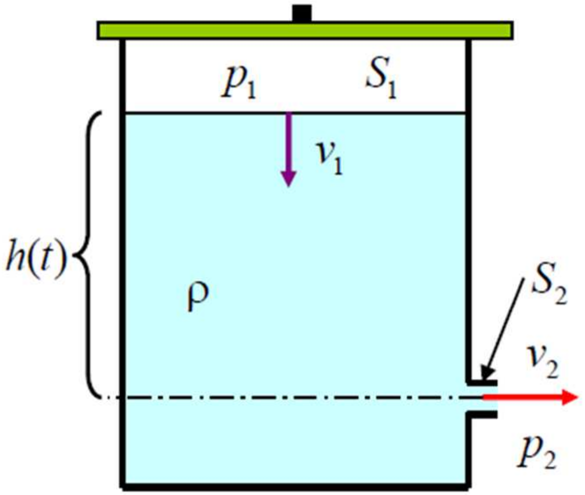
Obtékání křídla





Pohybová rovnice id.tekutiny

Příklad: (výtok kapaliny z nádoby malým otvorem)



Bernoulliho rovnice

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

rovnice kontinuity

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\rho g h + (p_1 - p_2)}{\rho\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)}}$$

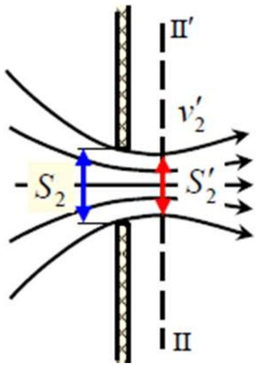
$$p_1 = p_2 \quad S_2 << S_1 \Rightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{2gh}}$$

Torriceliho vzorec

výtok

$$Q = \mu S_2 v_2$$

Výtokový součinitel μ<1

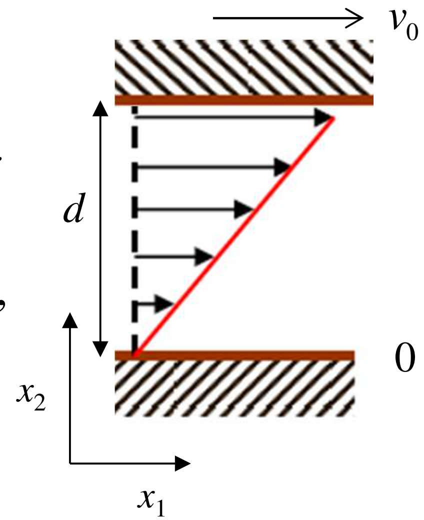


$$\mathrm{d}V = -S_1 \mathrm{d}h = \mu S_2 \sqrt{2gh}\, \mathrm{d}t$$

doba výtoku

$$t = \frac{-S_1}{\mu S_2 \sqrt{2g}} \int_h^0 \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = \frac{2S_1\sqrt{h}}{\mu S_2 \sqrt{2g}}$$

Viskózní tekutiny



<u>Viskózní tekutiny</u> – existuje **vnitřní tření** za pohybu

<u>Model</u>:

- mezi jednotlivými vrstvami tekutiny existují při laminárním proudění **smyková napětí** (brzdí pohyb tek., nevrcí částice do rovn.poloh)
- mezní vrstva tekutiny přiléhající ke stěnám je nepohyblivá vůči stěně, (přilne dokonale k povrchu)
- existuje **gradient rychlosti v kolmém směru** x_2: $\dfrac{dv_1}{dx_2} \neq 0$
- experiment: $F \sim v_0 S/d$ zobecnění:

$$\boxed{\sigma = \eta \frac{dv_1}{dx_2}}$$

$\rightarrow$ **Newtonův viskózní zákon**, pozn.: $\sigma \equiv \sigma_{21}$
(splněna pro většinu tekutin – **Newtonovské tekutiny**, koloidy, emulze… nenewtonovské tekutiny)

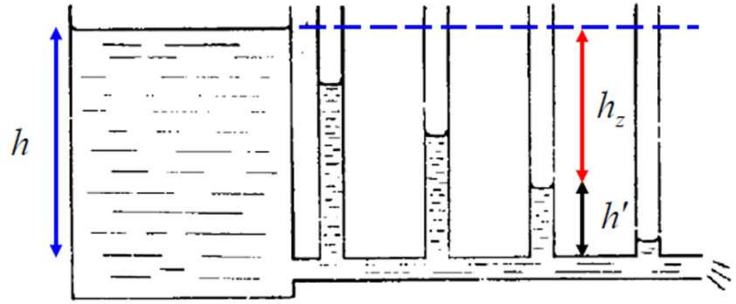
η … dynamická viskozita, $\eta = \eta(T,p) \sim \exp(A/T)$

$\upsilon = \eta/\rho$ … kinematická viskozita

$\Rightarrow$ $\sigma_{ij} \neq -\delta_{ij} p$ … **při proudění viskózní tekutiny není tlak p kolmý k lib. plošce**

$\Rightarrow$ vnitřní tření způsobuje ztrátu mechanické tlakové energie:

$$\Delta W/V = \rho g\,(h - h')$$



Viskózní tekutiny

(Navier-Stokesova rce nebude vyžadována u zkoušky)

Zobecnění pro proudění viskózních tekutin: $\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + \sigma'_{ij}$ ← napětí vyvolané prouděním

Pozn. $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_I + 2\mu e_{ij}$ ← σ'_{ij} a naradíme deformaci rychlostí deformace a modul pružnosti ve smyku μ dynamickou viskozitou

$$\sigma'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 2\eta D_{ij}$$

rychlost změny smykové deformace (pro proudění nestlačitelné kapaliny, div $\boldsymbol{v} = 0$)

$-p \to -p + 2\eta D_{ij} \longrightarrow$ Zobecnění Eulerových rovnic pro viskózní tekutiny:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla} \varphi + \frac{2\eta}{\rho} \Delta \vec{v}}$$

Navier-Stokesova rce (pro nestlačitelné reálné kapaliny)

\+ rce kontinuity $\partial \rho / \partial t + \vec{\nabla} \rho \vec{v} = 0$ … úplný systém rovnic

Pozn. Pro stlačitelnou tekutinu - plyn, vzduch, kde $\rho = \rho(p)$, existuje další člen v napětích:

$$\sigma'_{ij} = \eta_1 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \eta_2 \delta_{ij} \vec{\nabla} \vec{v}$$

η_1, η_2 - koeficienty první a druhé viskozity

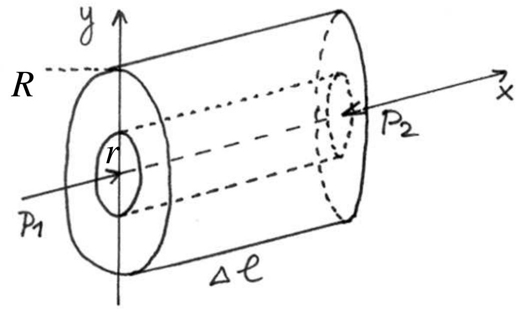
Nelinearita Eulerových a Navier Stokesových rovnic
Fluktuace – efekt motýlích křídel (závislost vývoje systému na počátečních podmínkách, jejichž malé změny mohou mít za následek velké variace v delším průběhu) … → **chaos**

Viskózní tekutiny – Poiseuillův vztah

<u>Př.(důležitý !)</u>: průtok viskózní tekutiny trubicí (laminární proudění)

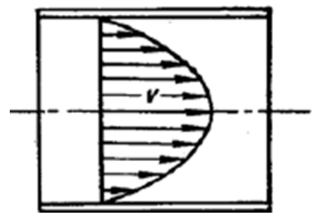
Tlaková síla na válec o poloměru *r*: $F_p = \pi r^2 \left(p_2 - p_1 \right)$

Síla vnitřního tření: $F_t = \sigma S = -2\pi r \cdot \eta \dfrac{dv}{dr} \cdot \Delta l$



$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dr} = -\frac{r\left(p_2 - p_1\right)}{2\Delta l \eta} \longrightarrow \quad v\left(r\right) = \frac{\Delta p}{4\eta \Delta l}\left(R^2 - r^2\right)$$

parabolické rozdělení rychlostí



Objem kapaliny za jedn.času - **Poiseuillův vzorec**:

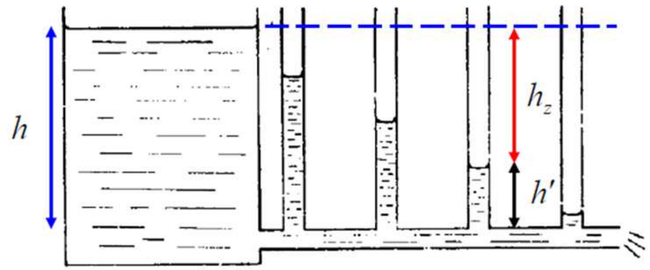
$$Q = \int_S v dS = \int_0^R v 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l}$$

tj. $Q \sim R^4, l^{-1}, \Delta p$

ztráta tlaku v trubici: $\Delta p \sim l, R^{-4}$

Pozn. střední rychlost proudění (technický parametr):

$$\overline{v} = Q / \pi R^2 = \Delta p R^2 / 8 \Delta l \eta$$



Viskózní tekutiny

Př. Turbína, vrtule …

$\rho v^2 / 2$ K.E. 1tk. objemu tekutiny

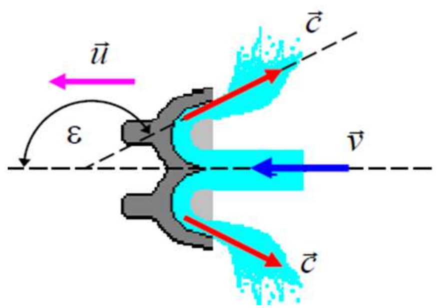
$$P = \frac{1}{2}\rho v^2 \frac{V}{t} = \frac{1}{2}\rho v^2 S v \qquad \text{výkon}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{P}{S} = \frac{1}{2}\rho v^3 \cdot k_B} \qquad \text{výkon na 1tk. plochu trubice}$$

vzduch ρ = 1,3 kg/m^3, v = 10m/s, P/S=0,65 kW/m^2,
teoretická účinnost k_B = 0.65 (v praxi ~0.2),
koeficient využití: 0.1 -0.2 (Čechy)

vodní turbína účinnost > 90%

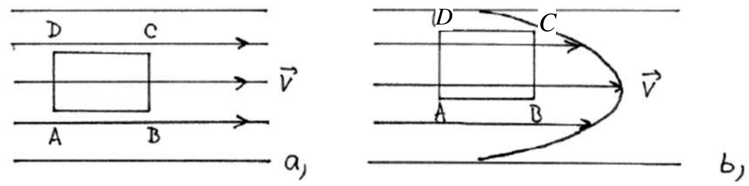
$$F = Q_m \cdot u(v-u)(1-\cos\varepsilon)$$



$$v = 2u$$

Viskózní tekutiny

Vírové proudění viskózní tekutiny



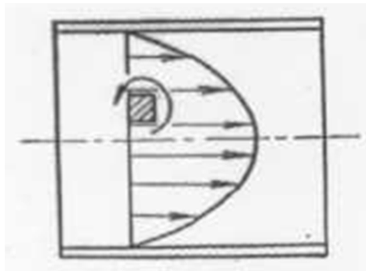
Cirkulace vektoru (Kvasnica-Mat.ap.fyz.):

$$\oint_{ABCD} \vec{v}\,d\vec{r} = 0 \quad \text{ideální tekutina}$$

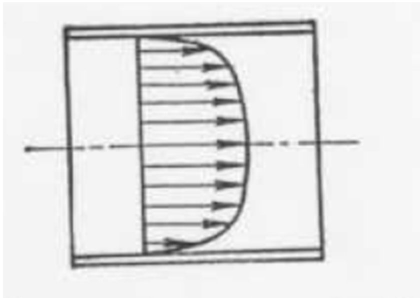
$$\neq 0 \quad \text{tj. rot } \boldsymbol{v} \neq 0 \;\ldots\; \text{viskózní tekutina}$$

Stokesova věta: $\displaystyle\oint_{l} \vec{v}\,d\vec{r} = \iint_{S(l)} \vec{\nabla}\times\vec{v}\,d\vec{S}$

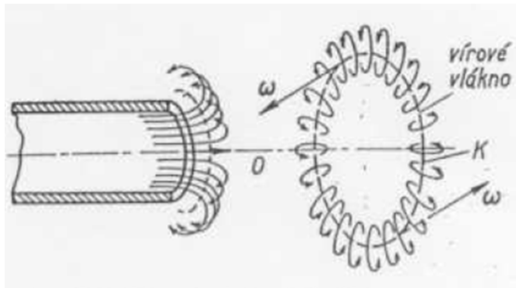
$\Rightarrow$ v reálné tekutině vznikají víry vždy, nad mezní rychlostí $\rightarrow$ turbulentní proudění
vírová vlákna ve tvaru soustředných kružnic
(pohybují se jako samostatné těleso)



- Laminární proudění
- Přechodové
- Turbulentní



Obr. (2.8) 29. Rychlostní profil při turbulentním proudění



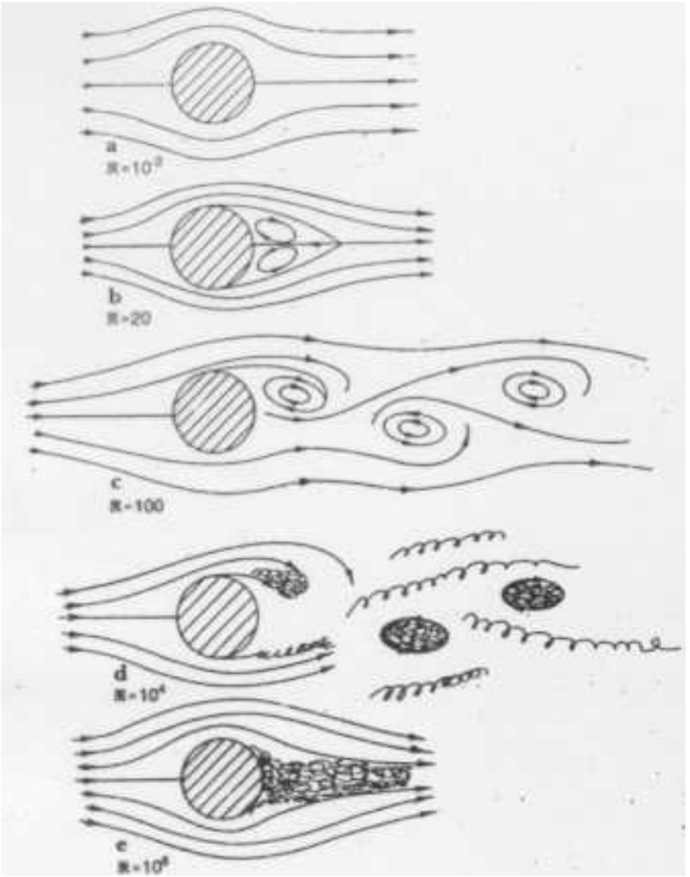
Obr. (2.8) 28. Tvoření vírových vláken

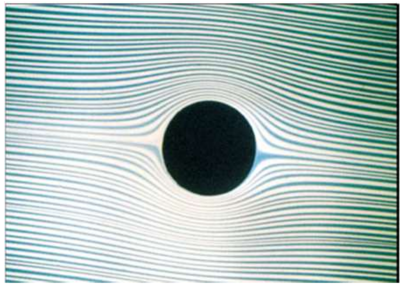
Reynoldsovo číslo: $R_e = \dfrac{R\bar{v}}{\upsilon}$

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial t} + \vec{\nabla}'\times(\vec{\Omega}'\times\vec{v}) = \overbrace{\frac{\eta}{\rho\bar{v}R}}^{1/R_e}\Delta\Omega'$$

Viskózní tekutiny

Turbulentní proudění kolem válce



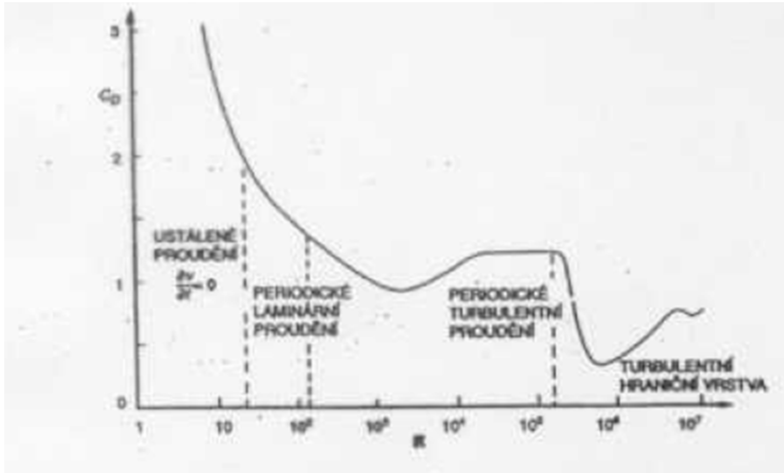


Stokesův vzorec $F = 6\pi\eta R v$

(nízké rychlosti a laminární proudění, např.kulička padající v kapalině)

Newtonův vzorec $F = \frac{1}{2} c_D \rho S v^2$

(vyšší rychlosti, např. při pohybu automobilu, letadla, lodě..)



Součinitel odporu C_D kruhového válce jako funkce Reynoldsova čísla.